КВАНТ

НОЯБРЬ ДЕКАБРЬ 2001 № 6

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Ápðî Êâàíòóì

Международная благотворительная организация Институт «Открытое общество. Фонд содействия» и Московский комитет образования выписывают для школ Москвы тысячу экземпляров журнала «Квант».

Частный предприниматель Русинович В.В. выписывает пятьдесят экземпляров журнала «Квант» для школ Сахалина.

Три теоремы о выпуклых многогранниках

Н.ДОЛБИЛИН

Теорема Коши

Огюстена Луи Коши (1789–1857) «по его блестящим достижениям во всех областях математики можно поставить почти рядом с Гауссом». Эта оценка, данная французскому математику немецким математиком Феликсом Клейном, очень весома, особенно если учесть, что взаимоотношения между французскими и немецкими математиками развивались в атмосфере острой конкуренции и признание заслуг соперников никогда не отличалось щедростью. Гигантское научное наследие Коши занимает 25 внушительных томов и включает около 800 работ. Работы, принесшие Коши славу великого математика, относятся в основном к математическому анализу, алгебре, математической физике, механике. Его исследования по геометрии могли бы остаться незамеченными, если бы не работа «О многоугольниках и многогранниках», опубликованная в «Журнале Политехнической школы» в 1813 году. В этой работе недавний выпускник знаменитой Политехнической школы доказал замечательную теорему о выпуклых многогранниках.

Аккуратное определение многогранника дано в первой части статьи. Здесь мы вспомним, что два многогранника *равны*, или *конгруэнтны*, если их можно совместить движением, а также, что многогранник называется *выпуклым*, если плоскость, проходящая через любую его грань, оставляет все остальные грани многогранника по одну сторону.

Теорема Коши о единственности выпуклого многогранника с данными гранями. *Два выпуклых многогранника с попарно равными гранями, составленными в одном и том же порядке, равны.*

Рассмотрим три многогранника (рис.1). Все они состоят из попарно равных граней. Но если первые два многогранника составлены из попарно равных граней, примыкающих друг к другу в одном и том же порядке,

а) *б)* *в)*

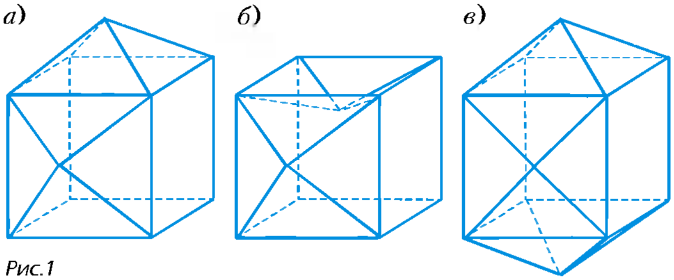


Рис.1

Иллюстрация В.Хлебниковой

Продолжение. Начало см. в «Кванте» №5

то третий многогранник составлен из тех же граней, но примыкающих друг к другу иначе.

То, что одинаково составленные многогранники не равны друг другу, нас не должно смущать: ведь один из многогранников (1,*б*) невыпуклый, а, как доказал Коши, в классе выпуклых многогранников подобная ситуация невозможна.

Теорема Коши, в частности, объясняет, почему модель выпуклого многогранника, склеенная из картона, не деформируется, или, как еще говорят, неизгибаема. Многогранник, который может непрерывно деформироваться так, что его грани остаются плоскими и равными самим себе и меняются лишь его двугранные углы, называется *изгибаемым*. Если же такой непрерывной деформации не существует, то многогранник *неизгибаем*.

Допустим, что выпуклый многогранник M изгибаем. Тогда существует другой, не равный ему многогранник M', двугранные углы которого мало отличаются от соответственных углов в многограннике M. Если отличие углов достаточно маленькое, то многогранник M' также выпуклый. А так как соответственные грани этих многогранников равны, то, по теореме Коши, и сами многогранники конгруэнтны. Мы пришли к противоречию с предположением о том, что многогранник M изгибаем.

Для доказательства этой теоремы Коши предложил новый метод, который, по словам А.Д.Александрова, «представляет собой одно из прекраснейших рассуждений, какие только знает геометрия».

Идея доказательства теоремы Коши

Доказательство теоремы Коши о единственности выпуклого многогранника основано на двух леммах. Одна из них весьма неожиданная. Рассмотрим выпуклый многогранник. Отметим некоторые его ребра знаком «+» или «−», а остальные ребра оставим «нейтральными». Выберем какую-нибудь вершину v и, начиная с любого подходящего к ней ребра, последовательно обойдем все ребра, сходящиеся в v, и вернемся к исходному ребру. Если в процессе обхода после очередного ребра с одним знаком следует ребро с противоположным, то мы говорим, что происходит *перемена знака*. Нейтральные ребра, которые могут находиться между отмеченными ребрами, при этом не учитываются. Обозначим через $N(v)$ общее число перемен знака при обходе вершины v. Например, для вершины v, изображенной на рисунке 2,*а*, число пере-

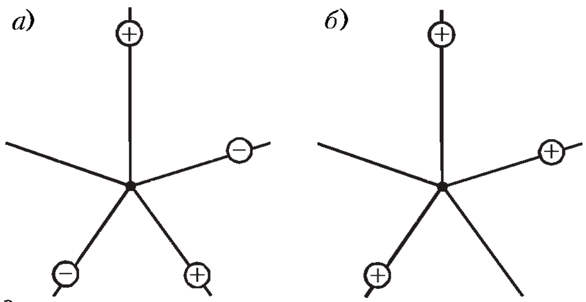


Рис.2

мен знака равно четырем, а на рисунке 2,*б* – нулю. Очевидно, что число перемен знака должно быть четным. В частности, оно равно нулю, если к вершине не подходит ни одного ребра со знаком или наряду с нейтральными подходят лишь ребра одного знака.

Лемма 1 (О.Коши). *Пусть на замкнутом выпуклом многограннике некоторые ребра отмечены знаком «+» или «–». Выделим все те вершины многогранника, к которым подходит хотя бы одно отмеченное ребро. Тогда среди выделенных вершин всегда найдется такая вершина, при обходе вокруг которой встретится менее четырех перемен знака.*

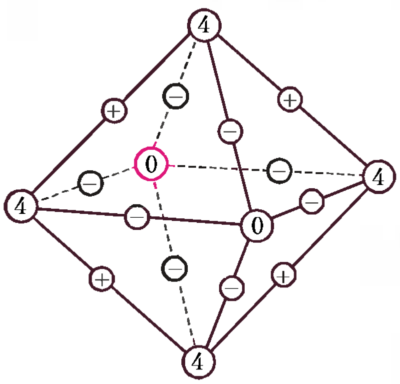


Рис.3

Например, в приведенной на рисунке 3 расстановке знаков на ребрах октаэдра четыре вершины имеют 4 перемены знака и две вершины не имеют ни одной перемены знака.

Во второй лемме речь идет о выпуклых многоугольниках на плоскости или на сфере. Скажем несколько слов о том, что такое сферический многоугольник. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – совокупность точек на сфере. Замкнутая ломаная, состоящая из n дуг больших окружностей $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$, образует *сферический многоугольник*. Дуги являются сторонами многоугольника, а *углом* сферического многоугольника является угол между касательными, проведенными к смежным сторонам в их общей вершине. Сферический многоугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой большой окружности, содержащей его сторону. Если мы возьмем выпуклый многогранный угол с вершиной в центре сферы, то он вырезает на этой сфере выпуклый сферический многоугольник. Сторонами этого многоугольника являются дуги, по которым грани многогранного угла пересекаются со сферой.

Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$ – выпуклые n-угольники, причем $A_1A_2 = B_1B_2, \ldots, A_{n-1}A_n = B_{n-1}B_n$. Припишем каждой вершине A_i первого многоугольника знак «+» или «–» в зависимости от того, больше или меньше угол A_i угла B_i. Если $\angle A_i = \angle B_i$, то вершина A_i остается нейтральной.

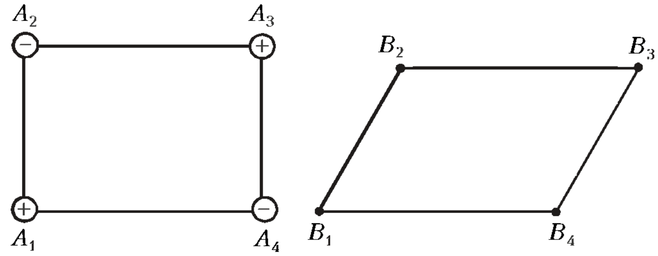


Рис.4

Возьмем, например, прямоугольник и параллелограмм с соответственно равными сторонами (рис.4). Подсчитаем число перемен знака при обходе всех вершин. Оно равно четырем.

Лемма 2 (О.Коши). *Пусть у двух выпуклых n-угольников на плоскости (или на сфере) соответственные стороны попарно равны, а среди соответственных углов имеются попарно неравные. Отметим знаком «+» (или «–») вершины тех углов одного многоугольника, которые строго больше (или меньше) соответствующих углов другого. Тогда при обходе вершин первого многоугольника число перемен знака не меньше четырех.*

Заметим, что если из двух многоугольников с соответственно равными сторонами хотя бы один невыпуклый, то лемма неверна.

Из леммы 2 вытекает важное для доказательства теоремы Коши

Следствие. *Пусть два выпуклых многогранных угла с одинаковым числом граней имеют соответственно равные плоские углы. Припишем каждому ребру одного из многогранных углов знак «+» (или «–») в зависимости от того, больше (или меньше) двугранный угол при нем соответствующего двугранного угла другого многогранного угла. Тогда число перемен знака при обходе ребер этого многогранного угла не меньше четырех.*

Действительно, опишем из вершин многогранных углов как из центров сферы одного и того же радиуса. Грани выпуклых многогранных углов вырезают на сферах выпуклые многоугольники. Так как соответственные плоские углы многогранных углов равны, равны также и соответственные стороны сферических многоугольников. Углы многоугольников равны двугранным углам многогранных углов. Поэтому знаки на ребрах первого многогранного угла совпадают со знаками в вершинах первого многоугольника. Отсюда, по лемме 2, вытекает следствие.

Из леммы 1 и леммы 2 (точнее, из следствия) легко получить доказательство теоремы Коши. Предположим, что многогранники M и M', хотя и составлены из попарно равных граней, взятых в одинаковом порядке, тем не менее не конгруэнтны друг другу. Это возможно, лишь когда при некоторых соответственных ребрах этих многогранников имеются *неравные* двугранные углы. Расставим на ребрах многогранника M знаки «+» или «–» в зависимости от того, больше или меньше двугранный угол при данном ребре двугранного угла при соответствующем ребре другого многогранника.

При этом соответственные ребра, двугранные углы при которых равны, не получают никакого знака (остаются нейтральными).

Выберем любую вершину v многогранника M, к которой подходит хотя бы одно ребро со знаком. Рассмотрим многогранный угол многогранника M с вершиной v. По следствию из леммы 2, число перемен знака при обходе v не меньше четырех. С другой стороны, по лемме 1, среди таких вершин должна быть хотя бы одна, при обходе вокруг которой число перемен знака не больше двух. Полученное противоречие доказывает теорему Коши.

Отметим, что теорема Коши позволяет ослабить определение правильных многогранников. Напомним, что *правильным* многогранником называется выпуклый многогранник, у которого все грани суть равные правильные многоугольники и двугранные углы попарно равны.

Упражнение 1. Докажите, что выпуклый многогранник, все грани которого равные правильные многоугольники, является правильным многогранником тогда и только тогда, когда в каждой вершине сходится одинаковое число граней. (*Указание.* Очевидно, что у правильного многогранника во всех вершинах сходится одинаковое число граней. Для доказательства в обратную сторону нужно воспользоваться сначала теоремой Эйлера, а затем теоремой Коши.)

Гипотеза Эйлера и изгибаемые многогранники

Вопрос – однозначно ли задается форма многогранной поверхности своими гранями или она может меняться за счет изменения двугранных углов, давно интересовал математиков. В 1776 году великий Эйлер высказал гипотезу: «Замкнутая пространственная фигура не допускает изменений, пока не рвется». Под «замкнутой пространственной фигурой» понималось то, что сейчас принято называть замкнутой поверхностью. Тем самым предположение Эйлера относилось не только к многогранным поверхностям. Теорема Коши подтвердила гипотезу Эйлера в случае выпуклых многогранников. На протяжении двух веков геометры верили, что не только выпуклый, но и невыпуклый многогранник тоже неизгибаем. Хотя первые сомнения зародились в конце XIX века после того, как в 1897 году французский математик Брикар нашел первые контрпримеры к гипотезе Эйлера. Правда, эти изгибаемые многогранники, так называемые октаэдры Брикара, – не совсем обычные многогранники: они самопересекаются.

Идея Брикара очень остроумна. Возьмем в пространстве четырехугольник $ABCD$ с попарно равными противоположными сторонами: $AB = CD$, $BC = AD$. Если $ABCD$ лежит в плоскости, то это – знакомый нам параллелограмм. Пусть $ABCD$ – пространственный четырехугольник, т.е. вершины A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Его диагонали AC и BD лежат на скрещивающихся прямых. Проведем через середины O_1 и O_2 диагоналей прямую l (рис.5). Так как в четырехугольнике $ABCD$ противоположные стороны равны, то прямая l, как нетрудно показать, перпендикулярна обеим диагоналям.

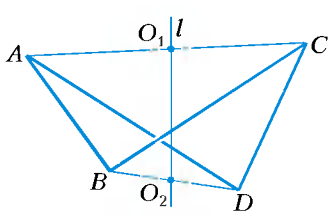


Рис.5

Упражнение 2. Докажите, что прямая, проходящая через середины диагоналей пространственного четырехугольника с попарно равными противоположными сторонами, перпендикулярна обеим диагоналям.

В силу этой перпендикулярности при повороте вокруг прямой l на 180° вершины A и C, а также B и D меняются местами и, следовательно, четырехугольник $ABCD$ переходит в себя. Заметим, что в предельном случае, когда многоугольник становится плоским параллелограммом, точки O_1 и O_2 сливаются в одну точку, а прямая l переходит в прямую, проходящую через точку пересечения диагоналей параллелограмма перпендикулярно его плоскости.

Возьмем вне прямой l какую-нибудь точку S и построим четыре треугольника SAB, SBC, SCD и SDA (рис.6,*а*). Эти треугольники (точнее, их плоскости) образуют четырехгранный угол. Из школьного курса геометрии известно, что плоские углы трехгранного угла задают его двугранные углы, а следовательно, и весь трехгранный угол однозначно. Однако если число граней у многогранного угла больше трех, то такой однозначности нет. Очевидно, что четырехгранный угол $SABCD$ при фиксированных плоских углах допускает непрерывную деформацию (изгибание). При таком изгибании четырехугольник $ABCD$ деформируется в четырехугольник с соответственно такими же сторонами и соответствующей осью симметрии.

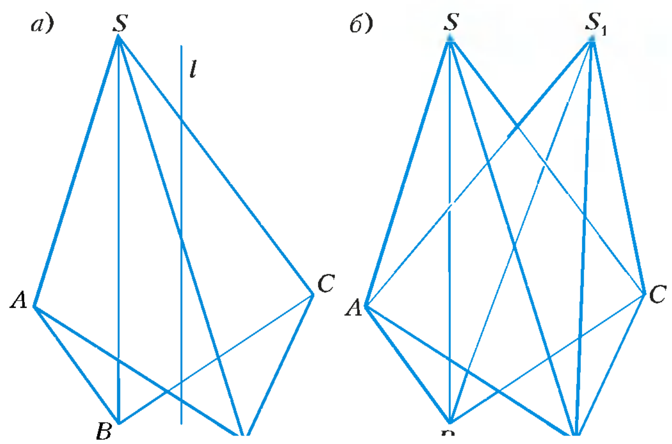


Рис.6

При повороте вокруг оси l на 180° четырехгранный угол $SABCD$ переходит в конгруэнтный угол S_1CDAB (рис.6,*б*). Совокупность 8 треугольников удовлетворяет всем трем условиям в определении многогранника. Правда, некоторые грани этого многогранника пересекают друг друга. Этот самопересекающийся многогранник и есть *октаэдр Брикара*.

Почему октаэдр Брикара изгибаем? Половинка октаэдра, очевидно, изгибается. Вторая половинка получается из первой поворотом вокруг оси l, и, следовательно, ее деформация в точности повторяет деформацию

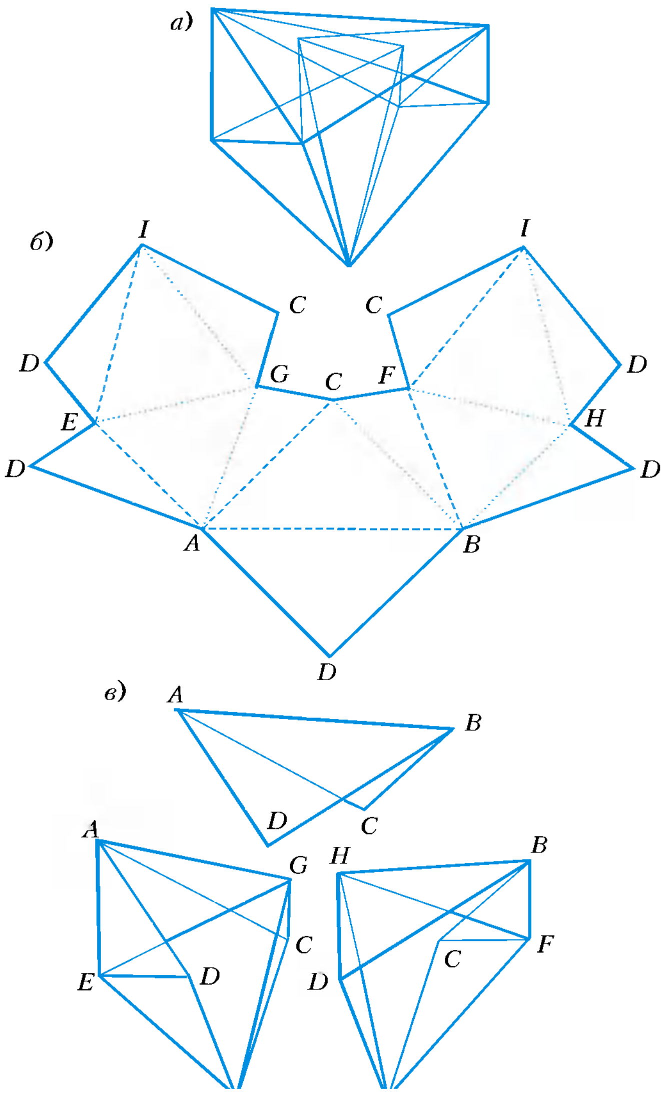


Рис.7

первой половинки. Значит, и весь октаэдр Брикара изгибаем.[1]

В 1970-е годы выяснилось, что Эйлер в своем предположении был «почти» прав... и не прав. Почти прав потому, что, как было установлено в 1975 году, «почти все» (т.е. в некотором смысле подавляющее большинство) многогранники неизгибаемы. Однако «почти все» – это еще не все многогранники. Два года спустя, в 1977 году, американский геометр Р.Коннэлли построил первые примеры изгибаемых самонепересекающихся многогранников и тем самым опроверг гипотезу Эйлера. Коннэлли назвал такие многогранники *флексорами*[2]. Затем были построены другие представители изгибаемого меньшинства. На рисунке 7,*а* изображен флексор с 9 вершинами, построенный в 1979 году геометром К.Штеффеном. Возможно, что 9 – это наименьшее число вершин, которое может быть у флексоров. Развертка флексора Штеффена показана на рисунке 7,*б*. Разный вид пунктирных линий на развертке означает, что грани перегибаются вдоль этих линий в противоположные стороны. На рисунке 7,*в* показана схема сборки многогранника Штеффена.

[1] *Так как октаэдр Брикара самопересекается, то склеить его из бумаги невозможно. Однако легко сконструировать его реберную модель из тонких пластиковых трубочек для питья, нанизав их соответствующим образом на нитки.*

[2] *От английского слова flex – изгибать.*

Гипотеза кузнечных мехов и теорема Сабитова

Не исключено, что открытие изгибаемых многогранников кому-то покажется не очень удивительным, особенно если он вспомнит о мехах музыкальных инструментов, например баяна. Но это – неверная ассоциация. Мехи баяна «работают» из-за некоторой эластичности и сминаемости материала, из которого они изготовлены. Если бы мехи баяна были собраны из твердых пластин, соединенных между собой петлями, то сыграть на таком инструменте не удалось бы. Такие мехи, как нетрудно понять, нельзя было бы ни сжать, ни растянуть (рис.8).

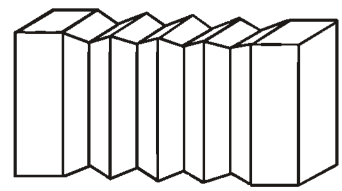


Рис.8

Впрочем, было замечено, что все флексоры, которые удалось открыть, тоже непригодны для мехов, но совершенно по другой причине. Несмотря на то что при изгибании флексор меняет свою форму, для всех построенных флексоров было замечено, что заключенный в многограннике объем при изгибании остается постоянным, т.е. изгибаемый многогранник «не дышит». Возникла *гипотеза кузнечных мехов* о том, что это всегда так – для всякого флексора его объем не изменяется при изгибании.

Содержательная проблема хороша тем, что попытки решить ее приводят к появлению новых методов и теорем, которые иногда более интересны, чем породившая их проблема. Так произошло и в этом случае, когда раздумья над гипотезой о кузнечных мехах привели российского математика Иджада Хаковича Сабитова в 1996 году к открытию неожиданной теоремы. Чтобы лучше понять ее смысл, вспомним формулу Герона. Она выражает площадь треугольника *лишь* через его стороны:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\text{где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Для многоугольников с бо́льшим числом сторон формулы, выражающей площадь лишь через стороны, нет, поскольку стороны сами по себе, если не заданы углы, не определяют ни форму, ни площадь многоугольника. Например, площадь ромба со стороной a может быть любой между 0 и a^2.

Для многогранников картина принципиально иная. Предположим сначала, что все грани многогранника – треугольники. В этом случае длины его ребер однозначно определяют форму треугольных граней. Поэтому, если многогранник выпуклый, то, по теореме Коши, длины ребер однозначно определяют форму многогранника, а следовательно, и его объем. Сама же зависимость величины объема от длин ребер была неизвестна. Факт существования изгибаемых многогранников указывает на то, что длины ребер форму многогранника, вообще говоря, не задают.

Теорема Сабитова устанавливает связь между длинами ребер многогранника (с треугольными гранями) и его объемом. Пусть дан многогранник, тогда можно построить специальный многочлен

$$F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ которого выражаются при помощи четырех арифметических действий через длины ребер $l_1, \ldots, l_p$ многогранника. Заметим, что то, как коэффициенты многочлена выражаются через длины ребер, зависит собственно не от длин ребер и величин углов многогранника, а от его комбинаторного типа, т.е. от того, сколько ребер у граней, сколько граней у многогранника, как грани сходятся в вершинах и т.п. Подставляя теперь в коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ вместо $l_1, \ldots, l_p$ численные значения длин ребер данного многогранника, получим многочлен $F(x)$ с конкретными числовыми коэффициентами. Теорема Сабитова утверждает, что *объем данного многогранника есть один из корней этого многочлена.*

То, что все грани треугольники, особого значения не имеет, так как любую нетреугольную грань можно разбить при помощи диагоналей на треугольники. Введенные диагонали считаются хотя и искусственными, но ребрами нового многогранника, у которого все грани суть треугольники. Рассмотрим, например, два многогранника на рисунках 1,*а* и 1,*б*. Они устроены из попарно равных граней, взятых в одном и том же порядке. После разбиения каждой четырехугольной грани диагональю, по теореме Сабитова, для них обоих существует одинаковый многочлен, один из корней которого равен объему одного из многогранников, а некоторый другой корень – объему другого.

Теперь можно объяснить, почему в силу этой теоремы гипотеза о кузнечных мехах имеет положительный ответ: флексоры при изгибании сохраняют объем. Итак, мы рассматриваем многогранник только с треугольными гранями. Далее, при изгибании тип флексора не меняется, грани сохраняются, а длины ребер остаются постоянными. Поэтому существует многочлен F с заданными коэффициентами такой, что объем флексора есть один из корней этого многочлена. Если бы объем флексора при изгибании менялся, то это должно было бы происходить непрерывно. А так как объем является корнем многочлена F, то это должен быть один и тот же корень. Таким образом, объем многогранника должен оставаться неизменным.

Обобщение теоремы Коши

Часто под разверткой многогранника подразумевают совокупность многоугольников, которые склеиваются между собой по целым сторонам, образуя многогранник. Каждый многоугольник при этом превращается в грань многогранника, а сторона многоугольника – в ребро.

Например, совокупность из 6 квадратов, у которых склеиваемые стороны и вершины отмечены одинаковыми буквами (рис.9,*б*), образуют такую особую развертку куба (рис.9,*а*). Каждый ее многоугольник – это грань многогранника. А каждая сторона многоугольника (вместе с еще одной стороной другого многоугольника) – это ребро многогранника. Вершины развертки, помеченные одной буквой, склеиваются в одну вершину многогранника.

Другая, хорошо известная развертка куба (рис.9,*в*) – крестообразная; она состоит из одного лишь многоугольника с 14 вершинами и таким же количеством сторон. Помеченные одинаковыми буквами вершины и стороны склеиваются между собой. На этой развертке куба его грани уже не представлены в виде отдельных многоугольников. Не представлены на этой развертке также и некоторые будущие ребра куба.

Познакомимся еще с одной разверткой того же куба. Для этого, напротив, вместо того чтобы склеивать квадратные грани между собой, разрежем каждую из них на четыре треугольника. Получим новую развертку куба, состоящую из 24 треугольников (рис.9,*г*). Каждый треугольник – это лишь часть грани куба. В этой развертке мы сталкиваемся с новым для нас обстоятельством: *не все* стороны развертки являются ребрами многогранника, *не все* вершины развертки являются вершинами многогранника, *каждый* треугольник развертки является лишь частью грани склеиваемого из нее куба.

Эти 24 треугольника можно склеить другим образом (опять-таки вдоль отождествляемых сторон) в один многоугольник (рис.9,*д*). В этой развертке, состоящей из единственного многоугольника, *ни одна* из сторон не является ребром куба, который получается из этой развертки.

Теперь дадим определение развертки.

Пусть имеется, вообще говоря, несколько многоугольников, у которых каждая сторона отождествлена с одной и только одной стороной того же или другого многоугольника этой совокупности. Это отождествление (или склеивание) сторон должно удовлетворять еще двум условиям:

1) отождествляемые стороны имеют одинаковую длину;

2) от каждого многоугольника к любому другому можно перейти, проходя по многоугольникам, имеющим отождествленные стороны.

Совокупность многоугольников, удовлетворяющая условиям 1) и 2), называется *разверткой*.

Как мы уже видели, многоугольники развертки, их стороны и вершины не обязаны быть гранями, ребрами и вершинами многогранников, которые из них получаются.

А.Д.Александров доказал, что *два выпуклых многогранника с одинаковой разверткой конгруэнтны.* Эта теорема сильнее теоремы Коши. Действительно, если

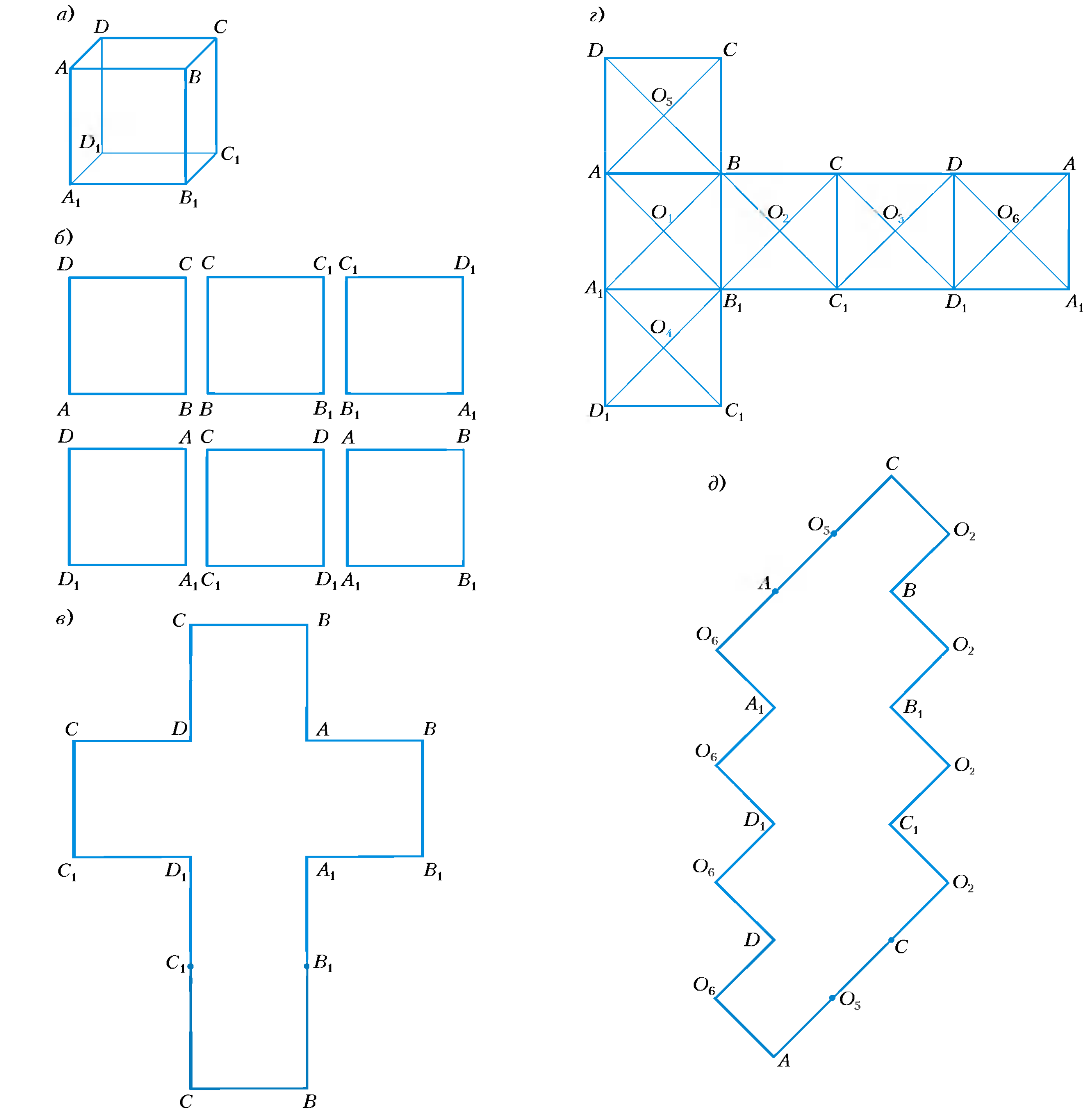


Рис. 9

нам даны все грани многогранника, а также правило их склеивания по сторонам, то, конечно, развертка задана. Более того, по такой специального вида развертке, в силу теоремы Коши, многогранник восстанавливается однозначно. В то же время по развертке, которая присутствует в теореме Александрова, ничего нельзя сказать о гранях и ребрах будущего многогранника, и тем не менее многогранник из нее получается однозначно.

Более того, из развертки многогранника нельзя получить вообще никакой другой выпуклой поверхности, не только многогранной, но и криволинейной. Это усиление теоремы Коши–Александрова было получено в 1941 году учеником Александрова С.П.Оловянишниковым[3].

[3] *Сергей Оловянишников — победитель первой в СССР математической олимпиады (1934 г.). Из-за купеческого происхождения в 1930-е годы долго не мог поступить в университет. В 1941 году закончил Ленинградский университет и поступил в аспирантуру к А. Д. Александрову, тут же ушел на фронт, осенью 1941 года был ранен. В госпитале написал работу об усилении теоремы Коши–Александрова. Вернувшись на фронт, С.П.Оловянишников погиб в декабре 1941 года на "невском пятачке" – известном кровопролитными боями плацдарме.*

ных, поверхностей, то этот вопрос долгое время оставался нерешенным. Пусть произвольная замкнутая выпуклая поверхность выполнена из тонкого, гибкого, но нерастяжимого материала. Можно ли, сохраняя выпуклость, получить из нее поверхность другой геометрической формы? Если исходная поверхность выпуклый многогранник, то нельзя – по теореме Оловянишникова о единственности.

Окончательное обобщение теоремы Коши на случай произвольных поверхностей было получено в 1949 году представителем школы Александрова, академиком А.В.Погореловым. Он доказал, что любая замкнутая выпуклая поверхность неизгибаема при условии ее выпуклости. Теорема Погорелова о единственности, как и теорема Александрова о необходимых и достаточных условиях развертки выпуклого многогранника, принадлежит к числу выдающихся достижений в области геометрии.

Теорема Александрова о развертке

Итак, мы подошли к теореме Александрова о развертках выпуклых многогранников. Нам понадобится *эйлерова характеристика развертки*, которая определяется аналогично эйлеровой характеристике многогранника:

$$\chi = B - P + \Gamma,$$

где Γ – число многоугольников, входящих в развертку, P – число сторон многоугольников, при этом отождествляемые стороны считаются за одну, B – число вершин, при этом отождествляемые вершины считаются за одну.

В случае специальной развертки, когда каждый многоугольник развертки – это грань многогранника, ребро развертки – это ребро многогранника, а вершина развертки – вершина многогранника, очевидно, что эйлерова характеристика развертки равна эйлеровой характеристике многогранника.

Но нетрудно показать, что эйлерова характеристика сохраняется при перекраивании данной развертки в изометричную, так что эйлерова характеристика любой развертки многогранника равна характеристике многогранника. Поэтому *у развертки выпуклого многогранника эйлерова характеристика равна 2*.

Подсчитаем эйлерову характеристику для нескольких разверток куба. Для крестообразной развертки (см. рис.9,*в*) имеем $B = 8$, $P = 7$, $\Gamma = 1$ и, соответственно, $\chi = 2$. Для развертки, изображенной на рисунке 9,*д*, имеем $B = 11$, $P = 10$, $\Gamma = 1$, откуда опять $\chi = 2$.

Далее, если вершине развертки соответствует настоящая вершина многогранника, то сумма подходящих углов строго меньше 2π. Если же вершине развертки соответствует какая-нибудь точка внутри грани или ребра, то сумма подходящих к вершине углов равна 2π. Поэтому в развертке выпуклого многогранника сумма углов, подходящих к каждой ее вершине, *не превышает* 2π.

Итак, у всякой развертки выпуклого многогранника эйлерова характеристика равна двум, а сумма углов, подходящих к каждой вершине, не превосходит 2π. Удивительно то, что эти условия являются не только необходимыми, но и достаточными.

Теорема о развертке (А.Д.Александров). *Из всякой развертки, удовлетворяющей условиям:*

(1) ее эйлерова характеристика равна 2;

(2) сумма углов, подходящих к любой вершине развертки, не превосходит 2π,

можно склеить выпуклый многогранник.

Отметим, что среди этих многогранников могут встретиться и многогранники, которые вырождаются в плоский многоугольник. Возьмем развертку, состоящую из двух равных выпуклых многоугольников, у которых соответственные стороны и вершины попарно отождествлены (рис.10). Эйлерова характеристика такой развертки $B - P + \Gamma = n - n + 2 = 2$, где n – число сторон у склеиваемых многоугольников. Эта развертка удовлетворяет и условию (2). По теореме Александрова, из нее можно склеить многогранник. Это – вырожденный многогранник, или иначе «двойной многоугольник». Его можно представить как контурный многоугольник, обклеенный с обеих сторон плоскими многоугольниками.

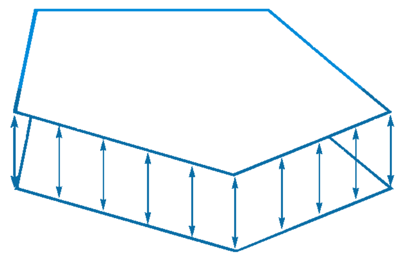


Рис.10

В отличие от теоремы Коши теорема Александрова не является интуитивно очевидной. Рассмотрим два примера.

«Тетраэдрический» пакет. В недавнем прошлом молоко разливалось в пакеты, которые имели форму не кирпича, как сейчас, а правильного тетраэдра. Хотя упаковывать в тару эти тетраэдры неудобно, зато изготавливать их легко. Сначала прямоугольная лента склеивается в цилиндр, горизонтальные края которого затем заклеиваются в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (рис.11). Развертка такого тетраэдра – это прямоугольник, стороны которого разбиваются на мень-

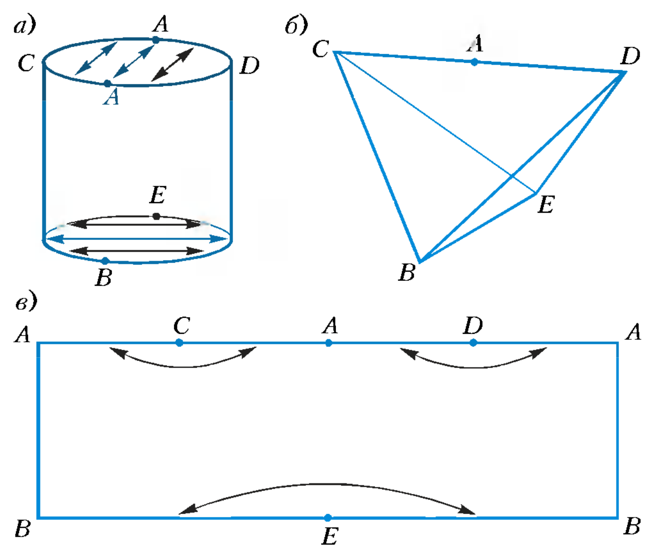


Рис.11

плоскостях (рис.11). Развертка такого тетраэдра – это прямоугольник, стороны которого разбиваются на меньшие отрезки-ребра развертки и попарно отождествляются. Данная развертка удовлетворяет обоим условиям теоремы Александрова. Это можно даже не проверять, так как мы имеем дело с разверткой выпуклого многогранника.

Упражнение 3. При каком соотношении сторон в прямоугольнике из развертки, указанной на рисунке 11, получается правильный тетраэдр?

Теперь предположим, что автомат, изготавливающий

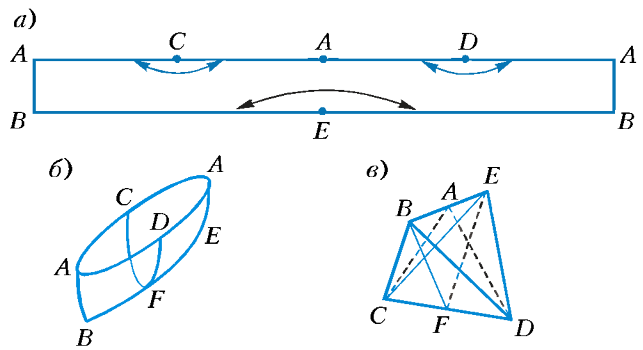


Рис.12

пакеты, «зачастил». Конкретнее, предположим теперь, что прямоугольник развертки очень «низкий», а правила склеивания остаются теми же (рис.12,*а*). Эта развертка, так же как и «высокий» прямоугольник, удовлетворяет условиям (1) и (2). По теореме Александрова, из развертки можно склеить выпуклый многогранник. С другой стороны, если нижний край цилиндра уже склеен, то для склеивания в перпендикулярном направлении не хватает высоты (рис.12,*б*). Кажется почти очевидным, что эта развертка является контрпримером к теореме Александрова. Тем не менее, и из этой развертки тоже можно склеить тетраэдр (рис.12,*в*).

Еще один контрпример. Возьмем правильный треугольник, поделим его стороны пополам и отождествим одну половинку каждой стороны с другой ее половинкой (рис.13,*а*). Из такой развертки склеивается правильный тетраэдр (рис.13,*б*).

Разрежем треугольник по прямой *AD* на два треугольника, которые склеим по общей стороне в новую развертку *ACABAD* (рис.13,*в*). И опять возникает сомнение в том, можно ли склеить из нее многогранник. Развертка на рисунке 13,*в* удовлетворяет условиям теоремы Александрова. Поэтому из нее можно склеить выпуклый многогранник. Более того, эта развертка изометрична развертке 13,*а*, и, по теореме Коши–Александрова, этот многогранник будет тем же самым правильным тетраэдром. На рисунке 13,*г* представлена еще одна развертка, изометричная предыдущим. Возможность склеить из этой «тупоугольнотреугольной» развертки тетраэдр кажется еще более сомнительной.

Тем не менее, по теореме Александрова это можно сделать. У рассматриваемой развертки имеется ровно четыре вершины (точки, в которых сумма подходящих

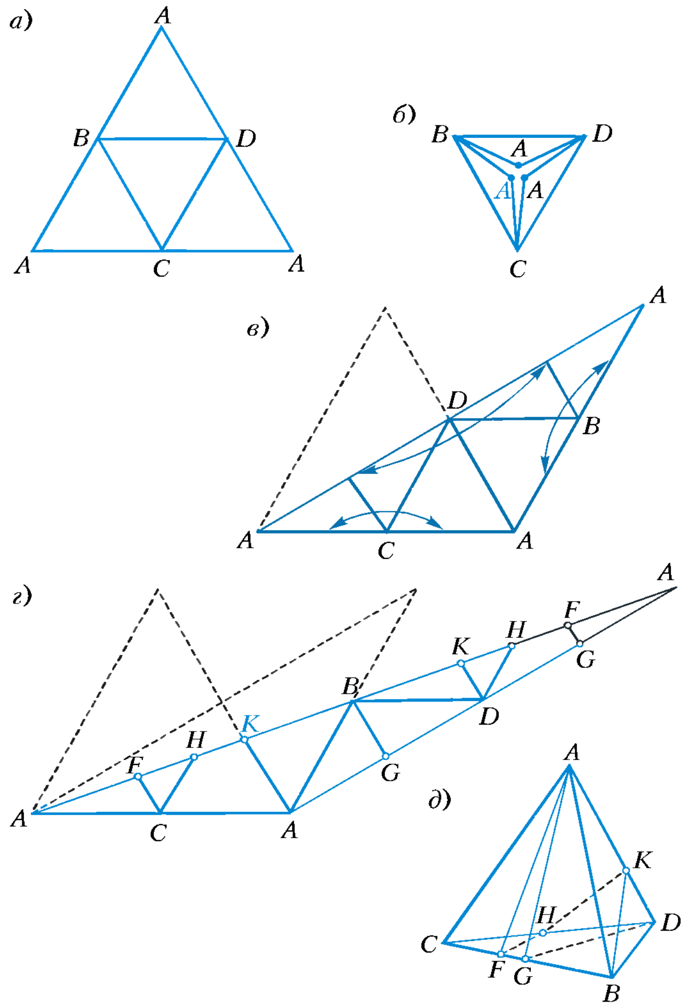


Рис.13

углов строго меньше 2π). Значит, многогранник – это тетраэдр, который может, вообще говоря, вырождаться в четырехугольник. Чтобы получить на развертке ребра будущего тетраэдра, нужно вершины попарно соединить кратчайшими линиями. Это будут ребра тетраэдра. Когда развертка «хорошая» (см. рис.13,*а*), кратчайшие состоят из целых отрезков и хорошо угадывается будущий многогранник. Но, вообще говоря, кратчайшая на развертке состоит из нескольких отрезков (см. рис.13,*б–г*) и из-за этого трудно определить, как устроены грани тетраэдра.

Задача определения многогранника по развертке, если она имеет более четырех настоящих вершин (в которых сумма подходящих углов меньше 2π), является очень трудной. По теореме Александрова о развертке мы знаем, что выпуклый многогранник существует. По теореме Коши–Александрова о единственности мы знаем, что он единственный. Возникает вопрос: каков он? Легко определить на развертке вершины многогранника. Каждому ребру на многограннике соответствует кратчайшая, соединяющая какие-то вершины. Но не все кратчайшие, соединяющие вершины, являются ребрами. Определить на развертке, какие из кратчайших являются ребрами, и, следовательно, определить все грани многогранника, – очень трудная, пока нерешенная задача.

Наглядный способ регистрации заряженных частиц

О.ЕГОРОВ

Физике известны четыре фундаментальных типа взаимодействия: гравитационное, электромагнитное, сильное и слабое. Два первых простираются на большие расстояния и поэтому были изучены раньше других. Чтобы исследовать сильные и слабые взаимодействия микрочастиц, многие из которых являются элементарными, нужны реакторы, ускорители и весьма изощренные методы наблюдения.

Значительная часть явлений физики микромира может быть объяснена с помощью фотографий, сделанных в пузырьковых камерах. О них и пойдет речь в статье.

Как устроена пузырьковая камера

Пузырьковая камера была изобретена американским физиком Д.Глейзером в начале 50-х годов XX века (в 1960 году за это открытие ему была присуж-

Иллюстрация П.Чернуского

дена Нобелевская премия). В пузырьковой камере частица движется в перегретой жидкости, т.е. в жидкости, нагретой выше точки кипения. Это состояние неустойчиво, и через некоторое время жидкость начинает кипеть. Если через камеру пролетает быстрая заряженная частица, то вскипание происходит около сгустков ионов, и вдоль следа частицы образуется цепочка пузырьков. (Нечто похожее можно наблюдать, бросив в стакан с пивом мельчайшую крупинку поваренной соли: падая, она оставляет след из пузырьков газа.)

Пузырьковые камеры обычно используются для регистрации актов взаимодействия частиц высоких энергий с ядрами жидкости или актов распада частиц. В первом случае рабочая жидкость исполняет роль мишени и регистрирующей среды. Диапазон возможных рабочих жидкостей пузырьковой камеры очень велик: от жидкого водорода до жидкого ксенона. Таким образом, камеры позволяют изучать взаимодействие микрочастиц как с самым легким ядром, т.е. протоном, так и со сложной ядерной системой, состоящей, например, из 54 протонов и 77 нейтронов (ядро ксенона).

Пузырьковую камеру удалось прекрасно приспособить к работе с пульсирующими ускорителями: цикл ее работы достаточно короток, а искажения следов, вызванные турбулентными движениями жидкости, невелики. Обычно камера работает в сильном магнитном поле, что позволяет измерить импульсы заряженных частиц и произвести весьма точный кинематический анализ исследуемого события.

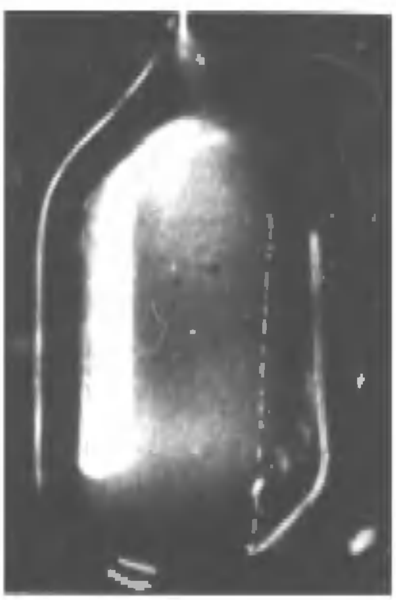


Рис. 1. Первая пузырьковая камера Д.Глейзера. Ее объем всего лишь 2,5 см^3. Сосуд из толстого стекла наполнен эфиром, который находится под давлением и не кипит. Если давление снять, эфир окажется в перегретом состоянии и может оставаться в нем довольно долго. Прошедшая через камеру космическая частица вызывает образование пузырьков по своему следу, после чего начина-

Первые пузырьковые камеры имели объем всего лишь несколько кубических сантиметров. На рисунке 1 показан след заряженной космической частицы, полученный в такой камере, наполненной жидким эфиром при температуре 140 °С.

Многие лаборатории внесли свой вклад в технику пузырьковых камер. Так, уже к середине 60-х годов на ускорителях работали камеры метровых размеров. Упомянем, например, о французской камере «Мирабель», работавшей на ускорителе Института физики высоких энергий в Протвино (объем 12 м^3),

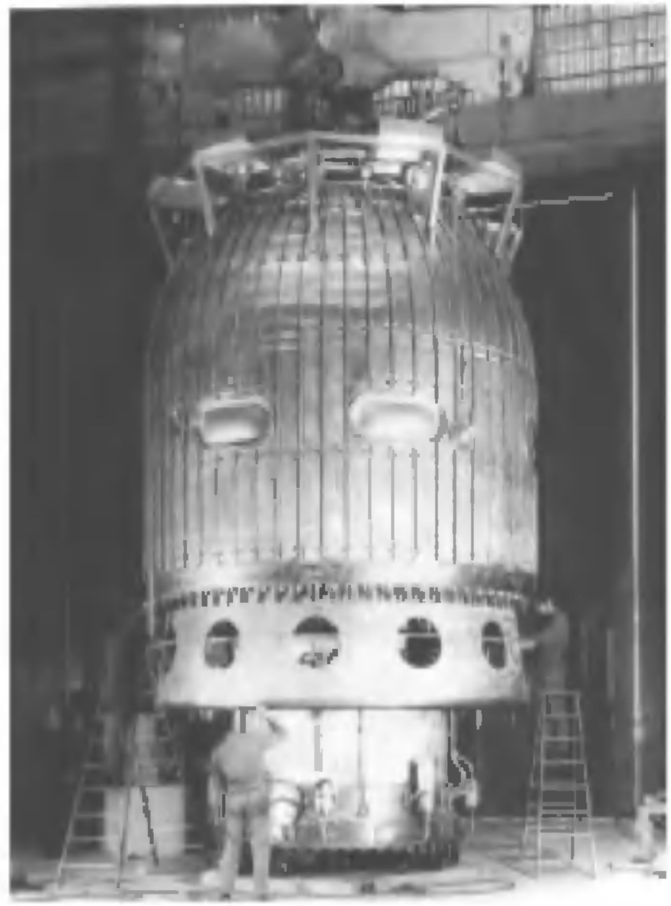


Рис.2. Монтаж Большой Европейской Пузырьковой камеры (BEBC) в ЦЕРНе.

о камере BEBC (Big European Bubble Chamber – Большая Европейская Пузырьковая Камера) в Европейском центре ядерных исследований (ЦЕРН) близ Женевы (объем 35 м^3) и о камере ускорителя Фермиевской лаборатории в Чикаго (объем 33 м^3).

На больших ускорителях достаточно иметь одну-две большие камеры. Их производительность – миллионы снимков в год. Снабдив снимками лаборатории, имеющие измерительную аппаратуру и единую программу обработки, можно объединить усилия многих научных коллективов в поисках редких событий. Современные исследования в области физики высоких энергий, выполненные этим методом, часто заканчиваются публикациями, у которых многие десятки авторов, иногда работающих на различных континентах.

На рисунке 2 показан общий вид камеры BEBC в момент монтажа. Камера представляет собой цилиндр высотой 2 м и диаметром 3,7 м, увенчанный купольным сводом, на котором смонтированы четыре фотокамеры для стереоскопического фотографирования и перископическая система визуального наблюдения. В нижней части расположена расширительная система, предназначенная для периодического, синхронизованного с импульсами ускорителя, сбрасывания давления. Камера наполнена жидким водородом и помещена в вакуумный резервуар, играющий роль теплоизолирующего сосуда Дюара (большой термос). Пучок частиц проходит по диаметру камеры, примерно на половине ее высоты. Камеру окружают катушки сверхпроводящих соленоидов. Соленоиды расположены в своей вакуумной камере, наполненной жидким гелием. Все устройство окружено большим магнитным экраном, уменьшающим рассеяние магнитного поля. Вместе со всеми криогенными устройствами и сверхпроводящим магнитом, работающим при температуре жидкого гелия, такая камера представляет собой уникальное сооружение. Для его создания потребовались усилия ученых многих стран.

Снимки событий в пузырьковых камерах

Посмотрите на рисунок 3, где представлен типичный снимок в пузырьковой камере. Мы видим следы пучка частиц, пронизывающего камеру. Это отрицательно заряженные пи-мезоны с энергией около 1 ГэВ. Следы представляют собой дуги большого радиуса: камера находится в магнитном поле. Рассмотрев следы внимательнее, замечаем, что они образованы отдельными каплями, а в четырех-пяти точках от основного следа отходят спиральные траектории. Это – следы электронов, происхождение которых мы скоро объясним.

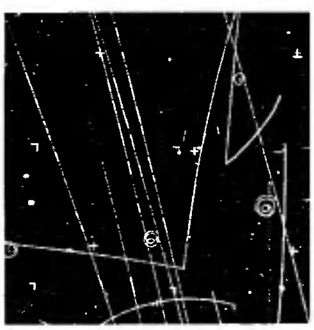
Перейдем к основному событию, делающему этот снимок замечательным. Оно представляет собой так называемое парное рождение двух нейтральных странных частиц (термин «странность» появился как раз из-за обнаружения таких необычных частиц). Один из пи-мезонных следов внезапно исчезает, а далее по пучку замечаем две двухлучевые вилки, вершины которых обращены к концу следа. Мы можем предположить, что при исчезновении пи-мезона возникли две нейтральные частицы, распад которых и наблюдается в виде вилки. Действительно, следы частиц в вилке соответствуют зарядам противоположных знаков. Не приводя доказательств, укажем, что наблюдаемое явление можно описать такими реакциями:

$$\pi^- + p \to \Lambda^0 + K^0,$$

$$\Lambda^0 \to \pi^- + p,$$

$$K^0 \to \pi^+ + \pi^-.$$

Поясним, что они означают.



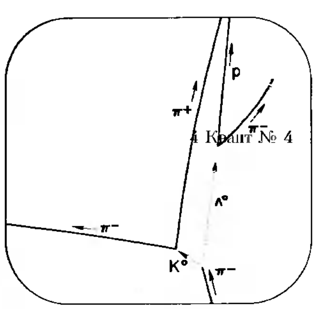


Рис.3. Фотография и интерпретация совместного рождения K-мезона и Λ-гиперона при столкновении отрицательного пи-мезона π^- с протоном p в камере Альвареца

Отрицательный пи-мезон (π^-) столкнулся с протоном (p) жидкого водорода, при этом образовались две нейтральные нестабильные частицы – Λ^0-гиперон и K^0-мезон. Эта реакция – типичный пример сильного взаимодействия. Оно происходит за время порядка 10^{-23} с. За такое время пи-мезон, двигаясь со скоростью света, «пронизывает» протон.

Нейтральные странные частицы Λ^0 и K^0 не оставляют следов в камере, и мы видим лишь результаты их распада: Λ^0-гиперон распадается на протон и π^--мезон, а K^0-мезон – на два пиона. По сравнению со временем взаимодействия пиона с протоном время жизни этих частиц крайне велико. Действительно, расстояние до распада от места рождения (на истинном снимке) близко к 10 см. Имея скорость, даже равную скорости света, они пролетят это расстояние за $3 \cdot 10^{-10}$ с. Снимок «рассказал» нам, что время жизни этих частиц примерно в 10^{13} раз больше времени их образования в пион-протонном взаимодействии. Очевидно, что распады странных частиц вызываются силами, которые намного порядков меньше сил, вызвавших их рождение.

Таким образом, мы приходим к представлению о сильных и слабых взаимодействиях. Первые ответственны за рождение новых частиц, вторые – за их распад.

Дальнейшая наша задача – выяснить, как выглядят в пузырьковой камере некоторые электромагнитные взаимодействия. Именно они создают ионы и электроны – зародыши капель, и они же отклоняют частицы в магнитном поле. Электромагнитные взаимодействия дают возможность отождествить частицу: определить ее заряд, массу, энергию и импульс.

Отклонение частицы магнитным полем и определение ее импульса

Следы частиц на наших снимках – либо дуги большого радиуса, если это тяжелые частицы, либо спирали в случае электронов и позитронов. Искривление траектории возникает под действием магнитного поля. На заряженную частицу в магнитном поле действует сила Лоренца, направленная перпендикулярно как скорости частицы $\vec{v}$, так и вектору индукции магнитного поля $\vec{B}$. Если частица влетает в магнитное поле перпендикулярно полю, то она движется по окружности, если же она влетает под углом – то по винтовой линии. На разноименно заряженные частицы, движущиеся в одном направлении, действуют противоположно направленные силы – именно поэтому следы электронов и позитронов расходятся в разные стороны.

Запишем второй закон Ньютона для частицы с зарядом Ze и массой m, движущуюся по окружности в магнитном поле с индукцией B. Причем сделаем это в такой форме, которая пригодна как для медленных, так и для быстрых частиц, в том числе и для ультрарелятивистских, скорость которых близка к скорости света:

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}.$$

Если частица движется по окружности радиусом R со скоростью v, то ее импульс $\vec{p}$, оставаясь постоянным по модулю, поворачивается с угловой скоростью $\omega = v/R$. При этом изменение импульса за время Δt равно $\Delta p = p\Delta\varphi = p\omega\Delta t$ (проверьте это самостоятельно). Тогда второй закон Ньютона принимает вид

$$p\omega = ZevB.$$

(Если частица движется медленно, то $p = mv$, и в левой части последнего равенства появляется произведение массы на центростремительное ускорение. Для релятивистских и ультрарелятивистских частиц это не так.) Подставляя сюда $v = \omega R$, получаем формулу, выражающую импульс частицы через радиус окружности:

$$p = ZeRB.$$

Специалисты, работающие на ускорителях, любят выражать не импульс, а произведение импульса на скорость света, т.е. величину pc, имеющую размерность энергии. Разделив на заряд электрона, мы выразим эту величину в электрон-вольтах. Кроме того, физики привыкли измерять магнитную индукцию не в теслах, а в гауссах (1 Гс = 10^{-4} Тл). Учтя все это, получим рабочую формулу, которая используется при обсчетах траекторий частиц:

$$pc = 300BR,$$

где R измеряется в сантиметрах.

Отметим, что величина pc удобна еще и тем, что через нее простым образом выражается энергия E частицы. В частности, для медленных частиц

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}pc\frac{pc}{mc^2},$$

где mc^2 – энергия покоя (в случае электрона она равна 0,51 МэВ). А для ультрарелятивистских частиц, энергия которых гораздо больше энергии покоя,

$$E \approx pc.$$

Число капель на следе – мера скорости частицы

Когда заряженная частица движется в пузырьковой камере, она растрачивает свою энергию на возбуждение атомов или молекул жидкости. Если переданная энергия достаточно велика, электрон может быть выбит из атома – произойдет образование иона и свободного электрона. Энергия, потерянная частицей на единице пути, т.е. величина $\Delta E/\Delta x$, зависит от скорости частицы: чем скорость меньше, тем больше времени частица взаимодействует с электроном. Величина $\Delta E/\Delta x$ оказывается обратно пропорциональной квадрату скорости частицы. В первом приближении можно считать, что

$$\frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{A}{\beta^2}, \qquad (*)$$

где $\beta = v/c$ – отношение скорости частицы к скорости света, A – некоторая постоянная, зависящая от свойств среды, в которой тормозится частица (дальше мы оценим эту величину для жидкого водорода). Таким образом, получается, что быстрая частица ($\beta \approx 1$) ионизирует слабее всего. Соответственно, тонкие следы в камере принадлежат быстрым (релятивистским) частицам, а жирные следы из слипшихся капель образованы медленными частицами. На рисунке 3 ясно видно, что частицы основного пучка, пронизывающие камеру снизу вверх, – быстрые частицы (для π-мезона с энергией 1 ГэВ, например, $\beta = 0{,}99$). Скорость же протона, возникшего при Λ^0-распаде, мала, и поэтому протон оставляет плотный след.

Итак, мы видим, что по следам в пузырьковой камере можно измерить импульс частицы и ее скорость. А зная скорость и импульс, можно определить массу частицы.

Образование δ-частиц

Мы обращали внимание (см. рис.3, например) на спиральные следы частиц. Их скорость велика (тонкие следы), но энергия мала. Это либо следы электронов и позитронов, возникающих при распаде мюонов, либо следы так называемых δ-электронов, выбиваемых при ионизации атома жидкости. Обычно пробег таких электронов мал и не превышает размера пузырьков. Однако иногда (как видно на снимках) выбитый электрон имеет энергию, достаточную для того, чтобы самому начать ионизировать. В этом случае мы видим спираль, ответвляющуюся от основного следа.

Оценим максимальную энергию, которую электрон может получить от столкновения с тяжелой частицей массой M, движущейся со скоростью v. Предположим, что до столкновения электрон покоился. Перейдем в систему отсчета, где частица M неподвижна. В этой системе электрон падает на частицу, имея скорость $-v$, и, если столкновение упругое, отражается от нее почти с такой же по величине скоростью. Теперь, после взаимодействия, нам остается перейти в первую, лабораторную систему отсчета. Скорость электрона в этой системе равна $2v$, а его кинетическая энергия –

$$E_k = \frac{m_e(2v)^2}{2} = 2m_ec^2\frac{v^2}{c^2} = 2m_ec^2\beta^2.$$

Величина m_ec^2 – это энергия покоя электрона, равная 0,51 МэВ.

Из формулы следует, что даже при очень больших скоростях первичной частицы (близких к скорости света) энергия электрона не может превзойти 1 МэВ. Однако внимательно рассмотрев траектории δ-частиц, мы обнаруживаем, что энергия δ-электронов часто значительно больше. Например, для траектории на рисунке 3 она составляет приблизительно 14 МэВ. Причина расхождения очевидна: мы не приняли во внимание теорию относительности. Ведь при увеличении скорости вместо галилеевского закона сложения скоростей: $v' = v + v = 2v$ действует эйнштейновский закон:

$$v' = \frac{v + v}{1 + v^2/c^2} = \frac{2v}{1 + \beta^2}.$$

Если учесть все это, мы получим следующую формулу для максимальной энергии δ-электрона:

$$E_k = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1-(v'/c)^2}} - m_e c^2 = 2m_e c^2 \frac{\beta^2}{1-\beta^2}.$$

Мы видим на этом примере, что поправки, связанные с теорией относительности, в корне меняют ситуацию: энергия δ-электронов в случае быстрых частиц может стать очень большой. Возможен даже такой редкий случай, когда при лобовом столкновении первичной частицы с электроном почти вся энергия частицы воспринимается электроном.

Почему следы электронов образуют спирали

Электроны, следы которых мы наблюдали в камере, имеют небольшую энергию, но большую скорость, близкую к скорости света. Так как их энергия мала, на каждом обороте в магнитном поле они теряют заметную часть своей энергии, и следующий оборот происходит при меньшем радиусе. Поэтому следы этих электронов – сворачивающиеся спирали.

Нетрудно оценить, какую энергию теряет быстрый (релятивистский) электрон на сантиметре пути в камере. Рассмотрим, например, след того же δ-электрона с энергией порядка 14 МэВ в жидком водороде. Он совершает около 3 оборотов спирали, так что весь его путь близок к 43 см. Таким образом, средняя потеря энергии на единицу пути равна

$$A = \frac{\Delta E}{\Delta x} \approx 0{,}3 \text{ МэВ/см}.$$

Заметим, что табличное значение этой величины равно 0,32 МэВ/см. Наши грубые оценки дали правильное значение потерь энергии быстрого электрона в жидком водороде, а заодно – и приблизительное значение постоянной A в формуле (*) для потерь энергии.

Теперь мы можем получить представление о том, сколько ионов создает быстрый электрон в жидком водороде. На создание пары ион – электрон тратится энергия порядка 20 эВ, поэтому число таких пар будет

$$N = \frac{0{,}3\cdot 10^6 \text{ эВ/см}}{20 \text{ эВ}} \approx 150000 \text{ 1/см}.$$

Возможно возникнет вопрос: если число ионов измеряется сотнями тысяч, то почему число видимых пузырьков так мало? Прежде всего, дело в механизме вскипания. Чтобы оно началось, необходим местный разогрев жидкости. Жидкость вскипает там, где случайно выделилось много тепла, т.е. образовалось большое число ионов. Таким образом, пузырьки образуются на больших скоплениях ионов, а большие скопления редки. Кроме того, далеко не все пузырьки оказываются видимыми (разрешаются) при фотографировании. В обычных камерах размер пузырьков близок к 0,3–0,5 мм и число их на 1 см пути быстрой частицы не превосходит десятка. В сверхчистых быстроциклирующих камерах при очень ярком освещении можно работать с пузырьками размером ~30 мкм.

Фотоны в камере создают вещество и антивещество

На рисунке 4 представлено событие возникновения в камере пары частиц разных знаков заряда – электрона и позитрона, т.е. частицы и античастицы, – из излучения. Условно его можно написать в виде реакции

$$\gamma \to e^- + e^+.$$

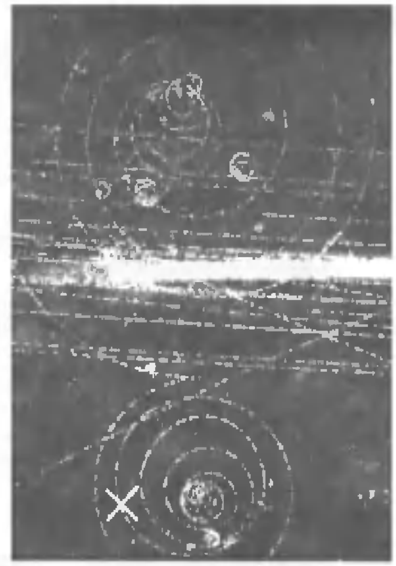


Рис.4. Рождение электрон-позитронной пары. На снимке виден пучок протонов, фотоны бали испущены в направлении этого пучка

Фотон не оставляет видимого следа в камере, и следы пары электрон – позитрон возникают как бы из ничего. Можно измерить радиусы этих следов и оценить энергию, уносимую обеими частицами. Для наших снимков энергия лежит в пределах 70–100 МэВ.

Заметим, что радиусы обеих окружностей различаются. Это означает, что энергия фотона не делится поровну между частицей (e^-) и античастицей (e^+), и наводит на мысль, что процесс распада фотона не может происходить без участия еще одного тела. Действительно, записанная реакция несовместима с законом сохранения импульса. Предположим, что энергия фотона настолько мала, что ее хватает только на создание покоящейся пары электрон – позитрон. Тогда импульс этой пары равен нулю, но импульс фотона, который имеет скорость света, никогда не может быть равен нулю. Возникает вопрос: куда же девается избыток импульса фотона?

Очевидно, что в реакции рождения пары должно участвовать третье тело, которое примет на себя избыток импульса. Таким телом является ядро атома, в электромагнитном поле которого и возникает пара. В жидководородной камере это протон, так что реакцию рождения пары можно написать в таком виде:

$$\gamma + \mathrm{p} \to e^- + e^+ + \mathrm{p}.$$

Хотя импульс, получаемый протоном, может быть велик, его кинетическая энергия, равная $p^2/(2m_\mathrm{p})$, мала, так как он имеет большую массу. Таким образом, электрон-позитронная пара уносит почти всю энергию фотона, но лишь часть его импульса.

Каскадный ливень

Мы наблюдали образование электрон-позитронных пар фотонами. Но каким образом в камере, стоящей в пучке протонов, появились фотоны? Излучать фотоны при торможении в поле ядра – свойство электронов большой энергии. На этом, например, основано действие рентгеновской трубки: электроны, тормо-

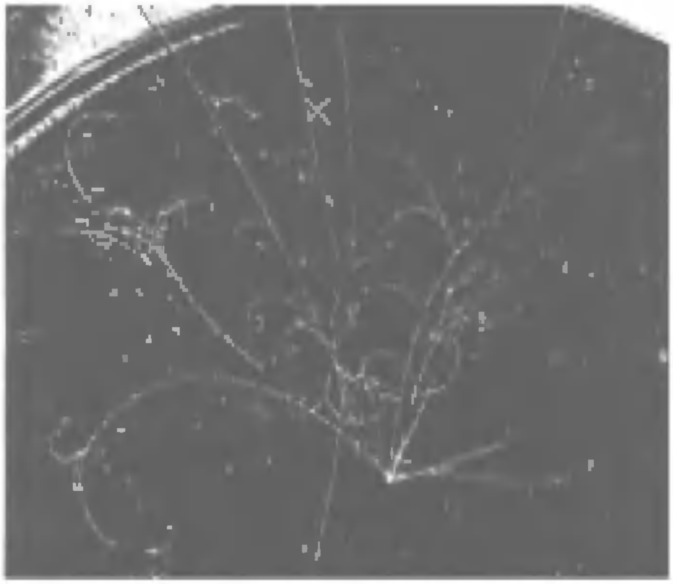


Рис.5. Развитие небольшого каскадного ливня в тяжележидкостной фреоновой камере

Рис.6. Фотография электромагнитного ливня в 180-литровой ксеноновой камере ИТЭФа

зясь в веществе антикатода трубки, излучают фотоны. В пучках тяжелых частиц, которые вводят в пузырьковую камеру, всегда в небольшом количестве присутствуют электроны и позитроны. Они возникают по многим причинам – от распадов тяжелых частиц, если они нестабильны, или при взаимодействиях пучка со стенками каналов, в которых он проходит. Вопрос о происхождении этих легких заряженных частиц нам сейчас не важен. Важно то, что электрон большой энергии, попадая в вещество, не только ионизует вещество, но и излучает фотоны. Причем, когда энергия электрона очень велика, излучение фотонов начинает преобладать над ионизацией. Фотоны большой энергии образуют электрон-позитронные пары, которые в свою очередь излучают фотоны, новые фотоны создают другие пары, и т.д. В результате в веществе возникает каскадный процесс, который сначала развивается, а потом затухает – по мере того как энергия электронов и фотонов уменьшается.

Для наблюдения таких ливней нужна камера с «тяжелой» жидкостью. Дело в том, что вероятность излучения фотона или образования пары пропорциональна квадрату заряда ядра, на котором эти процессы происходят. Поэтому каскадный ливень в жидком водороде разовьется на огромной длине – в несколько метров, тогда как в камере с тяжелой жидкостью для этого нужно всего лишь несколько сантиметров.

На рисунке 5 представлено развитие небольших электромагнитных ливней в пузырьковой камере, наполненной фреоном. Молекула фреона имеет формулу CF_3Br, и ядра, входящие в эту молекулу, имеют заряды 6, 9 и 35. Камера находилась в пучке нейтрино высокой энергии. На снимке мы видим чрезвычайно редкое явление – «звезду», возникшую при взаимодействии нейтрино с одним из ядер фреона. Заметим, что такое взаимодействие относится к числу слабых, чем и объясняется редкость снимка. Из «звезды» исходит несколько тяжелых медленных частиц – скорее всего это протоны (плотные, короткие и жирные следы), и большое количество мелких электромагнитных ливней. Их источником являются фотоны, возникшие при распаде образовавшихся в «звезде» нейтральных пионов на два фотона:

$$\begin{array}{c} \pi^0 \to \gamma + \gamma \\ \swarrow \qquad \searrow \\ e^- + e^+ \quad e^- + e^+ \end{array}$$

Энергия этих ливней не слишком велика (порядка сотен МэВ), и они быстро затухают, образовав около десятка электронов (следы которых видны) и фотонов (не оставляющих следов).

Космические фотоны (с энергией 10 – 100 ГэВ) могут образовывать более мощные электромагнитные ливни. На рисунке 6 представлен ливень, образованный космическим фотоном в ксеноновой пузырьковой камере Института теоретической и экспериментальной физики (Москва), работающей без магнитного поля. Вместо отдельных частиц мы видим сплошную область, заполненную следами электронов и ионов.

Франклин – изобретатель громоотвода

А.ВАСИЛЬЕВ

В ИЮНЕ 2001 ГОДА УЧАСТНИКИ ПРОХОДИВшей на теплоходе «Федор Шаляпин» Международной конференции по высокотемпературной сверхпроводимости высадились на остров Кижи и посетили знаменитый музей-заповедник деревянного зодчества. Его главное украшение – «Храм Преображения Господня» – принадлежит к высшим достижениям северной народной архитектуры и относится к типу «круглых» многоярусных церквей с двадцатью двумя главами. Их лемеховое покрытие составляет надежную защиту от атмосферных осадков. Но деревянные храмы всегда подстерегала и другая опасность – быть уничтоженными огнем при прямом попадании молнии во время грозы, и поэтому Преображенская церковь снабжена громоотводом. Это устройство, однако, не могло быть установлено на храме при его постройке в 1714 году, поскольку было изобретено Бенджамином Франклином (1706 –1790) лишь в середине XVIII века.

Причиной обращения Франклина к занятиям электричеством послужил случай. Будучи к 1743 году уже видным американским общественным деятелем, он посетил демонстрацию физических опытов в Бостоне. Эти опыты так заинтересовали Франклина, что он купил все использовавшееся при этом оборудование и сам занялся физическими исследованиями. Наилучшим образом представление об этих опытах и о «замечательной способности заостренных предметов извлекать и испускать электрический огонь» дают выдержки из писем Бенджамина Франклина члену Лондонского Королевского общества Питеру Коллинсону:

«Сэр,

...поместите чугунный шар диаметром три-четыре дюйма на горлышке чистой сухой стеклянной бутылки. Подвесьте на тонкой шелковой нити, прикрепленной к потолку, прямо над горлышком бутылки небольшой пробковый шарик, величиной с горошину; длина нитки должна быть такой, чтобы пробковый шарик соприкасался с чугунным шаром сбоку. Наэлектризуйте шар, и пробковая горошина отлетит приблизительно на четыре-пять дюймов, в зависимости от количества электричества... Если в этом положении приблизить к шару острие длинного тонкого кинжала на расстояние шести-восьми дюймов, то отталкивание мгновенно прекратится и пробковая горошина возвратится к шару. Чтобы добиться такого же действия при помощи тупого предмета, Вам придется подвести его к шару на расстояние до одного дюйма, пока не проскочит искра.

Если Вы станете подводить острие к шару в темноте, то увидите, иногда при расстоянии между ними в один фут или даже больше, как острие начинает светиться подобно светлячку. Чем менее заострен предмет, тем ближе потребуется подвести его, чтобы увидеть свет, и как только свечение становится заметным, Вы сможете извлечь электрический огонь и уничтожить отталкивание.

Чтобы убедиться в том, что острия способны не только извлекать, но и испускать электрический огонь, положите длинную острую иглу на шар, и тогда Вы не сумеете наэлектризовать его настолько, чтобы он оттолкнул пробковую горошину,... либо прикрепите иглу к концу подвешенного ружейного ствола с таким расчетом, чтобы она выдавалась вперед наподобие крохотного штыка. До тех пор, пока игла остается на своем месте, наэлектризовать ружейный ствол не удается, потому что электрический огонь будет непрерывно и тихо стекать с конца иглы. В темноте Вы сможете наблюдать картину наподобие уже упоминавшейся выше».

Хотя и до Франклина высказывалось мнение, что молния и разряд, получаемый в опытах по электричеству, есть по сути одно и то же явление, пусть и разных масштабов, опытных доказательств справедливости этой гипотезы не было. Как отмечалось П.Л.Капицей на торжественном заседании по случаю 250-летия со дня рождения Бенджамина Франклина, именно ясность и глубокое понимание изучавшихся им процессов электризации позволили американскому ученому предложить и провести опыт, который впервые наглядно показал электрическую природу грозовых разрядов.

Идея этого опыта заключалась в следующем. Предположим, что между грозовой тучей и землей находится изолированный от земли вертикальный металлический стержень. Если грозовая туча имеет электрический заряд, то заряд противоположного знака наведется в верхней части стержня. Если на этом верхнем конце сделать острие, то наведенный заряд стечет, и стержень зарядится электричеством того же знака, что и туча. Франклин считал, что присутствие этого заряда можно будет обнаружить по искре, которая возникнет, если прикоснуться к стержню свободным концом заземленной проволоки. Он подробно описал, как следует выполнять этот эксперимент, и предложил это сделать другим, а сам решил выполнить не менее элегантный аналогичный опыт.

Вместо металлического стержня Франклин использовал бечевку, поднимая ее вверх воздушным змеем. Поскольку во время грозы всегда бывает ветер, змей можно запустить, а так как еще и идет дождь, то мокрая бечевка станет проводящей и заменит металлический стержень. Чтобы бечевка легче заряжалась, была предусмотрена возможность стекания наведенного заряда, для чего по углам рамки змея Франклин поместил острия. Для того чтобы изолировать бечевку от земли, внизу к ней была привязана защищенная от дождя шелковая лента. К концу бечевки у земли был подвешен металлический ключ, из которого Франклин во время грозы и извлекал искру.

Таким способом 12 апреля 1753 года Франклин доказал электрическую природу грозового разряда.

Следует отметить, что несколько ранее, 10 мая 1752 года, точно по описанию Франклина французский ученый Далибар изготовил изолированный металлический стержень и от него получил во время грозы электрические искры.

Опираясь на полученные им и другими исследователями данные, Франклин предложил метод борьбы с разрушениями и пожарами, причиняемыми молнией. Когда молния ударяет в здание, корабль или любой другой возвышающийся объект, прохождение тока по плохо проводящей среде сопровождается большим выделением тепла. Если дать возможность электрическому току пройти по хорошо проводящей среде, например по металлу, разрушений и пожаров не будет.

В наши дни небольшой заземленный металлический стержень – громоотвод – венчает почти каждое сооружение и является стандартным элементом его конструкции.

Изучение атмосферного электричества со времен Франклина выделилось в самостоятельный раздел геофизики.

В зонах «хорошей» погоды у поверхности Земли существует стационарное электрическое поле напряженностью около 130 В/м. Земля при этом имеет отрицательный заряд порядка $3 \cdot 10^5$ Кл, а атмосфера в целом заряжена положительно. Наибольших значений напряженность электрического поля Земли достигает в средних широтах, а к полюсам и экватору убывает. Разность потенциалов между Землей и ионосферой достигает 250 кВ. Электрическое состояние атмосферы в значительной степени определяется ее электропроводностью, которая, в свою очередь, зависит от разнообразных факторов, управляющих количеством ионизованных ионов в воздухе. Среди этих факторов – космические лучи, пронизывающие всю толщу атмосферы, ультрафиолетовое и корпускулярное излучение Солнца, излучение радиоактивных веществ, находящихся в земле и воздухе, и т.п.

В зонах «плохой» погоды пылевые бури и извержения вулканов, метели и разбрызгивание воды прибоем и водопадами, пар и дым промышленных предприятий довольно активно стимулируют проявления атмосферного электричества. Однако главную роль играют облака и осадки. В слоистых и слоисто-кучевых облаках плотность объемных зарядов на порядок превышает их плотность в чистой атмосфере. В слоисто-дождевых облаках плотность электрического заряда выше еще в несколько раз. Линейные молнии, генерируемые облаками, являются разновидностью искрового разряда, возникающего в отсутствие электродов в массе заряженных и хорошо изолированных друг от друга частиц. При средней длине молниевых разрядов в несколько километров наблюдаются внутриоблачные молнии длиной до 100 км. Токи наземных молний при средних значениях пиковых величин порядка 20 кА иногда достигают 500 кА.

Когда у поверхности Земли под действием тех или иных факторов напряженность электрического поля оказывается равной 500–1000 В/м, вблизи острых предметов начинается электрический разряд, сопровождаемый характерным шумом. При дальнейшем усилении напряженности электрического поля разряд становится видимым, иногда приобретая коронную форму. Эти свечения – так называемые огни Святого Эльма – особенно сильны бывают в горах и на море, предоставляя широкое поле фантазиям бывалых путешественников.

Возвращаясь к основоположнику учения об атмосферном электричестве, отметим, что Бенджамин Франклин занимался и другими аспектами натуральной философии. Так, он создал карту течения Гольфстрима, изобрел музыкальный инструмент с трущимися стеклянными шарами, экономичную печку с подогревом воздуха на входе (до сих пор распространенную в Америке и во Франции), уличные фонари, двойные очки для старческой дальнозоркости и многое другое. Открытия Франклина в области атмосферного электричества произвели ошеломляющее впечатление на современников. Лондонское Королевское общество присудило ему в 1753 году свою высшую награду – медаль Копли, а три года спустя избрало его своим членом. К этому времени, однако, Бенджамин Франклин был уже настолько вовлечен в общественно-политическую жизнь страны, что научные изыскания ему пришлось оставить.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта 2002 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6 – 2001» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1796» или «Ф1803». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1796—М1800, Ф1803–Ф1807

М1796. Король обошел шахматную доску, побывав на каждом поле по одному разу, и последним ходом вернулся на исходное поле. Когда соединили центры полей, которые он последовательно проходил, получилась замкнутая ломаная из 64 звеньев (каждому ходу соответствует одно звено). Оказалось, что никакие два соседних звена не лежат на одной прямой. Докажите, что наименьшее возможное число диагональных ходов равно 8.

И.Акулич

М1797. Красные и синие точки, строго чередуясь, разделили окружность на $2n$ дуг. Из них любые две смежные дуги различаются по длине на 1. Докажите, что n-угольник с красными вершинами и n-угольник с синими вершинами имеют равные периметры и равные площади.

В.Произволов

М1798. Известно, что в некотором городе живут 1000 человек и ровно 300 из них – честные. Остальных назовем хитрыми. На некоторые вопросы хитрые отвечают правду, а на некоторые лгут по своему усмотрению. Сколько хитрых людей мы можем обнаружить, задавая жителям произвольное число вопросов, при условии, что жители все друг о друге знают?

Н.Васильев, Б.Гинзбург

М1799*. Натуральные числа x и y таковы, что сумма $xy + x + y$ дает квадрат целого числа. Докажите, что найдется натуральное число z такое, что каждая из семи сумм $xy + z$, $yz + x$, $zx + y$, $yz + y + z$, $zx + z + x$, $xy + yz + + zx$ и $xy + yz + zx + x + y + z$ дает квадрат целого числа.

В.Произволов

М1800. Докажите, что сумма квадратов площадей граней любого тетраэдра равна учетверенной сумме квадратов площадей трех его сечений, каждое из которых проходит через середины четырех ребер.

А.Заславский

Ф1803. Под каким углом к горизонту следует бросить камень, чтобы расстояние от него до точки бросания в течение полета все время возрастало? Камень бросают с небольшой скоростью, сопротивлением воздуха можно пренебречь.

З.Рафаилов

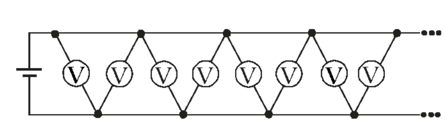
Ф1804. Грузы, массы которых M и $4M$, при помощи легкой нерастяжимой нити подвешены на очень легком подвижном блоке. Еще один кусок такой же нити переброшен через неподвижный блок, к одному концу этой нити прикреплен подвижный блок, к другому – груз массой m. При каких значениях m один из грузов может оставаться неподвижным после того, как тела перестанут удерживать?

А.Блоков

Ф1805. В сосуде объемом 1 л находится моль азота при давлении 1 атм. Азот медленно откачивают, поддерживая температуру сосуда неизменной. Какую массу газа придется откачать к тому моменту, когда давление в сосуде упадет вдвое?

Д.Александров

Ф1806. К батарейке подключены два очень длинных одинаковых проводника, расположенных параллельно друг другу. Между проводниками включено огромное количество одинаковых вольтметров, как показано на рисунке (все образованные про-



водами «треугольники» одинаковы). Первый из вольтметров показывает 6,02 В, второй показывает 5,97 В. Считая показания приборов точными, найдите показания следующих двух вольтметров. Во сколько раз изменится ток, потребляемый всей цепью от батарейки, если второй, четвертый, шестой, и т.д. вольтметры отключить?

А.Зильберман

Ф1807. Проводящий шар заряжают некоторым зарядом Q и при помощи длинной и очень тонкой проволочки соединяют с незаряженным проводящим шаром втрое меньшего радиуса, расположенным очень далеко. Максимальное значение силы тока оказывается при этом равным I_0. Каким будет это значение в другом опыте – когда вначале каждый из зарядов первого и второго шара равен Q? Сопротивление проволочки мало.

А.Шаров

Решения задач М1771—М1780, Ф1788—Ф1792

М1771. *В результате деления числа* $\underbrace{111\ldots1}_{3^n\text{ единиц}}$ *(n – натуральное) на 3^n получили число M. Докажите, что число M целое и его можно разложить на n различных множителей.*

Имеют место равенства:

$$3^n M = \underbrace{111\ldots11}_{3^n\text{ едениц}} = 111\times1001001\times1\underbrace{00\ldots0}_{8\text{ нулей}}1\underbrace{00\ldots0}_{8\text{ нулей}}1\times\ldots$$

$$\ldots\times\ 1\ \underbrace{000\ldots00}_{3^{n-1}-1\text{ нулей}}\ 1\ \underbrace{000\ldots00}_{3^{n-1}-1\text{ нулей}}\ 1.$$

В справедливости последнего равенства можно убедиться, последовательно перемножив сомножители слева направо. Поскольку сомножители различны, их ровно n и каждый из них делится на 3, то после деления равенств на 3^n получаем искомое разложение числа M на n различных множителей.

Д.Мамедьяров, А.Жуков

М1772. *Каждое число последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n}, a_{2n+1}$ равно 2, 5 или 9. При этом $a_1 = a_{2n+1}$, но любые два соседних числа различны. Докажите равенство*

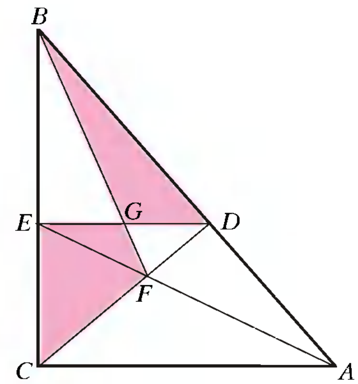
$$a_1a_2 - a_2a_3 + a_3a_4 - \ldots + a_{2n-1}a_{2n} - a_{2n}a_{2n+1} = 0.$$

Члены конечной последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n}$, a_{2n+1} принимают не более трех различных значений. Так как соседние члены обязательно различны, то слагаемые искомой алгебраической суммы тоже принимают (с точностью до знака) не более трех различных значений. Достаточно показать, что каждое значение со знаком «плюс» принимается столько же раз, сколько и со знаком «минус».

В наборе пар (a_1, a_2), (a_3, a_4), … , (a_{2n-1}, a_{2n}), как и в наборе (a_2, a_3), (a_4, a_5), … , (a_{2n}, a_{2n+1}), число 2 встречается в k парах, число 5 – в l парах, а число 9 – в m парах, притом $k + l + m = 2n$. Значит, пар без числа 2 и в том и в другом наборе будет $\frac{-k+l+m}{2}$, без числа $5 - \frac{k-m+l}{2}$, а без числа $9 - \frac{k+l-m}{2}$. Откуда следует, что искомая алгебраическая сумма будет равна нулю.

Внимательный читатель отметит, что числа 2, 5 и 9 в условии задачи можно заменить любой тройкой различных чисел.

В.Произволов



М1773. *Высота CD и биссектриса AE прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) пересекаются в точке F (см. рисунок). Пусть G – точка пересечения прямых ED и BF. Докажите, что площади четырехугольника $CEGF$ и треугольника BDG равны.*

Так как AE – биссектриса ΔABC, а AF – биссектриса ΔADC,

$$\frac{EC}{BE} = \frac{AC}{AB} = \cos\angle BAC = \frac{DA}{AC} = \frac{DF}{FC},$$

$$EC \cdot FC = BE \cdot DF = (BC - EC)\cdot(CD - CF),$$

$$BC \cdot AC = BC \cdot CF + EC \cdot CD.$$

Умножив обе части последнего равенства на $1/2\sin\angle BCD$, получим, что

$$S_{BCD} = S_{BCF} + S_{ECD}.$$

Но

$$S_{BCD} = S_{CEGF} + S_{BEG} + S_{BGD} + S_{DFG},$$

$$S_{BCF} = S_{GECF} + S_{BEG},\ S_{ECD} = S_{GECF} + S_{DFG},$$

откуда и следует требуемое равенство.

Н.Жук

М1774. *Король сказочной страны пригласил на пир людоедов своей страны. Среди них есть людоеды, которые хотят съесть других людоедов. (Если людоед A хочет съесть людоеда B, то это не значит, что людоед B хочет съесть людоеда A.) Известно, что наибольшая цепочка, в которой первый людоед хочет съесть второго, второй – третьего и т.д., состоит из шести людоедов. Докажите, что король может так рассадить людоедов по шести комнатам, что в каждой комнате никто не хочет никого съесть.*

Обозначим людоедов точками. Соединим точки a и b, соответствующие людоедам A и B, линией со стрелкой от a к b, если людоед A хочет съесть людоеда B. Удалим из схемы минимальное число линий, так чтобы в оставшейся схеме не оказалось циклов, т.е. путей вида $(a, b, \ldots, a)$. Для любой точки v определим ее метку $t(v)$ как число точек в наибольшем пути с началом в точке v на получившейся схеме (рис.1).

Из условия задачи следует, что максимальное значение $t(v)$ равно 6.

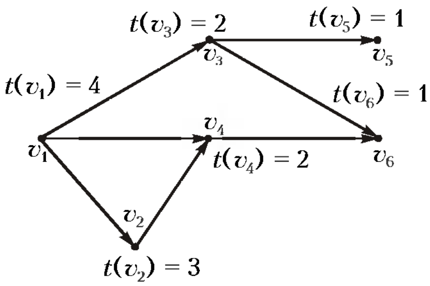


Рис.1

Поместим людоеда, соответствующего точке v, в комнату с номером $t(v)$. Докажем, что это нужное размещение. Для этого докажем, что среди точек с одинаковыми метками нет точек, соединенных линией.

Действительно, если линия (u,v) принадлежит схеме, получившейся после удаления части линий, то $t(u)>t(v)$. Если (u,v) – удаленная линия, то из минимальности удаленных линий следует, что, добавив к последней схеме эту линию, получим цикл (рис.2).

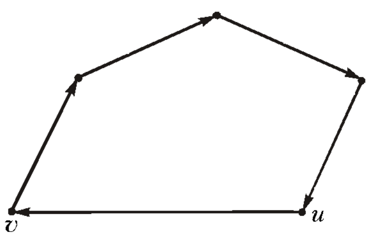


Рис.2

Поэтому $t(v)>t(u)$.

О.Мельников

М1776.[1] *Час назад каждый брат в семье был в ссоре с одинаковым количеством сестер, а каждая сестра – с различным количеством братьев. Сейчас некоторые из них помирились, и каждая сестра в ссоре с одинаковым количеством братьев, а каждый брат – с различным количеством сестер. Сколько сестер и братьев в этой беспокойной семье?*

Обозначим через n количество братьев, через m – количество сестер; пусть до примирения каждый брат был в ссоре с k сестрами. Из условия задачи следует, что $n \ge 2$, $m \ge 3$.

Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений.

1°. $m \le n$.

Доказательство. Пронумеруем сестер по возрастанию количества ссор с братьями. Пусть первая сестра час назад была в ссоре с a_1 братьями, вторая – с a_2 братьями, …, m-я – с a_m братьями, причем

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_m \le n. \qquad (1)$$

Поскольку после примирения каждая сестра оставалась в ссоре с одинаковым количеством братьев, то

$$1 \le a_1. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует утверждение 1°.

2°. $k < m$.

Доказательство. Поскольку $a_i < n$ для всех $i < m$, то

$$nk = \sum_{i=1}^{m} a_i < nm,$$

откуда следует утверждение 2°.

3°. $k \ge n-1$.

Доказательство. Пронумеруем братьев по возрастанию количества ссор после примирения. Пусть первый брат после примирения остался в ссоре с b_1 сестрами, второй брат – с b_2 сестрами, …, n-й брат – с b_n сестрами, причем

$$0 \le b_1 < b_2 < b_3 < \ldots < b_n \le k.$$

Сначала получим оценку для суммы $\sum_{i=1}^{n} b_i$ сверху, для чего выпишем цепочку неравенств

$$\begin{cases} b_n \le k, \\ b_{n-1} \le k-1, \\ \ldots \\ b_1 \le k-(n-1); \end{cases}$$

отсюда

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \le kn - \frac{n(n-1)}{2}. \qquad (3)$$

Аналогично получим оценку для суммы $\sum_{i=1}^{n} b_i$ снизу, для чего выпишем цепочку неравенств

$$\begin{cases} 0 \le b_1, \\ 1 \le b_2, \\ \ldots \\ n-1 \le b_n; \end{cases}$$

отсюда

$$\frac{(n-1)n}{2} \le \sum_{i=1}^{n} b_i. \qquad (4)$$

Объединяя неравенства (3) и (4), получаем

$$\frac{(n-1)n}{2} \le kn - \frac{n(n-1)}{2},$$

откуда получаем утверждение 3°.

Результаты 1°, 2°, 3° запишем в виде цепочки

$$n \ge m > k \ge n-1,$$

откуда следует $n = m$, $k = n-1$.

Для дальнейшего решения нам понадобятся следующие утверждения.

4°. $k \le \frac{n+1}{2}$.

Доказательство. Просуммировав цепочку неравенств

$$\begin{cases} a_m \le n, \\ a_{m-1} \le n-1, \\ \ldots \\ a_1 \le n-(m-1), \end{cases}$$

находим $nk = \sum_{i=1}^{m} a_i \le nm - \frac{m(m-1)}{2}$.

С учетом того, что $n = m$, отсюда и получаем утверждение 4°.

5°. $k \ge \frac{n+1}{2}$.

[1] *Решение задачи М1775 будет опубликовано позже.*

Доказательство. Просуммировав цепочку неравенств

$$\begin{cases} 1 \le a_1, \\ 2 \le a_2, \\ \dots \\ m \le a_m, \end{cases}$$

находим

$$\frac{m(m+1)}{2} \le \sum_{i=1}^{m} a_i = nk.$$

С учетом того, что $n = m$, отсюда получаем утверждение 5°.

Итак, $k = n - 1 = \frac{n+1}{2}$, откуда $n = 3$, $m = 3$, $k = 2$.

Ситуация до примирения и после примирения показана на рисунках 1 и 2 соответственно (дугами обозначены ссоры).

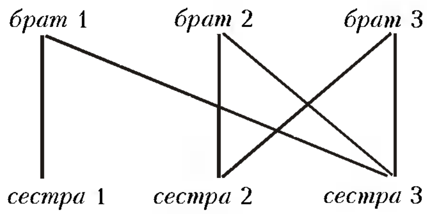


Рис.1

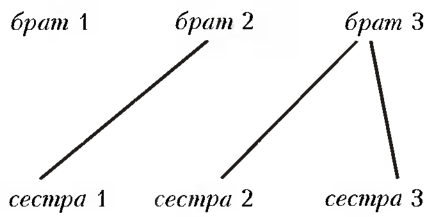


Рис.2

Итак, в беспокойной семейке 3 сестры и 3 брата. Решение единственное.

И.Акулич, А.Жуков

М1777. *В квадрат со стороной 1 вписан четырехугольник. Его стороны являются гипотенузами четырех прямоугольных треугольников, в каждый из которых вписана окружность (рис.1). Докажите, что сумма радиусов этих окружностей не превосходит $2 - \sqrt{2}$ и достигает этого числа лишь тогда, когда стороны вписанного четырехугольника параллельны диагоналям квадрата.*

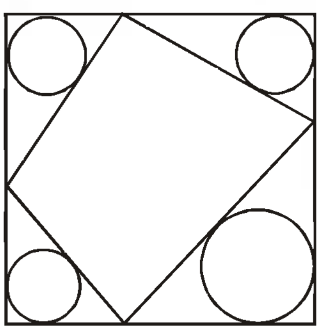


Рис.1

Сначала приведем два вспомогательных утверждения.

1°. Диаметр вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен разности между суммой катетов и гипотенузой.

Усматриваем из рисунка 2, что $a = r + x$, $b = r + y$, $c = x + y$. Значит, $2r = a + b - c$.

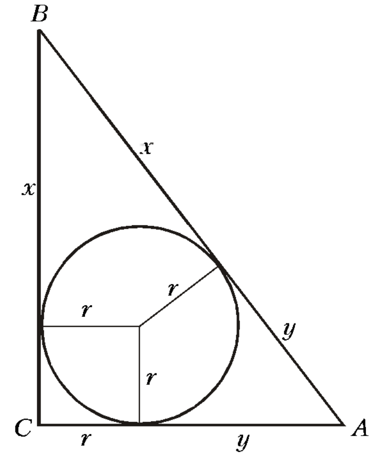


Рис.2

2°. Периметр четырехугольника, вписанного в квадрат со стороной 1, не меньше $2\sqrt{2}$ и равен этому числу лишь тогда, когда стороны четырехугольника параллельны диагоналям квадрата.

На рисунке 3 квадрат $ABCD$ трижды зеркально отражается относительно сторон. При этом стороны вписанного четырехугольника разворачиваются в ломаную линию MN. Каждая из проекций ломаной MN на вертикаль и горизонталь равна 2. Значит, минимальная длина ломаной MN равна $2\sqrt{2}$ и будет достигаться лишь тогда, когда отрезок MN параллелен диагонали квадрата.

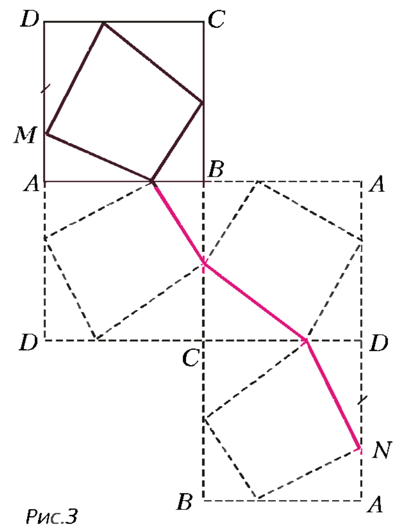


Рис.3

Теперь обратимся к формулировке задачи. В силу утверждения 1° сумма четырех диаметров вписанных кругов равна разности периметров квадрата и четырехугольника, т.е. $4 - p$. Но $p \ge 2\sqrt{2}$ в силу утверждения 2°. Откуда следует, что $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \le 2 - \sqrt{2}$. Равенство достигается лишь при условии параллельности сторон четырехугольника диагоналям квадрата.

В.Произволов

М1778*. *На доске написано комплексное число $1 + i$. Разрешается любое число раз и в любом порядке проделывать следующие три операции:*

1) стереть любое число $a + bi$ и записать взамен два числа, равных $(a+1) + bi$;

2) стереть любое число $a + bi$ и записать взамен три числа: $(a+1) + bi$, $a + (b+1)i$ и $(a+1) + (b+1)i$;

3) стереть любое число $a + bi$ и записать взамен четыре числа, два из которых равны $a + (b+1)i$, а два других равны $(a+1) + (b+1)i$.

После нескольких таких операций оказалось, что модули всех написанных чисел больше 3. Докажите, что среди чисел есть два одинаковых.

Предположим обратное – что среди чисел не оказалось двух одинаковых. Заметим, что какие бы операции ни производились, для каждого из написанных чисел $a + bi$ всегда a и b – натуральные числа. Поставим в соответствие каждому комплексному числу $a + bi$ дробь, равную $\frac{1}{2^a \cdot 3^b}$, и назовем ее *спутником* этого числа. Поскольку a и b – натуральные числа, то, очевидно, соответствие комплексных чисел и спутников будет *взаимно однозначным*: одинаковым числам соответствуют одинаковые спутники, разным числам – разные спутники. Таким образом, если, в соответствии с нашим предположением, не оказалось одинаковых чисел, то не окажется и одинаковых спутников.

Оценим сверху сумму всех спутников, когда модули всех чисел оказались больше 3. Нетрудно заметить, что лишь 4 комплексных числа имеют модуль, меньший 3: $1+i$, $1+2i$, $2+i$, $2+2i$. Сумма соответствующих им спутников равна

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3^2}+\frac{1}{2^2\cdot 3}+\frac{1}{2^2\cdot 3^2}=\frac{1}{3}$$

(это значение пригодится чуть позже). В любой момент времени спутники всех написанных на доске чисел являются *различными* дробями вида $\frac{1}{2^a\cdot 3^b}$, поэтому их сумма заведомо *меньше* суммы *всех* дробей такого вида за вычетом суммы четырех перечисленных выше спутников. Но сумма всех дробей вида $\frac{1}{2^a\cdot 3^b}$, очевидно, равна

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\right)\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\right)=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

поэтому сумма всех спутников меньше $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

С другой стороны, при проведении указанных в условии операций сумма спутников не изменяется. Чтобы убедиться в этом, необходимо всего лишь проверить справедливость равенств:

$$\frac{1}{2^a\cdot 3^b}=2\times\frac{1}{2^{a+1}\cdot 3^b},$$

$$\frac{1}{2^a\cdot 3^b}=\frac{1}{2^{a+1}\cdot 3^b}+\frac{1}{2^a\cdot 3^{b+1}}+\frac{1}{2^{a+1}\cdot 3^{b+1}},$$

$$\frac{1}{2^a\cdot 3^b}=2\times\frac{1}{2^a\cdot 3^{b+1}}+2\frac{1}{2^{a+1}\cdot 3^{b+1}}.$$

Первоначально на доске было единственное число $1+i$, спутник которого равен $\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{6}$. Поэтому и в дальнейшем сумма спутников должна остаться равной $\frac{1}{6}$. Но, как уже выяснилось, эта сумма меньше $\frac{1}{6}$. Противоречие показывает, что предположение об отсутствии среди выписанных чисел двух одинаковых неверно. Следовательно, среди чисел непременно имеются два одинаковых, что и требовалось доказать.

И.Акулич, И.Воронович

М1779. *Найдите все многочлены f*
а) такие, что $f(x)+f(y)=f(x+y)$;
б) такие, что $af(x)=f(2001x)$, *где a – некоторое число;*
в) такие, что

$$af(x)+bf(y)=f(cx+dy), \qquad (1)$$

где a, b, c, d – некоторые числа.

Пункт а) следует из пункта в), поэтому его опустим. Многочлен $\boldsymbol{f(x)=k}$ является решением **при $\boldsymbol{k=0}$**, а **при $\boldsymbol{a+b=1}$ – при любом $\boldsymbol{k}$**; ниже мы будем считать $\boldsymbol{f(x)\neq k}$. Всюду ниже

$$f(x)=a_nx^n+\ldots+a_0.$$

б) Решим более общее уравнение

$$af(x)=f(cx), \qquad (2)$$

именно оно понадобится нам ниже, при решении в). Приравняем коэффициенты при x^n в левой и правой частях (2); получим $a\cdot a_n=a_n\cdot c^n$, или $\boldsymbol{a=c^n}$.

При $\boldsymbol{a=c=0}$ решением является любой многочлен $\boldsymbol{f(x)}$ без свободного члена: $\boldsymbol{a_0=0}$; **при $\boldsymbol{a=c=1}$ – любой многочлен $\boldsymbol{f(x)}$. Если $\boldsymbol{c=-1}$, то при $\boldsymbol{a=1}$** в качестве решений получаются **все четные**, а **при $\boldsymbol{a=-1}$ – все нечетные многочлены**.

Пусть $c\neq 0$, $c\neq\pm 1$, и пусть $n>i\geq 0$. Имеем: $a\cdot a_i=a_i\cdot c^i$. При $a_i\neq 0$ мы получаем противоречие: $a=c^i=c^n$. Следовательно, $a_i=0$ при $n>i\geq 0$, и $\boldsymbol{f(x)=kx^n}$.

в) Рассмотрим обе части равенства (1) как многочлены от x и приравняем коэффициенты при x^n в левой и правой его частях. Получим $\boldsymbol{a=c^n}$; аналогично $\boldsymbol{b=d^n}$. Пусть $n=1$, а значит, $a=c$ и $b=d$. Легко показать, что многочлен $\boldsymbol{f(t)=kt+h}$, где k – произвольное число, удовлетворяет (1) **при $\boldsymbol{h=0}$**, а **в случае $\boldsymbol{a+b=1}$ – и при любом $\boldsymbol{h}$.**

При рассмотрении случая $n>1$ нам понадобится следующая

Лемма. Если

$$c^n+d^n=(c+d)^n,\text{ где } n>1, \qquad (3)$$

то $cd(c+d)=0$.

Доказательство. Достаточно доказать, что многочлен

$$P(x)=(x+c)^n-x^n-c^n,$$

где $c\neq 0$, $n>1$, не может иметь корней, отличных от 0 и $-c$.

Докажем это. При четном n производная $P'(x)$ не имеет корней, значит, 0 – один-единственный корень многочлена $P(x)$. При нечетном n производная имеет единственный корень, значит, 0 и $-c$ – единственные корни многочлена $P(x)$. Лемма доказана.

(Можно рассуждать и по-другому: воспользоваться тем, что функция

$$Q(t)=P\left(t-\frac{c}{2}\right)=\left(t+\frac{c}{2}\right)^n-\left(t-\frac{c}{2}\right)^n-c^n=$$

$$=q_{n-1}t^{n-1}+q_{n-3}t^{n-3}+\ldots$$

при четном n монотонна на всей оси, а при нечетном – на положительной и отрицательной полуосях.)

Рассмотрим теперь обе части (1) как многочлены от $t=x=y$. Рассуждая как выше, получим:

$$a+b=(c+d)^n,$$

а значит,

$$c^n+d^n=(c+d)^n.$$

По лемме отсюда следует, что $cd(c+d)=0$.

В случаях $c=0$ и $d=0$ (1) сводится к (2); пусть $c\neq 0$, а $c + d = 0$. В этом случае и $a + b = 0$, следовательно,

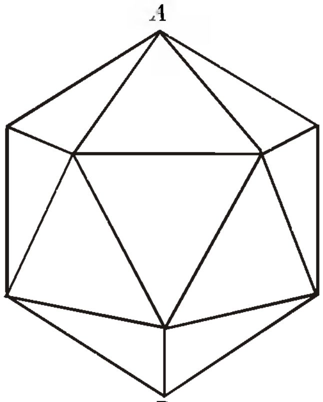
$$a\bigl(f(x) - f(y)\bigr) = f\bigl(c(x - y)\bigr).$$

Полагая $x = 2y$ и учитывая равенство $a = c^n$, получим отсюда: $2^n - 1 = 1$, т.е. $n = 1$. Полученное противоречие доказывает, что случай $n > 1$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ невозможен.

В.Сендеров

М1780*. *Каждая точка сферы окрашена в красный или синий цвет. Докажите, что найдутся три одноцветные точки, которые являются вершинами равностороннего треугольника.*

Впишем в сферу икосаэдр (см. рисунок). Каждая из 12 вершин икосаэдра является либо красной, либо синей.



Мы сможем доказать, что у икосаэдра найдутся три одноцветные вершины, которые являются в то же время вершинами равностороннего треугольника. Для начала запишем, что множество вершин икосаэдра предоставляет нам равносторонние треугольники двух типов. Первый тип: три вершины любой грани икосаэдра. Второй тип: у любой грани икосаэдра имеются три смежные грани, отметив у каждой из которых по одной внешней вершине, получаем равносторонний треугольник.

Из 12 вершин икосаэдра не менее 6 вершин будут одного цвета, например красного. Отметим две диаметрально противоположные вершины A и B такие, что вершина A – красного цвета. Возможны два случая.

Первый случай: вершина B тоже красная. Для краткости пятерку вершин, смежных с вершиной A, будем называть A-множеством, пятерку вершин, смежных с вершиной B – B-множеством. Если A-множество содержит три (или более) красные точки, то две из них – смежные вершины икосаэдра. Эти две точки вместе с вершиной A дают равносторонний треугольник первого типа с красными вершинами. Если B-множество содержит три (или более) красные точки, то две из них – смежные вершины икосаэдра. Эти две точки вместе с вершиной B дают равносторонний треугольник первого типа. Возможен последний вариант: A-множество и B-множество содержат по две красные точки и притом каждая из этих пар не является парой смежных вершин икосаэдра. Тогда две красные точки из B-множества вместе с вершиной A являются вершинами равностороннего треугольника, у которого все вершины красные.

Второй случай: вершина B синяя. Тогда либо A-множество, либо B-множество содержит три красные точки. Если это A-множество, то найдется равносторонний треугольник первого типа с красными вершинами (одна из них A). Если это B-множество, то найдется равносторонний треугольник второго типа с красными вершинами (одна из них A).

Мы доказали чуть больше, чем хотели. Именно: если 6 из 12 вершин икосаэдра красные, то найдется равносторонний треугольник с красными вершинами.

Для сферы будет справедливым такое дополнительное утверждение:

Каждая точка сферы окрашена в красный или синий цвет так, что всякие две диаметрально противоположные точки окрашены в разные цвета. Тогда для любой точки сферы найдется равносторонний треугольник с одноцветными вершинами, одной из которых является эта точка сферы.

В.Произволов

Ф1788. *Два тонких стержня помещены в воду так, что они параллельны и расстояние между ними равно а. По одному из стержней резко ударяют. Через какое время звук от удара дойдет до точки на втором стержне, удаленной от места удара на расстояние $\sqrt{a^2 + l^2}$, если скорости звука в воде и в стержне равны и и v соответственно?*

Обозначим точку удара по первому стержню через A, а точку, в которой принимают звуковой сигнал, – через B (рис.1). В зависимости от соотношения между параметрами, заданными в условии задачи, звук быстрее дойдет до точки B или при распространении по прямой AB, или при распространении сначала вдоль стержня, а затем по воде.

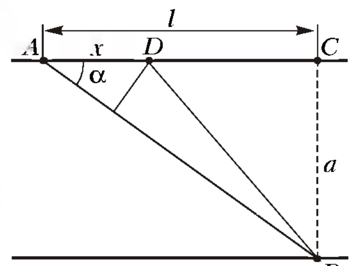


Рис.1

При $u > v$ звуковой сигнал, очевидно, быстрее дойдет до точки B по прямой AB. Время распространения сигнала в этом случае будет равно

$$t_1 = \frac{\sqrt{a^2 + l^2}}{u}.$$

Пусть теперь $u < v$. Рассмотрим два сигнала, одновременно вышедших из точки A, один из которых идет по прямой сразу в точку B, а другой сначала распространяется на малое расстояние x по стержню до точки D, а затем идет в точку B по воде (см. рис.1). Обозначим $\angle CAB$ через α. Разность $AB - DB$, в силу малости x, приближенно равна $x\cos\alpha$. Следовательно, разность времен распространения сигналов по путям AB и DB равна

$$\Delta t = \frac{AB}{u} - \left(\frac{x}{v} + \frac{DB}{u}\right) = \frac{x\cos\alpha}{u} - \frac{x}{v}.$$

При выполнении условия $\cos\alpha = l\big/\sqrt{a^2 + l^2} < u/v$ разность Δt отрицательна, и звук быстрее дойдет до точки B по прямой, затратив на это время t_1. При условии $\cos\alpha > u/v$ разность Δt положительна, т.е. звуковой сигнал быстрее дойдет до точки B по ломаной линии (распространяясь сначала вдоль стержня, а затем по воде). Пусть в последнем случае звук

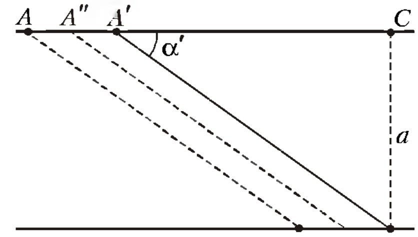


Рис.2

доходит по стержню до некоторой точки A' (рис.2), для которой $\cos\alpha' = u/v$, и затем идет по прямой $A'B$. Время распространения этого сигнала равно

$$t_2 = \frac{l - a/\operatorname{tg}\alpha'}{v} + \frac{a}{u\sin\alpha'} =$$

$$= \frac{l}{v} + a\left\{\frac{1}{u\sin\alpha'} - \frac{1}{v\operatorname{tg}\alpha'}\right\} = \frac{l}{v} + a\sqrt{\frac{1}{u^2} - \frac{1}{v^2}}.$$

Объединяя рассмотренные случаи, получаем ответ для минимального времени распространения звука между точками A и B:

при $\dfrac{u}{v} > \dfrac{l}{\sqrt{a^2 + l^2}}$ время распространения сигнала равно $t_1 = \dfrac{\sqrt{a^2 + l^2}}{u}$;

при $\dfrac{u}{v} < \dfrac{l}{\sqrt{a^2 + l^2}}$ время распространения сигнала равно $t_2 = \dfrac{l}{v} + a\sqrt{\dfrac{1}{u^2} - \dfrac{1}{v^2}}$.

Отметим, что при выполнении условий $u < v$ и $\cos\alpha > u/v$ сигнал может распространяться как по пути $AA'B$, так и по путям $AB'B$ и $AA''B''B$ (см. рис.2). При этом сигналы, распространяющиеся по всем трем путям, достигнут точки B одновременно, но их интенсивности будут различными. Сигналы, прошедшие по путям $AA'B$ и $AB'B$, преломляются на границе стержень–вода по одному разу и будут иметь примерно одинаковые амплитуды, а сигналы, прошедшие по всем путям типа $AA''B''B$, преломляются по два раза и будут гораздо слабее.

Заметим также, что после первого сигнала, пришедшего в точку B, будет слышен довольно продолжительный гул, так как звук излучают все точки стержня, по которому бежит волна от удара, но эти сигналы приходят позже. Ситуация в этом случае напоминает ту, которая имеет место при пролете сверхзвукового самолета или при ударе молнии: вначале наблюдатель слышит удар, а затем раскаты.

Д.Харабадзе

Ф1789. *В системе, изображенной на рисунке 1, нить невесома и нерастяжима, блоки невесомы, трения нет. Вначале нить удерживают так, что груз массой m висит неподвижно, а груз массой $2m$ касается пола. Затем конец нити начинают тянуть вверх с постоянной скоростью v. Как при этом будут двигаться оба груза?*

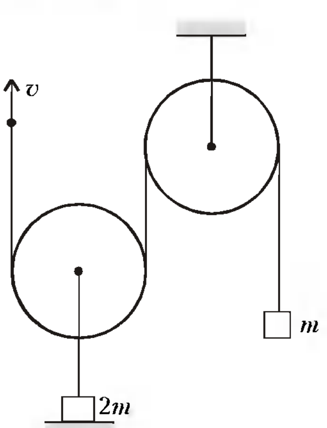


Рис.1

Из условия задачи следует, что сила натяжения нити везде вдоль нити одна и та же. До начала движения, очевидно, эта сила равна $F_0 = mg$, а груз массой $2m$ на пол не давит. В начале движения сила увеличивается на некоторую величину ΔF на короткое время Δt, за счет чего грузы начинают двигаться вверх со скоростями v_1 и v_2. По закону изменения импульса можно записать

$$\Delta F\Delta t = mv_1,\ 2\Delta F\Delta t = 2mv_2,$$

откуда следует, что

$$v_1 = v_2.$$

В дальнейшем эти скорости будут оставаться постоянными, а сила натяжения снова станет равной $F_0 = mg$. Поскольку конец нити вытягивают со скоростью v, а длина нити L неизменна, можно записать для двух моментов времени выражения для длины нити через координаты блоков и грузов (рис.2):

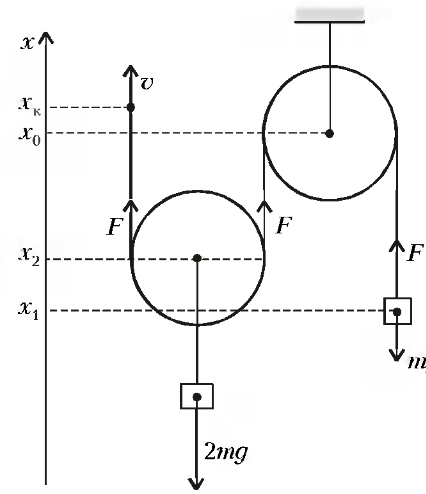


Рис.2

$$x_к - x_2 + x_0 - x_2 + x_0 - x_1 + 2\pi R = L,$$

$$(x_к + vt) - (x_2 + v_1t) + x_0 - (x_2 + v_1t) + $$
$$+ x_0 - (x_1 + v_1t) + 2\pi R = L.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем

$$vt - 3v_1t = 0,$$

или

$$v_1 = v_2 = \frac{v}{3}.$$

Задачу можно решить и другим способом, рассматривая уравнения движения грузов на этапе их разгона от состояния покоя до конечной скорости. Обозначая ускорения грузов с массами m и $2m$ через a_1 и a_2 соответственно, получаем уравнения движения (см. рис.2):

$$F - mg = ma_1,$$

$$2F - 2mg = 2ma_2.$$

Отсюда получаем $a_1 = a_2$. Из уравнения кинематической связи следует, что

$$x_к - 2x_2 - x_1 = \text{const},$$

следовательно, скорости грузов v_1 и v_2 и скорость конца нити $v_к$ связаны соотношением

$$v_к = 2v_2 + v_1,$$

а связь соответствующих ускорений имеет вид

$$a_к = 2a_2 + a_1.$$

С учетом равенства ускорений грузов получаем $a_1 = a_2 = a_к/3$. Поскольку ускорения грузов в каждый момент времени одинаковы, а в начальный момент времени грузы покоятся, то скорости грузов также одинаковы и составляют $v_1 = v_2 = \frac{v}{3}$.

М.Семенов

Ф1790. *В покоящемся сосуде объемом $V = 31$ л с очень жесткими и совершенно не проводящими тепло стенками находятся воздух при нормальных условиях и вода массой $m = 9$ г. Сосуд практически мгновенно приобретает скорость u и движется поступательно. После установления теплового равновесия воздух в сосуде имеет влажность $\varphi = 50\%$. Найдите скорость u. Удельная теплота парообразования воды $L = 2{,}2$ МДж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · К), давление насыщенных паров воды при нормальных условиях $p = 600$ Па, удельная теплоемкость воздуха при постоянном объеме $c_V = 720$ Дж/(кг · К), средняя молярная масса воздуха $\mathrm{M} = 0{,}029$ кг/моль.*

В начальный момент масса водяного пара $m_п$ очень мала по сравнению с массой воды в сосуде m. (Массу пара можно найти из уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$m_п = \frac{\mathrm{M}_{воды} pV}{RT_0} \approx 0{,}15 \text{ г} \ll m = 9 \text{ г}$$

(здесь $\mathrm{M}_{воды} = 18$ г/моль – молярная масса воды, $T_0 = 273$ К)). Поэтому можно считать, что вся вода вначале находилась в жидком состоянии.

После разгона сосуда при установившейся температуре внутри него содержится не больше чем $m = 9$ г водяного пара при влажности $\varphi = 50\% = 0{,}5$. Если бы при этой же температуре водяной пар был насыщенным, то в том же объеме находилось бы $m/0{,}5 = 18$ г водяного пара, т.е. 1 моль. Известно, что вода при атмосферном давлении кипит при 100 °С, т.е. давление насыщенных паров воды при температуре $T_1 = 373$ К равно $p_{атм} = 10^5$ Па. Из уравнения Менделеева–Клапейрона находим, что при давлении 10^5 Па и температуре 373 К один моль водяного пара (18 г) занимает объем

$$V_1 = \frac{RT_1}{p_{атм}} \approx 31 \text{ л} = V,$$

откуда следует, что в сосуде установилась температура, равная как раз $T_1 = 373$ К.

В условии сказано, что стенки сосуда являются очень жесткими, а это означает, что объем сосуда не изменяется. Стенки сосуда совершенно не проводят тепло, т.е. энергия, которой обладали воздух и вода, не теряется в результате теплопередачи. Перейдем в систему отсчета, движущуюся поступательно со скоростью u. В этой системе сосуд сначала имел скорость $-u$, а затем резко остановился. Воздух и вода имели, как целое, кинетическую энергию и внутреннюю энергию. После остановки сосуда суммарная энергия воды и воздуха осталась прежней, но теперь кинетическая энергия движения воды и воздуха, как целого, превратилась в дополнительную внутреннюю энергию. Из уравнения Менделеева–Клапейрона находим, что масса воздуха в сосуде равна

$$m_в = \frac{\mathrm{M} p_{атм} V}{RT_0} \approx 39{,}6 \text{ г}.$$

Суммарная масса воды и воздуха составляет $m + m_в \approx 48{,}6$ г. Изменение внутренней энергии можно подсчитать по частям. Воздух при постоянном объеме нагрелся на 100 °С. На это потребовалось количество теплоты

$$Q_1 = m_в c_V (T_1 - T_0) \approx 2850 \text{ Дж}.$$

Изменение внутренней энергии воды определяется только конечным и начальным состояниями системы и не зависит от процесса перехода. Поэтому можно считать, что сначала воду нагрели до 100 °С, а затем перевели ее в парообразное состояние. На нагревание воды пошло количество теплоты

$$Q_2 = mc(T_1 - T_0) \approx 3780 \text{ Дж}.$$

На парообразование потребовалось количество теплоты

$$Q_3 = mL \approx 19800 \text{ Дж}.$$

Общее изменение внутренней энергии системы равно кинетической энергии, которую имели вода и воздух:

$$\frac{(m + m_в)u^2}{2} = Q_1 + Q_2 + Q_3 \approx 26430 \text{ Дж},$$

откуда находим искомую скорость:

$$u \approx 10^3 \text{ м/с}.$$

С.Варламов

Ф1791. *Одно колено гладкой изогнутой трубки с круглым внутренним сечением площадью S вертикально, а другое наклонено к горизонту под углом α (рис.1). В трубку налили жидкость плотностью ρ и массой M так, что ее уровень в наклонном колене выше, чем в вертикальном, которое закрыто легким поршнем, соединенным с вертикальной пружиной жесткостью k. Найдите период малых колебаний этой системы. Ускорение свободного падения равно g.*

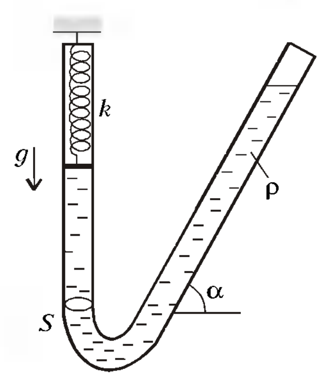


Рис.1

При малых колебаниях в отсутствие трения сумма кинетической и потенциальной энергий постоянна:

$$E_k + E_p = \text{const}.$$

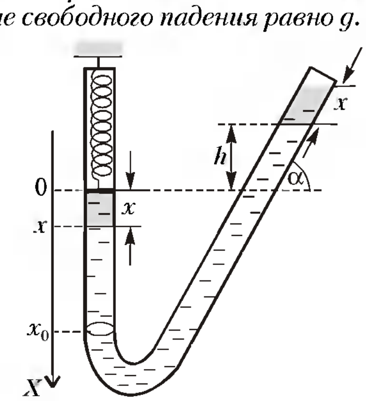


Рис.2

Смещение столба жидкости x (рис.2) мы будем отсчитывать от равновесного положения, при котором сила упругости сжатой пружины

kx_0 (x_0 – положение поршня при несжатой пружине) уравновешивается силой гидростатического давления ρghS за счет превышения уровня жидкости в наклонном колене на высоту h над ее уровнем в вертикальном колене. Тогда

$$E_k = \frac{Mv^2}{2} = \frac{Mx'^2}{2},$$

$$E_p = \frac{k(x_0 - x)^2}{2} + \rho gSx\left(h + \frac{x}{2}(1+\sin\alpha)\right)$$

(при смещении жидкости на малое расстояние x от положения равновесия центр масс ее элемента массой ρSx поднимается на высоту $x/2 + h + (x\sin\alpha)/2$; (рис.2). Таким образом,

$$\frac{Mx'^2}{2} + \frac{k(x_0 - x)^2}{2} + \rho gS(1+\sin\alpha)\frac{x^2}{2} + \rho gShx = \text{const}.$$

Продифференцируем это соотношение по времени:

$$Mx'x'' + (k + \rho gS(1+\sin\alpha))x'x + \rho gShx' - kx'x_0 = 0.$$

Сократим на x' и учтем, что, в силу нашего выбора начала отсчета x, $kx_0 = \rho gSh$. Получим уравнение движения

$$x'' + \frac{k + \rho gS(1+\sin\alpha)}{M}x = 0,$$

которое является уравнением гармонических колебаний с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k + \rho gS(1+\sin\alpha)}}.$$

М.Семенов

Ф1792. *Ацетон и бензол смешиваются друг с другом в любых пропорциях, образуя прозрачный раствор. Объем смеси равен суммарному объему компонентов до смешивания. Коэффициент преломления света в смеси n зависит от концентраций молекул ацетона $N_а$ и бензола $N_б$ следующим образом: $n^2 = 1 + K_аN_а + K_бN_б$, где $K_а$ и $K_б$ – некоторые константы (поляризуемости молекул ацетона и бензола). В колбе находится V = 200 мл смеси ацетона и бензола при температуре $t_1 = 50\,°C$. Палочка из стекла, опущенная в колбу, освещается светом с длиной волны λ = 546 нм и не видна в этом растворе при данной температуре. Сколько миллилитров и какой жидкости – ацетона или бензола – нужно долить в колбу после ее охлаждения до температуры $t_2 = 20\,°C$, чтобы после размешивания раствора стеклянная палочка не была видна при том же освещении? Коэффициенты преломления света с данной длиной волны у этих жидкостей при температуре t_2 равны $n_а = 1{,}36$ и $n_б = 1{,}50$ соответственно, а у стекла – $n_с = 1{,}47$. Коэффициенты объемного расширения обеих жидкостей в диапазоне температур от t_2 до t_1 одинаковы и равны $\alpha = 0{,}00124$ 1/К. Тепловым расширением стекла и испарением жидкостей пренебречь.*

Обозначим объемную долю ацетона в растворе при температуре t через β_t. Тогда объемная доля бензола в растворе равна $1 - \beta_t$. Для чистых жидкостей при температуре $t_2 = 20\,°C$ справедливы соотношения

$$n_а^2 = 1 + K_аN_а,\ n_б^2 = 1 + K_бN_б.$$

Для того чтобы в растворе ацетона и бензола палочка не была видна при температуре t_2, должно выполняться условие

$$n_с^2 = 1 + \beta_{t_2}K_аN_а + (1 - \beta_{t_2})K_бN_б.$$

Отсюда (с учетом первого соотношения) найдем объемную долю ацетона в растворе при температуре t_2:

$$\beta_{t_2} = \frac{n_б^2 - n_с^2}{n_б^2 - n_а^2} = \frac{1{,}5^2 - 1{,}47^2}{1{,}5^2 - 1{,}36^2} \approx 0{,}222.$$

При изменении температуры объемная доля ацетона не изменяется, поскольку коэффициенты объемного расширения обеих жидкостей по условию одинаковы. В то же время концентрации молекул ацетона и бензола меняются, поскольку изменяется объем раствора:

$$V = V_{t_2}(1 + \alpha(t_1 - t_2)).$$

Таким образом, объемная доля ацетона при температуре $t_1 = 50\,°C$ может быть найдена из условия

$$n_с^2 = 1 + \frac{\beta_{t_1}K_аN_а + (1 - \beta_{t_1})K_бN_б}{1 + \alpha(t_1 - t_2)},$$

откуда

$$\beta_{t_1} = \frac{n_б^2 - 1 - (n_с^2 - 1)(1 + \alpha(t_1 - t_2))}{n_б^2 - n_а^2} =$$

$$= \frac{1{,}5^2 - 1 - (1{,}47^2 - 1)(1 + 0{,}00124 \cdot 30)}{1{,}5^2 - 1{,}36^2} \approx 0{,}115.$$

Ясно, что для увеличения объемной доли ацетона при $t_2 = 20\,°C$ в раствор нужно будет добавлять ацетон. Объем исходного раствора после охлаждения до t_2 равен

$$V_{t_2} = \frac{V}{1 + \alpha(t_1 - t_2)} \approx 192{,}8 \text{ мл}.$$

В нем на долю бензола приходится объем

$$V_б = (1 - \beta_{t_1})V_{t_2} \approx 170{,}7 \text{ мл},$$

который после добавления ацетона должен составлять долю $1 - \beta_{t_2}$ от нового объема раствора $V_н$. Отсюда

$$V_н = \frac{V_б}{1 - \beta_{t_2}} \approx 219{,}5 \text{ мл}.$$

Таким образом, в раствор нужно добавить объем ацетона, равный

$$\Delta V_а = V_н - V_{t_2} = \frac{n_с^2 - 1}{n_с^2 - n_а^2}\,\frac{\alpha(t_1 - t_2)V}{1 + \alpha(t_1 - t_2)} \approx$$

$$\approx 219{,}5 \text{ мл} - 192{,}8 \text{ мл} \approx 26{,}7 \text{ мл}.$$

С.Варламов

Задачи

1. В корзине лежат 13 яблок. Имеются весы, с помощью которых можно узнать суммарную массу любых двух яблок. Придумайте способ выяснить за 8 взвешиваний суммарную массу всех яблок.

Д.Калинин

2. На кошачьей выставке в ряд сидят 10 котов и 19 кошек, причем с любой кошкой сидит более толстый кот. Докажите, что рядом с любым котом сидит кошка, которая тоньше его.

С.Берлов

3. На кольцевой автотрассе расположены три поселка A, B, C. Где на этой трассе нужно расположить почту P так, чтобы суммарная длина линий связи, соединяющих почту с тремя поселками (сумма длин хорд PA, PB, PC) была наименьшей?

С.Актёршев

4. Выпуклый шестиугольник $ABCFGH$ таков, что $AB = CF = GH$, $\angle A = \angle C = \angle G$ и $\angle B = \angle F = \angle H$. Докажите, что $BC = FG = HA$.

В.Произволов

5. Играя в домино, Баба, Табриз, Гамид и Эльмир взяли кости с различной суммой очков. При этом сумма очков у Бабы и Табриза оказалась равной сумме очков у Гамида и Эльмира, а разница очков Бабы и Табриза оказалась в $3\frac{6}{7}$ раза больше разницы очков Гамида и Эльмира. Назовите 12 костей домино, которые находятся на руках у Бабы и Табриза.

В.Мустафаев

Иллюстрации Д.Гришуковой
Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

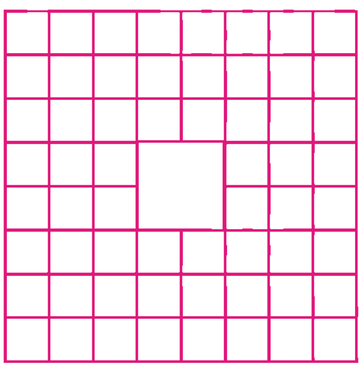
Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон.

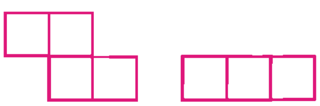
11. Имеется бесконечный лист клетчатой бумаги. В каждую клетку записано число. В любом квадрате 3×3 сумма чисел равна 5. При этом сумма чисел во всех квадратах 5×5 также одна и та же. Чему она равна?

Д.Калинин



12. Квадрат с дыркой, изображенный на рисунке, нужно разрезать на фигурки, показанные ниже. Какое наименьшее количество частей может получиться?

Д.Калинин

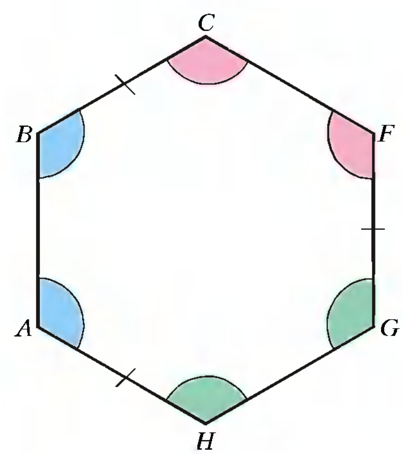


13. Карлсон раздобыл брусок сыра (брусок – это прямоугольный параллелепипед) размерами $2000\times2001\times2002$. Он предлагает Малышу полакомиться сыром и заодно сыграть в следующую игру. Сначала Малыш делит брусок прямолинейным разрезом на два меньших бруска с целочисленными сторонами и один из них съедает. Затем Карлсон разрезает оставшийся брусок опять на два бруска с целочисленными сторонами и один съедает. И так далее, по очереди. Выигрывает тот, кто первым съест сырный кубик $1\times1\times1$. Кто выигрывает при правильной игре – Малыш или Карлсон?

А.Малеев

14. Выпуклый шестиугольник $ABCFGH$ таков, что $\angle A=\angle B$, $\angle C=\angle F$, $\angle G=\angle H$ и $BC = FG = HA$. Докажите, что около шестиугольника можно описать окружность.

В.Произволов



15. Докажите, что равенство $a^5+b^5=(a+b)^5$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется равенство $ab^2+ba^2=0$.

В.Сендеров

Вниманию наших читателей!

Спешим сообщить вам радостную новость. После большого перерыва возобновилась жизнь Библиотечки «Квант». Сформирована новая редакционная коллегия и прошло ее первое заседание.

Редколлегия и издательство «Бюро Квантум», взявшее на себя ответственность за выпуск книг серии «Библиотечка «Квант», полны решимости вернуть Библиотечке ее былую славу.

В планах редколлегии и издательства как обновленное издание лучших книг серии, дополненное (где это возможно и необходимо) сведениями о самых последних достижениях и открытиях, так и подготовка совершенно новых книг.

Уже поступили в продажу три свежих выпуска:

выпуск 86 – обновленное издание замечательной книги И.Ш.Слободецкого и Л.Г.Асламазова «Задачи по физике»,

выпуск 87 – сборник материалов под названием «Физика и...», посвященный связи физики с разными областями науки и деятельности человека,

выпуск 88 – книга А.В.Спивака «Математический праздник», в которой собраны задачи-жемчужины для развития математического мышления школьников.

Не упустите уникальную возможность приобрести вышедшие книги или сделать заказ на будущие книги серии «Библиотечка «Квант прямо сегодня и непосредственно в помещении редакции. Завтра может быть уже поздно (и дороже). Особенно приглашаются к сотрудничеству (на выгодных условиях) оптовые покупатели.

Мы будем рады ответить на все ваши вопросы по телефонам: 930-36-32, 930-56-48, 930-56-41.

Характерные задачи вступительных экзаменов по физике в МФТИ

В.МОЖАЕВ

Задача 1. *Человеку массой m требуется подтянуть к стене ящик массой $M = 3m$ с помощью каната, перекинутого через блок. Если человек стоит на горизонтальном полу (рис.1), то для достижения цели ему надо тянуть канат с минимальной силой $F_1 = 600$ Н. С какой минимальной силой F_2 необходимо тянуть этому человеку канат, если он упрется в ящик ногами (рис.2)? Части каната, не соприкасающиеся с блоком, горизонтальны. Массой блока и каната пренебречь. (1998 г.)*

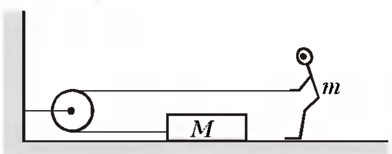


Рис. 1

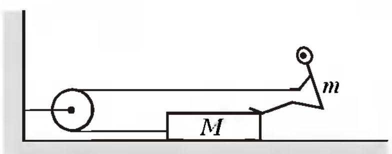


Рис. 2

В первом случае сила, с которой человек тянет канат, очевидно, приложена и к ящику. Поскольку $F_1 > 0$, заключаем, что между ящиком и полом действует сила трения скольжения. Пусть коэффициент трения скольжения между ящиком и полом равен μ. Минимальность силы натяжения каната означает, что

$$F_1 = \mu Mg.$$

Во втором случае, когда натяжение каната равно F_2, на систему ящик – человек в горизонтальном направлении будет действовать сила, равная $2F_2$. Условие минимальности силы означает, что

$$2F_2 = \mu(M + m)g.$$

Из полученных уравнений найдем искомую силу:

$$F_2 = \frac{F_1}{2}\frac{(M+m)}{M} = \frac{2}{3}F_1 = 400 \text{ Н}.$$

Задача 2. *Тонкая трубка, запаянная с одного конца, заполнена маслом и закреплена на горизонтальной платформе, вращающейся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси так, что масло не выливается и заполняет полностью горизонтальное колено трубки (рис.3). Открытое колено трубки вертикально. Геометрические размеры установки даны на рисунке. Атмосферное давление p_0, плотность масла ρ. 1) Найдите давление масла на изгибе трубки. 2) Найдите давление масла у запаянного конца трубки. (1996 г.)*

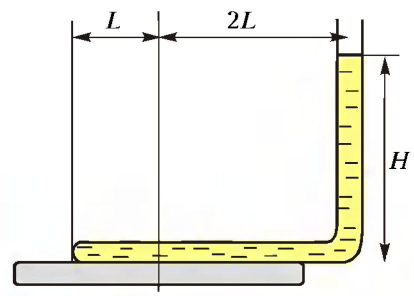


Рис. 3

1) Вращение платформы не сказывается на вертикальном распределении давления масла в вертикальном колене. Поэтому давление масла в месте изгиба трубки равно

$$p_{\text{изг}} = p_0 + \rho g H.$$

2) Рассмотрим горизонтальную часть трубки, заполненную маслом. Трубка вместе с платформой вращается с угловой скоростью ω. Выберем маленький участок масла длиной dr, который находится на расстоянии r от оси вращения (рис.4). Пусть слева от этого участка давление масла p, справа $p + dp$, а площадь сечения трубки S. Поскольку данный элемент масла вращается с угловой скоростью ω, уравнение равномерного движения по окружности радиусом r будет иметь вид

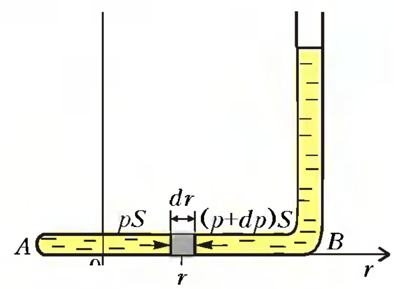


Рис. 4

$$\rho S dr \cdot \omega^2 r = dp \cdot S.$$

Отсюда получаем

$$dp = \rho\omega^2 r\, dr.$$

В интегральном виде это уравнение будет выглядеть так:

$$\int_{p_A}^{p_B} dp = \int_{-L}^{2L} \rho\omega^2 r\, dr.$$

После интегрирования получим

$$p_B - p_A = \frac{\rho\omega^2}{2}\left(4L^2 - L^2\right),$$

или

$$p_A = p_B - \frac{3\rho\omega^2 L^2}{2} = p_0 + \rho g H - \frac{3\rho\omega^2 L^2}{2}.$$

Задача 3. *Атмосфера Венеры состоит в основном из углекислого газа CO_2, масса которого по некоторым оценкам составляет $M = 6 \cdot 10^{16}$ т. Чему равна плотность углекислого газа вблизи поверхности Венеры, если его температура T = 800 К? Радиус Венеры $R_В$ = 6300 км, а ускорение свободного падения $g_В = 8{,}2$ м/с^2. Толщина атмосферы Венеры много меньше радиуса планеты. (1997 г.)*

Поскольку толщина атмосферы Венеры много меньше ее радиуса, можно считать, что давление углекислого газа на поверхности планеты равно весу углекислого газа атмосферы Венеры, деленному на площадь ее поверхности:

$$p_0 = \frac{Mg_В}{4\pi R_В^2}.$$

Из уравнения состояния идеального газа можно найти плотность CO_2:

$$\rho = \frac{\mathrm{M}p_0}{RT},$$

где М = 44 г/моль – молярная масса углекислого газа, а $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная. С учетом предыдущего выражения для p_0, получим

$$\rho = \frac{\mathrm{M}Mg_В}{4\pi R_В^2 RT} = 6{,}54 \ \text{кг/м}^3.$$

Задача 4. *Электрическая цепь состоит из батареи с ЭДС $\mathcal{E}$, резистора сопротивлением R, катушки переменной индуктивности, начальное значение которой L_0, и ключа K (рис.5). Через некоторое время после замыкания ключа ЭДС индукции в катушке оказалась равной U_0. Начиная с этого момента индуктивность катушки изменяют таким образом, что ЭДС в катушке остается неизменной по знаку и по величине и равной U_0. 1) Определите ЭДС индукции в катушке сразу после замыкания ключа. 2) Найдите зависимость индуктивности катушки от времени после начала изменения индуктивности. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь. (1997 г.)*

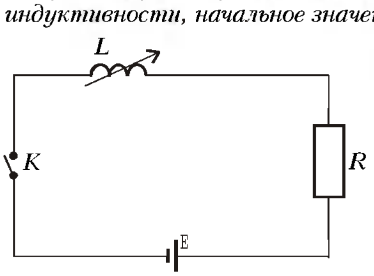


Рис. 5

1) Сразу после замыкания ключа ток в цепи равен нулю. При этом ЭДС индукции в катушке $\mathcal{E}_{i0}$ будет равна ЭДС батареи, взятой с противоположным знаком. Это следует из закона Ома для замкнутой цепи: $\mathcal{E} + \mathcal{E}_{i0} = 0$, откуда

$$\mathcal{E}_{i0} = -\mathcal{E}.$$

2) Пусть в некоторый момент времени ЭДС индукции равна U_0 и «направлена» навстречу ЭДС батареи. Начиная с этого момента ЭДС индукции остается неизменной, следовательно, в соответствии с законом Ома в цепи будет течь постоянный ток:

$$\mathcal{E} - U_0 = I_0 R, \ \text{откуда} \ I_0 = \frac{\mathcal{E} - U_0}{R} = \text{const}.$$

Поскольку ЭДС индукции равна $\dfrac{d(LI)}{dt}$, а ток $I = \text{const} = I_0$, получаем

$$U_0 = \frac{(\mathcal{E} - U_0)}{R}\frac{dL}{dt}.$$

Разделим переменные:

$$dL = \frac{U_0 R}{\mathcal{E} - U_0}dt,$$

проинтегрируем:

$$\int_{L_0}^{L} dL = \frac{U_0 R}{\mathcal{E} - U_0}\int_0^t dt$$

и найдем зависимость индуктивности катушки от времени:

$$L = L_0 + \frac{U_0 Rt}{\mathcal{E} - U_0}.$$

Задача 5. *На двух длинных, гладких, параллельных, горизонтальных и проводящих штангах лежит проводящая перемычка П массой М (рис.6). Расстояние между штангами l. Через резистор сопротивлением R и разомкнутый ключ K к штангам подключена батарея с постоянной ЭДС. Штанги расположены в области однородного магнитного поля с индукцией, равной B и направленной от нас перпендикулярно плоскости рисунка. После замыкания ключа в установившемся режиме перемычка достигает скорости v_0. Пренебрегая внутренним сопротивлением батареи и сопротивлением штанг и перемычки, определите ускорение перемычки сразу после замыкания ключа. (1997 г.)*

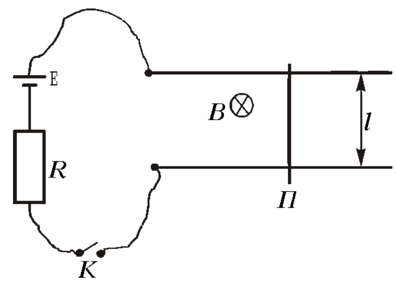


Рис. 6

Сначала найдем ЭДС батареи $\mathcal{E}$. Это можно сделать, зная величину установившейся скорости перемычки.

Рассмотрим произвольный момент времени после замыкания ключа. По перемычке течет ток I и со стороны магнитного поля на нее действует сила Ампера, равная $F = BIl$ и направленная вправо. Выберем неподвижную систему координат, в которой будем рассматривать движение перемычки (рис.7). Перемычка движется вдоль оси x. Уравнение движения имеет вид

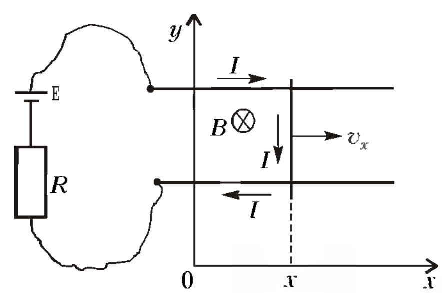


Рис. 7

$$Ma = F, \ \text{или} \ Mv_x' = BIl.$$

Запишем теперь закон Ома для замкнутого контура:

$$\mathcal{E} - Blv_x = IR.$$

Подставляя выражение для тока из этого равенства в предыдущее, получим

$$Mv_x' = \frac{(\mathcal{E} - Blv_x)}{R}Bl,$$

или, после арифметических преобразований,

$$v_x' + \frac{(Bl)^2}{MR}v_x = \frac{\mathcal{E}Bl}{MR}.$$

Это уравнение описывает зависимость скорости v_x перемыч-

(Продолжение см. на с. 34)

Свойства и признаки окружности

Хорошо известно определение окружности как геометрического места точек, равноудаленных от некоторой фиксированной точки

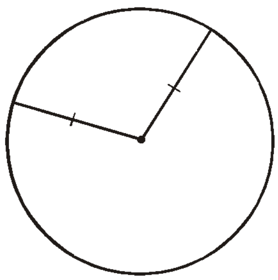


Рис. 1

(рис.1). 0днако определить окружность «м5жно и многими другими способами. Приведем несколько примеров.

1. Окружность есть геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до нескольких заданных точек постоянна.

2. Окружность есть геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек *A* и *B* постоянно и не равно 1 (рис.2). Такая окружность называ-

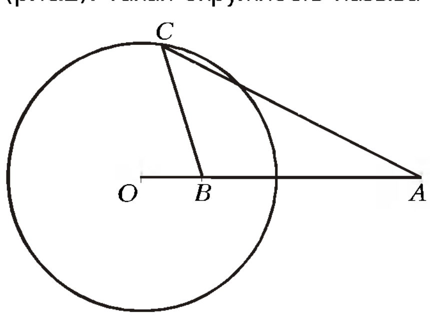


Рис. 2

ется *окружностью Аполлония* точек *A* и *B*.

Окружность обладает многими красивыми свойствами, доказательство которых не представляет труда. Сложнее определить, являются ли эти свойства также и признаками окружности, т.е. существуют ли другие кривые, обладающие ими. Перечислим сначала некоторые из свойств окружности, не присущие никаким другим кривым.

1. Два угла с вершинами на окружности, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны (рис.3).

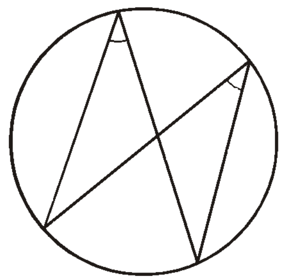


Рис. 3

2. Касательные к окружности, проведенные из одной точки, равны (рис.4).

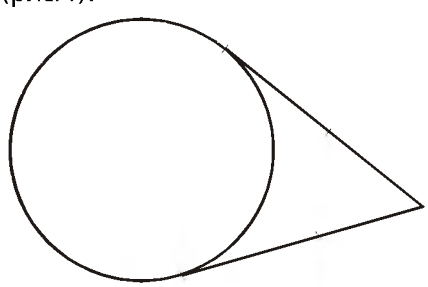


Рис. 4

3. Из всех замкнутых кривых данной длины окружность ограничивает область максимальной площади.

4. Из всех замкнутых кривых, для которых длины всех хорд не превосходят заданной величины, окружность ограничивает область максимальной площади.

5. Любые две дуги окружности равной длины можно совместить. Это свойство называется *самоконгруэнтностью*. На плоскости им, кроме окружности, обладает только прямая. Если кривая может не лежать в плоскости, оно задает также винтовую линию (рис.5). Однако замкнутых самоконгруэнтных кривых, отличных от окружности, не существует. Благодаря этому свойству меч, имеющий форму

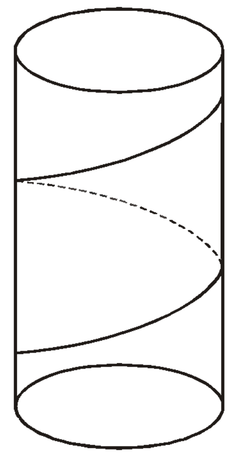


Рис. 5

дуги окружности, можно вставлять и вынимать из ножен той же формы.

6. При любом расположении двух равных окружностей на плоскости они имеют не больше двух общих точек (рис.6).

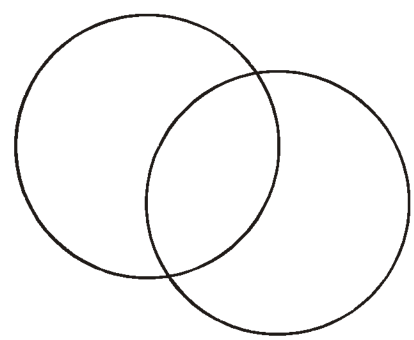


Рис. 6

7. Любая прямая, проходящая через центр окружности, является ее осью симметрии (рис.7).

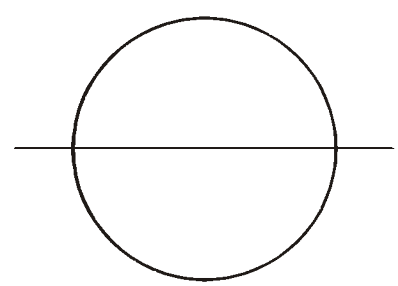


Рис. 7

Для некоторых из перечисленных свойств доказательства того, что они определяют окружность, совсем элементарны. Для других, напротив, весьма сложны. Наиболее интересны доказательства признаков 2 и 6. (Попробуйте найти их самостоятельно; если не получится — см. ниже.)

А теперь приведем несколько красивых свойств окружности, которыми обладают и другие кривые.

1. Окружность является *кривой постоянной ширины*. Это значит, что если провести к окружности две параллельные касательные, то расстояние между ними не зависит от их направления (рис.8). Как ни стран-

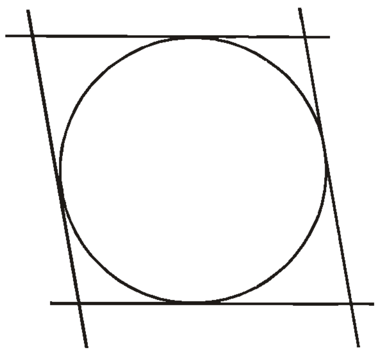


Рис. 8

но, этим свойством обладают многие кривые, в том числе довольно сильно отличающиеся от окружности. Наиболее простая из них, так называемый *треугольник Рело*, изображена на рисунке 9. Он состоит из трех дуг окружностей, центры

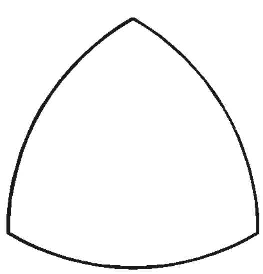


Рис. 9

которых расположены в вершинах правильного треугольника, а радиусы равны его стороне. Если изготовить несколько катков, поперечные сечения которых являются кривыми постоянной ширины, то можно перевозить на них плоскую платформу, и она не будет перемещаться вверх и вниз (рис.10). Отметим так-

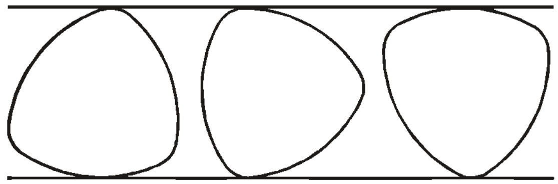


Рис. 10

же, что все кривые данной постоянной ширины имеют одну и ту же длину.

2. Любая прямая, которая делит пополам периметр окружности, делит пополам и площадь ограниченного ей круга. Разумеется, помимо окружности этим свойством обладают любые кривые, имеющие центр симметрии. Гораздо интереснее то, что обладать им могут и несимметричные кривые, в том числе и выпуклые. Одна из них изображе-

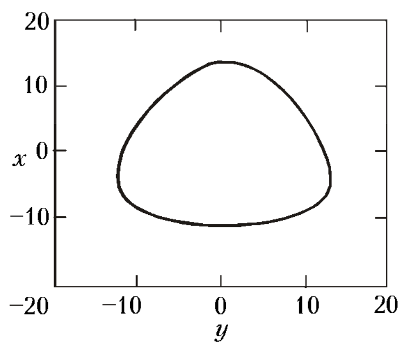


Рис. 11

на на рисунке 11. Ее можно задать следующими уравнениями:

$$x = 12\cos\varphi + \cos 2\varphi + 1/2 \cos 4\varphi,$$

$$y = 12\sin\varphi - \sin 2\varphi + 1/2 \sin 4\varphi,$$

где φ меняется от 0 до 2π.

Доказательства признаков 2 и 6.

2. Пусть дана выпуклая гладкая кривая, касательные к которой из любой точки равны. Возьмем произвольную точку A вне кривой и проведем касательные AB' и AC'.

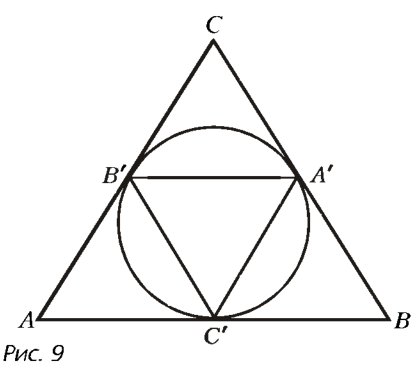


Рис. 9

Докажем, что для всех точек A', лежащих на дуге $B'C'$ (одной и той же), углы $B'A'C'$ совпадают.

Проведем через A' касательную к кривой и найдем точки B и C ее пересечения с AC' и AB' (рис.12). По условию треугольники $B'A'C$ и $C'A'B$ равнобедренные, следовательно:

$$\angle BA'C' = \frac{\pi - \angle CBA}{2},$$

$$\angle CA'B' = \frac{\pi - \angle ACB}{2}$$

$$\angle C'A'B' = \pi - \angle BA'C' - \angle CA'B' =$$

$$= \frac{\angle CBA + \angle BCA}{2} = \frac{\pi - \angle BAC}{2}$$

Таким образом угол, под которым видна хорда $B'C'$, не зависит от выбора точки на дуге. Для второй дуги доказательство аналогично. По признаку 1 кривая является окружностью.

6. Прежде всего отметим, что в любую замкнутую кривую можно вписать правильный треугольник. Действительно, возьмем на кривой произвольную точку A и повернем кривую вокруг A на $\pi/3$. Точка пересечения старого и нового положения кривой, отличная от A будет второй вершиной треугольника.

Итак пусть правильный треугольник с центром O вписан в нашу кривую. Повернем ее вокруг O на угол $2\pi/3$. Старое и новое положение кривой пересекаются, по крайней мере, в трех точках (вершинах треугольника) и, значит, совпадают, т.е. O является центром симметрии 3 порядка. Рассмотрим теперь поворот кривой вокруг O на произвольный угол ϕ. Если старое и новое положение кривой не совпадают, то число точек их пересечения кратно 3 (в силу симметрии) и не равно 0 (иначе одна кривая лежала бы целиком внутри другой, что для конгруэнтных кривых невозможно). Следовательно, кривая переходит в себя при любом повороте вокруг O, т.е. является окружностью.

А.Заславский

(Начало см. на с. 30)

ки от времени. Очевидно, что скорость перемычки достигнет постоянного значения, когда ускорение станет равным нулю. Итак, при $v_x' = 0$ $v_x = v_0$ и, следовательно,

$$\mathrm{E} = Blv_0 .$$

Теперь мы можем ответить на поставленный в задаче вопрос. Сразу после замыкания ключа в цепи течет ток

$$I_1 = \frac{\mathrm{E}}{R} = \frac{Blv_0}{R} .$$

На перемычку действует сила Ампера, равная

$$F_1 = BI_1 l = \frac{(Bl)^2 v_0}{R} .$$

Поэтому ускорение перемычки в начальный момент равно

$$a_1 = \frac{F_1}{M} = \frac{(Bl)^2 v_0}{MR} .$$

Задача 6. *Если рассматривать свое изображение в плоскопараллельной стеклянной пластинке толщиной H = 10 см, то можно увидеть ряд последовательных изображений лица, отстоящих друг от друга на L = 14 см. Чему равен показатель преломления стекла пластинки? (1999 г.)*

Пусть точка A является объектом, принадлежащим нашему лицу. Проведем произвольно луч света от точки A под малым углом падения α на верхнюю поверхность пластинки (рис.8). Луч частично отразится в точке B (луч *1*), частично испытает преломление под углом β, а затем, частично отразившись от нижней поверхности пластинки в точке F, снова направится к верхней поверхности пластинки. Здесь он, частично отразившись в точке D, выходит в виде преломленного луча (луч *2*). Таким образом будут происходить многократные отражения и преломления.

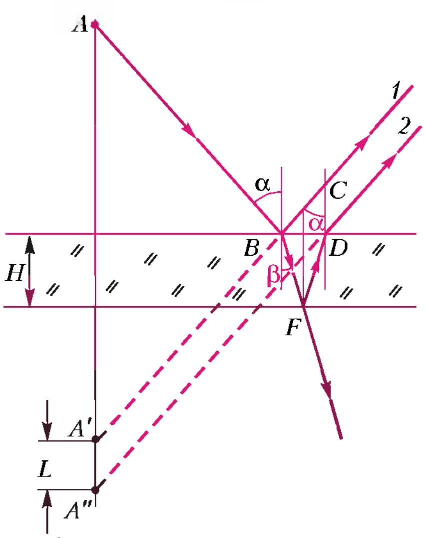


Рис. 8

Продолжения лучей *1* и *2* дают два первых мнимых изображения точки A – точки A' и A'', отстоящие друг от друга на L. Очевидно, что и все последующие мнимые изображения точки A тоже будут располагаться на одинаковых расстояниях L друг от друга.

Из треугольника BFD найдем длину отрезка BD:

$$BD = 2H \operatorname{tg}\beta ,$$

а из треугольника BCD найдем расстояние L между изображениями, равное длине отрезка CD:

$$L = CD = BD \operatorname{ctg}\alpha = 2H \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} \approx 2H \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{2H}{n} .$$

Отсюда получаем

$$n = \frac{2H}{L} = 1{,}43 .$$

Задача 7. *Маленький грузик массой m на пружине жесткостью k (рис.9) совершает гармонические колебания относительно главной оптической оси тонкой плосковогнутой линзы с фокусным расстоянием $-F$ ($F > 0$). Линза плотно прижата к вертикально расположенному плоскому зеркалу. Расстояние $L = 4{,}5F$. 1) На каком расстоянии от зеркала находится изображение грузика в данной оптической системе? 2) С какой скоростью изображение грузика в системе линза – зеркало пересекает главную оптическую ось линзы, если амплитуда колебаний груза равна A? (1998 г.)*

1) На рисунке 9 изображен ход лучей, когда груз – точка B – находится на максимальном расстоянии A от главной оптической оси системы $O'O''$. Изображение грузика после

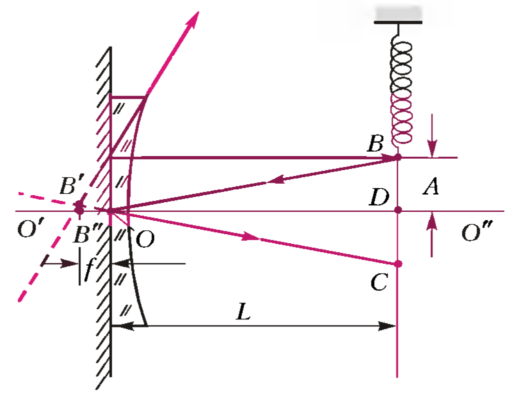


Рис. 9

двойного прохождения лучами линзы и зеркального отражения от плоского зеркала получается в точке B' на расстоянии f от оптического центра системы. Из формулы линзы

$$\frac{1}{L} + \frac{1}{f} = -\frac{2}{F} ,$$

где двойка в правой части означает двойное прохождение лучами линзы, найдем

$$f = -\frac{LF}{2L + F} = -0{,}45F .$$

Знак «минус» говорит о том, что изображение мнимое.

2) На нашем рисунке расстояние от грузика до главной оптической оси равно A, а расстояние от изображения (точка B') до оси равно $B'B''$ (точка $B'' \in O'O''$). Из подобия треугольников $B'OB''$ и DOC (O – оптический центр линзы) следует, что

$$\frac{A}{B'B''} = \frac{L}{f} = \frac{2L + F}{F} .$$

Это соотношение для расстояний до оси грузика и его изображения, очевидно, справедливо и для произвольного момента, когда расстояние грузика до оси равно $A \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t$, где $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$ – циклическая частота колебаний. Расстояние от изображения до оси обозначим через y ($y = B'B''$). Тогда получим

$$\frac{A \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t}{y} = \frac{2L + F}{F} = 10 , \text{ и } y = \frac{A \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t}{10} .$$

Продифференцируем это выражение по времени:

$$y' = -\frac{A\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\, t}{10} .$$

Грузик будет пересекать главную оптическую ось в те моменты, когда

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\,t = \frac{\pi}{2} + \pi N = \frac{(2N+1)\pi}{2}, \text{ где } N = 0,\ 1,\ 2\ldots$$

В эти моменты

$$\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t_N = (-1)^N,$$

и скорость пересечения изображением главной оптической оси равна

$$y'_N = v_N = (-1)^{N+1}\,\frac{A\sqrt{\dfrac{k}{m}}}{10} = (-0{,}1)^{N+1} A\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Отрицательный знак означает, что скорость шарика направлена вниз.

Упражнения

1. Человек массой m, упираясь ногами в ящик массой M, подтягивает его с помощью каната, перекинутого через блок, по наклонной плоскости с углом наклона α (рис.10). С какой минимальной силой надо тянуть канат человеку, чтобы подтянуть ящик к блоку? Коэффициент трения скольжения между ящиком и наклонной плоскостью μ. Части каната, не соприкасающиеся с блоком, параллельны наклонной плоскости. Массой блока и каната пренебречь. (1998 г.)

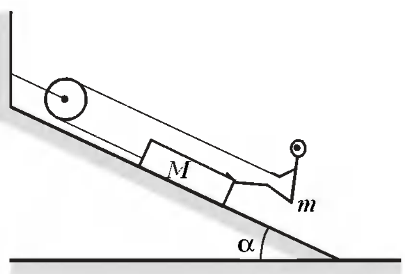


Рис. 10

2. Найдите массу кислорода, содержащегося в атмосфере Земли. Известно, что температура воздуха вблизи поверхности Земли T = 290 К, радиус Земли $R_З = 6370$ км, а ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Масса кислорода, содержащегося в одном литре воздуха, взятого у поверхности Земли, равна $\rho = 0{,}26$ г/л. Процентное содержание кислорода (по массе) в атмосфере Земли считать постоянным. Толщина атмосферы много меньше радиуса планеты. (1997 г.)

3. Проволочный контур в виде квадрата со стороной a и общим омическим сопротивлением R расположен на горизонтальной поверхности стола (рис. 11). Часть контура находится в однородном магнитном поле с индукцией, равной B_0 и перпендикулярной плоскости контура. Контур неподвижен и входит в область однородного поля на глубину b. После выключения магнитного поля контур приобретает некоторый импульс. Определите величину и направление этого импульса, полагая, что за время спадания магнитного поля смещение контура пренебрежимо мало. Самоиндукцией контура пренебречь. (1999 г.)

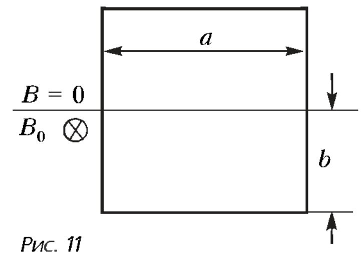


Рис. 11

4. С помощью собирающей линзы с фокусным расстоянием F на экране, расположенном на расстоянии $L = 4{,}9F$ от циферблата ручных часов, получено уменьшенное изображение секундной стрелки часов, длина которой R = 1,5 см. Главная оптическая ось линзы перпендикулярна экрану и плоскости циферблата и проходит через ось вращения секундной стрелки. Чему равна линейная скорость перемещения конца изображения стрелки на экране? (1997 г.)

Иррациональные неравенства

А.ЕГОРОВ, Ж.РАББОТ

В прошлом номере журнала была помещена статья о решении иррациональных уравнений. В данной статье те же идеи применяются для решения неравенств, содержащих квадратные радикалы; при этом появляются дополнительные трудности.

Дело в том, что нам придется, как и в случае иррациональных уравнений, избавляться от радикалов с помощью почленного возведения неравенства в квадрат. Но если при решении уравнений мы могли в результате этой операции получить посторонние корни, которые, как правило, легко проверить, и не могли потерять корни, то корни неравенства при бездумном возведении в квадрат могут одновременно и теряться, и приобретаться.

Например, возведя в квадрат верное неравенство $-1 < 2$, мы получим верное неравенство $1 < 4$; из верного неравенства $-5 < 2$ получается уже неверное неравенство $25 < 4$; из неверного неравенство $1 < -2$ получим верное неравенство $1 < 4$; наконец, из неверного неравенства $5 < 2$ получается неверное неравенство $25 < 4$. Вы видите, что возможны все комбинации верных и неверных неравенств!

Однако верно основное используемое здесь утверждение: *если обе части неравенства неотрицательны, то оно равносильно неравенству, полученному из него почленным возведением в квадрат.*

Поскольку, в отличие от уравнений, где часто была возможна проверка найденных «кандидатов в ответ», при решении неравенств, как правило, бесконечно много решений и проверить их все принципиально невозможно, решая неравенства, надо тщательно следить за равносильностью всех переходов.

Простейшие неравенства

Так мы называем неравенства следующих трех типов:

1) $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$; 2) $\sqrt{f(x)} > g(x)$; 3) $\sqrt{f(x)} < g(x)$.

Нестрогие неравенства, аналогичные выписанным выше (со знаками $\le$ и $\ge$), мы будем относить к соответствующему типу – так, оба неравенства

$$\sqrt{5x+8} > \sqrt{4x^2-1} \quad\text{и}\quad \sqrt{5x+8} \ge \sqrt{4x^2-1}$$

относятся к первому типу и т.п.

Поскольку обе части неравенства 1) неотрицательны, оно, очевидно, равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$$

(понятно, что неравенство $f(x) \ge 0$ выполняется при этом автоматически).

Рассуждая аналогично для остальных случаев, получим

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \ge 0; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\sqrt{f(x)} \ge \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ g(x) \ge 0; \end{cases} \qquad (1')$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) > g^2(x); \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0; \end{cases} \end{array}\right. \qquad (2)$$

$$\sqrt{f(x)} \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \ge g^2(x); \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0; \end{cases} \end{array}\right. \qquad (2')$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le f(x) < g^2(x), \\ g(x) > 0; \end{cases} \qquad (3)$$

$$\sqrt{f(x)} \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le f(x) \le g^2(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases} \qquad (3')$$

Мы видим, что самый громоздкий – второй случай. Это происходит из-за того, что здесь возможны оба варианта – когда правая часть, $g(x)$, неотрицательна и когда она меньше нуля. В первом варианте обе части исходного неравенства неотрицательны, поэтому его можно почленно возвести в квадрат, а во втором возводить в квадрат нельзя (правая часть меньше нуля), но в этом нет никакой необходимости – ведь тогда неотрицательная левая часть автоматически больше отрицательной правой.

Выписанные схемы (1) – (3′) – наш основной инструмент при окончании решения иррационального неравенства, к ним сводится решение практически любой такой задачи. Разберем несколько примеров.

Пример 1. *Решите неравенство* $\sqrt{2x+1} > \sqrt{2-3x}$.

Решение. Согласно схеме (1), данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x+1 > 2-3x, \\ 2-3x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{5}, \\ x \le \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{5} < x \le \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{5} < x \le \dfrac{2}{3}$.

Пример 2. *Решите неравенство* $\sqrt{2x+1} \ge \sqrt{1-x^2-x}$.

Решение. Действуя по схеме (1′), приходим к системе

$$\begin{cases} 2x+1 \ge 1-x^2-x, \\ 1-x^2-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x \ge 0, & (a) \\ x^2+x-1 \le 0. & (b) \end{cases}$$

Из неравенства (a):

$$x \le -3;\ x \ge 0,$$

из неравенства (b):

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

после чего без труда получаем ответ.

Ответ: $0 \le x \le \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Пример 3. *Решите неравенство* $\sqrt{x+2} > x$.

Решение. Действуем по схеме (2).

Если $x < 0$, данное неравенство выполняется при всех допустимых значениях неизвестного, т.е. при

$$x+2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -2.$$

Таким образом, все $-2 \le x < 0$ – решения данного неравенства (это мы решили вторую систему из совокупности схемы (2)).

Если же $x \ge 0$, данное неравенство равносильно неравенству

$$x+2 > x^2 \quad \Leftrightarrow x^2-x-2 < 0 \quad \Leftrightarrow -1 < x < 2.$$

Таким образом, все $0 \le x < 2$ – также решения данного неравенства (это решения первой системы совокупности схемы (2)).

Объединяя полученные решения, найденные в обоих случаях, приходим к ответу.

Ответ: $-2 \le x < 2$.

Пример 4. *Решите неравенство* $\sqrt{x^2-3x+1} > x+1$.

Решение. Снова действуем по схеме (2). Если правая часть отрицательна, т.е. $x < -1$, подкоренное выражение положительно (как, очевидно, при всех отрицательных значениях переменной – ведь тогда оно состоит из трех положительных слагаемых), и данное неравенство выполняется. Таким образом, все $x < -1$ – решения данного неравенства. Пусть теперь $x \ge -1$. Тогда можно возвести данное неравенство в квадрат и получится равносильное данному неравенство $x < 0$. Таким образом, все $-1 \le x < 0$ – также решения данного неравенства.

Ответ: $x < 0$.

Пример 5. *Решите неравенство* $\sqrt{x+1} \ge x+5$.

Решение. Применим схему (2′). Заметим, что при всех допустимых значениях x, т.е. при $x \ge -1$, правая часть данного неравенства положительна, так что вторая система схемы (2′) не имеет решений. Итак, в ОДЗ обе части данного неравенства неотрицательны, поэтому оно равносильно неравенству $x+1 \ge x^2+10x+25$, не имеющему решений.

Ответ: нет решений.

Замечание. Другое решение этой задачи можно получить, сделав замену $t = \sqrt{x+1}$, т.е. $x = t^2-1$, где $t \ge 0$. Тогда данное неравенство приведется к квадратному неравенству $t \ge t^2+4$, не имеющему не только неотрицательных, а и вообще никаких решений.

Пример 6. *Решите неравенство* $\sqrt{2x+1} \ge 2x^2-x-1$.

Решение. Снова работает схема (2′). Разложим предварительно на множители правую часть. Неравенство примет вид

$$\sqrt{2x+1} \ge (2x+1)(x-1). \ (a)$$

Воспользуемся наличием в правой части неравенства (a) множителя, равного подкоренному выражению. Подкоренное выражение (и одновременно первый сомножитель правой части) неотрицательно, если $x \ge -0{,}5$; это и есть ОДЗ. Поэтому если $-0{,}5 \le x < 1$, неравенство (a) выполняется – неотрицательная левая часть больше отрицательной правой. Если же $x \ge 1$, после возведения обеих частей неравенства (a) в квадрат мы приходим к равносильному неравенству (a) соотношению $2x + 1 \ge (2x+1)^2(x-1)^2$, которое при рассматриваемых ограничениях $x \ge 1$ равносильно неравенству

$$1 \ge (2x+1)(x^2 - 2x + 1) \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 \le 0 \Leftrightarrow x^2(2x-3) \le 0.$$

Так как при $x \ge 1$ первый сомножитель левой части последнего неравенства положителен, получаем $2x - 3 \le 0$. Итак, второй случай дает решения $1 \le x \le 1{,}5$.

Ответ: $-0{,}5 \le x \le 1{,}5$.

Пример 7. *Решите неравенство* $\sqrt{5x-4} < x$.

Решение. Воспользуемся схемой (3). Согласно ей, наша задача сводится к решению двойного неравенства $0 \le 5x - 4 < x^2$ при условии $x > 0$. Таким образом, надо решить систему

$$\begin{cases} x > 0, \\ 5x - 4 \ge 0, \\ x^2 - 5x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \ge \dfrac{4}{5}, \\ x < 1;\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{4}{5}; 1\right) \cup (4; +\infty).$$

Ответ: $0{,}8 \le x < 1$; $x > 4$.

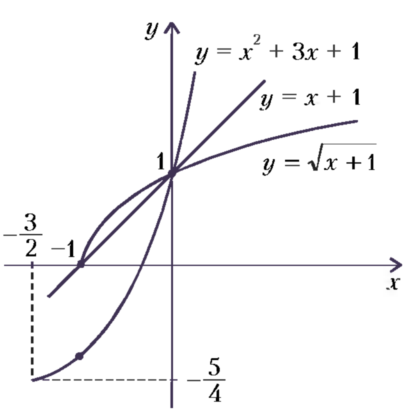
Пример 8. *Решите неравенство* $\sqrt{x+1} \le x^2 + 3x + 1$.

Прямое применение схемы $(3')$ приводит (после возведения данного неравенства в квадрат) к необходимости найти корни многочлена четвертой степени, причем легко подобрать лишь один его корень, $x = 0$ (он получится из-за взаимного уничтожения свободных членов, равных 1, в обеих частях полученного неравенства), а корни оставшегося кубического многочлена найти очень непросто – они не рациональны.

Решение. Заметим, что график левой части данного неравенства это верхняя ветвь параболы, ось симметрии которой – ось абсцисс, а вершина – точка $(-1; 0)$; график правой части это парабола, ось которой параллельна оси ординат, а вершина – точка $\left(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{5}{4}\right)$.

Воспользуемся теперь тем, что график левой части имеет «выпуклость вверх» (т.е. лежит выше любой своей хорды – отрезка, соединяющего любые две точки графика), а правая часть – «выпуклость вниз».

Мы уже установили, что графики левой и правой частей имеют общую точку с абсциссой, равной нулю. Поэтому становится очевидным, что луч с началом в точке $(-1; 0)$, проходящий через точку $(0; 1)$, разделяет два случая: левее общей точки график левой части выше графика правой, а правее – наоборот (это хорошо видно на рисунке).



В задаче требуется найти, при каких значениях переменной график левой части ниже графика правой. Это легко находится из рисунка.

Ответ: $[0; +\infty)$.

Упражнения. Решите неравенства.

1. $x < \sqrt{2-x}$. **2.** $x + 1 > \sqrt{2+x}$. **3.** $x + \dfrac{9}{8} > \sqrt{x+1}$.

4. $2x - 3 < 2\sqrt{x^2 - 9}$. **5.** $\sqrt{x^2+3} \ge \sqrt{3 - x - 2x^2}$.

6. $\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} > 1 - x$. **7.** $\sqrt{4 - 4x^3 + x^6} > x - \sqrt[3]{2}$.

8. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} > \dfrac{1}{2-x}$. **9.** $\sqrt{-x^2 - 4x} + x + 1 > 0$.

10. $\sqrt{-x^2 + x + 2} + 2x - 1 > 0$.

Более сложные неравенства

В этом разделе мы начнем решать более сложные задачи, стараясь свести их решение к стандартным ситуациям – к простейшим неравенствам, рассмотренным выше. Приемы сведения во многом аналогичны применяемым при решении иррациональных уравнений.

Если в неравенстве встречаются два квадратных радикала, обычно приходится возводить неравенство в квадрат дважды, конечно, обеспечивая при этом необходимые для проведения этой операции условия.

Пример 9. *Решите неравенство* $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} > 2$.

Первое решение. Перенесем второй радикал в правую часть, чтобы обе части неравенства стали неотрицательными и его можно было возвести в квадрат (не рассматривая при этом два случая):

$$\sqrt{2x+3} > \sqrt{x-2} + 2 \Leftrightarrow 2x + 3 >$$

$$> x - 2 + 4\sqrt{x-2} + 4 \Leftrightarrow x + 1 > 4\sqrt{x-2}. \quad (*)$$

Мы пришли к простейшему стандартному неравенству (см. схему (3) в первом разделе статьи):

$$(a) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le 16(x-2) < x^2 + 2x + 1, \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2, \\ x^2 - 14x + 33 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2, \\ x < 3;\ x > 11 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \le x < 3, \\ x > 11. \end{array}\right.$$

Замечание. При получении неравенства $(*)$ мы не выписывали допустимые значения неизвестного, но в этом не было необходимости, так как там фигурировал $\sqrt{x-2}$, который существует при $x \ge 2$, но при этих значениях x существует и $\sqrt{2x+3}$.

Второе решение. Сделаем замену переменной: $t = \sqrt{x-2} \ge 0$. Тогда $x = t^2 + 2$, и данное неравенство приводится к стандартному виду $\sqrt{2t^2+7} > t + 2$. Решив это неравенство по схеме (2), получим $0 \le t < 1$, $t > 3$. Остается сделать обратную замену и найти x.

Ответ: $x \in [2; 3) \cup (11; +\infty)$.

Пример 10. *Решите неравенство* $\dfrac{\sqrt{x^2-25}}{x+6} < 1$.

Решение. Заметим, что для избавления от радикала достаточно возвести данное неравенство в квадрат. Но для этого необходима неотрицательность обеих его частей, что выполняется лишь при условии $x + 6 > 0$ (ведь все остальные выражения, входящие в неравенство, неотрицательны). Но при этом условии можно умножить данное неравенство на положительное выражение $x + 6$.

Итак, если $x > -6$, данное неравенство преобразуется и решается так:

$$\begin{cases} -6 < x \le -5; x \ge 5, \\ \sqrt{x^2 - 25} < x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < x \le -5; x \ge 5, \\ x^2 - 25 < x^2 + 12x + 36 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6 < x \le -5; x \ge 5, \\ x > -\dfrac{61}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{61}{12} < x \le -5, \\ x \ge 5. \end{array} \right.$$

Если же $x < -6$, данное неравенство выполняется, так как его отрицательная левая часть меньше положительной правой.

Ответ: $x \in (-\infty; -6) \cup \left(-\dfrac{61}{12}; -5\right] \cup [5; +\infty)$.

Решим еще одну задачу. Хотя новые идеи здесь не встречаются, важно не упустить многочисленные детали (ОДЗ, схемы и т.п.).

Пример 11. *Решите неравенство*

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} < 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

Решение. Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 2 \ge 0, \\ x^2 - x + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -2, \\ x \ge -1. \end{array} \right.$$

Поскольку обе части данного неравенства неотрицательны, после возведения его в квадрат получим неравенство, равносильное ему в ОДЗ:

$$x^2 + 3x + 2 < 1 + 2\sqrt{x^2 - x + 1} + x^2 - x + 1 \Leftrightarrow 2x < \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

Для последнего неравенства в ОДЗ работает схема (2):

$$2x < \sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0, \\ 4x^2 < x^2 - x + 1 \end{cases} \\ x < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0, \\ 3x^2 + x - 1 < 0 \end{cases} \\ x < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le x < \dfrac{-1 + \sqrt{13}}{6}, \\ x < 0. \end{array} \right. \Leftrightarrow x < \dfrac{\sqrt{13} - 1}{6},$$

Осталось учесть ОДЗ и получить ответ.

Ответ: $x \le -2$; $-1 \le x < \dfrac{\sqrt{13} - 1}{6}$.

И в заключение этого раздела решим три более трудные задачи. Они предлагались на вступительных экзаменах в МГУ в 1975 году: первая – на отделении политической экономии экономического факультета, вторая – на геологическом факультете, третья – на отделении экономической кибернетики экономического факультета. Из приведенных решений можно увидеть, как важно владеть хорошей техникой вычислений и преобразований, а также находить удачную замену переменной.

Пример 12. *Решите неравенство*

$$\sqrt{x - \frac{1}{2}} + \frac{x + 1}{4} < \sqrt{2x - 1 + \frac{(x + 1)^2}{8}}.$$

Решение. Заметим сначала, что ОДЗ есть луч $x \ge 0{,}5$. Затем, поскольку подкоренное выражение в правой части данного неравенства можно записать как $2\left(\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{x + 1}{4}\right)^2\right)$, удобно сделать замену переменной, причем ввести сразу две новые переменные:

$$\sqrt{x - \frac{1}{2}} = u \ge 0, \quad \frac{x + 1}{4} = v.$$

Отметим, что в ОДЗ второе новое переменное, v, положительно. Данное неравенство после замены примет вид

$$u + v < \sqrt{2(u^2 + v^2)} \Leftrightarrow u^2 + 2uv + v^2 <$$

$$< 2(u^2 + v^2) \Leftrightarrow (u - v)^2 > 0 \Leftrightarrow u \ne v.$$

Вернемся к старым переменным:

$$\sqrt{x - \frac{1}{2}} \ne \frac{x + 1}{4}.$$

Решая полученное неравенство, находим

$$x \ne 7 \pm \sqrt{20}.$$

Ответ:

$$x \in \left[\frac{1}{2}; 7 - 2\sqrt{10}\right) \cup \left(7 - 2\sqrt{10}; 7 + 2\sqrt{10}\right) \cup \left(7 + 2\sqrt{10}; +\infty\right).$$

Пример 13. *Решите неравенство*

$$\sqrt{(x - 3)(-x + 5)} > -\sqrt{x - 3} - 1 + \sqrt{-x + 5}.$$

Решение. Преобразовав данное неравенство к виду

$$\sqrt{(x - 3)(-x + 5)} + 1 > \sqrt{-x + 5} - \sqrt{x - 3}, \qquad (a)$$

мы добьемся, во-первых, того, что левая часть неравенства стала положительной, а во-вторых, если возвести последнее неравенство почленно в квадрат, то, поскольку в сумме подкоренных выражений правой части неизвестное уничтожится, получится неравенство, квадратное относительно $\sqrt{(x - 3)(-x + 5)}$, – это и есть основная идея нашего решения. Теперь надо ее аккуратно осуществить.

Если правая часть неравенства (a) отрицательна, все допустимые значения неизвестного будут его решениями – положительная левая его часть будет больше отрицательной правой:

$$\begin{cases} 3 \le x \le 5, \\ \sqrt{-x + 5} < \sqrt{x - 3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le x \le 5. \\ -x + 5 < x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le x \le 5, \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 < x \le 5.$$

Если же правая часть неравенства (a) неотрицательна, его можно в ОДЗ возвести почленно в квадрат и получить остальные решения:

$$\begin{cases} 3 \le x \le 5, \\ \sqrt{-x + 5} \ge \sqrt{x - 3}, \\ (x - 3)(-x + 5) + 2\sqrt{(x - 3)(-x + 5)} + 1 > \\ > (-x + 5) - 2\sqrt{(x - 3)(-x + 5)} + (x - 3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le x \le 4, \\ (x - 3)(-x + 5) + 4\sqrt{(x - 3)(-x + 5)} - 1 > 0. \end{cases} \qquad (b)$$

Решим отдельно второе неравенство системы (b), введя, как уже было сказано, обозначение $\sqrt{(x - 3)(-x + 5)} = t \ge 0$:

$$\begin{cases} t \ge 0, \\ t^2 + 4t - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0, \\ t < -2 - \sqrt{5}; t > -2 + \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow t > \sqrt{5} - 2.$$

Вернемся к старой переменной:

$$\sqrt{(x-3)(-x+5)} > \sqrt{5}-2 \Leftrightarrow x^2-8x+24-4\sqrt{5} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4-2\sqrt{\sqrt{5}-2} < x < 4+2\sqrt{\sqrt{5}-2}.$$

Отметим, что первый равносильный переход в последней цепочке преобразований – то, что остается от (довольно громоздкой!) схемы (2), если в ней $g(x)$ просто положительное число.

Для того чтобы решить систему (*b*) и получить ответ, надо заметить, что решения ее второго неравенства – интервал с центром в точке 4 радиуса $r = 2\sqrt{\sqrt{5}-2}$, поэтому осталось только сравнить числа 3 и $(4-r)$. Делаем это следующим образом: подставляем $x=3$ в квадратный трехчлен, фигурировавший в последнем решенном нами неравенстве:

$$3^2-8\cdot 3+24-4\sqrt{5} = 9-4\sqrt{5} = \sqrt{81}-\sqrt{80} > 0.$$

Итак, число 3 расположено вне интервала корней квадратного трехчлена, поэтому оно меньше меньшего корня трехчлена, и мы можем завершить решение системы (*b*):

$$4-2\sqrt{\sqrt{5}-2} < x \le 4.$$

Учитывая найденные ранее другие решения данного неравенства, получаем ответ.

Ответ: $4-2\sqrt{\sqrt{5}-2} < x \le 5$.

Пример 14. *Решите неравенство* $\sqrt{9-\frac{9}{x}} < x-\sqrt{x-\frac{9}{x}}$.

Решение. ОДЗ данного неравенства: $-3 \le x < 0$; $x \ge 3$.

Заметим, во-первых, что при $x < 0$ данное неравенство не имеет решений: его неотрицательная левая часть не может быть меньше отрицательной правой. Поэтому осталось решить данное неравенство при $x \ge 3$.

Во-вторых, при $x \ge 3$ правая часть данного неравенства положительна: от числа, большего или равного 3, отнимается число, меньшее $\sqrt{3}$. Поэтому обе части данного неравенства в этом случае неотрицательны и его можно возвести в квадрат:

$$9-\frac{9}{x} < x^2-2x\sqrt{x-\frac{9}{x}}+x-\frac{9}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \left(x^2-9\right)-2x\sqrt{\frac{x^2-9}{x}}+x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-9\right)-2\sqrt{\left(x^2-9\right)x}+x > 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-9}-\sqrt{x}\right)^2 > 0.$$

Последнее неравенство при наших ограничениях равносильно системе

$$\begin{cases} x \ge 3, \\ \sqrt{x^2-9} \ne \sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3, \\ x \ne \dfrac{1+\sqrt{37}}{2}. \end{cases}$$

Это и есть ответ.

Ответ: $x \in \left[3; \frac{1+\sqrt{37}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{37}}{2}; +\infty\right)$.

Упражнения. Решите неравенства.

11. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2-x} > 1$. **12.** $\sqrt{2-x}-\sqrt{x} < 1$.

13. $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}} < \frac{1}{x}-\frac{1}{2}$. **14.** $\frac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1$.

15. $\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x}$.

16. $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2} > 1$.

17. $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+x} > 3$.

18. $\sqrt{x-1}+x-3 \ge \sqrt{2(x-3)^2+2x-2}$.

19. $\sqrt{x+7}-1 < \sqrt{-x-5}+\sqrt{(x+7)(-x-5)}$.

20. $\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}} > \frac{x-1}{x}$.

Домножим на сопряженное

Напомним, что выражения $\alpha\sqrt{a}-\beta\sqrt{b}$ и $\alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b}$ называются сопряженными друг другу. Нам понадобится хорошо известное свойство этих выражений: их произведение $\alpha^2 a-\beta^2 b$ уже не содержит корней из a и b. Поэтому в ряде задач вместо возведения в квадрат, приводящего к слишком громоздким выражениям, разумнее умножить обе части неравенства на выражение, сопряженное одной из них.

Пример 15. *Решите неравенство*

$$\sqrt{5x+1}-\sqrt{x+3} < 2x-1.$$

Решение. Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} 5x+1 \ge 0, \\ x+3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge -\frac{1}{5}.$$

Домножим обе части данного неравенства на выражение, сопряженное его левой части и, очевидно, положительное в ОДЗ:

$$(5x+1)-(x+3) < (2x-1)\left(\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(2x-1) < (2x-1)\left(\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3}\right).$$

Дальнейшее решение зависит, очевидно, от знака общего множителя $(2x-1)$ левой и правой частей полученного неравенства.

Если он меньше нуля, т.е. $-\frac{1}{5} \le x < \frac{1}{2}$, сократив на этот отрицательный множитель, приходим к неравенству $\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3} < 2$, из которого находим (например, с помощью подстановки $\sqrt{x+3} = t \ge 0$ или прямым возведением в квадрат – ведь обе части этого неравенства положительны) $-\frac{1}{5} \le x < \frac{4-\sqrt{19}}{2}$ (обязательно проделайте все выкладки и убедитесь в правильности этого ответа).

Во втором случае, если общий множитель положителен, т.е. при $x > \frac{1}{2}$, после сокращения на него получаем неравенство $\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3} > 2$, справедливое при всех этих значениях x: ведь тогда верны оценки

$$\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3} > \sqrt{\frac{5}{2}+1}+\sqrt{\frac{1}{2}+3} = \sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}} > 1+1 = 2.$$

Осталось указать, что в третьем возможном случае — если общий множитель равен нулю, — неравенство не выполняется: мы получаем тогда $0 > 0$, что неверно.

Ответ: $x \in \left[-\frac{1}{5}; \frac{4-\sqrt{19}}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Замечание. Конечно, примененный способ привел к успеху из-за того, что разность подкоренных выражений оказалась кратной правой части данного неравенства. Это обстоятельство можно считать признаком, по которому можно оценивать целесообразность применения такого приема.

Вы, возможно, заметили, что последний пример получен из примера 9 нашей статьи «Иррациональные уравнения» (см. «Квант» №5 за 2001 г.) заменой знака равенства на знак неравенства. Ниже помещено несколько упражнений, часть из них получена тем же способом. Вы можете аналогично использовать и остальные задачи соответствующего раздела указанной статьи.

Упражнения. Решите неравенства.

21. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}>1$. **22.** $\sqrt{3x}-\sqrt{1+x}<1-2x$.

23. $\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x}>\dfrac{2x^2-x-1}{2}$.

24. $\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x+1}>\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+2x+4}$.

Использование некоторых свойств функций

Начнем с примера.

Пример 16. *Решите неравенство* $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-1}<6$.

Решение. Заметим, что левая часть неравенства – возрастающая функция (этот достаточно очевидный факт в случае необходимости, например на экзамене, легко доказать). Угадав, при каком значении x левая часть равна правой (конечно, при $x=5$), и учтя ОДЗ исходного неравенства ($x\ge1$), можно записать ответ.

Ответ: $1\le x<5$.

Мы не выписали подробно рассуждение, которое привело к ответу: поскольку левая часть – возрастающая функция (обозначим ее через $f(x)$), при $1\le x<5$ имеем $f(5)<f(x)=6$, т.е. данное неравенство выполняется, а при $x\ge5$ по той же причине (из-за возрастания функции) $f(5)\le f(x)$, т.е. данное неравенство не выполняется; так как исследование проведено при всех допустимых значениях x, решение закончено.

Рассуждая аналогично, можно выписать общее применяемое в этих случаях утверждение:

Пусть на промежутке $(a;\,b)$ задана возрастающая функция $y=f(x)$ и требуется решить неравенство $f(x)<c$ (или $f(x)>c$). Если x_0 – корень уравнения $f(x)=c$, причем $a<x_0<b$, то решения данного неравенства – весь промежуток $(a;x_0)$ (соответственно, промежуток $(x_0;b)$). (Единственность корня следует из монотонности функции f.) Понятно, что если требуется решить нестрогое неравенство, то при том же рассуждении в ответ войдет и число $f(x_0)$, а если функция задана на замкнутом или на полуоткрытом промежутке, то в ответ войдут соответствующие концы промежутка.

Пример 17. *Решите неравенство*

$$\sqrt[4]{x-2}+\sqrt{x-3}>\sqrt{2-\sqrt[4]{x}}.$$

Решение. Найдем допустимые значения переменного:

$$\begin{cases} x-2\ge0,\\ x-3\ge0,\\ 2-\sqrt[4]{x}\ge0,\\ x\ge0\end{cases}\Leftrightarrow 3\le x\le16.$$

Левая часть данного неравенства (обозначим ее через $f(x)$) — возрастающая функция, правая (назовем ее $g(x)$) – убывающая. При $x=3$ имеем

$$f(3)=1>g(3)=\sqrt{2-\sqrt[4]{3}},$$

т.е. данное неравенство выполняется. Но при увеличении x левая часть становится (в силу возрастания) еще больше, а правая (из-за убывания) – еще меньше, т.е. неравенство между соответствующими значениями функций $f(x)$ и $g(x)$ сохранится.

Ответ: $3\le x\le16$.

В примере 17 мы встретились с новой ситуацией: надо было на промежутке $[a;\,b]$ решить неравенство $f(x)>g(x)$, где левая часть возрастала, а правая убывала. Мы выяснили, что на левом конце промежутка неравенство выполняется, и сделали вывод, что тогда оно выполняется и на всем промежутке. В несколько более общей ситуации можно сформулировать такое обобщение нашего стандартного рассуждения:

Пусть на промежутке $(a;\,b)$ заданы возрастающая функция $y=f(x)$ и убывающая функция $y=g(x)$ и требуется решить неравенство $f(x)>g(x)$. Если x_0 – корень уравнения $f(x)=g(x)$, лежащий на рассматриваемом промежутке, то решения данного неравенства – все числа из промежутка $(x_0;b)$.

Упражнение 25. а) Докажите утверждение, сформулированное в предыдущем абзаце текста.

б) Рассмотрите различные варианты знаков неравенства (строгих и нестрогих, а также типов промежутков (включающих концы или нет), которые могут встретиться в рассуждении п. а), и для каждого варианта найдите ответ.

в) Рассмотрите все ситуации п. б), если на рассматриваемом промежутке не существует корня x_0 уравнения $f(x)=g(x)$.

Пример 18. *Решите неравенство*

$$\sqrt{x+\sqrt{x^3}+\sqrt{x^5}}-\sqrt{3}<\sqrt{x}-1.$$

Решение. Допустимые значения неизвестного – все неотрицательные числа. Заметим, что обе части данного неравенства – возрастающие функции, поэтому пока что рассматриваемый метод неприменим. Но попробуем преобразовать данное неравенство. Оно равносильно такому:

$$\sqrt{x+x\sqrt{x}+x^2\sqrt{x}}-\sqrt{x}<\sqrt{3}-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}+x\sqrt{x}}-1\right)<\sqrt{3}-1.$$

В последнем полученном нами неравенстве справа – константа, а слева – возрастающая функция (она равна произведению двух неотрицательных возрастающих функций). Осталось заметить, что при $x=1$ левая часть равна правой, поэтому, в силу наших стандартных утверждений, ответ – все допустимые значения x, меньшие 1.

Ответ: $0\le x<1$.

Замечания. 1) При доказательстве возрастания левой части преобразованного неравенства в примере 18 мы существенно использовали *неотрицательность* возрастающих сомножителей. Без этого условия утверждение о возрастании произведения возрастающих функций может быть неверным: например, если $x<0$, произведение возрастающей функции $y=x$ на себя – функция $y=x^2$, – как известно, убывает. 2) Для доказательства монотонности можно, конечно, использовать и производную функции.

Упражнения. Решите неравенства.

26. $x^5+2x^4+\sqrt{x}>4$. **27.** $x^{15}+3\sqrt[4]{x-1}\ge1$.

28. $\sqrt{x+3}+3\sqrt{3x-2}<15$. **29.** $\sqrt{x}-\sqrt{1-x}>0{,}5$.

30. $\sqrt[4]{x^4+66}>x+1$, если $0<x<2$.

31. $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$.

А вот пример другого рода.

Пример 19. *Решите неравенство* $\sqrt{3-x^2}+\sqrt{x+1}\ge\sqrt{x^2-1}$.

Решение. Найдем ОДЗ: $x=-1$; $1\le x\le\sqrt{3}$.

Сначала убедимся прямой подстановкой, что $x=-1$ – решение нашего неравенства. Далее, при $1\le x\le\sqrt{3}$ выполняются неравенства $\sqrt{3-x^2}\ge 0$ и $\sqrt{x+1}\ge\sqrt{2}$, но $\sqrt{x^2-1}\le$ $\le\sqrt{2}$, поэтому данное неравенство выполняется на всей своей области определения.

Ответ: $x=-1$; $1\le x\le\sqrt{3}$.

Похожие идеи лежат в основе решения и следующей задачи.

Пример 20. *Решите неравенство* $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}+x>3$.

Решение. ОДЗ исходного неравенства: $x<-2$; $x>2$. Заметим, что отрицательные значения неизвестного не могут быть решениями задачи, так как тогда отрицательная левая часть неравенства не может быть больше положительной правой; таким образом, из ОДЗ осталось исследовать только случай $x>2$. Но тогда $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}=\dfrac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2-4}}>1$ (поскольку числитель дроби, очевидно, больше знаменателя); итак, первое слагаемое левой части больше 1, а второе больше 2, поэтому их сумма – вся левая часть данного неравенства – больше 3, что и требуется.

Ответ: $x>2$.

Таким образом, мы убедились в том, что иногда полезно найти область определения данного неравенства (или, что то же самое, его ОДЗ) и непосредственно исследовать ситуацию на этой области – оценить значения его левой и правой частей.

Упражнения. Решите неравенства.

32. $\sqrt{x-2}+5\sqrt{2x-1}\le 3\sqrt{3-2x}$.

33. $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{x-1}\le 2$.

34. $|x|+\sqrt{x^2-1}\ge 1$.

35. $\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x^2}+\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}>1$.

36. $\dfrac{\lg(|x|+1)}{\lg(|x|-1)}+\sqrt{x^2-4}>1$.

37. $\sqrt{x-2}+2^x>9$.

38. $4^{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}<0$.

39. $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3$.

ВАРИАНТЫ

Материалы вступительных экзаменов 2001 года

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2^{x+y+1}+7\cdot 2^{y-5}=4,\\ \sqrt{2x+y^2}=x+y.\end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\cos^3 x\sin 3x}{\cos 2x}+\frac{\sin^3 x\cos 3x}{\cos 2x}=3\sin 2x\cos x.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{2-\sqrt{x^2-3x}}\le\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+4}}.$$

4. Через точку A проведены две прямые: одна из них касается окружности в точке B, а другая пересекает эту окружность в точках C и D так, что точка C лежит на отрезке AD. Найдите AC, BC и радиус окружности R, если $BD=5$, $\angle BAC=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $\angle BDC=\arccos\sqrt{\dfrac{5}{21}}$.

5. Тело в форме тетраэдра $ABCD$ с одинаковыми ребрами поставлено гранью ABC на плоскую поверхность. Точка F – середина ребра CD, точка S лежит на прямой AB, $2AB=BS$ и точка B лежит между A и S. В точку S сажают муравья. Как должен муравей ползти в точку F, чтобы пройденный им путь был минимальным?

6. Сторона основания ABC правильной пирамиды $ABCD$ равна $8\sqrt{3}$, высота пирамиды $DO=6$. Точки A_1, B_1, C_1 – середины ребер AD, BD, CD соответственно. Найдите 1) угол между прямыми BA_1 и AC_1; 2) расстояние между прямыми BA_1 и AC_1; 3) радиус сферы, касающейся плоскости ABC и отрезков AC_1, BA_1 и CB_1.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-8x+25}-\sqrt{x^2-4x+13}=2.$$

2. Решите уравнение

$$\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} 3x=\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{20-2x}\left(99-2x-x^2\right)+\log_{\sqrt{99-2x-x^2}}(20-2x)\le 3.$$

4. В треугольнике ABC таком, что $AB=BC=6$ и $AC=2$, проведены медиана AA_1, высота BB_1 и биссектриса CC_1. Найдите площадь треугольника, образованного пересечением прямых 1) BB_1, CC_1 и BC; 2) AA_1, BB_1 и CC_1.

5. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} y^2 + 3xy + 1 \le 0, \\ 9x^2 - 12x - 8y \le 0. \end{cases}$$

6. Три шара радиуса r касаются друг друга внешним образом и каждый шар касается внутренним образом сферы радиуса R. При каком соотношении между r и R это возможно? Найдите радиус наименьшего из шаров, касающихся трех шаров радиуса r внешним образом, а сферы радиуса R внутренним образом.

Вариант 3

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 + 4x + 3} < 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}\,.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 4x + \sin 3x - \sin 2x - \sin x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x} = \frac{|\cos 2x|}{\sqrt{2}\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

3. Окружность C_1 радиуса $2\sqrt{3}$ с центром O_1 и окружность C_2 радиуса $\sqrt{3}$ с центром O_2 расположены так, что $O_1O_2 = 2\sqrt{13}$. Прямая l_1 касается окружностей в точках A_1 и A_2, а прямая l_2 – в точках B_1 и B_2. Окружности C_1 и C_2 лежат по одну сторону от прямой l_1 и по разные стороны от прямой l_2, $A_1 \in C_1$, $B_1 \in C_1$, $A_2 \in C_2$, $B_2 \in C_2$, точки A_1 и B_1 лежат по разные стороны прямой O_1O_2. Через точку B_1 проведена прямая l_3, перпендикулярная прямой l_2. Прямая l_1 пересекает прямую l_2 в точке A, а прямую l_3 – в точке B. Найдите A_1A_2, B_1B_2 и стороны треугольника ABB_1.

4. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 1, боковое ребро образует с основанием угол, равный $\operatorname{arctg} 4$. Точки E, F, K выбраны на ребрах AB, AD и SC соответственно так, что $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD} = \frac{SK}{SC} = \frac{2}{3}$. Найдите 1) площадь сечения пирамиды плоскостью EFK; 2) расстояние от точки D до плоскости EFK; 3) угол между прямой SD и плоскостью EFK.

5. Найдите все a, при которых уравнение

$$\log_3\left(x + \sqrt{5 - a}\right) + \log_{1/3}(a - 2 - x) = \log_9 4$$

имеет решение.

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y - 5z - 2yz = 0, \\ x - 5y - z - 2z^2 = 0, \\ x + 9y - 3z + 2xz = 0. \end{cases}$$

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. На горизонтальной поверхности стола покоится чаша с небольшой по сравнению с размерами чаши шайбой массой m (рис.1). Нижняя часть AB внутренней поверхности чаши есть часть сферы радиусом R. Глубина чаши $H = 3R/5$, ее внутренняя поверхность гладкая. Шайба начинает скользить без начальной скорости и при движении не отрывается от чаши, а чаша остается в покое. Шайба достигает точки C, для которой угол между радиусом OC и вертикалью равен α ($\cos\alpha = 4/5$). 1) Найдите скорость шайбы в точке C. 2) Найдите силу трения между чашей и столом при прохождении шайбой точки C.

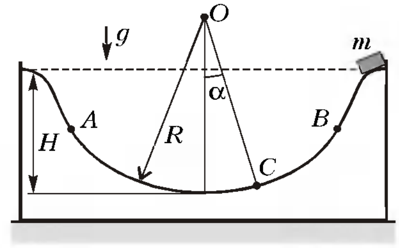


Рис. 1

2. Температура гелия уменьшилась в $k = 3$ раза в процессе $pV^2 = \text{const}$ (здесь p – давление газа, V – его объем). При этом его внутренняя энергия изменилась на 50 Дж. Найдите: 1) максимальное давление газа p_{max}; 2) объем газа V_2 в конечном состоянии. Минимальное давление газа в этом процессе составило $p_{min} = 10^5$ Па.

3. В электрической цепи, представленной на рисунке 2, диоды D_1 и D_2 идеальные. Считая параметры элементов

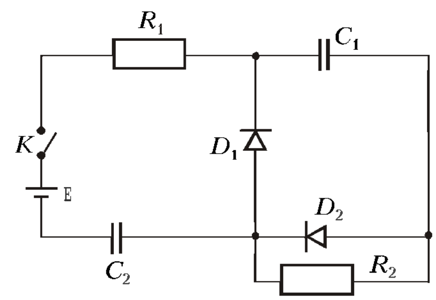


Рис. 2

цепи известными, определите: 1) ток через батарею сразу после замыкания ключа K; 2) количество теплоты, выделившееся в схеме после замыкания ключа. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

4. Проводник массой M и длиной l подвешен за концы к непроводящему потолку с помощью двух одинаковых проводящих пружин, каждая жесткостью k (рис.3). К верхним концам пружин подсоединен конденсатор емкостью C. Вся конструкция находится в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной плоскости конструкции. Проводник смещают вниз на расстояние h от положения равновесия, а затем отпускают. Определите скорость проводника, когда он снова окажется в положении равновесия. Сопротивлением и самоиндукцией проводников пренебречь.

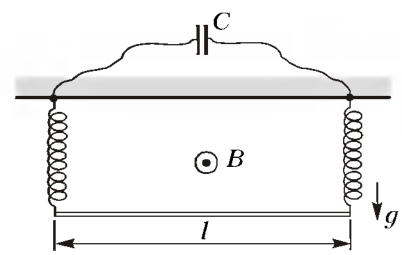


Рис. 3

5. Точечный источник света находится на главной оптической оси на расстоянии d = 8 см от собирающей линзы с фокусным расстоянием F = 12 см. Источник сместили вниз на расстояние h = 4 см в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси. На сколько и куда надо сместить линзу, чтобы изображение источника вернулось в старое положение?

Вариант 2

1. Ящик с шайбой удерживают в покое на наклонной плоскости с углом наклона к горизонту $\alpha = 30^\circ$ (рис.4).

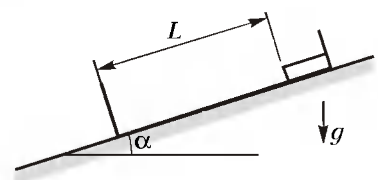


Рис. 4

Ящик и шайбу одновременно отпускают, и ящик начинает скользить по наклонной плоскости, а шайба – по дну ящика. Через время t = 1 с шайба ударяется о нижнюю стенку ящика. Коэффициент трения скольжения между шайбой и ящиком $\mu_1 = 0{,}23$, а между ящиком и наклонной плоскостью $\mu_2 = 0{,}27$. Масса ящика вдвое больше массы шайбы. 1) Определите ускорение шайбы относительно наклонной плоскости при скольжении шайбы по ящику. 2) На каком расстоянии L от нижней стенки ящика находилась шайба до начала движения?

2. В цилиндре под поршнем находятся 0,5 моля воды и 0,5 моля пара. Жидкость и пар медленно нагревают в изобарическом процессе так, что в конечном состоянии температура пара увеличивается на ΔT. Какое количество теплоты было подведено к системе жидкость – пар в этом процессе? Молярная теплота испарения жидкости в заданном процессе равна Λ. Внутренняя энергия ν молей пара равна $U = \nu \cdot 3RT$ (R – универсальная газовая постоянная).

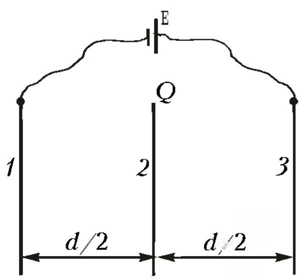


Рис. 5

3. Батарея с ЭДС E подключена к удерживаемым неподвижно пластинам *1* и *3* плоского конденсатора (рис.5). Площадь пластин S, расстояние между ними d. Посредине между этими пластинами расположена закрепленная неподвижно металлическая пластина *2*, на которой находится заряд Q. Пластину *1* отпускают. Какую работу совершит батарея к моменту соударения пластин *1* и *2*? Силой тяжести и внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

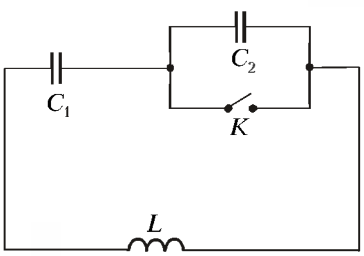


Рис. 6

4. При замкнутом ключе K в LC-контуре (рис.6) происходят незатухающие свободные колебания. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе емкостью C_1 максимально и равно U_1, ключ размыкают. Определите максимальное значение тока в контуре после размыкания ключа. Параметры элементов схемы указаны на рисунке.

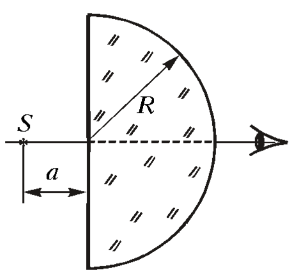


Рис. 7

5. Из стеклянной пластинки с показателем преломления $n = 1{,}5$ вырезали толстую линзу в форме полушара радиусом R = 10 см (рис.7). Через такую линзу рассматривается точечный источник света S, расположенный на расстоянии $a = R/2$ от плоской поверхности полушара. На каком расстоянии от этой поверхности наблюдатель видит изображение источника света? *Указание*: для малых углов $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$.

Публикацию подготовили М.Балашов, В.Можаев, Ю.Чешев, М.Шабунин

Московский государственный институт электроники и математики (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты электроники, информатики и телекоммуникаций, автоматики и вычислительной техники)

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x+6}}{2x-3} < 1.$$

2. Решите неравенство

$$\log_4(3x-8) < \log_{\frac{1}{4}}(x-2) + \frac{3}{2}.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^2 x - \sin y = \dfrac{7}{4}, \\ \cos^2 x + \sqrt{3}\cos y = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

4. Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC = 6$; $AC = 4$) является нижним основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами $AA_1 = BB_1 = CC_1 = 6\sqrt{2}$. На ребрах AA_1, B_1C_1, AC взяты, соответственно, точки M, N, L так, что $A_1M = 2\sqrt{2}$, $B_1N = 3$, CL = 1. Через точку L проведена прямая, которая параллельна прямой MN и пересекает боковую грань C_1B_1BC в точке E. Найдите а) длину отрезка MN; б) длину отрезка LE.

5. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(a+2)x^2 + (2a-1)x + a^2 - 5a - 4 = 0$$

имеет только целые корни.

Вариант 2

(факультеты прикладной математики, экономико-математический)

1. Решите неравенство

$$\frac{|4x-2| - 9}{x-2} \le 1.$$

2. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} ax + 2y = 3a - 4, \\ (3a-1)x + (a+3)y = a^2 + 1 \end{cases}$$

не имеет решений.

3. Решите уравнение

$$\log_3 \cos x = \log_3(2 + 3\sin x) - 1.$$

4. В основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 9. Боковые ребра пирамиды равны $5\sqrt{3}$. На ребре AB взята точка D так, что AD = 3. Через точки C, D проведена плоскость α, перпендикулярная плоскости основания пирамиды. Требуется а) найти объем пирамиды $SABC$; б) определить, в каком отношении плоскость α делит объем пирамиды.

5. Найдите сумму всех корней уравнения

$$2\cos 3x + 8|\sin x| - 7 = 0,$$

принадлежащих отрезку $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. Тело массой m, брошенное под углом α к горизонту, при движении имело минимальную кинетическую энергию E. Найдите изменение импульса тела за все время движения.

2. Телу массой m, подвешенному на нити длиной l, сообщают направленную горизонтально начальную скорость v, в результате чего тело совершает колебания. Найдите силу натяжения нити в тот момент, когда скорость тела равна $v/2$.

3. Один моль идеального газа совершает замкнутый цикл, состоящий из изохоры *1–2*, изобары *2–3* и прямой *3–1*. Температуры в точках *1*, *2* и *3* связаны соотношением $T_3 = 2T_2 = 3T_1$. Определите КПД цикла.

4. Водяной пар, находящийся в сосуде объемом $V = 10$ л при температуре $t = 100$ °C и давлении $p = 50$ кПа, изотермически сжимают. Во сколько раз уменьшился объем, если в конце процесса в сосуде содержалось $m = 1{,}45$ г воды?

5. Два конденсатора, заряженные от одного и того же источника, соединили первый раз одноименными полюсами, а второй – разноименными. При этом полная энергия электрического поля, запасенная в системе, во втором случае была вдвое меньше. Найдите отношение емкостей конденсаторов.

6. Электрон со скоростью v влетает в плоский конденсатор параллельно его обкладкам. Его импульс за время пролета через конденсатор возрастает вдвое. Определите, на сколько смещается электрон относительно первоначального направления, если к обкладкам конденсатора приложено напряжение U, расстояние между ними d. Заряд e и масса m электрона известны.

7. Аккумулятор с внутренним сопротивлением r был заряжен от источника с напряжением U током I. Какую максимальную полезную мощность можно получить от этого аккумулятора?

8. Проводник длиной $l = 0{,}5$ м и массой $m = 0{,}2$ кг лежит на горизонтальных рельсах. Если по проводнику пропустить ток $I = 4{,}0$ А, то он начинает двигаться в вертикальном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}2$ Тл. Какую минимальную силу надо приложить к проводнику, чтобы он начал двигаться, если такое же по величине магнитное поле будет направлено горизонтально вдоль рельсов?

9. Колебательный контур, состоящий из конденсатора и катушки индуктивности, резонирует на длине волны λ. Через какое время после начала колебаний энергия, выделяемая в катушке индуктивности, в 4 раза больше энергии, запасенной в конденсаторе? В первый момент конденсатор полностью заряжен.

10. На газету кладут прозрачную пластину толщиной H, сделанную из материала, для которого угол полного внутреннего отражения равен α. На каком расстоянии от верхней поверхности пластины будут видны буквы, если на них смотреть сверху?

Публикацию подготовили
Ю.Колмаков, Г.Померанцева

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Три мотоциклиста стартуют одновременно из одной точки кольцевого шоссе в одном направлении. Первый мотоциклист впервые догнал второго, пройдя 4,5 круга после старта, а за полчаса до этого он впервые догнал третьего мотоциклиста. Второй мотоциклист впервые догнал третьего через три часа после старта. Сколько кругов в час проезжает первый мотоциклист?

2. Решите уравнение

$$|9\sin^2 x + 8\cos 2x| = |5 + 3\cos x|$$

и укажите число его решений на промежутке $\left[-\frac{\pi}{4}; 3\pi\right]$.

3. Решите неравенство

$$\log_{x+1}\frac{5x+4}{x+3} \le \log_{x+1}\frac{x+2}{1-x}.$$

4. Из всех прямоугольных параллелепипедов с периметром каждой боковой грани 6 найдите параллелепипед наибольшего объема. В ответе укажите объем.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро равно 2. Найдите расстояние от центра грани $A_1B_1C_1D_1$ до плоскости, проходящей через вершины B, D и C_1.

Вариант 2

(физический факультет)

1. В правильную треугольную пирамиду, сторона основания которой равна a, вписан конус. Найдите объем конуса, если угол между ребром пирамиды и плоскостью основания равен α.

2. Решите уравнение

$$2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2.$$

3. Решите неравенство

$$\log_3\frac{1-2x}{x} \le 0.$$

4. Найдите сумму корней уравнения

$$x^{3-\lg x} = 100.$$

5. Найдите угол, который образует с осью ординат касательная к кривой $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{x^3}{9}$, проведенная в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Вариант 3

(химический факультет)

1. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник с основанием 6 и высотой 9. Каждое боковое ребро равно 13. Найдите объем пирамиды.

2. Решите уравнение

$$\frac{1-\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{ctg}\,x} = 2\sin x.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{x+27}{16-2x} < x.$$

4. Решите уравнение

$$\log_2\left(9-2^x\right)=3-x.$$

5. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

Вариант4

(факультет технологии и предпринимательства)

1. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 4, 4, $2\sqrt{2}$. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем пирамиды.

2. Решите уравнение

$$\sin^3 x(1+\operatorname{ctg}x)+\cos^3 x(1+\operatorname{tg}x)=\cos 2x.$$

3. Решите неравенство

$$4^x<2^{x+1}+3.$$

4. Решите уравнение

$$\log_{4x+1}7+\log_{9x}7=0.$$

5. Найдите максимумы функции

$$f(x)=\frac{20x}{x^2+1}.$$

Задачи устного экзамена

(математический факультет)

1. Решите уравнение

$$2\cos\frac{\pi-t}{2}\sin\frac{4\pi+3t}{2}=7-8\cos^2\frac{2\pi+t}{2}.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{4t^2-4t+1}\ge 2(1-|t-1|).$$

3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\left(\dfrac{125}{27}\right)^{2x-1}\left(\dfrac{9}{25}\right)^{x^2}<0.6^{-1},\\ \sqrt{x^2}\le 3.\end{cases}$$

4. Найдите все значения l, при которых неравенство

$$2lx^2+(2l+10)x+13l+5>0$$

выполняется при всех x.

5. Вычислите

$$\frac{1}{\log_{c^2b^{-1}}c^2}-3\log_{\sqrt{b}}c^2b^{1/3},\ \text{если}\ \log_{bc}cb^{0,25}=\frac{7}{22}.$$

6. Вычислите

$$\log_2\left|\frac{\cos\dfrac{30t-3\pi}{5}\cos\dfrac{10t-\pi}{5}\sin\dfrac{10t-\pi}{5}}{\sin\dfrac{30t-3\pi}{5}\cos\dfrac{20t-2\pi}{5}+2\sin 5t\cos 5t}\right|.$$

7. Найдите $\sin 4x$, если $\operatorname{tg}\left(x-45^\circ\right)=-2$.

8. Найдите $\dfrac{x_1^2}{x_2}+\dfrac{x_2^2}{x_1}$, где x_1, x_2 – корни уравнения

$$2x^2+4x-1=0.$$

9. При каких значениях l сумма кубов корней уравнения $x^2+x+l=0$ равна –25?

10. Постройте график функции

$$y=\operatorname{tg}(\pi-x)\sqrt{1-\sin^2 x}.$$

11. Постройте график функции

$$y=\sqrt{\left(|x+1|-|x-1|\right)^2}-1.$$

12. Постройте график функции

$$y=\left|2^{\log_8 x^3}-1\right|.$$

13. Разность цифр двузначного числа равна 3. Если цифры переставить, то получится число, составляющее 1.75 первоначального. Найдите исходное число.

14. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6. Двугранный угол между основанием и боковой гранью равен 45°. Найдите объем пирамиды и площадь ее боковой поверхности.

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. Стрела выпущена вертикально вверх с начальной скоростью 39,2 м/с. Определите координату и скорость стрелы через 2 с.

2. Какую скорость должен иметь искусственный спутник, чтобы обращаться вокруг Земли по круговой орбите на высоте 600 км над поверхностью Земли? Радиус Земли 6400 км, масса Земли $6\cdot 10^{24}$ кг.

3. Чтобы охладить 0,2 кг воды, взятой при 23 °С, до 8 °С, в нее бросают мелкие кусочки льда, имеющие температуру 0 °С. Какое количество льда потребуется для охлаждения воды? Удельная теплоемкость воды 4,2 кДж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $3{,}3\cdot 10^5$ Дж/кг.

4. В комнате объемом 40 м^3 при температуре 20 °С относительная влажность воздуха составила 20%. Какую массу воды нужно испарить для увеличения относительной влажности воздуха до 50%? Плотность насыщенного водяного пара при 20 °С равна $17{,}3\cdot 10^{-3}$ кг/м^3.

5. Два одинаковых металлических шарика заряжены так, что заряд одного из них в 5 раз больше другого. Шарики привели в соприкосновение и раздвинули на прежнее расстояние. Во сколько раз (по модулю) изменилась сила взаимодействия шариков, если шарики были заряжены разноименно?

6. Источник с ЭДС 2,0 В и внутренним сопротивлением 0,8 Ом замкнут никелиновой проволокой длиной 2,1 м и сечением 0,21 мм^2. Каково напряжение на зажимах источника? Удельное электрическое сопротивление никелина 0,42 Ом · мм^2/м.

7. В магнитном поле с индукцией 0,02 Тл протон описал окружность, радиус которой 0,1 м. Найдите скорость протона.

8. Высота Солнца над горизонтом 40°. Под каким углом к горизонту следует расположить плоское зеркало, чтобы солнечными лучами осветить дно вертикального колодца?

9. Свет какой частоты следует направить на поверхность платины, чтобы максимальная скорость фотоэлектронов была 3000 км/с? Работа выхода электронов из платины 10^{-18} Дж. Постоянная Планка $6{,}63\cdot 10^{-34}$ Дж · с, масса электрона $9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг.

10. Найдите энергию и импульс фотона для инфракрасных лучей с частотой 10^{12} Гц. Скорость света $3\cdot 10^8$ м/с, постоянная Планка $6{,}63\cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Публикацию подготовили С.Жданов, Б.Кукушкин, Е.Пантелеева, М.Чистова,Г.Шадрин

Очередной прием в ОЛ ВЗМШ

Вот уже 39-й раз Открытый лицей «Всероссийская заочная многопредметная школа (ОЛ ВЗМШ)» Российской академии образования, работающий при Московском государственном университете им.М.В.Ломоносова, проводит набор учащихся.

ВЗМШ – государственное учреждение дополнительного образования, причем не только для школьников. «Открытый» – это значит для всех желающих пополнить свои знания в одной или нескольких из следующих областей науки: математика, биология, филология, физика, экономика, химия, право, история (перечисление – в хронологическом порядке открытия отделений).

На Северо-Западе России давно работает Заочная школа Ленинградского областного Министерства образования, созданная при Санкт-Петербургском университете, имеющая отделения математики, биологии, химии.

За время существования ВЗМШ удостоверения об ее окончании получили несколько сотен тысяч школьников и тысячи кружков – групп «Коллективный ученик ВЗМШ».

Обучение в школе ЗАОЧНОЕ, т.е. начиная с сентября-октября 2002 года все поступившие будут систематически (примерно раз в месяц) получать специально разработанные для заочного обучения материалы, содержащие изложение теоретических вопросов и методов рассуждений, разнообразные задачи для самостоятельной работы с образцами решений, деловые игры, контрольные и практические задания.

Сейчас ОЛ ВЗМШ совместно с другими научно-педагогическими учреждениями ведет разработку новых интерактивных технологий в образовании и переводит часть своих учебно-методических комплексов на язык современных телекоммуникаций.

Контрольные работы учащихся будут тщательно проверяться и рецензироваться преподавателями ВЗМШ – студентами, аспирантами, преподавателями и научными сотрудниками МГУ, а также других вузов и учреждений, где имеются филиалы школы. Многие из преподавателей в свое время сами закончили ВЗМШ и поэтому особенно хорошо понимают, как важно, помимо конкретных недочетов, указать пути ликвидации имеющихся пробелов в знаниях, порекомендовать дополнительную литературу, поругать за невнимательность и похвалить за заметный (а иногда – и за самый маленький) прогресс и трудолюбие.

Поступившие в ОЛ ВЗМШ смогут узнать об увлекательных вещах, часто остающихся за страницами школьного учебника, познакомиться с интересными нестандартными задачами и попробовать свои силы в их решении. Для многих станет откровением, что задачи бывают не только в математике, физике и химии, но и в биологии, и в филологии, и в экономике, и в других науках. Решение задач поможет прояснить, сделать интересными многие казавшиеся непонятными и скучными разделы.

Одна из особенностей учебных программ и пособий ВЗМШ – в том, что они созданы действующими на переднем крае науки талантливыми учеными и опытными незаурядными педагогами (часто эти два качества совмещаются в одном и том же человеке).

Чтобы успешно заниматься в заочной школе, вам придется научиться самостоятельно и продуктивно работать с книгой, грамотно, четко, коротко и ясно излагать свои мысли на бумаге и других носителях информации, а это, как известно, умеют далеко не все. Возможно, заочная школа поможет вам выбрать профессию, найти свое место в окружающей мире.

Все выполнившие программу ОЛ ВЗМШ получают соответствующие дипломы. Хотя формальных преимуществ они не дают, приемные комиссии многих вузов учитывают, что обладатели этих удостоверений в течение продолжительного времени самоотверженно трудились над приобретением знаний, научились самостоятельно творчески работать, а это значит, что из них получатся хорошие студенты и, в дальнейшем, грамотные, вдумчивые, широко образованные специалисты.

Для поступления в ОЛ ВЗМШ надо успешно выполнить вступительную контрольную работу. Успешно – это не значит обязательно решить все задачи. Приемную комиссию интересует, в первую очередь, ваше умение рассуждать, попытки (пусть поначалу не совсем удачные) самостоятельно мыслить и делать выводы. Преимуществом пользуются проживающие в сельской местности, поселках и небольших городах, где нет крупных научных центров и учебных заведений и получить дополнительное образование можно лишь заочно.

Решения задач вступительной работы надо написать на русском языке в обычной ученической тетради в клетку (на отделение экономики – на открытке, а на отделение филологии – на двойном листе; см. ниже) и выслать *простой бандеролью, не сворачивая в трубку*. Желающие поступить сразу на несколько отделений каждую работу присылают в *отдельной тетради*. На обложке тетради укажите *фамилию, имя, отчество, год рождения, базовое образование* (сколько классов средней школы будет закончено) *к сентябрю 2002 года*, полный *почтовый адрес* (с индексом), *откуда узнали об ОЛ ВЗМШ* (из «Кванта», от друзей, из афиш ОЛ ВЗМШ и т.п.), *на какое отделение хотите поступить*.

Вступительные работы обратно не высылаются.

Срок отправки работ – не позднее 15 апреля 2002 года.

Без вступительной работы, только по заявлению, принимаются на индивидуальное обучение победители областных (краевых, республиканских) туров Всероссийских олимпиад, заочного и второго туров Соросовских олимпиад по соответствующим предметам, а также участники финальных туров этих олимпиад. (Не обязательно участие в самых последних олимпиадах.)

Учащиеся ОЛ ВЗМШ частично возмещают расходы на свое обучение. Плата невелика, на каждом отделении своя. По просьбе тех, кто не в состоянии внести эту плату, ОЛ ВЗМШ готов обратиться в любое учреждение (школа, орган народного образования, другой спонсор) с ходатайством об оплате этой организацией соответствующих расходов.

Помимо индивидуального обучения, на всех отделениях ВЗМШ, кроме экономического и филологического, имеется еше одна форма – «Коллективный ученик». Это группа учащихся, работающая под руководством преподавателя (школьного учителя, преподавателя вуза, студента или другого энтузиаста), как правило, по тем же пособиям и программам, что и индивидуально. Прием в эти группы проводится до 15 октября 2002 года. Для зачисления группы требуется заявление ее руководителя (с описанием его профессии и должности, со списком учащихся и четким указанием, в каком классе они будут учиться с сентября 2002 года); заявление должно быть подписано руководителем группы, заверено и подписано руководителем учреждения, при котором будет работать группа. Работа групп «Коллективный ученик» может оплачиваться школами по представлению ОЛ ВЗМШ как факультативные занятия.

Проживающие на Северо-Западе России (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках), желающие поступить на любое отделение, кроме отделения биологии, высылают вступительные работы по адресу:

199155 Санкт-Петербург, пер. Каховского, д.9, Академическая гимназия, Северо-Западная ЗМШ (на прием).

Проживающие в остальных регионах России, дальнем и ближнем зарубежье высылают свои работы в адрес ОЛ ВЗМШ или (по математике) соответствующего филиала.

Адрес ОЛ ВЗМШ:

117234 Москва В-234, МГУ, ОЛ ВЗМШ, на прием (с указанием отделения).

Телефон: (095) 939-39-30.

Филиалы математического отделения ОЛ ВЗМШ имеются:

- при университетах – в городах Воронеж, Донецк, Екатеринбург, Иваново, Ижевск, Магадан, Ростов-на-Дону, Самара, Ульяновск, Челябинск, Ярославль;
- при педагогических институтах – в городах Киров, Петрозаводск, Тернополь;
- при Брянском Дворце творчества молодежи;
- при Калужском Центре научно-технического творчества молодежи;
- при Могилевском областном Дворце пионеров.

Ниже вы найдете краткие сведения об отделениях ОЛ ВЗМШ и условия вступительных контрольных заданий.

Отделение математики

Из этого отделения выросла вся заочная школа (вначале она так и называлась – математическая).

За время обучения вы более глубоко, чем в обычной школе, сможете осознать основные идеи, на которых базируется курс элементарной математики, познакомиться (по желанию) с некоторыми дополнительными, не входящими сейчас в школьную программу, разделами, а также поучиться решать олимпиадные задачи. На последнем курсе большое внимание уделяется подготовке к сдаче школьных выпускных и вступительных экзаменов в вузы.

На отделении созданы учебно-методические комплексы, приспособленные для заочного обучения. Часть из них издана массовым тиражом.

Окончившие отделение математики получат, в зависимости от желания и способностей, либо подготовку, необходимую для выбора математики как профессии, либо математическую базу для успешного усвоения вузовского курса математики, лежащего в основе профессиональной подготовки по другим специальностям: ведь сейчас математика служит мощным инструментом исследований во многих отраслях человеческой деятельности.

Обучение длится 4 года. Можно поступить на любой курс. Для этого к сентябрю 2002 года надо иметь следующую базу: на 1-й курс – 7 классов средней школы, на 2-й курс – 8 классов, на 3-й – 9 классов, на 4-й – 10. При этом поступившим на 2-й и 3-й курсы будет предложена часть заданий за предыдущие курсы. Для поступивших на 4-й курс обучение проводится по специальной интенсивной программе с упором на подготовку в вуз.

Для поступления надо решить хотя бы часть задач помещенной ниже вступительной работы (около номера каждой задачи в скобках указано, учащимся каких классов она предназначена; впрочем, можно, конечно, решать и задачи для более старших классов). На обложке напишите, на какой курс вы хотите поступить.

Группы «Коллективный ученик» (на все курсы по любой программе) принимаются без вступительной работы, по заявлению руководителя.

Задачи

1 (7-10). Решите уравнение

$$\frac{9}{3x^4+9}+\frac{11}{5x^4+11}+\frac{15}{7x^2+15}=3.$$

2 (7-10). Игровое поле представляет собой прямоугольник размером $2\times n$ (n – натуральное число), разбитый на клеточки 1×1. Каждым ходом игрок закрашивает либо одну еще не закрашенную клетку, либо две соседние (по горизонтали или по вертикали) еще не закрашенные клетки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его партнер?

3 (7-10). Найдите все пары простых чисел $(p;q)$, для которых $p^2-3q^2=13$. (Простым называется натуральное число, большее единицы, которое делится без остатка только на себя и на единицу.)

4 (7-10). В треугольнике проведены все средние линии (попарно соединены середины всех его сторон) и все медианы. Сколько разных треугольников изображено на полученной таким образом картинке?

5 (7-10). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{1999}+x_{2000}+x_{2001}=1,\\ x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{1999}+x_{2000}+x_{2002}=2,\\ x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{1999}+x_{2001}+x_{2002}=3,\\ x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{2000}+x_{2001}+x_{2002}=4,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x_1+x_3+x_4+\ldots+x_{2000}+x_{2001}+x_{2002}=2001,\\ x_2+x_3+x_4+\ldots+x_{2000}+x_{2001}+x_{2002}=2002 \end{cases}$$

(в системе 2002 уравнения с 2002 неизвестными: x_1, x_2, … …, x_{2002}, в каждом уравнении отсутствует одно из них: в первом уравнении отсутствует последнее неизвестное, x_{2002}, во втором уравнении нет предпоследнего неизвестного, x_{2001}, в третьем уравнении нет x_{2000}, и т.д., в последнем уравнении отсутствует первое неизвестное, x_1).

6 (8–10). На плоскости расположены два непересекающихся круга. Назовем точку этой плоскости хорошей, если любая проходящая через нее прямая пересекает хотя бы один из данных кругов. Найдите все хорошие точки.

7 (8–10). Решите систему

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1,\\ xy+xz+yz\geq 1. \end{cases}$$

8 (8–10). На стороне AC треугольника ABC выбраны точки M и N, при этом $AM=2$, $AN=6$; угол BAC равен 30° Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся прямой AB.

9 (9–10). Какое максимальное количество членов может иметь арифметическая прогрессия с разностью 6, состоящая только из простых чисел?

10 (8–10). Сравните числа $\left(5+3\sqrt{2}\right)^{2001}$ и $\left(3+5\sqrt{2}\right)^{2000}$.

11. Найдите площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой перпендикулярны, а высота равна h.

12. Взяли некоторое двузначное четное число A, а затем подряд записали числа A, $A/2$ и A. В результате получили шестизначное число B. Оно оказалось полным квадратом. Найдите $\sqrt{B}$.

Отделение биологии

Набор проводится в 29-й раз. Основное внимание уделяется наименее изучаемым в школе, но бурно развивающимся в настоящее время разделам биологической науки: молекулярной биологии, биохимии, иммунологии, генетике, биофизике, физиологии и т.д.

На отделении созданы известные в стране оригинальные учебники, задачники и другие учебные пособия для школьников (часть из них издана массовым тиражом издательствами «Мирос» и «Фазис» и хорошо известна в школах).

Проводится набор на два потока: трехгодичное обучение на базе 8 классов и двухгодичное – на базе 9 классов. Принимаются группы «Коллективный ученик». Такой группе надо выслать коллективно выполненную работу, а также заверенный печатью учреждения, при котором она будет работать, список членов группы с указанием фамилии, имени и отчества руководителя кружка.

При решении задач вступительной работы можно использовать и факты, найденные в литературе (в этом случае приведите ссылки на источник), и собственные идеи. Вместе с работой необходимо прислать стандартный конверт с маркой и полным (с индексом) почтовым адресом для отправки решения Приемной комиссии.

Поступающие на трехгодичное обучение решают задачи 1 – 5 из нижеприведенного списка, на двухгодичное обучение – задачи 4–8.

Задачи

1. Известно, что у одних видов животных потомство появляется на свет в течение всего года, а у других – лишь в определенные сезоны. Приведите примеры животных с этими двумя стратегиями размножения (всего – не более пятнадцати), по возможности относящихся к разнообразным систематическим группам. Каковы преимущества и недостатки у каждой из стратегий? Поясните, используя предложенные вами примеры, проявляются ли эти преимущества и недостатки у всех животных или лишь у части из них.

2. Какие особенности строения, физиологии, образа жизни и поведения характерны для животных, которые питаются: а) быстро передвигающимися организмами; б) планктоном; в) организмами, обитающими в почве? Приведите по одному-два примера к каждому из ваших соображений.

3. Вам дали свежесрезанный лист неизвестного растения. Предложите как можно больше способов, позволяющих определить, какая сторона у листа верхняя, а какая – нижняя (в оборудовании вы не ограничены). Являются ли эти способы универсальными или для некоторых растений (каких?) они могут «не сработать»?

4. Бедный студент Дима К. купил два лимона и положил их в холодильник. Через неделю, собравшись попить чаю, Дима обнаружил, что один лимон по-прежнему свежий и хороший, а второй сгнил. Почему так получилось? Дайте как можно больше вероятных объяснений.

5. Доверившись рекламе, можно подумать, что главное в моющих средствах – максимально эффективное удаление загрязнений, а в инсектицидах – полнота истребления вредных насекомых. Однако экологи не согласятся с подобной трактовкой и заметят, что данные препараты должны удовлетворять еще многим требованиям. Перечислите эти требования.

6. В поселке N, расположенном в глухой тайге, произошла вспышка опасного заболевания людей. Как выяснить наиболее вероятный путь, по которому попал в поселок его возбудитель? Если болезнь является природно-очаговой, то как установить границы этого очага? Какие меры позволят снизить угрозу повторных вспышек болезни?

7. Предложите различные методы, с помощью которых можно экспериментально определить суточные энергозатраты животного (в качестве примеров рассмотрите гусеницу тутового шелкопряда, ужа, мышь и человека). Какие из этих методов, по вашему мнению, дадут наиболее точную информацию, а какие – чреваты ошибками и почему? Какие из методов легче реализовать на практике, а какие – труднее? (Имейте в виду, что ответы на эти вопросы могут зависеть от особенностей изучаемого животного.)

8. В каких случаях для передачи и получения информации от животного к животному целесообразно использовать химические соединения? Подтвердите примерами ваши соображения и поясните, почему в этих ситуациях химический способ обмена информацией оказывается оптимальным.

Отделение физики

Отделение работает 10 лет. За это время создан и прошел проверку оригинальный двухгодичный курс заочного обучения.

Основное внимание уделяется решению физических задач. В пособиях излагаются методы, пригодные для изучения как стандартных, так и более сложных ситуаций. Акценты делаются как на выяснение физического смысла тех или иных явлений, так и на техническую, вычислительную сторону, на использование математического аппарата и на качественное истолкование полученных результатов.

В программе – все основные разделы школьного курса, а также темы, мало или совсем не изучаемые в школе. Изложение максимально приближено к современным взглядам и достижениям физической науки.

Обучение одно- или двухгодичное.

Поступающие на двухгодичный поток (на базе 9 классов школы) решают задачи 1–5 приведенной ниже вступительной работы; поступающие на одногодичный поток (на базе 10 классов) – задачи 4–8; желающие за один год пройти всю двухгодичную программу (на базе 10 классов) решают все задачи и пишут «10 + 11» на обложке тетради.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы, только по заявлению руководителя.

Задачи

1. Две окружности радиусом R каждая касаются друг друга. По каждой окружности ползает жук с постоянной скоростью v. Нарисуйте, как будет выглядеть траектория одного жука в системе отсчета, связанной с другим жуком. В начальный момент жуки находятся в одной точке и ползут в одну сторону.

2. Тело массой m подвешено к потолку на двух одинаковых нитях *1* и *2*, составляющих угол α, как показано на рисунке 1. Снизу к этому телу с помощью идеальной пружины *3* подвешено другое такое же тело массой m. Нить *1* пережигают. Найдите ускорения тел сразу после этого. Нити и пружина идеальные.

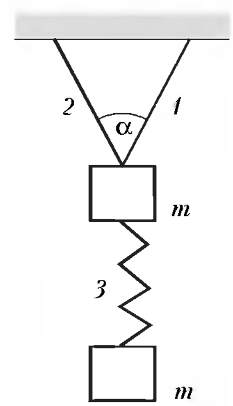


Рис. 1

3. Заводную машинку массой m запускают по длинной доске массой M, которая лежит на гладкой горизонтальной поверхности. Машинка движется без пробуксовки, мощность ее двигателя постоянна и равна N. Найдите скорость машинки относительно доски и силу трения между машинкой и доской спустя время t_0 после начала движения.

4. Обруч катится по горизонтальной плоскости без проскальзывания с постоянным ускорением. Ускорение верхней точки обруча равно a и направлено под углом φ горизонту. Найдите ускорение нижней точки обруча.

5. На каждой из двух стен, расположенных под прямым углом, висит зеркало шириной L = 2 м (рис.2). Расстояние от края каждого из зеркал до угла также равно L. Сможет ли мальчик, смотрящий в одно из зеркал с расстояния $d_1 = 1$ м от середины зеркала, увидеть девочку, которая стоит на расстоянии $d_2 = 0{,}5$ м от середины другого зеркала? Ответ поясните.

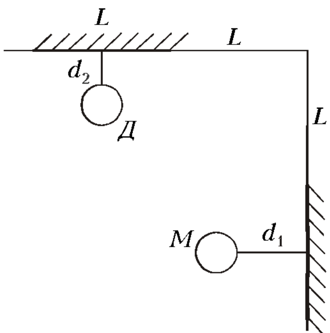


Рис. 2

6. Три абсолютно упругих шара покоятся в гладком желобе на некотором расстоянии друг от друга. Первый шар, пущенный с начальной скоростью v_1, ударяет во второй шар, который, начав двигаться, в свою очередь ударяет в третий шар. Какую максимальную скорость может приобрести третий шар, если известно, что он вчетверо тяжелее первого? Каким в этом случае должно быть отношение масс первого и второго шаров?

7. Кусок льда объемом V, находящийся в калориметре при температуре $t_1 = -40$ °С, залили водой, имеющей тот же объем и температуру $t_2 = +4$ °С. Пренебрегая теплоемкостью калориметра и теплообменом с окружающей средой, найдите объем воды в калориметре в состоянии теплового равновесия. Необходимые табличные данные возьмите из справочника.

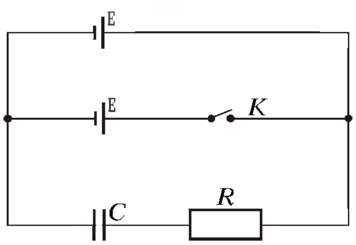


Рис. 3

8. Найдите количество теплоты, которое выделится в резисторе после размыкания ключа K в схеме, изображенной на рисунке 3. Известны величины $\mathcal{E}$, C, R. Внутренним сопротивлением источников тока пренебречь.

Отделение химии

На отделение принимаются имеющие базовое образование в объеме 8, 9 или 10 классов средней школы. В программе обучения следующие одногодичные курсы: общая химия (с элементами неорганической химии); неорганическая химия; органическая химия; химия окружающей среды. Более подробные сведения о программе и порядке обучения высылаются вместе с извещением о решении Приемной комиссии.

Задачи вступительной работы, помещенные ниже, – общие для всех поступающих, независимо от базового образования.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы, по заявлению руководителя.

Задачи

1. Сколько атомов N содержится в 1,3 л азота при 127 °С и 1 атм?

2. На кусок алюминия массой 2,3 г подействовали избытком 20%-го раствора соляной кислоты. Взлетит ли шарик массой 5 г, наполненный выделившимся газом?

3. Опишите (кратко) схему получения сульфата меди, используя в качестве исходных веществ только серу, медь и воду. В уравнениях реакций проставьте коэффициенты, обязательно укажите условия протекания реакций.

4. Приведите 5 разных реакций получения гидроксида калия.

5. Напишите структурные формулы всех продуктов, которые могут образоваться при нагревании смеси изопропилового и н-бутилового спирта с концентрированной серной кислотой.

Отделение филологии

Отделение существует с 1989 года. За это время подготовлено и издано большое количество уникальных учебных пособий по русскому языку, литературе, интересным проблемам литературоведения и лингвистики.

Принимаются *все желающие, имеющие базовую подготовку в объеме 8 классов.* Отделение предлагает на выбор 12 учебных программ.

Вы хотите исправить грамотность? Познакомиться с любопытными проблемами теории и практики русского языка? Освоить приемы лингвистического или литературоведческого анализа? Научиться говорить по-английски и понимать английскую речь? Узнать кое-что о журналистике и оценить свои творческие способности? Приобрести навыки, необходимые для успешной сдачи экзаменов в вуз?

Тогда пришлите нам вступительную работу, и мы поможем выбрать ту программу или программы, которые нацелены на решение именно вашей задачи.

Чтобы специалисты отделения могли предложить вам наиболее эффективную форму обучения, им необходимо как можно больше знать о ваших целях и проблемах, поэтому вступительное задание – это ответы на вопросы помещенного ниже теста.

Внимание! Отвечайте на вопросы теста на двойном тетрадном листе, указав на первой странице важные для нас данные: ФИО, какой класс заканчиваете, полный (с индексом!) почтовый адрес, телефон (если есть).

Затем полностью перепишите условия теста и выполните задания 1 – 6 (впишите, подчеркните нужное, проставьте галочки или цифры в квадратики и т.п.).

Тест

1. Впишите нужное

К 1 сентября 2001 года я закончу ______ класс.

2. Заполните клетки

Моя средняя оценка:
по русскому языку
по литературе

3. Подчеркните нужное

Моя грамотность:
а) абсолютная;
б) вполне приличная;
в) так себе;
г) низкая.

4. Расставьте цифры от 1 до 6 в соответствии с тем, насколько для вас важны следующие задачи (1 – самое важное; 6 – наименее важное):

узнать как можно больше об устройстве русского языка;
узнать как можно больше о русской литературе;
научиться хорошо и логично выражать свои мысли в сочинении;
писать грамотнее;
узнать больше об устройстве языков мира;
узнать больше о том, что за наука – литературоведение.

5. Подчеркните нужное

Надеюсь, что учеба на филологическом отделении ОЛ ВЗМШ даст мне возможность:
а) удовлетворить свое природное любопытство;
б) заняться в свободное время тем, что мне интересно;
в) исправить школьные оценки по русскому языку и литературе;

г) приобрести знания и навыки, необходимые для успешной сдачи экзаменов в вуз.

6. Подчеркните нужное

Скорее всего, я буду поступать в вуз:

а) на филологическую специальность, где пишут сочинение и сдают русский устно;

б) на гуманитарную специальность, где пишут сочинение;

в) в негуманитарный вуз и писать сочинение;

г) в негуманитарный вуз и писать диктант;

д) мне важно школу закончить!

Желающие поступить на новые курсы «Журналистика: первый шаг» (основы журналистики, анализ текста, практическая работа в разных публицистических жанрах) и «Английский язык» (для тех, кто знает язык в объеме «Yes, it is») принимаются на основании заявления и анкету не заполняют.

Вместе с анкетой и/или заявлением пришлите, пожалуйста, стандартный конверт с маркой и заполненным вашим адресом (с индексом) для ответа Приемной комиссии.

Отделение экономики

Основной курс обучения – он называется «Прикладная экономика» – включает изучение основ экономической теории, а также знакомство с практикой бизнеса в деловой игре по переписке. Окончившим основной курс предлагается специализация по выбору: «Бухгалтерский учет и финансовый анализ», «Мировая экономика», «Предпринимательство и менеджмент», «Экономика России: прошлое, настоящее и будущее» и др.

Учащимся, желающим одновременно подготовиться к поступлению на экономический факультет МГУ и в другие вузы, предлагается специальная программа «Экономика ПЛЮС», включающая наряду с экономическими дисциплинами изучение одного или нескольких дополнительных предметов по выбору: математики, обществознания, русского языка и литературы, истории и географии. Школьники, обучающиеся по этой программе, могут выбрать один из трех курсов: «Экономический» (для тех, кто готовится поступать в экономические вузы), «Юридический» (для поступающих в экономико-юридические вузы) и «Университетский» (для тех, кто готовится поступать в Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова и другие университеты и вузы страны с повышенными требованиями к поступающим).

Принимаются *все желающие, имеющие образование не ниже 7 классов*. Обучение ведется либо индивидуально, либо в небольших группах (2–5 человек). Формы обучения «Коллективный ученик» на экономическом отделении нет, но экономическое отделение оказывает помощь учителям школ по подготовке учащихся к единому государственному экзамену (тестированию) по обществознанию и ряду других предметов (для участия в этой программе учителю необходимо выслать заявку в адрес ОЛ ВЗМШ с пометкой «Экономика, программа тестирования».

Вступительная работа для учащихся тоже дается в форме теста – он включает вопросы по экономике, математике, истории, географии, литературе, общей культуре. Человечество вступило в новое тысячелетие, в котором главным двигателем прогресса станут именно знания. Символом стремления к знаниям в России, бесспорно, является М.В.Ломоносов, с именем которого также связан наш тест.

Решения присылайте *только на открытках* с указанием полного почтового адреса и индекса, фамилии, имени и отчества (все – *печатными* буквами); обязательно укажите источник информации об ОЛ ВЗМШ и напишите «Экономика, вступительный тест 2002 г.». На открытке достаточно записать в строчку номера вопросов и под каждым написать букву, соответствующую ответу, который вы считаете правильным. Верно ответившие на все вопросы получат из букв своих ответов осмысленную фразу, которую, как нам кажется, одобрил бы Михаил Васильевич Ломоносов и которую вам следует воспринять как прямое руководство к действию, если вы хотите преуспеть в учебе (пробелы между словами и знаки препинания расставьте по собственному желанию). Вы можете также ответить на вопросы теста с помощью Интернета – он размещен на сайте www.testland.ru.

Тест

1. Лето 1910 года застало Шерлока Холмса в Париже, куда его вызвали для расследования очередного преступления: «Итак, джентльмены, еще позавчера вы все были в Лондоне. Пытаясь объяснить, каким образом сегодня вы оказались в Париже, мистер Смит сообщил, что он – любитель путешествий на воздушном шаре, мистер Мардж предпочел полет на цеппелине, мистер Хедж выбрал аэроплан, мистер Фокс – банальный поезд через тоннель под Ламаншем, а мистер Хук утверждает, что в Лондоне видели его брата-близнеца. Увы, привычка врать даже по мелочам порою губительна. Я вынужден арестовать вас, мистер...»:

З) Смит;

Н) Мардж;

В) Хедж;

Д) Фокс;

Б) Хук.

2. Курсы валют в современной экономике определяются по результатам:

А) тайного голосования на бирже;

У) аукциона «Сотби»;

Ы) селекторного совещания директоров банков;

Е) валютных торгов;

Н) случайным образом.

3. Начиная с 1998 года, число участников экономической олимпиады в школе ежегодно увеличивалось на один и тот же процент по отношению к предыдущему году. В 1999 году в олимпиаде приняло участие 240 школьников, в 2000 году – 300 школьников, а в 2001 году в ней участвовало уже 375 человек. Сколько школьников приняло участие в экономической олимпиаде в 1998 году:

Д) 168;

А) 189;

Р) 192;

М) 196;

Б) 200?

4. Выберите букву с неправильным соответствием страны и ее валюты:

Н) Беларусь – рубль;

О) Италия – лира;

А) Бразилия – реал;

У) Австралия – доллар;

З) Индия – неру.

5. В 2001 году в экономике страны наблюдалась следующая ситуация: объем производства сократился на 7%, темп прироста цен составил 15%, а уровень безработицы увеличился до 14%. Какой термин использует экономист для характеристики состояния экономики:

А) стагфляция;

С) мультипликация;

И) деноминация;

Д) долларизация;

Л) реституция?

6. Какой из перечисленных праздников Россия встречает «впереди Европы всей»:

Н) Рождество;

Т) Пасху;

У) День Победы;

Й) Новый Год;

Е) День Независимости?

7. С каким известным экономистом теоретически мог М.В.Ломоносов пить чай и приятельски болтать:

Щ) Милтоном Фридменом;

К) Джоном Мейнардом Кейнсом;

Р) Вильямом Петти;

Н) Давидом Рикардо;

Т) Адамом Смитом?

8. Каким образом Михайло Ломоносов добрался до Москвы из деревни Денисовка.

О) в товарном вагоне;

И) на собаках, запряженных в нарты;

Е) пришел с рыбным обозом;

А) на почтовых;

Я) автостопом?

9. В компании работает 4 копировальных аппарата, которые вместе за 20 минут работы снимают 480 копий. Руководство компании, в связи с увеличением спроса на услуги фирмы, приобрело еще три точно таких же копировальных аппарата. После введения в строй новых аппаратов за 15 минут работы компания сможет делать:

Н) 630 копий;

Ю) 210 копий;

М) 315 копий;

Ш) 1050 копий;

Е) 840 копий.

10. Кого в России называли шаромыжниками:

Н) нищих, собирающих милостыню по деревням;

Ы) солдат Наполеоновской армии;

И) проигравшихся на бильярде;

М) ученых, изучающих шаровые молнии;

А) французских гувернеров?

11. Какому государству принадлежат Острова Россиян:

Ы) России;

А) США;

Н) Франции;

Т) Японии;

В) Норвегии?

12. Что было запрешено в Юрьев день с 1581 года в «заповедные лета»:

Р) поклоняться Перуну;

Т) селиться на территории Московской губернии;

Е) переходить от помещика к помещику;

Ш) уходить за Дон в казаки;

Ь) отмечать языческий день Весны?

13. По мнению Ломоносова, «математику уже затем учить следует, что она...»:

Д) «...умному дает немного подзаработать»;

С) «...экономику зело удачно дополняет»;

Е) «...не позволяет лениться»;

О) «...ум в порядок приводит»;

Л) «...самая важнейшая из наук».

14. В январе прибыль фирмы «Аушра» упала на 10%, в феврале же прибыль фирмы выросла на 10%, в марте снова упала на 10%, в апреле опять был отмечен 10%-й прирост прибыли... Такая тенденция сохранялась до конца года. Укажите верное утверждение:

А) в декабре прибыль фирмы была такой же, как и в июне;

Б) за год прибыли фирмы «Аушра» упали;

И) за год общий рост прибыли составил 12%;

Й) прибыль фирмы на конец года оказалась равной прибыли в начале года;

Я) в течение года наблюдалась тенденция к росту прибыли.

15. К чему относится экономический термин «невидимая рука», использованный Адамом Смитом:

К) труду рабочих;

Р) деятельности управляющих;

О) действию рыночного механизма;

Е) вмешательству государства в экономику;

Л) внешнеэкономической деятельности?

16. Сельма Лагерлёф получила Нобелевскую премию по:

О) экономике;

Т) математике;

А) физике;

Д) литературе;

З) географии.

17. Человек прошел 300 метров на юг, 300 метров на восток и 300 метров на север и оказался в той точке, из которой начал движение. Остановившись, он сделал выстрел из ружья и убил медведя. Какого цвета была шкура медведя:

Н) бурого;

Р) белого;

Ч) черного с белым;

Я) серого;

В) так не бывает?

18. Стоимость печати одной фотографии в мастерской 2 рубля 60 копеек. Человек заказал некоторое количество фотографий, но при расчете оказалось, что у него в кошельке нет монет достоинством меньше рубля. Какую сдачу ему не могут дать, если предположить, что кассир дает сдачу верно:

А) 3 рубля 40 копеек;

Е) 5 рублей 90 копеек;

С) 7 рублей 80 копеек;

И) 18 рублей 20 копеек;

П) 2 рубля 60 копеек?

19. Для литературной иллюстрации экономического термина «натуральное хозяйство» более всего подходит книга:

З) Н.Носова «Незнайка на Луне»;

Д) А.Линдгрен «Карлсон, который живет на крыше»;

Н) Д.Дефо «Приключения Робинзона Крузо»;

В) А.Линдгрен «Пеппи-Длинный чулок»;

И) Р.Киплинга «Маугли».

20. Что такое «Проблема-2000»:

С) угроза экологической катастрофы;

Л) экономические последствия глобализации экономики;

Г) мутации населения от облучения компьютерными мониторами;

Н) проблема координации программного обеспечения в связи со сменой века;

И) неразбериха, связанная с тем, что приход нового тысячелетия (миллениума) отмечался Европой в 2000 году, а Россией – в 2001 году?

21. Символом МГУ им.М.В.Ломоносова давно стало высотное здание, строительство которого было окончено в 1956 году. А где расположено это здание:

Ы) на Воробьевых горах;

Я) в Замоскворечье;

А) на Манежной площади;

И) в Горках;

Ю) на семи холмах?

Отделение «Нравственность, право, закон»

Это – шестой набор на отделение. Для поступления необходимо иметь базовое образование не ниже 8 классов средней школы.

Школьникам 8–11 классов и группам «Коллективный ученик» предлагается одногодичный курс «Беседы о правах человека, нравственности, праве, законе и государстве». В курсе даются современные представления об основных понятиях, связанных с правом, законом и государством, рассказывается об основах российского законодательства, правах человека. Кроме того, разбираются примеры судебных процессов, приводятся общекультурные примеры, связанные с общей направленностью курса.

Успешно окончившим предлагается годичный курс «Основы правовых знаний» (совместная разработка Российского фонда правовых реформ и отделения «Право» ОЛ ВЗМШ).

Желающие поступить должны сообщить свой полный почтовый адрес, фамилию, имя и отчество, сколько классов закончено. В письмо обязательно вложите чистый конверт с маркой и вашим адресом (для ответа). На отдельном листке бумаги напишите: «Ответ на тест: 1,2,3,4,5» и под каждым номером напишите букву, соответствующую ответу, который вы считаете правильным. Верно ответившие на все вопросы получат из выписанных букв ключевое слово.

Тест

1. Какая из перечисленных ниже фамилий попала сюда по ошибке:

м) Кони А.Ф.;
н) Корнилов Л.Г.;
о) Плевако Ф.Н.;
п) Спасович В.Д.?

2. Кому принадлежит фраза: «Когда осядет пыль веков... о нас тоже будут вспоминать не за наши победы или поражения на поле битвы или в политике, а за то, что мы сделали для духовного развития человека»:

а) Дж. Кеннеди;
б) Наполеону;
в) Сталину;
г) Бисмарку?

3. Незнание закона:

п) освобождает от наказания за неисполнение закона;
р) не влияет на наказание;
с) усугубляет наказание.

4. Кто, по вашему мнению, попал в этот список случайно:

о) Асклепий;
п) Иисус Христос;
р) Мухаммед;
с) Сиддхартра Гаутама?

5. В приведенную цитату вставьте слово, замененное многоточием. «... – это организованная, централизованная и авторитарная демократия»:

г) капитализм;
д) фашизм;
е) монархия;
ж) социализм.

Отделение истории

Отделение истории – самое молодое, оно открылось в 1998 году.

Отделение истории объявляет набор на курс дистантного обучения. Ученикам отделения регулярно направляются оригинальные учебные пособия и задания, подготовленные преподавателями специально для заочного образования. Обучение на историческом отделении позволит всем, в том числе жителям самых отдаленных городов и деревень, расширить свой кругозор, подготовиться к поступлению в вуз. Образование в ОЛ ВЗМШ можно продолжить, занимаясь на спецкурсах.

А зачем нужно изучать историю? Во-первых, это просто интересно. Любопытно знать, как жили когда-то люди, во что одевались, чем питались, что читали, как женились и выходили замуж, за что боролись и на что «напарывались». Во-вторых, это полезно. Только зная прошлое, можно понять настоящее и прогнозировать будущее. Мы поможем вам в этом разобраться. Специально для вас опытные преподаватели пишут книжки. Последние новости из мира истории вы узнаете одним из первых!

Мы будем поддерживать с вами постоянную связь. По нашим книжкам вы будете выполнять особые задания и сообщать нам, что вы раскопали. Мы же вам подскажем, как действовать дальше. Ведь в сущности профессия историка и состоит из этих раскопок: историк-археолог копает землю и песок, отыскивая крупицы ушедших времен; историк-архивариус копается в груде бумаг и достает из архивов и даже из частной переписки все, что может позволить ему понять образ времени; историк-теоретик как увлекательный роман читает археологические таблицы, сухие сводки, статистику и превращает их в живую ткань ушедшей жизни. У историка особая профессия: он в одном лице следователь, прокурор и адвокат времени.

На отделение истории принимаются все, кто выполнит вступительные задания.

Задания

1. Отгадайте, кто это:

• Бедный, неродовитый курляндский дворянин.

• Систематического образования не получил. Главное развлечение – лошади и карты.

• Ко двору курляндской герцогини Анны попал по протекции канцлера Кейзерлинга и, оттеснив интригами противников, стал ее фаворитом.

• Опасаясь его влияния, «верховники» запретили ему въезд в Россию, а он приехал.

• Официальных постов в России не занимал, но ему безраздельно доверяла императрица.

• Покровительствовал иностранцам, особенно выходцам из Прибалтики и Германии.

• Приказывал подавлять любые недовольства и казнить за антиправительственные речи.

• Обновил гвардию, усилил полицейский надзор, увеличил число караулов.

• Под давлением императрицы избран курляндским герцогом.

• Скопил состояние, бесконтрольно пользуясь государственными средствами.

• Регент младенца-наследника – Ивана VI.

• Арестован Минихом (1741), предан суду Анной Леопольдовной.

• Приговорен к четвертованию за отсутствие религиозности, захват регентства, стремление удалить императорскую фамилию от власти, «немыслимые жестокости», водворение немцев, усиление шпионажа.

• Помилован, сослан в Пелым (Сибирь), лишен чинов и имущества.

• Воцаряясь, императоры облегчали его участь: Елизавета перевела из Пелыма в Ярославль, Петр III восстановил в чинах, Екатерина II, свершив переворот, вернула ему герцогство.

• Мрачное десятилетие его правления названо его именем, однако часто ему приписывали действия Остермана, Левенвольде, Миниха.

2. Нарисуйте не более чем в семи предложениях исторический портрет первого российского императора.

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) Министерства образования РФ при Московском физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т. п.), расположенных на территории Российской Федерации, на 2002/03 учебный год.

ЗФТШ при МФТИ как федеральное государственное учреждение дополнительного образования детей работает с 1966 года. За прошедшие 35 лет школу окончили свыше 63 тысяч учащихся; практически все ее выпускники поступают в ведущие вузы страны, а каждый второй студент МФТИ – выпускник ЗФТШ. Финансирует ЗФТШ Министерство образования Российской Федерации. Обучение в ЗФТШ для граждан, проживающих в Российской Федерации (в рамках утвержденного плана приема), бесплатное.

Научно-методическое руководство школой осуществляет Московский физико-технический институт (государственный университет), который готовит специалистов по существующей только в МФТИ единой специальности «Прикладные математика и физика». В их подготовке принимают участие ведущие отраслевые и академические научно-исследовательские институты и научно-производственные объединения страны (базовые организации МФТИ). Преподаватели МФТИ – крупнейшие ученые, среди которых около 100 членов Российской академии наук. Физтеховское образование позволяет не только успешно работать в науке, но и хорошо ориентироваться в жизни.

Цель ЗФТШ при МФТИ – помочь учащимся, интересующимся физикой и математикой, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам, а также способствовать профессиональному самоопределению.

Набор в 8, 9, 10 и 11 классы ЗФТШ на 2002/03 учебный год проводится на следующие отделения:

– *Заочное (индивидуальное обучение).*
Телефон: (095) 408-51-45

Прием на заочное отделение проводится на конкурсной основе по результатам выполнения вступительного задания по физике и математике, приведенного ниже. Полная программа обучения рассчитана на 4 года, т.е. на 8 – 11 классы, но поступать можно в любой из этих классов.

В течение учебного года, в соответствии с программой ЗФТШ, ученик будет получать по каждой теме задания по физике и математике (по 4 задания по каждому предмету для 8 класса, 6 –7 заданий по каждому предмету для 9, 10 и 11 классов), а затем рекомендуемые ЗФТШ авторские решения этих заданий вместе с проверенной работой учащегося.

Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и 8 – 12 контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Задания ЗФТШ составляют опытные преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ. Работы учащихся-заочников проверяют студенты, аспиранты и выпускники МФТИ (часто – выпускники ЗФТШ).

– *Очно-заочное (обучение в факультативных группах).*
Телефон/факс (095) 485-42-27

Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении двумя преподавателями – физики и математики. Руководители факультатива принимают в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Группа (не менее 8 человек) принимается в ЗФТШ, если директор общеобразовательного учреждения сообщит в ЗФТШ фамилии, имена, отчества ее руководителей и поименный алфавитный список обучающихся (ФИО полностью) с указанием класса *текущего учебного года и итоговых оценок* за вступительное задание по физике и математике. Все эти материалы и конверт с маркой достоинством 3 руб. для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом на имя одного из руководителей следует выслать *до 25 мая 2002 года* по адресу: 141700 г.Долгопрудный Московской области, Институтский пер., 9, МФТИ, ЗФТШ (с указанием «Факультатив»). *Тетради с работами учащихся в ЗФТШ не высылаются.*

Работа руководителей факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением как факультативные занятия по представлению ЗФТШ при МФТИ соответствующих сведений.

Руководители факультативов будут получать в течение учебного года учебно-методические материалы ЗФТШ (программы по физике и математике, задания по темам программы, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся) и информационно-рекламные материалы (газеты МФТИ «За науку», проспекты МФТИ и его факультетов с правилами приема и т. п.). Работы учащихся проверяют и оценивают руководители факультативов, а в ЗФТШ ими высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию.

– *Очное (обучение в вечерних консультационных пунктах).*
Телефон/факс (095) 485-42-27

Для учащихся Москвы и Московской области по программе ЗФТШ работают вечерние консультационные пункты, набор в которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам собеседования по физике и математике, которое проводится в первой декаде сентября.

Программы ЗФТШ при МФТИ являются дополнительными образовательными программами и едины для всех отделений.

Кроме занятий по этим программам, ученикам ЗФТШ (всех отделений) предлагается участвовать в физико-математической олимпиаде «Физтех-абитуриент», которая проводится на базе МФТИ и в ряде городов России в мартовские школьные каникулы, в других очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультетов, а также в конкурсах и научно-технической конференции школьников «Старт в науку».

По окончании учебного года учащиеся, успешно выполнившие программу ЗФТШ по выбранной форме обучения, переводятся в следующий класс, а выпускники (одиннадцатиклассники) получают свидетельство об окончании с итоговыми оценками по физике и математике, которое учитывается на собеседовании при поступлении в МФТИ.

Вне конкурса (без выполнения вступительного задания) в ЗФТШ принимаются *победители* областных, краевых, республиканских, зональных и всероссийских олимпиад по физике и математике 2001/02 учебного года (участие нужно подтвердить справкой из школы и копией диплома *до 15 мая 2002 года*).

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу сделайте на русском языке и аккуратно перепишите в *одну* школьную тетрадь. Порядок задач сохраняйте тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради.

На *лицевую* сторону обложки наклейте лист бумаги, четко заполненный по приведенному здесь образцу.

Л.№								
№ п/п								Σ
Ф.								
М.								

1. Область	*Магаданская*
2. Фамилия, имя, отчество	*Матвеев Антон Сергеевич*
3. Класс, в котором учитесь	*седьмой*
4. Номер школы	*б/н*
5. Вид школы (обычная, лицей, гимназия, с углубленным изучением предмета и т.п.)	*обычная*
6. Подробный домашний адрес (с указанием индекса), телефон, e-mail	*686135 п. Хасын Магаданской обл., ул. Молодежная, д.2, кв.8 тел. 95-3-35*
7. Место работы и должность родителей:	
отец	*райсуд, судья*
мать	*школа, учитель*
8. Адрес школы, телефон, e-mail	*686135 п. Хасын Магаданской обл., ул. Геологов, д.20. тел.95-5-50*
9. Фамилия, имя, отчество преподавателей:	
по физике	*Козлова Ольга Анатольевна*
по математике	*Савченко Елена Александровна*
10. Каким образом к вам попало это объявление?	

В ЗФТШ ежегодно приходит более 6 тысяч вступительных работ. Пожалуйста, обратите внимание на правильность заполнения анкеты! Пишите аккуратно, лучше печатными буквами.

Внимание! Для получения ответа на вступительное задание и для отправки вам первых заданий *обязательно* вложите в тетрадь *три одинаковых* бандерольных конверта размером 160×230 мм с наклеенными марками на сумму 3 руб. на каждый конверт. На конвертах напишите свой домашний адрес.

Срок отправления решения – *не позднее 1 марта 2002 года.* Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 2002 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (по физике и математике) высылайте по адресу: *141700 г.Долгопрудный Московской области, Институтский пер., 9, МФТИ, ЗФТШ.*

Для учащихся Украины работает Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ (обучение платное). Желающим в него поступить следует высылать работы по адресу: 03680 г. Киев, пр. Вернадского, д. 36, Институт металлофизики, Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Телефон: (044) 444-95-24.

Для учащихся из стран ближнего зарубежья возможно платное обучение на заочном и очно-заочном отделениях ЗФТШ. Условия обучения для прошедших конкурсный прием будут сообщены дополнительно.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике.

В задании *по физике* задачи 1 – 5 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 1, 2, 4 – 7 – для восьмых классов, 4, 7 – 12 – для девятых классов, 7, 12 – 17 – для десятых классов.

В задании *по математике* задачи 1 – 5 предназначены для учащихся седьмых классов, 2 – 6 – для восьмых классов, 5 – 11 – для девятых классов, 8 – 14 – для десятых классов.

Номера классов указаны на текущий 2001/02 учебный год.

Вступительное задание по математике

1. Вычислите

$$4 \cdot \frac{\left(1^2-\frac{1}{4}\right)\left(3^2-\frac{1}{4}\right)\left(5^2-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(2001^2-\frac{1}{4}\right)}{\left(2^2-\frac{1}{4}\right)\left(4^2-\frac{1}{4}\right)\left(6^2-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(2000^2-\frac{1}{4}\right)}.$$

2. Найдите частное двух чисел, если оно в два раза меньше одного из них и в шесть раз больше другого.

3. На конечной остановке в трамвай вошли пассажиры, и половина из них заняли места для сидения. Сколько человек вошли на конечной остановке в трамвай, если после первой остановки число пассажиров увеличилось на 8% и известно, что трамвай вмещает не более 70 человек?

4. В треугольнике ABC проведены высота BK и отрезок BL, перпендикулярный стороне AB. Известно, что $\angle ALB = 45^\circ$, а точка L делит отрезок KC пополам. Найдите длину стороны AC, если длина отрезка KC равна 4 см.

5. Дан угол и точки B и C, расположенные одна на одной стороне угла, другая – на другой стороне угла. Найдите точку M, равноудаленную от сторон угла, такую, что $MB = MC$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} 3x + (a-1)y = a+1, \\ (a+1)x + y = 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

7. Сумма трех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 45. Если третье число увеличить на 48, то вновь полученные числа, взятые в том же порядке, образуют геометрическую прогрессию, знаменатель которой не является целым числом. Найдите исходные три числа.

8. К 22 часам проголосовали 20% не проголосовавших к 18 часам человек, после чего процент не проголосовавших людей составил 32%. На сколько процентов увеличилось количество проголосовавших к 22 часам по сравнению с проголосовавшими к 18 часам?

9. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$ax^2 + (a-2)|x| + 3a - 1 = 0$$

имеет четыре различных корня.

10. В ромбе $ABCD$ из вершины B на сторону AD опущен перпендикуляр BE. Найдите углы ромба, если $2\sqrt{3}\,CE = \sqrt{7}\,AC$.

11. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \le \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}.$$

12. В трапеции с основаниями 3 см и 4 см диагональ имеет длину 6 см и является биссектрисой одного из углов. Может ли эта трапеция быть равнобокой?

13. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 + 8x \le 0, \\ xy + y + 1 \le 0. \end{cases}$$

14. Рассматриваются всевозможные параболы, ветви которых направлены вниз, касающиеся оси OX и прямой $y = \frac{1}{2}x - 3$. Найдите уравнение той из парабол, для которой сумма расстояний от начала координат до точек пересечения параболы с осями координат минимальна.

Вступительное задание по физике

1. На первую треть пути автомобиль затратил четверть всего времени, а оставшееся расстояние он проехал со скоростью 40 км/ч. Какова средняя скорость автомобиля?

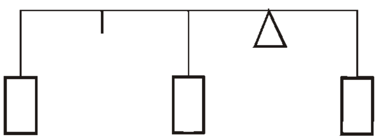


Рис. 1

2. Рычаг с тремя грузами находится в равновесии (рис.1). Масса правого груза 5 кг, левого 1 кг. Найдите массу среднего груза, если массой остальных элементов конструкции можно пренебречь.

3. Ученик измеряет плотность тела, не подозревая, что оно изготовлено из двух материалов равных масс с плотностями 3 г/см^3 и 6 г/см^3. Какой результат он получит?

4. В воде плавает тело массой 1 кг и объемом 3 л. Найдите выталкивающую силу и минимальную силу, которую надо приложить к телу, чтобы полностью погрузить его под воду.

5. Из материала с плотностью, вдвое большей плотности воды, изготовили полый шар объемом 8 л. Найдите объем полости внутри шара, если он плавает в воде, погрузившись ровно наполовину.

6. В термос поместили 1 кг воды при температуре +50 °С и некоторое количество льда при температуре −20 °С. Сколько могло быть льда, если в итоге в термосе установилась температура 0 °С?

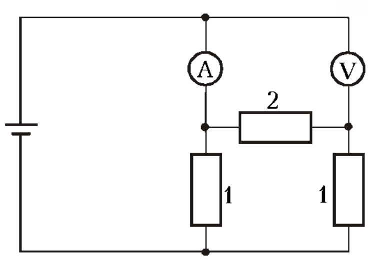


Рис. 2

7. Найдите показание амперметра в схеме на рисунке 2, если вольтметр показывает 6В. Сопротивления резисторов указаны в омах. Измерительные приборы можно считать идеальными.

8. Тело свободно падает с высоты 90 м. Разделите эту высоту на три части так, чтобы на прохождение каждой из них потребовалось одно и то же время.

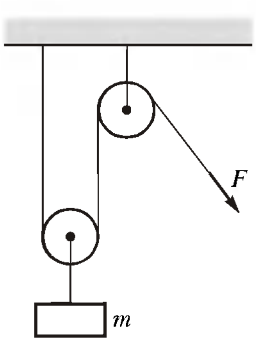


Рис. 3

9. Тело, имея начальную скорость $v_0 = 1$ м/с, двигалось равноускоренно и, пройдя некоторое расстояние, приобрело скорость v = 7 м/с. Какова была скорость тела на половине этого расстояния?

10. Груз массой m = 20 кг можно поднимать с помощью системы из подвижного и неподвижного блоков (рис.3). С какой постоянной силой F надо тянуть веревку, чтобы за время подъема t = 0,5 с груз из состояния покоя достиг скорости v = 2 м/с? Массами веревки и блоков и трением в осях блоков пренебречь.

11. Шайба, брошенная вверх вдоль наклонной плоскости, скользит по ней и через некоторое время возвращается в точку бросания. При каком угле наклона наклонной плоскости шайба возвратится, имея втрое меньшую скорость, чем при бросании? Коэффициент трения скольжения между шайбой и наклонной плоскостью $\mu = 0{,}3$.

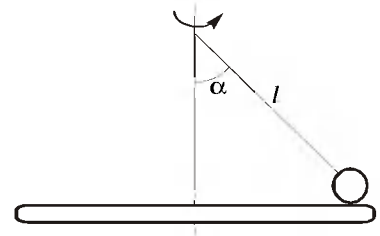


Рис. 4

12. Вокруг вертикально расположенного стержня вращается насаженный на него диск (рис.4). На диске находится шарик, прикрепленный к стержню нитью длиной l и составляющей угол α со стержнем. С каким периодом должна вращаться система, чтобы шарик не отрывался от диска?

13. Деформация вертикально расположенной легкой пружины, удерживающей гирю (рис.5), составляет x = 4 см. Чтобы увеличить деформацию пружины на 50%, медленно надавливая на груз в вертикальном направлении, надо совершить работу A = 0,3 Дж. Найдите жесткость k пружины.

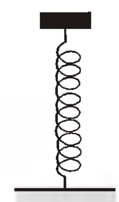


Рис. 5

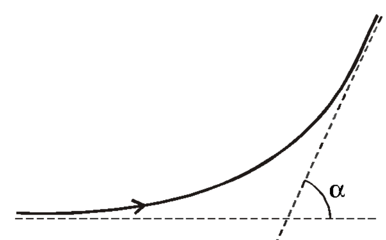


Рис. 6

14. Протон, пролетая мимо первоначально покоившегося ядра неизвестного химического элемента, отклонился на угол α ($\cos\alpha = 4/15$), потеряв 10% своей скорости (рис.6). Найдите массовое число химического элемента.

15. Вертикальный цилиндрический сосуд сечением $S = 10$ см^2 закрыт массивным поршнем. При подъеме сосуда с ускорением $2g$ объем газа под поршнем уменьшается в 1,5 раза. Найдите массу поршня, считая температуру газа постоянной. Внешнее давление $p_0 = 10^5$ Па. Трением поршня о стенки сосуда пренебречь.

16. В цилиндре под поршнем находится $\nu = 2$ моля идеального газа. Определите начальную температуру газа, если при сообщении ему количества теплоты Q = 18 кДж объем увеличился в 2,5 раза. Молярная теплоемкость газа при постоянном давлении равна $C_p = 21$ Дж/(моль·К).

17. В закрытом сосуде находится воздух с относительной влажностью 60% и температурой 27 °С. Какой станет относительная влажность воздуха в сосуде, если его нагреть на 73 °С? Давление насыщенных паров воды при температуре 27 °С равно 3,4 кПа.

Поздравляем с 35-летием ЗФТШ всех учащихся и преподавателей Заочной физико-математической школы при МФТИ!

Новый прием в школы-интернаты при университетах

Специализированный учебно-научный центр (сокращенно – СУНЦ) при МГУ (школа им. академика А.Н.Колмогорова), СУНЦ НГУ, СУНЦ УрГУ и Академическая гимназия при СПГУ объявляют набор школьников в 10 (двухгодичное обучение) и 11 (одногодичное обучение) классы.

Обучение ведется на двух отделениях: физико-математическом и химико-биологическом. В составе физико-математического отделения кроме основного профиля предлагаются компьютерно-информационный, биофизический (СУНЦ МГУ) и экономический. Химико-биологическое отделение представлено специализациями по химии и биологии.

Зачисление в школу производится на конкурсной основе по итогам нескольких туров. Первый тур – заочный письменный экзамен по математике, физике, химии. Успешно выдержавшие письменный экзамен по решению Приемной комиссии в апреле – мае приглашаются в областные центры Российской Федерации на устные экзамены.

Ниже приводятся условия задач заочного вступительного экзамена. Работа должна быть выполнена в обычной ученической тетради (на титульном листе напишите желаемый профиль обучения). На первой странице укажите свои анкетные данные: 1) фамилию, имя, отчество (полностью); 2) домашний адрес (подробный), индекс; 3) подробное название школы, класс.

Работу отправляйте простой бандеролью (обязательно вложите конверт с маркой, заполненный на свой домашний адрес) по одному из следующих адресов:

121357 Москва, Кременчугская ул., 11, СУНЦ МГУ, Приемная комиссия, заочный экзамен (внимание: жители Москвы принимаются в учебный центр без предоставления общежития, телефон для справок 445-11-08);

199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/96, Академическая гимназия;

620137 Екатеринбург, ул. Голощекина, 30, СУНЦ УрГУ;

630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, Учебно-научный центр НГУ, Олимпиадный комитет.

Срок отправки работ – *не позднее 10 марта 2002 года* (по почтовому штемпелю). Работы, высланные позже этого срока, рассматриваться не будут.

Если вы не сможете решить все задачи, не отчаивайтесь – комиссия рассмотрит работы с любым числом решенных задач.

Желаем успеха!

Вступительное задание

МАТЕМАТИКА

Для поступающих в 10 класс

1. Найдите
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2},$$
если
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\ \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0.$$

2. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AC = 6$ и $BC = 8$ проведена медиана CM. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACM и BCM.

3. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых
$$p^2-6q^2=1.$$

4. Через точку A, находящуюся вне окружности на расстоянии 7 от ее центра, проведена прямая, пересекающая окружность в точках B и C. Найдите радиус окружности, если $AB = 3$, $BC = 5$.

5. Какое максимальное количество натуральных чисел от 1 до 50 можно выбрать так, чтобы среди них не было двух чисел, отличающихся ровно в 3 раза?

Для поступающих в 11 класс

1. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^3-\sqrt{y}=y^3-\sqrt{x},\\ x^2-xy+y^2=1.\end{cases}$$

2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CD. На прямой AC взята точка E так, что угол EDC равен $90°$. Найдите CE, если $AD = a$.

3. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению
$$3xy-5=x^2+2y.$$

4. Сколько существует различных окружностей, проходящих через всевозможные тройки вершин куба?

5. Груз массой 36 т упакован в невесомые ящики. Масса груза в каждом ящике не превышает 1 т. Какое наименьшее количество четырехтонных грузовиков понадобится, чтобы наверняка можно было увезти этот груз (грузовики запрещается перегружать!)?

ФИЗИКА

Для поступающих в 10 класс

1. Материальная точка движется из начала координат вдоль оси X по закону $x(t)=At-Bt^2$, где A и B – положительные постоянные. Найдите координату точки, в которой ее скорость равна нулю.

2. Тело массой m находится на наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом (рис.1). К телу приложена сила $\vec{F}$, направленная горизонтально. Чему должна быть равна величина этой силы, чтобы тело равномерно поднималось по наклонной плоскости вверх? Коэффициент трения между телом и плоскостью μ.

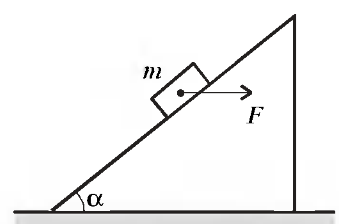


Рис. 1

3. Определите силу натяжения нити, связывающей два шарика объемом 8 $см^3$ каждый, если верхний шарик плавает, наполовину погрузившись в воду (рис.2). Нижний шарик в 3 раза тяжелее верхнего. Принять $g = 10\ м/с^2$, $\rho_в = 1\ г/см^3$.

4. Два автомобиля имеют двигатели одинаковой мощности. Максимальные скорости движения автомобилей равны, соответственно, v_1 = 80 км/ч и v_2 = 120 км/ч. Какую максимальную скорость смогут развивать автомобили, если первый автомобиль возьмет на буксир второй (с выключенным мотором)? Считать силу сопротивления независящей от скорости.

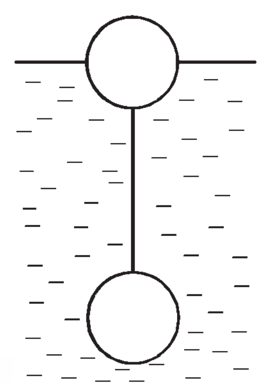


Рис. 2

5. При свободном падении тела из состояния покоя средняя скорость его движения за последнюю секунду оказалась в $n = 2$ раза больше, чем в предыдущую. Определите высоту, с которой падало тело. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Для поступающих в 11 класс

1. Тело, брошенное под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, через время $t_1 = 2$ с после начала движения имело вертикальную проекцию скорости, равную $v_y = 10$ м/с. Определите дальность полета тела. Принять $g = 10$ м/с^2.

2. Два прямоугольных бруска, массы которых равны, движутся по наклонной плоскости с углом наклона α одно за другим, касаясь друг друга. Коэффициент трения для нижнего тела μ_1, для верхнего μ_2 $(\mu_1 > \mu_2)$. Найдите ускорение, с которым движутся тела.

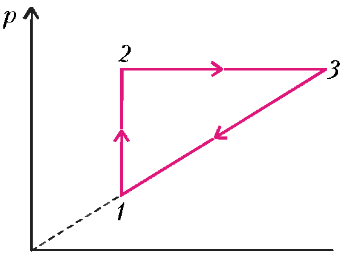


Рис. 3

3. Определите работу, совершенную одним молем идеального газа в цикле, указанном на pV-диаграмме (рис.3), если температура газа в состояниях *1* и *2* равна T_1 и T_2 соответственно.

4. Электрон, начальная скорость которого была $v_0 = 2 \cdot 10^6$ м/с, влетел в однородное электростатическое поле с напряженностью $E = 9 \cdot 10^4$ В/м так, что вектор начальной скорости перпендикулярен линиям напряженности. Определите, во сколько раз увеличится кинетическая энергия электрона за время $t = 1 \cdot 10^{-10}$ с. Считать $e/m = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

5. Два резистора r и R подключены к источнику постоянного напряжения так, как показано на рисунке 4. При замыкании ключа K мощность, выделяемая на резисторе R, увеличивается в 2 раза. Чему равно сопротивление резистора r, если сопротивление резистора R равно 10 Ом? Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

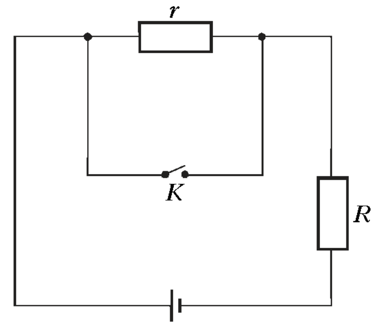


Рис. 4

ХИМИЯ

Для поступающих на химико-биологическое отделение в 10 класс

1. На чашках весов уравновешены химические стаканы с 0,1 г металлического алюминия в каждом. Как изменится равновесие весов, если в один стакан долить 20 г 5%-го раствора соляной кислоты, а в другой – 20 г 5%-го раствора гидроксида натрия? Как изменится ответ, если вместо алюминия взять а) цинк; б) кальций? Напишите уравнения реакций.

2. Неустойчивая неорганическая кислота содержит водород, кислород и серу. Массовая доля серы в кислоте 56,14%. Определите формулу кислоты.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для «младших» школьников

Задачи

(см. с.28)

1. Первыми тремя взвешиваниями можно определить вес первого и второго, второго и третьего, третьего и первого яблок. Сумма найденных значений дает удвоенную величину веса трех первых яблок, откуда определяется их общий вес. Для остальных 10 яблок достаточно 5 взвешиваний, чтобы найти их суммарный вес. Итого: потребуется 8 взвешиваний.

2. Для каждой кошки отметим более толстого кота, который сидит рядом с ней, тогда каждый отмеченный кот будет соседствовать с кошкой, которая тоньше его.

Предположим, не все коты отметятся, тогда отмеченных котов будет 9 или меньше. Поскольку каждый из котов может соседствовать не более чем с двумя кошками, то рядом с отмеченными котами окажется не более 18 кошек, что меньше их общего количества. Противоречие.

Итак, рядом с любым котом сидит кошка, которая тоньше его.

3. Заметим, что результат задачи не изменится, если хорды *PA*, *PB*, *PC* заменить наименьшими дугами $\smile{PA}$, $\smile{PB}$, $\smile{PC}$, стягиваемыми этими хордами. Далее заметим, что как бы ни располагалась точка *P* на окружности, сумма длин указанных дуг не меньше, чем сумма длин двух наименьших дуг из набора $\left\{\smile{AB}, \smile{BC}, \smile{CA}\right\}$. При этом наименьшее значение суммы достигается, когда точка *P* совпадает с вершиной наибольшего угла в треугольнике *ABC*.

Ответ: почту *P* следует разместить в том поселке, который располагается в вершине наибольшего угла треугольника *ABC* (если в этом треугольнике два наибольших угла или все углы равны, то в любом из них).

4. Продолжим стороны *AH*, *BC* и *FG* до пересечения в точках *M*, *N*, *K* (рис.1). Треугольники *MAB*, *KHG* и *FCN* равны по стороне и двум прилегающим к ней углам. Следовательно, треугольник *MNK* равносторонний. Из этого следует *BC* = *FG* = *HA*.

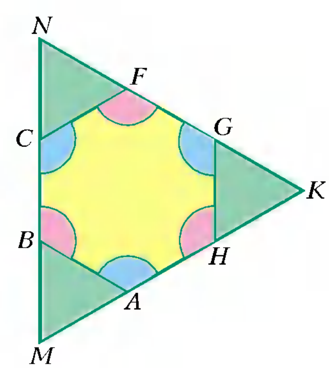


Рис. 1

5. Заметим, что сумма очков всех 28 костей домино равна 168. Семь костей домино, взятых каждым игроком, могут иметь сумму очков, не меньшую 15 и не большую 69.

Пусть a – сумма очков Бабы, b – сумма очков Табриза, c – сумма очков Гамида и d – сумма очков Эльмира. Из условия задачи следуют равенства

$$c + d = 84,\ a + b = 84,\ a - b = \frac{27}{7}(c - d)$$

Сложив второе и третье равенства и учитывая замену $c = 84 - d$, находим $2a = 84 + \frac{27}{7}(84 - 2d)$, или $a = 204 - \frac{27}{7}d$. Поскольку число a – целое, то d должно быть кратным 7: $d = 7k$, где k – натуральное. Тогда $a = 204 - 27k$. Из ограничений $15 \le a \le 69$ следует $5 \le k \le 7$. Значение $k = 6$ невозможно, так как иначе числа a, b, c, d оказываются равными:

$a = b = c = d = 42$, что противоречит условию задачи. В случае $k = 5$ находим $a = 69$, $b = 15$, $c = 49$, $d = 35$; в случае $k = 7$ получаем $a = 15$, $b = 69$, $c = 35$, $d = 49$. И в том, и в другом случае у кого-то – Бабы или Табриза – оказываются 7 костей с наименьшей суммой очков 15, а у другого – 7 костей с наибольшей суммой очков 69. Таким образом, у Бабы и Табриза на руках обязательно окажутся следующие 12 костей:

$$0\times0,\ 1\times0,\ 1\times1,\ 2\times0,\ 2\times1,\ 3\times0,$$
$$6\times6,\ 6\times5,\ 6\times4,\ 6\times3,\ 5\times5,\ 5\times4.$$

Задачи

(см. «Квант» №5)

1. Вася ошибся в расчетах. Среди 13 столбиков, насчитанных им при ходьбе в одну сторону, должно быть 6 троек столбиков с высотой 1 м, 2 м и 3 м, а также одна пара столбиков с высотой 1 м и 2 м или 2 м и 3 м. В любом случае при ходьбе в обратную сторону Вася должен был насчитать 6 пар столбиков, высота в которых возрастала, а это противоречит условию.

2. Поскольку в уменьшаемом и вычитаемом сумма цифр одинакова, то они имеют одинаковые остатки при делении на 9. Следовательно, их разность делится на 9, и профессору Мумбуму-Плюмбуму не удастся найти простое число указанного вида.

3. Пусть в больнице находятся a врачей и b больных, причем сумма температур врачей равна A, а сумма температур больных равна B. По условию,

$$\frac{A}{a}+\frac{B}{b}=2\cdot\frac{A+B}{a+b}.$$

Это равенство несложно преобразовать к виду

$$ab(b-a)\left(\frac{A}{a}-\frac{B}{b}\right)=0.$$

Поскольку $\frac{A}{a}\neq\frac{B}{b}$, заключаем, что $a = b$. Итак, врачей и больных в больнице одинаковое количество.

4. *Ответ*: 8. Все 22 ученика, писавшие слово «КРОТ», написали либо «КОТ», либо «РОТ». Все остальные либо написали правильное слово, либо написали слово «ОТ». Таким образом, из 30 написанных слов «КОТ» и «РОТ» 22 раза эти слова написаны по ошибке, а остальные 8 раз – правильно.

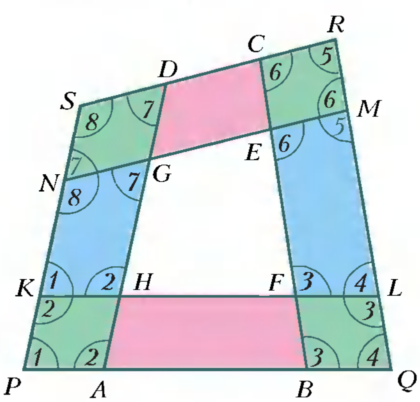


Рис. 2

5. Введем обозначения, показанные на рисунке 2. Всякий параллелограмм с равными высотами является ромбом, поэтому по четырем углам рисунка 2 расположены ромбы. Из трапеций, обрамляющих внутренний четырехугольник на рисунке 2, образуем вытянутый параллелограмм, показанный на рисунке 3. Две равные противоположные стороны этого параллелограмма образуют периметры заданных в условии задачи четырехугольников. В этом нетрудно убедиться, привлекая соотношения

$$PQ = PA + AB + BQ = HA + AB + BF,$$
$$RS = RC + CD + DS = EC + CD + DG.$$

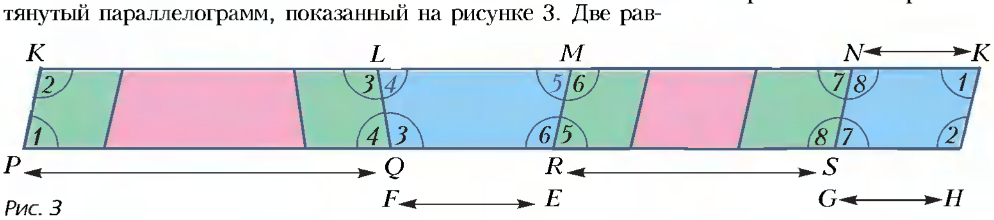


Рис. 3

Характерные задачи вступительных экзаменов по физике в МФТИ

1. $F_{\min} = (M+m)g(\mu\cos\alpha+\sin\alpha)/2$.

2. $m_{O_2} = 4\pi R_3^2\rho RT/(\mathrm{M}g)\approx10^{18}$ кг, где $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная, $\mathrm{M} = 32$ г/моль – молярная масса кислорода.

3. $p = B_0^2ba^2/(2R)$.

4. $v = 2\pi R\Gamma/T \approx 0{,}06$ см/с, где $\Gamma = 0{,}4$ – увеличение линзы, $T = 60$ с – период обращения секундной стрелки.

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\left(0;\ \log_2\frac{128}{71}\right)$, $\left(2\log_2 7-6;\ 4-\log_2 7\right)$. *Указание.* Из второго уравнения после возведения в квадрат получаем, что либо $x = 0$, либо $y = 1 - x/2$.

2. $\pi n/2$, $\pm\pi/3+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. *Указание.* Применяя формулы

$$\cos^3 x = (1/4)\cos3x+(3/4)\cos x,$$
$$\sin^3 x = (3/4)\sin x+(1/4)\sin3x,$$

приведем уравнение к системе

$$\begin{cases}\sin4x = 4\sin2x\cos2x\cos x,\\ \cos2x\neq0.\end{cases}$$

3. $(-\infty;\ -1)\cup\{0\}\cup(4;\ +\infty)$. *Указание.* Неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-3x}>2,\\ \sqrt{x^2-2x+4}\le2-\sqrt{x^2-3x}.\end{array}\right.$$

4. $AC = 32\sqrt{3/35}$, $BC = 4\sqrt{6/5}$, $R = 3\sqrt{7/10}$. *Указание.* Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \angle ADB = \beta$, $\angle BCD = \gamma = \alpha+\beta$ (рис.4). Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$ и $\sin\gamma$, а затем несколько раз примените теорему синусов для треугольников ABC и BCD.

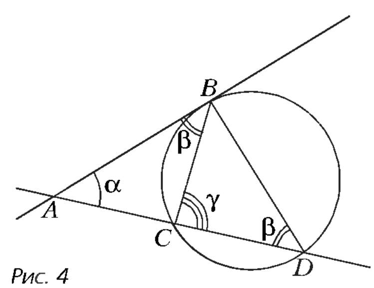


Рис. 4

5. Оптимальный путь состоит из двух отрезков: SP и PF, где $P\in BC$, $PB = 2BC/5$. *Указание.* Наложим грань BCD на грань ABC так, чтобы ребро BC осталось на месте, а точка D попала в точку A (рис.5). В результате путь муравья превратится в ломаную линию, соединяющую точки S и F. Длина пути минимальна, если ломаная станет отрезком, соединяющим точки S и F. Отрезок SF пересекает BC в точке P. Проведем FK –

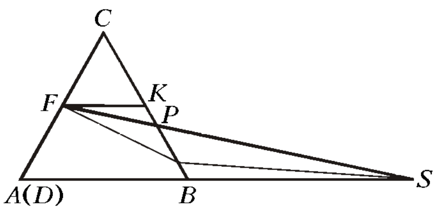


Рис. 5

среднюю линию треугольника ABC. Пользуясь подобием треугольников FKP и BPS, нетрудно получить, что $BP = \frac{2}{5}BC$.

6. 1) $\arccos\frac{47}{121}$; 2) $\frac{36}{\sqrt{259}}$; 3) $\frac{8}{3}$. *Указание.* Вычислите длины ребер и апофем пирамиды $ABCD$. Проведите отрезок $A_1F \| AC_1$ (рис.6) и найдите его длину. Угол FA_1B определите, пользуясь теоремой косинусов для ΔA_1FB. Расстояние l между прямыми BA_1 и AC_1 найдите из формулы для объема пирамиды $V = abl\cos\varphi/6$ (где a, b – длины скрещивающихся ребер пирамиды, l – расстояние, а φ – угол между ними), примененной к пирамиде AA_1C_1B, объем которой равен $1/4$ объема пирамиды $ABCD$. (В самом деле, $S_{AA_1C_1} = \frac{1}{4}S_{ADC}$, а высота из вершины B совпадает с высотой $ABCD$). Для вычисления радиуса r сферы следует заметить, что ее центр I лежит на высоте DO. Затем из треугольника A_1ID по теореме косинусов можно выразить A_1I через r, после чего воспользоваться равенством $HB = BO = 8$ (H – точка касания сферы с BA_1) и тем, что $A_1H + HB = A_1B$.

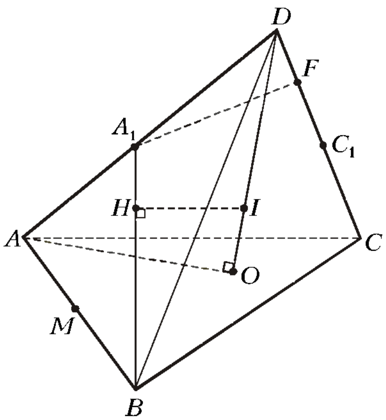


Рис. 6

Вариант 2

1. 6; –2. *Указание.* Выполните замену $t = \sqrt{x^2 - 4x + 13}$.

2. $\pi/7 + \pi n$, $3\pi/7 + \pi n$, $5\pi/7 + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Достаточно найти решения на промежутке $[0; \pi)$, на котором уравнение равносильно уравнению $\cos(7x/2)\sin(x/2) = 0$, $x \neq \pi n/3$.

3. $\left(-11; -1-3\sqrt{11}\right) \cup \left[-\sqrt{79}; 7\right] \cup \left[43/5; \sqrt{79}\right] \cup \left(-1+3\sqrt{11}; 9\right)$.

Указание. С помощью замены $z = \log_{20-2x}\left(99 - 2x - x^2\right)$ неравенство приводится к виду $z + \frac{2}{z} \leq 3$.

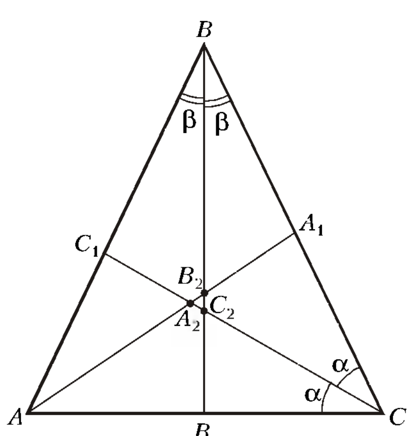


Рис. 7

4. 1) $3\sqrt{35}/7$; 2) $4\sqrt{35}/105$. *Указание.* Найдите в каких отношениях делятся отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 точками A_2, B_2, C_2 (рис.7), а затем вычислите отношение площадей треугольников $A_2B_2C_2$ и BC_2C к площади треугольника ABC.

5. $\left(\pm 2\sqrt{2}/3; 1 \mp \sqrt{2}\right)$. *Указание.* Умножая первое неравенство на 4 и складывая его со вторым, получаем

$$4y^2 + 12xy + 9x^2 - 4(2y + 3x) + 4 \leq 0,$$

$$(2y + 3x - 2)^2 \leq 0,$$

откуда $3x = 2 - 2y$, $y^2 + 3xy + 1 = 0$.

6. $R \geq r + \frac{2r}{\sqrt{3}}$; $\frac{R\left(R - r - \sqrt{R^2 - 2Rr - r^2/3}\right)}{r - \sqrt{R^2 - 2Rr - r^2/3} + R}$.

Из сечения $O_1O_2O_3$ (рис.8,*а*), где O_i – центры шаров радиуса r, получаем, что $R \geq AH = AO_1 + O_1H$, H – центр равностороннего треугольника $O_1O_2O_3$. По свойству касающихся шаров имеем $AO_1 = r$, $O_1H = \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{O_1O_2}{2} = \frac{2r}{\sqrt{3}}$.

Таким образом, $R \geq r + \frac{2r}{\sqrt{3}}$.

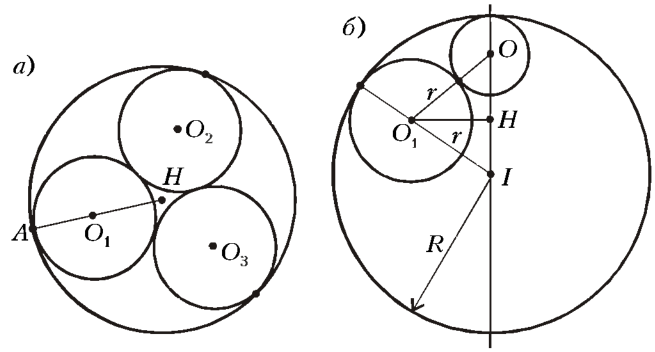


Рис. 8

Пусть I – центр сферы радиуса R (рис.8,*б*), O – центр искомого шара, а x – его радиус. Из условия $IO - IH = OH$ и соотношений

$$IH = \sqrt{IO_1^2 - O_1H^2} = \sqrt{(R-r)^2 - 4r^2/3},$$

$$IO = R - x,$$

$$OH = \sqrt{OO_1^2 - O_1H^2} = \sqrt{(r+x)^2 - 4r^2/3}$$

получаем уравнение

$$R - x - \sqrt{(R-r)^2 - 4r^2/3} = \sqrt{(r+x)^2 - 4r^2/3}.$$

Вариант 3

1. $(-\infty; -3] \cup \left[-1; \left(-1+\sqrt{17}\right)/8\right)$.

2. $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}2 + pn$, $n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Левая часть уравнения равна $\mathrm{tg}\,x$ при $\cos 2x + \cos 3x \neq 0$.

3. $A_1A_2 = 7$, $B_1B_2 = 5$, $AB_1 = 6$, $AB = 12$, $BB_1 = 6\sqrt{3}$.

4. 1) 25/27; 2) $2\sqrt{2}/15$;

3) $\arcsin\frac{12}{5\sqrt{17}}$. *Указание.* Поскольку $EF \| BD$ (рис.9), плоскость EFK пересекает плоскость SBD по прямой $MN \| BD$, а в сечении образуется пятиугольник $EMKNF$. Пусть P и G – середины EF и MN соответственно, L – проекция точки

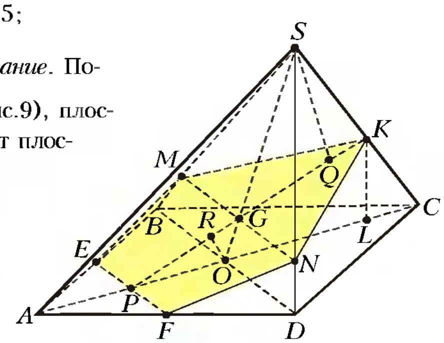


Рис. 9

K на плоскость $ABCD$, R и Q – проекции, соответственно, точек O и S на плоскость EFK. Тогда $L \in AC$, $Q \in PK$, $R \in PK$, $OR \perp PK$, $SQ \perp PK$, $KL \perp AC$. Обозначим $OD = a$, $SO = h$, ψ – угол между плоскостями EFK и $ABCD$, θ – угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью $ABCD$. Из условий находим a, h, $\sin\psi$, $\cos\psi$, $\operatorname{tg}\psi$. Расстояние d от точки D до плоскости EFK равно длине отрезка OR, т.е.

$$d = PO\sin\psi = 2\sqrt{2}/15.$$

Находим синус угла между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды: $\sin\theta = 4/\sqrt{17}$.

Из равенств $\sin\theta = SG/SN$, $\cos\psi = SQ/SG$ следует, что

$$\sin\varphi = SQ/SN = \sin\theta\cos\psi = 12/\left(5\sqrt{17}\right).$$

Площадь сечения находится по формуле

$$S_0 = \frac{1}{2}\left(PK \cdot MN + PG \cdot EF\right).$$

5. $\left(3-\sqrt{13}\right)/2 < a \le 5$. Перепишем уравнение в виде

$$\log_3\left(x+\sqrt{5-a}\right) - \log_3(a-2-x) = \log_3 2,$$

что, в свою очередь, равносильно уравнению

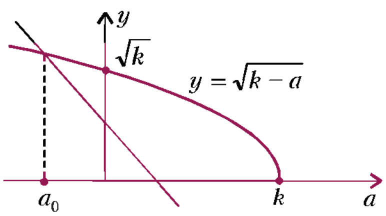


Рис. 10

$$x + \sqrt{5-a} = 2(a-2-x)$$

при условии $a - 2 > x$. Отсюда

$$2 - a < \sqrt{5-a}.$$

Из рисунка 10 видно, что решение неравенства есть промежуток $\left(a_0; 5\right]$, где число a_0 найдем из условия $\sqrt{5-a_0} = 2 - a_0$, $a_0 = \left(3-\sqrt{13}\right)/2$.

6. $(0, 0, 0)$; $(-3/2, -1/2, -1)$; $(-5/6, -1/6, -1/2)$. *Указание.* Из третьего уравнения системы вычтем первое и прибавим удвоенное второе, получим

$$2z(x+y-2z) = 0,$$

т.е. либо $z = 0$, либо $y = 2z - x$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. 1) Скорость шайбы в точке C найдем по закону сохранения энергии. В исходном положении шайба обладала только потенциальной энергией, равной mgH (за нулевой уровень потенциальной энергии примем дно чаши). В точке C шайба обладает как потенциальной, так и кинетической энергией. Потенциальная энергия равна $mgR(1-\cos\alpha)$, а кинетическая равна $mv^2/2$, где v – скорость шайбы в точке C. Закон сохранения энергии будет иметь вид

$$mgH = mgR(1-\cos\alpha) + \frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{2g\left(H - R(1-\cos\alpha)\right)} = 2\sqrt{\frac{gR}{5}}.$$

2) Рассмотрим силы, действующие на шайбу при прохождении ею точки C (рис.11): это сила тяжести $m\vec{g}$ и реакция опоры $\vec{N}$ со стороны чаши. Суммарная проекция этих сил на радиус OC сообщает шайбе центростремительное ускорение:

$$\frac{mv^2}{R} = N - mg\cos\alpha.$$

Отсюда находим силу реакции опоры:

$$N = \frac{mv^2}{R} + mg\cos\alpha = \frac{8}{5}mg.$$

По третьему закону Ньютона, на чашу будет действовать сила давления $\vec{N}'$, равная силе $\vec{N}$ по величине и направленная в противоположную сторону. Поскольку чаша неподвижна относительно стола, горизонтальная составляющая силы $\vec{N}'$, взятая с противоположным знаком, и будет равна силе трения между чашей и столом:

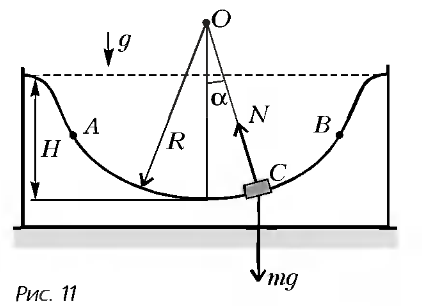


Рис. 11

$$F_{\text{тр}} = N\sin\alpha = \frac{24}{25}mg.$$

2. 1) Процесс $pV^2 = \text{const}$ с учетом уравнения состояния для идеального газа можно записать в переменных p и T в виде

$$\frac{T^2}{p} = \text{const}.$$

Отсюда видно, что с уменьшением температуры давление газа также уменьшается. Следовательно, начальное давление гелия было максимальным, а конечное – минимальным. Исходя из этого, можно записать

$$\frac{T_1^2}{p_{\max}} = \frac{T_2^2}{p_{\min}},$$

где T_1 – начальная температура гелия, а T_2 – конечная. Из этого равенства находим

$$p_{\max} = p_{\min}\frac{T_1^2}{T_2^2} = k^2 p_{\min} = 9 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

2) Абсолютная величина изменения внутренней энергии гелия равна

$$|\Delta U| = c_V\nu\left(T_1 - T_2\right) = c_V\nu T_2\left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right) = c_V\nu T_2(k-1),$$

где $c_V = 3R/2$ – молярная теплоемкость гелия при постоянном объеме, ν – число молей гелия. Отсюда конечная температура равна

$$T_2 = \frac{|\Delta U|}{c_V\nu(k-1)}.$$

Для нахождения объема гелия в конечном состоянии воспользуемся уравнением состояния для идеального газа:

$$p_{\min}V_2 = \nu RT_2,$$

откуда

$$V_2 = \frac{\nu RT_2}{p_{\min}}.$$

Подставляя сюда выражение для T_2, окончательно получаем

$$V_2 = \frac{2|\Delta U|}{3(k-1)p_{\min}} = 0{,}17 \text{ л}.$$

3. 1) Сразу после замыкания ключа K падение напряжения на диоде D_2 равно нулю. Следовательно, ЭДС батареи равна падению напряжения на резисторе сопротивлением R_1, а ток в цепи равен

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1}.$$

2) После замыкания ключа будет происходить зарядка последовательно соединенных конденсаторов емкостью C_1 и C_2. За время зарядки через батарею протечет заряд

$$q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\mathcal{E}.$$

Батарея при этом совершит работу

$$A = q\mathcal{E} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\mathcal{E}^2.$$

Эта работа частично пойдет на увеличение энергии конденсаторов, а частично выделится в виде тепла. Энергия зарядившихся конденсаторов равна

$$W = \frac{1}{2}\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\mathcal{E}^2.$$

Следовательно, количество теплоты, которое выделится в схеме после замыкания ключа, равно

$$Q = A - W = \frac{C_1 C_2 \mathcal{E}^2}{2(C_1 + C_2)}.$$

4. При движении проводника со скоростью v в нем возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = vlB$. Поскольку проводник закорочен конденсатором, напряжение на конденсаторе всегда равно ЭДС индукции:

$$U_C = vlB.$$

Найдем удлинение Δx пружин в положении равновесия проводника из условия равновесия:

$$Mg = 2k\Delta x, \text{ и } \Delta x = \frac{Mg}{2k}.$$

Когда проводник сместили вниз на расстояние h от положения равновесия,удлинение пружины стало равным

$$\Delta x' = \Delta x + h.$$

Найдем энергию системы в тот момент, когда проводник отпускают из смещенного положения. Кинетическая энергия проводника равна нулю, потенциальная энергия проводника в поле тяжести равна

$$\Pi_1 = -Mgh$$

(начало отсчета выбрано в положении равновесия). Поскольку скорость проводника равна нулю, конденсатор не заряжен. Энергия упругой деформации пружин равна

$$E_1 = 2\frac{k\Delta x'^2}{2} = k\left(\frac{Mg}{2k} + h\right)^2.$$

Полная энергия нашей системы в этот момент составляет

$$W_1 = \Pi_1 + E_1 = -Mgh + k\left(\frac{Mg}{2k} + h\right)^2.$$

Найдем теперь энергию системы, когда проводник будет проходить положение равновесия. Обозначим скорость проводника в этот момент через v. Энергия заряженного конденсатора равна

$$E_к = \frac{CU_C^2}{2} = \frac{C(vlB)^2}{2}.$$

Потенциальная энергия проводника в поле тяжести равна нулю. Энергия упругой деформации пружин равна

$$E_2 = 2\frac{k\Delta x^2}{2} = \frac{(Mg)^2}{4k}.$$

Кинетическая энергия проводника равна

$$K_2 = \frac{Mv^2}{2}.$$

Полная энергия системы в этот момент составляет

$$W_2 = E_к + E_2 + K_2 = \frac{C(vlB)^2}{2} + \frac{(Mg)^2}{4k} + \frac{Mv^2}{2}.$$

По закону сохранения энергии, $W_1 = W_2$, или

$$-Mgh + k\left(\frac{Mg}{2k} + h\right)^2 = \frac{C(vlB)^2}{2} + \frac{(Mg)^2}{4k} + \frac{Mv^2}{2}.$$

Отсюда находим скорость проводника:

$$v = h\sqrt{\frac{2k}{Cl^2B^2 + M}}.$$

5. Найдем расстояние f от изображения источника до линзы перед смещением источника. Поскольку расстояние от источника $d < F$, то изображение будет мнимым. По формуле линзы

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

получаем

$$f = \frac{dF}{F - d} = 24 \text{ см}.$$

Так как источник смещают в вертикальной плоскости перпендикулярно главной оптической оси, линзу тоже нужно сместить в вертикальной плоскости. В этом случае сохраняются расстояния d и f. Точечный источник, его изображение и оптический центр линзы всегда лежат на одной прямой. Поэтому оптический центр линзы O' должен лежать на прямой BA' (рис.12). Следовательно, линзу нужно сместить вниз на расстояние OO'. Из подобия треугольников OBO' и ABA' найдем искомое расстояние:

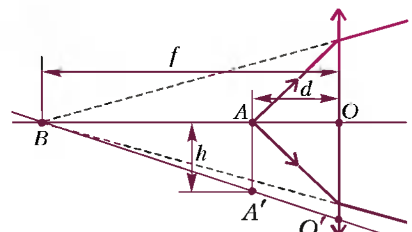


Рис. 12

$$OO' = \frac{hf}{f - d} = \frac{hF}{d} = 6 \text{ см}.$$

Вариант 2

1. 1) $a = g(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha) \approx 2{,}9$ м/с^2;
2) $L = (3/4)(\mu_2 - \mu_1)gt^2\cos\alpha = 25$ см.

2. $Q = \Lambda/2 + 4R\Delta T$. **3.** $A = \mathcal{E}\left(\frac{Q}{2} + \frac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}}{d}\right)$.

4. $I_m = U_1\sqrt{\frac{C_1C_2}{L(C_1 + C_2)}}$. **5.** $x = R\frac{n^2}{2 + n - n^2} = 18$ см.

Московский государственный институт электроники и математики

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\left[-6; \frac{3}{2}\right] \cup (3; +\infty)$. **2.** $\left(\frac{8}{3}; 4\right)$.

3. $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $k, n \in \mathbf{Z}$.

4. а) $MN = 5$; б) $LE = \frac{5}{4}$.

5. -2; -1; 3. *Указание.* $x = 2$ при $a = -2$. При $a \neq -2$ должны быть целыми числа

$$x_1+x_2=-2+\frac{5}{a+2} \text{ и } x_1x_2=a-7+2\frac{5}{a+2},$$

откуда $a+2=\pm1;\ \pm5$. Проверка показывает, что подходят только $a=-1$, $a=3$.

Вариант 2

1. $(-\infty;-1]\cup(2;3]$. **2.** 1.

3. $\frac{\pi}{4}-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **4.** а) 81; б) 1:3.

5. 0. *Указание.* Функция $f(x)=2\cos3x+8|\sin x|-7$ четная, кроме того, $f(0)f\left(\frac{2\pi}{3}\right)<0$. Поэтому сумма корней на $\left[-\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$ равна 0. При $x\in\left(\frac{2\pi}{3};\frac{3\pi}{4}\right]$ функция убывает, причем $f(x)>f\left(\frac{3\pi}{4}\right)>0$.

ФИЗИКА

1. $\Delta p=2\sqrt{2mE}\operatorname{tg}\alpha$. **2.** $T=m\left(g-\frac{v^2}{8l}\right)$. **3.** $\eta=1/18$.

4. $n=\dfrac{p_н}{p-\dfrac{mRT}{MV}}=4$ (здесь $p_н=100$ кПа – давление насыщенного пара при 100 °С, M = 18 г/моль – молярная масса воды).

5. $n=3$. **6.** $x=\frac{3mdv^2}{2eU}$. **7.** $P_{max}=\frac{(U-Ir)^2}{4r}$.

8. $F_{min}=\frac{IBl}{mg}(mg-IBl)=0{,}32$ Н.

9. $t=\frac{\lambda\operatorname{arctg}2}{2\pi c}$, где c – скорость света.

10. $x=H\sin\alpha$.

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. 3 круга. *Указание.* Если один мотоциклист впервые догоняет другого, то это значит, что он проехал на один круг больше.

2. $2\pi n$, $\pm\arccos\left(-\frac{4}{7}\right)+2\pi k$, $n,k\in\mathbf{Z}$ (вторую серию решений можно записать по-другому: $\pm\arccos\frac{4}{7}+(2m+1)\pi$, $m\in\mathbf{Z}$); 5 решений. *Указание.* Уравнение $|f(x)|=|g(x)|$ равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right.$$

3. $(0;1)$. *Указание.* Рассмотрите случаи $x+1>1$ и $0<x+1<1$.

4. 4.

5. $2/\sqrt{3}$. *Указание.* Рассмотрите сечение AA_1C_1C.

Вариант 2

1. $\frac{\pi}{36\sqrt{3}}a^3\operatorname{tg}\alpha$. **2.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $n,k\in\mathbf{Z}$.

3. $(-\infty;0)\cup\left(0;\frac{1}{3}\right]$. **4.** 110. **5.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

Вариант 3

1. 108. *Указание.* Из равенства боковых ребер следует, что основанием высоты пирамиды является центр окружности, описанной около основания. Радиус этой окружности можно найти, например, из равенства $4RS=abc$.

2. $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. *Указание.* Не забудьте проверить, входят ли найденные решения в ОДЗ.

3. $(3;4{,}5)\cup(8;+\infty)$. **4.** 0; 3. **5.** $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

Вариант 4

1. $8\sqrt{6}/3$. **2.** $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **3.** $(-\infty;\log_2 3)$. **4.** 1/12.

5. 10. Этот единственный максимум есть $f(1)$.

Задачи устного экзамена

1. $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **2.** $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{5}{4};+\infty\right)$. **3.** $[-3;-1)\cup(2;3]$.

4. $(1;+\infty)$. *Указание.* Рассмотрите случаи $l<0$, $l=0$, $l>0$.

5. $-36/5$. *Указание.* Перейдите к логарифмам по одному основанию, например c, и обозначьте $\log_c b=x$.

6. -1. *Указание.* Преобразуйте произведение тригонометрических функций в сумму.

7. $-24/25$. *Указание.* Можно воспользоваться формулами, выражающими $\sin2t$ и $\cos2t$ через $\operatorname{tg}t$.

8. 22. *Указание.* Проверив, что уравнение имеет корни, выразите данное выражение через x_1+x_2 и x_1x_2.

9. -8. *Указание.* Выразите сумму кубов корней уравнения через x_1+x_2 и x_1x_2. Проверьте, имеет ли данное уравнение корни при найденном значении l.

10, 11, 12. См. рис.13, 14, 15.

13. 36. **14.** 9; $9\sqrt{6}$.

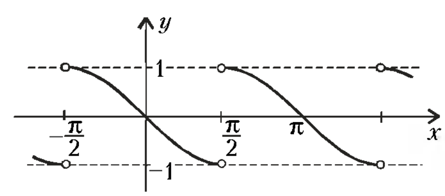


Рис. 13

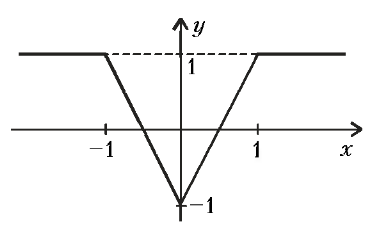


Рис. 14

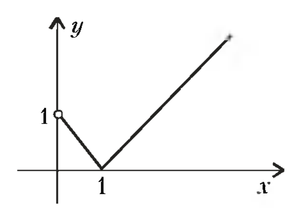


Рис. 15

ФИЗИКА

1. $x=58{,}8$ м; $v=19{,}6$ м/с. **2.** $v=7{,}7\cdot10^3$ м/с.

3. $m=0{,}034$ кг. **4.** $m=0{,}2$ кг. **5.** $\alpha=0{,}8$.

6. $U=1{,}7$ В. **7.** $v=1{,}9\cdot10^5$ м/с. **8.** $\delta=65^\circ$.

9. $\nu=7{,}7\cdot10^{15}$ Гц.

10. $E=6{,}63\cdot10^{-22}$ Дж; $p=2{,}2\cdot10^{-29}$ кг·м/с.

НАПЕЧАТАНО В 2001 ГОДУ

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования
http://www.courier.com.ru

Vivos Voco!
http://vivovoco.nns.ru
(раздел «Из номера»)

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия, В.М.Хлебникова, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати 142300 г. Чехов Московской области
Заказ №