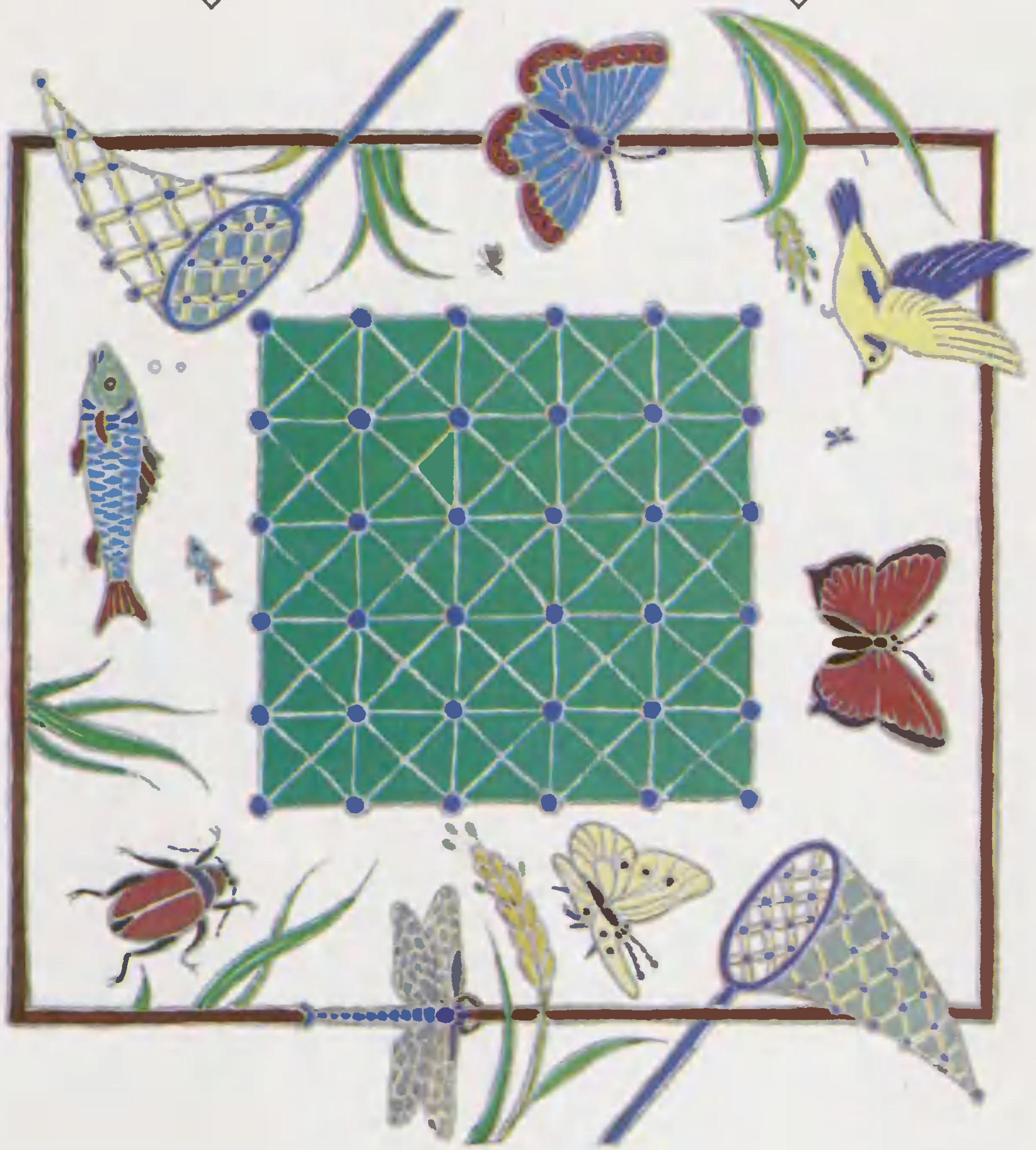
ISSN 0130-2221
МАРТ/АПРЕЛЬ
2001 · №2

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



Игра «Ловля»

Игроки берут по десять фишек и ставят их по очереди. Начинающий ставит свою на любое из 36 полей. Его партнер также ставит фишку, но старается, чтобы она не попала на одну прямую с фишкой противника. Если же она все-таки попадет на одну прямую с фишкой противника, тот ее берет и ставит «взявшую» фишку на ее место. Игрок берет подряд столько фишек противника, сколько может, после чего снова делает ход, ставя еще одну фишку. Чтобы победить, игрок должен взять все фишки противника.

Головоломка «Ловля»

Нужно поставить шесть фишек так, чтобы никакие две не были на одной прямой.

(Из головоломок Сэма Лойда)

КВАНТ

МАРТ АПРЕЛЬ 2001 № 2

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Международная благотворительная организация Институт «Открытое общество. Фонд содействия» и Московский комитет образования выписывают для школ Москвы тысячу экземпляров журнала «Квант».

Математика во второй половине XX века

В.ТИХОМИРОВ

13-я проблема Гильберта

Свои открытия в области классической механики А.Н.Колмогоров опубликовал в 1953-54 годах, а уже в следующем году он приступил к осмыслению понятия энтропии и к осаде 13-й проблемы Гильберта.

Эта проблема была посвящена одному из центральных вопросов анализа: *существуют ли функции многих переменных*? В школе изучают, в основном, функции одного переменного: квадратные трехчлены и другие полиномы, тригонометрические функции, экспоненты, логарифмические функции и т.п. Но, разумеется, встречаются и функции двух и большего числа переменных. Скажем, расстояние на плоскости и в пространстве от начала координат: $\sqrt{x^2+y^2}$ и $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ – функции двух и трех переменных. Простейшей функцией двух переменных является сумма, сопоставляющая паре чисел (x, y) число $x + y$.

Весь опыт классического анализа свидетельствовал о том, что функции двух переменных устроены несравненно сложнее, чем функции одного переменного, функции трех переменных несопоставимо богаче функций двух переменных и т.д.

Окончание. Начало см. в «Кванте» №1.

Иллюстрация В.Власова

Как это можно выразить? Одна из возможностей такова. Некоторые функции трех переменных можно задать как суперпозицию функций двух переменных; скажем, так: $f(x, y, z) = \varphi(x, \psi(y, z))$. (Например, функция $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ является суперпозицией функций $u \to u^2$ и $v \to \sqrt{v}$ одного переменного и функции сложения двух переменных.) Уверенный в том, что функции трех переменных не должны сводиться к функциям двух переменных, Гильберт в своей 13-й проблеме придал вопросу наиболее острую форму. Он выбрал одну определенную алгебраическую функцию трех переменных (именно, функцию, являющуюся решением полиномиального уравнения $(x, y, z) \to w^7 + xw^3 + yw^2 + zw + 1 = 0$) и спрашивал: *нельзя ли ее выразить суперпозицией* ***непрерывных*** *функций двух переменных* (полагая, что ответ должен быть отрицательным)? А он оказался положительным.

История решения 13-й проблемы Гильберта чрезвычайно занимательна. Весной 1956 года А.Н.Колмогоров объявил на механико-математическом факультете МГУ спецсеминар для второкурсников, где начал обсуждать некоторые проблемы, имея в виду в отдаленной перспективе приблизиться к решению 13-й проблемы Гильберта. В этом семинаре принял участие второкурсник Дима Арнольд (так друзья называли в студенческие годы Владимира Игоревича). В нем он выполнил свою первую научную работу. Семинар проходил лишь в течение одного семестра, на нем было получено несколько интересных результатов, но проблема Гильберта виделась лишь в бесконечной дали. Однако уже после завершения семинара А.Н.Колмогорову несколько неожиданно даже для самого себя довелось сконцентрировать колоссальный импульс энергии на решении именно этой проблемы. В итоге примерно двухнедельного периода напряженнейших размышлений Колмогоров доказал, что *всякая непрерывная функция четырех переменных является суперпозицией функций трех переменных.* Об этом результате Колмогоров докладывал на III Всесоюзном математическом съезде летом 1956 года. Завершить эти исследования Колмогоров предоставил своим последователям.

Прошло примерно полгода, и както весной 1957 года я оказался у Андрея Николаевича на его даче. Андрей Николаевич показал мне на ученическую тетрадь, на обложке которой было написано: «Курсовая работа студента III курса В.Арнольда». Колмогоров сказал: «Я сейчас проверяю эту работу, но не исключено, что в ней содержится решение 13-й проблемы Гильберта». Так оно и оказалось. Если соединить решения Колмогорова и Арнольда, то получится одно из самых сложных доказательств, когда-либо найденных в математике.

Но на этом история не закончилась. Летом 1957 года Колмогорову удалось усилить результат Арнольда и доказать следующую теорему: *любая непрерывная функция n переменных (заданная на единичном n-мерном кубе) представима в виде суперпозиции функций одного переменного и единственной функции двух переменных — сложения.*

Сформулируем более точно этот результат в применении к функциям двух переменных.

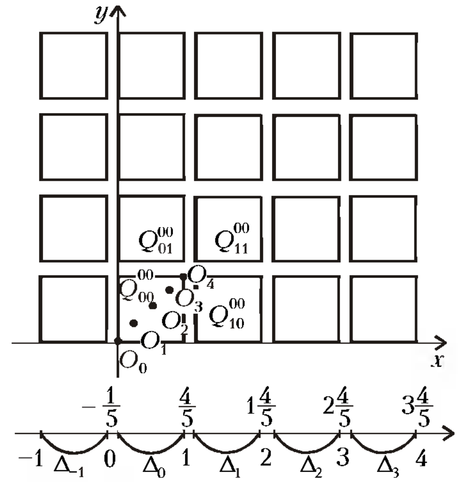
Пусть f — непрерывная функция двух переменных, заданная на единичном квадрате $Q = \{(x, y) \mid 0 \le x, y \le 1\}$. Тогда она представима в виде

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{5} \chi_i(\varphi_i(x) + \psi_i(y)),$$

где φ_i, ψ_i *и* χ_i *— непрерывные функции одного переменного.*

Доказательство общей теоремы, относящейся к функциям n переменных, вполне иллюстрируется двумерным случаем. Приведем эскиз доказательства сформулированной выше двумерной теоремы. Оно складывается из трех этапов.

1. Построение системы квадратов. Рассмотрим на прямой систему S_1 единичных отрезков $\{\Delta_i\}_{i \in \boldsymbol{Z}}$, разделенных интервалами длины $1/5$. Далее на плоскости рассмотрим декартово произведение системы S_1 на самое себя (т.е. совокупность пар (x, y), где $x \in \Delta_i$, $y \in \Delta_j$, $i, j \in \boldsymbol{Z}$). Получили как бы план города с горизонтальными и вертикальными проспектами одинаковой ширины (см. рисунок). Обозначив начало координат буквой O_0, рассмотрим еще точки O_k, $1 \le k \le 4$, с координатами $(k/4, k/4)$. Сдвинем теперь изначальный план города четыре раза так, чтобы начальные точки совпали с точками O_k, $1 \le k \le 4$. И наконец, совершим l раз подряд гомотетии всей картины с коэффициентом гомотетии γ.



В итоге получим систему квадратов Q_{ij}^{kl}, $i, j \in \boldsymbol{Z}$, $0 \le k \le 4$, $l \in \boldsymbol{Z}_+$. Построение системы квадратов закончено.

2. Построение функций φ_k и ψ_k. Эти функции не зависят от приближаемой функции f. Основное требование на эти функции состоит в том, чтобы функции $\Phi_k(x, y) = \varphi_k(x) + \psi_k(y)$ разделяли любые два квадрата из l-й системы квадратов, т.е. чтобы сегменты $\Phi(Q_{ij}^{kl})$ и $\Phi_k(Q_{i'j'}^{kl})$ при $(i, j) \ne (i', j')$ не пересекались.

Сделаем лишь первый шаг в построении наших функций, которые будем определять на всей плоскости. Мы имеем нулевую систему квадратов Q_{ij}^{00}, состоящую из квадратов со стороной $4/5$, у которой «начальный» квадрат имеет вершиной начало координат. Построим непрерывную функцию $\Phi_i^0(x, y)$, представимую в виде суммы двух функций одного переменного $\varphi^0(x)$ и $\psi^0(y)$, которая разделяет квадраты Q_{ij}^{00}. Квадрат Q_{ij}^{00} является произведением двух отрезков: Δ_i на оси Ox и Δ_j на оси Oy. Сделаем так, чтобы значения функции $\varphi^0(x)$ на квадрате Q_{ij}^{00} мало отличались от целого числа i, а значения функции $\psi^0(y)$ на том же квадрате мало отличались от числа $\sqrt{2}j$. Иначе говоря, включим точки i в сегменты $[i - \varepsilon_i, i + \varepsilon_i]$, а точки $\sqrt{2}j$ в сегменты $[\sqrt{2}j - \eta_j, 2\sqrt{j} + \eta_j]$ так, чтобы интервалы

$$\delta_{ij}^{00} =$$

$$= \left[i - \varepsilon_i + \sqrt{2}j - \eta_j,\ i + \varepsilon_i + \sqrt{2}j + \eta_j\right]$$

не пересекались. А далее функции $\varphi^0(x)$ и $\psi^0(x)$ достроим по линейности. Это и есть первый шаг, за которым индуктивно, но сходным образом, надо последовательно достраивать наши функции.

3. Завершение доказательства (построение функции χ_k). И снова сделаем лишь один шаг индуктивного построения. Пусть на единичном квадрате Q нам задана функция $f(x, y)$, а $M = \max\limits_{(x,y) \in Q} |f(x, y)|$. Построим функции

χ_k^1 одного переменного так, чтобы для функции $f_1(x,y) = f(x,y) - \sum_{k=1}^{5} \chi_k^1(\Phi_k(x, y))$ (где $(\Phi_k(x, y))$ – функции, построенные в п.2) было выполнено соотношение $\max_{(x,y)\in Q} |f(x,y)| \leq \frac{5}{6} M$ и при этом $\max_{(x,y)\in Q} |\chi_k(\Phi_k(x,y))| \leq \frac{1}{3} M$.

Для этого выберем ранг l таким, чтобы разность наибольшего и наименьшего значений функции f на любом квадрате Q_{ij}^{kl} была не больше $\frac{M}{6}$. Положим теперь функцию χ_k на интервале δ_{ij}^{kl} равной одной трети значения, которое принимает функция f в некоторой (все равно какой) точке квадрата Q_{ij}^{kl}. И продолжим функцию χ_k по линейности. Тогда нетрудно показать, что функция f_1 будет удовлетворять нужному условию. А далее наши построения следует повторять.

Этим завершается доказательство теоремы Колмогорова о суперпозициях. Тринадцатой проблеме Гильберта посвящена очень интересная популярная статья В.И.Арнольда «О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных», опубликованная в сборнике «Математическое просвещение» (вып.3, М.: Физмалит, 1958).

Детерминизм и хаос

Скажем еще о третьем направлении, связанном с творчеством Колмогорова пятидесятых годов, – о теории динамических систем и детерминированном хаосе.

Случайные явления изучает теория вероятностей. В этой теории считается, что случайный механизм, предопределяющий статистическую неопределенность, задан априори, и цель – изучать статистику развития процесса и делать прогнозы. Простейшим примером случайного процесса может служить продуцирование последовательностей из нулей и единиц с помощью бросания монеты или шестигранной кости. Совокупность всех таких последовательностей $\xi = (\ldots, \xi_{-n}, \ldots, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$ (их называют *бернуллиевскими*) характеризуется тем, что вероятность того, что на n местах $(i_1, \ldots, i_n)$ стоит m единиц, равна $C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, где p – вероятность выпадения единицы (равная $1/2$ в случае бросания монеты и $1/6$ при бросании кости). Еще в 1713 году Яков Бернулли обнаружил фундаментальный факт, связанный с бернуллиевскими процессами: число выпадений единиц «в среднем» равняется вероятности p появления единицы при бросании. Этот факт называют *законом больших чисел*. Мы уже имели повод сказать, что поведение многих детерминированных процессов напоминает хаотическое движение. Для подобных детерминированных процессов доказываются аналоги теорем типа закона больших чисел. (Скажем, можно ставить вопрос о средней частоте солнечных затмений.)

Новое осмысление явления детерминированного хаоса, отчетливое понимание связи между неустойчивостью динамики и стохастическими свойствами соответствующих динамических систем возникло после появления работы Колмогорова, где было введено понятие энтропии динамической системы.

Среди людей, которым принадлежат классические результаты в этом направлении, следует назвать московских математиков В.М.Алексеева, Д.В.Аносова, Я.Г.Синая. Детерминированному хаосу посвящена статья Я.Г.Синая в «Математическом просвещении» (сер. 3, вып.5, М.: МЦНМО, 2001).

Обобщенные функции

Перейдем к некоторым темам, которые в пятидесятые-шестидесятые годы развивались в школе И.М.Гельфанда.

В начале пятидесятых годов до нас дошли первые слухи о том, что произошло расширение понятия функции: появились *обобщенные* функции. При этом они, в частности, обладали многими чудесными свойствами; например, все оказывались бесконечно дифференцируемыми. Автором нового функционального исчисления был французский ученый Лоран Шварц, опубликовавший в начале 50-х годов свой труд «Теория распределений». (Шварц был удостоен филдсовской медали в 1950 году.)

Еще чуть ли не за 60 лет до того английский физик и инженер Хевисайд ввел своеобразную функцию (которую впоследствии называли δ-функцией). Эта функция обладала невозможными свойствами: она всюду равнялась нулю, кроме одной точки (в которой ее значение равнялось бесконечности), а интеграл от этой функции по всей прямой был равен единице. Хевисайд свободно оперировал с этой функцией (в частности, раскладывал ее в ряд Фурье и т.п.). Математики, конечно, посмеивались над такими причудами. А в тридцатые годы с подобной функцией стал работать великий физик Дирак, но снова полного понимания, что бы это могло значить, у математиков не было.

Новые необычные функции Шварц назвал распределениями, у нас их стали называть обобщенными функциями. Гельфанд писал: «После выхода в свет «Теории распределений» обобщенные функции необыкновенно быстро, буквально за два-три года, приобрели чрезвычайно широкую популярность». Теория Шварца сделала возможным придать точный смысл и δ-функции Хевисайда – Дирака.

Вскоре после того, когда до нас дошли первые отголоски теории, построенной Шварцем, выяснилось, что основы по сути дела той же теории были созданы в середине тридцатых годов нашим соотечественником Сергеем Львовичем Соболевым.

Основы теории Соболева – Шварца легче всего объяснить на окружности. Обобщенные функции на окружности T – это *линейные непрерывные функционалы на пространстве бесконечно дифференцируемых 2π-периодических функций*. Линейным функционалом на функциональном векторном пространстве называется такой функционал, который сопоставляет любой функции f из пространства комплексное число $l(f)$ так, что сумме функций сопоставляется сумма соответствующих чисел $(l(f_1 + f_2) = l(f_1) + l(f_2))$ и произведению af функции f на число a сопоставляется число $al(f)$. Пространство бесконечно дифференцируемых функций называют пространством *основных функций.*

Для того чтобы говорить о непрерывности, надо определить понятие сходимости в пространстве основных функций. Говорят, что последовательность f_n основных функций сходится к основной функции f, если для любого k функции $f_n^{(k)}$ сходятся к $f^{(k)}$ равномерно. Функционал l на пространстве основных функций называется *непрерывным*, если из сходимости f_n к f следует сходимость $l(f_n)$ к $l(f)$. Так вот, совокупность всех непрерывных линейных функционалов на пространстве основных функций и есть пространство обобщенных функций. При этом «обычные» функции вкладываются в совокупность обобщенных функций, ибо каждая такая функция g порождает линейный функционал $l(f)=\int_T f(x)\overline{g}(x)dx$. А δ-функция Хевисайда—Дирака – это не что иное, как функционал, сопоставляющий основной функции ее значение в некоторой точке.

И пространство основных функций, и пространство обобщенных функций на окружности допускают другое (двойственное) описание – через ряды Фурье. Каждая бесконечно дифференцируемая функция f разлагается в ряд Фурье $f(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k e^{ikx}$. При этом коэффициенты Фурье убывают «быстрее любой степени» (это значит, что для любого целого числа m найдется константа C_m такая, что $\left|f_k\right| \le C_m/|k|^m$). А обобщенные функции – это формальные ряды $l(x)$ = $=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} l_k e^{ikx}$, где l_k растут «не быстрее некоторой степени» (т.е. существуют такие числа N и C, что $\left|l_k\right| \le C|k|^N$). Каждый такой ряд порождает функционал $l(f)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} l_k \overline{f_k}$. В частности, функционалу, соответствующему δ-функции в нуле, соответствует формальный ряд $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikx}$. Именно его и выписывал еще в XIX веке Хевисайд.

В 1958 году Гельфанд со своими учениками и коллегами осуществил издание серии монографий «Обобщенные функции», явившейся одним из самых замечательных произведений математической литературы прошлого (XX) века. Первые три тома серии были написаны И.М.Гельфандом и Г.Е.Шиловым. Они были посвящены общим проблемам теории обобщенных функций и теории дифференциальных уравнений.

Обобщенные функции оказались исключительно удачным аппаратом для теории дифференциальных уравнений – обыкновенных и с частными производными. Результаты, относящиеся к теории дифференциальных уравнений (особенно линейных), сыпались в пятидесятые-шестидесятые годы, как из рога изобилия. Здесь, помимо исследований Гельфанда и Шилова, надо назвать замечательный цикл работ шведского математика Хермандера, удостоенный филдсовской медали в 1962 году.

Преобразование Радона, интегральная геометрия и томография

В 1917 году австрийский математик И.Радон получил формулу обращения для отображения, сопоставляющего функции f на плоскости функцию $\hat{f}$ на множестве всех прямых на плоскости, равную интегралам от f вдоль всех прямых.

Это открытие имело большие последствия как в самой математике, так и в ее приложениях. Наиболее важным – вне всякого сомнения – оказалось приложение преобразования Радона к медицине, приведшее к рождению *томографии* – методу исследования скрытых в организме образований (опухолей, внутренних кровоизлияний и т.п.), заключающемуся в получении послойного изображения объекта при его облучении. Информация об объекте (мозге, печени, почки и т.п. восстанавливается (с помощью компьютера) по вычислению пространственного распределния интенсивности излучения, прошедшего через объект, с помощью преобразования Радона. Томография, безусловно, одно из величайших технических завоеваний второй половины предыдущего века.

Преобразование Радона оказалось путеводной звездой для исследований И.М.Гельфанда. Одной из великих задач, которые решались в XX веке, является задача о создании аналога ряда Фурье (гармонического анализа) для обобщений окружности – для многообразий, на которых действует группа преобразований (типа сферы, плоскости Лобачевского и т.п.). Аналог рядов Фурье на сфере был создан еще в XVIII веке (Лапласом, Лежандром и др.). Гармонический анализ на плоскости Лобачевского был создан лишь в сороковые годы XX века. А в пятидесятые годы Гельфанд со своими учениками открыл, что единым ключом к построению гармонического анализа являются преобразования типа преобразований Радона.

Солитоны

Одним из самых замечательных событий в математике второй половины двадцатого века явилось построение теории солитонов. Солитоны – это тип волн, обладающих весьма неожиданными свойствами. Уже сама первая встреча с такой «неожиданной волной» произвела на первооткрывателя необычного феномена – английского исследователя Джона Скотта Рассела – неизгладимое впечатление. Он увидел (после внезапной остановки баржи, плывшей по каналу) волну, которая приняла «форму большого одиночного возвышения, т.е. округлого, гладкого и четко выраженного водяного холма, который продолжал свой путь вдоль канала, не меняя своей формы и не снижая скорости». Подобные «уединенные» (solitary) волны стали называть *солитонами*: в этом названии как бы соединены понятия одинокой волны и частицы (типа электрон, протон и т.п.).

Теория подобных феноменов была дана физиками и математиками лишь в наше время. Они оказались связанными с нелинейными волновыми уравнениями, типа уравнений Кортевега–де Фриса, открытых век тому назад для описания поведения волн на «мелкой воде». Теория таких уравнений связана со скрытой симметрией, в них заключенной, и с обратными задачами в теории дифференциальных уравнений, которые рассматривались в начале пятидесятых годов Гельфандом, Левитаном и др. Солитонам посвящена замечательная книжка А.Т.Филиппова «Многоликий солитон», изданная в Библиотечке «Квант» (вып. 48).

Теория катастроф

Одним из фундаментальных философских принципов является знаменитый принцип «перехода количества в качество», явившийся существенным компонентом гегелевской диалектики. В недавние времена им мотивировалась неизбежность революций. Вот цитата из старого энциклопедического словаря: «Метод диалектики по самому существу своему революционен (Герцен назвал его «алгеброй революции»), ибо из него неизбежно вытекает, что развитие в природе и обществе приводит к скачкам». В наше время появилась математическая теория, описывающая явления, «приводящие к скачкам». Не лишено забавности то, что этот раздел математики получил название не «теории революций», а «теории катастроф». Основоположником теории катастроф явился французский тополог Рене Том. Фундаментальный вклад в эту теорию внес В.И.Арнольд. За недостатком места я отсылаю читателя к очень интересной популярной брошюре В.И.Арнольда «Теория катастроф» (М.: Изд. МГУ, 1983).

Математика и физика

В конце пятидесятых годов произошло постепенное изменение ориентиров. Традиционные мехматские направления – теория функций, общая топология, классическая теория вероятностей, общая алгебра – стали смещаться в сторону алгебраической геометрии (школа Шафаревича), групп Ли, теории представлений и многих других актуальных вопросов того времени, разбиравшихся на семинаре Гельфанда, теории информации и динамических систем, развивавшихся под воздействием Колмогорова. И постепенно шло сближение с направлениями, навеянными математическими проблемами естествознания. Здесь наше поколение – в шестидесятые годы – постепенно становилось на свою стезю, не побуждаемое к тому своими учителями (за исключением, конечно, Гельфанда, который всегда оставался «на гребне волны» и чувствовал пульс современной науки). На смену отвлеченной математике пришли исследования, связанные с классической механикой, теорией элементарных частиц, статистической физикой...

Событиями мирового значения стали мехматские семинары и творческий вклад в эти новые направления В.И.Арнольда, В.М.Алексеева, Д.В.Аносова, Ф.А.Березина, Ю.И.Манина, В.П.Маслова, Р.А.Минлоса, С.П.Новикова, Я.Г.Синая и других. Феликс Александрович Березин был одним из первых, кто исходя из физических соображений (там давно появились фермионные, антикоммутирующие величины) стал изучать «суперматематику», где основным объектом являются суперпространства – пространства, у которых некоторые координаты коммутируют, а некоторые антикоммутируют. В итоге была создана как бы параллельная математика, в которой стали изучать супергеометрические, супералгебраические, супераналитические объекты. Суперматематика также принадлежит к тому, что родилось в последние полвека.

Кибернетика и информатика

Среди некоторых черт прошедшего полувека – смена периодов расцвета периодами увядания некоторых математических направлений. В середине пятидесятых годов функциональный анализ переживал свои звездные часы, особенно у нас. Нередко казалось, что здесь – центр всей математики. Об одном новом разделе функционального анализа – теории обобщенных функций – рассказывалось выше. Это привело к бурному развитию общей теории топологических векторных пространств, рождению нового раздела, промежуточного между геометрией и анализом, – выпуклого анализа, но потом все это ушло в довольно глубокую тень. Нечто сходное случилось с кибернетикой – наукой, рожденной как раз на рубеже обозреваемого периода.

Сейчас трудно передать то воодушевление, которым были охвачены многие ученые разных специальностей – математики, инженеры, медики, биологи, лингвисты, экономисты – от манящих идей о «связи, управлении и контроле» в живых организмах и ЭВМ. Тогда мечталось о том скором времени, когда будет осуществлен машинный перевод, машина научится мыслить, творить, сочинять музыку... И какая наступит тогда прекрасная жизнь! И многое осуществилось, но объединению человечества все это, к сожалению, не поспособствовало. (О том, «как это было», о бурном периоде рождения кибернетики и ее победоносном шествии по всему миру и по нашей стране можно прочитать в сборнике «Очерки истории информатики в России» (редакторы-составители Д.А.Поспелов и Я.И.Фет, Новосибирск, 1998). Интересно, однако, что в заголовке книги наличествует слово «информатика», а не «кибернетика» – этот термин почти ушел из употребления.)

Мы коснулись лишь событий, относящихся к двадцатипятилетнему периоду второй половины прошлого столетия (с 1950 по 1975 гг.), и почти исчерпали отведенный для данной статьи объем. Скажем еще о некоторых эпохальных событиях, но вскользь.

Решение проблем

Последние полвека были безусловно золотым периодом математики. В частности, было решено множество важных, много лет стоявших перед наукой проблем.

Огромным успехом явилось решение английским математиком Эндрю Уайлсом великой проблемы Ферма. Были решены проблема четырех красок (В.Хакен и К.Аппель) и кеплеровская проблема упаковки шаров (Т.Хейлс).

Проблема Ферма о невозможности нетривиального решения в целых числах уравнения $x^n + y^n = z^n$ была поставлена три с половиной века тому назад. В течение всего времени с тех пор, как стала известна запись Ферма на полях книги Диофанта «Арифметика» – «я нашел поистине удивительное доказательство этого предложения, но поля здесь слишком узки, чтобы вместить его», – для решения этой проблемы предпринимались воистину титанические усилия крупнейших математиков, но тщетно. И вот наконец в 1993 году проблема оказалась решенной английским математиком Эндрю Уайлсом. Обо всем этом читатель может прочесть в замечательной книге Саймона Сингха «Великая теорема Ферма» (М.: МЦНМО, 2000).

Оказалась решенной и знаменитая проблема о четырех красках. Она состоит в том, что четырьмя красками возможно закрасить любую карту так, что никакие соседние страны не будут закрашены в один цвет. Эта проблема была поставлена полтора века тому назад, и на нее также были затрачены огромные интеллектуальные усилия. Тот способ, которым она оказалась разрешенной, не мог быть реализован ни в какие времена, кроме конца предыдущего столетия, ибо он потребовал невероятных по объему вычислений. В 1976 году В.Хакен и К.Аппель показали, что если все карты из некоего огромного списка можно окрасить в четыре цвета, то можно окрасить и любую карту. А компьютер «окрасил» все карты из приведенного списка. Следует сказать, однако, что не все математики согласны признать это решением проблемы: а вдруг машина ошиблась?!

Расскажем и еще об одной старинной проблеме, известной как гипотеза Кеплера об укладке шаров. Эта проблема еще старше, чем проблема Ферма. Она была поставлена в первой половине XVI века, когда английского математика Томаса Харриота спросили как-то о том, как наиболее экономно укладывать артиллерийские ядра на палубе корабля. Харриот написал об этой проблеме Иоганну Кеплеру, одному из величайших ученых всех времен. Кеплер не смог найти ничего лучшего, чем тот естественный способ, который применялся испокон века всеми моряками, укладывавшими ядра в пирамиду. В середине XX века проблема была редуцирована к некоей аналитической задаче, но она была слишком сложна для решения. Томас Хейлс упростил задачу. Его уравнение содержало «только» 150 неизвестных. Доказательство его разрешимости оказалось изложенным на 250 страницах. Оно потребовало 3 гигабайта компьютерной памяти. Однако, поскольку и здесь в доказательстве не обошлось без компьютера, некоторые математики сомневаются в его справедливости.

Много замечательных проблем было решено нашими соотечественниками. О 13-й проблеме Гильберта говорилось выше. Ю.В.Матиясевич решил 10-ю проблему Гильберта, об этом я писал в предыдущей статье. А.А.Болибрух поставил окончательную точку в разрешении 21-й проблемы. Рассказать об этом здесь подробнее не представляется возможным.

В 1902 году английский алгебраист У.Бернсайд поставил такой вопрос: всегда ли конечна конечно порожденная группа, каждый элемент которой имеет конечный порядок? Он специально выделил случай, когда порядки всех элементов группы ограничены в совокупности (ограниченная проблема Бернсайда). Общая проблема Бернсайда была решена Е.С.Голодом в 1964 году и доложена на Международном конгрессе математиков в Москве в 1966 году. На том же конгрессе были доложены решения еще двух знаменитых проблем: проблемы Лузина (поставленной в 1915 г.) о сходимости почти всюду ряда Фурье квадратично-суммируемой функции (ее решил шведский математик Карлесон) и проблему континуума – первую в списке гильбертовых проблем. Проблема была поставлена основоположником теории множеств Г.Кантором: «верно ли, что каково бы ни было несчетное подмножество единичного отрезка действительных чисел, можно установить взаимно однозначное соответствие между элементами этого множества и числами из единичного отрезка?» Гёдель в тридцатые годы доказал, что это утверждение (получившее название континуум-гипотезы) не может быть доказано на основе некоей общепринятой системы аксиом арифметики и теории множеств. Американский математик П.Коэн на московском конгрессе получил филдсовскую медаль за доказательство того, что континуум-гипотеза не может быть опровергнута на той же аксиоматической основе.

Опровержение ограниченной проблемы Бернсайда было опубликовано П.С.Новиковым и С.И.Адяном в 1968 году. Это – одна из самых трудных работ XX столетия. За дальнейшие продвижения в бернсайдовской проблематике филдсовской медали был удостоен новосибирский математик Е.И.Зельманов (ныне работающий в США).

Филдсовские медали

Свидетельством изменения ориентиров в современной математике в сравнении с математикой XIX века являются присуждения филдсовских медалей. Напомним, что на парижском конгрессе, на котором Д.Гильберт выступил со своими проблемами, работало лишь четыре секции: арифметики и алгебры, анализа, геометрии, механики и математической физики. Среди лауреатов филдсовской медали большинство представляют дисциплины, существовавшие в зачаточном состоянии в начале предыдущего века. Таковы топология, комплексный анализ, алгебраическая геометрия, математическая логика и физическая математика (т.е. физика, фактически слившаяся с новейшими разделами анализа, геометрии и топологии).

Приведем список всех филдсовских лауреатов, разбив их на две группы: в одной – ученые, представляющие «новые» области математики, в другой – «старые».

Впечатляющий список составляют топологи: Ж.-П.Серр (1954), Р.Том (1958), Дж.Милнор (1962), М.Атья (1966), С.Смейл (1966), С.П.Новиков (1970), В.Тёрстен (1983), М.Фридман (1986), С.Дональдсон (1986) и алгебраические геометры: А.Гротендик (1966), Х.Хиронака (1970), Д.Мамфорд (1974), П.Делинь (1978), Г.Фалтингс (1986), В.Дринфельд (1990), Ш.Мори (1990). Филдсовскими лауреатами становились специалисты по комплексному анализу: К.Кодаира (1954) и Ш.-Т.Яо (1983), по динамическим системам и голоморфной динамике: Ж.-К.Иоккоз (1994) и К.Мак-Малин (1998), по «физической математике»: В.Джонс (1990), Э.Виттен (1990), М.Концевич (1998). Всего 23 математика.

А вот ученые, представляющие анализ, алгебру и теорию чисел: Л.Шварц (1950), А.Сельберг (1950), К.Рот (1958), Л.Хёрмандер (1962), А.Бейкер (1970), Дж.Томпсон (1970), Э.Бомбьери (1974), Д.Квиллен (1978), Г.Маргулис (1978), Ч.Фефферман (1978), А.Коэн (1983), Ж.Бургейн (1994), П.-Л.Лионс (1994), Е.Зельманов (1994), Р.Боргердс (1998), Т.Гоуэрс (1998) – 16 математиков.

Уровень филдсовских медалей исключительно высок, и лишь один список филдсовских лауреатов свидетельствует о величии прошедшего века и дает надежду на то, что в будущем человечество ждет расцвет интеллекта и разума.

Молния – это не так сложно, как кажется

С.ВАРЛАМОВ

Эта статья связана с двумя другими статьями в этом же номере журнала: «Электрическая машина в атмосфере» и «Дайте мне разбежаться!». В них рассматриваются механизм разделения электрических зарядов в грозовой туче и процесс роста кинетической энергии свободных электронов в газе, который находится в электрическом поле. Если вы уже прочли эти две статьи – смело беритесь за третью, а если нет – советуем это сделать, чтобы у вас сложилось цельное впечатление о рассматриваемых явлениях.

Ионизация газа и образование лавин

Напомним, что при наличии внешнего электрического поля заряженные частицы в газе приобретают дополнительную кинетическую энергию, величина которой пропорциональна напряженности электричес-

Иллюстрация Е.Силиной

кого поля и обратно пропорциональна давлению газа. Установление конечной величины средней кинетической энергии заряженных частиц связано со столкновениями этих частиц с нейтральными молекулами. (Подробно эти вопросы обсуждаются в статье «Дайте мне разбежаться!»).

Кроме упругих столкновений, при достаточно большой энергии налетающей частицы (электрона) возможны и неупругие столкновения, при которых происходят ионизация нейтральных частиц и переход молекул в возбужденное состояние. Чтобы ионизация состоялась, суммарная кинетическая энергия сталкивающихся частиц в системе их центра масс должна быть достаточной для перехода атома или молекулы с нижнего энергетического уровня на верхний, а эта энергия значительно превышает среднюю энергию теплового движения молекул. Для «результативного» столкновения, при котором происходит ионизация, кинетическая энергия электрона перед ударом о нейтральную частицу должна быть больше энергии ионизации этого атома примерно в два раза: энергии налетающего электрона должно хватить на то, чтобы при столкновении с электроном атома сообщить ему энергию ионизации и чтобы самому улететь от образовавшегося положительно заряженного иона. Помимо того, эффективность ионизации определяется так называемым сечением ионизации, которое зависит от энергии налетающего электрона.[1] Максимум эффективности достигается при энергиях налетающего электрона в 4–10 раз больше минимальной энергии, необходимой для ионизации.

Средняя кинетическая энергия, приобретенная электроном при «продавливании» электронного газа через газ нейтральных молекул под действием электрического поля, равна

$$W = \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} \frac{eE\lambda}{2}$$

(вывод этой формулы приведен в статье «Дайте мне разбежаться!»). Видно, что она прямо пропорциональна длине свободного пробега λ, а значит, обратно пропорциональна концентрации (плотности) газа n, связанной с давлением газа соотношением $p = nkT$. Следовательно, для данной температуры и данного давления газа есть вполне определенное минимальное значение напряженности электрического поля, при котором возможна ионизация нейтральных частиц электронным ударом. Заметим, что в области с меньшим давлением (например, на высоте облака) условия для начала ионизации предпочтительнее, чем там, где давление высокое (вблизи поверхности земли).

Допустим, что при каждом столкновении электрона, движущегося со средней скоростью $v_{хаот}$, с нейтральной частицей вероятность ионизации равна α, тогда за время τ электрон испытает $\tau v_{хаот}/\lambda$ столкновений и количество электронов может увеличиться в $(1+\alpha)\tau v_{хаот}/\lambda$ раз. (Конечно, при этом величина α сама зависит от средней скорости электрона.) Наряду с ростом числа электронов имеет место и его уменьшение в процессе рекомбинации, т.е. образования нейтральных частиц при встрече отрицательно и положительно заряженных частиц. Динамическое уравнение зависимости концентрации электронов от времени выглядит так:

$$\frac{dN}{dt} = B + \alpha\frac{v_{хаот}}{\lambda}N - KN^2, \quad (\&)$$

где B – скорость образования электронов, определяемая «внешними» источниками (космическим излучением, радиоактивными источниками на земле и пр.), K – константа реакции рекомбинации, происходящей при встречах частиц с разными по знаку зарядами, причем концентрации этих частиц считаются одинаковыми, т.е. $N_+ = N_- = N$. Заметим, что в этом уравнении не учитывается термический механизм роста числа электронов, так как мы рассматриваем только начальную стадию пробоя газа.

Из приведенного уравнения (&) следует, что при включении внешнего электрического поля (при увеличении $v_{хаот}$) в данной области газа начинается почти экспоненциальный рост концентрации электронов, если имеются «затравочные» электроны и главную роль играет второй член в правой части уравнения. Однако самое важное то, что это уравнение объясняет неустойчивость однородного по пространству распределения электрического поля при достаточно большой его величине.

Действительно, если в какой-то небольшой области пространства напряженность электрического поля случайно увеличивается, то в этом месте возникает пробой газа. Хаотическое движение электронов вместе с направленным движением приводит к тому, что из одного затравочного свободного электрона образуется и расширяется область с повышенной концентрацией заряженных частиц – будем называть эту область лавиной. Перемещение заряженных частиц с разными знаками под действием электрического поля в лавине приводит к перераспределению зарядов в пространстве, уменьшению величины поля внутри области лавины и изменению напряженности электрического поля вне лавины – впереди и сзади лавины (если смотреть вдоль направления электрического поля) величина напряженности поля увеличивается, а с боков уменьшается (рис.1). Вследствие этого области лавин быстро вытягиваются вдоль направления электрического

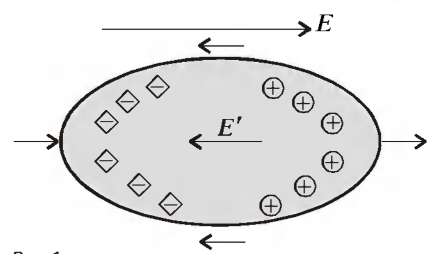


Рис.1

поля. Лавина существует некоторое время, а затем рассасывается, потому что уменьшенное электрическое поле не может поддерживать ионизацию и, соответственно, концентрацию заряженных частиц внутри лавины. Этот период времени жизни лавины определяется третьим членом в правой части уравнения (&).

Размножение лавин, каналы, стример, молния

Процессы рекомбинации, которые идут в лавине параллельно с процессами ионизации, сопровождаются излучением большого числа квантов света. Энергия этих квантов как раз достаточна для ионизации нейтраль-

[1] *От энергии электрона зависит связанная с ним длина волны де Бройля. Чем она меньше, тем меньшее «сечение» (пропорциональное квадрату длины волны) самого электрона. В атоме электроны размазаны по пространству вокруг ядра с плотностью вероятности, зависящей от расстояния до ядра. При определенной энергии электрона сечение взаимодействия электрона с атомом имеет максимальное значение.*

Рис.2

ных частиц, поэтому такие кванты света могут быть поглощены в газе там, где не было затравочных электронов. В результате на новом месте в газе возникает так называемая вторичная лавина.

В процессе расширения и вытягивания и первичные, и вторичные лавины объединяются, перекрываются, образуя хорошо проводящие каналы. Каналы возникают и через некоторое время пропадают. Напряженность поля вблизи концов таких каналов может в несколько раз превышать среднюю напряженность поля в газе до пробоя, поэтому каналы очень быстро (скорость достигает 10^6 м/с) увеличиваются в длине и соединяются с другими каналами, если они встречаются на пути. Этот процесс быстрого продвижения канала в газе от облака к земле называется стримером.

На стадии стримера самостоятельный разряд в газе похож на коронный разряд, т.е. он поддерживается за счет высокой напряженности электрического поля. Конечно, не всем стримерам доводится прорваться от облака до земли, большинство из них не доживает и рвется на части. Если за короткое время жизни нескольких каналов разветвленная и извилистая система этих объединившихся каналов в конце концов на каком-то из путей соединяет общим каналом облако с поверхностью земли, то стадия развития стримера заканчивается, и начинается стадия собственно молнии (рис.2). Ее-то мы и видим, и слышим.

Электрическая проводимость земли гораздо выше, чем проводимость воздуха, поэтому после достижения стримером поверхности земли ток по образовавшемуся проводящему каналу «облако – земля» резко увеличивается (возникает искровой разряд – молния), и при этом место главного механизма образования заряженных частиц занимает термоиндуцированная ионизация частиц. «Дерево» соединившихся каналов обеспечивает возможность разряда только для некоторой части зарядов, накопившихся в облаке и, соответственно, на земле. Обычно «дерево» молнии обращено «стволом» вниз и многочисленными «ветвями» к небу. Пробой воздуха в молнии аналогичен пробою одного из конденсаторов в цепочке, изображенной на рисунке 3. Пробитый конденсатор разряжается практически полностью, а все остальные разряжаются лишь немного. Время разряда конденсатора определяется его емкостью и внутренним сопротивлением канала в конденсаторе.

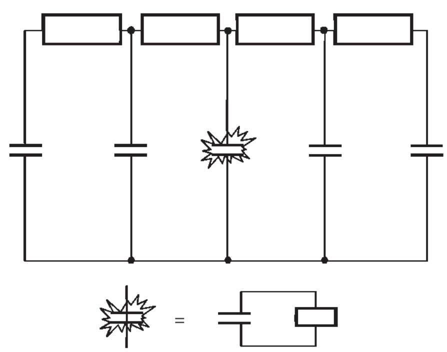


Рис.3

Вначале (сразу после пробоя), хотя напряженность электрического поля в канале уменьшается, ток в молнии быстро нарастает – это связано с увеличением числа носителей заряда вследствие нагрева газа и уменьшения сопротивления канала. По мере разрядки конденсатора мощность, подводимая к каналу молнии, уменьшается. После достижения максимума температура газа в канале молнии за счет излучения падает, заряженных частиц становится меньше, и разряд прекращается.

Основная доля потерь энергии приходится на излучение и нагрев газа в проводящем канале. В звук (в тот самый гром) переходит всего 2–3% энергии, в нагрев частиц в канале – раз в десять больше, т.е. 20–30%, а все остальное – это излучение. (Звук производится в основном на стадии расширения в воздухе нагревающегося проводящего канала.)

Тепло, которое выделилось в канале молнии, рассеивается в окружающем воздухе значительно медленнее, чем происходят процессы пробоя газа, поэтому существующий некоторое время горячий канал облегчает повторные разряды вдоль того же пути. Часто бывает так, что молния бьет вдоль одного и того же канала несколько раз.

Основные выводы, которые можно сделать, таковы. Однородное в воздушном пространстве электрическое поле при достаточно большой напряженности становится неустойчивым. Возникающий пробой воздуха происходит так, что одной затравочной заряженной частицы (электрона) достаточно, чтобы образовалась обширная проводящая область газа – лавина. Излучение при рекомбинации заряженных частиц в первичных лавинах вызывает ионизацию молекул газа там, где затравочных частиц не было. Появившиеся здесь заряженные частицы становятся основателями вторичных лавин. Лавины вытягиваются вдоль электрического поля, перекрываются и образуют длинный проводящий канал, по которому проходит разряд молнии.

А в заключение – несколько задач для самостоятельного решения.

• Оцените величину напряженности электрического поля, при которой возможна ионизация молекул вследствие электронных ударов.

• Оцените энергию звуковых волн, которые были произведены молнией с длиной канала 10 км и средним диаметром канала 10 см.

• Объясните, почему в средних широтах грозы начинаются поздней весной (в мае) и заканчиваются осенью.

Лебедевские крылышки

А.ВАСИЛЬЕВ

ПЕТР НИКОЛАЕВИЧ ЛЕБЕДЕВ вошел в историю науки как блестящий физик-экспериментатор, выполнивший ряд тончайших исследований на грани технических возможностей своего времени. Он создал первую в России физическую лабораторию, где вместе с ним трудились его ученики, многие из которых стали впоследствии основателями новых направлений в российской физике.

Лебедев родился в Москве 8 марта 1866 года в обеспеченной купеческой семье, где любили и спорт, и музыку, и литературу. Вместе с тем уже в школьном возрасте обнаружился особый интерес Лебедева к технике, к самостоятельному научному творчеству.

Окончив немецкую коммерческую школу и реальное училище, Лебедев поступил в Московское техническое училище, где овладел столярным, токарным и слесарным ремеслами, которые очень пригодились ему впоследствии при изготовлении экспериментальных приборов. Однако узкая техническая направленность училища вскоре перестала удовлетворять Лебедева, и в 1887 году он отправился на обучение в Страсбургский университет. Здесь он в течение четырех лет слушал лекции Кундта, Гельмгольца, Больцмана и других известных ученых и одновременно вел самостоятельную исследовательскую работу. Молодой ученый пробовал свои силы в разных областях физики. Кундт в шутку говорил, что у Лебедева каждый день рождается по двадцать идей. В конечном счете Лебедев решил сосредоточиться на проблемах взаимодействия электромагнитного излучения с веществом и даже сформулировал собственную программу исследований. Одно из центральных мест в ней занимал вопрос о давлении света на твердые тела и газы.

Проблема светового давления занимала крупнейших ученых мира (Кеплер, Ньютон, Эйлер, Максвелл, Бартоли, Больцман) на протяжении нескольких столетий. В 1873 году Максвелл опубликовал свой знаменитый «Трактат по электричеству и магнетизму», где дал полное математическое описание электромагнитных явлений и предсказал новый эффект – существование в свободном пространстве электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света. Это позволило ему считать свет одним из видов электромагнитных волн и записать формулу для светового давления в виде: $p = E(1+R)/c$, где E – энергия электромагнитной волны, отнесенная к единице площади и единице времени, R – коэффициент отражения, c – скорость света. Однако многие ученые, и в их числе президент Лондонского Королевского общества лорд Кельвин, считали световое давление несуществующим. Последнее слово могли сказать только экспериментаторы. Попытки экспериментально обнаружить световое давление предпринимались неоднократно, но ни один опыт не дал однозначного ответа на вопрос о существовании светового давления. Даже Максвелл, автор приведенной выше формулы, сомневался в том, что она может быть подтверждена опытным путем.

Полностью осознавая трудность поставленной перед ним задачи, Лебедев приступил к выполнению своей программы исследований взаимодействия излучения и вещества.

Будучи уже твердо уверенным в том, что свет, являясь электромагнитной волной, должен оказывать давление на твердые тела и газы, Лебедев начал свои знаменитые опыты. Идея эксперимента была проста: на легкое крылышко, подвешенное на длинной и тонкой нити, направлялся луч света. Под действием светового давления крылышко должно поворачиваться, и по углу поворота можно будет рассчитать силу давления света. Прибор необходимо было поместить в хорошо откачанный баллон, чтобы исключить посторонние воздействия.

На пути осуществления этой простой идеи экспериментатора, однако, ожидали колоссальные трудности. Первая из них состояла в ничтожной величине светового давления. Действительно, используя формулу Максвелла, легко оценить, что, например, дуговая лампа мощностью 1 кВт создает световое давление порядка 10^{-4} Па, или 10^{-6} мм рт. ст. Вакуум в экспериментах Лебедева составлял около 10^{-4} мм рт. ст., т.е. ему необходимо было фиксировать изменения давления на уровне процента от давления остаточного газа в баллоне. Но малость измеряемой величины была не самым большим препятствием. Определяя давление света, Лебедев столкнулся с действием радиометрических сил, существенно влиявших на сам процесс измерений. Эти силы возникали из-за того, что поверхность крылышка, обращенная к источнику света, нагревалась, что приводило к неравномерному нагреванию газа в баллоне и, тем самым, к возникновению конвекционных потоков. Поток газа от освещенной стороны крылышка к теневой толкал крылышко в том же направлении, что и световое давление. Помимо этого, нужно было избавиться от конвекционных потоков, возникавших из-за неравномерного нагревания светом стеклянного баллона.

Исключить все указанные помехи и измерить величину, которую можно однозначно отождествить с давлением света, – вот задача, на решение которой Лебедев затратил четыре года упорнейшего труда. Ученый создал прибор, удивительный по своей простоте, элегантный и безупречный с точки зрения чистоты физического эксперимента.

Прежде всего, конечно, надо было научиться создавать хороший вакуум в стеклянном баллоне. Лебедев поместил в баллон каплю ртути и, слегка подогревая ее, продолжал откачивать воздух из баллона самым совершенным по тому времени вакуумным насосом – тяжелые пары ртути увлекали молекулы воздуха при откачке. Затем баллон охлаждался, и плотность паров ртути понижалась, благодаря чему достигался довольно высокий вакуум. Для того чтобы конвекционные потоки остаточного газа от нагретой стенки рассеивались еще до того, как они достигнут крылышка, Лебедев увеличил размер баллона до 20 см в диаметре. Кроме того, ему удалось уменьшить нагревание стенки баллона светом за счет применения светофильтров, поглощавших самую «горячую» часть спектра.

Главной частью созданного им прибора были знаменитые крылышки. В одной из конструкций к стеклянному стержню были прижаты платиновыми кольцами два крестика из листовой платины различной толщины. Два из этих крылышек имели с обеих сторон зеркальные поверхности, а два других были покрыты платиновой чернью, т.е. мелко раздробленной платиной. Диаметр крылышек составлял 0,5 см, а весь прибор имел около 2 см в ширину и около 4 см в длину. Прибор подвешивался на тонкой стеклянной нити длиной 30 см. Луч света можно было направлять поочередно на любое из четырех крылышек. Крылышки делались зеркальными и зачерненными с тем, чтобы проверить вывод теории о том, что при полном отражении от поверхности свет оказывает на нее вдвое большее давление, чем при полном поглощении.

Источником света в установке служила дуговая лампа. Пропуская луч через систему линз и металлическую диафрагму, получали параллельный пучок, который направлялся на сосуд с чистой водой. Вода служила светофильтром, поглощавшим «горячие» лучи. Параллельный пучок света троекратно отражался от зеркал, фокусировался линзой, проходил через стеклянную пластину и направлялся на крылышки, помещенные в стеклянный баллон. С помощью зеркал можно было менять направление светового луча так, чтобы он падал с противоположной стороны крылышка. А освещение крылышка с разных сторон позволяло компенсировать конвекционные потоки.

Лебедев тщательно следил за тем, чтобы интенсивность освещения была одинаковой с обеих сторон. Было замечено, что разница в яркости в 1% «вызывается несимметричным сметанием пыли» с установки. Для исключения радиометрических поправок Лебедев применял крылышки разной толщины. Он писал: «Если мы будем одновременно наблюдать два одинаковых крылышка, имеющих очень значительную разницу толщин, то мы можем вычислить, как велико было бы отклонение, вызываемое световым пучком, если бы толщина крылышка была равна нулю, что соответствует и равным нулю радиометрическим силам». Особые меры предпринимались им для того, чтобы отразившийся от крылышек свет, претерпевая повторные отражения от внутренней стенки баллона, не попадал вновь на крылышко. Более того, Лебедев исключил даже вклад в измеряемые эффекты от «корешков» крылышек, с помощью которых они крепились к стеклянному стержню: во втором варианте прибора крылышки крепились на очень тонких проволочках, давлением света на которые уже можно было пренебречь. Наконец, наибольшие помехи в процесс измерений вносила неравномерность горения дуговой лампы. Это препятствие преодолевалось путем накопления статистики при проведении большого числа экспериментов.

Из теории Максвелла следовало, что сила давления света пропорциональна энергии светового луча. Значит, необходимо было измерить энергию лучей, падающих на крылышки. Помещая на место крылышек медный калориметр, Лебедев измерял изменение температуры калориметра под действием света. Считая затем, что вся световая энергия превращалась в тепло, и зная теплоемкость калориметра, можно было вычислить энергию световых лучей. Коэффициент отражения каждого крылышка тщательно измерялся. Зная коэффициент упругости прибора (который определялся из собственных колебаний массивного медного цилиндра, подвешенного на стеклянной нити) и угол, на который закручивался прибор под действием светового давления, можно было определить давление света.

Таким образом, Лебедев измерил все величины, входящие в формулу Максвелла, и полученные им экспериментальные данные в пределах точности измерений (; 20%) совпали с теоретическими расчетами.

Летом 1900 года Лебедев доложил результаты своей работы на Всемирном конгрессе физиков в Париже, и его исследования получили заслуженное признание. Лорд Кельвин в беседе с физиологом Тимирязевым говорил: «Вы, может быть, знаете, что я всю жизнь воевал с Максвеллом, не признавая его светового давления, и вот ваш Лебедев заставил меня сдаться перед его опытами».

В дальнейшем Лебедев поставил перед собой еще более трудную задачу — измерить давление света на газы. В том, что такое давление существует, он уже не сомневался. Результатом длительных исследований стала публикация 1909 года, в которой Лебедев сообщал, что «существование давления света на газы установлено опытным путем... Таким образом, гипотеза о давлении света на газы, триста лет тому назад высказанная Кеплером, получила в настоящее время как теоретическое, так и экспериментальное обоснование».

Важность сделанного Лебедевым открытия трудно переоценить. Вот лишь несколько примеров. Ничтожная, на первый взгляд, величина светового давления оказывает существенное влияние на положение искусственных спутников Земли и безусловно учитывается в точной космической навигации. Глубокое охлаждение отдельных атомов и образование конденсата Бозе–Эйнштейна возможно при взаимодействии лазерного излучения с веществом. Калибровка первых лазеров, созданных на физическом факультете МГУ, осуществлялась по световому давлению.

Имя Петра Николаевича Лебедева носят Физический институт Российской академии наук и премия, присуждаемая Президиумом РАН за лучшие работы в области физики. А по улице Лебедева автор этой статьи каждый день идет на физический факультет МГУ.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июля 2001 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2 — 2001» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1766» или «Ф1773». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1766—М1770, Ф1773 — Ф1777

М1766. На бесконечной шахматной доске находятся ферзь и невидимый король, которому запрещено ходить по диагонали. Они ходят по очереди. Может ли ферзь ходить так, чтобы король рано или поздно наверняка попал под шах?

А.Шаповалов

М1767. Внутри квадрата $ABCD$ расположены точки P и Q так, что $\angle PAQ = \angle PCQ = 45°$ (рис.1). Докажите, что $PQ^2 = BP^2 + QD^2$.

В.Произволов

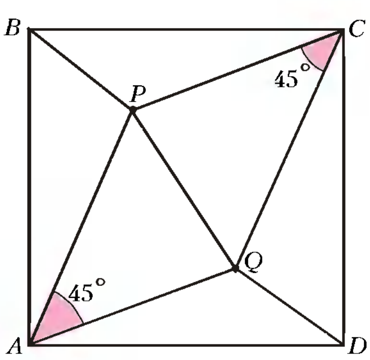


Рис.1

М1768. а) Расположите числа 1, 2, 3, ..., 100 в строку в таком порядке, чтобы для любых нескольких (но не всех) из этих чисел сумма номеров занятых ими мест не совпадала с суммой самих этих чисел.

б*) При посадке в аэробус пассажиры сели кто куда захотел. В итоге все места оказались заняты, а для любой группы, в которой не более ста пассажиров, среднее арифметическое номеров занимаемых ими мест более чем на единицу отличается от среднего арифметического номеров мест, указанных в их билетах. Каково наименьшее возможное число мест в этом аэробусе?

С.Токарев

М1769*. Концы $2n$ непересекающихся хорд разделили окружность на $4n$ равных дуг. Докажите, что среди этих хорд найдутся две параллельные хорды.

В.Произволов

М1770. Дан многочлен степени 10 с буквенными коэффициентами. Двое поочередно заменяют какую-нибудь букву на число, пока не заменят все буквы. Обозначим полученный многочлен $A(x)$. Пусть $a_1 = \max A(x)$ при x от -1 до 0, $a_2 = \max A(x)$ при x от 0 до $+1$. Если $a_1 > a_2$, то выиграл первый игрок, если $a_1 < a_2$, то второй. Кто победит при правильной игре?

Н.Васильев, Б.Гинзбург

Ф1773. На тонкий горизонтальный стержень насажена цилиндрическая шайба диаметром D и толщиной l, дырка по оси шайбы имеет диаметр чуть больше, чем диаметр стержня (рис.2). К краю шайбы приложена сила F, параллельная стержню. При каком коэффициенте трения шайбы о стержень движение шайбы будет равномерным? Сила тяжести отсутствует!

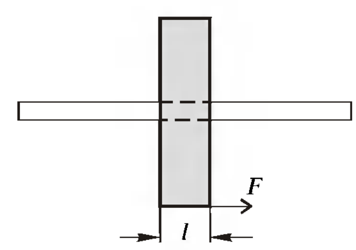


Рис.2

А.Зильберман

Ф1774. Легкий жесткий стержень подвешен горизонтально за концы при помощи двух легких нитей, вытянутых по вертикали (рис.3). На стержень насажены два груза массами M и $2M$, расположенных симметрично на равных расстояниях друг от друга и от концов стержня. Нить со стороны тяжелого груза пережигают. Во сколько раз изменится сила натяжения оставшейся нити сразу после этого? Считайте, что за интересующий нас корот-

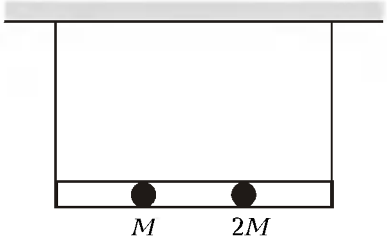


Рис.3

кий временной интервал стержень не успевает заметно сдвинуться.

Р.Старов

Ф1775. Тонкостенный горизонтальный цилиндрический медный сосуд разделен пополам массивным нетеплопроводящим поршнем (рис.4). С одной стороны от поршня находится разреженный кислород, с другой – гелий. Если сместить поршень немного из положения равновесия и отпустить, он будет совершать колебания. Во сколько раз может измениться период этих колебаний, если теплоизолировать сосуд от окружающей среды? Сосуд закреплен и двигаться не может.

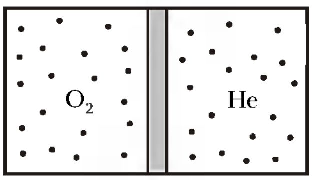


Рис.4

А.Диабатов

Ф1776. Маленький проводящий незаряженный шарик находится на большом расстоянии от точечного заряда Q. Во сколько раз изменится сила, действующая на шарик со стороны заряда, если расстояние между ними увеличить в два раза? Во сколько раз нужно будет увеличить диаметр шарика, чтобы вернуть силу взаимодействия к прежнему значению? Подсказка: помещенный в однородное (или почти однородное) поле проводящий незаряженный шарик похож на маленький диполь (маленький – по сравнению с диаметром шарика).

А.Повторов

Ф1777. Из двух конденсаторов с емкостями C и $2C$ и двух одинаковых катушек с индуктивностью L собрана схема, показанная на рисунке 5. Конденсатор емкостью C вначале заряжен до напряжения U. Дождемся момента, когда этот конденсатор окажется полностью разряженным, и соединим точки A и $Б$ проводящей перемычкой. Найдите максимальный ток через перемычку. Элементы цепи можно считать идеальными.

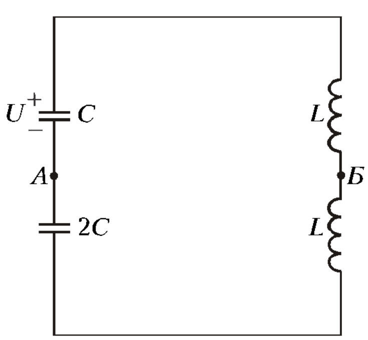


Рис.5

З.Рафаилов

Решения задач М1741—М1750, Ф1758–Ф1762

М1741. *С каждым из чисел от 000000 до 999999 поступим следующим образом: умножим первую цифру на 1, вторую на 2 и так далее, последнюю – на 6. Сумму полученных шести чисел назовем характеристикой исходного числа. Сколько чисел имеют характеристику, делящуюся на 7?*

Числа 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 имеют различные остатки от деления на 7. Поэтому, если бы мы при подсчете характеристики множили последнюю цифру на 1, предпоследнюю на 10,…, первую на 10000, то ничего бы не изменилось. А при таком подсчете каждое число совпадает со своей характеристикой.

Количество чисел от 0 до 999999, которые делятся на 7, равно 999999/7 + 1. Это число дает ответ на вопрос задачи.

Н.Васильев, Б.Гинзбург

М1742. *Таблица размером $n \times n$ заполнена натуральными числами так, что всякие два числа, соседние по горизонтали или по вертикали, различаются на 1. Докажите, что найдется натуральное число, которое присутствует либо на каждой горизонтали, либо на каждой вертикали.*

В доказательстве будем опираться на факт дискретной непрерывности устройства нашей таблицы. Это означает, что если в какой-либо строке таблицы присутствуют два числа a и b $(a < b)$, то любое промежуточное натуральное число c, $a \le c \le b$, тоже присутствует в этой строке. Естественно, что такое замечание справедливо и для столбцов.

В каждой строке возьмем минимальное число, и из полученных n чисел выберем максимальное число M. Пусть M является минимальным числом k-й строки.

Убедимся в том, что число M присутствует либо в каждой строке, либо в каждом столбце.

Допустим, что в i-й строке отсутствует число M. Но тогда все числа i-й строки меньше M. Возьмем произвольный столбец и покажем, что в нем присутствует число M. На пересечении этого столбца и i-й строки стоит число a, меньшее M. На пересечении этого столбца и k-й строки стоит число b, большее M. Следовательно, число M, $a \le M \le b$, непременно присутствует в избранном столбце, а значит, и в любом столбце.

В.Произволов

М1743. *Найдите сумму*

$$\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{2^2}{3}\right]+\ldots+\left[\frac{2^{1000}}{3}\right]$$

([a] – целая часть числа a).

Ответ: $\dfrac{2^{1001}-2}{3}-500$.

Достаточно найти сумму дробных частей

$$s_1=\left\{\frac{1}{3}\right\}+\left\{\frac{2}{3}\right\}+\ldots+\left\{\frac{2^{1000}}{3}\right\}.$$

Имеем: $\left\{\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{3}$, $\left\{\frac{2}{3}\right\}=\frac{2}{3}$, $\left\{\frac{4}{3}\right\}=\frac{1}{3}$, $\left\{\frac{8}{3}\right\}=\frac{2}{3}$, … Следовательно,

$$s_1=501\cdot\frac{1}{3}+500\cdot\frac{2}{3}=500\frac{1}{3}.$$

Далее,

$$s=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{2^{1000}}{3}=\frac{1}{3}\left(2^{1001}-1\right).$$

Получили:

$$s_2=\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\ldots+\left[\frac{2^{1000}}{3}\right]=s-s_1=\frac{1}{3}\left(2^{1001}-2\right)-500.$$

А.Голованов, В.Сендеров

М1744*. *На прямоугольном столе лежат равные картонные квадраты k различных цветов со сторонами, параллельными сторонам стола. Если рассмотреть любые k квадратов различных цветов, то какие-нибудь два из них можно прибить к столу одним гвоздем. Докажите, что все квадраты некоторого цвета можно прибить к столу $2k-2$ гвоздями.*

Докажем утверждение задачи индукцией по количеству цветов n.

База: $n=2$. Рассмотрим самый левый квадрат K. Если он первого цвета, то все квадраты второго цвета имеют с ним общую точку, следовательно, каждый квадрат второго цвета содержит одну из двух правых вершин квадрата K, значит, все квадраты второй системы можно прибить двумя гвоздями.

Индукционный переход. Пусть мы доказали утверждение задачи для n цветов, докажем для $(n+1)$-го цвета. Рассмотрим все квадраты и выберем из них самый левый квадрат K. Пусть он покрашен в $(n+1)$-й цвет. Все квадраты, пересекающие K, содержат одну из двух его правых вершин, следовательно, их можно прибить двумя гвоздями. Уберем со стола все квадраты $(n+1)$-го цвета и квадраты других цветов, пересекающие K. Остались квадраты n различных цветов. Нетрудно доказать, что если выбрать n квадратов разных цветов, то среди них найдутся два пересекающихся. (В противном случае можно добавить квадрат K и получить $n+1$ попарно не пересекающихся квадратов разных цветов, что противоречит условию задачи.) Таким образом, по индукционному предположению, можно выбрать один из цветов i и прибить $2k-2$ гвоздями все оставшиеся на столе квадраты этого цвета. Убранные квадраты цвета i пересекают самый левый квадрат K, следовательно, эти квадраты можно прибить, забив два гвоздя в правые вершины квадрата K.

В.Дольников

М1745. *В некоторых клетках доски $2n\times 2n$ стоят черные и белые фишки. С доски сначала снимаются все черные фишки, которые стоят в одной вертикали с какой-то белой, а затем все белые фишки, стоящие в одной горизонтали с какой-нибудь из оставшихся черных. Докажите, что либо черных, либо белых фишек на доске осталось не более n^2.*

Заметим, что в конце никакие две разноцветные фишки не стоят ни в одной строке, ни в одном столбце. Действительно, если исходно черная фишка стояла в одном столбце с белой, то ее сняли в первый раз, а если после первого снятия белая фишка стоит в одной строке с черной, то ее сняли во второй раз.

Пусть в конце черные фишки стоят в a строках и b столбцах, тогда белые могут стоять не более чем в $2n-a$ строках и $2n-b$ столбцах. Но тогда черных фишек не более ab, а белых не более $(2n-a)(2n-b)$. Поскольку

$$ab(2n-a)(2n-b)=a(2n-a)b(2n-b)\le n^2\cdot n^2=n^4,$$

то либо черных, либо белых фишек осталось не более n^2.

С.Берлов

М1746. *На окружности находятся n красных и n синих точек, которые разделяют ее на $2n$ равных дуг. Каждая красная точка является серединой дуги окружности с синими концами. Докажите, что каждая синяя точка является серединой дуги окружности с красными концами.*

Пусть A – произвольная синяя точка на окружности. Возможны два случая.

В первом случае точка B, диаметрально противоположная точке A, является тоже синей. Тогда среди хорд, перпендикулярных диаметру AB, найдется хорда CD с красными концами. Иначе получилось бы, что синих точек на окружности больше, чем красных. В таком случае дуга CAD имеет красные концы, а точка A является серединой этой дуги.

Во втором случае точка B, диаметрально противоположная точке A, является красной точкой. Из условия следует, что найдется хорда с синими концами MN, перпендикулярная диаметру AB. Но тогда, ввиду баланса синих и красных точек на окружности, найдется хорда CD с красными концами, перпендикулярная диаметру AB. Это означает, что дуга CAD имеет красные концы, но точка A является ее серединой.

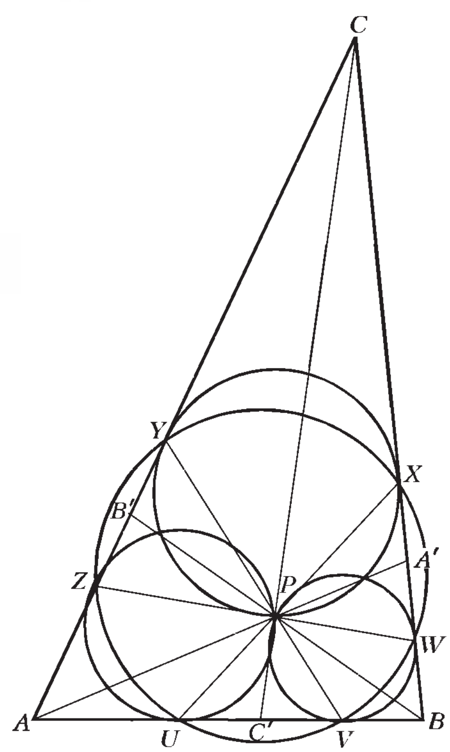
В.Произволов

М1747*. *Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках A', B', C'. Через точку P пересечения прямых AA', BB', CC' проведены три окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Докажите, что*

а) шесть точек касания образуют вписанный шестиугольник, причем центр описанной около него окружности совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC;

б) главные диагонали этого шестиугольника пересекаются в точке P;

в) вторые точки пересечения проходящих через P окружностей лежат на прямых AA', BB', CC'.



Пусть U, V, W, X, Y, Z – точки касания окружностей со сторонами треугольника ABC (см. рисунок). Из условия задачи следует, что окружности PZU, PVW, PXY гомотетичны вписанной окружности треугольника ABC с центрами гомотетий A, B, C и коэффициентами AP/AA', BP/BB', CP/CC' соответственно. Отсюда сразу следует, что отрезки $A'B'$, XY, PZ, PW параллельны, что доказывает пункт б). Так как площади треугольников PAB, PBC,

PCA относятся как $1/(p-c) : 1/(p-a) : 1/(p-b)$, где p – полупериметр ΔABC, то

$$CP/CC' = (S_{ABC} - S_{ABP})/S_{ABC} =$$
$$= c(p-c)/((p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a)).$$

Отсюда легко выводится, что

$$PZ \cdot PW = PX \cdot PU = PY \cdot PV,$$

т.е. точки X, U, Z, W лежат на одной окружности. Но $XYZW$ – равнобедренная трапеция, следовательно, точка Y лежит на той же окружности. Для точки V доказательство аналогично. Центр этой окружности лежит на серединных перпендикулярах к отрезкам XY, ZU, VW, совпадающих с биссектрисами углов ΔABC, что доказывает пункт а).

Для доказательства пункта в) достаточно заметить, что отрезки CZ и CW равны, и следовательно, точка C лежит на радикальной оси окружностей PZU и PVW.

Другое решение можно получить с помощью инверсии: так как касательные к окружностям в точке P параллельны сторонам ΔABC, инверсия с центром в P переводит эти окружности в прямые, образующие треугольник, гомотетичный ΔABC относительно P. Радиус инверсии можно выбрать таким, чтобы коэффициент гомотетии равнялся -1. Тогда композиция этой инверсии и центральной симметрии с центром P будет менять местами точки X и U, Y и V, Z и W, а также точки A, B, C и вторые точки пересечения окружностей. Отсюда сразу следуют все утверждения задачи.

А.Заславский

М1748. *На плоскости выбраны 1000 точек общего положения (никакие 3 не лежат на одной прямой). Рассматриваются всевозможные раскраски этих точек в два цвета. Назовем раскраску неразделимой, если не существует такой прямой, что точки разных цветов лежат в разных полуплоскостях. Докажите, что число неразделимых раскрасок не зависит от выбора точек.*

Общая идея состоит в том, что мы будем искать не число различных неразделимых раскрасок, а число по-разному разделяющих прямых.

Назовем две прямые эквивалентными, если они разбивают множество выбранных точек на совпадающие непустые подмножества. Легко видеть, что это действительно отношение эквивалентности. Найдем число классов эквивалентности.

Для этого удобно представлять себе выбранные точки как бесконечно тонкие гвозди, торчащие из плоскости, а прямую – как палку, лежащую на плоскости (естественно, тоже бесконечно тонкую и прямую!). Начнем поворачивать палку по часовой стрелке, пока это возможно (палка не может проходить сквозь гвозди). Сначала поворачиваем вокруг любой точки прямой, пока не коснемся одного гвоздя. Потом поворачиваем ее вокруг этого гвоздя, пока не коснемся второго. Если эти два гвоздя в одной полуплоскости, то прямую можно поворачивать дальше вокруг второго гвоздя – при этом она уйдет от первого. Продолжаем поворачивать до следующего касания, и так далее...

Если два гвоздя в разных полуплоскостях, то они «зажали» прямую – дальше ее поворачивать нельзя. Таким образом, для каждой прямой мы получили некоторую пару выбранных точек. Очевидно следующее:

1) эквивалентным прямым соответствует одна и та же пара точек;

2) каждой паре точек соответствует некоторый класс эквивалентности прямых;

3) разным классам эквивалентности соответствуют разные пары точек.

Значит, классов эквивалентности столько же, сколько пар точек, т.е. $1000 \cdot 1001/2$. Они разделяют 1001000 раскрасок (каждая разделяет ровно две), и еще 2 раскраски (когда все точки одного цвета) разделяются любой прямой.

Г.Челноков

М1749. *Рассмотрим последовательность слов, первое из которых состоит из одной буквы А, второе – АБ, третье – АБА, четвертое – АБААБ, пятое – АБААБАБА, и так далее: очередное слово получаем из предыдущего, заменяя каждую букву А на АБ, а Б – на А.*

а) Докажите, что каждое слово этой последовательности, начиная с третьего, получается приписыванием предпредыдущего слова к предыдущему.

(Например, АБААБАБА – это АБААБ плюс АБА.)

б) Пусть $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $b_2 = 5$, $a_4 = 6$, $b_3 = 7$, $a_5 = 8$, $a_6 = 9$, $b_4 = 10$ и, вообще, пусть a_n и b_n – номера мест, на которых стоят n-е буквы А и Б в бесконечном слове АБААБАБААБААБАБААБАБА..., начальными отрезками которого являются слова пункта а). Докажите равенство $b_n = n + a_n$.

в) Рассмотрим другую последовательность слов: А, АБ, АБАА, АБАААБАБ, АБАААБАБАБАААБАА, ... (Очередное слово получается из предыдущего заменой А на АБ, а Б – на АА.) Докажите, что каждое слово этой последовательности является началом следующего ее слова и что номер места, на котором в соответствующем бесконечном слове

АБАААБАБАБАААБАААБАААБАБАБАААБАБ...

стоит n-я буква Б, в два раза больше номера места, на котором стоит n-я буква А.

а) Обозначим: $w_1 = А$, $w_2 = АБ$, $w_3 = АБА$ и, вообще, $w_{n+1} = h(w_n)$, где h обозначает одновременную замену всех букв $А$ на $АБ$, а $Б$ на $А$. Мы должны доказать соотношение

$$w_{n+2} = w_{n+1}w_n.$$

Применим индукцию. При $n = 1$ утверждение верно: $w_3 = АБА = w_2w_1$.

Пусть мы знаем, что оно верно при некотором n. Тогда

$$w_{n+3} = h(w_{n+2}) = h(w_{n+1}w_n) = h(w_{n+1})h(w_n) = w_{n+2}w_{n+1},$$

что и требовалось доказать.

б) Очевидно,

$$a_n = n + k,$$

где k – это количество букв $Б$, расположенных перед n-й буквой $А$. Далее, n-я буква $Б$ получается при операции h из n-й буквы $А$. Поскольку h преобразует каждую букву $А$ в две буквы ($А$ и $Б$), а каждую букву $Б$ – в одну букву ($А$), то

$$b_n = 2n + k.$$

Дальнейшее очевидно: $b_n - a_n = 2n + k - (n + k) = n$.

Замечание. В статье А.Баабабова «Пентиум» хорошо, а ум лучше» («Квант» №4 за 1999 год) доказаны явные формулы:

$$a_n = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right] \text{ и } b_n = \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right].$$

в) Обозначим n-е слово рассматриваемой последовательности через w_n (т.е. $w_1 = A$, $w_2 = AБ$, $w_3 = AБAA$ и т.д.). Пусть h обозначает одновременную замену всех букв A на $AБ$, а всех букв $Б$ – на AA. Докажем по индукции равенство

$$w_{n+2} = w_{n+1}w_nw_n. \qquad (\&)$$

(Например,

$$w_5 = AБAAAБAБAБAAAБAA$$

– это $w_4 = AБAAAБAБ$, к которому дважды приписано слово $w_3 = AБAA$.)

База индукции. Слово $AБAA$ – это $AБ$, к которому приписаны две буквы A.

Индукционный переход. Если для некоторого n верно равенство (&), то

$$w_{n+3} = h(w_{n+2}) = h(w_{n+1}w_nw_n) =$$

$$= h(w_{n+1})h(w_n)h(w_n) = w_{n+2}w_{n+1}w_{n+1},$$

что и требовалось доказать.

Итак, каждое слово w_n является началом следующего за ним слова w_{n+1}, так что существует бесконечное слово, началами которого являются все слова w_n.

А теперь заметьте: n-я буква $Б$ получается преобразованием h из n-й буквы A. Поскольку h превращает каждую букву в две, то номер места, на котором в бесконечном слове $AБAAAБAБAБAAAБAAAБAAAБAБAБAAAБAБ\ldots$ стоит n-я буква $Б$, в два раза больше номера места, на котором стоит n-я буква A.

Замечание. Если начать с одной буквы A и производить одновременные замены $A \mapsto A^kБA^l$ и $Б \mapsto A^m$, где k, m – натуральные числа, l – неотрицательное целое число, то по индукции легко доказать соотношение

$$w_{n+2} = w_{n+1}^k w_n^m w_{n+1}^l,$$

так что и в этом случае возникает бесконечное слово. Его n-я буква $Б$ тоже получается из n-й буквы A. Поскольку среди первых a_n букв имеется n букв A и $a_n - n$ букв $Б$ и поскольку при рассматриваемой замене каждая буква A переходит в $k+1+l$ букв, а $Б$ – в m букв, то первые a_n букв переходят в $(k+1+l)n + m(a_n - n)$ букв. Для нахождения b_n осталось заметить, что в слове $A^kБA^l$ буква $Б$ расположена не на последнем, а на $(l+1)$-м месте от конца. Поэтому

$$b_n = (k+1+l)n + m(a_n - n) - l.$$

Неожиданно, не правда ли? Есть ли еще замены, приводящие к интересным аналогичным законам, мы не знаем. Возможно, читатели помогут найти ответ на этот вопрос.

Е.Барский, А.Баабабов, Л.Коганов

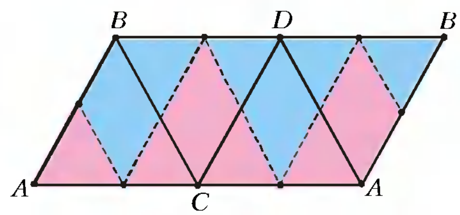
М1750. *а) Взяли шесть бумажных квадратов, у каждого из которых длина стороны равна 1, и ими целиком оклеили поверхность куба с ребром 1. Докажите, что найдется бумажный квадрат, который целиком оклеил какую-либо грань куба.*

б) Четырьмя бумажными равносторонними треугольниками, у каждого из которых длина стороны равна 1, целиком оклеили поверхность правильного тетраэдра с ребром 1. Обязательно ли найдется бумажный треугольник, который целиком оклеил какую-либо грань тетраэдра?

а) Обратим внимание на какую-либо, все равно какую, вершину куба. Так как сумма углов при ней равна 270°, найдется бумажный квадрат (хотя бы один), вершина которого совпала с этой вершиной куба.

Одним словом, у куба восемь вершин, и значит, не меньше восьми вершин у шести оклеивающих его бумажных квадратов совпадают с вершинами куба. Откуда следует, что найдется бумажный квадрат, у которого по крайней мере две вершины совпадают с вершинами куба. Но тогда ясно, что все четыре вершины этого бумажного квадрата совпадают с четырьмя вершинами какой-либо грани куба, т.е. эта грань целиком оклеена бумажным квадратом.

Можно дополнительно сообразить, что противоположная ей грань тоже непременно целиком оклеена каким-либо бумажным квадратом.



б) Вовсе необязательно. На рисунке показана развертка правильного тетраэдра $ABCD$ и такая его оклейка, что никакой из четырех бумажных треугольников не оклеивает целиком какую-либо грань этого тетраэдра.

В.Произволов

Ф1758. *Кот Леопольд стоял у края крыши сарая. Два злобных мышонка выстрелили в него из рогатки. Однако камень, описав дугу, через $t_1 = 1{,}2$ с упруго отразился от наклонного ската крыши сарая у самых лап кота и через $t_2 = 1{,}0$ с попал в лапу стрелявшего мышонка (рис.1). На каком расстоянии s от мышей находился кот Леопольд?*

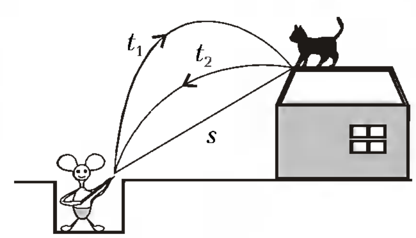


Рис.1

Пусть $\vec{u}_0$ – начальная скорость камня, $\vec{u}_1$ – скорость отскока камня от крыши и $\vec{u}_2$ – скорость, с которой камень попал в лапу мышонка. Направим ось X параллельно скату крыши, а ось Y – перпендикулярно ей (рис.2). На движении камня по оси X удар о крышу никак не сказывается; следовательно, оно равноускоренное и при этом $|u_{0x}| = |u_{2x}|$. Уравнению

$$s_x = u_{0x}t + \frac{g_xt^2}{2},$$

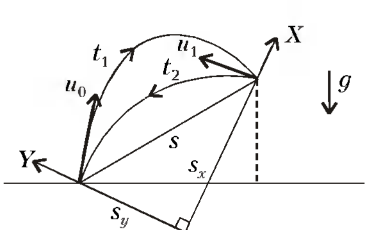


Рис.2

где g_x – проекция вектора ускорения свободного падения на ось X, удовлетворяет не только истинное движение камня вверх, но и обращенное во времени движение камня вниз, поэтому t_1 и t_2 – его корни. По теореме Виета получаем

$$s_x = -\frac{g_x t_1 t_2}{2}.$$

Аналогично, как истинное движение камня вниз, так и обращенное во времени его движение вверх удовлетворяют уравнению

$$s_y = u_{1y} t + \frac{g_y t^2}{2},$$

где u_{1y} – проекция на ось Y скорости камня сразу после отскока от крыши. В соответствии с теоремой Виета,

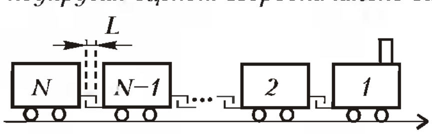
$$s_y = -\frac{g_y t_1 t_2}{2}.$$

Тогда искомое расстояние равно

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \frac{g t_1 t_2}{2}.$$

Д.Александров, В.Слободянин

Ф1759. *Длинный товарный поезд трогается с места. Вагоны соединены друг с другом с помощью абсолютно неупругих сцепок. Первоначально зазор в каждой сцепке равен L (см. рисунок). Масса локомотива m, а его порядковый номер первый. Все вагоны загружены, и масса каждого из них тоже m.*



1) Считая силу тяги локомотива постоянной и равной F, найдите время, за которое в движение будет вовлечено N вагонов.
2) Полагая, что состав очень длинный ($N \to \infty$), определите предельную скорость v_∞ локомотива.

1) Пусть v_i' – скорость части состава из i вагонов сразу после вовлечения в движение i-го вагона, а v_i – скорость части состава из i вагонов перед ударом с $(i+1)$-м вагоном. Из закона сохранения импульса

$$(i+1) m v_{i+1}' = i m v_i = p_i.$$

По второму закону Ньютона

$$a_{i+1} = \frac{F}{(i+1)m},$$

а по известному кинематическому соотношению

$$a_{i+1} L = \frac{v_{i+1}^2 - v_{i+1}'^2}{2}.$$

Отсюда получим

$$v_{i+1}^2 = \frac{2FL}{(i+1)m} + \left(\frac{i}{i+1}\right)^2 v_i^2,$$

или

$$p_{i+1}^2 = 2(i+1) mFL + p_i^2.$$

Из этой рекуррентной формулы следует

$$p_N^2 = 2mFL \sum_{i=1}^{N} i + p_0^2,$$

или, так как $p_0 = 0$,

$$p_N^2 = 2mFL \frac{N(N+1)}{2},$$

откуда

$$v_N = \sqrt{\frac{FL}{m}} \sqrt{\frac{N+1}{N}}.$$

Найдем теперь время t_N вовлечения в движение N вагонов:

$$v_i - v_i' = a_i \Delta t_i,$$

$$\Delta t_i = \frac{v_i - v_i'}{a_i} = \frac{m}{F}(i v_i - i v_i') = \frac{m}{F}(i v_i - (i-1) v_{i-1}),$$

$$t_N = \frac{m}{F} \sum_{i=1}^{N-1} (i v_i - (i-1) v_{i-1}) =$$

$$= \frac{m}{F}((N-1) v_{N-1} - 0 \cdot v_0) = \frac{m}{F} v_{N-1} (N-1).$$

Используя полученное ранее выражение для v_N, окончательно получим

$$t_N = \sqrt{\frac{mL}{F}} N \sqrt{1 - \frac{1}{N}}.$$

2) Из выражения для v_N находим, что при $N \to \infty$ скорость состава $n_\infty \to \sqrt{FL/m}$.

П.Бойко, Ю.Полянский

Ф1760. *К двум точкам A и B, находящимся на одной горизонтали, между которыми расстояние 2a, прикреплена тонкая легкая нерастяжимая нить длиной 2l (рис.1). По нити без трения скользит маленькая тяжелая бусинка. Ускорение свободного падения g.*

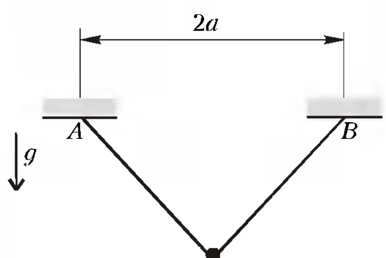


Рис.1

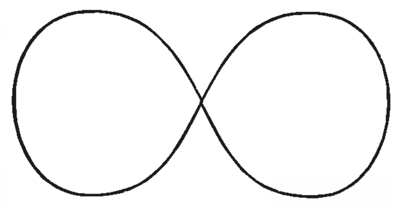


Рис.2

1) Найдите частоту малых колебаний бусинки $\omega_\perp$ в плоскости, перпендикулярной отрезку, соединяющему точки крепления нити.
2) Найдите частоту малых колебаний бусинки $\omega_\parallel$ в вертикальной плоскости, проходящей через точки крепления нити.
3) При каком отношении l/a траектория движения бусинки в проекции на горизонтальную плоскость может иметь вид, представленный на рисунке 2?
Примечание: при решении задачи вам может оказаться полезной формула

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots$$

при x? 1.

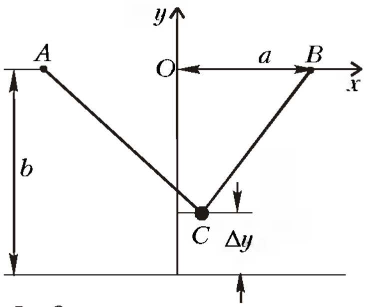


Рис.3

1) В первом случае происходят колебания математического маятника с длиной подвеса $\sqrt{l^2 - a^2}$, поэтому

$$\omega_\perp = \sqrt{\frac{g}{\sqrt{l^2 - a^2}}}.$$

2) Так как нить нерастяжимая, $AC + CB = 2l$ (см. рис.3). Следовательно, во втором случае бусинка C движется по эллипсу с фокусами A и B, при этом длина малой полуоси равна $b = \sqrt{l^2 - a^2}$, большой полуоси – l. Уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

откуда

$$y = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} \approx -b + \frac{bx^2}{2l^2},$$

и

$$\Delta y \approx \frac{bx^2}{2l^2}.$$

Значит, потенциальная энергия маятника равна

$$E_p = mg\Delta y \approx \frac{1}{2} mgb\frac{x^2}{l^2}.$$

Таким образом,

$$\omega_\parallel^2 \approx \frac{gb}{l^2},$$

и

$$\omega_\parallel \approx \frac{\sqrt{g\sqrt{l^2 - a^2}}}{l}.$$

3) Из рисунка 2 видно, что

$$\frac{\omega_\perp}{\omega_\parallel} \approx 2.$$

Отсюда получаем

$$\frac{l}{a} \approx \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

В.Пестун

Ф1761. *Высокий вертикальный сосуд с площадью дна 10 см^2 и высотой 1 м содержит под поршнем массой 2 кг сухой воздух и три одинаковые маленькие ампулы с водой. Температура воздуха снаружи +100 °С, атмосферное давление нормальное. Вначале поршень висит на высоте 20 см над дном сосуда, а после того, как одна из ампул лопнула, он поднялся и окончательно остановился на высоте 40 см. Сколько воды было в ампуле? Выскочит ли поршень из сосуда, если лопнут остальные две ампулы?*

Вначале, когда поршень неподвижен, давление воздуха в сосуде равно

$$p_{\text{атм}} + \frac{Mg}{S} = 1{,}2\ \text{атм}.$$

После того, как одна ампула лопнула, объем воздуха удвоился, его давление упало в 2 раза и составило 0,6 атм. Следовательно, давление пара равно

$$p_{\text{п}} = 1{,}2\ \text{атм} - 0{,}6\ \text{атм} = 0{,}6\ \text{атм}.$$

Для температуры 100 °С это давление меньше давления насыщенных паров, равного 1 атм. Значит, испарилась вся вода, и ее масса равна

$$m = \frac{Mp_{\text{п}}V}{RT} = \frac{0{,}018 \cdot 0{,}6 \cdot 10^5 \cdot 400 \cdot 10^{-6}}{8{,}3 \cdot 373}\ \text{кг} \approx 0{,}14\ \text{г}.$$

Для того чтобы поршень выскочил из сосуда, пар должен стать почти насыщенным – парциальное давление воздуха упадет в 5 раз и составит 1,2 атм/5 = 0,24 атм, тогда на пар должно приходиться 1,2 атм – 0,24 атм = 0,96 атм. Одна ампула при высоте поршня над дном сосуда 40 см создала влажность 60%, три ампулы при высоте поршня 1 м создадут влажность $1{,}2 \cdot 60\% = 72\%$, что явно меньше необходимых 96%. Итак, трех ампул недостаточно.

А.Зильберман

Ф1762. *Найдите силу взаимодействия двух непроводящих полусфер радиусами R и r с зарядами Q и q соответственно, распределенными равномерно по поверхностям полусфер (рис.1). Центры и плоскости максимальных сечений полусфер совпадают.*

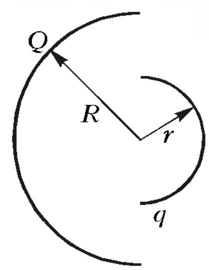


Рис.1

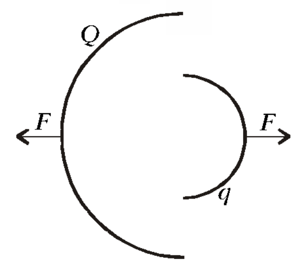


Рис.2

На рисунке 2 показаны направления сил, действующих на полусферы для случая одноименных зарядов. Если к системе добавить полусферу радиусом R и зарядом Q, как показано на рисунке 3, то сила, действующая на полусферу радиусом r, будет равна нулю, поскольку поле внутри заряженной сферы отсутствует. Таким образом, правая и левая половинки сферы действуют на маленькую полусферу с равными по величине и противоположно направленными силами F. Теперь добавим к первоначальным полусферам полусферу радиусом r с зарядом q (рис.4). Из предыдущего ясно, что полусферы с зарядами q будут действовать на полусферу с зарядом Q с равными по величине и сонаправленными силами F, так что сила взаимодействия сферы с зарядом $2q$ и радиусом r с

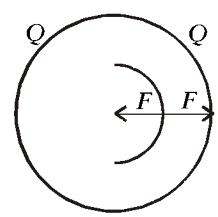


Рис.3

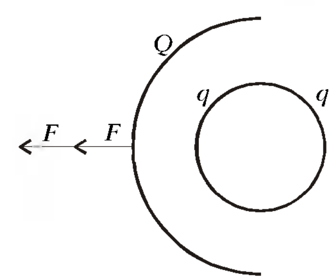


Рис.4

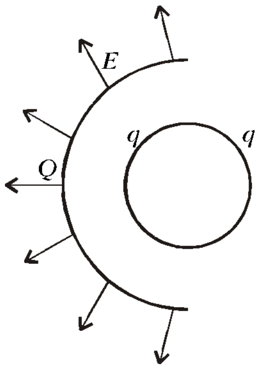


Рис.5

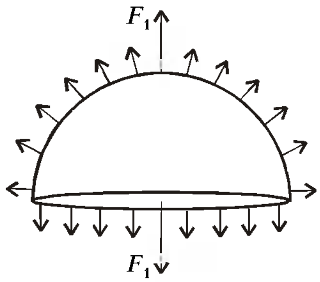


Рис.6

концентрической полусферой радиусом R и зарядом Q будет равна $2F$. Но эту силу легко вычислить, зная напряженность электрического поля на поверхности большой полусферы (рис.5):

$$E = k\frac{2q}{R^2},$$

а следовательно, можно вычислить и давление:

$$p = E\sigma,$$

где $\sigma = \dfrac{Q}{2\pi R^2}$ – поверхностная плотность заряда. Результирующая сила равна по величине силе давления на плоскость, замыкающую полусферу (рис.6):

$$F_1 = \pi R^2 p.$$

Принимая во внимание, что $F_1 = 2F$, получим

$$F = k\frac{qQ}{2R^2} = \frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Г.Григорян

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Дайте мне разбежаться!

С.ВАРЛАМОВ

Движение заряженных частиц в газе под действием электрического поля, как известно, приводит к возникновению различных типов газовых разрядов. Некоторые из них нашли практическое применение. Так, с помощью дугового газового разряда производят сварку металлических деталей, а газоразрядные лампы используются для освещения помещений и в рекламных целях. Но и огни «святого Эльма», и молнии – это тоже разряды в газе.

Что предшествует началу грозового разряда, т.е. молнии? Как возникает электрическое поле в воздухе? Если вам интересны эти вопросы, прочтите сначала статью «Электрическая машина в атмосфере» в этом номере журнала. А здесь мы обсудим, как движутся заряженные частицы до того, как начнется газовый разряд. Понятно, что эти частицы должны двигаться не так, как нейтральные частицы.

Даже в отсутствие внешнего электрического поля в газах всегда имеются заряженные частицы, концентрация которых мала по сравнению с концентрацией нейтральных частиц – атомов и молекул, если температура ниже 1000 К. Эти заряженные частицы непрерывно образуются под действием космического излучения и излучений радиоактивных веществ и исчезают в результате рекомбинации при встречах частиц с разными знаками зарядов. Если газ поместить в электрическое поле, то под его действием заряженные частицы приобретают (в среднем) дополнительную кинетическую энергию. Эта энергия может быть передана другим частицам при столкновениях.

Электрическое поле заставляет заряженные частицы пробираться сквозь «нестройные» ряды нейтральных частиц и соударяться с ними. Ситуация может быть описана простой моделью: среди плотного газа нейтральных частиц находится разреженный газ заряженных частиц. Столкновения заряженных частиц друг с другом тоже происходят, но очень редко, и их можно (пока) не рассматривать. В среднем плотность зарядов в газе равна нулю, т.е. концентрации отрицательно и положительно заряженных частиц равны друг другу (нейтральный газ).

Между двумя последовательными столкновениями частицы успевают пролететь некоторое расстояние, которое характеризуется средней длиной свободного пробега λ. Пока заряженная частица летит свободно, она движется с ускорением под действием внешнего электрического поля, в котором находится газ. Если газ имеет низкую температуру, то нейтральные частицы газа перед столкновением с разогнавшейся заряженной частицей можно считать покоящимися.

Упругие столкновения двух частиц (неважно, что одна из них заряжена) происходят так, что энергия между частицами перераспределяется. Пусть масса нейтральной частицы M, а масса заряженной частицы m (меньшая, чем M), тогда за один упругий удар энергичная заряженная частица, имевшая до удара энергию W, передаст нейтральной частице энергию в диапазоне от нуля до $8WmM/(M+m)^2$ (при лобовом столкновении). Проверьте это самостоятельно.

Понятно, что чем меньше масса налетающей частицы, тем меньше энергии будет передано второму участнику упругого столкновения. Таким образом, быстрее всего накапливают кинетическую энергию, приобретенную во внешнем электрическом поле, легкие (в сравнении с атомами и молекулами) электроны (они просто при ударах отдают меньше). Нас, конечно же, прежде всего интересуют столкновения легких электронов, имеющих заряд e, с массивными частицами. Средняя энергия, передаваемая электроном нейтральной частице при столкновении, имеет порядок величины Wm/M (точный расчет среднего значения дает дополнительно численный множитель порядка 1.) Хотя в свободном полете между ударами электроны имеют ускорение, направленное только вдоль вектора напряженности $\vec{E}$, нелобовые удары обеспечивают появление у электронов составляющих скорости и в направлении, перпендикулярном $\vec{E}$.

Оценим, какую среднюю хаотическую и какую среднюю упорядоченную скорость приобретут электроны при «продавливании» электронного газа сквозь газ нейтральных частиц под воздействием приложенного электрического поля $\vec{E}$ и какой будет их средняя кинетическая энергия. (Предполагаем пока, что ионизация не происходит.)

Примем во внимание, что упорядоченное движение связано с ускорением

$$a = \frac{eE}{m},$$

которое электроны имеют во время свободного полета между двумя последовательными ударами, т.е. в течение времени

$$t = \frac{\lambda}{v_{\text{хаот}}}.$$

Связь между средней упорядоченной и средней хаотической скоростями движения может быть, таким образом, выражена соотношением

$$v_{\text{упор}} = \frac{at}{2} = \frac{(eE/m)\lambda}{2v_{\text{хаот}}}.$$

Пусть в результате направленного движения за время τ электрон сместился от своего начального положения навстречу вектору $\vec{E}$ на расстояние

$$x = v_{\text{упор}}\tau = \frac{(eE/m)\lambda\tau}{2v_{\text{хаот}}}.$$

При этом уменьшение его потенциальной энергии в электрическом поле составило

$$Eex = \frac{(eE)^2\lambda\tau}{2mv_{\text{хаот}}}.$$

За это же время в результате хаотического движения этот электрон переместился на расстояние y и испытал N столкновений, причем

$$N = \frac{v_{\text{хаот}}\tau}{\lambda}.$$

Имея в среднем энергию

$$W = \frac{mv_{\text{хаот}}^2}{2},$$

электрон при каждом ударе отдавал ее (m/M)-ю часть.

Средняя кинетическая энергия хаотического движения электронов не меняется, а вследствие упорядоченного движения потенциальная энергия каждого электрона в электрическом поле уменьшается. Электроны при соударениях с нейтральными частицами передают им энергию, и газ нагревается. Таким образом, работа сил электрического поля в конце концов идет на повышение температуры газа.

Приравняем величину потерь энергии электрона при ударах уменьшению его потенциальной энергии в электрическом поле:

$$\frac{m}{M}\frac{mv_{\text{хаот}}^2}{2}\frac{v_{\text{хаот}}\tau}{\lambda} = \frac{(eE)^2\lambda\tau}{2mv_{\text{хаот}}}.$$

Отсюда можно найти среднюю скорость хаотического движения, а затем и среднюю скорость упорядоченного движения электронов:

$$v_{\text{хаот}} = \left(\frac{M}{m}\right)^{1/4}\left(\frac{eE\lambda}{m}\right)^{1/2},$$

$$v_{\text{упор}} = \frac{(eE/m)\lambda}{2v_{\text{хаот}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{M}\right)^{1/4}\left(\frac{eE\lambda}{m}\right)^{1/2}.$$

Из полученных формул видно, что средняя скорость хаотического движения электронов в $2(M/m)^{1/2}$ раз больше средней скорости их упорядоченного движения. Даже для такого легкого газа, как гелий, это отношение равно приблизительно 170.

Кинетическая энергия электронов связана, в основном, со средней скоростью их хаотического движения (вклад упорядоченного движения пренебрежимо мал):

$$W = \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2}\frac{eE\lambda}{2}.$$

(Это выражение справедливо, только если $W \cong kT$. Если это не так, то средняя кинетическая энергия движения электронов, согласно классической молекулярно-кинетической теории, конечно же, равна $(3/2)kT$.)

Заметим, что средние кинетические энергии хаотического движения нейтральных частиц и электронов после включения электрического поля значительно различаются. В физике даже вводится специальное понятие – электронная температура:

$$T_{\text{электр}} = \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2}\frac{eE\lambda}{3k}.$$

При соответствующем значении напряженности электрического поля E эта величина может быть значительно больше температуры нейтральных частиц.

Мы выяснили, какую энергию приобретают электроны при «продавливании» электронного газа через газ нейтральных частиц под действием внешнего электрического поля. Согласно полученным формулам, средняя кинетическая энергия электронов пропорциональна величине напряженности электрического поля, в котором находится газ, и средней длине свободного пробега частиц в газе (при фиксированной температуре длина свободного пробега частиц обратно пропорциональна давлению газа). Увеличение напряженности электрического поля (или уменьшение давления газа) приводит к тому, что при некотором значении не все удары электронов о нейтральные молекулы будут упругими. И какими будут последствия? Если вам это интересно, прочитайте в этом номере журнала статью

Вниманию наших читателей!

Желающие получить обновленный текст книги А.И.Черноуцана «Физика. Справочник для старшеклассников и абитуриентов» (М.: ЭКСМО-ПРЕСС, 2000), могут найти его на сайте Российского государственного университета нефти и газа им.И.М.Губкина:

http://www.citde.gubkin.ru/de/demo/physics

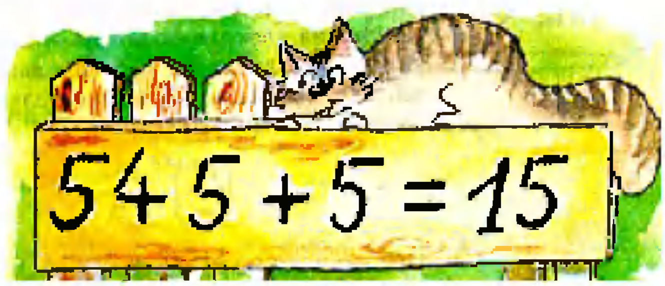
или на сайте Vivos Voco!:

http://www.vivovoco.nns.ru

Полный текст книги в PDF-формате занимает примерно 1,2 Мб.

Задачи

1. На доске школьник написал неверное равенство:

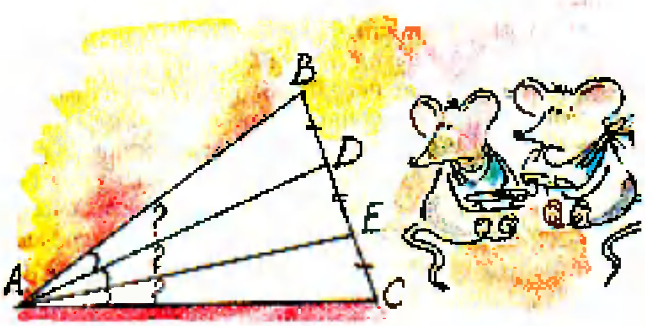


Как стереть одну черту, чтобы равенство стало верным?

В.Произволов

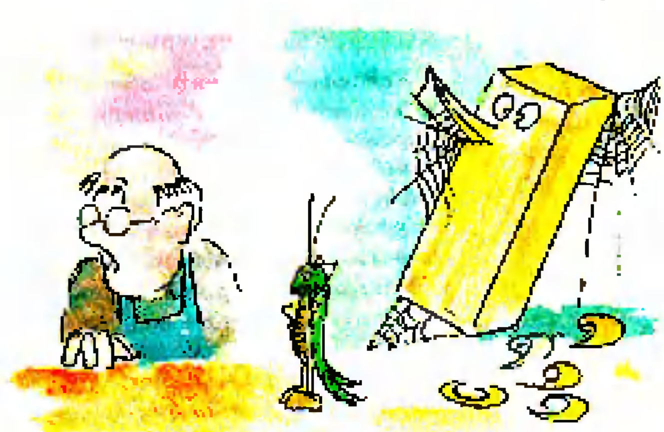
2. Точки D и E делят сторону BC треугольника ABC на три равные части. Могут ли при этом лучи AD и AE делить угол BAC на три равных угла?

Д.Калинин



3. Папа Карло обнаружил, что длины сторон бруска прямоугольной формы (прямоугольного параллелепипеда) – простые числа. Произведение двух из них на 40 больше третьего, а их разность на 9 меньше третьего. Каков объем бруска?

И.Акулич



4. В обрывке старинного манускрипта обнаружена следующая запись:

Проверьте, что каждая из приведенных в манускрипте фигур может являться разверткой куба. Восстановите размеры наименьшего квадрата, из которого можно вырезать все эти развертки (за единицу длины примите ребро куба).

Клуб «Пифагор» города Дрездена (Германия)

5. Известно, что любой дурак считает себя умным, зато всех остальных – дураками. Среди умных могут быть такие, кто считает себя дураком, зато про всех остальных точно знает, кто умный, а кто дурак (как и тот умный, который считает себя умным).
Опросы жителей Страны Чудаков позволили точно определить, кто из них умный, а кто дурак. Есть ли в этой стране хоть один умный?

А.Жуков

Иллюстрации Д.Гришуковой

Электрическая машина в атмосфере

С.ВАРЛАМОВ

Как известно, все процессы, происходящие в атмосфере, обязаны своим появлением Солнцу. И даже... возникновение молнии.

Излучение Солнца в безоблачный день почти без потерь проникает через всю атмосферу. Нагрев поверхности земли или воды приводит к подогреву и насыщению водяными парами воздуха вблизи поверхности земли. Вслед за этим начинается конвекция, при которой влажный и теплый воздух от поверхности земли поднимается на большую высоту.

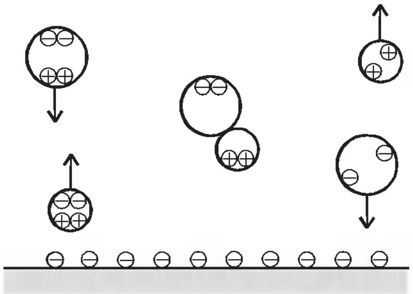
Запаса тепла, накопленного землей и водой, хватает на большое время, поэтому конвекция воздуха продолжается и после того, как доступ солнечным лучам к земле будет закрыт облаками или даже тучами. В «мощной» грозовой туче конвекцией захвачен воздух до высоты 10 – 12 км, скорость вертикального движения достигает нескольких метров в секунду. Место поднимающегося вверх теплого и влажного воздуха занимает поступающий «с боков и сверху» воздух, лишенный водяных паров (сухой). Даже при одинаковой температуре вблизи поверхности земли сухой воздух имеет большую плотность, чем влажный. Постепенно насыщаясь влагой, этот воздух в свою очередь начинает подниматься вверх.

Большие объемы поднимающегося воздуха практически не обмениваются теплом с окружающим воздухом. Поэтому можно считать, что при подъеме вверх и (соответственно) попадании в область с меньшим давлением теплый и влажный воздух расширяется и совершает работу за счет своей внутренней энергии, что сопровождается охлаждением воздуха. На определенной высоте достигается так называемая температура росы, и водяной пар начинает конденсироваться в капельки.

Условия освещения поверхности земли на больших пространствах (100 – 200 км) одинаковы, поэтому для восходящих конвекционных потоков, находящихся одновременно в пределах видимости, соответствующие температуры росы тоже примерно одинаковы. Вследствие этого нижний край практически всех кучевых облаков обычно находится на одной и той же высоте над землей.

Эти капельки, с одной стороны, притягиваются к земле, а, с другой стороны, за счет трения увлекаются восходящими потоками воздуха. Пока размеры капелек невелики, все они поднимаются вверх (хотя относительно окружающего воздуха они, конечно же, движутся вниз). Со временем капельки растут в объеме, сливаются друг с другом, и некоторые из них приобре-

Иллюстрация П.Чернуского



тают такую массу, что поток воздуха уже не может поддерживать их подъем. Такие капли начинают двигаться вниз, навстречу поднимающимся вверх воздуху и более мелким капелькам. Сталкиваясь с более мелкими капельками, большая капля иногда (важно, что не всегда) захватывает их и увеличивается в объеме. Часть столкновений не приводит к слиянию капелек.

Вам, наверное, не раз приходилось видеть в умывальнике капельки, бегающие по поверхности воды. Вот это и иллюстрирует тот факт, что не все столкновения капель обязательно приводят к их немедленному слиянию.

Итак, в нашем распоряжении имеется некоторое механическое устройство, переносящее маленькие капельки вверх, но при этом большие капли падают вниз. Такое встречное движение происходит в той части грозового облака, где уже имеется вода в конденсированном состоянии.

Вот мы и подошли вплотную к объяснению механизма разделения зарядов в грозовом облаке, вслед за чем и возникает молния. Для такого разделения нужно, чтобы в той области пространства, где движутся и сталкиваются капельки, существовало хотя бы небольшое по величине вертикально направленное электрическое поле. И такое поле есть – это электрическое поле Земли, соответствующее отрицательному заряду земной поверхности.

Из нескольких возможных механизмов приобретения капельками электрических зарядов мы опишем только один, но и его действия достаточно, чтобы происходило разделение зарядов в грозовом облаке.

В каждой незаряженной первоначально капельке, находящейся в электрическом поле, возникает вызванное этим полем перераспределение зарядов (см. рисунок). В результате летящие навстречу друг другу маленькая и большая капельки притягиваются, хотя они и не заряжены зарядами разных знаков. При столкновении, которое не заканчивается слиянием, «верхняя» капля приобретает отрицательный заряд, а «нижняя» – положительный. Отрицательный заряд вместе со своей «верхней» каплей после удара капель опускается вниз, а положительный заряд вместе со своей «нижней» каплей поднимается вверх. Заметьте, что после такого перераспределения заряды движутся против электрических сил, связанных с зарядом поверхности земли. В результате нижняя и верхняя части облака оказываются заряженными зарядами разных знаков – низ облака отрицательно (так же, как первоначально была заряжена поверхность земли под восходящим потоком воздуха), а верх положительно. Эти заряды, в свою очередь, вызывают перераспределение зарядов на поверхности земли, в результате чего непосредственно под облаком (в эпицентре грозы) земля приобретает положительный заряд, а в стороне от облака – отрицательный.

Пока из облака не пошел дождь, большие капельки, проскочив «низ» облака, попадают в восходящий поток с температурой выше точки росы. Здесь большинство капель испаряется, но их заряд не пропадает (подумайте, на каких частицах остаются заряды).

Все время, пока происходит конвекция воздуха и пока из облака еще не полил дождь, продолжается разделение зарядов и, соответственно, усиление электрического поля в пространстве. При достижении определенной величины поля в воздухе возникает электрический пробой – по возникшему проводящему участку воздуха протекает большой ток (порядка $10^4 - 10^6$ ампер). Этот участок воздуха нагревается, светится и расширяется, теперь результаты работы электрической машины в атмосфере можно видеть и слышать – началась гроза!

Поскольку существует два участка с сильным электрическим полем: между низом и верхом грозового облака и между низом облака и поверхностью земли, то молнии случаются как внутриоблачные, так и между облаком и землей. Обычно разряды молний начинаются внутри облака (там, где давление воздуха меньше). По мере нарастания «мощи» грозового облака все бóльшая часть накопленного тепла перебирается от земли к облаку, и нижняя граница облака (та высота, на которой достигается точка росы) опускается все ниже и ниже. Этому помогают крупные капли, которые «проскакивают» мимо границы облака и испаряются, поглощая тепло восходящего воздушного потока, все ближе и ближе к земле. (Кстати заметим, что существующее внутри облака электрическое поле способствует более быстрому росту размеров капель.) Наконец, условия для пробоя воздуха достигаются и в воздушном промежутке «облако – земля».

В конце концов возникает «прорыв»: поднимающийся вверх теплый воздух уже не в состоянии испарить все падающие вниз капли – «разверзаются хляби небесные», и испаренная с поверхности вода возвращается на землю в виде дождя или града.

Итак, мы выяснили, каким образом солнечная энергия, поглощенная на поверхности земли, превращается в тепловую энергию влажного воздуха, а та, в свою очередь, переходит в электрическую энергию в результате конвекции воздуха в электрическом поле.

Остались невыясненными вопросы, почему возникает электрический пробой воздуха и как выбирается тот путь в воздухе, по которому «пробегает» молния. Если вам хочется получить ответы на них, советуем почитать в этом номере журнала статьи «Дайте мне разбежаться!» и «Молния – это не так сложно, как кажется».

Заключительный этап конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Как и в предыдущие пять лет, заочный конкурс «Математика 6–8» завершился финальным очным турниром. Он проходил с 25 июня по 1 июля 2000 года на базе отдыха «Усинская» возле Сызрани.

С каждым годом популярность турнира растет: в прошлый раз участвовали 14 команд из 13 городов, а в этот – 22 команды из 17 городов: Астрахань, Иваново, Киров, Кострома, Краснодар, Магнитогорск, Минск, Москва (представленная сразу 5 командами), Набережные Челны, Нижний Новгород, Омск, Петровск-Забайкальский, Рыбинск, Самара, Саров, Харьков (2 команды), Чебоксары.

Основная заслуга в организации этого турнира принадлежит М.В.Наяновой – ректору Самарского муниципального университета (Университет Наяновой), а также аспиранту этого университета А.Н.Савину и другим сотрудникам. Часть расходов на проживание и питание взял на себя коммерческий банк «Солидарность». Книги для призов победителям предоставили редакция журнала «Квант», МЦНМО (директор – И.В.Ященко) и МИРОС (директор – А.М.Абрамов). Очень большую роль в организации турнира и подготовке заданий сыграли заместитель председателя Оргкомитета С.И.Токарев и член редколлегии журнала «Квант» В.В.Произволов.

Математический бой Омск – Набережные Челны

Победительницей турнира стала команда Кирова (руководители – И.С.Рубанов и Л.И.Новокшенова), дипломами второй степени были награждены обе команды Харькова (руководители одной из них – Е.Л.Аринкина и В.Я.Крупчицкий, другой – С.А.Лифиц), дипломами третьей степени – команды Москвы (Е.Ю.Иванова) и Нижнего Новгорода (А.В.Калинин).

Турнир состоял из пяти туров математических боев и личной олимпиады. На первые четыре задачи олимпиады отводилось два с половиной часа. Решив любые три из них, участник получал еще три задачи и еще полтора часа времени. Приятно, что из 140 участников более 80 смогли получить дополнительные задачи. Участникам, решившим все семь задач, присуждались дипломы I степени, решившим 6 задач – дипломы II степени, 5 задач – дипломы III степени, 4 задачи – похвальные грамоты.

Так проходила олимпиада

Дипломы I степени получили

Томин Дмитрий – Иваново, лицей 33, 8 кл.,
Цымбалюк Александр – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Щербина Татьяна – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Ятченко Артем – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.

Дипломы II степени получили

Бугаев Дмитрий – Омск, лицей 64, 7 кл.,
Вершинина Анастасия – Киров, ФМЛ, 8 кл.,
Гордон Дмитрий – Харьков, Академическая гимназия 45, 8 кл.,
Гринберг Игорь – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Есебуа Георгий – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Зеленская Анна – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Лапина Светлана – Нижний Новгород, школа 180, 8 кл.,
Никульченко Артем – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Панов Михаил – Рыбинск, школа 28, 8 кл.,
Петухов Алексей – Москва, лицей «Вторая школа», 8 кл.,
Рагулина Кира – Москва, лицей «Вторая школа», 7 кл.,
Тарасюк Александр – Минск, гимназия 10, 7 кл.,
Шепельская Варвара – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.

Дипломы III степени получили

Баканов Сергей – Астрахань, ФМШ 32, 8 кл.,
Басов Андрей – Москва, лицей «Вторая школа», 7 кл.,
Буланов Павел – Минск, школа 19, 8 кл.,
Васильев Максим – Омск, лицей 64, 8 кл.,
Вервейко Дмитрий – Самара, Университет Наяновой, 7 кл.,
Волков Борис – Москва, лицей «Вторая школа», 7 кл.,
Гринберг Антон – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Игнатьева Ольга – Чебоксары, школа 27, 8 кл.,
Кислицын Евгений – Киров, ФМЛ, 7 кл.,
Кузнецов Кирилл – Нижний Новгород, лицей 40, 8 кл.,
Куракин Алексей – Рыбинск, гимназия-лицей 2, 8 кл.,
Лариков Олег – Москва, лицей «Вторая школа», 8 кл.,
Лебедь Виктория – Минск, гимназия 2, 8 кл.,
Мешин Юрий – Киров, ФМЛ, 7 кл.,
Носович Сергей – Жодино Минской обл., гимназия, 8 кл.,
Осянин Станислав – Набережные Челны, гимназия 26, 8 кл.,

Помелов Артем – Киров, ФМЛ, 7кл.,
Поплавский Михаил – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Рубцов Андрей – Иваново, лицей 33, 8 кл.,
Свердлик Валерий – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Сидоров Алексей – Кострома, школа 32, 8 кл.,
Сотнезов Роман – Чебоксары, школа 27, 8 кл.,
Чалкина Наталья – Москва, лицей «Вторая школа», 7 кл.,
Шаповалова Валентина – Стокгольм, 8 кл.,
Шулятьев Андрей – Чебоксары, школа 34, 8 кл.,
Щукин Дмитрий – Чебаксары, школа 27, 8 кл.

Предлагаем вашему вниманию несколько задач турнира и их решения, а также условия задач для самостоятельной работы.

Задачи

1. На некотором поле шахматной доски стоит король. Двое по очереди передвигают его по доске. Запрещено возвращать короля на поле, где он только что был. Выигрывает тот игрок, после хода которого король окажется на поле, где он когда-то уже побывал. Кто из игроков может обеспечить себе победу при любой игре противника?

И.Акулич

2. Коля и Петя играют в морской бой по измененным правилам. У каждого из них имеется квадратное клетчатое поле размером 10×10. Петя расставляет на своем поле корабли размером 1×3, а Коля на своем – корабли размером 1×4. Корабли не должны соприкасаться даже вершинами. Победителем считается тот, кто расставил больше кораблей. Может ли кто-то из игроков гарантировать себе победу?

В.Каскевич

3. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, касается его основания в точке D, а боковых сторон – в точках E и F. Прямая, проведенная через точку E параллельно прямой DF, повторно пересекает вписанную окружность в точке P. Докажите, что точка P принадлежит средней линии треугольника.

Д.Калинин

4. Отрезки AC и BC равны и перпендикулярны. Найдите множество таких точек M, для которых $\angle AMC = \angle CMB$.

А.Егоров

5. Пусть n – натуральное число. Докажите, что число $n!$ представимо в виде произведения двух натуральных чисел, различающихся не более чем вдвое.

С.Конягин

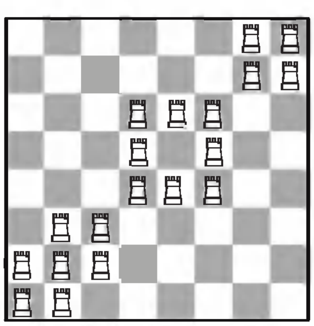


Рис. 1

6. Какое наибольшее число ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждая била четное число других? (Одна ладья бьет другую, если они стоят на одной вертикали или горизонтали и между ними нет других ладей. Например, расстановка ладей рисунка 1 удовлетворяет условию задачи.)

А.Шаповалов

Решения

1. Начинающий может победить при любом начальном положении короля. Суть стратегии в следующем. Подсчитаем число вертикальных ходов, которыми король может с исходного поля дойти до нижней (первой) горизонтали, а также количество вертикальных ходов, которыми король может дойти до верхней (восьмой) горизонтали. Поскольку сумма этих чисел равна $8 - 1 = 7$, то одно из них нечетно.

Пусть, для определенности, надо сделать нечетное число ходов, чтобы дойти до нижней горизонтали (рис.2). Тогда первый игрок может пойти прямо вниз; номер горизонтали уменьшится на 1 и из четного станет нечетным. Что делать второму? Если он сделает горизонтальный ход или вернется диагональным ходом на исходную горизонталь (т.е. пойдет на одну из закрашенных клеток рисунка 2), то первый игрок сразу сможет выиграть. Поэтому второй игрок будет вынужден сделать вертикальный или диагональный ход, спустившись еще ниже.

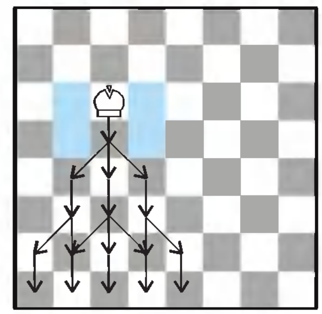


Рис. 2

В ответ первый игрок опять может пойти вертикально вниз. Второму, чтобы не проиграть, опять придется опустить короля еще ниже, и так будет продолжаться до того, как после очередного хода первого игрока король попадет на нижнюю горизонталь. Тогда второму игроку придется сделать горизонтальный ход или поднять короля по диагонали вверх, после чего первый игрок побеждает, ставя короля на ранее пройденное поле.

Заметим, что если бы размеры доски были иными (например, 9×9), то не каждое исходное положение короля приносило бы выигрыш тому, кто делает первый ход: 16 полей (подумайте, какие именно) были бы выигрышными для второго игрока.

2. Кажется, что Петя должен победить – ведь его корабли меньше Колиных. А на самом деле при правильной игре будет ничья. Дело в том, что Коля может расставить 12 кораблей (рис.3), а Петя не может расставить более 12 кораблей.

Чтобы доказать последнее утверждение, рассмотрим 12 квадратов размером 2×2, закрашенных на рисунке 4. Очевидно, любой трехклеточный корабль содержит хотя бы одну закрашенную клетку, причем никакие два корабля не

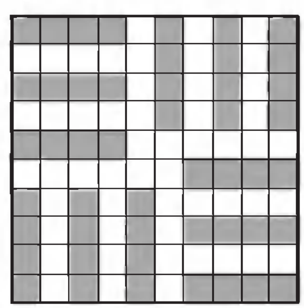


Рис. 3

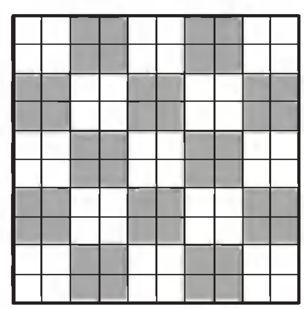


Рис. 4

могут содержать закрашенные клетки из одного и того же квадрата 2×2 (иначе они бы соприкоснулись). Значит, количество кораблей не превосходит количества закрашенных квадратов, т.е. не превосходит числа 12. Морской бой, как это ни парадоксально, закончится вничью.

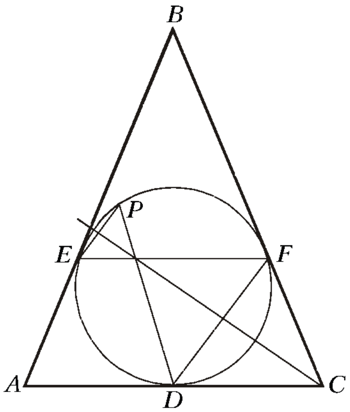


Рис. 5

3. При симметрии относительно биссектрисы угла C лучи CD и CF меняются местами, точки E и P тоже меняются местами, а окружность переходит сама в себя (рис.5). Поскольку прямые EF и AC параллельны, то и прямые PD и BC, получающиеся из них при осевой симметрии, тоже параллельны. Как видите, эта задача – «всего лишь» пример на применение осевой симметрии!

4. Искомое множество изображено на рисунке 6. Рассмотрим два случая. Пусть сначала углы AMC и BMC лежат по одну сторону от прямой MC. Тогда равенство $\angle AMC = \angle BMC$ означает, что точки A и B лежат на одном луче, выходящем из точки M. Другими словами, точка M должна принадлежать прямой AB, но не лежать на отрезке AB.

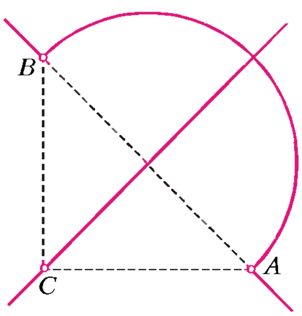


Рис. 6

Теперь рассмотрим более трудный случай, когда углы AMC и BMC лежат по разные стороны от прямой MC. Обозначим буквой D образ точки B при симметрии относительно MC. Так как $CA = CB = CD$, то возможны два случая: либо $D = A$, либо ACD – равнобедренный треугольник (рис.7). В первом случае CM – биссектриса угла ACB (внутренняя или внешняя), причем искомыми являются все точки обеих биссектрис, кроме точки C (для нее углы AMC и CMB не определены).

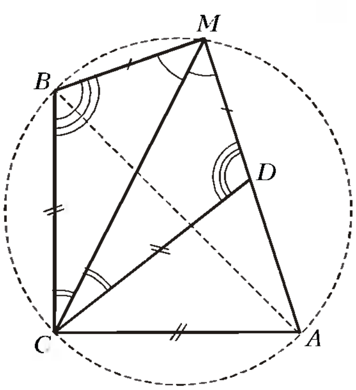


Рис. 7

Во втором случае сумма величин углов CAD и CDM равна 180°. Следовательно, $\angle CAM + \angle CMB = 180°$, четырехугольник $CAMB$ вписанный и точка M лежит на окружности, описанной около треугольника ACB. Очевидно, условию задачи удовлетворяют не все точки окружности, а только точки не содержащей точку C дуги AB (за исключением ее концов).

5. Применим индукцию. Для n = 1 и n = 2 утверждение задачи верно ввиду равенств $1! = 1\cdot 1$ и $2! = 1\cdot 2$. Предположим, что утверждение верно для $n = k$, т.е. $k! = a\cdot b$, где $a \le b \le 2a$. Тогда разложение на множители $(k+2)! = a(k+2)\cdot b(k+1)$ удовлетворяет условию задачи. Действительно, $a(k+2) \le b(k+2) < 2b(k+1)$ и $b(k+1) \le 2a(k+1) < 2a(k+2)$. Вот и все!

6. 40 ладей расставить легко (рис.8). Докажем, что при любой расстановке ладей, удовлетворяющей условию задачи, свободными останутся не менее 24 клеток.

Для этого над верхней и под нижней горизонталями доски напишем строки из 8 чисел по следующим правилам: если на вертикали стоит не менее двух ладей, то над (под) вертикалью запишем число пустых полей над (под) самой верхней (нижней) ладьей этой вертикали; если же на вертикали не более одной ладьи, то над и под вертикалью запишем тройки.

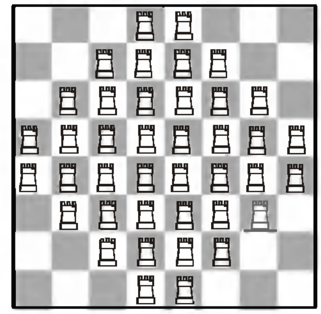


Рис. 8

Итак, над и под доской выписаны две строки по 8 чисел. Докажем, что в верхней строке (и в нижней тоже, поскольку она ничем не хуже верхней) каждое из чисел 0, 1 или 2 встретится не более двух раз. В самом деле, если бы, например, в верхней строке присутствовали три единицы, то средняя из трех соответствующих ладей била бы три (нечетное число!) ладьи.

Таким образом, сумма выписанных чисел не меньше $2(0+0+1+1+2+2+3+3) = 24$. Поскольку сумма выписанных над и под любой вертикалью чисел не больше общего числа пустых полей этой вертикали, то сумма всех выписанных чисел не превышает числа всех пустых полей. Значит, число пустых полей не менее 24. Задача о расстановке ладей на доске 8×8 решена.

Интересно, а какое наибольшее число ладей можно расставить на доске размером $n\times n$ так, чтобы каждая из них била четное число других? Уже после турнира выяснилось, что независимо от Шаповалова задачу про ладьи придумал Д.Карпов и предложил ее одиннадцатиклассникам на Санкт-Петербургской олимпиаде 2000 года. Решение по сути такое же, как для n = 8. Ответ: $\left[\left(n^2+2n\right)/2\right]$.

Задачи для самостоятельного решения

7. Внутри остроугольного треугольника ABC, в котором величина угла A равна 40°, взята такая точка M, что $\angle CMB = 110°$. Серединные перпендикуляры к отрезкам BM и CM пересекают стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что точка M лежит на отрезке PQ.

Д.Калинин

8. В книге встретилось несколько дат, каждая из которых записана шестью цифрами (например, 29.06.00 – дата проведения олимпиады). Могло ли случиться, что каждая цифра от 0 до 9 встретилась одинаковое число раз?

А.Шаповалов

9. Положительные числа a, b, c таковы, что наибольшее из них равно наибольшему из чисел a^2/b, b^2/c, c^2/a. Докажите, что $a = b = c$.

В.Сендеров

10. Можно ли оклеить куб прямоугольниками так, чтобы каждый из них граничил (по отрезку) ровно с пятью другими?

А.Шаповалов

11. Через середину биссектрисы угла B треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная ей. Может ли эта прямая пересекать отрезок AC?

В.Замков

12. На плоскости отмечено несколько точек. Назовем тройку параллельных прямых красивой, если расстояния между соседними прямыми одинаковы, все отмеченные точки лежат на этих прямых и на каждой прямой найдется отмеченная точка. Какое наибольшее число точек может быть отмечено так, чтобы для них нашлись три красивые тройки прямых?

А.Шаповалов

(Окончание см. на с.36)

О пользе вневписанных окружностей

Ю.БИЛЕЦКИЙ, Г.ФИЛИППОВСКИЙ

Вневписанная окружность представляется в некотором смысле изысканным элементом геометрии треугольника. Знакомство с ней зачастую ограничивается определением, нахождением ее центра и решением нескольких популярных задач, встречающихся на конкурсных экзаменах. Однако, как нам кажется, «взяв правильный угол сердца» (В.Хлебников) к вневписанной окружности, мы увидим в ней скрытую красоту и силу, станем рассматривать ее как подспорье в решении геометрических задач.

Вневписанная окружность

Теорема 1. *Биссектриса внутреннего угла BAC треугольника ABC и биссектрисы двух внешних углов при вершинах B и C пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Проведем внешние биссектрисы из вершин B и C. Пусть они пересекаются в точке J_a (рис.1). Докажем, что биссектриса угла BAC проходит через точку J_a. Все точки биссектрисы равноудалены от сторон угла, значит, расстояния от точки J_a до прямых BC и AC равны, так как J_a лежит на биссектрисе угла BCT_1. Аналогично, равны расстояния от точки J_a до прямых BC и AB. Тогда очевидно, что точка J_a равноудалена от прямых AC и AB, т. е. лежит на биссектрисе угла BAC.

Из теоремы 1 следует, что существует окружность с центром в точке J_a, касающаяся прямых AC, AB и BC.

Определение. *Вневписанной окружностью называется окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других сторон.*

Отметим, что для каждого треугольника существуют три вневписанные окружности, их радиусы будем обозначать r_a, r_b и r_c в зависимости от того, какой стороны треугольника они касаются.

Теорема 2. *Пусть T_1 – точка касания вневписанной окружности с продолжением стороны AC треугольника ABC. Тогда длина отрезка AT_1 равна полупериметру треугольника ABC (см. рис.1).*

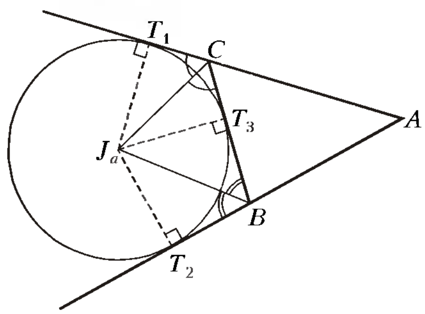


Рис. 1

Доказательство. Пусть T_2 и T_3 – точки касания вневписанной окружности с прямыми AB и BC соответственно. Тогда $CT_1 = CT_3$, $BT_2 = BT_3$ и периметр треугольника ABC равен $2p = AC + CT_3 + BT_3 + AB = AC + CT_1 + AB + BT_2 = AT_1 + AT_2$. А так как $AT_1 = AT_2$, то $p = AT_1$, что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Площадь S треугольника ABC равна $S = r_a(p - a)$.*

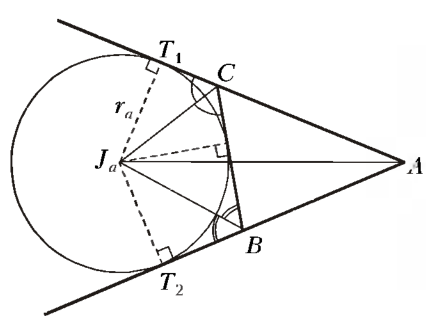


Рис. 2

Доказательство. Легко видеть (рис.2), что

$$S = S_{ABC} = S_{J_aCA} + S_{J_aBA} - S_{J_aCB} = \frac{1}{2}r_a b + \frac{1}{2}r_a c - \frac{1}{2}r_a a = r_a(p-a).$$

Теорема 4. *Пусть K – точка касания вписанной окружности со стороной BC, KR – диаметр вписанной окружности. Тогда точки A, R и T_3 лежат на одной прямой (рис.3).*

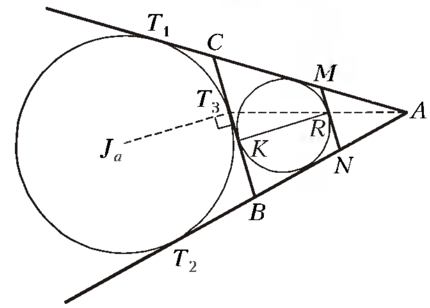


Рис. 3

Доказательство. Пусть прямая AR пересекает BC в некоторой точке X. Докажем, что X совпадает с T_3. Проведем через R прямую, параллельную BC. Обозначим ее точки пересечения с AC и AB через M и N соответственно. Окружность, вписанная в ΔABC, является вневписанной для ΔAMN. Но ΔABC и ΔANM гомотетичны. Следовательно, окружность, вневписанная в ΔABC, будет касаться BC в точке X. Таким образом, X совпадает с T_3.

Решение задач

Отметим, что условия следующих задач не содержат термина «вневписанная окружность». Она появляется в решении как вспомогательная фигура.

Задача 1. *На стороне BC треугольника ABC найдите точку, которая делит периметр треугольника ABC пополам.*

Ответ: это точка касания вневписанной окружности со стороной BC (см. доказательство теоремы 2).

Задача 2. *Из точки A к данной окружности проведены касательные AT_1 и AT_2. К окружности проведена касательная, пересекающая отрезки AT_1 и AT_2 в точках B и C. Докажите, что периметр треугольника ABC не зависит от положения касательной.*

Решение. По теореме 2, независимо от положения касательной, периметр треугольника ABC равен удвоенной длине отрезка AT_1.

Задача 3. *Внутри угла с вершиной A дана точка M. Через точку M проведите прямую так, чтобы она отсекала треугольник наименьшего периметра.*

Решение. Проведем через точку M произвольную прямую, пересекающую стороны угла в точках B и C (рис.4). Построим вневписанную окружность

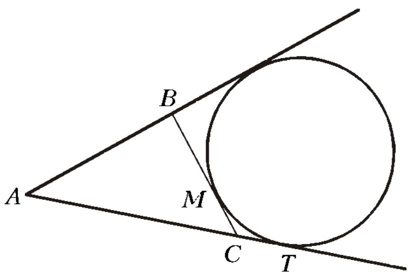


Рис. 4

треугольника ABC, касающуюся прямой AC в точке T. Тогда периметр треугольника ABC равен $2AT$ (теорема 2). Для того чтобы построить треугольник с наименьшим периметром, надо прямую BC провести так, чтобы отрезок AT, а значит и радиус вневписанной окружности, имел наименьшее значение. Это будет тогда, когда вневписанная окружность проходит через точку M. Итак, для построения треугольника с наименьшим периметром необходимо построить окружность, проходящую через точку M и касающуюся сторон угла (это – известная задача, решаемая с помощью гомотетии), затем провести к окружности касательную в точке M. Проведенная касательная – искомая прямая.

Задача 4. *Дан квадрат ABCD со стороной a. На сторонах BC и CD даны точки M и N такие, что периметр треугольника CMN равен 2a. Найдите угол MAN (рис.5).*

Решение. Расстояния от вершины C треугольника CMN до точек B и D равны его полупериметру. Значит, B и D – точки касания вневписанной окружности, а ее центр находится в вершине A квадрата $ABCD$. Тогда AM и

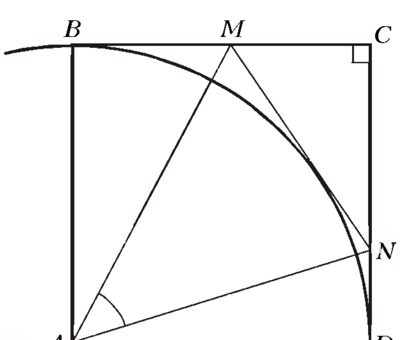


Рис. 5

AN – биссектрисы углов BMN и MND соответственно. Далее,

$$\angle CMN + \angle CNM = 90^\circ,$$

значит,

$$\angle AMN + \angle MNA =$$
$$= 180^\circ - (\angle CMN + \angle CNM)/2 = 135^\circ.$$

Откуда

$$\angle MAN =$$
$$= 180^\circ - (\angle AMN + \angle MNA) = 45^\circ.$$

Задача 5. *К двум непересекающимся окружностям проведены две общие внешние касательные и общая внутренняя касательная. Докажите, что отрезок внутренней касательной, заключенный между внешними касательными, равен отрезку внешней касательной, заключенному между точками касания.*

Решение. Пусть O_1 и O_2 – данные окружности, а точки касания окружностей с первой внешней касательной – A и B, со второй – C и D (рис.6). Пусть также внутренняя касательная пересекает внешние в точках M и N.

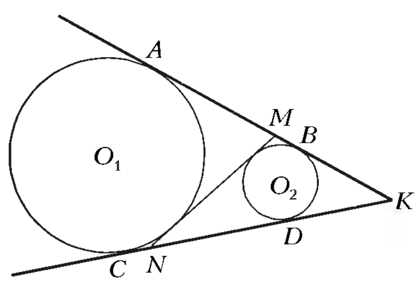


Рис. 6

Продолжим прямые AB и CD до их пересечения в точке K. Тогда окружность O_2 является вписанной в треугольник MNK, а окружность O_1 – вневписанной. Обозначим сторону MN треугольника MNK через a и его полупериметр через p. Тогда $AK = p$ и $BK = p - a$. Значит, $AB = a$, т.е. $AB = MN$.

Задача 6. *В прямой угол с вершиной C вписаны две окружности, которые не пересекаются. К этим окружностям проведена общая касательная, которая пересекает угол в точках A и B (рис.7). Найдите площадь треугольника ABC, если радиусы окружностей равны R_1 и R_2.*

Решение. Отрезок CT_1 (T_1 – точка касания прямой CB и окружности радиуса R_2) равен R_2. Но окружность радиуса R_2 является вневписанной окружностью треугольника ABC. Значит, CT_1 – полупериметр треугольника ABC. Его площадь находим как

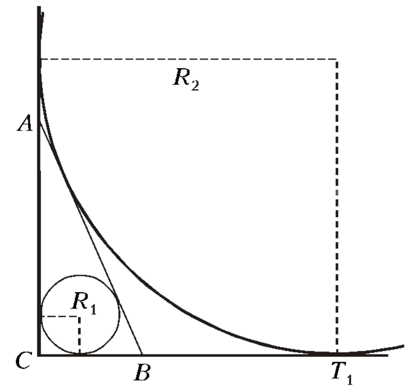


Рис. 7

произведение радиуса вписанного круга на полупериметр:

$$S = rp = R_1R_2.$$

Задача 7. *Докажите формулу Герона для площади треугольника:*

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Решение. Воспользуемся обозначениями рисунка 8. Треугольники CJ_aT_1

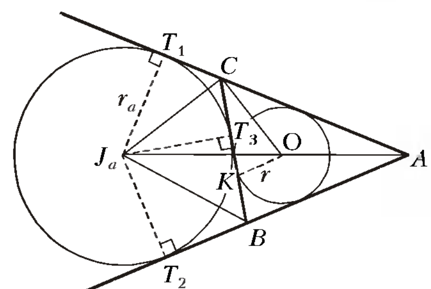


Рис. 8

и COK подобны. Значит, $CT_1/r_a = r/CK$. Но $CK = p - c$, а $CT_1 = p - AC = p - b$. Откуда $(p-b)/r_a = r/(p-c)$, или $rr_a = (p-c)(p-b)$. Но $r_a = S/(p-a)$ (теорема 3), а $r = S/p$, значит,

$$rr_a = \frac{S}{(p-a)}\frac{S}{p} = (p-c)(p-b).$$

Отсюда и следует формула Герона.

Задача 8. *Постройте треугольник, если дана сторона, противолежащий ей угол треугольника и сумма двух других сторон.*

Решение. Пусть дана сторона a, угол A и сумма сторон $b + c$. Тогда известна длина полупериметра искомого треугольника $p = (a+b+c)/2$. Значит, известны положения точек T_1 и T_2 на сторонах угла A. Восставив перпендикуляры в этих точках к сторонам угла A, на их пересечении получим центр вневписанной окружности, а значит, вневписанная окружность построена. Расстояние от точки T_1 до точки касания вписанной окружности равно a. Следовательно, мы можем найти точки касания вписанной окружности искомого треугольника со сторонами угла A и построить саму вписанную окружность. Общая внутренняя касательная к построенным окружностям отсекает на сторонах угла искомый треугольник.

Задача 9. *В равносторонний треугольник вписана окружность. Этой окружности и сторон треугольника касаются три малые окружности. Найдите сторону треугольника, если радиус малой окружности равен r.*

Решение. Обозначим через a длину стороны треугольника. Тогда радиус окружности, вписанной в данный треугольник ABC, равен $a\sqrt{3}/6$. Проведем общую касательную MN к большому и малому кругам. Очевидно, что

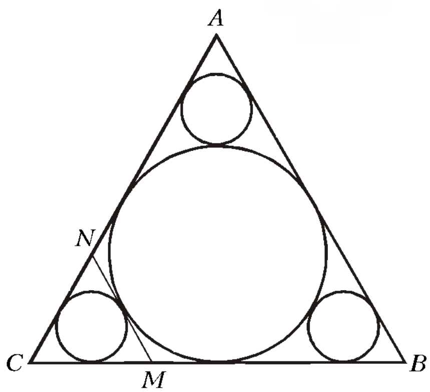


Рис. 9

$MN \parallel AB$ (рис.9). Тогда треугольники MNC и ABC подобны. А значит, отношение радиусов вписанных в них окружностей равно отношению их периметров, т. е.

$$\frac{r}{a\sqrt{3}/6} = \frac{a}{3a},$$

откуда $a = 6\sqrt{3}\,r$.

Задача 10. *Докажите, что прямая, проходящая через середину стороны BC и точку пересечения биссектрис треугольника ABC, отсекает на высоте, проведенной к стороне BC, отрезок, равный радиусу вписанной в этот треугольник окружности.*

Решение. Обозначим середину стороны BC через M_1, центр вписанной окружности через O, а точку пересечения прямой M_1O с высотой AH_1 через E (рис.10). Через точку K_1 касания вписанной окружности со стороной BC проведем диаметр вписанной окружности K_1R. По теореме 4 точки A,

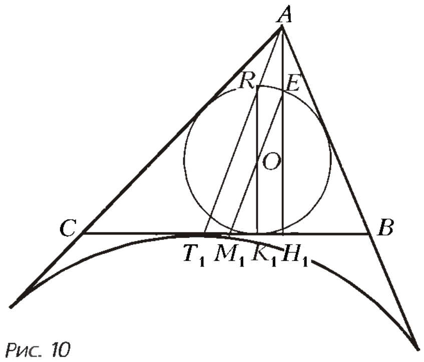


Рис. 10

R и T_1 лежат на одной прямой. Отрезок CT_1 равен $p - b$ (см. решение задачи 5). Но и отрезок BK_1 также равен $p - b$. Значит, точка M_1 является серединой отрезка T_1K_1. Следовательно, M_1O – средняя линия треугольника T_1RK_1. Значит, $M_1O \parallel RT_1$. А поскольку $AH_1 \parallel RK_1$, то $RAEO$ – параллелограмм. Т.е. отрезок AE равен радиусу вписанной окружности, что и требовалось доказать.

Задача 11. *В треугольнике ABC проведены биссектрисы AL_1 и BL_2. Найдите угол A, если известно, что L_1L_2 – биссектриса угла AL_1C.*

Решение. Точка L_2 по условию лежит на пересечении биссектрисы внутреннего угла ABC и биссектрисы внешнего угла AL_1C треугольника ABL_1. Значит, точка L_2 является центром вневписанной окружности треугольника ABL_1. Следовательно, AL_2 – биссектриса внешнего угла A тре-

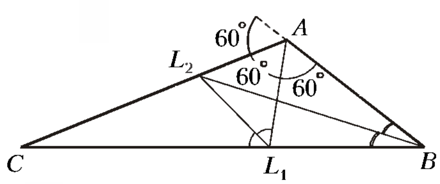


Рис. 11

угольника ABL_1 (рис.11). Несложно заметить, что в этом случае угол A равен 120°.

Задача 12. *Докажите формулу для площади треугольника:*

$$S = Rp_H,$$

где R – радиус описанной окружности, а p_H – полупериметр треугольника, образованного основаниями высот данного треугольника.

Решение. Известно, что углы $\Delta H_1H_2H_3$ равны $180° - 2A$, $180° - 2B$, $180° - 2C$ и что высоты треугольника ABC являются биссектрисами углов $\Delta H_1H_2H_3$ (рис. 12). Угол TH_2H_3 – смежный с углом $H_3H_2H_1$, H_2B – биссектриса угла $H_3H_2H_1$, а угол BH_2A – прямой; следовательно, H_2A

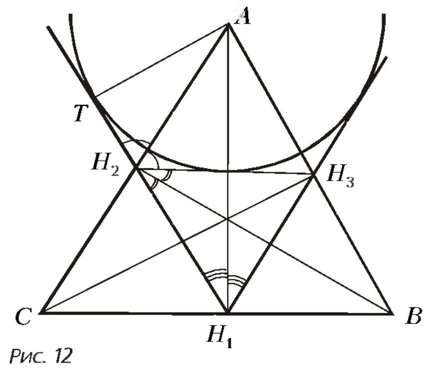


Рис. 12

– биссектриса угла TH_2H_3. А значит, точка A – центр вневписанной окружности треугольника $H_1H_2H_3$. Следовательно, отрезок H_1T равен p_H. Из прямоугольного треугольника AH_1T имеем

$$p_H = h_a \cos\angle AH_1T = h_a\cos\left(90° - A\right) = h_a \sin A = \frac{\frac{1}{2}ah_a \cdot 2\sin A}{a} = \frac{S}{R},$$

где h_a – высота к стороне BC, a – длина стороны BC, A – величина угла BAC. Отсюда и следует доказываемая формула $S = Rp_H$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В равнобедренный треугольник с основанием 12 вписана окружность, и к ней проведены три касательные так, что они отсекают от данного треугольника три малых треугольника. Сумма периметров малых треугольников равна 48. Найдите боковую сторону данного треугольника.

2. В треугольник со сторонами 6, 10 и 12 вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две большие стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.

3. В треугольнике ABC точка O – центр вписанной окружности, E – середина высоты, проведенной из вершины A. Прямая OE пересекает сторону BC в точке X. Докажите, что точка X делит периметр треугольника ABC пополам.

4. Постройте треугольник по периметру и двум углам.

5. В треугольнике ABC точка N лежит на стороне AB, точка M – на стороне BC, O – точка пересечения отрезков CN и AM. Известно, что $AM + AN = CM + CN$. Докажите, что $AO + AB = CO + CB$.

6. Постройте треугольник, если известны положения точки пересечения медиан, точки пересечения биссектрис и одной из вершин.

Нагревать или сообщать количество теплоты?

Н.КОРЖОВ

Как соотносятся между собой понятия «нагревание тела» и «сообщение телу количества теплоты»?

Нагревание – это повышение температуры тела. Температура T есть параметр состояния системы, находящейся в термодинамическом равновесии, а внутренняя энергия U – функция состояния. Это означает, что в данном состоянии система обладает определенными температурой и внутренней энергией, которые не зависят от того, каким образом система приведена в это состояние. Это – экспериментальный факт.

Переход системы из одного состояния в другое происходит в результате теплообмена или совершения механической работы. Поэтому количество теплоты Q, как и работа A над системой (или работа A' системы над внешними телами), связано не с внутренней энергией системы, а с ее приращением. В соответствии с первым законом термодинамики,

$$\Delta U = Q + A \text{ или } Q = \Delta U + A'.$$

Таким образом, сообщение телу некоторого количества теплоты вовсе необязательно ведет к его нагреванию. Приведем примеры. Веществу, нагретому до температуры плавления, для плавления требуется определенное количество теплоты, хотя температура при плавлении будет оставаться неизменной. При изотермическом расширении температура газа остается одной и той же, хотя к газу подводится тепло. В первом случае тепло идет не на изменение средней кинетической энергии хаотического движения молекул вещества, мерой которого и является температура, а на изменение потенциальной энергии их взаимодействия. Во втором случае все тепло идет на совершение газом работы над внешними телами.

Далее, передача одного и того же количества теплоты двум системам, находящимся в совершенно одинаковых начальных состояниях, может привести к их различному нагреванию. Например, при сообщении идеальному газу в цилиндре под подвижным поршнем некоторого количества теплоты он нагреется меньше, чем тот же газ, но под неподвижным поршнем. Это происходит потому, что при изобарном нагревании передаваемое газу тепло идет не только на увеличение его внутренней энергии, но и на совершение им работы, в то время как при изохорном нагревании – только на увеличение его внутренней энергии.

Нагреть вещество, т.е. повысить его температуру, можно и не сообщая ему количества теплоты, а совершив над ним работу – например, потерев монету о сукно или быстро сжав газ насосом. Наконец, бывает и так, что телу сообщают тепло, а оно охлаждается. Соответствующий пример приведем попозже, а пока заметим, что возможность такого случая следует из первого закона термодинамики. Так, применительно к идеальному газу при $A' > Q$ из соотношения $Q = \Delta U + A'$ следует, что $\Delta U < 0$, т.е. $T_2 < T_1$ (для идеального газа U прямо пропорционально T).

А сейчас проанализируем следующую конкретную ситуацию. Пусть ν молей идеального одноатомного газа переводят из состояния *1* в состояние *2* так, как это показано на рисунке 1.

Сначала найдем уравнение процесса. Поскольку зависимость p от V линейная, можно записать

$$p = aV + b. \qquad (1)$$

Из уравнений

$$p_1 = aV_1 + b \text{ и } p_2 = aV_2 + b$$

найдем постоянные a и b:

$$a = \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1},\ b = \frac{p_1V_2 - p_2V_1}{V_2 - V_1}.$$

Очевидно, что $a < 0$, $b > 0$.

С помощью уравнения состояния идеального газа $pV = \nu RT$ выразим температуру газа T через его объем:

$$T(V) = \frac{aV^2 + bV}{\nu R}.$$

Максимальная температура в данном процессе будет достигнута при объеме

$$V' = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}\frac{p_1V_2 - p_2V_1}{p_1 - p_2}. \qquad (2)$$

Теперь найдем количество теплоты, переданное газу с начала процесса, как функцию от объема, используя первый закон термодинамики в форме $Q = \Delta U + A'$. Зафиксируем какой-то объем газа V. Работа расширения газа от объема V_1 до объема V равна площади соответствующей трапеции (заштрихованной на рисунке 1):

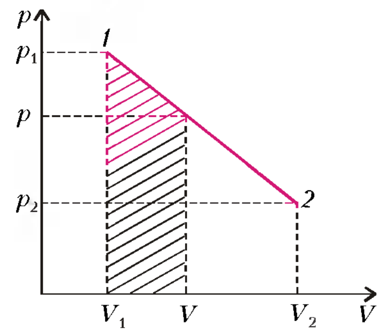


Рис. 1

$$A'(V) = \frac{p_1 + p}{2}(V - V_1),$$

или, учитывая уравнение процесса,

$$A'(V) = \frac{a}{2}V^2 + \frac{p_1 - aV_1 + b}{2}V - \frac{p_1 + b}{2}V_1.$$

Изменение внутренней энергии одноатомного идеального газа равно

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T - T_1) = \frac{3}{2}aV^2 + \frac{3}{2}bV - \frac{3}{2}p_1V_1.$$

Таким образом,

$$Q(V) = \Delta U + A'(V) = 2aV^2 + \frac{p_1 - aV_1 + 4b}{2}V - \frac{4p_1 + b}{2}V_1.$$

Так как $2a < 0$, функция $Q(V)$ достигает максимального значения при объеме

$$V^\& = -\frac{p_1 - aV_1 + 4b}{8a} = \frac{5}{8}\frac{p_1V_2 - p_2V_1}{p_1 - p_2}. \qquad (3)$$

Отсюда следует, что при $V_1 < V < V^\&$

(Продолжение см. на с. 34)

Есть такая функция!

Профессор логики упомянул во время лекции, что, насколько ему известно, ни в одном естественном языке два утверждения никогда не озночают отрицания. Из задних рядов раздалось соркастическое: "Ну да, конечно!".

Существует ли многочлен, все значения которого – положительные числа, причем среди этих значений есть сколь угодно малые числа? Да, существует! Правда, это многочлен не от одной, а от нескольких переменных:

$$f(x,y) = x^2 + (xy-1)^2$$

Почему? Во-первых, сумма квадратов всегда неотрицательна. Во-вторых, эта сумма не может равняться нулю, поскольку равенства $x = 0$ и $xy = 1$ несовместны. В-третьих, рассмотрев $x = 1/n$ и $y = n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, убеждаемся, что величина $x^2 + (xy-1)^2 = 1/n^2$ может быть сколь угодно малой.

В 1890 году Джузеппе Пеано (1858–1932) поразил мир кривой, которая целиком покрывает некоторый квадрат (т.е. проходит через все точки этого квадрата, причем через некоторые – по нескольку раз). Простой пример кривой Пеано построил в 1891 году Давид Гильберт (1862–1943). Первые пять шагов этой красивой конструкции показаны на рисунках. Как видите, на n-м шаге Гильберт разбивает отрезок $[0;1]$ на 4^n равных отрезочков, которые извилисто размещаются по одному в каждом из 4^n равных квадратиков. Чтобы определить образ любой данной точки t отрезка $[0;1]$, нужно для каждого натурального числа n разбить отрезок $[0;1]$ на отрезочки длиной $1/4^n$, отметить, какому из них принадлежит точка t (или каким двум – если точка t попала в точности на границу), и построить соответствующий квадрат Δ_n со стороной $1/2^n$. Образуется последовательность квадратов $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \ldots$ $\ldots \supset \Delta_n \supset \ldots$, общая точка которых – образ точки t.

Существует ли:

а) разрывная во всех точках функция, модуль которой – непрерывная функция;

б) функция, непрерывная лишь в точке $x = 0$ и разрывная во всех других точках;

в) функция, среди значений которой на любом (сколь угодно малом) интервале есть сколь угодно большие значения;

г) непостоянная периодическая функция, среди положительных периодов которой нет наименьшего;

д) функция, непрерывная в иррациональных и разрывная в рациональных точках;

е) не монотонное ни на каком интервале взаимно однозначное соответствие между двумя отрезками;

ж) определенная на $[0;1]$ функция $g(x)$, множеством значений которой является отрезок $[0;1]$ и множество значений которой не меняется при ограничении на любой интервал? (Поскольку последнее условие довольно трудно для восприятия, поясню: для любого числа $0 \le y \le 1$ множество решений уравнения $g(x) = y$ должно быть всюду плотно на отрезке $[0;1]$.)

Наверное, сейчас читателю стоит остановиться и самому придумать соответствующие примеры: ответ на все эти вопросы утвердительный. А если все примеры придуманы или прошло уже слишком много времени – читайте дальше.

Вот ответы на поставленные вопросы.

а) Годится функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ - рациональное,} \\ -1, & \text{если } x \text{ - иррациональное.} \end{cases}$$

б) Такова функция $xf(x)$, где $f(x)$ – функция из п.а).

в) Например, функция, которая равна 0 для любого иррационального x и равна n для любого рационального числа $x = m/n$, где m – целое, n – натуральное, НОД$(m, n) = 1$.

г) Годится функция $f(x)$ из п. а). Впрочем, в большинстве учебников математического анализа рассматривают не ее, а функцию Дирихле (1805–1859)

$$D(x) = \frac{1+f(x)}{2} = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ - рациональное,} \\ 0, & \text{если } x \text{ - иррациональное.} \end{cases}$$

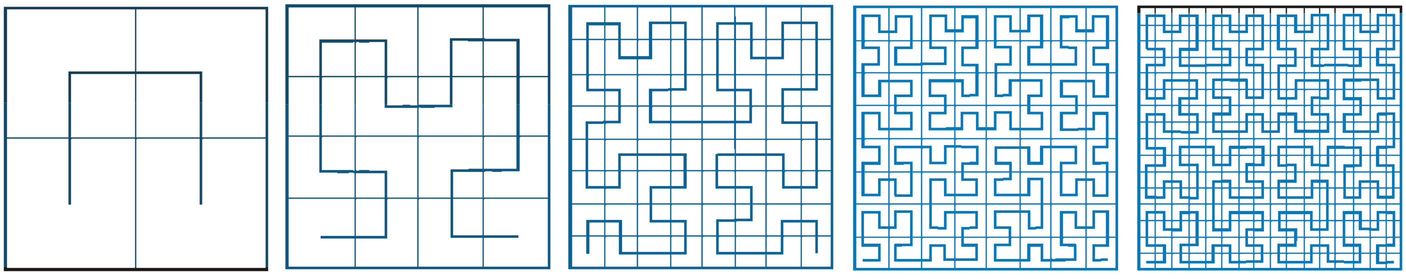
д) Например, функция Римана (1826–1866), которая равна 0 для любого иррационального x и равна $1/n$ для любого рационального числа $x = m/n$, где m – целое, n – натуральное, НОД$(m, n) = 1$. Можно доказать (хотя для школьника это доказательство довольно сложно и лучше его оставить до студенческих времен), что не существует функции, непрерывной во всех рациональных и разрывной во всех иррациональных точках.

е) Рассмотрите функцию из п. б) на отрезке $[-1; 1]$.

ж) Такую функцию впервые построил Анри Леон Лебег (1875–1941). Пусть $0 \le x \le 1$ и

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

– десятичное представление числа x.



Если x может быть представлено конечной десятичной дробью, $g(x) = 0$. Для остальных чисел значение $g(x)$ будет зависеть от того, является ли последовательность $a_1, a_3, a_5, \ldots$ периодической. А именно, $g(x) = 0$, если число $0, a_1a_3a_5\ldots$ иррационально, и $g(x) = 0, a_{2n}a_{2n+2}a_{2n+4}\ldots$, если последовательность $a_1, a_3, a_5, \ldots$ периодическая, причем периодическое повторение начинается с цифры a_{2n-1}.

Построенная функция действительно принимает на каждом интервале $I \subset [0; 1]$ любое значение $y = 0, b_1b_2b_3\ldots$ Чтобы доказать это, выберем цифры $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-2}$ так, чтобы числа $0, a_1a_2\ldots a_{2n-2}0$ и $0, a_1a_2\ldots a_{2n-2}1$ принадлежали интервалу I, причем цифра a_{2n-3} была отлична от 0 и 1. Далее, пусть $a_{2n-1} = a_{2n+1} = \ldots = a_{4n-5} = 0$ и $a_{4n-3} = 1$. Будем периодически повторять эти n цифр, располагая их на местах с нечетными номерами.

Итак, мы определили последовательность $a_1, a_3, a_5, \ldots$, период которой начинается именно с a_{2n-1}. Осталось заметить, что по определению

$$g(0, a_1a_2a_3\ldots a_{2n-1}b_2a_{2n+3}b_3a_{2n+5}\ldots) = 0, b_1b_2b_3\ldots = y.$$

Рассмотрим функцию

$$h(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Ее производная, равная

$$\begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

разрывна в точке $x = 0$.

Функция

$$k(x) = \begin{cases} x^4\left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

имеет абсолютный минимум в точке $x = 0$. А ее производная в любой окрестности нуля принимает как положительные, так и отрицательные значения. (Заметьте: функция k не монотонна ни в какой окрестности нуля!)

Функция, заданная формулой $x + 2x^2\sin(1/x)$ при $x \neq 0$ и равная 0 при $x = 0$, имеет в точке $x = 0$ производную 1, а при $x \neq 0$ производная равна $1 + 4x\sin\dfrac{1}{x} - 2\cos\dfrac{1}{x}$. Ничего особенного? Да нет же, это интересный пример: производная в точке 0 положительна, а функция не монотонна ни в какой окрестности нуля, поскольку производная в любой окрестности нуля принимает как положительные, так и отрицательные значения!

Функция, заданная формулой $x^2\sin(1/x^2)$ при $x \neq 0$ и равная 0 при $x = 0$, обладает тем интересным свойством, что ее производная, равная 0 при $x = 0$ и равная $2x\sin\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}$ при $x \neq 0$, неограничена ни на какой окрестности нуля.

Последний и самый интересный пример – всюду непрерывная, но нигде не дифференцируемая функция. Такую функцию построил Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815–1897):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b^n\cos(a^n\pi x),$$

где a – целое нечетное число, а число b таково, что $0 < b < 1$ и $ab > 1 + \dfrac{3}{2}\pi$. (В 1916 году Годфри Харолд Харди (1877–1947) доказал, что достаточно потребовать $0 < b < 1$ и $ab > 1$.)

В 1930 году Бартел Лендерт Ван-дер-Варден придумал более простой пример такой функции. Обозначим через $\langle x\rangle$ расстояние от числа x до ближайшего целого числа. Другими словами, при $-\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2}$ пусть $\langle x\rangle = |x|$, а дальше продолжим эту функцию периодически (с периодом 1).

Для любого целого неотрицательного числа n обозначим $f_n(x) = \langle 4^n x\rangle / 4^n$ и рассмотрим сумму

$$w(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Функция $w(x)$ непрерывна как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций.

Пусть a – произвольное вещественное число. Для любого натурального числа n выберем $h_n = 1/4^{n+1}$ или $h_n = -1/4^{n+1}$ так, что $|f_n(a + h_n) - f_n(a)| = |h_n|$. Тогда разность $f_m(a + h_n) - f_m(a)$ равна 0 при $m > n$ и равна $\pm h_n$ при $m \le n$. Следовательно, отношение

$$\frac{w(a + h_n) - w(a)}{h_n}$$

является целым числом, которое четно при нечетном n и нечетно при четном n. Значит, предел

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{w(a + h_n) - w(a)}{h_n}$$

не существует, т.е. функция w не дифференцируема.

Функция Ван-дер-Вардена обладает еще одним интересным свойством. Пусть $x = k/4^n$, где k – целое число. Обозначим $h = 1/4^{2n+1}$. Тогда

$$w(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_{n-1}(x)$$

и

$$\begin{aligned} w(x+h) - w(x) &= (f_0(x+h) - f_0(x)) + \\ &+ (f_1(x+h) - f_1(x)) + \ldots + (f_{n-1}(x+h) - f(x)) + \\ &+ f_n(x+h) + f_{n+1}(x+h) + f_{n+2}(x+h) + \ldots \\ &\ldots + f_{2n}(x+h) \ge -nh + (n+1)h > 0. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$w(x-h) - w(x) \ge -hn + (n+1)h > 0.$$

Итак, $w(x-h) > w(x) < w(x+h)$. Поскольку точки вида $x = k/4^n$ всюду плотны, то не существует интервала, на котором функция w монотонна.

Ф.Спиров

(Начало см. на с. 31)

газ получал тепло, а при $V^{\&} < V < V_2$ отдавал.

Сравнивая выражения (2) и (3), видим что $V' < V^{\&}$, откуда сразу можно сделать вывод: сообщение газу некоторого количества теплоты не означает, что газ будет обязательно нагреваться, т.е. что его температура будет повышаться. Так, при $V' < V < V^{\&}$ газу сообщают тепло, а температура его уменьшается.

Количество теплоты, полученное газом при увеличении его объема от начального $V_н$ до конечного $V_к$ можно найти по формулам

$$Q = Q(V_к) - Q(V_н) \text{ при } V_н < V_к \le V^{\&}$$

или

$$Q = Q(V^{\&}) - Q(V_н) \text{ при } V_н < V^{\&} \le V_к .$$

Соответственно, количество теплоты, отданное газом, будет равно

$$Q = Q(V^{\&}) - Q(V_к) \text{ при } V_н \le V^{\&} < V_к$$

или

$$Q = Q(V_н) - Q(V_к) \text{ при } V^{\&} \le V_н < V_к .$$

Рассмотрим теперь несколько конкретных задач, связанных с этой ситуацией.

Задача 1 (2.53 [1]). *На pV-диаграмме изображен процесс расширения газа, при котором он переходит из состояния 1 с давлением p и объемом V в состояние 2 с давлением p/2 и объемом 2V. Найдите количество теплоты Q, которое сообщили этому газу. Линия 1–2 – отрезок прямой.*

(Ответ: $Q = 3pV/4$.)

Сопоставляя данные задачи с анализом ситуации, проведенным выше, имеем: $p_1 = p$, $p_2 = p/2$, $V_1 = V$, $V_2 = 2V$. Тогда $a = -p/(2V)$, $b = 3p/2$, $V^{\&} = 15V/8$ и $Q(V^{\&}) = 49pV/64 > 3pV/4$.

Итак, правильный ответ: $Q = 49pV/64$, если газ считать одноатомным.

Задача 2 (2.127 [2], VII.4 [3]). *Один моль идеального газа переводят из состояния 1 в состояние 2 (рис.2). Определите, какое количество теплоты газ получает при нагревании и какое при охлаждении.*

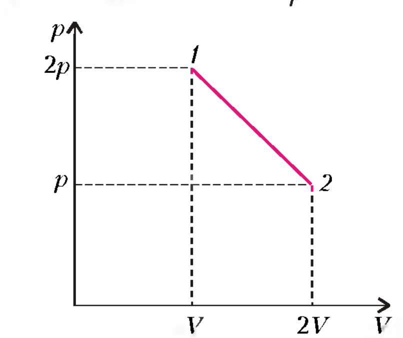


Рис. 2

(Ответ: $Q_1 = 5pV/4$, $Q_2 = pV/4$.)

В этой задаче $p_1 = 2p$, $p_2 = p$, $V_1 = V$, $V_2 = 2V$. Значит, $a = -p/V$, $b = 3p$. Так как нагревание – это повышение температуры газа, то $Q_1 = Q(V')$, где $V' = 3V/2$. После преобразований имеем $Q_1 = 5pV/4$.

Соответственно, $Q_2 = Q(V^{\&}) - Q(V')$, так как на участке $V' < V < V_2$ газ охлаждается, но тепло получает лишь на части этого участка $V' < V < V^{\&}$. Поскольку $V^{\&} = 15V/8$, то $Q(V^{\&}) = 49pV/32$. Тогда, $Q_2 = 49pV/32 - 5pV/4 = 9pV/32 > pV/4$.

Таким образом, правильный ответ к этой задаче: $Q_1 = 5pV/4$, $Q_2 = 9pV/32$. При расчетах газ принят за одноатомный.

Задача 3 (5.5.10 [4], 9.30 [5]). *Нижний конец вертикальной узкой трубки длиной 2L запаян, а верхний конец открыт в атмосферу (рис.3,а). В нижней половине трубки находится газ при температуре T_0, а верхняя ее половина заполнена ртутью. До какой минимальной температуры надо нагреть газ в трубке, чтобы он вытеснил всю ртуть? Внешнее давление, выраженное в миллиметрах ртутного столба, равно L.*

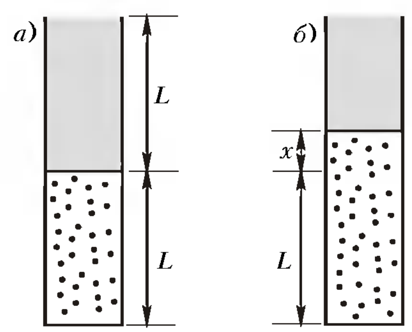


Рис. 3

(Ответ: $9T_0/8$.)

Казалось бы, какое отношение имеет эта задача к теме статьи? Оказывается, самое прямое. Дело в том, что это – реальное устройство, позволяющее провести рассмотренный в статье процесс.

Выделим некоторый объем газа высотой x (рис.3,б). Он находится под давлением столба ртути высотой $L - x$ и внешним давлением $p_0 = \rho g L$, где ρ – плотность ртути. В соответствии с законом Паскаля давление газа равно $p = \rho g(2L - x)$. Пусть площадь внутреннего поперечного сечения трубки S, тогда объем газа $V = S(L + x)$, откуда $x = V/S - L$. Учитывая, что $SL = V_0$ – начальный объем газа, запишем $x = VL/V_0 - L$. Тогда $p = (-p_0/V_0)V + 3p_0$, что совпадает с (1) при $a = -p_0/V_0 < 0$ и $b = 3p_0 > 0$. В итоге получаем, что искомая температура будет достигнута при $V' = 3V_0/2$ и равна $T = 9p_0V_0/(4\nu R)$. Выразив ν из уравнения $2p_0V_0 = \nu RT_0$ для исходного состояния газа, имеем $T = 9T_0/8$.

Казалось бы, это совпадает с приведенным ответом. Но из анализа ситуации мы узнали, что достижение определенной температуры системой в некоторых процессах вовсе не дает гарантии, что желаемый процесс произойдет, в нашем случае – что ртуть выльется. Главное условие вытеснения ртути из трубки – сообщение газу количества теплоты $Q = 49p_0V_0/32$ (анализ задачи 2, если газ считать одноатомным), а не нагревание его до температуры T. Если в момент достижения максимальной температуры прекратить подвод тепла, газ не сможет совершить работу по расширению только за счет убыли внутренней энергии (предоставляем возможность читателям убедиться в этом самостоятельно).

Вывод: данная задача поставлена некорректно. Необходимо требовать либо нахождения максимальной температуры, достигаемой газом в этом процессе (которую и давал ответ к этой задаче), либо нахождения количества теплоты, необходимого для вытеснения ртути из трубки, указав, что в трубке находится, например, одноатомный газ, а площадь внутреннего поперечного сечения трубки S. В этом случае, учтя выражения для p_0 и V_0, получим $Q = 49\rho g L^2 S/32$.

Задача 4 (6 [6]). *Один моль идеального одноатомного газа расширяется по закону, изображенному на графике зависимости давления от объема прямой линией (рис.4). Найдите максимальную температуру газа в этом процессе. На каком участке газ получает тепло, а на каком отдает?*

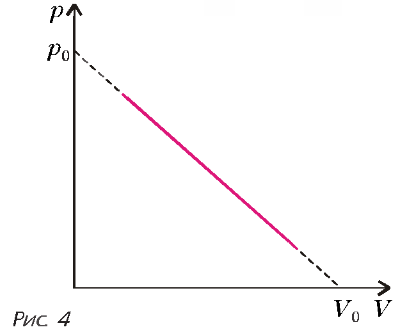


Рис. 4

(Ответ: максимальная температура $T_{\max} = p_0V_0/(4R)$ достигается при объеме $V^{\&} = 5V_0/8$; на участке $V < V^{\&}$ газ получает тепло, на участке $V > V^{\&}$ отдает.)

Эта задача сводится к проанализированной ситуации при $p_1 = p_0$, $p_2 = 0$, $V_1 = 0$, $V_2 = V_0$, $\nu = 1$ моль. Тогда $a = -p_0/V_0$, $b = p_0$, что для $V' = V_0/2$ дает $T_{\max} = T(V') = p_0V_0/(4R)$. По формуле (3) $V^{\&} = 5V_0/8$.

Уточняем ответ: максимальная температура $T_{\max} = p_0V_0/(4R)$ достигается при объеме $V' = V_0/2$. Вторая часть ответа правильная.

Задача 5 (2.99 [7]). *Количество теплоты, получаемое тепловой машиной от нагревателя, равно 1 кДж. При этом объем газа увеличивается от 1 л до 2 л, а давление линейно убывает в зависимости от объема от 1000 кПа до 400 кПа. Найдите изменение внутренней энергии газа.*

(Ответ: 300 Дж.)

Очевидно, что ответ к этой задаче принципиально неверен. Действительно, согласно уравнению состояния идеального газа $pV = \nu RT$, поскольку $p_1V_1 > p_2V_2$, то и $T_1 > T_2$, т.е. изменение внутренней энергии в этом процессе отрицательно. При заданных параметрах состояний газа количество теплоты, необходимое для проведения процесса, нельзя задавать каким угодно, так как оно должно быть строго определенным.

В частности, если считать газ одноатомным, то, в соответствии с анализом рассмотренной ситуации, $a = -6\cdot10^8$ Па/м^3, $b = 1{,}6\cdot10^6$ Па, $V^{\&} = 5/3$ л. Количество теплоты, необходимое для проведения такого процесса, равно $Q = Q(V^{\&}) = 533$ Дж. При этом газ совершит работу по расширению $A' = (p_1 + p_2)(V_2 - V_1)/2 = 700$ Дж. Изменение же внутренней энергии равно $\Delta U = 3\nu R(T_2 - T_1)/2 = 3(p_2V_2 - p_1V_1)/2 = -300$ Дж. Во время процесса расширения от объема $V^{\&}$ до объема V_2 газ отдаст 533 Дж – (700 – 300) Дж = 133 Дж тепла холодильнику.

Задача 6 (для самостоятельного решения). *Найдите КПД цикла, проведенного с одним молем одноатомного идеального газа. Диаграмма цикла в координатах p, V представлена на рисунке 5.*

(Ответ: 16/97.)

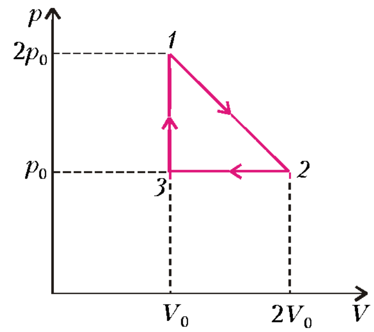


Рис. 5

Итак, никакому состоянию системы нельзя поставить в соответствие ни работу, ни количество теплоты. Они являются функциями процесса, а не состояния. В этом их принципиальное отличие от внутренней энергии. Работа и количество теплоты – это не формы энергии, а только количественные меры способов ее изменения и передачи от одного тела к другому (работа – макроскопический способ, теплопередача – микроскопический). В отличие от внутренней энергии – однозначной функции параметров состояния, количество теплоты не может быть представлено в виде разности значений какой-либо функции параметров состояния, если неизвестно уравнение процесса. Передаваемое системе количество теплоты, как и работа, зависят от того, каким способом система переходит из начального состояния в конечное.

Почему же все-таки передача телу тепла часто ассоциируется с его нагреванием? Первая причина – бытовая: каждый день мы передаем различным телам с помощью различных приборов определенные количества теплоты и замечаем при этом повышение их температуры. Вторая причина – более глубокая, физическая: недостаточные знания о теплоемкости, которая характеризует систему, получающую или отдающую энергию в виде тепла.

Теплоемкость C системы (тела) – это отношение переданного системе на участке процесса количества теплоты ΔQ к происшедшему на этом участке изменению температуры системы ΔT:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

А поскольку количество теплоты, передаваемое системе при изменении ее температуры на ΔT, будет неодинаковым для различных процессов, проводимых с этой системой, то разной будет и теплоемкость. Таким образом, теплоемкость является характеристикой не самой системы или вещества, а конкретного процесса, проводимого с этой системой или веществом. В соответствии с первым законом термодинамики,

$$C = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{\Delta A'}{\Delta T},$$

где ΔU – изменение внутренней энергии системы и $\Delta A'$ – работа системы при изменении температуры на ΔT.

Для твердых и жидких веществ при изменении температуры объем изменяется очень мало, поэтому $\Delta A' = 0$, и $C = \Delta U/\Delta T$. Так как U – функция параметров состояния и ΔU не зависит от того, каким образом система переведена из одного состояния в другое, то для жидкостей и твердых тел в некоторых интервалах температур C является практически постоянной величиной. Для удобства вводят удельную теплоемкость вещества: $c = C/m$. Вот эта величина в формуле $Q = cm\Delta T$ (которую многие считают определением количества теплоты) и дает основание ошибочно думать, что для всех веществ температура возрастает при сообщении им некоторого количества теплоты, ибо из этой формулы следует прямая пропорциональность между ΔT и Q.

Однако для газов ситуация другая. В общем случае газы могут сильно изменять свой объем. Введем молярную теплоемкость газа $C_м = \Delta Q/(\nu\Delta T)$. Так как $\Delta A' = p\Delta V$ (при малом ΔV), то

$$C_м = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\Delta U}{\Delta T} + p\frac{\Delta V}{\Delta T}\right).$$

Чтобы теплоемкость была определена однозначно, надо указать уравнение процесса.

Известны процессы, называемые политропическими, в которых теплоемкость газа является величиной постоянной на всем протяжении процесса. Далее для простоты будем рассматривать идеальный одноатомный газ. С ним возможны такие политропические процессы:

изохорный процесс – так как $\Delta V = 0$, то $C_м = C_V = \Delta U/(\nu\Delta T) = 3R/2$;

изобарный процесс – так как $\Delta A' = p\Delta V = \nu R\Delta T$, то $C_м = C_p = 3R/2 + R = 5R/2$ (очевидно, что $C_p = C_V + R$ для любого идеального газа, а не только одноатомного);

изотермический процесс – так как $\Delta T = 0$, то $C_м = \pm\infty$ (плюс относится к изотермическому расширению, минус – к изотермическому сжатию);

адиабатный процесс – так как $\Delta Q = 0$, то $C_м = 0$.

А сейчас покажем, что теплоемкость может принимать и промежуточные между указанными выше значения. Для этого найдем зависимость молярной теплоемкости от объема в рассмотренной в начале статьи ситуации, счито

$$Q(V) = -\frac{2p_0}{V_0}V^2 + \frac{15}{2}p_0V - \frac{11}{2}p_0V_0,$$

$$T(V) = \frac{p_0}{\nu V_0 R}\left(3V_0V - V^2\right).$$

По определению

$$C_{\text{м}} = \frac{\Delta Q}{\nu \Delta T} = \frac{1}{\nu}\frac{\Delta Q/\Delta V}{\Delta T/\Delta V}.$$

Найдем по отдельности $\Delta Q/\Delta V$ и $\Delta T/\Delta V$ при малых ΔV:

$$\Delta Q = Q(V + \Delta V) - Q(V) =$$

$$= -\frac{2p_0}{V_0}\left(2V\Delta V + (\Delta V)^2\right) + \frac{15}{2}p_0\Delta V,$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta V} \approx \frac{p_0}{2V_0}\left(-8V + 15V_0\right),$$

$$\Delta T = T(V + \Delta V) - T(V) =$$

$$= \frac{p_0}{\nu V_0 R}\left(3V_0\Delta V - 2V\Delta V - (\Delta V)^2\right),$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta V} \approx \frac{p_0}{\nu V_0 R}\left(3V_0 - 2V\right).$$

Тогда

$$C_{\text{м}}(V) = 2R + \frac{3}{2}R\frac{1}{3 - 2V/V_0}.$$

Анализ этой формулы показывает, что при малом изменении объема около значения $V' = 3V_0/2$ молярная теплоемкость $C_{\text{м}}(V') = \infty$, т.е. процесс близок к изотермическому; при значении объема, близком к $V^{\&} = 15V_0/8$, $C_{\text{м}}(V^{\&}) = 0$, т.е. процесс близок к адиабатному.

Итак, слова, вынесенные в заголовок статьи, никоим образом не являются синонимами. Показать, почему возникает их отождествление и к чему оно может привести, и было целью этой статьи.

Литература

1. Меледин Г.В. *Физика в задачах.* (М.: Наука, 1990.)

2. *Материалы вступительных экзаменов по физике.* (Приложение к журналу «Квант» №1/99.)

3. Кашина С.И., Сезонов Ю.И. *Сборник задач по физике.* (М.: Высшая школа, 1983.)

4. *Задачи по физике.* Под редакцией О.Я.Савченко. (М.: Наука, 1988.)

5. Балаш В.А. *Задачи по физике и методы их решения.* (М.: Просвещение, 1983.)

6. *Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон».* (Журнал «Квант», 1992, №7.)

7. *Материалы вступительных экзаменов (задачи по математике и физике).* (Приложение к журналу «Квант» №1/93.)

Заключительный этап конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8»

(Начало см. на с.25)

13. В состоящем из n элементов множестве M выбрано несколько подмножеств. Известно, что любое невыбранное подмножество множества M можно представить в виде пересечения некоторых выбранных подмножеств. Какое наименьшее число подмножеств могло быть выбрано? (Не забудьте, что множество M является подмножеством самого себя.)

А.Скопенков

14. Найдите три таких последовательных целых числа $a < b < c$, чтобы количества корней уравнений $ax^2 + bx + c = 0$, $bx^2 + cx + a = 0$ и $cx^2 + ax + b = 0$ были разными.

А.Шаповалов

15. Заведенный механический будильник звенит, когда часовая стрелка совпадет со стрелкой звонка будильника. Петя завел будильник на некоторое время с целым числом минут. Проснувшись раньше звонка, Петя обнаружил, что часовая стрелка направлена по биссектрисе угла между минутной и стрелкой звонка. Через три минуты, когда стрелка звонка оказалась биссектрисой угла между часовой и минутной стрелками, Петя встал, не дождавшись звонка. На какое время был заведен будильник?

А.Шаповалов

16. Окрасили бесконечный лист клетчатой бумаги, кроме квадрата 7×7. Вася в этом квадрате покрасил клетку, у которой ровно одна соседняя (по стороне) клетка окрашена, затем еще одну клетку, у которой теперь ровно одна соседняя клетка окрашена, и так далее. Какое наибольшее количество клеток таким образом может покрасить Вася?

Д.Калинин

17. Есть 101 банка консервов массами 1001 г, 1002 г.,… …, 1101 г. Этикетки потерялись, но завхоз помнит, какая банка сколько весит. Он хочет убедить в этом ревизора за наименьшее число взвешиваний. Есть двое чашечных весов: одни точные, другие грубые. За одно взвешивание можно сравнить две банки. Точные весы всегда показывают, какая банка тяжелее, а грубые – только если разница больше 1 г (а иначе показывают равновесие). Завхоз может использовать только одни весы. Какие ему следует выбрать?

А.Шаповалов

18. Существуют ли два таких различных натуральных числа a и b, что $a^{20} + b^{20}$ делится на каждое из чисел $a + b$, $a^2 + b^2$, $a^3 + b^3$, …, $a^{19} + b^{19}$?

Е.Черепанов

19. Есть несколько кусков сыра разного веса и разной цены за килограмм. Докажите, что можно разрезать не более двух кусков так, что после этого можно будет разложить все куски на две кучки одинакового веса и одинаковой стоимости.

А.Шаповалов

20. В ряд записаны 2000 различных натуральных чисел. Известно, что для любого натурального $k \le 2000$ сумма любых k чисел, записанных подряд, делится на k. Найдите наименьшее возможное значение суммы всех 2000 чисел.

Н.Акулич

21. Александр Васильевич утверждает, что любые шесть последовательных целых чисел можно так расставить вместо вопросительных знаков, чтобы система уравнений

$$\begin{cases} ?\,x + ?\,y = ?, \\ ?\,x + ?\,y = ? \end{cases}$$

имела решение в целых числах. Прав ли он?

А.Шаповалов

22. В Цветочном Городе живут 2000 коротышек. Каждый коротышка каждый день дарит подарок каждому своему другу. Во избежание разорения дареное разрешается дарить дальше, но только не тому, кто тебе этот подарок подарил. Знайка подсчитал, что никакой из подарков, который подарили любому коротышке в пятницу, не может вернуться к этому коротышке раньше чем в следующую пятницу. Докажите, что у какого-то коротышки не более 12 друзей.

Е.Черепанов

Публикацию подготовили Н.Акулич, Т.Бахтина

Материалы вступительных экзаменов 2000 года

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультет прикладной математики)

1. В сосуд емкостью 6 л налито 4 л 70%-го раствора серной кислоты; во второй сосуд той же емкости налито 3 л 90%-го раствора серной кислоты. Сколько литров раствора нужно перелить из второго сосуда в первый, чтобы в нем получился r%-й раствор серной кислоты? Найдите все r, при которых задача имеет решение.

2. При всех значениях параметра a определите количество решений уравнения

$$\left|x^2-2x-3\right|=a.$$

3. Решите уравнение

$$\log_{\operatorname{ctg}x}(3+2\cos 2x+2\cos 4x)=0.$$

4. Решите неравенство

$$\log_{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\pi-0,1}}\left(|x|-x^2+7\right)\le 0.$$

5. Из точки сферы радиуса R проведены три хорды одинаковой длины. Углы между всеми хордами равны α. Найдите длину хорд.

Вариант 2

(факультет информационной безопасности)

1. Автомобиль едет из пункта A в пункт B. От пункта A до пункта C, расположенного между A и B, он едет со скоростью 48 км/ч. В пункте C он уменьшает свою скорость на a км/ч и с этой скоростью едет 1/3 пути от C до B. Оставшуюся часть пути от C до B он едет со скоростью, которая на $2a$ км/ч превышает первоначальную скорость автомобиля. При каком значении a автомобиль быстрее всего проделает путь от C до B?

2. Решите уравнение

$$|xy-y-x-c|+$$
$$+\left|x^2y^2+x^2y+xy^2+xy-72\right|=0,$$

где

$$c=\left(\sqrt{57}+3\sqrt{6}+\sqrt{38}+6\right)\times$$
$$\times\left(\sqrt{57}-3\sqrt{6}-\sqrt{38}+6\right).$$

3. Решите уравнение

$$\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=\frac{1}{16}.$$

4. Решите уравнение

$$3^{|x|}=5^{x^2+3x+1}.$$

5. В трапеции $ABCD$ ($BC\|AD$) точка M делит диагональ AC пополам, а точка K делит сторону CD в отношении 1 : 3 ($3CK = KD$). Найдите отношение площади треугольника MKD к площади трапеции $ABCD$, если $AD = 4BC$.

Вариант 3

(факультет специальной техники)

1. Найдите натуральное число n, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\ldots+\frac{1}{n}+$$
$$+\left(4+5{,}5+7+\ldots+\frac{8+3n}{2}\right)=62.$$

2. Решите уравнение

$$\left|2+\frac{x}{9}\right|^{\log_3\left|\frac{18+x}{9}\right|}=61+c,$$

где

$$c=\left(26{,}7-13\frac{1}{5}\right):1{,}8+$$
$$+\ 0{,}125\cdot\left(1{,}88+2\frac{3}{25}\right)+22\cdot\frac{3}{5{,}5}.$$

3. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\sin^2 x-$$
$$-\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=0.$$

4. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-32x+112}>x^2-2x-8.$$

5. Боковые ребра треугольной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 30°. Основание пирамиды – треугольник со сторонами 2, 3, $\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды.

ФИЗИКА

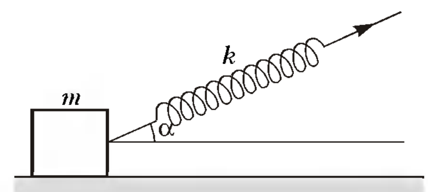
Письменный экзамен

Вариант 1

(факультет специальной техники)

1. Тело, брошенное вертикально вверх из точки, расположенной на высоте H над поверхностью земли, упало на землю через промежуток времени t. Найдите начальную скорость тела v_0.

2. Брусок массой m покоится на горизонтальной плоскости (см. рисунок). К нему прикреплена недеформи-



рованная пружина жесткостью k. Какую работу A нужно совершить, чтобы сдвинуть с места брусок, растягивая пружину в направлении, составляющем угол α с горизонтом? Коэффициент трения между бруском и плоскостью μ.

3. От источника с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r протянута к потребителю двухпроводная линия электропередачи длиной l. Каково сопротивление ρ участка провода линии электропередачи единичной длины, если мощность потребителя P и он рассчитан на напряжение U? Сечение провода линии электропередачи одинаково по всей его длине.

4. В цилиндре под поршнем находится воздух с относительной влажностью φ_1 = 80% при температуре T_1 = = 300 К. Объем воздуха V_1 = = $1{,}5\cdot10^{-3}$ м^3. Какой станет влажность φ_2, если объем воздуха уменьшить до $V_2 = 0{,}37\cdot10^{-3}$ м^3, а температуру повысить до T_2 = 373 К? Давление насыщенного водяного пара равно p_1 = = 3500 Па при температуре T_1 и p_2 = = 100000 Па при температуре T_2.

5. Светящаяся точка лежит на главной оптической оси рассеивающей линзы на расстоянии d = 12 см от нее. Фокусное расстояние линзы $|F|$ = 8 см.

Определите расстояние f от изображения точки до линзы.

Вариант 2

(факультет информационной безопасности)

1. Пуля, летящая со скоростью v_0, ударяет в массивную неподвижную стену и проникает в нее на глубину s. С каким ускорением a двигалась пуля внутри стены? Движение пули в стене считать прямолинейным и равнопеременным.

2. Санки массой m съезжают без начальной скорости с горки высотой H по кратчайшему пути и приобретают у подножия горки скорость v. Какую минимальную работу A необходимо совершить, чтобы втащить санки на горку от ее подножия, прикладывая силу вдоль плоской поверхности горки?

3. ЭДС аккумулятора $\mathcal{E}$, внутреннее сопротивление r. Определите разность потенциалов U на зажимах аккумулятора, если внешняя цепь потребляет мощность P.

4. В запаянной трубке объемом $V = 0{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3 находится водяной пар при давлении $p_1 = 8 \cdot 10^3$ Па и температуре $T_1 = 423$ К. Какая масса m воды сконденсируется в трубке при ее охлаждении до температуры $T_2 = 295$ К? Давление насыщенного водяного пара при температуре T_2 равно $p_2 = 2{,}5 \cdot 10^3$ Па. Объемом жидкости по сравнению с объемом трубки можно пренебречь. Молярная масса воды $M = 0{,}018$ кг/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

5. На рассеивающую линзу падает сходящийся пучок лучей. После прохождения через линзу лучи пересекаются в точке на главной оптической оси, отстоящей от линзы на L. Если линзу убрать, точка пересечения лучей переместится на l по направлению к месту, где располагалась линза. Каково фокусное расстояние F линзы?

Вариант 3

(факультет прикладной математики)

1. Пуля, летящая со скоростью v_0, ударяет в массивную неподвижную стену и проникает в нее на глубину s. Сколько времени t двигалась пуля внутри стены? Движение пули в стене считать прямолинейным и равнопеременным.

2. На доске, наклоненной к горизонту под углом α, покоится ящик массой m. Чтобы передвинуть ящик вниз на расстояние L, прикладывая силу вдоль наклонной плоскости, надо совершить минимальную работу A. Какую минимальную работу A' потребуется совершить, прикладывая силу вдоль наклонной плоскости, чтобы вернуть по доске этот ящик на прежнее место?

3. При подключении лампочки к аккумулятору с ЭДС $\mathcal{E}$ напряжение на лампочке равно U, а сила тока составляет I. Чему равно внутреннее сопротивление r аккумулятора?

4. Пространство в цилиндре под поршнем объемом $V_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ м^3 занимает насыщенный водяной пар при температуре $T = 373$ К. Найдите массу m воды, образовавшейся в результате изотермического уменьшения объема пара до $V = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ м^3. Давление насыщенного водяного пара при температуре T равно $p_н = 10^5$ Па. Молярная масса воды $M = 0{,}018$ кг/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

5. На пути сходящегося пучка света перпендикулярно его оси симметрии поставили тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием F, в результате чего лучи пересеклись на главной оптической оси на расстоянии L от линзы. Линзу убрали. На каком расстоянии s от места, где располагалась линза, пересекутся лучи?

Публикацию подготовили
А.Леденев, В.Кириллов, А.Пичкур

Московский государственный технический университет им.Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Слесарь, работая вместе с учеником, собирался выполнить некоторый заказ за 30 дней. После шести дней совместной работы ученик уволился, и слесарь, работая еще 40 дней, закончил выполнение заказа. За сколько дней слесарь, работая один, может выполнить этот заказ?

2. Решите уравнение

$$2\cos^2 x + 3\sqrt{3}\sin|x| = 5.$$

3. Решите уравнение

$$\log_4(20x - 34) = 2 + \log_2(5 - x).$$

4. Решите неравенство

$$(x-1)\sqrt{3 + 2x - x^2} < 0.$$

5. Стороны OA и OB треугольника OAB лежат на графике функции $y = |x| - x$, а на стороне AB лежит точка $M(0; 1)$. Каким должен быть угловой коэффициент в уравнении прямой AB, чтобы площадь треугольника OAB была наименьшей? Найдите эту площадь.

6. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_2(x+y) = 1 + \log_2 x, \\ (x-a)^2 + (y-x-a)^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это решение при каждом a.

7. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ, проведена плоскость так, чтобы площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью была наименьшей. Найдите стороны основания параллелепипеда, если известно, что диагонали сечения равны 6 и $2\sqrt{3}$, а угол между ними 30°.

Вариант 2

1. За три часа один лыжник прошел на 2,5 км больше другого, так как один километр он проходил на одну минуту быстрее. За сколько минут каждый лыжник проходил один километр?

2. Решите уравнение

$$1 + \cos 2x = \sqrt{2}\sin x.$$

3. Решите уравнение

$$3 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 2^{3-\sqrt{x}} = 25.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{\lg\left(4x^2 - 12x + 9\right)}{\lg x} < 2.$$

5. Каким должен быть угловой коэффициент прямой, проходящей через начало координат, чтобы расстояние между ее точками пересечения с графиком функции

$$f(x) = 0{,}25x^2 + 2x - 1$$

было наименьшим? Найдите это расстояние.

6. Определите все значения a, при которых уравнение

$$5(x-1)^2 = a(5 - |x| - x)$$

имеет два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a.

7. В сферу с площадью S вписан прямоугольный параллелепипед. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через его диагональ, если эта плоскость образует угол 30° с одной диагональю основания, параллельна другой диагонали основания и наклонена к плоскости основания под углом 45°.

Публикацию подготовил Л.Паршев

Московский государственный институт электронной техники (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(технические факультеты)

1. Вычислите
$$\mathrm{tg}71^\circ \sin 38^\circ + \sin 308^\circ.$$

2. Решите уравнение
$$\mathrm{tg}\, x = 2\sqrt{3}\cos x.$$

3. Решите уравнение
$$\log_{\frac{x+11}{x-3}}(x+3) = 1.$$

4. Решите неравенство
$$\left(11-\sqrt{7}\right)^x \ge 70^{x/2}.$$

5. Найдите сумму 5 положительных чисел, расположенных между $\frac{64}{125}$ и 125, из которых вместе с числами $\frac{64}{125}$ и 125 можно составить геометрическую прогрессию.

6. Пароход вышел из пункта A в пункт B, расположенный ниже по течению реки, и, дойдя до пункта B, сразу же повернул обратно и вернулся в пункт A, затратив на весь путь 16 часов. За какое время сплавляются плоты от A до B, если известно, что в стоячей воде расстояние от A до B пароход преодолевает за 6 часов?

7. Сторона квадрата $ABCD$ равна a. Точки A и D являются центрами окружностей Γ и Δ радиуса a. Найдите радиус окружности, расположенной внутри квадрата, касающейся стороны CD, окружности Γ внешним образом, а окружности Δ внутренним образом.

8. Изобразите множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству
$$\left|2^x - y\right| < 2^{x+2}.$$

9. Решите уравнение
$$4{,}25 - 9\cos^2 \pi x - 5\sin \pi x = \sqrt{5+24x-36x^2}.$$

10. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с ребром, равным 1. Точка M – середина ребра $B'C'$, точка N лежит на продолжении ребра AA' за точкой A, причем $AN = \frac{1}{3}$. Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точки M, N и параллельной прямой BD.

11. Найдите все такие числа a, что для всех чисел b выполнено неравенство
$$3b^4 + ab^3 \ne -1.$$

Вариант 2

(экономический факультет)

1. Найдите значение выражения
$$\log_{0,64}\log_{1024} 256.$$

2. Упростите
$$\frac{25y-9y^{-1}}{5y^{3/4}+3y^{-1/4}} - \frac{2y+5+2y^{-1}}{y^{3/4}+2y^{-1/4}}.$$

3. Вычислите
$$\sin^2\left(5\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + 0{,}5\cos(2\alpha - \pi)$$
при $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

4. Решите неравенство
$$\frac{2x+5}{x+2} \ge -2x.$$

5. Решите уравнение
$$2^{x+3} - 2^{x+2} - 2^{x+1} = 7^{x+1} - 7^x.$$

6. Решите уравнение
$$\mathrm{tg}\, 3x\, \mathrm{tg}\, 4x = 1.$$

7. Постройте график функции
$$y = \log_4\left(\left|5 - 2|x|\right| - 5\right).$$

8. В прямоугольнике $ABCD$ радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC и ACD, равны 2. Расстояние между точками касания этих окружностей с диагональю AC равно 7. Найдите стороны прямоугольника.

9. Найдите сумму наибольшего и наименьшего корней уравнения
$$4\cos^3 3x - \sin^2 2x = 3,$$
принадлежащих промежутку $[-\pi; \pi]$.

10. Шестизначное число A делится на 11, а число, полученное вычеркиванием его последней цифры, делится на 17. Найдите наименьшее число A, удовлетворяющее этим требованиям.

11. При каком значении параметра a система неравенств
$$\begin{cases} y \le \sqrt{x-a}, \\ x \le \sqrt{y-a} \end{cases}$$
имеет единственное решение?

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Чему равна скорость v движения автомобиля, если его колеса диаметром $D = 70$ см вращаются с частотой $n = 720$ об/мин?

2. Какой должна быть минимальная площадь S плоской льдины толщиной $H = 40$ см, чтобы удерживать на воде груз массой $m = 1$ т?

3. Деревянный шар массой $M = 1$ кг висит на шнуре так, что расстояние от точки подвеса шнура до центра шара равно $l = 1$ м. В шар попадает горизонтально летящая со скоростью $v_1 = 400$ м/с пуля массой $m = 10$ г, которая пробивает его точно по диаметру и вылетает из шара со скоростью $v_2 = 230$ м/с. Определите угол α максимального отклонения подвеса от вертикали. Сопротивлением воздуха и временем пробивания шара пулей пренебречь.

4. С одним молем идеального газа проводят циклический процесс, состоящий из двух изохор и двух изобар (рис.1). Определите работу A газа за

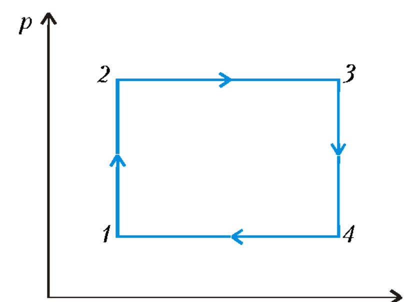


Рис. 1

цикл, если известно, что в состоянии *1* температура газа $T_1 = 300$ К, а в состояниях *2* и *4* $T_2 = T_4 = 320$ К.

5. Для приготовления ванны емкостью $V = 200$ л смешали холодную воду при $t_1 = 10$ °С с горячей при $t_2 = 60$ °С. Какие объемы V_1 и V_2 той и другой воды надо взять, чтобы установилась температура $t = 40$ °С?

6. Начальная температура вольфрамовой спирали лампочки накаливания равна $t_0 = 0$ °С. При пропускании электрического тока спираль раскалилась, и ее сопротивление увеличилось в $n = 12$ раз. До какой температуры t нагрелась спираль?

7. Батарея аккумуляторов имеет ЭДС $\mathcal{E} = 12$ В. При силе тока в цепи $I = 4$ А напряжение на зажимах батареи $U = 11$ В. Определите ток $I_к$ короткого замыкания этой батареи.

8. Электрическая цепь состоит из источника с ЭДС $\mathcal{E} = 12$ В, конденсатора емкостью $C = 5$ мкФ, катушки индуктивности и ключа (рис.2). Какова максимальная энергия W конденсатора при электрических колебаниях, возникающих в цепи при замыкании ключа? Внутренним сопротивлением

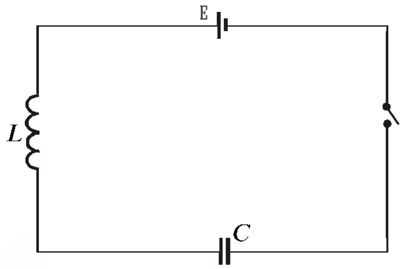


Рис. 2

источника, сопротивлением катушки и проводов пренебречь.

9. Световод, по которому распространяется параллельный пучок света, необходимо согнуть под углом 90° (рис.3). Определите минимальный внешний радиус R изгиба световода

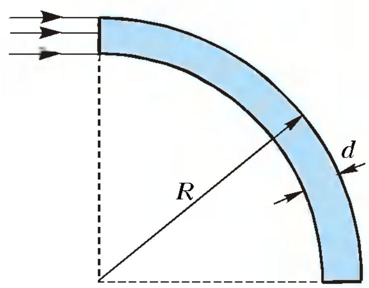


Рис. 3

толщиной d = 1 мм, чтобы свет, распространяющийся по световоду, не выходил через его боковую поверхность.

10. Определите задерживающее напряжение U для электронов, испускаемых с поверхности натрия под действием монохроматического излучения с длиной волны λ = 300 нм.

Вариант 2

1. Шарик, скатываясь с наклонного желоба с нулевой начальной скоростью, за первую секунду движения (t_1 = 1 с) прошел путь s_1 = 10 см. Какой путь s_2 он пройдет за время t_2 = 3 с?

2. С какой силой F давит на дно шахтной клети груз массой m = 100 кг, если клеть поднимется вверх с ускорением $a = 3\ \text{м/с}^2$?

3. Призма массой M = 90 кг с углом наклона α = 60° лежит на гладкой горизонтальной поверхности льда (рис.4). С какой скоростью V будет

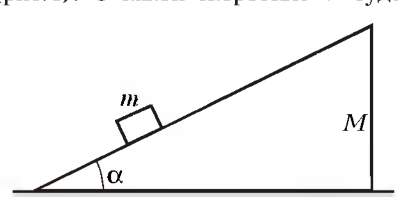


Рис. 4

двигаться призма, если по ней побежит вверх собака массой m = 10 кг со скоростью v = 2 м/с относительно призмы?

4. Сосуд содержит атмосферный воздух при температуре t_1 = 27 °С. Сосуд плотно закрывают и начинают медленно охлаждать. При t_2 = 15 °С на стенках сосуда появляется роса. Определите относительную влажность φ атмосферного воздуха.

5. Над молем идеального одноатомного газа совершают циклический процесс, изображенный на рисунке 5.

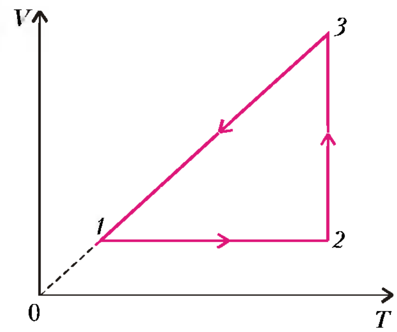


Рис. 5

Определите КПД η цикла, если известно, что в начальном состоянии *1* температура газа T_1 = 300 К, отношение объемов газа в состояниях *3* и *2* равно n = 2 и при изотермическом расширении газ совершает работу A = = 5 кДж.

6. Напряженность электрического поля внутри плоского конденсатора E = 1 кВ/м, его заряд $q = 2\cdot10^{-7}$ Кл. С какой силой F притягиваются друг к другу пластины конденсатора?

7. К источнику с ЭДС $\mathcal{E}$ = 4,5 В и внутренним сопротивлением r = 1 Ом подключили лампочку, сопротивление которой R = 29 Ом. Определите работу A источника за время t = 1 мин.

8. В схеме (рис.6) ЭДС источника $\mathcal{E}$ = 4,5 В, сопротивление резистора

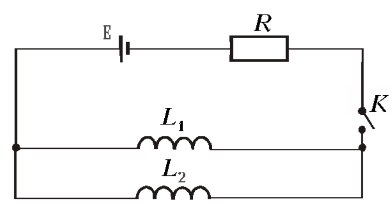


Рис. 6

R = 5 Ом, индуктивности катушек L_1 = 1 мГн и L_2 = 2 мГн. Внутреннее сопротивление источника и сопротивления катушек пренебрежимо малы. Найдите установившиеся токи I_1 и I_2 в катушках после замыкания ключа K.

9. На расстоянии d = 15 см перед собирающей линзой с фокусным расстоянием F = 10 см перпендикулярно оптической оси расположен стержень высотой H = 3 см. По другую сторону от линзы на расстоянии l = 20 см от нее также перпендикулярно оптической оси расположено плоское зеркало. На каком расстоянии l_1 от линзы будет находиться изображение стержня, создаваемое системой линза + зеркало, и какого размера H_1 оно будет?

10. Определите длину волны λ излучения, падающего на поверхность цинка, если величина задерживающего напряжения для фотоэлектронов равна U = 1,2 В.

Физические постоянные

Постоянная Планка

$h = 6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж·с

Скорость света в вакууме

$c = 3\cdot10^{8}$ м/с

Элементарный заряд

$e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл

Универсальная газовая постоянная

$R = 8{,}3$ Дж/(моль·К)

Плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3

Давление насыщенных паров

при температуре 27 °С

$p_н = 3{,}6$ кПа

при температуре 15 °С

$p_н = 1{,}7$ кПа

Температурный коэффициент сопротивления вольфрама $\alpha = 5\cdot10^{-3}$ К$^{-1}$

Показатель преломления n = 1,5

Работа выхода

для цинка $A = 6{,}7\cdot10^{-19}$ Дж

для натрия $A = 3{,}6\cdot10^{-19}$ Дж

Публикацию подготовили А.Абрамов, А.Берестов, И.Кожухов, В.Лосев, Д.Ничуговский, Т.Олейник, Г.Сафонова, Т.Соколова, В.Филиппов

Новосибирский государственный университет

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из задач трех типов.

Первые три задачи – расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной ситуации.

Четвертая задача – это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача – эта задача-демонстрация в аудитории. Здесь необходимо понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

Вариант 1

1. В узкой пробирке длиной l и сечением S находится тяжелый шарик так, что пробирка погружена наполовину в жидкость плотностью ρ и касается дна, как показано на рисунке 1. Найдите массу пустой пробирки.

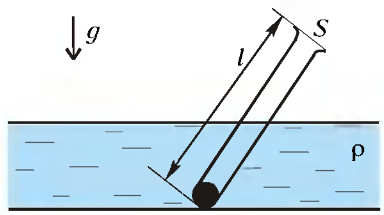


Рис. 1

2. Сжиженным газом, взятым из баллона, заполнили сосуд объемом V_0. Когда температура в баллоне и сосуде приняла исходное значение T, давление в сосуде стало p_0, а объем жидкости в баллоне уменьшился на V. Найдите давление насыщенного пара над жидкостью в баллоне, если ее плотность ρ, а молярная масса M.

3. Незаряженная неподвижная частица распалась в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ на две частицы с массами m_1 и m_2 и зарядами q и $-q$. Найдите время, через которое частицы встретятся, если пренебречь кулоновским взаимодействием осколков.

4. Водород находится в закрытом сосуде объемом 1 л при комнатной температуре и атмосферном давлении. Сосуд не разрушаясь выдерживает давление до 10 атм. Оцените, какую часть электронов надо удалить из газа в сосуде, чтобы сосуд лопнул.

5. Полиэтиленовая цилиндрическая упаковка для фотопленки выскальзывает при попытке разрезать ее ножницами, в то время как аналогичная полиэтиленовая пластинка той же толщины, что и стенки упаковки, легко разрезается. Объясните различие в наблюдаемом явлении.

Вариант 2

1. Два груза с массами m_1 и m_2 соединены пружинкой. Если груз *2* положить на опору, оставив груз *1* висеть над ним, то пружина сожмется до длины l_1 (рис.2). Если же придержать груз *1*, заставив груз *2* висеть на

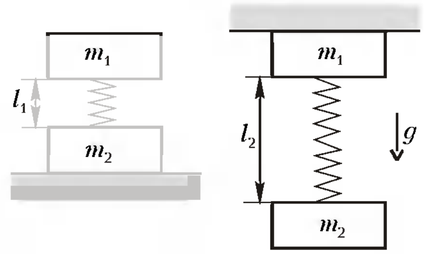


Рис. 2

пружине, то она растянется до длины l_2. Какова длина пружины в ненапряженном состоянии?

2. Три частицы с одинаковыми зарядами находились в вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника. При каком значении M массы частицы, находящиеся в вершине прямого угла, все три частицы при разлете без начальной скорости будут находиться в вершинах подобного треугольника? Массы двух остальных частиц m.

3. В схеме на рисунке 3 конденсатор емкостью C_1 заряжен до напряжения

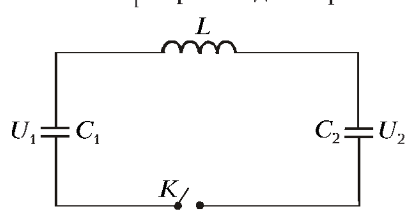


Рис. 3

U_1, а конденсатор емкостью C_2 заряжен до напряжения U_2. Какой максимальный ток будет в цепи после замыкания ключа K? Индуктивность катушки L.

4. Оцените силу притяжения двух полушарий Земли.

5. См. задачу 5 в предыдущем варианте.

Вариант 3

1. Плоскопараллельная прозрачная пластина толщиной d с показателем преломления $n > 1$ ограничена сверху зеркальной гранью, перпендикулярной ее сторонам. Луч света падает на пластину вблизи ребра, образованного стороной и верхней гранью, составляя угол α с нормалью к пластине. На каком расстоянии от верхней грани выйдет свет с другой стороны пластины?

2. Цилиндрический теплоизолированный сосуд высотой $2l$ и площадью основания S стоит вертикально в поле тяжести. Сосуд в начальный момент разделен пополам теплопроводящим поршнем неизвестной массы, а в каждой из половинок сосуда находится газ под давлением p_0. Затем поршень отпускают, и он после затухания колебаний опускается на расстояние h от первоначального положения. Найдите массу поршня. Толщиной и теплоемкостью поршня пренебречь. Внутренняя энергия газа с давлением p и объемом V равна $U = \alpha pV$, где α – константа.

3. Два тела, с массами m_1 и m_2 и зарядами q и $-q$ соответственно, связаны пружиной и находятся в состоянии покоя (пружина не растянута). Мгновенно включается однородное электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$, направленной вдоль пружины от первого тела ко второму. Найдите максимальные значения скоростей тел при последующем их движении. Электрическим взаимодействием тел между собой пренебречь.

4. Оцените относительное изменение периода обращения Земли вокруг оси $(\Delta T/T)$, при котором относительное уменьшение веса тела $(\Delta P/P)$ будет равно 10%.

5. Деревянный стержень подвешен за конец на нити над сосудом с водой. При подъеме сосуда стержень сначала погружается в воду вертикально, затем наклоняется, а при дальнейшем подъеме ложится на воду и далее остается горизонтальным. Объясните наблюдаемое явление.

Публикацию подготовили Г.Меледин, С.Лежнин, А.Мильштейн

Российский государственный педагогический университет им.А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Для каждого натурального числа $n > 1$ определена функция

$$f_n(x) = (0{,}25)^{\log_n\left(nx - x^2\right)}.$$

а) Найдите области определения этих функций.

б) Нарисуйте график функции

$$g(x) = \left(f_4(x)\right)^{-1}.$$

в) При каких a уравнение $\left|g(x)-1\right|=a$ имеет ровно два решения?

2. Решите неравенство

$$\left|2^x-3\right|<4^x-3.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\sin 6x}{\cos 2x}=\sqrt{2}-\operatorname{tg}2x.$$

4. Вокруг квадрата описана окружность, а около нее описан правильный шестиугольник. Определите площадь этого шестиугольника, если сторона квадрата равна a.

5. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Высота пирамиды равна H. Все боковые ребра составляют с плоскостью основания один и тот же угол β. Найдите объем пирамиды.

Вариант 2

1. Для каждого натурального числа n определена функция

$$f_n(x)=\sqrt{\frac{x-1}{(x+n)(x-2)}}.$$

а) Найдите области определения этих функций.

б) Нарисуйте график функции

$$g(x)=\frac{x-2}{|x-1|}f_2^2(x).$$

в) При каких a уравнение $a-g(x)=0$ не имеет решений?

2. Решите неравенство

$$(0{,}8)^{\log_3^2 x-2\log_3 x}\le(1{,}25)^{-6+\log_3 x}.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+1\right).$$

4. Докажите, что сумма расстояний от любой точки основания до боковых сторон равнобедренного треугольника есть величина постоянная для данного треугольника.

5. Через две образующие конуса, угол между которыми α, проведена плоскость, составляющая с основанием угол β. Найдите объем конуса, если его высота равна h.

Публикацию подготовили Г.Хамов, О.Корсакова

Российский государственный технологический университет им.К.Э.Циолковского

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{xy}=4,\\ x+y=17.\end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\sin^2 6x+\sin^2 4x=\frac{1}{2}+\sin^2 5x.$$

3. В бассейн подведены две трубы: подающая и отводящая, причем через первую бассейн наполняется на 1 час дольше, чем через вторую опорожняется. При заполненном на $3/4$ бассейне открыли обе трубы, и бассейн оказался пустым через 9 часов. За сколько часов, действуя отдельно, первая труба наполняет, а вторая опорожняет бассейн?

4. Решите неравенство

$$\log_{x-2}3+\log_{17-6x}3\le 0.$$

5. При каких значениях параметра k уравнение

$$2(x+k)^4+(2x+3k)^4-3=0$$

имеет два решения?

6. В треугольнике ABC точки E и K делят сторону AC на три равные части, причем E лежит между точками A и K. На стороне BC взята точка D так, что отрезок AD пересекает BE в точке N и отрезок BK в точке M, причем $AN:NM=11:3$. Найдите отношение $BD:DC$.

Вариант 2

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=1,\\ x+y=41.\end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\sin^2 4x+\sin^2 2x-\sin^2 3x=\frac{1}{2}.$$

3. Два мотоциклиста выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми 240 км, и через 3 часа встречаются. Не останавливаясь, они продолжают движение с той же скоростью, и первый прибывает в B на 2 часа 30 минут раньше, чем второй в A. Определите скорость каждого мотоциклиста.

4. Решите неравенство

$$\log_{16-x}\left(x^2-10x+16\right)\ge 1.$$

5. При каких значениях параметра k уравнение

$$3e^{2x+k}+2e^{2k-3x}-10=0$$

имеет два решения?

6. В треугольнике ABC точки E и K делят сторону AC на три равные части, причем точка E лежит между A и K. На стороне BC взята точка D так, что отрезок AD пересекает BE в точке N и отрезок BK в точке M, причем $AN:NM=4:3$. Найдите отношение площади четырехугольника $CKMD$ к площади треугольника ABC.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Плоский воздушный конденсатор зарядили до разности потенциалов 120 В и отключили от источника тока. Какой станет разность потенциалов между пластинами конденсатора, если расстояние между ними увеличить от 0,2 мм до 0,8 мм, а пространство внутри конденсатора заполнить диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon=5$?

2. Тело брошено со скоростью 30 м/с под некоторым углом α к горизонту. Найдите этот угол, если через 1 с тело оказалось на высоте 10 м. Через какой промежуток времени тело снова окажется на этой высоте?

3. В тепловом процессе (рис.1) 1 моль идеального одноатомного газа

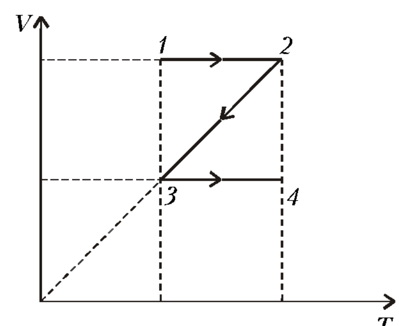


Рис. 1

переводят из начального состояния *1* в конечное состояние *4* (через состояния *2* и *3*). Найдите общее количество теплоты, подведенное в этом процессе, если разность конечной и начальной температур равна 100 К. Постройте этот процесс в координатах $p-V$.

4. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 10^{-5} Ф и катушки индуктивностью 0,2 Гн. Конденсатор зарядили до напряжения 2 В, после чего он начал разряжаться.

Какими будут мгновенные значения силы тока в контуре и напряжения на конденсаторе в тот момент, когда энергии магнитного поля в катушке и электрического поля в конденсаторе будут равны?

5. Пуля пробивает закрепленную доску при минимальной скорости 200 м/с. С какой скоростью должна лететь пуля для того, чтобы пробить эту же доску, подвешенную на длинной нити? Масса пули 15 г, масса доски 90 г, пуля попадает точно в центр доски, перпендикулярно ее поверхности.

Вариант 2

1. Металлический шарик массой 0,1 кг висит на нити. Когда шарику сообщили заряд 0,5 мКл, нить отклонилась от вертикали на угол 45°. Найдите напряженность однородного электрического поля, в котором находится шарик, если силовые линии поля направлены горизонтально.

2. Поверхность вольфрама сначала облучают светом с длиной волны 100 нм, а затем с длиной волны 250 нм. Во сколько раз отличаются максимальные кинетические энергии вылетающих электронов в этих случаях? Работа выхода для вольфрама 4,5 эВ.

3. Математическому маятнику в положении равновесия сообщают некоторую скорость, и за 1/4 с она уменьшается в 2 раза. Найдите длину маятника, считая возникшие колебания гармоническими.

4. Один моль гелия из состояния с давлением 150 кПа и объемом 20 л переходит в состояние с давлением 50 кПа и объемом 100 л. Расширение происходит сначала адиабатически, а затем изобарно. Всего газ получил 7700 Дж тепла. Найдите минимальную температуру газа в ходе этого процесса. Вычислите работу, которую совершил газ при расширении.

5. Квадратная рамка согнута из проводника, сопротивление единицы длины которого равно 0,04 Ом/м. Рамка, двигаясь с постоянной скоростью 0,5 м/с, пересекает область однородного магнитного поля (рис.2). Индукция магнитного поля 0,4 Тл, ширина области в несколько раз больше, чем сторона рамки. Найдите сторону квадрата, если в рамке за время пересечения области поля выделилось 6,4 мДж тепла.

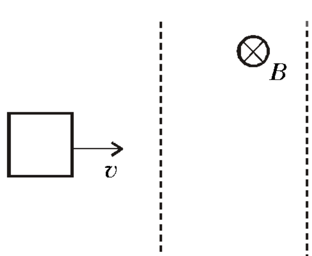


Рис. 2

Публикацию подготовили Т.Медина, Г.Никулин, А.Симонов

Российский государственный университет нефти и газа им.И.М.Губкина

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$\frac{0{,}064-125b^3}{0{,}16+2b+25b^2}+5b.$$

2. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{68+x}-9\right)\left(\sqrt{68+x}+5\right)=-13.$$

3. Найдите третий член геометрической прогрессии, если известно, что ее пятый член равен 0,5 и знаменатель прогрессии равен 0,5.

4. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$|x-7{,}5|<10.$$

5. Сколько целых решений имеет неравенство

$$0{,}37^{5x^2-17{,}1}>12{,}1^{x^2-3{,}42}?$$

6. Вычислите

$$\log_{7,3}\sqrt[5]{8}:\log_{7,3}\sqrt[20]{8}.$$

7. Найдите наибольшее отрицательное число x, не входящее в область определения функции

$$y=\operatorname{ctg}(4\pi x+1{,}6\pi).$$

8. Найдите в градусах наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sin 3x+\sin 13x=7\sin 8x.$$

9. Прямая, проходящая через начало координат, пересекает график функции $y=\dfrac{3\sqrt{3}}{4096x^3}$ в точках M и N. Найдите наименьшее возможное значение длины отрезка MN.

10. Сколько целых чисел входит в область решений неравенства

$$\log_2\left(\frac{5x+8}{2x-3}+2\right)>2?$$

11. $ABCD$ – ромб с острым углом BAD. Окружность, проходящая через вершину B и середины сторон CD и AD, пересекает диагональ BD в точке E такой, что $ED:BE=1:7$. Найдите $\cos\angle BAD$.

12. $ABCD$ – равнобедренная трапеция с бóльшим основанием AD и меньшим BC, в которую можно вписать окружность. Известно, что $\cos\angle BAD=0{,}4$, а объем тела, получающегося при вращении трапеции вокруг стороны BC, равен 17. Найдите объем тела, получающегося при вращении трапеции вокруг стороны AD.

Вариант 2

1. Упростите

$$\frac{a^6+0{,}001}{a^4-0{,}1a^2+0{,}01}-\frac{a^4-0{,}01}{a^2+0{,}1}.$$

2. Найдите наибольшее целое число, не входящее в область определения функции

$$y=\log_{0,1}\left(x^2-3x-10\right).$$

3. Сумма первых 12 членов арифметической прогрессии равна 198. Найдите разность прогрессии, если ее первый член равен 33.

4. Решите уравнение

$$3|x|+5x+16=0.$$

5. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{17}\right)^{x-5}=\left(\sqrt[3]{18}\right)^{x-5}.$$

6. Вычислите

$$(0{,}04)^{\log_{125}0{,}4\sqrt{0{,}4}}.$$

7. Вычислите

$$\frac{\cos^2 40^\circ+\cos^2 50^\circ}{\sqrt{3}\operatorname{ctg}30^\circ+1}.$$

8. Найдите в градусах наибольший отрицательный корень уравнения

$$\cos 25x+\cos 5x=9\cos 10x.$$

9. На параболе

$$y=ax^2+bx+2$$

существует единственная точка M, обладающая тем свойством, что если в этой точке провести касательную к параболе, то отрезок этой касательной, заключенный между координатными осями, делится точкой M пополам. Найдите ординату вершины параболы.

10. Сколько целых решений имеет неравенство

$$|x|^{x^2+2x-120}<1?$$

11. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC и прямым углом BAD через точки A, B и C проведена окружность, которая пересекает основание AD в точке M и боковую сторону CD в точке N. Известно, что $AM:MD=$

$=2:3$, $CN:ND=2:1$. Найдите $\operatorname{tg}\angle CDA$.

12. Площадь основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна 288, радиус вписанного в нее шара равен 6. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду $SABC$.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Внимание! Если единицы измерения не указаны, выразите ответ в единицах СИ. Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2.

Вариант 1

1. Тело брошено горизонтально. Через 3 с после броска угол между направлениями полной скорости и полного ускорения стал равным 60°. Определите величину полной скорости тела в этот момент времени.

2. Небольшой шарик массой 350 г, прикрепленный к концу нити, равномерно вращается в вертикальной плоскости. На сколько ньютонов сила натяжения нити в нижней точке траектории больше, чем в верхней?

3. Тело массой 1,5 кг скользит по горизонтальной плоскости под действием горизонтально направленной силы. Коэффициент трения тела о плоскость 0,2. Определите энергию, выделяемую в виде тепла на пути 20 м.

4. Сосуд кубической формы с ребром 20 см до краев заполнен водой. Определите силу давления воды на боковую грань сосуда. Атмосферное давление не учитывайте. Плотность воды 1000 кг/м^3.

5. Определите начальную температуру (в °С) куска олова массой 1,2 кг, если при опускании его в воду массой 3 кг при температуре 10 °С вода нагрелась на 2 К. Удельная теплоемкость олова 250 Дж/(кг·К), воды 4200 Дж/(кг·К).

6. Батарея с ЭДС, равной 10 В, имеет внутреннее сопротивление 2 Ом. При каком внешнем сопротивлении сила тока в цепи будет равна 2 А?

7. Магнитный поток через каждый виток катушки, помещенной в магнитное поле, равен 0,2 Вб. Магнитное поле равномерно убывает до нуля за время 0,4 с, при этом в катушке индуцируется ЭДС, равная 15 В. Сколько витков имеет катушка?

8. Найдите период (в микросекундах) колебаний контура, излучающего электромагнитную волну, длина которой 600 м. Скорость света равна $3\cdot10^8$ м/с.

9. При посадке на планету, лишенную атмосферы, космический корабль сначала облетает ее на малой высоте с выключенными двигателями. Затем он уменьшает скорость на 20%, и при новом режиме облета расход реактивного топлива составляет 3 кг/с. Каким будет расход топлива при уменьшении скорости облета еще вдвое? Скорость выброса газов постоянна.

10. Давление трех молей идеального газа в изохорном процессе уменьшили в 1,5 раза, а затем в изобарном процессе его температуру довели до начального значения. При этом газ совершил работу 4980 Дж. Определите начальную температуру газа (в °С). Универсальная газовая постоянная равна 8300 Дж/(кмоль·К).

11. Два одинаковых шарика, несущие разноименные заряды одинаковой величины и соединенные непроводящей пружиной жесткостью 15 Н/м, находятся на гладком горизонтальном столе. Шарики колеблются так, что расстояние между ними меняется от L до $4L$, где $L=3$ см. Найдите величину заряда на каждом шарике (в нКл), если известно, что в недеформированном состоянии длина пружины равна $3L$. Коэффициент в законе Кулона равен $k=9\cdot10^9$ м/Ф.

12. Во сколько раз уменьшился радиус орбиты электрона при переходе атома из одного стационарного состояния в другое, если линейная скорость электрона увеличилась при этом в 4 раза?

Вариант 2

1. Торможение автомобиля до полной остановки заняло 5 с и происходило с постоянным ускорением 4 м/с^2. Найдите тормозной путь.

2. На сколько процентов уменьшится сила тяготения между двумя одинаковыми однородными шарами, если вначале шары соприкасались друг с другом, а затем один из шаров отодвинули на расстояние, равное трем радиусам шаров?

3. Однородное тело объемом 0,0003 м^3 плавает в жидкости, плотность которой в 5 раз больше плотности материала тела. Какой объем тела (в см^3) будет выступать над поверхностью жидкости?

4. Газ охладили при постоянном давлении от 127 °С до 27 °С. На сколько процентов надо после этого уменьшить давление газа в изотермическом процессе, чтобы объем стал равен первоначальному?

5. Два плоских воздушных конденсатора, первый заряженный до напряжения 42 В, а второй незаряженный, соединили параллельно, после чего напряжение на конденсаторах стало 7 В. Во сколько раз расстояние между пластинами у второго конденсатора меньше, чем у первого, если площади их пластин одинаковы?

6. По проводнику сопротивлением 17 Ом пропускали постоянный ток в течение 9 с. Какое количество теплоты выделилось в проводнике за это время, если через его сечение прошел заряд, равный 3 Кл?

7. Какова должна быть длина (в см) математического маятника на Луне, чтобы период его колебаний был таким же, как период колебаний математического маятника длиной 54 см на Земле? Ускорение силы тяжести на Луне в 6 раз меньше, чем на Земле.

8. Расстояние от предмета до собирающей линзы в 1,5 раза больше фокусного. Во сколько раз больше фокусного расстояние от изображения до линзы?

9. Определите массу груза, который надо сбросить с аэростата общей массой 500 кг, движущегося равномерно вниз, чтобы он стал подниматься с такой же по величине скоростью. Подъемная сила равна 4,5 кН, сила сопротивления пропорциональна скорости аэростата.

10. Невесомый стержень, на концах которого закреплены грузы массами 1 кг и 3 кг, может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину. Стержень приводят в горизонтальное положение и отпускают. С какой силой он будет действовать на ось, проходя вертикальное положение?

11. Трансформатор, погруженный в масло, вследствие перегрузки начинает греться. Каков его КПД (в процентах), если при полной мощности 10 кВт масло массой 30 кг нагревается на 20 °С за 5 мин работы трансформатора? Удельная теплоемкость масла 2000 Дж/(кг·К).

12. Отрицательно заряженная частица влетает в область однородного магнитного поля с индукцией 0,002 Тл, где движется по дуге окружности радиусом 0,2 м. Затем частица попадает в электрическое поле, где пролетает участок с разностью потенциалов 600 В, при этом ее скорость уменьшается в 2 раза. Определите конечную скорость (в км/с) частицы.

Публикацию подготовили
Б.Писаревский, А.Черноуцан

Санкт-Петербургский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты математико-механический, прикладной математики – процессов управления; дневное отделение)

1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{9-x^2}=a+\sqrt{x^2-ax}$$

имеет два решения.

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}\left|\frac{\pi}{6}-x\right|=\operatorname{tg}3x.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2\left(x^2-5x\right)-\log_2\left(2x^2-3x\right)\le$$
$$\le\log_2(x+3).$$

4. Точка O является общим центром двух окружностей. Вершины треугольника ABC лежат на внешней окружности. Две его стороны касаются внутренней окружности, а третья сторона пересекает ее в точках M и N. Найдите отношение радиусов этих окружностей, если известно, что $\angle MON=\varphi$.

5. Две треугольные пирамиды $NABC$ и $MABC$ имеют общее основание ABC и не имеют других общих точек. Все вершины обеих пирамид лежат на одной и той же сфере. Найдите длины ребер MA и MB, если известно, что они равны между собой и что длины всех остальных ребер обеих пирамид равны единице.

Вариант 2

(экономический факультет; дневное отделение)

1. Найдите число $x<-20$, если известно, что оно является седьмым членом некоторой бесконечной арифметической прогрессии, сумма первых семнадцати членов которой равна 51, а число $-6x$ также является членом этой прогрессии.

2. Решите уравнение

$$\left|x-\frac{\pi}{3}\right|=\cos 2x.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2(10x-8)\left(\log_x 2x-\log_2 x^2\right)\ge 0.$$

4. Решите уравнение

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x}=3\sqrt{x+1}.$$

5. В четырехугольнике $ABCD$ углы при вершинах A и C прямые. Биссектриса угла B пересекает сторону CD в точке M, а биссектриса угла D пересекает сторону AB в точке N. Известно, что $BM=10$, $AN=6$ и $BN=2$. Найдите CM и DM.

Вариант 3

(биолого-почвенный факультет; вечернее отделение)

1. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases}x(x+y)=a,\\ x^2+y^2=2\end{cases}$$

имеет решение.

2. Решите уравнение

$$\frac{x+4}{2-\sqrt{x+2}}=\frac{3}{2}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{1+\sin 2x}\left(x+4-2x^2\right)\le 0.$$

4. В прямоугольник $ABCD$ площади S помещена окружность, касающаяся сторон AB, BC и AD. Найдите радиус этой окружности, если известно, что ее хорда, лежащая на диагонали AC прямоугольника, равна c.

5. Постройте график функции

$$f(x)=\frac{\left|x^2-2x\right|}{x}+|x|.$$

Публикацию подготовили
О.Иванов, А.Орлов, Ю.Чурин

Санкт-Петербургский государственный технический университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

(физико-технический факультет)

1. Сумма ненулевого числа A и 20% от числа B составляет 50% от B. Найдите отношение A/B.

2. Решите уравнение

$$2^{2x}\cdot 3^{4x}=18^{x-1}.$$

3. Вычислите

$$(1+2\sin 240^\circ)(1-2\cos 240^\circ).$$

Установите, что это число – целое.

4. Вычислите

$$\log_3 5\cdot\log_5 4-\log_3 12.$$

5. Решите уравнение

$$5-\sqrt{x-4}=4(x-4).$$

6. Решите уравнение

$$\sqrt{x\cdot 2^{-x}}=\sqrt{8x}.$$

7. Решите уравнение

$$\log_x\left(x^3-2x^2+2\right)=0.$$

8. Вычислите $\arcsin(\sin 6)$.

9. Найдите $x+1/x$, если

$$\left(x^2+1\right)\left(x^2+x+1\right)=2x^2.$$

10. Решите уравнение

$$|x+1|\cos x=2x|\cos x|.$$

11. Найдите меньший корень уравнения

$$\lg^2 x+\lg\left(\sqrt{10}/x\right)=2{,}5.$$

12. Решите неравенство

$$\left(x^3-1\right)\left(x^4-1\right)\le 0.$$

13. Решите неравенство

$$(x+4)\log_2(4-x)\le 0.$$

14. Найдите общие корни уравнений

$$\sin\pi x=2x \text{ и } \cos\pi x=4x^2-1.$$

15. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x^2+y=5,\\ x\sqrt{y}-y=1.\end{cases}$$

16. Первый член геометрической прогрессии равен $b_1=1$. Найдите все целые отрицательные знаменатели q прогрессии, для которых сумма третьего и четвертого ее членов b_3+b_4 не меньше $2q$.

17. Найдите координаты центров окружностей, касающихся трех прямых линий $y=x$, $y=x+2$ и $y=-x$.

18. В равнобедренном треугольнике длина основания $a=4$, а длина медианы, опущенной на боковую сторону, $m=5$. Найдите площадь треугольника.

19. В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетом $a=3$ и противолежащим углом $\alpha=\operatorname{arctg}(3/4)$. Найдите объем пирамиды, если все боковые ребра имеют одинаковую длину $l=5$.

20. При каких значениях параметра a уравнение $x^2-ax=2a$ имеет два различных целочисленных решения?

Публикацию подготовили
Е.Подсыпанин, С.Преображенский

Знакомьтесь: факультет наук о материалах

Десть лет назад в Московском государственном университет им. М.В.Ломоносова на базе химического, физического и механико-математического факультетов был организован новый факультет: факультет наук о материалах (прежнее название – Высший колледж наук о материалах). Потребность в создании такого факультета давно витала в воздухе и ощущалась представителями разных направлений университетской науки. Тот факт, что материалы образуют фундамент цивилизации и что изучать их необходимо, никогда и ни у кого не вызывал сомнений, речь шла лишь о нахождении оптимальной формы обучения этой специальности.

Если исходить из того, что мы живем в материальном мире, то всю окружающую нас среду можно отнести к предмету изучения материаловедов, и в этом смысле к представителям этой науки с равным основанием принадлежат геологи, биологи, химики, физики и математики. Каждая из наук, развиваясь по собственным законам, выработала методики поиска и исследования новых явлений и материалов, формулировки рекомендаций к их практическому использованию. В чем же тогда необходимость синтеза этих разнообразных подходов и подготовки специалистов, владеющих приемами научного поиска каждой из этих дисциплин? Ответ на этот риторический вопрос можно дать на примере открытия и всестороннего экспериментального и теоретического исследования нового класса материалов – металлооксидных высокотемпературных сверхпроводников.

Сверхпроводники, хотя и не нашли пока столь широкого практического применения, как, например, ферромагнетики или полупроводники, являются одним из наиболее привлекательных объектов поиска ученых. Это связано, прежде всего, с их громадным потенциалом использования в самых разнообразных областях человеческой деятельности. Сверхпроводящие линии передачи и накопители энергии, поезда на магнитной подушке и электроника на сверхпроводниках – вот лишь некоторые примеры.

Изначально поиск сверхпроводящих материалов велся среди простых металлов, причем оказалось, что большинство из них действительно теряют сопротивление при низких температурах. На следующем этапе рекордсменами по критической температуре перехода в сверхпроводящее состояние (T_C) оказались двойные (Nb_3Sn, Nb_3Ga) и тройные ($Nb_3(Al, Ge)$) интерметаллические соединения, однако эта температура едва превосходила температуру кипения жидкого водорода (; 20 К), что существенно ограничивало возможности их применения. Ситуация качественно изменилась с открытием сверхпроводимости в металлооксидах типа

$$YBa_2Cu_3O_x \ (T_C \geq 90 \ К),$$

$$Bi_2Sr_2CaCu_2O_x \ (T_C \geq 85 \ К),$$

$$Tl_2Ba_2Ca_2Cu_3O_x \ (T_C \geq 110 \ К),$$

$$HgBa_2Ca_2Cu_3O_x \ (T_C \geq 130 \ К).$$

Материалы на основе иттрия, висмута, таллия и ртути теряют сопротивление при температурах, уже существенно превышающих температуру кипения общедоступного хладагента – жидкого азота (; 77 К). В результате такого повышения критической температуры экономически оправданным оказалось создание научной аппаратуры, работающей на высокотемпературных сверхпроводниках (в продажу поступили квантовые интерферометры – приборы для измерения магнитного поля), и в стадии реализации находится несколько крупномасштабных энергетических проектов, основанных на использовании металлооксидных сверхпроводников.

Открытие высокотемпературных сверхпроводников показало, что наибольших успехов в поиске и изучении этих материалов добились исследователи, сочетающие в своей работе приемы и методы, развитые в разных взаимодополняющих областях науки и технологии. Традиционно синтез и исследование новых материалов принадлежали химии. Вместе с тем, сверхпроводимость как квантовое кооперативное явление считалось предметом изучения в физике. Причем в обеих областях эффективный научный поиск опирается на современную математику.

Все сказанное о высокотемпературных сверхпроводниках в той же степени может быть отнесено и ко многим другим многофункциональным материалам с необычными свойствами – биополимерам, фуллеренам, сплавам с памятью формы, нанокомпозитам и т.д. Сочетание тонких методов синтеза и анализа химических соединений с мощным аппаратом экспериментальной и теоретической физики и математики предопределило развитие новых направлений в науке и материалах.

Создание факультета наук о материалах (ФНМ) явилось ответом на веление времени и позволило найти такую форму подготовки специалистов, которая дает им навыки экспериментальной и теоретической работы химиков, физиков и математиков. Главным принципом преподавания на новом факультете (как и ранее в Высшем колледже наук о материалах) является междисциплинарность. В процессе обучения студенты овладевают:

- обширной фактической базой материаловедения с акцентом на химические аспекты создания и использования материалов, что подразумевает фундаментальную подготовку по основным разделам химии;
- теорией физических явлений, определяющих свойства материалов, что предполагает фундаментальную подготовку по физике конденсированного состояния вещества;
- базовыми знаниями по основным разделам высшей математики;
- компьютерными методами современного химического и физического эксперимента;
- знанием иностранных языков, позволяющим работать в интернациональных коллективах;
- необходимым для современного человека гуманитарным кругозором;
- достаточными для практической работы знаниями в области экономики, маркетинга и менеджмента.

Начиная с первого курса студенты факультета наук о материалах имеют уникальную возможность заниматься научной работой под индивидуальным руководством опытных ученых химического, физического и механико-математического факультетов МГУ или академических институтов, проводить самостоятельные поисковые исследования. По результатам этих работ каждый семестр на факультете наук о материалах организуются студенческие научные конференции. Студенты имеют возможность также стажироваться в ведущих учебных и научных заведениях Европы, Азии и Америки, где специализация «Materials Science» давно стала синонимом передового края фундаментальных и прикладных исследований.

Ежегодный прием студентов на факультет наук о материалах составляет 25 человек, срок обучения – пять с половиной лет. Обучение бесплатное, все студенты получают стипендию, а иногородние обеспечиваются общежитием. После окончания 4-го курса студенты факультета наук о материалах получают диплом бакалавра материаловедения, а после 5,5 лет обучения – диплом магистра и диплом об окончании Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова. Лучшие из студентов могут продлить свое обучение в аспирантуре факультета наук о материалах.

Если вас заинтересовала эта информация и вы являетесь учеником выпускного класса среднего учебного заведения, приглашаем принять участие в *предметных олимпиадах ФНМ МГУ*, которые факультет проводит во второй половине апреля, или в традиционных вступительных экзаменах летом.

Адрес приемной комиссии факультета наук о материалах: 119899 Москва, Воробьевы горы, МГУ им. М.В.Ломоносова, химический факультет, ФНМ, приемная комиссия.

Телефон: 932-85-33.

Ниже приводятся образцы задач по математике и физике, предлагавшихся на предметных олимпиадах факультета наук о материалах начиная с 1996 года.

Математика

1. Решите уравнение
$$2^x + 2^{1-x} = 3.$$

2. Решите уравнение
$$\sin x + \sin\left(\frac{19\pi}{2} - x\right) = \sqrt{1{,}5}.$$

3. Решите неравенство
$$\log_{1/2}\left(6 + x - x^2\right) \ge -2.$$

4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} (1/4)^{-3x/2} + \log_3^3 y = 504, \\ 4^x - 2^{x-1}\log_{\sqrt{3}} y + \log_3^2 y = 84. \end{cases}$$

5. В квадрате $ABCD$ точка E лежит на стороне CD. Биссектриса угла BAE пересекает сторону BC в точке F. Найдите DE, если известно, что $AE = 5$ и $BF = (3/2)DE$.

6. Развертка боковой поверхности конуса представляет собой сектор с углом $\pi\sqrt{3}$ при вершине. Верно ли, что отношение объема шара, описанного вокруг конуса, к объему самого конуса меньше чем $\sqrt{113}$?

7. Из города в деревню одновременно отправились бегун Б и пешеход $П_1$, а в этот же момент из деревни в город вышел второй пешеход $П_2$. Скорости пешеходов равны. Встретившись, Б и $П_2$ простояли некоторое время, а затем направились в деревню. При этом Б побежал с прежней скоростью 12 км/ч, а $П_2$ уменьшил свою скорость в полтора раза. В результате в деревню сначала прибежал Б, а затем через промежуток времени, в два раза больший длительности встречи Б и $П_2$, одновременно пришли оба пешехода. Найдите скорость пешехода $П_1$.

8. Между пунктами A и B ежедневно курсируют пассажирский автобус и экспресс. Если пассажирский автобус увеличит свою скорость на 9 км/ч, то время его следования из A в B уменьшится на a %. Если экспресс уменьшит свою скорость на 4 км/ч, то время его следования из A в B увеличится на b %. Известно, что $ab = 100$. Какое минимальное значение может принимать сумма скоростей пассажирского автобуса и экспресса?

9. Имеется бесконечно убывающая знакочередующаяся геометрическая прогрессия с ненулевыми первым членом и знаменателем. Разность между суммой нечетных членов и суммой четных членов данной прогрессии равна ее второму члену, умноженному на некоторое число. Это число можно представить в виде $m^2 + 10m + 20$, где m – целое число. Какие значения может принимать m?

10. На координатной плоскости Oxy три из четырех вершин квадрата имеют координаты $(-1; 4)$, $(-3; 8)$, $(3; 6)$. Напишите уравнения прямых, проходящих через точку $(1; 0)$ и делящих квадрат на две части, площадь одной из которых втрое больше площади другой.

Физика

1. Камень бросают с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Через какое время t скорость камня будет составлять угол β с горизонтом? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения равно g.

2. Найдите отношение весов тела на экваторе и на полюсе планеты, радиус которой R, масса M, а продолжительность суток T. Планету считать шаром. Гравитационная постоянная равна G.

3. Определите работу A, которую совершил идеальный газ в замкнутом цикле *1–4–3–2–1* (рис.1). Известны значения давлений p_1, p_0, p_2, а также разность объемов $V_2 - V_1 = V_0$.

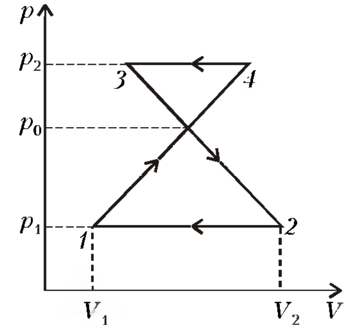


Рис. 1

4. Относительная влажность воздуха при t_1 = 30 °С равна f_1 = 0,80. Какова будет относительная влажность f_2, если этот воздух нагреть при постоянном объеме до t_2 = 50 °С? Давление насыщенных паров при 30 °С равно p_1 = 4,23 кПа, при 50 °С – p_2 = = 12,3 кПа.

5. Электрическая цепь, представленная на рисунке 2, состоит из источника тока, трех одинаковых резисторов сопротивлением R каждый, конденсатора емкостью C и ключа K.

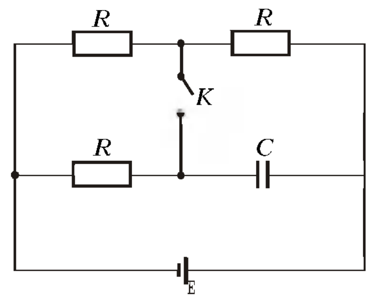


Рис. 2

Найдите ЭДС источника Е, если известно, что при замыкании ключа заряд на обкладках конденсатора изменился на ΔQ. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

6. Короткозамкнутый виток провода сопротивлением R, имеющий форму квадрата со стороной a, поместили в однородное магнитное поле с индукцией, равной B и перпендикулярной плоскости витка. Затем витку придали форму окружности, не растягивая провод, а только деформируя его. Какой заряд Q протечет через поперечное сечение провода в результате такой деформации?

7. Определите скорость, с которой электроны вылетают из металла, если металл освещается светом с длиной волны λ = 500 нм. Работа выхода электронов $A_{вых} = 3{,}71 \cdot 10^{-19}$ Дж, масса электрона $m = 9 \cdot 10^{-31}$ кг, постоянная Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

8. Расстояние между двумя точечными источниками света l = 24 см. В каком месте между ними надо поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием F = 9 см, чтобы изображения обоих источников получились в одном месте?

Ю.Третьяков, А.Васильев

XLI Международная математическая олимпиада

XLI Международная математическая олимпиада проходила с 13 по 25 июля 2000 года в Тэджане (Южная Корея). Хозяева олимпиады блестяще подготовились к встрече гостей из 82 стран мира, поразив участников олимпиады яркими церемониями, интересными экскурсиями, гостеприимством и четкой организацией работы.

На церемонии открытия гостей приветствовал премьер-министр Кореи, участников олимпиады в своем дворце принимал президент страны, а завершилась олимпиада красочным фейерверком.

XLI ММО продемонстрировала высокий уровень российской математической олимпиадной школы. Каждая страна-участница может предложить до 6 задач, из которых формируется список лучших задач для рассмотрения Международным жюри. В этом году все 6 предложенных Россией задач попали в число 27 лучших, а три из них, впервые в истории, вошли в окончательный вариант олимпиады (задачи 1, 5, 6).

Команда России на XLI Международной математической олимпиаде

Большого успеха на олимпиаде добились школьники России: в двадцатку лучших попали 5 наших участников, в десятку – 3, а в числе четырех школьников, показавших на олимпиаде абсолютный результат, оказались 2 – А.Гайфуллин и А.Пахарков (двое других – Александр Уснич из Беларуссии и Живен Юн из Китая).

Нашу команду составляли одиннадцатиклассники Владимир Дремов (школа 24, Волгодонск), завоевавший на ММО свою третью золотую медаль, Юрий Лифшиц (ФМЛ 239, Санкт-Петербург) и Алексей Пахарков (гимназия 2, Рыбинск), во второй раз ставшие золотыми медалистами, и дебютанты олимпиады Александр Гайфуллин (гимназия, Раменское) и Алексей Федотов (ФМЛ 239, Санкт-Петербург), а также девятиклассник Андрей Халявин (ФМЛ 35, Киров).

Традиционно на ММО школьникам в каждый из двух дней предлагается по 3 задачи, полное решение каждой оценивается в 7 баллов.

Наши школьники на олимпиаде показали следующие результаты:

	1	2	3	4	5	6	Σ	Медаль
А.Гайфуллин	7	7	7	7	7	7	42	золотая
А.Пахарков	7	7	7	7	7	7	42	золотая
Ю.Лифшиц	7	7	7	4	7	6	38	золотая
В.Дремов	7	7	1	7	7	4	33	золотая
А.Федотов	7	7	1	6	7	5	33	золотая
А.Халявин	7	1	2	7	7	3	27	серебряная

В неофициальном командном зачете первая десятка практически не претерпела изменений по сравнению с прошлым годом (Венгрия сменила Румынию), а лучшие 20 команд завоевали все золотые медали олимпиады:

N	Команда	Σ	Золото	Серебро	Бронза	N	Команда	Σ	Золото	Серебро	Бронза
1	Китай	218	6	0	0	11	Израиль	139	2	1	3
2	Россия	215	5	1	0	12	Румыния	139	1	3	2
3	США	184	3	3	0	13	Украина	135	2	2	0
4	Ю.Корея	172	3	3	0	14	Индия	132	0	5	1
5	Вьетнам	169	3	2	1	15	Япония	125	1	2	3
6	Болгария	169	2	3	1	16	Австралия	122	1	3	1
7	Белоруссия	165	2	2	2	17	Канада	112	1	2	1
8	Тайвань	164	3	2	1	18	Турция	111	0	3	1
9	Венгрия	156	1	5	0	19	Словакия	111	0	2	3
10	Иран	155	2	3	1	20	Германия	108	1	1	2

А вот результаты команд бывших советских республик, не вошедших в первую двадцатку:

21	Армения	108	0	2	3	46	Латвия	60	0	0	3
24	Казахстан	91	0	1	4	58	Эстония	42	0	0	1
26	Молдова	84	0	2	3	62	Литва	34	0	0	1
36	Грузия	72	0	1	0	64	Азербайджан	32	0	0	0
38	Узбекистан	70	0	0	2	76	Киргизия	16	0	0	1

В заключение хотелось бы поздравить всех преподавателей, подготовивших членов команды и ее запасного участника Евгения Зинина (г.Краснодар), и поблагодарить за успешную работу тренеров сборной России: Сергея Львовича Берлова и Дмитрия Валерьевича Карпова (Санкт-Петербург), Алексея Яковлевича Белова, Бориса Николаевича Кукушкина и Григория Ривеновича Челнокова (Москва), Владимира Леонидовича Дольникова (Ярославль).

Особая благодарность – спонсору команды России на XL и XLI ММО фирме «Краниум» и лично Александру Анатольевичу Черепнину.

Задачи

1. Окружности Γ_1 и Γ_2 пересекаются в точках M и N. Прямая l – общая касательная к Γ_1 и Γ_2 такая, что M расположена к l ближе, чем N. Прямая l касается Γ_1 в точке A, а Γ_2 – в точке B. Прямая, проходящая через M параллельно l, пересекает вторично окружность Γ_1 в точке C, а окружность Γ_2 – в точке D. Прямые CA и DB пересекаются в точке E, прямые AN и CD – в точке P, прямые BN и CD – в точке Q.

Докажите, что $EP = EQ$.

(Россия)

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1.$$

(США)

3. Дано натуральное число $n \ge 2$. Сначала на горизонтальной прямой сидят n блох, не все в одной точке.

Для положительного действительного числа λ определим *прыжок* следующим образом:

выбираются две блохи, сидящие в произвольных точках A и B, причем A левее B, и блоха, сидящая в A, прыгает в точку C, расположенную на данной прямой справа от B, такую, что $BC/AB = \lambda$.

Определите все значения λ такие, что для любой точки M на этой прямой и для любого начального расположения n блох существует конечная последовательность прыжков, после которых все блохи окажутся справа от точки M.

(Белоруссия)

4. См. задачу М1761 «Задачника «Кванта».

5. См. задачу М1762 «Задачника «Кванта».

6. См. задачу М1763 «Задачника «Кванта».

Публикацию подготовили Н.Агаханов, Д.Терёшин

XXXI Международная физическая олимпиада

IPhO 2000

С 8 по 16 июля 2000 года в Великобритании прошла очередная международная физическая олимпиада. В ней приняли участие 289 школьников из 64 стран мира.

По результатам выступлений на двух Всероссийских физических олимпиадах и по итогам учебно-тренировочных и отборочных сборов в состав команды России вошли:

Ротаев Михаил – г.Новосибирск, школа-колледж 130,

Панов Евгений – г.Челябинск, ФМЛ 31,

Вахов Алексей – г.Пермь, ФМШ 146,

Вавилов Виталий – г.Набережные Челны, классический лицей 78,

Жук Сергей – г.Вологда, ВГЕМЛ.

Участникам олимпиады было предложено 3 теоретические и 2 экспериментальные задачи. Первая теоретическая задача состояла из пяти коротких отдельных заданий по разным разделам курса физики (механика, термодинамика, атомная физика, электростатика, электродинамика). Вторая задача представляла сложные исследования движения заряженной частицы в электрических и магнитных полях. Третья задача была посвящена определению условий, при которых могут быть обнаружены гравитационные волны (эта тема является одной из проблем современной физики). Первое эксперименталь-

Команда России на XXXI Международной физической олимпиаде *ное зодание включала в себя спектраметрические измерения. Участникам алимпиады нада была продеманстриравать умения праводить фатаметрические измерения, исследовать распределение энергии в спектре, нормиравать свои результаты по кривым излучения абсолютна черного тела. Ва втором экспериментальнам задании требавалось исследавать трение скальжения при наличии тормазящей магнитной силы.*

Российские шкальники в теаретическам туре алимпиады набрали 63% ат максимальна возможнага числа баллав, а в экспериментальнам – 78,5%. Эти результаты пазвалили сборнай Рассии занять втарое места в неофициальном каманднам зачете, получив 173,2 балла из 250 вазможных. В личнам зачете результаты наших школьникав таковы: А.Вахов – 40,1 б. (залотая медаль), Е.Панов – 38,1 б. (залотая медаль), М.Ротаев – 33,5 б. (серебряная медаль), В.Вавилов – 32,8 б. (серебряная медаль), С.Жук – 28,7 б. (бранзавая медаль). Отметим, чта у Е.Панава это уже втарая залотая медаль (первая была завоевана на предыдущей международной олимпиаде).

Таким образом, все участники каманды РФ палучили медали. Таких команд оказалось всего 5 – Китай (5 залотых медалей!), Россия, Венгрия, Иран и США.

Ниже привадятся условия теаретических задач, предлагавшихся на XXXI Международной физическай олимпиаде.

Теоретический тур

Задача 1

A. Прыгун привязан к концу длинного упругого жгута. Другой конец жгута прикреплен к высокому мосту. Прыгун делает шаг и падает с моста вниз к реке с нулевой начальной скоростью. Он не достигает воды. Масса прыгуна m. Длина нерастянутого жгута L. Жесткость жгута k. Ускорение свободного падения g.

Вы можете предположить, что

– прыгуна можно рассматривать как материальную точку массой m, привязанную к концу жгута;

– масса жгута пренебрежимо мала по сравнению с m;

– в течение всего времени полета можно пренебречь сопротивлением воздуха.

Получите следующие выражения:

a) расстояние y, которое прыгун пролетел к моменту первой полной остановки;

b) максимальную скорость прыгуна v_m, достигнутую в процессе падения;

c) время t полета прыгуна до первой полной остановки.

B. Тепловой двигатель работает, используя два одинаковых тела, имеющих первоначально различные температуры T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$). Каждое тело имеет массу m и неизменную удельную теплоемкость c. Тела поддерживаются при постоянном давлении и не меняют своего фазового состояния.

a) Представьте подробный вывод выражения для конечной температуры T двух тел в предположении, что тепловой двигатель совершил максимальную теоретически возможную механическую работу.

b) Получите выражение для максимально возможной механической работы A_m.

c) Тепловая машина работает между двумя емкостями с водой объемом 2,50 $м^3$. Температура воды в первой емкости 350 К, а во второй 300 К. Вычислите по этим данным максимальную механическую работу.

C. Предполагается, что к моменту окончательного формирования Земли в ней присутствовали изотопы ^{238}U и ^{235}U, но не продукты их распада. Распад ^{238}U и ^{235}U используется для оценки возраста Земли τ.

a) Период полураспада изотопа ^{238}U составляет $4{,}5 \cdot 10^9$ лет. Периоды полураспада продуктов распада в получающейся радиоактивной цепочке намного меньше, и в первом приближении ими можно пренебречь. Цепочка распада заканчивается на стабильном изотопе свинца ^{206}Pb. Найдите число атомов ^{206}Pb, обозначаемое ^{206}n, которое получается в процессе радиоактивного распада за время t, как функцию числа ^{238}N атомов ^{238}U, сохранившихся к настоящему моменту, и периода полураспада ^{238}U. (Если вам удобно, используйте в качестве единицы времени 10^9 лет).

b) Аналогично, ^{235}U распадается с периодом полураспада $0{,}710 \cdot 10^9$ лет через цепочку короткоживущих продуктов, заканчивающуюся стабильным изотопом ^{207}Pb. Получите выражение для ^{207}n через ^{235}N и период полураспада ^{235}U.

c) Урановая руда, загрязненная рудой свинца, анализируется при помощи масс-спектрометра. Измерения относительных концентраций изотопов ^{204}Pb, ^{206}Pb и ^{207}Pb дают соотношения 1,00 : 29,6 : 22,6 соответственно. Изотоп ^{204}Pb используется для калибровки; он не является продуктом радиоактивного распада. Анализ чистой свинцовой руды дает соотношения 1,00 : 17,9 : 15,5. Зная, что отношение концентраций $^{238}N : {}^{235}N$ равно 137 : 1, получите выражение для возраста Земли τ.

d) Предполагая, что τ много больше периодов полураспада обоих изотопов урана, рассчитайте приближенное значение возраста Земли.

e) На самом деле это приближенное значение не является значительно большим по сравнению с наибольшим периодом полураспада, но оно может быть использовано для более точного расчета величины τ. Произведите такой расчет и оцените возраст Земли с точностью 2%.

D. Заряд Q равномерно распределен в вакууме по объему шара радиусом R.

a) Получите выражение для напряженности электрического поля на расстоянии R от центра шара для $r \le R$ и $r > R$.

b) Получите выражение для полной электрической энергии, связанной с этим распределением заряда.

E. Тонкое медное кольцо вращается относительно вертикальной оси, проходящей через его диаметр, в магнитном поле Земли. Величина индукции магнитного поля Земли в данной точке равна 44,5 мкТл. Вектор индукции направлен под углом 64° к горизонтали вниз. Определите, за какое время угловая скорость кольца уменьшится вдвое, если известно, что плотность меди равна $8{,}90 \cdot 10^3$ кг/$м^3$, а ее удельное сопротивление равно $1{,}70 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. Это время много больше времени одного оборота. Трением в опорах и сопротивлением воздуха можно пренебречь. При решении данной задачи вы можете не учитывать явление самоиндукции, хотя на самом деле оно играет определенную роль.

Задача 2

a) Катодная лучевая трубка (КЛТ), состоящая из электронной пушки и экрана, помещена в однородное постоянное магнитное поле с магнитной индукцией, равной B и параллельной

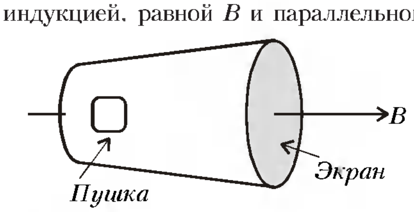


Рис. 1

оси пушки, как показано на рисунке 1. Электронный пучок излучается с катода электронной пушки вдоль ее оси, но имеет разброс направлений до 5° от оси. В общем случае на экране образуется размытое пятно, однако при определенных значениях магнитной индукции оно становится резко сфокусированным.

Рассмотрите движение электрона, который первоначально был излучен электронной пушкой под некоторым углом β к ее оси ($0 \le \beta \le 5^\circ$), и, разложив это движение на компоненты, параллельные и перпендикулярные оси пушки, выведите выражение для отношения заряда электрона к его массе (e/m) через следующие величины: наименьшее значение магнитной индукции B_0, при котором получается сфокусированное пятно, ускоряющую разность потенциалов в электронной пушке U (примите во внимание, что $U <$ < 2 кВ) и расстояние между катодом и экраном D.

b) Рассмотрим другой метод определения отношения заряда электрона к его массе (установка показана на рисунке 2). В однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ расположены две латунные круглые пластинки радиусом r, разделенные очень малым расстоянием t. Между пластинками существует разность потенциалов U. Пластинки параллельны друг другу и соосны, причем их общая ось перпендикулярна индукции магнитного поля. Фотопленка покрывает внутреннюю поверхность круглого цилиндра радиусом $r + s$, расположенного соосно пластинкам. Таким образом, расстояние между фотопленкой и краями пластинок равно s. Вся установка находится в вакууме. Отметим, что t намного меньше s и r.

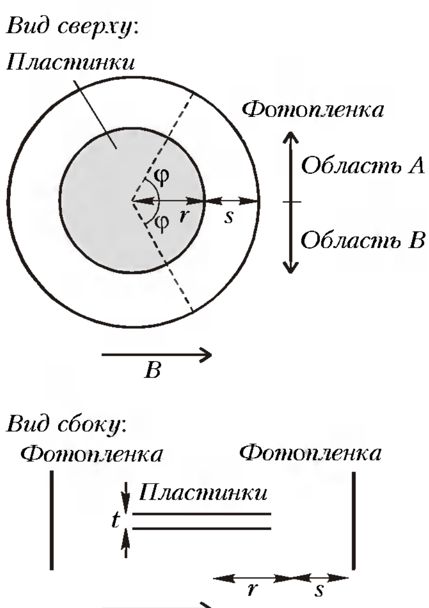


Рис 2

Точечный источник β-частиц, испускающий β-частицы в интервале скоростей равномерно во всех направлениях, помещен посередине между центрами пластинок, и одна и та же пленка облучается при следующих трех различных условиях: $B = 0$ и $U = 0$, $B = B_0$ и $U = U_0$, $B = -B_0$ и $U = -U_0$, где U_0 и B_0 – положительные константы. Примите во внимание, что верхняя пластинка заряжена положительно при $U > 0$ и что индукция магнитного поля направлена, как показано на рисунке 2, при $B < 0$. В этой части задачи расстояние между пластинками можно считать пренебрежимо малым.

На рисунке 2 отмечены две области фотопленки: A и B. Одна из них после засветки пленки и проявления изображена на рисунке 3. Укажите, какая из областей (A или B) изображена на этом рисунке.

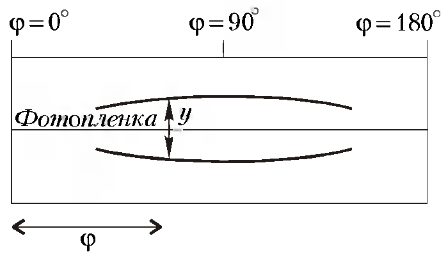


Рис. 3

c) Расстояние между двумя внешними следами на пленке измеряется с помощью микроскопа. На рисунке 3 показано это расстояние y для одного из значений угла φ. Результаты измерений приведены в следующей таблице (φ определен как угол между вектором магнитной индукции и линией, соединяющей центр пластинок и рассматриваемую точку на фотопленке):

Угол φ, градусы	90	60	50
Расстояние y, мм	17,4	12,7	9,7
Угол φ, градусы	40	30	23
Расстояние y, мм	6,4	3,3	конец следа

Численные значения параметров системы таковы: $B_0 = 6{,}91$ мТл, $U_0 =$ $= 580$ В, $t = 0{,}80$ мм, $s = 41{,}0$ мм. Кроме того, вы можете использовать значения скорости света в вакууме: $3{,}00 \cdot 10^8$ м/с и массы покоя электрона: $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг.

Определите максимальную наблюдаемую кинетическую энергию β-частицы. Выразите численный ответ в электрон-вольтах (эВ).

d) Используя информацию, данную в пункте c), найдите значение отношения заряда электрона к его массе покоя. Учтите, что полученное вами значение может не согласоваться с известным из литературы значением из-за систематической погрешности при наблюдениях.

Задача 3

А. Эта часть задачи посвящена трудностям экспериментального обнаружения гравитационных волн, генерируемых при определенных астрономических явлениях. Заметим в этой связи, что взрыв удаленной сверхновой звезды может вызвать флуктуацию гравитационного поля на поверхности Земли порядка 10^{-19} Н/кг.

Модель детектора гравитационных волн (рис.4) состоит из двух металлических стержней длиной 1,0 м каждый, расположенных под прямым углом друг к другу. Один из торцов каждого стержня зеркально отполирован, а другой жестко закреплен. Положение одного из стержней выбрано так, чтобы сигнал, принимаемый фотоэлементом, был минимальным. Пьезоэлектрические устройства сообщают стержням резкие продольные импульсы, в результате чего свободные концы стержней колеблются с продольным смещением $\Delta x = ae^{-\mu t}\cos(\omega t + \alpha)$, где a, μ, ω и α – константы.

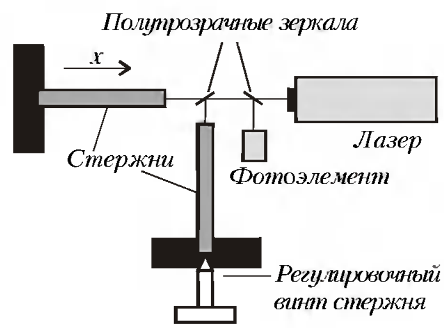


Рис. 4

a) Определите значение μ, если известно, что амплитуда колебаний уменьшается на 20% в течение 50 с.

b) Зная, что скорость продольных волн определяется по формуле $v =$ $= \sqrt{E/\rho}$, вычислите наименьшее значение частоты ω_0, если известно, что стержни сделаны из алюминия с плотностью $\rho = 2700$ кг/м^3 и модулем Юнга $E = 7{,}1 \cdot 10^{10}$ Па.

c) Невозможно изготовить стержни абсолютно одинаковой длины, а из-за разности длин стержней возникают биения сигнала фотоэлемента, частота которых составляет 0,005 Гц. Чему равна разность длин стержней δl?

d) Считая длину стержня равной l, получите алгебраическое выражение для изменения длины стержня Δl, появляющегося вследствие изменения ускорения свободного падения g на величину Δg. Изменение вектора $\Delta\vec{g}$ происходит в направлении только одного из стержней. Выразите ваш ответ через l и параметры материала стержня.

e) Лазер испускает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 656$ нм. Полагая, что минимальный сдвиг торца, который может быть зарегистрирован, равен длине волны излучения лазера, определите, какая минимальная длина стержня необходима, чтобы установка смогла зарегистрировать изменение гравитационного поля на величину порядка 10^{-19} Н/кг.

B. В этой части задачи изучаются эффекты влияния гравитационного поля на распространение света в пространстве.

a) Фотон, излучаемый с поверхности Солнца (масса Солнца M, радиус R), испытывает красное смещение. Поставив в соответствие энергии фотона эквивалентную массу покоя, воспользуйтесь теорией тяготения Ньютона и покажите, что наблюдаемая на бесконечности частота фотона уменьшается в $\left(1 - GM/(Rc)^2\right)$ раз (красное смещение).

b) Уменьшение частоты фотона эквивалентно увеличению его периода. Если использовать фотон в качестве эталонных часов, то уменьшение частоты эквивалентно замедлению времени. Далее можно показать, что замедление времени всегда сопровождается сокращением единицы длины во столько же раз. Рассмотрим влияние этого эффекта на распространение света вблизи Солнца. Вначале определим эффективный показатель преломления в точке, находящейся на расстоянии r от центра Солнца. Пусть $n_r = c/c'$, где c – скорость света, измеренная в системе координат, достаточно удаленной от гравитационного влияния Солнца $(g \to \infty)$, c' – скорость света, измеренная в системе координат на расстоянии r от центра Солнца. Покажите, что для $GM/(Rc)^2$? 1 показатель преломления можно аппроксимировать выражением $n_r = 1 + \alpha GM/(rc)^2$, где α – коэффициент, который вы должны определить.

c) Используя выражение для n_r, вычислите в радианах угол отклонения луча света θ от прямолинейного пути при его прохождении вблизи края Солнца. Используйте следующие данные: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2, $M = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ кг, $R = 6{,}95 \cdot 10^8$ м, $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ м/с. Вам также может пригодиться такой интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}} = \frac{2}{a^2}.$$

Публикацию подготовили
С.Козел, В.Коровин, В.Орлов

Избранные задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады

Первый (районный) тур

1. Серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AB в точке D, а луч CA – в точке E. Докажите, что $AD < EA$. (8–9)[1]

С.Берлов

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC угол A – прямой, E – точка пересечения диагоналей, F – проекция E на сторону AB (рис.1). Докажите, что углы DFE и CFE равны. (9)

С.Берлов

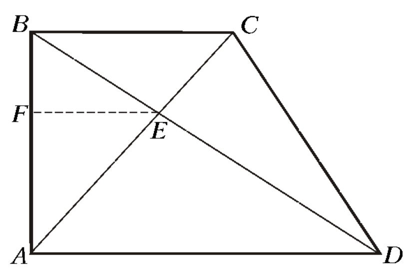


Рис. 1

3. Последовательность вещественных чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots$ удовлетворяет равенству

$$x_{n+2} = \frac{x_n x_{n+1} + 5x_n^4}{x_n - x_{n+1}}$$

при всех натуральных n. При этом $x_{2000} = x_1$. Докажите, что $x_{1999} \neq x_2$. (10)

С.Иванов

4. Функция f задана при всех вещественных x и удовлетворяет неравенствам

$$f(x+1) \le f(2x+1)$$

и

$$f(3x+1) \ge f(6x+1).$$

Известно, что $f(3) = 2$. Докажите, что уравнение $f(x) = 2$ имеет по крайней мере 2000 решений. (11)

А.Храбров

Второй (городской) тур

5. Десятичная запись числа $5 \cdot a$ состоит из 1000 пятерок и 1000 шестерок. Найдите сумму цифр числа a. (6)

Р.Семизаров

6. а) Во дворе стоят 36 столбов, причем первоначально любые два столба были соединены проводом. Каждое утро хулиган Вася по дороге в школу срывает не более 35 проводов, а электрик Петров каждый вечер восстанавливает все провода, связывавшие один из столбов с остальными. Докажите, что Вася может действовать так, что однажды после его хулиганства останется не более 17 целых проводов. (6)

б) В стране 2000 городов. Любые два города соединены двусторонней бес-

---

[1] *В скобках после условия задачи указан класс, в котором она предлагалась.*

посадочной авиалинией. Когда-то все авиалинии были государственными. 1 января каждого года правительство выбирает не более 1999 государственных авиалиний и продает их частным авиакомпаниям. После этого 1 мая парламент выбирает один из городов и возвращает государству все частные авиалинии, выходящие из этого города. Докажите, что правительство может действовать так, чтобы к некоторому моменту не менее 99% авиалиний оказались частными. (7)

А.Пастор

7. В клетках таблицы 100×100 расставлены числа так, что в любом квадрате размером 2×2 суммы чисел, стоящих в противоположных углах квадрата, равны. Докажите, что и в любом прямоугольнике суммы чисел, стоящих в противоположных углах, равны. (7)

С.Берлов

8. В Однобоком графстве между некоторыми (но не всеми) усадьбами проложены дороги с односторонним движением. Известно, что если построить любую новую дорогу (также с односторонним движением) между усадьбами, не соединенными (ни в одном направлении) дорогой до этого, то можно будет добраться от любой усадьбы до любой другой, не нарушая правил. Докажите, что это возможно уже сейчас. (7)

Д.Ростовский

9. Написанное на доске число n можно заменить на одно из чисел $2n-4$, $3n-8$ или $8-n$. Можно ли за несколько таких операций из числа 41 получить число, большее 10000000, но меньшее 10000020? (7–8)

Ф.Петров

10. Каждый день в группе из нечетного числа людей трое выходят на дежурство. Докажите, что можно составить такой график, что через некоторое время любые два человека трижды подежурят вместе. (7–8)

А.Косовская

11. а) Вдоль дороги с каждой стороны посадили по 1000 деревьев. На каждое дерево повесили табличку, в которой указано, сколько дубов в множестве деревьев, состоящем из этого дерева и его соседей слева и справа (у крайних деревьев – из самого дерева и его единственного соседа). Оказалось, что две последовательности чисел на табличках совпадают. Докажите, что в обоих рядах дубы растут на одних и тех же местах. (9)

б) Каждый месяц лесник Ермолай сажал вдоль забора ряд из 2000 деревьев и на каждое дерево вешал табличку с указанием, сколько дубов в множестве деревьев, состоящем из самого дерева, его левого и правого соседей. Таким образом получалась последовательность из 2000 чисел. Сколько различных последовательностей мог получить лесник Ермолай? (9)

А.Храбров, Д.Ростовский

12. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1.

а) На высоте AA_1 выбрана такая точка D, что $A_1D = B_1D$. Точка E – середина стороны AB. Докажите, что точки A, B_1, D и E лежат на одной окружности. (9)

б) Пусть точки K и M – середины отрезков AB и A_1B_1 соответственно, а отрезки AA_1 и KM пересекаются в точке L. Докажите, что точки A, B_1, K и L лежат на одной окружности. (10)

С.Берлов

13. Пусть $f(x) = x^{2000} - x^{1000} + 1$. Существуют ли такие различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2001}$, что $f(a_i)f(a_j)$ делится на a_ia_j при всех $i \neq j$? (9)

А.Баранов

14. На координатной плоскости проведена 101 прямая и отмечены все точки их пересечений. Может ли быть так, что на каждой из проведенных прямых лежат 50 отмеченных точек с положительными абсциссами и 50 – с отрицательными? (9–10)

С.Иванов

15. На доске написаны натуральные числа 1, 2, ..., 2000. Два игрока поочередно делают ходы по следующим правилам. Разрешается стереть любые два числа a и b и написать вместо них a^b. Через некоторое время на доске останется одно число. Первый игрок выигрывает, если оно оканчивается на 2, 3, 7 или 8, а второй – в противном случае. Кто выиграет при правильной игре? (9)

В.Франк

16. Вневписанная окружность треугольника ABC касается его стороны BC в точке K, а продолжения стороны AB – в точке L (рис.2). Другая вневписанная окружность касается продолжений сторон BA и BC в точках M и N соответственно. Прямые KL и MN пересекаются в точке X. Докажите, что CX – биссектриса угла ACN. (9)

б) Одна из вневписанных окружностей треугольника ABC касается стороны AB и продолжений сторон CA и CB в точках C_1, B_1 и A_1 соответственно. Другая вневписанная окружность касается стороны AC и продолжений

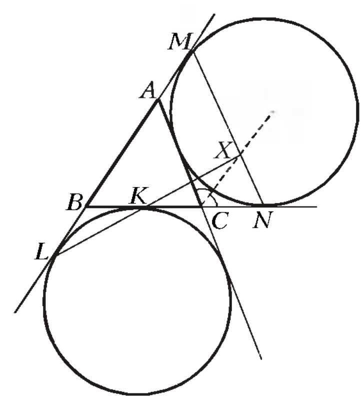


Рис. 2

сторон BA и BC в точках B_2, C_2 и A_2 соответственно. Прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке P, прямые A_1C_1 и A_2C_2 – в точке Q. Докажите, что точки A, P и Q лежат на одной прямой. (10)

С.Берлов

17. Число N равно произведению 200 различных натуральных чисел. Докажите, что N имеет не меньше 19901 различных натуральных делителей (включая единицу и само число). (10)

А.Голованов

Отборочный тур на Всероссийскую олимпиаду

18. На координатной плоскости расположены 100 точек. Докажите, что существует не более $2025 = 45^2$ прямоугольников с вершинами в этих точках и со сторонами, параллельными осям. (9)

С.Иванов

19. Сеть авиалиний считается надежной, если после закрытия любого аэропорта из любого открытого аэропорта можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). В стране 2000 аэропортов и изначально нет авиалиний. Две авиакомпании по очереди вводят новые беспосадочные авиалинии. Авиакомпания, после хода которой получается надежная сеть авиалиний, проигрывает. Какая из авиакомпаний выигрывает при правильной игре? (9)

Д.Карпов

20. На клетчатой плоскости лежит 111 не перекрывающихся друг с другом трехклеточных уголков. При этом выполняется такое свойство: для любого из уголков содержащий его квадрат 2×2 целиком покрыт уголками. Докажите, что можно убрать один или несколько уголков (но не все) так, чтобы это свойство сохранилось. (10)

А.Железняк, Ю.Белов

21. В каждой клетке шахматной доски написано положительное число так, что в каждой горизонтали сумма чисел равна 1. Известно, что при любой расстановке восьми не бьющих друг друга ладей на доске произведение чисел под ними не больше произведения чисел на главной диагонали. Докажите, что сумма чисел на главной диагонали не меньше 1. (10)

Ф.Бахарев

22. Прямая l – касательная к окружности, описанной вокруг остроугольного треугольника ABC, проведенная в точке B. Точка K – проекция ортоцентра треугольника на прямую l, а точка L – середина стороны AC. Докажите, что треугольник BKL – равнобедренный. (11)

Ф.Бахарев

23. Внутри единичного квадрата с единичными скоростями летают два шарика. Между собой они не взаимодействуют, а от стенок отскакивают по закону «угол падения равен углу отражения». Докажите, что с верхней стороны на нижнюю может с единичной скоростью спуститься паучок на паутинке так, что при спуске ни его, ни паутинку шарики не заденут. (11)

К.Пименов

Публикацию подготовил А.Спивак

Московская студенческая олимпиада по физике

21 мая 2000 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана прошел московский региональный тур Всероссийской олимпиады по физике среди студентов технических вузов. К участию в олимпиаде были приглашены все ведущие технические вузы Москвы. Каждая команда состояла из 5 студентов (до 3 курса включительно). Участникам олимпиады были предложены 10 задач (в зависимости от сложности задачи оценивались от 6 до 10 баллов) и разрешалось пользоваться любой литературой.

По результатам олимпиады в командном зачете первое место заняла команда МГТУ (80 баллов), второе место – команда Московского института электронной техники (56 баллов), третье – команда Московского института стали и сплавов (54 балла).

В личном зачете первое место завоевал П.Чирков (МГТУ, 28 баллов), второе место – Д.Делия (МГТУ, 25 баллов), третье место – А.Мармулёв (МИСиС, 19 баллов).

Ниже приводятся условия олимпиадных задач.

1. Карандаш длиной L удерживается вертикально, касаясь нижней точкой гладкой поверхности, наклоненной под углом α к горизонту. Предоставленный самому себе карандаш падает на поверхность за время τ. Определите скорость центра масс карандаша в момент соприкосновения с поверхностью. (5 б.)

2. Цилиндрическое тело радиусом R лежит у гладкой стенки, касаясь ее, на гладкой поверхности. Центр тяжести тела смещен от оси на расстояние $R/2$. В начальный момент времени тело лежит таким образом, что вектор, проведенный от оси цилиндра к центру тяжести, направлен вертикально вверх. На какой угол повернется этот вектор, прежде чем тело оторвется от стенки? (6 б.)

3. Космический зонд, движущийся вокруг Солнца по орбите Земли, т.е. по окружности радиусом R_0, должен приблизиться к Солнцу на расстояние $R_0/10$ для проведения астрономических измерений. Какую минимальную характеристическую скорость должен иметь зонд для данного маневра? Характеристической называется максимальная скорость, которую способен достичь космический корабль при движении в свободном пространстве. Скорость движения зонда по орбите Земли равна v_0. (8 б.)

4. Два одинаковых сплошных цилиндра массой M катятся по горизонтальной поверхности таким образом, что один цилиндр толкает перед собой другой. К оси толкающего цилиндра приложена горизонтальная сила F. Коэффициент трения между поверхностью и цилиндрами и между цилиндрами одинаков и равен μ. Определите силу F, при которой начнется проскальзывание между поверхностью и хотя бы одним из цилиндров. (8 б.)

5. Тяжелый поршень площадью S, опускаясь, вытесняет воздух из цилиндрического сосуда объемом V через маленькое отверстие в дне в сосуд такого же объема. Начальные параметры воздуха в обоих сосудах одинаковы и равны их нормальным значениям. При какой минимальной массе поршня произойдет полное вытеснение воздуха из первого сосуда? (7 б.)

6. Определите напряженность электрического поля в центре маленького отверстия, сделанного в поверхности сферы, равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда σ. (5 б.)

7. Заряженная частица с зарядом Q и массой m движется по прямой, проходящей через центр заземленной металлической сферы радиусом R. Определите скорость частицы на расстоянии $2R$ от центра сферы, если на бесконечности эта скорость была v_0. (8 б.)

8. Две одинаковые катушки с индуктивностью L расположены близко друг от друга. Если выводы второй катушки замкнуть накоротко, то измеренная индуктивность первой уменьшится вдвое. Определите коэффициент взаимоиндукции L_{12} между катушками. (8 б.)

9. Некий циклический процесс, проводимый с одноатомным газом, в координатах $T-S$ состоит из трех участков: T = const, S = const, $T = T_0 \exp\left(\left(S-S_0\right)/C_V\right)$. Минимальные значения энтропии S_0 и температуры T_0 заданы. Точка S_0, T_0 соответствует пересечению графика экспоненциального процесса с изотермой. Определите КПД процесса, если известно, что объем за цикл изменяется в 5 раз. (7 б.)

10. Плоская световая волна с длиной волны λ падает на линзу с диаметром D и фокусным расстоянием F. Сколько дифракционных максимумов находится на оси системы в интервале от $x = F/2$ до $x = 2F$, где x – расстояние от линзы? (5 б.)

Публикацию подготовили
М.Яковлев, В.Голубев

«Квант» для младших школьников

Задачи

(см. «Квант» №1)

1. Если бы у Коли было на 3 пирожка больше, то всем досталось бы поровну – по 11 пирожков. Итак, вначале было 22 пирожка, и после окончательного дележа каждому досталось по 10 пирожков.

2. Найдем все двузначные числа вида $\overline{ab} = 10a + b$, где a, b – цифры ($a \neq 0$), которые делятся на сумму квадратов своих цифр: $10a + b = m\left(a^2 + b^2\right)$, $m \neq 0$, m – целое. Рассматривая последнее равенство как квадратное уравнение относительно переменной a, находим

$$a = \frac{5 \pm \sqrt{25 - bm(bm-1)}}{m}.$$

Обозначим $bm = k$ и найдем возможные значения целой переменной $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, при которых значение подкоренного выражения $25 - k(k-1)$ равно точному квадрату. Легко убедиться, что это может быть только при $k = 0$ или $k = 1$.

Если $k = 0$, то $b = 0$ и $a = \dfrac{10}{m}$. При $m = 2, 5, 10$ получаем три возможных значения для переменной a: $a = 5, 2, 1$ и, соответственно, три ответа: 50; 20; 10.

Если $k = 1$, то $b = m = 1$ и допустимых значений для цифры a не существует.

3. По условию, в каждом округе может находиться не более 13 субъектов, и, таким образом, в семи округах – не более чем $7 \times 13 = 91$ субъект. Болотный и Холмистый округа имеют менее 13 субъектов, поэтому во всей Федерации не более 89 субъектов, причем последнее количество достигается лишь в том случае, если все остальные округа (кроме Болотного и Холмистого) имеют по 13 субъектов.

Итак, в Снежном и Пустынном округах субъектов поровну.

4. Обозначим длину аквариума через a, ширину – b, а высоту – c. Поскольку занимаемый воздухом в аквариуме объем один и тот же, независимо от его положения, то

$$3bc = 3ac = 3ab.$$

Отсюда $a = b = c$ и, таким образом, аквариум имеет форму куба.

5. Упорядочим гири по массе и положим на левую чашку весов пять самых легких гирь с общей массой m, а на правую чашку – пять самых тяжелых гирь с общей массой M. Выровняем весы, добавив на обе чашки по 5 гирь. Масса пяти добавочных гирь на левой чашке весов при этом не будет превышать M, а масса пяти добавочных гирь на правой чашке весов будет не меньше m. Если весы оказались в равновесии, то масса гирь на каждой чаше весов в точности равна $M + m$, причем масса добавочных гирь на правой чашке равна m, а масса добавочных гирь на левой чашке равна M. Рассмотрим два набора из пяти самых легких гирь на левой чашке весов массы m и равный ему по массе набор из пяти гирь на правой чашке весов. Если среди этих наборов будут различающиеся по массе гири, то равенства общих масс гирь в этих наборах не будет. Точно так же, рассматривая набор из пяти самых тяжелых гирь на правой чашке весов массы M и равный ему по массе набор из пяти гирь на левой чашке весов, приходим к выводу, что массы гирек в этих наборах равны.

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №5 за 2000 г.)

6. Оценим числитель и знаменатель левой части неравенства

$$\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} < 4.$$

Имеем

$$(a+b)^2 > a^2 + b^2,$$

$$(c+d)^2 = c^2 + d^2 + 2cd \leq \left(c^2 + d^2\right) + \left(c^2 + d^2\right) = 2\left(c^2 + d^2\right).$$

Следовательно,

$$\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} > \frac{a^2 + b^2}{2\left(c^2 + d^2\right)},$$

а значит,

$$4 > \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}.$$

7. Обозначим искомые числа a, b, c, d. По условию, числа abc, bcd, cda – квадраты целых чисел, следовательно, их произведение – число $a^2b^2c^3d^2$ – также квадрат целого числа. Отсюда заключаем, что число c^3 – квадрат целого числа и, следовательно, квадратом целого числа является число c. Докажем это.

Разложив число c на простые множители, $c = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, запишем равенство куба этого числа некоторому квадрату целого числа:

$$c^3 = p_1^{3\alpha_1} p_2^{3\alpha_2} \ldots p_k^{3\alpha_k} = p_1^{2\beta_1} p_2^{2\beta_2} \ldots p_k^{2\beta_k}.$$

Из равенства степеней простых множителей в этих двух разложениях заключаем, что $3\alpha_i = 2\beta_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Следовательно, все числа α_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, – четные: $\alpha_i = 2\gamma_i$. Отсюда $c = \left(p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \ldots p_k^{\gamma_k}\right)^2$ – квадрат целого числа.

Рассмотрев группу чисел abc, bcd, abd, точно так же заключаем, что число b – квадрат целого числа. Воспользовавшись другими перестановками (abc, bcd, acd для числа c; abd, bcd, acd для числа d), делаем вывод, что числа c и d также являются квадратами целых чисел.

8. Рассмотрим треугольник ABC, вокруг которого описана окружность O. Пусть D – точка пересечения биссектрис двух внешних углов этого треугольника с вершинами B и C, I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Поскольку $\angle IBD = \angle ICD = 90°$, то точки I, B, D и C лежат на некоторой окружности O'. Если бы точка D лежала на окружности O, то окружности O и O' совпадали бы по трем точкам. Но это невозможно, так как очевидно, что окружности O и O' различны.

Итак, две биссектрисы внешних углов треугольника не могут пересекаться на его описанной окружности.

9. Выберем *самую нижнюю* горизонталь доски, на которой стоят ладьи, и рассмотрим *самую правую* ладью на этой горизонтали. Обратим внимание, что *ниже* этой ладьи (на той же вертикали) и *правее* этой ладьи (на той же горизонтали) ладей нет, поэтому она может угрожать не более чем двум ладьям (расположенным левее ее на той же горизонтали и выше ее на той же вертикали). Таким образом, $n \leq 2$.

Задачу можно решить для всех $n \leq 2$.

Для этого рассмотрим поля доски, примыкающие к ее наружной границе. Каждое такое поле – квадрат, одна сторона которого (а для угловых полей – даже две) совпадает с наружной границей доски. Назовем такие стороны *наружными отрезками*. Всего на доске, как видно, $8 \times 4 = 32$ наружных отрезка.

Пусть на доске расставлено несколько ладей так, что каждая из них угрожает ровно n другим ладьям. Заметим, что любая ладья ведет «обстрел» по четырем направлениям: влево, вправо, вверх и вниз от поля, которое занимает. Если при этом ровно n других ладей попадает под ее удар, то это значит, что в n из этих четырех направлений «выстрел» ладьи попадает в другую ладью, а в остальных $(4-n)$ направлениях «выстрел» попадает на наружный отрезок. Кроме того, каждый наружный отрезок может обстреливаться не более чем одной ладьей (той, что находится ближе к нему в той же вертикали или горизонтали). Следовательно, число ладей не может превосходить $\frac{32}{4-n}$. Для $n = 0$, 1 и 2 получаем соответствующие значения максимального допустимого числа ладей: 8, 10 и 16.

Оказывается, все эти значения достигаются; примеры приведены на рисунке 1.

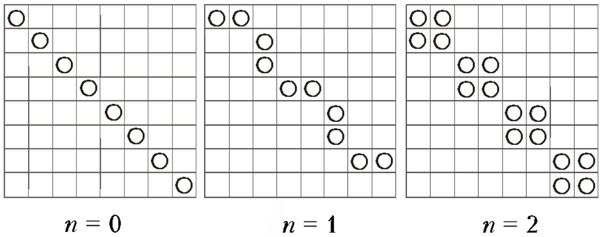


Рис. 1

10. Обозначим школьников точками. Если два школьника обменялись адресами, то соединим соответствующие им точки линией. В полученной схеме (графе) будет 45 точек и 950 линий. Нужно доказать, что построенный граф является связным, т.е. можно перейти по линиям из любой точки в любую другую. Предположим, что это не так. Рассмотрим несвязный граф, который содержит наибольшее число линий между точками. Очевидно, что этот граф состоит из двух частей, в каждой из которых любые две точки соединены линией. Пусть в большей из частей будет k точек (значит, $k \ge 23$), тогда в меньшей их $(45-k)$. Число линий такого графа

$$k(k-1)/2+(45-k)(44-k)/2=k^2-45k+45\cdot 22.$$

Значения построенного квадратного трехчлена растут с увеличением числа k. Наибольшее k, при котором граф является несвязным, равно 44. В таком графе будет 946 линий. А в графе, соответствующем условию задачи, 950 линий. Получено противоречие, т.е. исходный граф является связным. Следовательно, Маша может узнать адрес Ирины.

О пользе вневписанных окружностей

1. Исходя из теоремы 2, сумма периметров малых треугольников равна периметру большого. Значит, периметр исходного треугольника равен 48. А так как основание равно 12, то боковая сторона равна 18.

2. Пусть в данном треугольнике $AB = 12$, $AC = 10$ и $BC = 6$. Окружность, вписанная в данный треугольник, является вневписанной для отсеченного. Значит (по теореме 2), полупериметр отсеченного треугольника равен длине отрезка от вершины A до точки касания вписанной окружности, который равен разности полупериметра и стороны BC. Отсюда искомый периметр равен

$$\left((AB+AC+BC)/2-BC\right)\cdot 2=8\cdot 2=16.$$

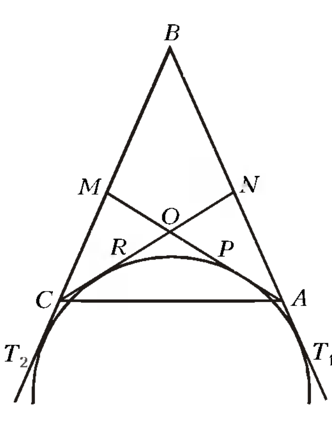


Рис. 2

3. Точка X совпадает с точкой касания вневписанной окружности. Доказательство вытекает из теоремы 4.

4. Очевидно, что мы можем построить на сторонах данного угла A точки T_1 и T_2 – точки касания вневписанной окружности. Восставив к сторонам угла перпендикуляры в точках T_1 и T_2, найдем центр вневписанной окружности. Под данным углом B проводим касательную к построенной вневписанной окружности (при помощи гомотетии). Эта касательная отсекает от сторон угла искомый треугольник.

5. По условию $AM + AN = CM + CN$, следовательно, периметры треугольников BNC и BAM равны. Значит, они имеют общую вневписанную окружность (рис.2). Пусть эта окружность касается прямых BC и BA в точках T_2 и T_1, а прямых AM и CN в точках P и R. Тогда $AB + AP = BC + CR = BT_2$. И так как $OP = OR$, то $AO + AB = CO + CB$, что и требовалось доказать.

6. Так как $AM = 2MM_1$ (M – центроид, M_1 – середина BC), то положение точки M_1 известно. Далее воспользуемся теоремой 4. В треугольнике TKR отрезок M_1O – средняя линия (O – инцентр), значит, $OM_1 \parallel RT$ (рис.3). Очевидно, что для точки N – середины RT – выполняется условие $\angle ONM_1 = 90°$. Следовательно, точку N мы можем построить как точку пересечения прямой, проходящей через точку A параллельно M_1O, и полуокружности, построенной на отрезке M_1O как на диаметре. Далее, проведя через точку M_1 прямую, параллельную отрезку NO, мы получим прямую, содержащую сторону BC. Остается построить вписанную окружность и провести из точки A к ней касательные до пересечения с прямой BC. Заметим, что полуокружность с диаметром M_1O пересекает RT дважды, что соответствует двум различным решениям задачи.

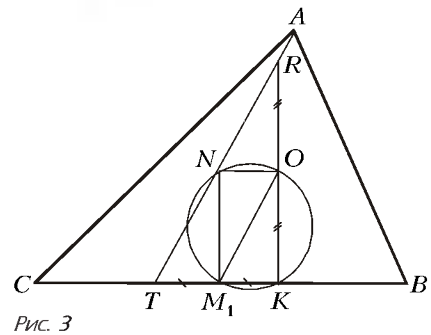


Рис. 3

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\frac{4r-280}{90-r}$, $r \in \left[70; 76\frac{2}{3}\right]$.

2. При $a < 0$ уравнение не имеет решений, при $a = 0$ и при $a > 4$ уравнение имеет два решения, при $0 < a < 4$ уравнение имеет четыре решения, при $a = 4$ уравнение имеет три решения.

3. $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

4. $\left(-\frac{1+\sqrt{29}}{2}; -3\right] \cup \left[3; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$. **5.** $2R\sqrt{1-\frac{4\sin^2\alpha/2}{3}}$.

Вариант 2

1. 12. **2.** $(2;3)$, $(3;2)$, $\left(\frac{-7\pm\sqrt{73}}{2}; \frac{-7\mp\sqrt{73}}{2}\right)$.

Указание. Поскольку $c = 1$, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} xy-(x+y)=1, \\ xy(xy+x+y+1)=72. \end{cases}$$

3. $\frac{2\pi}{15}n$, $n \ne 15t$, $n, t \in \mathbf{Z}$; $\frac{\pi}{17}+\frac{2\pi}{17}k$, $k \ne 8+17t$, $k, t \in \mathbf{Z}$.

4. $\left(-(3+\log_5 3)\pm\sqrt{5+\log_5^2 3+6\log_5 3}\right)/2$. **5.** 3 :10.

Вариант 3

1. 6. **2.** –99; –19; –17; 63.

3. $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **4.** $(-4; 4)$. **5.** $1/2$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $v_0 = gt/2 - H/t$. **2.** $A = \dfrac{(\mu mg)^2}{2k(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)^2}$.

3. $\rho = \left(U(\mathcal{E} - U) - Pr\right)/(2lP)$. **4.** $\varphi_2 = \varphi_1 \dfrac{p_1 V_1 T_2}{p_2 V_2 T_1} = 14{,}1\%$.

5. $f = -\dfrac{d|F|}{d + |F|} = -4{,}8$ см, изображение мнимое.

Вариант 2

1. $a = v_0^2/(2s)$. **2.** $A = 2mgH - mv^2/2$.

3. $U = \left(\mathcal{E} \pm \sqrt{\mathcal{E}^2 - 4Pr}\right)/2$.

4. $m = \left(p_1/T_1 - p_2/T_2\right)V\mathrm{M}/R = 9\cdot 10^{-6}$ кг. **5.** $F = -L(L-l)/l$.

Вариант 3

1. $t = 2s/v_0$. **2.** $A' = 2mgL\sin\alpha + A$. **3.** $r = (\mathcal{E} - U)/I$.

4. $m = p_{н}(V_0 - V)\mathrm{M}/(RT) = 0{,}002$ кг. **5.** $s = FL/(F - L)$.

Московский государственный технический университет им.Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 50 дней. **2.** $\pm\left((-1)^n \dfrac{\pi}{3} + n\pi\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

3. $7/2$. **4.** $(-1; 1)$.

5. -1; 1. *Указание.* Пусть $y = kx + 1$ – уравнение прямой AB. Так как

$$|x| - x = \begin{cases} 0 \text{ при } x \ge 0, \\ -2x \text{ при } x < 0, \end{cases}$$

имеем $-2 < k < 0$,

$$x_A = \frac{-1}{2+k} \text{ и } y_A = \frac{2}{2+k}$$

(рис.4), $y_B = 0$, $x_B = \dfrac{-1}{k}$. Площадь треугольника OAB равна

$$S = \frac{1}{2}x_B y_A = \frac{1}{-k(2+k)}.$$

Наибольшее значение знаменателя этой дроби равно 1 при $k = -1$.

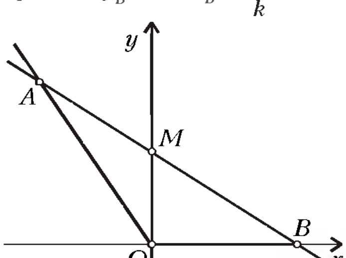


Рис. 4

6. $x = y = a + \sqrt{1 - a^2}$ при $a \in \left(-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}\right] \cup \{1\}$.

Указание. Исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} y = x,\ x > 0, \\ x^2 - 2ax + 2a^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Последняя система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда квадратное уравнение имеет ровно один положительный корень.

7. 1; $\sqrt{3}$. *Указание.* Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – данный параллелепипед, а параллелограмм PC_1QA – его сечение (рис.5). Площадь этого параллелограмма равна удвоенной площади треугольника APC_1, причем высота PK треугольника не меньше длины общего перпендикуляра скрещивающихся прямых DD_1 и AC_1, так что минимальную площадь имеет сечение, для которого $PK \perp DD_1$, $PK \perp AC_1$. Проекцией отрезка PK на плоскость $ABCD$ служит высота DL треугольника ACD. Ясно, что $PQ < AC_1$, так что

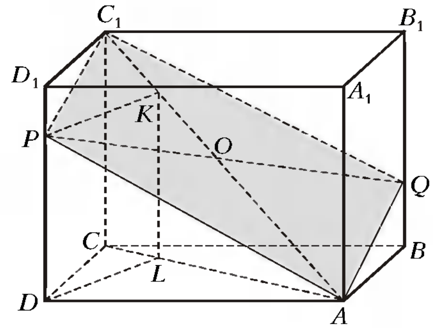


Рис. 5

$AC_1 = 6$, $PQ = 2\sqrt{3}$. Вычисляя отрезки $PK = DL = \sqrt{3}/2$, $OK = 3/2$, получаем, что $CL/LA = 1/3$. Положив $CL = x$, из соотношения $DL^2 = CL \cdot LA$ находим x, а затем AD и CD.

Вариант 2

1. 8 мин, 9 мин. **2.** $(-1)^k \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

3. 9. **4.** $(0; 1) \cup \left(1; \dfrac{3}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3}{2}; 3\right)$.

5. 1; 8. *Указание.* Прямая $y = kx$ пересекает график квадратного трехчлена при

$$x_{1,2} = 2(k-2) \pm \sqrt{4k^2 - 16k + 20},$$
$$y_{1,2} = 2(k-2)k \pm k\sqrt{4k^2 - 16k + 20}.$$

Квадрат расстояния между точками $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ равен $16\left((k-1)^4 + 4\right)$, откуда минимум расстояния равен 8 при $k = 1$.

6. $x_{1,2} = \left(5 - a \pm \sqrt{a^2 + 15a}\right)/5$ при $a \in (-\infty; -15) \cup (0; 1]$;

$x_1 = \left(5 - a + \sqrt{a^2 + 15a}\right)/5$, $x_2 = 1 - \sqrt{a}$ при $a \in (1; +\infty)$.

Указание. При $x \ge 0$ получаем уравнение

$$5x^2 - 2(5-a)x + 5(1-a) = 0, \qquad (\&)$$

имеющее два различных неотрицательных корня при

$$a < -15 \text{ и } 0 < a \le 1.$$

При этом

$$x_{1,2} = \frac{5 - a \pm \sqrt{a^2 + 15a}}{5}.$$

Уравнение (&) имеет один неотрицательный корень при $a = 0$ (тогда $x = 1$) и $a = -15$ ($x = 4$), а также при $a > 1$. При $x < 0$ получим уравнение

$$(x-1)^2 = a,$$

имеющее один отрицательный $\left(x = 1 - \sqrt{a}\right)$ и один положительный $\left(x = 1 + \sqrt{a}\right)$ корень при $a > 1$.

7. $\dfrac{S}{3\pi}$. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – данный параллелепипед (рис.6). Проведем $(B_2D_2) \| BD$, $A \in (B_2D_2)$ и $CF \perp (B_2D_2)$, тогда $FC_1 \perp (B_2D_2)$ и

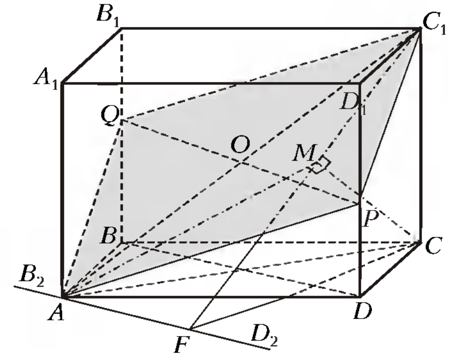


Рис. 6

плоскость C_1FC перпендикулярна прямой B_2D_2, а следовательно, и плоскости сечения. Тогда $\angle C_1FC = 45°$. Проведем $CM \perp C_1F$, очевидно, $CM \perp (C_1FA)$, AM – проекция AC на секущую плоскость, а $\angle CAM = 30°$.
Пусть $MC = l$, тогда $AC = 2l$ и $CC_1 = l\sqrt{2}$.
Диагональ параллелепипеда, вписанного в сферу радиуса R, равна ее диаметру $2R$.
Далее находим, что

$$l = 2R/\sqrt{6},\ AC = 4R\sqrt{6},\ C_1F = 2R,$$

$$S_{APC_1Q} = \frac{4}{3}R^2 = \frac{S}{3\pi}.$$

Московский государственный институт электронной техники

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 1. **2.** $(-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **3.** 5. **4.** $(-\infty;\ 0]$. **5.** $\frac{2062}{25}$.

6. 12 часов. **7.** $\frac{a}{6}$. **8.** См. рис.7. **9.** $-\frac{1}{6}$. **10.** $\frac{103\sqrt{209}}{1152}$.
11. $(-4;\ 4)$.

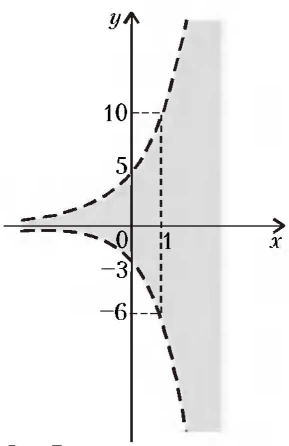


Рис. 7

Вариант 2

1. 0,5. **2.** $3y^{\frac{1}{4}} - 4^{-\frac{3}{4}}$. **3.** 0,5.
4. $(-2;\ +\infty)$. **5.** $\log_{\frac{2}{7}} 3$.
6. $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}$, $n \ne 3 + 7l$, $n \in \mathbf{Z}$, $l \in \mathbf{Z}$.

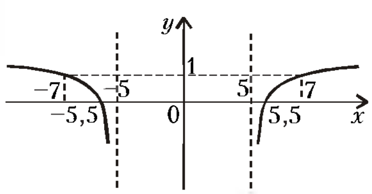


Рис. 8

7. См. рис.8. **8.** 5, 12. **9.** 0. **10.** 100133. **11.** 0,25.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $v = \pi n D \approx 26$ м/с. **2.** $S = \frac{m}{(\rho_в - \rho_л)H} = 25$ м^2.

3. $\alpha = \arccos\left(1 - \frac{m^2(v_1 - v_2)^2}{2glM^2}\right) \approx 31°$.

4. $A = R\left(T_1 + T_2^2/T_1 - 2T_2\right) \approx 11$ Дж.

5. $V_1 = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}V = 80$ л, $V_2 = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}V = 120$ л.

6. $t = t_0 + (n-1)/\alpha = 2200$ °С. **7.** $I_к = \frac{\mathcal{E}l}{\mathcal{E} - U} = 48$ А.

8. $W = 2C\mathcal{E}^2 \approx 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ Дж.

9. $R = \frac{nd}{n-1} = 3$ мм. **10.** $U = \frac{1}{e}\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right) \approx 1{,}9$ В.

Вариант 2

1. $s_2 = s_1(t_2/t_1)^2 = 0{,}9$ м. **2.** $F = m(g + a) \approx 1300$ Н.

3. $V = \frac{mv\cos\alpha}{M + m} = 0{,}1$ м/с. **4.** $\varphi = \frac{p_{н2}}{p_{н1}}\frac{T_1}{T_2}100\% = 49\%$.

5. $\eta = \frac{A - RT_1(n-1)}{A + 3RT_1(n-1)/2}100\% \approx 29\%$.

6. $F = qE/2 = 10^{-4}$ Н. **7.** $A = \frac{\mathcal{E}^2}{R + r}t \approx 40$ Дж.

8. $I_1 = \frac{\mathcal{E}L_2}{R(L_1 + L_2)} = 0{,}6$ А. $I_2 = \frac{\mathcal{E}L_1}{R(L_1 + L_2)} = 0{,}3$ А.

9. $l_1 = 2l - \frac{Fd}{d - F} = 10$ см; $H_1 = H\frac{F}{d - F} = 6$ см.

10. $\lambda = \frac{hc}{A + eU} \approx 0{,}25$ мкм.

Новосибирский государственный университет

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $m = \rho Sl/4$.
2. Для плотности насыщенного пара из уравнения Менделеева—Клапейрона имеем $\rho_н = Mp_н/(RT)$. Если в сосуд из баллона перешла масса газа m, то для нее справедливо равенство $p_0V_0 = mRT/M$, причем $m = (\rho - \rho_н)V$. Отсюда получаем

$$p_н = \frac{\rho RT}{M} - \frac{p_0V_0}{V}.$$

3. Заряженные частицы в магнитном поле в общем случае движутся по винтовым линиям. Здесь же, раз встреча частиц состоялась, то, в соответствии с законом сохранения импульса, при распаде составляющие скоростей, направленные вдоль и против поля, должны отсутствовать. Поэтому частицы будут двигаться по окружностям в разные стороны, оставаясь в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}$, причем $m_1v_1 = m_2v_2$. На основании второго закона Ньютона получаем

$$R_2 = \frac{m_2v_2}{qB} = R_1 = \frac{m_1v_1}{qB} = R,$$

т.е. частицы движутся по одной и той же окружности. Время движения их до встречи равно

$$t = \frac{2\pi R}{v_1 + v_2} = \frac{2\pi}{qB}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}.$$

4. Пусть $N = N_A/22{,}4$ (где N_A – постоянная Авогадро) – число молекул водорода в сосуде. Тогда удаленный заряд равен $q = e \cdot 2N\eta = eN_A\eta/11{,}2$, где η – искомое неизвестное. После удаления электронов положительный заряд q распределится по поверхности сосуда, создав избыточное разрушающее давление. Пусть сосуд – куб с ребром $a = (V)^{1/3} = 0{,}1$ м. Простейшая, конечно очень грубая, модель, но вполне пригодная для оценки порядка искомой величины, такова. Два точечных заряда по $q/2$, находясь в центрах противоположных граней куба, создают избыточное давление p. Тогда

$$p = \frac{k(q/2)^2}{a^2}\frac{1}{a^2} = \frac{k(eN_A\eta/11{,}2)^2}{4a^4},$$

$$\eta = \frac{22{,}4a^2\sqrt{p/k}}{eN_A};\ 2{,}5 \cdot 10^{-8}$$

(здесь $p = 10^6$ Па, $k = 9 \cdot 10^9$ Н·м^2/Кл^2, $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$). Если взять более реалистическую модель, выбрав удобную для расчета сферическую форму сосуда радиусом $a = (3V/(4\pi))^{1/3} = 6{,}2 \cdot 10^{-2}$ м, то плотность заряда равна

$\sigma = q/\left(4\pi a^2\right)$, поле внутри отсутствует, а снаружи равно $E = k \cdot 4\pi\sigma = kq/a^2$. Тогда

$$p = \frac{qE}{2} = \frac{kq^2}{8\pi a^4},\ \eta = \frac{11{,}2a^2\sqrt{8\pi p/k}}{eN_A};\ 6\cdot10^{-8}.$$

5. Сумма сил нормального давления $2N\sin\alpha$ выталкивает упаковку, а сумма сил трения $2F\cos\alpha = 2\mu N\cos\alpha$ ее удерживает (здесь 2α – угол раствора ножниц). Угол α для упаковки таков, что $\sin\alpha > \mu\cos\alpha$ вплоть до ее полного выскальзывания. Поскольку толщина пластинки много меньше диаметра упаковки, равенство $\sin\alpha = \mu\cos\alpha$ для пластинки достигается на некотором расстоянии от конца ножниц. В этом случае сила трения покоя препятствует выскальзыванию: $2N\sin\alpha = 2F\cos\alpha < 2\mu N\cos\alpha$.

Вариант 2

1. $l_0 = \left(m_1l_2 + m_2l_1\right)/\left(m_1 + m_2\right)$.

2. Из того, что треугольник равнобедренный, а заряды и массы частиц в вершинах острых углов одинаковы (рис.9), следует, что гипотенуза в процессе движения переносится параллельно, т.е. движется поступательно, увеличиваясь в размерах. Если найдется условие, при котором один из катетов тоже переноситься параллельно, то подобие будет обеспечено. Скорость и ускорение частиц с массой m удобно разложить по направлениям катета и гипотенузы. Из построения видно, что катет переносится параллельно, если в любой момент времени $v_M\cos45^\circ = v_2\cos45^\circ$, т.е. $v_M = v_2$, и, следовательно, $a_M = a_2$. Из закона Кулона и последней связи получаем

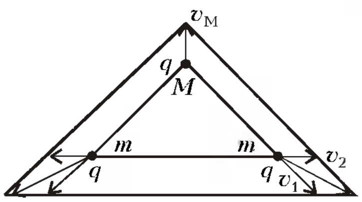


Рис. 9

$$M = 2\sqrt{2}m.$$

3. Так как напряжение на катушке равно $U_L = L\Delta I/\Delta t$, в момент, когда ток максимален, напряжение на ней равно нулю, а напряжение на конденсаторах будет одним и тем же – обозначим его через U. Суммарный заряд на верхних (и на нижних) пластинах конденсаторов сохраняется. Если заряды одноименные, то

$$q = C_1U_1 + C_2U_2 = \left(C_1 + C_2\right)U,$$

откуда

$$U = \frac{C_1U_1 + C_2U_2}{C_1 + C_2}.$$

Искомый ток определяется из закона сохранения энергии:

$$\frac{C_1U_1^2}{2} + \frac{C_2U_2^2}{2} = \frac{LI^2}{2} + \frac{\left(C_1 + C_2\right)U^2}{2},$$

откуда

$$I = \left|U_1 - U_2\right|\sqrt{\frac{C_1C_2}{L\left(C_1 + C_2\right)}}.$$

Если же на верхних пластинах разноименные заряды, то

$$I = \left(U_1 + U_2\right)\sqrt{\frac{C_1C_2}{L\left(C_1 + C_2\right)}}.$$

4. Простейшая модель – две точечные массы $M_З/2$ находятся на расстояния радиуса Земли $R_З$ друг от друга. Тогда по закону всемирного тяготения

$$F \approx GM_З^2/\left(4R_З^2\right) = M_Зg/4 = \rho_З\,\pi gR_З^3/3 \approx 1{,}5\cdot10^{25}\ \text{Н}$$

при $g = 10$ м/с^2, $R_З \approx 6{,}4\cdot10^6$ м, $G \approx 6{,}67\cdot10^{-11}$ м$^3/\left(\text{с}^2\cdot\text{кг}\right)$, $\rho_З \approx 5{,}5\cdot10^3$ кг/м^3.

Можно оценить силу через давление на Земле, считая ее недра несжимаемой жидкостью:

$$F;\ pS;\ \rho_ЗgR_З\pi R_З^2;\ 5\cdot10^{25}\ \text{Н}.$$

Вариант 3

1. $x = d\sin\alpha/\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}$.

2. $m = 2\alpha p_0lSh/\left(g\left(\alpha\left(l^2 - h^2\right) - h^2\right)\right)$.

3. После включения поля в системе возникнут гармонические колебания. Сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, поэтому сохраняется импульс:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = 0,$$

а центр масс остается неподвижным. Максимальные значения скоростей тел достигаются одновременно в тот момент, когда их ускорения, а следовательно, и действующие на них силы равны нулю. Если смещения тел в момент прохождения равновесия равны x_1 и x_2, то по закону Гука

$$qE = k\left(x_1 - x_2\right).$$

Из закона сохранения энергии имеем

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = qE\left(x_1 - x_2\right) - \frac{k\left(x_1 - x_2\right)^2}{2}.$$

Отсюда получаем максимальные значения скоростей:

$$v_{1m} = qE\sqrt{\frac{m_2}{km_1\left(m_1 + m_2\right)}},\ v_{2m} = qE\sqrt{\frac{m_1}{km_2\left(m_1 + m_2\right)}}.$$

4. Для экватора, например, $\Delta T/T;\ 0{,}82$.

5. Вначале, при небольшом погружении, стержень вертикален и его равновесие устойчиво. Затем при малых отклонениях стержня от вертикали возникают моменты сил, которые не возвращают его в вертикальное положение, а содействуют дальнейшему отклонению. Неустойчивость вертикального положения возникает при условии

$$L - l < L\sqrt{1 - \rho/\rho_в},$$

где L – длина стержня, l – глубина его погружения, ρ – плотность материала стержня, $\rho_в$ – плотность воды. При этом сила натяжения нити еще не равна нулю, и, потеряв вертикальную устойчивость, стержень занимает наклонное положение. По мере дальнейшего подъема уровня воды стержень будет наклоняться все сильнее, пока не займет устойчивое горизонтальное положение, при котором сила натяжения нити равна нулю.

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. а) $x \in (0;\ n)$;

б) $g(x) = 4x - x^2$, $x \in (0;\ 4)$ (рис.10);

в) $a \in \{0\}\cup[1;\ 3)$.

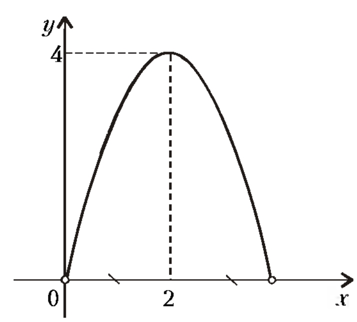


Рис. 10

2. $x > 1$.

3. $(-1)^k\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi k}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

4. $\sqrt{3}a^2$.

5. $\dfrac{H^3\sin2\alpha\,\mathrm{ctg}^2\beta}{3}$.

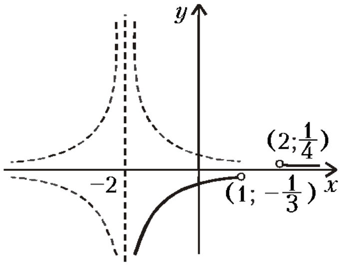


Рис. 11

Вариант 2

1. а) $x \in (-\infty; 1] \cup (2; +\infty)$;

б) $g(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x+2}, & x \in (-2; 1), \\ \dfrac{1}{x+2}, & x \in (2; +\infty) \end{cases}$

(рис.11);

в) $a \in [-1/3; 0] \cup [1/4; +\infty)$.

2. $(0; 1/9] \cup [27; +\infty)$.

3. $x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z},\quad x = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

5. $\dfrac{\pi h^3\left(-\sin^2\beta\cos^2\alpha/2\right)}{3\sin^2\beta\cos^2\alpha/2}$.

Российский государственный технологический университет им.К.Э.Циолковского

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $(16; 1)$, $(1; 16)$. **2.** $\dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi n}{10}$, $\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. 4 ч, 3 ч. **4.** $\left(2; \dfrac{7}{3}\right] \cup \left[\dfrac{5}{2}; \dfrac{8}{3}\right)$. **5.** $-3 < k < 3$. **6.** 1 : 4.

Вариант 2

1. $(25; 16)$. **2.** $\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{6}$, $\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. 48 км/ч, 32 км/ч. **4.** $(-\infty; 0] \cup [9; 15)$.

5. $k < \dfrac{5}{7}\ln 2$. **6.** 1 : 6.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. 96 В. **2.** 30°; 1 с. **3.** 415 Дж. **4.** 0,01 А, 1,4 В.
5. 219 м/с.

Вариант 2

1. 2000 В/м. **2.** 16,9. **3.** 0,6 м. **4.** 231 К; 4700 Дж.
5. 0,08 м.

Российский государственный университет нефти и газа им.И.М.Губкина

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 0,4. **2.** –4. **3.** 2. **4.** –2. **5.** 3. **6.** 4. **7.** –0,15. **8.** –22,5. **9.** 0,5. **10.** 13. **11.** 0,2. **12.** 13.

Вариант 2

1. 0,2. **2.** 5. **3.** –3. **4.** –8. **5.** 5. **6.** 2,5. **7.** 0,25. **8.** –9. **9.** 0,5. **10.** 18. **11.** 2. **12.** 4.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. 60 м/с. **2.** 7 Н. **3.** 60 Дж. **4.** 40 Н.
5. 96 °С. **6.** 3 Ом. **7.** 30. **8.** 2 мкс.
9. 7 кг/с. **10.** 327 °С. **11.** 300 нК. **12.** 16.

Вариант 2

1. 50 м. **2.** 84%. **3.** 240 см^3. **4.** 25%. **5.** 5.
6. 17 Дж. **7.** 9 см. **8.** 3. **9.** 100 кг.
10. 60 Н. **11.** 60%. **12.** 2000 км/с.

Санкт-Петербургский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $a \in \left[\dfrac{3-3\sqrt{5}}{2}; \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right]$. При $a = 0$ получаем уравнение $\sqrt{9-x^2} = |x|$, имеющее два решения.

Пусть $a > 0$. Функция $f(x) = a + \sqrt{x^2 - ax}$ определена на лучах $(-\infty; 0]$ и $[a; +\infty)$, убывает на первом из них и возрастает на втором, причем $f(x) \to +\infty$ при $x \to \infty$. График $y = \sqrt{9-x^2}$ – полуокружность радиуса 3, так что данное уравнение имеет два решения, если точка $A(a; a)$ графика функции f лежит в круге радиуса 3, т.е. если $2a^2 \le 3$ (рис.12,a). Таким образом,

$$0 < a \le \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

В случае $a < 0$ уравнение имеет два решения, если $f(-3) \ge 0$ (рис.12,$б$). Получаем неравенство

$$a + \sqrt{9+3a} \ge 0,$$

откуда $\dfrac{3-3\sqrt{5}}{2} \le a < 0$.

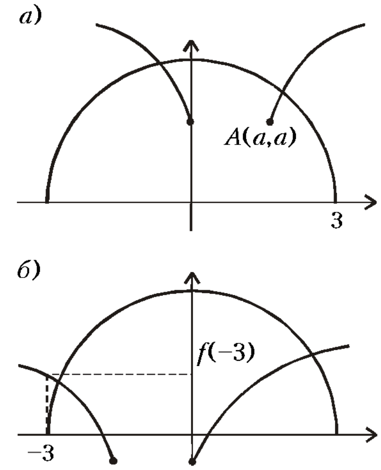


Рис. 12

2. $\dfrac{\pi}{12}(6n-1)$, $n \in \mathbf{Z}$, $\dfrac{\pi}{24}(6m+1)$, $m \in \mathbf{Z}$, $m \le 0$.

3. $[-2; 0) \cup (5; +\infty)$. **4.** $R/r = \left(\pm\cos\dfrac{\varphi}{2} + \sqrt{\cos^2\dfrac{\varphi}{2} + 8}\right)\Big/2$.

Указание. Следует рассмотреть отдельно два случая в зависимости от того, лежит ли точка O в треугольнике или же не лежит. Рассмотрим первый случай (второй рассматривается аналогично).

Будем для простоты считать, что $r = 1$, тогда найденное значение R и будет искомым отношением. Треугольник ABC – равнобедренный. Пусть $AB = AC$, K – середина основания BC, P – точка касания стороны AB с меньшей окружностью. Имеем

$$OK = \cos\frac{\varphi}{2},\ BK = \sqrt{R^2 - \cos^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Далее,

$$AB = \sqrt{R^2 - \cos^2\frac{\varphi}{2} + \left(R + \cos\frac{\varphi}{2}\right)^2} = \sqrt{2R\left(R + \cos\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Из подобия треугольников AOP и ABK получаем, что

$$\sqrt{2R\left(R + \cos\frac{\varphi}{2}\right)} = R\sqrt{R^2 - \cos^2\frac{\varphi}{2}},$$

откуда

$$R^2 - R\cos\frac{\varphi}{2} - 2 = 0.$$

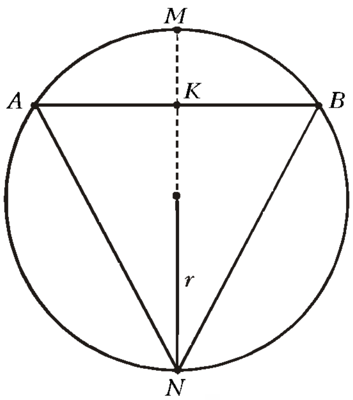


Рис. 13

5. $MA = MB = \frac{1}{\sqrt{3}}$. *Указание.* Точки A, B, M и N лежат на сфере, описанной около пирамиды $ABCN$, а также на единичной сфере с центром в точке C. Таким образом, эти четыре точки лежат на пересечении этих сфер, т.е. на окружности, описанной около равностороннего треугольника ABN; в частности, точка M лежит в плоскости грани ABN. Пусть K – середина стороны AB (рис.13). Тогда

$$MK = \frac{1}{2}r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

откуда

$$MA^2 = MB^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$

Вариант 2

1. –39. Пусть a_1 – первый член последовательности, d – ее разность. Из соотношений

$$x = a_1 + 6d \text{ и } \frac{a_1 + a_{17}}{2}17 = 51$$

получаем, что $x + 2d = 3$. Пусть $-6x = a_n$. Тогда

$$n = \frac{7\frac{3-x}{2} - 7x}{\frac{3-x}{2}} = \frac{21(x-1)}{x-3}.$$

Поскольку при $x < -20$ верны неравенства

$$21 > \frac{21(x-1)}{x-3} > \frac{21 \cdot 21}{23} > 19,$$

а число n – натуральное, то $n = 20$ и $x = -39$.

2. $2\pi k - \frac{5\pi}{6}$ и $\frac{2}{3}\pi k + \frac{5}{18}\pi$ при $k = 1, 2, \ldots$;

$-\frac{\pi}{18} - \frac{2}{3}\pi k$ и $\frac{\pi}{6} - 2\pi k$ при $k = 0, 1, \ldots$

3. $\left(\frac{4}{5}; \frac{9}{10}\right] \cup (1; 2]$. **4.** 3.

5. $CM = 5\sqrt{3}$ и $DM = 2\sqrt{3}$. *Указание.* Отрезки BM и DN параллельны. Проведем отрезок $MK \parallel AB$ (рис.14,*а*). Пусть $\alpha = \angle MDN = \angle ADN$. Тогда $\angle DMK = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$, $\angle DKM = \frac{\pi}{2} + \alpha$. Четырехугольник $BMKN$ – параллелограмм, так что $MK = BN = 2$. По теореме синусов находим из треугольника DKM (рис.14,*б*), что $DK = \frac{2\cos 2\alpha}{\sin\alpha}$. Поскольку $ND\sin\alpha = 6$, а $ND = NK + KD = 10 + KD$, то $6 = 10\sin\alpha + 2\cos 2\alpha$, откуда

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}.$$

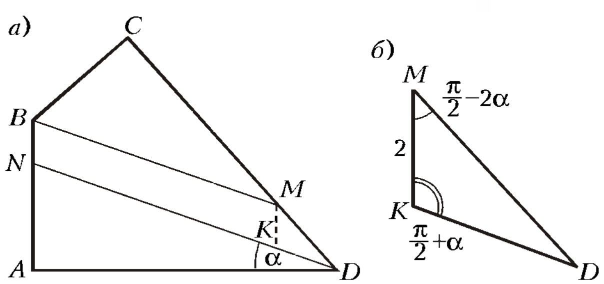


Рис. 14

Вариант 3

1. $\left[1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\right]$. *Указание.* Сделав замены $x = \sqrt{2}\cos t$ и $y = \sqrt{2}\sin t$, получим уравнение $\cos 2t + \sin 2t = a - 1$, которое имеет решения при $|a - 1| \le \sqrt{2}$.

2. $-7/4$.

3. $\left[-1; -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4}; 0\right) \cup \left[\frac{3}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. **4.** $\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{c^2S^2}{2S - c^2}}$.

Пусть $2a$ и $2b$ – длины сторон прямоугольника, d – расстояние от центра O окружности до диагонали AC. Суммируя площади треугольников ABO, BOC и AOC, получим, что

$$\pm d\sqrt{a^2 + b^2} + ab + a^2 = 2ab$$

(знак «минус» соответствует случаю, когда точка O лежит вне треугольника ABC). Поэтому

$$d = \frac{\left|a^2 - ab\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

следовательно,

$$c^2 = 4\left(a^2 - d^2\right) = \frac{8a^3b}{a^2 + b^2}.$$

В данном случае $a = r$, $b = \frac{S}{4r}$, так что

$$\frac{S^2c^2}{16r^2} = \left(S - c^2\right)^2.$$

5. См. рис.15.

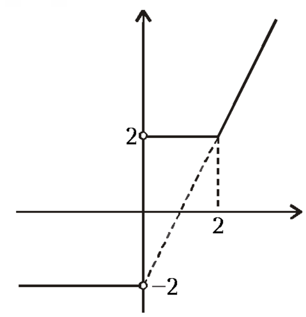


Рис. 15

Санкт-Петербургский государственный технический университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 0,3. **2.** –1. **3.** –2. **4.** –1. **5.** 5. **6.** 0. **7.** $\left(1 + \sqrt{5}\right)/2$. **8.** $6 - 2\pi$. **9.** –2. **10.** $\{1\} \cup \{\pi/2 + \pi k\}$, $k \in \mathbf{Z}$. **11.** 0,1. **12.** $(-\infty; -1] \cup \{1\}$. **13.** $(-\infty; -4] \cup [3; 4)$. **14.** $\pm 0{,}5$. **15.** $(2; 1)$, $\left(3/\sqrt{2}; 0{,}5\right)$. **16.** $(-2; -1)$. **17.** $(-1; 0)$, $(0; 1)$. **18.** 16. **19.** $5\sqrt{3}$. **20.** $a \in \{1; -9\}$.

Знакомьтесь: факультет наук о материалах

МАТЕМАТИКА

1. $\{0; 1\}$. **2.** $\frac{\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. $(-2; -1] \cup [2; 3)$. **4.** $(3; 1/9)$. **5.** 2.

6. Утверждение неверно. **7.** 6 км/ч. **8.** 115 км/ч.

9. $\{-6; -5; -4\}$. **10.** $x = 1$ и $y = 3{,}25(1 - x)$.

ФИЗИКА

1. $t = v_0(\sin\alpha \pm \operatorname{tg}\beta\cos\alpha)/g$, $\beta \in [0; \alpha]$.

2. $P_{\text{экв}}/P_{\text{пол}} = 1 - 4\pi^2R^3/\left(GMT^2\right)$.

3. $A = 0{,}5V_0\left(p_2 - p_1\right)\left(2p_0 - p_1 - p_2\right)/\left(p_0 - p_1\right)$.

4. $f_2 = f_1 p_1 T_2 / \left(p_2 T_1\right) \approx 29\%$. **5.** $\mathrm{E} = 3\Delta Q/C$.

6. $Q = a^2 B(4-\pi)/(\pi R)$. **7.** $v = 2{,}4 \cdot 10^5$ м/с.

8. На расстоянии 6 см от одного из источников.

XLI Международная математическая олимпиада

1. Пусть $K = MN \cap AB$. По теореме о касательной и секущей $AK^2 = KN \cdot KM = BK^2$, следовательно, K – середина AB. Так как $PQ \| AB$, то M – середина PQ. Поэтому достаточно доказать, что $EM \perp PQ$.

Из параллельности CD и AB вытекает, что A и B – середины дуг CM и DM, т.е. ΔACM и ΔBDM – равнобедренные. Из сказанного следует, что $\angle BAM = \angle AMC = \angle ACM = \angle EAB$ и $\angle ABM = \angle BMD = \angle BDM = \angle EBA$, т.е. точки E и M симметричны относительно прямой AB. Значит, прямая EM перпендикулярна AB, а следовательно, и PQ.

2. Положим $a = \dfrac{x}{y}$, $b = \dfrac{y}{z}$, $c = \dfrac{z}{x}$. Тогда исходное неравенство перепишется в виде

$$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y) \le xyz. \qquad (\&)$$

Мы пришли к хорошо известному неравенству (оно использовалось, например, при решении задачи М1333). Одно из возможных доказательств этого неравенства таково. Заметим, что среди чисел $u = x-y+z$, $v = y-z+x$, $w = z-x+y$ не более одного отрицательного, так как сумма любых двух из них положительна. Если такое число одно, то $uvw \le 0 < xyz$. Если же $u, v, w \ge 0$, то достаточно перемножить три очевидных неравенства:

$$x^2 \ge x^2 - (y-z)^2,$$
$$y^2 \ge y^2 - (z-x)^2,$$
$$z^2 \ge z^2 - (x-y)^2.$$

Замечание 1. Из решения видно, что равенство достигается тогда и только тогда, когда $a = b = c = 1$.

Замечание 2. При $u, v, w > 0$ неравенство $(\&)$ можно, очевидно, сформулировать так: радиус вписанного круга произвольного треугольника не превосходит половины радиуса описанного круга.

3. *Ответ:* $\lambda \ge \dfrac{1}{n-1}$.

Покажем сначала, что при указанных значениях λ мы можем увести всех блох так далеко вправо, как мы того пожелаем. Будем использовать следующую стратегию: на каждом прыжке выберем самую левую блоху и заставим ее прыгнуть через самую правую блоху. После k таких прыжков мы получим конфигурацию блох, для которой и обозначим через d_k максимальное, а через δ_k – минимальное расстояние между блохами. Очевидно, что $d_k \ge (n-1)\delta_k$. После $(k+1)$-го прыжка среди расстояний между соседними блохами появляется новое: λd_k. Может оказаться, что $\delta_{k+1} = \lambda d_k$. Если это не так, то $\delta_{k+1} \ge \delta_k$. В любом из этих случаев

$$\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} \ge \min\left\{1, \frac{\lambda d_k}{\delta_k}\right\} \ge \min\left\{1, (n-1)\lambda\right\}.$$

Следовательно, если $\lambda \ge \dfrac{1}{n-1}$, то $\delta_{k+1} \ge \delta_k$ для всех k, т.е. наименьшее расстояние между блохами не убывает, откуда и вытекает доказываемое утверждение.

Докажем теперь, что при $\lambda < \dfrac{1}{n-1}$ из любой начальной конфигурации мы не сможем увести всех блох далеко вправо никакой последовательностью прыжков. Введем на данной прямой систему координат. Пусть s_k – сумма координат всех блох после k-го прыжка в произвольной последовательности прыжков, а w_k – наибольшая из этих координат (т.е. координата самой правой блохи). Заметим, что $s_k \le n w_k$. После $(k+1)$-го прыжка блоха из точки A перепрыгнула через B и оказалась в C. Пусть координаты этих точек a, b, c соответственно. Тогда $s_{k+1} = s_k + c - a$. По условию $c - b = \lambda(b-a)$, т.е. $\lambda(c-a) = (1+\lambda)(c-b)$. Значит, $s_{k+1} - s_k = c - a = \dfrac{1+\lambda}{\lambda}(c-b)$. Предположим, что $c > w_k$. Блоха, которая только что прыгнула, заняла новую крайнюю правую позицию $w_{k+1} = c$. Так как b – положение какой-то блохи после k-го прыжка, то $b \le w_k$. Следовательно,

$$s_{k+1} - s_k = \frac{1+\lambda}{\lambda}(c-b) \ge \frac{1+\lambda}{\lambda}\left(w_{k+1} - w_k\right).$$

Эта оценка справедлива и в случае $c \le w_k$: $w_{k+1} - w_k = 0$, $s_{k+1} - s_k = c - a > 0$.

Пусть $z_k = \dfrac{1+\lambda}{\lambda} w_k - s_k$ для $k = 0, 1, 2, \ldots$ Применяя сделанную выше оценку, получаем, что $z_{k+1} - z_k \le 0$. В частности, $z_k \le z_0$ для всех k. Мы рассматриваем $\lambda < \dfrac{1}{n-1}$, т.е. $1 + \lambda > n\lambda$. В этом случае $z_k = (n+\mu)w_k - s_k$, где $\mu = \dfrac{1+\lambda}{\lambda} - n > 0$. Поэтому из неравенства

$$z_k = \mu w_k + \left(n w_k - s_k\right) \ge \mu w_k$$

следует, что $w_k \le \dfrac{z_0}{\mu}$ для всех k. Таким образом, положение самой правой блохи не превосходит некоторой константы (зависящей от n, λ и начального расположения блох, но не от последовательности ходов).

XXXI Международная физическая олимпиада

Задача 1

A: a) $y = L + \dfrac{mg}{k} + \sqrt{\dfrac{m^2 g^2}{k^2} + 2\dfrac{Lmg}{k}}$; b) $v_m = \sqrt{2gL + \dfrac{mg^2}{k}}$;

c) $t = \sqrt{\dfrac{2L}{g}} + \sqrt{\dfrac{m}{k}}\left(\pi - \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1 + 2kL/(mg)}}\right)$.

B: a) $T = \sqrt{T_1 T_2}$; b) $A_m = cm\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right)^2$;

c) $A_m = 20$ МДж.

C: a) ${}^{206}n = {}^{238}N\left(2^{t/4,5} - 1\right)$; b) ${}^{207}n = {}^{235}N\left(2^{t/0,71} - 1\right)$;

c) $1{,}20 \cdot 10^{-2} = \dfrac{2^{\tau/4,5} - 1}{2^{\tau/0,71} - 1}$; d) $\tau \approx 5{,}38 \cdot 10^9$ лет;

e) $\tau \approx 4{,}54 \cdot 10^9$ лет.

D: a) $E = \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ при $r \le R$, $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ при $r > R$;

b) $W = \dfrac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$.

E: $t \approx 1{,}1 \cdot 10^6$ с.

Задача 2

a) $\dfrac{e}{m} = \dfrac{8\pi^2 U}{B_0^2 D^2}$; b) область B;

c) $W_{\max} \approx 638$ кэВ; d) $e/m = 1{,}70 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

Задача 3

A: a) $\mu \approx 4{,}5 \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$; b) $\omega_0 \approx 8{,}1 \cdot 10^3$ с$^{-1}$; c) $\delta l \approx 4 \cdot 10^{-6}$ м;

d) $\Delta l = \Delta g \dfrac{\rho l^2}{2E}$; e) $l_{\min} \approx 2\cdot 10^8$ м.

B: b) $\alpha = 2$; c) $\theta = 4GM/\left(Rc^2\right) \approx 8{,}5\cdot 10^{-6}$ рад.

Избранные задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады

1. $\angle EDA = 90^\circ - \angle ABC > 90^\circ - \angle ACB = \angle AED$.

2. Отразим трапецию относительно прямой AB (рис.16). Поскольку в любой трапеции отношение расстояний от точки пересечения диагоналей до оснований равно отношению длин этих оснований и поскольку $BC/AD = C'C/D'D$, то точка F является точкой пересечения диагоналей трапеции $D'DCC'$.

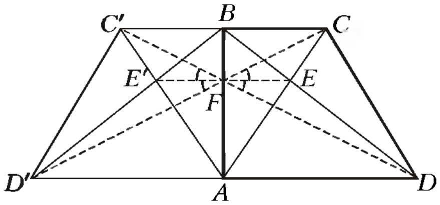


Рис. 16

3. Обозначив $y_n = x_{n+1} - x_n$, рассмотрите величину

$$y_{n+1} = x_{n+2} - x_{n+1} =$$
$$= \frac{x_n x_{n+1} + 5x_n^4}{x_n - x_{n+1}} - x_{n+1} = \frac{5x_n^4 + x_{n+1}^2}{x_n - x_{n+1}} = -\frac{5x_n^4 + x_{n+1}^2}{y_n}.$$

Очевидно, y_{n+1} и y_n – числа разного знака. Следовательно, $y_1 = x_2 - x_1$ и $y_{1999} = x_{2000} - x_{1999}$ – числа одного знака, что невозможно в случае $x_{2000} = x_1 \neq x_2 = x_{1999}$.

4. Подставив во второе неравенство $x/3$ вместо x, докажите, что $f(x+1) = f(2x+1)$.

5. 4000. *Указание.* Сумма цифр числа a равна сумме цифр числа $2\cdot 5a$.

6. а) Пусть Вася отметит 18 проводов, разбивающих столбы на пары, и не трогает отмеченные провода, пока это возможно. Тогда электрик каждый раз будет восстанавливать не более 34 проводов, ибо у каждого столба заведомо есть необорванный Васей провод. Таким образом, каждый день количество проводов будет уменьшаться как минимум на 1. Поскольку количество проводов не может уменьшаться неограниченно долго, когда-нибудь Васе придется порвать отмеченный провод. В этот момент во дворе останется не более 17 проводов.

б) Аналогично решению пункта а), можно добиться того, что после очередной приватизации останется не более 999 государственных авиалиний. Это менее 0,05% общего числа авиалиний.

7. Сначала индукцией по n докажите равенство сумм чисел, расположенных в углах прямоугольника размером $2\times n$, а затем индукцией по m докажите то же для прямоугольника $m\times n$.

8. Предположив, что из некоторой усадьбы A нельзя добраться до усадьбы B, рассмотрите все усадьбы, до которых можно добраться из A, а также все остальные усадьбы (в число которых входит B), и подумайте, как должна быть устроена дорожная сеть.

9. *Указание.* Все числа, получающиеся из 41, дают остаток 4 при делении на 37.

10. Расставьте людей в вершинах правильного n-угольника и посылайте дежурить тройки людей, оказавшихся в вершинах равнобедренных треугольников, а если треугольник равносторонний (равносторонние треугольники встретятся, если n делится на 3), то пусть соответствующая тройка отдежурит трижды.

11. б) $2^{2000} - 2^{666}$.

12. а) Поскольку $\angle AB_1B = 90^\circ = \angle AA_1B$, то точки A, B_1, A_1 и B лежат на одной окружности (рис.17). По теореме о вписанном угле,

$$\angle AA_1B_1 = \angle ABB_1 = \frac{1}{2}\angle AEB_1.$$

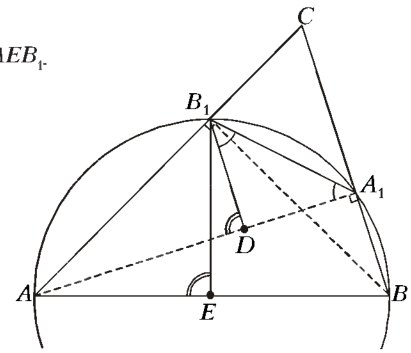


Рис. 17

Поскольку треугольник DA_1B_1 равнобедренный, его внешний угол ADB_1 вдвое больше угла DA_1B_1. Итак, $\angle ADB_1 = \angle AEB_1$, откуда и следует утверждение задачи.

б) Так как углы AB_1B и AA_1B прямые, точки A, B_1, A_1 и B лежат на окружности с центром K. В частности, $KA_1 = KB_1$, откуда KM – серединный перпендикуляр к A_1B_1. Значит, $A_1L = B_1L$, и можно применить утверждение пункта а).

13. Допустим, что такой набор чисел существует. Поскольку любое целое число x взаимно просто с числом $x^{2000} - x^{1000} + 1$, то $f(a_i)$ делится на a_j при всех $i \neq j$, причем

$$\text{НОД}(a_i, a_j) = 1.$$

Предположим для определенности, что a_1 – наименьшее из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2001}$. Тогда число $f(a_1)$, делясь на каждое из взаимно простых чисел $a_2, a_3, \ldots, a_{2001}$, делится и на их произведение $a_2a_3\ldots a_{2001} > a_1^{2000}$, что противоречит неравенству $f(a_1) \le a_1^{2000}$. Следовательно, ответ на вопрос задачи отрицательный.

14. Предположим, что условие о точках пересечения выполнено. Поскольку на каждой прямой лежит 100 точек пересечения, то любая прямая пересекается со всеми остальными, причем никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Кроме того, все прямые пересекают ось ординат, причем в разных точках.

Пусть A и B – самая верхняя и самая нижняя из точек пересечения прямых с осью ординат, C – точка пересечения соответствующих прямых. Остальные 99 прямых пересекают отрезок AB, поэтому каждая из них пересекает одну из двух других сторон треугольника ABC. Значит, какую-то из сторон AC и BC (для определенности, сторону AC) пересекают не менее 50 прямых. Пересечения прямой AC с этими прямыми образуют вместе с точкой C множество из не менее чем 51 отмеченных точек, лежащих на прямой AC по одну сторону от оси ординат. Противоречие.

Другой способ решения основан на том, что каждая прямая $y = kx + b$ задается своим угловым коэффициентом k и точкой $(0; b)$ пересечения с осью ординат (будем называть эту точку «начальной точкой» прямой). Пусть l – прямая с наибольшим угловым коэффициентом. Очевидно, l пересекается справа от оси ординат с теми прямыми, начальные точки которых выше, чем l, а слева – с теми, начальные точки которых ниже. Значит, начальная точка прямой l должна быть средней среди начальных точек.

Рассмотрев прямую m с наименьшим коэффициентом наклона, аналогично доказываем, что и ее начальная точка – средняя в списке. Это невозможно, так как $l \neq m$, и начальные точки прямых l и m не могут совпадать.

15. Назовем числа, дающие остатки 0, 1 или 4 при делении на 5, *хорошими* (или квадратичными вычетами по модулю 5), а остальные числа (т.е. дающие остатки 2 или 3 при делении на 5) – *плохими.* Заметим, что всякая степень хорошего числа – снова хорошее число. Поэтому если второй игрок каждым своим ходом будет возводить любое хорошее число в степень, равную плохому числу (если такие останутся), то каждым своим ходом он будет уменьшать количество плохих чисел на 1. Поскольку плохих чисел меньше половины, наступит момент, когда на доске останутся только хорошие числа.

Следовательно, последнее число окажется хорошим, и второй игрок выиграет.

16. а) Поскольку прямая KL параллельна, а прямая MN перпендикулярна биссектрисе угла B треугольника, то $\angle MXL = 90°$. Обозначим $a = BC$ и $b = AC$. Как известно, длины AL и BM равны полупериметру треугольника ABC. Поэтому середины отрезков ML и AB совпадают, причем $ML = AL + BM - AB = a + b$. Пусть D – середина AB (и ML), E – середина AC. Так как DX – медиана прямоугольного треугольника MXL, то $DX = ML/2 = (a+b)/2$ и $\angle MDX = 2\angle MLX = \angle ABC$. Значит, прямая DX параллельна стороне BC и, следовательно, содержит среднюю линию DE. Значит, $EX = DX - DE = (a+b)/2 - a/2 = b/2 = EC$. Так как $EX \| BC$, то $\angle CEX = \angle ACB$, откуда $\angle ECX = \left(180° - \angle ABC\right)/2 = \angle ACN/2$, что и требовалось доказать.

17. Эта задача в несколько иной формулировке (суммы вместо произведений) предлагалась в 1963 году на третьей Всероссийской математической олимпиаде (см. книгу Н.Б.Васильева и А.А.Егорова «Задачи Всесоюзных математических олимпиад»). Решение можно получить, доказав по индукции, что произведение n различных натуральных чисел имеет не меньше $\frac{n(n-1)}{2}+1$ делителей. Интересно, что оценка $\frac{n(n-1)}{2}+1$ точная: она достигается для числа $N = p^{n(n-1)/2} = 1 \cdot p \cdot p^2 \cdot \ldots \cdot p^{n-1}$, где p – простое число.

19. Докажите, что ситуация, в которой любой ход ведет к проигрышу, может возникнуть только после хода второй авиакомпании.

20. Будем называть дополнительной клеткой уголка не принадлежащую ему клетку покрывающего его квадрата 2×2. Построим последовательность уголков, начав с любого уголка и выбирая каждый следующий так, чтобы он покрывал дополнительную клетку предыдущего. Рано или поздно эта последовательность зациклится. Все 111 уголков не могут входить в цикл, ибо количество уголков в цикле четно. (Чтобы доказать это, рассмотрите ломаную с вершинами в центрах квадратов 2×2, содержащих уголки.) Осталось убрать уголки, не входящие в цикл.

21. Предположим, что сумма чисел диагонали меньше 1. Тогда в каждой строке найдется клетка, в которой стоит число, большее, чем число, стоящее на пересечении вертикали, содержащей эту клетку, с главной диагональю. Такие клетки будем называть хорошими. Выберем любую клетку на главной диагонали и пойдем из нее по горизонтали в хорошую клетку, затем по вертикали снова на диагональ, затем опять в хорошую клетку, и т.д. Через некоторое время этот маршрут зациклится. Рассмотрим образовавшийся цикл. Поставим ладьи на главную диагональ, а затем каждую ладью, попавшую в цикл, сдвинем по вертикали на предыдущую в этом цикле клетку. Ясно, что ладьи по-прежнему не бьют друг друга. Но при этом число под каждой из сдвинутых ладей увеличилось, значит, и произведение чисел под ладьями увеличилось, что противоречит условию задачи.

22. Отразив ортоцентр H относительно L, получим точку H', лежащую на описанной окружности и диаметрально противоположную точке B. Отрезок $H'B$ перпендикулярен прямой l. Поэтому проекция точки L на прямую l есть середина отрезка между проекциями точек H' и H, а стало быть, она совпадает с серединой отрезка BK, что и значит, что треугольник BKL – равнобедренный.

23. Абсолютная величина горизонтальной проекции вектора скорости для каждого шарика постоянна и не превосходит 1 (равенство достигается, если шарик летает горизонтально). Следовательно, время между двумя последовательными ударами одного шарика о левую стенку не меньше 2. Поэтому есть промежуток между двумя последовательными ударами шариков о левую стенку длительностью не меньше 1 (равенство достигается лишь в случае, когда оба шарика летают горизонтально и в противофазе).

В случае, когда нашелся такой промежуток длительностью больше 1, паучок успевает спуститься по вертикали, достаточно близкой к левой стенке. Если же шарики летают горизонтально и среднюю вертикаль пересекают одновременно, то паучок может спуститься по средней вертикали.

Интересно было бы найти минимальную скорость, с которой должен двигаться паучок, если в квадрате летают не два, а n шариков.

Московская студенческая олимпиада по физике

1. $v = \sqrt{(3L/4)g\cos\alpha + (g\tau\sin\alpha)^2}$.

2. $\alpha = \arccos(2/3) = 48°$ (при вращении вектора в сторону стенки $\alpha = 0$).

3. Если зонд быстро замедляет свое движение и по эллиптической орбите приближается к Солнцу, то $v_{хар} = 0{,}57v_0$; если же зонд, быстро увеличив скорость, удаляется на расстояние, много больше R_0, а затем, замедлив движение, по эллиптической орбите приближается к Солнцу, то $v_{хар} = 0{,}41v_0$.

4. $F = 6Mg\mu\left(1 + 2\mu + 3\mu^2\right)$. **5.** $M = 7p_0S/(3g)$.

6. $E = \sigma/\left(2\varepsilon_0\right)$. **7.** $v = \sqrt{v_0^2 + Q^2/\left(12\pi\varepsilon_0 Rm\right)}$.

8. $L_{12} = L/\sqrt{2}$. **9.** $\eta = 1 - (2/3)\ln 5/\left(5^{2/3} - 1\right)$.

10. $n = 3D^2/(16F\lambda)$.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.В.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, М.М.Константинова, А.И.Пацхверия, Е.А.Силина, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати 142300 г.Чехов Московской области

Заказ №

Триумф
Владимира Крамника

После того как семь лет назад Гарри Каспаров вышел из ФИДЕ, в шахматном мире произошел серьезный раскол. При участии чемпиона мира была создана ПША (Профессиональная шахматная ассоциация), которая финансировала два его матча на высшем уровне – с Шортом в 1993 году и Анандом в 1995. В обоих Каспаров взял верх, а вскоре ПША прекратила свое существование. И тогда он решил вернуть шахматы в «доисторические» времена, когда чемпион отстаивал свое звание в матче против наиболее достойного претендента. Однако серьезных спонсоров не обнаруживалось, да и «достойные» соперники то и дело менялись. В итоге Каспаров установил своеобразный рекорд: в течение пяти лет не отстаивал свой титул сильнейшего, такого не случалось более полувека.

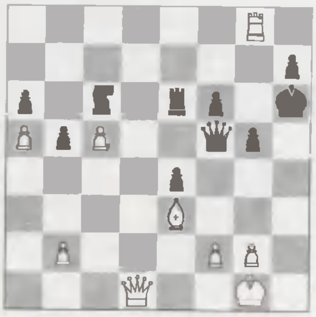
Надо сказать, что такое положение дел тревожило и его самого: слишком много упреков раздавалось со стороны коллег. И вот наконец обнаружилась английская компания «Brain Games», взявшая на себя организацию очередного матча за шахматную корону. Поскольку результаты Ананда в последнее время были чуть выше, чем у Крамника (остальные гроссмейстеры отстали слишком далеко), сначала было сделано предложение Ананду. Но его форма (ответ нужно было дать чуть ли не к следующему утру) и полный контроль Каспарова над призовым фондом не устроили индийского гроссмейстера, и он отказался. Только тогда приглашение получил Владимир Крамник. Но именно его поединок с Каспаровым вызывал наибольший интерес в мире: Крамник был единственным шахматистом на планете, который, постоянно играя с Каспаровым в супертурнирах, сохранял с ним равный счет – и в обычных партиях, и в быстрых шахматах, и в блице.

И вот в октябре прошлого года состоялась историческая схватка Каспаров – Крамник. Поединок, в котором было предусмотрено 16 партий, закончился неожиданно – претендент победил со счетом 8,5:6,5, не проиграв ни одной партии. При этом Крамник выбрал самый подходящий момент для своего триумфа: новый век – новый чемпион!

В первой же партии белыми Каспаров столкнулся с «берлинской стеной» – несколько пассивным берлинским вариантом испанской партии, но встреча быстро завершилась вничью. Каспаров пять раз, возможно из принципа, пытался пробить в этом матче «берлинскую стену», но безрезультатно. Обращение к другим дебютам тоже ничего не дало. Фактически он был полностью лишен белого цвета, которым обычно одерживал много ярких побед.

Когда же Крамник играл белыми, ситуация складывалась совсем иначе. Уже во второй партии он применил сильную домашнюю заготовку, соперник растерялся и потерпел фиаско.

Эта позиция могла получиться в шестой партии, если бы Крамник сыграл



♖g7-g8 (вместо ♕d1-d7, что, впрочем, тоже должно было привести к победе). Теперь уже ♕d7 с прорывом ферзя на d7 грозит не на шутку. Черные могут защитить седьмую горизонталь – **48...♖e7** (на 48... ♘e7 крайне неприятна связка 49. ♖e8), но их ждет бесславный конец: **49. ♗:g5+!! fg 50. ♕d6+ ♖e6 51. ♕h2×!!**

Итак, чемпион и претендент не прошли еще и половины пути, а уже стало ясно, что Крамник превосходит соперника и в теоретическом, и в психологическом отношении. А после его победы в десятой партии по существу все было кончено.

В.Крамник – Г.Каспаров

Защита Нимцовича

1. d4 ♘f6 2. c4 e6 3. ♘c3 ♗b4. 4. e3 0-0 5. ♗d3 d5 6. ♘f3 c5 7. 0-0 cd 8. ed dc 9. ♗:c4. Возникла позиция с изолированной пешкой «d», сходная с той, что встретилась и в шестой партии. Тогда Каспаров еле-еле устоял – повторить «успех» не удалось. **9...b6 10. ♗g5 ♗b7 11. ♖e1 ♘bd7 12. ♖c1 ♖c8 13. ♕b3 ♗e7 14. ♗:f6 ♘:f6 15. ♗:e6.** Разумеется, этот удар черные видели, но недооценили угрозу соперника. **15...fe 16. ♕:e6+ ♔h8 17. ♕:e7 ♗:f3 18. gf ♕:d4 19. ♘b5!** Маршрут коня в неприятельский лагерь решает дело. **19... ♕:b2 20. ♖:c8 ♖:c8 21. ♘d6 ♖b8 22. ♘f7+ ♔g8 23. ♕e6.**

Критическая позиция в партии, да и во всем матче. Грозит классический «спертый мат» – 24. ♘h6+ ♔h8 25. ♕g8+ и на любое взятие ферзя – 26. ♘f7×. Сейчас необходимо было 23...h5, хотя после 24. ♘g5+ ♔h8 25. h4 черному королю трудно устоять.

23...♖f8?? Фатальный, можно сказать исторический, «зевок». **24. ♘d8+!** Конь неожиданно прыгает совсем в другую сторону. **24...♔h8 25. ♕e7.** Черные сдались, так как их ладья оказалась окруженной со всех сторон (25...♔g8 26. ♘e6). Впервые Каспаров признал свое поражение так быстро.

Остальные встречи завершились вничью, и Каспаров не только впервые в жизни уступил матч homo sapiens (проколы с компьютерами случались и раньше, но то были шахматно-научные эксперименты), но и впервые, сыграв 15 партий подряд с гроссмейстером, не сумел ни разу взять верх...

Владимиру Крамнику 25 лет, он родился в Туапсе. Играть в шахматы его научил отец. Сильных игроков в городе не было, и мальчик вполне мог бросить эту «детскую забаву» – шахматы и переключиться на что-нибудь более серьезное. Однако в 1986 году, когда Володе исполнилось 11, один местный любитель шахмат преподнес ему ценный подарок. Не сообщив ни родителям, ни ему самому, он отправил письмо «на деревню дедушке» Ботвиннику, в котором рассказал о юном таланте из южного морского города. Крамнику повезло: патриарх отечественных шахмат не выбросил письмо в корзину, более того, попросил прислать сыгранные подростком партии. В результате Володя попал в шахматную школу Ботвинника, в которой ему в то время помогал проводить занятия Гарри Каспаров. Уникальный случай в истории: два чемпиона мира выращивали третьего...

Владимир Крамник стал гроссмейстером уже после перестройки, он относится к поколению шахматистов, которые стараются избежать конфликтов. Скорее всего, он откажется от конфронтации с ФИДЕ, и, как следствие, возникнет идея общепримирительного состязания, где определится легитимный чемпион мира.

Е.Гик

Индекс 70465

ФИЗИКИ НА МОНЕТАХ МИРА

Одной из последних юбилейных монет, поступивших в обращение в СССР, стал медно-никелевый рубль 1991 года выпуска, на реверсе которого изображен ПЕТР НИКОЛАЕВИЧ ЛЕБЕДЕВ за университетской кафедрой и указаны даты его жизни: 1866–1912. Здесь же представлена схема знаменитого опыта Лебедева по измерению давления света и квантовая запись исследованного им эффекта.

С 1900 по 1911 год П.Н.Лебедев был профессором Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова. Поэтому неслучайно, что в комплексе МГУ на Воробьевых горах одна из улиц носит имя Лебедева, а у входа на физический факультет МГУ установлен памятник Лебедеву.

Величественное здание Московского государственного университета изображено на одной из шести рублевых медно-никелевых монет знаменитой олимпийской серии 1977—1980 годов, а стилизованное изображение этого здания стало символом XXII Олимпийских игр.

(Подробнее о П.Н.Лебедеве – внутри журнала.)