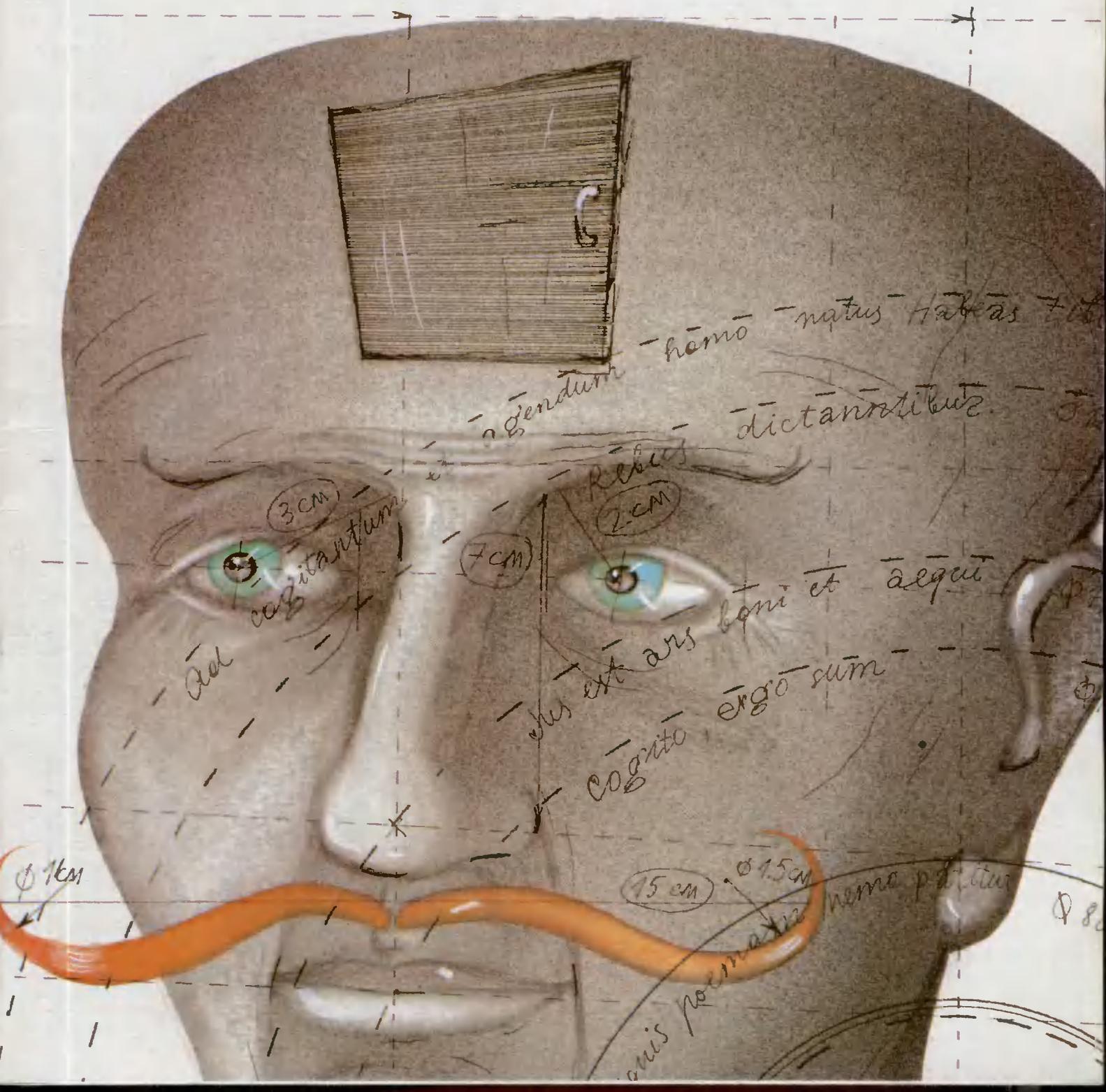


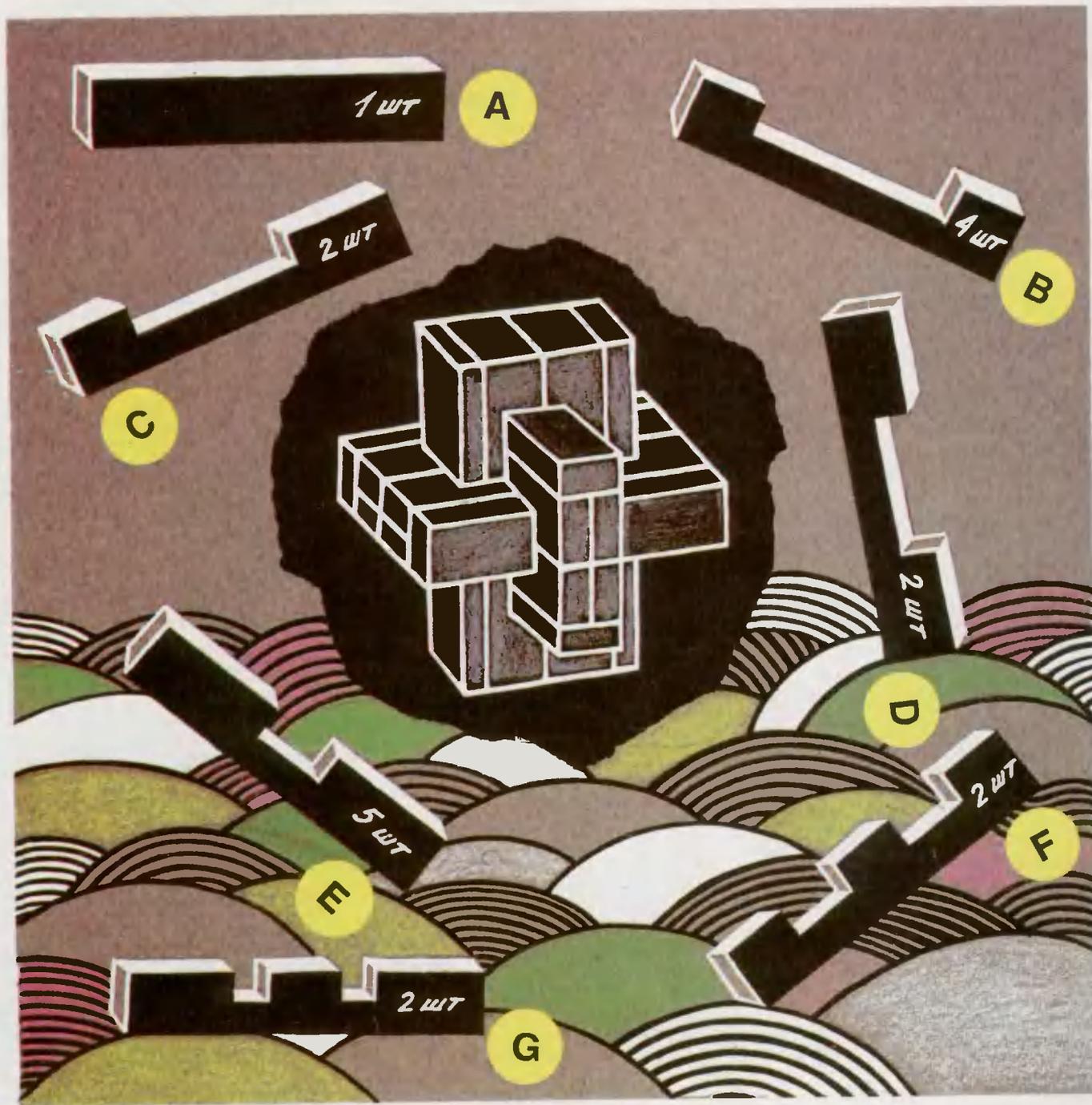
КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Большой узел из «плоских» элементов



18 элементов головоломки изготовлены из брусочков размером $10 \times 2 \times 1$. Используя все элементы, сложите большой узел. Элемент А является замком и закладывается последним.

Л.Мочалов

КВАНТ

ИЮЛЬ
АВГУСТ



№ 4

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредители – Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЕ ЗАМЕСТИТЕЛИ

ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.С.Кротов, С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,

А.Н.Виленкин, С.А.Гордюнин,

Н.П.Долбиллин, В.Н.Дубровский,

А.А.Егоров, А.Р.Зильберман,

С.П.Коновалов, А.А.Леонович,

Ю.П.Лысов,

В.В.Можяев, В.В.Произволов,

Н.Х.Розов, Ю.П.Соловьев,

А.В.Сосинский, А.Л.Стасенко,

В.Г.Сурдин,

В.М.Тихомиров

(заместитель главного редактора),

В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,

А.И.Черноуцан

(заместитель главного редактора),

И.Ф.Шарыгин

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд,

М.И.Башмаков, В.И.Берник,

В.Г.Болтянский, А.А.Воровой,

Ю.А.Данилов, Н.В.Константинов,

Г.Л.Коткин, Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев,

А.И.Шапиро

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ

ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,

В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,

Н.В.Васильев, И.Ф.Гинзбург,

В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,

Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев,

В.П.Лишевский,

А.И.Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,

Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,

А.П.Савин, Слободецкий,

М.Л.Борисов, А.С.Кравчук,

В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

©2000, Президиум РАН,

Фонд Осипяна, «Квант»

- 2 Что есть мысль? В.Мещеряков
7 Неравенство Иенсена. О.Ижболдин, Л.Курляндчик
11 Топологическое самодействие. Ю.Грац
15 Малая теорема Ферма. В.Сендеров, А.Спивак

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 19 Энрико Ферми. А.Васильев

РЕЦЕНЗИИ

- 20 «Математика»

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 22 Задачи М1736-М1740, Ф1743-Ф1747
23 Решения задач М1711-М1720, Ф1728-Ф1732

ИНФОРМАЦИЯ

- 29 Международный турнир «Компьютерная физика»

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 30 Задачи
31 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6-8»
31 Слоны на водопое. А.Котова

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Нет, ребята, все не так...

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 35 Случай в газовой туманности. А.Стасенко

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 37 Тригонометрические тождества. Л.Семёнова

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 42 Почему вращается вертушка? А.Карачи, Д.Кузовкин,
В.Сухомесов, С.Тодышев

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 43 Неравенство Караматы. Д.Номировский

ОЛИМПИАДЫ

- 46 LXIII Московская математическая олимпиада
48 Избранные задачи Московской физической олимпиады
51 IV Международная астрономическая олимпиада
53 Итоги Межобластной заочной математической олимпиады

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 54 Конденсаторы в электростатическом поле. Ю.Чешев

- 57 Ответы, указания, решения

НА ОБЛОЖКЕ

- I Иллюстрация к статье В.Мещерякова
II Коллекция головоломок
III Шахматная страничка
IV Физики на монетах мира

Что есть мысль?

В. МЕЩЕРЯКОВ

...мысль суть изменения тела.

Левкипп, Демокрит

...нет разумного основания считать, что ум соединен с телом.

Аристотель

... мышление есть самое неясное...

Секст Эмпирик

Действительная реальность

Представьте себя помещенным в ядерный томограф – устройство для исследования молекулярной структуры живых организмов. Вы подвергаетесь электромагнитному излучению с частотой порядка 10^7 Гц и величиной магнитного поля порядка 1 Тл (для сравнения, магнитное поле Земли меньше 10^{-4} Тл) – а вашему мозгу хоть бы что! Излучение от компьютера мешает работать телевизору на дециметровых каналах, а вам и ва-

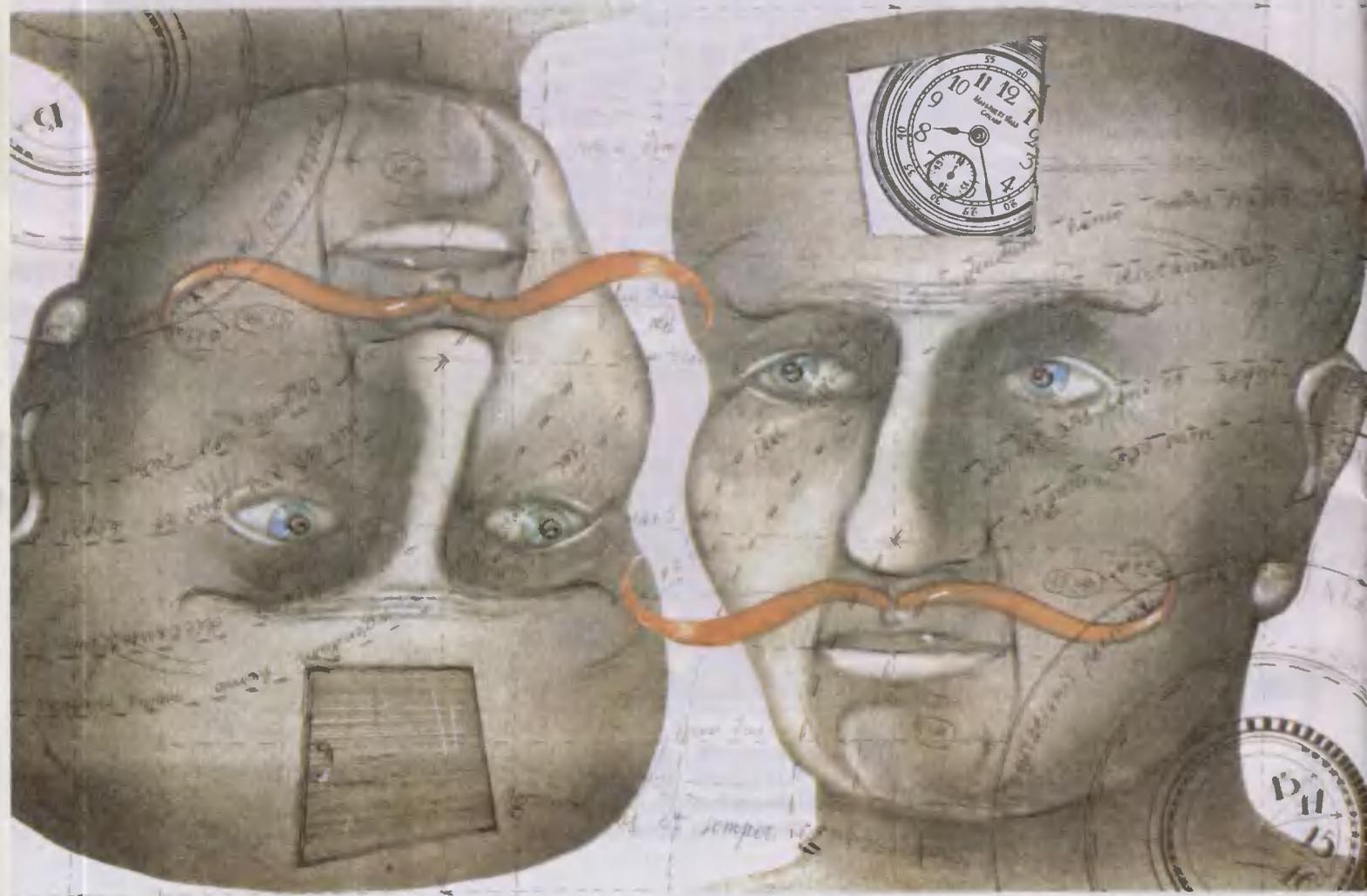
шей голове – нет! Все окружающее пространство забито электромагнитными волнами, использующимися для радио- и телепередач, города опутаны проводами, в доме без электричества шагу ступить негде – на мозг это не влияет!

Это – современные примеры для современного человека. Но вспомним обычную молнию – грозовой электрический разряд, имевший место во все времена существования рода человеческого. Молния, как говорят, шумит на всех частотах,

т.е. на любом канале радиоприемника слышен треск. А мысли как? Ну разве что кто-то страх испытывает, а так вообще никакого влияния молнии на человека не замечено за весь период цивилизованной жизни общества.

А дневной свет, ультрафиолетовые или инфракрасные лучи? Ведь это тоже электромагнитные волны. Большая часть их доходит до мозга, и не просто доходит, а проходит, проникает, пронзает!..

Взаимодействие электромагнит-



ных волн с биосистемами определяется, в основном, двумя параметрами: интенсивностью излучения и их частотой. Поиск параметров электромагнитных волн, способных не разрушать, но управлять состоянием клеток биосистем и, как говорят, изменять информационную структуру организма, привел к миллиметровому диапазону длин волн малой интенсивности. Однако и в этом случае влияния электромагнитного поля на работу мысли замечено не было.

Но, может быть, лучше попытаться выяснить влияние мысли на поле? Есть такие приборы (один из них называется сквидом), которые измеряют магнитные поля мозга порядка 10^{-13} Тл, а связи с мыслями не регистрируют.

Какой же вывод напрашивается из всего сказанного? Может, не электромагнитные взаимодействия лежат в основе механизма рождения мыслей человека? Похоже, что так. И видно это не только из лавины экспериментального материала, а и из соображений здравого смысла тоже. Судите сами, допустил бы Бог существование электромагнитного механизма рождения мыслей, предоставив докопаться до тайны электромагнетизма еще не повзрослевшему в XX веке человечеству. Вы только представьте себе возможность радиочастотного управления мозгом одного человека в руках другого. Это страшнее радиационного повреждения организма, при котором рвутся межмолекулярные связи и происходит ионизация атомов. При этом интенсивность радиоактивного распада уменьшается со временем, радиоактивное излучение достаточно большой интенсивности – дорогостоящая и труднодоступная вещь, а радиоволны дешевы и «коммуникабельны» – со всем миром провзаимодействуют везде и всегда.

Итак, сегодня в экспериментальном отношении возможны лишь два взаимных состояния ума человека и электромагнитного поля. Либо, при определенных параметрах поля, взаимодействия нет, либо, при других параметрах поля, взаимодействие разрушительно для мозга. И это не противоречит современным представлениям о взаимодействии поля и вещества, а теории взаимодействия поля и ума не существует,

ибо, хотя и создана теория электромагнитного поля, но не понятно, что есть ум.

Может быть, это не актуально? Но мало ли людей озабочивалось не актуальными проблемами? Тут и поиски внеземных цивилизаций, и парапсихология, и телекинез, и перелеты в прошлое, будущее и даже параллельное время, и телепортация, и многое другое. Вспомним опыты красильщика Стивена Грея и священника Гренвилля Уилера. В начале XVIII века они строили токопроводящие линии, натирая стеклянные палочки и проводя избыточный заряд по бечевкам. Актуальным ли было их исследование, которое более чем на 100 лет опередило становление теории и практики электромагнетизма? Скорее всего – нет. Однако из всех работ Грея, в том числе по актуальным в то время вопросам оптики, астрономии и метеорологии, только статья по электричеству была опубликована в журнале Лондонского Королевского общества в период, когда его президентом был Ньютон. Умел далеко смотреть человек, сказавший, что гипотез не измышляет! Возможно поэтому и сформулировал взгляд на биоструктуру в виде вопроса: «Не совершается ли Живое движение посредством колебаний живой Среды, возбуждаемых в Мозгу силой Воли и распространяющихся оттуда через сплошные, прозрачные и однородные капилляры нервов к мышцам, сокращая и растягивая последние?».

Так является ли сегодня проблема выяснения механизма работы человеческого мозга актуальной в общечеловеческом значении? Конгресс США объявил десятилетие после 1990 года «Десятилетием мозга», «...поскольку фундаментальные открытия на молекулярном и клеточном уровне организации мозга закладывают основу понимания механизмов мыслительной деятельности человека...».

Виртуальная реальность

Сегодня одним из главных свидетельств актуальности проблемы работы мозга служит создание перспективных нанотехнологий. Подтверждением этому является, например, возникновение понятия виртуальной (т.е. возможной) реальности. Суть в следующем.

Еще в 1959 году знаменитый американский физик Ричард Фейнман высказал предположение, что в будущем, научившись манипулировать отдельными атомами, человечество сможет синтезировать все что угодно. Неожиданным началом практической реализации этой идеи стал 1981 год, когда физики Г.Бинниг и Г.Рорер из швейцарского отделения фирмы IBM создали устройство, содержащее управляемый одноатомный контакт твердых тел. Первым применением этого устройства явилось сканирование поверхностей твердых тел с целью исследования их структуры. Последующие 10 лет его совершенствования привели к разработке приборов, позволяющих собирать по заранее спроектированной схеме молекулярные конструкции из отдельных атомов. В своей Нобелевской лекции в 1987 году Бинниг и Рорер провозгласили: «...наконец, открывается возможность воздействовать на отдельные атомы и изменять отдельные молекулы...». Так возникло направление, получившее название нанотехнологии. Почему «нано»? Потому что если типичное расстояние между атомами в конденсированных состояниях вещества имеет порядок 10^{-10} м, то характерный линейный размер типичной молекулярной конструкции, составленной из атомов числом от сотен до тысяч, имеет порядок 10^{-9} м, т.е. 1 нанометр.

Чрезвычайная перспективность работы Биннига и Рорера была сразу же высоко оценена. И не столько тем, что они получили Нобелевскую премию, сколько последующей лавиной научных исследований, которая в истории развития человечества оказалась беспрецедентной по числу затронутых ею интересов. Здесь физика, электроника, биология, медицина, геронтология, кибернетика, экология, дизайн, искусство, религия, философия, фантастика и др. Человечество переживает сегодня то, что получило название наноиндустриальной революции.

В свете перспектив нанотехнологии в высшей степени кстати пришла работа того же Фейнмана, опубликованная в 1984 году, о возможности создания квантово-механической ЭВМ, логические элементы которой суть отдельные атомы. Тенденции этих возможностей таковы.

В 80-х годах использовались элементы ЭВМ с плотностью записи информации порядка 1 бит на 10^{11} атомов. Для типичного атомного объема 10^{-29} м^3 однобитовый объем элемента памяти составляет 10^{-18} м^3 и имеет линейный размер около $10^{-6} \text{ м} = 1 \text{ мкм}$. Именно поэтому компьютерные чипы относятся к классу микроэлементов. В настоящее время размеры логических элементов ЭВМ приближаются к нанометровому диапазону, но еще не достигли его. Специалисты утверждают, что производство нанозементов, т.е. чипов с плотностью порядка 1 бит на $10^2 - 10^3$ атомов, начнется в ближайшие 10 лет, несмотря на пока что не преодоленные трудности. Дело в том, что сегодня интегральная схемотехника носит планарный (т.е. плоский) характер, переход же к объемным структурам потребует промышленной доработки нанотехнологических методов. Перспектива построения чипов с плотностью 1 бит на 1 атом видится пока что отдаленной, но общая тенденция хорошо видна. Суть ее – в неуклонной миниатюризации компьютерной памяти с целью разработки технологии так называемых терабитных кристаллов. Уже сегодня в США и Японии существует ряд проектов, стоимостью от сотен миллионов долларов и объединяющих десятки частных фирм и государственных учреждений, направленных на разработку нанотехнологий.

Вот на этом пути и появилось то, что сейчас называют загрузкой. Идею загрузки легко представить, основываясь на нанотехнологических разработках. Берем индивидуальный человеческий мозг, в коре которого по оценкам экспертов содержится около 10^5 нейронов в 1 мм^3 . Учитывая, что кора мозга занимает объем около 10^{-3} м^3 , определяем полное число нейронов – по порядку величины это 10^{11} . Предполагая, что память человека построена из расчета не менее 1 бит на 1 нейрон, т.е. что полный объем информации составляет не менее 10^{11} бит, проводим понейронное сканирование (т.е. считывание характеристик физического состояния) коры головного мозга. Далее либо загружаем эту информацию в тера-

битные чипы емкостью по 10^{12} бит, которыми можно оснастить персональный компьютер или робота-полицейского, либо отправляем гулять по всемирной компьютерной паутине. Считанная информация имеет личностный характер, и потому возникают основания наделять этот индивидуализированный поток информации способностью принимать самостоятельные решения, т.е. порождать новую информацию, а значит – мыслить.

Итак, гипотетическое нечто, полученное сканированием мозга человека и загрузкой соответствующей информации в компьютерную систему, называется состоянием виртуальной реальности и определяет образ, возникший на основе нанотехнологических достижений.

Негативная реальность

Подойдем к этой теме с другой стороны, опуская пока что загадочный момент сканирования.

Представьте конструктор из всевозможных наборов атомов. Вы за рабочим столом собираете из атомов шарик, кубик, колечко. Форму этих предметов можно восстановить по памяти. Но если вы задались целью воспроизвести снежинку, вам понадобится по меньшей мере ее фотография, а лучше подробная карта расположения всех атомов. Эти мысленные эксперименты обращаются к тому, что принято считать неживой материей. Поэтому эксперимент продолжается, и теперь вы хотите сконструировать молекулу ДНК – одну из составляющих нейрона головного мозга. Чего проще – вот атлас карт расположения атомов в молекулах разных типов. Распаковывайте купленные в магазине атомы и собирайте!

А давайте-ка прежде посмотрим в картах или иных руководствах, какая молекула в результате получится – живая или неживая? Нет ничего в современной литературе на этот счет. И на тот счет, если задаться целью собрать нейрон или тем более мозг человека. Не знает современная наука, живым он будет или неживым, мыслящим или просто кучей атомов.

Вот место, где так иногда называемая традиционная наука отстала от прогрессивных веяний. Ее экспериментальная часть отстала в том, что до сих пор отсутствуют регу-

лярные факты влияния внешних воздействий на человеческое мышление или, наоборот, мышления на измерительные приборы, а ее теоретическая – в том, что до сих пор нет понимания, чем же отличается живая группа молекул от неживой, мыслящая от немыслящей. И понимание не словесного, но длиннее и мудренее скажет, а понимания конструктивного, созидательного, т.е. такого понимания, на основании которого окажется возможным создать искусственный интеллект. Критерий здесь однозначен. Знаешь механизм возникновения и передачи электромагнитной волны или мысли – умеешь сделать радиоприемник или искусственный мозг.

В то же время, экспериментальные физика и биология могут уже сейчас манипулировать отдельными атомами и молекулами и собирать атомные кластеры, т.е. то элементное, из чего состоит и живое и неживое, и мыслящее и не очень мыслящее. (Хотя, надо признаться, все это пока что возможно в условиях научной лаборатории. До статуса промышленного применения сегодня доведен лишь нанотехнологический контроль компакт- и DVD-дисков.) Поэтому идет поиск. Ищут все: теологи, биологи, физики и, конечно, фантасты.

На этом терновом пути прежде всего надо заметить, что никакое самое совершенное нанотехнологическое воспроизведение исходного живого или мыслящего образца принципиально не может привести ни к созданию полного дубликата, ни даже к объяснению причин его отличия от оригинала. Дело в том, что считывание физических состояний атомов проводится измерительными приборами, т.е. просканировать можно только то, что можно измерить. Но человек не придумал еще устройства, способного регистрировать мысль. Трудность в том, что мысль, судя по всему, не может быть выражена статическим набором молекул, атомов, ионов или электронов. Мысль – это процесс, движение. Известно, что движется, но не известно как.

Итак, попытка человечества создать искусственный интеллект неизбежно должна быть связана с поиском механизма работы мозга, данного нам природой, Богом. Но делать это надо, основываясь на со-

временных представлениях о мире, на многовековом опыте человечества, говорящем о безусловной преемственности знаний и отвергающим если не сами интеллектуальные и экспериментальные попытки выскочить в запредельное, то, во всяком случае, ожидание от них каких-либо конструктивных, т.е. созидательных или общепользовательных следствий.

Но правдоподобная, строго придерживающаяся своих принципов наука пока молчит. Причина проста. С одной стороны, имеется отличный вариант модели мозга: сложная интегральная система, включающая конечное число элементов, работающих на основе переноса электронного заряда или возбуждений в электронной подсистеме и, как следствие, приема и передачи информации, закодированной в терминах характеристик электромагнитного поля. А с другой стороны, вот уже более 100 лет практического использования подобных систем не привели ни случайно, ни целенаправленно к установлению факта влияния электромагнитного поля на процесс мышления.

Другими словами, с одной стороны, имеется компьютер как наиболее яркое выражение названного отличного варианта модели мозга, а с другой стороны, всегда можно найти соответствующий набор параметров внешнего электромагнитного поля, который будет не разрушать, но заданным образом изменять работу резисторов, конденсаторов, транзисторов и всех других компонентов интегральных схем, начинающих этот компьютер.

Так может ли сегодняшний или будущий, пусть даже супермощный, построенный на термисторах, компьютер являться хотя бы приближенной моделью мозга человека? Похоже, что нет.

Перспективная реальность

Теперь вы вправе спросить: неужели не существует других моделей работы мозга? Ситуация здесь сложная. Представьте, человек, незнакомый с физикой, хочет понять механизм работы автомобиля. На чем ему остановиться взгляд? На колесах, системе зажигания, карбюраторе, двигателе или бензобаке? Наконец, он может сообразить, что все дело в сгорании бензина, и объявить это механизмом работы авто-

мобиля. Многие будут удовлетворены. Но согласитесь, что от этого умозаключения до цикла Карно еще очень большой путь. Так же и с механизмом работы нейрона. Известны структура, химический состав, характер диффузионных потоков, тепловые режимы, распределения электрических и магнитных полей, электро- и теплопроводность и многое другое, но на вопрос, какой физический процесс формирует мысль человеческую, ответа до сих пор нет.

А не попытаться ли нам сначала самим прощупать почву для построения качественно новой, не электромагнитной модели мозга, модели, основанной не на переносе электронов или каких-нибудь других заряженных частиц или возбужденных состояний этих частиц?

Отметим сразу же в сторону попытки использования чего-либо полустороннего, вроде биополя. И вспомним, что для передачи информации, не говоря уже о ее создании, нужен материальный носитель. Выбор здесь невелик. Человечеству известны только две требуемые субстанции: электромагнитное поле и вещество, составленное из атомов, которые в свою очередь состоят из протонов и нейтронов, образующих ядро атома, и электронов, распределенных в окрестности ядра и, кстати, занимающих большую часть атома. Протоны и электроны заряжены. Поэтому произвольно взятый кусочек вещества объединен силами межатомных связей, имеющих электромагнитную природу, но в равновесном состоянии этот кусочек является «электромагнитнонейтральным».

Зададимся вопросом: каким образом с помощью нейтрального набора атомов, находящихся в сложных электромагнитных взаимодействиях, можно создавать или передавать информацию без нарушения его электронейтральности? Ответ очень прост. Толкнем близлежащую группу атомов образца. Поскольку атомы объединены межатомными силами, а образец в целом представляет собой в той или иной мере упругую среду, внесенное возмущение в виде смещений атомов из исходных равновесных позиций будет распространяться по образцу. Задавая определенный характер силового воздействия на один конец образца, на другом его конце

будем получать через некоторое время сигнал, аналогичный исходному.

Как уже говорилось, для выяснения влияния электромагнитного поля на работу мозга можно поместить себя в ядерный томограф. А куда бы поместить свою голову для выяснения влияния силовых воздействий? Простейший эксперимент здесь не нуждается ни в какой аппаратуре – упругие волны существуют повсеместно. Тикают часы, доносится разговор из телевизора, мелодично звонит телефон – это дома. На улице: шум листвы, хлопанье дверей, визг тормозов, рев самолета. Еще в природе: удар молнии, раскаты грома, грохот прибой, гул землетрясения. Замечено ли влияние чего-либо названного на работу ума? Нет, не замечено. А вообще, могло ли бы происходить устойчивое образование мыслей в мозгу, функционирующем на основе упругих волн, в условиях полного шумового беспредела, устраиваемого и природой, и самим суетливым человечеством? Перестраховался Создатель наш, упрятал механизм работы мозга подальше от него.

Впрочем, можете поэкспериментировать сами. Попробуйте в школьных лабораторных условиях с помощью наушников и звукового генератора определить нижнюю и верхнюю границы частот звуковых волн, воспринимаемых ухом, т.е. попросту слышимых. С нижней границей проблем не будет. Ниже 20 Гц мембрана наушников перестает издавать чистый тон и переходит на щелчки. Результат в 20 ± 10 Гц нас вполне устроит. Трудности возникают с верхней границей. Невозможно с той же точностью уловить изменение уровня громкости на частотах выше 18 кГц, т.е. там, где должен располагаться верхний порог слышимости. Кажется, что звук продолжает быть слышимым, т.е. возникает иллюзия звука, и невозможно точно зафиксировать момент падения чувствительности уха к генерируемым наушниками упругим колебаниям. Этот эксперимент нельзя повторять часто, достаточно убедиться в существовании этой иллюзии, иначе разболится голова.

Хотелось бы, конечно, основываясь на этом опыте, т.е. на существовании звуковой иллюзии, признать,

что существует некий тип, если так можно сказать, не разрушительного, но конструктивного взаимодействия упругих волн с мозгом. Но возникает новая проблема. Частоты порядка 10^4 Гц создают упругие волны с длиной порядка сантиметра, т.е. в упругой волне, распространяемой по мозгу, колеблются относительно друг друга огромные объемы, в которых число атомов превосходит 10^{23} . Это значит, что если элемент человеческой памяти даже не атом, не наночип, а хотя бы микрочип с числом атомов 10^{11} , то в такой звуковой волне должно одновременно смещаться около 10^{12} ячеек памяти. Ясно, что управление одной из этих 10^{12} микрометровых ячеек звуковой волной с длиной порядка сантиметра невозможно. Столь длинная волна не может изменить состояние одной ячейки, не затронув при этом соседние. (Так же и морской прибой окатывает или не окатывает всех, находящихся на одинаковых расстояниях от края берега.) Иными словами, уж если упругие волны и принимают участие в формировании процесса мышления, то их длина должна быть не больше нанометра – типичного размера молекулярных конструкций, образующих мозг. (Например, диаметр молекулы ДНК составляет 2 нм.) Для генерации таких волн нужны частоты упругих колебаний выше сотен гигагерц.

Стоп! Что-то здесь есть. Настораживает, что именно до этого частотного уровня упругих колебаний современная экспериментальная техника еще не добралась. Сегодня нет возможности регулярного воспроизведения гиперзвука сверхвысоких частот при условии контролируемой измененности его параметров как необходимого условия для постановки физического эксперимента. Тем не менее, для любопытного человечества отсутствие экспериментальных данных никогда не было помехой на пути исследования природы. Так, физика атомных ансамблей стала понятной во времена Максвелла и Больцмана, но только после их смерти было найдено экспериментальное подтверждение существования самих атомов.

К настоящему времени разработаны десятки механизмов для хранения и передачи информации в биологических и вообще молекулярных

структурах. Среди них есть и модели, близкие к упругим. Кратко остановимся на общепризнанно неверной, но тем не менее до сих пор цитируемой модели, предложенной в 70-х годах замечательным английским физиком Гербертом Фрелихом. Для объяснения способа передачи информации в биосистемах он предложил механизм генерации упругих колебаний среды, состоящей из заряженных частиц, с частотой порядка 10^{12} Гц. Но колебания в этой области частот имеют квантовый характер. Это плохо, потому что при переходе нейрона (или какой-либо его составляющей) из одного состояния в другое он должен оставаться в предыдущем состоянии достаточно долго для того, чтобы управляющее воздействие могло однозначно перевести нейрон в новое состояние. Это требование не выполняется для колебательных состояний с временами жизни 10^{-12} с. Поэтому Фрелих предложил использовать концепцию так называемого когерентного возбуждения – классического пакета упругих волн, построенного из квантовых состояний. Распространяется такой пакет со скоростью обычного звука и, главное, может надолго изменить деформационное состояние нейрона. Модель Фрелиха детально не прорабатывалась из-за того, что, как вскоре выяснилось, образование таких когерентных пакетов невозможно. Однако она очень привлекательна в концептуальном плане, а именно с точки зрения отказа от электромагнитного принципа устройства ячейки памяти и перехода к деформационному.

В этой связи обращает на себя внимание тема деформируемости биологических объектов. Еще в 1678 году голландский исследователь А. Левенгук заметил, что, когда он был сильно болен, эритроциты его крови выглядели жесткими и недеформируемыми, но становились мягче и податливее, когда он выздоравливал. Однако за три столетия, прошедшие с тех пор, установлено лишь, что упругость, т.е. способность эритроцитов обратимо менять свою форму под действием внешних сил, относится ко всем типам биологических объектов, в том числе и к нейронам. И экспериментальные, и теоретические попытки понять механизм этой деформируемости остаются пока что безуспешными.

Подводя итог перспективной реальности, зададимся вопросом: не является ли согласованность отсутствия экспериментальной техники сверхгиперзвука и удовлетворительного объяснения деформируемости биологических нанообъектов той красной нитью, которая приведет к пониманию механизма работы человеческого ума? К тому же, сегодня исследование того, каким образом молекулярная конструкция наноскопических размеров откликается на действие сторонних сил, т.е. исследование упругих свойств нанокристаллов, является одной из разрабатываемых ветвей нанотехнологии. Может быть, именно анализ силовых воздействий на молекулы, атомные кластеры или нанокристаллы сможет дать ответ на вопрос «что есть мысль?» и, следовательно, откроет путь к созданию искусственного интеллекта?

В качестве заключения и, если хотите, руководства к раскрытию тайны мозга приведем научную позицию одного из основателей биофизики Эмиля Дюбуа-Реймона, работавшего в середине прошлого века. В блестящей книге М. Б. Беркинблита и Е. Г. Глаголевой «Электричество в живых организмах» (серия «Библиотечка «Квант», вып.69) она выражена следующим образом: «Нельзя приписать частицам материи в организме каких-либо новых сил, которые бы не действовали и вне организма».

Неравенство Иенсена

О.ИЖБОЛДИН, Л.КУРЛЯНДЧИК

ИСКУССТВОМ ДОКАЗЫВАТЬ неравенства овладеть далеко не просто. Тут требуется большой опыт, интуиция, и, как в каждом искусстве, умение свободно применять различные «технические» приемы. Мы продемонстрируем один из таких приемов на ряде примеров. В этой статье будут доказаны и классические неравенства (Коши, Коши – Буяковского, Гёльдера и Минковского), и менее знаменитые, но также весьма интересные.

Мы будем записывать формулы, как правило, коротко, с помощью обозначений

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n.$$

Советуем тем, кто еще не научился ими пользоваться, расписывать выкладки более подробно.

Выпуклые множества

В основе доказательств неравенств, о которых будет идти речь, лежит понятие выпуклости. Это очень важное математическое понятие, и вы с ним уже встречались в школьном курсе геометрии при изучении многоугольников. Однако в математике понятие выпуклости связано не только с многоугольниками. Фигуру называют выпуклой, если с любыми

двумя своими точками она содержит весь отрезок с концами в этих точках. На рисунке 1 показаны примеры выпуклых и невыпуклых фигур. Выпуклые фигуры обладают многими замечательными свойствами, но нас будет интересовать лишь одно из них. Сформулируем его:

Пусть в точках A_1, A_2, \dots, A_n выпуклой фигуры Φ сосредоточены массы m_1, m_2, \dots, m_n соответственно. Тогда центр масс этих точек также принадлежит фигуре Φ .

Из физики известно, что центр масс плоской фигуры – это точка с координатами

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \right), \quad (1)$$

где x_i, y_i – координаты точки A_i .

Упражнения

1. Докажите, что центр масс двух точек лежит на отрезке, их соединяющем.
2. Докажите, что центр масс n точек лежит на отрезке, соединяющем любую из них с центром масс остальных.

Выпуклые функции

Нарисуем график функции $y = x^2$ (рис.2,а).

Мы видим, что надграфик этой функции (на рисунке он закрашен красным цветом) является выпуклой фигурой. Если же рассмотреть функцию $y = \sin x$ ($x \in [0; \pi]$), то ее надграфик (на рисунке 2,б он закрашен красным цветом) вы-

пуклым не является. Однако выпуклым является подграфик этой функции (на том же рисунке он закрашен синим цветом).

Эти наблюдения приводят к важному определению:

Если надграфик функции является выпуклой фигурой, то говорят, что эта функция выпуклая, а если выпуклым является подграфик, то говорят, что функция вогнутая¹.

Тем самым, функция $y = x^2$ является выпуклой, а функция $y = \sin x$ ($x \in [0; \pi]$) – вогнутой.

Основное неравенство

Среди известных классических неравенств особое место занимает неравенство Иенсена². Все классические неравенства, упомянутые в начале статьи, являются его следствием.

Теорема (неравенство Иенсена). Пусть $y = f(x)$ – функция, выпуклая на некотором интервале, x_1, x_2, \dots, x_n – произвольные числа из этого интервала, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – произвольные положительные числа, сумма которых равна единице. Тогда

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n). \quad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим на графике функции $y = f(x)$ точки A_1, A_2, \dots, A_n с абсциссами x_1, x_2, \dots, x_n . Расположим в этих точках грузы с массами m_1, m_2, \dots, m_n .

¹ В некоторых учебниках принята другая терминология.

² Иенсен Йоганн Людвиг (1859 – 1925) – датский математик.

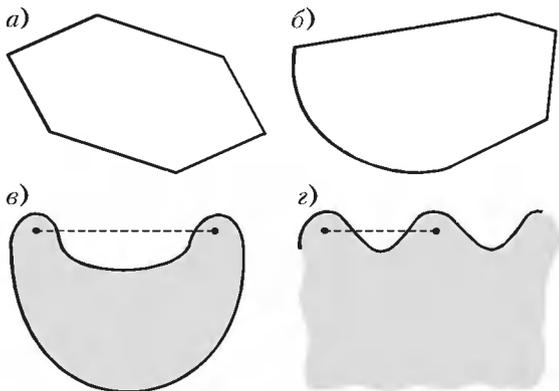


Рис.1

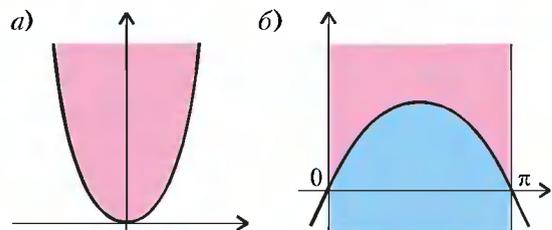


Рис.2

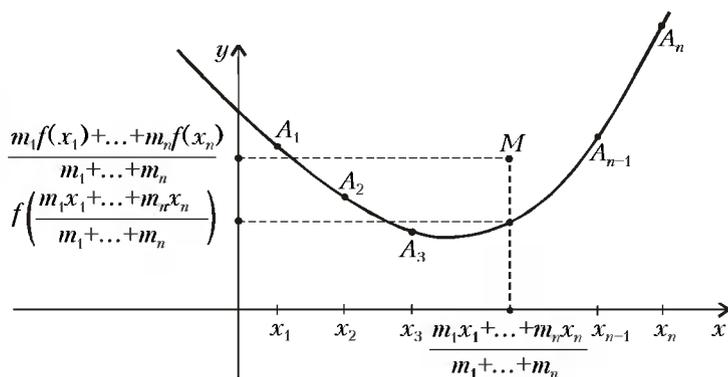


Рис.3

Центр масс этих точек имеет координаты

$$\left(\frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{m_1 + \dots + m_n}, \frac{m_1 f(x_1) + \dots + m_n f(x_n)}{m_1 + \dots + m_n} \right).$$

Так как точки A_1, A_2, \dots, A_n принадлежат надграфику выпуклой функции, то и их центр масс также принадлежит надграфику (ибо надграфик — выпуклая фигура). А это означает, что ордината центра масс

M не меньше ординаты точки на графике с той же абсциссой (рис.3), т.е.

$$f\left(\frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{m_1 + \dots + m_n}\right) \leq \frac{m_1 f(x_1) + \dots + m_n f(x_n)}{m_1 + \dots + m_n}. \quad (3)$$

Для завершения доказательства остается положить $m_1 = \alpha_1, \dots, m_n = \alpha_n$.

Этот пункт статьи мы хотим закончить двумя важными замечаниями.

Во-первых, в процессе доказательства неравенства Иенсена (2) мы доказали неравенство (3). На самом деле эти неравенства равносильны. Положив в неравенстве (2) $\alpha_i = \frac{m_i}{m_1 + \dots + m_n}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), мы получаем неравенство (3). Поэтому естественно оба эти неравенства называть неравенствами Иенсена. Неравенство (2) выглядит более компактно, однако для приложений удобнее пользоваться неравенством (3). Во-вторых, если функция $f(x)$ вогнутая, то для нее неравенства Иенсена (2) и (3) меняются на противоположные. Чтобы доказать это, достаточно рассмотреть выпуклую функцию $-f(x)$.

Неравенство Коши—Буняковского

На первый взгляд, неравенство Иенсена не производит особого впечатления: слишком общо выглядит формулировка. Прочитав статью до конца, вы убедитесь, что это впечатление обманчиво.



Продemonстрируем силу неравенства Иенсена на конкретном примере. А именно, докажем знаменитое неравенство Коши – Буняковского

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2,$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ – произвольные положительные числа.

Доказательство. Как мы знаем, функция $y = x^2$ – выпуклая. Напишем для этой функции неравенство Иенсена (3):

$$\left(\frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{m_1 + \dots + m_n} \right)^2 \leq \frac{m_1 x_1^2 + \dots + m_n x_n^2}{m_1 + \dots + m_n} \quad (m_i > 0).$$

Следовательно,

$$(m_1 x_1^2 + \dots + m_n x_n^2)(m_1 + \dots + m_n) \geq (m_1 x_1 + \dots + m_n x_n)^2.$$

Положив $m_i = b_i^2, x_i = \frac{a_i}{b_i}$, получим требуемое неравенство.

Упражнение 3. Докажите неравенство Коши – Буняковского для произвольных вещественных чисел a_i, b_i .

Примеры выпуклых функций

Для успешного применения неравенства Иенсена необходим простой критерий, позволяющий определять, является ли данная функция выпуклой.

Теорема. Пусть $y = f(x)$ – дважды дифференцируемая функция. Если ее вторая производная положительна, то функция выпукла, а если вторая производная отрицательна, то функция вогнута.

Мы не будем аккуратно доказывать эту теорему, поясним только ее геометрический смысл. Пусть $f''(x) > 0$ для всех x . Очевидно, что надграфик окажется выпуклым, если график функции в каждой точке «поворачивает» вверх относительно касательной в этой точке. На языке формул это означает, что если $l(x)$ – линейная функция, график которой – касательная к графику функции $f(x)$ в точке $(a, f(a))$, то $f(x) > l(x)$ при всех x , достаточно близких к a и отличных от a .

Чтобы вывести неравенство $f(x) > l(x)$ из неравенства $f''(a) > 0$, рассмотрим следующую ситуацию. Пусть $g(x)$ – такая функция, что $g(a) = g'(a) = 0$ и $g''(a) > 0$. Тогда при всех x , достаточно близких к a и отличных от $a, g(x) > 0$. Это понятно с физической точки зрения: если покоящемуся телу (скорость $g'(a) = 0$) придать положительное ускорение (ускорение $g''(a) > 0$), то тело начнет перемещаться в положительном направлении.

Рассмотрим теперь функцию $g(x) = f(x) - l(x)$. Поскольку графики функции $f(x)$ и $l(x)$ проходят через одну точку и имеют в ней одинаковый наклон, $g(a) = g'(a) = 0$. Кроме того, $g''(x) = f''(x)$, так как вторая производная линейной функции $l(x)$ равна нулю. Значит, $g''(a) > 0$ и, согласно сказанному в предыдущем абзаце, $g(x) > 0$ при x , достаточно близких к a . Это и значит, что $f(x) > l(x)$. Случай $f''(x) < 0$ рассматривается аналогично.

Пользуясь теоремой, мы «запасемся» несколькими выпуклыми и вогнутыми функциями. От вас при этом требуется умение вычислять производные.

Примеры

1. $y = x^\alpha \quad (x > 0)$.

Так как $y'' = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$, то при $0 < \alpha < 1$ функция вогнутая, а при $\alpha < 0$ и $\alpha > 1$ – выпуклая.

2. $y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$.

Так как $y'' = a^x \ln^2 a > 0$, то функция выпуклая.

3. $y = \log_a x \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1)$.

Так как $y'' = -\frac{1}{x^2 \ln a}$, то при $a < 1$ функция выпуклая, а при $a > 1$ – вогнутая.

4. $y = \ln(1 + e^x)$.

Так как $y'' = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} > 0$, то эта функция выпуклая.

5. $y = x \ln x$.

Так как $y'' = \frac{1}{x} > 0$, то функция выпуклая.

6. $y = (1 + x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (x > 0)$.

Так как $y'' = (\alpha - 1)x^{\alpha-2}(1 + x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-2}$, то при $\alpha < 1$ функция вогнутая, а при $\alpha > 1$ – выпуклая.

Теперь мы можем доказать несколько классических неравенств.

Неравенство Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \quad (x_i > 0).$$

Доказательство. Прологарифмируем обе части этого неравенства:

$$\ln \left(\frac{1}{n} x_1 + \dots + \frac{1}{n} x_n \right) \geq \frac{1}{n} \ln x_1 + \dots + \frac{1}{n} \ln x_n.$$

Полученное неравенство напоминает нам неравенство Иенсена, однако знак неравенства «смотрит не туда». Объясняется это тем, что функция $\ln x$ не выпуклая, а вогнутая (пример 3).

Неравенство Гёльдера

Пусть p, q – положительные числа, причем $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (a_i, b_i > 0).$$

Доказательство. Ясно, что $p > 1$, поэтому функция $y = x^p$ – выпуклая (пример 1). Напишем для этой функции неравенство Иенсена (3):

$$\left(\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \right)^p \leq \frac{\sum m_i x_i^p}{\sum m_i}.$$

Отсюда

$$\sum m_i x_i \leq (\sum m_i)^{\frac{p-1}{p}} (\sum m_i x_i^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Так как $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $\frac{p-1}{p} = \frac{1}{q}$, и поэтому

$$\sum m_i x_i \leq (\sum m_i x_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum m_i)^{\frac{1}{q}}.$$

Положив теперь $m_i = b_i^q, x_i = a_i b_i^{1-q}$, получаем требуемое неравенство.

Неравенство Минковского

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} + \sqrt[n]{b_1 \cdot \dots \cdot b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1) \cdot \dots \cdot (a_n + b_n)} \quad (a_i, b_i > 0).$$

Доказательство. Поделив обе части неравенства на $\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$,

получим

$$1 + \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}} \cdots \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(1 + \frac{b_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}} \cdots \left(1 + \frac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Ясно, что дробь $\frac{b_i}{a_i}$ имеет смысл как-то обозначить. Но на самом деле удобнее ввести обозначение не для самой дроби $\frac{b_i}{a_i}$, а для ее логарифма: $x_i = \ln \frac{b_i}{a_i}$. Итак, заменив $\frac{b_i}{a_i}$ на e^{x_i} , мы запишем наше неравенство в виде

$$1 + e^{\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}} \leq \Pi(1 + e^{x_i})^{\frac{1}{n}}.$$

Прологарифмируем обе части получившегося неравенства:

$$\ln\left(1 + e^{\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}}\right) \leq \frac{1}{n} \ln(1 + e^{x_i}).$$

В последнем неравенстве мы узнаем неравенство Иенсена для выпуклой функции $y = \ln(1 + e^x)$ (пример 4).

Несколько примеров использования неравенства Иенсена

Задача 1. Докажите неравенство

$$\Pi a_i^{a_i} \geq \left(\sum \frac{1}{n} a_i\right)^{\sum a_i} \quad (a_i > 0).$$

Решение. Прологарифмировав обе части неравенства и разделив на n , получим

$$\sum \frac{1}{n} a_i \ln a_i \geq \left(\sum \frac{1}{n} a_i\right) \ln \sum \frac{1}{n} a_i.$$

А это — неравенство Иенсена для выпуклой функции $y = x \ln x$ (пример 5).

Задача 2. Докажите неравенство

$$\sqrt{(\sum a_i)^2 + (\sum b_i)^2} \leq \sum \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \quad (a_i, b_i > 0).$$

Решение. Напишем неравенство Иенсена (3) для выпуклой функции $y = \sqrt{1 + x^2}$ (пример (6)):

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}\right)^2} \leq \frac{\sum m_i \sqrt{1 + x_i^2}}{\sum m_i}.$$

Домножив обе части неравенства на $\sum m_i$, получим

$$\sqrt{(\sum m_i)^2 + (\sum m_i x_i)^2} \leq \sum m_i \sqrt{1 + x_i^2} = \sum \sqrt{m_i^2 + (m_i x_i)^2}.$$

Остается только положить $m_i = a_i$,

$$x_i = \frac{b_i}{a_i}.$$

В заключение рассмотрим довольно трудную задачу, которую тоже можно решить при помощи неравенства Иенсена.

Задача 3. Докажите неравенство

$$\frac{p_1}{p_2 + p_3} + \frac{p_2}{p_3 + p_4} + \frac{p_3}{p_4 + p_5} + \frac{p_4}{p_5 + p_1} + \frac{p_5}{p_1 + p_2} \geq \frac{5}{2} \quad (p_i > 0).$$

Решение. Для удобства введем дополнительные переменные p_6 и p_7 , равные p_1 и p_2 соответственно. Теперь данное неравенство можно записать коротко:

$$\sum_{i=1}^5 \frac{p_i}{p_{i+1} + p_{i+2}} \geq \frac{5}{2}.$$

Выпишем неравенство Иенсена (3) для выпуклой функции $y = \frac{1}{x}$ (пример 1):

$$\left(\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}\right)^{-1} \leq \frac{\sum m_i x_i^{-1}}{\sum m_i}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum \frac{m_i}{x_i} \geq \frac{(\sum m_i)^2}{\sum m_i x_i}.$$

Положим теперь $m_i = p_i$, $x_i = p_{i+1} + p_{i+2}$:

$$\sum \frac{p_i}{p_{i+1} + p_{i+2}} \geq \frac{(\sum p_i)^2}{\sum p_i (p_{i+1} + p_{i+2})}.$$

Тем самым, достаточно доказать неравенство

$$\frac{(\sum p_i)^2}{\sum p_i (p_{i+1} + p_{i+2})} \geq \frac{5}{2}.$$

Избавившись от знаменателей и раскрыв скобки, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} 2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2) &\geq \\ &\geq p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_1 p_4 + p_1 p_5 + \\ &+ p_2 p_3 + p_2 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_4 + \\ &+ p_3 p_5 + p_4 p_5. \end{aligned}$$

Так как правая часть равна

$$\frac{1}{2} \left((p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)^2 - (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2) \right),$$

то неравенство можно переписать в виде

$$5(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2) \geq (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)^2.$$

Записав это в виде

$$\begin{aligned} (1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2) \times \\ \times (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2) &\geq \\ \geq (1 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3 + 1 \cdot p_4 + 1 \cdot p_5)^2, \end{aligned}$$

мы обнаруживаем частный случай неравенства Коши — Буняковского.

Упражнения

Докажите неравенства:

4. $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^p < n^{p-1} \sum_{i=1}^n x_i^p$ при $p > 1$,

$x_i > 0$.

5. $\sum_{i=1}^n a_i^p \cdot \sum_{i=1}^n b_i^p \geq n^{2-p} \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^p$ при

$p \geq 2$, $a_i, b_i > 0$.

6. $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s - a_i} \geq \frac{n}{n-1}$, где

$s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ и $a_i > 0$.

7. $\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 3\sqrt{2}$ при $a, b, c > 0$.

8. $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 4 \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)$ при $a, b, c > 0$.

9. $\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^n} \leq \frac{\prod_{i=1}^n (1-x_i)}{\left(\sum_{i=1}^n (1-x_i)\right)^n}$ при

$0 < x_i < \frac{1}{2}$.

10. $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2$ при $a, b, c, d > 0$.

11. $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b} \geq 3$ при $a, b, c, d, e, f > 0$.

Топологическое самодействие

Ю.ГРАЦ

ФИЗИКА XX ВЕКА ПЕРЕЖИЛА несколько периодов, каждый из которых привел к необходимости кардинального пересмотра наших представлений о физической картине мира. Один из них связан с именем А.Эйнштейна, создавшего специальную, а затем и

общую теорию относительности и заставившего по-новому взглянуть на такие фундаментальные понятия, как пространство и время.

Как известно, в конце XVII века И.Ньютон сформулировал основы *классической* картины мира, базирующейся на трех законах механики

материальной точки и на законе всемирного тяготения. Согласно последнему, гравитирующие частицы притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. При этом все события в физи-



Z



X

Y

ческом мире разворачиваются в трехмерном евклидовом пространстве, а время считается абсолютным, т.е. одинаковым для всех инерциальных наблюдателей. Введенные Ньютоном понятия *абсолютного пространства* и *абсолютного времени*, свойства которых всегда одинаковы безотносительно к чему-либо внешнему, укоренились и господствовали в физике вплоть до XX века.

Что же сделал Эйнштейн? Исходя из факта равенства инертной и гравитационной масс, он пришел к заключению, что падение тел во внешнем гравитационном поле – это все то же движение по инерции, но в *искривленном пространстве*, и тем самым связал тяготение с геометрическими свойствами пространства, точнее пространства-времени. Таким образом, согласно Эйнштейну, тяготение следует рассматривать как результат влияния кривизны на движение тел и на другие физические процессы. В свою очередь, кривизна пространства есть результат влияния материи на свойства пространства и времени.

Теперь мы уже хорошо понимаем, что гравитационное взаимодействие, хотя и является самым слабым из всех известных типов взаимодействий, играет далеко не последнюю роль, поскольку решаемые теорией тяготения проблемы касаются не просто одного из физических полей, а самой концепции пространства-времени. Тем самым, теория гравитации лежит в основании всех вообще физических теорий.

В этой статье на достаточно простом примере будет рассмотрен вопрос, каким образом *глобальная* структура пространства, т.е. структура пространства в целом, может отражаться на *локальных* наблюдаемых величинах, т.е. на величинах, которые измеряются в данной точке в данный момент времени.

Может ли заряженная частица ускорять саму себя?

Зададим вопрос: может ли покоящаяся заряженная точечная частица в пустом пространстве без границ действовать сама на себя с не равной нулю силой? Вопрос является простым и сложным одновременно.

С одной стороны, основанные на симметрии соображения позволяют

утверждать, что в *евклидовом пространстве без границ* сила самодействия должна быть равна нулю. Действительно, появление силы самодействия на изолированный точечный заряд хотя бы в одной точке пространства означало бы, что точно такая же по величине и направлению сила должна действовать на заряд и в любой другой точке, поскольку все положения в пространстве эквивалентны (*однородность пространства*). Одновременно с этим, наличие силы выделяло бы в пространстве некоторое направление, поскольку сила – величина векторная. Но это, в свою очередь, противоречило бы тому, что все направления в пространстве эквивалентны (*изотропность пространства*). Следовательно, в однородном и изотропном пространстве сила самодействия не может быть ничем иным кроме нуля. Можно и не вычислять – все известно заранее!

Казалось бы, все просто. Но это только на первый взгляд. Одна проблема все же остается. Из электростатики известно, что плотность энергии электростатического поля в пустом пространстве равна

$$w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}.$$

Мы знаем также, что напряженность поля точечного покоящегося заряда в пустом трехмерном евклидовом пространстве без границ равна

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}.$$

Получается, что плотность энергии зависит от расстояния до точки, где расположен заряд, как r^{-4} и, следовательно, полная электростатическая энергия точечного заряда в нуле бесконечна! Что же делать?

Выход из создавшейся ситуации был найден другим выдающимся физиком XX века – П. Дираком. Он обратил внимание на то, что отдельное рассмотрение энергии кулоновского поля фактически является бессмысленным. Поступая таким образом, мы предполагаем, что энергия системы, состоящей из точечного заряда и создаваемого им поля, может быть представлена в виде суммы двух слагаемых:

$$\begin{aligned} W_{\text{полн}} &= m_0 c^2 + \int \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV = \\ &= m_0 c^2 + \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \int \frac{dV}{r^4}, \end{aligned}$$

где первое слагаемое $m_0 c^2$ следует рассматривать как энергию покоя частицы в отсутствие поля.

Однако невозможно оторвать заряд от создаваемого им кулоновского поля, которое жестко привязано к частице и движется вместе с ней. (Подчеркнем, что мы здесь не рассматриваем электромагнитные волны, которые рождаются при ускоренном движении заряда, но после этого ведут совершенно самостоятельное существование.) Значит, введенная нами так называемая *затравочная*, или *голая*, масса m_0 есть величина *нефизическая* – величина, которую нельзя измерить в эксперименте. Наблюдается только полная энергия и связанная с ней полная масса, именно она отвечает за инертные свойства частицы. Проблема возникла из-за того, что мы формально разбили реально измеримую конечную величину

$$W_{\text{полн}} = m c^2$$

на сумму двух слагаемых, каждое из которых по отдельности не наблюдаемо.

Таким образом, возникает необходимость *перенормировки* собственной энергии: мы должны написать, что *затравочная* собственная энергия (масса) связана с *физической* энергией (массой) соотношением

$$m_0 c^2 = m c^2 - \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \int \frac{dV}{r^4},$$

т.е. энергии отличаются друг от друга на бесконечно большую величину. Поначалу процедура перенормировки может показаться весьма странной, однако не будем забывать, что *затравочная* масса – величина *ненаблюдаемая* и ей можно приписать любое значение. Можно, в частности, считать ее бесконечной.

Обратим внимание на одну особенность полученного выше выражения: результат перенормировки не зависит ни от момента времени, ни от координат точки, в которой находится заряд. Это является отражением однородности трехмерного евклидова пространства и однородности времени, т.е. тех свойств симметрии пространства и времени, которые были заложены Ньютоном в его модели пространства событий.

Итак, если мы задались вопросом, может ли взаимодействие с собственным кулоновским полем влиять на

динамику частицы, то мы должны сказать, что в евклидовом пространстве без границ это невозможно.

А что будет, если пространство искривлено и потеряна однородность? Разумеется, проблема бесконечности собственной энергии останется: это следствие точечности источника, с которой кривизна пространства ничего поделать не может. Но не это главное. Предположим, что мы нашли удовлетворяющую всем разумным требованиям процедуру перенормировки. Естественно ожидать, что в этом случае перенормированная собственная электростатическая энергия будет зависеть от положения заряда. Это было бы вполне естественным следствием отсутствия однородности пространства. Но если энергия зависит от точки, то, как это известно из механики, на частицу действует сила. Мы пришли к заключению, что на уединенный точечный заряд, помещенный в искривленное пространство, может действовать сила, появление которой обязано тому, что пространство имеет структуру, отличающуюся от структуры евклидова пространства.

Чтобы разобраться в этом вопросе несколько подробнее, рассмотрим конкретный пример.

Коническое пространство: кривизна без кривизны

Мы привыкли к тому, что если в пространстве введена декартова система координат, то множество точек, имеющих одну и ту же координату z , образует евклидову плоскость. Это соответствует изображенной на рисунке 1 структуре, когда трехмерное евклидово пространство представляется в виде слоеного пирога из наложенных друг на друга евклидовых плоскостей. При этом каждая

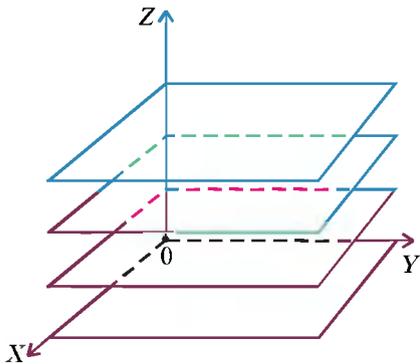


Рис.1

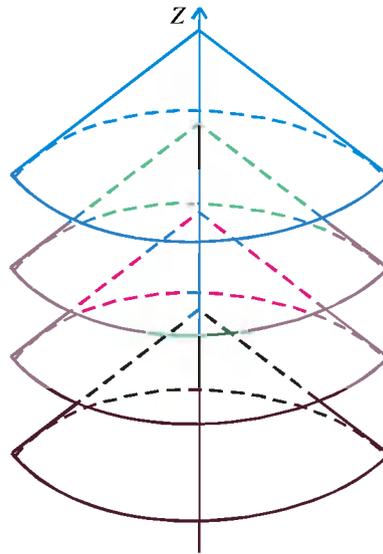


Рис.2

точка пространства принадлежит одной и только одной плоскости.

Заменяем теперь каждую из изображенных на рисунке 1 плоскостей конусом так, как это схематически показано на рисунке 2. Иными словами, попробуем представить себе трехмерное пространство, в котором введена ортогональная система координат и каждому фиксированному значению координаты z соответствует двумерная поверхность с геометрией конуса. Мы намеренно выделили слово «ортогональная», поскольку трехмерное евклидово пространство также можно заполнить наложенными друг на друга конусами, однако там нельзя ввести ортогональную систему координат таким образом, чтобы все точки конуса имели одну и ту же координату z . Заметим, что в построенном нами коническом пространстве плоскому движению, при котором координата z фиксирована, будет соответствовать движение по поверхности конуса.

А действительно ли наше пространство искривлено? Конечно, но достаточно нетривиальным образом.

В самом деле, чтобы сделать конус, следует взять лист бумаги (евклидову плоскость), как это показано на рисунке 3, провести из произвольным образом выбранной точки A под некоторым углом $\Delta\phi$ два луча, удалить (вырезать) заштрихованную область, а соответствующие точки краев разреза отождествить (склеить по краям разреза). Понятно, что при этом не происходит деформации листа ни в одной точке, за

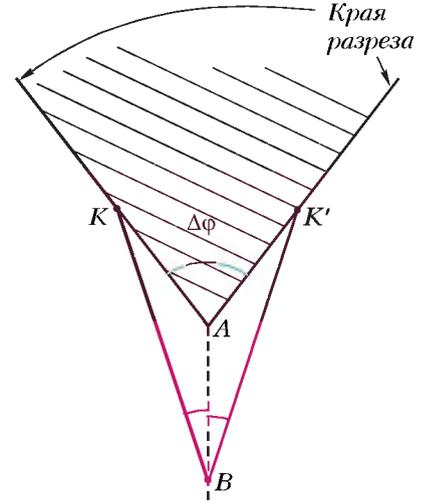


Рис.3

исключением самой точки A , которая теперь становится вершиной конуса. Углы и расстояния остаются неизменными. Остается справедливой теорема Пифагора, если только вершина конуса не попадет внутрь треугольника. Но все же что-то изменится... Если из некоторой точки B , лежащей вне вершины, мы проведем два луча так, чтобы образуемые ими с линией AB углы были равны, то лучи снова пересекутся. Действительно, длины отрезков AK и AK' одинаковы, а соответствующие точки краев разреза отождествляются: точки K и K' — это на самом деле одна и та же точка. Две прямые, которые вышли из одной точки, снова пересеклись!

Таким образом, мы построили поверхность, которая локально неотличима от евклидовой плоскости, но ее глобальные свойства совсем другие. Можно сказать, что вся кривизна конуса сосредоточена в его вершине. Это свойство принципиально отличает конус от других искривленных поверхностей (таких, например, как поверхность сферы) и будет крайне существенным в дальнейшем.

Самодействие в картинках

Вернемся к проблеме самодействия и посмотрим, как это выглядит в случае конического пространства. К сожалению, аналитическое рассмотрение задачи предполагает знание разделов математики, которые не знакомы большей части читателей журнала. Поэтому мы вынуждены

по-прежнему ограничиться только качественным рассмотрением.

Начнем с выяснения того, что мы можем сказать о силе самодействия, основываясь только на соображениях, связанных с размерностью. Рассмотрим точечный заряд q , находящийся на расстоянии ρ от вершины конуса. В интересующем нас случае есть две размерные величины: заряд и расстояние, а также одна размерная константа: ϵ_0 ; никаких других размерных констант не имеется. Но из q , ρ и ϵ_0 величина с размерностью силы строится единственным образом:

$$\vec{F} = C(\Delta\varphi) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{\rho^3} \vec{\rho}.$$

Здесь $C(\Delta\varphi)$ – некоторая неопределенная безразмерная константа, которая, конечно же, может быть найдена лишь путем непосредственных вычислений. Про нее мы знаем только то, что при $\Delta\varphi = 0$ она должна обращаться в ноль. Это достаточно очевидно, поскольку при $\Delta\varphi = 0$ мы приходим к евклидову пространству, в котором сила самодействия, как мы это уже выяснили, равна нулю. В последнем выражении мы учли также и то обстоятельство, что благодаря имеющейся в задаче симметрии сила может быть направлена только вдоль прямой, соединяющей вершину конуса и точку нахождения заряда.

Заметим, что полученный нами из общих соображений результат говорит о том, что точечная заряженная частица будет взаимодействовать с вершиной конуса точно так же, как она взаимодействовала бы с зарядом Cq на расстоянии ρ в евклидовом пространстве. Осталось неопределенным только направление силы, поскольку знак константы C может быть любым. Разобраться в этом нам поможет то замечательное свойство конуса, которое мы назвали его локальной евклидовостью и которое позволяет, разрезав поверхность по образующей, развернуть конус на евклидовой плоскости, нигде не деформируя его поверхность.

Пусть в точку B , находящуюся на некотором не равном нулю расстоянии от вершины конуса, помещен точечный заряд q . Для простоты будем считать наше пространство двумерным – это позволит нам луч-

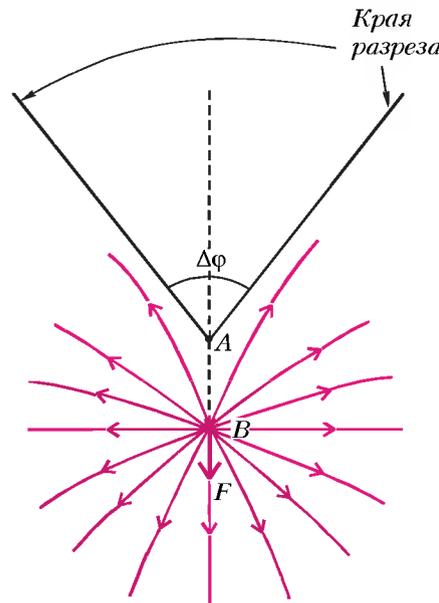


Рис. 4

ше представить происходящее. Как выглядит картина силовых линий соответствующего электростатического поля? Пусть, для определенности, заряд частицы положителен. Давайте, как это показано на рисунке 4, развернем конус на евклидовой плоскости, разрезав его вдоль линии, являющейся продолжением линии, соединяющей точку B , где расположен заряд, с вершиной конуса A . (Конечно, разрезать можно вдоль любой из образующих, результат от этого зависеть не будет, но лучше поступить так, как мы сказали.) При этом сохранится симметрия между правым и левым – зеркальная симметрия относительно линии AB – и все рассуждения станут более наглядными.

Подчеркнем еще раз, что свойство конуса разворачиваться на плоскости без деформации позволяет нам быть уверенными, что мы увидим силовые линии именно такими, какие они есть. Наибольший интерес представляют силовые линии, составляющие малые углы с отрезком BA . Понятно, что эти линии должны будут изгибаться, приближаясь к «берегу» разреза, но не пересекая его. Пересечение силовой линии с «берегом» разреза означало бы пересечение силовых линий, выходящих из точки B под одним и тем же углом к линии BA , но по разные стороны от нее. А это, в свою очередь, означало бы наличие линейного распределения заряда по другую сторону от вершины конуса. Но там нет никаких зарядов!

Заметим, что все сказанное в равной степени относится и к случаю отрицательного заряда q . Изменится только направление стрелок на силовых линиях.

Мы получили замечательный результат. Находящийся в точке B наблюдатель знает, что в окрестности этой точки геометрия евклидова, однако картина силовых линий такова, как если бы в точку, отстоящую от него на длину отрезка BA , был помещен одноименный с q заряд, величина которого зависит от $\Delta\varphi$. Но это означает, что q должен *отталкиваться* от вершины конуса с силой, которая пропорциональна q^2 , стремится к нулю при стремлении к нулю $\Delta\varphi$ и обратно пропорциональна квадрату расстояния до вершины конуса.

Заключение

Теперь несколько слов относительно названия статьи. Почему именно *топологическое* самодействие? В рассматриваемом нами случае все просто. В достаточно малой окрестности точки, где расположен заряд, т.е. локально, геометрия в точности та же, что и на евклидовой плоскости, и если бы наша точечная частица не была заряжена, мы, возможно, никогда бы и не узнали о том, что где-то имеется коническая особенность. Но собственное электростатическое поле частицы простирается до бесконечности и «знает», что глобально пространство устроено совсем не так, как евклидова плоскость. А через поле «знает» об этом и частица. Физический эффект, который мы обнаружили, обусловлен глобальной, или *топологической*, структурой пространства – отсюда и название.

Имеет ли рассмотренное нами коническое пространство хоть какое-то отношение к реальному миру? Оказывается, имеет. Было показано, например, что именно так устроено пространство объектов, которые должны были возникнуть вскоре после Большого Взрыва и которые получили название *космических струн*. Эти объекты весьма активно и с различных точек зрения обсуждаются в научной литературе в последние годы. Существует мнение, что в значительной степени благодаря космическим струнам крупномасштабная структура Вселенной именно такова, какой мы ее видим.

Малая теорема Ферма

В. СЕНДЕРОВ, А. СПИВАК

Напоминание

Малая теорема Ферма гласит: *если a – целое число, не делящееся на простое число p , то $a^{p-1} - 1$ делится на p .*

Функция Эйлера $\varphi(n)$ – это количество натуральных чисел от 1 до n , взаимно простых с n .

Функция Кармайкла $\lambda(n)$ – это такое наименьшее натуральное число k , что для всякого целого числа a , взаимно простого с натуральным числом n , разность $a^k - 1$ делится на n .

Число g называют *первообразным корнем по модулю n* , если для всякого целого a , взаимно простого с n , существует такое натуральное число m , что $g^m \equiv a \pmod{n}$.

Подробно об этих и многих других понятиях и теоремах арифметики можно прочитать в предыдущих частях статьи. Там не было доказано существование первообразного корня по простому модулю. Пришла пора это сделать.

Первообразные корни

Первообразные корни по модулю 11

Число 2 – первообразный корень по модулю 11. Какие еще есть первообразные корни по этому модулю?

Для ответа не нужно перебирать все числа 3, 4, 5, ..., 9, 10 и составлять для каждого из них таблицу. Некоторые степени двойки можно сразу отбросить:

$$(2^2)^5 = 2^{10} \equiv 1,$$

$$(2^4)^5 = 2^{20} \equiv 1,$$

$$(2^5)^2 \equiv 1,$$

$$(2^6)^5 \equiv 1,$$

$$(2^8)^5 \equiv 1 \pmod{11}.$$

А вот степени двойки $2^1 \equiv 2$, $2^3 \equiv 8$, $2^7 \equiv 7$ и $2^9 \equiv 6$, показатели которых взаимно просты с 10, являются первообразными корнями. (Обдумайте это!)

И вообще, если g – первообразный корень по простому модулю p , то g^s является первообразным корнем в

том и только том случае, когда s и $p - 1$ взаимно просты.

Упражнения

44. Докажите это.

45. Для того чтобы число a было первообразным корнем по простому модулю p , необходимо и достаточно, чтобы a не делилось на p и ни для какого простого делителя q числа $p - 1$ разность $a^{(p-1)/q} - 1$ не делилась бы на p . Докажите это.

46. Найдите наименьшее натуральное число, являющееся первообразным корнем по модулю а) 23; б) 41; в) 257.

47. а) Проверьте, что 2 не является первообразным корнем по модулю 263, а -2 является.

б) Пусть $a^3 - a$ не делится на 83. Докажите, что ровно одно из чисел a и $-a$ является первообразным корнем по модулю 83.

48. а) Пусть p – простое число, $p \equiv 1 \pmod{4}$. Докажите, что число $-a$ является первообразным корнем по модулю p тогда и только тогда, когда само число a – первообразный корень по модулю p .

б) Пусть p – простое число, $p \equiv 3 \pmod{4}$. Докажите, что число a является первообразным корнем по модулю p тогда и только тогда, когда порядок числа $-a$ по модулю p равен $(p - 1)/2$.

Порядки классов вычетов

В таблице 5 для каждого ненулевого остатка $a \pmod{11}$ указан его порядок k .

Как и должно быть, порядки – делители числа 10. Давайте посчитаем, сколько раз в нижней строке

Таблица 5

| | | | | | | | | | | |
|-----|---|----|---|---|---|----|----|----|---|----|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| k | 1 | 10 | 5 | 5 | 5 | 10 | 10 | 10 | 5 | 2 |

таблицы 5 встречаются числа 1, 2, 5 и 10. Ответы запишем в виде таблицы 6.

Таблица 6

| | | | | |
|-------------|---|---|---|----|
| Порядок | 1 | 2 | 5 | 10 |
| Встречается | 1 | 1 | 4 | 4 |

Видна закономерность? Если нет, посмотрите на таблицу 7, составленную для $p = 13$.

Таблица 7

| | | | | | | |
|-----|----|----|---|----|----|----|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| k | 1 | 12 | 3 | 6 | 4 | 12 |
| a | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| k | 12 | 4 | 3 | 6 | 12 | 2 |

В ней порядки – делители числа 12. Посчитаем, сколько раз встречаются в нижней строке таблицы 7 числа 1, 2, 3, 4, 6 и 12 (табл. 8).

Таблица 8

| | | | | | | |
|-------------|---|---|---|---|---|----|
| Порядок | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 12 |
| Встречается | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 4 |

Если вы все еще не догадались, составьте такие таблицы для нескольких других простых чисел p , и рано или поздно увидите, что в нижних строках этих таблиц – значения функции Эйлера: $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 4$, $\varphi(6) = 2$, $\varphi(10) = 4$, $\varphi(12) = 4$.

Великий немецкий математик К.Ф.Гаусс (1777 – 1855) в «Арифметических исследованиях», опубликованных в 1801 году, доказал, что это не случайность, а общий закон.

Теорема 4. *Среди $p - 1$ ненулевых классов вычетов по простому модулю p порядок k , где k – делитель числа $p - 1$, имеют ровно $\varphi(k)$ классов вычетов. (В частности, для любого простого числа p существует $\varphi(p - 1)$ первообразных корней по модулю p .)*

Для доказательства теоремы 4 мы используем теорему Безу и одно интересное свойство функции Эйлера.

Теорема Безу

Для тех, кто знаком с делением многочленов с остатком, теорему Безу¹ можно сформулировать и до-

¹ *Этьен Безу (1730–1783) – французский математик.*

Окончание. Начало см. в «Кванте» №1, 3.

казать очень коротко. В равенство

$$f(x) = (x - a)g(x) + r,$$

где $g(x)$ — многочлен (неполное частное), а r — число (остаток), можно подставить вместо x число a . Получим

$$f(a) = (a - a)g(a) + r = r.$$

Значит, остаток r от деления $f(x)$ на $x - a$ равен $f(a)$. Это и есть теорема Безу.

А для остальных читателей теорему Безу можно сформулировать и доказать чуть более длинным, но не менее естественным способом.

Теорема 5. Число a является корнем многочлена $f(x)$ в том и только том случае, когда $f(x)$ делится на $x - a$, т.е. когда

$$f(x) = (x - a)g(x),$$

где g — некоторый многочлен.

Доказательство. Если

$$f(x) = (x - a)g(x),$$

то

$$f(a) = (a - a)g(a) = 0.$$

Обратно, пусть $f(a) = 0$. Подставим в многочлен

$$f(x) = k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \dots + k_2 x^2 + k_1 x + k_0$$

число a . Получим

$$0 = f(a) = k_n a^n + k_{n-1} a^{n-1} + \dots + k_2 a^2 + k_1 a + k_0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(a) = \\ &= k_n (x^n - a^n) + k_{n-1} (x^{n-1} - a^{n-1}) + \dots \\ &\quad \dots + k_2 (x^2 - a^2) + k_1 (x - a). \end{aligned}$$

Каждая из разностей

$$x - a,$$

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a),$$

...

$$x^n - a^n =$$

$$= (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

кратна $x - a$. Теорема доказана.

Переформулировка малой теоремы Ферма

Из теоремы Безу следует, что если a_1, a_2, \dots, a_m — различные корни

многочлена $f(x)$, то $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_m)g(x)$, где g — некоторый многочлен.

Применив это соотношение к многочлену $x^{p-1} - 1$, получим замечательную переформулировку малой теоремы Ферма:

$$x^{p-1} - 1 \equiv (x - 1)(x - 2)\dots(x - p + 1),$$

где знак сравнения означает, что если раскрыть все скобки в правой части и вычесть из нее левую, то получим многочлен, коэффициенты которого кратны p . Как вы помните, для частных случаев $p = 2, 3, 5, 7$ и 11 это разложение на множители встречалось в первой части статьи.

Упражнение 49. Подставив $x = 0$, докажите теорему Вильсона: $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$ для любого простого числа p .

Сравнение $x^k \equiv 1 \pmod{p}$

Если k — делитель числа $p - 1$, т.е. $p - 1 = km$, то

$$x^{p-1} - 1 =$$

$$= (x^k - 1)(x^{k(m-1)} + x^{k(m-2)} + \dots + x^k + 1).$$

Значит, многочлен $x^k - 1$ является делителем многочлена $x^{p-1} - 1$. Поскольку $x^{p-1} - 1$ разлагается в произведение многочленов первой степени, то его делитель $x^k - 1$ является произведением k многочленов первой степени.

Немного подумав, можно сообразить, что мы доказали следующее утверждение.

Теорема 6. Если p — простое число, k — делитель числа $p - 1$, то сравнению $x^k \equiv 1 \pmod{p}$ удовлетворяют ровно k классов вычетов по модулю p .

Упражнения

50. Решите сравнения

$$а) x^4 \equiv 1 \pmod{13}; б) x^{1604} \equiv 1 \pmod{17}.$$

(Указание. 2 и 3 — первообразные корни, соответственно, по модулю 13 и по модулю 17.)

51. Зная, что 2 — первообразный корень по модулю 29, решите сравнение

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{29}.$$

52. Пусть p — простое число. При каких k сумма $1^k + 2^k + \dots + (p-1)^k$ кратна p ?

53. а) Сколько существует таких пар (a, b) натуральных чисел, что $a, b \leq 1717$ и $a^8 + b^8$ кратно 17?

б) Сколько существует таких троек (a, b, c) натуральных чисел, что

$a, b, c \leq 289$ и $a^{1000} + b^{3000} + c^{9000}$ кратно 17?

Сумма значений функции Эйлера

Рассмотрим 100 дробей: $1/100, 2/100, \dots, 100/100$. Если каждую из них привести к несократимому виду, то получим $\varphi(100) = 40$ дробей со знаменателем 100, $\varphi(50) = 20$ дробей со знаменателем 50, и так далее: для каждого делителя d числа 100 получим $\varphi(d)$ дробей со знаменателем d . (Почему? Потому что $\varphi(d)$ — это количество несократимых правильных дробей со знаменателем d .)

Мы получили замечательное равенство:

$$100 = \varphi(100) + \varphi(50) + \varphi(25) + \varphi(20) + \varphi(10) + \varphi(5) + \varphi(4) + \varphi(2) + \varphi(1). \quad 2$$

Если бы мы рассмотрели не дроби со знаменателем 100, а дроби со знаменателем n , то точно так же доказали бы следующее утверждение.

Теорема 7. Для любого натурального числа n сумма значений функции Эйлера $\varphi(d)$ по всем делителям d числа n равна n .

Упражнения

54. Если d — делитель числа n , то существует ровно $\varphi(n/d)$ таких натуральных чисел k , что $k \leq n$ и $\text{НОД}(k, n) = d$. Докажите это.

55. Пусть $n > 1$. Найдите сумму всех несократимых правильных дробей, знаменатели которых равны n .

Доказательство теоремы 4

Мы должны доказать, что если k — делитель числа $p - 1$, то среди ненулевых классов вычетов по простому модулю p существует ровно $\varphi(k)$ классов порядка k .

Применим индукцию. *База.* Для $k = 1$ утверждение верно.

Переход. Рассмотрим некоторый делитель k числа $p - 1$. Предположим, что для любого делителя d числа k , где $d < k$, существует ровно $\varphi(d)$ классов вычетов порядка d . Найдем количество классов вычетов порядка k .

В силу теоремы 6, сравнению $x^k \equiv 1 \pmod{p}$ удовлетворяют ровно k классов вычетов. Каждое решение x этого сравнения имеет некоторый

² Для Фомы неверующего: $40 + 20 + 20 + 8 + 4 + 4 + 2 + 1 + 1 = 100$.

порядок по модулю p , причем этот порядок – делитель числа k . Осталось вспомнить теорему 7 – и становится ясно, что классов порядка k существует ровно $\phi(k)$ штук. Теорема 4 доказана.

Упражнения

56. Пусть p – простое число, $p > 3$. Найдите остаток от деления на p произведения тех из чисел $1, 2, \dots, p - 1$, которые являются первообразными корнями по модулю p .

57. а) Если порядки чисел a и b по модулю p равны m и n соответственно, то порядок произведения ab – делитель числа $\text{НОК}[m, n]$. Докажите это.

б) Покажите, что порядок числа ab равен mn , если числа m и n взаимно просты, и не обязательно равен числу $\text{НОК}[m, n]$, если m и n не взаимно просты.

58. а) Пусть p – простое число, $p > 2$, $p - 1 = q_1^{a_1} q_2^{a_2} \dots q_s^{a_s}$ – разложение числа $p - 1$ в произведение степеней различных простых чисел. Пусть g_1, g_2, \dots, g_s – такие не кратные p числа, что $g_i^{(p-1)/q_i} \not\equiv 1 \pmod{p}$ при $i = 1, 2, \dots, s$. Докажите, что число $g = g_1^{(p-1)/q_1^{a_1}} g_2^{(p-1)/q_2^{a_2}} \dots g_s^{(p-1)/q_s^{a_s}}$ – первообразный корень по модулю p . (Заметьте: мы получили еще одно доказательство существования первообразного корня по простому модулю!)

б) Для любого натурального n существует взаимно простое с n целое число a , порядок которого по модулю n равен $\lambda(n)$. Докажите это.

в) Если $n = 2, 4, p^m$ или $2p^m$, где p – нечетное простое, m – натуральное, то существует первообразный корень по модулю n . Докажите это.

Гипотеза Артина

Как мы только что доказали, для каждого простого числа p существует первообразный корень по модулю p . Интересно: какие целые числа бывают первообразными корнями, а какие не бывают?

Очевидно, -1 является первообразным корнем только по модулю 2 или 3. Далее, из равенства $(a^2)^{(p-1)/2} = a^{p-1}$ следует, что точный квадрат не может быть первообразным корнем ни по какому нечетному простому модулю p .

Немецкий алгебраист Эмиль Артин (1898–1962) предположил, что для любого целого числа $g \neq -1$, не являющегося квадратом целого числа, существует бесконечно много таких простых p , что g – первообразный корень по модулю p .

Более того, некоторые вероятностные соображения привели Артина к следующему уточнению его гипотезы: если k есть наибольшее такое число, что g явля-

ется k -й степенью, то отношение количества $\pi_g(n)$ простых чисел, не превосходящих n , по модулю которых g является первообразным корнем, к количеству $\pi(n)$ всех простых чисел, не превосходящих n , стремится при $n \rightarrow \infty$ к зависящему только от k пределу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi_g(n)}{\pi(n)} = \prod_{k|q} \left(1 - \frac{1}{q-1}\right) \cdot \prod_{k \nmid q} \left(1 - \frac{1}{q(q-1)}\right),$$

где первое произведение распространено на все простые числа q , являющиеся делителями k , а второе – на все простые числа q , не являющиеся делителями k .

К настоящему времени гипотеза Артина не доказана, хотя некоторый ее аналог, относящийся к полю рациональных функций от одной переменной над конечным полем, доказать удалось.

Числа Кармайкла

В силу малой теоремы Ферма, $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ для любого нечетного простого числа p . Существуют ли составные числа с тем же свойством? Да, существуют:

$$2^{340} \equiv 1 \pmod{341}.$$

В самом деле, $341 = 11 \cdot 31$, причем $2^{10} - 1 = 1023 = 3 \cdot 11 \cdot 31$. (Можно проверить, что число 341 – наименьшее составное число n со свойством $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$.)

Упражнение 59. а) Если $n = (4^p - 1)/3$, где p – простое число, $p > 3$, то $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$. Докажите это.

б) (M672) Пусть a – такое натуральное число, что $2^a - 2$ кратно a (например, $a = 3$). Определим последовательность x_1, x_2, x_3, \dots условиями $x_1 = a, x_{n+1} = 2^{x_n} - 1$. Докажите, что $2^{x_n} - 2$ кратно x_n при любом n .

Но почему мы заинтересовались именно случаем $a = 2$? Наверное, разумнее спросить: существуют ли такие составные числа n , что для любого a , взаимно простого с n , выполнено сравнение $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$? Такие числа тоже существуют! Их называют *числами Кармайкла*. Наименьшее число – это

$$561 = 3 \cdot 11 \cdot 17,$$

за ним идут

$$1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17, 1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19,$$

$$2465 = 5 \cdot 17 \cdot 29, 2821 = 7 \cdot 13 \cdot 31,$$

$$6601 = 7 \cdot 23 \cdot 41, 8911 = 7 \cdot 19 \cdot 67,$$

$$10585 = 5 \cdot 29 \cdot 73, 15841 = 7 \cdot 31 \cdot 73,$$

$$29341 = 13 \cdot 37 \cdot 61,$$

$$41041 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 41, \dots$$

В 1994 году в журнале *Annals of Mathematics* (т. 139, с. 703–722) три математика – Альфорд, Гренвилль и Померанц – опубликовали (абсолютно недоступное для школьника) доказательство бесконечности множества чисел Кармайкла.

Упражнение 60. а) Докажите, что $a^{561} - a$ кратно числу 561 при любом целом a .

б) Докажите при $n = 1105$ сравнения $2^{n-1} \equiv 1 \equiv 3^{n-1} \pmod{n}$. (Можно доказать, что число 1105 – наименьшее составное число с таким свойством.)

Очевидно, составное число n является числом Кармайкла тогда и только тогда, когда $n - 1$ делится на $\lambda(n)$.

Теорема 8. Составное число $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s}$, где p_1, p_2, \dots, p_s – различные простые числа, m_1, m_2, \dots, m_s – натуральные числа, является числом Кармайкла в том и только том случае, когда $m_1 = m_2 = \dots = m_s = 1$ и $n - 1$ кратно каждому из чисел $p_1 - 1, p_2 - 1, \dots, p_s - 1$.

Следствие. Если n – число Кармайкла, то для любого целого числа a верно сравнение $a^n \equiv a \pmod{n}$.

Доказательство теоремы 8. Пусть n – число Кармайкла. Поскольку при $n > 2$ значение функции Кармайкла $\lambda(n)$ четно, то $n - 1$ должно быть четным. Следовательно, n нечетно.

Поскольку $\lambda(n)$ делится на $\lambda(p_i^{m_i}) = p_i^{m_i-1}(p_i - 1)$, а $n - 1$ не делится на p_i , то в случае $m_i > 1$ получаем противоречие. Следовательно, $m_1 = m_2 = \dots = m_s = 1$. Завершение доказательства теоремы 8 предоставляем читателю.

Упражнения

61. а) Докажите, что $2^{161038} \equiv 2 \pmod{161038}$. (При помощи компьютера легко проверить, что $n = 161038 = 2 \cdot 73 \cdot 1103$ – наименьшее четное составное число, для которого $2^n \equiv 2 \pmod{n}$). Следующее такое четное число $215326 = 2 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 151$.)

б) Для любого целого числа $a \neq -1$ существует такое четное число $n > 2$, что $a^n \equiv a \pmod{n}$. Докажите это.

в*) Для любого натурального числа a существует бесконечно много таких четных чисел n , что $a^n \equiv a \pmod{n}$. Докажите это. (Указание. Используйте теорему Биркгофа–Вандивера, сформулированную в упражнении 32.)

62. а) Пусть $n = 3^m - 2^m$. Докажите, что если $n - 1$ кратно m , то число $3^{n-1} - 2^{n-1}$ кратно n .

б) Существует ли составное число n , для которого $3^{n-1} - 2^{n-1}$ кратно n ?

в) (M1510) Докажите, что существует бесконечно много таких составных чисел n , что $3^{n-1} - 2^{n-1}$ кратно n .

63. Докажите, что если n – составное число и $1^{n-1} + 2^{n-1} + \dots + (n-1)^{n-1} \equiv -1 \pmod{n}$, то n – число Кармайкла. (Воспользовавшись списком чисел Кармайкла, не превосходящих 10^{16} , можно при помощи компьютера проверить, что не существует ни одного удовлетворяющего этому сравнению числа, не превосходящего 10^{16} . Существуют ли такие числа, большие 10^{16} , мы не знаем.)

Приложения

Бином Ньютона

Малую теорему Ферма легко доказать по индукции, если использовать формулу бинома Ньютона. Мы сделаем это для натуральных чисел a , оставив случай отрицательных чисел читателю.

Пусть сначала $p = 3$. *База индукции:* $1^3 - 1 = 0$ делится на 3. *Переход:* если для некоторого числа a уже доказали, что $a^3 - a$ кратно 3, то

$$\begin{aligned} (a+1)^3 - (a+1) &= a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - (a+1) \equiv \\ &\equiv a^3 + 1 - a - 1 = a^3 - a \equiv 0 \pmod{3}. \end{aligned}$$

Аналогично для $p = 5$: база очевидна ($1^5 - 1 \equiv 0 \pmod{5}$), а для перехода используем формулу

$$(a+1)^5 = a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1.$$

Видите, коэффициенты при a^4, a^3, a^2 и a кратны 5. Поэтому

$$(a+1)^5 \equiv a^5 + 1 \pmod{5},$$

откуда и следует возможность индукционного перехода:

$$\begin{aligned} (a+1)^5 - (a+1) &\equiv \\ &\equiv a^5 + 1 - a - 1 = a^5 - a \pmod{5}. \end{aligned}$$

Упражнение 64. Докажите индукцией по a малую теорему Ферма для а) $p = 2$; б) $p = 7$.

Займемся общим случаем. Формула бинома имеет вид

$$\begin{aligned} (a+1)^p &= a^p + pa^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2} a^{p-2} + \\ &+ \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} a^{p-3} + \dots \\ &\dots + \frac{p(p-1)}{2} a^2 + pa + 1. \end{aligned}$$

Коэффициенты

$$\begin{aligned} C_p^1 &= p, C_p^2 = p(p-1)/2, \dots \\ \dots C_p^k &= p(p-1)\dots(p-k+1)/k!, \dots \\ \dots C_p^{p-1} &= p \end{aligned}$$

кратны простому числу p . Поэтому $(a+1)^p \equiv a^p + 1 \pmod{p}$, что и требова-

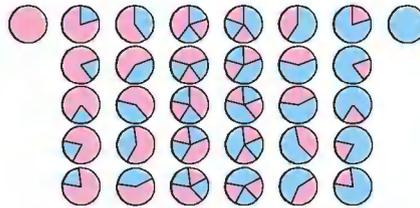
лось:

$$\begin{aligned} (a+1)^p - (a+1) &\equiv \\ &\equiv a^p + 1 - a - 1 = a^p - a \pmod{p}. \end{aligned}$$

Упражнение 65. Если n составное, то хотя бы один из биномиальных коэффициентов $C_n^{n-2}, C_n^2, \dots, C_n^k, \dots, C_n^{n-1}$ не кратен n . Докажите это.

Комбинаторное доказательство

На рисунке изображены все 32 способа раскраски в два цвета круга, который разделен на 5 равных секторов. Среди



них выделяются два способа – когда весь круг синий и когда он весь красный. А остальные разбиты на 6 групп по 5 раскрасок, получающихся одна из другой поворотом.

Задача. Сколькими способами можно раскрасить a разными красками круг, разбитый на p одинаковых секторов, где p – простое число? (Каждый сектор окрашивается одной краской; не обязательно использовать все краски; две раскраски, совпадающие при повороте круга, считаются одинаковыми.)

Решение. Очевидно, можно все секторы покрасить одной краской. Таких способов столько же, сколько красок, т.е. a способов.

А вот из любой другой раскраски поворотами можно получить p разных раскрасок (считая и саму эту раскраску: она получается поворотом на 0°). Значит, ответ таков:

$$a + \frac{a^p - a}{p}$$

Поскольку количество способов не бывает дробным, число $a^p - a$ обязано нацело делиться на p .

Упражнение 66. Сколькими способами можно раскрасить a разными красками круг, разбитый а) на p^2 секторов, где p – простое число? б) на pq секторов, где p, q – простые числа, $p \neq q$? (Каждый сектор окрашиваем одной краской; не обязательно использовать все краски; две раскраски, совпадающие при повороте круга, считаем одинаковыми.)

Как строят большие простые числа?

Как помнит читатель первой части статьи, для криптографической системы RSA нужны большие (лучше всего – длиной в несколько сот цифр) простые числа.

Наиболее эффективным средством построения таких чисел сейчас является метод, основанный на следующей лемме.

Лемма. Пусть q – нечетное простое число, r – четное натуральное, $n = qr + 1$. Если существует такое целое число a , что $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ и $\text{НОД}(a^r - 1, n) = 1$, то каждый простой делитель p числа n удовлетворяет сравнению $p \equiv 1 \pmod{2q}$.

Доказательство. Обозначим порядок числа a по модулю p буквой k . Поскольку $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{p}$ и $a^{(n-1)/q} \not\equiv 1 \pmod{p}$, то k делится на q . В силу теоремы 3, $p - 1$ делится на k . Следовательно, $p - 1$ делится на q . Кроме того, $p - 1$ четно. Лемма доказана.

Следствие. Если выполнены условия леммы и $r \leq 4q + 2$, то n – простое число.

Доказательство. Пусть n равняется произведению не менее чем двух простых чисел. Поскольку каждое из них не меньше $2q + 1$, получаем противоречие:

$$(2q+1)^2 \leq n = qr + 1 \leq 4q^2 + 2q + 1.$$

Покажем теперь, как, имея большое простое число q , можно пытаться строить существенно большее простое число n . Выберем случайным образом четное число r на промежутке $q < r \leq 4q + 2$ и положим $n = qr + 1$. Затем проверим n на отсутствие малых простых делителей, перепробовав малые простые числа.³ Если при этом выяснится, что n – составное, то следует выбрать новое значение r и повторить вычисления.

Если же есть надежда, что n простое, то можно случайным образом выбрать число a и проверить, выполнены ли для него соотношения $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ и $\text{НОД}(a^r - 1, n) = 1$. Если выполнены, то можно утверждать, что n простое (заметьте: $n > q^2$, так что число n записывается примерно вдвое большим количеством цифр, чем q). Если же нет, то можно взять другое значение a , и так далее.

В настоящий момент нет доказательства того, что этот алгоритм сработает и тем более – что он сработает достаточно быстро. Однако на практике он позволяет строить большие (порядка 10^{300}) простые числа.

³ В этом месте мы чуть лукавим: следует не только делить на малые простые числа, но и применять более хитрые методы проверки на простоту. Хотя эти методы основаны на малой теореме Ферма и по сути сводятся к тому, что если для некоторого a , взаимно простого с n , число a^{n-1} не сравнимо с 1 по модулю n , то n составное, подробное обсуждение завело бы нас слишком далеко в бурно развивающуюся область теории чисел и вычислительной математики.

Энрико Ферми

А. ВАСИЛЬЕВ

С ОТУЮ КЛЕТКУ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ системе элементов занимает фермий (Fm). Это название «юбилейный» элемент получил в честь великого итальянского физика Энрико Ферми (1901–1954), о котором современники говорили, что он открыл дверь в атомный век человечества. Кроме того, Ферми внес решающий вклад в развитие статистической физики и квантовой теории твердого тела.

Еще в 1926 году Ферми разработал новую разновидность статистической механики, основанную на принципе запрета Паули. Задачей статистической механики, как одного из крупнейших разделов физики, является описание макроскопических тел, т.е. систем, состоящих из большого числа одинаковых частиц (молекул, атомов, электронов), через свойства этих частиц и взаимодействие между ними. Согласно принципу Паули, две тождественные частицы с полуполным спином не могут одновременно находиться в одном состоянии. Это приводит к тому, что с понижением температуры такие частицы – фермионы – последовательно заполняют состояния с наименьшей возможной энергией. При абсолютном нуле температуры имеются заполненные и пустые состояния, граница между которыми называется уровнем Ферми. Статистика фермионов, каковыми являются, например, барионы, кварки, лептоны, а также электроны и дырки в твердых телах, принципиально отличается от статистики частиц с целочисленным спином, которые стремятся сконденсироваться в одном и том же состоянии при нуле температуры. К таким частицам, которые называются бозонами, относятся фотоны, глюоны и гравитоны, а также составные частицы из четного числа фермионов. В твердых телах бозонами являются, например, кванты колебаний атомов кристаллической решетки – фононы.



В начале 30-х годов Ферми перенес свое внимание на атомное ядро. В 1933 году он предложил теорию бета-распада, позволившую объяснить, каким образом ядро спонтанно испускает электроны и какова при этом роль нейтрино – частиц, лишенных электрического заряда и не поддававшихся тогда экспериментальному обнаружению. Существование таких частиц было постулировано Паули, а название придумано Ферми (экспериментально нейтрино было обнаружено лишь в 1956 году). Теория бета-распада Ферми затрагивала новый тип сил, получивших название слабого взаимодействия. По интенсивности слабое взаимодействие значительно уступает сильному, удерживающему вместе нуклоны, из которых состоит атомное ядро.

В 20-е годы было принято считать, что атом содержит два типа заряженных частиц: положительные протоны, входящие в состав ядра, и отрицательные электроны, обращающиеся вокруг ядра. Физиков интересовало, может ли ядро содержать частицу, лишенную электрического заряда. Эксперименты по обнаружению электронеutralной частицы до-

стигли кульминации в 1932 году, когда Дж. Чедвик открыл нейтрон. Ферми сразу же оценил значение нейтрона как мощного средства инициирования ядерных реакций. Экспериментаторы пытались бомбардировать атомы заряженными частицами, но для преодоления электрического отталкивания заряженные частицы необходимо разгонять на мощных и дорогих ускорителях. Действительно, налетающие электроны отталкиваются атомными электронами, а протоны и альфа-частицы – ядром так, как отталкиваются одноименные электрические заряды. Поскольку нейтрон не имеет электрического заряда, необходимость в ускорителях отпадает.

Значительный прогресс в иницировании ядерных реакций был достигнут в 1934 году, когда Фредерик Жолио и Ирен Жолио-Кюри открыли искусственную радиоактивность. Облучая ядра бора и алюминия альфа-частицами, они впервые создали новые радиоактивные изотопы известных элементов. Продолжая начатую этими исследованиями работу, Ферми и его сотрудники в Риме принялись облучать нейтронами каждый элемент Периодической системы в надежде получить новые радиоактивные изотопы с помощью присоединения нейтронов к ядрам. Первого успеха удалось достичь при бомбардировке фтора, затем были получены сотни новых радиоактивных изотопов. При бомбардировке урана – 92-го элемента, самого тяжелого из встречающихся в природе, – Ферми и его группа получили сложную смесь изотопов. Химический анализ не обнаружил в ней ни изотопов урана, ни изотопов соседнего элемента, более того – результаты анализа исключали присутствие всех элементов с номерами от 86 до 91. Сам того не зная, Ферми вызвал деление урана, расщепив тяжелое ядро на два или большее число осколков и других фрагментов.

Через несколько месяцев после начала экспериментов, в 1935 году, Ферми и его сотрудники обнаружили, что если нейтроны замедлять, пропуская через воду или парафин, то они более эффективно инициируют ядерные реакции. Замедление нейтронов легко объяснить их столкновениями с ядрами водорода (протонами), в больших количествах содержащихся в этих средах. При столкновениях значительная часть кинетической энергии нейтронов передается протонам, поскольку массы этих частиц почти равны, а медленные частицы более эффективно проникают в ядра атомов. (Это связано с тем, что процесс проникновения элементарной частицы в ядро носит резонансный характер. Согласно гипотезе де Бройля, каждая элементарная частица является одновременно и волной, длина которой зависит от скорости. Атомное ядро также имеет свою длину волны. Когда длины волн элементарной частицы и ядра оказываются одинаковыми, нейтроны легче проникают в глубь ядра.)

В 1938 году Энрико Ферми была присуждена Нобелевская премия по физике. В решении Нобелевского комитета говорилось, что премия присуждена ему за доказательства существования новых радиоактивных элементов, полученных при облучении нейтронами, и связанное с этим открытие ядерных реакций, вызываемых медленными нейтронами. Наряду с выдающимися открытиями Ферми, всеобщее признание получили его искусство экспериментатора, поразительная изобретательность и интуиция, позволившие пролить новый свет на структуру ядра и открыть новые горизонты для будущего развития атомных исследований.

Сразу же по завершении церемонии вручения Нобелевской премии Ферми отправился в США. Там ему стало известно об открытии Ганом, Мейтнер и Штрассманом расщепления урана при облучении его нейтронами. Физики начали обсуждать возможность цепной реакции. Если всякий раз, когда нейтрон расщепляет атом урана, испускаются новые

нейтроны, то они, сталкиваясь с другими атомами урана, порождают новые нейтроны и тем самым вызывают незатухающую цепную реакцию. Так как при каждом делении ядра урана высвобождается большое количество энергии, цепная реакция сопровождается колоссальным ее выделением. Уран, таким образом, оказывается природным аккумулятором энергии, которая может использоваться как в мирных, так и в военных целях.

Ферми руководил строительством первого в мире ядерного реактора, создававшегося из брусков графита. Уран и оксид урана размещались между этими брусками, а в качестве замедлителя реакции применялись кадмиевые стержни, которые эффективно поглощают нейтроны. Эти стержни были медленно выведены из активной зоны реактора 2 декабря 1942 года, и человечество вступило в атомный век своего существования.

РЕЦЕНЗИИ

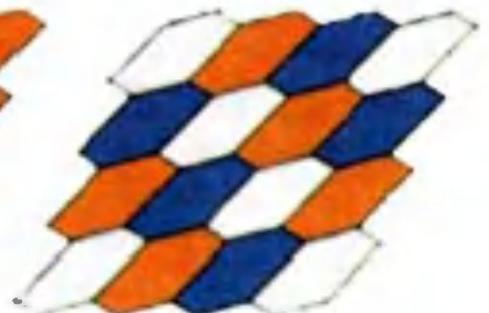
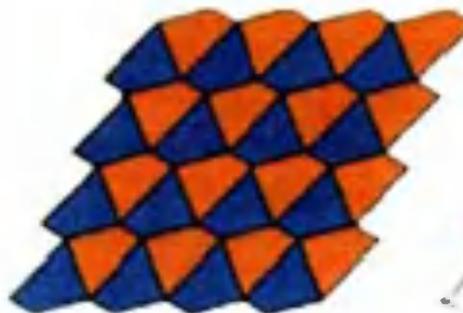
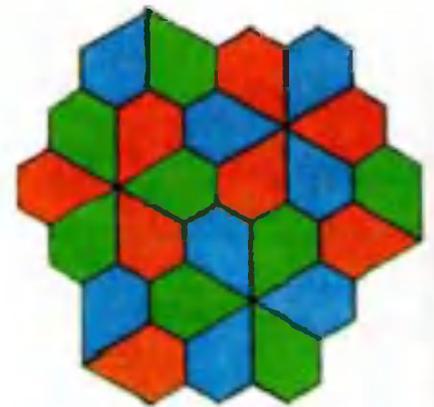
«Математика»

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР «АВАНТА+» выпускает многотомную серию «Энциклопедия для детей». Великолепно иллюстрированная (и удостоенная за профессиональное издательское диплома Государственного комитета Российской Федерации по печати), эта энциклопедия – и справочное пособие, и книга для чтения.

Математике в энциклопедии посвящен отдельный одиннадцатый том. Многие из его научных редакторов и авторов статей – члены редколлегии и постоянные авторы журнала «Квант»: А.Савин, В.Дубровский, В.Тихомиров, И.Башмакова, В.Болтянский, Н.Долбиллин, И.Акулич, А.Жуков.

Популярно рассказывать о математике трудно: материала очень много, а если давать подробные и точные доказательства, то рискуешь оказаться скучным. Как преодолена эта трудность? Чувством меры и мастер-

ством авторов! Например, хотя рассказ о замечательных точках треугольника повествует не только о центре тяжести, ортоцентре, центрах описанной, вписанной и невписанных окружностей треугольника, но и о точках Жергонна и Нагеля, никакого нагромождения теорем и формул не возникает: красивые и точные чертежи позволяют понять суть дела даже тому, кто не читает, а лишь бегло листает энциклопедию. Увидев, например, приведенные здесь некоторые архимедовы паркеты, трудно удержаться и не прочитать про них увлекательную статью.



Удивителен диапазон методов подачи материала – от шуточных стишков

*Нужно только постараться
И запомнить все как есть:
Три, четырнадцать, пятнадцать,
Девяносто два и шесть*

и

*Это я знаю и помню прекрасно,
Пи многие знаки мне лишни,
напрасны,*

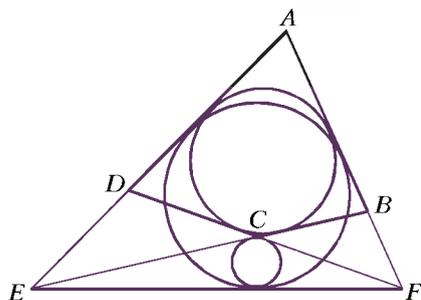
позволяющих по количеству букв в словах запомнить первые цифры числа $\pi \approx 3,141592653589$, до строгих определений комплексных чисел, инверсии и т.п.

Интересны многочисленные короткие рассказы об отдельных исторических фактах, теоремах и формулах. Приведу один из них, посвященный задачам из японских храмов.

«С XVII по XIX в., в период правления сёгунов, Япония была полностью изолирована от внешнего мира. Чтобы обмениваться открытиями, японские геометры делали красочные чертежи на деревянных дощечках и отдавали их в пагоды. Там их подвешивали под крышами. Немало дощечек с задачами – их называют сан гаку – сохранилось до наших дней. Задачи с решениями дошли до нас и в рукописных списках.

В большинстве сан гаку рассматриваются весьма прихотливые и изящные конструкции с окружностями, вписанными в квадраты, треугольники и более сложные фигуры; есть и такие, где представлены эллипсы и сферы. Вот несколько примеров.

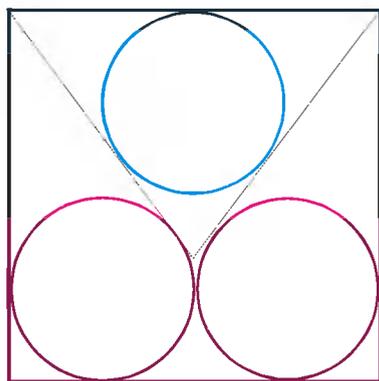
Задача 1. Если в четырехугольник ABCD можно вписать окружность,



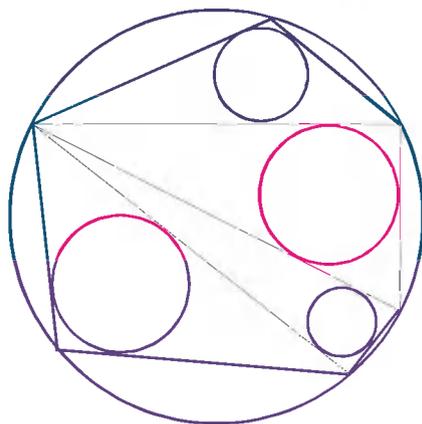
то окружности, вписанные в треугольники AEF и CEF, касаются отрезка EF в одной и той же точке.

Задача 2. Если вписанные в квадрат красные окружности равны между собой, то и синяя окружность равна им.

Особенно сильное впечатление производит следующая теорема, «обнародованная» в пагоде в 1800 г.



Задача 3. Проведем из вершины многоугольника, вписанного в окружность, все диагонали и впишем окружности в образовавшиеся треугольники. Тогда сумма радиусов этих окружностей будет одной и той же



независимо от выбора исходной вершины.

Все три утверждения доказываются с помощью теоремы о касательных, причем в первых двух задачах ее одной и достаточно.

При решении третьей задачи удобнее доказывать сразу более сильное свойство: сумма радиусов рассматриваемых окружностей остается постоянной для любого разбиения многоугольника на треугольники непересекающимися диагоналями. При доказательстве используется следующая теорема Карно:

Сумма радиусов вписанной и описанной окружностей треугольника равна алгебраической сумме расстояний от центра описанной окружности до его сторон, причем расстояние до стороны берется со знаком плюс, если центр лежит по ту же сторону от этой стороны, что и сам треугольник, и со знаком минус, если по другую сторону.»

Закончу рассказ об этой замечательной энциклопедии двумя шутками из нее.

1. Если равны половины, то равны и целые. Полупустой стакан равен полуполному; следовательно, пустой стакан равен полному.

2. Рассмотрим равенство $1 = \frac{2}{3-1}$. Если единицу в знаменателе заменить на $\frac{2}{3-1}$, то получим

$$1 = \frac{2}{3 - \frac{2}{3-1}}$$

Повторив эту операцию по отношению к новой единице, стоящей в знаменателе, и поступая далее подобным образом, мы построим бесконечную цепную дробь

$$1 = \frac{2}{3 - \frac{2}{3 - \frac{2}{3 - \frac{2}{3 - \dots}}}}$$

С другой стороны,

$$2 = \frac{2}{3-2} = \frac{2}{3 - \frac{2}{3 - \frac{2}{3 - \dots}}}$$

Построенные дроби равны! Значит, равны и числа, из которых они получены, т.е. $1 = 2$. Сильный и очень важный результат!

«Энциклопедию для детей» можно приобрести в фирменном магазине «Аванта+» по адресу: Москва, ул. 1905 года, д.8.

Немосквичи могут заказать все вышедшие и будущие тома энциклопедии по адресу: 123022, Москва, а/я 73, Центр доставки «Аванта+».

В.Стиров

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 2000 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4 – 2000» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1736» или «Ф1743». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1736–М1738 предлагались на LXIII Московской математической олимпиаде.

Задачи Ф1743–Ф1746 предлагались на VI Соросовской олимпиаде по физике.

Задачи М1736–М1740, Ф1743–Ф1747

М1736. Какое наибольшее число коней можно расставить на доске 5×5 так, чтобы каждый из них бил ровно двух других?

М. Горелов

М1737. Хорды AC и BD окружности с центром O пересекаются в точке K (рис. 1). Точки M, N – центры окружностей, описанных около треугольников AKB и CKD . Докажите, что $OMKN$ – параллелограмм.

А. Заславский

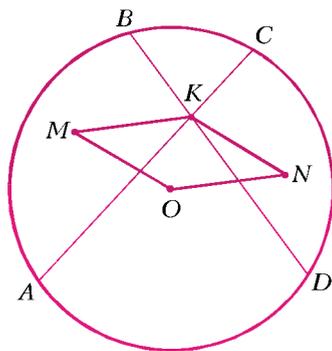


Рис. 1

М1738. Из колоды вынули 7 карт, показали всем, перетасовали и раздали двум игрокам по 3 карты, а оставшуюся карту а) спрятали; б) отдали постороннему наблюдателю.

Игроки могут по очереди сообщать вслух открытым

текстом любую информацию о своих картах. Могут ли они сообщить друг другу свои карты так, чтобы при этом посторонний наблюдатель не смог вычислить местонахождение ни одной из карт, которых он не видит?

А. Шаповалов

М1739. Пусть A – произвольная четная цифра, B – произвольная нечетная цифра. Докажите, что существует натуральное число, делящееся на 2^{2000} , каждая цифра которого – либо A , либо B .

И. Акулич

М1740. Натуральные числа a, b и c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$. Докажите, что каждое из четырех чисел ab, bc, ca и $ab + bc + ca$ является квадратом.

В. Произволов

Ф1743. На листе бумаги с уменьшением в 10 раз нарисовали траекторию камня, брошенного под углом 45° к поверхности земли со скоростью 20 м/с. По нарисованной кривой ползет с неизменной по величине скоростью $0,02$ м/с маленький жучок. Чему равно ускорение жучка в точке, соответствующей вершине траектории камня?

З. Рафаилов

Ф1744. В глубинах космоса летает очень большой сосуд, в котором хаотически движутся маленькие стальные шарики, половина которых имеет диаметр d , а половина – диаметр $2d$. Шарики упруго сталкиваются между собой и со стенками сосуда, потеря энергии при этом нет. Какие удары происходят чаще – маленьких шариков о маленькие или больших шариков о большие? Во сколько раз?

А. Зильберман

Ф1745. В очень большом сосуде находится гелий при температуре $T_0 = 1000$ К и давлении $p_0 = 0,1$ Па. Откачанный до глубокого вакуума сосуд объемом $V = 1$ л находится внутри большого сосуда. В стенке маленького сосуда открывается клапан площадью $S = 1$ мм², а через время $\tau = 0,01$ с он закрывается. Оцените давление и температуру внутри маленького сосуда после того, как в нем все успокоится. Стенки маленького сосуда очень тонкие, но их теплопроводность совсем мала.

Р. Александров

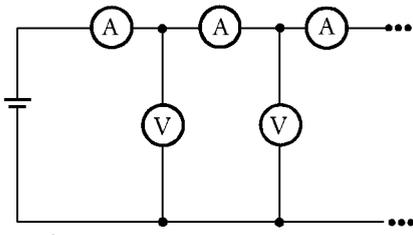


Рис.2

Ф1746. К батарее напряжением $U = 1,5$ В подключена очень длинная цепь из множества одинаковых амперметров и такого же количества одинаковых вольтметров

(рис.2). Каждый из амперметров имеет сопротивление $r = 1$ Ом, сопротивление каждого вольтметра $R = 10$ кОм. Что показывают первый и второй амперметры? Найдите сумму показаний всех амперметров и сумму показаний всех вольтметров в этой цепи.

А.Приборов

Ф1747. Катушка индуктивности подключена параллельно конденсатору, и они присоединены к источнику переменного напряжения. Измеренный в цепи источника ток равен $I_1 = 1$ А, ток через конденсатор при этом составляет $I_2 = 0,8$ А. Во сколько раз нужно изменить частоту источника, чтобы наступил резонанс?

З.Катушкин

Решения задач М1711—М1720, Ф1728—Ф1732

М1711. В «Большой энциклопедии кроликов» 10 томов. Они стоят на полке почти по порядку: каждый том стоит либо на своем месте, либо на соседнем. Сколько таких расположений возможно?

Будем считать, что в энциклопедии n томов и все вместе они занимают n положенных им мест на полке, хотя при этом некоторые тома могут занимать не свое место, а соседнее со своим. В общем количестве таких расположений войдет и то расположение, в котором все тома стоят на своих местах (его мы потом вычтем).

Пусть $P(n)$ — количество таких расположений n томов; $P(1) = 1$, $P(2) = 2$. Разобьем все их на две группы; в первую группу отнесем те, в которых первый том стоит на своем месте, во вторую группу — остальные.

В первой группе столько расположений, сколько их возможно из $(n - 1)$ тома (со второго до n -го), т.е. $P(n - 1)$. Если первый том не на своем месте, то он стоит на второй позиции, а на первой позиции стоит второй том. Таких расположений столько же, сколько расположений остальных томов: со второго до n -го, т.е. всего $P(n - 2)$.

Значит, имеет место соотношение $P(n) = P(n - 1) + P(n - 2)$. Используя его, можно, зная $P(1)$ и $P(2)$, найти $P(3)$, затем найти $P(4)$, и так далее. Получаем последовательность: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89. Итак, $P(10) = 89$.

Такая последовательность чисел $P(n)$ — это числа Фибоначчи.

Если есть желание вычислить то расположение, в котором все тома стоят на своих местах, то ответом для $n = 10$ будет 88.

Д.Калинин

М1712. а) Несколько треугольников расположены на плоскости так, что каждые четыре из них имеют общую вершину. Докажите, что все треугольники имеют общую вершину.

б) Несколько прямоугольников расположены на плоскости так, что каждые три из них имеют общую вершину. Докажите, что все прямоугольники имеют общую вершину.

а) На плоскости расположены треугольники T_1, T_2, \dots, T_n ($n \geq 5$), каждые четыре из которых имеют общую вершину. Сначала положим $n = 5$. Из треугольников T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 можно составить четыре четверки, содержащие треугольник T_1 . Каждая такая четверка треугольников имеет общую вершину, и эта точка является вершиной треугольника T_1 . Но у T_1 лишь три вершины, и значит, есть такая его вершина, которая является общей для двух из четырех четверок. Очевидно, что эта избранная вершина треугольника T_1 является вершиной всех пяти треугольников.

Подобные рассуждения первого шага индукции проходят без изменений и для индуктивного перехода от n к $n + 1$.

В то же время нужно заметить, что в утверждении пункта а) слова «каждые четыре» нельзя заменить на «каждые три». В самом деле, четыре вершины квадрата являются вершинами четырех треугольников, каждые три из которых имеют общую вершину, но все четыре общей вершины не имеют.

б) Предварительно сделаем два элементарных геометрических замечания. Первое: четыре различные точки на плоскости, из которых каждые три являются вершинами прямоугольного треугольника, все вместе являются вершинами прямоугольника. Второе: два прямоугольника, имеющих три общие вершины, совпадают.

Теперь рассмотрим расположение прямоугольников P_1, P_2, \dots, P_n ($n \geq 4$), каждые три из которых имеют общую вершину. Сначала положим $n = 4$. Допустим, что прямоугольники P_1, P_2, P_3 и P_4 не имеют общей вершины, хотя каждые три из них общую вершину имеют: точки A, B, C и D являются общими вершинами для всевозможных троек наших прямоугольников. Тогда всякие три из этих точек являются вершинами одного из прямоугольников и, в силу предварительных замечаний, $ABCD$ — это прямоугольник, который совпадает с каждым из четырех прямоугольников P_1, P_2, P_3 и P_4 . Налицо противоречие с допущением.

Разберем случай при $n = 5$: допустим, что прямоугольники P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 не имеют общей вершины, хотя каждые три из них общую вершину имеют. Но тогда, в силу доказанного, каждые четыре из них имеют общую вершину. В этом случае точки A, B, C, D и E являются общими вершинами для всевозможных четверок прямоугольников. При этом каждые четыре из этих точек являются вершинами одного прямоугольника. Но таких пяти различных точек на плоскости существовать не может, значит, две из этих точек совпадают. Тогда эти совпавшие точки являются общей вершиной для всех пяти прямоугольников — противоречие. Индуктивный переход от n к $n + 1$ реализуется так же, как переход от 4 к 5.

В.Произволов

М1713. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты такие точки A', B', C' , что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

Пусть D, E, F, D', E', F' — середины отрезков $AB, BC, CA, A'B', B'C', C'A'$.

Докажите, что

а) прямые DD', EE', FF' имеют общую точку, причем эта точка, точка пересечения прямых AA', BB', CC' и точка пересечения медиан треугольника ABC лежат на одной прямой;

б) если в качестве прямых AA', BB', CC' взяты высоты треугольника ABC , то точка пересечения прямых DD', EE', FF' совпадает с центром окружности Эйлера (окружности девяти точек) треугольника ABC ;

в) если прямые AA', BB', CC' – биссектрисы треугольника ABC , то их общая точка, общая точка прямых DD', EE', FF' и точка пересечения прямых, проходящих через вершины треугольника ABC и делящих его периметр пополам (точка Нагеля), лежат на одной прямой;

г) если прямые AA', BB', CC' делят периметр треугольника ABC пополам, то точка пересечения прямых DD', EE', FF' совпадает с центром масс контура треугольника ABC .

а) Точку пересечения прямых AA', BB', CC' обозначим H , середины отрезков AH, BH, CH – соответственно K, L, M (см. рисунок).

Вспользуемся теоремой Гаусса: если у четырехугольника нет параллельных сторон, то середины его диагоналей и середина отрезка, соединяющего точки пересечения противоположных сторон четырехугольника, лежат на одной прямой. (Докажите ее самостоятельно!)

Применяя эту теорему к четырехугольнику $A'HB'C$, приходим к выводу, что точки D, D', M лежат на одной прямой.

Точно так же на одной прямой лежат точки E, E', K и F, F', L .

Но отрезки DM, EK, FL соединяют, соответственно, середины противоположных сторон и середины диагоналей четырехугольника $ABCH$, поэтому эти отрезки имеют общую точку, совпадающую с центром системы четырех равных точечных масс, три из которых находятся в вершинах треугольника ABC , а четвертая – в точке H (теорема Симсона – Жергона).

Так как центр масс системы A, B, C находится в точке пересечения медиан треугольника ABC , то центр масс системы A, B, C, H лежит на отрезке, соединяющем точку пересечения медиан треугольника ABC с точкой H , и делит этот отрезок в отношении 3:1 (считая от точки H).

б) Если H – точка пересечения высот треугольника ABC , то около четырехугольника $ABA'B'$ можно описать окружность с центром в точке D , поэтому треугольник $A'DB'$ – равнобедренный, а так как D' – середина отрезка $A'B'$, то $DD' \perp A'B'$.

Аналогично, $EE' \perp B'C'$ и $FF' \perp A'C'$, т.е. точка пересечения прямых DD', EE', FF' – это центр окружности, описанной около треугольника $A'B'C'$, а эта окружность и есть окружность Эйлера треугольника ABC .

в) Вспользуемся известной теоремой: центр окружности, вписанной в треугольник, совпадает с точкой Нагеля треугольника, вершинами которого служат середины сторон исходного треугольника.

Следовательно, если H – центр вписанной в треугольник ABC окружности, то H – точка Нагеля треугольника DEF . Но треугольник DEF гомотетичен треугольнику ABC с центром гомотетии в точке пересечения медиан обоих треугольников и коэффициентом гомотетии $-1/2$, поэтому точки Нагеля обоих треугольников и точка пересечения их медиан лежат на одной прямой.

Ранее было доказано, что отрезок, соединяющий точку H с точкой пересечения медиан треугольника ABC , делится точкой пересечения прямых DD', EE', FF' в отношении 3:1 (считая от точки H), так что эта же точка делит отрезок, соединяющий точку H с точкой Нагеля треугольника ABC , в отношении 1:3 (тоже считая от точки H). Можно показать, что эта же точка делит пополам отрезок, соединяющий центр вписанной в треугольник ABC окружности с центром масс контура треугольника ABC .

г) Центр масс контура треугольника совпадает с точкой пересечения биссектрис треугольника, вершинами которого служат середины сторон исходного треугольника (см., задачу M1016).

Из этого и указанных выше соотношений следует нужное доказательство.

Ясно также, что центр масс контура треугольника делит пополам отрезок, соединяющий точку пересечения биссектрис треугольника и точку Нагеля.

И. Вайнштейн

M1714. Докажите, что каждое из уравнений

$$а) (x^2 + 1)(y^2 - 1) = z^2,$$

$$б) (x^2 - 1)(y^2 - 1) = z^2, \text{ где } x \neq y,$$

$$в*) (x^2 + 1)(y^2 + 1) = z^2, \text{ где } x \neq y,$$

имеет бесконечно много решений в натуральных числах x, y и z .

а) Домножим обе части очевидного тождества

$$(2u + 1)^2 - 1 = 4u(u + 1) \tag{1}$$

на $u + 1$; кроме этого, считая $u > 0$, положим $t = \sqrt{u}$. Подставив $u = t^2$, получим

$$(t^2 + 1)((2t^2 + 1)^2 - 1) = (2t(t^2 + 1))^2. \tag{2}$$

А теперь возьмем в качестве t любое целое положительное число, положим

$$x = t, y = 2t^2 + 1, z = 2t(t^2 + 1) \tag{3}$$

– и задача а) решена.

Аналогично решается и задача б): рассмотрев тождество (1) при $u < 0$ и полагая $t = \sqrt{-u}$, мы, рассуждая как и выше, придем к тождеству

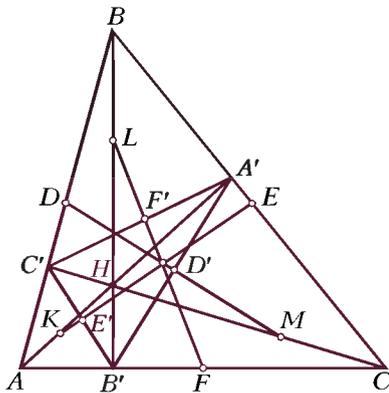
$$(t^2 - 1)((2t^2 - 1)^2 - 1) = (2t(t^2 - 1))^2. \tag{4}$$

Решая а) и б), можно было вместо (1) воспользоваться тригонометрией – например, так:

$$1 - \cos^2 2x = 1 - (2 \cos^2 x - 1)^2 = 4 \cos^2 x (1 - \cos^2 x),$$

$$(1 - \cos^2 x)(1 - \cos^2 2x) = 4 \cos^2 x (1 - \cos^2 x)^2.$$

Подставив $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$, получаем (4) при $u = \cos^2 x \leq 1$. Значит, (4) верно при всех u : многочлены,



совпадающие на отрезке, совпадают всюду – поскольку многочлен (отличный от тождественного нуля) n -й степени имеет не более n вещественных корней. (О свойствах многочленов можно прочесть, например, в книге «Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика» – М.: Аванта+, 1999.)

Теперь подставим $u = -t^2$ в доказанное тождество

$$(u - 1)((2u - 1)^2 - 1) = 4u(u - 1)^2.$$

Мы получим (2).

Чтобы поменять в тождестве t^2 на $-t^2$, можно воспользоваться и комплексными числами, а именно, подстановкой $t = i\tau$, где $i^2 = -1$. Такая подстановка корректна, поскольку многочлены в левой и правой частях тождества совпадают на всей комплексной плоскости.

С помощью тригонометрических функций мы легко получили (4) – тождество, в которое входят выражения $t^2 - 1$ и $2t^2 - 1$. Рассмотрим теперь аппарат, позволяющий получать непосредственно также и тождества типа (2).

Гиперболическими функциями называются:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \dots$$

(гиперболический синус, косинус, тангенс, котангенс, ...); они определены для всех значений x , исключая $\operatorname{cth} x$, который теряет смысл при $x = 0$. Эти функции проявляют замечательную аналогию с тригонометрическими функциями.

Так, имеют место формулы (обратите внимание на знаки!)

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

из которых при $y = x$, в частности, следует

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x,$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$$

Докажем с помощью гиперболических функций (2).

В равенство $\operatorname{ch}^2 2x - 1 = \operatorname{sh}^2 2x$ подставим

$$\operatorname{ch} 2x = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x$$

и

$$\operatorname{sh}^2 2x = 4\operatorname{sh}^2 x(1 + \operatorname{sh}^2 x);$$

получим

$$(1 + 2u^2)^2 - 1 = 4u^2(1 + u^2).$$

С помощью равенства

$$\operatorname{ch} 2x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1$$

легко доказать и (4).

Все продемонстрированные приемы полезны при решении более сложной задачи – пункта в).

в) *Первый способ.* Воспользовавшись тождеством

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x, \quad (4')$$

получим

$$1 - \cos^2 3x = (1 - \cos^2 x)(4\cos^2 x - 1)^2,$$

$$(1 - \cos^2 x)(1 - \cos^2 3x) = (1 - \cos^2 x)^2(4\cos^2 x - 1)^2.$$

Пользуясь полученным тождеством и (4'), приходим к формуле

$$(1 - y^2)(1 - (4y^3 - 3y)^2) = (1 - y^2)^2(4y^2 - 1)^2. \quad (4'')$$

Заменяя (как и выше, при решении а) и б)) y^2 на $-y^2$, получаем тождество

$$(y^2 + 1)((4y^3 + 3y)^2 + 1) = (y^2 + 1)^2(4y^2 + 1)^2. \quad (5)$$

Это тождество позволяет выписать некоторую бесконечную серию натуральных решений:

$$(n, 4n^3 + 3n, (n^2 + 1)(4n^2 + 1)).$$

Заметим, что эта серия не дает всех решений: например, справедливо равенство

$$(1^2 + 1)(4 \cdot 1^2 + 1) = 58^2. \quad (6)$$

Заметим также, что тождество (4'') задает новую бесконечную серию натуральных решений уравнения пункта б).

Второй способ. Воспользуемся тождеством

$$\operatorname{sh} 3x = 3\operatorname{sh} x + 4\operatorname{sh}^3 x; \quad (6')$$

отсюда

$$\operatorname{sh}^2 3x + 1 = (1 + \operatorname{sh}^2 x)(1 + 4\operatorname{sh}^2 x)^2,$$

$$(\operatorname{sh}^2 x + 1)(\operatorname{sh}^2 3x + 1) = ((\operatorname{sh}^2 x + 1)(4\operatorname{sh}^2 x + 1))^2.$$

Пользуясь полученным тождеством и (6'), приходим к (5).

Третий способ. А теперь получим (5) с помощью комплексных чисел. Как и выше, мы будем искать какие-нибудь непостоянные многочлены A, B, C с целыми коэффициентами такие, что $A \neq B$ и

$$(A^2 + 1)(B^2 + 1) = C^2.$$

Достаточно найти многочлены D, F, G с целыми коэффициентами такие, что $G \neq \text{const}$ и

$$D \neq \pm G, \quad D + i = (F + i)^2(G - i); \quad (7)$$

в этом случае

$$D^2 + 1 = (F^2 + 1)^2(G^2 + 1),$$

$$(D^2 + 1)(G^2 + 1) = ((F^2 + 1)(G^2 + 1))^2.$$

Легко видеть, что (7) выполняется в точности при $G \neq 0, F = 2G$.

Положив $G = x, F = 2x$, получим

$$(2x + i)^2(x - i) = D + i = 4x^3 + 3x + i,$$

$$((4x^3 + 3x)^2 + 1)(x^2 + 1) = ((4x^2 + 1)(x^2 + 1))^2.$$

Напоследок подумайте: как можно легко догадаться до равенства (6)?

Кроме этого, докажите следующее усиление предложения пункта в): при любом натуральном n уравнение $(n^2 + 1)(y^2 + 1) = z^2$ имеет бесконечно много натуральных решений.

В. Сендеров

M1715. Все натуральные числа от 1 до $2n$ записаны в последовательности a_1, a_2, \dots, a_{2n} такой, что

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{2n-1} - a_{2n}| + |a_{2n} - a_1| = 2n^2.$$

Докажите, что

$$|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4| + \dots + |a_{2n-1} - a_{2n}| = n^2.$$

Для произвольной расстановки натуральных чисел от 1 до $2n$ в последовательность a_1, a_2, \dots, a_{2n} обозначим

$$S = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{2n-1} - a_{2n}| + |a_{2n} - a_1|.$$

В результате раскрытия модуля в любом слагаемом этой суммы получим два натуральных числа – одно с плюсом, другое с минусом. Для того чтобы сумма S достигла наибольшего возможного значения, необходимо и достаточно, чтобы числа от 1 до n получали минусы, а числа от $n + 1$ до $2n$ – плюсы. Тогда

$$S = 2[(2n + 2n - 1 + \dots + n + 1) - (n + n - 1 + \dots + 1)] = 2n^2.$$

Значит, каждое слагаемое суммы модулей – это модуль разности двух натуральных чисел, одно из которых больше n , а другое не превосходит n . Но тогда

$$\begin{aligned} |a_1 - a_2| + |a_3 - a_4| + \dots + |a_{2n-1} - a_{2n}| &= \\ &= (2n + 2n - 1 + \dots + n + 1) - (n + n - 1 + \dots + 1) = n^2. \end{aligned}$$

В. Произволов

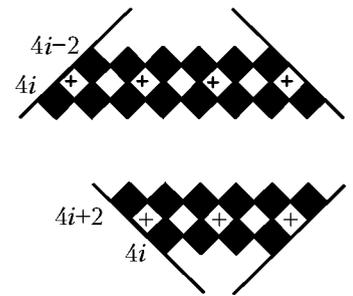
M1716. В квадрате клетчатой бумаги размером $n \times n$ клеток отмечены N клеток таким образом, что каждая клетка квадрата (отмеченная или неотмеченная) имеет хотя бы одну отмеченную соседнюю клетку. Определите наименьшее возможное значение N , если соседними считать клетки, имеющие общую сторону.

Рассмотрим случай четного n .

Сначала раскрасим доску в черный и белый цвета в шахматном порядке. Пусть $f(n)$ – это искомое число, а $f_\omega(n)$ – минимальное число белых клеток, которые должны быть отмечены таким образом, чтобы каждая черная клетка имела соседнюю отмеченную белую. Определим подобным образом $f_b(n)$. Благодаря симметричности шахматной доски ($n = 2k$), мы имеем $f_\omega(n) = f_b(n)$; кроме этого, $f(n) = f_\omega(n) + f_b(n)$.

Было бы более удобно посмотреть на доску, развернув ее таким образом, чтобы главная черная диагональ (самая длинная) располагалась горизонтально. Тогда длины остальных черных диагоналей были бы $2, 4, \dots, 2k, \dots, 4, 2$.

Зачеркнем «нечетные» клетки белых диагоналей, расположенных под черными диагоналями длины $4i - 2$ в первом случае и под черными диагоналями длины $4i + 2$ во втором случае (см. рисунок). В первом случае зачеркнутыми окажутся $2i$ белых клеток, а во втором случае $2i + 1$ белых клеток. Таким образом, всего мы зачеркнем



$$2 + 4 + \dots + k + \dots + 3 + 1 = \frac{k(k+1)}{2}$$

белых клеток. Легко видеть, что каждая черная клетка имеет белую зачеркнутую соседнюю клетку. Из этого следует, что

$$f_\omega(n) \leq \frac{k(k+1)}{2}.$$

Рассмотрим $k(k+1)/2$ зачеркнутых белых клеток: у них нет общих черных соседних клеток, следовательно, нам нужно по крайней мере $k(k+1)/2$ черных отмеченных клеток с тем, чтобы «охватить» все эти белые клетки. Поэтому

$$f_b(n) \geq \frac{k(k+1)}{2}.$$

Отсюда мы имеем

$$f_\omega(n) = f_b(n) = \frac{k(k+1)}{2},$$

$$f(n) = k(k+1).$$

Аналогично доказывается, что

$$f(n) = \begin{cases} 4k^2 - 1 & \text{при } n = 4k - 1, \\ (2k + 1)^2 & \text{при } n = 4k + 1. \end{cases}$$

Е. Баранов, И. Воронович

M1717. Две окружности Γ_1 и Γ_2 , содержащиеся внутри окружности Γ , касаются Γ в различных точках M и N соответственно. Окружность Γ_1 проходит через центр окружности Γ_2 . Прямая, проходящая через две точки пересечения Γ_1 и Γ_2 , пересекает Γ в точках A и B . Прямые MA и MB пересекают Γ_1 в точках C и D соответственно. Докажите, что CD касается Γ_2 .

Лемма 1. Окружность k_1 касается окружности k внутренним образом в точке A и касается ее хорды MN в точке B . Пусть C – середина дуги MN окружности k , которая не содержит точку A . Тогда точки A, B, C лежат на одной прямой и $CA \cdot CB = CM^2$.

Доказательство. Гомотетия с центром в точке A , переводящая k_1 в k , переводит MN в касательную к окружности k , параллельную MN , т.е. в прямую, касающуюся окружности k в точке C . Таким образом, A, B, C коллинеарны. Для второй части заметим, что $\angle NMC \equiv \angle CAM$, поэтому $\triangle ACM$ подобен $\triangle MCB$, следовательно, $CA \cdot CB = CM^2$.

Лемма 2. Пусть окружность Γ_1 проходит через центр O_2 окружности Γ_2 ; t_1 и t_2 – (различные) общие касательные этих окружностей – касаются Γ_1 в точках C и D . Тогда прямая CD касается Γ_2 .

Доказательство. Пусть t_1 касается Γ_2 в точке X . Так как O_2 – середина дуги CD , то имеем

$$\angle O_2CD = \frac{1}{2} \overset{\cup}{O_2D}, \text{ а } \angle XCD = \frac{1}{2} \overset{\cup}{CD} = \overset{\cup}{O_2D}.$$

Значит, $\angle XCD = 2\angle O_2CD$, откуда сразу следует утверждение леммы.

Решение задачи. Пусть O_1 и O_2 – центры окружностей Γ_1 и Γ_2 соответственно и t_1 и t_2 – их общие касательные. Пусть α, β – дуги, высекаемые на Γ прямыми t_1 и t_2 и расположенные так же, как в лемме 1.

Их середины, согласно лемме 1, имеют одинаковую геометрическую степень относительно окружностей Γ_1 и Γ_2 ; таким образом, они находятся на радикальной оси этих двух окружностей. Значит, A и B являются серединами дуг α и β . Из леммы 1 мы также можем сделать вывод, что C и D – это точки, в которых касательные t_1 и t_2 касаются Γ_1 . По лемме 2 получаем, что CD касается Γ_2 .

П.Кожевников

M1718. Найдите все функции $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ такие, что

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(y) - 1$$

для всех $x, y \in \mathbf{R}$.

Пусть A – множество значений функции f и $c = f(0)$. Положив $x = y = 0$, мы получим

$$f(-c) = f(c) + c - 1,$$

поэтому $c \neq 0$.

Легко найти сужение функции f на множество A : взяв $x = f(y)$, получим

$$f(x) = \frac{c+1}{2} - \frac{x^2}{2} \quad (1)$$

для всех x из A .

Основной шаг доказательства состоит в том, чтобы показать, что множество разностей $x - y$, где $x, y \in A$, есть все множество \mathbf{R} . Для $y = 0$ мы имеем

$$\{f(x - c) - f(x) | x \in \mathbf{R}\} = \{cx + f(c) - 1 | x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R},$$

поскольку $c \neq 0$.

Теперь мы можем получить значение $f(x)$ для произвольного x : если мы выберем $y_1, y_2 \in A$ такие, что $x = y_1 - y_2$, и используем (1), то мы получим

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y_1 - y_2) = \\ &= f(y_2) + y_1 y_2 + f(y_1) - 1 = \frac{c+1}{2} - \frac{y_2^2}{2} + y_1 y_2 + \\ &+ \frac{c+1}{2} - \frac{y_1^2}{2} - 1 = c - \frac{(y_1 - y_2)^2}{2} = c - \frac{x^2}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), мы получим $c = 1$, и поэтому

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

для всех $x \in \mathbf{R}$. Мы получили единственную функцию, которая удовлетворяет функциональному уравнению задачи.

M1719. Последовательность a_1, a_2, a_3, \dots задана своим первым членом $a_1 = 1$ и рекуррентной формулой $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, где $n = 1, 2, 3, \dots$

а) Докажите, что $a_{100} > 14$.

б*) Найдите $[a_{1000}]$, т.е. укажите такое целое число m , для которого $m \leq a_{1000} < m + 1$.

в) Докажите существование и найдите значение предела $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n / \sqrt{n}$.

а) Возводим равенство $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ в квадрат и «отбрасываем лишнее»:

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2} > a_n^2 + 2.$$

Вспомнив, что $a_1^2 = 1$, получаем одно за другим неравенства $a_2^2 > a_1^2 + 2 = 3$, $a_3^2 > a_2^2 + 2 > 3 + 2 = 5$, и вообще (при $n > 1$),

$$a_n^2 > 2n - 1. \quad (*)$$

В частности, $a_{100}^2 > 199 > 196 = 14^2$, что и требовалось.

б) Ответ: $[a_{1000}] = 44$.

При $n = 1000$ неравенство (*) дает $a_{1000} > 1999 > 44^2$, так что $[a_{1000}] \geq 44$. Чтобы получить оценку сверху, введем величины b_n , такие что $a_n^2 = 2n - 1 + b_n$. В силу неравенства (*), имеем $b_n > 0$ при $n > 1$. Далее, запишем

формулу $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2}$ в виде

$$2n + 1 + b_{n+1} = 2n - 1 + b_n + 2 + \frac{1}{2n - 1 + b_n},$$

откуда

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2n - 1 + b_n} \leq b_n + \frac{1}{2n - 1}.$$

По индукции из последнего неравенства следует, что

$$b_{n+1} \leq b_1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n - 3} + \frac{1}{2n - 1}.$$

Поскольку $b_1 = 0$, имеем, в частности,

$$b_{1000} \leq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{1995} + \frac{1}{1997}.$$

Осталось оценить сумму, оказавшуюся в правой части последнего неравенства. Сгруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned} b_{1000} &\leq 1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{25}\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{29} + \frac{1}{31} + \frac{1}{33} + \dots + \frac{1}{79}\right) + \left(\frac{1}{81} + \frac{1}{83} + \dots + \frac{1}{241}\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{243} + \frac{1}{239} + \dots + \frac{1}{727}\right) + \left(\frac{1}{729} + \frac{1}{731} + \dots + \frac{1}{1997}\right). \end{aligned}$$

(Принцип очень простой: в первой скобке три слагаемых, наибольшее из которых равно $1/3$; во второй – девять слагаемых, наибольшее из которых $1/9$; ...; в пятой – 243 слагаемых, наибольшее $1/243$; наконец, в шестой скобке

наибольшее слагаемое равно $1/729$, а слагаемых всего лишь 635.) Следовательно, $b_{1000} < 7$. Это позволяет утверждать, что

$$a_{1000}^2 < 2000 - 1 + 7 < 2025 = 45^2,$$

откуда $a_{1000} < 45$.

в) Используемый при решении пункта б) прием позволяет доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n/n = 0$. Поскольку $a_n = \sqrt{2n - 1 + b_n}$, получаем ответ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/\sqrt{n} = \sqrt{2}.$$

А. Стивак

M1720. *N* одинаковых деревянных кубиков склеены между собой так, что каждые два из них склеены по грани или по участку грани. Докажите, что максимальное значение *N* равно шести.

Приведем расположение шести деревянных кубиков, в

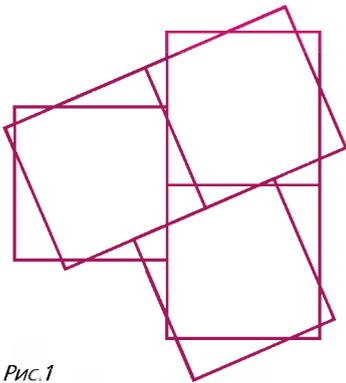


Рис.1

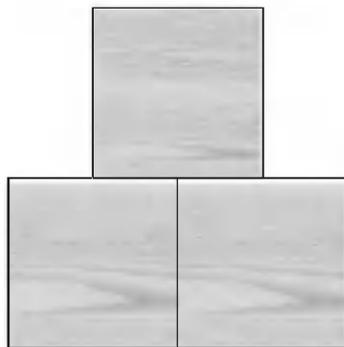


Рис.2

котором каждые два склеены, как сказано в условии задачи (рис.1): три «черных» кубика стоят на плоскости стола, а три «красных» кубика стоят над ними (вид сверху!). Теперь выстроим цепочку наглядных представлений и соображений, из которых будет следовать, что $\max N = 6$.

Определимся сначала с плоским случаем: если на столе лежат *n* одинаковых картонных квадратов, каждые два из которых склеены по стороне или по участку стороны, то $\max n = 3$, что очевидно (рис.2).

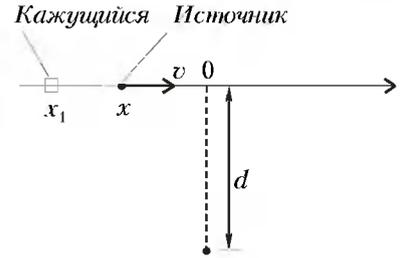
Будем говорить, что *n* деревянных кубиков (из имеющихся *N*) принадлежат одному слою, если найдется плоскость (стол), на которой все они стоят. Из вышесказанного следует, что $n \leq 3$.

Нетрудно убедиться, что если все *N* кубиков параллельно расположены, т.е. каждый из них является результатом параллельного переноса другого, то $N \leq 4$.

Пусть среди *N* кубиков нашлись два – кубики Q_1 и Q_2 , которые не являются параллельно расположенными (транслятами), а плоскость π – общая плоскость двух соприкасающихся граней этих кубиков. Плоскость π определяет два слоя, одному из которых принадлежит кубик Q_1 , а другому – кубик Q_2 . Заметим, что всякий третий деревянный кубик обязан принадлежать одному из этих слоев. Но в каждом слое кубиков не больше трех, значит, $N \leq 6$.

В.Произволов

Ф1728. *Источник света движется равномерно вдоль прямой со скоростью $v = 0,2c$, где c – скорость света. На расстоянии d от этой прямой находится наблюдатель. Запаздывание пришедшего к наблюдателю света приводит к тому, что движение источника кажется ему неравномерным. Каким будет максимальное наблюдаемое ускорение источника света?*



При выбранном начале координат (см. рисунок) и нулевом моменте при прохождении начала координат имеем

$$x = vt, \quad \frac{x - x_1}{v} = \frac{\sqrt{x_1^2 + d^2}}{c}.$$

Выразим отсюда координату x_1 и вычислим скорость x_1' и ускорение x_1'' :

$$x_1 = v \frac{c^2 t - \sqrt{c^2 v^2 t^2 + d^2 (c^2 - v^2)}}{c^2 - v^2},$$

$$x_1' = \frac{vc^2}{c^2 - v^2} \left(1 - \frac{v^2 t}{\sqrt{c^2 v^2 t^2 + d^2 (c^2 - v^2)}} \right),$$

$$x_1'' = - \frac{v^3 c^2 d^2}{(c^2 v^2 t^2 + d^2 (c^2 - v^2))^{3/2}}.$$

Видно, что максимальное по модулю ускорение будет при $t = 0$:

$$a_m = |x_1''(0)| = \frac{v^3 c^2 d^2}{d^3 (c^2 - v^2)^{3/2}} = \frac{v^2}{d} \frac{v}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-3/2} \approx 8,5 \cdot 10^{-3} \frac{c^2}{d}.$$

Если же говорить о действительно максимальном ускорении, то оно равно нулю и получается таким при $t = \pm\infty$ (т.е. задолго до нулевого момента и через очень большое время после него).

В.Шелест

Ф1729. *На гладком горизонтальном столе происходит лобовой удар двух одинаковых тел – одно из них вначале покоится, другое налетает на него со скоростью v_0 . Куда и с какой скоростью будет двигаться после удара налетевшее тело, если при ударе в тепло переходит 1% от максимальной энергии деформации тел?*

Максимальная энергия деформации получается в тот момент, когда в процессе соударения скорости тел равны, т.е. эта энергия равна половине начальной кинетической энергии E_0 налетающего тела, а тепловые потери составляют $E_0/200$. Для скоростей тел после удара, в соответствии с законом сохранения импульса и выражением для кинетической энергии (с учетом потерь), можно записать

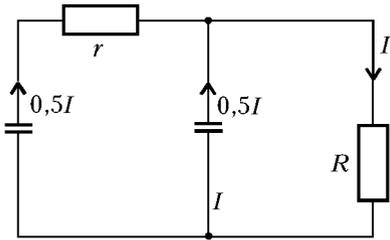
$$u_1 + u_2 = v_0, \quad u_1^2 + u_2^2 = 0,995 v_0^2.$$

Скорость налетающего тела после удара должна получиться очень маленькой (без потерь энергии она была бы просто нулевой). С учетом этого, уравнения можно решать приближенно, отыскивая малый ответ. Окончательно получаем

$$u_1 \approx v_0/400.$$

Р.Александров

Ф1731.¹ Два одинаковых конденсатора емкостью $C = 10 \text{ мкФ}$ каждый вначале заряжены до напряжения $U_0 = 10 \text{ В}$ и соединены параллельно при помощи длинных проводов общим сопротивлением $r = 1 \text{ Ом}$. Резистор сопротивлением $R = 10 \text{ кОм}$ подключают непосредственно к выводам одного из конденсаторов. Какое количество теплоты выделится в проводах за большое время?



Резистор сопротивлением $R = 10 \text{ кОм}$ подключают непосредственно к выводам одного из конденсаторов. Какое количество теплоты выделится в проводах за большое время?

Это совсем простая задача. Начальная энергия системы равна

$$W_0 = 2 \frac{CU_0^2}{2} = 10^{-3} \text{ Дж.}$$

Если ток через резистор R в некоторый момент составит I (см. рисунок), то (учитывая, что $r \ll R$) оба конденсатора разряжаются одинаковыми токами $0,5I$ и ток через сопротивление r равен $0,5I$. Видно, что почти вся тепловая мощность выделяется на резисторе R :

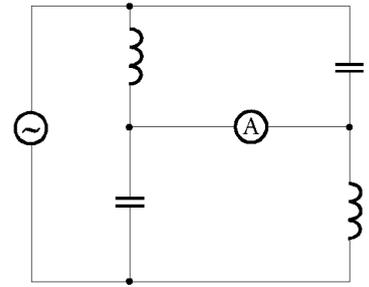
$$\frac{I^2 R}{(0,5I)^2 r} = 40000 \gg 1.$$

Ясно, что количество теплоты, выделившееся на сопротивлении r , можно найти так:

$$W_r \approx \frac{W_0}{40000} \approx 0,25 \cdot 10^{-7} \text{ Дж.}$$

З.Рафаилов

Ф1732. К источнику переменного напряжения, частоту которого можно изменять в широких пределах, подключена цепь из двух одинаковых катушек индуктивностью L , двух конденсаторов емкостью C и амперметра переменного тока с очень малым сопротивлением (см. рисунок). Амплитуда напряжения источника U_0 . На какой частоте ток через амперметр будет минимальным? Чему равна амплитуда этого тока? Элементы цепи считайте идеальными.



Если заменить идеальный амперметр куском провода, то сразу станет видно, что к каждому из получившихся одинаковых параллельных колебательных контуров приложена половина напряжения источника. Тогда при $U = U_0 \cos \omega t$ ток через конденсатор равен

$$I_C = -\frac{1}{2} U_0 \omega C \sin \omega t,$$

ток через катушку –

$$I_L = \frac{1}{2} \frac{U_0}{\omega L} \sin \omega t.$$

Ток через второй конденсатор, очевидно, такой же, как и через первый, а ток амперметра равен разности токов через катушку и конденсатор:

$$I_A = \frac{1}{2} U_0 \left(\omega C + \frac{1}{\omega L} \right) \sin \omega t.$$

Выражение в скобках минимально при равенстве слагаемых (можно взять и производную по частоте и приравнять ее нулю). В результате получим

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{CL}}, \quad I_{A0} = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

А.Зильберман

¹ Решение задачи Ф1730 будет опубликовано позже.

ИНФОРМАЦИЯ

Международный турнир «Компьютерная физика»

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» в рамках своей программы «Интеллектуально одаренные дети и новые информационные технологии» проводит турнир «Компьютерная физика». На турнире предлагаются «открытые» физические задачи, решение которых предполагает не только аналитические оценки, но и численное моделирование на компьютере.

В период с 28 января по 6 февраля 2001 года состоится юбилейный пятый международный турнир «Компьютерная физика». К участию в турнире приглашаются команды школьников (5 человек) с руководителем.

Турнир проводится в 2 тура. Заочный тур начинается за четыре месяца до очной встречи, задание высылается по электронной почте. Защита задания происходит в первый день

турнира. Очный тур стартует на второй день турнира, задание дается в этот день. Итоги подводятся по двум турам.

На финал приглашаются 12 команд из России, СНГ, Европы и Америки. Место проведения – Научный центр Российской академии наук, г.Протвино, Институт физики высоких энергий.

Заявки на участие от региональных центров МИК «Глюон», лицеев, гимназий и школ, работающих с одаренными детьми, принимаются до 28 сентября 2000 по адресу:

115522 Россия, Москва, Пролетарский проспект, д.15/6, корп. 2, Интеллект-клуб «Глюон», тел: (095) 324-20-30, факс: (095) 396-82-27, e-mail: olga@mics.msu.su

Всем зарегистрировавшимся будет выслано задание предыдущих турниров «Компьютерная физика». Подробную информацию о турнирах можно найти также в Интернете: <http://www.informika.ru/text/goscom/gluon/> и в журналах: «Компьютерные инструменты в образовании» №66 (1998), с.29 и «Квант» №2 (1999), с.54.

Задачи

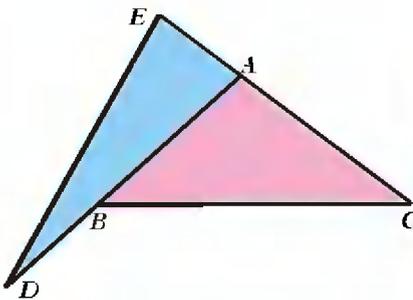
1. В ящике лежат зеленые, желтые и красные яблоки трех сортов. Может ли быть так, что зеленых



яблок больше, чем яблок первого сорта, яблок первого сорта больше, чем желтых яблок, желтых яблок больше, чем яблок второго сорта, яблок второго сорта больше, чем красных яблок, а красных яблок больше, нежели яблок третьего сорта?

Д.Калинин

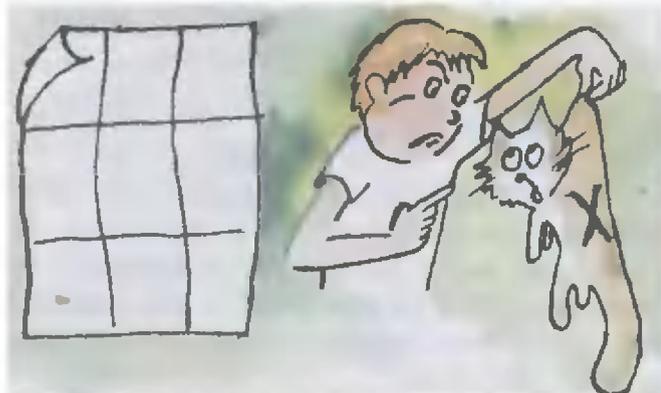
2. В равнобедренном треугольнике ABC угол A тупой. На луче AB берется точка D , а на луче CA — точка E так, что $AD = BC = CE$. Покажите, что



если треугольник DAE равнобедренный, то угол BAC равен 100° .

В.Кириак

3. Имеется таблица чисел 3×3 , в девяти клетках которой записаны все натуральные числа от 1 до 8 и

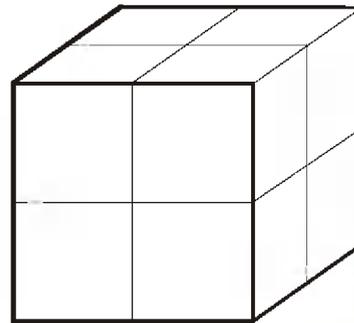


еще число X так, что сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце одна и та же. Найдите число X .

Г.Гальперин

4. На поверхности клетчатого куба $2 \times 2 \times 2$ нарисована замкнутая несамопересекающаяся ломаная, каждое звено которой является стороной какой-либо клетки. Могут ли на этой ломаной оказаться все вершины куба, все центры граней куба и все середины его ребер?

В.Произволов



5. Пончик поспорил с Сиропчиком, что за 25 минут съест больше пирожков, чем Сиропчик выпьет стаканов лимонада. За каждую минуту Пончик съедает 4 или 5 пирожков, а Сиропчик выпивает 3 или 6 стаканов лимонада. Через 10 минут после старта Сиропчик обогнал Пончика на 20%, но за 4 следующие минуты Пончик невероятными усилиями сравнял счет. Еще через 6 минут уже Сиропчик отставал от Пончика на 10%, но в конце концов все-таки сумел одержать победу. Сколько съел (выпил) каждый?

И.Акулич

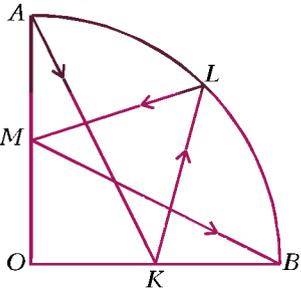


Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков.

1. Криволинейный треугольник OAB представляет собой четверть круга. Из вершины A выпускается луч, который, отразившись последовательно от радиуса OB в точке K , от дуги AB в точке L и от радиуса OA в точке M , попадает в вершину B . Докажите, что если L – середина дуги AB , то $\angle AKL = \angle KLM = \angle LMB = 45^\circ$.



В.Произволов

2. На доске мелом записаны целые числа от -10 до 10 включительно. Разрешается стереть любые два числа A и B , записав вместо них другие два числа: $\frac{3A - 4B}{5}$ и $\frac{4A + 3B}{5}$. Можно ли, произведя эту операцию несколь-

ко раз, добиться того, чтобы все числа на доске стали равными?

И.Акулич

3. Выпуклый четырехугольник обладает таким свойством, что сумма расстояний от любой точки внутри него до всех его сторон постоянна. Верно ли, что этот четырехугольник – параллелограмм?

М.Волчкевич

4. Может ли при каком-либо натуральном n число $n^2 + n + 1$ являться квадратом целого числа?

В.Произволов

5. Полицейские участки размещаются на перекрестках города, причем для любого перекрестка участок находится или на этом перекрестке, или на соседнем. Известно, что в городе 155 перекрестков и на каждом из них сходится не более шести улиц. Докажите, что в городе не менее 23 полицейских участков.

О.Мельников

Слоны на водопое

А.КОТОВА

...Добрый доктор Айболит очень торопился в Африку: его ждали больные звери, и он беспокоился, не стало бы им хуже.

Вот по джунглям бежит Айболит
И одно только слово твердит:
«Лимпопо, Лимпопо, Лимпопо!»
Видит вдруг – у большого пруда
Собрались слоновьи стада,
Хоботы сунули в пруд,
Воду прохладную пьют.
А в пруду – миллион лягушат
И инфекции так и кишат!
Закричал Айболит: «Эй, слоны!
От воды вы, наверно, больны!»
Но слоны ему не отвечали,
Только хоботом воду качали.

Очень огорчился Айболит неразумию слонов, но ничего поделать не смог: слоны его не слушали. Так что доктор только

Все смотрел и смотрел, удивляясь:
Сутки целые, не отвлекаясь,
Пили грязную воду стада,
И в пруду убывала вода.
Наконец, осушив водоем,
Повернулись – и, слон за слоном,
Шагом медленным в чащу ушли.
Долго треск раздавался вдали.

Когда слоны проходили мимо Айболита, он машинально пересчитал их. «Надо же, – подумал доктор, –

Сто восемьдесят три слона
Всю воду выпили до дна!
Ох, заразятся дифтерией,
Дизентерией, малярией!
Придется, видно, научить
Животных воду кипятить!»

Но долго думать о легкомысленных слонах было

(Окончание см. на с.34)

Нет, ребята, все не так...

ВАДРАТ РАЗМЕРОМ 8×8 можно разрезать (рис. 1) на части, из которых складывается

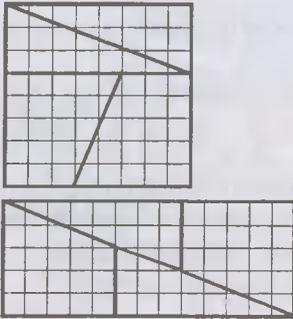


Рис.1

прямоугольник размером 5×13 . Значит, $64 = 65$.

На рисунке 2 квадрат размером 13×13 разрезан на части, из кото-

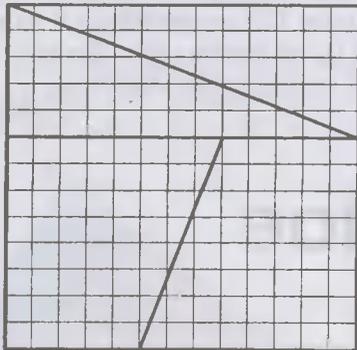


Рис.2

рых легко сложить прямоугольник 8×21 . Значит, $169 = 13^2 = 8 \cdot 21 = 168$.

Есть и много других столь же эффектных разрезов (рис.3).

Ваш учитель геометрии вряд ли согласится, что все треугольники равнобедренные. Тем не менее, это так!

Проведем биссектрису угла A треугольника ABC и серединный перпендикуляр к стороне BC (рис. 4, а). Из точки O их пересечения опустим перпендикуляры на стороны треугольника. Прямоугольные треугольники BOL и COL равны (по двум катетам). Значит, $BO = CO$. Треугольники NOA и

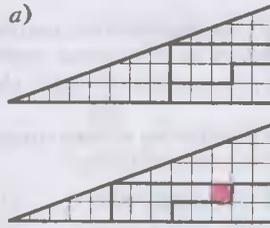
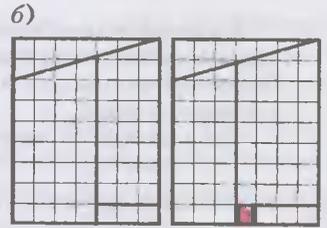


Рис.3

MOA тоже равны (по гипотенузе и острому углу). Поэтому $ON = OM$, так что треугольники BNO и CMO равны (по гипотенузе и катету). Это значит, что $BN = CM$ и $AB = AN + NB = AM + MC = AC$.

так что $AB = AC$. Треугольник ABC равнобедренный!



(рис.4, б):

$AB = AN - NB = AM - MC = AC$, всего лишь вместо суммы – разность. Треугольник все равно равнобедренный!

Многие знают, что если $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, то

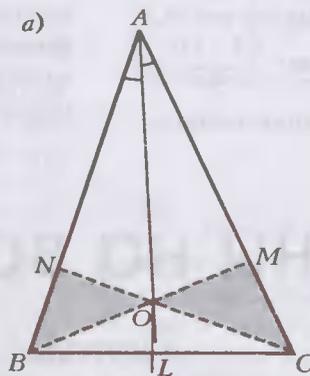


Рис.4

Вы можете возразить, что на точном чертеже точка O попадает не внутрь треугольника, а лежит вне. Более того, знаток геометрии даже скажет, что точка O – это середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC . На это у меня готов ответ

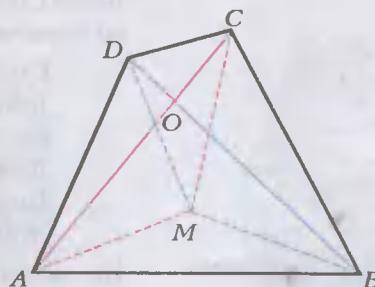
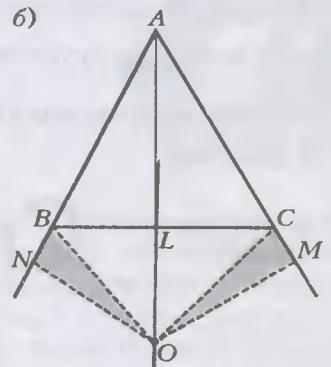


Рис.5

точкой, сумма расстояний от которой до вершин минимальна, является точка O пересечения диагоналей (рис.5). Доказать это очень легко: для любой точки M по неравенству треугольника имеем $AM + MC \geq AC$ и $BM + MD \geq BD$, откуда

$$AM + CM + BM + DM \geq AC + BD = AO + OC + BO + OD,$$

что и требовалось.

Пусть точки A и B неподвижны, а точки C и D стремятся к вершине E равностороннего треугольника ABE (рис.6). Точка O пересечения диагоналей тоже устремится к точке E . Мы доказали, что сумма расстояний от точки O до вершин четырехугольника минимальна. В пределе четы-

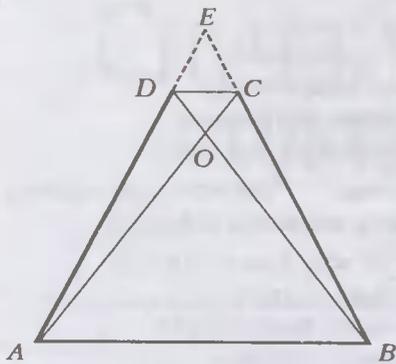


Рис.6

треугольник превращается в треугольник ABE. Значит, сумма расстояний от предельного положения точки O — минимальная из всевозможных сумм расстояний от точек плоскости до вершин треугольника ABE.

Однако сумма расстояний от центра описанной окружности до вершин треугольника меньше суммы AE + BE. Противоречие!

Не все ладно и в алгебре. Рассмотрим уравнение

$$\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = -1.$$

Возведем обе части в куб, воспользовавшись формулой

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$$

при $a = \sqrt[3]{1+x}$ и $b = \sqrt[3]{1-x}$. Получаем

$$1+x + 3\sqrt[3]{1-x^2} \cdot (-1) + 1-x = -1,$$

т.е. $\sqrt[3]{1-x^2} = 1$, откуда $x = 0$. Подставьте $x = 0$ в исходное уравнение — получите равенство $2 = -1$.

Тригонометрии я тоже не доверяю. Вот, например, уравнение

$$3 \sin x - \cos x = 1.$$

Воспользуемся формулами

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Обозначив $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, придем к



уравнению

$$\frac{6t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1,$$

откуда $6t - 1 + t^2 = 1 + t^2$, т.е. $t = 1/3$. Мы нашли ответ: $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n$, где n — любое целое число.

Но удовлетворяющее данному уравнению $x = \pi$ не представимо в таком виде.

Да ладно бы в тригонометрии. Неравенства — и те не позволяют расслабиться. Обозначим

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots$$

Очевидно,

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots (*)$$

Вычитая это равенство из предыдущего, получаем:

$$S - \frac{S}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots (**)$$

Поскольку $\frac{1}{2} < 1$, $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$, $\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$, и

вообще, $\frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1}$, то каждое

слагаемое правой части формулы (*) меньше соответствующего слагаемого формулы (**). Следовательно,

$$\frac{S}{2} < S - \frac{S}{2},$$

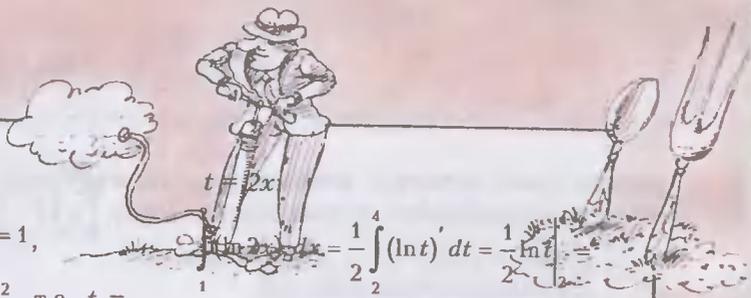
что удивительно.

Если вы уже изучали интегралы и логарифмы, то сможете насладиться следующим парадоксом. Вычислим двумя способами

$\int_1^2 (\ln 2x) dx$. Во-первых, поскольку $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$, имеем

$$\int_1^2 (\ln 2 + \ln x) dx = \int_1^2 (\ln x) dx = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2.$$

Во-вторых, этот же интеграл можно вычислить, выполнив замену



$$\int_1^2 (\ln 2x) dx = \frac{1}{2} \int_2^4 (\ln t) dt = \frac{1}{2} (\ln t) \Big|_2^4 = \frac{1}{2} (\ln 4 - \ln 2) = \frac{1}{2} \ln 2.$$

Итак, $\ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2$.

К сожалению, логарифмы в школе проходят очень поздно, так что не все знакомы с ними. Для таких читателей показываю то же самое еще раз, но без логарифмов. С одной стороны,

$$\int_0^1 (x^2)' dx = x^2 \Big|_0^1 = 1.$$

С другой стороны, можно выполнить замену $x = t/2$. Имеем:

$$\int_0^1 (x^2)' dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\frac{t^2}{4}\right)' dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{4} \Big|_0^2 = \frac{1}{2}.$$

Итак, $1 = 1/2$. Теперь легко доказать, что все числа равны между собой. А это, согласитесь, очень помогает в жизни (особенно при денежных расчетах — только нужно использовать это в выгодную для себя сторону и успеть убежать).

Наконец, если вы знакомы с формулой Эйлера

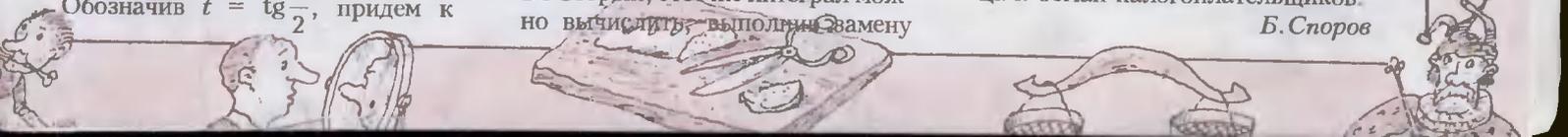
$$\sin x = (e^{ix} - e^{-ix}) / (2i),$$

то можете легко доказать, что синус тождественно равен нулю:

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{(e^{2\pi i})^{x/(2\pi)} - (e^{-2\pi i})^{x/(2\pi)}}{2i} = \frac{1^{x/(2\pi)} - 1^{-x/(2\pi)}}{2i} = 0.$$

Аналогично можно доказать, что $\cos x$ тождественно равен 1. Вывод: как в элементарной, так и в высшей математике — одна путаница и обман налогоплательщиков.

Б. Споров



(Начало см. на с.30)

некогда – доктора ждали больные страусята и акулята,
гориллы и крокодилы, обезьяны и тараканы,

И где-то бегемотики
Схватились за животики –
У них, у бегемотиков,
Животики болят, –

так что доктор скорей поспешил дальше.

И вперед побежал Айболит,
И по-прежнему только твердит:
«Лимпопо, Лимпопо, Лимпопо!»

Наконец, он добрался до Лимпопо и всех больных
вылечил. Благодарные звери подарили доктору Тяни-
толкая – удивительное животное с двумя головами.
Одна голова у него спереди, а другая сзади. Сел
Айболит на спину Тянитолкаю и

Поскакал назад в Европу
То трускою, то галопом,
По дороге в джунгли влез
И попал сквозь буйный лес
Незнакомую тропой
На слоновий водопой.

Видит доктор – тот же пруд,
И слоны водицу пьют.
Было нынче тут слонов
Только тридцать семь голов.

Говорит Тянитолкай:
«Тут уютно, отдыхай,
А пройдет четыре дня –
Снова сядешь на меня.»

Слез доктор со спины Тянитолкая, построил навес от
солнца из банановых листьев и прилег отдохнуть.

Доктор спал и гулял,
Доктор книжку читал,
А слоны все пили и пили.

Доктор ел и дремал,
С попугаем болтал,
А слоны все пили и пили.

Наконец, показалось дно,
Липкой тиной покрыто оно,
А слоны отошли, отдуваются
И лениво листвою насыщаются.

«Разве так можно, слоны? – укоризненно спросил
Айболит. – Так недолго и водянкой заболеть!»

Ведь пять суток не есть и не спать,
Только грязную воду глотать
Очень вредно слонам, понимаете?»
Покачали слоны головами
И исчезли в лесу за стволами.

И сказал Тянитолкай:

«Что ты, доктор, не ворчи,
Видишь, бьют со дна ключи?
Тут целебная вода,
Никакого в ней вреда.
Здесь всегда стада слоновьи
Запасаются здоровьем,
Так что нет у них рахита,
Ни ангины, ни бронхита.»

«Здорово!» – сказал Айболит, сел на спину Тянитол-
каю и поехал дальше – домой.

По дороге думал он:
Пруд за сколько выпьет слон,
Если будет пить один?
Год? Два года? До седин?
Доктор не нашел ответа
И забыл задачу эту.

Но мы не забыли и просим вас, дорогие читатели,
ответить: за сколько же выпьет весь пруд один слон,
если 37 слонам для этого нужно 5 суток, а 183 – всего
одни сутки?



Случай в газовой туманности

А. СТАСЕНКО

Бешено стучали сердца, вращались рототроны, дрожали осцилляторы; смотроскопы показывали искривление пространства-времени. Сквозь заклепки сочились кванты. Черная энтропия росла...

— Ба, да ведь мы на краю обыкновенной гиперплоскости! — воскликнул Сто Двадцать Пятый штурман.

Из квазинаучной фантастики

СЛУЧИЛОСЬ ЭТО КАК-ТО ДАВНЫМ-ДАВНО: два звездолета нежданно попали в область притяжения холодного водородного облака и истратили весь запас топлива на торможение, так что остановились буквально у его границы. Что было делать? Конечно, «лечь в дрейф», как говорили древние моряки, — ничего не делать и ждать помощи.

Тут астроnavты заметили, что корабли затормозили у границы облака в разном положении: один — перпендикулярно границе, а другой — параллельно. (Надобно сказать, что в ту пору звездолеты строили в виде тонких дисков.) Засели штурманы за ком-

пьютеры и решили узнать, как будут двигаться их корабли и — самое главное — когда они будут вновь сближаться. Засядем и мы.

Пусть (как вскоре и выяснили астроnavты) облако водорода будет плоским и однородным (т.е. постоянной плотности). Поскольку есть скопление массы, должно быть поле тяготения. Ясно, что во всех точках средней плоскости (при $x = 0$ на рисунке 1) сила тяготения равна нулю — из соображений симметрии. При удалении от плоскости симметрии сила тяготения в расчете на единицу массы — т.е. ускорение тяготения — должна расти по модулю, а, как вектор, ускорение тя-

готения должно быть направлено к плоскости симметрии.

Великий математик Гаусс догадался, как все эти мысли записать короче. Выделим мысленно внутри слоя коробку с крышками площадью S , расположенными при x и $-x$ параллельно границам (и плоскости симметрии) газового слоя (на рисунке 1, а она показана сбоку). Ускорение тяготения $g(x)$ постоянно во всех точках этих крышек. Похоже, что оно как бы «втекает» внутрь коробки, поэтому произведение $2Sg(x)$ называется потоком вектора \vec{g} внутрь этой коробки. Так вот, теорема Гаусса утверждает, что этот поток пропорционален массе вещества внутри коробки $\rho \cdot 2Sx$ — только эта масса и порождает этот поток, причем коэффициентом пропорциональности является гравитационная постоянная G , умноженная на 4π . Таким образом,

$$2Sg(x) = -4\pi G\rho \cdot 2Sx, \quad (1)$$

где знак «минус» показывает, что вектор \vec{g} направлен именно внутрь коробки.

Кто хочет, может проверить теорему Гаусса на примере точечной гравитирующей массы m_1 . Действительно, окружим точечную массу сферой радиусом r и, значит, площадью $4\pi r^2$ (рис. 2). Тогда

$$g(r) \cdot 4\pi r^2 = -4\pi Gm_1,$$

откуда

$$g(r) = -\frac{Gm_1}{r^2}$$

— получили известное выражение для ускорения силы Ньютона для гравитирующей точки. Можно сказать, что закон всемирного тяготения «спрятан» в теореме Гаусса.

Итак, из равенства (1) находим

$$g(x) = -4\pi G\rho x.$$

Но если сила пропорциональна смещению x (см. рис. 1, б), то потенциа-

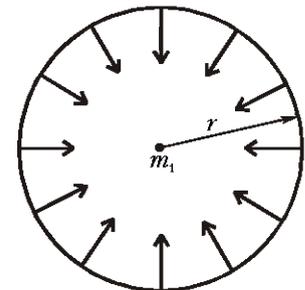
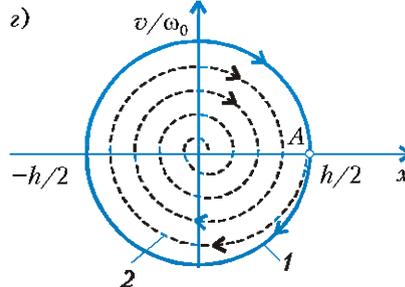
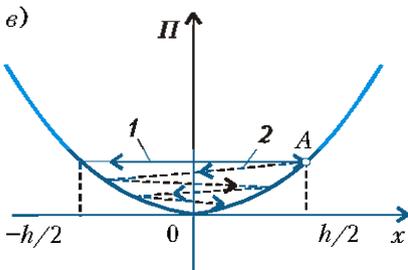
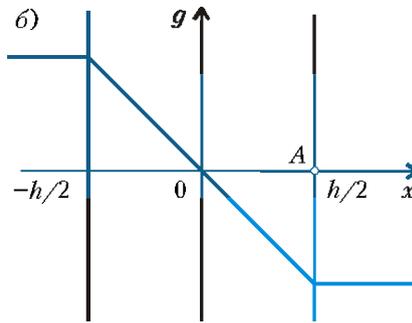
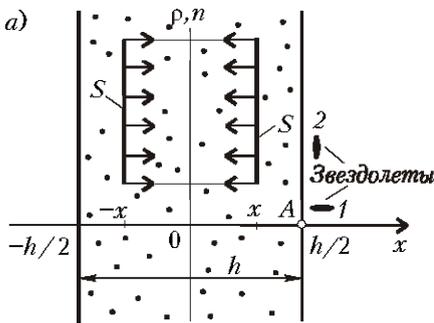


Рис. 1

Рис. 2

ная энергия пропорциональна $x^2/2$ (см. рис.1,б). Вспомним, например, пружину жесткостью k : возвращающая сила равна $F = -kx$, потенциальная энергия равна $\Pi = kx^2/2$.

В нашем случае, очевидно, $k = 4\pi MG\rho$, где M – масса звездолета. Значит, суммарная механическая энергия звездолета, находящегося на расстоянии x от плоскости симметрии облака и имеющего здесь скорость v , равна

$$\frac{Mv^2}{2} + 4\pi MG\rho \frac{x^2}{2}.$$

Первый звездолет-диск, движущийся ребром к границам плоского облака, почти не встречает сопротивления. Поэтому его суммарная механическая энергия постоянна и равна, например, ее значению на краю облака

$$\frac{M \cdot 0^2}{2} + \frac{4\pi MG\rho}{2} \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

(учтено, что скорость при этом нулевая). Тогда закон сохранения энергии звездолета можно записать так:

$$\left(\frac{v}{\sqrt{4\pi G\rho}}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2. \quad (2)$$

Здесь $\sqrt{4\pi G\rho} = \omega_0$ – это угловая частота гармонических колебаний звездолета внутри параболической потенциальной ямы (рис.3), следовательно, период колебаний будет равен

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \sqrt{\frac{\pi}{G\rho}}. \quad (3)$$

С другой стороны, соотношение (2) можно графически представить в координатах $x, v/\omega_0$ (на так называемой фазовой плоскости) в виде окружности радиусом $h/2$ (см. рис.1,з): движение начинается из точки A (где $x_A = h/2$ и $v_A = 0$) и в отсутствие трения происходит вечно, возвращаясь в эту же точку через время T_0 . А еще можно записать смещение и скорость звездолета l как функции времени:

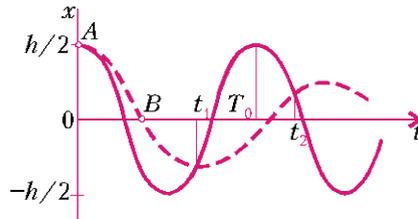
$$x = \frac{h}{2} \cos \omega_0 t, \quad v = -\frac{h}{2} \omega_0 \sin \omega_0 t. \quad (4)$$

С такой точки зрения, равенство (2) – это просто теорема Пифагора в координатах $x, v/\omega_0$.

Но что происходит со вторым звездолетом, который пересекает облако плашмя? Так как у него большое поперечное сечение $S_{\perp} = \pi a^2$, где a – его радиус, он будет тормозиться за счет столкновений с молекулами. Если считать удары молекул абсолютно упру-

гими, то каждая из них (массой m) сообщает звездолету импульс $-2mv$, а так как в единицу времени он «заметает» объем пространства $S_{\perp}v$, то полный поток импульса (т.е. сила сопротивления) составит $\pi a^2 \cdot 2\rho v^2$ (здесь учтено, что $\rho = mn$, где n – концентрация молекул в облаке). Значит, при перемещении звездолета на расстояние Δx работа силы сопротивления равна $\pi a^2 \cdot 2\rho v^2 \Delta x$. Полная механическая энергия второго звездолета уже не будет постоянной (см. рис.1,б), и ее убыль на перемещении Δx составит

$$\Delta \left(\frac{1}{2} \left(\frac{v}{\omega_0} \right)^2 + \frac{x^2}{2} \right) = -\frac{\pi a^2 \cdot 2\rho}{M} \left(\frac{v}{\omega_0} \right)^2 |\Delta x|. \quad (5)$$



Очевидно, что это будут уже затухающие колебания (см. рис.3; штриховая линия). Период их будет больше T_0 , и ясно почему: из-за силы торможения второй звездолет уже впервые дойдет до плоскости симметрии (точка B) позднее, чем первый. А на фазовой плоскости движение второго звездолета изобразится в виде спирали (см. рис.1,з).

Можно написать решение уравнения (5) в виде кривой в фазовой плоскости:

$$\left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2 = -2l \left[x - l - \left(\frac{h}{2} - l\right) e^{\frac{h/2-x}{l}} \right], \quad (6)$$

где введено обозначение

$$l = \frac{M}{\pi a^2 \cdot 4\rho}. \quad (7)$$

Величина l имеет размерность длины и, очевидно, является тем характерным расстоянием, на котором существенно изменяется кинетическая энергия второго звездолета из-за силы сопротивления.

Кто хочет убедиться в правильности этого решения, пусть подставит его в уравнение (5), а кто не может, пусть не расстраивается, а поступает на факультет аэромеханики и летательной

техники Московского физико-технического института – тогда и сможет.

Да, но! – воскликнул капитан одного из звездолетов. – Если внутри этого газового слоя есть гравитация, то почему он не сжимается к плоскости симметрии?!

Другой капитан объяснил ему по радио, что сжатию препятствует хаотическое, «тепловое» движение молекул. В самом деле, хотя облако и холодное – температура порядка 20 К, т.е. раз в 15 меньше, чем средняя температура Земли, – но и молекулы водорода тоже раз в пятнадцать легче, чем молекулы воздуха, поэтому средняя скорость их теплового движения никак не меньше, чем у молекул земной атмосферы, а ведь атмосфера не падает на поверхность нашей родной планеты. Конечно, плотность атмосферы не постоянна – она убывает с высотой, так что и наличие резкой границы плотности у встретившегося облака есть не более чем предположение, упрощающее расчеты.

Теперь осталось подставить в уравнение (6) кинематическое определение скорости $v = dx/dt$ и, решая полученное дифференциальное уравнение (например, на компьютере), найти «расписание движения» $x(t)$ второго звездолета. Но это и не обязательно делать прямо сейчас – пусть этим занимаются штурманы, а мы по сути дела уже все описали качественно. Например, моменты времени новых встреч звездолетов (t_1, t_2, \dots) можно будет найти из графиков на рисунке 3.

Сделаем лишь некоторые численные оценки. Примем плотность молекулярного облака $\rho \sim 10^{-16}$ кг/м³, его характерную толщину $h \sim 0,1$ парсека = $3 \cdot 10^{15}$ м. В качестве данных для звездолетов возьмем, например, следующие: масса $M \sim 1000$ тонн = 10^6 кг (три современных авиалайнера), радиус диска $a \sim 100$ м. Тогда, согласно выражению (3), для периода гармонических колебаний первого звездолета получим

$$T_0 \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} \cdot 10^{-16} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}}} \sim 0,3 \cdot 10^{14} \text{ с} \approx 10^6 \text{ лет}.$$

Наибольшая скорость движения, которая достигается в плоскости симметрии облака (при $x = 0$), согласно уравнению (2), равна

(Продолжение см. на с. 41)

Тригонометрические тождества

Л. СЕМЁНОВА

Вся тригонометрия основана на двух формулах:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad (1)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (2)$$

Скажите, слишком смелое утверждение? В школе учат не две, а два десятка формул, никакой системы не видно, одно спасение – шпаргалка...

Тем не менее, я вскоре расскажу, как из этих двух тождеств можно вывести многие другие. И станет ясно, что ни одну из многочисленных формул тригонометрической шпаргалки не обязательно (даже вредно!) заучивать наизусть. Гораздо полезнее понять основную идею – тогда при необходимости можно быстро вывести нужную формулу.

Когда вы вполне овладеете этой идеей, неизбежно встанет вопрос: как доказывать сами тождества (1)–(2)? Так вот, мы докажем их шестью способами! Наиболее бесхитростен второй способ, который раскрывает геометрический смысл всех выражений, входящих в эти тождества. Остальные способы тоже очень красивы и показывают разнообразные связи тригонометрии: первый – с теоремой синусов, третий – с поворотами, четвертый – со скалярным произведением, пятый – с теоремой Птолемея, шестой – с комплексными числами.

Следствия из двух основных формул

Подставим $-\beta$ вместо β в формулы (1) и (2):

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \quad (3)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (4)$$

Сложим (1) и (3):

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta. \quad (5)$$

Сложим (2) и (4) и вычтем (2) из

(4):

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta, \quad (6)$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta. \quad (7)$$

Три последние формулы можно использовать для преобразования произведений тригонометрических функций в суммы:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)),$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

Положим теперь

$$x = \alpha + \beta, \quad y = \alpha - \beta.$$

Тогда

$$\alpha = \frac{x + y}{2}, \quad \beta = \frac{x - y}{2},$$

и из формул (5)–(7) получаем формулы для преобразования сумм и разностей тригонометрических функций в произведения:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2},$$

$$\cos y - \cos x = 2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}.$$

Из формул (1) и (2) можно вывести и другие тригонометрические формулы. Например, подставив $\beta = \alpha$, получим

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Легко получить и формулу тангенса

суммы:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \end{aligned}$$

Заменив β на $-\beta$, получим формулу тангенса разности:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Формулы для тангенса разности и тангенса суммы верны не при любых значениях переменных α и β , а только при тех, для которых $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$ существуют (т. е. $\alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ ни при каком целом n) и знаменатель не обращается в ноль (т. е. в случае тангенса суммы $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \neq 1$, а в случае тангенса разности $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \neq -1$). Поэтому при использовании этих формул следует обращать внимание на значения переменных, при которых формулы применять нельзя.

Упражнения

1. Докажите, что

а) $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$;

б) $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$.

2. Докажите формулы

а) $\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha + 45^\circ)$;

б) $\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha = 2 \sin(\alpha + 30^\circ)$.

3. Убедитесь, что если хотя бы одно из чисел a и b отлично от нуля, то

$$\begin{aligned} a \cos x + b \sin x &= \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right) = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \varphi \cos x + \cos \varphi \sin x) = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi), \end{aligned}$$

где φ – такой угол, что $\sin \varphi = a / \sqrt{a^2 + b^2}$ и $\cos \varphi = b / \sqrt{a^2 + b^2}$.

(Мы получили так называемую формулу введения дополнительного угла. Если $x = \omega t$, где ω – ненулевая постоянная величина, t – время, то получаем, что сумма двух гармонических колебаний $y = a \cos \omega t$ и $y = b \sin \omega t$ – гармоническое колебание.)

4. Решите уравнения

а) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$;

6) $2 \sin x + \cos x = 2$.

5. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = 3 \cos x - 4 \sin x.$$

6. Найдите множество значений функции

$$g(x) = 12 \sin x + 5 \cos x.$$

7. Докажите формулы

а) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$;

б) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$.

8. Выразите $\cos 4\alpha$ через $\cos \alpha$.

9. Докажите формулы

а) $\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$;

б) $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$;

в) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$.

(Эти формулы называют формулами универсальной тригонометрической подстановки. Они позволяют любое уравнение, в котором присутствуют $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, свести к уравнению с одной неизвестной: $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Обратите внимание, что области определения левых и правых частей не совпадают. Поэтому безоглядное применение этих формул может приводить к неприятностям.)

10. Докажите формулы

а) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$;

б) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$;

в) $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$;

г) $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$;

д) $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$.

11. а) Нарисуйте на клетчатой бумаге прямые, заданные уравнениями $y = 2x - 3$ и $y = 5 - 3x$. Измерьте транспортиром величину угла между ними и затем найдите эту величину не приближенно, а точно при помощи формулы тангенса разности.

б) Найдите величину угла между прямыми, заданными уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ (угловые коэффициенты k_1 и k_2 — это тангенсы углов наклона прямых к положительному направлению оси абсцисс).

12. Ученик решал задачу и получил неверный ответ. Могла ли быть тому виной использованная им формула

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}?$$

13. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}(x + 45^\circ) = -9 \operatorname{ctg}^2 x - 1,$$

воспользовавшись формулой

$$\operatorname{tg}(x + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x}.$$

Нужно ли отдельно рассматривать значения $x = 90^\circ + 180^\circ n$, где n — целое число?

I. Проведем высоту

Перейдем к самому интересному — к доказательствам тождеств (1) и (2). Для удобства читателя доказательства пронумерованы. Сейчас, как видно из заголовка этого раздела, мы рассмотрим первый способ.

Опустим высоту CH на сторону AB треугольника ABC (рис. 1, а):

$$AB = AH + HB = AC \cos \alpha + BC \cos \beta. \quad (8)$$

Вспомним теорему синусов: $AB = 2R \sin \gamma$, $AC = 2R \sin \beta$ и $BC = 2R \sin \alpha$,

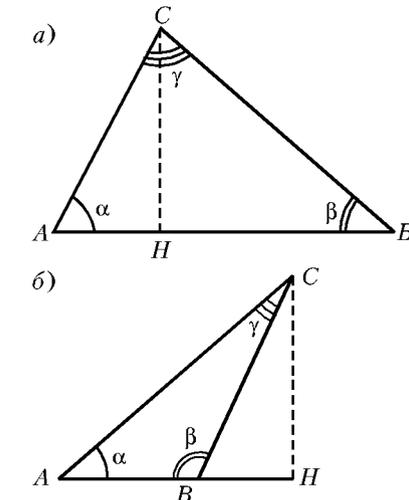


Рис. 1

где R — радиус описанной окружности треугольника ABC . Подставим эти выражения в формулу (8) и разделим на $2R$. Получим

$$\sin \gamma = \sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta.$$

Осталось заметить, что $\sin \gamma = \sin(180^\circ - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta)$, — и формула (1) доказана.

Существенный недостаток этого доказательства в том, что α и β должны быть острыми углами — иначе треугольник ABC с нужными нам углами либо вообще не существует, либо же высота CH падает не на сторону, а на ее продолжение. Впрочем, эти ограничения можно ослабить, заменив их на неравенства $0 < \alpha$, $0 < \beta$, $\alpha + \beta < 180^\circ$: например, если угол B тупой (рис. 1, б), то $AB = AH - BH = AC \cos \alpha - BC \cos(180^\circ - \beta) = AC \cos \alpha + BC \cos \beta$.

Однако в формуле (1) величины α и β могут быть любыми, не обязательно положительными; и даже если они положительные, их сумма $\alpha + \beta$ не обязательно меньше 180° . Как быть? Приходится использовать формулы

приведения: $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$, $\sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin \alpha$ и т. п. При помощи них можно свести общий случай к ситуации, для которой формула благополучно доказана. Но ничего особенно интересного в этом скучном разборе случаев нет. А потому я не буду этим заниматься и вам не советую, особенно если предстоит сдавать экзамен: вряд ли у экзаменатора хватит терпения выдержать такой перебор. Он просто скажет вам: «До тех пор, пока не разобраны все случаи, считать формулу доказанной нельзя. Приходите через год!». И будет прав: если перебор неполон, то утверждение не доказано, а оценка за это полагается сами знаете какая.

II. Выясним геометрический смысл

Рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат и отложим от оси абсцисс против часовой стрелки угол величиной α , а от полученного луча OA — угол величиной β (рис. 2). Опустим перпендикуляры BD и BE на ось абсцисс и луч

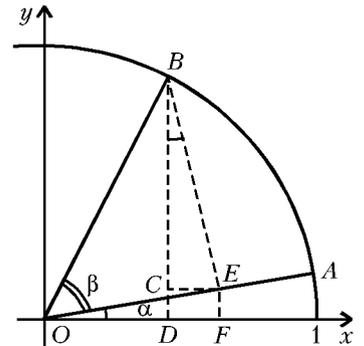


Рис. 2

OA . Затем из точки E опустим перпендикуляры EF и EC на прямые OD и BD . По свойству углов с взаимно перпендикулярными сторонами,

$$\angle CBE = \angle EOF = \alpha.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= BD = BC + CD = \\ &= BC + EF = BE \cos \alpha + OE \sin \alpha = \\ &= \sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= OD = OF - DF = \\ &= OF - CE = OE \cos \alpha - BE \sin \alpha = \\ &= \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha. \end{aligned}$$

Изложенное доказательство гораздо лучше первого: оно верно для любых величин α и β — для положительных и отрицательных, больших и маленьких. (Использованные величины «сами собой» в нужных случаях положительные, в нужных — отрицатель-

ны.) Убедить в этом экзаменатора легче, чем в первом доказательстве – но все-таки убедать надо...

III. Скалярное произведение

Весьма лаконичное доказательство формулы (2) получим, если посчитаем скалярное произведение векторов $\vec{a} = (\cos \alpha; \sin \alpha)$, $\vec{b} = (\cos \beta; -\sin \beta)$.

С одной стороны, оно равно произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha + \beta).$$

С другой стороны, известно, что скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Осталось сравнить последние две формулы.

Запутаться, согласитесь, негде. Но один скользкий момент все-таки есть: вся трудность спрятана в формуле, выражающей скалярное произведение векторов через их координаты. Поэтому, прежде чем использовать на экзамене этот способ, надо вспомнить доказательство формулы для скалярного произведения. (И годится не всякое доказательство, а только то, в котором не использованы тригонометрические формулы сложения, – иначе возникнет порочный круг.)

IV. Повороты

Сейчас я изложу способ, к которому придаться труднее всего.

Поворот вокруг точки O на угол φ – это отображение плоскости, при котором всякая точка M переходит в такую точку N , что $OM = ON$ и $\angle MON = \varphi$ (рис. 3). Угол φ откладывают против часовой стрелки, если φ положителен; если же $\varphi < 0$, то откладывают по часовой стрелке угол величиной $-\varphi$. Поворот обычно обозначают R_O^φ , по первой букве слова rotation – вращение (сравните: ротор, ротация).

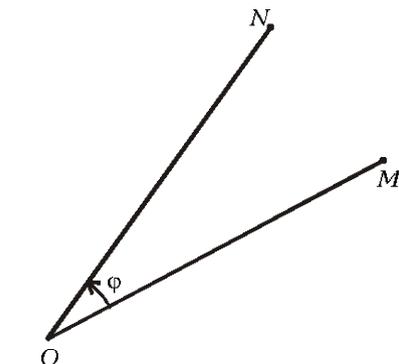


Рис. 3

Рассмотрим повороты R^α и R^β вокруг начала координат на углы α и β . (Поскольку в излагаемом доказательстве использованы повороты только вокруг начала координат, центр поворота мы не указали.) Последовательное выполнение этих двух поворотов дает поворот на угол $\alpha + \beta$:

$$R^\beta \circ R^\alpha = R^{\alpha+\beta}. \quad (9)$$

Оказывается, если выписать формулы, которые описывают в координатах эти преобразования плоскости, то формула (9) приведет к формулам (1) и (2). Прделаем эти вычисления. При повороте на угол α вокруг начала координат точка $(1; 0)$ переходит, как

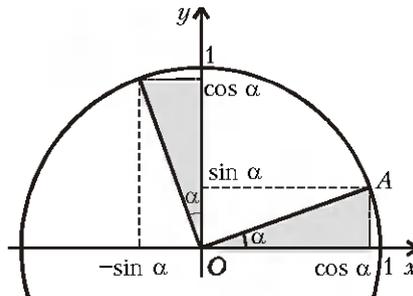


Рис. 4

следует из определений косинуса и синуса, в точку с координатами $(\cos \alpha; \sin \alpha)$ (рис. 4). Точка $(0; 1)$ при этом повороте переходит в точку $(-\sin \alpha; \cos \alpha)$.

Далее, вектор $(x; y)$ можно разложить в сумму векторов, параллельных осям координат, по формуле

$$(x; y) = x \cdot (1; 0) + y \cdot (0; 1).$$

Поскольку при повороте любой параллелограмм переходит в параллелограмм, легко понять, что для любых чисел x, y и любых векторов \vec{a}, \vec{b} верно равенство

$$R^\alpha \left(x \vec{a} + y \vec{b} \right) = x R^\alpha \left(\vec{a} \right) + y R^\alpha \left(\vec{b} \right).$$

Значит, вектор $(x; y)$ при повороте R^α переходит (рис. 5) в вектор

$$\begin{aligned} xR^\alpha(1; 0) + yR^\alpha(0; 1) &= \\ &= x(\cos \alpha; \sin \alpha) + y(-\sin \alpha; \cos \alpha) = \\ &= (x \cos \alpha - y \sin \alpha; x \sin \alpha + y \cos \alpha). \end{aligned}$$

Последняя формула позволяет написать выражения для координат $(x_1; y_1)$ точки, в которую переходит точка $(x; y)$ при повороте на угол α вокруг начала координат:

$$x_1 = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad (10)$$

$$y_1 = x \sin \alpha + y \cos \alpha. \quad (11)$$

Для координат $(x_2; y_2)$ точки, в кото-

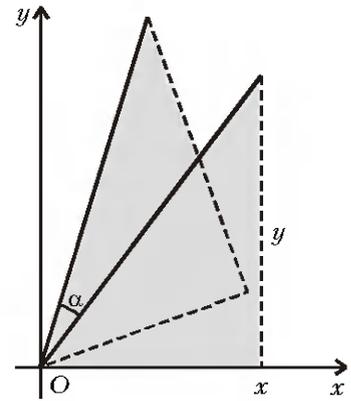


Рис. 5

рую переходит точка $(x_1; y_1)$ при повороте R^β , верны аналогичные формулам (10) и (11) формулы

$$x_2 = x_1 \cos \beta - y_1 \sin \beta, \quad (12)$$

$$y_2 = x_1 \sin \beta + y_1 \cos \beta. \quad (13)$$

Подставив в (12) выражения (10) и (11), получим

$$\begin{aligned} x_2 &= (x \cos \alpha - y \sin \alpha) \cos \beta - \\ &- (x \sin \alpha + y \cos \alpha) \sin \beta. \end{aligned} \quad (14)$$

Раскроем скобки и сгруппируем:

$$\begin{aligned} x_2 &= x \cos \alpha \cos \beta - y \sin \alpha \cos \beta - \\ &- x \sin \alpha \sin \beta - y \cos \alpha \sin \beta = \\ &= x(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) - \\ &- y(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta). \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь заметим, что

$$x_2 = x \cos(\alpha + \beta) - y \sin(\alpha + \beta), \quad (16)$$

и сравним формулы (15) и (16). В одной формуле коэффициент при x равен $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, в другой формуле (для той же самой координаты x_2) коэффициент при x равен $\cos(\alpha + \beta)$. Получаем формулу (1). Аналогично, сравнивая коэффициенты при y , получаем формулу (2). (Возможно, кому-то сравнение коэффициентов покажется подозрительным приемом. Самый простой, на мой взгляд, способ обосновать его законность – подставить в формулы (15) и (16) сначала $x = 1, y = 0$, а затем $x = 0, y = 1$.)

Упражнения

14. Для y_2 выведите формулу, аналогичную формуле (14), и убедитесь, что таким образом получаются те же самые формулы (1) и (2).

15. Найдите уравнение окружности, в которую переходит окружность с центром $(0; 3)$ и радиусом 2 при повороте вокруг начала координат на а) 90° ; б) 45° .

16. В какую точку переходит точка $(x; y)$ при отражении относительно прямой, проходящей через начало координат под углом

Ф к положительному направлению оси абсцисс?

17. Найдите координаты точки, в которую переходит точка $(x; y)$ при симметрии относительно а) точки $(0; 0)$; б) точки $(a; b)$; в) прямой, заданной уравнением $x + y = 1$; г*) прямой, заданной уравнением $y = x \operatorname{tg} \varphi + b$.

18. Гиперболу, заданную уравнением $xy = 1$, повернули на 45° против часовой стрелки. Каково уравнение полученной кривой?

19. Эллипс, заданный уравнением $x^2 + 4y^2 = 4$, повернули на 30° по часовой стрелке. Каково уравнение полученной кривой?

V. Теорема Птолемея

Рассмотрим прямоугольные треугольники OAC и OBC с общей гипотенузой $OC = 1$. Оба они вписаны в окружность с диаметром OC (рис.6).

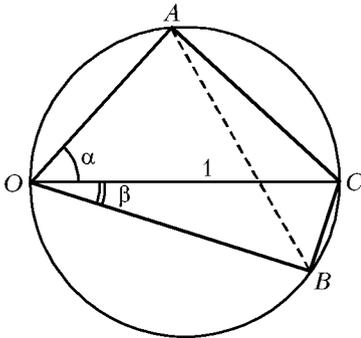


Рис. 6

Напомним, что теорема Птолемея гласит: *произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон*. Значит,

$$OC \cdot AB = OA \cdot BC + OB \cdot AC. \quad (17)$$

Поскольку $OC = 1$, $OA = \cos \alpha$, $OB = \cos \beta$, $CB = \sin \beta$ и $CA = \sin \alpha$, равенство (17) можно записать в виде

$$AB = \cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha.$$

По теореме синусов, $AB = 1 \cdot \sin(\alpha + \beta)$ (в самом деле, 1 – это диаметр описанной окружности треугольника OAB , $\alpha + \beta$ – величина угла AOB). Формула (1) оказалась частным случаем теоремы Птолемея! (Разумеется, наше доказательство имеет смысл только для острых углов α и β .)

Между прочим, Птолемей использовал свою теорему именно для вычисления тригонометрических функций одних углов через функции других углов. Поэтому можно сказать, что исторически теорема Птолемея (ок. 90 – ок. 160) предшествовала формулам (1) и (2). В современную форму тригонометрию привел Леонард Эйлер (1707–1783).

Задача Архимеда

Пять из обещанных шести доказательств разобраны. Давайте повременим с шестым способом, чтобы вспомнить одну историю. Когда в 1986 году «Задачник «Кванта» приближался к М1000, был объявлен конкурс на лучшую задачу года. Поступили разные задачи, но ни одна из них не понравилась настолько, чтобы присвоить ей столь «круглый» номер. И тогда было принято решение: объявить победителем конкурса Архимеда из Сиракуз (ок. 287–212 до н.э.).

М1000. В дугу AB вписана ломаная AMB из двух отрезков ($AM > MB$). Докажите, что основание перпендикуляра KH , опущенного из середины K дуги AB на отрезок AM , делит ломаную пополам: $AH = HM + MB$.

Геометрическое решение использует неожиданное дополнительное построение (рис.7): на продолжении отрезка AM отложим точку C такую, что $MC = MB$. Угол BMC как внешний угол треугольника AMB равен сумме углов BAM и ABM . В то же время угол

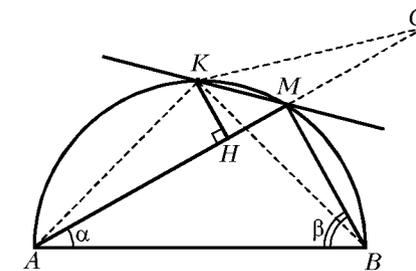


Рис. 7

KMA как вписанный измеряется половиной дуги AK и, следовательно, равен полусумме углов BAM и ABM . Поэтому MK – биссектриса угла BMC . Значит, $MK \perp BC$ и $KC = KB$. Отсюда следует, что $KA = KB = KC$. Поскольку в равнобедренном треугольнике AKC высота KH является заодно и медианой, имеем

$$AH = HC = HM + MB,$$

что и требовалось.

Тригонометрическое решение не требует фантазии: обозначим $\angle BAM = \alpha$ и $\angle ABM = \beta$. Тогда $AM = 2R \sin \beta$ и $BM = 2R \sin \alpha$, где R – радиус описанной окружности треугольника ABM . Поэтому

$$\begin{aligned} AM + MB &= 2R(\sin \alpha + \sin \beta) = \\ &= 4R \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned}$$

С другой стороны, $AK = 2R \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$ и

$\angle KAM = (\beta - \alpha)/2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} AH &= AK \cos \angle KAM = \\ &= 2R \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \\ &= \frac{1}{2}(AM + MB). \end{aligned}$$

VI. Умножение комплексных чисел

Следующее доказательство использует не элементарную геометрию, а комплексные числа.

Рассмотрим произведение чисел $\cos \alpha + i \sin \alpha$ и $\cos \beta + i \sin \beta$. С одной стороны,

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot (\cos \beta + i \sin \beta) &= \\ &= \cos \alpha \cos \beta + i \cos \alpha \sin \beta + \\ &+ i \sin \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (18) \end{aligned}$$

С другой стороны, чтобы перемножить числа, заданные в тригонометрической форме, достаточно перемножить их модули и сложить аргументы. Модули чисел $\cos \alpha + i \sin \alpha$ и $\cos \beta + i \sin \beta$ равны 1; аргументы равны α и β соответственно. Значит,

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) &= \\ &= \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta). \quad (19) \end{aligned}$$

Сравните формулы (18) и (19) – опять получите формулы (1) и (2)!

Правильно или нет изложенное доказательство, нет ли в нем порочного круга? Вдруг при определении комплексных чисел были использованы тригонометрические формулы сложения? Смотрим в учебники. Да, в большинстве из них при введении комплексных чисел использованы формулы (1) и (2).

Тем не менее, избежать порочного круга можно. Как это сделать, рассказано в следующем разделе статьи. А здесь напоследок замечу, что доказательство выглядит еще эффективнее, если воспользоваться формулой Эйлера $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$. Правило умножения чисел, записанных в тригонометрической форме, примет вид свойства показательной функции:

$$e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}. \quad (20)$$

(Разумеется, при этом тоже надо позаботиться об отсутствии порочного круга. Во всяком случае, для экспоненты $e^{i\alpha}$ желательно дать определение, отличное от формулы Эйлера. И что совершенно обязательно – доказывать формулу (20) надо без использования формул (1) и (2). Все это можно сделать, но статья и так уже слишком длинная.)

Геометрический способ определения комплексных чисел и операций над ними

С алгебраическим способом введения комплексных чисел можно познакомиться по статьям «Комплексные числа» (Приложение к журналу «Квант» №2 за 1994 г.), «Многочлены деления круга» («Квант» №1 за 1998 г.) и «Суммы квадратов и целые гауссовы числа» («Квант» №3 за 1999 г.). Сейчас нас интересует другой – геометрический – способ.

Рассмотрим плоскость, в которой задана система координат (рис.8). Любую точку z

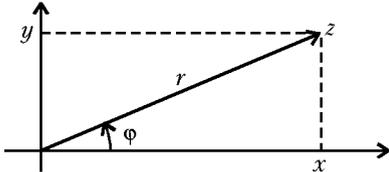


Рис. 8

плоскости можно задавать не только декартовыми координатами $(x; y)$, но и полярными координатами $(r; \varphi)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – расстояние от точки z до начала координат; φ – угол, на который можно повернуть против часовой стрелки положительную полуось числовой прямой до того положения, при котором она пройдет через точку z .

Как видим, всегда $r \geq 0$, причем $r = 0$ только при $z = 0$. Кроме того, для всех $z \neq 0$ величина φ определена с точностью до кратных 360° , так что в интервале $0 \leq \varphi < 360^\circ$ величина φ определена однозначно. Величину r называют модулем (или

абсолютной величиной) числа z , φ – аргументом числа z . Обозначения: $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Сумму $z_1 + z_2$ любых двух точек z_1 и z_2 определим как сумму векторов, т.е. по правилу параллелограмма (рис.9). Произведение $z_1 z_2$ чисел, полярные координаты

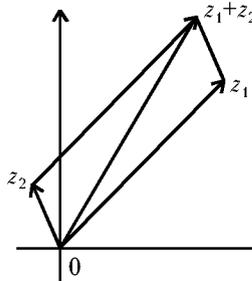


Рис. 9

которых суть $(r_1; \varphi_1)$ и $(r_2; \varphi_2)$, определим как точку с полярными координатами $(r_1 r_2; \varphi_1 + \varphi_2)$ (модули перемножаем, аргументы складываем).

Очевидно, для точек вещественной числовой прямой вышеопределенные операции сложения и умножения не выводят за пределы этой прямой и соответствуют обычным операциям сложения и умножения вещественных чисел. (Проверьте свойства умножения, особенно правило «минус на минус дает плюс».)

Из основных свойств операций умножения и сложения для комплексных чисел неочевиден только распределительный закон:

$$z(z_1 + z_2) = zz_1 + zz_2. \quad (21)$$

Для нас этот закон очень важен: в формуле (18) именно он позволил раскрыть скобки. Давайте его докажем. Геометрически умножение на z означает последовательное (в любом порядке) применение гомотетии с коэффициентом $|z|$ и поворота вокруг начала координат на угол φ . При гомотетии параллелограмм переходит в параллелограмм. При повороте – то же самое, параллелограмм переходит в параллелограмм! А это и есть формула (21)! (Другими словами, сложить сначала два вектора $z_1 + z_2$ (рис.10) и увеличить затем длину получен-

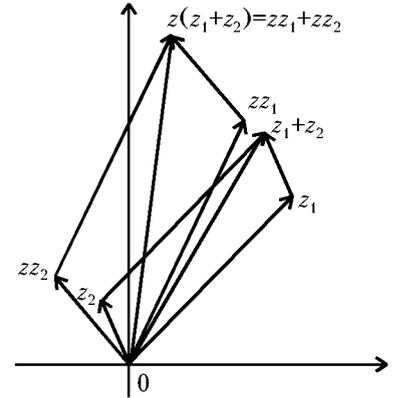


Рис. 10

ной суммы в $|z|$ раз, осуществив к тому же поворот на угол φ , – это все равно что сначала каждый из векторов z_1 и z_2 увеличить в $|z|$ раз и повернуть на угол φ , а уже затем сложить полученные векторы.)

Случай в газовой туманности

(Начало см. на с. 35)

что сравнимо со средней тепловой скоростью движения молекул. Поэтому к проведенному выше вычислению силы сопротивления нужно тоже относиться лишь как к оценке по порядку величины. Зато уж точно взаимодействие звездолета с облаком является, как говорят физики, *свободномолекулярным*. Действительно, средняя длина свободного пробега молекул между их столкновениями зависит от концентрации молекул n и поперечного сечения их взаимо-

действия $\pi(2r_m)^2$ так: $\lambda \sim \frac{1}{n\pi(2r_m)^2}$.

Подставляя сюда

$$n = \rho/m_{H_2} \sim$$

$$\sim 10^{-16} \text{ кг/м}^3 / (2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}) \sim$$

$$\sim 3 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-3}$$

и $r_m \sim 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, получим $\lambda \sim 3 \cdot 10^7 \text{ м}$, что много больше размеров звездолета. Значит, молекулы ударяются о его поверхность независимо друг от друга (не образуя сплошной среды).

Характерное расстояние, на котором заметно убывает энергия второго звездолета (оно входит в показатель экспоненты в равенстве (6)),

равно

$$l \sim \frac{10^6 \text{ кг}}{\pi \cdot 10^4 \text{ м}^2 \cdot 4 \cdot 10^{-16} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}} \sim 10^{17} \text{ м}.$$

Это заметно больше принятой толщины газового облака; значит, затухание колебаний в его пределах будет незначительным.

Однако вспомним T_0 : долго же колебаться звездолетам! Вы же без колебаний изучайте физику и подписывайтесь на «Квант».

Почему вращается вертушка?

**А.КАРАЧИ, Д.КУЗОВКИН, В.СУХОМЕСОВ,
С.ТОДЫШЕВ**

Если изогнуть проволочку, как показано на рисунке 1, повесить на иглу и подключить к борну (полюсу) электрофорной машины, а машину привести во вращение, то и вертушка начинает вращаться. Причем вращение происходит при подключении вертушки как к «минусу», так и к «плюсу» машины.

Краткое упоминание об этом опыте и описание его механизма мы нашли

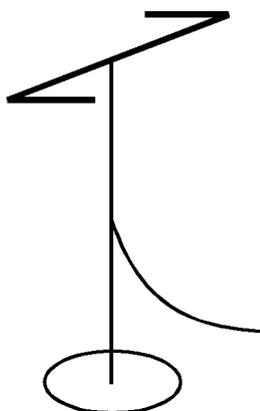


Рис. 1

лишь в книге Дж. Уокера «Физический фейерверк» (М.: Мир, 1979): «Эта вертушка была предметом споров на протяжении двух столетий... В учебной физической лаборатории иногда демонстрируют вертушку, которая приводится в движение подключением ее к высоковольтному источнику постоянного напряжения... Вертушка крутится потому, что воздух вблизи ее острия ионизируется. В сильном электрическом поле образовавшиеся ионы и острие оказываются заряженными одинаково и отталкиваются».

Мы решили исследовать этот процесс и попробовать его объяснить. Вертушку сделали из медной проволоки диаметром 1 мм с лаковой изоляцией. Для усиления эффекта электрофорную машину заменили высоковольтным преобразователем «Разряд-1», так что на вертушку теперь подавалось напряжение 5000 В. Вот что у нас получилось.

Прежде всего, опыты показали, что скорость вращения вертушки зависит от взаимного расположения вертушки и провода, которым она подсоединялась к преобразователю. При некотором их взаимном расположении вертушка совсем не вращалась.

Поставив вертушку на середину дна ведра, подводящий провод расположили вплотную к его дну и стенке и с помощью гальванометра измеряли ток, текущий через вертушку. Оказалось, что величина тока при подключении вертушки и к «минусу», и к «плюсу» преобразователя не превышала 1 мкА и возникал некий запирающий эффект.

Шарик, предварительно заряженный отрицательно от эбонитовой палочки, потертой о шерсть, подключали к электрометру и опускали в зону вертушки. В случае подключения вертушки к «минусу» был обнаружен отрицательный заряд, а в другом случае – положительный.

Вертушка начинала вращаться, если ее ставили на дно банки из-под селедки, – запирающий эффект ослабевал.

Подсоединили ведро и вертушку к разным борнам преобразователя. Независимо от знаков на ведре и на вертушке, частота вращения вертушки возросла до 35–40 об/с (измеряли стробоскопом). При этом резко возрос и ток – он оказался более 20 мкА, а при изменении знака на вертушке гальванометр фиксировал изменение направления тока.

Эти опыты, казалось, и подтверждали ионный механизм вращения вертушки, и противоречили ему.

Затем мы решили провести опыты под колоколом вакуумной тарелки. При понижении давления в воздухе должен появиться тлеющий разряд, по форме которого можно определить характер движения электронов и ионов. От запирающего эффекта мы избавились, прилепив пластилином к внутренней стороне колокола по его окружности алюминиевую фольгу, кото-

рую проволочкой соединили с одним из электродов тарелки, а иглу с вертушкой укрепили на брусках в середине тарелки.

С помощью вакуумного насоса начали откачивать воздух из-под колокола, и при давлении около 0,3 атм появился тлеющий разряд. Наши ожидания полностью оправдались. Наблюдаемая форма канала тлеющего разряда позволила убедиться в том, что при «минусе» на вертушке с торцов концов вертушки срывается поток электронов, движущихся по параболе к фольге, а при изменении полярности электронные пучки вырываются из фольги и также по параболе летят к торцам концов вертушки. Особенно отчетливо это наблюдалось в момент включения преобразователя.

Все эти эксперименты снимались видеокамерой, что позволяло проводить просмотр в режиме паузы. Но, к сожалению, всей красоты наблюдаемых эффектов видеосъемка не дает.

Однако на этом мы не остановились.

Прикрепив пластилином к фольге по окружности гвоздики, острыми к центру вертушки на ее высоте, мы создали резко неоднородное поле и повторили весь эксперимент. В этом случае вышеописанные эффекты выглядели еще убедительнее и красивее. Для большей наглядности мы «застопорили» вертушку пластилиновым столбиком и получили возможность без помех разглядывать форму канала тлеющего разряда.

Затем мы повесили на иглу прямую проволочку и опять повторили весь эксперимент. Проволочка не вращалась, хотя мы и пытались вывести ее из состояния покоя, резко поворачивая тарелку. Возникла мысль, что вращение происходит за счет электронных пучков. Однако, когда под колоколом тарелки было создано разрежение на пределе возможностей насоса и были повторены опыты, оказалось, что вертушка не вращается! Небольшое свечение остатков газа явно говорило о том, что электронные пучки как шли, так и идут. Следовательно, вращение вертушки происходит не за счет электронных пучков?

Мы осторожно начали впускать под колокол воздух – при давлении около 0,1–0,12 атм вращение вертушки возобновилось. Значит, ее заставляют вращаться ионы?

И еще один опыт. Проволочку вблизи концов загнули кольцами в противоположных направлениях, причем

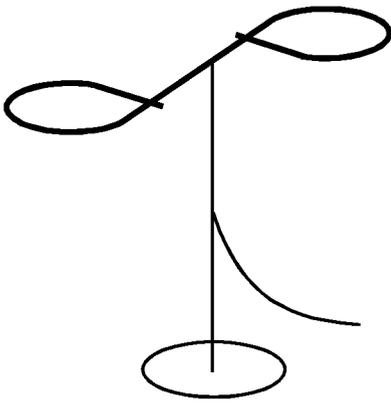


Рис. 2

так, чтобы концы упирались в проволочку (рис.2). При подаче на такую вертушку как «плюса», так и «минуса» вращение происходило против часовой стрелки. Но если концы колец не упираются в проволочку, вертушка при любом знаке вращается по часовой стрелке.

Затем мы провели серию наблюдений за поведением вертушки в ведре, заполненном водой или компрессорным маслом, при условии что вертушка и ведро подключались к разным борнам преобразователя.

Оказалось, что в воде вертушка не вращалась. Возможно, это связано с тем, что относительная диэлектрическая проницаемость воды равна 81 и напряжение, равное 5000 В в воздухе, превращается в воде в 60 В. Для проверки мы поставили вертушку в пустое ведро и подали напряжение 44 В – вертушка не вращалась.

Относительная диэлектрическая проницаемость масла всего 2,5. В масле вертушка вращалась, правда весьма медленно, так как велико механическое сопротивление движению. Вблизи концов вертушки возникало свечение, образовывался канал пузырьков (масло кипело) и наблюдалось движение масла от торцов концов вертушки.

И тут появилась идея. Похоже, что механизм вращения вертушки тот же, что и у проточного воздушного реактивного двигателя. В нем набегающий поток воздуха нагревается в камере сгорания, с большой скоростью выбрасывается из сопла и создает реактивную силу. У вертушки роль «камеры сгорания» играет электрический ток, который «разогревает» нейтральные молекулы, в результате чего их импульсы возле торцов концов вертушки возрастают – и вертушка вращается. Приток новых молекул обеспечивает окружающая среда.

(Похожий механизм вращения – и у крыльчатки радиометра, но там нагревание воздуха происходит за счет излучения, а разность скоростей движения молекул возникает за счет различия температур зачерненной и блестящей сторон крыльчатки.)

Чтобы убедиться в правильности нашего предположения, надо было нагреть воздух возле торцов концов вертушки, не подключая ее к преобразователю, и посмотреть, будет ли вертушка вращаться. Горящие свечи не помогли. Тогда между электродами, расположенными в вертикальной плоскости и подключенными к пре-

образователю, создали искровой разряд и в его зону поместили конец вертушки. Вращение началось, но ... происходило оно исключительно за счет электростатического взаимодействия, порожденного электростатической индукцией.

При этом выяснилось, что если торцы вертушки обработать напильником, чтобы они не имели заострений, вертушка все равно вращается.

Пробовали подавать переменное напряжение с выходной обмотки трансформатора преобразователя – вертушка вращалась. А как красиво выглядел этот опыт при возникновении тлеющего разряда!

Итак, пора делать выводы.

Во-первых, для вращения вертушки не является необходимым ни заострение ее концов, ни подключение к источнику постоянного напряжения.

Во-вторых, весьма вероятно, что вращение вертушки происходит за счет нескомпенсированного импульса газовых молекул, взаимодействующих с вертушкой. Большой импульс имеют молекулы газа, нагревающегося в зоне канала электрического разряда, вблизи торцов концов вертушки.

В-третьих, электрический ток в этих опытах оказывается необходимым и наиболее удобным средством нагревания среды.

Однако осталось сомнение: может быть, при вращении вертушки имеет место и ионный механизм, и тепловый? Но в какой пропорции?..

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Неравенство Караматы

Д.НОМИРОВСКИЙ

В СТАТЬЕ О.ИЖБОЛДИНА И Л.КУРЛЯНДИЧКА (см. с.7) «Неравенство Иенсена» рассказывается о неравенствах, связанных с выпуклыми функциями. Читателям, впервые сталкивающимся с выпуклыми функциями, необходимо с ней ознакомиться. А здесь речь пойдет об одном замечательном приеме, который можно эф-

фективно применять при доказательстве неравенств.

Формулировка неравенства Караматы

Определение. Пусть даны два упорядоченных набора из n действительных чисел

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n),$$

для которых $a_i \geq a_{i+1}, b_i \geq b_{i+1}$ при $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Мы будем говорить, что набор \mathbf{a} мажорирует набор \mathbf{b} , и писать $\mathbf{a} > \mathbf{b}$, если

$$\begin{cases} a_1 \geq b_1, \\ a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2, \\ \dots \\ a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \geq b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}, \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n. \end{cases} \quad (1)$$

Теорема. Для любой выпуклой функции $y = f(x)$, определенной на некотором промежутке I , и любых двух наборов чисел $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ из этого промежутка, удовлетворяющих условию $\mathbf{a} > \mathbf{b}$,

справедливо неравенство

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n). \quad (2)$$

Это неравенство и называется неравенством Караматы ¹.

Связь с другими неравенствами

Отметим, что неравенство Караматы является обобщением неравенства Йенсена. Действительно, положив $b_1 = b_2 = \dots = b_n = \bar{a}$, где \bar{a} – среднее арифметическое чисел a_1, \dots, a_n , получаем

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq nf\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right). \quad (3)$$

Упражнение 1. Докажите, что для наборов (a_1, \dots, a_n) , $(\bar{a}, \dots, \bar{a})$ выполняются условия (1).

А это значит, что из неравенства Караматы следуют классические неравенства Коши, Коши – Буняковского, Гельдера, Минковского и т.д.

Правда, в статье О.Ижболдина и Л.Курляндчика для доказательства этих неравенств применялось «весовое» неравенство Йенсена

$$\frac{m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + \dots + m_k f(x_k)}{m_1 + m_2 + \dots + m_k} \geq f\left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_k x_k}{m_1 + m_2 + \dots + m_k}\right), \quad m_i > 0, \quad (4)$$

а мы получили лишь его частный случай $m_i = 1$. Впрочем, это не так страшно, поскольку из (3) несложно получить (4). В случае $m_i \in \mathbf{N}$ необходимо в наборе a_1, \dots, a_n первые m_1 переменных взять равными x_1 , следующие m_2 равными x_2 , и т.д. Далее необходимо расширить множество, из которого выбираются числа m_i , до \mathbf{Q}^+ , а потом (если вы знакомы с теорией пределов) и до \mathbf{R}^+ . Кстати, аналогично можно получить и «весовое» неравенство Караматы (см. далее упражнение 5).

Упражнение 2. Докажите неравенство (4) для произвольных действительных чисел $m_i > 0$.

Применение в задачах

Задача 1. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n \in [-\pi/6; \pi/6]$. Докажите,

¹ Йован Карамата (1902–1967) – югославский математик, академик. Его основные труды относятся к теории рядов Фурье; он внес также значительный вклад в развитие математической статистики. Утверждение, аналогичное приведенной теореме, было независимо доказано Харди, Литтлвудом, Поля.

что

$$\cos(2x_1 - x_2) + \cos(2x_2 - x_3) + \dots + \cos(2x_n - x_1) \leq \cos x_1 + \dots + \cos x_n.$$

Решение. Поскольку функция $\cos x$ вогнута на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$, то достаточно проверить выполнение условий (1) для наборов $(2x_1 - x_2, \dots, 2x_n - x_1)$ и (x_1, x_2, \dots, x_n) . Упорядочив их, получим наборы

$$\mathbf{a}: 2x_{m_1} - x_{m_1+1} \geq 2x_{m_2} - x_{m_2+1} \geq \dots \geq 2x_{m_n} - x_{m_n+1} \quad (5)$$

(при этом считаем, что $x_{n+1} = x_1$) и

$$\mathbf{b}: x_{k_1} \geq x_{k_2} \geq \dots \geq x_{k_n}. \quad (6)$$

Заметим, что

$$2x_{m_1} - x_{m_1+1} \geq 2x_{k_1} - x_{k_1+1} \geq x_{k_1}, \\ (2x_{m_1} - x_{m_1+1}) + (2x_{m_2} - x_{m_2+1}) \geq (2x_{k_1} - x_{k_1+1}) + (2x_{k_2} - x_{k_2+1}) \geq x_{k_1} + x_{k_2}.$$

Аналогично, сумма *первых* l слагаемых набора \mathbf{a} не меньше суммы *любых* l слагаемых этого же набора. В частности, она не меньше, чем $|x_{k_1} - x_{k_1+1}| + \dots + |x_{k_l} - x_{k_l+1}|$, а эта сумма не меньше, чем $x_{k_1} + x_{k_2} + \dots + x_{k_l}$ (убедитесь в этом). Итак, $\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$.

Задача 2. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n – положительные числа. Докажите, что

$$\frac{a_1^3}{a_2} + \frac{a_2^3}{a_3} + \dots + \frac{a_n^3}{a_1} \geq a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2.$$

Решение. Выполним замену $x_i = \ln a_i$ и перепишем неравенство в виде

$$e^{3x_1 - x_2} + e^{3x_2 - x_3} + \dots + e^{3x_n - x_1} \geq e^{2x_1} + e^{2x_2} + \dots + e^{2x_n}.$$

Далее решение аналогично рассуждениям предыдущей задачи при

$$f(x) = e^x,$$

$$\mathbf{a} = (3x_1 - x_2, 3x_2 - x_3, \dots, 3x_n - x_1),$$

$$\mathbf{b} = (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n).$$

Задача 3 (Турнир городов, 1994 г.). Пусть a_1, a_2, \dots, a_n – положительные числа. Докажите, что

$$(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \dots \cdot (1 + a_n) \leq \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right) \cdot \left(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right).$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$\ln(a_1^2 + a_1) + \dots + \ln(a_n^2 + a_n) \leq \ln(a_1^2 + a_2) + \dots + \ln(a_n^2 + a_1).$$

Функция $\ln x$ вогнута, поэтому осталось проверить справедливость условий (1) для наборов $(a_1^2 + a_1, \dots, a_n^2 + a_n)$ и $(a_1^2 + a_2, a_2^2 + a_3, \dots, a_n^2 + a_1)$, что делается аналогично задаче 1. Если упорядочить числа $a_i: a_{k_1} \geq a_{k_2} \geq \dots \geq a_{k_n}$, то наборы упорядочатся следующим образом:

$$a_{k_1}^2 + a_{k_1} \geq a_{k_2}^2 + a_{k_2} \geq \dots \geq a_{k_n}^2 + a_{k_n}, \\ a_{m_1}^2 + a_{m_1+1} \geq a_{m_2}^2 + a_{m_2+1} \geq \dots \geq a_{m_n}^2 + a_{m_n+1}.$$

И неравенства системы (1), очевидным образом, следуют из $a_{k_1} > a_{k_2} > \dots > a_{k_n}$. Действительно,

$$a_{k_1}^2 + a_{k_1} \geq a_{m_1}^2 + a_{k_1} \geq a_{m_1}^2 + a_{m_1+1}, \\ a_{k_1}^2 + a_{k_1} + a_{k_2}^2 + a_{k_2} \geq a_{m_1}^2 + a_{k_1} + a_{m_2}^2 + a_{k_2} \geq a_{m_1}^2 + a_{m_1+1} + a_{m_2}^2 + a_{m_2+1}.$$

Отметим, что для решения этой задачи можно было выбрать и другую функцию, а именно $f(x) = \ln(1 + e^x)$ на наборах $\mathbf{a} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{b} = (2x_1 - x_2, 2x_2 - x_3, \dots, 2x_n - x_1)$, где $x_i = \ln a_i$.

Задача 4 (Всероссийская олимпиада, 1975 г.). Пусть a, b, c – положительные числа. Докажите, что

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b.$$

Решение. В силу симметрии неравенства будем считать, что $a \geq b \geq c$. Подобно задаче 2, введем замену $x = \ln a, y = \ln b, z = \ln c$ и перепишем неравенство в виде

$$e^{3x} + e^{3y} + e^{3z} + e^{x+y+z} + e^{x+y+z} + e^{x+y+z} \geq e^{2x+y} + e^{2x+z} + e^{2y+x} + e^{2y+z} + e^{2z+x} + e^{2z+y}.$$

Докажем, что набор $(3x, 3y, 3z, x + y + z, x + y + z, x + y + z)$ мажорирует $(2x + y, 2x + z, 2y + x, 2y + z, 2z + x, 2z + y)$, откуда и будет следовать решение. Упорядочим оба набора. Ясно, что $3x \geq x + y + z \geq 3z$. Предположим, что $x + y + z \geq 3y$ (случай $3y \geq x + y + z$ рассматривается анало-

гично). Тогда, очевидно, выполняются следующие неравенства:

$$3x \geq x + y + z \geq 3y \geq 3z,$$

$$2x + y \geq 2x + z \geq 2y + x \geq$$

$$\geq 2z + x \geq 2y + z \geq 2z + y,$$

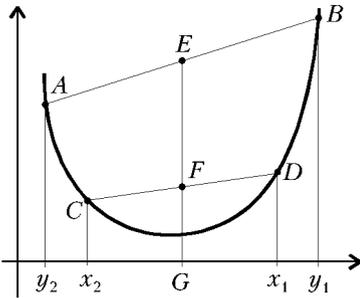
откуда следует справедливость условий (1).

Доказательство неравенства Караматы

Предварительно докажем следующие леммы.

Лемма 1 (про четыре точки). *Если f – выпуклая функция и $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ ($y_1 \geq x_1 \geq x_2 \geq y_2$), то $f(y_1) + f(y_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$.*

Утверждение леммы фактически очевидно (хотя строгое аналитическое доказательство требует некоторой возни). Действительно, отрезок AB находится выше CD , а следовательно, и середина отрезка AB – точка E –



находится выше точки F – середины CD , что и является утверждением леммы, поскольку

$$EG = (f(y_1) + f(y_2))/2,$$

$$FG = (f(x_1) + f(x_2))/2.$$

Определение. *Раздвиганием набора (x_1, \dots, x_n) будем называть одновременное увеличение x_i и уменьшение x_j с сохранением их суммы ($x_i \geq x_j$).*

Лемма 1 утверждает, что при раздвигании набора величина $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$ не убывает. Этот факт сам по себе представляет полезный инструмент доказательства неравенств (см., например задачу М1272).²

Будем считать исходный набор упорядоченным. Покажем, что всякий полученный из него раздвиганием и упорядочиванием набор мажорирует исходный. Если при раздвигании порядок не нарушается, утверждение

очевидно. Рассмотрим пример, когда порядок нарушается.

Пусть есть упорядоченный набор (8, 6, 5, 4). Раздвигание чисел 5 и 4 переводит его в неупорядоченный набор (8, 6, 9, 0). Последующее упорядочивание дает набор (9, 8, 6, 0), который мажорирует исходный. Однако эту процедуру можно заменить цепочкой раздвиганий, сохраняющих порядок:

$$(8,6,5,4) \Rightarrow (8,6,6,3) \Rightarrow$$

$$(8,8,6,1) \Rightarrow (9,8,6,0).$$

На первом этапе раздвигались последние два числа, на втором – второе и четвертое, на третьем – первое и четвертое. С другой стороны, на каждом этапе упорядоченность не менялась и поэтому

$$(9,8,6,0) \succ (8,8,6,1) \succ (8,6,6,3) \succ (8,6,5,4).$$

Оказывается, что и в общем случае всякое раздвигание с последующим упорядочиванием можно заменить цепочкой раздвиганий, сохраняющих порядок (это можно доказать по индукции).

Лемма 2 (Карамата, Харди, Литлвуд, Пойа). *От набора $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ с помощью последовательных раздвиганий можно перейти к набору $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$.*

Доказательство. *Необходимость условия $\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$ очевидна. Действительно, переходя от $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ к $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, после каждого раздвигания получаем набор, мажорирующий предыдущий, а значит, и исходный набор $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$.*

Достаточность. Докажем, что если $\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$, то от набора $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ можно перейти к $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$. Доказательство проведем индукцией по числу переменных набора.

1. $n = 1$. Утверждение очевидно.
 2. Пусть для любого $k, 1 \leq k \leq n - 1$, доказано, что при выполнении условия $(a_1, \dots, a_k) \succ (b_1, \dots, b_k)$ от набора (b_1, \dots, b_k) можно с помощью раздвиганий перейти к (a_1, \dots, a_k) . Докажем это утверждение для $k = n$. В наборе (b_1, \dots, b_n) будем непрерывно раздвигать b_1, b_n (b_1 – максимальное число набора, b_n – минимальное). Тогда правые части всех неравенств системы (1) будут расти, а значит, в некоторый момент какое-то неравенство превратится в равенство

$$a_1 + a_2 + \dots + a_l = b_1^* + b_2 + \dots + b_l,$$

где b_1^* – новое положение переменной b_1 .

Учитывая это равенство, сделаем в системе (1) очевидные сокращения:

$$\begin{cases} a_1 \geq b_1^*, \\ a_1 + a_2 \geq b_1^* + b_2, \\ \dots \\ a_1 + \dots + a_l = b_1^* + b_2 + \dots + b_l \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} a_{l+1} \geq b_{l+1}, \\ a_{l+1} + a_{l+2} \geq b_{l+1} + b_{l+2}, \\ \dots \\ a_{l+1} + \dots + a_n = b_{l+1} + b_{l+2} + \dots + b_n^*. \end{cases}$$

По предположению индукции от набора $\mathbf{b}' = (b_1^*, \dots, b_l)$ можно перейти к $\mathbf{a}' = (a_1, \dots, a_l)$ и от $\mathbf{b}'' = (b_{l+1}, b_{l+2}, \dots, b_n^*)$ к $\mathbf{a}'' = (a_{l+1}, \dots, a_n)$ (поскольку $\mathbf{a}' \succ \mathbf{b}'$ и $\mathbf{a}'' \succ \mathbf{b}''$), при этом весь набор (b_1, \dots, b_n) перейдет в (a_1, \dots, a_n) . Лемма доказана.

Теперь неравенство Караматы очевидно. С помощью раздвиганий от набора (b_1, \dots, b_n) перейдем к (a_1, \dots, a_n) (лемма 2), при этом на каждом раздвигании сумма $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$ возрастает (лемма 1).

Упражнения

3 (из задач Соросовских олимпиад). Докажите неравенство

$$\frac{xy}{z^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{zy}{x^2} \geq \sqrt{\frac{xy}{z^2}} + \sqrt{\frac{xz}{y^2}} + \sqrt{\frac{zy}{x^2}},$$

где $x, y, z > 0$.

4 (М506). Пусть a, b, c, d – положительные числа. Докажите, что

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd &\geq \\ &\geq a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2. \end{aligned}$$

5. Докажите «весовое» неравенство Караматы

$$\begin{aligned} m_1f(x_1) + m_2f(x_2) + \dots + m_kf(x_k) &\geq \\ &\geq m_1f(y_1) + m_2f(y_2) + \dots + m_kf(y_k) \end{aligned}$$

для упорядоченных наборов (x_1, x_2, \dots, x_n) и (y_1, y_2, \dots, y_n) , удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{cases} m_1x_1 \geq m_1y_1, \\ m_1x_1 + m_2x_2 \geq m_1y_1 + m_2y_2, \\ \dots \\ m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_{n-1}x_{n-1} \geq \\ \geq m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_{n-1}y_{n-1}, \\ m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n = \\ = m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_ny_n \end{cases}$$

при $m_i \in \mathbf{R}^+$.

² В олимпиадном сленге этот прием, за его прямолинейность и универсальность, называют «дубиной».

LXIII Московская математическая Олимпиада

Математический праздник

6 класс

1. В записи $*1*2*4*8*16*32*64 = 27$ вместо знаков «*» поставьте знаки «+» или «-» так, чтобы равенство стало верным.

А. Митягин

2. В квадрате 7×7 клеток закрасьте некоторые клетки так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось ровно по 3 закрашенных клетки.

А. Митягин

3. Шифр кодового замка – двузначное число. Буратино забыл код, но помнит, что сумма цифр этого числа, сложенная с их произведением, равна самому числу. Напишите все возможные варианты кода, чтобы Буратино смог открыть замок.

А. Митягин, В. Клепцын

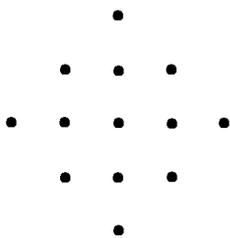


Рис. 1

4. Зачеркните все 13 точек, изображенных на рисунке 1, пятью отрезками, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя никакую линию дважды.

Фольклор

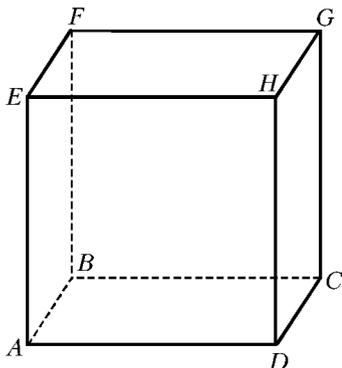


Рис. 2

5. В одной из вершин куба $ABCDEFGH$ (рис.2) сидит заяц, но охотникам он не виден. Три охотника стреляют одновременно, при этом они могут «поразить» любые три вершины куба. Если они не попадают в зайца, то до следующего залпа заяц перебегает в одну из трех соседних (по ребру) вершин куба. Укажите, как стрелять охотникам, чтобы обязательно попасть в зайца за четыре залпа.

А. Спивак

7 класс

1. См. задачу 2 для 6 класса.
2. Карлсон написал дробь $\frac{10}{97}$. Малыш может:

1) прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно;

2) умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число.

Сможет ли Малыш с помощью этих действий получить дробь,

а) равную $\frac{1}{2}$; б) равную 1?

В. Клепцын

3. Дан прямоугольный треугольник (рис.3). Приложите к нему какой-нибудь треугольник (эти треугольники должны иметь общую сторону, но

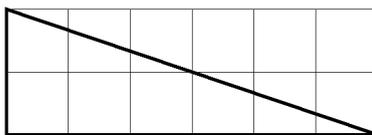


Рис. 3

не должны перекрываться даже частично) так, чтобы получился треугольник с двумя равными сторонами.

Укажите (нарисуйте!) несколько различных решений.

А. Шень

4. Может ли произведение двух последовательных натуральных чисел равняться произведению двух последовательных (положительных) четных чисел?

В. Произволов

5. В вершинах куба $ABCDEFGH$ (см. рис.2) расставлены натуральные

числа так, что числа в соседних (по ребру) вершинах отличаются не более чем на единицу. Докажите, что найдутся две противоположные вершины (такие, как, например, A и G), числа в которых отличаются не более чем на единицу.

Г. Гальперин

Избранные задачи для старших классов

1. В выборах в 100-местный парламент участвовали 12 партий. В парламент проходили партии, за которые проголосовало строго больше 5% избирателей. Между прошедшими в парламент партиями места распределяются пропорционально числу набранных ими голосов (т.е. если одна из партий набрала в x раз больше голосов, чем другая, то и мест в парламенте она получит в x раз больше). После выборов оказалось, что каждый избиратель проголосовал ровно за одну из партий (недействительных бюллетеней, голосов «против всех» и т.п. не было) и каждая партия получила целое число мест. При этом партия любителей математики набрала 25% голосов. Какое наибольшее число мест в парламенте она могла получить? (8)¹

И. Яценко

2. Длины оснований трапеции равны m и n (m и n – натуральные числа, $m \neq n$). Докажите, что трапецию можно разрезать на равные треугольники. (8)

А. Шаповалов

3. В треугольнике ABC длина медианы BM равна длине стороны AC . На продолжениях сторон BA и AC выбраны точки D и E соответственно так, что выполняются равенства $AD = AB$ и $CE = CM$ (рис.4). Докажите, что прямые DM и BE перпендикулярны. (8)

Р. Женодаров

4. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вы-

¹ В скобках после условия задачи указан класс, в котором она предлагалась.

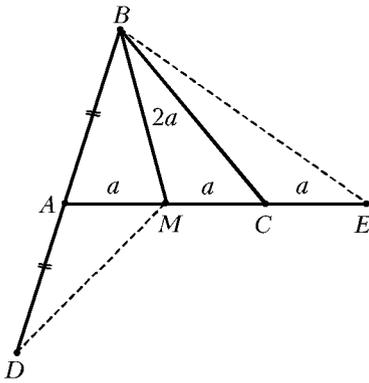


Рис. 4

нимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет ее в то же место колоды. Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх, как бы ни действовал Петя. (8)

А. Шаповалов

5. Дана окружность и точка A внутри нее. Найдите геометрическое место вершин C всевозможных прямоугольников $ABCD$, где точки B и D лежат на окружности. (9)

М. Панов

6. Гриша записал в клетки шахматной доски числа $1, 2, 3, \dots, 63, 64$ в некотором порядке. Он сообщил Леше сумму чисел в каждом прямоугольнике из двух клеток и добавил, что 1 и 64 лежат на одной диагонали. Докажите, что по этой информации Леша может определить, в какой клетке какое число записано. (9)

А. Шаповалов

7. $ABCD$ – выпуклый четырехугольник. Окружности, построенные на отрезках AB и CD как на диаметрах, касаются внешним образом в точке M , отличной от точки пересечения диагоналей четырехугольника. Окружность, проходящая через точки A, M и C , вторично пересекает прямую, соединяющую точку M и середину AB , в точке K , а окружность, проходящая через точки B, M и D , вторично пересекает ту же прямую в точке L . Докажите, что $|MK - ML| = |AB - CD|$. (9, 10)

И. Шарыгин

8. На графике функции $y = 1/x$, $x > 0$, взяты точки A и B . Из них опущены перпендикуляры на ось абсцисс, основания перпендикуляров – H_A и H_B , O – начало координат. Докажите, что площадь фигуры, ограниченной отрезками OA и OB и дугой AB , равна площади фигуры, ограни-

ченной отрезками AH_A , BH_B , осью абсцисс и дугой AB . (10)

Р. Анно, В. Кириченко

9. Пусть

$$f(x) = x^2 + 12x + 30.$$

Решите уравнение

$$f(f(f(f(f(x)))))) = 0.$$

(10)

М. Евдокимов

10. На клетчатой бумаге нарисован выпуклый многоугольник так, что все его вершины находятся в вершинах клеток и ни одна из его сторон не идет по вертикали или горизонтали. Докажите, что вертикальные отрезки линий сетки, заключенные внутри многоугольника, имеют такую же сумму длин, как и горизонтальные. (10)

Г. Гальперин

11. Наибольший общий делитель (НОД) натуральных чисел m и n равен 1 . Каково наибольшее возможное значение НОД чисел $n + 2000m$ и $m + 2000n$? (11)

С. Злобин

12. Вычислите

$$\int_0^{\pi} (|\sin 1999x| - |\sin 2000x|) dx.$$

(11)

Фольклор

13. У Феди есть три палочки. Если из них нельзя сложить треугольник, Федя укорачивает самую длинную из палочек на сумму длин двух других. Если длина палочки не обратилась в ноль и треугольник снова нельзя сложить, то Федя повторяет операцию, и т.д. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно? (11)

А. Шаповалов

14. В круговом шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым один раз. Назовем партию неправильной, если выигравший ее шахматист в итоге набрал очков меньше, чем проигравший. (Победа дает 1 очко, ничья – $1/2$, поражение – 0 .)

Могут ли неправильные партии составлять

а) более 75% общего количества партий в турнире;

б) более 70%?

(11)

С. Токарев

15. Можно ли так расположить бесконечно много равных выпуклых многогранников в слое, ограниченном дву-

мя параллельными плоскостями, чтобы ни один многогранник нельзя было вынуть из слоя, не сдвигая остальных? (11)

А. Канель

Избранные задачи отбора на Российскую олимпиаду

1. Можно ли разрезать круг на 7 равновеликих частей тремя прямолинейными разрезами? (9)

Н. Келин

2. Пусть $S(n)$ обозначает сумму цифр натурального числа n . Решите уравнение:

$$S(n^4) = S^4(n).$$

(9)

А. Канель

3. Четырехугольник $ABCD$ – вписанный, K – середина той дуги AD , где нет других вершин четырехугольника. Пусть X и Y – точки пересечения прямых BK и CK с диагоналями. Докажите, что XY параллельна AD . (9)

В. Доценко

4. Треугольник ABC разбит на 6 треугольников биссектрисами AD, BE, CF с точкой пересечения O . В каждый из них вписана окружность. Четыре из этих окружностей равны. Докажите, что треугольник ABC равносторонний. (10)

В. Сендеров

5. Раскраска вершин графа называется *правильной*, если любые две соседние вершины имеют разные цвета. Докажите, что для каждого данного графа число способов правильной раскраски в k цветов есть многочлен от k . (10)

В. Доценко

6. Непрерывная функция $f(x)$ такова, что $f(f(x)) = -x^2$ при любом x . Докажите, что $f(x) \leq 0$ при любом x . (11)

Б. Френкин

7. Куб с ребром целочисленной длины k разбит на единичные кубики, в некоторых из них стоят ладьи (они могут ходить параллельно любому ребру куба). Расстановку ладей назовем *плотной*, если ладья не бьет друг друга и их k^2 штук. Пусть дан куб C с ребром длины 2^n и плотная расстановка ладей в нем. В кубе C отмечена вершина A . Рассмотрим содержащиеся в C кубы с вершиной A , составленные из единичных кубиков и

имеющие плотную расстановку ладей (угловики). Каково наибольшее возможное число угловиков? (11)

А. Канель, Г. Кондаков

8. Дана последовательность чисел: $a_0 = 1$; $a_{k+1} = a_k + S(a_k)$, где $S(n)$ —

сумма цифр числа n . Докажите, что для бесконечно многих k

$$S(a_k) < \lg(\lg a_k)$$

(11)

А. Канель

9. Какое наименьшее число ребер может быть в графе с 2000 вершин, если среди любых 10 вершин хотя бы одна соединена с остальными 9? (11)

В. Сендеров

Публикацию подготовили В. Сендеров, Б. Френкин

Избранные задачи Московской физической олимпиады

Первый теоретический тур

7 класс

1. Вася и Олег проводили эксперименты по исследованию вытекания жидкости из цилиндрических сосудов. Для эксперимента они воспользовались двумя одинаковыми сосудами, содержащими одинаковые массы жидкости. Вася проделал небольшое отверстие в боковой стенке сосуда на высоте h от дна и измерил дальность полета струи жидкости. Олег сначала нагрел сосуд с жидкостью и обнаружил, что она расширилась, а затем повторил эксперимент, проделанный Васей. В каком из экспериментов дальность полета струи жидкости оказалась больше? Ответ обоснуйте. Сделайте поясняющий рисунок.

О. Овчинников

2. Неопытный велосипедист при трогании с места на двухколесном велосипеде «Кама» случайно нажал рычаг ручного тормоза, вследствие чего велосипед не поехал, а велосипедист упал. Сделайте схематичный рисунок велосипеда и укажите на нем направления сил трения, действовавших со стороны земли на переднее и заднее колеса во время попытки тронуться с места. У велосипеда «Кама» педали соединены цепью с задним колесом, а ручной тормоз заклинивает только переднее колесо.

О. Овчинников

3. В автомобильных аккумуляторных батареях обычно используется электролит, представляющий собой раствор серной кислоты в дистиллированной воде. Раствор готовится при помощи таблицы, которая отражает соотношение количеств кислоты и

воды, необходимое для получения одного литра электролита. При печатании таблицы был допущен типографский брак в ее первом столбце, в результате чего таблица приобрела следующий вид:

| Плотность электролита, г/л | Количество воды плотностью 1000 г/л | Количество серной кислоты плотностью 1830 г/л |
|----------------------------|-------------------------------------|---|
| 1,*** | 0,650 л | 0,423 л |

Восстановите число, которое должно стоять в первом столбце. Ответ обоснуйте.

О. Овчинников

4. В засушливое лето 1999 года самолет противопожарной службы произвел аэрофотосъемку резервных водоемов с водой в районе деревни Гаврилово. На снимке (рис.1) видны три неглубоких пруда. В момент съемки пруды содержали $V_1 = 200 \text{ м}^3$, $V_2 = 30 \text{ м}^3$ и $V_3 = 500 \text{ м}^3$ воды. Если погода не изменится, то какой из прудов

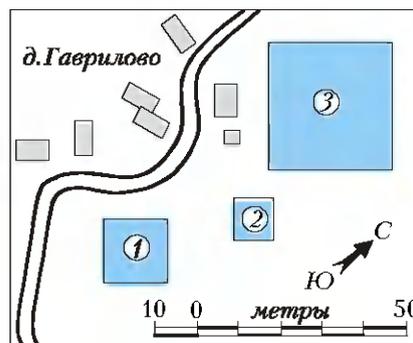


Рис. 1

пересохнет последним? Считать, что пруды имеют вертикальные стенки и плоское дно.

О. Овчинников

8 класс

1. К одному концу нити, перекинутой через блок, подвешен груз массой M , изготовленный из материала плотностью ρ_1 . Груз погружен в сосуд с жидкостью плотностью ρ_2 . К другому концу нити подвешен груз массой m

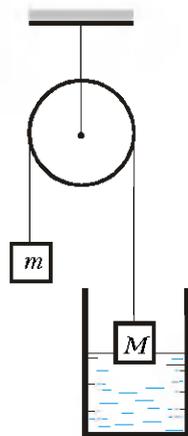


Рис. 2

(рис.2). При каких значениях m груз массой M в положении равновесия может плавать в жидкости?

О. Шведов

2. Через два неподвижных блока, находящихся на одной высоте, перекинута длинная легкая нить, к концам которой прикреплены два груза одной и той же массы (рис.3). Нить начинают медленно вытягивать вниз за точку, находящуюся посередине между блоками. График зависимости силы F , прикладываемой к нити, от смещения x этой точки приведен на рисунке 4.

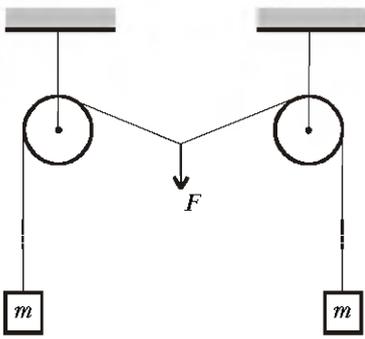


Рис. 3

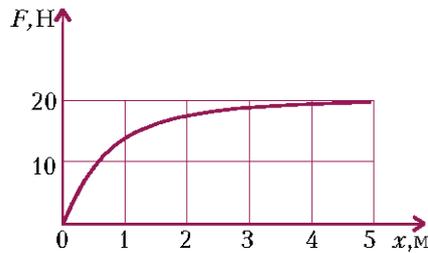


Рис. 4

Найдите приблизительно массу m каждого из грузов.

О.Шведов

3. В люстре 6 одинаковых лампочек. Она управляется двумя выключателями, имеющими два положения: «включено» и «выключено». От коробки с выключателями к люстре идут три провода. Лампочки в люстре либо: а) все не горят; б) все горят не в полный накал; в) три лампочки не горят, а три горят в полный накал. Нарисуйте возможные схемы электрической цепи.

С.Варламов

9 класс

1. Материальная точка движется вдоль прямой так, что график зависимости ее скорости v от координаты x представляет собой прямоугольник

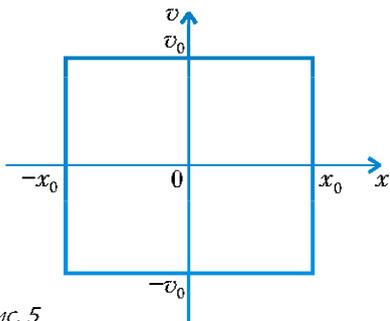


Рис. 5

(рис.5). Постройте для такого движения графики зависимостей скорости и координаты точки от времени.

М.Семенов

2. На одной стороне магнитофонной кассеты от начала до конца без перерывов записано $N = 45$ коротких песен

с продолжительностью звучания $\tau = 1$ мин каждая. Время быстрой перемотки ленты от начала до конца с постоянной угловой скоростью вращения ведущей оси равно $T_1 = 2$ мин 45 с. На какую песню мы попадем, если будем перемотывать ленту с самого начала вперед в течение $T_2 = 1$ мин 50 с? Для данной кассеты радиус оси с намотанной на нее всей лентой равен $R = 25$ мм, а без ленты – $r = 10$ мм.

С.Варламов

3. На гладком горизонтальном столе находится подставка массой $M = 2$ кг с закрепленным на ней невесомым блоком (рис.6). Через блок переброшена невесомая и нерастяжимая нить,

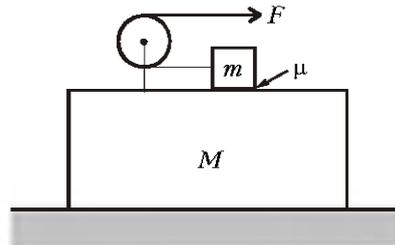


Рис. 6

один конец которой привязан к лежащему на подставке телу массой $m = 1$ кг. К свободному концу нити прикладывают силу $F = 10$ Н. Найдите ускорение подставки, если не касающиеся блока участки нити горизонтальны, а коэффициент трения между телом и подставкой $\mu = 0,3$.

А.Зильберман

4. Напряжение электрической сети в квартире составляет 220 В. Ученик 9 класса решил сделать елочную гирлянду. В своих запасах он отыскал одну лампочку на 36 В/40 Вт, 220 лампочек на 3,5 В/0,28 А и много соединительных проводов, сопротивление которых пренебрежимо мало. Какую цепь, включающую лампочку на 36 В и минимальное количество лампочек на 3,5 В, он должен собрать, чтобы все лампы в его гирлянде горели нормальным накалом? Считается, что лампа горит нормальным накалом, если падение напряжения на ней отличается от напряжения, на которое она рассчитана, не более чем на 1%.

С.Варламов

10 класс

1. Материальная точка движется вдоль прямой так, что график зависимости ее скорости v от координаты x при определенном выборе масштабов осей представляет собой окружность (рис.7). Постройте для такого движе-

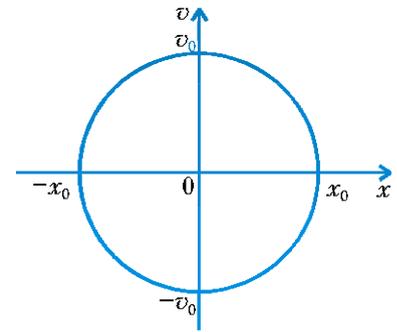


Рис. 7

ния графики зависимостей скорости и координаты точки от времени.

М.Семенов

2. Гонимый автомобиль имеет привод на все четыре колеса. Его двигатель выдает максимальную мощность $P = 60$ кВт при любой скорости движения. Пренебрегая сопротивлением воздуха, вычислите время разгона этого автомобиля от старта до скорости $v = 20$ м/с. Масса автомобиля $m = 1$ т, коэффициент трения между колесами и дорожным покрытием не зависит от скорости и равен $\mu = 0,6$.

П.Синило

3. Маленький проводящий шарик радиусом R висит на непроводящей нити над бесконечной проводящей плоскостью. Расстояние от центра шарика до плоскости L ($L \gg R$). Найдите емкость этой системы.

А.Селиверстов

11 класс

1. Шар массой $m = 1$ кг, прикрепленный к идеальной пружине жесткостью $k = 50$ Н/м, колеблется в вязкой среде. На рисунке 8 представлены графики зависимостей скорости от координаты и ускорения от скорости, соответствующие движению шара (начало координат выбрано в положении его равновесия). Начертите график зависимости силы вязкого трения, действующей на шар, от его скорости.

А.Якута

2. В вашем распоряжении имеются источник синусоидального напряжения с амплитудой U , соединительные провода и идеальный трансформатор с двумя обмотками, отношение чисел витков в которых равно 1:3. Найдите амплитуды напряжений, которые можно получить с помощью этого оборудования.

С.Варламов

3. Наблюдатель, находящийся в помещении на расстоянии $L = 3$ м от окна, покрытого снаружи множеством мелких водяных капель, видит на нем

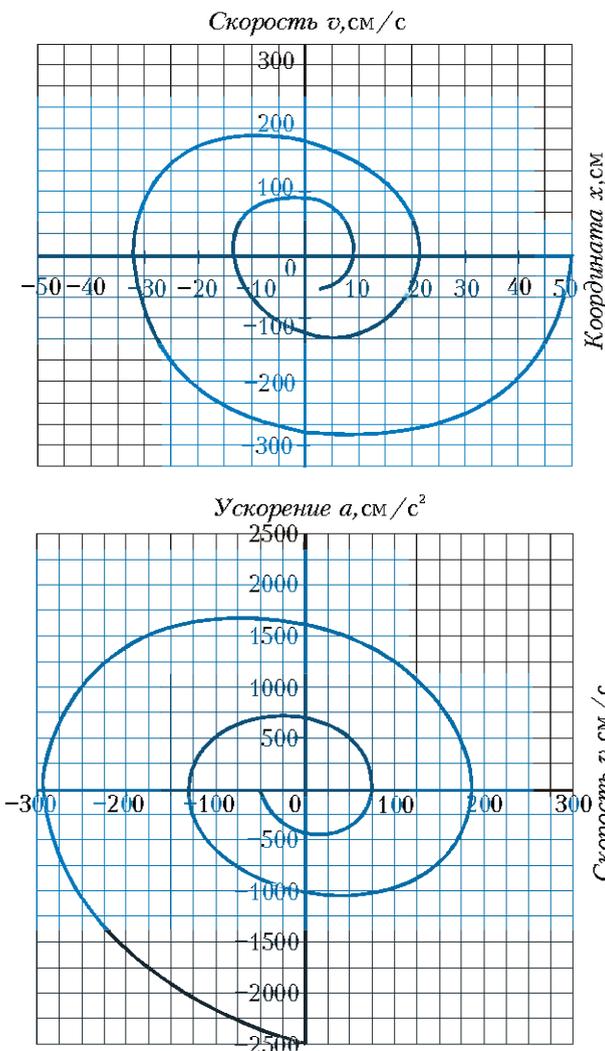


Рис. 8

светлое пятно радиусом $r = 10$ см от очень далекого фонаря, расположенного на одном уровне с наблюдателем. Определите, какой максимальный угол составляет поверхность капель с поверхностью стекла. Показатель преломления воды $n = 4/3$. Дифракцию света на каплях не учитывать.

Р.Компанец

4. Природный уран состоит на $n_1 = 0,7\%$ из изотопа ^{235}U и на $n_2 = 99,3\%$ из ^{238}U . По современным представлениям, все элементы тяжелее железа образовались при взрывах сверхновых звезд, а после этого из получившихся газопылевых облаков, в частности, образовались планеты. По-видимому, в этих выбросах всех изотопов урана было примерно поровну. Оцените, сколько лет назад произошел тот выброс вещества, из которого сформировалась наша Земля. Период полураспада, т.е. время, в течение которого число атомов данного изотопа уменьшается в 2 раза, для ^{235}U равно $T_1 = 7 \cdot 10^8$ лет,

а для $^{238}\text{U} - T_2 = 4,5 \cdot 10^9$ лет.

Д.Григорьев

Второй теоретический тур

8 класс

1. Вдоль железной дороги через каждые 100 м расставлены столбики с номерами 1, 2, ..., 10, 1, 2, ..., 10, ... Через 2 мин после того, как cabina машиниста равномерно движущегося поезда проехала столбик с цифрой 1, машинист увидел в окне столбик с цифрой 2. Через какое время после проезда этого столбика cabina машиниста может проехать мимо ближайшего столбика с цифрой 3? Скорость поезда меньше 100 км/ч.

О.Шведов

2. Ванна, одна из стенок которой представляет собой наклонную плоскость, заполнена водой плотностью ρ_v . В ванну медленно погружают длинный тонкий круглый карандаш, удерживая его нитью за верхний конец, который перемещают вниз вдоль наклонной

стенки (рис.9). Какая часть карандаша должна погрузиться в воду, чтобы

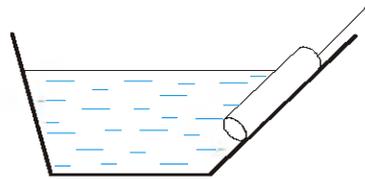


Рис. 9

нижний конец перестал касаться стенки? Плотность карандаша $\rho_k = 3/4 \rho_v$.

О.Шведов

3. Горячий суп, налитый доверху в большую тарелку, охлаждается до температуры, при которой его можно есть без риска обжечься, за время $t = 20$ мин. Через какое время можно будет есть суп с той же начальной температурой, если разлить его по маленьким тарелкам, которые также заполнены доверху и подобны большей? Известно, что суп из большой тарелки помещается в $n = 8$ маленьких и что количество теплоты, отдаваемое в единицу времени с единицы поверх-

ности каждой тарелки, пропорционально разности температур супа и окружающей среды.

М.Семенов

9 класс

1. В горизонтальном дне сосуда имеется прямоугольное отверстие размером $a \times b$. Его закрыли прямоугольным параллелепипедом со сторонами $b \times c \times c$ так, что одна из диагоналей грани $c \times c$ вертикальна (вид сбоку показан на рисунке 10). В сосуд медленно наливают жидкость плотностью

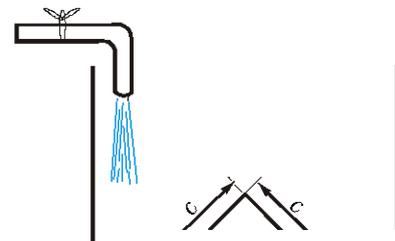


Рис. 10

ρ . Какова должна быть масса параллелепипеда M , чтобы он не всплывал при любом уровне воды? Силами трения и поверхностного натяжения пренебречь.

Д.Харабадзе

2. Куб массой M расположен на горизонтальной поверхности. К середине одного из верхних ребер куба прикреплен блок, через который перекинута нить с закрепленными на концах маленькими грузами массой m (рис.11). С какой силой F нужно толкать куб в горизонтальном направлении перпендикулярно ребру с блоком, чтобы грузы массой m не двигались относительно куба? Трение в блоке отсутствует, нить невесома и нерастя-

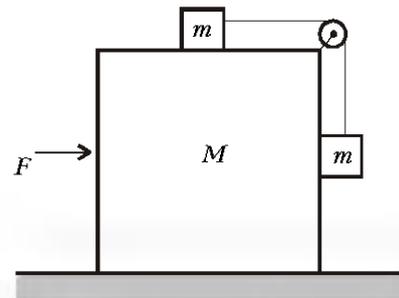


Рис. 11

жима, коэффициент трения между грузами и кубом, а также между кубом и поверхностью равен μ ($\mu < 1$). Движение куба считать поступательным.

Ю.Старокуров

3. На горизонтальном обледенев-

шем участке дороги лежит длинная доска массой M . На эту доску мальчик поставил радиоуправляемую модель автомобиля массой m , а затем, подав радиосигнал, включил двигатель автомобиля. Зная, что автомобиль движется вдоль доски с постоянной относительно нее скоростью v и что коэффициент трения доски о лед μ , найдите зависимость скорости автомобиля относительно дороги от времени.

В.Погожев

4. В электрической цепи, изображенной на рисунке 12, оцените

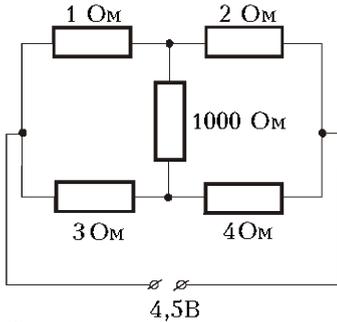


Рис. 12

ток через резистор сопротивлением 1000 Ом.

О.Шведов

10 класс

1. Шарик падает с некоторой высоты без начальной скорости на горизонтальную плоскость. Удары шарика о плоскость абсолютно упругие. За первые t секунд шарик прошел путь s . Сколько раз за это время он успел удариться о плоскость? Ускорение свободного падения равно g .

О.Шведов

2. Мальчик, запуская воздушного змея, бежит по горизонтальной поверхности навстречу ветру со скоростью u . Нить, привязанная к змею, сматывается с катушки, которую мальчик дер-

жит в руке. В некоторый момент времени нить, которую можно считать прямолинейной, составляет с горизонтом угол α , а змей поднимается вертикально вверх со скоростью v . Какова в этот момент времени скорость узелка на нити, который находится на расстояниях L от катушки и l от змея?

С.Варламов

3. Найдите КПД тепловой машины, цикл которой состоит из двух изохор и двух изобар (рис. 13), а рабочим телом является идеальный одноатомный газ. Середины нижней изобары и левой изохоры лежат на изотерме, соответствующей температуре T_1 , а середины

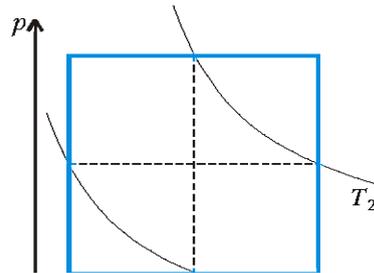


Рис. 13

верхней изобары и правой изохоры – на изотерме, соответствующей температуре T_2 .

Ю.Старокуров

4. Оцените с точностью не хуже 1% силу тока, текущего через резистор сопротивлением $1000R$ в электрической цепи, изображенной на рисунке 14.

О.Шведов

5. Точечный заряд, находящийся на расстоянии a от каждой из четырех вершин одной из граней сплошного незаряженного проводящего куба с длиной ребра a , притягивается к кубу с силой F . С какой силой этот же заряд

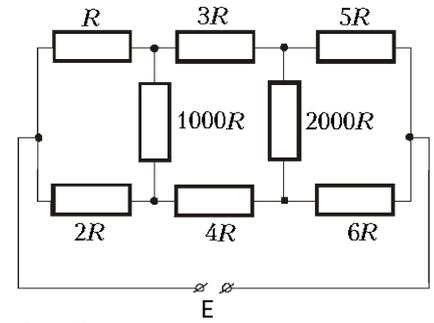


Рис. 14

будет притягиваться к сплошному проводящему кубу с длиной ребра b , если его разместить на расстоянии b от каждой из вершин одной из граней куба?

О.Шведов

11 класс

1. Ромб составлен из жестких стержней. Стержни скреплены на концах шарнирами. В начальный момент два противоположных шарнира находятся рядом (очень близко) и имеют нулевые скорости. Один из этих шарниров закреплен. Второй начинают двигать с постоянным ускорением a . Найдите величину ускорения остальных шарниров ромба в тот момент, когда ромб превратится в квадрат, если все стержни двигаются, оставаясь в одной плоскости.

С.Варламов

2. Трубка длиной L с постоянным внутренним сечением в форме круга радиусом R ($R \ll L$) свернута в кольцо. Кольцо неподвижно, а его ось горизонтальна. В трубку залили невязкую жидкость, объем которой $V < \pi R^2 L$. Каков период малых колебаний жидкости вблизи положения равновесия? Ускорение свободного падения равно g .

С.Варламов

Публикацию подготовили
М.Семенов, А.Якута

IV Международная астрономическая олимпиада

Очередная международная астрономическая олимпиада школьников прошла с 25 сентября по 2 октября 1999 года в поселке Научный на базе Крымской лаборатории ГАИШ МГУ, Крымской астрофизической обсерватории и Астрономического отделения Малой академии наук Крыма. В олимпиаде приняли участие 40 школьников, представлявших 7 национальных команд (Болгарии, Бразилии, Индии, Крыма, Москвы, России и Украины), а также наблюдатель из Швеции (представитель Правления

Задачи олимпиады
Теоретический тур

Перед условием задач было написано: «Для решения каждой задачи вы можете пользоваться константами и

Европейской ассоциации астрономического образования). Кроме официальных команд в олимпиаде вне конкурса выступили еще восемь школьников из России.

Олимпиада включала в себя три тура: теоретический, практический и наблюдательный. Для проведения теоретического тура школьники были разделены на две возрастные группы: 8–10 классы (до 16 лет) и 11–12 классы (до 18 лет). Официальными языками олимпиады были русский и английский – на этих языках оргкомитет подготовил задания, а перед турами руководители команд могли перевести задания на родные языки участников (этим правом воспользовались команды Болгарии, Бразилии и частично Украины).

Для участников и гостей олимпиады было организовано несколько экскурсий: по научным лабораториям и на телескопы Крымской астрофизической обсерватории и Крымской лаборатории ГАИШ МГУ, в Севастополь, в Бахчисарай, по историческим местам в окрестностях поселка Научный, на юношескую обсерваторию города Симферополя.

По окончании олимпиады для школьников стран СНГ и Болгарии была проведена четырехдневная Осенняя астрономическая школа (где рабочим языком был только русский), а команды Бразилии и Индии посетили поселок Качивели (на южном берегу Крыма), где расположен радиотелескоп КраО.

Ниже приводятся условия задач и список призеров IV Международной астрономической олимпиады.

хорошо известными вам величинами, которые помните».

8-10 классы

1. Если угловой диаметр Луны равен $31'$, то каким будет ее изображение в фокусе объектива диаметром 40 см с фокусным расстоянием 254 см? Сделайте чертеж (несколько чертежей) для объяснения своих вычислений.

2. Можно ли с помощью фотометра, установленного на телескопе 125 см (фокусное расстояние), наблюдать в скоплении звезды величины: а) 5^m ; б) 10^m ; в) 15^m , если от звезды 8^m такого же спектрального класса регистрируется 4000 квантов в секунду, уровень белого шума фотометра составляет 500 кв./с, а предельно допустимое значение числа регистрируемых квантов составляет в секунду 200000? Объясните ваши вычисления.

3. Когда и где на Земле наблюдается восход Солнца наибольшей продолжительности? Оцените продолжительность этого восхода.

4. Обычно считается, что на всем небе невооруженным глазом можно увидеть около 6000 звезд. Оцените число видимых невооруженным глазом незаходящих звезд: а) если вы находитесь на расстоянии 1° от Северного полюса; б) если вы находитесь на расстоянии 1° к северу от экватора. *Примечание:* площадь поверхности сферы радиусом R равна $S = 4\pi R^2$.

5. Летательный аппарат взлетел с космодрома, расположенного в районе экватора, в момент захода Солнца. Какой должна быть скорость аппарата и характер его движения, чтобы пилот постоянно видел Солнце на линии горизонта?

6. Предположим, что полное солнечное затмение наблюдается с земного экватора, причем Солнце находится в зените. Предположим также, что тень Луны движется вдоль экватора. Вычислите скорость тени относительно наблюдателя.

11-12 классы

1. Максимум излучения одной звезды приходится на 2000 \AA , а другой – на 10000 \AA . Какая из этих звезд излучает больше на длине волны 2000 \AA ; на длине волны 10000 \AA ? Каково соотношение полных энергий, излучаемых этими звездами? Считайте звезды абсолютно черными телами.

2. Инженеры Симферопольского университета описали новый метод утилизации старых военных кораблей. Они предложили делать из их вещества очень маленькие черные дыры (patent uzarc-048UA7). Оцените диаметр черной дыры, изготовленной по этому патенту из корабля массой 5000 т. Какой физический объект имеет размеры такого порядка? Опишите, как распространяется свет около такой черной дыры.

3–6. См. задачи 3–6 для 8–10 классов.

Практический тур

7. Составьте программу наблюдений на сегодняшнюю ночь на 40-сантиметровом телескопе. Какие из звезд и в какой последовательности вы будете наблюдать? Для наблюдений предлагаются звезды, занесенные в Таблицу. Отметьте звезды, не вошедшие в план наблюдений. Дайте объяснения.

Таблица

| | | V (mag) | α | δ (1950) |
|---|--------------|------------------|-----------------------------------|-----------------|
| 1 | η Aql | 3,5 ^m | 19 ^h 49,9 ^m | 0°53' |
| 2 | β Per | 2,1 | 3 04,9 | 40 46 |
| 3 | χ Cyg | 14,2 | 19 48,6 | 32 47 |
| 4 | R Aqr | 12,4 | 23 41,2 | -15 34 |
| 5 | α Ori | 1,3 | 5 52,4 | 7 24 |
| 6 | RW Vir | 6,7 | 12 04,7 | -6 29 |

Восход Луны 21:17:26, фаза 0,77.

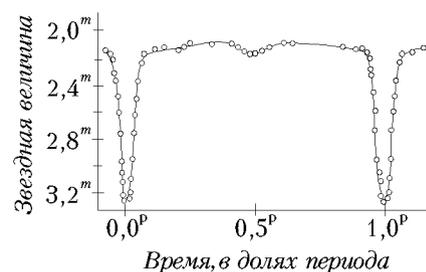
Звездное время (для 0^h) $s_0 = 0:31:04$.

Вы можете использовать все время наблюдений (с 20^h до 5^h 30^m).

Местное время LT = UT + 3.

Координаты обсерватории $\lambda = 2^h 16^m$ и $\phi = 44^\circ 43'$.

8. Дана кривая блеска затменной звезды (см. рисунок). Считая, что затмение центральное, оцените отно-



шение радиусов звезд в приближении, что малый компонент темный.

Наблюдательный тур

9.1. Определите угловое расстояние между Луной и Юпитером. Покажите, как вы это определили.

9.2. Найдите и назовите 5 наиболее ярких звезд осеннего неба. Какая из них самая яркая?

9.3. Определите, какой лунный день сегодня.

Публикацию подготовил
М. Гаврилов

Призеры олимпиады

Дипломы I степени получили

Аболмасов П. – Москва,
Бхалерао В. – Пуна, Индия,
Джа М. – Бхопал, Индия,
Руфат Д. – Кырджали, Болгария,
Соколовский К. – Москва,
Войщик П. – Москва.

Дипломы II степени получили

Фаузан Ю. – Лакхнау, Индия,
Иванов А. – Челябинск, Россия,
Иванов С. – Стара-Загора, Болгария,
Мананников А. – Москва,
Пуньяшлока Б. – Дели, Индия,
Савчева А. – Плевен, Болгария,
Шридар Д. – Сан-Жозе-дус-Кампус, Бразилия,

Тасев С. – Варна, Болгария,
Вута А. – Бангалор, Индия.

Дипломы III степени получили

Бакай Д. – Санкт-Петербург, Россия,
Башаков А. – Тихвин, Россия,
Датченко А. – Москва,
Дянков Н. – Варна, Болгария,
Игнатович А. – Златоуст, Россия,
Константинов С. – Челябинск, Россия,
Крумов В. – Варна, Болгария,
Курилова Т. – Москва,
Матев Р. – Пуна, Индия,
Самарин П. – Екатеринбург, Россия,
Цветков Е. – Великий Новгород, Россия.

Итоги Межобластной заочной математической олимпиады

В середине прошлого учебного года (точнее, с декабря по февраль) Всероссийская школа математики и физики «АВАНГАРД» совместно с Министерством образования РФ и при участии журнала «Квант» провели традиционную Межобластную заочную математическую олимпиаду. Через региональные органы образования к участию в олимпиаде были приглашены школьники 6–10 классов из 30 регионов России. (Информация о ВШМФ «АВАНГАРД» и об олимпиаде была опубликована также в журнале «КВАНТ» №5 за 1999 г.). В олимпиаде приняли участие более 7 тысяч школьников России.

Отмечая высокую активность и в целом хороший уровень работ участников, Оргкомитет принял решение наградить дипломами первой степени 26 школьников. (Полный список награжденных и решения олимпиадных задач опубликованы в газете «Первое сентября».)

Абсолютными победителями олимпиады стали

по 6 классам – Кузнецов А., г. Нижний Тагил, школа 9;
по 7 классам – Иванов И., г. Тула, школа 4;
по 8 классам – Черявский Д., г. Липецк, школа 72;

по 9 классам – Кондрашова О., пос. Донской Ростовской обл., средняя школа;
по 10 классам – Конторичев С., г. Череповец, школа 11.

Интересные и оригинальные работы представили также

по 6 классам – Круподерова К., г. Мурманск, школа 43,
Зорин И., г. Харабали, школа 1;
по 7 классам – Елистратов А., ст. Оловянная Читинской обл., школа 235,
Гребникова Н., п. Красноармейский Ростовской обл., средняя школа;
по 8 классам – Томин Д., г. Иваново, лицей 35,
Анищенко Е., п. Мурмаши Мурманской обл., Мурманский политехнический лицей;
по 9 классам – Волков И., г. Йошкар-Ола, экспериментальная школа 18,
Акимочкин С., г. Мурманск, школа 51;
по 10 классам – Ивакин Т., г. Саратов, ФТЛ 1,
Шабанов А., с. Садовое Воронежской обл., школа 1.

Оргкомитет поздравляет всех победителей и дипломантов олимпиады и благодарит всех педагогов, обеспечив-

ших проведение олимпиады. Особенно хотелось бы отметить высокую активность участников из Тульской, Липецкой, Московской, Мурманской областей, а также из республик Марий Эл и Башкортостана.

Все абсолютные победители награждаются комплектами журнала «Квант» на 2000 год. Пятнадцать школьников, приславших наиболее интересные и оригинальные решения и награжденных дипломами первой степени, приглашены на очередную Межгосударственную научно-практическую конференцию школьников. Дипломанты олимпиады, успешно окончившие 11 класс школы «АВАНГАРД», получают дополнительные льготы при поступлении в Московский инженерно-физический институт (технический университет).

Внимание! Почтовый адрес ВШМФ «АВАНГАРД» изменился. Теперь он такой: 115446 Москва, а/я 450.

Конденсаторы в электростатическом поле

Ю. ЧЕШЕВ

В ПРИРОДЕ СУЩЕСТВУЮТ ДВА РОДА электрических зарядов: положительные и отрицательные. При этом одноименные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются. Сила взаимодействия точечных зарядов определяется законом Кулона.

Пространство вокруг заряда заполнено физической материей, посредством которой и осуществляется взаимодействие между зарядами. Это – электрическое поле. Его основным свойством является наличие силы, действующей на заряд, помещенный в это поле. Отношение силы, с которой поле действует на точечный заряд, к величине этого заряда называют напряженностью поля. Электрическое поле наглядно изображается с помощью силовых линий, или линий напряженности. Напомним, что силовой линией называют линию, касательная к которой в каждой точке пространства совпадает с вектором напряженности поля.

При перемещении заряда в электрическом поле совершается работа. Отношение работы поля по перемещению заряда из одной точки в другую к величине этого заряда называют разностью потенциалов.

Электростатическое поле создается только неподвижными зарядами. При решении задач по электростатике часто используются принцип суперпозиции полей и закон сохранения электрического заряда.

Задача 1. Однородное электрическое поле слева от бесконечной заряженной плоской пластины равно \vec{E}_1 , а справа \vec{E}_2 (рис.1). Определите силу, действующую на единицу площади пластины со стороны электрического поля.

Такая ситуация возможна, если пластину, заряженную некоторым зарядом q , поместить во внешнее однородное поле \vec{E}_0 , силовые линии которого

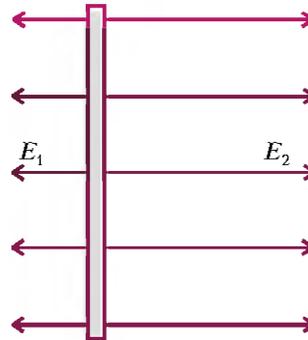


Рис. 1

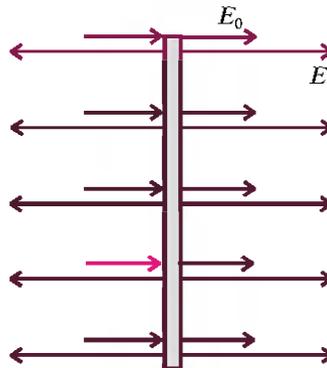


Рис. 2

перпендикулярны плоскости пластины и направлены слева направо (рис.2). Пусть \vec{E} – напряженность электрического поля пластины площадью S , тогда

$$E = \frac{q}{2\epsilon_0 S}.$$

Согласно принципу суперпозиции электрических полей, напряженность поля слева от пластины равна

$$E_1 = E - E_0,$$

а справа –

$$E_2 = E + E_0.$$

Отсюда находим E и E_0 :

$$E = \frac{E_1 + E_2}{2}, \quad E_0 = \frac{E_2 - E_1}{2}.$$

Теперь определим заряд пластины:

$$q = E \cdot 2\epsilon_0 S = (E_1 + E_2)\epsilon_0 S$$

и силу, действующую на единичную площадь пластины со стороны внешнего поля \vec{E}_0 :

$$f = \frac{q}{S} E_0 = \epsilon_0 \frac{E_2^2 - E_1^2}{2}.$$

Задача 2. Незаряженный плоский конденсатор емкостью C_1 находится во внешнем однородном электрическом поле \vec{E}_0 (рис.3). Силовые линии

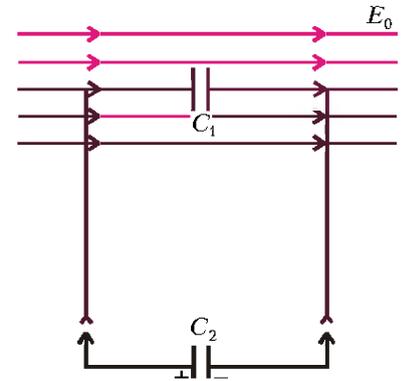


Рис. 3

электрического поля перпендикулярны пластинам конденсатора, расстояние между пластинами d . Конденсатор емкостью C_2 , заряженный до разности потенциалов U_0 , подключается к конденсатору емкостью C_1 . Определите заряды конденсаторов после подключения. Величиной внешнего электрического поля в месте нахождения конденсатора емкостью C_2 можно пренебречь.

После соединения конденсаторов начальный заряд второго конденсатора $q_0 = C_2 U_0$ перераспределится между обоими конденсаторами так, что разности потенциалов на них уравниются. Обозначим установившиеся заряды через q_1 и q_2 . По закону сохранения заряда,

$$q_1 + q_2 = C_2 U_0. \quad (1)$$

Из принципа суперпозиции электрических полей следует, что разность потенциалов между пластинами первого конденсатора будет равна

$$\Delta\phi_1 = E_0 d + \frac{q_1}{C_1}.$$

Между пластинами второго конденсатора установится разность потенциалов

$$\Delta\phi_2 = \frac{q_2}{C_2}.$$

Приравняв $\Delta\phi_1$ к $\Delta\phi_2$, получаем

$$E_0 d + \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}. \quad (2)$$

Совместное решение уравнений (1) и (2) позволяет определить заряды q_1 и q_2 :

$$q_1 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (U_0 + E_0 d),$$

$$q_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \left(U_0 \frac{C_2}{C_1} - E_0 d \right).$$

Задача 3. Три плоские металлические пластины образуют сложный конденсатор (рис.4). На пластине 1 на-

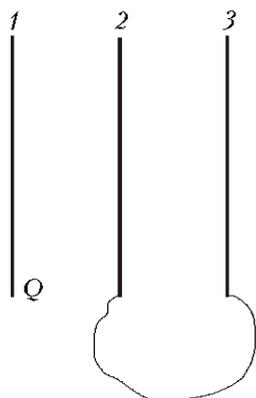


Рис. 4

ходится заряд Q , а незаряженные пластины 2 и 3 закорочены проводником. Определите силу, действующую на пластину 2. Площадь каждой пластины S .

Напряженность электрического поля пластины 1 равна

$$E_1 = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}.$$

Так как пластины 2 и 3 закорочены проводником, разность потенциалов между ними равна нулю. Следовательно, на них должны появиться заряды, электрические поля которых вместе с электрическим полем заряда Q обеспечивают эту нулевую разность потенциалов. Обозначим заряды пластин через q_2 и q_3 (рис.5). Из закона

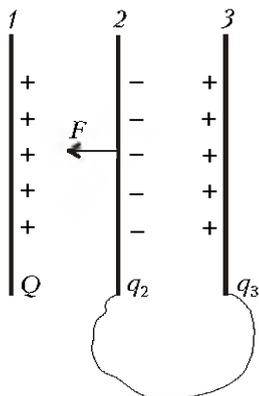


Рис. 5

сохранения заряда следует, что эти заряды равны по величине и противоположны по знаку:

$$q_2 = -q_3.$$

Из принципа суперпозиции электрических полей получаем

$$U_{23} = (E_1 - E_2 - E_3)d = 0,$$

где U_{23} – разность потенциалов между пластинами 2 и 3, E_1 , E_2 и E_3 – величины напряженностей полей, создаваемых каждой пластиной, d – расстояние между пластинами 2 и 3. Принимая во внимание, что $E_2 = E_3$, находим

$$E_2 = E_3 = \frac{E_1}{2}.$$

Теперь легко определить заряды пластин:

$$q_2 = -q_3 = -\frac{Q}{2}.$$

Очевидно, что пластина 2 с зарядом $q_2 = -Q/2$ находится в поле пластин 1 и 3. Следовательно сила, действующая на нее, равна

$$F = q_2(E_3 - E_1) = \frac{QE_1}{4} = \frac{Q^2}{8\epsilon_0 S}.$$

Задача 4. Обкладки плоского конденсатора емкостью C соединены накоротко (рис.6). Вблизи правой

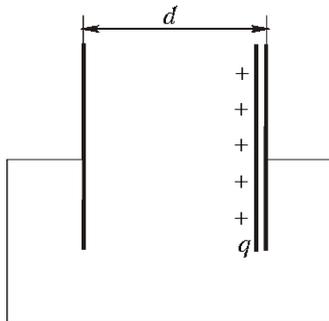


Рис. 6

обкладка находится плоская пластина с зарядом q , площадь которой равна площади обкладок конденсатора. Какую работу нужно совершить, чтобы отодвинуть пластину от правой обкладки на $d/2$, где d – расстояние между обкладками?

Пусть в некоторый момент времени пластина с зарядом q находится на расстоянии x от правой обкладки конденсатора (рис.7). Напряженность электрического поля, создаваемая этой пластиной, равна

$$E_0 = \frac{q}{2\epsilon_0 S}.$$

На обкладках конденсатора индуцируются заряды, равные по величине и

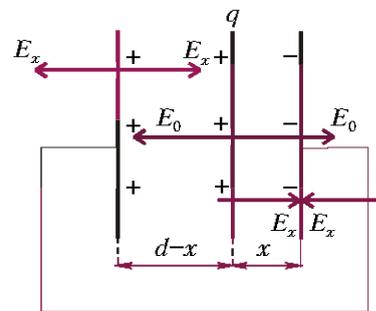


Рис. 7

противоположные по знаку – пусть заряд левой пластины положительный, а правой отрицательный. Совместно с зарядом q эти заряды обеспечивают нулевую разность потенциалов между обкладками конденсатора. Обозначим напряженности полей, соответствующие этим зарядам, через E_x . Работа электрического поля по перенесению положительного единичного заряда по замкнутому контуру равна нулю. Следовательно,

$$(E_0 + 2E_x)x + (2E_x - E_0)(d - x) = 0,$$

откуда находим напряженность электрического поля, в котором перемещается пластина:

$$2E_x = E_0 \left(1 - \frac{2x}{d} \right).$$

Сила, действующая на пластину со стороны этого поля, есть линейная

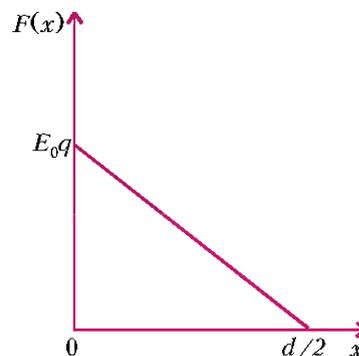


Рис. 8

функция ее перемещения x (рис.8):

$$F(x) = 2E_x q = E_0 q \left(1 - \frac{2x}{d} \right).$$

Теперь очевидно, что искомая работа равна

$$A = \frac{E_0 q d}{2} = \frac{q^2 d}{8\epsilon_0 S} = \frac{q^2}{8C}.$$

Задача 5. Две соединенные проводником пластины незаряженного конденсатора площадью S находятся на расстоянии d друг от друга (это расстояние мало по сравнению с размерами пластин) во внешнем одно-

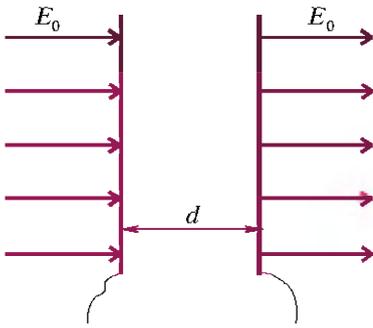


Рис. 9

родном электрическом поле, напряженность которого равна E_0 (рис. 9). Какую работу нужно совершить, чтобы медленно сблизить пластины до расстояния $d/2$?

Так как пластины конденсатора замкнуты проводником, напряженность электрического поля между ними равна нулю. Пусть начальная энергия электрического поля вне конденсатора равна W_0 . После того как пластины сблизилась на расстояние $d/2$, в объеме $V = Sd/2$ появилось поле, энергия которого равна

$$W_1 = w \frac{Sd}{2} = \frac{\epsilon_0 E_0^2 Sd}{2},$$

где $w = \epsilon_0 E_0^2 / 2$ – плотность энергии электрического поля. Тогда изменение энергии поля во всем пространстве равно

$$\Delta W = (W_1 + W_0) - W_0 = \frac{\epsilon_0 E_0^2 Sd}{4}.$$

Это увеличение энергии произошло за счет совершенной работы; таким образом, работа, которую нужно совершить, равна

$$A = \frac{\epsilon_0 E_0^2 Sd}{4}.$$

Задача 6. Внутри плоского конденсатора, между обкладками которого с помощью источника напряжения поддерживается постоянная разность потенциалов U , расположена плоскопараллельная металлическая пластина толщиной a и массой m (рис. 10). В

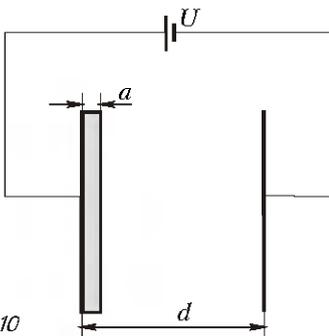


Рис. 10

начальный момент пластина прижата к левой обкладке конденсатора, а затем она отпускается. Чему будет равна скорость пластины в тот момент, когда она достигнет правой обкладки конденсатора? Площадь каждой пластины S , расстояние между обкладками d .

Так как разность потенциалов U на конденсаторе задана, заряд пластины в начальный момент времени равен

$$q = U \frac{\epsilon_0 S}{d - a}$$

и во время движения пластины между обкладками конденсатора будет сохраняться. В начальный момент левая обкладка конденсатора не заряжена, при этом правая обкладка конденсатора заряжена зарядом $-q$. По мере продвижения пластины заряды на обкладках будут изменяться, обеспечивая постоянство разности потенциалов между ними. Батарея зарядов не создает, следовательно, суммарный заряд обкладок конденсатора сохраняется. Найдем заряды обкладок в тот момент, когда пластина приблизится к правой обкладке. Пусть эти заряды равны Q_1 и Q_2 . Тогда, по закону сохранения заряда,

$$Q_1 + Q_2 = -q.$$

Если в некоторый момент времени пластина находится на расстоянии x от левой обкладки (рис. 11), то из

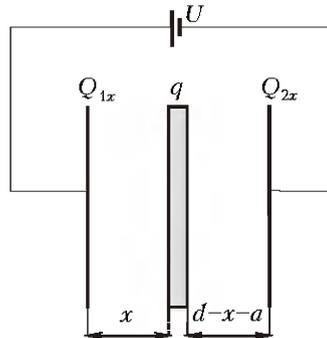


Рис. 11

постоянства разности потенциалов между обкладками получаем

$$\left(\frac{Q_{1x}}{2\epsilon_0 S} - \frac{Q_{2x}}{2\epsilon_0 S} - \frac{q}{2\epsilon_0 S} \right) x + \left(\frac{q}{2\epsilon_0 S} + \frac{Q_{1x}}{2\epsilon_0 S} - \frac{Q_{2x}}{2\epsilon_0 S} \right) (d - x - a) = U,$$

где Q_{1x} – заряд на левой обкладке конденсатора, а Q_{2x} – на правой. Устремляя x к $(d - a)$ и учитывая связь между величинами зарядов, на-

ходим

$$Q_2 = -2q.$$

Таким образом, при достижении пластиной правой обкладки ее заряд будет $-2q$, а левой $+q$. Работа батареи $A = Uq$ идет на изменение кинетической энергии пластины. Следовательно,

$$Uq = \frac{mv^2}{2},$$

откуда скорость пластины равна

$$v = \sqrt{\frac{2\epsilon_0 S U^2}{m(d - a)}}.$$

Задача 7. Две тонкостенные металлические сферы, радиусы которых $R_1 = 20$ см и $R_2 = 40$ см, образуют сферический конденсатор (рис. 12).

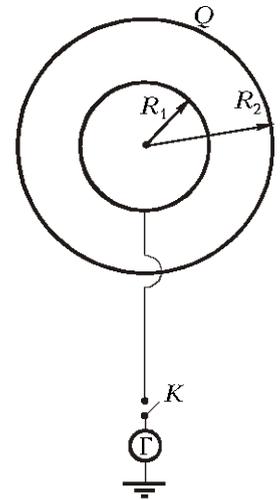


Рис. 12

На внешней сфере находится заряд $Q = 10^{-8}$ Кл. Внутренняя сфера не заряжена. Какой заряд протечет через гальванометр G , если замкнуть ключ K ?

Потенциал внешней сферы равен

$$\varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}.$$

Так как внутренняя сфера не заряжена, во всем внутреннем пространстве внешней сферы потенциал остается постоянным и равным φ_2 . После того как внутреннюю сферу заземлили, ее потенциал стал равен нулю. Чтобы обеспечить нулевой потенциал внутренней сферы, требуется поместить на нее соответствующий заряд q . Согласно принципу суперпозиции,

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} = 0,$$

откуда получаем

$$q = -Q \frac{R_1}{R_2} = -5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл.}$$

Именно этот заряд и протечет через гальванометр.

Задача 8. В системе, изображенной на рисунке 13, радиус внутренней

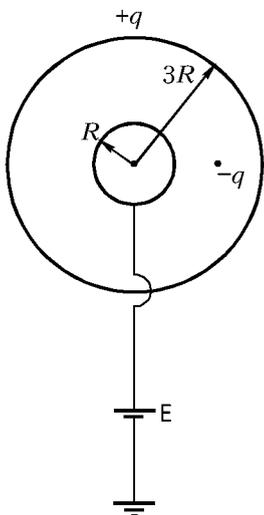


Рис. 13

проводящей сферы R , внешней (тоже проводящей) $3R$, заряд внешней сферы $+q$. На расстоянии $2R$ от центра системы находится точечный заряд $-q$. Зная величины q, E, R , определите заряд внутренней сферы. Потенциал земли принять равным нулю.

Рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть на расстоянии $2R$ от проводящей сферы радиусом R расположен точечный заряд $-q$. Определим потенциал сферы. Заряд $-q$ приведет к перераспределению зарядов на сфере (к ее поляризации). Обозначим через

σ поверхностную плотность заряда на сфере. По закону сохранения заряда,

$$\sum_i \sigma_i \Delta S_i = 0,$$

где ΔS_i – площадь i -го участка сферы, а σ_i – плотность заряда i -го участка. Тогда из принципа суперпозиции находим потенциал в центре сферы:

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2R} + \sum_i \frac{\sigma_i \Delta S_i}{4\pi\epsilon_0 R} \\ &= -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 R}. \end{aligned}$$

При этом напряженность электрического поля внутри проводящей сферы равна нулю. Следовательно, потенциал внутри сферы постоянен и равен потенциалу на ее поверхности, т.е.

$$\varphi_R = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Теперь решение поставленной задачи очевидно. Согласно принципу суперпозиции, потенциал внутренней сферы равен

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot 3R} - \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R},$$

откуда находим искомый заряд внутренней сферы:

$$Q = 4\pi\epsilon_0 R E + \frac{1}{6} q.$$

Упражнения

1. В плоский конденсатор, подключенный к источнику с постоянной ЭДС E , параллельно обкладкам помещена плоская пластина, имеющая заряд q . Расстояния от пластины до обкладок d_1 и d_2 . Площадь пластины и обкладок S .

Определите силу, действующую на пластину со стороны электрического поля.

2. Три плоские металлические пластины образуют сложный конденсатор. На средней пластине имеется заряд $+Q$, крайние незаряженные пластины закорочены проводником. Определите величину и направление напряженностей электрического поля между пластинами, если расстояния между пластинами l_1 и l_2 ($l_1 > l_2$), а площадь каждой пластины S .

3. Две соединенные проводником пластины плоского конденсатора площадью S каждая находятся на расстоянии d друг от друга во внешнем однородном электрическом поле. Расстояние между пластинами мало по сравнению с размерами пластин. Определите напряженность внешнего электрического поля, если известно, что при медленном сближении пластин до расстояния $d/3$ была совершена работа A .

4. Внутри плоского конденсатора, между обкладками которого с помощью источника напряжения поддерживается постоянная разность потенциалов U , расположена плоскопараллельная металлическая пластина толщиной l и массой m . Пластина в начальный момент прижата к левой обкладке конденсатора, а затем отпускается. Чему будет равно ускорение пластины в тот момент, когда она будет занимать симметричное положение относительно обкладок конденсатора? Площадь каждой пластины S , а расстояние между обкладками d .

5. В системе, похожей на изображенную на рисунке 13, радиус внутренней проводящей сферы R , внешней (тоже проводящей) $2R$. На расстоянии $3R$ от центра системы находится точечный заряд $-q$. Зная величины q, E и R , определите заряд на внешней сфере. Потенциал земли принять равным нулю.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

Задачи

(см. «Квант» №3)

1. Пусть Алеше x лет, а Грише – y лет. Тогда Боре $x - 3$ лет ($x > 6$). Согласно условию задачи,

$$y(x - 3) = x(x - 6) + 9, \text{ откуда } (x - 3)(x - 3 - y) = 0.$$

Так как $x > 6$, то $x - y = 3$, т.е. Алеша старше Гриши на 3 года.

2. Разрежем ленту на такие 7 частей: 1, 23, 4, 5, 6, 7, 89, а затем перевернем шестерку, превратив ее в девятку. В результате получатся 7 попарно взаимно простых чисел: 1, 23, 4, 5, 9, 7, 89. Очевидно, что большего количества частей достичь невозможно.

3. Предположим, найдется такое натуральное число n , что $n^2 + n + 1$ делится на 9. Тогда из тождества $(n^2 + n + 1)(n - 1) =$

$= n^3 - 1$ следует, что $n^3 - 1$ делится на 3. Отсюда заключаем, что число n при делении на 3 должно давать в остатке 1. Рассмотрим разность двух чисел $(n - 1)^2$ и $n^2 + n + 1$, каждое из которых делится на 9:

$$(n - 1)^2 - (n^2 + n + 1) = -3n.$$

Отсюда видно, что число n делится на 3. Полученное противоречие свидетельствует о том, что натурального числа n , удовлетворяющего условию задачи, не существует.

4. Пусть в Думе насчитывается x рыцарей и $101 - x$ лжецов. Если вывести из состава Думы рыцаря, то оставшихся $x - 1$ рыцарей меньше, чем $101 - x$ лжецов, т.е. $x - 1 < 101 - x$, откуда $x < 51$. Если вывести из состава Думы лжеца, то оставшихся $100 - x$ лжецов будет не больше, чем x рыцарей (так как лжец врет), т.е. $100 - x \leq x$, откуда $x \geq 50$. Исходя из полученных неравенств, получаем $x = 50$.

5. Обозначим катеты прямоугольных треугольников a, b ,

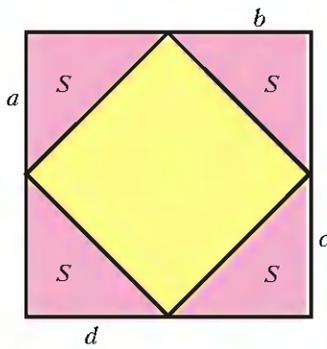


Рис. 1

c, d так, как показано на рисунке 1. Если $a = b = c = d$, то все прямоугольные треугольники равны, и вписанный четырехугольник – квадрат. Если же предположить, что $a > b$, то из равенства площадей треугольников, перемещаясь по кругу от треугольника к треугольнику, получаем неравенства: $b > c > d > a$, что невозможно.

Конкурс «Математика 6–8»
(см. «Квант» №1)

16. Могут. Развертка куба с выделенными на ней параллелограммами показана на рисунке 2.

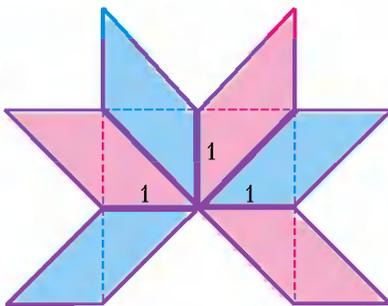


Рис. 2

17. Если общая сумма гонорара нацело делится на число задач, то об экономии не может быть и речи. Поэтому делители числа 400, которые не превышают 24, следует сразу исключить. Таким образом, количество отобранных задач находится среди чисел 3, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24. Разделим 400 на

каждое из этих чисел, выделив целую и дробную части. Каждую дробную часть запишем в виде обыкновенной дроби, для удобства не сокращая числитель и знаменатель на их общий делитель. Если дробная часть не меньше $\frac{1}{2}$, то при округлении таких чисел сумма гонорара увеличилась бы, и вместо экономии получился бы перерасход. Поэтому такие числа также отбрасываем. Для тех же, у которых дробная часть меньше $\frac{1}{2}$, экономия появится, причем нетрудно сообразить, что она будет в точности равна числителю несокращенной дроби. Все вышеизложенное удобно свести в таблицу:

| Число задач N | $400/N$ | Экономия (если она есть) |
|-----------------|--------------|--------------------------|
| 3 | $133 + 1/3$ | 1 |
| 6 | $66 + 4/6$ | – |
| 7 | $57 + 1/7$ | 1 |
| 9 | $44 + 4/9$ | 4 |
| 11 | $36 + 4/11$ | 4 |
| 12 | $33 + 4/12$ | 4 |
| 13 | $32 + 10/13$ | – |
| 14 | $28 + 8/14$ | – |
| 15 | $26 + 10/15$ | – |
| 17 | $23 + 9/17$ | – |
| 18 | $22 + 4/18$ | 4 |
| 19 | $21 + 1/19$ | 1 |
| 21 | $19 + 1/21$ | 1 |
| 22 | $18 + 4/22$ | 4 |
| 23 | $17 + 9/23$ | 9 |
| 24 | $16 + 16/23$ | – |

Итак, в четырех случаях экономится 1 рубль, в пяти случаях – 4 рубля, и лишь в одном случае – 9 рублей. А теперь вспомним условие, в котором говорится, что главный редактор сумел определить, сколько задач было отвергнуто. Лишь при экономии, равной 9 рублям, можно точно ответить: было опубликовано 23 задачи, а забракована лишь одна.

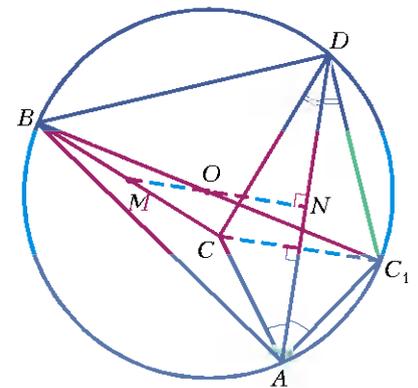


Рис. 3

18. Четырехугольник $ABCD$ может быть как выпуклым, так и невыпуклым (рис.3). В любом случае, по условию задачи, точка C проектируется на отрезок AD , а не на его продолжение.

Отразим точку C симметрично относительно прямой AD – получим точку C_1 , при этом $\angle CAD = \angle C_1AD$, $\angle CDA = \angle C_1DA$. Следовательно, $\angle BAC_1 = \angle BDC_1 = 90^\circ$, и вокруг четырехугольника $ABDC_1$ можно описать окружность с диаметром BC_1 . Пусть точка O – центр этой окружности. Соединив точку O с серединой N хорды AD , получим $ON \perp AD$, и следовательно, $ON \parallel CC_1$. В треугольнике CBC_1 на прямой ON лежит средняя линия OM , поэтому $MN \perp AD$.

19. Представив число n в виде $n = 2k + 1$, где k – любое целое неотрицательное число, запишем исходное выражение:

$$3 \cdot 5^n + 8n^2 + 44n - 67 = 3 \cdot 5^{2k+1} + 32k^2 + 120k - 15.$$

Докажем методом математической индукции, что число

$$3 \cdot 5^{2k+1} + 32k^2 + 120k - 15$$

делится на 128. При $k = 0$ это утверждение проверяется непосредственно. Предположим, что это утверждение справедливо при $k = K$, где K – любое целое неотрицательное число, т.е.

$$3 \cdot 5^{2K+1} + 32K^2 + 120K - 15$$

делится на 128. Отсюда следует, что оно верно и при $k = K + 1$. Действительно,

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5^{2(K+1)+1} + 32 \cdot (K+1)^2 + 120 \cdot (K+1) - 15 = \\ = 25 \cdot (3 \cdot 5^{2K+1} + 32 \cdot K^2 + 120K - 15) - 128 \cdot (6K^2 + 22K - 4) \end{aligned}$$

В первой скобке получили выражение, которое по предположению делится на 128, а оставшийся член имеет множитель 128. Итак, утверждение верно и при $k = K + 1$, тем самым доказано исходное утверждение задачи.

20. Победу себе может обеспечить второй игрок. Занумеруем 2000 горизонталей и 1999 вертикалей по порядку. Пусть первый игрок своим очередным ходом закрасил клетку на пересечении n -й горизонтали и m -й вертикали. Тогда второй игрок, закрасив краской того же цвета клетку на пересечении m -й вертикали и свободной горизонтали, имеющей номер той же четности, что и число n , всегда будет иметь возможность сделать очередной ход, не используя новый цвет, и выигрывает.

Слоны на водопое

Пусть объем воды в озере равен V , из родников за сутки добавляется объем воды v , а один слон за сутки выпивает количество воды, равное x . Тогда $V + v = 183x$, $V + 5v = 5 \cdot 37x$. Вычитая из второго уравнения первое, найдем, что $4v = 2x$, т.е. $2v = x$. Подставив это соотношение в первое уравнение, получим $V = 365v$, т.е. родники наполняют озеро за 1 год. Обозначив теперь через t время, за которое один слон осушит озеро, получим $V + tv = tx$. Но $x = 2v$, откуда $V = tv$, а по-

сколькx $V = 365v$, то $t = 365$, т.е. один слон выпьет все озеро за год.

Тригонометрические тождества

4. а) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$; б) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ или $\arcsin(3/5) + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$.
5. 5.
6. $[-13; 13]$.
13. Нужно. Правильный ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $\arctg 3 + \pi k$ или $\arctg \frac{3}{2} + \pi k$, где k — целое число.
14. $y_2 = (x \cos \alpha - y \sin \alpha) \sin \beta + (x \sin \alpha + y \cos \alpha) \cos \beta$.
15. а) $(x + 3)^2 + y^2 = 4$; б) $e + 3/\sqrt{2} \mathbf{j} + e - 3/\sqrt{2} \mathbf{j} = 4$.
16. Сначала выполним поворот на угол φ по часовой стрелке. Прямая при этом перейдет в ось абсцисс, а точка $(x; y)$ — в точку $(x \cos \varphi + y \sin \varphi; y \cos \varphi - x \sin \varphi)$. При симметрии относительно оси абсцисс меняется знак ординаты, так что получаем точку $(x \cos \varphi + y \sin \varphi; -y \cos \varphi + x \sin \varphi)$. При повороте на угол φ эта точка переходит в точку, абсциссу которой вычисляем по формуле
- $$(x \cos \varphi + y \sin \varphi) \cos \varphi - (-y \cos \varphi + x \sin \varphi) \sin \varphi = x(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + 2y \sin \varphi \cos \varphi = x \cos 2\varphi + y \sin 2\varphi.$$
- Аналогично вычисляем ординату:
- $$(-y \cos \varphi + x \sin \varphi) \cos \varphi + (x \cos \varphi + y \sin \varphi) \sin \varphi = y(-\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + 2x \sin \varphi \cos \varphi = -y \cos 2\varphi + x \sin 2\varphi.$$
17. а) $(-x; -y)$; б) $(2a - x; 2b - y)$; в) $(1 - y; 1 - x)$;
- г) $e b \sin 2\varphi + x \cos 2\varphi + y \sin 2\varphi; 2b \cos^2 \varphi - y \cos 2\varphi + x \sin 2\varphi$.
18. $y^2 = x^2 + 2$. 19. $7x^2 + 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16$.

Неравенство Караматы

1. Требуется доказать, что

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq k \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Сводя подобные слагаемые, получаем

$$(n - k)(a_1 + a_2 + \dots + a_k) \geq k(a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_n).$$

Последнее неравенство очевидно, поскольку каждое слагаемое в левой части не меньше любого слагаемого в правой, а количество слагаемых в обеих частях одинаковое.

2. Идея доказательства для $m_i \in \mathbf{N}$ указана в статье. Пусть

$m_i \in \mathbf{Q}^+$, т.е. $m_i = \frac{s_i}{t_i}$, где $s_i, t_i \in \mathbf{N}$. Положим $T = t_1 \cdot t_2 \cdot \dots \cdot t_n$ и рассмотрим неравенство (4) с весами $m_i T \in \mathbf{N}$. Имеем

$$\frac{m_1 T f(x_1) + m_2 T f(x_2) + \dots + m_k T f(x_k)}{m_1 T + m_2 T + \dots + m_k T} \geq f\left(\frac{m_1 T x_1 + m_2 T x_2 + \dots + m_k T x_k}{m_1 T + m_2 T + \dots + m_k T}\right),$$

откуда после очевидного сокращения получаем (4) для $m_i \in \mathbf{Q}^+$. Неравенство Иенсена для $m_i \in \mathbf{R}^+$ получается из (4) для $m_i \in \mathbf{Q}^+$ предельным переходом.

3. Введем замену $a = 0,5 \ln x$, $b = 0,5 \ln y$, $c = 0,5 \ln z$ и перепишем неравенство в виде

$$e^{2a+2b-4c} + e^{2a+2c-4b} + e^{2b+2c-4a} \geq e^{a+b-2c} + e^{a+c-2b} + e^{b+c-2a}.$$

Далее решение аналогично рассуждениям задач 1, 2.

4. В силу симметрии будем считать, что $a \geq b \geq c \geq d$. Введем замену $x = \ln a$, $y = \ln b$, $z = \ln c$, $t = \ln d$ и перепишем нера-

венство в виде

$$e^{4x} + e^{4y} + e^{4z} + e^{4t} + e^{x+y+z+t} + \dots + e^{x+y+z+t} \geq e^{2x+2y} + e^{2x+2z} + e^{2x+2t} + e^{2y+2z} + e^{2y+2t} + e^{2z+2t}.$$

Докажем, что набор

$$(4x, 4y, 4z, 4t, x + y + z + t, \dots, x + y + z + t)$$

мажорирует

$$(2x + 2y, 2x + 2z, 2x + 2t, 2y + 2z, 2y + 2t, 2z + 2t),$$

откуда и будет следовать решение. Упорядочим оба набора. Ясно, что

$$4x \geq x + y + z + t \geq 4t.$$

Предположим, что

$$4x \geq x + y + z + t \geq 4y$$

(случай $4z \geq x + y + z + t \geq 4t$ рассматривается аналогично). Тогда, очевидно, выполняются следующие неравенства:

$$4x \geq x + y + z + t \geq 4y \geq 4z \geq 4t,$$

$$2x + 2y \geq 2x + 2z \geq 2x + 2t \geq 2y + 2z \geq 2y + 2t \geq 2z + 2t,$$

неравенство $x + t \geq y + z$ следует из $x + y + z + t \geq 4y \Leftrightarrow x + t \geq 3y - z \Leftrightarrow x + t \geq y + z + 2(y - z)$ и упорядоченности чисел x, y, z, t . Если же $4y \geq x + y + z + t \geq 4z$, то

$$4x \geq 4y \geq x + y + z + t \geq 4z \geq 4t,$$

второй набор упорядочен одним из двух способов:

$$2x + 2y \geq 2x + 2z \geq 2y + 2z \geq 2y + 2t \geq 2z + 2t,$$

$$2x + 2y \geq 2x + 2z \geq 2x + 2t \geq 2y + 2t \geq 2z + 2t.$$

Однако при каждом варианте упорядоченности условия неравенства Караматы, как легко проверить, выполняются.

5. Для доказательства «весового» неравенства Караматы необходимо рассмотреть весовые аналоги лемм 1 и 2. При этом следует применять так называемое весовое раздвижение: одновременное увеличение x_i и уменьшение x_j с сохранением суммы $m_i x_i + m_j x_j$ ($x_i \geq x_j$).

Конденсаторы в электростатическом поле

1. $F = q \frac{q(d_2 - d_1)/(2\epsilon_0 S) + E}{d_1 + d_2}.$

2. $E_1 = \frac{Q}{\epsilon_0 S l_1 + l_2}, E_2 = -\frac{Q}{\epsilon_0 S l_1 + l_2}.$ 3. $E_0 = \sqrt{\frac{3A}{\epsilon_0 S d}}.$

4. $a = \frac{\epsilon_0 S U^2}{m(d-l)^2}.$ 5. $Q = 8\pi\epsilon_0 R_E - q/3.$

LXIII Московская математическая олимпиада

Математический праздник

6 класс

1. Ответ: $+1 - 2 + 4 + 8 - 16 - 32 + 64 = 27$.

Замечание. Попробуйте сами доказать, что а) любое число, получающееся таким способом, нечетно; б) из этой записи можно получить любое нечетное число между числами -128 и 128 , причем единственным способом.

2. На рисунке 4 приведены примеры такой закраски.

3. Пусть первая цифра кода x , а вторая y . Тогда само число записывается как $10x + y$, а условие задачи можно записать уравнением

$$(x + y) + xy = 10x + y.$$

Следовательно, $xy = 9x$.

Так как код — двузначное число, то $x \neq 0$, а значит, $y = 9$.

При этом x можно взять любым, кроме 0.

Ответ: 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99.

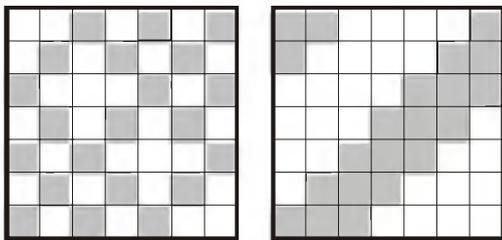


Рис. 4

4. Пример приведен на рисунке 5.

5. Покрасим вершины A, C, F и H в черный цвет, а остальные вершины – в белый. Заметим, что любые две соседние вершины будут покрашены в разные цвета. Значит, после каждого залпа заяц перебегает в вершину другого цвета. Сделаем первый залп по вершинам C, F и H . Если заяц находился в черной вершине, то либо охотники сразу попали в него, либо заяц находился в вершине A . В последнем случае после залпа заяц перебежит в одну из трех соседних вершин, и залп (BDE) обязательно достигнет цели.

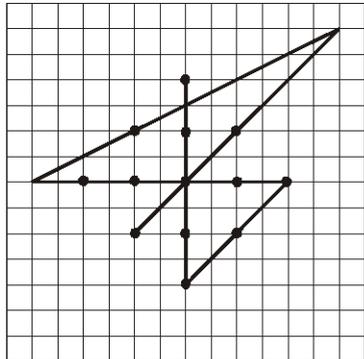


Рис. 5

Если заяц находился в белой вершине, то после двух выстрелов он снова окажется в белой вершине. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, убеждаемся, что залпы (BDE) , а потом (CFH) обязательно поразят зайца.
Ответ: охотники обязательно попадут в зайца, сделав следующие залпы: $(CFH), (BDE), (BDE), (CFH)$. (Порядок залпов важен!)

7 класс

2. а) Да, достаточно прибавить к числителю и знаменателю по 77. (К этому числу приводит уравнение $2(10 + x) = 97 + x$.) б) Нет. Действительно, дробь равна единице, если ее

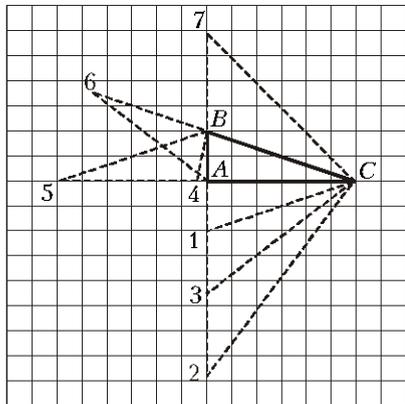


Рис. 6

числитель и знаменатель равны. А Малыш никак не сможет из неравных чисел сделать равные.
 3. На рисунке 6 цифрами отмечены вершины семи приложенных треугольников.
 4. **Ответ:** Нет, не может. **Решение.** Докажем это от противного.
Первый способ. Предположим, что найдутся два натуральных числа k и n таких, что $n(n+1) = 2k(2k+2)$.
 Отметим числа $2k$ и $2k+2$ на числовой оси и рассмотрим два случая: $n \leq 2k$ и $n > 2k$.
 Если $n \leq 2k$, то $n+1 < 2k+2$, поэтому $n(n+1) < 2k(2k+2)$. Противоречие.
 Если $n > 2k$, то $n+1 \geq 2k+2$, поэтому $n(n+1) > 2k(2k+2)$. Противоречие.
Второй способ. Полученное выше уравнение можно преобразовать так:

зывать так:

$$n(n+1) = 4k(k+1).$$

Домножим обе части уравнения на 4, прибавим к обеим частям 4 и преобразуем:

$$(2n+1)^2 + 3 = (2(2k+1))^2.$$

Но если $x^2 - y^2 = 3$, то

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1, \end{cases}$$

и $y = 1$, что невозможно, так как $y = 2n + 1$.

Третий способ. Полученное уравнение приводится к виду

$$n^2 + n + 1 = (2k + 1)^2.$$

Выражение в левой части больше n^2 , но меньше $(n+1)^2$, и потому не может равняться квадрату целого числа. Противоречие.

5. Обозначим числа, стоящие в вершинах куба, соответствующими маленькими латинскими буквами: a, b, c, d, e, f, g и h . Рассмотрим наименьшее из этих чисел. Без ограничения общности мы можем считать, что это число a (оно находится в вершине A). Тогда числа в соседних с A вершинах (это вершины B, D и E) могут принимать только значения a или $a+1$ (так как $a-1 < a$). Значит, какие-нибудь два из чисел b, d и e равны.

Пусть равные числа стоят в вершинах B и E (остальные случаи рассматриваются аналогично). В этом случае ответом будут противоположные вершины E и C : $e = b$, а числа c и b отличаются не более чем на 1, поэтому числа e и c отличаются не более чем на 1.

Избранные задачи для старших классов

1. **Ответ:** 50 мест. Если 10 партий наберут ровно по 5% голосов, а две, включая партию любителей математики (ПЛМ), – по 25%, то ПЛМ получит ровно 50 мест в парламенте. Докажем, что большее число мест ПЛМ получить не может. Обозначим сумму процентов голосов, набранных партиями, прошедшими в парламент, через S , а сумму процентов голосов, набранных непрошедшими партиями, через s . Тогда доля мест, полученных ПЛМ в парламенте, равна

$$\frac{25}{S} = \frac{25}{100 - s}.$$

Отсюда видно, что наибольшее число мест ПЛМ получит в том случае, если общее количество голосов, отданных за непрошедшие партии, максимально. Если бы в парламент не прошли 11 партий, они вместе набрали бы не более 55% голосов, но $55 + 25 < 100$. Значит, не прошли в парламент максимум 10 партий, и они набрали в сумме не более 50% голосов. Поэтому ПЛМ получит в парламенте не более 50% мест, т.е. не более 50 мест.

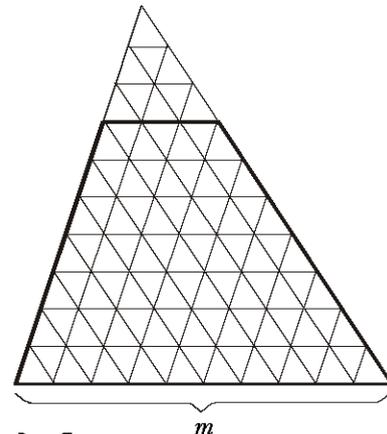


Рис. 7

2. См. рис.7.
 3. Если N – середина отрезка BM , то $AN \parallel DM$ (поскольку $AB = AD$) и $CN \parallel BE$ (поскольку $CM = CE$). Докажем, что при $BM = AC$ угол ANC прямой.
 Так как $MN = MC$, то $\angle MNC = \angle MCN$; так как $MN = MA$, то $\angle MNA = \angle MAN$. Имеем:

$$\angle NAC + \angle ANC + \angle ACN = 180^\circ,$$

$$(\angle NAC + \angle MNA) + (\angle MNC + \angle MCN) = 180^\circ,$$

$$2(\angle MNA + \angle MNC) = 180^\circ.$$

Получим

$$\angle ANC = \angle MNA + \angle MNC = 90^\circ,$$

что и требовалось доказать.

4. Расположению карт в колоде сопоставим число, в котором цифр столько, сколько в колоде карт, причем на k -м месте слева стоит «1», если k -я карта снизу лежит рубашкой вверх, и «2» в противном случае. Тогда после каждого преобразования это число уменьшается. (Действительно, сравним полученное число с предыдущим. Среди всех цифр, которые изменились, выберем самую левую, т.е. найдем самый старший изменившийся разряд. Очевидно, в этом разряде цифра «2» сменилась на «1».)

Поскольку количество n -значных чисел из единиц и двоек конечно (равно 2^n), в конце концов мы получим число, состоящее из одних единиц, что соответствует расположению всех карт рубашкой вверх.

5. *Указание.* Пусть $ABCD$ – произвольный прямоугольник, O – произвольная точка. Тогда $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$ (это нетрудно вывести из теоремы Пифагора).

Пусть теперь O – центр окружности задачи, R – радиус этой окружности, $ABCD$ – прямоугольник задачи. Имеем: $OB = OD = R$. Следовательно, любая искомая точка C лежит на окружности, Ω с центром O и радиусом $\sqrt{2R^2 - OA^2}$.

Обратно, возьмем любую точку C' этой окружности. На отрезке AC' как на диаметре построим окружность. Она пересекает данную окружность в двух точках; пусть B – любая из них. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ задачи, лежащий по ту же сторону AB , что и точка C' . По доказанному C лежит на окружности Ω , т.е. совпадает с точкой C' .

6. Достаточно узнать число, записанное в одной из клеток.

Заметим, что Леша знает разность любых двух чисел, записанных в соприкасающихся по точке клетках: $x - z = (x + y) - (y + z)$ (рис.8). Поэтому Леша знает и разность чисел, стоящих в любых двух клетках одного цвета. Осталось заметить, что из этих разностей ровно одна равна 63.

7. Пусть P и Q – середины AB и CD , O_1 и O_2 – центры окружностей, проходящих через точки A, M, C и B, M, D соответственно, H_1 и H_2 – проекции O_1 и O_2 на прямую PQ (рис.9).

1) Точки M, P и Q лежат на одной прямой. В самом деле, прямые PM и QM содержат радиусы окружностей, касающихся в точке M , и, следовательно, перпендикулярны общей

внутренней касательной к этим окружностям.

2) P и Q лежат на окружности с диаметром O_1O_2 . Действительно, $PO_1 \perp PO_2$, поскольку эти прямые – серединные перпендикуляры, соответственно, к отрезкам MA и

MB , угол между которыми прямой (M лежит на окружности с диаметром AB). Аналогично, $QO_1 \perp QO_2$.

3) Ясно, что $KH_1 = H_1M$, $LH_2 = H_2M$ (диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам).

4) $PH_1 = QH_2$, так как проекция середины отрезка O_1O_2 делит отрезок H_1H_2 пополам; но эта проекция делит пополам и

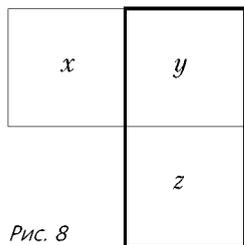


Рис. 8

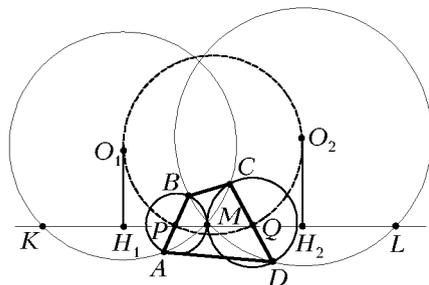


Рис. 9

отрезок PQ . Наконец,

$$\begin{aligned} |MK - ML| &= 2|MH_1 - MH_2| = 2|MP - MQ| = \\ &= 2 \left| \frac{1}{2} AB - \frac{1}{2} CD \right| = |AB - CD|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. S_{AOB} - S_{AH_AH_BB} &= S_{AOK} - S_{KH_AH_BB} = \\ &= S_{AOH_A} - S_{BOH_B} \text{ (рис.10)}. \end{aligned}$$

Но $OH_A \cdot AH_A = OH_B \cdot BH_B = 1$ (точки A и B лежат на графике).

9. Заметим, что $f(x) = (x+6)^2 - 6$. Отсюда видно, что

$$f(f(f(f(f(x)))))) = (x+6)^{32} - 6.$$

Ответ: $x = -6 \pm \sqrt[32]{6}$.

10. Без ограничения общности будем считать длину стороны клетки равной 1; докажем, что каждая из рассматриваемых сумм равна площади многоугольника.

Проведем, например, горизонтальные отрезки. Многоугольник разбивается ими на два треугольника и несколько трапеций; высота каждой из этих фигур равна 1. Выразим площади фигур через основания и высоты. Сложим эти площади и заметим, что каждый горизонтальный отрезок входит в сумму два раза.

11. *Ответ:* $2000^2 - 1$. Пусть $a = 2000m + n$, $b = 2000n + m$, d – наибольший общий делитель a и b . Тогда d делит также числа $2000a - b = (2000^2 - 1)m$ и $2000b - a = (2000^2 - 1)n$.

Поскольку m и n взаимно просты, то d делит $2000^2 - 1$. С другой стороны, при $m = 2000^2 - 2000 - 1$, $n = 1$ получаем $a = (2000^2 - 1)(2000 - 1)$, $b = 2000^2 - 1 = d$.

12. *Ответ:* 0. *Указание.* График функции $|\sin kx|$ на отрезке $[0; \pi]$ состоит из k одинаковых «шапочек», которые получаются из графика функции $\sin x$ на том же отрезке путем сжатия к оси ординат в k раз. При этом площадь под графиком также уменьшается в k раз. Как следствие, суммарная площадь под k «шапочками» одинакова при любом натуральном k .

13. *Ответ:* может. Многочлен $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ имеет корень t , больший 0, поскольку $P(0) < 0$ и $P(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Тогда $t^3 = t^2 + t + 1 > t^2 + t$. Возьмем длины палочек равными t^3, t^2, t . После первого отпиливания получим палочки с длинами $t^2, t, 1$. Так как отношение длин не изменилось, процесс будет продолжаться бесконечно.

14. *Ответ:* а) не могут; б) могут.

а) Пусть N – число игроков, $M = \lfloor N/2 \rfloor$. Игроков, занявших первые M мест, назовем сильными, а остальных – слабыми (между участниками с одинаковой суммой очков места распределяются произвольно). Пусть X – число правильных партий между сильными и слабыми. Сумма очков, набранных сильными во встречах между собой, равна $M(M-1)/2$, а во встречах со слабыми – не больше X . Поэтому средний результат сильного не больше $(M-1)/2 + X/M$. Аналогично, средний результат слабого не меньше $(N-M-1)/2 + (M(N-M) - X)/(N-M)$. Если есть неправильные партии, то не все игроки набрали поровну очков, и средний результат сильного больше, чем слабого. Отсюда $X > M(N-M)/2 >$

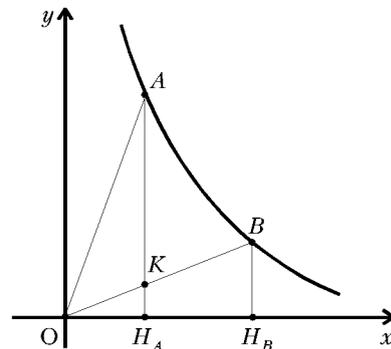


Рис. 10

$> N(N-1)/8$. Так как общее число партий равно $N(N-1)/2$, то доля правильных партий больше $1/4$.

б) Пусть сначала в турнире участвовал $2k+1$ игрок, причем каждый участник с номером $i \leq k$ проиграл участникам с номерами $i+1, \dots, i+k$ и выиграл у остальных, а каждый участник с номером $i > k$ выиграл у участников с номерами $i-k, \dots, i-1$ и проиграл остальным. Очевидно, что все игроки набрали по k очков, причем в таблице турнира выше главной диагонали единицы стоят лишь в $\frac{k(k+1)}{2}$ клетках из

$\frac{2k(2k+1)}{2}$. Теперь «размножим» каждого игрока, заменив его блоком из k новых, и пусть игроки из разных блоков играют друг с другом так же, как соответствующие прежние игроки, а игроки из одного блока играют друг с другом вничью. Получим новую таблицу, в которой по-прежнему у всех игроков поровну очков. Изменим эту таблицу так, чтобы суммы очков игроков перестали быть равными. Для этого будем менять результаты игроков из блока $k+1$: в их встречах с игроками из блока $k+1-i$ заменим ik выигранных ничьими так, что сумма очков каждого игрока из блока $k+1$ уменьшится, а каждого игрока из блока $k+1-i$ увеличится на $\frac{i}{2}$.

(Это можно сделать. Действительно, пусть A и B — k -элементные множества, $i \leq k$. Легко построить i (взаимно однозначных) отображений A на B так, что, какой элемент x множества A ни возьмем, образы x при любых двух из этих отображений различны.)

Напротив, в партиях с игроками из блока $k+1+i$ заменим ничьими ik проигрышей. Число s неправильных партий станет равно

$$k^2 \frac{2k(2k+1)}{2} - k^2 \frac{k(k+1)}{2} - 2k \frac{k(k+1)}{2}.$$

При этом общее число партий S равно

$$\frac{k(2k+1)(k(2k+1)-1)}{2}.$$

При $k=20$ неправильные партии составляют $\frac{235600}{335790} > 0,7$ от общего числа партий. Заметим также, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{s}{S} = \frac{3}{4}.$$

15. Будем помещать между плоскостями правильные тетраэдры, расстояние между противоположными ребрами которых равно расстоянию между плоскостями. Пусть одно из ребер каждого тетраэдра лежит в одной из граничных плоскостей, а противоположное ему — в другой. Два тетраэдра можно расположить так, чтобы конец «верхнего» ребра первого совпал с серединой «верхнего» ребра второго, а середина «нижнего» ребра первого — с концом «нижнего» ребра второго, и при этом как «верхние», так и «нижние» ребра обоих тетраэдров были перпендикулярны. Распространяв этот процесс на весь слой, получим, что каждый тетраэдр окружен четырьмя другими (рис.11). Эти «соседи» не позволяют

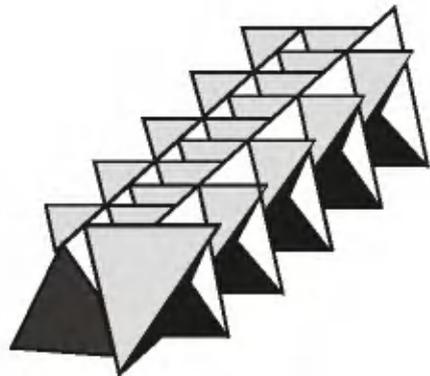


Рис. 11

сдвинуть тетраэдр во внешнюю (по отношению к нему) сторону от любой его грани.

Избранные задачи отбора на Российскую олимпиаду

1. Нет. Если три такие хорды нашлись, то они делят площадь круга в одинаковом отношении 3:4 и потому равны. Секторы между их концами равновелики, поэтому между хордами одинаковые углы по 60° . Но тогда можно показать, что эти секторы меньше по площади, чем соседние усеченные секторы.

2. Среди цифр числа n не более двух единиц, а остальные — нули. Всегда $S(ab) \leq S(a)S(b)$, причем равенство означает, что при умножении «в столбик» нет переносов из одного разряда в другой. Если при возведении n в четвертую степень нет переносов, то четвертая степень каждой цифры — однозначное число. Если в записи n хотя бы три единицы, то при возведении n^2 в квадрат появляется перенос. Если единиц не более двух, то переноса не возникает.

3. Так как вписанные углы KBD и KCA равны, то точки X, Y, B, C лежат на одной окружности. Тогда углы CBY и CXY равны как вписанные. Далее используем равенство вписанных углов CBD и CAD .

4. (Решение основано на работе ученицы 10 класса лицея «Вторая школа» Е.Муравьевой.) Треугольники, в которые вписаны равные окружности, будем называть отмеченными. Если отмечены какие-либо два треугольника, «симметричных относительно биссектрисы AD », то $AB = AC$.

Действительно, если отмечены AOE и AOF , то $\angle AEB = \angle AFC$, откуда $\angle ABE = \angle ACF$. Пусть отмечены OBF и OCE . Тогда в этих треугольниках равны углы при вершине O , опущенные из O на BF и CE высоты и радиусы вписанных окружностей. Отсюда легко вывести, что равны и сами треугольники. Так как $\angle OBF \neq \angle OEC$, то $\angle OBF = \angle OCE$.

Равенство $\angle OBD = \angle OCD$ следует и из отмеченности треугольников OBD и OCD ; доказав это, мы завершили бы решение задачи. (В самом деле, какую биссектрису l ни возьмем, найдется хотя бы одна пара «симметричных относительно l » отмеченных треугольников.) Однако мы не умеем доказывать это равенство без вычислений; не прибегая к ним, мы окончим решение несколько по-другому.

Очевидно, у треугольника ABC есть вершина, к которой прилегают отмеченные треугольники, — например, A . Значит, $AB = AC$. Опираясь на это, докажем, что из отмеченности OBF и OFA следует $AC = BC$.

Обозначим через O_1, O_2, O_3 центры окружностей, вписанных в треугольники AOE, AOF, BOF соответственно. Легко видеть, что $O_1O_2 \parallel BC, O_2O_3 \parallel AB, O_3O_1 \parallel BE$, откуда $O_2O_3 = O_1O_2$. Значит, окружности с центрами O_2 и O_3 имеют общую точку касания с $CF, CF \perp O_2O_3$, откуда $AC = BC$.

5. Зафиксировав k , проведем индукцию по числу ребер n . Начало очевидно. Для индуктивного перехода от $n-1$ к n сотрем ребро, соединяющее какие-то вершины A и B . Теперь количество правильных раскрасок есть многочлен $P(k)$. Из него нужно вычест количество правильных раскрасок графа, получаемого при отождествлении A и B . Но по индуктивному предположению это также некоторый многочлен $Q(k)$.

6. Если $x \leq 0$, то $x = -y^2$ для некоторого y , и $f(x) = f(f(f(y))) = -(f(y))^2 \leq 0$. В области $x > 0$ функция $f(x)$ взаимно однозначна, и из непрерывности следует ее строгая монотонность. Если $f(a) > 0$ для некоторого $a > 0$, то $f(f(x))$ возрастает при $x = a$, тогда как $-x^2$ убывает.

7. $n+1$. Для $n=0$ и $n=1$ результат очевиден. Пусть он верен для какого-то $n > 1$. В кубе с ребром 2 и плотной расстановкой ладей «раздуем» единичные кубики в 2^n раз. На место ладей поставим кубы с плотной расстановкой и $n+1$ «угловиком». Получим куб с ребром 2^{n+1} и не менее чем $n+2$ «угловиками». Больше их быть и не может: если «угловик» с ребром l содержится в «угловике» с ребром m , то $m \geq 2l$. Последнее следует из того, что в их «разности» можно расставить не более $3(m-l)^2$ ладей так, чтобы они не били друг

друга, откуда $3(m-l)^2 \geq m^2 - l^2$.

8. Последовательность натуральных чисел a_k возрастающая, причем $a_{k+1} \leq 2a_k$. Поэтому для любого p найдется такое наименьшее a_k , что $10^p \leq a_k \leq 10^{p+1}$. Для всякого натурального a справедливо неравенство $S(a) \leq 9(\lg a + 1)$. Поэтому для достаточно больших p имеем $S(a_{k-1}) < 10p$. Тогда $10^p < a_k < 10^p + 10p$.

Пусть $p = 10^q$ и a_l – первый член последовательности, который больше $10^p + 10p$. Тогда

$$10^{10^q} < a_{l-1} < 10^{10^q} + 10^{q+1},$$

и для достаточно больших q получим

$$S(a_{l-1}) < 10q, \quad a_l < 10^{10^q} + 10^{q+1} + 10q.$$

Проведя аналогичные рассуждения для $q = 10^r$, получим, что для некоторого a_m справедливо $\lg \lg a_m > r$,

$S(a_m) < 3 + 9(\lg r + 2)$. При росте r отношение $\frac{9 \lg r + 21}{r}$ стремится к нулю.

9. *Ответ:* 1998964 = 1999000 – 36. Отметим в графе две вершины, не соединенные ребром. Если найдутся еще две такие вершины, то отметим и их, и т.д. Очевидно, что всего будет отмечено менее 10 вершин. Если теперь найдется вершина, не соединенная ребром с какой-либо отмеченной, то отметим и ее, и т.д. Суммарно будет отмечено не более 9 вершин. Каждая неотмеченная соединена со всеми вершинами графа. В «оптимальном» варианте отмечено 9 вершин и все ребра между ними отсутствуют.

Избранные задачи Московской физической олимпиады

Первый теоретический тур

7 класс

1. Дальность полета струи больше в эксперименте Олега.
2. На переднее колесо действует сила трения, направленная назад, а на заднее колесо – вперед, причем такая же по величине.
3. 1,424 г/л.
4. Пруды будут пересыхать в такой последовательности: 2, 3, 1. *Указание:* скорость высыхания зависит от уровня воды в пруду.

8 класс

1. $M(1 - \rho_2/\rho_1) \leq m \leq M$ при $\rho_2 \leq \rho_1$, $0 \leq m \leq M$ при $\rho_2 > \rho_1$.
2. $m \approx 1$ кг.
3. См. рис.12.

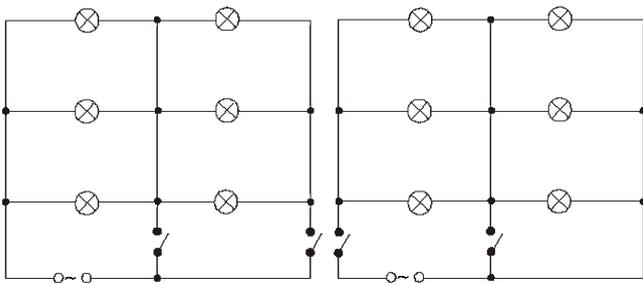


Рис. 12

9 класс

1. См. рис.13.
2. $k = \left[\frac{T_1 r + (R-r)^2 T_2 / T_1}{\tau R^2 - r^2} \right] + 1 = 26$, т.е. мы попадем на середину 26 песни.
3. $a = (2F - \mu mg) / M \approx 8,5 \text{ м/с}^2$.

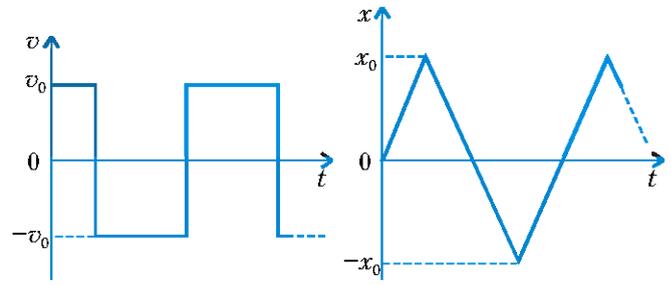


Рис. 13

4. Нужно параллельно соединить друг с другом четыре цепи, две из которых включают в себя по 52 последовательно соединенные лампочки на 3,5 В/0,28 А, а остальные – по 53 последовательно соединенные такие же лампочки. Затем к этой схеме нужно последовательно подключить лампочку на 36 В/40 Вт. При этом в гирлянде будет задействовано 210 лампочек на 3,5 В.

10 класс

1. См. рис.14. 2. $\Delta t = \frac{P}{2m(\mu g)^2} + \frac{mv^2}{2P} \approx 4,2 \text{ с}$.
3. $C = 4\pi\epsilon_0 R$.

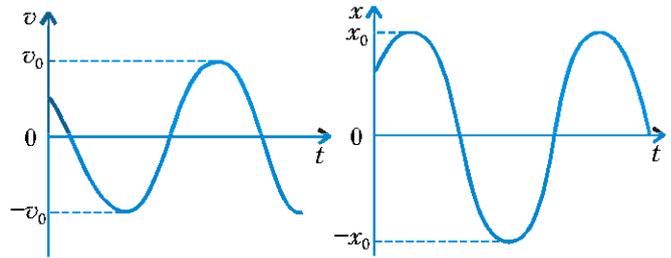


Рис. 14

11 класс

1. См. рис.15. 2. Возможны 12 вариантов: 0, $U/4$, $U/3$, $U/2$, $2U/3$, $3U/4$, U , $4U/3$, $3U/2$, $2U$, $3U$, $4U$.
3. $\beta \approx r / (L(n-1)) = 0,1 \text{ рад}$.
4. $t = \frac{\lg(n_2/n_1)}{\lg 2} \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} \approx 6 \cdot 10^9 \text{ лет}$.

Сила трения, Н

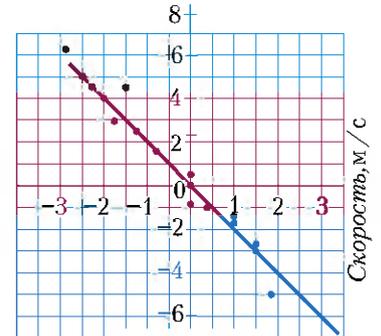


Рис. 15

Второй теоретический тур

8 класс

1. Возможны 4 варианта: $t_1 = 120 \text{ с}$, $t_2 \approx 10,9 \text{ с}$, $t_3 \approx 5,7 \text{ с}$, $t_4 \approx 3,9 \text{ с}$.
2. Половина карандаша. 3. $t_1 = t / \sqrt[3]{n} = 10 \text{ мин}$.

9 класс

1. $M > \rho b(c - a/\sqrt{2})^2$. 2. $(M + 2m)g \frac{1 + \mu^2}{1 + \mu} \leq F \leq (M + 2m)g \frac{1 - \mu^2}{1 - \mu}$.
3. $v_a(t) = \begin{cases} \frac{Mv}{m + M} + \mu g t & \text{при } 0 \leq t \leq \tau, \\ v & \text{при } t > \tau, \end{cases}$

где $\tau = \frac{mv}{(m+M)\mu g}$ – время, через которое доска перестанет

двигаться относительно дороги. 4. $I \approx 0,43$ мА.

10 класс

1. $n = \left[\frac{gt^2/(2s)+1}{2} \right]$ при $s \leq gt^2/2$; случай $s > gt^2/2$ невозможен.

2. $v_{ys} = \sqrt{v^2 \sin^2 \alpha + (vL \cos \alpha + ul \sin \alpha)^2 / (L+l)^2}$.

3. $\eta = 2(T_2 - T_1) / (3T_1 + 5T_2)$. 4. $I \approx \frac{E}{18000R}$. 5. $F_1 = Fa^2/b^2$.

11 класс

1. $a_1 = a\sqrt{13/2}$. 2. $T = \sqrt{\frac{2\pi V}{gR^2 \sin(V/(R^2L))}}$.

IV Международная астрономическая олимпиада

Теоретический тур

8-10 классы

1. $d = 2540 \text{ мм} \cdot 31' \cdot \pi / (180 \cdot 60) \approx 23 \text{ мм}$.

2. а) Можно; б) можно на пределе чувствительности; в) нельзя.

3. На Северном полюсе во время, близкое к дню весеннего равноденствия (в конце марта), или же на Южном полюсе во время, близкое к дню осеннего равноденствия (в конце сентября). Продолжительность восхода составит $\approx 32,5$ ч.

4. а) Начнем с того, что на Северном полюсе незаходящих звезд ровно половина от 6000, т.е. имеется 3000 звезд, склонение которых больше 0° . Если мы отойдем от полюса на 1° , то некоторые из этих звезд (склонение которых меньше 1°) станут заходящими. При этом, конечно, появятся другие восходящие и заходящие звезды (склонение которых больше -1°), но для решения нашей задачи это не имеет значения. Оценим, какова будет доля звезд из 3000, склонения которых расположены в интервале от 0° до 1° . Это есть отношение площади полосы шириной 1° вблизи небесного экватора к площади полусферы $2\pi R_0^2$. Площадь полосы – это ее длина вдоль небесного экватора $2\pi R_0$, умноженная на ширину $R_0 \cdot \pi/180$. Отношение площадей равно

$(2\pi R_0 \cdot R_0 \cdot \pi/180) / (2\pi R_0^2) = \pi/180$. Значит, $3000 \cdot \pi/180 \approx 50$

звезд станут заходящими, а незаходящими будут 2950 звезд.

б) Здесь тоже можно воспользоваться похожим приемом (проделайте это самостоятельно). Однако правильный ответ можно дать сразу: склонение, большее 89° , имеет только одна видимая невооруженным глазом звезда – Полярная.

5. Задача допускает множество решений. Например, авторское решение предполагало, что нужно равноускоренно подниматься вертикально вверх (т.е. двигаться так, чтобы высота подъема была пропорциональна квадрату времени).

6. Эту задачу удобнее всего решать в системе отсчета, связанной с отрезком прямой, соединяющей центры Земли и Солнца. В этой системе движения всех небесных тел являются синодическими. Синодический период Луны составляет 29,5 дней, поэтому скорость тени Луны относительно центра Земли равна $V_1 = 2\pi \cdot 384\,000\,000 \text{ м} / 29,5 \cdot 86400 \text{ с} \approx 946 \text{ м/с}$.

Но поверхность Земли вблизи экватора движется в том же направлении со скоростью $V_2 = 40\,000\,000 \text{ м} / 86400 \text{ с} \approx 463 \text{ м/с}$.

Таким образом, скорость лунной тени относительно земного наблюдателя равна $V = V_1 - V_2 \approx 480 \text{ м/с}$.

11-12 классы

1. Согласно формуле Вина, длина волны спектрального максимума обратно пропорциональна температуре тела, следовательно, первое тело в 5 раз горячее. Согласно закону Планка, тело с более высокой температурой излучает сильнее на всех длинах волн. По формуле Стефана – Больцмана полная мощность излучения с единицы поверхности первого тела в $5^4 = 625$ раз выше. Для того чтобы ответить на вопрос о соотношении полных энергий, излучаемых этими звездами, данных в задаче не хватает: нужно знать еще соотношение размеров звезд.

2. Радиус черной дыры найдем из условия, что на расстоянии этого радиуса от центра дыры вторая космическая скорость равна скорости света: $c = \sqrt{2GM/R}$, поэтому диаметр дыры равен $D = 4GM/c^2 \approx 1,5 \cdot 10^{-20} \text{ м}$. Объекты такого размера современной науке неизвестны, а свет его просто не заметит – ведь длина волны света ($\sim 10^{-7} \text{ м}$) на 13 порядков больше размера нашей черной дыры!

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования

<http://www.courier.com.ru>

Vivos Voco!

<http://vivovoco.nns.ru>

(раздел «Из номера»)

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**А.А.Егоров, Л.В.Кардаевич, С.П.Коновалов,
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Чернуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**Д.Н.Гришуква, В.В.Иванюк, М.М.Константинова,
А.И.Пацхверия, М.А.Сумнина, Е.А.Силина, П.И.Чернуцкий**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во №0110473

Адресредакции:

117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»,
тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени
ГУП Чеховский полиграфический комбинат
Министерства Российской Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
142300, г.Чехов Московской области,
Тел. (272) 71-336. Факс (272) 62-536
Заказ №

КАСПАРОВ ЗАБЛУДИЛСЯ во всемирной паутине

Еще несколько лет назад трудно было представить, чтобы шахматист мог играть, развалившись в кресле на кухне, с партнером, который находится в далекой от него Новой Зеландии или на Бермудских островах. И при этом ему не нужны ни доска, ни фигуры: достаточно нажимать кнопку компьютера и бросать взгляд на монитор. Пожалуй, только ради одного этого следовало изобрести Интернет...

Любители шахмат пользуются «всемирной паутиной» давно, известные игроки, в том числе Карпов и Каспаров, не раз проводили показательные партии. И вот в феврале 2000 года, впервые в истории, состоялся супертурнир с общим призовым фондом 55 тысяч долларов, в котором участвовали 16 гроссмейстеров из десяти стран, причем один из них электронный. Этот виртуальный турнир проходил по олимпийской системе, партнеры играли по две партии с укороченным контролем — час на партию, при счете 1:1 предусматривался блиц, который, впрочем, ни разу не понадобился. Разумеется, пользоваться справочниками, обращаться к игровым программам и консультироваться с другими шахматистами запрещалось: за этим в каждой стране следил специальный арбитр.

Наибольший интерес среди 16 участников турнира вызвал израильский робот «Deep Junior». Еще пару лет назад он был обычным однопроцессорным РС по имени «Junior», но, превратившись в суперкомпьютер с 4 процессорами, поменял свое имя (а может быть, взял отчество?) и стал весьма опасным соперником и для своих электронных коллег, и для белковых шахматистов. Во всяком случае на турнире, предшествовавшем сетевому, где сражались все сильнейшие в мире машины, он легко занял первое место.

Учитывая, что слово «Deep» плохо действует на чемпиона мира Гарри Каспарова — именно программе «Deep Blue» в 1997 году он проиграл свой исторический матч из шести партий с нормальным контролем времени, — все с нетерпением ждали встречи гигантов. И все шло к тому, что поединок Каспаров — «Deep Junior» состоится и станет решающим. «Глубокий», хоть и «Молодой», обыграл испанца Иљескаса и вышел в четвертьфинал.

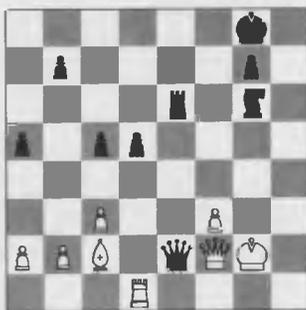
В четвертьфинале компьютер встретился с одним из сильнейших шахматистов

мира М.Адамсом, который в 1/8 финала выиграл матч у Б.Гулько. И в первой же партии черными робот был близок к победе.

М.Адамс — «Deep Junior»

Дебют слона

1. e4 e5 2. ♘c4 ♗f6 3. d3 ♘c5 4. ♗f3 ♗c6 5. c3 a6 6. ♗bd2 0-0 7. ♗b3 ♗a7 8. h3 h6 9. ♖e2 d6 10. ♗f1 ♗a5 11. ♘c2 ♗e8 12. ♗g3 ♗c6 13. 0-0 ♗d7 14. ♗h2 ♗e6 15. ♗b3 d5 16. ♗g4 ♗:g4 17. hg ♗d7 18. ♗f5 ♗ad8 19. ♘c2 ♗e7 20. ♗d1 a5 21. g3 h5 22. d4 ed 23. ♗:d4 ♗:g4 24. f3 ♗h3 25. ♗g5 f6 26. ♗e3 c6 27. ♗h2 ♗b8 28. ♗f4 ♗:f4 29. gf ♗g6 30. ♖e3 ♗f8 31. ♖g1 ♗e6 32. ♖g3 ♖c7 33. e5 h4 34. ♖:h4 fe 35. fe c5 36. ♗:e6 ♗:e6 37. ♗g2 ♗:e5 38. ♗e1 ♗de8 39. ♗:e5 ♖:e5 40. ♗d1 ♗e6 41. ♖g3 ♖e2+ 42. ♖f2 ♗:g6.



И в этой позиции, где Адамс мог спокойно сдать, израильский компьютер неожиданно отключился от Интернета. После часового ожидания решено было зафиксировать ничью. Однако наладить связь с машиной в этот день так и не удалось, и в результате робот был дисквалифицирован. Обидно, ведь он ни в чем не виноват, а англичанину повезло: проиграв первую партию, во второй, черными, он вряд ли сравнял бы счет. Подкачали организаторы турнира.

Итак, Каспаров не дождался в полуфинале электронного соперника. Обыграл Адамса (а до этого индийца М.Баруа и голландца Л. Ван Вели), он оказался в финале. Здесь его партнером стал голландец Й.Пикет, уверенно обыгравший по дороге к цели американца Я.Сейравана и наших корифеев А.Морозевича и П.Свидлера. В результате финального поединка никто не сомневался, но гроссмейстер из страны тюльпанов преподнес сенсацию. Черными он сумел устоять, а белыми одолеть чемпиона мира. Приведем обе партии финального матча. Кстати, пока они игрались, на каспаровский сайт, где демонстрировались все партии турнира в реальном режиме времени, заглянуло несколько десятков тысяч любителей шахмат.

Г.Каспаров — Й.Пикет

Испанская партия

1. e4 e5 2. ♗f3 ♗c6 3. ♗b5 a6 4. ♗a4 ♗f6 5. 0-0 ♗e7 6. ♗e1 b5 7. ♗b3 d6 8. c3 0-0 9. h3 ♗a5 10. ♘c2 c5 11. d4 ♖c7 12. ♗bd2 ♗d7 13. ♗f1 cd 14. cd ♗ac8 15. ♗e3 ♗c6 16. d5 ♗b4 17. ♗b1 a5 18. a3 ♗a6 19. b4 ♗a8 20. ♗d2 ♗fc8 21. ♗d3 ♖b7 22. g4 g6 23. ♗f1 ab 24. ab ♗d8 25. ♗g3 ♗c7 26. ♖e2 ♗:a1 27. ♗:a1 ♗a8 28. ♖e1 ♗fe8 29. ♖c1 ♗g7 30. ♗:a8 ♖:a8 31. ♗h6 ♗ce8 32. ♖b2 ♖a4 33. ♗g2 ♗b6 34. ♗c2 ♖a7 35. ♗d3 ♖a4 36. ♗e2 ♗c7 37. ♗:e5! de 38. ♖:e5 ♗ce8 39. ♗:g7 ♖d1 40. ♗h6 ♖d3 41. ♖e7 ♗g7 42. ♗g3 ♖c2 43. ♖f6.

Кажется, что положение черных безнадежно, но голландец находит эффектный маневр коня, вынуждающий соперника форсировать ничью.

43... ♗f5! 44. ♖b6 ♗4+ 45. ♗h2 ♗f3+ 46. ♗g2 ♗h4+ 47. ♗h2 ♗f3+ 48. ♗g2 ♗h4+ 49. ♗h2. Ничья.

Й.Пикет — Г.Каспаров

Английское начало

1. ♗f3 ♗f6 2. c4 c5 3. ♗c3 d5 4. cd ♗:d5 5. g3 ♗c6 6. ♗g2 ♗c7 7. d3 e5 8. 0-0 ♗e7 9. ♗d2 ♗d7 10. ♗c4 0-0.

Черные жертвуют пешку, рассчитывая на контригру по белым полям.

11. ♗:c6 ♗:c6 12. ♗:e5 ♗e8 13. ♖b3 ♗f6 14. ♗g4 ♗d4 15. e3 ♗:c3 16. ♖:c3 b6 17. f3 ♗b5 18. ♗f2 ♗d7 19. e4 ♗e6 20. ♗c3 a5 21. ♗ad1 ♗ad8 22. ♗d2 ♖c6 23. ♗c1 ♖b7 24. a3 ♗d4 25. ♗g2 ♗c8 26. ♗b1 ♗fd8 27. ♗:d4 ♗:d4 28. b4 ab 29. ab ♖d7 30. bc bc 31. ♗bb2 h6 32. ♗a2 ♗h7 33. ♗a5 ♗d8 34. ♖c5 ♗:d3 35. ♗:d3 ♗:d3 36. ♗:d3 ♖:d3 37. ♗a2 ♖b3 38. ♖c2 ♖:c2 39. ♗:c2.

Положение упростилось, а лишняя пешка, приобретенная Пикетом в дебютной стадии, сохранилась. Возник классический ладейный эндшпиль «четыре пешки против трех на одном фланге», который считается ничейным. Однако Каспаров действует легкомысленно и неожиданно терпит фиаско. Сейчас необходимо было побыстрее перевести черную ладью на седьмую горизонталь, и крепость черных не пробить.

39... h5 40. f4 g6 41. e5 ♗d3 42. ♗h3 ♗e3 43. ♗h4 ♗g7 44. ♗g5 ♗e1 45. ♗c7 ♗e2 46. ♗e7 ♗a2 47. f5 gf 48. e6 h4 49. ♗f7+ ♗g8 50. ♗f6. Черные сдались.

Итак, первый супертурнир в Интернете выиграл голландский гроссмейстер Йерун Пикет, за что и был награжден 20 тысячами долларов.

Е.Гук



Физики на монетах мира



В 1984 году Республика Сан-Марино выпустила серию из шести памятных монет, посвященных выдающимся ученым всех времен и народов.

На монете достоинством в 200 лир отчеканен портрет ЭНРИКО ФЕРМИ, внесшего определяющий вклад в развитие статистической физики, квантовой теории твердого тела, ядерной науки и технологии.

Высшее образование Ферми получил в Пизанском университете, отметившем в 1993 году свое 650-летие. К этой знаменательной дате в Италии была выпущена монета достоинством в 5000 лир. На ней изображено здание университета и маятник Фуко. С помощью этого знаменитого прибора удастся проследить влияние вращения Земли на движущиеся тела.

Высвобождаемая в цепных реакциях энергия атомного ядра предвещала быстрое развитие всех энергоемких отраслей производства. Интерес общества к атомной и ядерной физике выражался порой в самых причудливых формах. Так, на бельгийской банкноте 1964 года достоинством в 20 франков изображен «Атомикум» – один из павильонов Международной торгово-промышленной выставки в Брюсселе.

(Подробнее об Энрико Ферми – внутри журнала.)

