ISSN 0130-2221

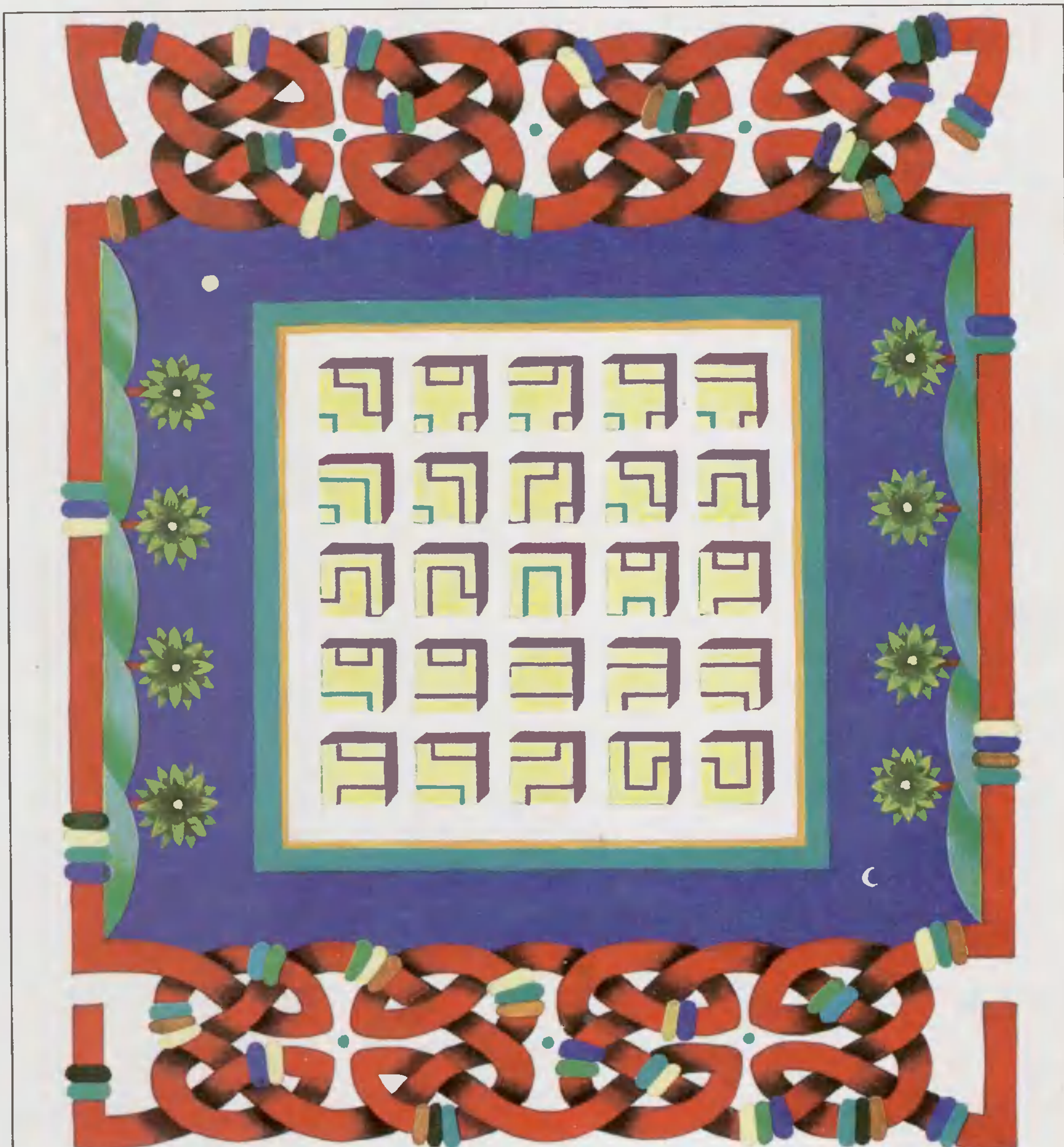
МАРТ/АПРЕЛЬ

2000 · №2

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

Узоры



25 плиток имеют узоры, как это показано на рисунке. Прикладывая плитки друг к другу, получите (в квадрате размером 5 × 5) рисунок замкнутой непересекающейся линии.

Попробуйте составить аналогичный узор, используя только 16 квадратиков.

Л.Мочалов

КВАНТ

МАРТ АПРЕЛЬ 2000 № 2

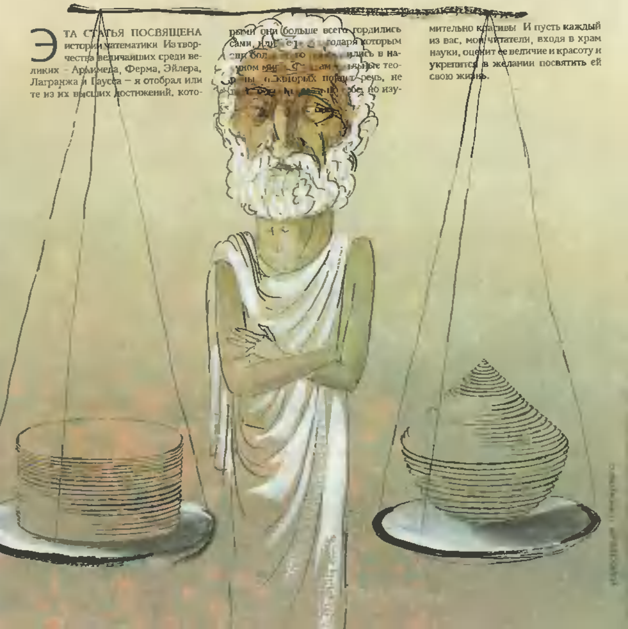
НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Великие математики прошлого и их великие теоремы

В. ТИХОМИРОВ



Эта статья посвящена истории математики. Из творчества величайших среди великих – Архимеда, Ферма, Эйлера, Лагранжа и Гаусса – я отобрал или те из их высших достижений, которыми они больше всего гордились сами, или [illegible] благодаря которым они бол[illegible]ились в научном м[illegible]ам[illegible]ярные теоремы, о которых пойдёт речь, не [illegible] себе, но изумительно красивы. И пусть каждый из вас, мои читатели, входя в храм науки, оценит ее величие и красоту и укрепится в желании посвятить ей свою жизнь.

Архимед и его формула для объема шара

Я вдруг обнаружил маленькую колонну, вершина которой поднималась из зарослей. На ней были изображены шар и цилиндр, которые я искал. Я тотчас же сказал сопровождавшим меня, что перед нами, несомненно, могильный памятник Архимеда.

Цицерон

Архимед (ок. 287—212 до н.э.) — величайший ученый Древнего мира. Имя его овеяно легендами. Мы восклицаем: «Эврика!» — выражая, как Архимед, восторг по поводу своей удачи. Каждый знает, что он может перевернуть мир, если найдется надежная точка опоры. У каждого перед глазами сцена: убийца с обнаженным мечом и сидящий старец, восклицающий: «Не трогай моих чертежей!»

Архимед общепризнанно считается одним из величайших гениев в истории человечества. Его вклад в математику огромен. Именно он придумал формулу для определения площади треугольника по его сторонам (она известна нам как формула Герона). Не кто иной, как Архимед первый дерзнул исчислить размеры окружающего нас мира. Он определил границы для числа π, доказав, что

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Вплотную он подошел к понятию определенного интеграла, опередив человечество почти на два тысячелетия. Ему принадлежат точные формулировки законов природы, сохранившиеся в неприкосновенности на все времена. Но более всего он гордился найденной им формулой объема шара, и в память об этом потомки изобразили шар и цилиндр на его могильном камне.

Докажем, следуя идеям Архимеда, тот результат, который доставил ему высшую творческую радость.

Теорема 1. *Объем шара радиуса 1 равен* $\frac{4}{3}\pi$.

Доказательство. Мы будем опираться на следующие две формулы стереометрии: объем цилиндра с радиусом основания R и высотой H равен $\pi R^2 H$, и объем конуса с радиусом основания R и высотой H равен $\frac{1}{3}\pi R^2 H$. Эта последняя формула также принадлежит Архимеду.

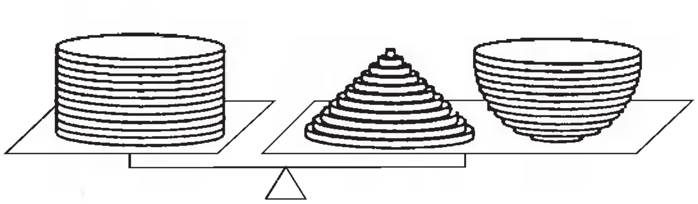
А теперь перейдем к доказательству. Я надеюсь, вы еще не забыли детских игрушек, которые называются *пирамидками.* Вот как они устроены: имеются подставка с вертикальной палочкой и набор колечек разного размера. Надо нанизать эти колечки на палочку так, чтобы размеры колечек увеличивались по мере приближения к подставке. Тогда получится фигура, похожая на конус.

Доказательство теоремы Архимеда (по Архимеду) очень легко понять с помощью подобных игрушек. Только надо сделать не одну — коническую, а три разных — цилиндрическую (когда колечки будут иметь радиус 1, сами будут тоненькими-претоненькими, а если собрать их все вместе, то они образуют цилиндр высоты 1), коническую (из таких же тоненьких колечек, но разных радиусов, из которых можно собрать «почти» конус высоты и радиуса основания, равных 1) и «полушаровую» (опять-таки из таких же тоненьких колечек, из которых можно собрать «почти» полушар радиуса 1). При этом все колечки должны быть сделаны из одинакового материала.

Вслед за Архимедом, возьмем аптекарские весы с плоскими чашами и поставим на одну чашу собранную из колечек игрушку-цилиндр, а на другую — конус и полушар, причем конус поставим основанием на чашу весов, а полушар — «на голову», чтобы плоское основание полушара было сверху и расположено горизонтально.

Пусть высоты колечек одинаковы и равны δ, где δ — очень малое число. Подсчитаем, каков объем колечек, находящихся на одной и той же высоте h. У цилиндрического колечка этот объем равен $\pi\delta$, у конического $\pi(1-h)^2\delta$, а у «полушарного» $\pi\left(1-(1-h)^2\right)\delta$ (ибо радиус колечка у конуса равен $1-h$, а у полушара, по теореме Пифагора, $\sqrt{1-(1-h)^2}$). Суммарный объем на каждой из чаш весов оказался одинаковым. Но если δ очень мало, то коническая игрушка будет почти неотличима от конуса, полушаровая — от полушара, а цилиндрическая — всегда цилиндр.

В пределе получаем, что объем полушара радиуса 1 равен объему цилиндра с радиусом основания и высотой, равными 1, минус объем конуса с радиусом основания и высотой, также равными 1. Откуда следует теорема 1.



Теорема Ферма—Эйлера о представлении простых чисел в виде суммы двух квадратов

Быть может, потомство будет признательно мне за то, что я показал ему, что Древние знали не все.

Пьер Ферма

Пьер Ферма (1601—1665) — человек удивительной судьбы: один из величайших математиков всех времен, он не был, в современной терминологии, «профессиональным» математиком. По профессии Ферма был юристом. Он получил великолепное гуманитарное образование и был выдающимся знатоком искусства и литературы. Всю жизнь он проработал на государственной службе, последние 17 лет был советником местного парламента в Тулузе.

К математике его влекла бескорыстная и возвышенная любовь. В те годы не было еще математических журналов, и Ферма почти ничего не напечатал при жизни. Но он много переписывался со своими современниками, и посредством этой переписки некоторые его достижения становились известными. Пьеру Ферма повезло с детьми: сын обработал архив отца и издал его.

«Я доказал много исключительно красивых теорем», — сказал как-то Ферма. Особенно много красивых фактов удалось ему обнаружить в теории чисел, которую, собственно, он и основал.

Он внес огромный вклад в зарождающиеся новые направления, определившие последующее развитие науки: математический анализ и аналитическую геометрию. Мы признательны Ферма за то, что он приоткрыл для нас мир, полный красоты и загадочности.

Следующая теорема, несомненно, принадлежит к числу высших достижений математики XVII—XVIII веков.

Взгляните на несколько первых нечетных простых чисел:

$$3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ \ldots$$

Числа 5, 13, 17 представимы в виде суммы двух квадратов: $5 = 2^2 + 1^2$, $13 = 2^2 + 3^2$, $17 = 1^2 + 4^2$, а остальные числа (3, 7, 11, 19) эти свойством не обладают. Можно ли объяснить этот феномен? Ответ на этот вопрос дает

Теорема 2. *Для того чтобы нечетное простое число было представимо в виде суммы двух квадратов, необходимо и достаточно, чтобы оно при делении на 4 давало в остатке 1.*

Немного истории

На рождество 1640 года в письме от 25 декабря Пьер Ферма извещал без доказательства знаменитого Мерсенна, друга Декарта и главного посредника в переписке ученых того времени, о том, что «всякое простое число, которое при делении на четыре дает единицу, единственным способом представимо как сумма двух квадратов».

Спустя почти двадцать лет после письма Мерсенну в письме к Каркави, отправленном в августе 1659 года, Ферма приоткрывает замысел доказательства сформулированной выше теоремы. Он пишет, что основная идея доказательства состоит в *методе спуска*, позволяющем из предположения, что для какого-то простого числа вида $4n + 1$ заключение теоремы неверно, получить, что оно неверно и для меньшего числа того же вида и т.д., пока мы не доберемся до числа 5, когда окончательно придем к противоречию.

Первые доказательства, которые впоследствии были опубликованы, найдены Эйлером между 1742 и 1747 годами. Причем, желая утвердить приоритет Ферма, к которому он испытывал чувства глубочайшего уважения, Эйлер придумал доказательство, соответствующее описанному выше замыслу Ферма.

Воздавая должное обоим великим ученым (об Эйлере речь еще впереди), мы называем эту теорему *теоремой Ферма—Эйлера.*

Есть свойство, присущее почти всякому прекрасному математическому результату, равно как и почти всякой неприступной и прекрасной горной вершине: его можно штурмовать с разных сторон, и все пути доставляют наслаждение тому, кто не устрашится ими последовать.

В своей статье в «Кванте»[1] я привел три совершенно различных доказательства. Одно из них было придумано Лагранжем в XVIII веке, другое — Германом Минковским в XIX веке, а третье — нашим современником Даном Цагиром. Есть также очень красивое доказательство, использующее теорию делимости чисел вида $n + mi$, где n, m — целые.[2] Здесь я ограничусь лишь первым из названных.

Доказательство Лагранжа

Это доказательство опирается на следующую *лемму Вильсона*: если p — простое число, то число $(p-1)! + 1$ делится на p.

Чтобы не отвлекаться на доказательство этого вспомогательного факта, продемонстрирую лишь основную идею доказательства на примере простого числа 13. Для любого целого числа x $(2 \le x \le 11)$ найдется такое число y $(2 \le y \le 11)$, что $x \cdot y$ при делении на 13 дает в остатке 1. Действительно,

$$(13-1)! = 12! =$$
$$= (2\cdot7)(3\cdot9)(4\cdot10)(5\cdot8)(6\cdot11)\cdot12,$$

и при этом все произведения в скобках при делении на 13 дают в остатке 1, а значит, число 12! при делении на 13 даст в остатке 12, откуда (для выбранного нами числа 13) следует утверждение леммы Вильсона.

Из леммы Вильсона извлечем такое следствие: если p — простое число вида $p = 4n + 1$, где n — натуральное число, то $((2n)!)^2 + 1$ делится на p. Действительно, из леммы Вильсона следует, что $(4n)! + 1$ делится на p, и теперь необходимое утверждение вытекает из следующей выкладки:

$$(4n)!+1 = (2n)!(2n+1)\cdot\ldots\cdot(4n)+1 =$$
$$= (2n)!(p-2n)(p-2n-1)\cdot\ldots\cdot(p-1)+1 \equiv$$
$$\equiv (2n)!(-1)^{2n}(2n)!+1 \equiv$$
$$\equiv ((2n)!)^2 + 1 (\mathrm{mod}\, p).$$

[1] *«Квант» №10 за 1991 г.*
[2] *См. об этом: Шнирельман Л.Г. Простые числа (М.: ГИТТЛ, 1940); Сендеров В., Спивак А. Суммы квадратов и целые гауссовы числа («Квант» №3 за 1999 г.).*

Обозначим $(2n)!$ через N. Мы доказали, что $N^2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p)$.

Теперь нам предстоит преодолеть основную трудность. Рассмотрим все пары целых чисел (m, s) такие, что $0 \le m \le \left[\sqrt{p}\right]$, $0 \le s \le \left[\sqrt{p}\right]$ (где через $\left[\sqrt{p}\right]$ обозначена целая часть числа $\sqrt{p}$ — наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{p}$). Число таких пар $\left(\left[\sqrt{p}\right]+1\right)^2 > p$. Значит, по крайней мере для двух *различных* пар (m_1, s_1) и (m_2, s_2) имеем: $m_1 + Ns_1 \equiv m_2 + Ns_2 \ (\mathrm{mod}\ p)$, т.е. число $a + Nb$, где $a = m_1 - m_2$, $b = s_1 - s_2$, делится на p. При этом $|a| \le \left[\sqrt{p}\right]$, $|b| \le \left[\sqrt{p}\right]$. Но тогда число $a^2 - N^2b^2 = (a+Nb)(a-Nb)$ делится на p. Учитывая, что $N^2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p)$, получим, что $a^2 + b^2$ делится на p, т.е. $a^2 + b^2 = rp$, где r — натуральное число ($r \ne 0$, ибо иначе пары были бы одинаковы). С другой стороны, $a^2 + b^2 \le 2\left[\sqrt{p}\right]^2 < 2p$, т.е. $r = 1$ и $a^2 + b^2 = p$. Теорема 2 доказана.

Вопрос о представлении чисел в виде суммы двух квадратов исчерпывается следующим утверждением:

Натуральное число представимо в виде суммы целых чисел тогда и только тогда, когда все простые сомножители вида $4k + 3$ входят в разложение этого числа на простые сомножители с четными показателями.

Эйлер и его формула $e^{\pi i} = -1$

Его [Эйлера] творчество изумительно и в науке беспримерно.
А.Н.Крылов

Однажды, когда я учился в восьмом классе, мой друг и одноклассник написал мне формулу Эйлера, которой я посвящаю этот раздел. Тогда я уже знал, что e — это число: две целых, семь десятых, год рождения Толстого, год рождения Толстого и дальше — другие десятичные знаки, запоминать которые уже необязательно(e = 2,718281828...). Я знал также, что

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Разумеется, я имел представление о числе π, о том, что такое степень, и слышал о том, что i — это какое-то мистическое число, квадрат которого равен −1. Формула Эйлера потрясла меня, как, пожалуй, ничто математическое не потрясало ни до, ни после. Эта формула восхищала не одного меня. Наш знаменитый академик, математик и кораблестроитель Алексей Николаевич Крылов, слова которого я поставил эпиграфом к этому разделу, видел в этой формуле символ единства всей математики, ибо в ней «−1 представляет арифметику, i − алгебру, π − геометрию и e − анализ».

Можно очень многое сказать о творце этой формулы Леонарде Эйлере (1707–1783) − гениальном математике, физике, механике и астрономе, прожившем значительную часть своей жизни в России и похороненном в Санкт-Петербурге.

Леонард Эйлер − один из величайших тружеников в истории науки. Ему принадлежит 865 исследований по самым разнообразным проблемам. В 1909 году швейцарское естественнонаучное общество приступило к изданию полного собрания сочинений Эйлера. С тех пор прошел срок больший, чем вся жизнь Эйлера, издано около семидесяти томов его сочинений, а издание еще не закончено.

Переписка Эйлера составляет свыше 3000 писем. Уже одно это − свидетельство необыкновенного нравственного облика ученого: дурным людям писем не пишут. Все ученые, современники Эйлера, делились с ним плодами своих размышлений, просили высказать свое суждение по интересующим их проблемам и всегда находили отклик и поддержку.

Душевная красота Эйлера отразилась во множестве его поступков. В предыдущем разделе я рассказывал о том, как Эйлер старался утвердить приоритет Ферма. Когда молодой Лагранж (о нем речь впереди) посвятил Эйлера в свои исследования в области вариационного исчисления, Эйлер направил ему письмо (от 2 декабря 1759 года, Лагранжу было тогда 23 года), и я не могу не привести его слова, слова высокого духовного благородства:

«Твое аналитическое решение изопериметрической проблемы содержит, насколько я вижу, все, что только можно желать в этой области, и я чрезвычайно рад, что эта теория, которой после моих первых попыток я занимался едва ли не один, доведена до величайшего совершенства. Важность вопроса побудила меня к тому, что я с помощью твоего освещения сам вывел аналитическое решение; я, однако, решил скрывать это, пока ты не опубликуешь свои результаты, так как я никоим образом не хочу отнимать часть заслуженной тобою славы».

Теорема 3. $e^{\pi i} = -1$.

Доказательство. При доказательстве мы будем использовать следующую формулу (она носит название *бином Ньютона*):

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n,$$

где n − натуральное число, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

Как известно,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Применим формулу бинома Ньютона:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots$$

(здесь мы выписали только несколько первых членов разложения). Перейдем в обеих частях равенства к пределу при $n\to\infty$ и получим следующее *разложение в ряд*:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \ldots$$

Поясним, почему формальный переход к пределу дает такой ряд. Поскольку $(k+1)$-е слагаемое имеет вид

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}$$

и при $n\to\infty$ сомножители в числителе стремятся к 1, то $(k+1)$-е слагаемое стремится к $\dfrac{1}{k}$! Конечно, с точки зрения современного математика, этот предельный переход необходимо строго обосновать. Но во времена Эйлера к вопросу о правомерности преобразований подходили довольно свободно. Сам Эйлер в подобных случаях поступал очень смело и практически всегда оказывался прав.

Рассуждая аналогично, можно получить разложение

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

Это разложение впервые было получено именно Эйлером, и в его честь число e получило свое обозначение: e есть первая буква фамилии Euler.

Еще задолго до Эйлера были известны разложения в ряд синуса и косинуса:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

Гениальная идея Эйлера состоит в том, что формулу для e^x можно применять не только к действительным, но и к комплексным числам:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots,$$

где z − произвольное комплексное число. Подставим в эту формулу $z = \pi i$ (где i − мнимая единица, т.е. $i^2 = -1$):

$$e^{\pi i} = 1 + \pi i + \frac{(\pi i)^2}{2!} + \frac{(\pi i)^3}{3!} + \frac{(\pi i)^4}{4!} + \frac{(\pi i)^5}{5!} + \ldots =$$

$$= 1 + \pi i - \frac{\pi^2}{2!} - \frac{\pi^3}{3!}i + \frac{\pi^4}{4!} + \frac{\pi^5}{5!}i \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(\pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \ldots\right) =$$

$$= \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

Теорема 3 доказана.

Позднее, когда появилась строгая теория рядов, подобные выводы, восходящие к Эйлеру, были подтверждены, а все преобразования признаны законными.

(*Продолжение следует*)

Качающаяся скала

А.МИТРОФАНОВ

*...много есть странных
вещей в горах.*
Александр Грин

«НАДО СКАЗАТЬ, ЧТО В ЭТИХ местах не редкость встретить так называемую «качающуюся скалу» – весьма любопытное явление, суть которого в том, что отдельный кусок скалы в незапамятные времена получает устойчивость равновесия. Он обыкновенно стоит на каменной площадке и, если его раскачивать, он, подобно «ваньке-встаньке», принимает первоначальное положение. Такие скалы весят иногда тысячи тонн, но послушны движению руки человека средней силы. Такая скала упасть не может, если, конечно, ее не взорвут динамитом...» – это строки из рассказа Александра Грина «Качающаяся скала», грустной истории о бедном охотнике, которому предложили за три миллиона опрокинуть огромный каменный столб, качающийся около положения равновесия. Охотник, несмотря на все свои усилия, не справился с задачей и сошел с ума (но не оставил своей затеи столкнуть камень).

Попробуем разобраться, почему же так устойчива «качающаяся скала».

Мы знаем, что для того чтобы тело находилось в положении равновесия, должны выполняться два условия:

векторная сумма всех сил, действующих на тело, равна нулю; (а)

алгебраическая сумма моментов всех сил относительно произвольной оси равна нулю. (б)

Не всякое положение равновесия бывает устойчивым. Например, иголка, на которую действуют только силы тяжести и реакции опоры, не стоит свободно на гладком столе. Хотя, если иголку поставить строго вертикально, условия (а) и (б) будут выполняются, но при малейшем отклонении от вертикали возникают моменты сил, опрокидывающие иголку. В то же время кирпич стоит устойчиво на любой грани. И как бы мы не уменьшали кирпич, сохраняя его форму, кирпич по-прежнему будет стоять на столе устойчиво. А вот на кривой выпуклой поверхности,

Иллюстрация В.Власова

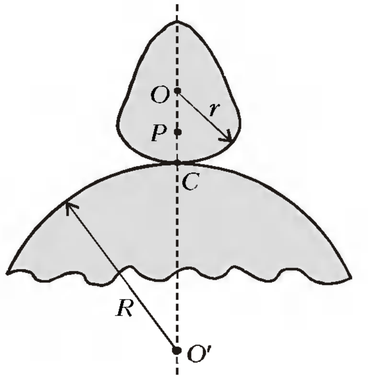


Рис.1

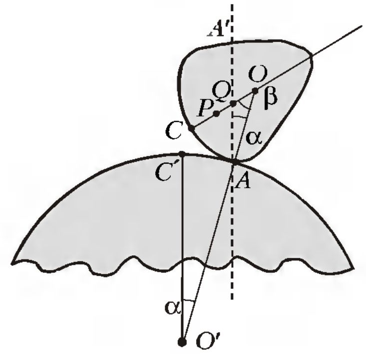


Рис.2

например на футбольном мяче, кирпич труднее уравновесить, чем на плоскости или вогнутой поверхности. Таким образом, устойчивость равновесия тела на опоре зависит от формы тела (точнее – его основания) и от поверхности опоры.

Чтобы вывести критерий устойчивости, обратимся снова к качающейся скале или к камню и рассмотрим случай, когда камень и опора в области соприкосновения имеют сферическую форму. (В Приложении к статье вводится понятие кривизны поверхности и рассматривается решение этой задачи для тел произвольной формы.) Будем предполагать, что камень и опора, на которой он стоит, сточились или обветрились и стали гладкими, без сколов и выступов, так что область контакта камня с опорой мала и может быть принята за точку. На рисунке 1 показано сечение камня и опоры вертикальной плоскостью, проходящей через точку их соприкосновения (точка C); здесь O и O' – центры сферических поверхностей камня и опоры в области контакта, r и R – их соответствующие радиусы. Для равновесия камня необходимо прежде всего, чтобы его центр тяжести (точка P) лежал на вертикали OO'; при этом условия (а) и (б) выполняются. Посмотрим, к чему приведет небольшое отклонение камня от первоначального положения.

Пусть в результате отклонения положение камня на опоре стало таким, как на рисунке 2; здесь Q – точка пересечения прямой PO с вертикалью, проходящей через точку A – новую точку контакта камня с опорой. Если точка P окажется правее вертикали AA', то момент силы тяжести относительно точки опоры A будет способствовать дальнейшему отклонению, и камень уже не вернется в первоначальное положение. Если же точка P окажется левее вертикали AA', момент силы тяжести будет возвращать камень в первоначальное положение. А это значит, что равновесие камня будет устойчивым.

Итак, если $CP < CQ$, то равновесие устойчивое. Посмотрим, как при этом связаны между собой величины CP, R и r. В треугольнике OAQ (см. рис.2)

$$\beta = \frac{CA}{r} = \frac{C'A}{r} = \alpha\frac{R}{r}$$

(так как углы малы). По теореме синусов имеем

$$\frac{OQ}{\sin\alpha} = \frac{r}{\sin\left(\pi - (\alpha+\beta)\right)} = \frac{r}{\sin\left(\alpha + \alpha\dfrac{R}{r}\right)}. \quad (1)$$

Нас интересуют малые отклонения камня от положения равновесия. Говоря «малое отклонение», мы имеем в виду, что расстояние, «проходимое» точкой контакта на поверхности опоры, т.е. дуга $C'A$ (и, следовательно, дуга CA, равная $C'A$), мало по сравнению с радиусами r и R поверхностей камня и опоры. А это и означает, что углы α и β малы, т.е.

$$\alpha \ll 1 \text{ и } \beta = \alpha\frac{R}{r} \ll 1.$$

Для малых углов, как известно, синус угла с хорошей точностью равен самому углу. Поэтому выражение (1) можно записать так:

$$\frac{OQ}{r} = \frac{1}{1 + R/r}, \text{ или } OQ = \frac{r^2}{R+r}.$$

Так как

$$CQ = r - OQ = \frac{Rr}{R+r},$$

условие устойчивого равновесия камня, т.е. условие $CP < CQ$, записывается в виде неравенства

$$CP < \frac{Rr}{R+r}. \quad (2)$$

Если поверхность опоры имеет вогнутую форму с радиусом R (форму внутренней поверхности сферы радиусом R), то условие устойчивого равновесия камня на опоре выглядит так:

$$CP < \frac{Rr}{R-r}. \quad (3)$$

(Попробуйте вывести эту формулу самостоятельно.)

Отметим теперь следующее важное обстоятельство. Допустим, что равновесие камня на опоре устойчивое. Тогда при отклонении камня от положения равновесия возникает момент силы, препятствующий этому отклонению: у силы тяжести относительно новой точки опоры появляется плечо (см. рис.2). Чтобы удержать камень в новом положении неподвижным, требуется приложить внешнюю силу, такую, чтобы ее момент относительно новой точки опоры был равен по величине и противоположен по направлению моменту силы тяжести; величина и направление этой силы определяются условием (а). Следовательно, даже для небольшого отклонения тела от положения устойчивого равновесия необходимо совершить работу против силы тяжести. Эта работа идет на увеличение потенциальной энергии тела. А это означает, что в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия тела имеет минимальное значение, или, что то же самое, центр тяжести тела занимает наинизшее положение. Поэтому условие (2) можно вывести иначе, посмотрев, что происходит с центром тяжести камня при его небольшом отклонении (см. упражнение 1). Такие два различных подхода к решению проблемы устойчивости эквивалентны. Если камень слегка отклонить от положения устойчивого равновесия и не удерживать его в новом положении, он вернется назад, «проскочит» (по инерции) положение равновесия, снова вернется к нему и т.д., т.е. камень будет совершать колебания около положения устойчивого равновесия.

Если небольшое отклонение тела от положения равновесия приводит к тому, что центр тяжести его опускается, равновесие тела неустойчиво. При малейшем отклонении возникает момент силы тяжести, действующей в сторону отклонения и стремящийся его увеличить, и тело «опрокидывается».

Бывают случаи, когда отклонение тела от положения равновесия не изменяет высоту центра тяжести тела над точкой опоры, – такое положение называют безразличным равновесием. В безразличном равновесии находится, например, однородный шарик на горизонтальной плоскости. Заметим, что когда равновесие безразличное, а тело и опора в области контакта имеют сферические формы, выполняется равенство

$$CP = \frac{Rr}{R+r}, \qquad (4)$$

которое справедливо и для однородного шарика на горизонтальной плоскости, если считать, что $R \to \infty$. Но будет ли это соотношение достаточным условием безразличного равновесия? Оказывается, нет. Приведем хотя бы один пример, когда условие (4) выполняется, а равновесие тела неустойчивое. Рассмотрим тело шарообразной формы на вершине закрепленной сферы того же радиуса, при условии, что центр тяжести тела находится на половине его радиуса r, т.е. $CP = r/2$. Нетрудно показать (проделайте это самостоятельно), что равновесие тела на сфере неустойчивое, хотя соотношение (4) строго выполняется. При любом конечном угле наклона тела от равновесного положения центр тяжести тела опускается, и оно скатывается со сферы (см. упражнение 2).

Обратим внимание на то, что при выводе критерия устойчивости мы рассматривали малые отклонения тела от положения равновесия и учитывали в расчетах лишь линейные члены, пропорциональные α. В линейном приближении тело или система тел могут находиться в безразличном равновесии, но когда мы при более точных расчетах учитываем члены высших порядков, например пропорциональные α^2, α^3 и т.д., то равновесное положение по расчетам оказывается неустойчивым, что и наблюдается на практике.

Теперь нам понятно, что такое «качающаяся скала»: это вертикально стоящий камень с низко расположенным центром тяжести или большим радиусом кривизны основания. Отклонение камня (правда, в некоторых пределах; см. упражнение 2) приводит к его колебаниям около положения равновесия. Качающаяся скала – это камень-маятник.

Конечно, нелегко рукой «средней силы» расшатать огромный каменный столб. Дело не только в том, что у качающейся скалы большая масса и, для того чтобы сообщить ей заметное ускорение, нужно приложить очень большую силу. Из-за деформации опоры под действием веса камня могут возникать силы реакции, препятствующие отклонению скалы от вертикали. И тем не менее, качающиеся скалы или, по крайней мере, большие качающиеся камни (rocking stones) существуют в природе. Может быть, и вы среди каменных валунов встречали нечто подобное?

Рассказ А.Грина «Качающаяся скала» появился в 1915 году в журнале «20 век». Откуда Грин узнал о качающейся скале? По всей видимости, первоисточником для него послужила книга Я.И.Перельмана «Занимательная физика», первое издание которой вышло в свет в 1913 году и сразу же стало ошеломляюще успешным. Перельман поместил в этой книжке коротенькую заметку о качающейся скале, находящейся в окрестностях аргентинского морского порта Бахия-Бланка (рис.3). Особенностью качающейся скалы из Бахия-Бланки было ее непрерывное медленное движение из стороны в сторону, предположительно из-за неоднородного нагрева скалы солнечными лучами или охлаждения, которые приводили к небольшому блужданию положения центра тяжести. Жаль, что этот забавный сюжет выпал из более поздних изданий «Занимательной физики».

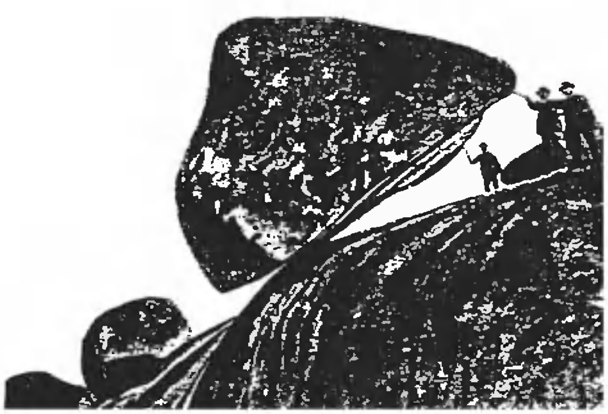


Рис.3

Рассмотрим теперь примеры, которые не требуют путешествия в горы, но по своей природе они такие же, как качающаяся скала.

Пример 1. У однородного шара центр тяжести совпадает с геометрическим центром, поэтому шар неустойчив на выпуклой поверхности. Однако, если у шара срезана «верхушка», он может стоять устойчиво на вершине выпуклой поверхности (см. упражнение 3).

Пример 2. Забавная детская игрушка «ванька-встанька» напоминает пример 1. Кусок свинца или стали, спрятанный у шарообразного основания «ваньки-встаньки», придает игрушке удивительную устойчивость.

А все ли знают, что у «ваньки-встаньки» были (а может быть, есть кое-где и сейчас) родственники? «Было когда-то на свете двадцать пять оловянных солдатиков. Все они были сыновьями одной матери – старой оловянной ложки – и, значит, приходились друг другу родными братьями. Они были очень красивы: ружье на плече, грудь колесом, мундир красный с синим. Чудо, что за солдатики...» Это – стойкие оловянные солдатики из сказки Андерсена. Почему их называли «стойкими»? Наверное, потому, что как бы их ни наклоняли, они всегда возвращались в вертикальное положение. Когда открывали коробку, в которую были уложены такие солдатики, все они вскакивали словно по команде. Каждый солдатик крепился на гладком срезе свинцовой полусферы и стоял удивительно устойчиво.

Пример 3. Как известно, однородный эллипсоид вращения (или вытянутый сфероид), т.е. тело вращения кривой $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ вокруг большой оси $X (a > b)$, не может стоять вертикально на плоскости стола: радиус кривизны в вершине эллипсоида, или, что то же самое, радиус сферы, которая аппроксимирует форму поверхности тела в вершине, равен b^2/a, в то время как центр тяжести находится на высоте, равной a. Критерий устойчивости (2) не выполняется. Но что будет, если чуть-чуть изменить форму эллипсоида? Датский математик Пит Хайн придумал тело вращения кривой

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2,5}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2,5}=1$$

(для отрицательных x и y в этой формуле берутся значения модуля). При удачном подборе высоты a и ширины b (например, 5 и 4 см соответственно) так называемый суперэллипсоид Хайна стоит устойчиво на горизонтальной плоскости на любом из своих полюсов.

Можно показать, что этим же свойством устойчивости обладает всякое однородное тело вращения кривой $(x/a)^n+(y/b)^n=1$ вокруг оси X, если $n>2$ и $a>b>0$. При больших n тело похоже на цилиндр с закругленным дном и верхом – чем не подходящая модель качающейся скалы? И экспериментировать с искусственной скалой куда легче, чем с настоящей. Правда, верно и то, что «лучше гор могут быть только горы...» и что очень интересно раскачивать настоящие каменные валуны на свежем воздухе в русле какой-либо пересохшей горной речки.

В заключение отметим, что проблема устойчивости равновесия тел – очень старая проблема, которой занимались ученые прошедших эпох. Так, Э.Торричелли в 1644 году сформулировал критерий устойчивого равновесия системы двух тел в поле тяжести, который Х.Гюйгенс обобщил на систему из нескольких тел (принцип Торричелли). В 1788 году Ж.Лагранж доказал теорему, определяющую достаточность условия равновесия систем; более строгое доказательство этой теоремы принадлежит П.Дирихле. Согласно теореме Лагранжа–Дирихле, если потенциальная энергия изолированной системы в положении равновесия имеет минимум, то положение равновесия системы устойчивое.

Примечание (о теореме Эйлера)

В статье мы рассмотрели случай, когда скала и опора в области контакта имели сферическую форму. Вообще говоря, камни, даже гладкие, вовсе не обязаны быть шарами или иметь сферические основания. Как же тогда рассматривать задачу об устойчивости равновесия скалы? Здесь нам на помощь придет простая геометрическая идея, состоящая в том, что любую плоскую гладкую кривую в какой-либо произвольной точке A можно аппроксимировать некоторой окружностью, радиус которой называется радиусом кривизны кривой в точке A. Тогда задача про качающуюся скалу, когда камни не круглые, сведется опять к исследованию равновесия круглых тел. Итак, по порядку.

Чтобы количественно оценить роль формы тела в области контакта с опорой, определим некоторые понятия. Пусть в плоскости XY дана кривая l, A – точка на этой кривой, A_1 – близкая к ней точка, так что Δl – длина дуги AA_1, $\Delta\theta$ – угол между касательными к кривой в точках A и A_1. Отношение $\frac{\Delta\theta}{\Delta l}$ называется средней кривизной на участке AA_1, а предел этого отношения, когда точка A_1 приближается к A, обозначается $\frac{1}{\rho_A}$ и называется кривизной кривой в точке A:

$$\frac{1}{\rho_A}=\lim\frac{\Delta\theta}{\Delta l_A}\text{ при }\Delta l_A\to 0\,.$$

Кривизна имеет размерность, обратную длине, а величина ρ_A по определению является радиусом кривизны кривой в точке A. Окружность радиусом ρ_A, проведенная через точку A и любые другие две близлежащие к ней точки кривой l, называется соприкасающей окружностью, а центр окружности O_A называется центром кривизны кривой l в точке A.

Нетрудно догадаться, что определенное таким образом понятие кривизны линии позволяет судить количественно, сколь сильно изогнута кривая в заданной точке, или, другими словами, сколь сильно она отличается от прямой линии. У прямой кривизна равна нулю ($\Delta\theta=0$). Для окружности (радиусом R) $\Delta l = R\Delta\theta$, т.е. это кривая с постоянным радиусом кривизны $\rho=R$, а кривизна окружности есть величина, обратная радиусу.

Как правило, кривизна кривой изменяется от точки к точке. Например, у так называемой параболы Нейля, описываемой уравнением $y=x^{3/2}$, радиус кривизны в точке $x=0$ равен 0 и быстро растет с увеличением x по формуле $R=\sqrt{x}(4+9x)^{3/2}/6$. У обычной параболы $y=x^2$ $R=\left(1+4x^2\right)^{3/2}/2$.

Для тех, кто знаком с правилами дифференцирования, укажем, что если кривая l задана уравнением $y=y(x)$, то $\frac{1}{\rho(x)}=\frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}$, где y' и y'' – первая и вторая производные функции $y(x)$ по x.

С помощью понятия кривизны линии можно определить кривизну какой-либо поверхности S в данной точке C. Проведем в точке C касательную к поверхности плоскость P. Любая другая плоскость L, проходящая через C и перпендикулярная плоскости P, пересечет поверхность S по некоторой кривой l_L, имеющей в точке C радиус кривизны R. Эта кривая называется нормальным сечением поверхности S. Ясно, что значения R могут быть, вообще говоря, различны для разных нормальных сечений. Наибольшее и наименьшее значения R среди всех возможных называются главными радиусами кривизны R_1 и R_2 поверхности S в точке C, причем соответствующие им плоскости L_1 и L_2 всегда перпендикулярны друг другу, а кривизна $1/R$ произвольного нормального сечения выражается через R_1 и R_2 по формуле

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\varphi}{R_1}+\frac{\sin^2\varphi}{R_2},$$

где φ – угол, образованный рассматриваемым нормальным сечением с плоскостью L_1. Это утверждение носит название теоремы Эйлера, вернее – это ее современная формулировка.

Теорема Эйлера указывает путь, как искать решение задачи для камней неправильной формы, когда главные радиусы кривизны R_1, R_2 и r_1, r_2 в точке контакта не равны попарно друг другу.

Попробуйте теперь, например, сформулировать критерий устойчивости скалы, когда скала и опора – выпуклые валуны неправильной формы.

Упражнения

1. Выведите условие (2), используя тот факт, что в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия тела минимальна.

2. «Ванька-встанька» стоит на вершине неподвижного шара. Радиусы шара и основания «ваньки-встаньки» одинаковы и равны r. Максимальный угол, на который можно отклонить от вертикали игрушку так, чтобы она не упала с шара, равен α_0 (проскальзывания нет). Найдите, где расположен центр тяжести «ваньки-встаньки».

3. Полушарие радиусом r стоит устойчиво на неподвижном шаре радиусом R, если выполняется условие $r<0{,}6R$. Где расположен центр тяжести полушария?

4. При выводе формулы (2) предполагалось, что движение камня – это качение по поверхности опоры. Допустим, что трение уменьшилось настолько, что качение стало сопровождаться проскальзыванием. Как это отразится на устойчивости равновесия камня?

5. Возможно ли опрокинуть качающуюся скалу?

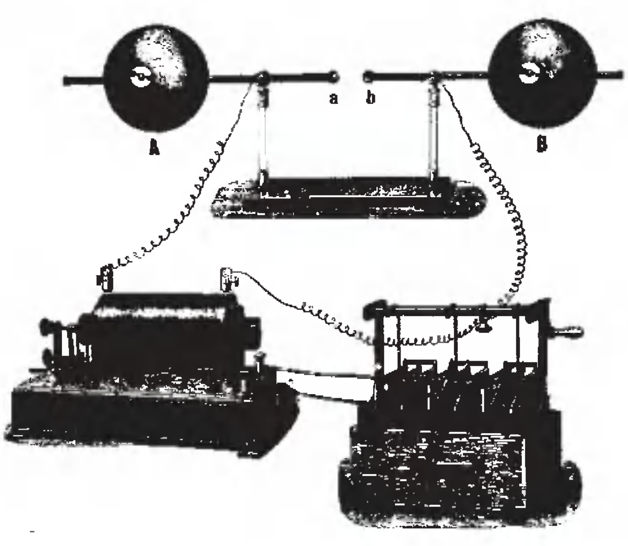
Один Герц

А.ВАСИЛЬЕВ

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ принадлежат к наиболее распространенным в природе. Частота колебаний измеряется в герцах, а герц представляет собой одно колебание в секунду. Примерно с такой частотой бьется человеческое сердце, и электромагнитные импульсы такой частоты излучают загадочные космические объекты – пульсары. Разумеется, органический и неорганический миры дают еще множество примеров более низкочастотных или более высокочастотных колебаний.

Свое название единица измерения частоты получила в честь выдающегося немецкого физика Генриха Герца. Он родился в Гамбурге, а научную деятельность начал в Берлинском университете под руководством Гельмгольца. Именно Гельмгольц в 1879 году предложил Герцу заняться работой по изучению поляризации диэлектриков, которая, в конечном счете, и привела его к открытию электромагнитных волн. Поначалу, однако, эта работа не заинтересовала Герца, и вплоть до 1884 года он занимался самыми разными вопросами – от изучения условий формирования облаков до теории морских приливов. Хотя и в этих исследованиях Герц проявил незаурядные способности к теории и эксперименту, получаемые им результаты никоим образом не удовлетворяли его. К счастью для науки, период разочарований сменился творческим взлетом, результатом которого стало одно из наиболее важных открытий в истории человечества.

Экспериментируя с короткими, почти замкнутыми, цепями, Герц сумел получить намного более частые электрические колебания, чем те, которые умели создавать другие экспериментаторы. Собранная Герцем схема (см. рисунок) представляла собой искровой разрядник, состоявший из двух прямолинейных расположенных в одну линию проводов с металлическими шарами на концах. Эта цепь подключалась к источнику высокого напряжения, при работе которого в промежутке между проводами возникала искра длиной в несколько миллиметров. Вторая цепь состояла из провода, согнутого в виде прямоугольника; между хорошо зачищенными концами провода оставался маленький зазор, регулировавшийся микрометрическим винтом. При проскакивании искры в первой цепи во второй также наблюдались искорки длиной до нескольких десятых долей миллиметра. Видеть их можно было лишь в затемненной комнате с помощью специальной увеличительной трубы, т.е. наблюдение искр было делом тонким и сложным, но именно они были решающим звеном опытов Герца. Возникновение искр во второй цепи Герц объяснил появлением напряжения между концами провода, а экспериментируя с размерами этой цепи, он пришел к мысли о том, что в цепи происходили колебания необыкновенно высокой частоты.



Сначала в экспериментах Герца первая и вторая цепи соединялись между собой проводом, однако вскоре он перешел к несвязанным, разнесенным в пространстве контурам. И в этом случае при определенных размерах второй цепи в ней проскакивали искры, длина которых зависела от расстояния до первой цепи. Проведя множество испытаний с контурами, обладавшими различными периодами собственных колебаний, Герц обнаружил явление резонанса, когда при определенном расстоянии между контурами длина искры во втором контуре достигала максимума. Схема опыта Герца содержала все основные элементы современной радиосвязи: передатчик электромагнитных волн и их приемник. Развитие этой схемы было лишь делом времени и изобретательской мысли, что обусловило колоссальное практическое значение экспериментов Герца.

Возможность получения и регистрации высокочастотных колебаний позволила Герцу взяться за решение задачи, предложенной ему некогда Гельмгольцем. В ходе экспериментов по поляризации диэлектриков, а затем измерений скорости распространения электромагнитного взаимодействия в воздухе Герц понял, что имеет дело с электромагнитными волнами, предсказанными теорией Максвелла, и занялся целенаправленной проверкой ее выводов.

Теорию электромагнетизма Максвелл создал на основе физических представлений Фарадея, оформив их в виде системы математических уравнений. Как известно, электрический ток создает вокруг себя магнитное поле, магнитные линии которого — замкнутые кривые. В свою очередь, согласно закону Фарадея, изменяющееся магнитное поле создает электрический ток в проводниках. Максвелл дополнил существовавшую в то время систему взглядов положением о полном равноправии электрического и магнитного полей в отношении их способности порождать друг друга. Его дополнение заключалось в постулировании наряду с прежней причиной возникновения магнитного поля (электрический ток) еще одной причины – изменения электрического поля. Благодаря симметрии электрического и магнитного полей в теории Максвелла, становился возможным непрерывный процесс: переменное магнитное поле создает переменное электрическое поле, которое в свою очередь создает переменное магнитное поле, и т.д. В результате получается цепочка полей, представляющая собой электромагнитную волну. На основе этой концепции Максвелл вывел уравнения для электрического и магнитного полей, которые описывали распространение электромагнитных волн. Скорость распространения зависела от электрических и магнитных свойств среды, и, в частности, в пустоте (или в воздухе) она равнялась скорости света. Отсюда вытекала электромагнитная теория света как составная часть теории Максвелла. Из уравнений Максвелла следовало также, что электромагнитная волна распространяется в направлении, перпендикулярном обоим полям.

Надо сказать, что ко времени создания теории Максвелла существовали и другие теории электромагнетизма. Только эксперимент мог ответить на вопрос об истинности той или иной версии. Изучение электромагнитных волн в воздухе Герц проводил, исследуя картину электрического поля, создаваемого вибратором. Он помещал вибратор в центре большой комнаты, а резонатор переносил с места на место, и в каждом месте отыскивал такое расположение, при котором искра в резонаторе была максимальной. Найденные положения он отмечал на полу мелом. Многократно повторив такие манипуляции, он получил картину силовых линий электрического поля и обнаружил, что вдоль линии колебаний вибратора поле уменьшается гораздо быстрее, чем в перпендикулярном направлении. Это было хорошим подтверждением теории Максвелла.

В процессе экспериментов Герц обнаружил также, что резонатор позволяет наблюдать стоячую волну, возникающую в результате отражения от стен комнаты. Из расположения узлов и пучностей ему удалось определить длину электромагнитной волны, а оценив частоту вибратора, и рассчитать скорость света. Несмотря на то, что использовавшиеся Герцем приборы были необычайно просты, оценка скорости света в воздухе оказалась очень близкой к ее истинному значению 300000 км/с.

Последнюю серию опытов в этой области Герц посвятил установлению родства между электромагнитными и световыми волнами. Он решил повторить с электромагнитными волнами классические оптические эксперименты по прямолинейному распространению, отражению, преломлению и поляризации волн. Для постановки этих опытов вместо оптических зеркал Герц использовал вогнутые зеркала из цинка, а призму изготовил из асфальта с основанием в виде равнобедренного треугольника. Вместо турмалиновой пластинки для изучения поляризации волн Герцу служила деревянная рама с натянутыми на ней медными проволоками.

В результате проведения «оптических» опытов Герц надежно установил, что исследованные им «электрические лучи» аналогичны световым с очень большой длиной волны, и, следовательно, свет и электродинамическое волновое движение суть тождественные явления. Проведенная Герцем работа произвела впечатление даже на людей, далеких от физики. Будучи еще молодым человеком, он стал одним из самых популярных людей своего времени. Выполнив целый ряд элегантных физических экспериментов, Герц один стяжал всю славу по экспериментальному подтверждению теории Максвелла. Открытие и изучение электромагнитных волн вызвало к жизни новую большую область техники – электронные коммуникации, которым впоследствии было суждено изменить весь путь развития цивилизации.

НАМ ПИШУТ

Синус суммы и теорема Пифагора

Приводимое ниже геометрическое доказательство формулы синуса суммы двух углов, без сомнения, напоминает известное геометрическое доказательство теоремы Пифагора.

Рассмотрим ромб со стороной 1, один из углов которого равен $\alpha + \beta$, и пристроим к каждой его стороне по прямоугольному треугольнику с углом α или β так, как показано на рисунке 1. Получим прямоугольник со сторонами $\sin\alpha + \sin\beta$ и $\cos\alpha + \cos\beta$. Этот же прямоугольник можно составить из двух прямоугольников со сторонами $\sin\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\alpha$, $\sin\beta$ соответственно и тех же четырех треугольников (рис.2). Теперь очевидно, что площадь ромба S равна сумме $S_1 + S_2$ площадей прямоугольников, откуда получаем требуемое равенство

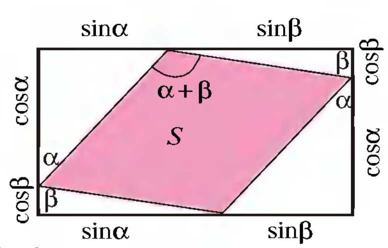


Рис.1

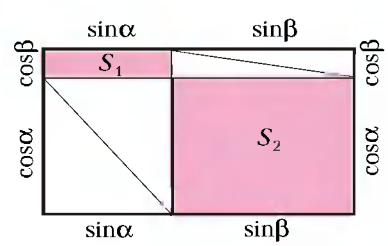


Рис.2

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Формула синуса суммы углов доказана (к сожалению, только для случая острых углов α и β).

Р.Травкин

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июля 2000 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2— 2000» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1721» или «Ф1728». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1721—М1725, Ф1728—Ф1732

М1721. Существуют ли натуральные числа x и y, которые удовлетворяют равенству $x^2 - 3y^2 = 2000$?

В.Сендеров

М1722. Пусть a, b – натуральные числа. Проведем через точку $(a; b)$ прямую, отсекающую от первого координатного угла треугольник.

а) Докажите, что количество точек с целыми неотрицательными координатами, которые лежат внутри или на сторонах этого треугольника, превышает $2ab + a + b$.

б) Докажите, что эта оценка точная: через точку $(a; b)$ можно провести прямую, отсекающую от первого координатного угла треугольник, внутри и на сторонах которого всего $2ab + a + b + 1$ точек с целыми неотрицательными координатами.

М.Панов

М1723. Из точки на плоскости выходят n красных и n синих векторов. Красные векторы занумерованы натуральными числами от 1 до n. В порядке нумерации красные векторы поворачиваются по часовой стрелке и занимают положение первого свободного синего вектора так, что в конце концов красные векторы займут положения всех синих векторов. Докажите, что сумма углов поворотов не зависит от порядка нумерации красных векторов.

В.Произволов

М1724. В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE, пересекающиеся в точке O (рис. 1). Прямая DE пересекает продолжение стороны AC в точке K. Докажите, что медиана BM треугольника ABC перпендикулярна прямой OK.

М.Волчкевич

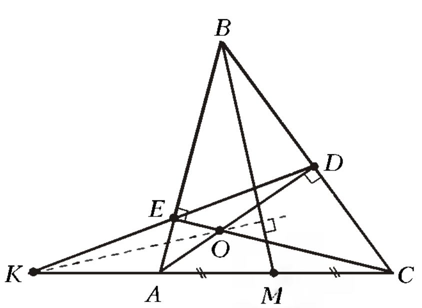


Рис.1

М1725*. Из квадрата $(2n+1)\times(2n+1)$ клетчатой бумаги вырезана крестообразная фигура F (рис.2). Докажите, что

а) фигуру F нельзя разрезать на $2n$ выпуклых фигур;

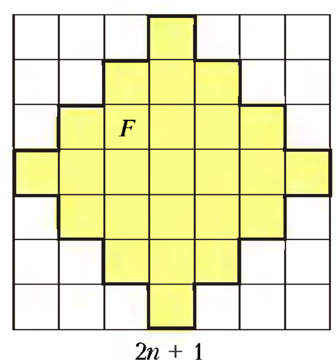


Рис.2

б) если фигура F разрезана на $2n + 1$ выпуклых многоугольников, то каждый из них является прямоугольником.

В.Произволов

Ф1728. Источник света движется равномерно вдоль прямой со скоростью $v = 0{,}2\,c$, где c – скорость света. На расстоянии d от этой прямой находится наблюдатель. Запаздывание пришедшего к наблюдателю света приводит к тому, что движение источника кажется ему неравномерным. Каким будет максимальное наблюдаемое ускорение источника света?

В.Шелест

Ф1729. На гладком горизонтальном столе происходит лобовой удар двух одинаковых тел – одно из них вначале покоится, другое налетает на него со скоростью v_0. Куда и с какой скоростью будет двигаться после удара налетевшее тело, если при ударе в тепло переходит 1% от максимальной энергии деформации тел?

Р.Александров

Ф1730. В вертикальном цилиндрическом сосуде площадью $S = 1$ м^2 под поршнем, находящимся на высоте $h = 1$ м, содержится $N = 100$ одинаковых шариков диаметром $d = 0{,}1$ мм. Шарики хаотически двигаются, средняя квадратичная скорость шарика $v_0 = 100$ м/с. Поршень начинают двигать со скоростью $u = 1$ м/с и останавливают на высоте $2h$. Во сколько раз изменится при этом средняя энергия шариков? Потерь механической энергии при соударениях нет, сила тяжести отсутствует.

Д.Абанин

Ф1731. Два одинаковых конденсатора емкостью $C = 10$ мкФ каждый вначале заряжены до напряжения $U_0 = 10$ В и соединены параллельно при помощи длинных проводов общим сопротивлением $r = 1$ Ом. Резистор сопротивлением $R = 10$ кОм подключают непосредственно к выводам одного из конденсаторов. Какое количество теплоты выделится в проводах за большое время?

З.Рафаилов

Ф1732. К источнику переменного напряжения, частоту которого можно изменять в широких пределах, подключена цепь из двух одинаковых катушек индуктивностью L, двух конденсаторов емкостью C и амперметра переменного тока с очень малым сопротивлением (рис.3). Амплитуда напряжения источника U_0. На какой частоте ток через амперметр будет минимальным? Чему равна амплитуда этого тока? Элементы цепи считайте идеальными.

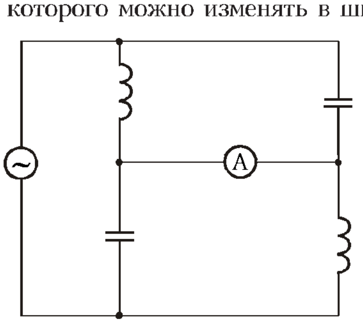


Рис.3

А.Зильберман

Решения задач М1696—М1705, Ф1713—Ф1717

М1696. *В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены беспосадочными рейсами одной из N авиакомпаний, причем из каждого города есть по одному рейсу каждой из авиакомпаний. Известно, что из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Из-за финансового кризиса был закрыт $N - 1$ рейс, но ни в одной из авиакомпаний не закрыли более одного рейса. Докажите, что по-прежнему из любого города можно долететь до любого другого.*

Рассмотрим некоторый путь, соединяющий некоторые два города, возможно включающий в себя некоторые закрытые после кризиса рейсы. Покажем, что в этом пути любой закрытый рейс можно заменить последовательностью незакрытых. Пронумеруем авиакомпании числами от 1 до N. В одной из авиакомпаний сохранились все рейсы; предположим, что в первой. Тогда в любой другой авиакомпании закрыли по одному рейсу. Рассмотрим только рейсы первой и второй авиакомпаний: из каждого города выходит по одному рейсу этих авиакомпаний. Следовательно, все города разбиваются на циклы. В одном из этих циклов закрыли один рейс. Очевидно, можно пролететь остальными рейсами этого цикла, следовательно, мы можем «обойти» любой закрытый рейс. Отметим, что мы при этом не используем рейсы других авиакомпаний, следовательно, аналогично можно обойтись без остальных закрытых рейсов.

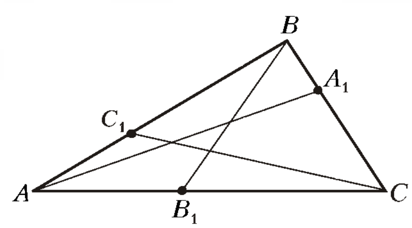
Д.Карпов

М1697. *Сумма цифр в десятичной записи натурального числа n равна 100, а сумма цифр числа $44n$ равна 800. Чему равна сумма цифр числа $3n$?*

Заметим, что $44n$ есть сумма 4 экземпляров числа n и 4 экземпляров числа $10n$. Если складывать эти числа поразрядно, то в каждом разряде окажется сумма учетверенной цифры из этого же разряда числа n и учетверенной цифры из следующего разряда. Если при этом не происходит никаких переносов, то каждая цифра числа n складывается 8 раз, и сумма цифр во всех разрядах оказывается равной 800. При переносах же сумма цифр, очевидно, уменьшается (так как из одного разряда вычитается 10, а к другому прибавляется только 1). Поэтому в ситуации условия задачи переносов не происходит. Это означает, в частности, что любая цифра числа n не превосходит 2. Тогда при умножении n на 3 просто умножается на 3 каждая его цифра, а значит, и сумма цифр. Поэтому сумма цифр числа $3n$ равна 300.

А.Голованов

М1698. *На сторонах треугольника ABC расположены точки A_1, B_1 и C_1 (см. рисунок). При этом известно, что $AA_1 \le 1$, $BB_1 \le 1$ и $CC_1 \le 1$. Докажите, что площадь треугольника не превосходит $1/\sqrt{3}$.*



Пусть треугольник ABC неостроугольный: $\angle BAC \ge \frac{\pi}{2}$. Тогда $AB \le B_1B \le 1$, $h_c \le CC_1 \le 1$ и $S_{\Delta ABC} \le \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

В случае остроугольного ΔABC высоты опущены на сами стороны (а не на их продолжения). Если $\angle BAC$ – наименьший угол треугольника, то, очевидно, $\angle BAC \le \frac{\pi}{3}$. Поскольку $h_a \le 1$, то из этого следует, что

$$\min\{AB, AC\} \le \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Значит, $S_{\Delta ABC} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Утверждение задачи доказано.

Замечание. Если A_1, B_1, C_1 – некоторые точки прямых (но не обязательно отрезков!) BC, CA, AB соответственно, то утверждение задачи теряет силу. Покажем это: для произвольного числа $\varepsilon > 0$ построим треугольник, все высоты которого меньше ε, а площадь – больше 1.

Пусть окружность O, диаметр которой меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, касается прямой l; точки B и C лежат на l так, что равнобедренный ($AB = AC$) треугольник ABC описан около окружности O. Выберем точку A так, чтобы было $h_a < \frac{\varepsilon}{2}$. При этом, очевидно, площадь треугольника ABC может быть сделана больше 1; покажем, что $h_b = h_c < \varepsilon$.

Пусть $AD = h_a$, DE – перпендикуляр из точки D на прямую AB. Очевидно, $h_c = 2DE$; но $DE < AD < \frac{\varepsilon}{2}$. Получим $h_c < \varepsilon$.

В.Сендеров

М1699. *Докажите, что при любом натуральном n справедливо неравенство*

$$\left\{\sqrt{1}\right\} + \left\{\sqrt{2}\right\} + \ldots + \left\{\sqrt{n^2}\right\} \le \frac{n^2 - 1}{2}.$$

(Здесь {k} – дробная часть числа k.)

При $n = 1$ неравенство обращается в равенство $0 = 0$. При $n > 1$ докажем, что сумма дробных частей на каждом промежутке между двумя последовательными квадратами удовлетворяет неравенству

$$\sum_{k=m^2}^{m^2+2m} \left\{\sqrt{k}\right\} \le \frac{2m+1}{2}. \qquad (1)$$

Нетрудно проверить (например, с помощью очевидного неравенства $\sqrt{m^2 + x} \le m + \frac{x}{2m}$), что

$$\sqrt{m^2 + a} + \sqrt{m^2 + 2m - a} \le 2m + 1$$

при $0 \le a \le m$.

Следовательно,

$$\left\{\sqrt{m^2 + a}\right\} + \left\{\sqrt{m^2 + 2m - a}\right\} \le 1. \qquad (2)$$

Просуммировав эти неравенства при $a = 0, 1, \ldots, m - 1$ и неравенство $\left\{m^2 + m\right\} \le \frac{1}{2}$ (получаемое делением на 2 обеих частей (2) при $a = m$), приходим к неравенству (1).

Суммируя неравенство (1) по всем m от 1 до $n - 1$, получаем

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} \left\{\sqrt{k}\right\} \le \frac{n^2 - 1}{2}.$$

Остается заметить, что $\left\{\sqrt{n^2}\right\} = 0$.

А.Храбров

М1700*. *На числовой прямой отмечены точки с координатами 1, 2, 3, …, 2n. Блоха начинает прыгать из точки 1 и через 2n прыжков, побывав во всех отмеченных точках, возвращается в исходный пункт. Известно, что сумма длин всех прыжков за исключением последнего равна n(2n – 1). Докажите, что длина последнего прыжка блохи равна n.*

Натуральные числа от 1 до $2n$ расставим в той последовательности, в какой в них попадает блоха:

$$x_1, x_2, \ldots, x_{2n}. \qquad (1)$$

Общая длина всех прыжков представляется циклической суммой, оценка сверху для которой такая:

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_{2n-1} - x_{2n}| + |x_{2n} - x_1| \le$$

$$\le 2(2n + 2n - 1 + \ldots + n + 1) -$$

$$- 2(n + n - 1 + \ldots + 2 + 1) = 2n^2.$$

В силу этого и условия задачи длина последнего прыжка блохи не превосходит n, т.е. $|x_{2n} - x_1| \le n$, или $x_{2n} \le n + 1$. Нам нужно доказать, что $x_{2n} = n + 1$.

Допустим противное, т.е. $x_{2n} \le n$. Но тогда в последовательности (1) найдутся два соседних члена x_i и x_{i+1}, каждый из которых больше n. Перестроим последовательность (1):

$$x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{2n}, x_{2n-1}, \ldots, x_{i+1}. \qquad (2)$$

Циклическая сумма S для (2) удовлетворяет оценке сверху:

$$|x_1 - x_2| + \ldots + |x_i - x_{2n}| + |x_{2n} - x_{2n-1}| + \ldots + |x_{i+1} - x_1| \le 2n^2.$$

В то же время

$$S = n(2n - 1) - |x_i - x_{i+1}| + |x_i - x_{2n}| + |x_{i+1} - 1|.$$

Оценив последнее выражение для S, легко заключить, что $S > 2n^2$, – противоречие. Значит, $x_{2n} = n + 1$.

В.Произволов

М1701. *Для некоторых положительных чисел x и y выполняется неравенство $x^2 + y^3 \ge x^3 + y^4$. Докажите, что $x^3 + y^3 \le 2$.*

Вначале докажем, что

$$x + y^2 \ge x^2 + y^3. \qquad (*)$$

Допустим противное: $x + y^2 < x^2 + y^3$, тогда, складывая это неравенство с неравенством $x^3 + y^4 \le x^2 + y^3$, получим $\left(x + x^3\right) + \left(y^2 + y^4\right) < 2x^2 + 2y^3$, что противоречит неравенствам

$$x + x^3 \ge 2x^2 \text{ и } y^2 + y^4 \ge 2y^3.$$

Из (*) получаем

$$x + y^2 \ge x^2 + y^3 \ge x^3 + y^4,$$

откуда

$$2x + 2y^2 \ge x^2 + y^3 + x^3 + y^4.$$

Замечая, что

$$\left(1 + x^2\right) + \left(1 + y^4\right) \ge 2x + 2y^2 \ge x^2 + y^3 + x^3 + y^4,$$

получаем неравенство

$$2 + x^2 + y^4 \ge x^2 + y^3 + x^3 + y^4,$$

равносильное требуемому.

С.Злобин

М1702*. *В некоторой группе из 12 человек среди каждых 9 найдутся 5 попарно знакомых. Докажите, что в этой группе найдутся 6 попарно знакомых.*

Возьмем граф на 12 вершинах, которые соответствуют людям; две его вершины соединены, если люди незнакомы.

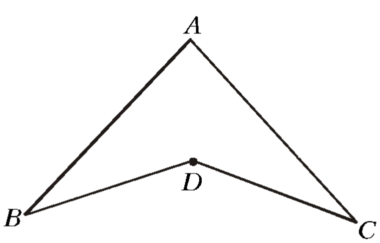
Если в этом графе нет циклов нечетной длины, то его можно разбить на две части, в каждой из которых вершины не будут соединены, и поэтому найдутся 6 попарно знакомых.

Предположим теперь, что в графе есть циклы нечетной длины. Рассмотрим нечетный цикл минимальной длины. Пусть его длина равна:

а) 2. Тогда если среди 9 человек, не входящих в этот цикл, есть два незнакомых, то среди оставшихся 7 человек из каждых 4 найдутся три знакомых. Таким образом, в подграфе на 7 вершинах каждые два ребра имеют общую вершину. Третье ребро обязано проходить через эту вершину. Иначе среди 4 человек не найдется трех знакомых. Поэтому все ребра имеют общую вершину, и, удаляя эту вершину, мы получаем 6 попарно знакомых.

б) 5. Тогда, как и выше, среди оставшихся 7 из каждых 4 найдутся 3 знакомых и среди этих 7 найдутся 6 знакомых.

в) 7. Тогда среди 5 человек, не входящих в этот цикл, все попарно знакомы. Если есть человек из цикла, знакомый со всеми этими 5, то все доказано. В противном случае, каждый из цикла не знаком с кем-то из оставшихся. Так как $7 > 5$, то найдется человек A из оставшихся, не знакомый с двумя из цикла – B и C



(см. рисунок). Из того, что мы взяли цикл минимальной длины, следует, что эти два незнакомых из цикла должны быть знакомы через одного D. Но тогда D знаком со всеми из пяти оставшихся, потому что, удаляя из цикла D и заменяя на A, мы получаем снова цикл длины 7, а в дополнении к циклу длины 7 все попарно знакомы.

г) 9. Цикла длины 9 не может быть по условию задачи.

д) 11. Тогда, как и выше при рассмотрении циклов длины 7, мы видим, что оставшийся человек может быть незнаком максимум с двумя из цикла. Но тогда в цикле легко найти 5 человек, знакомых между собой и с оставшимся. (Например, взяв идущих через одного по циклу и не знакомых с оставшимся.)

В.Дольников

М1703. *Для чисел a, b и c нашлись два неравных натуральных числа m и n такие, что $a^m + b^m + c^m = 0$ и $a^n + b^n + c^n = 0$. Докажите, что $abc = 0$.*

Пусть числа m и n нечетны и $abc \neq 0$. Тогда условия можно переписать в виде

$$x^n + y^n = z^n, \quad x^m + y^m = z^m,$$

где $x, y, z > 0$.

Если $x = y$, то $2^m = 2^n$.

Пусть $x > y$, $n > m$. Положим $\frac{y}{x} = t < 1$. Тогда

$$\left(1+t^n\right)^m = \left(1+t^m\right)^n.$$

Но $0 < t < 1$, поэтому $t^m > t^n$,

$$1+t^m > 1+t^n,$$

$$\left(1+t^m\right)^n > \left(1+t^n\right)^m.$$

Полученное противоречие доказывает равенство $abc = 0$.

Замечание. Используя свойства функции $y = x^\alpha$, где $\alpha > 1$, нетрудно доказать более сильное, чем утверждение задачи,

Предложение. Пусть

$$a^m + b^m + c^m + d^m = 0,$$

$$a^n + b^n + c^n + d^n = 0,$$

где $m \neq n$. Тогда числа a, b, c, d можно разбить на пары вида $(k,-k)$, $(l,-l)$.

В.Произволов, В.Сендеров

М1704*. *В квадрате $n \times n$ клеток бесконечной шахматной доски расположены n^2 фишек, по одной фишке в каждой клетке. Ходом называется перепрыгивание любой фишкой через соседнюю по стороне фишку, непосредственно за которой следует свободная клетка. При этом фишка, через которую перепрыгнули, с доски снимается. Докажите, что позиция, в которой дальнейшие ходы невозможны, возникнет не ранее чем через $\left[\frac{n^2}{3}\right]$ ходов.*

Будем различать два типа ходов – внутренние и внешние, в зависимости от того, куда ставится фишка, делающая ход: внутрь исходного квадрата $n \times n$ клеток или вне его. Пусть получена позиция, где дальнейшие ходы невозможны, причем сделано k внутренних ходов и l внешних. Ясно, что никакие две фишки не находятся в соседних клетках, а в исходном квадрате $n \times n$ не менее чем $\left[\frac{n^2}{2}\right]$ клеток пусты. Так как каждый внутренний ход увеличивал количество пустых клеток не более чем на 1, а каждый внешний – не более чем на 2, то имеем неравенство

$$k + 2l \geq \left[\frac{n^2}{2}\right]. \qquad (1)$$

Предположив теперь, что n четно, разобьем исходный квадрат на $\frac{n^2}{4}$ четырехклеточных квадратиков и заметим, что на каждый квадратик пришлось не менее двух ходов, в которых участвовали (делали ход или снимались с доски) фишки, стоявшие в клетках этого квадратика. Поскольку в каждом внутреннем ходе участвовали фишки не более чем двух квадратиков, а в каждом внешнем – не более чем одного, то

$$2k + l \geq 2\frac{n^2}{4}. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) получаем $k + l \geq \frac{n^2}{3} \geq \left[\frac{n^2}{3}\right]$, т.е. утверждение задачи в этом случае верно.

Легко видеть, что оно верно также при $n = 1$ и при $n = 3$.

В случае $n = 2m + 1$, где $m > 1$, в «кресте», образованном третьей сверху горизонталью и третьей слева вертикалью, выделим $2m$ «доминошек», а остальную часть исходного квадрата разобьем на m^2 четырехклеточных квадратиков. В каждом внутреннем ходе участвовать могли фишки, принадлежащие не более чем двум из $m^2 + 2m$ рассматриваемых фигур, а в каждом внешнем – не более чем одной. Имеем неравенство

$$2k + l \geq 2m^2 + 2m, \qquad (3)$$

поскольку фишки каждого из квадратиков участвовали не менее чем в двух ходах, а фишки каждой «доминошки» – по крайней мере в одном.

Из (1) и (3) следует, что

$$3(k+l) \geq 4m^2 + 4m = n^2 - 1.$$

Если здесь $n^2 \equiv 0 \pmod 3$, то, очевидно

$$3(k+l) \geq n^2, \text{ и } k + l \geq \frac{n^2}{3} = \left[\frac{n^2}{3}\right],$$

в противном случае $n^2 \equiv 1 \pmod 3$ и $k + l \geq \dfrac{n^2 - 1}{3} = \left[\dfrac{n^2}{3}\right]$.

Тем самым, утверждение задачи полностью доказано.

Можно показать дополнительно, что для всякого $e < 1/2$ минимальное количество ходов, начиная с некоторого номера n, превышает en^2. Такая оценка получена Игорем Певзнером (Кировский физико-математический лицей), финалистом XXV Всероссийской математической олимпиады.

С.Токарев

М1705. *Через точку внутри сферы проведены три попарно перпендикулярные плоскости, которые рассекли сферу на 8 криволинейных треугольников. Эти треугольники закрашены в шахматном порядке в черный и белый цвета (рис.1). Докажите, что площадь черной части сферы равна площади ее белой части.*

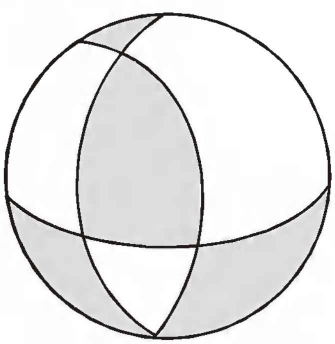


Рис.1

Докажем равносоставленность черной и белой частей сферы, тем самым будет доказана их равновеликость. Обозначим через α, β и γ плоскости, рассекающие сферу, а через $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ и $\overline{\gamma}$ – плоскости, соответственно симметричные им относительно центра сферы. Эти шесть плоскостей рассекают сферу на попарно равные куски так, что один из них белый, а другой черный в каждой паре. Однако этот факт легко услышать, но труднее увидеть.

Чтобы увидеть было легче, будем следовать принципу постепенности. Между плоскостями α и $\overline{\alpha}$, которые будем считать горизонтальными, расположен сферический пояс, выше и ниже которого располагаются две сферические «шапки». Заметим, что плоскости β, $\overline{\beta}$, γ и $\overline{\gamma}$ разрезают эти шапки на части так, что каждая белая часть одной шапки симметрична черной части другой шапки относительно горизонтальной плоскости π, проходящей через центр сферы.

Осталось разобраться со сферическим поясом. Для этого воспроизведем на рисунке сечение сферы плоскостью π, на котором показаны следы секущих плоскостей и следы черных и белых кусков сферического пояса (рис.2). Одинаковым номерам соответствуют следы тех кусков, которые симметричны и имеют разные цвета.

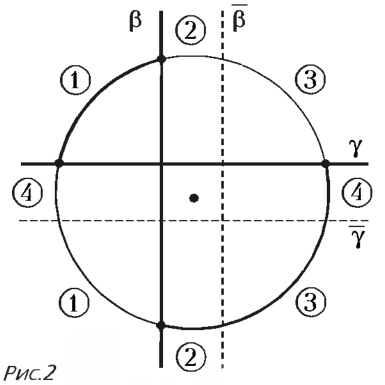


Рис.2

Напоследок заметим, что объектом утверждения задачи может выступать не только сфера, но любая поверхность выпуклого тела, имеющего три попарно перпендикулярные плоскости симметрии (например, эллипсоид или правильный октаэдр; случай с октаэдром особенно интересен, поскольку у него существуют различные попарно перпендикулярные тройки плоскостей симметрии). Но в указанном смысле также любопытен и случай с обыкновенным кубом (рис.3).

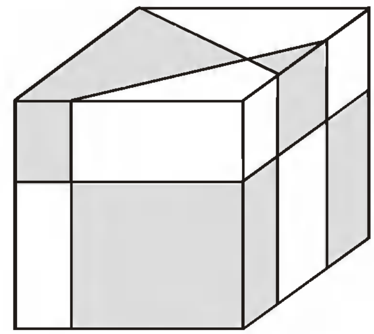
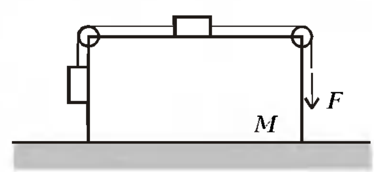


Рис.3

В.Произволов

Ф1713. *Система состоит из большого тела массой M, к которому прикреплены два блока, и двух одинаковых гладких тел массой M/5 каждое (см. рисунок). Каким должен быть коэффициент трения между большим телом и поверхностью стола, чтобы это тело могло оставаться неподвижным при любых значениях направленной вертикально вниз силы $\vec{F}$? Нити считать легкими и нерастяжимыми, трение учитывать только между поверхностью стола и большим телом. Считайте, что за время решения этой задачи тела не успеют удариться о блоки.*



Силы натяжения нити у правого блока равны F. Обозначим силы натяжения у левого блока через T. Тогда ясно, что сдвинуть большое тело в горизонтальном направлении «пытается» разность сил $F - T$, а прижимает его к столу сумма сил $N = Mg + 0{,}2Mg + F + T$. Если выполняется условие $F - T \leq \mu N$, то большое тело может оставаться неподвижным. Осталось выразить силу T и записать условие для коэффициента трения μ.

Считая большое тело неподвижным, запишем уравнения движения для подвижных тел:

$$F - T = 0{,}2Ma, \quad T - 0{,}2Mg = 0{,}2Ma,$$

откуда найдем силу T:

$$T = 0{,}5F + 0{,}1Mg.$$

Для коэффициента трения получим

$$\mu \geq \frac{0{,}5F - 0{,}1Mg}{1{,}5F + 1{,}3Mg}.$$

При малых значениях силы F в числителе следует поменять знак. Простой анализ показывает (но это и так ясно), что максимальное требуемое значение для μ получается при очень больших значениях силы F – в таком случае коэффициент трения должен превышать $1/3$.

З.Рафаилов

Ф1714. *Внутри большого теплоизолированного сосуда находится 32 г кислорода, температура сосуда и кислорода 300К, манометр показывает давление 1 атм. Еще внутри сосуда находится очень легкая капсула, содержащая 1 г гелия при температуре 500 К. Капсула лопается, и гелий выходит из нее в сосуд. Как будут меняться со временем показания манометра? Теплоемкость большого сосуда составляет 1000 Дж/К.*

Сразу после того, как капсула лопнет, произойдет кратковременный скачок давления, связанный с «акустическим ударом», но в силу своей инерционности манометр на него может среагировать довольно слабо. После затухания упругих волн (это происходит быстро) газы перемешиваются, и на некоторое время устанавливается температура, определяемая тепловым балансом без учета теплоемкости сосуда. Эту температуру и соответствующее давление мы найдем с учетом того, что двухатомного кислорода в сосуде 1 моль и его теплоемкость составляет C_1 = 1 моль$\cdot 2{,}5R \approx 20{,}8$ Дж/К, а одноатомного гелия 0,25 моль и его теплоемкость равна C_2 = 0,25 моль$\cdot 1{,}5R \approx$ $\approx 3{,}1$ Дж/К. Из равенства

$$(C_1 + C_2)T = C_1T_1 + C_2T_2$$

найдем результирующую температуру:

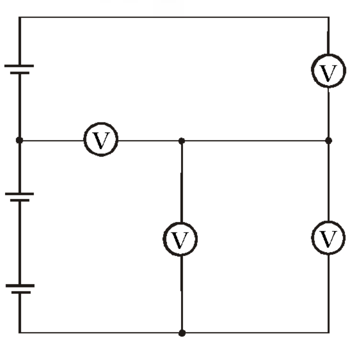
$$T \approx 330 \text{ К}.$$

Давление возрастет как за счет увеличения температуры от 300 до 330 К, так и за счет увеличения количества газа от 1 до 1,25 моль, т.е. увеличится примерно в 1,4 раза и будет чуть меньше 1,4 атм.

По мере выравнивания температур, с учетом большой теплоемкости сосуда, температура практически снизится до первоначальной, а избыток давления будет связан только с увеличившимся количеством газа – показания манометра плавно снизятся до 1,25 атм.

А.Теплов

Ф1715. *Собрана схема их трех одинаковых батареек по 9 В и четырех одинаковых вольтметров (см. рисунок). Найдите показания приборов.*



Пусть нижние вольтметры покажут U, тогда показание верхнего вольтметра составит $(3U_0 - U)$, где U_0 = 9 В, а показание среднего вольтметра будет $(2U_0 - U)$. Полярность показаний вполне очевидна – стоит только мысленно разорвать цепь между точкой соединения всех вольтметров и батарейками. Вольтметры одинаковые, значит, токи через них пропорциональных их напряжениям и сумма токов (или напряжений) нижних вольтметров равна сумме токов (напряжений) верхнего и среднего приборов:

$$U + U = (3U_0 - U) + (2U_0 - U),$$

откуда

$$U = 11{,}25 \text{ В}.$$

Таким образом, нижние вольтметры показывают по 11,25 В, показание верхнего вольтметра 15,75 В, а среднего 6,75 В.

А.Повторов

Ф1716. *Две одинаковые катушки индуктивности расположены недалеко друг от друга. Одна из них подключена к источнику синусоидального переменного напряжения последовательно с амперметром, к концам другой катушки подключен второй амперметр. Амперметры показывают 1 А и 0,2 А (угадайте сами, какой из них показывает 1 А, а какой 0,2 А). Один из амперметров отключают (при отключении амперметра цепь разрывается). Что покажет после этого оставшийся амперметр? Катушки, приборы и источники можно считать идеальными. Сопротивление проводов пренебрежимо мало.*

Ясно, что больший ток течет через амперметр, подключенный к источнику переменного напряжения. Ток через неподключенную вторую катушку связан с наличием магнитного потока первой катушки, пронизывающего вторую. Ток этой катушки тоже создает магнитный поток, пронизывающий первую катушку, и влияет на ток в ее цепи. В цепи второй катушки нет активного сопротивления – по условию задачи элементы цепи можно считать идеальными, – это означает, что ее собственный магнитный поток LI_2 (здесь L – индуктивность катушки) должен полностью уравновесить магнитный поток Φ от первой катушки:

$$LI_2 - \Phi = 0.$$

Ток второй катушки меньше, он создает в первой катушке поток, равный $\Phi(I_2/I_1)$. Полный магнитный поток через первую катушку составит

$$LI_1 - \Phi(I_2/I_1).$$

Производная от этой величины равна по модулю напряжению источника.

Теперь ответы. Если разорвать цепь первой катушки, то оба тока упадут до нуля. Если же разорвать цепь второй катушки, то пропадет добавочный магнитный поток, пронизывающий первую катушку, и для тока I в этой катушке можно записать

$$LI = LI_1 - \Phi\frac{I_2}{I_1},$$

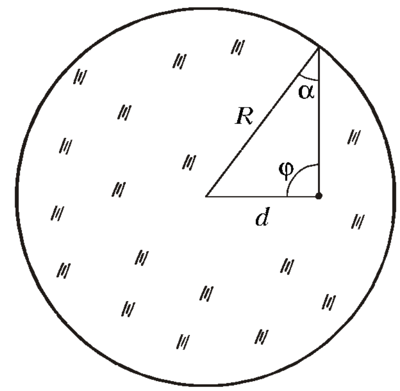
откуда

$$I = I_1 - \frac{\Phi}{L}\frac{I_2}{I_1} = I_1\left(1 - \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2\right) = 0{,}96 \text{ А}.$$

Р.Александров

Ф1717. *На расстоянии $d = 0,6$ см от центра стеклянного шара радиусом $R = 1$ см находится точечный источник света. При каких значениях коэффициента преломления стекла n весь испускаемый источником световой поток выйдет наружу? Оцените долю вышедшего наружу потока при $n_1 = 1,6$. Снаружи – вакуум; источник излучает во все стороны равномерно.*

Падающий на границу раздела двух сред тонкий пучок света частично отражается, частично преломляется, и часть энергии (светового потока) при этом уходит в окружающую шар среду. Следующие падения остатка пучка происходят под теми же углами к нормали в точке падения, и каждый раз такая же часть энергии уходит из шара наружу. Если нет заметного поглощения энергии внутри, то, казалось бы, вся испущенная источником энергия уйдет наружу. Что же может помешать этому? Вспомним, что не всегда существует преломленный луч – при падении пучка под большими углами к нормали возможно полное внутреннее отражение, когда весь поток отражается назад в оптически более плотную среду (в нашем случае – в стекло). Найдем максимальный угол падения луча на сферическую поверхность, при котором полного отражения еще не произойдет. По теореме синусов (см. рисунок)



$$\frac{R}{\sin\varphi} = \frac{d}{\sin\alpha},$$

откуда

$$\sin\alpha = \frac{d}{R}\sin\varphi .$$

Видно, что значение синуса угла падения не превосходит 0,6; это значит, что при величине коэффициента преломления меньше $1/0,6 = 1,66\ldots$ полного внутреннего отражения не произойдет. В нашем случае $n_1 = 1,6$ меньше этого значения (вот если бы в условии был указан коэффициент преломления 1,7, было бы, что посчитать!); следовательно, весь поток выйдет из шара.

А.Зильберман

НАМ ПИШУТ

Как покупать и как эксплуатировать батарейки?

Устройство и механизм работы гальванических элементов в общем нам известны. Но при пользовании ими возникает масса конкретных вопросов. Рассмотрим два из них: дешевые или дорогие батарейки лучше покупать и как полнее использовать энергию аккумулятора в плейере?

Начнем с первого вопроса. В газете «Известия» за 21 января 1998 года были опубликованы данные испытания батареек «элемент 316», применяющихся в плейерах и диктофонах. Для батареек разных фирм было определено время работы в плейере – основное и после «отдыха» в течение 6 часов. Оказалось, что более дорогие батарейки позволяют, естественно, слушать музыку дольше, но при этом стоимость часа работы дорогих батареек, в общем, выше. Так и должно быть – это плата за удобство: реже приходится менять элементы.

Однако из опубликованных данных можно сделать и более тонкие выводы. Разброс стоимости часа работы батареек зависит от стоимости батареек, причем чем батарейки дешевле, тем разброс больше. Дорогие батарейки все похожи, дешевые – все разные: могут быть почти такие же (по стоимости часа работы), как дорогие, а могут быть и намного хуже. Отсюда мораль: если у вас нет конкретной информации, покупайте дорогие – это надежнее. Покупая дешевые батарейки, можно выгадать, и немало, но только если вы располагаете информацией о данном товаре (или фирме). (Не относится ли это вообще к стратегии покупателя на рынке?)

Теперь обратимся к проблеме «аккумулятор в плейере». Некоторые из тех, кто ставил аккумуляторы в любимую звучащую игрушку, были неприятно удивлены – аккумуляторы работали меньше, чем им полагалось, исходя из их емкости и тока разряда. Расследование показало, что плейеры перестают работать при относительно небольшом разряде, так как напряжение аккумуляторов вообще меньше, чем у батарей. Конечно, даже так эксплуатировать аккумуляторы дешевле, но можно поступить хитрее. После того как два аккумулятора окажутся подсевшими, берем два свежих заряженных аккумулятора и каждый из подсевших доразряжаем в паре со свежим. Недостаток метода в том, что надо иметь 4 аккумулятора, но обычно потребитель их имеет, чтобы не оказаться в ответственный момент без энергии. Эксперимент показал, что в таком режиме аккумуляторы работают

2,5 часа (свежая пара) + 1 час (свежий + севший) +

+ 1 час (второй свежий + второй севший) +

+ 1,5 часа (пара свежих, работавших в паре с севшими) =

= 6 часов.

По стандартной методике они работали бы 5 часов (2,5 + 2,5). Итого, выигрыш 20%. При большем количестве эксплуатируемых аккумуляторов выигрыш увеличивается: при 6 аккумуляторах – до 30%, при очень большом количестве – до 40%. Для батареек этот эффект несколько слабее и при использованнии 4 батареек составляет от 10 до 20%.

И.Гольдфаин

Задачи

1. Расставьте вместо букв цифры, если известно, что разные буквы обозначают разные цифры.

Д.Изаак

2. Убедитесь, что число $2\underbrace{55\ldots5}_{100\text{ пятерок}}3$ является составным.

В.Произволов

3. Для съемок музыкального клипа группа «Егорушки International» собирала в мешки тополиный пух. Саша собрал более половины всех мешков – в 5 раз больше, чем Валера, и на 10 мешков больше, чем Андрей. Возмущенный такой несправедливостью, Валера отобрал у каждого из приятелей несколько мешков, так что у всех троих мешков стало поровну. Сколько всего мешков пуха собрали «Егорушки»?

И.Акулич

4. Прямоугольное поле расчертили на клетки линиями, параллельными его сторонам. В каждую клетку этого поля встало по одному танцору, которые предварительно взялись за руки, образуя замкнутую цепочку. Может ли поле иметь 1001 клетку?

З.Горыныч

5. Маша старается выпекать лепешки в форме параллелограммов, но у нее получаются лишь изделия в форме выпуклых четырехугольников, не являющихся параллелограммами. Утешая ее, Даша утверждает, что из каждой такой лепешки можно вырезать параллелограмм, три вершины которого совпадут с вершинами четырехугольника. Права ли Даша?

Д.Калинин

Иллюстрации Д.Гришуковой

Заключительный этап конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8»

С 27 июня по 4 июля 1999 года на берегу Рыбинского водохранилища в профилактории «Приморский хуторок» проходил заключительный этап турнира «Математика 6–8». В нем участвовали команды из Астрахани, Иванова, Костромы, Краснодара, Минска, Москвы, Набережных Челнов, Петровска-Забайкальского (есть такой город в Читинской области), Рыбинска, Самары, Харькова, Чебоксар и Ярославля.

В Рыбинске турнир проходил третий год подряд. На этот раз к прежним достоинствам – санаторному быту, десятикилометровой удаленности от ближайшего поселка, необъятному сосновому бору, где легко найти ужа (а ежи безбоязненно бегают вечерами по дорожкам между жилыми корпусами), – благодаря жаркому лету, добавилось еще купание (по несколько раз в день). Руководителям команд не приходилось волноваться за безопасность школьников: средняя глубина Рыбинского водохранилища всего лишь полтора метра, дно – ровное, чистое, песчаное.

«Мы едем решать интересные задачи и отдыхать», – сказал своим ученикам на вокзале руководитель команды Москвы А.Н.Карпов – и оказался абсолютно прав: дети хорошо отдохнули и многому научились. Не менее благодарны организаторам турнира руководители команд и жюри. Для этих людей, влюбленных в математику и чувствующих личную ответственность за судьбы своих учеников и образования в целом, турнир – своеобразный отчет о работе за год.

По традиции, турнир включал в себя как личную олимпиаду, в которой каждый участник решал задачи индивидуально, так и командные соревнования — математические бои.

Вот список лауреатов личной олимпиады:

Дипломы I степени получили

Голубов Алексей – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Гонгальский Максим – Москва, лицей «Вторая школа», 8 кл.,
Дудко Артем – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Каленков Максим – Набережные Челны, гимназия 26, 8 кл.,
Коршунов Кирилл – Москва, Пятьдесят седьмая школа, 8 кл.,
Куликов Егор – Ярославль, школа 33, 8 кл.,
Позовной Олег – Москва, лицей «Вторая школа», 8 кл.,
Поярков Александр – Рыбинск, лицей 2, 8 кл.,
Преображенский Игорь – Ярославль, школа 33, 8 кл.,
Рябинин Сергей – Иваново, школа 30, 8 кл.,
Тимаков Антон – Набережные Челны, гимназия 26, 8 кл.,
Томин Дмитрий – Иваново, лицей «Гармония», 7 кл.,
Шаповалова Валентина – Иваново, лицей «Гармония», 7 кл.,
Шмаевский Семен – Астрахань, ФМШ 32, 8 кл.

Дипломы II степени получили

Алексеев Иван – Кострома, школа 32, 8 кл.,
Бурмако Евгений – Минск, школа 184, 7 кл.,
Гордон Дмитрий – Харьков, гимназия 45, 7 кл.,
Дудченко Николай – Москва, лицей «Вторая школа», 8 кл.,
Колбун Владимир – Минск, политехническая гимназия, 8 кл.,
Кругов Виталий – Астрахань, ФМШ 32, 8 кл.,
Кулибаба Виктор – Астрахань, ФМШ 32, 8 кл.,
Логинова Тамара – Кострома, лицей 17, 8 кл.,
Мазаник Юрий – Минск, школа 51, 8 кл.,
Миргасимов Алмаз – Набережные Челны, гимназия 26, 7 кл.,
Морозов Иван – Иваново, лицей 6, 8 кл.,
Овчинников Федор – Москва, лицей «Вторая школа», 8 кл.,
Половинкина Елена – Краснодар, лицей 90, 8 кл.,
Стожков Владимир – Рыбинск, лицей 2, 8 кл.,
Тучков Павел – Москва, лицей «Вторая школа», 8 кл.

Дипломы III степени получили

Баканов Сергей – Астрахань, ФМШ 32, 7 кл.,
Балмасов Евгений – Ярославль, школа 10, 7 кл.,
Буланов Павел – Минск, школа 19, 7 кл.,
Горбачева Екатерина – Астрахань, ФМШ 32, 7 кл.,
Ефимов Андрей – Кострома, школа 1, 7 кл.,
Зимин Иван – Рыбинск, школа 30, 7 кл.,
Матвеев Дмитрий – Астрахань, ФМШ 32, 7 кл.,
Носович Сергей – Жодино, школа 7, 7 кл.,
Осянин Станислав – Набережные Челны, гимназия 26, 7 кл.,
Панов Михаил – Рыбинск, лицей 2, ,7 кл.,
Сабирова Вера – Москва, лицей «Вторая школа», 8 кл.,
Сидоров Алексей – Кострома, школа 32, 7 кл.,
Солонников Дмитрий – Краснодар, лицей 90, 8 кл.,
Сотнезов Роман – Чебоксары, школа 27, 7 кл.,
Сычев Антон – Иваново, лицей 33, 8 кл.,
Федоров Олег – Москва, Пятьдесят седьмая школа, 8 кл.,
Щукин Дмитрий – Чебоксары, школа 27, 7 кл.

В командных соревнованиях победителем турнира стала команда Набережных Челнов (руководитель – Л.В.Баева), а капитан этой команды Каленков Максим отмечен специальным призом «Лучшему игроку».

Дипломами второй степени награждены команды Москвы (А.Н.Карпов) и Харькова (Е.Л.Аринкина и А.Л.Берштейн). Дипломы третьей степени получили команды Рыбинска (Т.И.Михайлова) и Ярославля (С.Г.Волченков). Команды Чебоксар (А.В.Монов) и Астрахани (А.В.Забалуева и С.С.Тасмуратов) награждены дипломами «За успешное участие».

Познакомимся с некоторыми задачами турнира.

Личная олимпиада

Задачи

1. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отметили точки M и N так, что $BM = BC$ и $AN = AC$ (рис.1). Затем на катетах BC и AC отметили, соответственно, точки P и Q так, что $BP = BN$ и $AQ = AM$.

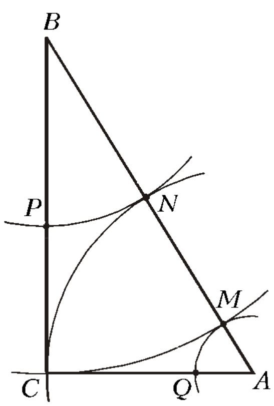


Рис. 1

Докажите, что точки C, Q, M, N, P лежат на одной окружности.

(В.Произволов)

2. Можно ли куб размером $2\times2\times2$ оклеить в один слой четырьмя одинаковыми развертками куба $1\times1\times1$?

(С.Токарев)

3. Три мухи в полдень сели на секундную, минутную и часовую стрелки часов и поехали на них. Когда какая-то стрелка обгоняла другую, сидящие на этих стрелках мухи менялись местами (а если бы секундная стрелка обогнала часовую и минутную стрелки одновременно, то местами поменялись бы мухи с секундной и часовой). Сколько кругов проехала каждая из мух до полуночи?

(С.Волченков)

Решения

1. $CMNP$ – равнобокая трапеция; вокруг нее можно описать окружность. Аналогично, $CQMN$ – равнобокая трапеция, тоже вписанная в окружность. Эти две окружности имеют три общие точки: C, M и N. Три точки однозначно задают окружность – следовательно, рассматриваемые окружности совпадают. Все сделано!

Отметим, что несколько лет назад М. Евдокимов придумал такую задачу: *если вписать в прямоугольный треугольник ABC окружность и опустить на гипотенузу и катеты перпендикуляры (рис.2), то основания этих перпендикуляров Q, M, N, P и вершина C прямого угла лежат на одной окружности.*

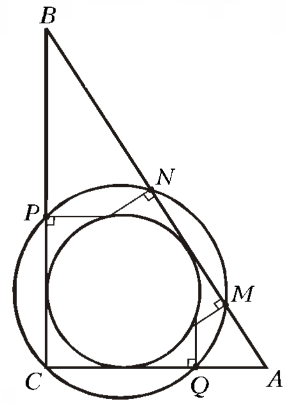


Рис. 2

(Хотите знать решение? Все точки, из которых данная окружность видна под углом 90°, лежат на окружности с тем же центром и в $\sqrt{2}$ раз большим радиусом.) Задача 1 – великолепная переформулировка задачи Евдокимова.

2. Эта задача сложна для проверки: почти у каждого решившего задачу – своя развертка куба $2\times2\times2$ и свой способ разрезания на четыре развертки куба $1\times1\times1$. На рисунках 3 и 4 показаны два способа, предложенные школьниками. Попытайтесь их проверить – скорее всего, как и у нас, воображение откажет. Тогда придется резать бумагу и складывать кубик! (Кстати, можете сказать, это по сути разные способы или одинаковые?)

А теперь – оцените авторское решение (рис.5)!

3. Эту задачу никто не решил, хотя один участник олимпиады неведомым жюри способом получил правильный

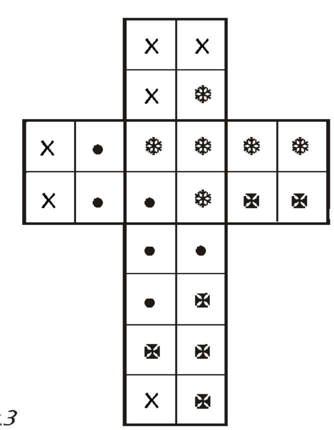


Рис.3

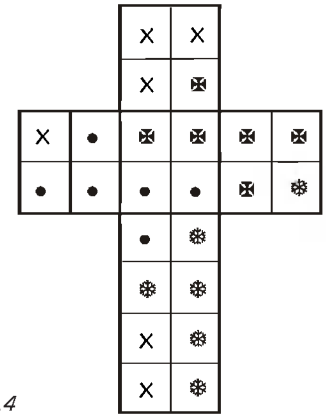


Рис.4

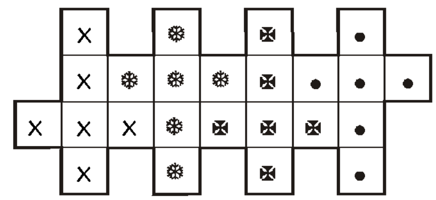


Рис.5

ответ, не сумев его обосновать. (Забегая вперед, отметим, что каждая из остальных задач турнира была решена хотя бы одним школьником.)

Идея решения истинно олимпиадная: мухи не перегоняют одна другую. Значит, никакая муха не может обогнать никакую другую более чем на один оборот. Поэтому количества оборотов, сделанных мухами, не могут отличаться более чем на единицу.

Часовая стрелка делает за 12 часов один оборот, минутная – 12, секундная – 720; три мухи вместе сделают $1 + 12 + 720 = 733$ оборота. Осталось представить число 733 в виде суммы трех натуральных чисел, отличающихся не более чем на единицу: $733 = 244 + 244 + 245$. Это и есть ответ: мухи, начавшие свой путь на часовой и минутной стрелках, сделали по 244 оборота, а третья муха – 245.

Командные соревнования (математические бои)

Задачи

4. В одном из 1000 окопов, расположенных в ряд, спрятался пехотинец. Автоматическая пушка может одним выстрелом накрыть любой окоп. В каждом промежутке между выстрелами пехотинец (если уцелел) обязательно перебегает в соседний окоп (быть может, только что обстрелянный). Сможет ли пушка наверняка попасть в пехотинца?

(А.Шаповалов, В.Шорин)

5. По кругу написаны n натуральных чисел, при этом каждые два соседних числа отличаются на 1.

Назовем число значительным, если оба соседа меньше его; сумма всех значительных чисел равна M. Назовем число незначительным, если оба его соседа больше его; сумма всех незначительных чисел равна m. Докажите равенство $n = 2(M - m)$.

(В.Произволов)

6. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли, соответственно, точки K и L, а на стороне AC — точки M и N так, что KL параллельно AC, $AK = KM$, $NL = LC$. Докажите, что $AC \perp BP$, где P — точка пересечения прямых KM и LN.

(С.Волченков)

Решения

4. Занумеруем окопы слева направо числами от 1 до 1000. Предположим сначала, что в момент первого выстрела пехотинец сидит в окопе с нечетным номером. Пусть пушка выстрелит в окоп номер 1. Если не попала, то пехотинец перешел в окоп с четным номером. Выстрелим во второй окоп. Если не попали, то пехотинец перешел в окоп с нечетным номером, не меньшим 3. Выстрелим в окоп номер 3, и так далее. Оттесняя пехотинца, мы таким образом поразим его.

Если же вначале пехотинец находился в окопе с четным номером, то после тысячного выстрела он находится в окопе с четным номером. Теперь опять стреляем в 1000-й окоп, а потом в 999-й, 998-й,…, 1-й.

5. Выпишем n пар соседних чисел и в каждой паре вычтем из большего числа меньшее. Сложим эти разности. С одной стороны, эта сумма равна n, так как каждая разность равна 1. С другой стороны, каждое значительное число войдет в две разности со знаками плюс, каждое незначительное — со знаками минус, а все остальные — по одному разу с каждым знаком. Значит, $n = 2M - 2m$.

6. *Указание.* Треугольники LKB и LKP (рис.6) симметричны относительно прямой LK.

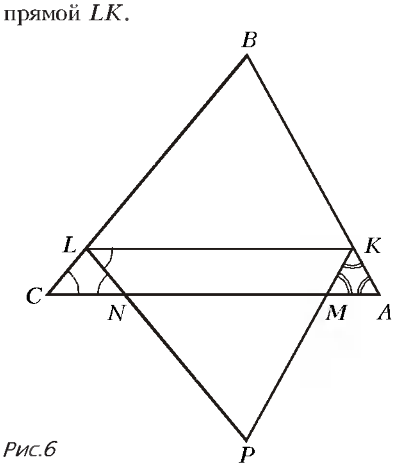


Рис.6

Еще несколько задач

7. Каждый зритель, пришедший на спектакль «Королевский жираф», принес с собой либо одну дохлую кошку, либо два кочана гнилой капусты, либо три тухлых яйца. Стоявший у входа Гекльберри Финн подсчитал, что кошек было 64 штуки. После спектакля оба артиста — король и герцог — были с ног до головы закиданы припасами, причем на долю каждого досталось поровну предметов (а промахов жители Арканзаса не делают). Правда, король принял на себя лишь пятую часть всех яиц и седьмую часть капусты, но все дохлые кошки полетели именно в него. Сколько зрителей пришло на представление?

(И.Акулич)

8. В конференции участвовали 100 человек — химики и алхимики. Каждому был задан вопрос: «Если не считать Вас, то кого больше среди остальных участников — химиков или алхимиков?». Когда опросили 51 участника и все ответили, что алхимиков больше, опрос прервался. Алхимики всегда лгут, а химики всегда говорят правду. Сколько химиков среди участников?

(А.Шаповалов)

9. В школьной олимпиаде по математике участвовали 100 человек, по физике — 50, по информатике — 48. Когда учеников опросили, в скольких олимпиадах они участвовали, ответ «в двух» дали вдвое меньше человек, чем ответ «в одной», а ответ «в трех» — втрое меньше, чем ответ «в одной». Сколько всего учеников участвовали в этих олимпиадах?

(А.Шаповалов)

10. Можно ли на поверхность куба наклеить без наложения прямоугольник так, чтобы он закрыл половину каждой грани?

(Д.Калинин)

11. На шахматной доске, первоначально пустой, расставляются ферзи по следующим правилам: каждым ходом на доску устанавливается один ферзь, и, если он кого-либо побил, то один из побитых им ферзей снимается с доски. Какое наибольшее число ферзей можно расставить на доске с соблюдением этих условий?

(И.Акулич)

12. На каждой стороне треугольника отметили по точке и соединили эти точки отрезками, тем самым разбив треугольник на четыре меньших треугольника. Все четыре оказались подобны друг другу. Обязательно ли эти четыре треугольника равны между собой?

(А.Шаповалов)

13. Строки и столбцы таблицы размером 9×9 занумеровали числами от 2 до 10 и в каждую клетку вписали произведение номера ее строки на номер ее столбца. Затем несколько строк и столбцов вычеркнули. Может ли сумма оставшихся чисел оказаться простым числом?

(И.Акулич)

14. Из 1998 дробей $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{1998}$ составили всевозможные произведения по три. Затем эти произведения просуммировали, привели к общему знаменателю и полученную дробь преобразовали к несократимому виду. Докажите, что числитель полученной дроби кратен 1999. (*Указание.* Число 1999 — простое.)

(И.Акулич)

15. Числами от 1 до 100 сверху вниз пронумеровали 100 карточек в стопке. Двое играющих по очереди снимают сверху по одной или по нескольку карточек и отдают противнику. Выигрывает тот, у кого первого произведение номеров всех карточек станет кратно 1000000. Кто из игроков может гарантировать себе выигрыш?

(А.Шаповалов)

16. Ветка кустарника (рис. 7) имеет один лист сверху и, кроме того, n пар листьев (листья одной пары растут из одной точки стебля). Двое по очереди срывают листья. За один ход можно сорвать либо один любой лист, либо любую пару листьев, растущих из одной точки. Выигрывает тот, кто сорвет последний лист. При каких n побеждает начинающий, а при каких — его противник, если оба играют наилучшим образом?

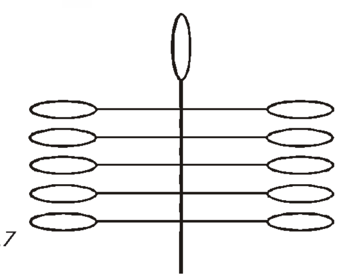


Рис.7

(И.Акулич)

Заключение

Отметим, что успешным своим проведением конкурс обязан Управлению по делам образования и молодежи г. Рыбинска. Особой благодарности заслуживают заместитель главы администрации Рыбинского муниципального округа А.И.Брянкин и руководитель Рыбинского филиала Ярославской областной заочной математической школы А.Н.Морозов. Книги для призов победителям были предоставлены Московским институтом развития образовательных систем и журналом «Квант».

А.Спивак, С.Токарев

Награда калифа

А.КОТОВА

Гуссейн Гуслия был глубоко уязвлен тем, что Ходжа Насреддин обставил его в той самой науке, в которой он полагал себя сильнейшим и несравненным.[1] «Ну погоди же, – думал он, – я задам тебе задачку, которая будет тебе не по силам, и докажу мое превосходство в премудростях».

Поэтому он проглотил обиду, огладил бороду и с важностью сказал:

– Что ж, я не сержусь на тебя, хотя следовало бы. Слушай же, я расскажу тебе одну поучительную историю.

Некогда служил я при дворе знаменитого багдадского калифа Гаруна аль-Рашида. Он очень ценил меня и хорошо платил за предсказания, которые я превосходно умею делать, исходя из положения звезд...

[1] *См. «Квант» №1 за этот год.*

– Да-да, помню, – негромко заметил Ходжа Насреддин, – звезды Сад-ад-Забих противостоят Меркурию, а звезды Сад-ад-Сууд совпадают со звездами Сад-аль-Ахбия...

Старый звездочет зашипел от злости:

– Сколько раз я говорил тебе, что звезды Сад-ад-Сууд не могут совпасть со звездами Сад-аль-Ахбия, ибо находятся в одном созвездии с ними, о невежда, сын невежды, внук и правнук невежды!.. Но сейчас речь не о том.

Случилось так, что любимая жена великого калифа ожидала ребенка, а ему очень нужен был наследник. И вот калиф (да продлятся дни его бесконечно!) призвал меня и второго астролога, а вторым астрологом был тогда знаменитый Гассан Абдурахман ибн-Хоттаб, и велел нам составить гороскоп будущего ребенка. Но разве можно составить точный гороскоп

того, чей день и час рождения еще неизвестен? И вот мы с Гассаном удалились каждый в свои покои, наблюдали звезды и вычисляли; когда же гороскопы были готовы, оказалось, что мой предсказывает калифу рождение дочери, а гороскоп Гассана – рождение сына.

Мы долго спорили в чайхане, чье предсказание точнее, но я так и не смог убедить Гассана, а он – меня. «Но что же мы скажем светлейшему калифу? – увещевал я его. – Если мы ошибемся, повелитель разгневается».

– Догадываюсь, – вставил Ходжа Насреддин. – Нашелся умный человек, подсказавший вам выход.

Гуссейн Гуслия с подозрением посмотрел на Насреддина. «Ты-то как догадался? – подумал он. – Уж не было ли тебя в той чайхане?»

– Ты угадал, – сказал он. – Какой-то незнакомец посоветовал нам поднести калифу оба гороскопа, а награду, которую получит тот из нас, кто окажется прав, разделить между собой. Мы договорились, что тот, чей гороскоп окажется верным, получит большую часть награды, но и другой не останется в накладе.

Вскоре долгожданный младенец родился. Увы мне – это был мальчик! Гассан получил в дар от калифа десять кошельков, а я – ничего.

– И вы отправились делить деньги, – подсказал Насреддин.

– Разумеется, мы отправились делить деньги! Но когда мы открыли кошельки, оказалось, что один из них пуст, во втором – одна таньга, в третьем – две и так далее. Мы подарили два кошелька нашему советчику, который снова околачивался в чайхане...

– Вы предпочли бы, чтобы его там не было, – заметил Насреддин.

– Аллах покарает твой злой язык! – возмутился Гуссейн Гуслия. – Мы честно заплатили тому оборванцу! Остальные же кошельки мы поделили по уговору – ибн-Хоттаб получил большую часть. Но тут в чайхану ввалился его брат Омар Юсуф, известный своим завистливым и склочным нравом, увидел кошельки и потребовал часть денег себе. Я принялся увещевать его, мы поссорились, и Омар Юсуф – да будет он проклят! – отнял у меня четыре кошелька. Мне осталось всего лишь 10 таньга. Скажи же теперь, если ты так умен, каким хочешь казаться, сколько мы заплатили незнакомцу за совет?

– Твоя загадка совсем проста, – сказал Ходжа Насреддин. – Раз у тебя осталось 10 таньга, они лежали по крайней мере в двух кошельках. Поскольку 4 кошелька у тебя отнял Омар Юсуф, ты получил при дележе не меньше 6 кошельков. В шести же кошельках денег не меньше, чем 15 таньга (ведь 0 + + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15). Но ибн-Хоттабу досталось не меньше, чем тебе, значит, у него было не меньше двух кошельков. Поскольку еще 2 кошелька получил ваш советчик, у Гассана было ровно 2 кошелька, а у тебя ровно шесть.

Значит, у Гассана в двух кошельках было больше денег, чем у тебя в шести, – 16 или 17 таньга (ведь 8 + 9 = 17, большей суммы в двух кошельках найти нельзя).

Раз у тебя в конце концов осталось 10 таньга, у тебя не могло быть кошельков с 0, 1, 2, 3, 4 и 5 таньга – из них нельзя выбрать два с десятью монетами. Значит, у тебя было больше 15 таньга, но меньше, чем у Гассана, т.е. у тебя было 16 таньга, а у него 17.

Так что у него были кошельки с 8 и 9 таньга, у тебя – с 0, 1, 2, 3, 4 и 6, а незнакомцу достались кошельки с 5 и 7 монетами.

– Что-то слишком быстро ты ответил, – недовольно проворчал Гуссейн Гуслия. – Ты не вычислял, какие у меня были кошельки, ты угадал!

– Видишь ли, почтенный, – сказал Ходжа Насреддин, – мне не было нужды считать. Я-то прекрасно помню, что получил 12 таньга и неплохо обедал на них четыре дня.

– О горе мне! – вскричал звездочет. – Надо же мне было вспомнить историю, в которой участвовал ты сам!

– Не огорчайся так, – утешил его Ходжа Насреддин. – Ведь тогда мы не были с тобой знакомы, о великий Гуссейн Гуслия!

НАМ ПИШУТ

Еще раз о малой теореме Ферма

Пусть p – простое число. Малая теорема Ферма гласит: если a – целое число, не кратное p, то a^{p-1} кратно p, т. е. число $f(a) = \left(a^{p-1} - 1\right)/p$ – целое. Я хочу обратить внимание на интересное свойство:

$$f(ab) \equiv f(a) + f(b) \pmod p$$

для любых целых чисел a и b, не кратных числу p. Доказать его проще всего, перемножив равенства $a^{p-1} = 1 + pf(a)$, $b^{p-1} = 1 + pf(b)$. А именно,

$$1 + pf(ab) = (ab)^{p-1} = a^{p-1}b^{p-1} = (1 + pf(a))(1 + pf(b)),$$

откуда

$$f(ab) = f(a) + f(b) + pf(a)f(b) \equiv f(a) + f(b) \pmod p.$$

Р.Пименов

Периодические дроби

Л.СЕМЁНОВА

Как вы знаете, обыкновенная дробь – это число, составленное из целого количества долей единицы. Дробь записывают в виде $\frac{m}{n}$ или m/n, где числитель m – целое число, а знаменатель n – натуральное число. Для получения дроби m/n надо разделить единицу на n равных частей и взять m таких частей. Величина дроби не изменится, если ее числитель и знаменатель умножить на одно и то же натуральное число. Благодаря этому любые две дроби k/l и m/n можно привести к общему знаменателю ln, заменив их на $kn/(ln)$ и $ml/(ln)$.

Если числитель и знаменатель дроби имеют отличный от единицы общий делитель, то дробь можно сократить – разделить на него числитель и знаменатель. Вследствие этого всякую дробь можно представить в несократимом виде, т. е. в виде дроби, числитель и знаменатель которой – взаимно простые числа[1]. Например, $120/344$ – сократимая дробь $\left(\frac{120}{344}=\frac{15\cdot 8}{43\cdot 8}=\frac{15}{43}\right)$, а $15/43$ – равная ей несократимая дробь.

Дробь m/n называют *правильной*, если $0\le m<n$. Всякую дробь можно единственным образом представить в виде суммы целого числа $[m/n]$ (целой части дроби m/n) и правильной дроби $\{m/n\}$ (дробной части). Например,

$$\frac{91}{17}=\frac{5\cdot 17+6}{17}=5+\frac{6}{17}.$$

Сумму и разность дробей с одинаковыми знаменателями определяют по правилам:

$$\frac{a}{n}\pm\frac{b}{n}=\frac{a\pm b}{n}.$$

Чтобы сложить или вычесть дроби k/l и m/n с разными знаменателями, их предварительно приводят к общему знаменателю. Обычно в качестве него берут наименьшее общее кратное НОК$[l,n]$ чисел l и n.

Нидерландский ученый и инженер Симон Стевин (1548–1620) предложил использовать десятичные дроби, т.е. дроби, знаменатели которых – степени числа 10. Складывать, вычитать и сравнивать[2] их легче, чем обыкновенные дроби. Десятичные дроби обычно пишут без знаменателя, например, $\frac{5481475}{10000}=548{,}1475$ и $\frac{23}{1000}=0{,}023$.

Известно вам и то, что рациональное число (обыкновенная дробь) – это периодическая десятичная дробь, а иррациональное – непериодическая. Но далеко не каждый может объяснить, почему это так. А уж на вопросы: «Какова длина периода десятичного представления дроби $1/7^7$? Какой может быть длина периода суммы двух бесконечных десятичных периодических дробей, длины периодов которых равны 6 и 12?» – ответят очень и очень немногие.

Эта статья – обстоятельный рассказ о связи между обыкновенными и периодическими десятичными дробями. Мы научимся решать некоторые весьма непростые задачи и докажем одну из важнейших теорем арифметики – теорему Эйлера (и ее частный случай – малую теорему Ферма). Но не будем торопиться, а разберем все по порядку.

От обыкновенной дроби – к десятичной

Как записать обыкновенную дробь m/n в десятичной системе счисления? Если n – степень двойки, степень пятерки или произведение степеней двойки и пятерки, то получится – конечная десятичная дробь. Например,

$$\frac{13}{64}=\frac{13\cdot 15625}{64\cdot 15625}=\frac{203125}{1000000}=0{,}203125;$$

$$\frac{3}{25}=\frac{3\cdot 4}{25\cdot 4}=0{,}12;$$

$$\frac{3}{40}=\frac{3\cdot 25}{40\cdot 25}=\frac{75}{1000}=0{,}075.$$

Хотя число 35 не является произведением степеней двойки и пятерки, сократимая дробь $7/35$ представима в виде конечной десятичной дроби:

$$7/35=1/5=0{,}2.$$

Но если дробь m/n несократима и при этом хотя бы один из простых делителей числа n отличен от 2 и 5, то m/n нельзя представить в виде конечной десятичной дроби[3].

Переводить дроби из обыкновенных в десятичные можно делением «уголком». Например, разделим 3 на 7:

$$\begin{array}{l|l}
\underline{-3} & 7 \\
\underline{\ \ 0} & 0{,}4285714 \\
\ -30 & \\
\ \ \underline{28} & \\
\ \ -20 & \\
\ \ \ \underline{14} & \\
\ \ \ -60 & \\
\ \ \ \ \underline{56} & \\
\ \ \ \ -40 & \\
\ \ \ \ \ \underline{35} & \\
\ \ \ \ \ -50 & \\
\ \ \ \ \ \ \underline{49} & \\
\ \ \ \ \ \ -10 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \underline{7} & \\
\ \ \ \ \ \ \ -30 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \underline{28} & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ldots &
\end{array}$$

Целая часть равна 0. Чтобы получить первую цифру после запятой, разделим 30 на 7. Получим частное 4 и остаток 2. Разделив 20 на 7, получаем частное 2 и остаток 6. Следующий шаг – деление 60 на 7 – дает частное 8 и остаток 4. Далее,

$$40=5\cdot 7+5,$$

$$50=7\cdot 7+1,$$

$$10=1\cdot 7+3.$$

Мы вернулись к задаче деления 3 на 7; произошло зацикливание: если продолжим деление, то опять получим

[1] *Числа m и n называют взаимно простыми, если единственным их общим делителем является число 1, т.е. если число m не делится ни на один из простых делителей числа n.*

[2] *Это очень важно для практики: десятичные дроби гораздо легче сравнивать между собой, чем обыкновенные!*

[3] *Действительно, если $m/n=a/10^b$, то $10^b m=an$; рассмотрев любой отличный от 2 и 5 простой делитель p числа n, приходим к противоречию: an кратно p, а равное ему число $10^b m$ – не кратно.*

частное 4 и остаток 2, затем будем делить 20 на 7, и так далее:

$$\frac{3}{7} = 0{,}428571428571428571\ldots$$

Обычно этот результат записывают короче:

$$\frac{3}{7} = 0{,}(428571),$$

т.е. заключают повторяющуюся группу цифр в скобки и говорят: «428571 в периоде»[4].

Если повторяющаяся группа цифр (период) расположена непосредственно после запятой, то такую десятичную дробь называют *чисто периодической*; в противном случае говорят, что дробь имеет *предпериод* и называют ее *смешанной периодической.*

Теорема 1. *Десятичное представление дроби m/n, где m, n – натуральные числа, $m < n$, – периодическая дробь, длина наименьшего периода которой не превосходит $n-1$.*

Доказательство. Чтобы получить первую цифру после запятой, мы приписываем к m нуль (т.е. умножаем m на 10) и делим (с остатком) полученное число на n. Вообще весь процесс деления уголком – повторяемое вновь и вновь умножение очередного остатка на 10 и деление (с остатком) на n.

Если на каком-то шаге получится нулевой остаток, то дробь – конечная. Конечную дробь, приписав к ней справа бесконечно много нулей, естественно считать периодической с периодом длины 1. По условию, $1 \le n-1$, так что в этом случае утверждение теоремы выполнено.

Если же процесс деления никогда не закончится, то будут получаться только ненулевые остатки, т.е. числа от 1 до $n-1$. Значит, не позже чем на n-м шаге остаток повторится. С этого момента процесс деления зациклится, что и требовалось доказать.

Упражнения

1. Убедитесь, что а) $1/3 = 0{,}(3)$; б) $1/6 = 0{,}1(6)$; в) $7/30 = 0{,}2(3)$; г) $7/11 = 0{,}(63)$.

2. Найдите сотую цифру после запятой в десятичной записи числа $1/7$.

3. Разделите «уголком» число 1 на а) 9; б) 99; в) 9999999. г) Докажите общее правило: $1/\underbrace{99\ldots9}_{n} = 0{,}\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1$.

[4] *Существуют и непериодические дроби, например, десятичная дробь 0,1010010001..., где количество нулей между единицами все время увеличивается на 1. Но в этой статье они никак не будут использованы.*

4. Проверьте равенства а) $0{,}(6) + 0{,}(5) = 1{,}(2)$; б) $0{,}(845) + 0{,}(49) = 1{,}(340795)$; в) $2{,}70(584) + 6{,}917(49) = 9{,}623(340795)$.

От периодической десятичной дроби – к обыкновенной

Пусть

$$x = 0{,}11111\ldots$$

Тогда

$$10x = 1{,}1111\ldots,$$

откуда

$$10x = 1 + x,$$

т.е. $x = 1/9$. Мы получили замечательный результат:

$$0{,}11111\ldots = 1/9.$$

Это равенство не приближенное, а *точное*: бесконечная десятичная периодическая дробь $0{,}(1)$ является в точности тем же самым числом, что и обыкновенная дробь $1/9$. (Между прочим, равенство $0{,}999\ldots = 1$ тоже абсолютно точное!)

Далее, пусть

$$y = 0{,}17331733173317331733\ldots$$

Тогда

$$10000y = 1733{,}1733173317331733\ldots,$$

откуда

$$10000y = 1733 + 0{,}1733173317331733\ldots = 1733 + y.$$

Из уравнения

$$10000y = 1733 + y$$

находим

$$9999y = 1733, \text{ т.е. } y = 1733/9999.$$

Если провести вычисления не для частных примеров, как это сделали мы, а в общем виде, то можно установить следующее правило:

Чисто периодическая правильная дробь равна такой обыкновенной дроби, в числителе которой – период, а в знаменателе – число $10^r - 1 = \underbrace{9\ldots9}_{r}$, где r – длина периода.

Упражнения

5. Обратите в десятичные дроби числа а) $23/99$; б) $1234/999999$.

6. Обратите в обыкновенные дроби числа а) $0{,}(012)$; б) $3{,}1(3)$; в) $1{,}93(173)$.

7. Сумма (произведение, разность) двух периодических десятичных дробей – периодическая дробь. Докажите это.

8. Дана бесконечная десятичная непериодическая дробь. Докажите, что ее цифры можно переставить так, что получится периодическая дробь.

Предпериод

Если делить «уголком» 3 на 14, то зацикливание произойдет не сразу:

$$3/14 = 0{,}2(142857).$$

Период, заметим, такой же, как у дроби $1/7$. Это легко объяснить:

$$\frac{3}{14} = \frac{30}{14}:10 = \frac{15}{7}:10 = \left(2 + \frac{1}{7}\right):10,$$

а делить на 10 очень легко – достаточно перенести запятую на одну позицию.

В общем случае выделим в знаменателе степени двойки и пятерки, т. е. запишем дробь в виде $m/\left(2^a 5^b k\right)$, где a, b – неотрицательные целые числа, k – натуральное число, не кратное ни 2, ни 5. Обозначим наибольшее из чисел a, b буквой c и выполним преобразование:

$$\frac{m}{2^a 5^b k} = \frac{m \cdot 2^c \cdot 5^c}{2^a 5^b k}:10^c = \frac{m \cdot 2^{c-a} 5^{c-b}}{k}:10^c.$$

Значит, для решения вопроса о длинах периодов десятичных дробей достаточно изучить дроби со знаменателями, не кратными ни 2, ни 5 (т.е. со знаменателями, взаимно простыми с числом 10).

Упражнения

9. Зная, что $1/13 = 0{,}(076923)$, запишите в виде обыкновенной дроби бесконечную периодическую дробь $0{,}(692307)$.

10. Зная, что $7/17 = 0{,}(4117647058823529)$, обратите в десятичные дроби числа а) $12/85$; б) $3/68$.

11*. а) Докажите, что длина наименьшего предпериода десятичного представления правильной несократимой дроби со знаменателем $n = 2^a 5^b k$, где a, b, k – целые неотрицательные числа, причем НОД$(k,10) = 1$, равна $c = \max(a,b)$.

б) Докажите неравенство $c \le \log_2 n$ и убедитесь, что равенство достигается для чисел вида $n = 2^a$ и только для них.

в) Пусть хотя бы один делитель натурального числа n отличен от 2 и 5. Докажите неравенство $c \le \log_2(n/3)$ и убедитесь, что равенство достигается для чисел вида $n = 3 \cdot 2^a$ и только для них.

12*. Докажите, что если в периоде десятичного представления дроби m/n, где m и n – натуральные числа, встретилась последовательность цифр 167, то $n > 100$.

Числа вида 99...9

Взглянем на равенства $1/7 = 0,(142857)$ и $1/13 = 0,(076923)$. Заметьте:

$$142857 \cdot 7 = 999999$$

и

$$76923 \cdot 13 = 999999.$$

Это не случайность: как вы помните, в правиле преобразования чисто периодической дроби в обыкновенную фигурирует число $10^r - 1 = \underbrace{9...9}_{r}$. Поэтому мы займемся числами этого вида.

Лемма 1. *Для всякого натурального числа k, не кратного ни 2, ни 5, существует такое натуральное число r, для которого разность $10^r - 1$ кратна n.*

Доказательство. *Первый способ* – для любителей многоточий. Рассмотрим k чисел: 9, 99, 999, ..., $\underbrace{99...9}_{k}$. Докажем, что хотя бы одно из них кратно k. Предположим противное: пусть ни одно из них не кратно k. Поскольку количество ненулевых остатков от деления на k равно $k - 1$, какие-то два из k рассматриваемых чисел дают одинаковые остатки при делении на k. Разность этих чисел нацело делится на k и представляет из себя несколько девяток, после которых написано несколько нулей:

$$\underbrace{99...9}_{r+s} - \underbrace{99...9}_{s} = \underbrace{99...9}_{r}\underbrace{00...0}_{s}.$$

Поскольку k взаимно просто с 10, из делимости числа $\underbrace{99...9}_{r}\underbrace{00...0}_{s}$ на k следует, что число $\underbrace{99...9}_{r}$ нацело делится на k. Лемма доказана.

Второй способ – для тех, кто не любит многоточия. Рассмотрим числа 1, 10, 10^2, ..., 10^{k-1}. Ни одно из них не кратно k. Поскольку количество ненулевых остатков от деления на k равно $k-1$, какие-то два из k рассматриваемых чисел дают одинаковые остатки при делении на k. Разность этих чисел:

$$10^{r+s} - 10^s,$$

где $0 \le s < r+s < k$, – нацело делится на k.

Из делимости произведения $10^s\left(10^r - 1\right)$ на k и из взаимной простоты чисел 10 и k следует, что $10^r - 1$ кратно k, т.е.

$$10^r - 1 = kt,$$

где t – натуральное число[5]. Доказательство завершено[6].

Упражнения

13. Сколько чисел, кратных 13, имеется среди первых ста чисел последовательности 1, 11, 111, ...?

14. Если число вида 11...1 кратно 7, то оно кратно и 11, и 13, и 15873. Докажите это.

15. Первую цифру k-значного числа, кратного 13, стерли и записали позади последней цифры этого числа. При каких k полученное число кратно 13? (Например, из кратных 13 чисел 503906 и 7969 таким образом получаем числа 39065 и 9697, первое из которых кратно 13, а второе – нет.)

16. Для каких пар натуральных чисел (m, n), где $n > 1$, число $1\underbrace{00...0}_{m}1$ кратно числу $\underbrace{11...1}_{n}$?

17. а) Если p – простое число и наименьший период десятичного разложения дроби $1/p$ состоит из $2n$ цифр, то сумма двух n-значных чисел (могущих начинаться и с нуля), образованных первыми n и последними n цифрами периода, равна $10^n - 1$. Докажите это. (Например, $1/13 = 0,(076923)$, при этом $76 + 923 = 999$. Простота знаменателя существенна: $1/21 = 0,(047619)$, но $47 + 619 \ne 999$.) б) Длина наименьшего периода десятичного представления дроби $1/p$, где p – простое число, четна в точности тогда, когда p является делителем некоторого числа вида $10^n + 1$. Докажите это.

18. а) Найдите длину наименьшего периода десятичного представления дроби $1/31$. б) Докажите, что никакое число вида 100...01 не кратно 31.

19 (М981). Докажите, что число 11...1 (1986 единиц) имеет по крайней мере а) 8; б) 128; в*) 1024 различных делителя.

Длина периода

Теорема 2. *Если m, n – взаимно простые натуральные числа, причем n взаимно просто с 10 и $m < n$, то в десятичном представлении дробь m/n является чисто периодической. Длина ее наименьшего периода – это такое наименьшее натуральное число r, что $10^r - 1$ кратно n.*

Доказательство. По лемме 1, $10^r - 1 = kt$ для некоторых натуральных чисел r и t. Следовательно,

$$\frac{m}{k} = \frac{mt}{kt} = mt \cdot \frac{1}{10^r - 1}.$$

Воспользовавшись равенством $1/(10^r - 1) = 0,(\underbrace{00...0}_{r-1}1)$, получаем

$$\frac{m}{k} = mt \cdot 0,(\underbrace{00...0}_{r-1}1).$$

Поскольку $m < k$, то $mt < kt < 10^r$, так что произведение числа mt на число $0,(\underbrace{00...0}_{r-1}1)$ – это периодическая дробь, длина периода которой равна r, а период – десятичная запись числа mt, возможно, дополненная слева необходимым количеством нулей.

Нам осталось только понять, почему *наименьшему* возможному числу r соответствует наименьший возможный период. Но это сразу ясно из правила перевода периодической десятичной дроби в обыкновенную.

Теорема 2 доказана. Она вполне ясно характеризует длину r периода чисто периодической десятичной дроби. А если есть предпериод, то надо вспомнить равенство

$$\frac{m}{2^a 5^b k} = \frac{m \cdot 2^{c-a} 5^{c-b}}{k} : 10^c,$$

и ответ станет очевиден:

Следствие теоремы 2. *Длиной наименьшего периода десятичного представления несократимой дроби m/n, где $n = 2^a 5^b k$, $a, b \ge 0$ и НОД$(k, 10) = 1$, является такое наименьшее натуральное число r, что $10^r - 1$ кратно k.*

Следствие следствия теоремы 2. *Длина наименьшего периода десятичного представления несократимой дроби m/n зависит только от знаменателя n, а не от числителя m.*

Функция $L(n)$

Обозначим через $L(n)$ длину наименьшего периода десятичного представления дроби $1/n$ (см. таблицу 1). В силу следствия теоремы 2, если $n = 2^a 5^b k$, где $a, b \ge 0$ и НОД$(k, 10) = 1$, то $L(n) = L(k) = r$, где r – это наименьшее натуральное число, для которого $10^r - 1$ кратно k.

Таблица 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$L(n)$	1	1	1	1	1	1	6	1	1	1	2	1	6	6	1	1	16

Функция L определена на всем множестве натуральных чисел[7], но в дей-

[5] *Например, для $k = 7$ можно взять $r = 6$; при этом $t = (10^6 - 1)/7 = 142857$.*

[6] *Между прочим, оно замечательно не только отсутствием многоточий, но и тем, что показывает: существует нужное нам число $r < k$, а не только $r \le k$.*

[7] *Напоминаем, что в доказательстве теоремы 1 мы договорились периодом конечной десятичной дроби считать число 1.*

ствительности интерес представляют только числа, взаимно простые с числом 10.

Очевидно, если $10^r - 1$ кратно каждому из двух взаимно простых натуральных чисел m и n, то $10^r - 1$ кратно и произведению mn. Следовательно, верна следующая теорема:

Если m, n – взаимно простые натуральные числа, то $L(mn) = \text{НОК}[L(m), L(n)]$.

Упражнения

20. Найдите длину наименьшего периода дроби

а) $19/42$;

б) $2000/(3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 1313)$.

21. Какой может быть длина периода суммы двух бесконечных десятичных периодических дробей, длины периодов которых равны а) 6 и 12; б) 12 и 20? (Пункты а) и б) составляют содержание задачи М1399.) в) Для любых двух натуральных чисел r и s через $f(r,s)$ обозначим произведение таких степеней p^a простых чисел, для которых ровно одно из чисел r, s кратно p^a и не кратно при этом степени p^{a+1}, а другое из чисел r, s не кратно числу p^a. (Например, $f\left(2^3 \cdot 3 \cdot 11^6, 2^4 \cdot 3 \cdot 11^2 \cdot 23\right) = 2^4 \cdot 11^6 \cdot 23$.) Докажите, что числу $f(r,s)$ кратна длина t наименьшего периода суммы любых двух десятичных дробей, длины наименьших периодов которых равны r и s. г) Докажите, что длина наименьшего периода суммы двух периодических дробей является делителем наименьшего общего кратного длин их периодов. д) Пусть r, s, t – натуральные числа, причем t кратно числу $f(r,s)$ и является делителем числа НОК$[r,s]$. Приведите пример двух десятичных периодических дробей, длины наименьших периодов которых равны r и s, а длина наименьшего периода их суммы равна t.

Наблюдения Гаусса

Великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс, будучи гимназистом, обращал дроби вида $1/p$, где p – простое число, отличное от 2 и 5, в бесконечные десятичные дроби: в каждом случае он с поразительным терпением ожидал, когда знаки начнут повторяться. Ему хотелось понять, как зависит длина периода такой дроби от p.

Выписывание полного периода, скажем, для $p = 47$ – утомительное занятие (46 знаков!). Однако Гаусс не терял надежды и продолжал вычисления: он выписал периоды для всех простых чисел $p < 1000$. Главная закономерность, которую он обнаружил, состоит в том, что длина $L(p)$ наименьшего периода такой дроби является делителем числа $p - 1$, иногда совпадая с ним (см. таблицу 2). А именно, $L(p) = p - 1$ для $p = 7$, 17, 23, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, 167, 179, 181, 193 и некоторых других чисел[8].

Таблица 2

p	3	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
$L(p)$	1	6	2	6	16	18	22	28	15	3	5	21	46

Мы докажем эту закономерность чуть ниже, а пока рассмотрим следующие разложения:

$$1/7 = 0,(142857),$$
$$2/7 = 0,(285714),$$
$$3/7 = 0,(428571),$$
$$4/7 = 0,(571428),$$
$$5/7 = 0,(714285),$$
$$6/7 = 0,(857142).$$

Периоды этих шести дробей начинаются сразу после запятой и получаются друг из друга циклическим сдвигом. Это могло бы показаться случайным курьезом, будь мы любителями «занимательной» математики. Но не будем столь наивны и внимательно рассмотрим этот эффект.

Возьмем вместо 7, например, 41. Очевидно,

$$1/41 = 0,(02439).$$

«Прокрутим» период:

$$0,(24390) = 10/41,$$

$$0,(43902) = 10 \cdot 0,(24390) - 2 = \frac{100}{41} - 2 = 18/41,$$

$$0,(39024) = 10 \cdot 0,(43902) - 4 = \frac{180}{41} - 4 = 16/41,$$

$$0,(90243) = 10 \cdot 0,(39024) - 3 = \frac{160}{41} - 3 = 37/41.$$

Получили цикл из пяти чисел: 1, 10, 18, 16, 37. Каждое число этого цикла – остаток от деления удесятеренного предыдущего на 41.

Если бы мы начали с $2/41 = 0,(04878)$, то получили бы другой цикл: $0,(48780) = 20/41$, $0,(87804) = 36/41$, $0,(78048) = 32/41$, $0,(80487) = 33/41$.

Всего для $p = 41$ получаем 8 циклов, по 5 дробей в каждом. В общем случае, если натуральное число n взаимно просто с 10 и отлично от 1, то все правильные несократимые дроби со знаменателем n разбиваются на циклы по $L(n)$ дробей в каждом цикле. Значит, количество таких дробей кратно числу $L(n)$. (В частности, если p – простое число, то все дроби вида m/p, где $1 \le m < p$, – несократимые, откуда и следует обнаруженная юным Гауссом закономерность!)

Упражнения

22. а) Решите ребус: ПЛОМБА · 5 = АПЛОМБ. (Здесь в записях шестизначных чисел ПЛОМБА и АПЛОМБ разные буквы обозначают разные цифры.) б) Найдите шестизначное число, уменьшающееся в 5 раз при переносе первой цифры в конец числа. в) Решите ребус: НИКЕЛЬ · 6 = ЕЛЬНИК. (*Указание.* В словах ребуса использованы два слога: НИК и ЕЛЬ. Обозначьте НИК = x и ЕЛЬ = y.) г) Существует ли шестизначное число, которое при умножении на 2, 3, 4, 5 и 6 дает числа, записанные теми же цифрами, что и само число, но в другом порядке? д) Найдите все шестизначные числа, которые увеличиваются в целое число раз при переносе последней цифры из конца в начало.

23. Пятизначное число делится на 41. Докажите, что если его цифры циклически переставить, то полученное число тоже будет делиться на 41.

24. Число оканчивается на 2. Если эту цифру перенести в начало числа, оно удвоится. Найдите наименьшее такое число.

25 * (М1252). Пусть a и n – натуральные числа, $a > 1$. Докажите, что количество правильных несократимых дробей со знаменателем $a^n - 1$ кратно n.

Теорема Эйлера

Количество правильных несократимых дробей со знаменателем n обозначают через $\varphi(n)$ (см. таблицу 3)[9]. Для любого простого числа p, очевидно, $\varphi(p) = p - 1$.

Таблица 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\varphi(n)$	1	1	2	3	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16

Поскольку $\varphi(n)$ правильных несократимых дробей можно разбить на циклы по $L(n)$ дробей в каждом цикле, то верна следующая теорема:

Теорема 3. *Если n – натуральное число, то $\varphi(p)$ кратно числу $L(n)$.*

Следствие. *Если n – натуральное число, взаимно простое с числом 10, то $10^{\varphi(n)} - 1$ кратно n.*

[8] *Конечно или бесконечно множество чисел, для которых $L(p) = p - 1$, по сей день неизвестно.*

[9] *Подробнее об этой функции можно прочитать в статье В.Сендерова и А.Спивака «Малая теорема Ферма» (см. «Квант» №1 за 2000 г.).*

Если бы мы рассматривали не десятичную систему счисления, а систему счисления с основанием a, где a – отличное от единицы натуральное число, то аналогичным образом получили бы утверждение, которое называют теоремой Эйлера:

Если n – натуральное число, взаимно простое с целым числом a, где $a > 1$, то $a^{\varphi(n)} - 1$ кратно n.[10]

Чему равно $L(p^m)$?

Число 111 делится на 3. Далее, число

$$111111111 = 111 \cdot 1001001$$

делится на 9 как произведение двух чисел, каждое из которых делится на 3.[11] Записываемое 27 единицами число

$$111111111111111111111111111 =$$

$$= 111111111 \cdot 1000000001000000001$$

делится на 27 как произведение числа, кратного 9, и числа, кратного 3.

И вообще, равенство

$$\underbrace{111\ldots11}_{3^n}\underbrace{111\ldots11}_{3^n}\underbrace{111\ldots11}_{3^n} = \underbrace{111\ldots11}_{3^n} \cdot 1\underbrace{00\ldots00}_{3^n-1}1\underbrace{00\ldots00}_{3^n-1}1$$

показывает, что если число, записываемое 3^n единицами, кратно 3^n, то число, записываемое 3^{n+1} единицами, кратно 3^{n+1}.

[10] *Честно говоря, условие $a > 1$ излишне: если нас интересуют остатки от деления на n, то из любого целого числа a, прибавив к нему n необходимое количество раз, можно получить число, большее единицы.*

[11] *Впрочем, можно было воспользоваться признаком делимости на 9.*

Таким образом по индукции можно доказать, что число $\underbrace{11\ldots11}_{3^n}$ кратно числу 3^n, т.е. число $\underbrace{99\ldots99}_{3^n}$ кратно числу 3^{n+2}, откуда $L(3^{n+2}) \le 3^n$. А если мы еще заметим, что использованные нами числа 100…00100…001 делятся только на 3, но не на 9, то получим точный результат: $L(3^{n+2}) = 3^n$.

Нельзя ли подобным образом изучить функцию $L(p^m)$, где p – простое число, m – натуральное число? Оказывается, можно.

Теорема 4. *Если p^k – наивысшая степень простого числа p, которой кратно число $10^{L(p)} - 1$, то для любого неотрицательного целого числа m верна формула $L(p^{k+m}) = p^m L(p)$. (Например, $L(3^{m+2}) = 3^m$ и $L(7^{m+1}) = 6 \cdot 7^m$.)*

Доказать теорему 4 вам поможет следующая лемма.

Лемма 2. *Если $a = 1 + px$, где p – простое число, $p > 2$, x – целое число, то сумма $a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + a + 1$ кратна p, но не кратна p^2.*

Доказательство леммы 2. Легко понять (рассуждая по индукции или применив бином Ньютона), что при делении на p^2 числа a, a^2, …, a^{p-2} и a^{p-1} дают такие же остатки, как $1 + px$, $1 + 2px$, …, $1 + (p-2)px$ и $1 + (p-1)px$. Следовательно,

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^{p-2} + a^{p-1} \equiv$$

$$\equiv 1 + (1 + px) + (1 + 2px) + \ldots$$

$$\ldots + (1 + (p-2)px) + (1 + (p-1)px) =$$

$$= p + px\frac{p(p-1)}{2} \equiv p \pmod{p^2}.$$

Лемма доказана. А теорему докажите в качестве (трудного, но не слишком) упражнения (29).

Упражнения

26. Число $10^{3^n} - 1$ кратно 3^{n+2}, но не кратно 3^{n+3}. Докажите это.

27. Какое наименьшее количество единиц подряд надо написать, чтобы получилось число, кратное а) 999 999 999; б) 9^9; в) 11^{11}; г) $3^k 7^l$, где k, l – натуральные числа?

28. На какую наибольшую степень двойки делится число $5^{2000} - 1$?

29. Докажите теорему 4.

30. Докажите, что если p – простое число, $p \ne 2$, то сумма $1 + a + a^2 + \ldots + a^{p-1}$ не кратна p^2 ни для какого целого числа a.

31. Докажите, что в периоде бесконечной десятичной дроби $1/3^{100}$ имеется любая последовательность из 46 цифр. (Чуть в иной формулировке эта задача была в «Задачнике «Кванта» под номером М1280.)

32 (для тех, кто любит программировать). а) Найдите хотя бы одно такое простое число $p > 5$, что длины периодов разложений в десятичные дроби чисел $1/p$ и $1/p^2$ совпадают и равны $p - 1$. б*) Найдите еще одно такое простое число. (Неизвестно, бесконечно ли множество простых чисел со свойством $L(p) = L(p^2)$. Неизвестно и то, существует ли хотя бы одно простое число $p > 5$, для которого $L(p) = L(p^3)$.)

НАМ ПИШУТ

Заглянем в центр звезд

Просматривая таблицу «Физические параметры некоторых звезд» (которая частично здесь приводится) из «Справочника по физике» А.С.Еноховича, трудно удержаться от попытки оценить температуру в центрах звезд и сравнить ее с реальной.

Будем считать, в первом приближении, звезду водородной. Поскольку она находится в равновесии, разумно приравнять, по порядку величины, средние энергии протона – теплового движения и гравитационного взаимодействия: $kT \sim GMm_p/d$. Здесь k – постоянная Больцмана, T – температура звезды, G – гравитационная постоянная, M и d – масса и диаметр звезды, m_p – масса протона. Имеем расчетную формулу $T \sim \dfrac{GMm_p}{kd}$, на основании которой строим пятую графу таблицы. Сравнив ее со второй графой, видим достаточно хорошее совпадение.

Звезда	T, К	d (по сравнению с Солнцем)	M (по сравнению с Солнцем)	Вычисленная температура, К
τ Ориона	$5{,}4 \cdot 10^7$	7	27	$4{,}47 \cdot 10^7$
Спика (α Девы)	$3 \cdot 10^7$	5	11	$2{,}55 \cdot 10^7$
Вега (α Лиры)	$1{,}8 \cdot 10^7$	2,2	2,8	$1{,}48 \cdot 10^7$
Процион А	$8 \cdot 10^6$	1,8	1,2	$7{,}73 \cdot 10^6$
α Центавра А	$1{,}3 \cdot 10^7$	1,0	1,0	$1{,}16 \cdot 10^7$
ξ Волопаса В	$1{,}0 \cdot 10^7$	0,65	0,58	$1{,}03 \cdot 10^7$
Крюгер 60 А	$8{,}5 \cdot 10^6$	0,41	0,30	$8{,}48 \cdot 10^6$

В.Дроздов

Закон сохранения импульса

В.ЧИВИЛЁВ

Импульсом материальной точки называется произведение массы точки на ее скорость: $\vec{p} = m\vec{v}$. Импульсом системы материальных точек называется векторная сумма импульсов отдельных точек: $\vec{p}_{\text{сист}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots$ Любое макроскопическое тело или несколько макроскопических тел можно рассматривать как систему материальных точек, поскольку каждое тело можно мысленно разбить на сколь угодно малые части и считать их материальными точками. В дальнейшем систему материальных точек для краткости будем называть просто системой.

Из законов Ньютона следует, что в инерциальной системе отсчета справедливо векторное равенство

$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}, \qquad (1)$$

где $\vec{F}$ – сумма всех внешних сил, действующих на систему в течение сколь угодно малого интервала времени Δt ($\Delta t \to 0$), а $\Delta\vec{p}$ – изменение импульса системы за это время. Произведение $\vec{F}\Delta t$ называется импульсом силы. Обратите внимание, что $\vec{F}$ – это сумма только *внешних* сил, т.е. сил, действующих на тела системы со стороны тел, не входящих в систему. Внутренние силы, т.е. силы взаимодействия между частями системы, в равенство (1) не входят.

Если в течение времени Δt ($\Delta t \to 0$) сумма внешних сил равна нулю, т.е. $\vec{F} = 0$, то $\Delta\vec{p} = 0$ и $\vec{p} = \text{const}$, т.е. импульс системы в течение Δt сохраняется. Когда время взаимодействия тел системы (время опыта) не мало, его можно разбить на сколь угодно малые интервалы: $\Delta t = \Sigma\Delta t_k$, где $k = 1, 2, 3\ldots$ Если в течение каждого такого интервала сумма внешних сил равна нулю, то импульс системы будет сохраняться в течение этого интервала и, как следствие, в течение всего времени опыта. Напомним, что замкнутой (изолированной) системой называется система, тела которой не взаимодействуют с другими телами (внешним миром). Ясно, что для замкнутой системы $\vec{F} = 0$ и $\vec{p} = \text{const}$.

Итак, в инерциальной системе отсчета импульс системы материальных точек сохраняется в течение некоторого времени Δt (не обязательно малого) в двух случаях:

1) система в течение Δt замкнута (изолирована);

2) система не замкнута, т.е. внешние силы есть, но их сумма равна нулю в течение всего времени Δt.

Это утверждение и представляет собой закон сохранения импульса в развернутой формулировке.

Импульс системы – это вектор, и его сохранение в течение некоторого времени взаимодействия частей системы встречается не так часто, хотя бы потому, что в земных условиях строго замкнутой системы нет в принципе из-за наличия внешней силы – силы притяжения к Земле. Да и равенство нулю суммы всех внешних сил на протяжении некоторого интервала времени может реализоваться только при вполне определенных условиях. Гораздо чаше встречается случай, когда за время Δt векторная сумма внешних сил не равна нулю, но равна нулю сумма их проекций на некоторую ось X в пространстве. Тогда в течение этого времени сохраняется проекция на ось X импульса системы. Действительно, запишем равенство (1) в проекциях на ось X:

$$F_x\Delta t = \Delta p_x, \qquad (2)$$

где F_x – проекция на ось X суммы всех внешних сил (по правилам действия с векторами F_x равна сумме проекций на ось X всех внешних сил), а Δp_x – проекция на ось X изменения импульса системы $\Delta\vec{p}$ (по правилам действия с векторами Δp_x равна изменению проекции на ось X импульса системы). Если в течение времени $\Delta t \to 0$ $F_x = 0$, то из равенства (2) следует, что $\Delta p_x = 0$ и $p_x = \text{const}$. Если же время Δt опыта не мало, то после разбиения его на сколь угодно малые интервалы легко показать, что при выполнении в течение произвольного Δt условия $F_x = 0$ будет иметь место следствие $p_x = \text{const}$.

Иными словами, в инерциальной системе отсчета проекция на некоторую ось X импульса системы материальных точек сохраняется в течение некоторого времени Δt (не обязательно малого), если сумма проекций на ось X всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю в течение этого времени Δt.

На основании этого утверждения о сохранении проекции импульса и решается большинство задач. При этом часто запись уравнения, отражающего сохранение проекции импульса в виде равенства начальной и конечной проекций импульса, обосновывается фразой «по закону сохранения импульса», что не совсем точно. Но поскольку эта неточность не влияет на результат при решении задачи, на нее, как правило, никто не обращает внимания, в том числе и экзаменаторы.

Скажем несколько слов о приближенном сохранении импульса или его проекции. Равенство (1) тем точнее, чем меньше Δt. Конечное время опыта Δt можно разбить на сколь угодно малые интервалы времени Δt_k и записать для каждого из них равенство $\vec{F}_k\Delta t_k = \Delta\vec{p}_k$. Сложив все такие равенства, получим новое, внешне похожее на (1):

$$\vec{F}_{\text{ср}}\Delta t = \Delta\vec{p}, \qquad (3)$$

где $\vec{F}_{\text{ср}}$ – некоторая средняя внешняя сила, действующая в течение Δt и определяемая из равенства $\vec{F}_{\text{ср}}\Delta t = \Sigma\vec{F}_k\Delta t_k$, а $\Delta\vec{p} = \Sigma\Delta\vec{p}_k$ – изменение импульса системы за конечное время Δt. Аналогично получается и внешне похожее на (2) равенство в проекциях:

$$F_{x\,\text{ср}}\Delta t = \Delta p_x, \qquad (4)$$

где $F_{x\,\text{ср}}$ – некоторое среднее значение суммы проекций на ось X всех внешних сил в течение конечного времени опыта Δt, а Δp_x – изменение проекции на ось X импульса системы за это время. Ясно, что при $\vec{F}_{\text{ср}} = 0$ (например, $\vec{F} = 0$ в любой момент опыта) из равенства (3) следует $\Delta\vec{p} = 0$ и $\vec{p} = \text{const}$. При $F_{x\,\text{ср}} = 0$ из равенства (4) следует $p_x = \text{const}$. Если же в течение времени опыта не выполняется строго $\vec{F}_{\text{ср}} = 0$ или $F_{x\,\text{ср}} = 0$, то за «помощью» в решении задачи следует обращаться к равенствам (3) и (4) и анализировать их. Иногда можно считать, что величины $F_{\text{ср}}\Delta t$ или $F_{x\,\text{ср}}\Delta t$, характеризующие импульс силы, малы. Тогда из (3) или (4) следует, что $\vec{p} \approx \text{const}$ или $p_x \approx \text{const}$. Такая ситуация встречается при некоторых взаимодействиях тел системы – таких, как удары, когда Δt мало, а $F_{\text{ср}}$ или $F_{x\,\text{ср}}$ ограничены из-за ограниченности значений F или F_x в течение опыта.

Теперь рассмотрим несколько конкретных задач. Все они в разные годы предлагались на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт (МФТИ). Автор всех разобранных задач, включая и задачи для упражнений, – автор этой статьи.

Задача 1. *После разрыва неподвижного снаряда образовалось четыре осколка. Осколок массой m_1 = 4 кг полетел вертикально вниз со скоростью v_1 = 150 м/с, осколок массой m_2 = 3 кг полетел горизонтально на юг со скоростью v_2 = 100 м/с, осколок массой m_3 = 1 кг – горизонтально на восток. Осколок массой m_4 = 3,5 кг полетел со скоростью v_4 = 200 м/с. Найдите скорость осколка массой m_3.*

Рассмотрим систему из четырех осколков. За малое время разрыва Δt действием внешних сил – сил тяжести – можно пренебречь, поскольку за то время они не вызывают существенного изменения импульса осколков из-за их малости по сравнению с внутренними силами, действующими между осколками. Поэтому можно считать, что импульс системы сохраняется (приближенно):

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + m_4\vec{v}_4 = 0 .$$

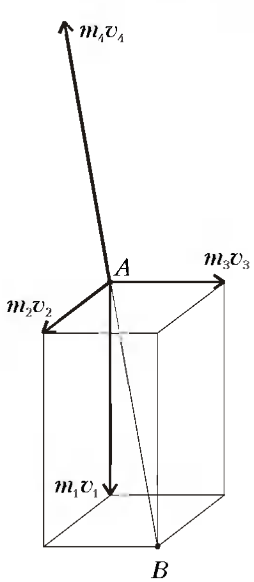


Рис. 1

Длина вектора $m_4\vec{v}_4$ равна длине диагонали AB прямоугольного параллелепипеда, построенного на векторах $m_1\vec{v}_1$, $m_2\vec{v}_2$ и $m_3\vec{v}_3$ (рис.1). Следовательно,

$$(m_4v_4)^2 = (m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2 + (m_3v_3)^2 .$$

Из последнего равенства находим

$$v_3 = \frac{\sqrt{(m_4v_4)^2 - (m_1v_1)^2 - (m_2v_2)^2}}{m_3} = 200 \text{ м/с} .$$

Задача 2. *Между шариками с массами m и M, связанными нитью, вставлена легкая пружина жесткостью k, сжатая на некоторую величину (рис.2). Система движется со скоростью v_0 вдоль прямой, проходящей через центры шариков. Нить пережигают, и один из шариков останавливается. Найдите начальную величину сжатия пружины.*

Система из шариков, пружины и нити предполагается замкнутой. В земных условиях смоделировать процесс, описанный в задаче, можно на гладком горизонтальном столе. Ясно, что остановиться может только левый шарик, так как пружина на него действует силой, направленной против его начальной скорости. Пусть скорость правого шарика после распрямления пружины равна $\vec{v}$. По закону сохранения импульса,

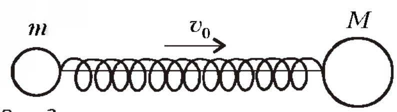


Рис. 2

$$(m + M)\vec{v}_0 = M\vec{v} .$$

Заметим, что совпадение направлений скоростей $\vec{v}$ и $\vec{v}_0$ следует именно из последнего равенства. Взяв модули от левой и правой частей этого равенства (точнее, записав равенство в проекциях на ось X, направленную вдоль оси пружины), получим

$$(m + M)v_0 = Mv .$$

По закону сохранения энергии,

$$\frac{kx^2}{2} + \frac{(m + M)v_0^2}{2} = \frac{Mv^2}{2} .$$

Исключая из последних двух уравнений v, находим искомую величину сжатия пружины

$$x = v_0\sqrt{\left(\frac{m}{k}\right)\left(1 + \frac{m}{M}\right)} .$$

Задача 3. *Кусок пластилина массой m = 32 г попадает в брусок массой 6m, двигавшийся по гладкой горизонтальной поверхности стола (рис.3), прилипает к бруску и далее движется с ним по столу. Перед ударом скорость куска пластилина равна v = 7 м/с и направлена под углом α = 60° к горизонту, а скорость бруска равна v/4 и лежит в одной вертикальной плоскости со скоростью пластилина. Определите скорость бруска с пластилином после удара. На сколько увеличилась суммарная внутренняя энергия бруска, пластилина и окружающих тел?*

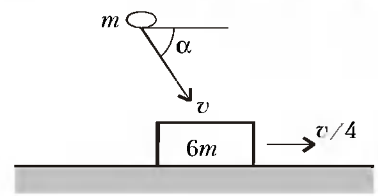


Рис. 3

Внешние силы, действующие на систему из бруска и пластилина за время их взаимодействия Δt, – это силы тяжести $m\vec{g}$ и $6m\vec{g}$ и зависящая от времени сила $\vec{N}(t)$ нормальной реакции стола на брусок, направленная вертикально вверх. Ясно, что сумма внешних сил

$$\vec{F} = m\vec{g} + 6m\vec{g} + \vec{N}(t)$$

в произвольный момент интервала времени Δt не равна нулю. Этим и объясняется, что импульс системы не сохраняется. Впрочем, несохранение импульса сразу бросается в глаза – начальный суммарный импульс системы направлен вправо и вниз, а конечный – вправо и горизонтально.

Если импульс системы не сохраняется, то следует поискать ось в пространстве, для которой сохраняется проекция импульса системы. Поэтому проанализируем выражение для $\vec{F}$. Ясно, что для горизонтальной оси X, направленной вдоль начальной скорости бруска, $F_x = 0$ в любой момент из интервала Δt, поэтому проекция на ось X импульса системы сохраняется:

$$mv\cos\alpha + 6m\frac{v}{4} = (m + 6m)u ,$$

откуда и находим скорость бруска с пластилином:

$$u = \frac{(\cos\alpha + 3/2)v}{7} = \frac{2v}{7} = 2 \text{ м/с} .$$

(Окончание см. на с. 34)

Сюрпризы таблицы умножения

Впервые таблица Пифагора примерно в таком виде, в каком мы ее находим на обложках тетрадей, появилась в сочинении неопифагорейца Никомаха Геразского (I–II вв.). В его «Введении в арифметику» таблица выполнена в ионийской нумерации. По словам Никомаха, эта таблица восходит «к самому Пифагору».

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Рис.1. Таблица Пифагора

Более древние таблицы умножения обнаружены в месопотамских глиняных табличках – их «возраст» около 5 тысяч лет.

Таблица умножения скрывает в себе множество замечательных математических закономерностей, поиск которых может превратиться в увлекательное занятие, сулящее немало сюрпризов.

Назовем *квартетом* четыре числа таблицы Пифагора, расположенных в вершинах некоторого квадрата. Оказывается, что если стороны этого квадрата параллельны диагоналям таблицы Пифагора, то суммы диагональных чисел квартета равны (рис.2). Если стороны квадрата параллельны сторонам таблицы, то равны произведения диагональных чисел квартета. Если при этом квадрат расположен симметрично главной диагонали таблицы Пифагора, то сумма всех чисел квартета – квадрат некоторого натурального числа, и это свойство является хорошей иллюстрацией тождества: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Доказательства этих свойств просты и основаны на определении таблицы Пифагора, а именно: каждое число таблицы равно произведению номера строки и номера столбца, на пересечении которых оно стоит.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

$6 + 18 = 4 + 20$, $6 \cdot 30 = 12 \cdot 15$, $7^2 + 2 \cdot 7 \cdot 9 + 9^2 = 256$

Рис.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

$20=(9+12+24+35):4$

Рис.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

$S_1=12 \cdot 13=156, S_2=7{,}5 \cdot 6{,}5 \cdot 12=585$

Рис.4

Если центром квартета тоже является число таблицы Пифагора, то оно равно среднему арифметическому чисел этого квартета (рис.3). И опираясь на это свойство, легко доказать, что сумма всех чисел таблицы Пифагора, расположенных внутри центрально-симметричной фигуры показанного на рисунке 4 вида, равна произведению центрального числа на количество чисел фигуры. При отсутствии центрального числа вместо него берется дробное число, равное произведению гипотетических дробных номера строки и номера столбца.

Скучную, на первый взгляд, задачу вычисления суммы всех чисел таблицы Пифагора можно решить, получив при этом немалое удовольствие: поскольку $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$, то сумма чисел таблицы будет равна

$$1 \cdot 45 + 2 \cdot 45 + 3 \cdot 45 + \ldots + 9 \cdot 45 = 45 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 9) = 45 \cdot 45 = 2025.$$

Красиво, не правда ли?

Заметим также, что все числа таблицы Пифагора можно разбить на девять групп по девять чисел в каждой так, что произведения чисел в каждой группе окажутся равными (рис.5). Разбивая числа на группы, нужно соблюдать правило: числа одной группы должны стоять в клетках таблицы так, чтобы установленные на них шахматные ладьи были дружелюбными, т.е. не угрожали друг другу. В этом случае все девять произведений будут равны

$$(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9)^2 = (9!)^2.$$

На рисунке 6 в таблице Пифагора выделены «уголки». Суммы чисел в уголках образуют последо-

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Рис.5

вательность кубов натуральных чисел.

Не нарушая принципиального построения таблицы Пифагора, ее

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Рис.6

можно расширить вправо и вниз, соблюдая основное условие: каждое число таблицы есть произведение номера строки и номера столбца, в которых оно стоит. На рисунке 7 изображена верхняя часть расширенной таблицы Пифагора, повернутая на 45°. Естественно, все ранее сформулированные свойства таблицы Пифагора остаются верными и для расширенной таблицы, поэтому в дальнейшем расширенную таблицу также будем называть таблицей Пифагора.

Рассмотрим колонки чисел, расположенных параллельно биссектрисе «числового угла» (рис.8). На самой биссектрисе расположе-

1
2 2
3 4 3
4 6 6 4
5 8 9 8 5
6 10 12 12 10 6
7 12 15 16 15 12 7
8 14 18 20 20 18 14 8
9 16 21 24 25 24 21 16 9
10 18 24 28 30 30 28 24 18 10
11 20 27 32 35 36 35 32 27 20 11

Рис.7

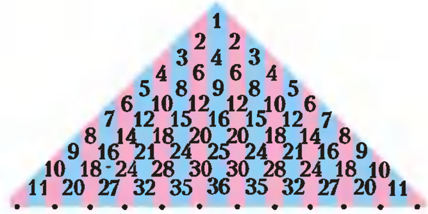


Рис.8

1
2 2
3 4 3
4 6 6 4
5 8 9 8 5
6 10 12 12 10 6
7 12 15 16 15 12 7
8 14 18 20 20 18 14 8
9 16 21 24 25 24 21 16 9
10 18 24 28 30 30 28 24 18 10
11 20 27 32 35 36 35 32 27 20 11

Рис.9

на последовательность квадратных чисел, а параллельно и рядом с ней расположены удвоенные треугольные числа. (Напомним, что треугольными называют числа, показывающие, из скольких кругов можно сложить треугольник: 1, 3, 6, 10, 15, …, $\frac{n(n+1)}{2}$, …). Во всех красных колонках расположены числовые последовательности, связанные с треугольными числами, а в синих колонках – с квадратными числами. Попробуйте установить эту связь самостоятельно.

Группы чисел 1; 2,2; 3,4,3; 4,6,6,4; … назовем *строками расширенной таблицы Пифагора* (рис.9). Произведение чисел n-й строки равно $(n!)^2$, потому что числа этой строки можно представить в таком виде: $1n$, $2(n-1)$, $3(n-2)$, …, $(n-2)3$, $(n-1)2$, $n1$, а произведение таких чисел равно $(n!)^2$.

Сумма чисел n-й строки таблицы Пифагора равна n-му тетраэдральному числу и может быть вычислена по формуле $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. (Тетраэдральными числами называют числа, показывающие, из скольких шаров можно сложить треугольную пирамиду.) На рисунке 10 показан процесс рождения тетраэдрального числа из чисел 5-й строки.

Сумма же всех чисел n первых строк таблицы равна n-му гипертетраэдральному числу $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$ (аналог треугольных чисел для пространства четырех измерений).

Как вы уже успели, наверное, заметить, в свойствах этой таблицы тесно переплетаются треугольные и квадратные числа. Вот еще одно свойство: разность между суммами n-й и $(n-1)$-й строк таблицы равна n-му треугольному числу, а разность между суммами n-й и $(n-2)$-й строк равна n-му квадратному числу.

$5+8+9+8+5=1\cdot5+2\cdot4+3\cdot3+4\cdot2+5\cdot1=$

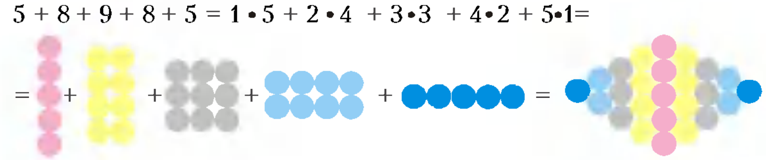


Рис.10

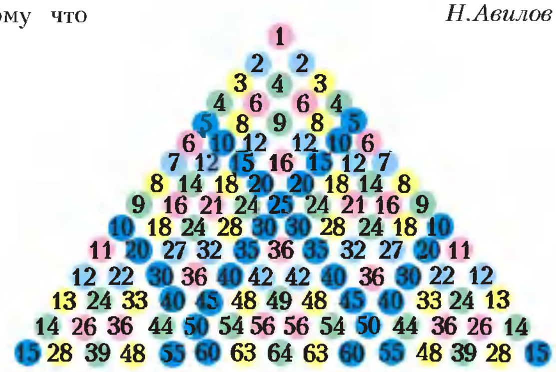
Умножение в шутку и всерьез

1. Сколько будет: два десятка умножить на три десятка?

2. Одно яйцо варят три минуты. Сколько минут надо варить 5 яиц?

3. На доске написано несколько плюсов и минусов. Разрешается стирать любые два знака, записывая вместо одинаковых знаков плюс, а вместо разных – минус. Зависит ли последний оставшийся на доске знак от того, в каком порядке стирать знаки?

Н.Авилов



(Начало см. на с. 30)

Величину ΔW увеличения внутренней энергии бруска, пластилина и окружающих тел найдем из закона сохранения и превращения энергии:

$$\frac{mv^2}{2}+\frac{6m(v/4)^2}{2}=\frac{(m+6m)u^2}{2}+\Delta W,$$

откуда, с учетом выражения для u, получаем

$$\Delta W=\frac{45}{112}mv^2=0{,}63\ \text{Дж}.$$

Задача 4. *Пуля летит горизонтально со скоростью v_0, пробивает лежащую на горизонтальной поверхности стола небольшую коробку и вылетает в том же направлении с втрое меньшей скоростью. Масса коробки в 5 раз больше массы пули. Коэффициент трения скольжения между коробкой и столом μ. Найдите скорость коробки сразу после вылета из нее пули. На какое расстояние передвинется при этом коробка?*

Рассмотрим систему из коробки и пули. Пусть масса пули m, масса коробки $5m$, скорость коробки сразу после вылета пули v. За время взаимодействия Δt (пролета пули через коробку) на систему действуют такие внешние силы: направленные вертикально вниз силы тяжести $m\vec{g}$ и $5m\vec{g}$, направленная вертикально верх и мало изменяющаяся со временем сила нормальной реакции стола $\vec{N}$ и направленная против скорости коробки сила трения со стороны стола $\vec{F}_{тр}$ (рис.4).

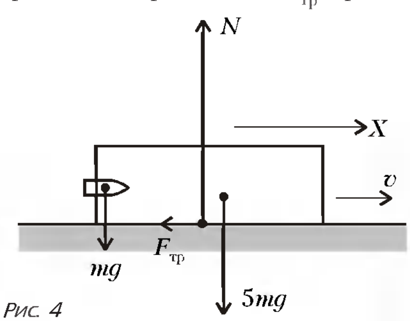


Рис. 4

Ясно, что сумма внешних сил $\vec{F}=m\vec{g}+5m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}_{тр}$ в течение Δt не равна нулю. Не равна нулю и проекция F_x на горизонтальную ось X, направленную вдоль скорости коробки: $F_x=-F_{тр}$. Но действием ограниченной по величине силы трения за малое время пролета Δt можно пренебречь и считать, что $F_x\Delta t=0$. Тогда за время пролета пули проекция на ось X импульса системы сохраняется (приближенно):

$$mv_0=\frac{mv_0}{3}+5mv,$$

откуда и находим скорость коробки:

$$v=\frac{2}{15}v_0.$$

После вылета пули скорость коробки с течением времени уменьшается под действием силы трения, равной $5\mu mg$. Расстояние s, на которое передвинется коробка, найдем из закона сохранения и превращения энергии:

$$\frac{5mv^2}{2}=5\mu mgs,$$

и

$$s=\frac{v^2}{2\mu g}=\frac{2v_0^2}{225\mu g}.$$

Задача 5. *Трубка в форме петли укреплена на бруске, находящемся на гладкой горизонтальной поверхности стола (рис.5). Нижний конец трубки горизонтален и находится на расстоянии h от стола. Шарик массой m, который может скользить по трубке без трения, удерживается на высоте H от стола. Масса платформы с трубкой $3m$. Вначале система покоилась. Шарик отпустили. Найдите скорость вылетевшего из трубки шарика, если: 1) брусок закреплен на столе; 2) брусок не закреплен и после вылета шарика движется поступательно.*

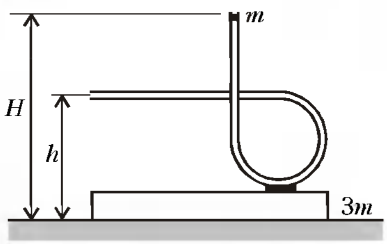


Рис. 5

1) В случае закрепленного бруска скорость v_1 вылетевшего шарика найдем из закона сохранения и превращения энергии:

$$mgH=mgh+\frac{mv_1^2}{2},$$

откуда

$$v_1=\sqrt{2g(H-h)}.$$

2) В случае незакрепленного бруска будем рассуждать так. Пусть шарик вылетел из трубки со скоростью v_2, а брусок с трубкой приобрел скорость u в противоположном направлении. На систему из шарика и бруска с трубкой за время Δt движения шарика в трубке действуют такие внешние силы: направленные вертикально вниз силы тяжести $m\vec{g}$ и $3m\vec{g}$ и направленная вертикально вверх и зависящая от времени сила нормальной реакции стола $\vec{N}(t)$. Заметим, что Δt здесь не считается малым! Направим ось X горизонтально в направлении скорости вылетевшего шарика. Ясно, что проекция на ось X суммы всех трех вертикальных сил равна нулю в любой момент из интервала времени Δt. Значит, проекция на ось X импульса системы сохраняется:

$$0=mv_2-3mu.$$

По закону сохранения и превращения энергии,

$$mgH=mgh+\frac{mv_2^2}{2}+\frac{3mu^2}{2}.$$

Из последних двух уравнений находим скорость шарика:

$$v_2=\sqrt{\frac{3g(H-h)}{2}}.$$

Упражнения

1. Неподвижный снаряд разорвался на четыре осколка. Осколки массами $m_1=3$ кг, $m_2=2$ кг и $m_3=4$ кг полетели, соответственно, со скоростями $v_1=200$ м/с вертикально вверх, $v_2=150$ м/с горизонтально на север и $v_3=100$ м/с горизонтально на восток. Под каким углом к горизонту полетел четвертый осколок?

2. Камень массой $m=1$ кг подняли на некоторую высоту и отпустили без начальной скорости. Через время $t=1$ с практически свободного падения камень попал в ящик с песком массой $5m$, скользивший по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью $v=6$ м/с. Найдите скорость ящика с камнем. На сколько увеличилась суммарная внутренняя энергия ящика, песка, камня и окружающих тел?

3. Трубка в виде петли жестко укреплена на платформе, находящейся на гладкой горизонтальной поверхности стола (рис.6). Правый конец трубки горизонтален, его расстояние до стола h. В трубке на высоте H удерживается шарик массой m, который может скользить по трубке без трения. Масса платформы с трубкой $4m$. Система покоится. Шарик отпускают. Найдите скорость вылетевшего из трубки шарика, если: 1) платформа закреплена на столе; 2) платформа не закреплена и после вылета шарика движется поступательно.

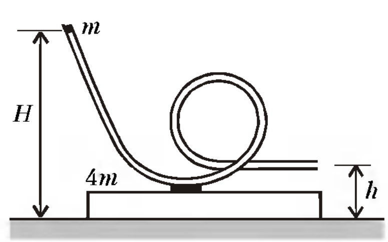


Рис. 6

Материалы вступительных экзаменов 1999 года

Институт естественных наук и экологии при «Курчатовском институте»

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

1. Для всех возможных значений параметров a и b решите уравнение

$$\sqrt{\log_a(ax)+\log_x(ax)}+\sqrt{\log_a(x/a)+\log_x(a/x)}=b.$$

2. Определите значения α, удовлетворяющие неравенству

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}+p\cos^2\alpha\ge 1$$

для всех значений $p\in\boldsymbol{R}$.

3. На координатной плоскости заданы прямые $y=6x+7$ и $y=-8x-14$. Каждая из двух парабол вида $y=\pm x^2+ax+b$ касается обеих этих прямых. Определите уравнения этих парабол. Найдите площадь S фигуры, границей которой являются указанные выше прямые и параболы.

4. Определите наименьшее и наибольшее значения выражения

$$x+y-|x-y|$$

при условии, что $x^2-xy+y^2=4$. При каких x и y достигаются эти значения?

5. Четырехугольник $KLMN$ вписан в окружность. Через его вершины проведены касательные к этой окружности, образующие также вписанный четырехугольник. Найдите площадь четырехугольника $KLMN$, если его периметр равен p, и $MN/ML=2$, $MN/KL=8$.

6. Отрезок PQ параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $KLMN$, причем $KL=1$, $PQ=3$. Все стороны прямоугольника $KLMN$ и отрезки KP, LP, NQ, MQ, PQ касаются некоторого шара. Найдите радиус шара.

7. Не пользуясь калькулятором, определите значение выражения

$$\sin10^\circ\cdot\sin50^\circ\cdot\sin70^\circ.$$

ФИЗИКА

Письменный экзамен

1. Два одинаковых клина с массами M и углами раствора α помещены в угол, образованный гладкими полом и стенкой, как показано на рисунке 1. Коэффициент трения между соприкасающимися плоскостями клиньев μ. 1) Каким должен быть этот коэффициент, чтобы клин A мог быть выдавлен вверх горизонтальной силой F, приложенной к клину B? 2) Какой должна быть эта сила при заданном μ? В стене вблизи пола сделана выемка для того, чтобы клин B мог быть продвинут в горизонтальном направлении.

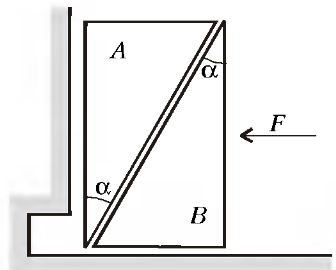


Рис. 1

2. Идеальный газ состоит из молекул азота, часть из которых диссоциирована на атомы. В процессе изобарического нагрева абсолютная температура этого газа возрастает от T_1 до T_2, при этом газ совершает работу A. Какое количество теплоты было подведено к газу, если известно, что степень диссоциации газа (доля диссоциированных молекул) возрастает от α_1 до α_2, а энергия диссоциации одной молекулы равна ε? Число степеней свободы молекулы азота (с учетом колебаний) считать равным 7.

3. Тонкая трубка квадратной формы, заполненная жидкостью ровно наполовину, может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, смещенной на некоторое расстояние относительно оси симметрии (рис.2). При вращении рамки с частотой Ω высоты столбов жидкости различаются в два раза. 1) Во сколько раз нужно увеличить частоту вращения, чтобы жидкость заполнила дальнее колено полностью? 2) Во сколько раз нужно увеличить смещение оси, чтобы выполнить то же условие без изменения частоты вращения рамки?

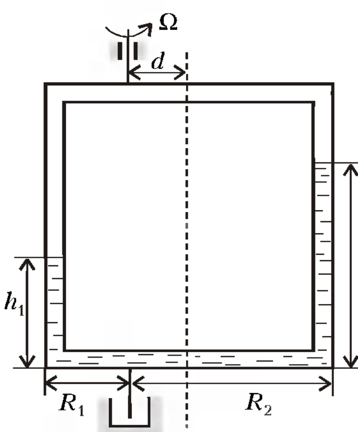


Рис. 2

4. В однородном магнитном поле с индукцией B находятся длинные вертикальные проводящие рейки, расположенные в плоскости, перпендикулярной линиям поля. По рейкам, расстояние между которыми l, может скользить без трения проводник массой m (рис.3). Верхние концы реек замкнуты на катушку индуктивностью L, а нижние концы разомкнуты. 1) Определите расстояние, на которое переместится первоначально покоящийся проводник, если его мгновенно разогнать вниз до скорости v_0. 2) Найдите максимальную скорость проводника и ток в катушке в этот момент. Сопротивление проводников и самоиндукцию цепи не учитывать.

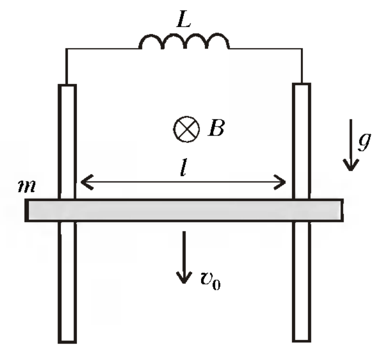


Рис. 3

5. Точечный источник света S распо-

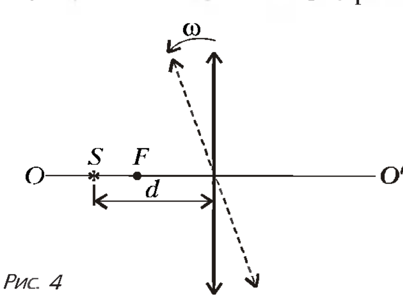


Рис. 4

ложен на расстоянии d от собирающей линзы на ее главной оптической оси OO'. Фокусное расстояние линзы $F < d$. В некоторый момент времени линза начинает вращаться с постоянной угловой скоростью ω относительно оси, проходящей через центр линзы и перпендикулярной OO' (рис.4). Найдите ускорение, которое приобретает изображение источника сразу после начала вращения линзы.

Публикацию подготовил С.Фомичев

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультет прикладной математики)

1. Найдите все действительные корни алгебраического уравнения

$$(3x+5)\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2(3x+7)=\frac{1}{3}.$$

2. В течение двух лет добыча нефти на скважине уменьшается ежегодно на один и тот же процент в сравнении с объемом добычи предыдущего года. За первый год она сократилась более чем вдвое, а падение добычи за второй год в 7,2 раза меньше исходного годового объема добычи. На сколько процентов ежегодно сокращалось производство нефти на скважине?

3. Решите тригонометрическое уравнение

$$5+2\sin x+8\cos x+\sin 2x+3\cos 2x=0.$$

4. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-2x+8\right)+2\sqrt{\log_2\left(x^2-2x+8\right)}\geq 12.$$

5. На стороне AM треугольника AMD выбрана точка B, а на стороне MD выбрана точка C так, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности, а прямые AD и BC пересекаются в точке N. При этом известно, что $\angle AMD = 60°$, $AD = 2BC$, $S_{ABD} = 2S_{ACD}$. Найдите величину угла ANB.

Вариант 2

(факультет информационной безопасности)

1. Найдите все действительные корни алгебраического уравнения

$$(10x-5)^2(10x-4)(10x-6)=72.$$

2. В течение первых двух лет обучения одного набора слушателей в Академии процент отчисляемых на первом и втором курсах был одинаковым. Число слушателей, переведенных на третий курс, отличается от числа слушателей, переведенных на второй курс, на 20 человек. Всего на первый курс данного набора было принято 441 человек. Сколько слушателей переведено на третий курс, если известно, что их было более 100 человек?

3. Решите тригонометрическое уравнение

$$\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x=\cos x+\cos 2x.$$

4. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AD перпендикулярна основаниям и равна 9, $CD = 12$, а отрезок AO, где O – точка пересечения диагоналей трапеции, равен 6. Найдите $\angle AOB$.

5. Считая x, y целыми числами, решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\log_4\left(\sqrt{y}+1\right)\log_{(y-2)^2}(x+1)+\log_{\frac{1}{(y-2)^2}}3=0,\\ 4^{x+y}-256\cdot 2^{x+y}+16384=0.\end{cases}$$

Вариант 3

(факультет специальной техники)

1. Из молока, жирность которого составляет 5%, изготовляют творог жирностью 15,5%, при этом остается сыворотка жирностью 0,5%. Сколько творога получится из одной тонны молока?

2. Решите неравенство

$$\lg x^{\sqrt{x-1}}+1>\lg x+\sqrt{x-1}.$$

3. В трапеции $CDEF$ ($CF \parallel DE$) диагонали DF и CE перпендикулярны и пересекаются в точке B. Известно, что $CD = 37$, $BF = 84$, а радиус окружности, вписанной в треугольник BFC, равен 14. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник DEB.

4. Решите уравнение

$$\sin(\pi x)=\cos\frac{\pi}{x}.$$

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$144^{-|2x-1|}-2\cdot 12^{-|2x-1|}+12a=0$$

имеет хотя бы один корень.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультет специальной техники)

1. Тело брошено с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найдите кинетическую энергию тела $E_к$ спустя время t после начала движения. Масса тела m. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. По наклонной поверхности клина массой M с углом наклона α втаскивают брусок массой m, действуя на него силой, параллельной поверхности клина (рис.1). Клин находится на горизонтальной плоскости. Коэффициент трения между бруском и клином μ_1. Определите, при каких значениях

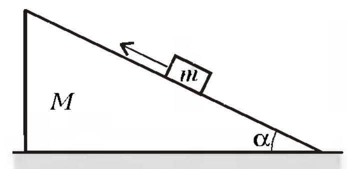


Рис. 1

коэффициента трения μ_2 между клином и горизонтальной плоскостью клин будет оставаться в покое. Масса бруска меньше массы клина.

3. Двум удаленным друг от друга металлическим шарам с радиусами R_1 и R_2, соединенным длинным тонким проводником, сообщен заряд Q. Шар радиусом R_1 находится внутри концентрической металлической заземленной сферы радиусом $R_3 = 3R_1$. Какой заряд q протечет по соединительному проводнику, если вдвое увеличить радиус шара R_2?

4. В вертикальном закрытом цилиндре находится идеальный газ, разделенный на две части тяжелым подвижным поршнем. В нижней части цилиндра масса газа вдвое больше, чем в верхней. При одинаковой во всем цилиндре температуре объем нижней части цилиндра равен объему верхней части. Каким будет отношение n объемов верхней и нижней частей, если температуру газа увеличить в два раза?

5. Одна сторона замкнутого проводящего контура в форме квадрата изготовлена из проволоки с удельным сопротивлением ρ_1, три другие стороны – из проволоки с удельным сопротивлением ρ_2. Длина стороны квадрата L, поперечные сечения проволок одинаковы. Контур помещен в однородное магнитное поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости контура, а величина изменяется во времени по закону $B = kt$. Определите напряжение U между точками соединения разнородных проволок.

Вариант 2

(факультет прикладной математики)

1. С какой минимальной скоростью v_0 следует бросить под углом α к горизонту камень, чтобы он достиг высоты h?

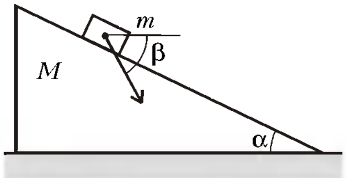


Рис. 2

2. На гладкой горизонтальной плоскости находится клин с углом α при основании (рис.2). Тело массой m, положенное на клин, опускается с ускорением, направленным под углом β к горизонтали ($\beta > \alpha$). Определите массу клина M. Трение не учитывать.

3. Амперметр сопротивлением R_1, подключенный к источнику ЭДС, показывает ток I. Вольтметр сопротивлением R_2, подключенный к такому же источнику, показывает напряжение U. Определите ток I_0 короткого замыкания источника.

4. На диаграмме зависимости давления p от объема V для некоторой массы идеального газа две изотермы пересекаются двумя изобарами в точках *1, 2, 3* и *4* (рис.3). Найдите отношение температур T_3/T_1 в точках *3* и *1*, если отношение объемов в этих точках $V_3/V_1 = \alpha$. Объемы газа в точках *2* и *4* равны.

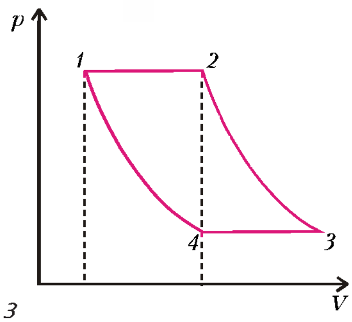


Рис. 3

5. На каком расстоянии d от тонкой собирающей линзы надо поместить предмет на главной оптической оси, чтобы получить действительное изображение, увеличенное в k раз. Фокусное расстояние линзы F.

Вариант 3

(факультет информационной безопасности)

1. Мяч, брошенный со скоростью v_0 под углом α к горизонту, ударяется о вертикальную стену, находящуюся на расстоянии L от места бросания. Определите модуль скорости v мяча непосредственно перед ударом.

2. На гладком горизонтальном столе находится подвижный клин массой M с углом α при основании (рис.4). На клин опирается стержень массой m. Благодаря ограничителям стержень может двигаться только вдоль вертикальной оси. Определите ускорение клина a. Трение не учитывать.

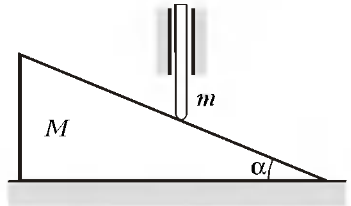


Рис. 4

3. Определите внутреннее сопротивление аккумулятора r, если известно, что при замыкании его на внешнее сопротивление R_1 напряжение на зажимах аккумулятора U_1, а при замыкании на сопротивление R_2 напряжение на зажимах U_2. Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

4. Диаграмма зависимости давления p от объема V для некоторой массы идеального газа состоит из двух изотерм и двух отрезков прямых, проходящих через начало координат (рис.5). Найдите объем газа V_4 в состоянии *4*, если известны его объемы V_1, V_2 и V_3 в состояниях *1, 2* и *3*.

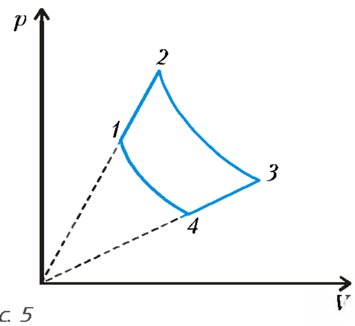


Рис. 5

5. Расположенные в одной плоскости падения взаимно перпендикулярные лучи света идут из воздуха в жидкость. У первого луча угол преломления $\beta_1 = 30°$, а у второго $\beta_2 = 45°$. Найдите показатель преломления жидкости n.

Публикацию подготовили А.Леденев, В.Кириллов, В.Шапошников

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Два лыжника стартовали друг за другом с интервалом в 15 мин. Второй лыжник догнал первого в 15 км от точки старта. Дойдя до отметки 50 км, второй лыжник повернул обратно и встретил первого на расстоянии 5 км от точки поворота. Найдите скорости лыжников.

2. Решите уравнение

$$3\cos x + 2\sqrt{2}\cos^2 x + \sqrt{2}\sin^2 x = 0.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\lg\left(5x^2+1\right)}{\lg(2x+1)} = 2.$$

4. Решите неравенство

$$3^{1+\sqrt{x}} + 2\cdot 3^{2-\sqrt{x}} < 29.$$

5. Решите уравнение

$$\frac{|\sin x|}{\sin x} + \frac{(x-3)^2}{2} = 1.$$

6. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x-6}{|x|-6} = 1, \\ (x-a)^2 + a - 6 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это решение при каждом a.

7. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с диагоналями его основания углы 45° и 60°, а расстояние между боковым ребром и диагональю параллелепипеда, не пересекающей это ребро, равно l. Какой наименьший периметр может иметь сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через его диагональ и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ?

Вариант 2

1. Два каменщика выложили стены дома, работая сначала вместе 8 дней, а затем один первый каменщик – еще 7 дней. Если бы эта работа была поручена каждому отдельно, то для ее выполнения первому потребовалось бы на 7 дней меньше, чем второму. За сколько дней каждый из них может выложить стены этого дома?

2. Укажите все значения x, при которых функция

$$y = \sin^2 x - \sin x + 1$$

принимает наименьшие и наибольшие значения. Найдите эти значения.

3. Решите уравнение

$$\log_2(x-2) = 2 - \log_2(x+1).$$

4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{3+2x}}{2x^2 - x - 1} > 0.$$

5. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, две стороны которого лежат на координатных осях, а одна из вершин – на графике функции

$$y=(2x-15)(12-x),\ y>0?$$

6. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\lg(x+y-1)}{\lg x}=1,\\(x-a)^2+(y-a+5)(y-a)=0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

7. В сферу вписана пирамида $TABC$, основанием которой служит прямоугольный треугольник ABC, а высота пирамиды совпадает с ребром TA. Боковое ребро TB образует с гипотенузой основания AB угол 45°, угол между TB и медианой основания CD равен 60°, а расстояние между прямыми TB и CD равно l. Найдите площадь сферы.

Публикацию подготовил Л.Паршев

Московский институт электронной техники

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(технические факультеты)

1. Вычислите без таблиц и калькулятора

$$\frac{\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)^2}{2\sin\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\cos(-\pi)-\sin\frac{\pi}{4}}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_3\left(x^2-4x+2\right)=\log_3(2x-6).$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x^2+y^2=8,\\xy=4.\end{cases}$$

4. Решите неравенство

$$0{,}125\cdot 4^{2x-3}\ge\left(\frac{\sqrt2}{8}\right)^{-x}.$$

5. Решите уравнение

$$(1-\cos 3x)\operatorname{tg}x=2\sin^2 1{,}5x.$$

6. Велосипедист, проезжая каждую минуту на 500 м меньше, чем мотоциклист, на путь в 120 км затрачивает на 2 часа больше, чем мотоциклист. Найдите скорость велосипедиста.

7. Решите неравенство $f(a)<f(a-2)$, если $f(x)=\dfrac{1}{3-2x}$.

8. Постройте график функции

$$y=\log_3\left(x^2+6x+9\right).$$

9. Через вершины A и B прямоугольного треугольника ABC (угол C – прямой) проведена окружность, касающаяся стороны AC и пересекающая продолжение стороны BC в точке D. Найдите радиус окружности, если известно, что $AB = 3$ и $CD = 3{,}2$.

10. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, а двугранный угол при основании равен β. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проведенной параллельно плоскости основания через центр вписанного в пирамиду шара.

11. Найдите наименьшее значение функции

$$y=\frac{x^4-2x^3+3x^2-2x+2}{x^2-x+1}.$$

Вариант 2

(экономический факультет)

Первые пять задач совпадают с первыми пятью задачами варианта 1.

6. Решите неравенство

$$\left(x^2-4x-2{,}75\right)\sqrt{x^3-5x^2-8x+40}\ge0.$$

7. Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$|y|=f\left(\left|\frac{1}{f(|x|)}\right|\right),$$

где $f(x)=x-2$.

8. Найдите все тройки чисел $(x,\ y,\ z)$, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{3\cos x+4\sin x+5\pi+5}{3\sin y+4\cos y+5}=\arccos\frac{z}{3}+\arcsin\frac{z}{3}.$$

9. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O ($\angle BOC = 120°$). Известно, что числа, выражающие длины отрезков BO, OC и BC, являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найдите отношение длин отрезков DK и DC, если точка K – середина стороны BC.

10. В юношеских соревнованиях по прыжкам 35% от числа участников выполнили норматив II разряда по прыжкам в высоту и длину, 47% – по прыжкам в высоту и в тройном прыжке и 42% – в тройном и прыжкам в длину. Оказалось, что каждый участник выполнил норматив II разряда хотя бы по двум дисциплинам. Выполнившие норматив по всем дисциплинам мечтают стать мастерами спорта, а выполнившие только по прыжкам в высоту и длину мечтают получить II разряд в тройном прыжке, остальные собираются остановиться на достигнутых результатах. При этом среди девушек мечтают стать мастерами 3%, а выполнить норматив в тройном прыжке 47%. Какой процент юношей собирается остановиться на достигнутых результатах, если мастерами из них мечтают стать 18%?

11. Найдите наибольшее значение функции

$$y=\frac{x^4-2x^3+5x^2-4x+5}{x-2-x^2}.$$

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Самолет совершает прямолинейный горизонтальный полет на высоте $H = 1$ км со скоростью $v_1 = 900$ км/ч. В тот момент, когда он находится над зенитной установкой, из нее производят выстрел. Чему равна минимальная начальная скорость v_2 снаряда, при которой цель может быть поражена? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Под действием горизонтальной силы $F = 12$ Н тело движется по горизонтальной шероховатой поверхности по закону $x = 5 + t^2$, где координата x измеряется в метрах, а время t – в секундах. Определите массу m тела, если коэффициент трения тела о поверхность $\mu = 0{,}1$.

3. Максимальная скорость математического маятника при малых колебаниях $v_m = 5$ см/с, период колебаний $T = 1$ с. Определите максимальный угол α_m отклонения маятника от вертикали в процессе колебаний.

4. При изотермическом сжатии идеального газа его давление изменилось на $\Delta p = 5\cdot10^4$ Па, а плотность возросла на $\Delta\rho = 0{,}5$ кг/м^3. Определите плотность газа ρ_2 в конечном состоянии, если его давление стало $p_2 = 1{,}5\cdot10^5$ Па.

5. Некоторое количество одноатомного идеального газа совершает одну и ту же работу в изобарном и изотермическом процессах. Определите отношение η количеств теплоты, полученных газом в этих процессах.

6. Точечные заряды q, q и $-q$ расположены на одной прямой. Расстояния между соседними зарядами одинаковы. Крайние заряды q и $-q$ взаимодействуют между собой с силой $F_1 = 100$ Н. Какая суммарная сила F_2 действует на средний заряд q со стороны двух остальных?

7. К аккумулятору с внутренним сопротивлением $r = 0{,}5$ Ом подключают вольтметр и резистор сопротивлением $R = 100$ Ом, один раз соединенные параллельно, а другой – последовательно. При этом показания вольтметра не изменяются. Определите внутреннее сопротивление $R_в$ вольтметра.

8. Электрон, движущийся со скоростью $v = 2 \cdot 10^6$ м/с, влетает в область двух перекрещивающихся под углом $\alpha = 90°$ магнитных полей с индукциями $B_1 = 3$ мкТл и $B_2 = 4$ мкТл. Вектор скорости электрона перпендикулярен векторам $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$. Определите силу F, действующую на электрон.

9. Какую максимальную часть δ от своего роста может видеть человек ростом $H_1 = 1{,}8$ м в зеркале высотой $H_2 = 45$ см, располагая его на вертикальной стене?

10. Определите максимальный импульс p фотоэлектронов, если задерживающее напряжение для них $U = 3{,}2$ В.

Физические постоянные: ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, элементарный электрический заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Вариант 2

1. Пассажир первого вагона поезда длиной $l = 120$ м прогуливался по перрону. Когда он был у хвоста поезда, поезд начал двигаться с ускорением $a = 0{,}25$ м/с^2. Пассажир сразу же побежал к своему вагону со скоростью $v = 8$ м/с. Через какое время t он догонит вагон?

2. Веревка, лежащая на столе, начинает соскальзывать, когда длина свешивающейся со стола части составляет $\alpha = 1/4$ длины веревки. Определите коэффициент трения μ веревки о стол.

3. На какую величину x сожмется вертикально стоящая пружина жесткостью $k = 200$ Н/м с закрепленной на ее верхнем конце чашкой с пренебрежимо малой массой при падении на чашку с высоты $H = 1$ м от нее пластилинового шарика массой $m = 10$ г?

4. Азот массой $m = 0{,}56$ г, находящийся в сосуде объемом $V = 1$ л, нагрели до температуры $t = 1527$ °С, при которой часть $\alpha = 30\%$ молекул азота распалась на атомы. Определите установившееся в сосуде давление p газа.

5. На какую высоту H поднимет груз массой $m = 100$ кг идеальная тепловая машина, если рабочее тело этой машины получает от нагревателя при $T_1 = 400$ К количество теплоты $Q = 100$ кДж, а температура холодильника $T_2 = 300$ К?

6. Пластины плоского воздушного конденсатора притягиваются с силой $F = 0{,}1$ Н, если его заряд $q = 20$ мкКл. Определите напряженность E электрического поля между пластинами.

7. Действующее значение напряжения на конденсаторе емкостью $C = 1$ мкФ в цепи переменного синусоидального тока с частотой $\nu = 400$ Гц равно $U = 36$ В. Определите амплитудное значение I_m тока в цепи.

8. Энергия магнитного поля катушки электромагнита с индуктивностью $L = 0{,}2$ Гн составляет $W = 5$ Дж. Определите величину ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}$, возникающей в катушке, при равномерном уменьшении силы тока до нуля за время $t = 0{,}1$ с.

9. Предмет и его прямое уменьшенное изображение находятся на одинаковых расстояниях $a = 5$ см от фокуса линзы. Постройте ход лучей, формирующих изображение, и определите фокусное расстояние F линзы.

10. Рентгеновская трубка, работающая при напряжении $U = 50$ кВ и потребляющая ток $I = 1$ мА, излучает ежесекундно $N = 2{,}5 \cdot 10^{13}$ фотонов со средней частотой $\nu = 3 \cdot 10^{18}$ Гц. Определите коэффициент η полезного действия трубки.

Физические постоянные: ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К), молярная масса азота М = 28 г/моль, постоянная Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Публикацию подготовили
А.Абрамов, А.Берестов, С.Куклин, Д.Ничуговский, Т.Олейник, А.Прокофьев, Т.Соколова

Московский энергетический институт (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Задачи письменного экзамена

1. Упростите выражение

$$\left(\frac{1}{a^2-\sqrt{x+a^4}}+\frac{1}{a^2+\sqrt{x+a^4}}\right)^{-1}+\left(\frac{2a^2+a^4}{x+a^4}+\frac{1}{1+a^4x^{-1}}-1\right)^{-1}.$$

2. Упростите выражение для функции $f(x)$ и постройте график $y = f(x)$, если

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt{x^3\left(x^3-2\right)+1}+\sqrt{x(x+2)+1}}{x^3+x}-x\right)^{-1}\times 4^{\log_2\sqrt{x^2-1}}.$$

3. Упростите выражение для функции

$$f(x)=\left(\frac{\left(\sqrt{x^3}-2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}{x+\sqrt{2x}+2}\right)^2+\sqrt{\frac{\left(x^2+2\right)^2-8x^2}{\log_{\sqrt{2}-x}\left(\sqrt{2}-x\right)}}$$

и для каждого значения параметра a решите уравнение

$$xf(x)+6\sqrt{x^2+(x-1)f'(x)}=12-4a^2.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{3-\sqrt[4]{9x-x^3}}{\sqrt{x^4+1}}\le\frac{x^4-\sqrt[4]{2x^3-18x}}{243}.$$

5. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства

$$9^x-\left(3+3^{-2a}\right)\cdot 3^x+3^{1-2a}<0$$

непусто и ни одно из его решений не удовлетворяет неравенству

$$3x-x^2<0.$$

6. Велосипедист проезжает расстояние между пунктами A и B за 4 часа. Если велосипедист увеличит скорость на 4 км/ч, то на весь путь от A до B ему потребуется 3 часа. Найдите расстояние между A и B.

7. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить некоторую работу за 15 дней. После 12 дней совместной работы один из них заболел, и другой окончил работу один, проработав еще 4 дня. За сколько дней каждый из рабочих, работая отдельно, может выполнить всю работу?

8. Число 140 представьте в виде суммы двух натуральных чисел так, чтобы квадрат первого числа был меньше второго, а второе число было меньше первого, умноженного на 12.

9. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых система уравнений

$$\begin{cases}2y\cos^2 2x+4a\pi(\pi-x)=a^3+2y\cos^2 x,\\ \log_3\left(y\cos 4x-ax^2-y\cos 2x+9\right)=2\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

10. Пусть t_1, t_2 – действительные корни уравнения

$$3t^2-(4a-1)t-3=0.$$

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого значения параметра b функция

$$f(x) = \cos\left(t_1^2 + t_2^2 - t_1 t_2 - 4\right)\pi x + \cos b\pi x$$

является периодической. Для каждого из найденных значений a при любом b найдите наименьший положительный корень уравнения

$$f(x) + a = 1.$$

11. В треугольник ABC, площадь которого равна S, вписана окружность, касающаяся стороны BC в точке M. Найдите длины отрезков BM и MC, если $BM : MC = m : n$ и $\angle BAC = 60°$.

12. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с острым углом 60°, каждое боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости ее основания под углом 30°. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна H.

13. Основанием пирамиды является равносторонний треугольник. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны основанию, а третья наклонена к основанию под углом α. Найдите площадь основания пирамиды, если площадь ее боковой поверхности равна S.

14. В конус с радиусом основания R вписан цилиндр, объем которого равен V. Найдите высоту конуса, если высота цилиндра вдвое меньше радиуса основания конуса.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Какова разница в массе воздуха, заполняющего помещение объемом $V = 100$ м^3 зимой и летом, если летом температура воздуха в помещении достигает $t_1 = 30$ °С, а зимой падает до $t_2 = 20$ °С? Атмосферное давление считать постоянным и равным $p = 1 \cdot 10^5$ Па.

2. К батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 3$ В подключили резистор сопротивлением $R = 20$ Ом, при этом напряжение на резисторе оказалось равным $U = 2$ В. Определите ток короткого замыкания.

3. Ракета с включенным двигателем «зависла» над поверхностью Земли. Какова мощность, развиваемая двигателем, если масса ракеты M, а скорость истечения газов из двигателя v?

Вариант 2

1. Запаянная с одного торца цилиндрическая трубка длиной L погружается в воду открытым торцом вниз до тех пор, пока запаянный торец не оказывается на одном уровне с поверхностью воды. Когда температура воздуха в трубке сравнялась с температурой воды, оказалось, что вода в трубке находится на уровне ее нижнего торца. Определите начальную температуру воздуха T_0, если температура воды остается постоянной и равной T_1. Атмосферное давление p_0. Влиянием поверхностного натяжения пренебречь.

2. Ток через аккумулятор в конце зарядки $I_1 = 4$ А. При этом напряжение на его клеммах $U_1 = 12{,}36$ В. При коротком замыкании аккумулятора ток $I_0 = 305$ А. Определите напряжение на клеммах аккумулятора при разряде его током $I_2 = 6$ А.

3. На горизонтальной поверхности лежат два тела массами m_1 и m_2. Между ними находится ненапряженная пружина. Найдите минимальную горизонтальную постоянную силу, которую надо приложить ко второму телу, чтобы сдвинуть первое тело. Коэффициент трения между телами и горизонтальной поверхностью μ.

Вариант 3

1. Из баллона со сжатым кислородом израсходовали столько кислорода, что его давление упало от $p_1 = 9{,}8$ МПа до $p_2 = 7{,}8$ МПа. Какая доля массы кислорода была израсходована? Температура кислорода постоянна.

2. В цепь, состоящую из аккумулятора и подключенного к нему резистора сопротивлением $R = 20$ Ом, включили вольтметр сначала последовательно, а затем параллельно резистору. Показания вольтметра в обоих случаях одинаковы. Сопротивление вольтметра $R_в = 500$ Ом. Определите внутреннее сопротивление аккумулятора.

3. Свернувшаяся в кольцо змея длиной l начинает равномерно со скоростью v подниматься вертикально вверх. Найдите массу змеи m, если в произвольный момент времени t во время подъема на змею действует сила реакции опоры N.

Вариант 4

1. Давление газа в сосуде при температуре $t_1 = 127$ °С составляет $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па. Определите давление газа p_2 после того, как треть массы газа была выпущена из сосуда, а температура понижена до $t_2 = 77$ °С.

2. Источник тока замыкается один раз на резистор сопротивлением $R_1 = 4$ Ом, а другой раз – сопротивлением $R_2 = 9$ Ом. В том и в другом случае количество теплоты, выделяемое на каждом резисторе за одно и то же время, одинаково. Каково внутреннее сопротивление источника тока?

3. Шарик для игры в настольный теннис радиусом $R = 15$ мм и массой $m = 5$ г погружен в воду на глубину $h = 30$ см. Когда шарик отпустили, он выпрыгнул из воды на высоту $H = 10$ см. Определите количество механической энергии, перешедшей в тепло.

Вариант 5

1. В цепи, состоящей из источника с ЭДС $\mathcal{E} = 8$ В и внутренним сопротивлением $r = 1{,}5$ Ом и внешнего сопротивления, идет ток $I_1 = 0{,}6$ А. Какой ток I_2 пойдет при уменьшении внешнего сопротивления в два раза?

2. Найдите заряд заземленного металлического шара радиусом R, если на расстоянии l от его центра находится точечный заряд Q.

3. Два тела массами $m_1 = 4$ кг и $m_2 = 6$ кг движутся навстречу друг другу с относительной скоростью $v = 10$ м/с. Найдите количество теплоты, которое выделится при абсолютно неупругом соударении этих тел.

Публикацию подготовили
В.Прохоренко, А.Седов

Новосибирский государственный университет

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из задач трех типов.

Первые три задачи – расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной ситуации.

Четвертая задача – это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача – это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь надо понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

На решение задач давалось пять часов, начиная с завершения демонстрации.

Вариант 1

1. Вертикально стоящий цилиндр перекрыт поршнем площадью S и массой M. Между поршнем и цилиндром есть трение. Поршень начнет опускаться, если на него надавить силой F_1, и подниматься, если его потянуть вверх силой F_2. Найдите давление в цилиндре, если атмосферное давление равно p_0.

2. Невесомый стержень длиной L соединяет точечные грузы массами m_1 и m_2, которые подвешены к общей точке O на потолке на нитях длиной r (рис.1). Стержень привели в горизонтальное положение и отпустили. Найдите ускорения грузов в первый момент времени.

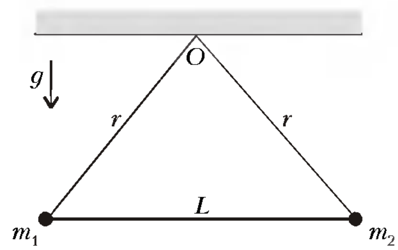


Рис. 1

3. В схеме на рисунке 2 две внутренние металлические пластины заряжены зарядами q и $-q$ соответственно. Две внешние, вначале незаряженные, металлические пластины соединяют через резистор. Какой заряд пройдет при этом через резистор и какое количество теплоты выделится в нем? Расстояния между соседними пластинами d, площадь каждой пластины S.

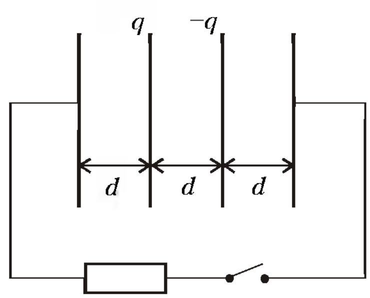


Рис. 2

4. Для спасения людей при пожаре используют аварийные брезентовые полотнища, удерживаемые спасателями по периметру. Оцените, с какой высоты на них может упасть человек, не ударившись при торможении о землю.

5. К одному концу упругой стальной линейки прикреплен груз, а другой конец ее жестко зафиксирован так, что линейка вертикальна. Отклоняя груз, вызывают его колебания. Один раз опыт проводят при верхнем положении груза, а другой – при нижнем. Объясните, почему при примерно одинаковой амплитуде периоды колебаний заметно отличаются.

Вариант 2

1. Ракета стартует под углом α к горизонту. Найдите ее ускорение, если реактивная струя образует угол β с направлением взлета. Ускорение свободного падения g.

2. В вертикально стоящем цилиндре сечением S на поверхности жидкости плотностью ρ удерживают поршень массой m с открытой длинной вертикальной трубкой сечением S_0. Поршень отпускают. Какое количество теплоты выделится по окончании движения поршня? Ускорение свободного падения g.

3. Перемычка массой m соединяет рельсы, к левым концам которых присоединены выводы незаряженного конденсатора емкостью C (рис.3). Слева от плоскости MN создано однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, справа магнитного поля нет. Расстояние между рельсами h. Перемычке внезапно сообщают скорость v_1. Какой ток будет течь через перемычку сразу после ее выхода из поля, если ее скорость в этот момент равна v_2? Сопротивление перемычки R, сопротивлением рельсов пренебречь.

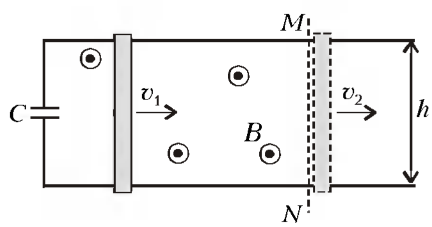


Рис. 3

4. Тонну золота взвесили с хорошей точностью сначала зимой на морозе, а потом при июльской жаре. Оцените, на сколько разошлись показания весов. Эффект теплового расширения золота мал. Золото примерно в двадцать раз тяжелее воды. Атмосферное давление принять неизменным.

5. В стеклянной трубке, расположенной под углом к горизонту, находится неподвижная цепочка. Если трубку медленно вращать вокруг оси, цепочка выскальзывает из трубки через верхний конец. Объясните наблюдаемое явление.

Вариант 3

1. Расстояние между лазером и экраном равно L. Если к выходному отверстию лазера приложить тонкую собирающую линзу, радиус пятна на экране увеличится в два раза. Найдите фокусное расстояние линзы.

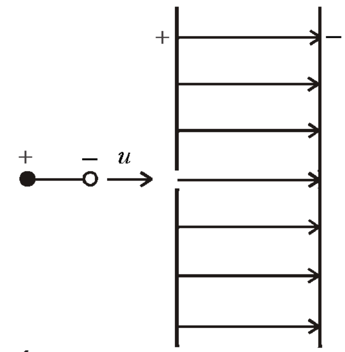


Рис. 4

2. «Гантелька» представляет собой тонкий массивный непроводящий стержень с закрепленными на его концах одинаковыми по величине и противоположными по знаку зарядами. Вдали от конденсатора «гантелька» была сориентирована перпендикулярно пластинам и имела скорость u (рис.4). Когда «гантелька» влетела в заряженный плоский конденсатор через малое отверстие в центре пластины, ее скорость оказалась равной v. Какую скорость будет иметь «гантелька» в конденсаторе, если еще до ее влета поменять полярность конденсатора на противоположную? Полем тяжести пренебречь.

3. Два одинаковых валика, представляющих собой тонкостенные цилиндры массой m, могут вращаться без трения на закрепленных горизонтально осях, которые расположены в плоскости, наклоненной под углом α к горизонту (рис.5). На валики осторожно кладут доску массой M так, что расстояния от ее концов до точек касания с валиками одинаковы. Определите коэффициент трения между валиками и доской, при котором доска не будет проскальзывать относительно валиков в первый момент времени.

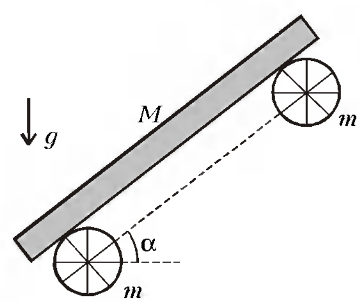


Рис. 5

4. Оцените отношение массы кислорода, содержащегося в молекулах воды океанов Земли, к массе кислорода в атмосфере Земли.

5. См. задачу 5 варианта 2.

Публикацию подготовил
Г.Меледин

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Для каждого натурального числа n определена функция

$$f_n(x)=(x+2)\left(x^4-4nx^2+4n^2\right)^{-1/2}.$$

а) Найдите области определения этих функций.

б) Нарисуйте график функции $g(x)=f_2(x)$.

в) Решите уравнение

$$\lg f_3(x)=\lg(x+2).$$

2. Решите неравенство

$$\frac{3^x-25}{x+1}\le\frac{3^x-25}{x-3}.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$\sin\pi x+\sin 2\pi x+\sin 3\pi x+\sin 4\pi x=0,$$

удовлетворяющие неравенству

$$\left|x-\frac{\pi}{6}\right|<\frac{\pi}{6}.$$

4. Длины двух сторон треугольника равны 27 и 29. Длина медианы, проведенной к третьей стороне, равна 26. Найдите длину высоты треугольника, проведенной к стороне 27.

5. Основанием пирамиды служит ромб, меньшая диагональ которого равна d, а острый угол равен α. Каждая боковая грань наклонена к основанию под углом β. Найдите площадь боковой поверхности и объем пирамиды.

Вариант 2

1. Для каждого натурального числа n определена функция

$$f_n(x)=\sqrt{(x+n)(3-x)(x-1)}.$$

а) Найдите области определения этих функций.

б) Нарисуйте график функции

$$g(x)=\frac{f_3^2(x)}{3|x-1|}.$$

в) При каких значениях a уравнение $g(x)-2a=0$ имеет единственное решение?

2. Решите неравенство

$$\frac{\log_{1/2}(x+1)}{\log_{1/2}(2-x)}\ge 1.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$\frac{\sqrt{3}\cos 2x-\sin x}{\sin 3x}=-1,$$

удовлетворяющие неравенству

$$\left|x-\frac{3\pi}{2}\right|<\frac{\pi}{2}.$$

4. На диаметре $2R$ полуокружности построен правильный треугольник, сторона которого равна диаметру. Треугольник расположен по ту же сторону от диаметра, что и полуокружность. Вычислите площадь той части треугольника, которая лежит вне круга.

5. В правильной треугольной призме со стороной основания a построено сечение, проходящее через сторону нижнего основания и центр верхнего основания призмы. Найдите площадь сечения, если оно составляет с плоскостью основания угол α.

Публикацию подготовили Г.Хамов, О.Корсакова

Российский государственный технологический университет им. К.Э.Циолковского

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$|2x-3|=5x-4.$$

2. Найдите интервалы монотонности функции

$$y=\frac{4x^2+11x-16}{x+4}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{x-4}5\ge\log_{x+8}25.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sin x\cos y=\dfrac{\sqrt{2}}{4},\\ \cos x\sin y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}.\end{cases}$$

5. Имеются три слитка. Первый слиток имеет массу 2 кг, второй 4 кг, и каждый из этих двух слитков содержит 60% никеля. Если первый слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 45% никеля, а если второй сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 48% никеля. Найдите массу третьего слитка и процент содержания никеля в нем.

6. В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC относятся как 8 : 1. В трапецию вписана окружность, которая касается боковой стороны CD в точке K, причем CK : KD = 5 : 4. Найдите отношение длин боковых сторон AB и CD.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$x^4+3x^2-10=0.$$

2. Найдите точки экстремума функции

$$y=\frac{3x-1}{x^2+x}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{x-3}81\cdot\log_3(x-1)\le 8.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{12}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 y}=12,\\ x+y=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

5. Рабочий должен был по плану изготовить за несколько дней 168 деталей. Первые четыре дня он выполнял установленную планом норму, а затем каждый день изготовлял на 8 деталей больше плана, поэтому за два дня до срока было изготовлено 188 деталей. Сколько деталей в день он должен был изготовлять по плану?

6. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка E, а на стороне BC – точка K так, что отрезок EK параллелен стороне AC и касается вписанной в треугольник окружности. Биссектриса BD пересекает отрезок EK в точке M, а биссектриса AL пересекает продолжение отрезка EK за точку K в точке N. Найдите отношение EM : MN, если известно, что периметр треугольника ABC равен 14, а сторона AC – 6.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Гирька массой 0,3 кг, подвешенная на пружине жесткостью 15 Н/м, колеблется так, что ее максимальная скорость равна 2,8 см/с. Найдите амплитуду колебаний. Силами сопротивления пренебречь.

2. Луч света падает на границу раздела двух сред под углом 45°. Скорость света в первой среде $2{,}25\cdot 10^8$ м/с.

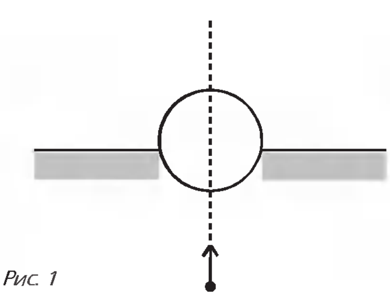


Рис. 1

Вычислите длину волны света во второй среде, если энергия фотонов $2{,}65 \cdot 10^{-19}$ Дж, а угол преломления луча 30°.

3. Пуля массой 10 г с энергией 450 Дж пробивает шар, лежащий на подставке (рис.1). Во сколько раз уменьшилась кинетическая энергия пули, если шар подпрыгнул на 20 см? Масса шара 0,4 кг.

4. Найдите работу, совершаемую одним молем одноатомного газа в цикле *1–2–3–4–1* (рис.2), если известно:

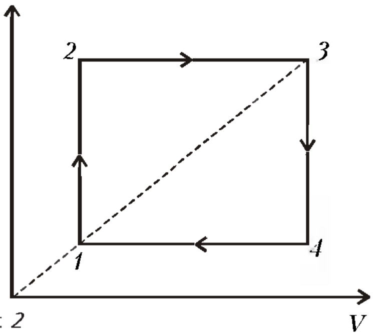


Рис. 2

$T_1 = 150$ К, $T_3 = 450$ К, точки *1* и *3* лежат на одной прямой, проходящей через начало координат.

5. Два небольших заряженных шарика, имеющие одинаковую массу 1 г, подвешены, как показано на рисунке 3. Все нити натянуты и имеют одинаковую длину.

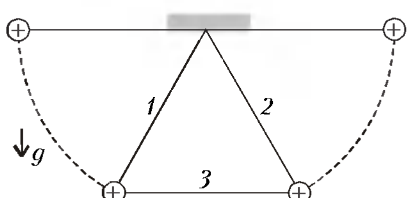


Рис. 3

После пережигания нити *3* максимальная высота подъема шариков такова, что нити *1* и *2* принимают горизонтальное положение. Определите натяжение нитей *1* и *2* в горизонтальном положении. Массами нитей пренебречь.

6. Идеальный вольтметр, подсоединенный к точкам *A* и *B* схемы (рис.4), показал напряжение 220 В. Что покажет тот же вольтметр, если его под-

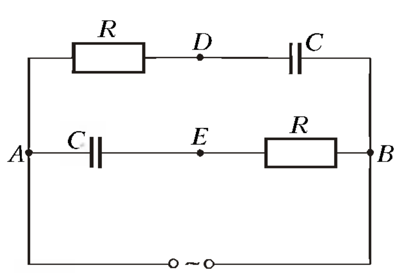


Рис. 4

ключить к точкам *D* и *E*? Известно: $R = 1{,}2$ кОм, $C = 5$ мкФ. Сопротивлением проводов пренебречь.

Вариант 2

1. Вольфрамовую пластину облучают светом с длиной волны 200 нм. Найдите максимальный импульс вылетающих из пластины электронов, если работа выхода для вольфрама 5,3 эВ.

2. В изотермическом процессе газ совершил работу 1000 Дж. Затем газу сообщили еще 1000 Дж теплоты, но уже изобарно. На сколько увеличилась внутренняя энергия этого газа, если газ одноатомный? Изобразите произошедшие процессы на графике в координатах p, V.

3. В колебательном контуре индуктивность катушки 0,2 Гн, амплитудное значение тока в контуре 40 мА. Найдите энергию магнитного поля катушки и энергию электрического поля конденсатора в тот момент, когда мгновенное значение силы тока отличается от амплитудного в 2 раза. Сопротивление контура равно нулю.

4. Камень, брошенный с поверхности земли со скоростью, равной 20 м/с и направленной под углом 60° к горизонту, попал в стенку на высоте 10 м. Под каким углом к горизонту была направлена скорость камня в этот момент?

5. В схеме на рисунке 5 все 3 резистора имеют одинаковые сопротивле-

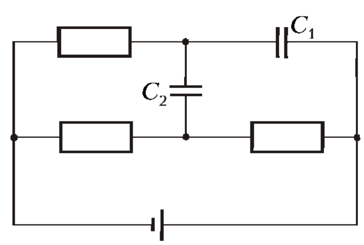


Рис. 5

ния, а емкости конденсаторов $C_1 = 40$ мкФ и $C_2 = 10$ мкФ. Заряд какого конденсатора больше и во сколько раз?

6. Два одинаковых небольших шарика соединены невесомой пружиной и лежат на гладкой горизонтальной плоскости. Один из шариков закреплен. Шарикам сообщают одинаковые заряды, в результате длина пружины увеличивается вдвое. Как изменяется при этом частота малых (по сравнению с длиной пружины) колебаний системы?

Публикацию подготовили
Т.Медина, Г.Никулин, А.Симонов

Российский государственный университет нефти и газа им. И.М.Губкина

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$\frac{a-0{,}16}{\sqrt{a}-0{,}4}-\frac{a\sqrt{a}-0{,}064}{a+0{,}4\sqrt{a}+0{,}16}.$$

2. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\sqrt{3(8-x)} > 2-x.$$

3. Сумма 9-го и 16-го членов арифметической прогрессии равна 12. Найдите сумму первых 24 членов этой прогрессии.

4. Решите уравнение $\left|-x^2-4\right| = 4x$.

5. Решите уравнение $5^x + 5^{x+2} = 130$.

6. Вычислите $\log_{49} 121 + \log_7 (49/11)$.

7. Вычислите

$$\sin 10° \sin 100° - 0{,}5 \sin 20° + 3.$$

8. Найдите в градусах наименьший положительный корень уравнения

$$\operatorname{tg}(82° + x) + \operatorname{tg}(8° - x) = 2.$$

9. Найдите наименьшее значение, которое может принимать расстояние между точками пересечения с координатными осями касательной к кривой

$$y = \frac{1000\sqrt{3}}{9x^2}.$$

10. Сколько целых чисел входит в область решений неравенства

$$\log_{x^2}(4x+96) \geq 1?$$

11. В ромбе *ABCD* с острым углом *BAD* через вершины *A*, *B*, *D* проведена окружность. Она пересекает сторону ромба *BC* в точке *M* такой, что $BM : MC = 1 : 4$. Найдите $\cos\angle BAD$.

12. В правильной треугольной пирамиде боковая грань составляет с плоскостью основания угол β, $\cos\beta = 0{,}25$. В пирамиду вписан шар объемом 25, к шару проведена касательная плоскость, параллельная плоскости основания пирамиды. Найдите объем шара, вписанного в пирамиду, отсекаемую этой плоскостью.

Вариант 2

1. Упростите выражение

$$\left(\frac{2\sqrt{5}xy}{x^2y^2-5}+\frac{xy-\sqrt{5}}{2xy+2\sqrt{5}}\right)\cdot\frac{2xy}{xy+\sqrt{5}}-$$
$$-\frac{xy}{xy-\sqrt{5}}+4{,}1$$

и найдите его значение при $x = 2$, $y = 0{,}134$.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{0{,}5\left(x^2+11x+32\right)}=-x-6.$$

3. Произведение 14-го и 30-го членов геометрической прогрессии равно 0,09. Найдите 22-й член этой прогрессии, если известно, что он положителен.

4. Найдите наибольшее целое отрицательное решение неравенства

$$|x+7{,}5|>10.$$

5. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{x-5}}{4^{x-5}}>\frac{3\sqrt{3}}{64}.$$

6. Вычислите $\log_4 10\cdot\lg 0{,}5$.

7. Вычислите

$$\frac{2\sin^2 20^\circ-1}{2\operatorname{ctg}65^\circ\cos^2 205^\circ}.$$

8. Найдите в градусах наибольший отрицательный корень уравнения

$$\cos15^\circ\sin3x-\sin15^\circ\cos3x=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

9. Из начала координат O к графику функции $y=x^2+ax+8{,}41$ проведена касательная, точка касания обозначена M. найдите наименьшее значение длины отрезка OM при всевозможных допустимых значениях параметра a.

10. Найдите меньший корень уравнения

$$\frac{x}{20}=\left(\frac{5}{2}\right)^{\log_x 50}.$$

11. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) известны расстояния от вершины B до точки пересечения высот, равное 2,8, и до точки пересечения биссектрис, равное 4. Найдите площадь треугольника ABC.

12. Около правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ с основанием $ABCDEF$ описан шар радиуса 94 с центром в точке N, лежащей внутри пирамиды. Около пирамиды $NABCDEF$ описан шар радиуса 49. Найдите тангенс угла между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды $SABCDEF$.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Внимание! Если единицы измерения не указаны, выразите ответ в единицах СИ.

Вариант 1

1. Сила в 45 Н сообщает телу ускорение 0,75 м/с^2. Какая сила сообщит этому телу ускорение 1,75 м/с^2?

2. Подъемный кран приводится в действие двигателем мощностью 8 кВт. Сколько секунд потребуется для равномерного подъема груза массой 1500 кг на высоту 40 м, если КПД двигателя 75%? Считать g = 10 м/с^2.

3. Шар массой 3 кг, имевший скорость 4 м/с, испытал абсолютно неупругий удар с покоящимся шаром такой же массы. Сколько тепла выделилось при ударе?

4. С каким ускорением будет падать в воде кусок стекла плотностью 2500 кг/м^3? Трение о воду не учитывать. Плотность воды 1000 кг/м^3, g = 10 м/с^2.

5. Определите изменение внутренней энергии двух молей газа при изобарном нагревании от 5 °С до 10 °С, если газу было сообщено количество теплоты 210 Дж. Универсальная газовая постоянная 8,3 Дж/(моль · К).

6. Какая энергия (в кДж) расходуется на нагревание электроутюга в течение 50 с, если напряжение в сети 220 В, а сила тока 3 А?

7. Протон влетает в однородное магнитное поле с индукцией 8,36 мкТл перпендикулярно линиям поля. С какой угловой скоростью (в с$^{-1}$) будет вращаться протон? Заряд протона $1{,}602\cdot10^{-19}$ Кл, его масса $1{,}672\cdot10^{-27}$ кг.

8. Во сколько раз увеличится длина волны, на которую резонирует колебательный контур приемника, если между обкладками конденсатора этого контура ввести диэлектрик с диэлектрической проницаемостью, равной 9?

9. Шарик падает на наклонную плоскость из точки A без начальной скорости и испытывает с плоскостью абсолютно упругое соударение. На каком расстоянии от места падения он ударится о плоскость второй раз? Угол наклона плоскости 45°, а расстояние от точки A до плоскости 25 см.

10. Теплоизолирующий поршень делит горизонтальный сосуд на две равные части, содержащие газ при температуре 5 °С. Длина каждой части 144 мм. Одну часть сосуда нагрели на 18 °С, а другую на 2 °С. На какое расстояние (в мм) сместится поршень?

11. В вершинах острых углов ромба закреплены заряды 7 нКл, а в вершинах тупых углов находятся две частицы массой 2 мг и зарядом 2 нКл каждая. Частицы одновременно отпускают, и они приходят в движение. Чему будет равна скорость частиц на большом расстоянии от зарядов? Сторона ромба 3 см, а его острый угол 60°. Коэффициент в законе Кулона $k=9\cdot10^9$ м/Ф.

12. Пловец, нырнувший с открытыми глазами, рассматривает из-под воды светящийся предмет, находящийся над его головой на высоте 60 см над поверхностью воды. Какова будет видимая высота предмета (в см) над поверхностью воды? Показатель преломления воды 4/3. Углы считать малыми, т.е. $\operatorname{tg}\alpha=\sin\alpha$.

Вариант 2

1. Найдите высоту подъема сигнальной ракеты, выпущенной со скоростью 40 м/с под углом 30° к горизонту. Считать g = 10 м/с^2.

2. Тело массой 2 кг двигалось по окружности, причем в некоторой точке оно имело скорость 3 м/с. Пройдя треть окружности, тело приобрело скорость 5 м/с. Определите модуль изменения импульса тела.

3. Какую минимальную горизонтальную скорость надо сообщить шарику, чтобы он сделал полный оборот в вертикальной плоскости, если он висит на жестком невесомом стержне длиной 1,25 м? Считать g = 9,8 м/с^2.

4. Сплошное тело плавает в воде, причем над водой находится 30% его объема. Объем тела 0,2 м^3. Определите массу тела. Плотность воды 1000 кг/м^3.

5. Горячее тело, температура которого 70 °С, приведено в соприкосновение с холодным телом с температурой 20 °С. В тепловом равновесии установилась температура 30 °С. Во сколько раз теплоемкость холодного тела больше теплоемкости горячего?

6. Расстояние между двумя положительными точечными зарядами 10 см. На расстоянии 8 см от первого заряда на прямой, соединяющей заряды, напряженность поля равна нулю. Найдите отношение величины первого заряда к величине второго.

7. Зависимость координаты колеблющейся точки от времени имеет вид $x=A\sin(\pi t/12)$. Известно, что в момент времени t = 10 с смещение равно 6 мм. Определите амплитуду колебаний (в мм).

8. На плоскопараллельную стеклянную пластинку падают под углом 60° два параллельных луча света, расстояние между которыми 4,5 см. Найдите расстояние (в см) между точками, в которых эти лучи выходят из пластинки.

9. Лежащее на горизонтальной поверхности тело приходит в движение под действием горизонтальной силы, составляющей 60% его веса. Сила действует некоторое время, потом прекращает действовать. Найдите полное время движения, если известно, что полный путь, пройденный телом, составляет 24 м, а коэффициент трения равен 0,2. Считать $g = 10$ м/с^2.

10. Два баллона соединены между собой трубкой с краном. В одном баллоне находится газ массой 2 г под давлением 100 кПа, в другом – такой же газ массой 4 г под давлением 400 кПа. Какое давление (в кПа) установится в баллонах, если открыть кран? Температуры газов в баллонах одинаковы.

11. Полезная мощность батареи равна 6 Вт при двух значениях тока в цепи: 2 А и 6 А. Чему равна максимальная полезная мощность этой батареи?

12. На шарик массой 5 г нанесли заряд 2 мКл, подвесили его на нити длиной 10 м в горизонтальном магнитном поле, отклонили на угол α ($\cos\alpha = 0{,}28$) в плоскости, перпендикулярной полю, и отпустили. При прохождении грузом нижней точки натяжение нити оказалось равным 170 мН. Определите величину магнитной индукции. Считать $g = 10$ м/с^2.

Публикацию подготовили Б.Писаревский, А.Черноуцан

Санкт-Петербургский государственный технический университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-технический факультет)

1. Упростите выражение
$$\frac{2}{a-2\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}+2}+\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

2. Вычислите $3^{\log_2 5}\cdot 5^{-\log_2 3}$.

3. Число 12 составляет 45% числа n. Найдите 30% числа n.

4. Вычислите $\cos^2 120° - \sin 210°$.

5. Решите уравнение
$$2\cdot 3^{-x}-3^{|x|}=3^{x+1}.$$

6. Решите уравнение
$$\log_3(x-6)\cdot\log_x 9 = 1.$$

7. Решите уравнение
$$\sqrt{x}=\frac{2-x^2}{\sqrt{x}}.$$

8. Найдите $\operatorname{ctg}\alpha$, если известно, что $\cos\alpha < 0$ и что $\sin 2\alpha = \cos\alpha$.

9. Вычислите
$$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{5}+2\right)-\operatorname{arctg}\left(2-\sqrt{5}\right).$$

10. Решите неравенство $x + 1 > x^3 + x^2$.

11. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{1-x}}{x+2}\ge 0$.

12. Найдите область определения функции
$$y=\log_2(x+1)^2+\sqrt{2+x}.$$

13. Найдите множество значений функции
$$y=\frac{2x^2+2x+2}{2x^2+2x+1}.$$

14. Найдите уравнения осей симметрии графика функции $y = \cos 2x$.

15. Найдите такие векторы, которые с векторами $\vec{a}(-1;-2)$ и $\vec{b}(2;1)$ составляют треугольник.

16. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 + 2(a-1)x + 3a = 0$ имеет два корня, являющихся целыми числами?

17. Первый член возрастающей арифметической прогрессии $a_1 = -3$; известно, что для всех ее членов, начиная со второго, выполнены равенства $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = 4$. Найдите четвертый член прогрессии.

18. Решите уравнение $\sin x \sin 5x = 1$.

19. Окружность пересекает основание прямоугольника и касается прямых, на которых лежат три другие стороны прямоугольника. Найдите площадь прямоугольника, если известно, что длина основания равна 10, а его отрезок заключенный внутри окружности, равен 8.

20. Каким должен быть радиус основания конуса, чтобы объем конуса был наибольшим, если известно, что сумма длин радиуса и образующей конуса равна 10?

Вариант 2

(физико-механический факультет)

1. Упростите выражение
$$\frac{a-a^{-1}}{1+a^{-1}}-\frac{a-a^{-1}}{1-a^{-1}}.$$

2. Вычислите $\left(\log_{\sqrt{2}} 9\right)\left(\log_8 3\right)^{-1}$.

3. Произведение двух чисел увеличилось на 80% после того, как первый сомножитель увеличили на 50%, а второй сомножитель изменили на A%. Найдите A.

4. Упростите выражение
$$\frac{1+\cos 250°}{\sin 35°\cos 55°}.$$

5. Решите уравнение $\sqrt{x+1} = x\sqrt{2}$.

6. Найдите сумму решений уравнения $|4x-4| = x^2$.

7. Решите уравнение
$$4^{4-x}\log_2 x = 2^x\log_4 x.$$

8. Найдите натуральные n, для которых
$$\left(\text{НОД}(n,4)\right)^2 = n$$
($\text{НОД}(n,4)$) – наибольший общий делитель чисел n и 4).

9. Найдите наименьшее целое значение n, при котором 9π является периодом функции
$$y=\cos x\cos\frac{3x}{n^2}.$$

10. Найдите $\cos 3\alpha$, если известно, что
$$2\cos 2\alpha = -1 \text{ и } |\alpha| \le \frac{\pi}{2}.$$

11. Решите уравнение
$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}x+\sqrt{3}.$$

12. Решите неравенство $\dfrac{1}{2-|x|} > 1$.

13. Сумма третьего и пятого членов возрастающей геометрической прогрессии равна 8, а разность между пятым и первым ее членами равна 4. Найдите знаменатель прогрессии.

14. Решите неравенство
$$\frac{x^3+3x^2}{1+x}\le 0.$$

15. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2+y=-2x,\\ \sqrt{y}=x+2.\end{cases}$$

16. Найдите область определения функции
$$y=\arcsin\frac{2x}{x-1}.$$

17. Найдите множество значений функции
$$y=4^x\cdot 2^{1-x^2}.$$

18. α, β и γ – углы треугольника. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = 2$, $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{1}{2}$. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$.

19. Радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, в 3 раза меньше высоты. Найдите объем пирамиды, если известно, что длина высоты равна $\sqrt{3}$.

20. При каких значениях параметра p функция $y = 2\sin x + p\sin 2x$ возрастает на промежутке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$?

Публикацию подготовили С.Преображенский, Ю.Хватов

XL Международная математическая олимпиада

40th IMO

Romania, July 10^{th}-22^{nd}, 1999

Юбилейная, сороковая международная математическая олимпиада школьников (ММО) в день уважения к стране, впервые принимавшей ММО в 1959 году, была проведена с 10 по 22 июля в Бухаресте – столице Румынии. Олимпиада собрала рекордное количество участников: 450 школьников из 82 стран мира.

Олимпиада оказалась необычно трудным испытанием для ее участников, установив рекорды сложности как в целом для всех школьников, так и для сильнейших команд.

Тем приятнее прекрасное выступление на ММО команды России, завоевавшей 4 золотые и 2 серебряные медали и впервые с 1991 года сумевшей в неофициальном командном зачете стать победителем, поделив первое место с командой Китая.

По итогам успешных выступлений на Всероссийских олимпиадах в команду нашей страны вошли десятиклассники Владимир Дремов (золотой медалист предыдущей ММО) – школа 24 Волгодонска, Алексей Поярков – лицей 2 Рыбинска, Юрий Лифшиц – ФМЛ 239 Санкт-Петербурга и одиннадцатиклассники Федор Петров – ФМЛ 239 Санкт-Петербурга, Антон Евсеев – Московская государственная Пятьдесят седьмая школа, Алексей Лебедев – Семеновская школа Уренского района Нижегородской области (в 98/99 учебном году обучавшийся в лицее 40 Нижнего Новгорода). Запасными участниками были десятиклассники Максим Корвонен – лицей 2 Рыбинска и восьмиклассник Андрей Халявин – ФМЛ Кирова.

Олимпиада проходила по традиционной схеме: в 2 дня, в каждый из которых участникам предоставлялось по 4,5 часа на решение 3 задач. Полное решение каждой задачи оценивалось в 7 баллов.

По итогам соревнований было вручено 38 золотых, 70 серебряных и 148 бронзовых медалей.

Наши школьники на олимпиаде показали следующие результаты:

	1	2	3	4	5	6	Σ	Медаль
В.Дремов	7	7	7	7	7	1	36	золотая
А.Поярков	7	7	6	6	7	3	36	золотая
Ф.Петров	7	7	3	7	7	5	36	золотая
Ю.Лифшиц	7	7	3	7	7	0	31	золотая
А.Евсеев	7	2	2	7	3	1	22	серебряная
А.Лебедев	7	7	0	0	6	1	21	серебряная

В неофициальном командном зачете команды расположились так:

		Очки	Зол.	Сер.	Бронз.
1—2.	Россия	182	4	2	0
1—2.	Китай	182	4	2	0
3.	Вьетнам	177	3	3	0
4.	Румыния	173	3	3	0
5.	Болгария	170	3	3	0
6.	Белоруссия	167	3	3	0
7.	Ю.Корея	164	3	3	0
8.	Иран	159	2	4	0
9.	Тайвань	153	1	5	0
10.	США	150	2	3	0
11.	Венгрия	147	1	4	1
12.	Украина	136	2	2	1
13.	Япония	135	2	4	0
14.	Югославия	130	1	2	3
15.	Австралия	116	1	1	3
16.	Турция	109	1	1	2
17.	ФРГ	108	0	2	4
18.	Индия	107	0	3	3
19.	Польша	104	1	0	5
20.	Великобритания	100	0	3	2

Сложность заданий олимпиады подтвердили итоговые результаты: ни одному из участников не удалось набрать больше 39 баллов.

Торжественное награждение победителей олимпиады проходило в Парламентском дворце Румынии. Медали 10 лучшим участникам олимпиады, в том числе В.Дремову, А.Пояркову, Ф.Петрову, вручал президент Румынии Э.Константинэску.

Задачи

1. Найдите все конечные множества S точек плоскости, содержашие не менее трех точек, удовлетворяющие следующему условию: для любых двух различных точек A и B из S серединный перпендикуляр к отрезку AB является осью симметрии множества S.

(Эстония)

2. Пусть n – данное целое число, $n \geq 2$.

а) Определите наименьшую константу C такую, что неравенство

$$\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j\left(x_i^2+x_j^2\right) \le C\left(\sum_{1\le i\le n} x_i\right)^4$$

выполняется для всех действительных чисел $x_1, \ldots, x_n \geq 0$.

б) Для этой константы C определите, когда выполняется равенство.

(Польша)

3. См. задачу М1716 «Задачника «Кванта».

4. Найдите все пары (n, p) натуральных чисел такие, что p – простое, $n \le 2p$ и $(p-1)^n + 1$ делится на n^{p-1}.

(Тайвань)

5. См. задачу М1717 «Задачника «Кванта».

6. См. задачу М1718 «Задачника «Кванта».

Публикацию подготовили
Н.Агаханов, Д.Терешин

XXX Международная олимпиада школьников по физике

В июле прошлого года в городе Падуе (Италия) прошла очередная международная физическая олимпиада. В ней приняли участие школьники 62 государств.

В команду России входили:

Кравцов Константин – г.Москва, лицей "Вторая школа", учителя Д.А.Александров, А.Р.Зильберман;

Понов Евгений – г.Челябинск, физико-математический лицей 31, учитель И.А.Иоголевич;

Полянский Юрий – г.Радужный Владимирской обл., средняя школа 2, учитель С.А.Муконов;

Сырицын Сергей – г.Саратов, физико-технический лицей 1, учитель Л.В.Правдина;

Чудновский Александр – г.Челябинск, лингво-гуманиторная гимназия 96, учитель Б.П.Вирачев.

По итогам олимпиады команда России заняла (в неофициальном командном зачете) первое место, завоевав 4 золотых медали (К.Кравцов, Е.Понов, А.Чудновский, С.Сырицын) и 1 серебряную медаль (Ю.Полянский) и набрав 231,3 балла. Далее шли команды Ирана (227,4 балла), Китая (214,1 балла), США (214,0 балла), Украины (210,5 балла).

Ниже приводятся условия задач теоретического тура XXX Международной физической олимпиады. Задачи подготовлены Научным комитетом олимпиады с участием профессоров университетов Болоньи, Неаполя, Турина и Триеста.

Теоретический тур

Задача 1. Поглощение излучения в газе

Вертикально расположенный цилиндрический сосуд содержит под поршнем газ в состоянии термодинамического равновесия. Поршень представляет собой стеклянную пластинку и может свободно перемещаться. Будем предполагать, что утечки газа не происходит и что трение между стеклянным поршнем и стенками цилиндра достаточное, чтобы подавлять колебания, но не вносит заметных потерь энергии. Первоначальная температура газа равна температуре окружающей среды. С хорошим приближением газ можно считать идеальным. Будем также считать, что стенки цилиндра (включая поршень и дно) имеют очень низкую теплопроводность и теплоемкость, поэтому теплообмен между газом и окружающей средой происходит очень медленно и им можно пренебречь при решении данной задачи.

Через стеклянную пластинку в цилиндр направляется пучок света от лазера постоянной мощности. Это излучение проходит через воздух и стекло без поглощения, но полностью поглощается газом в сосуде. В результате поглощения молекулы газа переходят в возбужденные состояния, из которых они быстро возвращаются в основное состояние путем ступенчатого испускания инфракрасной радиации. Инфракрасное излучение в дальнейшем поглощается другими молекулами и отражается стенками сосуда, включая стеклянный поршень. Поэтому энергия лазерного излучения, поглощенная газом, в течение очень короткого интервала времени трансформируется в энергию теплового движения молекул.

В этом процессе стеклянный поршень смещается вверх. После определенного времени облучения лазер выключается и измеряется смещение поршня.

1) Используя данные, приведенные ниже, и, если необходимо, данные о физических константах, определите температуру и давление газа после облучения. (2 балла)

2) Вычислите механическую работу, совершенную газом в результате поглощения излучения. (1 б.)

3) Подсчитайте энергию излучения, поглощенную при облучении. (2 б.)

4) Рассчитайте мощность излучения лазера, поглощенную газом, и соответствующее число поглощенных фотонов (и, следовательно, число элементарных процессов поглощения лазерных фотонов) в единицу времени. (1,5 б.)

5) Подсчитайте долю оптической энергии, преобразованную в механическую потенциальную энергию стеклянного поршня. (1 б.)

Затем цилиндр медленно поворачивают на 90° так, что его ось принимает горизонтальное положение. Теплообменом между газом и стенками сосуда по-прежнему можно пренебречь.

6) Будут ли изменяться давление и/или температура газа в результате такого поворота? Определите новые значения температуры и давления. (2,5 б.)

Числовые данные: давление окружающего воздуха p_0 = 101,3 кПа, комнатная температура T_0 = 20,0 °С, внутренний диаметр цилиндра $2r$ = = 100 мм, масса стеклянной пластины m = 800 г, количество газа в сосуде ν = 0,100 моль, молярная теплоемкость при постоянном объеме C_V = = 20,8 Дж/(моль · К), длина волны излучения лазера λ = 514 нм, время облучения Δt = 10,0 с, смещение стеклянного поршня после облучения Δs = = 30,0 мм.

Задача 2. Магнитное поле V-образной проволоки

К первым успехам теории магнитных явлений Ампера относится вычисление индукции B магнитного поля, создаваемого проводником с электрическим током, и сравнение с расчетами Био и Савара, проведенными ранее.

Интересным частным случаем является очень длинная проволока с постоянным током i, изогнутая в виде буквы V с половинным углом изгиба α (рис.1). Согласно вычислениям Ампера значение магнитной индукции B в

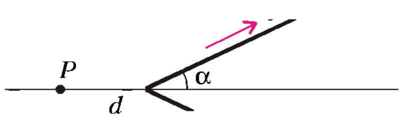


Рис. 1

точке P на оси V-образной проволоки на расстоянии d от вершины пропорционально $\operatorname{tg}(\alpha/2)$, где α выражается в радианах. Работа Ампера позже вошла в теорию электромагнетизма Максвелла и является общепризнанной.

1) Используя наши современные знания по электромагнетизму, найдите направление магнитной индукции в точке P. (1 балл)

2) Зная, что магнитная индукция пропорциональна $\operatorname{tg}(\alpha/2)$, т.е. $|B(P)| = k\operatorname{tg}(\alpha/2)$, вычислите коэффициент пропорциональности k. (1,5 б.)

3) Вычислите магнитную индукцию в точке P^*, симметричной точке P относительно вершины, т.е. на оси проволоки и на том же расстоянии d от вершины, но внутри V. (2 б.)

4) Чтобы измерить магнитную индукцию, мы помещаем в точку P маленькую магнитную стрелку, имеющую момент инерции I и магнитный дипольный момент μ; стрелка колеблется в той же плоскости, в которой лежит вектор индукции $\vec{B}$. Вычислите период этих малых колебаний стрелки как функцию B. (2,5 б.)

Для тех же условий Био и Савар предполагали, что значение магнитной индукции B в точке P определяется выражением (мы здесь используем его современную запись) $B(P) = \frac{i\mu_0\alpha}{\pi^2 d}$, где μ_0 – магнитная постоянная. Они попытались с помощью эксперимента проверить справедливость соответствующих предположений (Ампера и Био–Савара), измеряя период колебаний магнитной стрелки как функцию угла α V-образной проволоки. Для некоторых значений угла α, однако, разница столь мала, что ее трудно измерить.

5) Чтобы экспериментально установить различие между двумя предсказанными выражениями для периода T колебаний магнитной стрелки в точке P, необходимо, чтобы различие в их значениях составляло не менее 10%, а именно, должно быть $T_1 > 1{,}10T_2$ (где T_1 соответствует предположению Ампера, T_2 – предположению Био и Савара). Установите приближенно, какой интервал углов α мы должны выбрать, чтобы обнаружить различие между этими двумя предсказаниями. (3 б.)

Примечание. В зависимости от способа выбранного вами решения задачи возможно вам будет полезной формула $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Задача 3. Космический зонд к Юпитеру

В этой задаче рассмотрен метод, часто применяемый для ускорения космических зондов в нужном направлении. Космический зонд, пролетая вблизи планеты, может значительно увеличить свою скорость и существенно изменить направление полета за счет незначительной части энергии орбитального движения планеты.

Юпитер вращается вокруг Солнца по эллиптической траектории, которую можно аппроксимировать окружностью со средним радиусом R.

1) Найдите скорость движения планеты V по орбите вокруг Солнца. (1,5 балла)

2) Пусть зонд находится между Солнцем и Юпитером на отрезке, соединяющим эти тела. Найдите расстояние от Юпитера, на котором силы гравитационного взаимодействия зонда с Солнцем и Юпитером равны. (1 б.)

Космический зонд массой m = 825 кг пролетает вблизи Юпитера. Для упрощения предположим, что траектория космического зонда полностью лежит в плоскости орбиты Юпитера, т.е. мы можем пренебречь случаями, когда космический зонд покидает плоскость орбиты Юпитера. Мы будем рассматривать ту область пространства, в которой притяжение Юпитера значительно превосходит все остальные гравитационные силы.

В системе отсчета, связанной с центром масс Солнца, начальная скорость космического зонда равна v_0 = = $1{,}00 \cdot 10^4$ м/с и направлена в положительном направлении оси Y, в то время как скорость Юпитера направлена в отрицательном направлении оси X (рис.2); под «начальной скоростью» мы понимаем скорость космического зонда в межпланетном пространстве достаточно далеко от Юпитера, но уже в области, где притяжение Солнца пренебрежимо мало. Предположим, что взаимодействие происходит за достаточно короткий промежуток времени, так что можно пренебречь изменением направления скорости движения Юпитера по орбите. Также предположим, что зонд проходит позади Юпитера, т.е. его x-координата больше x-координаты Юпитера в тот момент, когда их y-координаты равны.

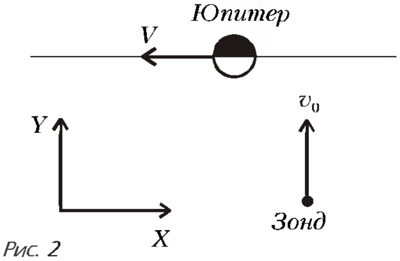


Рис. 2

3) Найдите направление скорости движения космического зонда (угол φ между вектором скорости зонда и осью X) и модуль его скорости v' в системе отсчета, связанной с Юпитером, когда зонд находится далеко от Юпитера. (2 б.)

4) Найдите значение E полной механической энергии зонда в системе отсчета, связанной с Юпитером, полагая, как обычно, что значение потенциальной энергии на очень больших расстояниях равно нулю и что скорость зонда можно считать постоянной из-за малости всех гравитационных взаимодействий. (1 б.)

Траекторией космического зонда в системе отсчета, связанной с Юпитером, является гипербола, уравнение которой в полярных координатах имеет вид

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{v'^2b^2}\left(1 + \sqrt{\frac{2Ev'^2b^2}{G^2M^2m}}\cos\theta\right), \quad (*)$$

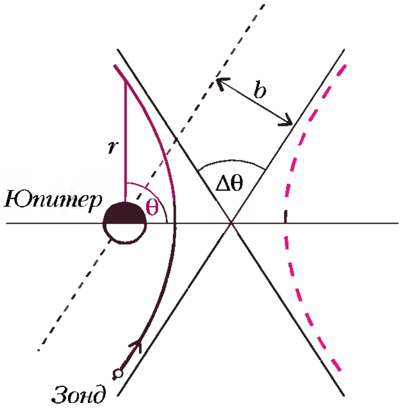


Рис. 3

где b – расстояние между асимптотой и центром Юпитера (так называемый прицельный параметр), E – значение полной механической энергии зонда в системе отсчета, связанной с Юпитером, G – гравитационная постоянная, M – масса Юпитера, r и θ – полярные координаты (расстояние до центра Юпитера и полярный угол).

На рисунке 3 показаны две ветви гиперболы, описываемой уравнением (∗), ее асимптоты и полярные координаты. Отметим, что уравнение (∗) описывает гиперболу, фокус которой находится в центре притяжения, т.е. в центре Юпитера. Траектория космического зонда представляет собой ветвь притяжения и изображена на рисунке сплошной линией.

5) Используя уравнение (∗), описывающее траекторию зонда, найдите полное угловое отклонение $\Delta\theta$ траектории зонда в системе отсчета, связанной с Юпитером (как показано на рисунке 3), и выразите его как функцию начальной скорости v' и прицельного параметра b. (2 б.)

6) Полагая, что зонд не может пройти мимо Юпитера на расстоянии от его центра меньше чем три его радиуса, найдите минимально возможное значение прицельного параметра и максимально возможное значение углового отклонения $\Delta\theta$. (1 б.)

7) Получите выражение для конечной скорости зонда v'' в системе отсчета, связанной с Солнцем, как функцию только скорости Юпитера V, начальной скорости зонда v_0 и углового отклонения $\Delta\theta$. (1 б.)

8) Используйте предыдущий результат для того, чтобы найти численное значение конечной скорости зонда v'' в системе отсчета, связанной с Солнцем, при максимально возможном значении углового отклонения. (0,5 б.)

Примечание. Вам могут понадобиться следующие тригонометрические формулы:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Публикацию подготовили
С.Козел, В.Коровин

VI Российская олимпиада школьников по астрономии и космической физике

Заключительный этап очередной российской олимпиады школьников по астрономии и космической физике прошел с 24 по 30 марта 1999 года в городе Троицке Московской области, на базе Фонда «Байтик» и Центра новых педагогических технологий. По традиции, научное и идейное руководство олимпиодой осуществляло Астрономическое общество.

В олимпиаде приняли участие 112 школьников из 28 регионов России и Украины. Как и в прошлые годы, все участники были разделены на три возрастные группы: 8—9, 10 и 11 классы (правда, задания для учащихся 8 и 9 клоссов немного различались). Каждый регион мог направить на олимпиаду четырех учащихся 8—9 классов, двух десятиклассников и двух одиннадцатиклассников, а также (дополнительно) победителей Российской и Международной астрономических олимпиад 1998 года и российских победителей заочной олимпиады журнала «Звездочет». Напомним, что городо и районы России, проводящие у себя астрономические олимпиады, по согласованию с Координационным советом олимпиады, могут представлять свою область (край, республику) но заключительном этапе, если эта область (край, республика) олимпиады не проводит.

25 марта в Государственном астрономическом институте им. П.К.Штернберга состоялось открытие олимпиады. С приветствиями и лекциями для школьников выступили директор института член-корреспондент РАН А.М.Черепащук, профессор А.В.Зосов и другие ведущие ученые институто. 26 и 28 морта в Троицке прошли теоретический и творческо-практический туры. На теоретическом туре школьникам было предложено 6 зодач, а в задание творческо-практического тура входила одно творческая задачо и одна практическоя. Продолжительность каждого тура для участников составляла 4 часа. Жюри – в этот раз под председательством профессоро В.М.Чаругина, – как обычно, работало существенно дольше.

Традиционно нестандартные формулировки условий творческих зодач сказались и на стиле изложения решений. Нопример: «при попадании в телескоп звезда увеличивается в размерах», «окуляр дает в глаз астроному больше света». Оказыва-

Теоретический тур

8 класс

1. Вам хорошо известно, что такое земной полярный круг и как он связан с сезонным ходом Солнца: только за полярным кругом могут быть дни с невосходящим Солнцем. «Полярный круг», аналогичный земному, можно ввести и для Луны. Найдите, на каких селенографических (по аналогии с географическими) широтах центр Солнца может быть невосходящим для наблюдателя на Луне, если наклон экваториальной плоскости Луны к плоскости эклиптики составляет i = 1,5°. С каким периодом повторяются «полярные ночи»? Считать, что Луна всегда находится в плоскости эклиптики.

2. Неподвижным фотоаппаратом производится фотографирование околополярной области неба. Почему дуги, оставляемые звездами одной и той же видимой звездной величины, выглядят тем слабее, чем дальше от полюса мира эти звезды находятся?

3. Опишите вид ночного и дневного

ется, что наиболее достоверно можно вычислить массу тела путем измерения энергии, выделяющейся при полной его аннигиляции, или что наша Вселенная произошла от одной «газо-пылевой тучи».

Каждая задача первого тура оценивалась из 8 баллов, второго – из 12, но за существенные добавления по каждой задаче можно было получить еще по 2 балла (на первом туре) или по 3 (на втором), т.е. увеличить оценку до 10 и 15 баллов соответственно. После второго тура участники олимпиады могли ознакомиться с оценкой своих работ первого тура, побеседовать с членами жюри, проапеллировать.

На закрытии олимпиады призерам были вручены дипломы, ценные подарки и главный приз олимпиады для учащихся 8—10 классов – приглашение на астрономические школы и олимпиады: в Крым, где пройдет IV Международная астрономическая олимпиада, и в Специальную астрофизическую обсерваторию РАН, где состоится очередная Осенняя астрономическая школа.

В рамках олимпиады прошла традиционная конференция учителей астрономии. Были, в частности, обсуждены итоги I съезда учителей астрономии Российской Федерации и стран Содружества.

Просим все ваши вопросы, замечания и предложения (по комплекту задач прошедшей олимпиады и другим вопросам, а также интересные задачи, которые вы хотели бы видеть в будущих олимпиадах) сообщить автору по электронной почте: gavrilov@issp.ac.ru или по почтовому адресу: 142432 п.Черноголовка Московской обл., Институтский пр., 15, ИФТТ РАН.

Ниже приводятся условия задач заключительного этапа VI Российской олимпиады школьников по астрономии и космической физике и список призеров олимпиады.

неба (звезды, Солнце, планеты, другие небесные объекты, их яркость и т.п.) для наблюдателя, находящегося на поверхности Марса.

4. Днем звезды не видны, поскольку этому мешает яркий свет неба. Почему же тогда яркие звезды можно днем наблюдать в телескоп? В телескоп с каким увеличением они будут видны лучше?

5. Некоторая звезда находилась сегодня в верхней кульминации в 5 часов 41 минуту утра по московскому времени. Когда (в ближайшее время) эта звезда будет находиться в нижней кульминации?

6. Почему при визуальном наблюдении планет в маленький телескоп часто видно больше деталей, чем в большой?

9 класс

1—4. См. задачи 1 – 4 для 8 класса.

5. Крабовидная туманность расширяется со скоростью около 1000 км/с. Через какое время ее размер возрастет на 10%, если расстояние до нее равно 6500 св.лет, а угловой диаметр, видимый с Земли, составляет примерно 5 угловых минут?

6. Предложите принцип действия прибора (приспособления), с помощью которого космонавты внутри космической станции могли бы измерять массы тел.

10 класс

1. В Магадане (широта Магадана 60°) во время полнолуния Луна прошла верхнюю кульминацию на высоте 53,5°. Какого числа это произошло, если Луна находилась в одном из узлов своей орбиты?

2. Проводя детальные спектроскопические исследования одной слабой красной звезды, астрофизик с удивлением понял, что ее лучевая скорость невелика, а спектральный класс звезды A0. По какой причине это могло произойти? Где может находиться эта звезда?

3. Сегодня, 26 марта, в 0ч Всемирного времени звездное время в Гринвиче было S_0 = 12 ч 12 мин 00 с. Чему равно звездное время в Троицке в тот момент, когда вы решаете эту задачу, скажем ровно в $T = 10^{ч}\ 00^{м}$? Долгота Троицка $\lambda = 2^{ч}\ 29^{м}\ 15$ с.

4. Планеты в своем видимом движении по небу проходят так называемые точки стояния, где они меняют направления своего движения вдоль эклиптики: с прямого на обратное или наоборот. Возьмем, к примеру, Меркурий. В какой связи находятся моменты его стояния с моментами его наибольших восточной и западной элонгаций (угловых удалений от Солнца)?

Выберите правильный ответ и обоснуйте его (обоснование желательно сопроводить рисунком):

1) Совпадают с ними.

2) Непосредственно предшествуют им.

3) Происходят непосредственно за ними.

4) Происходят после восточной и перед западной.

5) Происходят после западной и перед восточной.

6) Происходят дважды за синодический период планеты независимо от максимальных элонгаций.

7) Происходят во время соединений (верхнего и нижнего).

8) Для Меркурия эти рассуждения не имеют смысла, поскольку движение с прямого на попятное меняют только внешние планеты.

5. Крабовидная туманность расширяется со скоростью около 1000 км/с. Через какое время ее размер возрастет на 10%, если расстояние до нее равно 2 кпк, а угловой диаметр, видимый с Земли, составляет примерно 5 угловых минут?

6. Можно ли увидеть Луну с поверхности Марса невооруженным глазом? Видимая с Земли звездная величина Луны в полнолуние равна $-12{,}8^m$, среднее расстояние от Земли до Луны 384 тыс. км, от Солнца до Марса 1,52 а.е. Ответ подтвердите расчетами.

11 класс

1. На диаграмме Герцшпрунга–Рессела полоса главной последовательности имеет довольно ощутимую ширину. Одна из причин этого – наличие двойных звезд, не разрешаемых на отдельные компоненты. Какой разброс по светимости (в звездных величинах) для звезд одного и того же спектрального класса может быть связан с этим эффектом?

2. См. задачу 2 для 10 класса.

3. Вокруг некоторой планеты по круговой орбите радиусом R_0 = = 10000 км обращается космический корабль с орбитальной скоростью V_0 = = 12 км/с. В некоторый момент скорость корабля увеличили на ΔV = = 3 км/с без изменения ее направления.

а) Чему равны после этого периастр и апоастр орбиты корабля?

б) Чему равна скорость корабля в апоастре?

в) Найдите массу планеты.

4. См. задачу 4 для 10 класса.

5. Наблюдения радиогалактики, удаленной от нас на миллиард световых лет, показали, что из ядра галактики произошел выброс компактного радиоисточника, который за один год удалился от ядра на расстояние около 10^{-3} угловой секунды. Если считать, что радиоисточник движется прямолинейно со скоростью, близкой к световой (c = 300000 км/с), то под каким углом к лучу зрения произошел выброс?

6. Можно ли увидеть Луну с поверхности Марса невооруженным глазом? Видимая с Земли звездная величина Луны в полнолуние равна $-12{,}8^m$, среднее расстояние от Земли до Луны 384 тыс. км, от Солнца до Марса 1,52 а.е. Ответ подтвердите расчетами; в частности, оцените видимую с Марса звездную величину Луны в случае, когда Земля для марсиан находится в наибольшей восточной элонгации.

Творческо-практический тур

8–9 классы

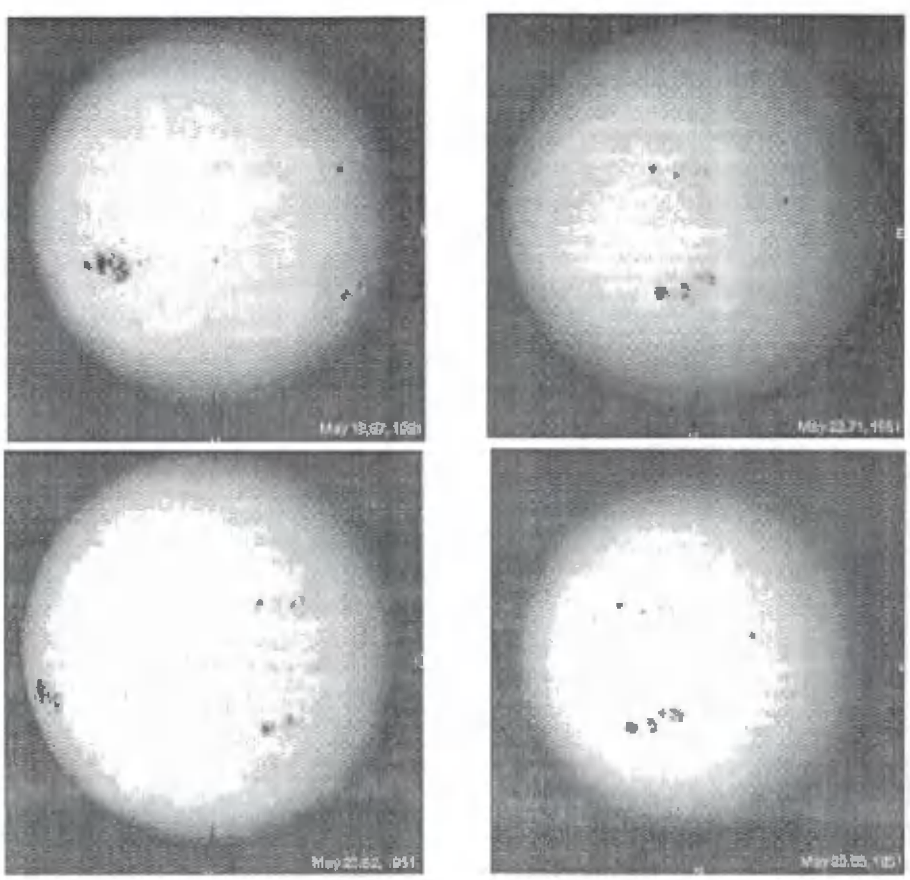
7. Для удобства счета времени земная цивилизация придумала календарь: дни объединяются в недели, недели – в месяцы, месяцы – в годы. Годы при этом бывают високосными и невисокосными, причем в их чередовании установлен четкий порядок. Годы объединяются в двенадцатилетние и шестидесятилетние циклы, и т.д. Все это человечество придумало на основе многолетних наблюдений изменения погоды и движения небесных объектов. Эти же наблюдения дали и магические для землян числа (например, 7 или 12).

Разработайте такой же календарь для жителей Марса. Считайте, что мыслят они так же, как земляне (та же логика). В таблице приведены данные о движении небесных тел, видимых с Марса, некоторые из которых могут вам понадобиться. Естественно, можно использовать и другие данные, если они вам известны. Какие числа могут почитать марсиане?

Планета или спутник	Период обращения вокруг центрального тела (в сутках)	Период обращения вокруг собственной оси (в сутках)
Меркурий	87,969	
Венера	224,701	
Земля	365,256	0,99726
Марс	686,980	1,02596
Юпитер	4332,588	
Сатурн	10759,201	
Луна	27,320	
Фобос	0,319	
Деймос	1,263	

Наклонение плоскости экватора Марса к плоскости его орбиты составляет 25° 12'

8. Серия фотографий фотосферы Солнца (см. рисунок) получена в период, когда Земля пересекала плоскость солнечного экватора. Несмотря на низкое качество копий, на солнечном лимбе различимы солнечные пятна, точки севера и востока гелиографических координат. В нижнем правом углу каждого из снимков приведены даты и моменты (доли суток) наблюдений Солнца. Определите синодический период вращения Солнца.



10–11 классы

7. Несмотря на неудачный прошлогодний эксперимент по деноминации мер и весов, а также на настоятельные просьбы участников V Российской астрономической олимпиады больше так не экспериментировать, правительство галактики «Млечный Путь» продолжило в прошлом году изменять параметры в своей галактике. Центральный фотонный банк галактики не рассчитал своих способностей и произвел эмиссию не обеспеченных достаточным количеством энергии фотонов. Фотоны выпускались и того же цвета, что и раньше, и той же массы, но вот количество их в пространстве резко возросло. В результате такой неконтролируемой эмиссии произошла так называемая «фотонная инфляция», и к концу года курс светового года по отношению к парсеку сильно упал: 1 парсек составлял уже не 3,26 световых лет, как раньше, а 14 световых лет. Считая, что парсек – величина стабильная и не подверженная инфляции (ведь она определяется только из геометрических соображений), опишите, что произошло в галактике в результате такой «фотонной инфляции». Какие физические константы изменились и в какую сторону? Что теперь могут в большей (а также в меньшей) степени узнавать о Вселенной астрономы нашей галактики (в настоящее время, в близком и далеком будущем)? Как будет выглядеть галактика «Млечный Путь» для астрономов других галактик? И что бы вы посоветовали предпринять правительству галактики «Млечный Путь», чтобы стабилизировать ситуацию и вернуть знакомое с детства соотношение 3,26 св. лет = 1 пк?

8. Условие: см. задачу 8 для 8–9 классов. Вопрос: определите синодический и звездный периоды вращения Солнца.

ПРИЗЕРЫ ОЛИМПИАДЫ

Дипломы I степени получили
Аболмасов П. – Москва, 10 кл.,
Зиновьев Д. – Челябинск, 9 кл.,
Самарин П. – Екатеринбург, 10 кл.,
Соболевский В. – Краснодар, 10 кл.,
Цветков Е. – Великий Новгород, 9 кл.,
Шапиро А. – Санкт-Петербург, 11 кл.

Дипломы II степени получили
Алексеев Г. – Нижнекамск, 11 кл.,
Ангер В. – с.Ижевское Рязанской обл., 10 кл.,
Бадьин Д. – п.Лесной Свердловской обл., 9 кл.,
Бакай Д. – Санкт-Петербург, 10 кл.,
Барташевич А. – Нижний Новгород, 11 кл.,
Башаков А. – Тихвин, 9 кл.,
Верин А. – Нижний Новгород, 9 кл.,
Войцик П. – Москва, 9 кл.,
Воронов А. – Саров, 10 кл.,
Гедерцев А. – Ухта, 9 кл.,
Датченко А. – Москва, 9 кл.,
Дегтярев В. – Оренбург, 10 кл.,
Иванов А. – Челябинск, 9 кл.,
Игнатович А. – Златоуст, 7 кл.,
Клочков Д. – Волгодонск, 11 кл.,
Константинов С. – Челябинск, 8 кл.,
Курилова Т. – Москва, 10 кл.,
Мальцев А. – Сочи, 11 кл.,
Мананников А. – Раменское Московской обл., 9 кл.,
Нагаев М. – Белгород, 8 кл.,
Никитин М. – Ухта, 10 кл.,
Пономарев Я. – Нальчик, 10 кл.,
Постнов А. – Оренбург, 11 кл.,
Румянцев Р. – Санкт-Петербург, 9 кл.,
Седунов Е. – Белгород, 11 кл.,
Соколовский К. – Москва, 8 кл.,
Филиппов Е. – Санкт-Петербург, 11 кл.,
Хайрулин Р. – Нижний Новгород, 10 кл.

Дипломы III степени получили
Бабкин Ю. – Москва, 7 кл.,
Бирюков А. – Нижний Новгород, 11 кл.,
Бобров С. – Ростов-на-Дону, 10 кл.,
Волков М. – Волгоград, 11 кл.,
Гоков Е. – Белгород, 11 кл.,
Гребеньков А. – Курск, 10 кл.,
Езерский С. – Ухта, 10 кл.,
Жабин В. – Рязань, 10 кл.,
Золотухин И. – Москва, 10 кл.,
Карев Ю. – Ухта, 11 кл.,
Кракосевич О. – Ульяновск, 11 кл.,
Крохин А. – Брянск, 11 кл.,
Кутькин А. – Сыктывкар, 9 кл.,
Лабин Д. – п. Оболенск Московской обл., 10 кл.,
Лемешев В. – Тихвин, 11 кл.,
Лисин Е. – Бугульма, 10 кл.,
Лихачев Р. – Сыктывкар, 9 кл.,
Макеев М. – Славянск-на-Кубани, 9 кл.,
Матяж И. – Казань, 11 кл.,
Плотников Д. – Оренбург, 9 кл.,
Подорванюк К. – Москва, 11 кл.,
Соловьев Д. – Жуковский, 9 кл.

Публикацию подготовил
М.Гаврилов

Избранные задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады

Первый (районный) тур

1. В трамвае ехало 60 человек: контролеры, кондукторы, лжекондукторы (граждане, выдававшие себя за кондукторов), лжеконтролеры (граждане, выдававшие себя за контролеров) и, возможно, обычные пассажиры. Общее количество лжеконтролеров и лжекондукторов в 4 раза меньше числа настоящих кондукторов и контролеров. Общее число контролеров и лжеконтролеров в 7 раз больше общего числа кондукторов и лжекондукторов. Сколько в трамвае обычных пассажиров? (9) [1]

К.Кохась

2. Клетки доски 11×11 вначале покрашены в белый цвет. Разрешено выбрать любые четыре белые клетки, расположенные в вершинах квадрата со сторонами, параллельными сторонам доски, и перекрасить в черный цвет две из них, расположенные по диагонали. Какое наибольшее число черных клеток можно получить таким образом? (11)

Е.Сопкина

Второй (городской) тур

3. Назовем натуральное число *куском*, если оно получается выписыванием подряд чисел от 1 до какого-нибудь натурального $n > 1$ (например, 123 или 123456789101112). Докажите, что произведение двух кусков – не кусок. (6)

А.Голованов

4. а) В Циссильвании 1999 жителей. Трое из них – вампиры. Заезжий писатель попросил каждого жителя назвать двух человек. Каждый вампир назвал двух других вампиров, а остальные могли назвать кого угодно. Докажите, что писатель может выбрать себе в проводники не вампира. (6)

б) В Конторе работают 200 психически здоровых и 1999 сумасшедших сотрудников. Однажды каждый сотрудник написал докладную записку, в которой перечислил 1999 своих коллег, по его мнению, сумасшедших. Каждый психически здоровый сотрудник верно указал всех сумасшедших, а каждый сумасшедший мог указать на кого угодно, кроме себя. Докажите, что на основании этих данных можно выявить по крайней мере 199 сумасшедших. (7)

А. Голованов, Ю. Лифшиц, Р. Семизаров

Ю.Лифшиц

5. Можно ли числа от 1 до 1999 разбить на несколько групп таким образом, чтобы в каждой группе сумма двух наибольших чисел в 9 раз превосходила сумму оставшихся? (8)

К.Кохась

6. Докажите, что не существует натуральных чисел x и y и простого числа p таких, что $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{p}$. (9)

А.Храбров

[1] *В скобках после условия задачи указан класс, в котором она предлагалась.*

7. На острове Новая Вавилония используются 45 языков, причем каждый житель знает по крайней мере пять из них. Любые два жителя могут вести между собой беседу, возможно, при посредничестве других островитян. Докажите, что любые два островитянина могут поговорить друг с другом, пользуясь услугами не более чем 15 переводчиков. (9)

С.Берлов

8. В неравнобедренном треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1, а также отмечены середины K и L сторон AB и BC соответственно. Точка P – основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на прямую CC_1, а точка Q – основание перпендикуляра, опущенного из вершины С на прямую AA_1. Докажите, что прямые KP и LQ пересекаются на стороне AC. (9)

Ф.Бахарев

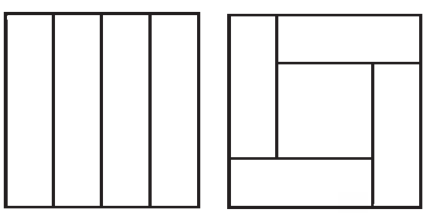
9. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что

$$a^2 + b^2 + ab = c^2 + d^2 + cd .$$

Докажите, что число $a + b + c + d$ – составное. (9)

С.Иванов

10. Квадрат $ABCD$ разбит на прямоугольники с одинаковыми периметрами, стороны которых параллельны сторонам квадрата. Диагональ AC пересекает все прямоугольники. Докажите, что диагональ BD тоже пересекает все прямоугольники. (10)



Замечание. На рисунке показаны примеры разбиения квадрата на прямоугольники равного периметра.

С.Берлов

11. В последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с третьего, равно либо сумме, либо модулю разности двух предыдущих. На доске выписаны первые 1999 членов этой последовательности. Докажите, что можно продолжить ее с соблюдением указанного свойства так, чтобы в ней снова встретились подряд в том же порядке эти 1999 чисел. (11)

Д.Ростовский

12. Диагонали шестиугольного сечения куба пересекаются в одной точке. Докажите, что сечение проходит через центр куба. (11)

Р.Исмаилов

13. Вдоль прямого шоссе расставлены светофоры. На каждом минуту горит красный свет, минуту – зеленый (не обязательно синхронно). По шоссе со скоростью 60 км/ч едут в одном направлении две машины. На красный свет машина мгновенно останавливается, на зеленый – мгновенно возобновляет движение с прежней скоростью. Докажите, что если в начальный момент расстояние между машинами больше 2 км, то они никогда не встретятся. (11)

С.Иванов

14. На клетках бесконечной доски стоят несколько шашек. Разрешается переместить любую шашку на клетку, симметричную ей относительно какой-нибудь другой шашки; допускается наличие нескольких шашек на одной клетке. В позициях A и B все шашки стоят на разных клетках, расположенных не на одной прямой, и из A можно получить B указанными операциями. Докажите, что это можно сделать так, чтобы и в промежуточных позициях все шашки стояли на разных клетках. (11)

К.Кохась

15. Докажите, что при $k > 2$ число $a_k = 2^{2^k - 1} - 2^k - 1$ – составное. (11)

Н.Филонов

Отборочный тур на Всероссийскую олимпиаду

16. Для каких $n \geq 3$ можно расставить числа от 1 до n в вершинах правильного n-угольника так, чтобы выполнялось следующее свойство: для любых трех вершин A, B и C таких, что $AB = AC$, число в вершине A либо больше, либо меньше обоих чисел в вершинах B и C? (9)

С.Иванов

17. AL – биссектриса треугольника ABC. Через вершины B и C проведены параллельные прямые b и c соответственно, равноудаленные от вершины A. На прямых b и c выбраны такие точки M и N, что отрезки LM и LN пересекаются со сторонами AB и AC соответственно и делятся ими пополам. Докажите, что $LM = LN$. (9)

Ф.Бахарев, С.Берлов

18. Выпуклый n-угольник ($n > 3$) разбит непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что можно отметить $n - 1$ отрезков из числа сторон и проведенных диагоналей многоугольника так, чтобы никакой набор из отмеченных отрезков не образовывал замкнутой ломаной и ни из какой вершины не выходило ровно два отмеченных отрезка. (9)

Д.Карпов

19. В клетках таблицы 10×10 расставлены числа от 1 до 100: в нижнем горизонтальном ряду стоят числа от 1 до 10 в порядке возрастания, в следующем ряду – числа от 11 до 20 в порядке возрастания, и т.д. Разрешено выбрать любые три клетки, стоящие подряд в горизонтальном, вертикальном или диагональном ряду, и либо прибавить 1 к числам в крайних клетках и вычесть 2 из числа в средней клетке, либо, наоборот, вычесть 1 в крайних клетках и прибавить 2 в средней. После выполнения нескольких таких операций оказалось, что в таблице опять стоят все числа от 1 до 100. Докажите, что их расположение совпадает с исходным. (10)

О.Ванюшина

20. Рассмотрим возрастающую арифметическую прогрессию из натуральных чисел. Разделим каждый ее член на его наибольший простой делитель. Докажите, что образовавшаяся последовательность частных неограничена. (11)

А.Голованов

21. На 50 карточках с обеих сторон написаны по одному разу все натуральные числа от 1 до 100. Карточки лежат на столе. Видны только числа, написанные сверху. Вася может выбрать несколько карточек. Затем он переворачивает все выбранные карточки и складывает все 50 чисел, которые окажутся после этого видны. Каково наибольшее S, для которого Вася может наверняка получить сумму, не меньшую S? (11)

С.Берлов

22. В связном графе 500 вершин, степень каждой вершины не превосходит 3. Назовем раскраску вершин в черный и белый цвета *интересной*, если белым цветом окрашено более половины вершин, но никакие две белые вершины не соединены ребром. Докажите, что можно выбрать несколько вершин так, чтобы в любой интересной раскраске больше половины из них были окрашены в черный цвет. (11)

Д.Карпов

Публикацию подготовили К.Кохась, В.Сендеров, А.Спивак

Московская олимпиада студентов по физике

23 мая 1999 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Боумона проходил московский региональный тур Всероссийской олимпиады по физике среди студентов технических вузов. К участию в олимпиоде были приглашены ведущие технические вузы Москвы. Каждая комонда состояла из 5 студентов (до 3 курсо включительно). Участникам олимпиады были предложены 10 задоч (в зависимости от сложности задачи оцениволись от 6 до 10 баллов) и разрешалось пользоваться любой литературой.

По результатам олимпиады в командном зачете первое место заняла команда Московского авиационного института (90 баллов), второе – команда МГТУ (78 баллов), третье – командо Российского государственного университето (РГУ) нефти и газа им. И.М.Губкина (61 балл).

В личном зачете первое место завоевал С.Ефименко (РГУ нефти и газа, 28 баллов), второе место – Г.Симонов (МГТУ, 27 баллов), третье – А.Термотиосов (РГУ нефти и газа, 26 баллов).

Ниже приводятся условия олимпиадных задач.

1. Материальная точка начинает движение из центра с постоянной по модулю скоростью, равной v_0, таким образом, что в любой момент времени точка находится на радиусе, проведенном из этого центра и вращающемся с постоянной угловой скоростью ω. В начальный момент времени вектор скорости был направлен по радиусу. Каково максимальное ускорение точки в процессе дальнейшего движения? (10 б.)

2. На космическом корабле массой m, скорость которого в начальный момент времени равна v_0, произошла авария, в результате которой вектор силы тяги реактивного двигателя $\vec{F}$ начал вращаться с постоянной угловой скоростью ω. Определите, с какой средней скоростью начнет двигаться космический корабль, если в начальный момент времени векторы силы тяги и скорости совпадали по направлению. (8 б.)

3. Сквозь отверстие в потолке пропущена нерастяжимая нить, к концу которой привязано тело массой m, совершающее вращательное движение вокруг вертикальной оси со скоростью v_0. Определите, какую работу необходимо совершить, чтобы поднять тело, медленно подтягивая его за нитку, на высоту h. Первоначально расстояние от потолка до плоскости вращения тела было равно l. (7 б.)

4. Полый бесконечный цилиндр радиусом R заряжен равномерно с поверхностной плотностью заряда σ. Определите силу, растягивающую цилиндр на единицу длины. (5 б.)

5. Металлическое тело представляет собой две пересекающиеся сферы радиусом R, расстояние между центрами которых равно $\sqrt{2}R$. Определите потенциал тела, если его заряд равен Q. (9 б.)

6. Переменное напряжение прямоугольной формы с амплитудой U_0 и частотой ω прикладывается к цепи, состоящей из последовательно соединенных идеального диода и катушки индуктивностью L. Определите среднее значение тока через катушку. (7 б.)

7. Два трансформатора с одинаковыми магнитопроводами и одинаковыми первичными обмотками с числом витков w имеют различные вторичные обмотки с числом витков w_1 и w_2. Если первичные обмотки соединить последовательно, а вторичные обмотки оставить не подключенными, то при приложении к первичным обмоткам переменного напряжения определенной амплитуды амплитуда тока через них будет равна I_0. Какова будет амплитуда тока через первичные и вторичные обмотки, если вторичные обмотки соединить параллельно? (10 б.)

8. Одноатомный газ, масса которого m, а молярная масса M, имеет температуру T_0. Газ очень быстро сжали, уменьшив объем вдвое, при этом установившаяся температура стала равной T. Определите изменение энтропии газа. (8 б.)

9. В цилиндре под поршнем находится некоторое количество одноатомного газа, молярная масса которого M, а температура T. В дне цилиндра проделано очень маленькое отверстие, через которое газ медленно, в молекулярном режиме, вытекает в абсолютный вакуум. При этом температура и давление газа в цилиндре поддерживаются строго постоянными. Какое количество теплоты передаст газ стенкам цилиндра за время, пока через отверстие не вытечет масса газа m? (10 б.)

10. Плоская световая волна интенсивностью I_0 с круговой поляризацией интерферирует с плоскополяризованной волной интенсивностью также I_0. Определите максимальное и минимальное значения интенсивности полученной интерференционной картины. (6 б.)

Публикацию подготовили
М.Яковлев, В.Голубев

«Квант» для младших школьников

Задачи

(см. «Квант» №1)

1. Может. Например, из цифр 1, 1 и 3 составляются лишь простые трехзначные числа 113, 131, 311.

2. Пусть x, y, z – соответственно количество троек, четверок и пятерок. Тогда решение задачи сводится к решению системы в натуральных числах

$$\begin{cases} x+y+z=10, \\ 3x+4y+5z=46. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на 5 и вычтя из результата второе уравнение, находим $2x+y=4$. Отсюда $x=1$, $y=2$, и, следовательно, $z=7$. Шестиклассник получил одну тройку, две четверки и семь пятерок.

3. Можно. Для этого на левую чашку весов положим один красный и два синих шарика, а на правую – один желтый и два зеленых. Белые шарики вообще на весы не кладем. Затем с помощью гирь-разновесов определяем, какая чашка тяжелее и на сколько граммов. Здесь возможны следующие варианты:

1) Если легкими являются белые шарики, то весы, очевидно, будут в равновесии.

2) Если легкие шарики – красные, то левая чашка будет на 1 грамм легче правой.

3) Если легкие шарики – синие, то левая чашка будет на 2 грамма легче правой.

4) Если легкие шарики – желтые, то левая чашка будет на 1 грамм тяжелее правой.

5) Если легкие шарики – зеленые, то левая чашка будет на 2 грамма тяжелее правой.

Как видно, пяти возможным вариантам соответствуют различные состояния весов, что позволяет однозначно определить, какая пара шариков легче.

4. Назовем сумму площадей красных прямоугольников красной площадью, а сумму площадей синих прямоугольников – синей площадью.

Заметим, что перемещение секущих плоскостей параллельно граням куба изменяет красную и синюю площади на одну и ту же величину (см. рис.1, на котором изображена развертка двух соседних граней куба).

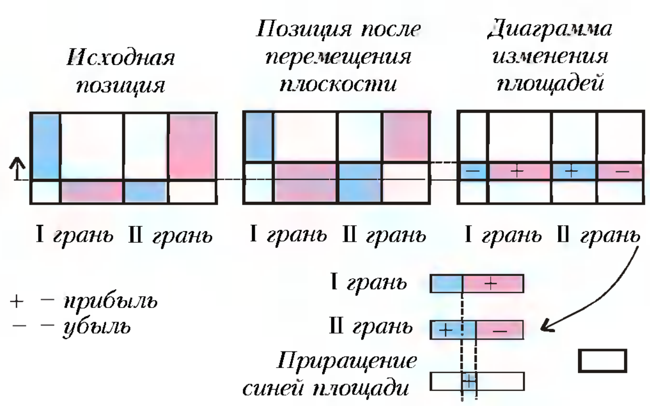


Рис. 1

Если провести секущие плоскости через центр куба, то все закрашенные прямоугольники превратятся в равные квадраты (рис.2) и красная площадь станет равной синей площади. Следовательно, это свойство равенства площадей будет выполняться и для любого начального положения секущих плоскостей.

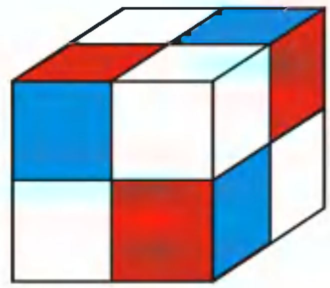


Рис. 2

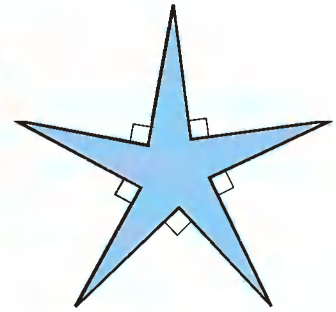


Рис. 3

5. См., например, рис.3.

Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» №5 за 1999 г.)

6. Докажем, что сумма невычеркнутых чисел не может быть простым числом. Пусть несколько строк и столбцов вычеркнуты. Тогда оставшиеся числа представляют собой всевозможные попарные произведения номеров невычеркнутых столбцов. Но сумма этих попарных произведений, очевидно, равна произведению суммы номеров невычеркнутых строк на сумму номеров невычеркнутых столбцов, т.е. произведению двух чисел, каждое из которых заведомо не меньше 2. Поэтому она не может быть простым числом.

Что касается суммы вычеркнутых чисел, то она вполне может оказаться простым числом. Например, если зачеркнуть все числа строки под номером 3 и столбца под номером 5, то сумма вычеркнутых чисел будет равна $6+9+12+15+18+21+$ $+24+27+10+20+25+30+35+40+45=337$ – простому числу.

7. Пусть AH – высота треугольника. Круг с диаметром AB (AC) полностью покрывает треугольник ABH (ACH). Следовательно, точка O лежит либо в круге с диаметром AB, либо в круге с диаметром AC. В первом случае расстояние от точки O хотя бы до одной из вершин A и B не превосходит $\frac{c}{\sqrt{2}}$, во втором – расстояние от точки O хотя бы до одной из вершин A и C не превосходит $\frac{b}{\sqrt{2}}$. Так как $b \ge c$, то утверждение задачи доказано.

8. Предположим противное: пусть $a+b \ne 0$. Обозначим $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=2q$, где рациональное число $q \ne 0$, и пусть $\sqrt[3]{a}=$ $=q+\alpha$, где α – иррационально, тогда $\sqrt[3]{b}=q-\alpha$. Без ограничения общности можно считать $\alpha>0$. Имеем $a+b=$ $=(q+\alpha)^3+(q-\alpha)^3=6\alpha^2 q+2q^3$, откуда $\alpha=\sqrt{r}$, где $r=$ $=\frac{a+b-2q^3}{6q}$. Но тогда число $a=\left(q+\sqrt{r}\right)^3=q^3+3q^2\sqrt{r}+$ $+3qr+r\sqrt{r}=q^3+3qr+\sqrt{r}\left(3q^2+r\right)$ не может быть рациональным. Полученное противоречие говорит о том, что исходное предположение неверно. Следовательно, $a+b=0$.

9. Прежде всего заметим, что число n четное. Если бы это было не так, то, отправляясь от какого-либо фиксированного числа и идя от числа к числу по кругу, мы сделаем нечетное количество шагов. При этом суммарное приращение величины окажется ненулевым, чего быть не может.

Назовем декрементом разность между суммой всех значительных чисел и суммой всех незначительных чисел. Первоначально декремент равен $S=M-m$. Элементарной операцией назовем вычеркивание наименьшего из незначительных чисел и соседнего с ним числа, считая по часовой стрелке. В результате применения элементарной операции к множеству из $n \ge 4$ чисел его структура не изменится: по-прежнему каждые

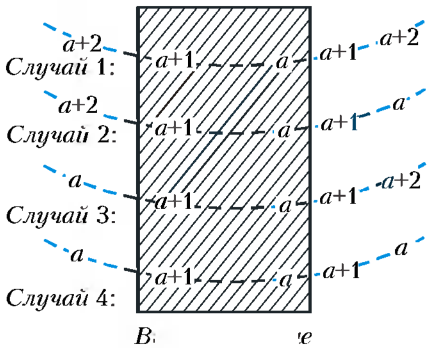


Рис. 4

два соседних числа из оставшихся будут различаться на 1 (на рисунке 4 наименьшее из незначительных чисел обозначено a).

Однако в результате применения элементарной операции количество чисел уменьшается на 2, а величина декремента уменьшается на 1. Таким образом, через $S-1$ шагов мы придем к структуре, состоящей всего из двух чисел и декрементом 1. Следовательно, $n-2\cdot(S-1)=2$, откуда $n=2S=2(M-m)$.

10. Воспользуемся следующим фактом: если натуральное число k представляется в виде разложения на простые множители $k=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_m^{n_m}$, где p_1, p_2, …, p_m – простые числа, а все показатели степеней n_1, n_2, …, n_m – целые неотрицательные числа, то количество делителей числа k выражается формулой $(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_m+1)$ (см., например, по этому поводу энциклопедию для детей «Математика» издательства «Аванта +» (1998), с.157).

Запишем искомое число N в виде следующего разложения на простые множители: $N=2^{n_2}\cdot3^{n_3}\cdot5^{n_5}\cdot7^{n_7}\cdot\ldots\cdot p^{n_p}$, где n_2, n_3, n_5, …, n_p – неотрицательные целые числа, причем, поскольку число N делится на 100, то $n_2\ge2$, $n_5\ge2$. Согласно условию задачи, должно выполняться равенство

$$2^{n_2-2}\cdot3^{n_3}\cdot5^{n_5-2}\cdot7^{n_7}\cdot\ldots\cdot p^{n_p}=$$
$$=(n_2+1)(n_3+1)(n_5+1)(n_7+1)\ldots(n_p+1).\quad(*)$$

Заметим, что при целом $m\ge0$ для любого простого $p\ge3$ выполняется неравенство $p^m\ge m+1$, причем равенство возможно лишь при $m=0$. Отсюда

$$3^{n_3}\cdot7^{n_7}\cdot11^{n_{11}}\cdot\ldots\cdot p^{n_p}\ge(n_3+1)(n_7+1)(n_{11}+1)\ldots(n_p+1),$$

причем равенство здесь возможно лишь при $n_3=n_7=\ldots=n_p=0$. Кроме того, применяя метод математической индукции, можно доказать, что при

$$1)\,n_5=2\text{ и }n_2>6,\quad 2)\;n_5=3\text{ и }n_2>4,\quad 3)\;n_5>3$$

произведение $2^{n_2-2}\cdot5^{n_5-2}$ больше $(n_2+1)(n_5+1)$ и, следовательно, при таких значениях параметров n_2, n_5 равенство $(*)$ невозможно.

Разбор других случаев требует более тонкого анализа.

Для упрощения записи введем обозначения

$$A=7^{n_7}\cdot11^{n_{11}}\cdot\ldots\cdot p^{n_p},\qquad B=(n_7+1)(n_{11}+1)\ldots(n_p+1);$$

равенство $(*)$ запишется так:

$$2^{n_2-2}\cdot3^{n_3}\cdot5^{n_5-2}\cdot A=(n_2+1)(n_3+1)(n_5+1)\cdot B.\quad(**)$$

Отметим, что число A нечетное и $A\ge B$ (равенство здесь возможно лишь при $n_7=n_{11}=\ldots=n_p=0$).

При 4) $n_2=n_5=2$, поскольку в правой части $(**)$ не должно быть четных сомножителей, то число n_3 обязательно должно быть четным. При $n_3=2$ в правой части $(**)$ степень тройки выше, чем в левой части; при $n_3\ge4$ левая часть $(**)$ превышает правую.

При 5) $n_2=3$; $n_5=2$, 6) $n_2=2$; $n_5=3$, 7) $n_2=3$; $n_5=3$ в правой части $(**)$ степень двойки выше, чем в левой.

При 8) $n_2=4$; $n_5=2$ в правой части $(**)$ степень пятерки выше, чем в левой.

При 9) $n_2=5$; $n_5=2$ в правой части $(**)$ показатель степени тройки не меньше 2, но в этом случае левая часть $(**)$ превышает правую.

При 10) $n_2=6$; $n_5=2$ в правой части $(**)$ показатель степени тройки не меньше 1, но в этом случае левая часть $(**)$ превышает правую.

При 11) $n_2=4$; $n_5=3$ равенство $(**)$ приводится к виду

$$3^{n_3}A=(n_3+1)B,$$

что возможно в одном-единственном случае $n_3=n_7=n_{11}=\ldots=n_p=0$.

Итак, условию задачи удовлетворяет единственное число $N=2^4\cdot5^2=2000$. Его делители: 1, 2, 4, 8, 16, 5, 25, 125, 10, 50, 250, 20, 100, 500, 40, 200, 1000, 80, 400, 2000.

Качающаяся скала

1. Из требования минимума потенциальной энергии тела в положении устойчивого равновесия вытекает, что при отклонении тела от равновесия его центр тяжести повышается. Этот факт и позволяет вывести критерий устойчивости (2).

Найдем изменение высоты ΔH центра тяжести P, сравнивая положение скалы на рисунках 1 и 2 статьи. Поворот скалы без проскальзывания на круглой опоре можно представить как результат двух последовательных перемещений: поворота вокруг центра O' всей системы скала—опора как единого целого на угол α и далее поворот только скалы вокруг центра O на угол β. Поэтому

$$\Delta H=\Delta h_1+\Delta h_2=-(R+CP)(1-\cos\alpha)+PO(\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)).$$

Но $CP+PO=r$ по определению и $\alpha R=\beta r$ из-за отсутствия проскальзывания. Кроме того, для малых углов α (а также β и $\alpha+\beta$) справедливо приближенное равенство $\cos\alpha=1-\alpha^2/2$. Упрощая выражение для ΔH, получим

$$\Delta H=\frac{\alpha^2}{2}\left(-R-r+\left(1+\frac{R}{r}\right)^2r-\left(1+\frac{R}{r}\right)^2CP\right),$$

откуда следует, что в положении устойчивого равновесия, когда $\Delta H>0$,

$$CP<\frac{Rr}{R+r},$$

т.е. получена формула (2). Критерий устойчивости можно записать также в виде

$$\frac{1}{CP}>\frac{1}{R}+\frac{1}{r}.$$

Но величина, обратная радиусу кривизны поверхности тела, называется кривизной этой поверхности (см. Примечание к статье). Таким образом, мы доказали теорему, согласно которой для устойчивого равновесия тела на опоре величина, обратная расстоянию от центра тяжести тела до точки его контакта с опорой, должна быть больше, чем сумма кривизны поверхности тела и опоры в точке контакта.

2. Эта задача знакомит нас с еще одним понятием, важным для изучения равновесия тел. Речь идет о границах области устойчивости равновесного положения тела. Действительно, надо представлять, сколь большим может быть отклонение тела от положения равновесия, при котором оно, предоставленное потом самому себе, вернется в это положение. В случае достаточно больших отклонений тело потом сможет занять новое положение равновесия или будет совершать колебания около него. Равновесия может и не быть вовсе: любое новое положение тела оказывается неустойчивым.

Определять границы области устойчивости – это, как правило, задача более трудная, чем исследовать устойчивость тела, когда есть малый параметр – угол отклонения от положения равновесия. В качестве примера рассмотрим равновесие «ваньки-встаньки» на вершине неподвижной сферы радиусом

R. По условию, радиус основания «ваньки-встаньки» $r = R$. Отклоним игрушку на угол α относительно равновесного вертикального положения. Смещение центра тяжести ΔH по вертикали равно (см. упражнение 1)

$$\Delta H = \Delta h_1 + \Delta h_2 = -r - x - 2r\cos\alpha - r\cos 2\alpha + x\cos 2\alpha =$$
$$= -4r\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2(r-x)\sin^2\alpha,$$

где x – искомая величина расстояния CP от точки контакта игрушки с опорой (в положении равновесия) до центра тяжести. По условию, качение игрушки на опоре происходит без проскальзывания.

Как видно из формулы для ΔH, у игрушки с высоко расположенным центром тяжести, т.е. когда $x \approx r$, величина ΔH всегда отрицательна, поэтому равновесие неустойчивое. Но при небольших значениях x, т.е. когда центр тяжести «ваньки-встаньки» находится вблизи его основания, величина ΔH положительна, и игрушка на вершине сферы находится в равновесии. При ее отклонении на угол α она возвращается в исходное положение, если угол α не слишком велик. С ростом угла α центр тяжести игрушки поднимается, достигает максимальной высоты (при некотором угле α_0) и далее начинает опускаться. Как обычно при поиске экстремума, величина α_0 определяется из условия $\frac{dH}{d\alpha} = 0$, откуда находим

$$\cos\alpha_0 = \frac{R}{2(r-x)}, \text{ или } \frac{x}{r} = 1 - \frac{1}{2\cos\alpha_0}.$$

На рисунке 5 приводится график зависимости x/r от α_0. Из этого графика можно определить положение центра тяжести игрушки, если известен предельный угол α_0. Очевидно, что по условию α_0 не должен превышать $\pi/3$, а тогда центр тяжести оказывается удаленным от точки контакта с опорой на расстояние, меньшее $r/2$.

Чем ниже центр тяжести, тем устойчивее тело на опоре и тем шире область устойчивости. В нашей задаче из всех тел наибольшей устойчивостью обладает легкая, почти невесомая сфера с компактной, но тяжелой массой, закрепленной около ее основания. При качении такого тела по круглой опоре без проскальзывания центр тяжести тела описывает кривую, которая называется кардиоидой. (Это алгебраическая кривая четвертого порядка, частный случай так называемой эпициклоиды.) Уравнение кардиоиды в декартовых прямоугольных

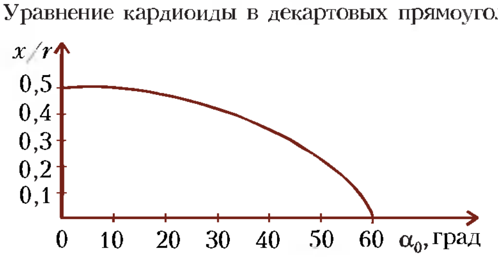


Рис. 5

координатах имеет вид $\left(x^2 + y^2 + 2ry\right)^2 = 4r^2\left(x^2 + y^2\right)$. Кардиоиду можно легко построить самим по точкам с помощью циркуля и линейки. По виду она напоминает сердце (рис.6), и этот факт отражен в самом названии кривой: греческое слово kardia означает сердце.

Мы показали, что угол между осью кардиоиды и отрезком, проведенным в точку, в которой касательная к кардиоиде параллельна x, равен $\alpha_{0\max}/2 = 30°$. Соответствующий этой точке максимальный подъем центра тяжести игрушки равен $\Delta H = r/2$. Если центр тяжести игрушки находится выше границы основания, то при вращении без проскальзывания на сфере того же радиуса этот центр описывает кривую, которая называется укороченной кардиоидой – одной из разновидностей улитки Паскаля.

3. Из условия задачи и неравенства $\frac{1}{CP} > \frac{1}{R} + \frac{1}{r}$ следует, что центр тяжести полушария находится от нижней его точки на расстоянии, меньшем $5r/8$. Но в точке на расстоянии $5r/8$ находится, как известно, центр тяжести однородного полушария. Таким образом, по сравнению с однородным телом такой же формы полушарие утяжелено книзу, чем и достигается устойчивость его равновесного положения на закрепленной сферической поверхности такого же радиуса.

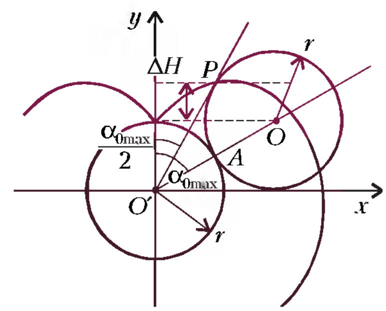


Рис. 6

4. Проскальзывание приведет к тому, что область устойчивости положения равновесия сузится. Для очень гладких и скользких поверхностей возможен случай, когда равновесие будет неустойчивым, где бы ни находился центр тяжести тела.

5. У скалы, вообще говоря, могут быть другие равновесные положения. Поэтому ее можно опрокинуть, наклонив на достаточно большой угол.

Калейдоскоп «Кванта»

1. *Указание*: отнюдь не шесть десятков.

2. 3 минуты.

3. Нет, не зависит. Условимся писать вместо знака «+» число +1, а вместо знака «–» – число –1. Операция стирания двух знаков не меняет произведения всех написанных на доске чисел, так что последнее оставшееся число будет равно произведению всех имеющихся вначале чисел.

Закон сохранения импульса

1. $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{m_1 v_1}{\sqrt{(m_2 v_2)^2 + (m_3 v_3)^2}} = \frac{6}{5}$, $\alpha \approx 50°$.

2. $u = \frac{5}{6}v = 5$ м/с; $\Delta W = \frac{m}{2}\left(\frac{5}{6}v^2 + g^2t^2\right) = 63$ Дж.

3. 1) $v_1 = \sqrt{2g(H-h)}$; 2) $v_2 = \sqrt{\frac{8g(H-h)}{5}}$.

Институт естественных наук и экологии при «Курчатовском институте»

МАТЕМАТИКА

1. $x_1 = a^{b^2/4}$, $x_2 = a^{4/b^2}$ при $b > 2$; $x = a$ при $b = 2$; $a > 0$, $a \ne 1$.

2. При $p < 0$ решений нет; $\alpha = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, при $p = 0$;

$$-\arccos\frac{\sqrt{1+8p}-1}{4p} + 2\pi n \le \alpha \le \arccos\frac{\sqrt{1+8p}-1}{4p} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z},$$

при $p > 0$; при $p \ge 1$ в дополнение к предыдущим решениям появляются еще решения

$$\pi - \arccos\frac{\sqrt{1+8p}+1}{4p} + 2\pi m \le \alpha \le \pi + \arccos\frac{\sqrt{1+8p}+1}{4p} + 2\pi m,$$
$$m \in \mathbf{Z}.$$

3. $y = x^2 + 2x + 11$ и $y = -x^2 - 4x - 18$; $S = 57\frac{1}{6}$.

4. Минимальное значение равно –4 и достигается при $x = -2$, $y = -2$; максимальное равно $8\sqrt{3}$ и достигается при $x = 4/\sqrt{3}$, $y = 2\sqrt{3}$ и при $x = 2\sqrt{3}$, $y = 4/\sqrt{3}$.

5. $\dfrac{9p^2}{200}$. **6.** $\dfrac{3}{\sqrt{11}}$. **7.** 1/8.

ФИЗИКА

1. 1) $\mu < \mathrm{tg}\,\alpha$; 2) $F = Mg\dfrac{\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha + 1}{\mathrm{tg}\,\alpha - \mu}$.

2. $Q = \dfrac{9(T_2 - T_1) + (\alpha_2 T_2 - \alpha_1 T_1) + 2(\alpha_2 - \alpha_1)\varepsilon/k}{(T_2 - T_1) + \alpha_2 T_2 - \alpha_1 T_1}\dfrac{A}{2}$, где k – постоянная Больцмана.

3. 1) $\Omega'/\Omega = \sqrt{3}$; 2) $d'/d = 3$.

4. 1) $x = \dfrac{mgL}{B^2l^2}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{B^2l^2v_0^2}{mg^2L}}\right)$;

2) $v_{\max} = \sqrt{v_0^2 + \dfrac{mg^2L^2}{B^2l^2}}$, $I = \dfrac{mg}{Bl}$.

5. $a = F\left(\dfrac{d\omega}{d - F}\right)^2$.

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\left\{-\dfrac{8}{3}; -\dfrac{4}{3}\right\}$. **2.** $83\dfrac{1}{3}\%$.

3. $\pi(2n+1)$, $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $2\mathrm{arctg}\,2 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Разложив левую часть на множители, получаем

$$(\cos x + 1)(\sin x + 3\cos x + 1) = 0.$$

4. $(-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$.

5. $\angle ANB = 30°$. *Указание.* Из подобия треугольников AMD и CMB следует, что $MC : AM = \dfrac{1}{2}$. Но это означает, что AC и BC – высоты треугольника ABC. Полезно также заметить, что расстояние от точки B до прямой AD в 2 раза больше расстояния от точки C до этой прямой.

Вариант 2

1. $\left\{\dfrac{1}{5}; \dfrac{4}{5}\right\}$. **2.** 400 чел.

3. $\pi(2n+1)$, $-\arcsin\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) + (-1)^{k+1}\arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) + k\pi$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$.

4. $\angle AOB = \arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{145}}\right)$. **5.** $x = 3$; $y = 4$.

Вариант 3

1. 300 кг. **2.** $[1; 2) \cup (10; +\infty)$. **3.** 2.

4. $x_{1,2} = \dfrac{1 - 4k \pm \sqrt{16k^2 - 8k + 17}}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

$x_{3,4} = \dfrac{1 + 4k \pm \sqrt{16k^2 + 8k - 15}}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $k \neq 0$, $k \neq -1$.

5. $\left(0; \dfrac{1}{12}\right]$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $E_{\text{к}} = m\left(v_0^2 - 2v_0\sin\alpha \cdot gt + g^2t^2\right)/2$.

2. $\mu_2 \geq \dfrac{(\mu_1\cos\alpha + \sin\alpha)\cos\alpha}{M/m + (\cos\alpha - \mu_1\sin\alpha)\cos\alpha}$.

3. $q = Q\dfrac{6R_1R_2}{(3R_1 + 2R_2)(3R_1 + 4R_2)}$. **4.** $n = 1/\sqrt{2}$.

5. $U = kL^2\dfrac{3|\rho_1 - \rho_2|}{4(\rho_1 + 3\rho_2)}$.

Вариант 2

1. $v_0 = \sqrt{2gh/\sin^2\alpha}$. **2.** $M = m\,\mathrm{tg}\,\alpha/(\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,\alpha)$.

3. $I_0 = I\dfrac{U(R_2 - R_1)}{(U - IR_1)R_2}$. **4.** $T_3/T_1 = \sqrt{\alpha}$.

5. $d = F(k+1)/k$.

Вариант 3

1. $v = \sqrt{v_0^2 + \dfrac{g^2L^2}{v_0^2\cos^2\alpha} - 2gL\,\mathrm{tg}\,\alpha}$. **2.** $a = g\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{M/m + \mathrm{tg}^2\alpha}$.

3. $r = (U_2 - U_1)R_1R_2/(U_1R_2 - U_2R_1)$. **4.** $V_4 = V_1V_3/V_2$.

5. $n = 1/\sqrt{\sin^2\beta_1 + \sin^2\beta_2} = 2/\sqrt{3}$.

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 15 км/ч, 20 км/ч. **2.** $\pm\dfrac{3}{4}\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. 4. **4.** $0 \leq x > 4$. **5.** 3; 5. **6.** $x = a + \sqrt{6 - a}$ при $a \in [-3; 2)$; $x = 4$ при $a = 5$. *Указание.* Система имеет единственное решение, если квадратное уравнение $x^2 - 2ax + a^2 + a - 6 = 0$ имеет один неотрицательный корень, не равный 6.

7. $4\sqrt{4 + \sqrt{2}l}$. *Указание.* Сечение AVC_1W (рис.7) будет иметь наименьший периметр, если на развертке боковых граней его стороны AV и VC_1 будут лежать на одной прямой.

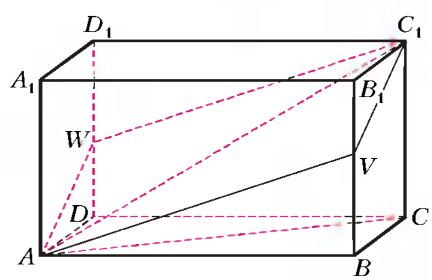


Рис. 7

Вариант 2

1. 21 день, 28 дней.

2. $y_{\min} = \dfrac{3}{4}$ при $x = (-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $y_{\max} = 3$ при $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. 3. **4.** $(-3/2; -1/2) \cup (1; +\infty)$.

5. 100. *Указание.* Если x – абсцисса вершины B прямоугольника (рис.8), то его площадь равна

$$S_{OABC} = S(x) = x(2x - 15)(12 - x) = -\left(2x^3 - 39x^2 + 180x\right),$$

причем $7{,}5 < x < 12$.

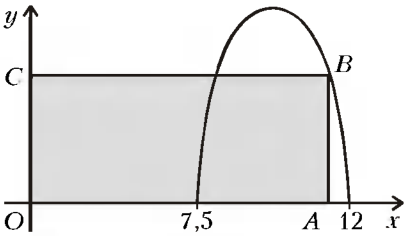


Рис. 8

6. $[3/2; 2]\cup\{7/2; 6\}$. *Указание.* Первое уравнение равносильно системе $x>0$, $x\neq 1$, $x+y-1=0$, откуда следует, что $y=1$. Подставляя значение $y=1$ во второе уравнение, получаем $x^2-2ax+2a^2-7a+6=0$. Заданная система уравнений имеет единственное решение, если это квадратное уравнение имеет ровно один положительный корень, не равный единице.

7. $24\pi l^2$.

Московский институт электронной техники

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $-\sqrt{2}$. **2.** 4. **3.** (2; 2), (−2; −2). **4.** $[6;+\infty)$. **5.** $\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $\dfrac{2\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$. **6.** 30 км/ч. **7.** (1,5; 3,5). **8.** См. рис. 9. **9.** 2,5. **10.** $\dfrac{a^2}{(1+\cos\beta)^2}$. **11.** 2.

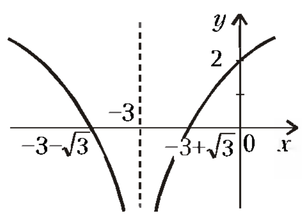


Рис. 9

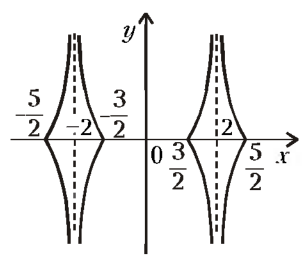


Рис. 10

Вариант 2

6. $\left[-2\sqrt{2};\ \dfrac{4-3\sqrt{3}}{2}\right]\cup[5;+\infty)\cup\{2\sqrt{2}\}$. **7.** См. рис. 10.

8. $x=\dfrac{3\pi}{2}-\arcsin\dfrac{3}{5}+2\pi n$, $y=\arcsin\dfrac{3}{5}+2\pi k$, $n,k\in\mathbf{Z}$, $z\in[-3;3]$. **9.** $\dfrac{\sqrt{61}}{2\sqrt{19}}$. **10.** 75%. **11.** $-\dfrac{65}{28}$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $v_2=\sqrt{v_1^2+2gH}\approx 1000$ км/ч.

2. $m=\dfrac{F}{a+\mu g}=4$ кг, где $a=2$ м/с^2.

3. $\alpha_m=\dfrac{2\pi v_m}{gT}=\pi\cdot 10^{-2}$ рад $=1{,}8°$. **4.** $\rho_2=\dfrac{\Delta\rho}{\Delta p}p_2=1{,}5$ кг/м^3.

5. $\eta=5/2$. **6.** $F_2=8F_1=800$ Н.

7. $R_{\text{в}}=\dfrac{R^2}{r}=2\cdot 10^4$ Ом. **8.** $F=ev\sqrt{B_1^2+B_2^2}=1{,}6\cdot 10^{-18}$ Н.

9. $\delta=2H_2/H_1=1/2$. **10.** $p=\sqrt{2meU}\approx 9{,}6\cdot 10^{-25}$ кг·м/с.

Вариант 2

1. $t=\dfrac{v}{a}-\sqrt{\dfrac{v^2}{a^2}-\dfrac{2l}{a}}=24$ с. **2.** $\mu=\dfrac{\alpha}{1-\alpha}=\dfrac{1}{3}$.

3. $x=\dfrac{mg}{k}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{2kH}{mg}}\right)\approx 3{,}2$ см.

4. $p=\dfrac{mRT}{MV}\left(1+\dfrac{\alpha}{100\%}\right)\approx 3{,}9\cdot 10^5$ Па.

5. $H=\dfrac{Q}{mg}\left(1-\dfrac{T_2}{T_1}\right)=25$ м. **6.** $E=\dfrac{2F}{q}=10^4$ В/м.

7. $I_m=2\sqrt{2}\pi\nu CU\approx 0{,}13$ А. **8.** $\mathcal{E}=\dfrac{\sqrt{2WL}}{t}\approx 14{,}1$ В.

9. $F=-\left(\sqrt{2}+1\right)a\approx -12$ см. **10.** $\eta=\dfrac{Nh\nu}{UI}\cdot 100\%\approx 0{,}1\%$.

Московский энергетический институт

МАТЕМАТИКА

1. $0{,}5a^2$ при $x>-a^4$, $x\neq 0$, $a\neq 0$.

2. $f(x)=\begin{cases}-x+1 \text{ при } x<-1,\\ -x-1 \text{ при } x>1.\end{cases}$

3. $f(x)=6-4x$ при $0\le x<\sqrt{2}$, $x\neq\sqrt{2}-1$;
если $-\sqrt{2}<a<0$, $a\neq 1-\sqrt{2}$, то $x=-a$;
если $a=0$, то $x=0$;
если $0<a<\sqrt{2}$, $a\neq\sqrt{2}-1$, то $x=a$;
при остальных a уравнение решений не имеет.

4. $\{-3; 3\}$. **5.** $\left[-\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2};0\right]$. **6.** 48 км.

7. За 60 дней и за 20 дней. **8.** 140 = 11 + 129.

9. $a\neq\dfrac{\pi n}{3}$ ($n\in\mathbf{Z}$; $n\neq 0$, ± 6). **10.** $a\in\{-0{,}5; 1\}$;
если $a=-0{,}5$, то $x=\dfrac{1}{3|b|}$ при $b\neq 0$;
если $a=1$, то $x=\dfrac{1}{|b|}$ при $b\neq 0$;
при $b=0$ решений нет.

11. $BM=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\dfrac{mS}{n}}$; $MC=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\dfrac{nS}{m}}$.

12. $\dfrac{\sqrt{3}H^3}{2}$. **13.** $\dfrac{S\cos\alpha}{2\sin\alpha+1}$. **14.** $\dfrac{\sqrt{\pi R^5}}{2\left(\sqrt{\pi R^3}-\sqrt{2V}\right)}$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $\Delta m=\dfrac{pV\mathrm{M}}{R}\dfrac{T_1-T_2}{T_1T_2}=3{,}9$ кг, где М = 29 г/моль – средняя молярная масса воздуха.

2. $I_0=\dfrac{\mathcal{E}U}{(\mathcal{E}-U)R}=0{,}3$ А. **3.** $N=Mgv/2$.

Вариант 2

1. $T_0=\dfrac{T_1}{1+\rho gL/p_0}$. **2.** $U_2=U_1\dfrac{I_0-I_2}{I_0+I_1}=11{,}96$ В.

3. $F_{\min}=\mu g\left(m_2+m_1/2\right)$.

Вариант 3

1. $\alpha=1-p_2/p_1=0{,}2$. **2.** $r=R^2/R_{\text{в}}=0{,}8$ Ом.

3. $m=\dfrac{N}{g+v^2/l}$.

Вариант 4

1. $p_2 = 2p_1T_2/(3T_1) = 1{,}17\cdot10^5$ Па. **2.** $r = \sqrt{R_1R_2} = 6$ Ом.
3. $Q = 4\pi R^3\rho gh/3 - mg(H+h) = 22{,}4$ мДж.

Вариант 5

1. $I_2 = \dfrac{2\mathrm{E}}{r + \mathrm{E}/I_1} \approx 1{,}1$ А. **2.** $q = -QR/l$.
3. $Q = m_1m_2v^2/\left(2(m_1+m_2)\right) = 120$ Дж.

Новосибирский государственный университет

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $p = p_0 + (2Mg + F_1 - F_2)/(2S)$.
2. Грузы движутся по окружности. Поскольку начальная скорость нулевая, начальные ускорения a грузов направлены по касательной к траектории (нет нормального, или центростремительного, ускорения) и одинаковы по величине для обоих грузов. Из второго закона Ньютона получаем

$$m_1a = m_1g\sin\alpha - N\cos\alpha,\ m_2a = -m_2g\sin\alpha + N\cos\alpha,$$

где N – сила, действующая со стороны стержня на каждый из грузов. Отсюда

$$a = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g\sin\alpha = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g\frac{L}{2r}.$$

3. Пусть q_x – искомый заряд, тогда заряды внешних пластин равны q_x и $-q_x$. Напряженности электрического поля в зазорах равны, соответственно, $q_x/(\varepsilon_0S)$, $(q-q_x)/(\varepsilon_0S)$, $q_x/(\varepsilon_0S)$, а направление поля во внешних зазорах противоположно направлению поля во внутреннем зазоре. После замыкания ключа и установления равновесия разность потенциалов между внешними пластинами должна быть равна нулю:

$$\frac{q_x}{\varepsilon_0S}d - \frac{q-q_x}{\varepsilon_0S}d + \frac{q_x}{\varepsilon_0S}d = 0,$$

откуда

$$q_x = \frac{q}{3}.$$

Систему пластин можно рассматривать как три конденсатора с зарядами $q/3$, $2q/3$, $q/3$ и емкостью $C = \varepsilon_0S/d$ каждый. Тогда конечная суммарная энергия трех конденсаторов есть $W = q^2/(3C)$, а начальная энергия (одного конденсатора, образованного внутренними пластинами) была $W_0 = q^2/(2C)$. Разница энергий и выделится в виде тепла:

$$Q = W_0 - W = \frac{q^2}{6C} = \frac{q^2d}{6\varepsilon_0S}.$$

4. Пусть высота полотнища над землей h ($h \sim 1$ м). На этом расстоянии должна «погаситься» энергия падения с высоты H. Средняя тормозящая сила при этом должна быть $F \sim mgH/h$. Спасатели могут натягивать брезент с силой $f \approx (1-0{,}5)mg$. В работу вносит вклад только вертикальная составляющая силы, среднее значение которой $f_{ср} \sim Nfh/(2R)$, где R – радиус полотнища, $N \sim 2\pi R/d$ – максимальное число спасателей, $d \approx 0{,}5$ м – минимальное расстояние между спасателями. Из соотношения $F \sim mgH/h \sim Nfh/(2R)$ находим $H \sim \pi h^2/d \sim (5-8)$ м (это 2-й, 3-й этажи).
5. При нижнем положении груза упругая сила и составляющая силы тяжести вдоль его траектории направлены в одну сторону, что увеличивает возвращающую силу. При верхнем положении силы направлены в противоположные стороны, что уменьшает возвращающую силу при тех же отклонениях, а значит, увеличивает период.

Вариант 2

1. $a = g\cos(\alpha+\beta)/\sin\beta$.
2. Пусть h – высота подъема жидкости в трубке, x – высота, на которую опустится поршень. Из условия равновесия поршня $mg = \rho gh(S - S_0)$, из закона сохранения массы жидкости $hS_0 = x(S - S_0)$ и из закона сохранения энергии получаем

$$Q = mgx - \rho gS_0\frac{h^2}{2} = \frac{m^2gS_0}{2\rho(S-S_0)^2}.$$

3. На перемычку действует сила Ампера. Запишем второй закон Ньютона для перемычки:

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = IBh,\ \text{или}\ m\Delta v = I\Delta tBh = \Delta qBh.$$

Просуммируем последнее уравнение до момента пересечения перемычкой плоскости MN:

$$m(v_1 - v_2) = qBh,$$

где q – заряд на конденсаторе к моменту выхода перемычки из магнитного поля. Магнитный поток после выхода не меняется, поэтому ЭДС индукции с этого момента остается нулевой. По закону Ома,

$$RI_x = \frac{q}{C},$$

откуда находим

$$I_x = \frac{q}{RC} = \frac{m(v_1-v_2)}{RCBh}.$$

4. Показания весов расходятся из-за различия выталкивающих сил воздуха при различных температурах. Пусть $V = M/\rho = 0{,}05$ м^3 – объем тонны золота, $T_1 \approx 300$ К – июльская температура, $T_2 \approx 240$ К – зимняя температура, $p \approx 10^5$ Па – атмосферное давление, $\mathrm{M} \approx 29\cdot10^{-3}$ кг/моль – молярная масса воздуха, $R \approx 8{,}3$ Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная. Из уравнения Менделеева–Клапейрона находим массу вытесненного золотом воздуха:

$$m = \frac{\mathrm{M}pV}{RT},$$

а затем и разницу сил Архимеда:

$$F_2 - F_1 = (m_2 - m_1)g = \frac{\mathrm{M}pVg}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_2}\right) \approx 0{,}15\ \text{Н}.$$

Разнице показаний весов соответствует кажущееся расхождение по массе в 15 г.
5. На участок цепочки, лежащий внутри неподвижной трубки, вдоль оси трубки действуют составляющая силы тяжести, силы тяги, приложенные к обоим концам, и сила трения, компенсирующая силу, направленную к концу трубки. При вращении трубки вектор силы трения поворачивается, и появляется составляющая, перпендикулярная оси трубки. Величина силы трения не меняется, так как неизменна сила нормального давления, поэтому уменьшается составляющая силы трения, удерживающая цепочку от движения. В результате цепочка выскальзывает из трубки.

Вариант 3

1. $F = L/3$.
2. Обозначим положительный заряд «гантельки» q, ее длину d, массу m, напряженность поля конденсатора E, искомую скорость «гантельки» v_x. Запишем закон сохранения энергии для двух указанных случаев:

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + Eqd,\ \frac{mu^2}{2} = \frac{mv_x^2}{2} - Eqd.$$

Отсюда

$$v_x = \sqrt{2u^2 - v^2}.$$

3. Так как доска не вращается, нормальные силы реакции валиков одинаковы. Допустим, что ситуация критическая и сила трения максимально возможная, т.е. $F = \mu Mg\cos\alpha$, и запишем для доски второй закон Ньютона:

$$Ma = Mg\sin\alpha - \mu Mg\cos\alpha.$$

Пусть доска сместилась на малое расстояние x, приобретя при этом скорость v. При отсутствии проскальзывания линейная скорость ободов валиков также равняется v. Закон сохранения энергии будет иметь вид

$$\frac{Mv^2}{2} + \frac{2mv^2}{2} = Mgx\sin\alpha.$$

При малом смещении ускорение можно считать постоянным и использовать кинематическую связь $v^2 = 2ax$. Из последнего соотношения с учетом двух предыдущих уравнений имеем

$$\mu = \frac{2m}{M+2m}\operatorname{tg}\alpha.$$

4. Массу кислорода в атмосфере можно оценить, зная атмосферное давление $p_a \approx 10^5$ Па (кислорода в атмосфере по массе 20%): $M_{атм} \approx 0{,}2p_a S_{Зем}/g$, а массу кислорода в океане – зная среднюю глубину океана $H \sim 4\cdot 10^3$ м (отношение молярных масс кислорода и воды 16/18): $M_{ок} \approx \rho H S_{ок}\cdot 16/18$. Отношение площадей поверхности океанов к поверхности Земли $S_{ок}/S_{Зем} \approx 0{,}7$. Таким образом,

$$\frac{M_{ок}}{M_{атм}} \approx \frac{40}{9}\frac{\rho g H}{p_a}\frac{S_{ок}}{S_{Зем}} \approx 1200.$$

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. а) $x \in \left(-\infty; -\sqrt{2n}\right)\cup\left(-\sqrt{2n}; \sqrt{2n}\right)\cup\left(\sqrt{2n}; +\infty\right)$;

б) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2}, & x \in (-\infty; -2), \\ \dfrac{1}{2-x}, & x \in (-2; 2), \\ \dfrac{1}{x-2}, & x \in (2; +\infty), \end{cases}$

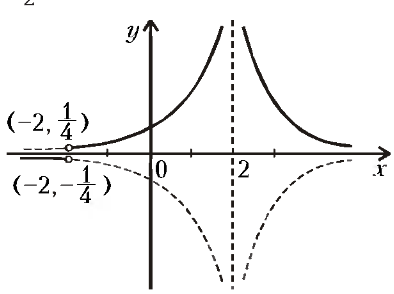


Рис. 11

(рис.11);

в) $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = \sqrt{7}$.

2. $x \in \left(-1; \log_3 25\right]\cup(3; +\infty)$.

3. $x_1 = 2/5$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 4/5$, $x_4 = 1$.

4. 20. **5.** $S_{бок} = \dfrac{d^2\operatorname{ctg}\alpha/2}{2\cos\beta}$, $V = \dfrac{d^3\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{12\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Вариант 2

1. а) $x \in (-\infty; -n]\cup[1; 3]$;

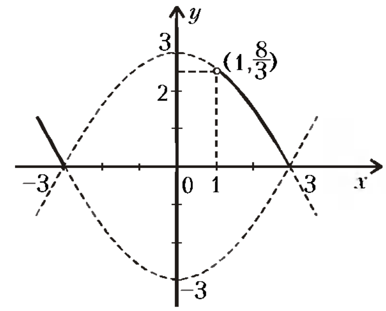


Рис.1 2

б) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\left(x^2 - 9\right), & x \in (-\infty; -3], \\ \dfrac{1}{3}\left(9 - x^2\right), & x \in (1; 3]; \end{cases}$

(рис.12);

в) $a \in \left[\dfrac{4}{3}; +\infty\right)$.

2. $x \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right)$. **3.** $x_1 = \dfrac{5\pi}{4}$, $x_2 = \dfrac{7\pi}{4}$. **4.** $\dfrac{R^2}{6}\left(3\sqrt{3} - \pi\right)$.

5. $\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{36\cos\alpha}$.

Российский государственный технологический университет им.К.Э.Циолковского

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 1. **2.** Возрастает при $x < -5$ и $x > -3$, убывает при $-5 < x < -4$ и $-4 < x < -3$. **3.** $5 < x \le 8$.

4. $x = \dfrac{(-1)^n\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2} + \dfrac{\pi k}{2}$, $y = \dfrac{(-1)^n\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2} - \dfrac{\pi k}{2}$, $n, k \in \mathbf{Z}$.

5. 6 кг, 40%. **6.** 9 : 2.

Вариант 2

1. $\pm\sqrt{2}$.

2. $x = -\dfrac{1}{3}$ – точка минимума, $x = 1$ – точка максимума.

3. $3 < x < 4$, $x \ge 5$.

4. $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n$, $y = \dfrac{\pi}{2} \mp \dfrac{\pi}{3} - \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **5.** 14. **6.** 1 : 7.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $x_m = 0{,}4$ см. **2.** $\lambda_2 = 4\cdot 10^{-7}$ м. **3.** $k = 1{,}56$.
4. $A = 670$ Дж. **5.** $F_н = 8{,}7\cdot 10^{-3}$ Н. **6.** $U = 220$ В.

Вариант 2

1. $p = 5\cdot 10^{-25}$ кг·м/с. **2.** $\Delta U = 600$ Дж.

3. $W_м = 0{,}4\cdot 10^{-4}$ Дж, $W_э = 1{,}2\cdot 10^{-4}$ Дж.

4. $\beta = 45°$. **5.** $q_1/q_2 = 8$.

6. Уменьшается в $\sqrt{2}$ раз.

Российский государственный университет нефти и газа им. И.М.Губкина

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 0,8. **2.** 8. **3.** 144. **4.** –2. **5.** 1. **6.** 2. **7.** 3. **8.** 143. **9.** 15. **10.** 18. **11.** 0,4. **12.** 5,4.

Вариант 2

1. 4,1. **2.** –8. **3.** 0,3. **4.** –18. **5.** 7. **6.** –0,5. **7.** –1. **8.** –10. **9.** 2,9. **10.** 0,4. **11.** 30,72. **12.** 8.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. 105 Н. **2.** 100 с. **3.** 12 Дж. **4.** 6 $м/с^2$.
5. 127 Дж. **6.** 33 кДж. **7.** 801 $с^{-1}$.
8. 3. **9.** 2 м. **10.** 4 мм. **11.** 3 м/с. **12.** 80 см.

Вариант 2

1. 20 м. **2.** 14 кг·м/с. **3.** 7 м/с.
4. 140 кг. **5.** 4. **6.** 16. **7.** 12 мм. **8.** 9 см.
9. 6 с. **10.** 200 кПа. **11.** 8 Вт. **12.** 2 Тл.

Санкт-Петербургский государственный технический университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\frac{4}{a-4}$. **2.** 1. **3.** 8. **4.** $\frac{3}{4}$. **5.** $-\frac{1}{2}$. **6.** 9. **7.** 1. **8.** $-\sqrt{3}$. **9.** $\frac{\pi}{2}$.

10. $(-\infty;-1)\cup(-1;1)$. **11.** $(-2;1]$. **12.** $[-2;-1)\cup(1;+\infty)$.

13. $(1;3]$. **14.** $\frac{n\pi}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

15. Четыре вектора: $(-3;-3)$; $(-1;1)$; $(1;-1)$; $(3;3)$.

16. $\left\{-1;\frac{1}{3}\right\}$. **17.** 3. **18.** $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **19.** 20 или 80. **20.** 4.

Вариант 2

1. –2. **2.** 12. **3.** 20%. **4.** 2. **5.** 1. **6.** –2. **7.** {1; 3}. **8.** {1; 16}.

9. –3. **10.** –1. **11.** πn, $-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **12.** $(-2;1)\cup(1;-2)$.

13. $\sqrt{2}$. **14.** $[-3;-1)\cup\{0\}$. **15.** $(-2;0)$, $(-1;1)$. **16.** $\left[-1;\frac{1}{3}\right]$.
17. $(0;4]$. **18.** $\{-1;2\}$. **19.** 3. **20.** $-1\le p\le 0$.

XL Международная математическая олимпиада

1. Обозначим через r_{PQ} отражение относительно прямой, проходящей перпендикулярно отрезку PQ через его середину, через G – центр тяжести S. Поскольку $r_{AB}(S)=S$, то $r_{AB}(G)=G$ для любых $A,B\in S$, а значит, все точки множества S равноудалены от G. Отсюда видно, что S лежит на некоторой окружности. Точки S задают выпуклый многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$. Отражение относительно серединного перпендикуляра отрезка A_1A_3 переводит каждую полуплоскость, ограниченную A_1A_3, в себя, следовательно, образом точки A_2 может быть только она сама: $r_{A_1A_3}(A_2)=A_2$; отсюда $A_1A_2=A_2A_3$. Аналогично, $A_2A_3=A_3A_4=\ldots=A_nA_1$. А так как точки A_1, A_2, …, A_n лежат на окружности, то многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ – правильный.

2. Неравенство симметрично и однородно, поэтому можно считать, что $x_1\ge x_2\ge\ldots\ge x_n\ge 0$ и $\sum_i x_i=1$. Положим
$$F(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i<j}x_ix_j\left(x_i^2+x_j^2\right).$$
Мы попробуем увеличить значение F, заменяя
$$x=(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1},0,\ldots,0)$$
на
$$x'=(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k+x_{k+1},0,\ldots,0)$$
(здесь x_{k+1} – последнее ненулевое число набора, $k\ge 2$):
$$F(x')-F(x)=x_kx_{k+1}\left(3(x_k+x_{k+1})\sum_{i=1}^{k-1}x_i-x_k^2-x_{k+1}^2\right)=$$
$$=x_kx_{k+1}\left(3(x_k+x_{k+1})(1-x_k-x_{k+1})-x_k^2-x_{k+1}^2\right)=$$
$$=x_kx_{k+1}\left((x_k+x_{k+1})\left(3-4(x_k+x_{k+1})\right)+2x_kx_{k+1}\right).$$
Так как
$$1\ge x_1+x_k+x_{k+1}\ge\frac{1}{2}(x_k+x_{k+1})+x_k+x_{k+1},$$
то
$$3/4>2/3\ge x_k+x_{k+1},$$
следовательно,
$$F(x')-F(x)>0.$$
Повторив указанную выше замену несколько раз, получим
$$F(x)\le F(a,b,0,\ldots,0)=$$
$$=ab\left(a^2+b^2\right)=\frac{1}{2}(2ab)(1-2ab)\le\frac{1}{8}=F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\ldots,0\right).$$
Значит, $C=1/8$. Равенство выполнено тогда и только тогда, когда два числа набора x_1, …, x_n равны между собой, а остальные числа равны нулю.

4. При $n=1$ в качестве p можно взять любое простое число. Если n четно, то четно и p; значит, $p=2$, $n=2$.
Пусть n – нечетное число, большее 1; обозначим через q наименьший простой делитель n. Очевидно, $p\ge 3$, $q\ge 3$.
Имеем:
$$(p-1)^{2n}\equiv 1(\mathrm{mod}\ q),\ (p-1)^{q-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\ q)$$
(по малой теореме Ферма). Обозначим через y наименьшее натуральное число такое, что $(p-1)^y\equiv 1(\mathrm{mod}\ q)$. Легко видеть, что y делит числа $2n$ и $q-1$. Но $\text{НОД}(n,q-1)=1$; следовательно, $y=1$ или $y=2$.
Значит, $(p-1)^n+1\equiv 2(\mathrm{mod}\ q)$ либо $(p-1)^n+1\equiv p(\mathrm{mod}\ q)$. В первом случае было бы $q=2$. Во втором случае $q=p$.
Пусть $n>q$. Вследствие выбора q имеем $\sqrt{n}\ge q$, $2q\ge q^2$, т.е. $q=2$.
Пусть $n=q$. В этом случае p^{p-1} делит число
$$(p-1)^p+1=p^2\left(p^{p-2}-C_p^1p^{p-3}+\ldots+C_p^{p-3}p-C_p^{p-2}+1\right),$$
откуда, поскольку все выражения в скобках, кроме одного, делятся на p, получаем $p-1\le 2$. Значит, осталось только $p=3$ и $n=3$.
Окончательно, решениями являются пары (2, 2), (3, 3) и (1, p), где p – произвольное простое число.

XXX Международная олимпиада школьников по физике

Задача 1. 1) $T=322$ К $=49$ °С, $p=102{,}32$ кПа; 2) $A=24{,}1$ Дж; 3) $W=84$ Дж; 4) $P=8{,}4$ Вт, $n=2{,}2\cdot10^{19}$ $с^{-1}$; 5) $\delta=2{,}8\cdot10^{-3}\approx0{,}3\%$; 6) $p'=p_0$, $T'=321$ К $=48$ °С.

Задача 2. 1) Магнитная индукция перпендикулярна плоскости рисунка 1 из статьи и направлена на читателя; 2) $k=i\mu_0/(2\pi d)$; 3) магнитная индукция в точке P^* равна $B(P^*)=k\,\mathrm{ctg}(\alpha/2)$ и направлена противоположно индукции в точке P; 4) $T=2\pi\sqrt{I/(\mu B)}$; 5) $0<\alpha<44°$.

Задача 3. 1) $V\approx1{,}306\cdot10^4$ м/с; 2) $\rho=2{,}333\cdot10^{10}$ м; 3) $\varphi\approx37{,}4°$, $v'=1{,}65\cdot10^4$ м/с; 4) $E=112$ ГДж;

5) $\Delta\theta=\pi-2\arccos\frac{1}{\sqrt{1+v'^4b^2/\left(G^2M^2\right)}}$;

6) $b_{\min}=4{,}90\cdot10^8$ м, $\Delta\theta_{\max}\approx87{,}4°$;

7) $v'' = \sqrt{v_0\left(v_0 + 2V\sin\Delta\theta\right) + 2V^2(1 - \cos\Delta\theta)}$;

8) $v'' = 2{,}62 \cdot 10^4$ м/с.

VI Российская олимпиада школьников по астрономии и космической физике

Теоретический тур

8 класс

1. Селенографическая широта должна быть больше $90^\circ - 1{,}5^\circ = 88{,}5^\circ$.

2. Чем дальше от полюса мира, тем более длинные дуги оставляют звезды (так как больше их угловая – относительно наблюдателя – скорость перемещения по небу), следовательно, их свет «размазывается» на большую площадь, что и приводит к уменьшению яркости дуг.

3. Вид ночного неба практически такой же, как и на Земле, однако Юпитер и Сатурн стали заметно ярче, а вот блеск Венеры и Меркурия ослаб в несколько раз. Видны также яркая Земля и ее спутник Луна. Быстро движутся два спутника Марса: Фобос и Деймос; при этом интересно, что Фобос восходит на западе, заходит на востоке, а за ночь может дважды пересечь небосвод. День на Марсе существенно отличается от земного. Диаметр солнечного диска в полтора раза меньше «нашего». Из-за разреженности атмосферы небо днем довольно темное, и на нем хорошо видны спутники Марса, планеты и даже некоторые звезды.

4. Телескоп увеличивает поток света от звезды, попадаемый в глаз наблюдателя, пропорционально отношению площадей объектива и выходного зрачка окуляра. При этом звезда попрежнему является для наблюдателя точечным объектом – просто ее звездная величина существенно уменьшается. Что же касается яркости неба, то она не увеличивается, а, как правило, наоборот, уменьшается – в этом легко убедиться, взглянув днем на небо в телескоп. Причина в том, что телескоп увеличивает не только поток света от яркого неба, но и угловой размер того кусочка неба, который виден в окуляр, как бы «размазывая» его свет на большую площадь. При этом яркость неба, видимого в окуляр, остается неизменной при нормальном (равнозрачковом) увеличении (или меньшем), а при увеличении больше нормального (которое, как правило, и используется при наблюдениях) вообще выглядит менее ярким, чем невооруженным глазом. Таким образом, в окуляр мы видим существенно более яркие звезды на фоне либо такого же, либо существенно потемневшего неба.

5. В 17 часов 39 минут.

6. Дело во влиянии атмосферы на качество изображения. Неоднородности воздуха создают непрерывно появляющиеся и исчезающие «воздушные линзы», немного отклоняющие свет; размер этих «линз» составляет десятки сантиметров. Диаметр объективов маленьких телескопов обычно меньше размеров «воздушных линз», поэтому при перемешении неоднородностей изображение дрожит, но остается резким. В большой телескоп попадает свет, прошедший сразу через несколько «линз», каждая из которых отклоняет лучи случайным образом. Поэтому изображение не дрожит, а становится размытым, и мелкие детали на поверхности планет оказываются неразличимыми.

9 класс

5. Через $t \approx 4{,}5 \cdot 10^9$ с ≈ 140 лет.

6. Вариантов может быть много (в зависимости от фантазии отвечающего), но все они сводятся к использованию второго закона Ньютона.

10 класс

1. Близко ко дню зимнего солнцестояния, т.е. в конце декабря.

2. Цвет звезды зависит от распределения энергии в ее видимом спектре. Если ученый не ошибся и по спектральным линиям поглощения звезда имеет спектральный класс А0, то это могло произойти в одном случае – если излучение звезды испытало сильное межзвездное поглощение. Как известно, слой межзвездной пыли сильнее поглощает коротковолновое излучение, чем длинноволновое (как и при рассеянии света в земной атмосфере). Поскольку пыль сосредоточена в тонком слое в диске Галактики, звезда должна находиться в полосе Млечного Пути.

3. $S = 21$ ч 42 мин 24 с.

4. Правильным является ответ 4).

5. Через $t \approx 4{,}5 \cdot 10^9$ с ≈ 140 лет.

6. Здесь нужно рассмотреть два аспекта: 1) достаточно ли яркая Луна, чтобы быть видимой с Марса; 2) достаточно ли угловое расстояние между Землей и Луной, чтобы для невооруженного глаза они не сливались в один светящийся объект. Обсудим их по отдельности.

1) Расстояние от Луны до Марса меняется от 0,52 а.е. до 2,52 а.е. и в среднем составляет 1,52 а.е. При этом, если бы Луна наблюдалась с Марса в свое полнолуние, ее звездная величина была бы равна

$$m \approx -12{,}8^m + 5\lg(1{,}52 \cdot 150000/384) \approx -12{,}8^m + 13{,}9^m \approx +1{,}1^m.$$

При наибольшем удалении Луны от Марса аналогично получаем $m \approx +2{,}2^m$. Таким образом, хотя Луна на Марсе в темное время суток не может наблюдаться в полнолуние, имеется достаточный запас яркости для того, чтобы она была хорошо видна невооруженным глазом в других конфигурациях.

2) Угловое расстояние между Луной и Землей достаточно велико – даже в случае наибольшего удаления Земли от Марса оно составит $\arcsin\left((384/150000)/2{,}52\right)$, что соответствует примерно 3,5 угловым минутам. Так что система будет вполне разрешаема глазом.

Таким образом, Луну на Марсе не просто можно увидеть, скорее ее сложно не заметить.

11 класс

1. Ширина полосы по оси звездных величин составляет $2{,}5\lg 2 \approx 0{,}75^m$.

3. а) $R_п = R_0$, $R_а \approx 35700$ км; б) $V_а \approx 4{,}2$ км/с; в) $M \approx 2{,}16 \cdot 10^{25}$ кг.

5. $\alpha \approx 22{,}5^\circ$. **6.** $m \approx 1{,}6^m$ (см. задачу 6 для 10 кл.).

Избранные задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады

1. 20. *Указание.* Докажите, что имеется 40 необычных пассажиров.

2. 110. *Указание.* Можно перекрасить все клетки, за исключением клеток главной диагонали, если каждый раз перекрашивать две белые клетки, симметричные относительно главной диагонали.

3. Любой кусок при подходящем n заключен между $12 \cdot 10^n$ и $13 \cdot 10^n$. Поэтому произведение двух кусков заключено между числами вида $144 \cdot 10^m$ и $169 \cdot 10^m$, откуда следует, что вторая цифра произведения двух кусков равна 4, 5 или 6.

4. а) Если циссильванец не входит в тройку жителей, указавших друг на друга, то он не вампир. Число 1999 не кратно трем.

б) Рассортируем письма на пачки, собрав вместе письма, где указаны одни и те же сотрудники, и рассмотрим пачки, в которых количество писем не кратно 200. Все эти письма от сумасшедших, поскольку письма здоровых сотрудников лежат в одной отдельной пачке. Поскольку общее количество писем в выбранных пачках дает остаток 199 при делении на 200, в них содержится не менее 199 писем.

5. Нельзя. Предположим, что числа разбиты на группы в соответствии с условием. Будем называть число *большим*, если оно является одним из двух наибольших чисел в своей группе, и *маленьким*, если не является. В каждой группе сумма двух наибольших чисел не превосходит 1999 + 1998= = 3997, поэтому сумма остальных (маленьких) чисел группы не превосходит 3997 /9 < 445. Следовательно, маленькие числа не превосходят 444. Так как в каждой группе есть хотя бы одно маленькое число, разбиение состоит не более чем из 444 групп. Значит, количество больших чисел не превосходит 888 и всего больших и маленьких чисел не более 888 + 444, что меньше 1999. Противоречие.

6. Предположим, что такие x и y существуют. Возведем обе части равенства в куб:

$$p = x + 3\sqrt[3]{xy}\cdot\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{xy}\cdot\sqrt[3]{y} + y = x + y + 3\sqrt[3]{xy}\cdot\sqrt[3]{p}.$$

Отсюда легко получить, что pxy – куб натурального числа. Следовательно, хотя бы одно из чисел x, y кратно p, но $x < p$ и $y < p$.

7. Для любых островитян A и B рассмотрим *кратчайшую* цепочку переводчиков, с помощью которой они могут общаться между собой. Предположим, что в цепочке 16 или более переводчиков. Добавим A в начало, B – в конец; получится цепочка не менее чем из 18 человек. Заметим, что 1-й, 3-й, 5-й, ..., 13-й и 15-й человек в цепочке говорят на разных языках (иначе цепочку можно было бы сократить), поэтому вместе они знают по крайней мере 8 · 5 = 40 различных языков. Эти языки неизвестны 17-му и 18-му, поэтому на долю этих двоих остается не более пяти языков. Значит, 17-й и 18-й знают одни и те же пять языков. Это противоречит тому, что цепочка – кратчайшая.

8. Они пересекаются в середине стороны AC.

9. Пусть $a + b + c + d = p$ – простое число. Так как $(a+b)^2 - ab = (c+d)^2 - cd$, то

$$ab - cd = (a+b)^2 - (c+d)^2 = (a+b+c+d)(a+b-c-d).$$

Следовательно,

$$(a+c)(b+c) = ab + ac + cb + c^2 \equiv cd + ac + cb + c^2 = pc \equiv 0 \pmod{p},$$

произведение $(a+c)(b+c)$ кратно p. Но оба множителя $a + c$ и $b + c$ больше 1 и меньше p.

10. Если у прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата $ABCD$, одна из вершин совпадает с B, а противоположная вершина лежит на диагонали AC, то периметр прямоугольника равен $2a$, где a – длина стороны квадрата.

Рассмотрим прямоугольник разбиения, содержащий вершину B. Поскольку его можно уменьшить до прямоугольника, вершина которого лежит на диагонали AC, то периметр рассматриваемого прямоугольника больше $2a$. Осталось заметить, что любой прямоугольник с периметром больше $2a$ пересечен диагональю BD.

11. Наибольший общий делитель d любых двух соседних членов последовательности равен наибольшему общему делителю первых двух ее членов. Продолжая написанную на доске последовательность, мы будем брать разность до тех пор, пока в последовательности дважды подряд не появится число d. Таким же образом мы продолжим последовательность влево (т.е. в направлении убывания номеров, добавляемым членам будем присваивать нулевой и отрицательные номера) до тех пор, пока в ней тоже не появится два раза подряд число d. Повторив фрагмент «от левых двух d до правых двух d», мы повторим в том числе и начальный фрагмент последовательности.

12. *Указание.* Каждая диагональ шестиугольника лежит в плоскости, проходящей через два противоположных ребра куба.

13. Добавим «виртуальную» машину, которая начнет движение ровно через 2 минуты после первой. Поскольку состояния светофоров меняются с периодом 2 минуты, то каждый светофор виртуальная машина будет проезжать ровно через 2 минуты после первой и поэтому никогда не догонит первую машину. Вторая машина никогда не обгонит виртуальную машину, а потому не догонит и первую машину.

15. *Указание.* Докажите, что число a_k при четных k делится на 3, а при $k = 2^n(2m-1) - 1$, где n, m – натуральные числа, делится на $2^{2^n} + 1$.

16. Для всех n, являющихся степенями двойки.

21. 2525.

Московская олимпиада студентов по физике

1. $a = 2\omega v_0$. **2.** $v_{\text{ср}} = \sqrt{v_0^2 + \left(F/(m\omega)\right)^2}$.

3. $A = mgh + \dfrac{mv_0^2}{2}\left(\sqrt{\dfrac{l}{l-h}} - 1\right)$. **4.** $f = \sigma^2 R/(2\varepsilon_0)$.

5. $\varphi = Q/(6\pi\varepsilon_0 R)$. **6.** $I_{\text{ср}} = U_0/(4\omega L)$.

7. $I = 2I_0\left(w_2^2 + w_1^2\right)/\left(w_1 + w_2\right)^2$.

8. $\Delta S = -\dfrac{m}{\text{M}} C_V \ln\dfrac{T}{2^{\gamma-1}T_0}$. **9.** $Q = (m/\text{M})RT/2$.

10. $I_{\max} = I_0\left(\dfrac{1}{2} + \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$, $I_{\min} = I_0\left(\dfrac{1}{2} + \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.В.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, М.М.Константинова, А.И.Пацхверия, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

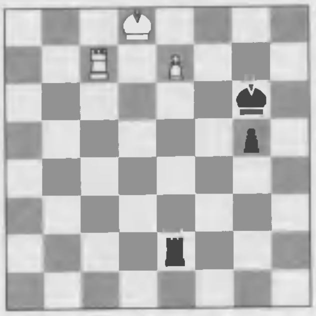
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени ГУП Чеховский полиграфический комбинат Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций 142300, г.Чехов Московской области, Тел. (272) 71-336. Факс (272) 62-536

Заказ №

Партия столетия, или Королевские этюды-III

Ладейные окончания – любимый этюдный жанр шахматных королей.



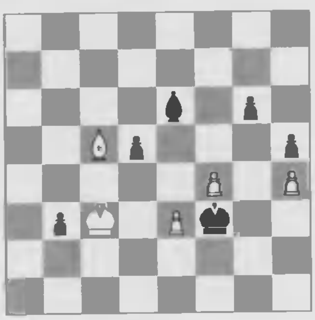
М.Ботвинник, 1941

Выигрыш

Только ничью дает 1. ♖c2 ♜e4 2. e8♕+ ♜:e8+ 3. ♔:e8 ♚f5 4. ♖g2 g4 5. ♔f7 ♚f4 6. ♔g6 g3 7. ♔h5 ♚f3, поэтому ладью надо забрать сразу.

1. e8♕+! ♜:e8+ 2. ♔:e8 ♚f5 3. ♖g7!! g4 4. ♔f7 ♚f4 5. ♔g6! g3 6. ♔h5 ♚f3 7. ♔h4 g2 8. ♔h3, и пешка остановлена.

Большое аналитическое искусство и увлечение композицией наверняка помогли Ботвиннику взойти на престол. Не случайно многие его комбинации и сюрпризы в отложенных партиях носили чисто этюдный характер.

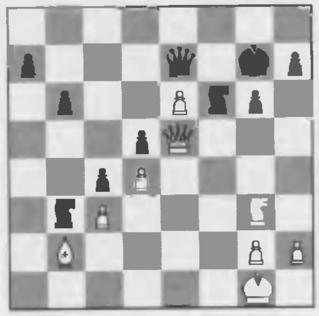


А.Котов – М.Ботвинник
Москва, 1955

В процессе игры на доске возник настоящий этюд.

1...g5! 2. fg. При другом взятии решает рейд крайней пешки: 2. hg h4 3. ♗d6 ♝f5 4. g6 ♝:g6 5. f5 ♝:f5 6. ♔:b3 ♚g2 и т.д. **2...d4+!** Черным важно сохранить пешку «b». **3. ed.** Не спасает и 3. ♗:d4 ♚g3 4. g6 ♚:h4 5. ♔d2 ♚h3! 6. ♗f6 h4 7. ♔e2 ♚g2. **3...♚g3 4. ♗a3 ♚:h4 5. ♔d3 ♚:g5 6. ♔e4 h4 7. ♔f3 ♝d5+. Белые сдались.**

Однажды югославское телевидение провело своеобразный конкурс красоты. Специалисты отобрали десять знаменитых партий XX века и показали их телезрителям. В качестве жюри выступили чуть ли не два миллиона любителей шахмат. И партией столетия был признан следующий знаменитый поединок:



М.Ботвинник – Х.Р.Капабланка
Роттердам, 1938

Окончание представляет собой истинный этюд!

30. ♗a3! ♛:a3 31. ♘h5+! gh 32. ♕g5+ ♚f8 33. ♕:f6+ ♚g8 34. e7 ♛c1+ 35. ♔f2 ♛c2+ 36. ♔g3 ♛d3+ 37. ♔h4 ♛e4+ 38. ♔:h5 ♛e2+ 39. ♔h4 ♛e4+ 40. g4 ♛e1+ 41. ♔h5. Черные сдались.

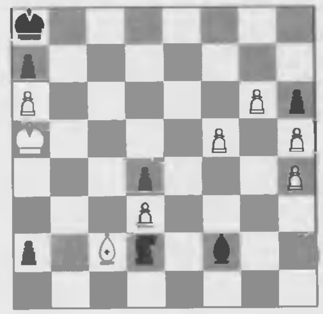
Блестящая комбинация Ботвинника исследуется уже 60 лет, причем обнаруживаются все новые и новые нюансы. Выяснилось, например, что кроме 40. g4 решало и 40. ♔h3. Впрочем, здесь комбинацию можно считать завершенной. Другое дело – ситуация после 33-го хода черных. Один шахматист обнаружил дуаль: привел вариант, в котором белые побеждают, продвигая пешку «е» ходом позднее – 34. ♕f7+ ♚h8 35. e7 ♛c1+ 36. ♔f2 ♛d2 37. ♔g3 ♛:c3+ 38. ♔h4 ♛:d4+ 39. ♔:h5 ♛e5+ 40. ♔g4 ♛e4+ 41. ♔h3 ♛e3+ 42. g3 ♛h6+ 43. ♔g2 ♛d2+ 44. ♕f2, и пешка неудержима.

Однако спустя некоторое время другой любитель указал, что на 37-м ходу черные не должны прельщаться пешкой c3, а правильно 37...♛g5+! (вот где сказывается отсутствие ферзя на f6) 38. ♔f3 ♞:d4+ 39. cd (в случае 39. ♔f2 ♛d2+ выигрывают уже черные) 39...♛g4+ 40. ♔e3 ♛e4+ 41. ♔f2 ♛:d4+, и белому королю не уйти от преследования. Правда, вскоре было установлено, что шах ферзем все-таки вел к цели. Только после 34. ♕f7+ ♚h8 белым не надо спешить с движением своей проходной, а следует сделать тихий ход 35. g3! Похоже, черные беспомощны: 35...♞d2 (35...♛c1+ 36. ♔g2 ♛c2+ 37. ♔h3) 36. e7 ♞f3+ 37. ♔g2 ♛b2+ 38. ♔:f3 ♛:c3+ 39. ♔g2, или 35...♞:d4 36. e7 ♞e2+ 37. ♔f2 ♛c5+ 38. ♔:e2 и т.д.

Вполне возможно, что это не последнее уточнение этюдной комбинации Ботвинника, но ее старт — ♗a3! и ♘h5! – вряд ли вызовет у кого-нибудь сомнения.

* * *

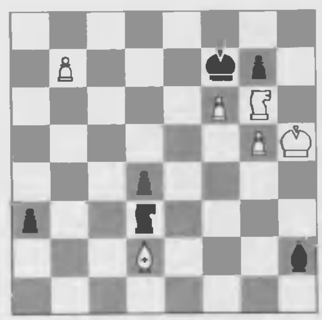
Василий Смыслов в молодости увлекался шахматной композицией, составил немало интересных этюдов. Впоследствии он время от времени возвращался к этому занятию, а спустя полвека, оставив из-за ухудшившегося зрения практическую игру, Смыслов вновь серьезно взялся за этюдное творчество и в 1998 году создал более десятка замечательных этюдов.



В.Смыслов, 1936

Выигрыш

1. ♗b1! a1♛+ 2. ♔b5 ♝g3! 3. g7 ♝b8! 4. g8♗! ♝f4 5. ♗a2! ♝:d2 6. f6 ♝f4. 7. f7 ♝d6 8. ♔c6 ♝f8 9. ♔c7 с неизбежным ♗d5×.



В.Смыслов, 1937

Ничья

1. ♘h8+ ♚g8. После 1...♔f8 2. ♘g6+ проигрывает 2...♔e8 – 3. fg ♚f7 4. ♔h6, а 2...♚g8 ведет к простой ничьей – 3. ♘e7+ ♚f7 4. fg ♚:g7 5. ♘f5+ и 6. ♘:d4. **2. f7+ ♚f8 3. ♔g6! a2 4. ♗h7! a1♛ 5. g6!** Три скрытых, подлинно смысловских хода, и нависла страшная угроза 6. ♗h6. **5...♛h1 6. ♗h6!** Все-таки! **6...♝f4 7. b8♕+! ♝:b8.** Уникальный случай: пат с замурованием коня и связкой слона, причем обе фигуры попали на свои места в процессе остроумной борьбы...

Е.Гик

Индекс 70465

53-12

ФИЗИКИ НА МОНЕТАХ МИРА

Важнейшим следствием сделанного ГЕНРИХОМ ГЕРЦЕМ открытия электромагнитных волн стало развитие средств радиосвязи и телекоммуникаций.

Портрет ученого представлен на монете Германской Демократической Республики достоинством в 5 марок 1969 года выпуска.

Различные элементы телекоммуникационных систем, включающих телецентры различных уровней, спутники связи и наземные пункты спутниковой связи, представлены на монете Египта достоинством в 5 фунтов, банкнотах Малайзии – 2 ринггита, Гамбии – 10 даласи и Анголы – 50000 кванза.

(Подробнее о Г.Герце и его знаменитых опытах по проверке теории электромагнитных волн – внутри журнала.)