

ЯНВАРЬ/ФЕВРАЛЬ

ISSN 0130-2221

2000 · №1

# КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ





## *«Квант» — 30 лет!*

*Мы хотим поздравить с этим юбилеем вас, дорогие читатели, наших верных друзей и строгих судей. Мы знаем, что среди вас есть такие, кто упорно подписывается на «Квант» все 30 лет его жизни. Есть и такие, кто в школьные годы сами читали наш журнал, а теперь выписывают его для своих детей. Есть и те, кто открыл наш журнал сравнительно недавно.*

*Мы любим вас всех и приложим все силы, чтобы ни один номер журнала не обманул ваших ожиданий.*

*Успехов вам, дорогие друзья!*

*Редакция и редакционная коллегия  
журнала «Квант»*



# КВАНТ

 ЯНВАРЬ 2000 № 1  
ФЕВРАЛЬ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЕ ЗАМЕСТИТЕЛИ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.С.Кротов, С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,  
А.Н.Виленин, С.А.Гордюнин,  
Н.П.Долбилин, В.Н.Дубровский,  
А.А.Егоров, А.Р.Зильберман,  
С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,  
В.В.Можаяев, В.В.Произолов, Н.Х.Розов,  
Ю.П.Соловьев, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров

(заместитель главного редактора),

В.А.Тихомирова, В.М.Уровев,  
А.И.Черноуцан

(заместитель главного редактора),

И.Ф.Шарыгин

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,  
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,  
Ю.А.Данилов, Н.Н.Константинов,  
Г.Л.Коткин, Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев,  
А.И.Шапиро

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,  
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,  
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,  
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,  
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И.Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,  
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,  
М.Л.Смолянский, Я.А.Смородинский,  
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро Квантум

©2000, Президиум РАН,  
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 Страсти по сверхпроводимости в конце тысячелетия.  
*А.Буздин, А.Варламов*
- 9 Малая теорема Ферма. *В.Сендеров, А.Спивак*

#### ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 17 Эрнст Аббе и «Карл Цейс Йена». *А.Васильев*

#### ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 20 Задачи М1711–М1720, Ф1718–Ф1727
- 22 Решения задач М1691–М1695, Ф1703–Ф1712

#### «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 27 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»
- 28 Задачи
- 29 Арбузная пошлаина. *А.Котова*

#### ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 31 Как студент огород поливал. *А.Стасенко*
- 35 Сколько пузырьков в шампанском? *А.Стасенко*

#### КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Взаимосвязь вещества и гравитационного поля

#### ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 38 Внутренняя энергия идеального газа. *А.Черноуцан*

#### МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 41 Две задачи Архимеда. *Л.Шибасов*

#### ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 44 Движение по окружности. *А.Овчинников, В.Плис*

#### ВАРИАНТЫ

- 48 Материалы вступительных экзаменов 1999 года
- 5 Ответы, указания, решения

#### НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье А.Буздина и А.Варламова*
- II *«Кванту» — 30 лет*
- III *Шахматная страничка*
- IV *Игрушки по физике*

# Страсти по сверхпроводимости в конце тысячелетия

*А.БУЗДИН, А.ВАРЛАМОВ*

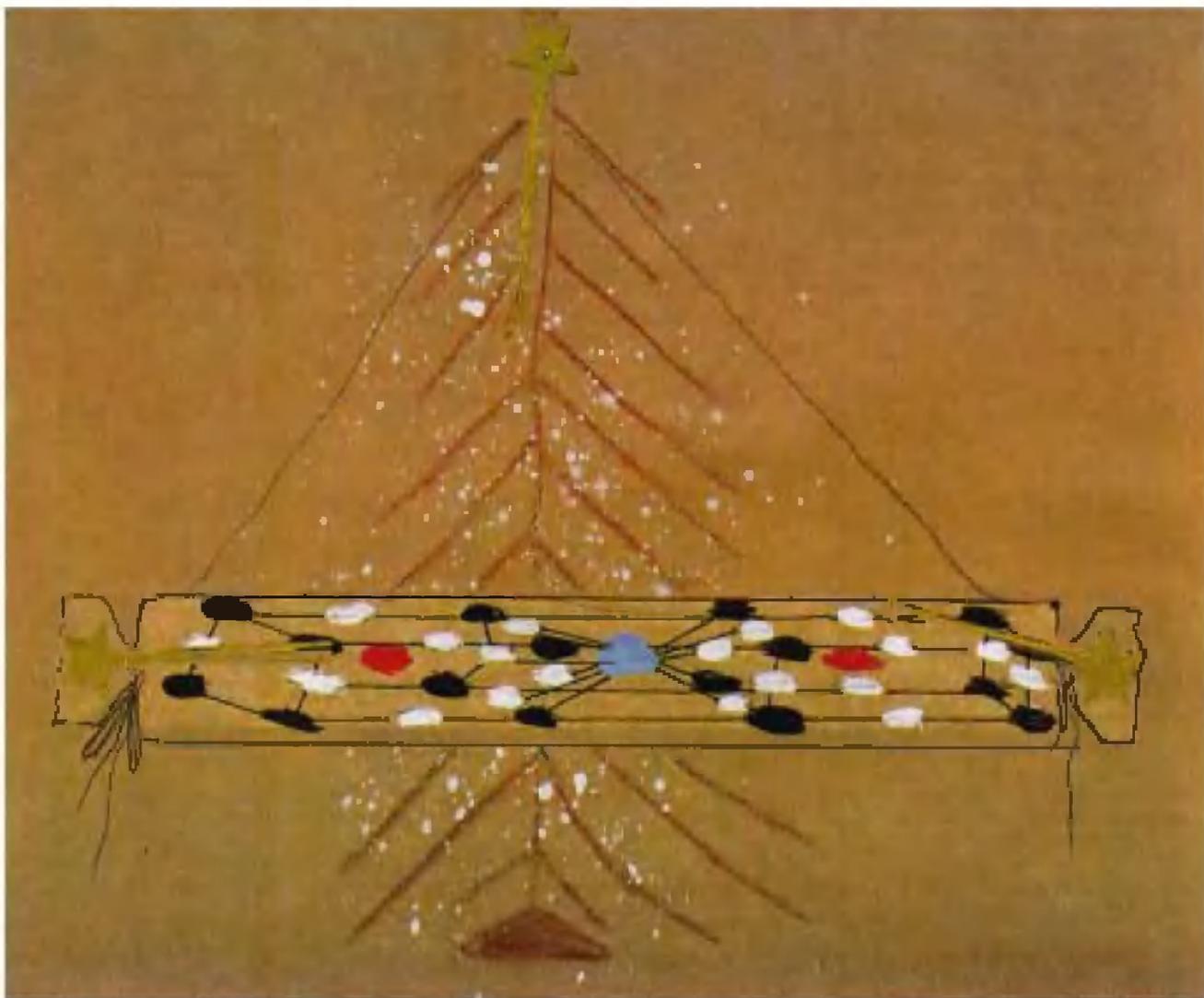
**Б**ЕЗУСЛОВНО, САМОЕ ЯРКОЕ событие в физике конца уходящего столетия – это открытие нового класса сверхпроводников, электрическое сопротивление которых в точности обращается в ноль при температурах вплоть до 165 кельвинов (всего на 20 градусов ниже

рекордно низкой температуры воздуха, зарегистрированной на российской полярной базе «Восток» в Антарктиде). По своему практическому значению это открытие сегодня сравнивают с обнаруженным в начале XIX века явлением электромагнитной индукции. В XX же веке его

можно поставить в один ряд с открытием деления урана, созданием лазера, открытием полупроводников...

## **Начнем с конца**

Начало новому захватывающему этапу в развитии сверхпроводимости положила работа А.Мюллера и



Г.Беднорца из исследовательской лаборатории фирмы IBM в Швейцарии. На рубеже 1985–1986 годов этим ученым удалось синтезировать соединение лантана, бария, меди и кислорода, так называемую металлооксидную керамику La–Ba–Cu–O, которое проявляло признаки сверхпроводимости при рекордно высокой по тем, еще недавним, временам температуре в 35 кельвинов! Статья под осторожным названием «Возможность высокотемпературной сверхпроводимости в системе La–Ba–Cu–O» была отклонена ведущим американским физическим журналом «Physical Review Letters» – научное сообщество за последние двадцать лет устало от многочисленных ложных сенсаций по поводу открытия то в одном, то в другом месте мифического высокотемпературного сверхпроводника и таким образом ограждало себя от очередного бума. Мюллер и Беднорц отослали статью в немецкий журнал «Zeitschrift für Physik». Сейчас, когда сверхпроводящий бум действительно разразился и даже несколько угас, а исследования высокотемпературных сверхпроводников ведутся в сотнях лабораторий, почти каждая из тысяч статей, посвященных исследованию нового явления, начинается со ссылки на эту публикацию, осенью же 1986 года она прошла почти незамеченной.<sup>1</sup> Лишь одна японская группа на всякий случай перепроверила и... подтвердила заявленный в этой статье результат. Затем феномен высокотемпературной сверхпроводимости был подтвержден американскими, китайскими, советскими физиками...

В начале 1987 года весь мир охватила лихорадка поиска новых и исследования свойств уже обнаруженных сверхпроводников. Критическая температура быстро повышалась: для соединения La–Sr–Cu–O она составила уже 45 К, для La–Ba–Cu–O (под давлением) поднялась до 52 К и, наконец, в феврале 1987 года, когда американец Пол Чу догадался сымитиро-

вать действие внешнего давления заменой атомов лантана соседними по столбцу таблицы Менделеева, но меньшими по размеру атомами иридия (Y), критическая температура синтезированного соединения  $YBa_2Cu_3O_7$  перевалила через заветный «азотный рубеж», достигнув 93 кельвинов.

Это был долгожданный триумф, однако еще не конец истории: в 1988 году синтезируется соединение, состоящее уже из пяти элементов, типа Ba–Ca–Sr–Cu–O с критической температурой 110 К, а несколько позже – ртутные и таллиевые его аналоги с температурой 125 К. Под давлением в 300 атм предельная критическая температура ртутного рекордсмена уже неплохо звучит и в шкале Цельсия:  $-108\text{ }^\circ\text{C}$ !

Открытие высокотемпературной сверхпроводимости во многом уникально для современной физики. Во-первых, оно сделано всего двумя учеными и очень скромными средствами. Во-вторых, в состав обнаруженных соединений входят легкодоступные элементы, и в принципе такие сверхпроводники могут быть приготовлены за день работы в школьном кабинете химии. Какой разительный контраст с открытиями в других областях физики, скажем физики высоких энергий! Здесь исследования ведутся большими «командами» ученых – перечисление авторов статьи иногда занимает целую журнальную страницу, а используемое оборудование стоит многие миллионы долларов. Новое открытие внушает оптимизм – время исследователей-одиночек в физике еще не миновало! Наконец, несмотря на то, что его ждали семьдесят пять лет, это открытие застало всех врасплох. Теоретики могли только развести руками, и чем выше становилась критическая температура по мере открытия все новых и новых сверхпроводников, тем шире руки приходилось разводить.

Так случайно или закономерно открытие Мюллера и Беднорца? Можно ли было синтезировать вещество со столь уникальными свойствами раньше? Как непросто дать ответы на эти вопросы. Мы давно привыкли к тому, что все новое получается на грани возможностей: с применением уникальных установок, сверхсильных полей, сверхнизких температур, сверхвысоких энер-

гий. Здесь же ничего такого нет, «испечь» высокотемпературный сверхпроводник, как говорилось, не так уж сложно – с этим вполне мог бы справиться квалифицированный средневековый алхимик. Стоит вспомнить, что два десятка лет назад во многих лабораториях мира интенсивно исследовалось весьма необычное сверхпроводящее соединение – так называемое алхимическое золото. Это название соединение получило за свой желтый блеск и большой удельный вес, что делало его похожим на благородный металл. Синтезированное алхимиками еще в средние века, оно, бывало, выдавалось за настоящее золото и рекламировалось как результат успешного применения философского камня. Алхимическое золото – довольно сложное соединение, и, как знать, не «испекли» ли бы высокотемпературный сверхпроводник в средние века, обладай он золотым блеском?

Что касается средних веков, то там, конечно, все обстоит в высшей степени проблематично, но читателю, по-видимому, любопытно будет узнать, что некоторые из сегодняшних высокотемпературных сверхпроводников лежали на полке лабораторного шкафа с... 1979 года! Именно тогда в Институте общей и неорганической химии АН СССР они были синтезированы И.С.Шаплагиным с соавторами совсем для других целей. Однако измерений проводимости этих соединений при низких температурах, позволивших бы обнаружить новое явление, проведено не было – открытие не состоялось...

### От удивления – к пониманию

Теперь, когда во всем мире обсуждают свойства высокотемпературных сверхпроводников и перспективы их применений в науке и технике, многие моменты истории развития сверхпроводимости высвечиваются не так, как было до этого выдающегося открытия.

Впервые о сверхпроводимости, одном из самых ярких и необычных явлений физики твердого тела, стало известно 28 апреля 1911 года, когда нидерландский физик Г.Камерлинг-Оннес на заседании Королевской академии наук в Амстердаме сообщил о только что обнару-

<sup>1</sup> Нобелевская премия по физике 1987 года присуждена А.Мюллеру и Г.Беднорцу. О чрезвычайной важности сделанного или открытия свидетельствует тот факт, что между выходом в свет статьи и присуждением премии прошло немногим более года.

женном им эффекте – полном исчезновении электрического сопротивления ртути, охлажденной жидким гелием до температуры 4,15 кельвина. Хотя этого открытия никто не ожидал и оно противоречило существовавшей в те времена классической электронной теории металлов, тот факт, что первооткрывателем сверхпроводимости стал Камерлинг-Оннес, был не случаен. Дело в том, что именно ему первому удалось решить труднейшую научную и техническую задачу того времени – получить жидкий гелий (температура кипения 4,16 К), возможность работать с которым позволила заглянуть в неведомый мир температур, близких к абсолютному нулю. Он решил тут же применить появившееся средство исследования для выяснения низкотемпературного поведения сопротивления чистых металлов. В это время шла оживленная теоретическая дискуссия – обращается ли в ноль или остается конечным сопротивление чистого металла в абсолютном нуле температуры. Будучи сторонником первой точки зрения, Камерлинг-Оннес с удовлетворением воспринял полученный на ртути результат, однако вскоре осознал, что обращение сопротивления в ноль при конечной температуре является совсем иным эффектом.

Подчеркнем, что в сверхпроводящем состоянии сопротивление образца электрическому току равно нулю не приблизительно, а строго. Поэтому по сверхпроводящей замкнутой цепи ток может сколь угодно долго циркулировать не затухая. Самое длительное существование незатухающего сверхпроводящего тока – около двух лет – было зафиксировано впоследствии в Англии (этот ток циркулировал бы в кольце и поныне, если бы не перерыв в снабжении лаборатории жидким гелием, вызванный забастовкой транспортных рабочих). Даже спустя два года не было замечено никакого ослабления тока.

Вскоре после открытия сверхпроводимость обнаружили не только в ртути, но и в целом ряде других металлов. Перспективы практического применения открытого явления казались безграничными: линии передачи электроэнергии без потерь, сверхмощные магниты, элект-

ромоторы и трансформаторы новых типов и так далее. Однако два препятствия встали на пути реализации этих планов. Первое – это чрезвычайно низкие критические температуры, при которых явление сверхпроводимости наблюдалось во всех известных материалах. Для охлаждения сверхпроводников до столь низких температур приходилось пользоваться остродефицитным гелием (запасы его на Земле ограничены, и получение одного литра жидкого гелия даже сейчас обходится в несколько долларов). Это обстоятельство делало многие заманчивые проекты использования сверхпроводимости попросту нерентабельными. Второе препятствие – его вскоре обнаружил сам Камерлинг-Оннес – связано с тем, что сверхпроводимость оказалась весьма «капризной» по отношению к магнитному полю (а следовательно, и к предельной величине протекающего тока): в сильных полях она разрушалась.

Следующим фундаментальным свойством сверхпроводящего состояния, обнаруженным в 1933 году, оказался так называемый эффект Мейснера – Оксенфельда: полное «выталкивание» массивным сверхпроводником магнитного поля из своего объема.

Сущность феномена сверхпроводимости оставалась совершенно необъяснимой с точки зрения классической теории металлов, а квантовая теория в то время лишь начинала создаваться. Была предложена так называемая феноменологическая двухжидкостная модель, в которой принималось сосуществование в сверхпроводящем металле двух сортов электронов: обычных, взаимодействующих с решеткой, и особых, сверхпроводящих, с решеткой по каким-то причинам не взаимодействующих. Это позволило братьям Х. и Ф. Лондонам написать уравнения электродинамики сверхпроводника, описывающие эффект Мейснера – Оксенфельда и некоторые другие свойства, однако микроскопическая природа сверхпроводимости оставалась загадкой.

Открытие в 1938 году П.Л. Капицей явления сверхтекучести – протекания жидкого гелия без какой-либо вязкости через сколь угодно тонкие капилляры при температурах ниже 2,18 К – и последующее

объяснение этого явления Л.Д. Ландау породили надежды на скорое понимание феномена сверхпроводимости. Оказалось, что при низких температурах в системе атомов гелия, являющихся квантовыми частицами с целым спином, происходит их накапливание на самом низком энергетическом уровне. Ландау показал, что при этом в энергетическом спектре возбуждений появляется характерная щель, приводящая к возможности сверхтекучего состояния. Это чисто квантовое, однако проявляющееся в макроскопическом масштабе, явление позволило Ландау назвать жидкий гелий «окном в квантовый мир».

Механически перенести ту же идеологию на сверхпроводимость, т.е. трактовать ее как сверхтекучесть электронов в металле, не удалось. Дело в том, что поведение квантовой системы электронов (частиц с полуцелым спином – так называемых фермионов) кардинально отличается от поведения системы атомов гелия (частиц с целым спином – бозонов). Здесь и при нулевой температуре могут возникать возбуждения со сколь угодно малыми энергиями, а следовательно, не выполняется сформулированный Ландау критерий сверхтекучести. Естественное желание свести задачу к предыдущей наталкивало на мысль создать из двух электронов-фермионов один составной бозон с суммарным целым спином, после чего реализовать для сверхпроводимости схему сверхтекучести по Ландау. Однако этому, очевидно, мешало кулоновское отталкивание между двумя электронами, пусть даже и сильно экранированное в электронейтральном металле.

Прошло еще десять лет, и в 1950 году был открыт так называемый изотопический эффект, который впервые указал на связь явления сверхпроводимости с кристаллической решеткой металла. При измерении критической температуры свинца обнаружилось, что она зависит от массового числа исследуемого изотопа, т.е. сверхпроводимость перестала быть чисто электронным явлением. Чуть позже Х. Фрелих и Дж. Бардин независимо показали, что взаимодействие электронов с колебаниями решетки – фононами – может приводить к притяжению. Это притяжение в принципе может

даже эффективно превышать кулоновское отталкивание между электронами, однако не следовало забывать об огромных кинетических энергиях электронов, казалось бы, разрывающих найденную слабую связь. Составные бозоны снова не получились.

В том же 1950 году на основе накопленного экспериментального материала и развития теоретических представлений о физике твердого тела, жидущихся на применении квантовой механики и статистической физики, В.Л.Гинзбург и Л.Д.Ландау создают новую феноменологическую теорию сверхпроводимости — так называемую теорию Гинзбурга — Ландау. Эта теория оказалась настолько провидческой и успешной, что и сегодня является мощным инструментом исследования сверхпроводимости, несмотря на прошедшие 50 лет и последующее создание микроскопической теории сверхпроводимости.

В 1957 году американскими учеными Дж.Бардином, Л.Купером и Дж.Шриффером собираются воедино упомянутые выше намеки и идеи и формулируется последовательная микроскопическая теория сверхпроводимости. Явление сверхпроводимости действительно оказалось связанным с возникновением в металлах притяжения между электронами. Природа этого притяжения носит сугубо квантовый характер. Большие кинетические энергии электронов, обусловленные особенностями основного состояния квантовой системы фермионов, не помеха: спаривание возникает не между самими электронами, а между низкоэнергетическими возбуждениями в этой системе — квазичастицами. Они имеют тот же заряд, что и электрон, и некоторую эффективную массу, однако в металлической фазе их энергии могут быть сколь угодно малыми. Притяжение приводит к перестройке и этого спектра и к «открытию» в нем так необходимой для выполнения критерия сверхтекучести Ландау щели. В качестве нестройной аналогии можно привести пример двух шариков, лежащих на резиновом коврике. Если эти шарики далеки друг от друга, то каждый из них деформирует коврик, образуя вокруг себя лунку. Если же положить сначала один шарик, а затем недалеко от

него другой, то их лунки сольются в одну и шарики скатятся вместе на дно общей лунки. Часть квазичастиц (обычно, после введения в теорию, их снова называют электронами) при достаточно низких температурах как бы объединяются в связанные (так называемые куперовские — по имени их первооткрывателя) пары, которые, пребывая в особом, квантовом состоянии, переносят электрический ток без потерь энергии. Размеры таких пар в атомном масштабе весьма велики — они могут достигать сотен и тысяч межатомных расстояний. Поэтому следует представлять их не как два электрона, связанных друг с другом наподобие двойной звезды, а, скорее, как двух партнеров, пришедших вместе в дискотеку, но танцующих, может быть, в разных концах зала, когда их разделяют десятки других танцоров.<sup>2</sup> Таким образом, сверхпроводимость — не что иное, как макроскопическое квантовое явление.

Итак, потребовалось почти полвека с момента открытия сверхпроводимости, прежде чем был достигнут качественный прогресс в понимании природы этого удивительного явления и создана его последовательная теория. Этот период можно считать первым этапом в изучении сверхпроводимости.

### В поисках высоких критических параметров

Создание теории сверхпроводимости послужило мощным импульсом ее целенаправленного исследования. Без преувеличения огромный прогресс был достигнут в получении новых сверхпроводящих материалов. Важную роль сыграло тут открытие А.А.Абрикосовым нового класса сверхпроводников (так называемых сверхпроводников второго рода), качественно отличавшихся от уже известных своим весьма необычным поведением в магнитном поле. Если ранее считалось, что магнитное поле не может проникнуть в сверхпроводящую фазу, не разрушив ее (и это действительно верно почти для всех чистых

металлов)<sup>3</sup>, то Абрикосов теоретически показал, что существует и другая возможность — магнитное поле может проникать при определенных условиях в сверхпроводник в виде вихрей тока (вихрей Абрикосова), сердцевина которых переходит в нормальную фазу, периферия же остается сверхпроводящей! В соответствии с поведением сверхпроводников в магнитном поле их стали делить на сверхпроводники первого рода (старые) и второго (открытые Абрикосовым). Важно, что сверхпроводник можно перевести из первого рода во второй, «испортив» его примесями или другими дефектами.

Среди сверхпроводников второго рода удалось найти соединения, способные нести токи большой плотности и выдерживать гигантские магнитные поля. И хотя для их практического использования пришлось решить ряд непростых технологических проблем (эти вещества были хрупкими, большие токи оказывались неустойчивыми и т.п.), факт оставался фактом — одно из двух основных препятствий на пути широкого использования сверхпроводников в технике было преодолено.

Хуже обстояло дело с повышением критической температуры. Если критические магнитные поля к шестидесятым годам удалось увеличить по сравнению с первыми опытами Камерлинг-Оннеса в тысячи раз, то рост критической температуры не вселял особого оптимизма — она достигала лишь 20 кельвинов. Таким образом, для нормальной работы сверхпроводящих устройств все так же требовался дорогой жидкий гелий. И это было особенно обидно, поскольку как раз в это время обнаружили принципиально новый квантовый эффект — эффект Джозефсона, открывший сверхпроводникам обширное поле применения в микроэлектронике, медицине, измерительной и компьютерной тех-

<sup>3</sup> Следует оговориться, что подобное утверждение, строго говоря, справедливо лишь для образцов цилиндрической формы при приложении поля вдоль оси цилиндра. В случае более сложной формы образца или другой ориентации не слишком слабого магнитного поля возможна реализация так называемого промежуточного состояния, при котором макроскопические слои сверхпроводящей фазы чередуются в объеме образца с нормальными слоями.

<sup>2</sup> Это образное сравнение принадлежит одному из создателей теории сверхпроводимости Дж.Шрифферу.

нике. Проблема повышения критической температуры встала необычайно остро. Теоретические оценки предельно возможных ее значений показывали: в рамках обычной, фонной сверхпроводимости (т.е. сверхпроводимости, обусловленной притяжением электронов друг к другу посредством взаимодействия с решеткой) эта температура не должна была превышать 40 К. Однако обнаружение сверхпроводника и с такой критической температурой стало бы огромным достижением, так как можно было бы перейти на охлаждение сравнительно дешевым и доступным жидким водородом (его температура кипения 20 К). Это открыло бы весьма важную эпоху «среднетемпературной» сверхпроводимости, и здесь начались активные поиски совершенствования существующих и создания новых сверхпроводящих сплавов традиционными материаловедческими методами. Голубой же мечтой оставалось создание сверхпроводника с критической температурой 100 кельвинов (а еще лучше – выше комнатной), который можно было бы охлаждать дешевым и широко используемым в технике жидким азотом. Лучшим результатом этих поисков стал сплав с критической температурой 23,2 К – рекорд был достигнут в 1973 году и продержался долгих тринадцать лет, вплоть до 1986 года критическую температуру не удалось повысить ни на один градус.

Складывалось впечатление, что фонный механизм сверхпроводимости исчерпал свои возможности. В этой связи еще в 1964 году американским физиком Литтлом и В.Л.Гинзбургом были высказаны такие идеи: раз ограничением возможности повышения критической температуры является сама природа фонного механизма сверхпроводимости, то следует каким-то способом изменить этот механизм притяжения электронов, т.е. заставить электроны образовывать куперовские пары с помощью не фонного, а какого-то другого притяжения.

На протяжении последних двадцати лет выдвигалось множество новых теорий, детально исследовались десятки, а то и сотни тысяч самых необычных веществ. В первой же работе Литтла внимание экспериментаторов привлекли так на-

зываемые квазиодномерные соединения – длинные молекулярные проводящие цепи с боковыми отростками. Как следовало из теоретических оценок, здесь можно было ожидать заметного повышения критической температуры. Однако, несмотря на усилия многих лабораторий мира, синтезировать такие сверхпроводники не удалось. И все же на этом пути физики и химики совершили немало удивительных открытий: были получены органические металлы, а в 1980 году впервые синтезированы и органические сверхпроводники (рекордная критическая температура органических соединений на сегодня – более 10 К). Удалось получить двухмерные «сэндвичи»: «металл – полупроводник», а также слоистые сверхпроводники и, наконец, магнитные сверхпроводники – в них мирно сосуществуют сверхпроводимость и магнетизм, который, согласно совсем еще недавним представлениям, полностью ей антагонистичен. Но реальных указаний на высокотемпературную сверхпроводимость так и не было.

В середине семидесятых годов среди многочисленных кандидатов в высокотемпературные сверхпроводники мелькнули и некие диковинные керамические соединения типа Pb–Ba–O. Они, будучи при комнатных температурах по своим электрическим свойствам посредственными проводниками, не слишком далеко от абсолютного нуля переходили в сверхпроводящее состояние. Конечно, «не слишком далеко» – это все же на добрый десяток градусов ниже рекордного по тем временам значения. Однако фокус состоял в том, что новое соединение и металлом-то можно было называть с большой натяжкой. Согласно имеющимся в то время теоретическим представлениям, достигнутая в керамиках величина критической температуры оказывалась не малой, а поразительно большой для таких веществ.

Это обстоятельство и привлекло внимание к керамикам как к возможным кандидатам в высокотемпературные сверхпроводники. Мюллер и Беднорц, начиная с 1983 года, подобно средневековым алхимикам,

↑ Температура, К Температуры сравнения	Сверхпроводящие материалы	Критическая температура $T_c$ , К
220		
180	<i>Рекорд «холода», зафиксированный на станции «Восток» в Антарктиде</i>	$T_c = 164$ К (под давлением 30 атм)
160	HgBa <sub>2</sub> Ca <sub>2</sub> Cu <sub>3</sub> O <sub>8</sub>	$T_c = 132$ К
140	HgBa <sub>2</sub> Ca <sub>n-1</sub> Cu <sub>n</sub> O <sub>2n+2</sub>	$n = 3$ $T_c = 132$ К
120	<i>Ночная температура лунной поверхности</i>	$n = 4$ $T_c = 122$ К
100	Tl <sub>2</sub> Ba <sub>2</sub> Ca <sub>n-1</sub> Cu <sub>n</sub> O <sub>2n+3</sub>	$n = 3$ $T_c = 110$ К
80	Bi <sub>2</sub> Sr <sub>2</sub> Ca <sub>n-1</sub> Cu <sub>n</sub> O <sub>2n+4</sub>	
80	<i>Температура кипения кислорода</i>	$T_{c\max} = 92$ К
60	<i>Температура кипения азота</i>	
40	<i>Температура поверхности Плутона</i>	$T_c = 40$ К
40	La <sub>2-x</sub> Sr <sub>x</sub> CuO <sub>4</sub>	$T_c = 30$ К
20	Ba <sub>1-x</sub> K <sub>x</sub> BiO <sub>3</sub>	$T_c = 23$ К
20	<i>Температура кипения водорода</i>	$T_c = 9$ К
20	Rb <sub>3</sub> C <sub>60</sub>	$T_c \approx 7$ К
20	Nb <sub>3</sub> Ge	
20	Pb	
20	Nb	
20	<i>Температура кипения гелия</i>	$T_c = 4,2$ К
20	Hg	
20	Al, Ga, Zn	

возились с сотнями различных окислов, варьируя их состав, количество, режимы синтеза. По рассказам самого Мюллера, они руководствовались некоторыми физическими соображениями, которые, похоже, сегодня находят свое подтверждение в результате сложнейших экспериментальных исследований новых веществ. На этом непростом пути в конце 1985 года они и подобрались, наконец, к соединению бария, лантана, меди и кислорода, которое при измерениях проявило признаки сверхпроводимости при 35 кельвинах.

### Квазидвумерная сверхпроводимость: между антиферромагнитным и металлическим состояниями

Сегодня уже получены десятки различных соединений, переходящих в сверхпроводящее состояние при высоких, по сравнению с рекордом 1973 года, температурах. Некоторые из них вы найдете в приведенной здесь таблице.

Общей характеристикой высокотемпературных сверхпроводников является их слоистая структура. В настоящее время, пожалуй, наиболее изученным высокотемпературным сверхпроводником является соединение  $YBa_2Cu_3O_7$ , его кристаллическая структура приведена на рисунке 1. Как хорошо видно, атомы меди и кислорода выстраиваются в плоскости, перемежаемые другими атомами. В результате проводящие слои чередуются с изолирующими, и движение носителей заряда (которыми, как правило, являются дырки, а не электроны) носит так называемый квазидвумерный характер: носители могут легко перемещаться внутри слоев  $CuO_2$ , в то время как их перескоки на соседние слои происходят сравнительно редко. Куперовские пары также оказываются локализованными именно в этих слоях.

Квазидвумерный характер электронного спектра высокотемпературных сверхпроводников, по-видимому, является ключевым для понимания микроскопической природы этого замечательного явления, что пока остается делом будущего. Однако уже сегодня создана замечательная по своей красоте феноменологическая теория вихревого состояния вы-

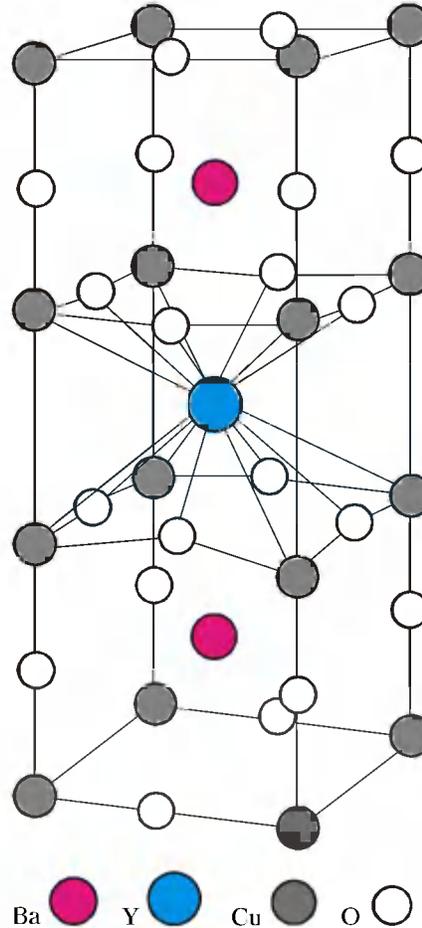


Рис.1

сокотемпературных сверхпроводников в магнитном поле, которая оказалась настолько интересной и богатой различного рода эффектами, что, по сути дела, выделилась в самостоятельную область физики – физику «вихревого вещества». И в ней квазидвумерность электронной жизни явилась определяющей. Действительно, ввиду квазидвумерности электронного движения, вихри Абрикосова оказываются как бы набранными из элементарных вихрей, локализованных, вслед за куперовскими парами и самими электронами, в проводящих слоях. При низких температурах эти элементарные вихри, получившие на физическом жаргоне название «блинов», благодаря слабому притяжению между ними выстраиваются в линию, а затем уже эти линии формируют вихревую решетку.

По мере повышения температуры вихревые линии из-за тепловых флуктуаций все больше и больше извиваются, и при некоторой температуре решетка плавится, примерно так же, как обыкновенный кри-

сталл. Таким образом в высокотемпературном сверхпроводнике с повышением температуры упорядоченную решетку Абрикосова сменяет неупорядоченная фаза «вихревой жидкости», состоящая из хаотически расположенных, извивающихся и перепутывающихся между собой вихревых линий. Интересно, что при дальнейшем повышении температуры (но находясь все еще в сверхпроводящей фазе) вихревые линии могут «испаряться» – распаться на элементарные вихри, положения которых в каждом сверхпроводящем слое будут хаотическими и совершенно независимыми от конфигурации вихрей в соседних слоях. Наличие различного рода неоднородностей, неизбежное в реальных кристаллах, еще более усложняет картину переходов между различными вихревыми формами.

Хотя в понимании свойств высокотемпературных сверхпроводников за последние годы достигнут значительный прогресс, природа самой высокотемпературной сверхпроводимости остается загадкой. Существует по крайней мере двадцать противоречащих друг другу теорий, претендующих на объяснение высокотемпературной сверхпроводимости, в то время как нужна одна, единственно правильная. Так, ряд физиков полагают, что куперовские пары в этих сверхпроводниках образуются за счет своего рода магнитного флуктуационного взаимодействия. Указанием на это служит тот факт, что в кристаллах  $YBa_2Cu_3O_{6+x}$  с содержанием кислорода меньше номинального ( $x = 1$ ) критическая температура падает (рис.2; правая кривая), равно как и концентрация свободных электронов. При  $x < 0,4$  мы уже имеем дело с диэлектриком, в котором, однако, при достаточно низких температурах наблюдается магнитное упорядочение атомов меди. Магнитные моменты соседних атомов меди оказываются сориентированными антипараллельно, и результирующая намагниченность кристалла остается равной нулю. Такого рода магнитный порядок хорошо известен в физике магнетизма и называется антиферромагнитным (см. левую кривую на рисунке 2; здесь  $T_N$  – так называемая температура Нееля, т.е. температура перехода в антиферромагнитное состояние).

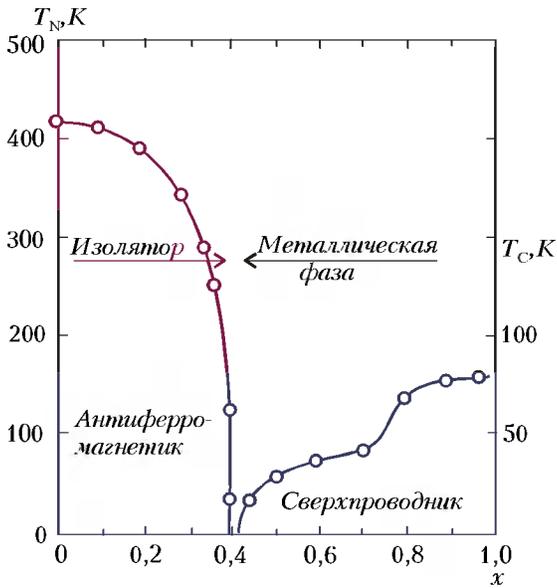


Рис.2

Можно было бы думать, что и в сверхпроводящей фазе атомы меди сохраняют флуктуирующий магнитный момент, который и ответствен в конечном счете за возникновение сверхпроводящего притяжения между электронами. Такого рода механизм связан с особыми свойствами атомов меди, которые могут пребывать в магнитном или немагнитном состояниях в зависимости от их валентности.

Тот факт, что во всех высокотемпературных сверхпроводниках присутствуют слои Cu—O, казалось бы, является аргументом в пользу данной теории. Однако совсем недавно появилось сообщение о наблюдении признаков сверхпроводимости при температуре 90 K в соединении  $W_3ONa_{0,05}$ . Точный состав сверхпроводящей фазы пока не известен, но по крайней мере ясно, что «магических» атомов меди там нет, и вообще ни один из элементов нового высокотемпературного сверхпроводника не обладает магнитными свойствами.

В других теориях физики пытаются обобщить тем или иным образом классическую теорию сверхпроводимости, пересматривают сами основы теории металлического состояния, «скрещивают» сверхпроводимость с антиферромагнетизмом в пространстве высшего числа измерений, разделяют спин и заряд носителей, заготавливают куперовские пары загодя, еще выше критической температуры, а также предпри-

нимают иные попытки объяснить необычные свойства высокотемпературных сверхпроводников единым образом. Вызов, брошенный природой, остается без ответа, теоретики по-прежнему не могут прийти к согласию. То ли будучи, согласно меткому сравнению, подобными хору глухих, где каждый поет свою партию не слушая другого, то ли потому, что время действительно еще не пришло, но правильная теория пока не сформулирована.

### Postscriptum для налогоплательщика

Отсутствие теоретического объяснения явления высокотемпературной сверхпроводимости, конечно, не останавливает поисков практических применений этих материалов. Основная трудность на этом пути заключается в «плохой технологичности» имеющихся высокотемпературных сверхпроводников: они оказались весьма хрупкими и непригодными для важнейшего технологического процесса обработки металлов — прокатки. Однако уже сейчас ряд кампаний поставляют на мировой рынок кабели из высокотемпературных сверхпроводников длиной в несколько километров. Их изготавливают, наполняя трубку из серебра или другого хорошего металла порошком высокотемпературного сверхпроводника, а затем прокатывая и отжигая ее. Сейчас в США и во Франции уже функционирует ряд опытных линий передач электроэнергии по подземному кабелю из высокотемпературного сверхпроводника. Созданы также первые моторы и генераторы на базе высокотемпературных сверхпроводников. Нет сомнения, что сфера применения этих материалов будет расширяться. И можно надеяться на открытие более совершенных высокотемпературных сверхпроводников.

Скажем теперь несколько слов о перспективах. Они поистине фантастичны. На повестку дня ставятся многие из предложенных ранее глобальных проектов — высокотемпературные сверхпроводники делают их рентабельными.

• Так, сейчас в линиях электропередач теряется от 20 до 30 процентов всей вырабатываемой в мире электроэнергии. Применение высокотемпературных сверхпроводников для передачи электроэнергии сможет полностью эти потери исключить.

• Все проекты термоядерного синтеза базируются на использовании гигантских сверхпроводящих магнитов для удержания высокотемпературной плазмы от касания стенок камеры. Для поддержания их в сверхпроводящем состоянии расходуются если не реки, то ручьи жидкого гелия. В недалеком будущем их можно будет перевести на азотное охлаждение.

• Огромные сверхпроводящие катушки смогут служить накопителями электроэнергии, снимающими пиковые нагрузки в потреблении электроэнергии.

• Основанная на применении сверхпроводящих джозефсоновских элементов сверхчувствительная аппаратура для снятия магнитокардиограмм и магнитоэнцефалограмм может прийти во все больницы.

• Между городами со скоростью 400—500 километров в час помчатся экспрессы на магнитной подушке, создаваемой сверхпроводящими магнитами.

• Будет создано новое поколение сверхмощных компьютеров на сверхпроводниковой элементной базе, охлаждаемых жидким азотом.

Пусть нас не заподозрят в «сверхпроводящей эйфории». Даже за недолгое время, прошедшее со дня открытия, пыл многих исследователей был изрядно умерен — так бывает, когда выдающийся олимпийский рекорд не удается потом годами перекрыть. Но рекорд состоялся, теперь он служит ориентиром, возможность получения материалов с уникальными свойствами подтверждена. И хотя экономика, безусловно, не раз еще внесет коррективы в осуществление названных проектов, хотя рекордные результаты еще только следует превзойти, а затем перевести в разряд массовых, сегодня мы твердо знаем, что недавно невозможное стало реально достижимым. А это уже необратимо меняет точку отсчета в нашем отношении к сверхпроводимости.

# Малая теорема Ферма

*В. СЕНДЕРОВ, А. СПИВАК*

**Ч**ЕМ ОТЛИЧАЕТСЯ УЧЕНИК МАТЕМАТИЧЕСКОГО класса от ученика географического, экономического, политологического или коррекционного класса? Тем, что он больше размышляет над задачами? Да, и этим тоже. Но не только. Еще он знает малую теорему Ферма.

Программы обучения математике бывают разные: можно начать с подробного изучения геометрии, можно – с комбинаторики, кто-то начинает с теории множеств, все не перечислить. Но малая теорема Ферма прочно вошла в программу математических классов. Компьютерщики

– авторы учебника «Конкретная математика» Р.Грэхем, Д.Кнут и О.Паташник – тоже включили ее в тот набор сведений, с которым они знакомят своих студентов.

Формулируется эта теорема, открытая советником парламента Тулузы (Франция) Пьером Ферма (1601–1665) в 1640 году, очень коротко: *если  $p$  – простое число,  $a$  – целое число, то  $a^p - a$  кратно  $p$* . Сразу и не видно, почему скромное с виду утверждение столь важно. Тем не менее, оно заслуживает величайшего внимания.

Мы начнем с материала, который доступен семикласснику, а закончим недавними открытиями в криптографии.

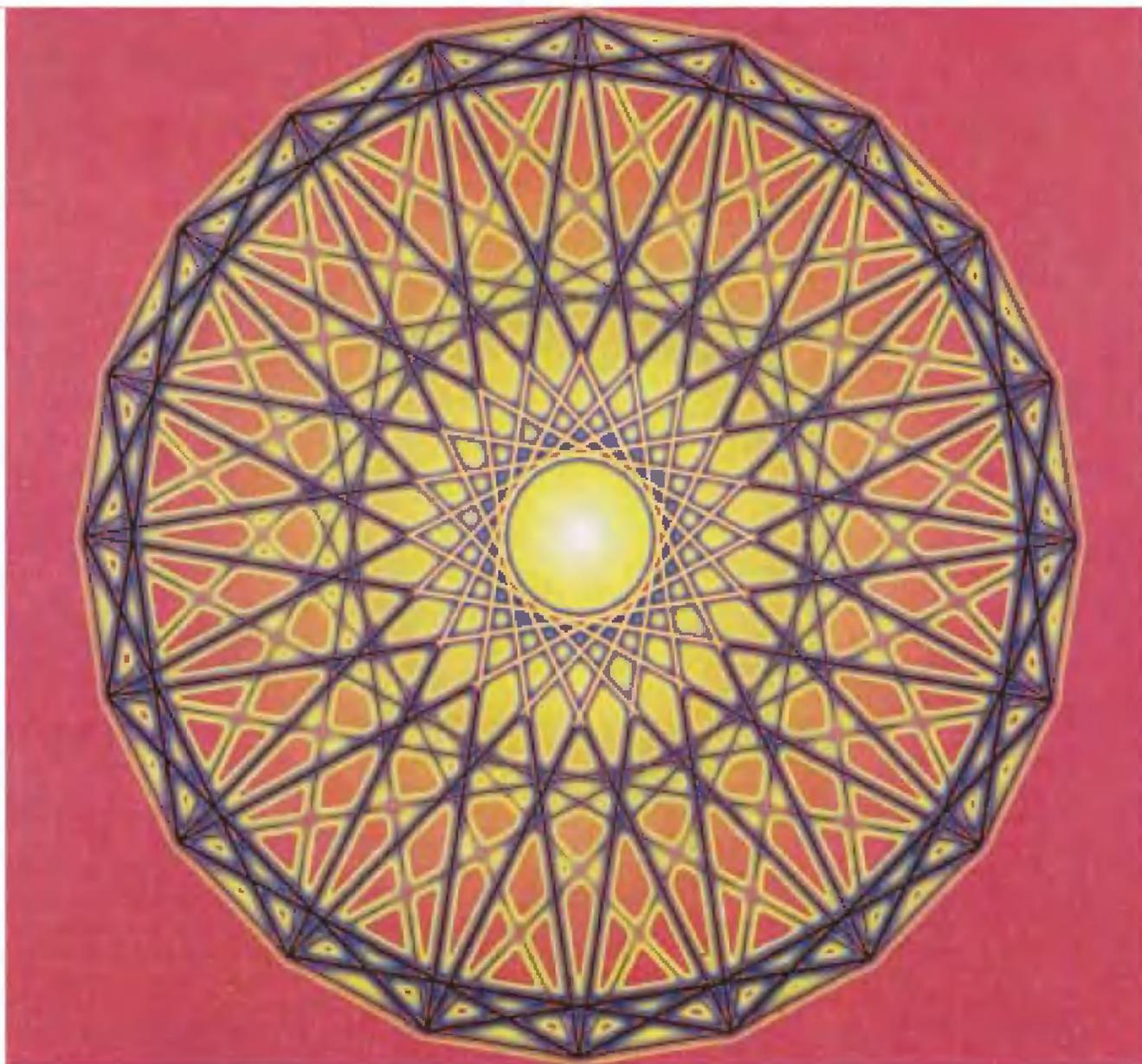


Иллюстрация В. Хлебниковой

### Частные случаи

Если из книги вытекает какой-нибудь поучительный вывод, он должен получаться помимо воли автора, в силу самих изображенных фактов.

Ги де Мопассан

Из любых двух последовательных целых чисел  $a$  и  $a + 1$  одно четное, а другое нечетное. Поэтому произведение  $a(a + 1) = a^2 + a$  четно при любом целом  $a$ .

Делимость числа  $a^2 + a$  на 2 можно доказать и по-другому, разобрав два случая:

– если  $a$  четно, то  $a^2$  тоже четно, а сумма двух четных чисел  $a$  и  $a^2$  четна;

– если  $a$  нечетно, то  $a^2$  тоже нечетно, а сумма двух нечетных чисел  $a$  и  $a^2$  четна.

Вот так доказывают замечательное свойство многочлена  $a^2 + a$ . Впрочем, при  $p = 2$  в малой теореме Ферма фигурирует другой многочлен:  $a^2 - a = (a - 1)a$ . Все его значения в целых точках – четные числа (докажите!).

Теперь рассмотрим многочлен  $a^3 - a$ . Его легко разложить на множители:

$$a^3 - a = a(a^2 - 1) = a(a - 1)(a + 1).$$

Получили произведение трех последовательных целых чисел:  $a - 1$ ,  $a$  и  $a + 1$ . Как мы уже знаем, это произведение четно. Поскольку из любых трех последовательных чисел одно кратно 3, их произведение  $(a - 1)a(a + 1) = a^3 - a$  кратно 3 (и, значит, даже кратно 6).

**Упражнение 1.** При любом целом  $a$  сумма  $a^3 + 5a$  кратна 6. Докажите это.

Многочлен  $a^4 - a$  при  $a = 2$  и  $a = 3$  принимает значения  $2^4 - 2 = 14$  и  $3^4 - 3 = 78$ . Конечно, эти значения четны, но никакого общего делителя кроме 2 (и 1) у них нет. Не повезло! Впрочем, число 4 составное, а малая теорема Ферма говорит только о многочленах вида  $a^p - a$ , где  $p$  – простое число.

Пусть  $p = 5$ . Вычислим несколько значений многочлена  $a^5 - a$ . При  $a = \pm 1$  и при  $a = 0$  получаем ноль. Смотрим дальше:  $2^5 - 2 = 30$ ,  $3^5 - 3 = 240$ ,  $4^5 - 4 = 1020$ ,  $5^5 - 5 = 3120$ ,  $6^5 - 6 = 7770, \dots$  Все эти значения кратны числу 30.

Поскольку  $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ , доказательство делимости на 30 распадается на три части: во-первых, надо доказать, что  $a^5 - a$  кратно 2; во-вторых,  $a^5 - a$  кратно 3; в-третьих,  $a^5 - a$  кратно 5.

Первая часть очевидна: числа  $a^5$  и  $a$  либо оба четны, либо оба нечетны. Не вызывает затруднений и вторая часть:

$$a^5 - a = a(a^4 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = (a - 1)a(a + 1)(a^2 + 1),$$

произведение трех последовательных чисел всегда кратно 3.

Чуть сложнее третья часть. Нет, конечно, из пяти последовательных целых чисел обязательно одно кратно 5, так что произведение  $(a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2)$  кратно 5. Но  $a^2 + 1 \neq (a - 2)(a + 2)$ .

Как же быть? Самый бесхитростный способ – перебрать все подряд остатки от деления на 5: любое целое число при делении на 5 дает в остатке 0, 1, 2, 3 или 4. Если остаток равен 0, то кратен 5 второй множитель произведения  $(a - 1)a(a + 1)(a^2 + 1)$ . Если остаток равен 1 или 4, то кратен 5 первый или третий множитель. Если же остаток

равен 2 или 3, то в дело вступает четвертый множитель. (Для тех, кто еще не привык работать с остатками, объясним: если  $a = 5b + 2$ , т. е. если  $a$  дает остаток 2 при делении на 5, то  $a^2 + 1 = (5b + 2)^2 + 1 = 5(5b^2 + 4b + 1)$ . Аналогично можно рассмотреть случай  $a = 5b + 3$ .)

Есть и другой способ:

$$a^2 + 1 = (a - 2)(a + 2) + 5,$$

значит, если нас интересуют только остатки от деления на 5, то  $a^2 + 1$  можно-таки заменить на  $(a - 2)(a + 2)$ . Формулой это записывают так:

$$a^2 + 1 \equiv (a - 2)(a + 2) \pmod{5}.$$

Предложенное в 1801 году К. Ф. Гауссом обозначение « $\equiv$ » еще не раз будет использовано нами. По определению,  $a$  сравнимо с  $b$  по модулю  $n$ , если  $a - b$  кратно  $n$ , т. е.  $a - b = kn$ , где  $k$  – целое число.

Обозначение

$$a \equiv b \pmod{n}$$

оказалось удачным потому, что свойства сравнений похожи на свойства обычных равенств. Сравнения можно складывать: если  $a \equiv b \pmod{n}$  и  $c \equiv d \pmod{n}$ , то  $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ . В самом деле, по определению,  $a = b + kn$  и  $c = d + ln$ , где  $k, l$  – целые числа. Значит,

$$a + c = (b + kn) + (d + ln) = b + d + (k + l)n,$$

что и требовалось.

Аналогично, формулы

$$a - c = (b + kn) - (d + ln) = b - d + (k - l)n,$$

$$ac = (b + kn)(d + ln) = bd + knd + bln + kln^2 =$$

$$= bd + (kd + bl + kln)n$$

позволяют утверждать, что сравнения можно вычитать и умножать. Коли можно умножать, то можно и возводить в степень: если  $a \equiv b \pmod{n}$ , то для любого натурального числа  $m$  верно сравнение  $a^m \equiv b^m \pmod{n}$ .

Сокращать сравнения надо с осторожностью:

$$6 \equiv 36 \pmod{10},$$

но

$$1 \not\equiv 6 \pmod{10}.$$

#### Упражнения

2. Решите сравнение  $3x \equiv 11 \pmod{101}$ .

3. Какие целые числа  $x$  удовлетворяют сравнению  $14x \equiv 0 \pmod{12}$ ?

4. Пусть  $k \neq 0$ . Докажите, что а) если  $ka \equiv kb \pmod{kn}$ , то  $a \equiv b \pmod{n}$ ;

б) если  $ka \equiv kb \pmod{n}$  и числа  $k, n$  взаимно просты, то  $a \equiv b \pmod{n}$ .

Продолжим изучение многочленов вида  $a^p - a$ : докажем, что при любом целом  $a$  число  $a^7 - a$  кратно 7. Как всегда, можно рассмотреть все 7 остатков от деления на 7:  $0^7 - 0 = 0$ ,  $1^7 - 1 = 0$ ,  $2^7 - 2 = 126 = 7 \cdot 18, \dots$ ,  $6^7 - 6 = 279930 = 7 \cdot 39990$ . (Можно и чуточку сэкономить: поскольку любое целое число представимо в виде  $a = 7b, 7b \pm 1, 7b \pm 2$  или  $7b \pm 3$ , очевидно, при проверке малой теоремы Ферма для  $p = 7$  можно ограничиться рассмотрением случаев  $a = 0, 1, 2$  и 3.)

Но бездумная проверка не может научить нас ничему интересному. Лучше рассмотрим разложение на

множители:

$$a^7 - a = a(a^6 - 1) = a(a^3 - 1)(a^3 + 1) = a(a-1)(a^2 + a + 1)(a+1)(a^2 - a + 1).$$

Поскольку

$$a^2 + a + 1 = (a^2 + a - 6) + 7 \equiv a^2 + a - 6 = (a-2)(a+3) \pmod{7}$$

и

$$a^2 - a + 1 \equiv a^2 - a - 6 = (a+2)(a-3) \pmod{7},$$

имеем:

$$a^7 - a \equiv a(a-1)(a-2)(a+3)(a+1)(a+2)(a-3) \pmod{7}.$$

Произведение семи последовательных целых чисел кратно 7.

**Упражнение 5.** Докажите, что а) наибольший общий делитель чисел вида  $a^7 - a$  равен 42; б) наибольший общий делитель чисел вида  $a^9 - a$  равен 30. (Заметьте: 30 не кратно 9. Это находится в согласии с тем, что число 9 не простое, а составное.)

Теперь рассмотрим число  $p = 11$ . Очевидно,

$$a^{11} - a = a(a^{10} - 1) = a(a^5 - 1)(a^5 + 1) = a(a-1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)(a+1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1).$$

Тут не так-то просто догадаться, как быть дальше. Но полный перебор всех 11 остатков все еще возможен. И когда мы его выполним, окажется, что значения многочлена  $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$  кратны 11 при  $a \equiv 3, 4, 5$  или  $9 \pmod{11}$ , а значения многочлена  $a^4 - a^3 + a^2 - a + 1$  кратны 11 при  $a \equiv 2, 6, 7$  или  $8$ .

Между прочим, если мы раскроем скобки в произведении  $(a-3)(a-4)(a-5)(a-9)$ , получим

$$(a^2 - 7a + 12)(a^2 - 14a + 45) \equiv (a^2 + 4a + 1)(a^2 - 3a + 1) = a^4 + a^3 - 10a^2 + a + 1 \equiv a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 \pmod{11}.$$

Аналогично можно проверить, что  $(a-2)(a-6)(a-7)(a-8) \equiv a^4 - a^3 + a^2 - a + 1 \pmod{11}$ .

Что дальше? При  $p = 13$ , если действовать нашим способом, придется возводить в двенадцатую степень числа от 1 до 12 или раскрывать скобки в произведении тринадцати множителей:  $a-6, a-5, \dots, a+5, a+6$ . Заниматься этим не хочется, даже если ограничиться возведением в степень чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 или перемножать «всего лишь» шесть скобок:  $(a^2-1)(a^2-4)(a^2-9)(a^2-16)(a^2-25)(a^2-36)$ .

Чем больше  $p$ , тем больше вариантов надо перебирать. Поэтому мы прекратим разбор частных случаев и перейдем к доказательству малой теоремы Ферма, которое охватывает сразу все простые числа  $p$ .

**Упражнения**

**6. а)** Произведение любых четырех последовательных целых чисел кратно 24. Докажите это. **б)** Произведение любых пяти последовательных целых чисел кратно 120. Докажите это. **в)** Докажите, что  $a^5 - 5a^3 + 4a$  при всяком целом  $a$  кратно 120.

**7.** Для любого натурального  $a$  число  $a^5$  оканчивается на ту же цифру, что и  $a$ . Докажите это.

**8.** Докажите, что  $m^n - mn^5$  кратно 30 при любых целых  $m$  и  $n$ .

**9.** Если число  $k$  не кратно ни 2, ни 3, ни 5, то  $k^4 - 1$  кратно 240. Докажите это.

**10. а)** Докажите, что  $2222^{5555} + 5555^{2222}$  кратно 7. **б)** Найдите остаток от деления числа  $(13^{14} + 15^{16})^{17} + 18^{19 \cdot 20}$  на 7.

**11.** Докажите, что число  $11^{10} - 1$  оканчивается на два нуля (т.е. кратно 100).

**12. а)** Найдите все целые числа  $a$ , для которых  $a^{10} + 1$  оканчивается цифрой ноль. **б)** Докажите, что ни при каком целом  $a$  число  $a^{100} + 1$  не оканчивается цифрой ноль.

**13.** Пусть  $n$  – четное число. Найдите наибольший общий делитель чисел вида  $a^n - a$ , где  $a$  – целое число.

**14.** Пусть  $n$  – натуральное число,  $n > 1$ . Докажите, что наибольший общий делитель чисел вида  $a^n - a$ , где  $a$  пробегает множество всех целых чисел, совпадает с наибольшим общим делителем чисел вида  $a^n - a$ , где  $a = 1, 2, 3, \dots, 2^n$ . (Заметьте: из этого следует, что наибольший общий делитель чисел вида  $a^n - a$ , где  $a$  – целое, совпадает с наибольшим общим делителем чисел такого вида, где  $a$  – натуральное.)

**Общий случай**

*И каждого в свою уложат яму.*

Эжен Гильвик

Выпишем в строчку числа 1, 2, 3, ...,  $p-1$ , домножим каждое из них на  $k$ , где  $k$  не кратно  $p$ , и рассмотрим остатки от деления на  $p$ . Например, при  $p = 19$  и  $k = 4$  получим таблицу 1. В нижней строке таблицы – те же

Таблица 1

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4a	4	8	12	16	20	24	28	32	36
4a mod 19	4	8	12	16	1	5	9	13	17
$n$	10	11	12	13	14	15	16	17	18
4a	40	44	48	52	56	60	64	68	72
4a mod 19	2	6	10	14	18	3	7	11	15

самые числа, что и в верхней, только они расположены в другом порядке! Оказывается, это общий закон: не только при  $p = 19$  и  $k = 4$ , но при любом простом  $p$  и не кратном  $p$  целом числе  $k$  всегда получатся те же самые числа 1, 2, 3, ...,  $p-1$ , возможно, записанные в некотором другом порядке.

Почему? Ну, во-первых, в нижней строке не может появиться 0, ибо произведение не кратных простому числу  $p$  чисел  $a$  и  $k$  не может быть кратно  $p$ . Во-вторых, все числа нижней строки разные (это легко доказать «от противного»: если бы числа  $ak$  и  $bk$  давали при делении на  $p$  одинаковые остатки, то разность  $ak - bk = (a-b)k$  была бы кратна  $p$ , что невозможно, поскольку  $a-b$  не кратно  $p$ ). Этих двух замечаний достаточно: ненулевых остатков от деления на  $p$  существует  $p-1$  штук, все они вынуждены по одному разу появиться в нижней строке таблицы.

**Упражнения**

**15.** Существует ли такое натуральное  $n$ , что число 1999n оканчивается на цифры 987654321?

**16.** Если целое число  $k$  взаимно просто с натуральным числом  $n$ , то существует такое натуральное число  $x$ , что  $kx - 1$  кратно  $n$ . Докажите это.

**17.** Если целые числа  $a$  и  $b$  взаимно просты, то любое целое число  $c$  представимо в виде  $c = ax + by$ , где  $x, y$  – целые числа. Докажите это.

Как вы помните, малая теорема Ферма утверждает, что при любом целом  $k$  и простом  $p$  число  $k^p - k = k(k^{p-1} - 1)$

кратно  $p$ . Значит, для чисел  $k$ , не кратных  $p$ , теорему можно формулировать следующим образом:

**Теорема 1.** Если целое число  $k$  не кратно простому числу  $p$ , то  $k^{p-1}$  дает остаток 1 при делении на  $p$ .

**Доказательство.** Поскольку остатки от деления на  $p$  чисел  $k, 2k, 3k, \dots, (p-1)k$  — это (с точностью до перестановки) числа  $1, 2, 3, \dots, p-1$ , то

$$k \cdot 2k \cdot 3k \cdot \dots \cdot (p-1)k \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1) \pmod{p},$$

откуда

$$k^{p-1}(p-1)! \equiv (p-1)! \pmod{p}.$$

Сократив на  $(p-1)!$ , получим желаемое:

$$k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

А тот, кто не решил упражнение 4 б) и не знает, почему сравнения можно сокращать (на число, взаимно простое с модулем), пусть рассуждает следующим образом: поскольку произведение  $(k^{p-1} - 1) \cdot (p-1)!$  кратно  $p$ , а число  $(p-1)!$  не кратно  $p$ , то число  $k^{p-1} - 1$  кратно простому числу  $p$ .

#### Упражнения

18. Найдите остаток от деления числа  $3^{2000}$  на 43.

19. Если целое число  $a$  не кратно 17, то  $a^8 - 1$  или  $a^8 + 1$  кратно 17. Докажите это.

20. Докажите, что  $m^{61}n - mn^{61}$  кратно 56786730 при любых целых  $m$  и  $n$ .

21. Найдите все такие простые числа  $p$ , что  $5^{p^2} + 1$  кратно  $p$ .

22. Пусть  $p$  — простое число,  $p \neq 2$ . Докажите, что число  $7^p - 5^p - 2$  кратно  $6p$ .

23. Если  $p$  — простое число, то сумма  $1^{p-1} + 2^{p-1} + \dots + (p-1)^{p-1}$  при делении на  $p$  дает остаток  $p-1$ . Докажите это.

24. Шестизначное число кратно 7. Его первую цифру стерли и затем записали ее позади последней цифры числа. Докажите, что полученное число тоже кратно 7. (Например, из кратных 7 чисел 632387 и 200004 таким образом получаем числа 323876 и 42, которые тоже кратны 7.)

25. Пусть  $p$  — простое число, отличное от 2, 3 и 5. Докажите, что число, записанное  $p-1$  единицей, кратно  $p$ . (Например, 111111 кратно 7.)

26\*. Докажите, что для любого простого  $p$  число  $11\dots1122\dots22\dots99\dots99$ , состоящее из  $9p$  цифр (сначала  $p$  единиц, потом  $p$  двоек,  $p$  троек, ..., наконец,  $p$  девяток), при делении на  $p$  дает такой же остаток, как и число 123456789.

#### Таблицы умножения

*Назла ей я все-таки помножил землекопов. Правда, ничего хорошего про них не узнал, но зато теперь можно было переходить к другому вопросу.*

Л.Гераскина

Рассмотрим все  $n-1$  разных ненулевых остатков от деления на  $n$ . Составим таблицу умножения, написав на пересечении  $a$ -го столбца и  $b$ -й строки остаток от деления на  $n$  произведения  $ab$ . Например, при  $n=5$  получим таблицу 2, при  $n=11$  — таблицу 3.

Таблица 2

×	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Таблица 3

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9
3	3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
4	4	8	1	5	9	2	6	10	3	7
5	5	10	4	9	3	8	2	7	1	6
6	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
7	7	3	10	6	2	9	5	1	8	4
8	8	5	2	10	7	4	1	9	6	3
9	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2
10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Таблица 4

×	1	2	3
1	1	2	3
2	2	0	2
3	3	2	1

Таблица 5

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
3	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9
4	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8
5	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7
6	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6
7	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
8	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4
9	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3
10	10	8	6	4	2	0	10	8	6	4	2
11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Поскольку в обоих примерах число  $n$  простое, в каждой строке, как и в каждом столбце, возникает некоторая перестановка чисел  $1, 2, \dots, n-1$ . Если же рассмотреть составное число, то в таблице обязательно встретится нуль. Например, при  $n=4$  имеем  $2 \cdot 2 \equiv 0$  (табл.4); не лучше ситуация и при  $n=12$  (табл.5): опять в некоторых строках есть нули! И вообще, при любом составном числе  $n=ab$ , где  $1 < a, b < n$ , на пересечении  $a$ -й строки и  $b$ -го столбца стоит остаток от деления  $ab$  на  $n$ , т.е. 0.

Итак, если  $n$  составное, то имеются делители нуля — ненулевые остатки  $a$  и  $b$ , произведение  $ab$  которых кратно  $n$ , иными словами, равно нулю по модулю  $n$ . Но даже при составном  $n$  в некоторых строках таблицы умножения нет нулей. В таблице 4 таковы первая и третья строки, а в

таблице 5 – первая, пятая, седьмая и одиннадцатая. Подумав немного, можно понять, что нули присутствуют в тех и только тех строках, номера которых имеют с числом  $n$  общий делитель, отличный от 1 (докажите это!). Давайте же вычеркнем из таблицы все такие строки и

Таблица 6

×	1	3
1	1	3
3	3	1

Таблица 7

×	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

столбцы. (Если  $n$  – простое число, то вычеркивать ничего не придется.) При  $n = 4$  получим таблицу из двух строк и столбцов (табл.6), а при  $n = 12$  останется таблица размером  $4 \times 4$  (табл.7).

**Упражнение 27.** Заметьте, что каждая из таблиц 2–7 симметрична относительно обеих своих диагоналей. Докажите, что это так для любого  $n$ .

### Теорема Эйлера

Чтобы обобщить малую теорему Ферма на случай составного числа  $n$ , оставим в таблице умножения только те строки и столбцы, в которых нет нулей, т.е. рассмотрим взаимно простые с  $n$  остатки от деления на  $n$ . В новой таблице строки (и столбцы) отличаются друг от друга лишь порядком, в котором расположены числа. Другими словами, если мы для натурального числа  $n$  выпишем все остатки  $a_1, a_2, \dots, a_r$ , взаимно простые с  $n$ , и домножим каждый из них на взаимно простое с  $n$  число  $k$ , то получим числа  $ka_1, ka_2, \dots, ka_r$ , которые тоже взаимно просты с  $n$  и дают разные остатки при делении на  $n$  (докажите!).

Итак, строка остатков от деления на  $n$  чисел  $ka_1, ka_2, \dots, ka_r$  может отличаться от строки  $a_1, a_2, \dots, a_r$  только порядком расположения чисел. Поэтому точно так же, как для простого  $p$ , для составного  $n$  имеем:

$$ka_1ka_2\dots ka_r \equiv a_1a_2\dots a_r \pmod{n},$$

откуда

$$(k^r - 1)a_1a_2\dots a_r \equiv 0 \pmod{n}.$$

Значит, произведение  $(k^r - 1)a_1a_2\dots a_r$  кратно  $n$ . Поскольку числа  $a_1, a_2, \dots, a_r$  взаимно просты с  $n$ , то  $k^r - 1$  кратно  $n$ . Если  $n$  – простое число, то  $r = n - 1$  и получаем в точности утверждение малой теоремы Ферма. В общем же случае приходим к теореме Эйлера:

**Теорема 2.** Если  $k$  – целое число, взаимно простое с натуральным числом  $n$ , то  $k^r - 1$  кратно  $n$ , где  $r$  – количество взаимно простых с  $n$  натуральных чисел, не превосходящих  $n$ .

#### Упражнения

28. Докажите, что если число  $k$  не кратно 3, то  
 а)  $k^3$  при делении на 9 дает остаток 1 или 8;  
 б)  $k^{81}$  при делении на 243 дает остаток 1 или 242.  
 29. а) Если  $a^3 + b^3 + c^3$  кратно 9, то хотя бы одно из целых чисел  $a, b, c$  кратно 3. Докажите это.

- б) Сумма квадратов трех целых чисел кратна 7 в том и только том случае, когда сумма четвертых степеней этих чисел кратна 7. Докажите это.

30. Докажите, что число  $7^{7^{7^{7^7}}} - 7^{7^{7^7}}$  кратно 10.

31. Каковы три последние цифры числа  $7^{9999}$ ?

32. Если целое число  $a$  взаимно просто с натуральным числом  $n > 1$ , то сравнение  $ax \equiv b \pmod{n}$  равносильно сравнению  $x \equiv a^{r-1}b \pmod{n}$ . Докажите это.

33. Если  $n$  – нечетное натуральное число, то  $2^m - 1$  кратно  $n$ . Докажите это.

34\*. Найдите все натуральные  $n > 1$ , для которых сумма  $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$  кратна  $n$ .

35\*. Для каждого натурального числа  $s$  существует кратное ему натуральное число  $n$ , сумма цифр которого равна  $s$ . Докажите это.

### Функция Эйлера

В 1763 году Леонард Эйлер (1707–1783) ввел обозначение  $\phi(n)$  (читают: фи от эн) для количества  $r$  остатков, взаимно простых с  $n$ . Например,  $\phi(1) = 1, \phi(4) = 2, \phi(12) = 4$ .

Если число  $p$  простое, то  $\phi(p) = p - 1$ . Легко вычислить и  $\phi(p^m)$ , где  $m$  – натуральное число. В самом деле, выпишем все  $p^m$  возможных остатков:  $0, 1, 2, \dots, p^m - 1$ . Из них кратны  $p$  в точности остатки  $0, p, 2p, \dots, p^m - p$ . Значит,

$$\phi(p^m) = p^m - p^{m-1} = p^m \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Давайте вычислим  $\phi(1000)$  – количество чисел первой тысячи, которые не кратны ни 2, ни 5. Для этого из 1000 вычтем сначала 500 – именно столько в первой тысяче четных чисел. Не забудем вычесть и 200 – столько в первой тысяче чисел, кратных 5. Что еще? Еще мы должны учесть, что некоторые числа (оканчивающиеся цифрой 0) кратны и 2, и 5. Таких чисел 100 штук; каждое из них мы учитывали оба раза, а надо было – только один раз! Поэтому правильный ответ дает формула

$$\phi(1000) = 1000 - 500 - 200 + 100 = 400.$$

#### Упражнения

36. Найдите  $\phi(2^a 5^b)$ , где  $a, b$  – натуральные числа.  
 37. Пусть  $p, q$  – различные простые числа. Найдите а)  $\phi(pq)$ , б)  $\phi\left(p^a q^b\right)$ , где  $a, b$  – натуральные числа.  
 38. Решите уравнения: а)  $\phi(7^x) = 294$ ; б)  $\phi(3^x 5^y) = 360$ .

В принципе, примененный нами способ позволяет вычислить  $\phi(n)$  для любого натурального числа  $n$ . Например, чтобы вычислить  $\phi(300)$ , мы можем выписать все числа от 1 до 300 и вычеркнуть 150 четных чисел, а также 100 чисел, кратных 3, и 60 чисел, кратных 5. Затем мы должны вспомнить, что некоторые числа вычеркнуты дважды (а иные даже трижды), и «восстановить справедливость», т.е. к числу  $300 - 150 - 100 - 60$  прибавить 50 чисел, кратных  $2 \cdot 3 = 6$ , а также 30 чисел, кратных  $2 \cdot 5 = 10$ , и 20 чисел, кратных  $3 \cdot 5 = 15$ . Но и этого недостаточно: каждое из десяти чисел, кратных  $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ , было сначала трижды выброшено (как кратное 2, 3, 5) и затем трижды возвращено (как кратное 6, 10, 15). Но выбросить эти 10 чисел все-таки надо! Поэтому

$$\phi(300) = 300 - 150 - 100 - 60 + 50 + 30 + 20 - 10 = 80.$$

Ничего сложного, как видите, нет. Но с ростом количества простых делителей числа  $n$  мы будем получать ответ, в котором все больше и больше слагаемых и вычитаемых. В статье Н. Васильева и В.Гутенмахера «Арифметика и принципы подсчета» (Приложение к журналу «Квант» №2 за 1994 год) это все подробно объяснено. А здесь мы изложим другой способ.

**Теорема 3.** *Функция Эйлера мультипликативна, т.е.*

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

для любых взаимно простых натуральных чисел  $m$  и  $n$ .

**Следствие.** *Если  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}$ , где  $p_1, p_2, \dots, p_s$  – различные простые числа,  $a_1, a_2, \dots, a_s$  – натуральные числа, то*

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \varphi(p_1^{a_1})\varphi(p_2^{a_2}) \dots \varphi(p_s^{a_s}) = \\ &= (p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1})(p_2^{a_2} - p_2^{a_2-1}) \dots (p_s^{a_s} - p_s^{a_s-1}). \end{aligned}$$

**Доказательство теоремы 3.** Рассмотрим числа вида  $mx + ny$ , где  $0 \leq x < n$  и  $0 \leq y < m$ . Запишем их в виде таблицы размером  $n \times m$ . Например, при  $n = 5$  и  $m = 8$  получаем таблицу 8.

Таблица 8

$x \setminus y$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	5	10	15	20	25	30	35
1	8	13	18	23	28	33	38	43
2	16	21	26	31	36	41	46	51
3	24	29	34	39	44	49	54	59
4	32	37	42	47	52	57	62	67

Остатки от деления на  $mn$  всех чисел этой таблицы разные. В самом деле, если бы какие-то два остатка совпали, то было бы выполнено сравнение

$$mx_1 + ny_1 \equiv mx_2 + ny_2 \pmod{mn},$$

где  $0 \leq x_1, x_2 < n$  и  $0 \leq y_1, y_2 < m$ . Отсюда следуют два сравнения:

$$mx_1 + ny_1 \equiv mx_2 + ny_2 \pmod{m}$$

и

$$mx_1 + ny_1 \equiv mx_2 + ny_2 \pmod{n}.$$

Первое приводит к сравнению

$$ny_1 \equiv ny_2 \pmod{m},$$

из которого вследствие взаимной простоты чисел  $m$  и  $n$

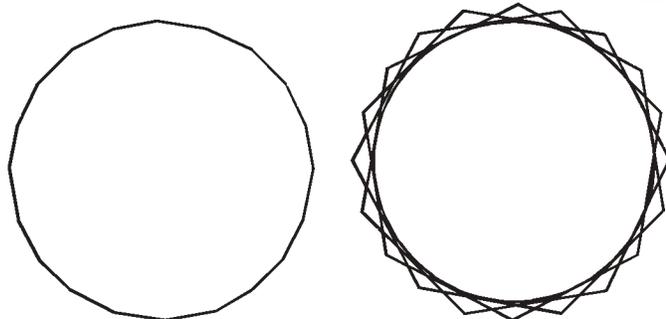


Рис.1

получаем

$$y_1 \equiv y_2 \pmod{m}.$$

Вспомнив, что  $0 \leq y_1, y_2 < m$ , получаем:  $y_1 = y_2$ . Аналогично, сравнение по модулю  $n$  приводит к равенству  $x_1 = x_2$ .

Итак, все  $mn$  чисел таблицы дают разные остатки при делении на  $mn$ . Но возможных остатков от деления на  $mn$  ровно столько же, сколько чисел в таблице! Значит, рассматриваемые числа дают все возможные остатки от деления на  $mn$ . Другими словами, для любого числа  $d = 0, 1, \dots, mn - 1$  существует и единственна такая пара целых чисел  $x, y$ , что  $0 \leq x < n, 0 \leq y < m$  и  $d \equiv mx + ny \pmod{mn}$ .

В таблице 8 четные числа образуют четыре столбца, а числа, кратные 5, образуют одну строку. Это не случайно:

$$\text{НОД}(mx + ny, m) = \text{НОД}(ny, m) = \text{НОД}(y, m);$$

аналогично,  $\text{НОД}(mx + ny, n) = \text{НОД}(x, n)$ . По этой причине в рассматриваемой таблице числа, взаимно простые с  $m$ , расположены в  $\varphi(m)$  столбцах (тех, где  $y$  взаимно просто с  $m$ ), а числа, взаимно простые с  $n$ , образуют  $\varphi(n)$  строк.

Теперь доказательство теоремы 3 не составляет труда: чтобы  $d$  было взаимно просто с  $mn$ , необходимо и достаточно, чтобы  $d$  было взаимно просто с числами  $m$  и  $n$ . Такие числа  $d$  лежат на пересечении  $\varphi(m)$  столбцов (состоящих из чисел, взаимно простых с  $m$ ) с  $\varphi(n)$  строками (состоящими из чисел, взаимно простых с  $n$ ). Всего получаем «решетку» из  $\varphi(m)\varphi(n)$  чисел, что и требовалось доказать.

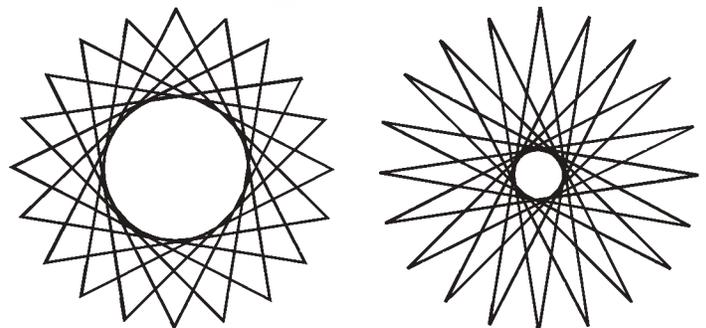
**Упражнения**

**39.** Запишем числа от 0 до  $mn - 1$  в таблицу из  $m$  строк и  $n$  столбцов (табл.9).

Таблица 9

0	1	2	...	$n-1$
$n$	$n+1$	$n+2$	...	$2n-1$
$2n$	$2n+1$	$2n+2$	...	$3n-1$
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
$(m-1)n$	$(m-1)n+1$	$(m-1)n+2$	...	$mn-1$

а) Составьте такую таблицу для  $m = 3$  и  $n = 4$ . Зачеркните в ней сначала все четные числа, а затем – те из оставшихся чисел, которые кратны 3. Заметьте, что незачеркнутыми остались в



точности числа, взаимно простые с 12, и что незачеркнутые числа не образуют решетки.

б) Докажите теорему Эйлера по следующему плану:

1) числа, взаимно простые с  $n$ , заполняют собой  $\varphi(n)$  столбцов таблицы 9;

2) остатки от деления на  $m$  всех  $m$  чисел любого столбца таблицы 9 различны;

3) в каждом столбце присутствует ровно  $\varphi(m)$  чисел, взаимно простых с  $m$ ;

4) число взаимно просто с  $mn$  тогда и только тогда, когда оно взаимно просто с  $n$  (такие числа лежат в  $\varphi(n)$  столбцах) и взаимно просто с  $m$  (в каждом столбце таких чисел  $\varphi(m)$ ).

40. Окружность разделили  $n$  точками на  $n$  равных частей. Сколько можно построить различных замкнутых ломаных из  $n$  равных звеньев с вершинами в этих точках? (Две ломаные, получающиеся одна из другой поворотом, считаем одинаковыми. На рисунке 1 изображены все такие ломаные при  $n = 20$ .)

41. Для любых натуральных чисел  $m$  и  $n$  докажите равенства:

а)  $\varphi(m)\varphi(n) = \varphi(\text{НОК}(m, n))\varphi(\text{НОД}(m, n))$ ;

б)  $\varphi(mn) = \varphi(\text{НОК}(m, n)) \cdot \text{НОД}(m, n)$ ;

в)  $\varphi(m)\varphi(n)\text{НОД}(m, n) = \varphi(mn)\varphi(\text{НОД}(m, n))$ .

г) Пусть  $m$  и  $n$  – натуральные числа, причем  $\text{НОД}(m, n) > 1$ . Докажите неравенство  $\varphi(mn) > \varphi(m)\varphi(n)$ .

42. Решите уравнения: а)  $\varphi(x) = 18$ ; б)  $\varphi(x) = 12$ ; в)  $x - \varphi(x) = 12$ ; г\*)  $\varphi(x^2) = x^2 - x$ ; д)  $\varphi(x) = x/2$ ; е)  $\varphi(x) = x/3$ ; ж\*)  $\varphi(x) = x/n$ , где  $n$  – натуральное число,  $n > 3$ ; з)  $\varphi(mx) = \varphi(x)$ , где  $n$  – натуральное число,  $n > 1$ .

### Шифры с открытым ключом

*На вопрос, что он написал в шифровке, Штирлиц ответил: «Не помню.*

*Теперь это знает только Центр.»*

Вообразите, что вам нужно получить зашифрованное сообщение от вашего друга, но вы с ним не договорились заранее, каким шифром будете пользоваться. Как быть? Существует ли такой метод шифрования, что его можно сообщить всему миру (в том числе и вашему другу, и врагам), но это не даст врагам возможности расшифровать сообщение?

Это был бы замечательный шифр: в отличие от старых шифров, где главный секрет – ключ, знание которого позволяет и зашифровывать, и расшифровывать сообщения, новый шифр – «с открытым ключом»: каждый может зашифровывать, но только автор шифра может расшифровать получаемые сообщения.

#### Шифр RSA

*...Так начались необычайные события, которые вовлекли в свой круговорот немало людей.*

Е. Велтистов

Скорее всего, шифр с открытым ключом уже изобретен! В 1978 году три математика – Ривест, Шамир и Адлеман – зашифровали некоторую английскую фразу и пообещали награду в 100\$ первому, кто расшифрует сообщение

$$y = 968696137546220614771409222543558829057599911$$

$$2457431987469512093081629822514570835693147662288$$

$$3989628013391990551829945157815154.$$

Они подробно объяснили способ шифрования. Сначала фразу бесхитростно (a = 01, b = 02, c = 03, ..., z = 26, пробел = 00) записали в виде последовательности цифр.

Получилось некоторое 78-значное число  $x$ . Затем взяли 64-значное простое число  $p$  и 65-значное простое число  $q$ . Перемножили их (не вручную, разумеется, а на компьютере):

$$pq = 11438162575788886766932577997614661201021829$$

$$67212423625625618429357069352457338978305971235639$$

$$58705058989075147599290026879543541.$$

Теперь – главное:

$$y \equiv x^{9007} \pmod{pq}.$$

Понимаете? Они опубликовали и произведение  $pq$ , и число 9007, и сам метод шифрования (и, разумеется, число  $y$ ). Было даже сказано, что из чисел  $p$  и  $q$  одно 64-значное, а другое 65-значное. В секрете остались только сами числа  $p$  и  $q$ . Требовалось найти  $x$ .

Эта история завершилась в 1994 году, когда Аткинс, Крафт, Ленстра и Лейланд расшифровали эту фразу. Числа  $p$  и  $q$  оказались равны

$$p = 349052951084765094914784961990389813341776463$$

$$8493387843990820577,$$

$$q = 327691329932667095499619881908344614131776429$$

$$67992942539798288533.$$

В книге «Введение в криптографию» (М., МЦНМО, 1998 г.) сказано: «Этот замечательный результат (разложение на множители 129-значного числа) был достигнут благодаря использованию алгоритма разложения чисел на множители, называемого методом квадратичного решета. Выполнение вычислений потребовало колоссальных ресурсов. В работе, возглавлявшейся четырьмя авторами проекта и продолжавшейся после предварительной теоретической подготовки примерно 220 дней, на добровольных началах участвовало около 600 человек и примерно 1600 компьютеров, объединенных сетью Internet.»

К сожалению, рассказ о методе квадратичного решета увел бы нас далеко в сторону от основной темы. Потому оставим его до лучших времен, а здесь обсудим основную идею системы RSA (по первым буквам фамилий авторов: Rivest, Shamir, Adleman).

Идея очень красива. Во-первых, зная  $p$  и  $q$ , можно найти  $\varphi(pq) = (p-1)(q-1)$ . Во-вторых (и это главное!), если

$$ef = 1 + k\varphi(pq),$$

где  $e, f, k$  – натуральные числа, то для любого числа  $x$ , взаимно простого с  $pq$ , по теореме Эйлера имеем

$$x^{ef} = x \cdot (x^k)^{\varphi(pq)} \equiv x \cdot 1 = x \pmod{pq}.$$

Вы поняли, что такое  $e$  и  $f$ ? В нашем примере  $e = 9007$  (единственное обязательное математическое требование к числу  $e$  – его взаимная простота с числом  $(p-1)(q-1)$ ; впрочем, брать  $e = 1$  или  $e = (p-1)(q-1) - 1$  вряд ли разумно, если хотите сохранить секреты). А число  $f$ , как уже было сказано, – решение сравнения

$$ef \equiv 1 \pmod{\varphi(pq)}.$$

(В Приложении рассказано, как алгоритм Евклида позволяет решать такие сравнения.)

Сравнения

$$y^f \equiv x^{ef} \equiv x \pmod{pq}$$

показывают, что для нахождения  $x$  достаточно найти остаток от деления  $y^f$  на  $pq$ . (Числа выбраны так, что  $x < pq$ . При этом  $x$  не кратно ни  $p$ , ни  $q$ . Не подумайте, что это всерьез нас ограничивает: если  $p$  и  $q$  – большие числа, то вероятность того, что  $x$  нацело разделится на  $p$  или  $q$ , пренебрежимо мала. Кроме того, можно предусмотреть в алгоритме, чтобы в случае чего сообщение  $x$  было автоматически как-то так чуть-чуть изменено, без изменения его смысла, что  $x$  и  $pq$  станут взаимно простыми.)

Почему многие надеются, что шифр RSA является шифром с открытым ключом? Да потому, что числа  $pq$  и  $e$  можно сделать общедоступными. Тогда зашифровать сообщение сможет любой, у кого есть компьютер (и какая-нибудь программа, позволяющая выполнять действия с многозначными числами). Расшифровать сообщение легко, если мы знаем число  $f$ . Но единственный известный ныне способ нахождения числа  $f$  требует нахождения чисел  $p$  и  $q$ , т.е. разложения произведения  $pq$  на множители. А эффективных алгоритмов решения этой задачи пока нет (удача 1994 года не в счет: если бы в числах  $p$  и  $q$  было не 64 и 65, а хотя бы по 300 цифр, то и ресурсов сети Internet не хватило бы!). Впрочем, нет сейчас и доказательства того, что никто никогда не научится быстро (математик сказал бы: «за время, полиномиальное от количества цифр») разлагать числа на простые множители.

## Приложение

### Как возводить в большую степень?

Чтобы возвести число  $x$  в 9007-ю степень, по определению, достаточно выполнить 9006 умножений. Но можно обойтись и меньшим числом операций: вычислить  $x^2$ ,  $(x^2)^2 = x^4$ ,  $(x^4)^2 = x^8$ , ...,  $(x^{2048})^2 = x^{4096}$ , наконец,  $(x^{4096})^2 = x^{8192}$  и воспользоваться формулой

$$x^{9007} = x \cdot x^2 \cdot x^4 \cdot x^8 \cdot x^{32} \cdot x^{256} \cdot x^{512} \cdot x^{8192},$$

которая основана на том, что в двоичной системе счисления 9007 имеет вид

$$9007_{10} = 10001100101111_2.$$

Понимаете? Мы разложили 9007 в сумму  $1 + 2 + 4 + 8 + 32 + 256 + 512 + 8192$  и смогли сильно сэкономить: обошлись 13-ю возведениями в квадрат на первом этапе вычислений и 7-ю умножениями на втором этапе. Всего 20 умножений вместо 9006. Огромная экономия! (Для придирчивого читателя отметим, что выше следовало бы говорить не об умножениях, а об умножениях по модулю  $pq$ : дабы количество цифр не росло катастрофически, мы всякий раз должны не только перемножать, но и брать остаток от деления на  $pq$ . Но сейчас разговор не об этом.)

Преимущества изложенного метода возведения в степень тем нагляднее, чем больше показатель степени. Например, если показатель степени состоит не из четырех цифр, как 9007, а из нескольких десятков или сотен цифр, то наивный способ не то что утомителен, а неосуществим ни на каких, даже самых мощных, компьютерах. А основанный на двоичной системе – работает и в такой ситуации!

**Упражнение 43 (M1086).** С числом разрешено производить две операции: «увеличить в 2 раза» и «увеличить на 1». За какое наименьшее число операций можно из числа 0 получить число а) 100; б) 9907; в)  $n$ , если в двоичной системе счисления  $n$  имеет вид  $\overline{a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0}$ ?

### Алгоритм Евклида

Алгоритм Евклида – это способ отыскания наибольшего общего делителя, основанный на формуле

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a - bq, b),$$

которая верна для любых целых чисел  $a, b, q$ . (Докажите эту формулу!) Подробно о нем рассказано в статье Н. Васильева «Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики» (Приложение к журналу «Квант» № 6 за 1998 год). Собственно говоря, нам нужен даже не алгоритм Евклида, а основанный на нем способ решения линейных уравнений.

Итак, даны два взаимно простых числа  $e$  и  $m$  (в интересовавшем нас случае  $m = \phi(pq)$ , но здесь это не важно). Нужно найти такие числа  $f$  и  $k$ , что

$$ef = 1 + km.$$

Если бы  $m$  было не очень большим, то можно было бы выполнить полный перебор всех  $m$  остатков. Но если  $m$  большое, то перебор нереален. Оказывается, алгоритм Евклида позволяет быстро решать эту задачу.

Чтобы объяснить, как он работает, рассмотрим пример:  $e = 9007$ ,  $m = 19876$ . (Мы хотели взять сто-с-лишним-значное число  $m$ , но в последний момент струсили.) Уравнение

$$9007f = 1 + 19876k$$

можно записать в виде

$$9007f = 1 + 9007 \cdot 2k + 1862k,$$

т.е.

$$9007(f - 2k) = 1 + 1862k.$$

Обозначим  $a = f - 2k$ . Тогда

$$9007a = 1 + 1862k.$$

Заметьте: получилось уравнение того же типа, что и исходное, только коэффициенты стали меньше. Теперь следующий шаг:

$$1862 \cdot 4a + 1559a = 1 + 1862k,$$

т.е.

$$1559a = 1 + 1862(k - 4a).$$

Обозначим  $k - 4a = b$ , тогда

$$1559a = 1 + 1862b.$$

Далее,

$$1559(a - b) = 1 + 303b.$$

Обозначив  $a - b = c$ , получаем уравнение

$$1559c = 1 + 303b.$$

Дальше – так же:

$$44c = 1 + 303(b - 5c), \quad d = b - 5c, \quad 44c = 1 + 303d;$$

$$44(c - 6d) = 1 + 39d, \quad x = c - 6d, \quad 44x = 1 + 39d;$$

$$5x = 1 + 39(d - x), \quad y = d - x, \quad 5x = 1 + 39y.$$

Машина продолжила бы вычисления дальше, пока коэффициент при одной из неизвестных не стал бы равен 1. А мы остановимся уже здесь: очевидно,  $x = 8$ ,  $y = 1$  – одно из решений

(Окончание см. на с. 37)

# Эрнст Аббе и «Карл Цейс Йена»

**А. ВАСИЛЬЕВ**

**И**МЯ НЕМЕЦКОГО УЧЕНОГО Эрнста Аббе (1840–1905) известно любому оптику независимо от того, в какой конкретной области естествознания он работает и в какой стране живет. Благодаря трудам Аббе, а также деятельности блестящего инженера и организатора оптического производства Карла Цейса (1816–1888) инструментальный арсенал оптики вышел на тот уровень, который знаком нам и сегодня.

Период с середины XIX до начала XX века – это период революционных открытий в различных областях естествознания, обогативших науку новыми методами исследования. Требования науки и техники к созданию приборов, обеспечивающих наблюдение различных объектов, привели к бурному развитию прикладной оптики и оптического приборостроения. Претерпел существенную реорганизацию и сам процесс изготовления научных приборов. На смену небольшим мастерским пришли предприятия промышленного типа – такие, например, как оптическая фирма «Карл Цейс Йена» (это – современное название). Участие Аббе в делах этой фирмы способствовало ее успеху и позволило производить продукцию высочайшего качества.

Эрнст Аббе родился в 1840 году в Айзенахе, а школу и гимназию окончил в Йене. Здесь же он поступил в местный университет, откуда впоследствии перевелся в Геттинген. В Геттингене в те годы работали Вебер, Риман и другие знаменитые математики, общение с которыми очень способствовало развитию незаурядных математических способностей Аббе. В 1861 году он защитил докторскую диссертацию, а в 1863 году получил должность приват-до-

цента в Йенском университете. В Йене Аббе прожил 35 лет, принеся этому городу мировую славу. Будучи профессором Йенского университета, Аббе все свое внимание уделял курсу оптики – теории оптических устройств, аналитической и математической оптике, технике оптического эксперимента.

Период жизни Аббе с 1866 по 1888 год был тесно связан с деятельностью известного немецкого оптика-механика Карла Цейса. В 1846 году Цейс организовал в Йене оптико-механическую мастерскую, выпускавшую вначале лупы и простые микроскопы. Вскоре, благодаря высокому качеству шлифовки и изготовления линз, микроскопы Цейса получили признание и распространение в широких кругах специалистов. С 1858 года фирма Цейса начала выпускать сложные микроскопы, а затем и другие оптические приборы. Карл Цейс всегда старался «основывать практическое конструирование микроскопов целиком на научной теории» и поэтому пригласил для работы в своей фирме ряд крупных специалистов по прикладной оптике и прежде всего – Эрнста Аббе.

К тому времени европейская традиция создания оптических инструментов насчитывала около трех веков, однако базировалась она в основном на интуитивных соображениях. Одним из изобретателей микроскопа, состоявшего из двух линз – двояковыпуклого объектива и двояковогнутого окуляра, был великий итальянский ученый Галилео Галилей. Родоначальником современных микроскопов стал Дреббель, изготовивший микроскоп из двояковыпуклого объектива и плосковыпуклого окуляра, а принципиальное изменение в его конструкцию внес Гук, который в 1663 году установил тре-

тью линзу – коллектив – между объективом и окуляром. Наконец, важное усовершенствование микроскопа было сделано в 1716 году Гертелем, который ввел в конструкцию вращающийся предметный столик и помещенное под ним зеркало подсветки. Это привело к значительному улучшению освещения объекта и получению более качественного изображения. По сути, именно в таком виде микроскопы дошли до наших дней.

Дальнейшее улучшение изображения было связано с устранением погрешностей оптических систем – прежде всего сферической и хроматической аберраций. При наличии сферической аберрации параксиальные, т.е. близкие к оси лучи, падающие на линзу, после прохождения через ее различные участки пересекают оптическую ось в разных точках, в силу чего изображение точки получается в виде диска с неоднородным распределением освещенности. Из-за хроматической аберрации луч белого света после прохождения через линзу распадается на ряд лучей разных цветов, которые пересекают оптическую ось в разных точках – за счет зависимости фокусного расстояния линзы от длины волны падающего света, обусловленной дисперсией света.

Помимо повышения качества изображения, задачей оптиков XVII – XIX веков было создание микроскопов с максимально большим увеличением. Известно, что увеличение микроскопа возрастает с уменьшением фокусного расстояния его объектива, поэтому оптики перешли к использованию короткофокусных объективов. Кроме того, разрешающая способность микроскопа зависит от его апертуры, т.е. угла между крайними лучами, идущими от объек-

та к краям объектива. Почти 180-градусная апертура была достигнута уже к середине XIX века. Однако в короткофокусных объективах и объективах с большой апертурой aberrации достигают особенно больших величин.

Попытки повысить качество микроскопов и рассчитать их увеличение по законам геометрической оптики показали, что она не может полностью объяснить образование изображения в микроскопе. Этот вывод натолкнул Аббе на необходимость привлечения физической оптики.

Свои исследования в области конструкции микроскопов Аббе опубликовал в 1873 году. Он показал, какую роль в образовании изображения играют объектив и окуляр микроскопа, дал классификацию aberrаций. Но самой большой заслугой Аббе стало установление тех пределов, которые ставит перед конструкторами оптических систем волновая природа света.

Аббе объяснил, как именно строится изображение предмета линзой. Сначала в плоскости, перпендикулярной оси линзы, возникает интерференционная картина – система чередующихся максимумов и минимумов освещенности, которая играет роль своеобразной дифракционной решетки. Световой поток, проходящий от линзы через эту решетку, взаимодействует с решеткой и только после этого на небольшом расстоянии от плоскости решетки появляется изображение, которое можно увидеть на матовом стекле или сфотографировать. Так создается изображение одной линзой. В микроскопе же, согласно теории Аббе, изображение получается двумя последовательными этапами, схематически показанными на рисунке 1.

На первом этапе свет, освещающий объект  $P_1P_1$ , попадает на линзу микроскопа, претерпев рассеяние (дифракцию) на деталях объекта, так что структура светового пучка оказывается зависящей от этого объекта. Пройдя через объектив микроскопа, световой пучок образует в его фокальной плоскости  $FF$  дифракционную картину – систему максимумов, угловые размеры которых зависят от деталей структуры объекта. Направление на эти максимумы определяется условием  $nd \sin \varphi = k\lambda$ , где  $n$  – показатель преломле-

ния среды,  $d$  – характерный размер деталей объекта,  $\varphi$  – угол дифракции,  $k = 0, 1, 2, \dots$  – номер максимума,  $\lambda$  – длина волны света.

На втором этапе максимумы освещенности рассматриваются как источники, испускающие когерентные лучи. За фокальной плоскостью объектива эти лучи, встречаясь, интерферируют между собой, давая в плоскости  $P_2P_2$  изображение предмета. Аббе назвал картину в фокальной плоскости объектива первичным изображением, а картину в сопряженной плоскости – вторичным.

Для получения правильного изображения предмета необходимо, чтобы вторичное изображение образовывалось в результате взаимодействия лучей от всех максимумов первичного изображения. Особое значение имеют максимумы первых порядков, расположенные под малыми углами и обусловленные более крупными и обычно более важными деталями реального объекта. Максимумы, соответствующие большим углам, определяют более мелкими деталями предмета. Очень мелкие детали – меньше длины световой волны – вообще не могут быть наблюдаемы, так как волны, дифрагировавшие на таких деталях, не доходят до экрана даже при максимальной возможной апертуре объектива. Это соображение устанавливает предел разрешения деталей:  $d \geq \lambda = \lambda_0/n$ , где  $\lambda_0$  – длина волны света в вакууме. Обычно внутри микроскопа нет никаких препятствий, и поэтому число дифракционных максимумов,

проникающих через объектив, ограничивается только его оправой. Чем меньше предмет или его деталь, тем большие углы дифракции он обуславливает – величина этого угла носит название апертуры  $u$  – и тем шире должно быть отверстие объектива. Если апертура меньше угла дифракции  $\varphi_1$ , соответствующего спектрам первого порядка, т.е. если  $\sin u < \sin \varphi_1 = \lambda_0/d$ , то в микроскоп проникнут только лучи от центрального максимума и мы не увидим изображения, соответствующего деталям с размером порядка  $d$ . Чем больше  $\sin u$  по сравнению с  $\lambda_0/d$ , тем больше спектров высших порядков участвует в построении изображения, т.е. тем точнее передается наблюдаемый объект.

Обычно при освещении объекта используются не только пучки света, идущие вдоль оси, но и наклонные, что улучшает условия разрешения. Если освещающий пучок идет под углом  $\alpha$  к оси микроскопа и дифрагирует под углом  $\alpha_0$ , то условие максимумов имеет вид  $\sin \alpha_0 - \sin \alpha = k\lambda/d$ . Для того чтобы первый спектр полностью попадал в объектив, должны выполняться следующие условия:  $\alpha = -u$ ,  $\alpha_0 = u$ ,  $k = 1$ . При этом  $2 \sin u \geq \lambda_0/(nd)$ , или  $d \geq \lambda_0/(2n \sin u)$ . Величину  $A = n \sin u$  Аббе назвал числовой апертурой. Согласно теории Аббе, числовая апертура определяет ряд важнейших свойств микроскопа: яркость изображения, степень сходства изображения с предметом и т.п. Чем больше числовая апертура, тем бо-

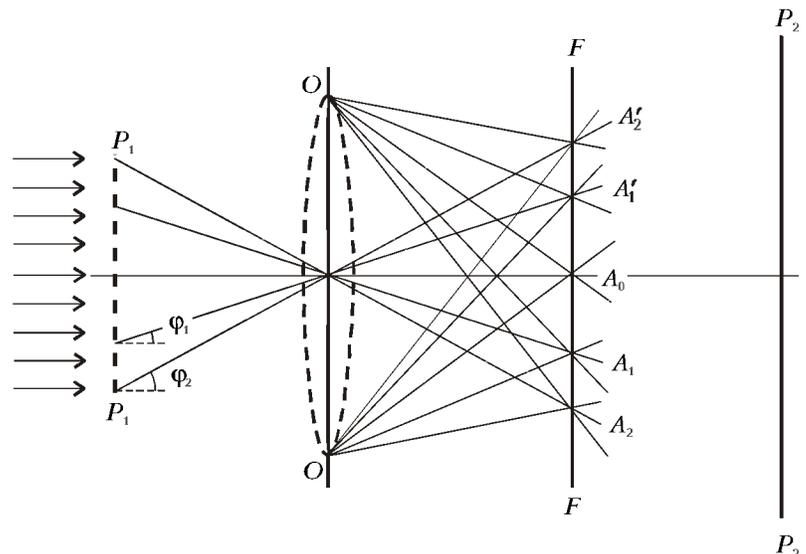


Рис.1. К дифракционной теории микроскопа Аббе:  $P_1P_1$  – плоскость предмета,  $FF$  – фокальная плоскость объектива  $OO$ ,  $P_2P_2$  – плоскость изображения,  $\varphi_k$  – углы дифракции,  $A_k$  – дифракционные максимумы в фокальной плоскости

лее мелкие подробности объекта наблюдения можно рассмотреть в микроскоп. Из теории Аббе следует, однако, что видеть в микроскоп объекты с размерами, меньшими половины длины световой волны, нельзя. Правильность своей теории образования изображений Аббе подтвердил опытами (в которых в качестве объекта наблюдения брались поглощающие решетки), а в 1887 году Аббе сформулировал строгую математическую теорию микроскопа.

Для повышения разрешающей способности микроскопа Аббе стремился увеличить числовую апертуру. Для этого имелось три пути: увеличение собственно апертуры, показателя преломления среды и длины волны светового пучка. Уже на ранних этапах своей деятельности Аббе осознал, что в отношении увеличения апертурного угла микроскоп уже достиг предела и дальнейшие успехи в этом направлении невозможны. Для повышения разрешающей способности микроскопа Аббе предложил увеличить показатель преломления  $n$ , для чего пространство между наблюдаемым объектом и объективом заполнялось средой с более высоким показателем преломления, чем у воздуха. Так, в 1878 году Аббе совместно со Стефенсоном изготовил микроскоп с применением кедрового масла, что позволило на треть увеличить разрешение микроскопа.

Исключительно интересны идеи Аббе о повышении разрешающей способности микроскопа за счет уменьшения длины волны света, с помощью которого образуется изображение, в частности – идеи о возможности использования ультрафиолетовых лучей. Эти идеи были реализованы незадолго до смерти ученого в одном из микроскопов, созданных сотрудниками фирмы «Карл Цейс». Такие микроскопы впоследствии использовались, например, для изучения состава молекул ДНК и РНК.

Аббе уделял также большое внимание исправлению aberrаций оптических систем. Поскольку разные зоны простой линзы образуют изображение плоского элемента с различными увеличениями, точки отдельных изображений объекта, образованных различными зонами, при наложении друг на друга совпадают лишь на оси оптической

системы, а вне оси резкость изображения соответственно ухудшается. Аббе показал, что для того чтобы все зоны системы давали отдельные изображения объекта одинаковой величины, должно выполняться так называемое условие синусов. Оно состоит в том, что для всех лучей, выходящих из точки на оси оптической системы и направляющихся после преломления к точке изображения, отношение между синусами углов соответствующих лучей с осью должно быть постоянным:  $\sin u_1 / \sin u_2 = K n_2 / n_1$ , где  $n_1$  и  $n_2$  – показатели преломления сред со стороны объекта и изображения,  $K$  – увеличение оптической системы. Две точки, для которых устранена сферическая aberrация и соблюдено условие синусов, называются со времен Аббе апланатическими. Аббе показал, что на оси оптической системы возможна только одна пара апланатических точек, и указал простой способ выяснить, в какой мере выполнено условие синусов. Для этой цели Аббе изготовил показанную на рисунке 2 диаграмму, которая рассматривается сквозь испытываемую систему. Если условие синусов выполнено, то удастся найти такое положение диаграммы, при котором наблюдатель видит ее изображение в виде прямоугольной сетки. Испытав много микрообъективов, сделанных «наугад» старыми мастерами, Аббе обнаружил, что у всех хороших объективов условие синусов выполнено. В настоящее время условие синусов Аббе всегда принимается во внимание при расчетах любых оптических систем.

В плане борьбы с хроматической aberrацией Аббе затратил много усилий, чтобы побудить стекольные мастерские изготавливать новые сорта оптического стекла с определенными свойствами. Для сопоставления свойств различных оптических стекол Аббе предложил выделить в видимом диапазоне спектра ряд опорных точек и пользоваться понятием относительной дисперсии  $\gamma$ , определяемой комбинацией показателей преломления на нескольких выделенных длинах световых волн. Величина  $\gamma$  вошла в прикладную оптику под названием числа Аббе. В 1873 году Аббе впервые удалось сконструировать объектив, у которого ахроматизация достигалась для трех



Рис.2. Диаграмма Аббе для проверки условия синусов

цветов. Совмещение фокусов для лучей трех длин волн достигалось благодаря применению разных сортов оптического стекла с разными числами Аббе. Такой объектив Аббе назвал апохроматом. Еще позже, в 1886 году, ему удалось рассчитать и изготовить апохромат, в котором были почти уничтожены и сферическая, и хроматическая aberrации. Он представлял собой триплет, в котором крайние линзы были простыми, а средняя – склеенной из трех линз, изготовленных из стекол с разными числами Аббе.

В своей деятельности Аббе всегда опирался на теоретические представления при конструировании оптических систем. Именно теоретические рассуждения привели его к мысли о необходимости введения в оптическую систему специальных приспособлений – диафрагм, ограничивающих прохождение световых лучей. Он показал, что для образования изображения в системе нужны только те лучи, которые без задержки проходят через прибор до изображения, а лучи, которые проходят лишь через часть системы, задерживаясь, например, оправками линз, не только бесполезны, но и вредны.

Наконец, большой заслугой Аббе стала разработка и создание целого ряда новых оптических инструментов, а также организация научно-исследовательских работ по получению новых сортов оптического стекла. На предприятиях фирмы «Карл Цейс» были спроектированы и начали выпускаться призматические бинокли, фотообъективы новой конструкции, рефрактометры для измерения показателя преломления материалов, инструменты для измерения угловых и линейных величин. Все эти приборы подняли производство оптических инструментов на более высокий уровень.

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 2000 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1 – 2000» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1711» или «Ф1718». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задача М1711 предлагалась на городской олимпиаде Костромы, а задачи М1716–М1718 – на XI Международной математической олимпиаде.

Задачи Ф1718, Ф1719, Ф1723, Ф1724 и Ф1727 предлагались на заочном туре VI Соросовской олимпиады по физике, а задачи Ф1720–Ф1722 и Ф1726 – на Московском интеллектуальном марафоне.

## Задачи М1711–М1720, Ф1718–Ф1727

**М1711.** В «Большой энциклопедии кроликов» 10 томов. Они стоят на полке почти по порядку: каждый том стоит либо на своем месте, либо на соседнем. Сколько таких расположений возможно?

Д.Калинин

**М1712.** а) Несколько треугольников расположены на плоскости так, что каждые четыре из них имеют общую вершину. Докажите, что все треугольники имеют общую вершину.

б) Несколько прямоугольников расположены на плоскости так, что каждые три из них имеют общую вершину. Докажите, что все прямоугольники имеют общую вершину.

В.Произолов

**М1713.** На сторонах  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  треугольника  $ABC$  взяты такие точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , что прямые  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  пересекаются в одной точке. Пусть  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $D'$ ,  $E'$ ,  $F'$  – середины отрезков  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ ,  $A'B'$ ,  $B'C'$ ,  $C'A'$ . Докажите, что

а) прямые  $DD'$ ,  $EE'$ ,  $FF'$  имеют общую точку, причем эта точка, точка пересечения прямых  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  и точка пересечения медиан треугольника  $ABC$  лежат на одной прямой;

б) если в качестве прямых  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  взяты высоты треугольника  $ABC$ , то точка пересечения прямых  $DD'$ ,  $EE'$ ,  $FF'$  совпадает с центром окружности Эйлера (окружности девяти точек) треугольника  $ABC$ ;

в) если прямые  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  – биссектрисы треугольника  $ABC$ , то их общая точка, общая точка прямых  $DD'$ ,

$EE'$ ,  $FF'$  и точка пересечения прямых, проходящих через вершины треугольника  $ABC$  и делящих его периметр пополам (точка Нагеля), лежат на одной прямой; г) если прямые  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  делят периметр треугольника  $ABC$  пополам, то точка пересечения прямых  $DD'$ ,  $EE'$ ,  $FF'$  совпадает с центром масс контура треугольника  $ABC$ .

И.Вайнштейн

**М1714.** Докажите, что каждое из уравнений

$$а) (x^2 + 1)(y^2 - 1) = z^2,$$

$$б) (x^2 - 1)(y^2 - 1) = z^2, \text{ где } x \neq y,$$

$$в*) (x^2 + 1)(y^2 + 1) = z^2, \text{ где } x \neq y,$$

имеет бесконечно много решений в натуральных числах  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

В.Сеидеров

**М1715.** Все натуральные числа от 1 до  $2n$  записаны в последовательности  $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$  такой, что

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{2n-1} - a_{2n}| + |a_{2n} - a_1| = 2n^2.$$

Докажите, что

$$|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4| + \dots + |a_{2n-1} - a_{2n}| = n^2.$$

В.Произолов

**М1716.** В квадрате клетчатой бумаги размером  $n \times n$  клеток отмечены  $N$  клеток таким образом, что каждая клетка квадрата (отмеченная или неотмеченная) имеет хотя бы одну отмеченную соседнюю клетку. Определите наименьшее возможное значение  $N$ , если соседними считать клетки, имеющие общую сторону.

Е.Барabanов, И.Воронович

**M1717\*.** Две окружности  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , содержащиеся внутри окружности  $\Gamma$ , касаются  $\Gamma$  в различных точках  $M$  и  $N$  соответственно. Окружность  $\Gamma_1$  проходит через центр окружности  $\Gamma_2$ . Прямая, проходящая через две точки пересечения  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , пересекает  $\Gamma$  в точках  $A$  и  $B$ . Прямые  $MA$  и  $NB$  пересекают  $\Gamma_1$  в точках  $C$  и  $D$  соответственно. Докажите, что  $CD$  касается  $\Gamma_2$ .

*П. Кожевников*

**M1718\*.** Найдите все функции  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  такие, что

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

для всех  $x, y \in \mathbf{R}$ .

*(Япония)*

**M1719.** Последовательность  $a_1, a_2, a_3, \dots$  задана своим первым членом  $a_1 = 1$  и рекуррентной формулой

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots$$

а) Докажите, что  $a_{100} > 14$ .

б\*) Найдите  $[a_{1000}]$ , т.е. укажите такое целое число  $m$ , для которого  $m \leq a_{1000} < m + 1$ .

в) Докажите существование и найдите значение предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n / \sqrt{n}.$$

*А. Спивак*

**M1720\*.**  $N$  одинаковых деревянных кубиков склеены между собой так, что каждые два из них склеены по грани или по участку грани. Докажите, что максимальное значение  $N$  равно шести.

*В. Произволов*

**F1718.** Заяц бежит по прямой с постоянной скоростью 5 м/с. В некоторый момент его замечает лиса и начинает погоню. Скорость лисы постоянна по величине и равна 4 м/с, а движется она тоже не самым лучшим образом – скорость ее в каждый момент направлена точно в ту точку, где находится заяц. Вначале расстояние между ними уменьшается, затем начинает возрастать. Минимальное расстояние составляет 30 м. Какое ускорение было у лисы в тот момент, когда расстояние стало минимальным?

*М. Учителев*

**F1719.** В системе, показанной на рисунке 1, силы трения отсутствуют. При каком значении силы  $F$  клин и тележка

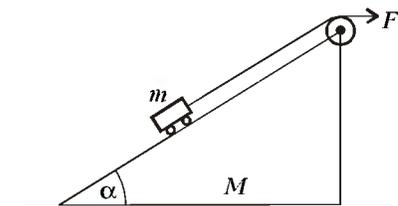


Рис.1

могут двигаться вместе, без проскальзывания? Угол при основании клина  $\alpha$ .

*А. Клинов*

**F1720.** Кусок мела лежит на горизонтальной доске с коэффициентом трения  $\mu$ . Доску резко начинают двигать в горизонтальном направлении со скоростью  $v_0$ , а через

время  $\tau$  резко останавливают. Найдите длину меловой черты на доске.

*К. Чертов*

**F1721.** В высокий вертикальный сосуд квадратного сечения, разделенный вертикальными перегородками на три части (рис.2), налили до одной и той же высоты горячий суп с температурой  $+65^\circ\text{C}$  – в большое отделение, теплый компот при  $+35^\circ\text{C}$  и холодный квас при  $+20^\circ\text{C}$ . Наружные стенки сосуда очень хорошо теплоизолированы, внутренние перегородки имеют одинаковую толщину и сделаны из одного материала, не очень хорошо проводящего тепло. Через некоторое время суп остыл на 1 градус. Считая, что все эти жидкости – практически одна вода, определите, на сколько изменились за это время температуры остальных двух жидкостей. Кваса в сосуде столько же, сколько компота, супа – вдвое больше.

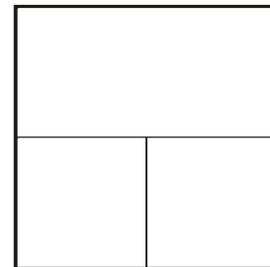


Рис.2

*А. Компотов*

**F1722.** В закрытом сосуде кроме воздуха содержится некоторое количество воды. Температура внутри сосуда поддерживается равной  $+100^\circ\text{C}$ . Начальный объем сосуда 10 л, жидкость при этом занимает очень небольшую часть объема сосуда, а давление составляет ровно 2 атм. При увеличении объема сосуда до 20 л давление в нем упало до 1,4 атм. Считая эти значения точными, найдите массу воздуха в сосуде. А сколько молекул воды содержится в сосуде?

*З. Рафаилов*

**F1723.** Высокий вертикальный сосуд содержит небольшое количество гелия под поршнем массой  $M$ , на который поставлена гиря массой  $49M$ . В состоянии равновесия поршень «висит» над дном сосуда на высоте  $h$ . Гирю снимают с поршня, и он начинает движение вверх. Оцените максимальную высоту подъема поршня. На какой высоте над дном сосуда поршень в конце концов остановится? Считайте при расчете, что трения в системе нет, стенки и поршень совершенно не проводят тепло, а теплоемкость стенок и поршня сосуда очень мала.

*А. Повторов*

**F1724.** Конденсаторы, емкости которых  $C$ ,  $2C$  и  $3C$ , соединены друг с другом, как показано на рисунке 3. Конденсатор емкостью  $2C$  заряжен до напряжения  $U_0$ , остальные два не заряжены. К свободным выводам конденсаторов одновременно подключают резисторы сопро-

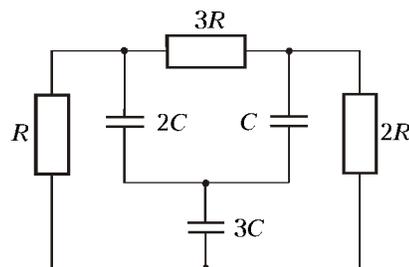


Рис.3

тивлениями  $R$ ,  $2R$  и  $3R$ . Какое количество теплоты выделится за большое время на каждом из этих резисторов?

*А.Зильберман*

**Ф1725.** Катушка индуктивности содержит много витков и намотана из проволоки с высоким удельным сопротивлением. Выводы катушки замкнуты между собой, около катушки расположен сильный постоянный магнит. Магнит очень быстро убирают, при этом в цепи появляется ток. За первые 100 мс выделяется 0,01 Дж тепла, за следующие 100 мс – еще 0,006 Дж. Какое общее количество теплоты выделится в цепи за большое время?

*З.Рафаилов*

**Ф1726.** Цепочку из трех одинаковых резисторов сопротивлением  $R$  каждый и двух идеальных диодов подключили к источнику переменного напряжения с амплитудой  $U_0$  (рис.4). Найдите среднюю тепловую мощность, выделяющуюся на каждом из резисторов.

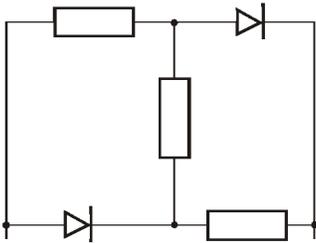


Рис.4

**Ф1727.** В большом спортивном зале стены, пол и потолок оклеены звукопоглощающими (полностью поглощающими звук) покрытиями.

На высоте  $h = 5$  см от пола находится мощный точечный источник звука частоты  $f = 2000$  Гц, излучающий звуковые волны равномерно во все стороны. Микрофон малых размеров находится на высоте  $H = 3$  м от пола на расстоянии  $L = 4$  м по горизонтали от источника. Подключенный к микрофону чувствительный вольтметр показывает амплитуду переменного напряжения  $U = 0,01$  В. Как изменятся показания этого вольтметра, если удалить звукопоглощающее покрытие на полу под микрофоном? Считайте, что от пола звуковые волны отражаются без потерь энергии. Какими будут показания вольтметра в том случае, когда покрытие на полу будет восстановлено, но оно окажется очень тонким, качеством похуже и будет поглощать только половину падающей энергии волны, а ослабленная волна будет отражаться от пола зеркально?

*Р.Александров*

**Решения задач**

**М1691–М1695, Ф1703–Ф1712**

**М1691.** Докажите, что любой четырехугольник можно разрезать на три трапеции.

Если четырехугольник является параллелограммом или трапецией, то разрезание осуществляется просто, как показано на рисунке 1.

Если же четырехугольник  $ABCD$  (выпуклый или невыпуклый) не является параллелограммом или трапецией, то разрезание осуществляется таким образом.

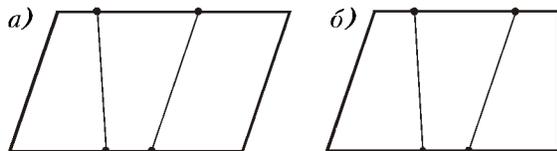


Рис.1

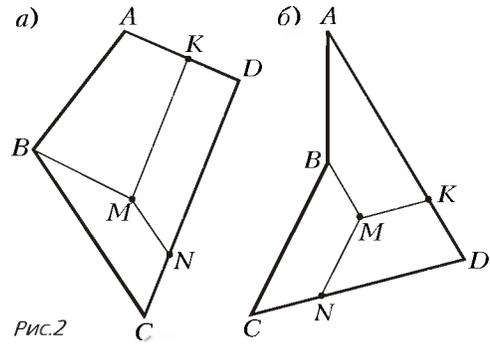


Рис.2

Пусть  $B$  – наибольший внутренний угол данного четырехугольника  $ABCD$ . Проведем разрез  $BM$  из вершины  $B$ , параллельный стороне  $AD$  (точка  $M$  попадет внутрь четырехугольника). Из точки  $M$  проводим разрезы  $MN$  и  $MK$ , параллельные сторонам  $BC$  и  $CD$  соответственно (рис.2).

После чего необходимо разрезание налицо.

*В.Произволов*

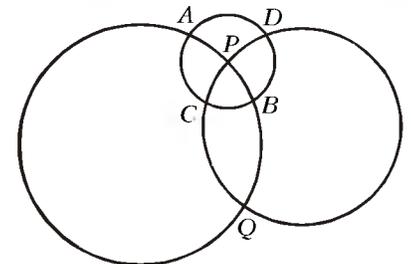
**М1692.** Числа  $a, b, c$  – длины сторон треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{a^2 + 2bc}{b^2 + c^2} + \frac{b^2 + 2ca}{c^2 + a^2} + \frac{c^2 + 2ab}{a^2 + b^2} > 3.$$

Ввиду неравенства треугольника  $a^2 > (b - c)^2$ . Отсюда  $a^2 + 2bc > b^2 + c^2$ . Правая часть положительна, и на нее можно разделить. Получаем, что первое слагаемое в левой части доказываемого неравенства больше 1. То же верно для двух других слагаемых. Поэтому их сумма больше 3.

*В.Сеидеров*

**М1693.** Две окружности пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Третья окружность с центром в точке  $P$  пересекает первую в точках  $A, B$ , а вторую – в точках  $C$  и  $D$  (см. рисунок). Докажите, что углы  $AQD$  и  $BQC$  равны.



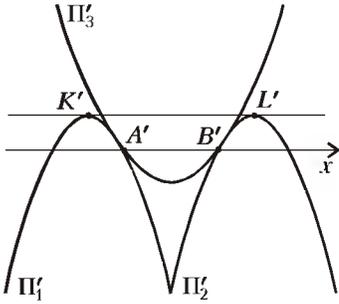
Треугольники  $APB$  и  $DPC$  равнобедренные. Обозначим углы при их основаниях  $\angle ABP = \angle BAP = \alpha$ ,  $\angle DCP = \angle CDP = \beta$ .

Четырехугольники  $AQBP$  и  $DQCP$  вписанные, отсюда  $\angle AQP = \angle ABP = \alpha$  и  $\angle DQP = \angle DCP = \beta$ . Получаем:  $\angle AQD = \angle AQP + \angle DQP = \alpha + \beta$ . Далее,  $\angle BQP = \angle BAP = \alpha$ , также  $\angle CQP = \beta$  и  $\angle BQC = \angle BQP + \angle CQP = \alpha + \beta$ . Значит,  $\angle AQD = \angle BQC$ .

*А.Заславский*

**М1694.** Парабола  $y = -x^2 + b_1x + c_1$  и парабола  $y = -x^2 + b_2x + c_2$  касаются параболы  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a > 0$ . Докажите, что прямая, проходящая через точки касания, параллельна общей касательной к первым двум параболам.

Пусть  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  – данные параболы,  $KL$  – общая касательная к  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  касается  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  в точках  $A$  и  $B$ . Вычтем из всех трех квадратных трехчленов функцию  $f(x) = a_3x + b_3$ , где  $y = a_3x + b_3$  – уравнение прямой  $AB$ .



Тогда получим новые параболы  $\Pi'_1, \Pi'_2, \Pi'_3$  (см. рисунок), при этом  $\Pi'_1$  и  $\Pi'_2$  по-прежнему будут касаться параболы  $\Pi'_3$ , так как у этих пар парабол по-прежнему будет ровно по одной общей точке  $A'$  и  $B'$ .

Точки  $A'$  и  $B'$  лежат на оси  $Ox$ , поэтому рисунок симметричен относительно серединного перпендикуляра к отрезку  $A'B'$ . Из этого следует, что  $K'L' \parallel A'B'$  и, значит,  $KL \parallel AB$ .

Р.Карасев

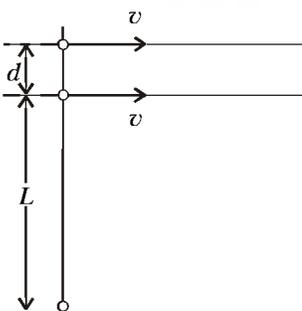
**М1695.** Грани правильного октаэдра раскрасили в шахматном порядке. Докажите, что для любой внутренней точки сумма расстояний до плоскостей черных граней равна сумме расстояний до плоскостей белых граней.

Плоскости, которым принадлежат грани каждого цвета, образуют равные правильные тетраэдры. Утверждение задачи следует из того, что сумма расстояний от внутренней точки правильного тетраэдра до его граней постоянна и равна утроенному объему тетраэдра, деленному на площадь грани. (Чтобы доказать это, соединим точку с вершинами правильного тетраэдра и рассмотрим объемы образовавшихся частей, основаниями которых являются грани исходного тетраэдра.)

Наметим другое доказательство. Каждую грань октаэдра будем считать основанием тетраэдра с вершиной в данной внутренней точке. Нужно доказать, что сумма объемов четырех «черных» тетраэдров равна сумме объемов четырех «белых». Для читателя, знакомого с принципом Кавальери, это следует из того, что всякое сечение октаэдра, перпендикулярное его диагонали, по равной площади пересекается с «черными» и «белыми» тетраэдрами.

Д.Терешин, В.Произволов

**Ф1703.** В компьютерной игре все движется в одной плоскости. Меткий стрелок должен поразить двух злодеев одной пулей. Злодеи движутся с одинаковыми постоянными скоростями  $v$  параллельно друг другу, находясь на расстоянии  $d$  один от другого, как показано на рисунке. Соединяющая их прямая перпендикулярна направлению скорости  $v$ . В данный момент стрелок находится на продолжении этой прямой – на расстоянии  $L$  от ближнего злодея. Пуля после выстрела летит по прямой со скоростью  $3v$ . Пронзая злодея, пуля не меняет ни направления движения, ни величины своей скорости. В какой момент нужно стрелять и под каким углом к направлению движения злодеев нужно выпустить пулю? На сколько дольше ближнего проживет дальний злодей?



Поразив первого злодея, пуля продолжает лететь вдоль той же прямой. Обозначим время, которое пуля летит от одного злодея до другого, через  $t$ . Тогда получится прямоугольный треугольник

с катетами  $d$  и  $vt$  и гипотенузой  $3vt$ . Отсюда сразу находим и время  $t$ , и угол  $\alpha$  между направлением полета пули и направлением движения злодеев:

$$t = \frac{d}{2\sqrt{2}v}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{3}.$$

Элементарные рассуждения показывают, что стрелять нужно как раз в «данный момент».

Я.Злодеев

**Ф1704.** По прямому горизонтальному стержню может скользить без трения бусинка массой  $M$  (рис.1). К бусинке привязана легкая нерастяжимая нитка длиной  $L$ . Нитку мы тянем за свободный конец так, что скорость этого конца все время направлена вдоль нити и равна по величине  $v_0$ . С какой силой нужно тянуть в тот момент, когда нить направлена под углом  $\alpha$  к стержню? Нить все время находится в горизонтальной плоскости.

Если бы скорость свободного конца нити была постоянной (а это не так – вектор скорости все время поворачивается), можно было бы «пересестись» в систему отсчета, которая связана с этим концом, – в такой системе бусинка движется по окружности и можно легко записать необходимые уравнения. В нашем же случае система получилась бы неинерциальной, и никакого упрощения мы не получили бы. Будем действовать так. Нить нерастяжима – это позволит связать скорости концов нити при заданном значении угла  $\alpha$ . Дальше зададим очень малый интервал времени  $\Delta t$ , найдем новое положение бусинки и новое значение угла. После этого выразим новую скорость и найдем ее приращение за выбранный интервал  $\Delta t$ . Таким образом мы вычислим ускорение бусинки, после чего силу уже будет совсем просто найти. Итак, пусть для угла  $\alpha$  скорость бусинки равна  $u$  (рис.2), причем

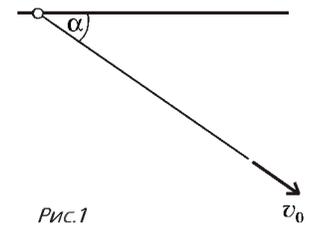


Рис.1

$$u \cos \alpha = v_0.$$

Через малый интервал  $\Delta t$  конец нити сместится на  $v_0 \Delta t$ , бусинка проедет  $u \Delta t$ , и теперь можно записать новое равенство

$$(u + \Delta u) \cos(\alpha + \Delta \alpha) = v_0.$$

Раскрывая скобки, пользуясь известным выражением для косинуса суммы углов и заменяя конус малого угла на 1, а синус на значение угла, получим

$$\Delta u \cos \alpha = u \sin \alpha \cdot \Delta \alpha.$$

Величину приращения угла можно найти из геометрических соображений – например, используя теорему синусов

$$\frac{u \Delta t}{\sin \Delta \alpha} = \frac{L}{\sin \alpha}.$$

Заменяя синус малого угла  $\Delta \alpha$  значением самого угла, найдем

$$\Delta \alpha = \frac{u \Delta t \sin \alpha}{L}.$$

После простых преобразований получим

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = u^2 \frac{\sin^2 \alpha}{L \cos \alpha} = v_0^2 \frac{\sin^2 \alpha}{L \cos^3 \alpha}.$$

Дальше уже совсем просто. Запишем уравнение второго закона Ньютона для бусинки:

$$T \cos \alpha = M \frac{\Delta u}{\Delta t} = M v_0^2 \frac{\sin^2 \alpha}{L \cos^3 \alpha},$$

откуда найдем искомую силу  $T$ :

$$T = M v_0^2 \frac{\sin^2 \alpha}{L \cos^4 \alpha}.$$

А.Зильберман

**Ф1705.** В показанной на рисунке 1 системе трение есть между большим телом и горизонтальной поверхностью стола, а также между большим телом и верхним грузом. Обозначим коэффициент трения наверху  $\mu_1$ , а внизу  $\mu_2$ . При каких значениях коэффициентов трения большое тело может оставаться неподвижным?

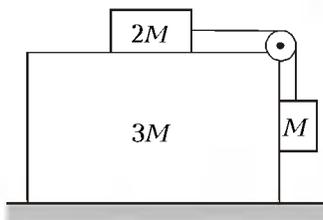


Рис.1

Если коэффициент трения наверху достаточно велик, чтобы при неподвижном теле массой  $3M$  грузы не двигались, то при любом значении коэффициента трения внизу большое тело проскользывает не будет. Для этого нужно, чтобы

$$2Mg\mu_1 \geq Mg, \text{ или } \mu_1 \geq 0,5.$$

В этом случае при любом коэффициенте трения внизу  $\mu_2$  большое тело будет оставаться неподвижным.

Рассмотрим теперь ситуацию, при которой грузы массы  $M$  и  $2M$  могут двигаться, а большое тело остается неподвижным (рис.2; здесь показаны силы, действующие только на большое тело). В этом случае силу натяжения нити найти легко:

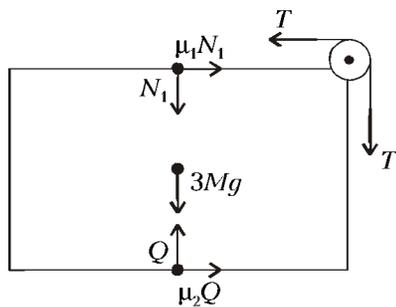


Рис.2

$$T = \frac{2Mg(1 + \mu_1)}{3}.$$

Тогда для движения

большого тела по горизонтали при минимальном значении коэффициента трения  $\mu_2$  запишем

$$2Mg\mu_1 - T = (5Mg + T)\mu_2,$$

откуда после простых преобразований получим соотношение

$$\mu_2 \geq \frac{2 - 4\mu_1}{17 + 2\mu_1}.$$

Р.Александров

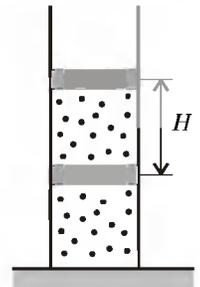
**Ф1706.** В тонкостенный стакан налили 200 г воды и при помощи опущенного в воду нагревателя постоянной мощности 50 Вт стараются вскипятить воду. Ничего не получается – вода никак не нагревается выше 60 °С. Выключим

нагреватель и накроем стакан листком бумаги – вода при этом остынет от 60 °С до 59 °С за 20 секунд. Если бы мы не накрывали стакан листком бумаги, а вместо этого поставили его на теплоизолирующую пробковую подставку, то вода в стакане остыла бы от 60 °С до 59 °С за 30 секунд. Повторим теперь нагревание, но стакан установим на подставку и накроем его листком бумаги. Сколько времени займет в этом случае нагрев воды от 59 °С до 60 °С?

Из условия задачи ясно, что при температуре 60 °С потери тепловой мощности в окружающее пространство достигают 50 Вт. Основные причины ухода тепла – испарение, теплопередача через дно стакана и через его боковую поверхность. При помощи листка бумаги мы снижаем потери на испарение, а пробковая подставка убирает теплопередачу через дно стакана. Остывая на 1 градус за 20 секунд в первом случае, наша порция воды отдает в окружающую среду  $\frac{4200 \cdot 0,2 \cdot 1}{20}$  Вт = 42 Вт, значит, потери на испарение составляют 8 Вт. При остывании с подставкой за 30 секунд стакан отдает мощность 28 Вт, значит, потери тепла через дно подставка уменьшает на 22 Вт. Оба приспособления вместе снизят отдаваемую мощность на 30 Вт; следовательно, эти 30 из 50 Вт будут идти на нагревание воды. На 1 градус при этих условиях вода нагреется за  $840 / 30$  с = 28 с. При решении задачи мы считали, что мощность потерь в диапазоне 59–60 градусов практически постоянна.

А.Простов

**Ф1707.** Вертикальный цилиндрический сосуд содержит две порции газа, отделенные друг от друга и от окружающего пространства двумя одинаковыми массивными поршнями массой  $M$  каждый (см. рисунок). В верхней части сосуда находится кислород, в нижней – гелий. Вначале объемы порций одинаковы и расстояние между поршнями составляет  $H$ . Нижнюю часть газа медленно нагревают. Какое количество теплоты нужно сообщить гелию в нижней части сосуда, чтобы увеличить его объем в два раза? Каким станет расстояние между поршнями через большой интервал времени – когда температуры порций газа снова сравняются? Теплоемкостью стенок и поршней пренебречь. Снаружи воздух откачан, теплоотдача в окружающее пространство пренебрежимо мала. Теплопроводность поршня, разделяющего порции газа, достаточно мала – за время нагрева тепло в верхнюю полость практически не поступает.



По условию задачи поршни массивные, и мы будем пренебрегать массой газа по сравнению с массой поршня (все равно масса газа в условии задачи не задана). При нагревании нижняя порция газа расширяется при неизменном давлении  $p = 2Mg/S$ , где  $S$  – площадь сечения сосуда. Начальные температуры порций газа одинаковы, давление внизу вдвое больше – получается, что в нижней части сосуда количество газа вдвое больше, чем в верхней. Количество теплоты, которое необходимо сообщить гелию, будет равно

$$\begin{aligned} Q &= \nu C_p (T_2 - T_1) = \nu \cdot 2,5R (T_2 - T_1) = \\ &= 2,5p(2V - V) = 2,5 \frac{2Mg}{S} SH = 5MgH. \end{aligned}$$

После выравнивания температур объемы порций газа снова сравниваются. Для нахождения нового расстояния  $h$  между поршнями воспользуемся законом сохранения энергии. Поскольку система теплоизолирована, ее полная энергия должна оставаться неизменной. После нагревания нижней порции газа суммарная потенциальная энергия поршней будет

$$Mg \cdot 2H + Mg \cdot 3H = 5MgH,$$

а полная энергия —

$$5MgH + 1,5\nu RT + 1,5 \cdot 2\nu R \cdot 2T = 5MgH + 1,5MgH + 1,5 \cdot 4MgH = 12,5MgH.$$

После выравнивания температур полная энергия составит

$$Mgh + 2Mgh + 1,5 \cdot 3\nu RT_1 = 7,5Mgh.$$

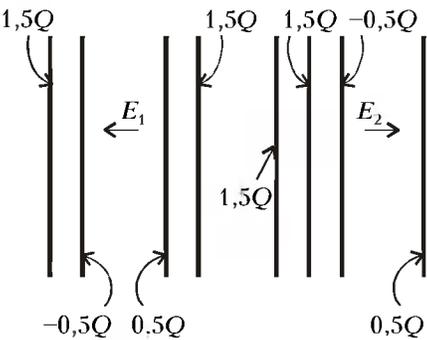
В соответствии с законом сохранения энергии найдем

$$h = \frac{5H}{3}.$$

З.Рафаилов

**Ф1708.** Плоский конденсатор емкостью  $C$  составлен из двух больших проводящих пластин, каждая из которых сделана двухслойной — из соединенных друг с другом листов тонкой фольги. Пластины несут одноименные заряды  $Q$  и  $2Q$ . Наружный слой фольги пластины с большим зарядом аккуратно отсоединяют, относят в сторону параллельно другим пластинам и приносят на другое место — третьим слоем снаружи к пластине с зарядом  $Q$ . При этом не допускают электрического контакта с этой пластиной — оставляют очень узкий зазор. Какую работу необходимо при этом совершить? Все действия мы производим издали, стараясь не влиять на распределение зарядов пластин.

Поле снаружи от конденсатора при таком выборе зарядов пластин ненулевое (в отличие от случая равенства нулю полного заряда пластин конденсатора), однако при любой перестановке пластин меняется только поле внутри, а наружное поле не изменяется. На наружных сторонах



двух обкладок конденсатора (см. рисунок) собираются одинаковые по знаку и величине заряды — каждый из них равен половине полного заряда конденсатора (у «правильно» заряженного конденсатора эта полусумма равна нулю) — в нашем случае это  $1,5Q$ . На внутренних сторонах обкладок получаем заряды  $-0,5Q$  и  $0,5Q$ . Поле внутри определяется именно последними зарядами — поля наружных зарядов в этой области скомпенсированы. Энергию поля, сосредоточенного между пластинами, можно вычислить по обычной формуле:

$$W_1 = \frac{(Q/2)^2}{2C} = \frac{Q^2}{8C}.$$

После отсоединения наружной части обкладки с зарядом  $2Q$  заряды внешней пластины на ней остались, и мы их перенесли на другую сторону. Теперь заряды пластин получившегося конденсатора равны  $2,5Q$  и  $0,5Q$ . Поле между обкладками изменило направление (для расчета энергии это не важно) и увеличилось в 2 раза. Энергия поля, сосредоточенного между пластинами, возросла при этом в 4 раза и составляет теперь

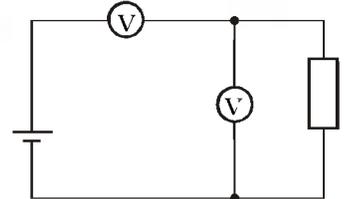
$$W_2 = \frac{Q^2}{2C}.$$

Поле снаружи не изменилось, следовательно, наша работа пошла на увеличение энергии поля между обкладками. Тогда необходимая для переноса работа равна

$$A = W_2 - W_1 = \frac{Q^2}{2C} - \frac{Q^2}{8C} = \frac{3Q^2}{8C}.$$

З.Рафаилов

**Ф1709.** Два одинаковых вольтметра соединены последовательно и подключены к батарейке (см. рисунок). Параллельно одному из вольтметров подключен резистор, при этом показания вольтметров составляют  $1,4$  В и  $3,1$  В. Отключим теперь один из вольтметров. Что будет показывать оставшийся прибор? Напряжение батарейки можно считать неизменным.



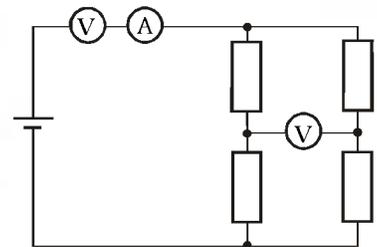
Если отключить верхний вольтметр, показания нижнего упадут до нуля.

Рассмотрим теперь второй случай — отключение правого вольтметра. Нам нужно найти отношение сопротивлений резистора и вольтметра (из условия ясно, что вольтметры вовсе не идеальные). Это легко сделать так: в исходной схеме один из вольтметров показывает  $3,1$  В, а другой — только  $1,4$  В. Это значит, что ток через верхний вольтметр больше тока нижнего в  $3,1/1,4$  раз, и разностный ток течет через резистор. Легко видеть, что отношение этого тока к току параллельно включенного вольтметра составит  $(3,1 - 1,4)/1,4 = 17/14$ . Ясно, что это отношение определяется обратным отношением сопротивлений, поэтому сопротивление вольтметра больше сопротивления резистора в  $17/14$  раз. Напряжение батарейки, равное  $(3,1 + 1,4)$  В =  $4,5$  В, можно считать неизменным — нагрузки высокоомные и влияние внутреннего сопротивления несущественно. Тогда напряжение вольтметра в оставшейся последовательной схеме составит

$$4,5 \frac{17}{14 + 17} \text{ В} \approx 2,47 \text{ В}.$$

Р.Схемов

**Ф1710.** В приведенной на рисунке схеме использованы одинаковые вольтметры. Сопротивления двух резисторов одинаковы и равны каждому по  $R$ , двух других — по  $3R$ . Показания приборов составляют  $2$  мА,  $3$  В и  $0,5$  В. Най-



дите по этим данным величину  $R$ .

Легко понять, что показание вольтметра, который включен в диагональ мостика, должно быть меньше – через него течет только часть полного тока. Ясно, что эта часть составляет  $0,5/3 = 1/6$ . Мостик не должен быть уравновешен – иначе вольтметр в диагонали показал бы ноль. Тогда можно решить задачу устно. Сумма токов через резисторы сопротивлением  $R$  и  $3R$  равна полному току 2 мА. Разность таких же токов равна одной шестой этого значения, т.е.  $1/3$  мА. Значит, токи эти равны  $7/6$  мА и  $5/6$  мА соответственно. Напряжение на резисторе сопротивлением  $3R$  равно произведению меньшего тока на это сопротивление, т.е.  $15R/6$  (В), напряжение на меньшем резисторе составляет  $7R/6$  (В). Разность этих напряжений равна 0,5 В. Тогда  $8R/6 = 0,5$ , откуда

$$R = 3/8 \text{ кОм} = 0,375 \text{ кОм} = 375 \text{ Ом.}$$

При решении мы использовали соображения симметрии – в этой схеме токи через одинаковые резисторы равны между собой.

*Р.Схемов*

**Ф1711.** Резистор сопротивлением 100 Ом подключен к сети переменного напряжения 220 В, 50 Гц последовательно с диодом (идеальный диод имеет нулевое сопротивление при пропускании через него тока одной полярности и бесконечное сопротивление при попытке пропустить ток другой полярности). Найдите среднюю мощность, выделяющуюся в резисторе в виде тепла. Во сколько раз изменится эта мощность при подключении параллельно резистору конденсатора емкостью 1 мкФ? А при подключении конденсатора емкостью 1000 мкФ?

Легко подсчитать мощность без подключения конденсатора: диод «убирает» половину каждого периода, уменьшая мощность вдвое, т.е.

$$P = \frac{0,5U^2}{R} = \frac{0,5(220)^2}{100} \text{ Вт} = 242 \text{ Вт}$$

(220 В – это действующее, или эффективное значение напряжения).

Если параллельно резистору включить конденсатор очень большой емкости, то напряжение на резисторе перестанет быть переменным – оно постоянно будет равно амплитудному значению напряжения сети, и мощность возрастет ровно вчетверо (понятно, что конденсатор не дает лишней энергии – он просто помогает резистору эффективнее грабить источник). При очень малой емкости конденсатора мощность останется практически такой же, как и без него.

Теперь нужно понять – что же такое «очень большая» и «очень маленькая» емкости, что с чем тут нужно сравнивать. Проще всего сравнить период сетевого напряжения: при частоте 50 Гц он составляет 0,02 с и так называемое характерное время  $\tau$  для цепи конденсатор–резистор: оно определяется произведением  $RC$  и для конденсатора емкостью 1 мкФ составляет 0,0001 с, а для конденсатора емкостью 1000 мкФ – 0,1 с.

Все это очень мило и грамотно, но это все же не решение нашей задачи – полное решение должно включать разумную числовую оценку изменения мощности при подключении каждого конденсатора. Для конденсатора емкостью 1 мкФ нужно разобраться, в какой момент диод запира-

ется и конденсатор начинает снабжать накопленной энергией резистор. Если диод заперт, а напряжение конденсатора  $U$ , то ток равен  $I = U/R$  (пока напряжение конденсатора не успело заметно упасть), при этом скорость уменьшения напряжения конденсатора со временем равна

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{(\Delta Q/C)}{\Delta t} = \frac{U}{RC}$$

Если напряжение сети в этот момент спадает круче, то диод остается закрытым – чем дальше, тем круче спадает напряжение сети (пока не достигнет нуля), а конденсатор, наоборот, разряжается все медленнее (см. рисунок). В противном случае диод снова откроется, и конденсатор будет подключен к источнику (придется ждать уменьшения напряжения).

Возьмем производную по времени от переменного напряжения сети (нам нужен спадающий участок) и приравняем полученному выше выражению для напряжения конденсатора (это тоже спадающая функция, производная ее отрицательна). Пусть напряжение в сети меняется по закону  $U(t) = U_0 \cos \omega t$ , тогда получим

$$-U_0 \omega \sin \omega t = -\frac{U_0 \cos \omega t}{RC}$$

Для частоты 50 Гц имеем  $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$ . Получается, что диод запирается при напряжении, примерно равном  $U_1 = 9,8$  В, и накопленную энергию при запираии диода конденсатор 50 раз в секунду будет отдавать резистору, создавая добавочную мощность

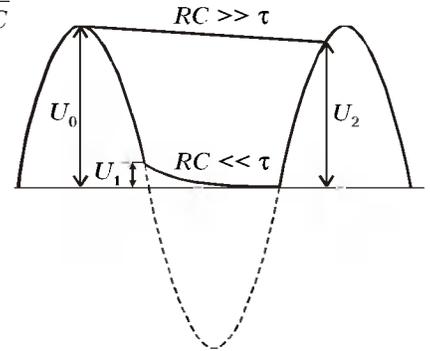
$$P_1 \approx f \frac{CU_1^2}{2} = 50 \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{100}{2} \text{ Вт} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ Вт.}$$

Но по сравнению со схемой без конденсатора мы несколько завысили оценку добавочной мощности – при запертом диоде в резистор не поступает мощность от сети, которая меньше мощности, отдаваемой конденсатором, но все же не равна нулю. Учет этой мощности снижает добавку еще примерно в три раза.

Для конденсатора большой емкости тоже нужно уточнить расчет – ведь напряжение его не остается равным амплитуде сети, а медленно спадает (до  $U_2$ ). Приблизительный учет этого уменьшения можно провести, считая ток разряда близким к постоянному. Аккуратный расчет показывает, что при подключении конденсатора емкостью 1000 мкФ мощность возрастает не в 4, а примерно в 3,5 раза. В общем, кроме разговоров о том, что какая-то величина очень-очень мала, должна быть и разумная оценка этой величины, пусть и грубая.

*А.Теплов*

**Ф1712.** Плосковыпуклая линза сделана из стекла с коэффициентом преломления  $n = 1,5$  и имеет диаметр  $D = 5$  см. Радиус выпуклой сферической поверхности  $R = 5$  см. На плоскую поверхность линзы вдоль ее главной оптической оси падает широкий параллельный пучок



лучей. Определите размер пятна на экране, расположенном за линзой перпендикулярно падающему пучку. Положение экрана было выбрано по минимальному размеру светлого пятна при узком (ограниченном диафрагмой) пучке лучей вдоль главной оптической оси.

Линза в условии задачи расположена самым простым для расчета способом – параллельный пучок падает вначале перпендикулярно на плоскую поверхность линзы и не преломляется, поэтому считать преломление приходится только на сферической границе раздела стекло – воздух. Найдем толщину линзы  $d$  (в самом толстом месте):

$$R^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + (R - d)^2,$$

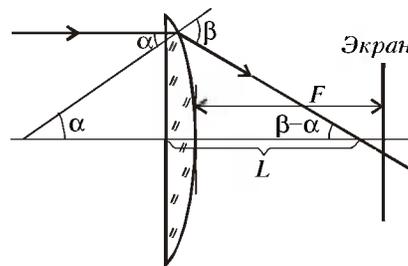
откуда

$$d = 0,67 \text{ см.}$$

Толщина линзы для нас важна потому, что расстояния придется отсчитывать от разных точек поверхности линзы. Для тонкого (диафрагмированного) пучка, параллельного главной оптической оси линзы, изображение получится в фокусе на расстоянии

$$F = \frac{R}{n - 1} = 10 \text{ см.}$$

Рассмотрим самый удаленный от главной оптической оси луч (см. рисунок) – для него угол падения, измеренный относительно радиуса, проведенного в



точку преломления на сферической поверхности, равен  $\alpha = 30^\circ$ , так как  $\sin \alpha = (D/2)/R = 0,5$ . Угол преломления находим по значению синуса:  $\sin \beta = n \sin \alpha = 0,75$ ,  $\beta = 48,6^\circ$ . После простых расчетов находим точку главной оптической оси, через которую этот луч пройдет. Она находится на расстоянии  $L = (D/2) \text{ctg}(\beta - \alpha)$  от плоской поверхности линзы. С учетом толщины линзы получим, что крайние лучи пучка после преломления пересекаются на расстоянии 3,2 см от экрана, что дает диаметр светлого пятна примерно 2,2 см. Интересно исследовать вопрос: а не найдутся ли лучи, которые дают больший диаметр пучка, чем полученный нами для крайних лучей?

А.Стеглов

## Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы завершаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков. Победители конкурса будут награждены грамотами и призами журнала.

**16.** Из бумаги вырезали 6 одинаковых параллелограммов единичной площади, которыми удалось целиком оклеить поверхность кубика с ребром 1. Могут ли эти параллелограммы не быть прямоугольниками?

В.Произволов

**17.** Участникам математической олимпиады были предложены 24 задачи различных авторов. Сотрудник научно-популярного журнала отобрал лучшие из них для печати и поделил причитающийся гонорар в 400 рублей между авторами поровну, с округлением до целых рублей. В результате ему удалось сэкономить некоторую сумму, и когда он назвал ее главному редактору, тот, поразмыслив, определил, сколько задач оказались недостойными публикации. Сколько же?

И.Акулич

**18.** В четырехугольнике  $ABCD$

$$\angle BAD + \angle CAD = \angle CDA + \angle BDA = 90^\circ.$$

Стороны  $BC$  и  $AD$  делятся пополам точками  $M$  и  $N$ . Докажите, что  $MN \perp AD$ .

В.Произволов

**19.** Докажите, что при нечетном натуральном  $n$  число

$$3 \cdot 5^n + 8n^2 + 44n - 67$$

делится на 128.

Т.Маликов

**20.** Двое играющих по очереди красят по клетке прямоугольника  $1999 \times 2000$ . Разрешается красить в любой цвет, но нельзя допускать, чтобы клетки одного цвета имели общую сторону. Игра заканчивается, когда все клетки покрашены, при этом проиграл тот, кто последним использовал новый цвет. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от игры другого?

А.Шаповалов, М.Шаповалов

# Задачи

**1.** Д'Артаньян сообщает Атосу, Портосу и Арамису три цифры, из которых мушкетеры составляют трехзначные числа. Может ли д'Артаньян подобрать



цифры таким образом, чтобы все три числа, составленные Атосом, Портосом и Арамисом, оказались простыми?

*Д.Тревиль*

**2.** У шестиклассника 10 предметов. За год его средний балл 4,6. Сколько у него троек, четверок и пятярок, если известно, что есть все эти оценки?

*Д.Изаак*



**3.** Для физических опытов в мастерской должны были изготовить 10 стеклянных шариков: два крас-

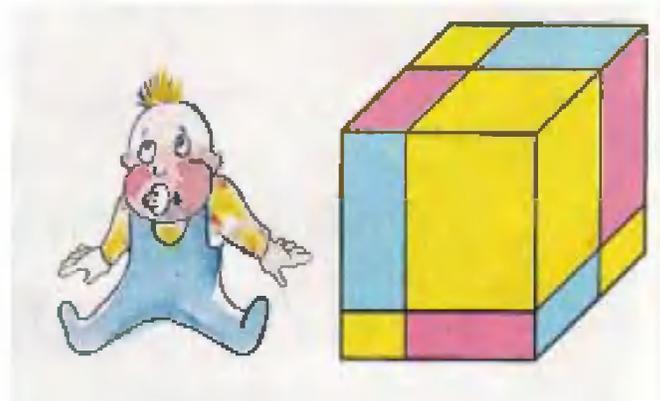


ных, два синих, два желтых, два зеленых и два белых. Все шарики должны были иметь одинаковую массу. Однако изготовители допустили ошибку, и два шарика одного цвета оказались на 1 грамм легче, чем следовало.

В нашем распоряжении имеются точные аптечные весы с двумя чашками и набором гирь-разновесов, позволяющие точно определить, на сколько граммов содержимое одной чашки легче или тяжелее другой. Можно ли с помощью единственного взвешивания определить, шарики какого цвета легче других?

*И.Акулич*

**4.** Три плоскости, параллельные граням куба,



рассекают каждую из видимых граней на четыре прямоугольника. Что больше: сумма площадей красных прямоугольников или сумма площадей синих прямоугольников?

*В.Произволов*

**5.** Постройте замкнутую ломаную линию, которая каждое свое звено пересекает ровно один раз, причем под прямым углом.

*А.Шаповалов*



# Арбузная пошлина

А.КОТОВА

... НАСТУПИЛО УТРО, И ГОРОДСКИЕ ВОРОТА со скрипом распахнулись. Зазвенели бубенцы, закричали погонщики, и караваны, груженные драгоценными индийскими тканями, прекрасной медной и серебряной посудой, знаменитыми хорасанскими коврами и множеством других дорогих товаров, двинулись в город. За воротами стояли бухарские стражники с разбойничьими физиономиями. Они ухмылялись, предвкушая сбор пошлины, часть которой непременно оседала в их карманах.

Вслед за караваном богатого купца из Багдада в ворота въехала скромная скрипучая арба дехханина Али, полная арбузов. На арбе сидели двое. Один – сам Али, все лето не разгибавший спины на своей бахче, а другой – Ходжа Насреддин, выручивший недавно Али из неприятной истории с поливом посевов. В благодарность за помощь Али чуть не силой заставил Насреддина принять от него часть урожая, и теперь они вместе везли арбузы на бухарский базар: 104 арбуза Али и 17 – Насреддин.

– Стойте! – сказал начальник стражи, и арба остановилась. – По какому делу вы едете в благородную Бухару?

Али открыл было рот, чтобы подробно объяснить, но Насреддин дернул его за рукав и быстро сказал:

– На базар, о доблестные воины!

– Что продавать будете?

– Арбузы!

– С вас деловая пошлина – ведь вы едете по делу; и торговая пошлина – ведь вы едете торговать; и арбузная пошлина – ведь вы ввозите в город арбузы.

– Но... – начал Али.

– Молчи! – шепнул Насреддин. – Каждое слово тут стоит денег, а у нас с тобой их нет.

– Нет денег? – взревел начальник стражи, отличавшийся очень острым слухом, когда речь шла о возможности поживиться. – Поворачивайте оглобли! Мы не впустим вас в город!

– Зато у нас есть арбузы, – поспешно заметил Насреддин. – Сколько стоят арбузы на бухарском базаре?

Стражники переглянулись. День был жарким, и дармовые арбузы пришлись бы кстати. Поразмыслив с минуту и поглядев на облизывающихся стражников, начальник назвал цену.

Всего полчаса поторговавшись, начальник стражи и Насреддин пришли к соглашению.

– Значит, Али должен отдать тебе 19 арбузов, но он переплатит тебе 1 таньга, – сказал Насреддин. – Зато я должен тебе 3 арбуза и 1 таньга впридачу. У меня нет

и одной таньга, но я великодушно освобождаю тебя от долга моему другу. По рукам?

– По рукам, – ответил начальник стражи и кивнул своим подчиненным. Стражники кинулись к арбе и принялись разгружать арбузы. Насреддин внимательно следил за ними.

– Стой, почтенный, это уже лишний арбуз, мы уплатили пошлину сполна! – закричал он наконец, увидев, как один из стражников ухватился за двадцать третий арбуз. Стражник замешкался, Али подхлестнул ишака, и арба, переваливаясь, покатила подальше от ворот.

За спиной у друзей раздавалось чавканье: караул торопливо поглощал арбузы.

Вечером, распродав свой товар, Ходжа Насреддин и Али сидели в чайхане. Теперь у них было на что купить плов, так что они с удовольствием ужинали. Пузатый чайханщик принес каждому по чайнику и поставил на столик пиалы. И тут к друзьям подсел бородастый старик важного вида. Присмотревшись, Насреддин узнал его: они встречались прежде при довольно неприятных обстоятельствах. Это был знаменитый звездочет и мудрец Гуссейн Гуслия, главный математик эмира бухарского. К старости он стал слаб глазами и не узнал Насреддина, доставившего ему в свое время немало хлопот.

«Сейчас я поражу своей мудростью этих невежественных людей, – думал Гуссейн Гуслия. – Они расскажут об этом другим, слух дойдет и до эмира, и он будет ценить мою ученость еще больше».

– Я слышал ваш разговор со стражниками у бухарских ворот, – начал он, поглаживая длинную бороду. – Но я не слышал, какова должна была быть пошлина и сколько стоит один арбуз, – уж очень громко кричали доблестные стражи. Но я – великий ученый, и могу назвать цену арбуза, не побывав на базаре и никого не спрашивая.

– Что же, назови, – отозвался Ходжа Насреддин.

– 11 таньга! – провозгласил звездочет и с торжеством поглядел на собеседника. – Я великий мудрец эмира, сам Гуссейн Гуслия, и вы должны признать мою несравненную мудрость...

– Ты не угадал, о великий Гуссейн Гуслия, – перебил его Насреддин.

– Как это «не угадал»? – возмутился старик. – Я знаю наизусть великую книгу Аль-Хорезми «Аль-джебр аль-мукабала», полную глубочайшей премудрости и недоступную невежественным умам. Вот смотри: если арбуз стоит  $x$  таньга, а за его провоз стражники берут  $y$



Иллюстрация М.Суминой

таньга, то цена 19 арбузов на 1 таньга больше, чем налог, который Али уплатил за свои 104 арбуза:

$$19x = 104y + 1.$$

А ты за свои 17 арбузов заплатил меньше, чем должен был, на 1 таньга, отдав 3 арбуза:

$$3x = 17y - 1.$$

Теперь, пользуясь наукой несравненного Аль-Хорезми, углубляться в которую нет нужды, ибо ты все равно ничего не поймешь, я нахожу  $x$  и  $y$ :

$$x = 11, y = 2.$$

Гуссейн Гуслия размахивал листом пергамента с расчетами, презрительно поглядывая на Насреддина.

– Мудрость твоя велика, – спокойно ответил Ходжа Насреддин. – Но, как сказал один умный человек, математика – это мельница, которая перемалывает то, что кладут на ее жернова. Я тоже не буду углубляться в премудрую науку Аль-Хорезми, ибо я не могу сравниться с тобой в учености, но знай, что вместо зерна ты бросил в жернова математики семена польни, и доброй муки у тебя не вышло.

– Как это? – оскорбился звездочет. – Как можешь ты судить о верности моего решения, ты, презренный декханин, подобный невежеством своему ишаку?

– Так скажи мне, о Гуссейн Гуслия, с избытком одаренный познаниями, но чуточку обиженный умом, – спокойно ответил Насреддин, – зачем Али платить пошлину за те 19 арбузов, которые он отдал стражникам? Ведь их-то он не повез на базар. И я не обязан

платить за 3 арбуза, съеденные у ворот доблестными воинами. Так что записать нужно так:

$$19x = (104 - 19)y + 1,$$

$$3x = (17 - 3)y - 1.$$

Теперь ты можешь привлечь ту достойную восхищения науку, в которой тебе нет равных, и убедиться, что арбуз стоит 9 таньга.

Гуссейн Гуслия погрузился в вычисления и обнаружил, что непочтительный незнакомец прав.

– На этот раз я ошибся, – неохотно признался он. – Должен сказать тебе, что твои рассуждения достойны самого Ходжи Насреддина. И твое нахальство тоже!

Ходжа Насреддин долго смеялся. Хохотал Али. Чайханщик схватился за живот и тихо постанывал: «Ой, умру!» Гуссейн Гуслия некоторое время смотрел на них с недоумением, потом дернул себя за бороду и запричитал:

– Так это ты, о сын греха, это снова ты явился в Бухару, чтобы посмеяться над моими седидами! Чтоб тебя забрал шайтан, чтоб тебе не знать покоя на том и этом свете, чтоб...

– Успокойся, почтенный, – сказал Ходжа Насреддин, утирая слезы. – Я всего лишь приехал продавать арбузы.

Физика 9–11

Публикуемая ниже заметка «Как студент огород поливал» предназначена девятиклассникам, заметка «Сколько пузырьков в шампанском?» – десятиклассникам и одиннадцатиклассникам.

# Как студент огород поливал

А. СТАСЕНКО

КАК-ТО РАЗ, ДАВНЫМ-ДАВНО, ПОПросила бабушка внука-студента огород полить. И шланги были, и воду компрессором подали – да вот в чем заковыка: Студент был умный да еще вычитал, что «уже в 450 году до нашей эры «Кратет высказал мнение о необходимости сначала постепенной, а потом и полной замены ручного труда... автоматами». Опустил он буйну голову на широку грудь, а в груди была дума крепкая. Вспомнил он сегнерово колесо и представил себе трубку с концами, отогнутыми в противоположные стороны, да насаженную на другую трубу, подающую воду, причем та, что первая, могла свободно вращаться за счет реакции вытекающей струи. Ввел Студент обозначения (рис.1) и снова задумался.

Если  $v_b$  – скорость движения воды внутри трубки с площадью сечения  $S$ , то секундный расход воды через одно отверстие равен  $Q = \rho_b v_b S$ . А так как

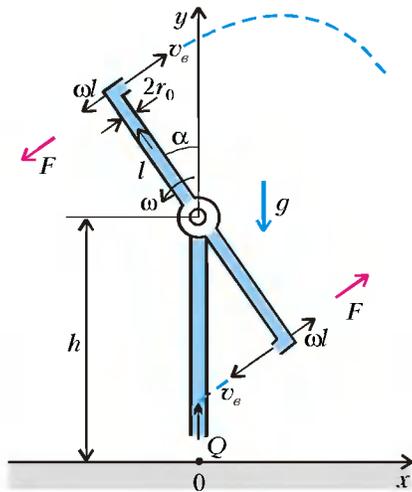


Рис. 1

жидкость несжимаема и, значит, ее плотность  $\rho_b$  постоянна, при постоянной величине  $S$  скорость воды одинакова в любом сечении трубки. (Тут Студент почувствовал, что он применил закон сохранения массы.) Если в результате выброса воды трубка длиной  $2l$  приобрела угловую скорость  $\omega$ , то линейная (окружная) скорость ее концов будет равна  $\omega l$  и направлена противоположно скорости  $v_b$  движения воды, так что в системе координат, связанной с огородом, скорость истечения воды будет равна по величине  $v_0 = v_b - \omega l$ . Следовательно, поток импульса через одно отверстие равен  $Q(v_b - \omega l)$ , а его размерность есть  $\frac{\text{кг}}{\text{с}} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} \equiv \text{Н}$ . Но ведь это же размерность силы  $F$ !

Таким образом, имеется пара сил – две равные по величине силы, параллельные и противоположно направленные, причем  $l$  – плечо каждой силы относительно оси вращения. В результате на трубку действует момент сил

$$F \cdot 2l = 2Q(v_b - \omega l)l. \quad (1)$$

Но до какой угловой скорости может раскрутиться трубка? И вообще, мешает ли ей что-то неограниченно ускоряться во вращательном движении? Конечно. Ну например, момент сил трения во втулке (куда же деться от трения!), сопротивление воздуха... Уж очень хотелось Студенту сказать привычные слова «сопротивлением воздуха пренебречь», но как честный человек он решил прежде всего сделать численную оценку.

Ему давно было известно, что сила сопротивления воздуха движущемуся телу пропорциональна квадрату скорости  $v$  тела относительно воздуха,

площади поперечного сечения  $S_{\perp}$  тела и плотности воздуха  $\rho$ . Но чтобы его пренебречь, нужно эту силу сравнить с какой-нибудь другой, которая предполагается существенно важной. Скажем, с потоком импульса массы воды, истекающей из трубки (в системе координат, связанной с самой трубкой), равным  $Qv_b$ :

$$\frac{\rho v^2 S_{\perp}}{Qv_b} \leq \frac{\rho \cdot (\omega l)^2 \cdot 2r_0 l}{\rho_b \pi r_0^2 v_b \cdot v_b} \sim \left(\frac{\rho}{\rho_b}\right) \left(\frac{\omega l}{v_b}\right) \left(\frac{l}{r_0}\right).$$

Здесь для усиления неравенства взято наибольшее изменение скорости:  $v = \omega l$ , достигаемое на конце трубки, и, конечно, пренебрежено тем, что трубка при своем вращении увлекает в движение воздух. Итак, завершим оценку. Ясно, что  $\omega l$  не может превосходить  $v_b$  – иначе трубка не будет раскручиваться, отношение плотностей воздуха и воды  $\rho/\rho_b$  составляет приблизительно  $10^{-3}$ , и если взять трубку «разумных размеров» – например,  $l \sim 10$  см и  $2r_0 \sim 1$  см, то для искомого отношения двух сил получим величину порядка и менее  $10^{-2}$ . Значит, с точностью до процентов можно и в самом деле пренебречь сопротивлением воздуха.

Что же осталось? Осталось приравнять ускоряющий момент реактивной силы струи (1) тормозящему моменту силы трения  $M_{\text{тр}}$ :

$$2Q(v_b - \omega l)l = M_{\text{тр}}.$$

Отсюда получим скорость истечения воды из трубки (в системе координат, связанной с огородом):

$$v_0 = v_b - \omega l = \frac{M_{\text{тр}}}{2lQ}$$

(как и предполагалось выше,  $\omega l$  не превосходит скорости выброса воды относительно трубки).

А что дальше? А дальше, как говорят ученые, «проблема свелась к» известной школьной задаче о движении тела, брошенного под углом  $\alpha$  к горизонту с начальной скоростью  $v_0$  из точки с координатами (см. рис.1)

$$x_0 = -l \sin \alpha, \quad y_0 = h + l \cos \alpha.$$

Решение этой задачи дает

$$x = -l \sin \alpha + v_0 \cos \alpha \cdot t, \\ y = h + l \cos \alpha + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2},$$

(Окончание см. на с. 34)

...я пришел к заключению, что в среде, полностью лишенной всякого сопротивления, все тела падали бы с одинаковой скоростью.

*Галилео Галилей*

...ни одна вещь, состоящая из земного вещества и поднятая на высоту, не может избежать могучих событий...силы притяжения.

*Иоганн Кеплер*

До сих пор я изъяснял небесные явления и приливы наших морей на основании силы тяготения, но я не указывал причины самого тяготения... Довольно того, что тяготение на самом деле существует, действует согласно изложенным нами законам и вполне достаточно для объяснения всех движений небесных тел и моря.

*Исаак Ньютон*

Если бы диаметр светящейся звезды с той же плотностью, что и Земля, в двести пятьдесят раз превосходил диаметр Солнца, то вследствие притяжения звезды ни один из испущенных ею лучей не смог бы дойти до нас; следовательно, не исключено, что самые большие из светящихся тел по этой причине являются невидимыми.

*Пьер Симон Лаплас*

Всем известно, что Земля круглая. А почему? Ну, это понятно: конечно, благодаря тяготению.

*Ричард Фейнман*

## А так ли хорошо знакома вам взаимосвязь вещества и гравитационного поля?

Этим выпуском «Калейдоскопа» мы открываем небольшую серию, касающуюся взаимодействия двух форм материи – вещества и поля. И начнем ее с поведения тел в гравитационном поле. Причем сегодня интересовать нас будут не только материальные точки, движение которых в поле тяготения обсуждается в школьном курсе физики, а и протяженные тела. Обращение к ним позволяет выявить любопытные особенности «взаимоотношений» вещества и гравитационного поля, издавна привлекавшие внимание исследователей.

Движение тел вблизи Земли, состояние невесомости, приливные явления, синхронные вращения планет и их спутников, эволюция звезд, прошлое и будущее Вселенной – все это объединяет гравитация. И хотя ученые предвосхищали многие связанные с ней явления – например, более 200 лет назад Лаплас предсказал существование черных дыр, – поток неожиданных, а порой и из ряда вон выходящих находок не иссякает и по сей день. Более того, возрастающие возможности наземных и космических телескопов заставляют нас готовиться к новым, совершенно поразительным открытиям «на небесах».

И вот, для того чтобы эти находки и открытия не застали нас уж совсем врасплох, попробуем разобраться хотя бы с малой частью возникающих при знакомстве с гравитацией вопросов. А затем – до встречи в следующих выпусках, посвященных электричеству и магнетизму.

### Вопросы и задачи

1. Из двух точек, расположенных на одной вертикали вблизи поверхности Земли, начинают одновременно падать два тела. Как будет меняться расстояние между ними при свободном падении?
2. Где человеку легче плавать в воде: на Земле или на Луне?
3. Одинаковая ли сила тяжести действует на два одинаковых шара, один из которых плавает в воде, а другой лежит на столе?
4. Ракета вертикально удаляется от Земли с постоянным ускорением, равным ускорению свободного падения на ее поверхности. Как меняется вес тела в ракете по мере ее удаления от Земли?
5. Сосуд с плавающим в нем телом начинает падать с ускорением  $a < g$ . Всплывет ли при этом тело?
6. Почему первое время после приземления космонавты спят без подушек?

7. Можно ли пользоваться на орбитальной станции Земли обычным медицинским термометром?

8. Изменится ли плотность воздуха в кабине космического корабля в невесомости?

9. Почему на экваторе вес тела меньше, чем на полюсе?

10. Отчего Земля и другие планеты имеют приблизительно правильную шарообразную форму, а ядра комет и астероиды – неправильную?

11. Два путешественника, выйдя из одной точки на экваторе, отправились с одной и той же по величине скоростью в кругосветное путешествие: один – вдоль экватора, другой – по меридиану. Одновременно ли они достигнут исходной точки в конце путешествия?

12. Как быстро должна вращаться планета, чтобы началось ее разрушение?

13. В чем причина возникновения океанских приливов?

14. Почему в периоды новолуния и полнолуния приливы достигают максимальной высоты, а в периоды, когда Луна находится в первой или третьей четверти, высота прилива спадает до минимума?

15. Как протекали полные солнечные затмения, когда радиус лун-

ной орбиты был вдвое меньше современного?

**16.** Представьте, что Земля перестала бы вращаться вокруг своей оси и двигалась бы вокруг Солнца поступательно. Как это сказало бы на ускорении свободного падения?

### **Микроопыт**

Во время погружения в воду с аквалангом (или с небольшим грузом) перестаньте двигаться и добейтесь, хотя бы на мгновение, положения безразличного равновесия. Можно ли утверждать, что вы находитесь в состоянии невесомости?

### **Любопытно, что...**

...Кеплер задолго до Ньютона склонялся к мысли о «тяжести», действующей между небесными телами, и именно ею объяснил приливы, приписывая их притяжению вод океана Луной.

...до сих пор существуют сомнения в реальности опытов Галилея по бросанию тел с вершины Пизанской падающей башни. Однако известно, что еще при его жизни эту башню использовал один из сторонников Аристотеля для демонстрации различия в падении тел. Как бы то ни было, Галилею удалось установить независимость ускорения свободного падения от природы падающих тел.

...по Аристотелю, сила тяготения по мере приближения к центру Земли сохраняет численное значение, но при его прохождении скачком изменяет направление на противоположное. Именно так описывал Данте свое путешествие через самое глубокое место ада (центр Земли). По теории же Ньютона, сила притяжения должна там обратиться в ноль, поскольку им было показано, что помещенное в тонкую сферическую оболочку тело не испытывает на себе действия сил.

...почти 200 лет назад, в 1801 году, немецкий астроном И. Зольднер рассчитал, опираясь на теорию Ньютона, как должны отклоняться световые лучи в поле тяготения Солнца. Более чем через 100 лет английский астроном О. Лодж ввел термин «гравитационная линза», предсказав, что протяженные космические тела, например га-

лактики, отклоняя лучи от далеких объектов, могут создавать несколько их изображений. В 1979 году такая «линза» была впервые обнаружена.

...на поверхности внутренних спутников Юпитера кратеров намного меньше, чем на поверхности внешних. Объясняется это тем, что из-за приливного влияния и магнитного поля гигантской планеты у ближайших спутников выше тектоническая активность, поэтому их поверхность активно «перерабатывается» и старые кратеры исчезают.

...несмотря на то, что на Землю ежедневно выпадает примерно десять тысяч тонн космического вещества в виде метеоритов и пыли, такой прирост массы за все время эволюции нашей планеты практически не отразился на периоде ее оборота вокруг своей оси.

...под действием приливного «трения» Земля замедляет свое суточное вращение и через миллиарды лет будет смотреть на Луну все время одной стороной, как смотрит Плутон на свой спутник Харон. Луна к тому времени уйдет, по расчетам, на 553 тысячи километров от Земли, а новый месяц станет равным 47,2 суток.

...по теории относительности, переменное движение тел должно приводить к излучению гравитационных волн. Однако из-за слабости гравитационного взаимодействия зарегистрировать эти волны даже от мощных космических источников пока еще не удалось. Кстати, действие их приемников основано на приливном эффекте.

...к черным дырам – объектам, удерживающим своим чудовищным гравитационным полем даже свет, – теория тяготения Ньютона не применима, хотя сама возможность их существования вытекает из этой теории.

...при свободном падении, ногами вниз, на черную дыру гипотетический наблюдатель растягивался бы в длинную тонкую нить, так как его ноги двигались бы несравненно быстрее, чем голова, и в конце концов он был бы разорван приливными силами невероятной мощи.

...разрушающее действие приливных сил было «продемонстри-

ровано» Юпитером, развалившим в июле 1992 года проходившую в опасной для себя близости к нему комету.

...в 1932 году будущий академик Лев Ландау предсказал, что при смерти (гибели) массивной звезды ее центральная часть сжимается в одно гигантское атомное ядро – нейтронную звезду, удерживаемую силами гравитации. Плотность такого образования должна достигать 100 миллионов тонн на кубический сантиметр! 35 лет спустя нейтронные звезды были открыты английскими радиоастрономами.

...долгие годы астрономы безуспешно искали так называемую скрытую массу Вселенной, предотвращающую своим гравитационным полем разлет галактик из их скоплений и тормозящую расширение Вселенной. Однако, по последним данным, никакая сила тяготения не заставит повернуть назад стремительно разбегающиеся галактики. Вселенная ускоренно расширяется, и этот процесс продлится вечно.

### **Что читать в «Кванте» о взаимосвязи вещества и гравитационного поля**

*(публикации последних лет)*

1. «Закон всемирного тяготения» – 1994, Приложение № 3, с.43;
2. «Законы Кеплера и школьная физика» – 1994, Приложение №3, с.49;
3. «Давайте вместе откроем закон всемирного тяготения» – 1994, №4, с.3;
4. «Как зависит  $g$  от глубины?» – 1995, Приложение №4, с.22;
5. «Исаак Ньютон и яблоко» – 1996, №3, с.36; 1999, Приложение №4, с.44;
6. «Закон нечетных чисел» для свободного падения тел» – 1996, Приложение №4, с.5;
7. «Закон всемирного тяготения» – 1996, Приложение 4, с. 17;
8. «Гипотеза сотворения мира» – 1997, №1, с.2;
9. «Хаос молекул и звезд» – 1998, №5, с.36;
10. «Как гора спутник родила» – 1999, №3, с.36.

*Материал подготовил  
А.Леонovic*

(Начало см. на с. 31)

где  $t$  – время, прошедшее с момента выброса элементарной массы воды из трубки. Конечно, это решение предполагает, что элементы водяной струи или капли, образующиеся в результате дробления, никак не взаимодействуют друг с другом и с воздухом.

Для огорода очень важно, куда попадет вода и в каком количестве. В принятой нами системе координат ордината почвы  $y = 0$ . Обозначим абсциссу точки падения воды через  $x_{\downarrow}$ . Исключая из последних двух уравнений время, получим

$$x_{\downarrow} = -l \sin \alpha + \frac{v_0^2 \cos \alpha}{g} \left( \sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{2gh}{v_0^2} \left( 1 + \frac{l}{h} \cos \alpha \right)} \right). \quad (2)$$

В частности, здесь содержится хорошо известное выражение для дальности полета, соответствующее случаю вылета из начала координат ( $h = 0$ ,  $l = 0$ ):

$$x_{0\downarrow} = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos \alpha \sin \alpha.$$

В этом случае наибольшая дальность полета достигается, как известно, при  $\alpha = 45^\circ$  и составляет

$$x_{0\max} = \frac{v_0^2}{g}. \quad (3)$$

В общем же случае решение, как видно из выражения (2), зависит от двух параметров: отношения начальных значений потенциальной и кинетической энергии  $a = \frac{gh}{v_0^2/2}$  и геометрического параметра нашего устройства

$\frac{l}{h}$ . И Студент с увлечением принялся анализировать эти зависимости – тем более, что у него был компьютер.

Мы же ограничимся каким-нибудь характерным случаем. Например, предположим, что  $l/h \ll 1$  (это означает, что вращающаяся трубка мала по сравнению с высотой ее над землей). Кроме того, предположим, что и дальность полета  $x_{0\max}$  тоже много больше  $l$ , т.е. даже при выбросе воды с нулевой высоты она улетит достаточно далеко. Тогда абсцисса точки падения воды на почву, отнесенная к характерной величине (3), равна

$$\bar{x} = \frac{x_{\downarrow}}{v_0^2/g} = \cos \alpha \left( \sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + a} \right).$$

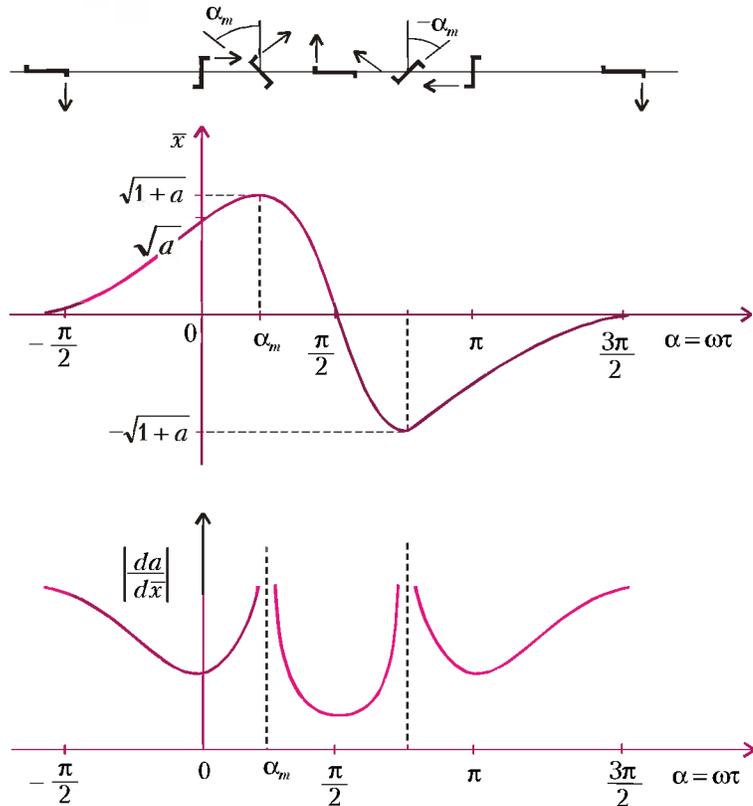


Рис. 2

Можно найти и угол вылета, соответствующий максимальной дальности, и величину самой этой дальности из условия равенства нулю производной:

$$\frac{d\bar{x}}{d\alpha} = 1 - 2 \sin^2 \alpha + \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + a}} (1 - 2 \sin^2 \alpha - a) = 0,$$

откуда

$$\sin^2 \alpha_m = \frac{1}{a+2}, \quad \bar{x}_{\max} = \sqrt{a+1}.$$

Видно, что чем выше точка вылета, тем дальше сможет достать вода и тем меньше угол, при котором достигается эта наибольшая дальность. Например, в случае  $a = 1$  (начальные значения потенциальной и кинетической энергии одинаковы)

$$\alpha_m = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 35^\circ,$$

а дальность полета в  $\sqrt{2}$  раз больше, чем при вылете из точки на уровне земли (3).

На рисунке 2 приведен качественный вид зависимости относительной координаты точки падения воды на почву от угла  $\alpha$  (или от времени, поскольку  $\alpha = \omega t$ ). В верхней части рисунка показаны положения вращающейся трубки, соответствующие не-

скольким характерным углам. Уже из этого графика видна неравномерность полива. В нижней части этого же рисунка построен график функции  $|d\alpha/d\bar{x}|$ , характеризующей плотность распределения воды по поверхности почвы. Действительно, при повороте на угол  $d\alpha$  вода, выброшенная за соответствующий отрезок времени  $dt = d\alpha/\omega$ , попадает на участок  $d\bar{x}$  (считаем, что она тут же поглощается почвой). Видно, что в некоторые моменты времени плотность полива обращается в бесконечность. И понятно почему – в эти моменты (при  $\alpha = \alpha_m$ ) струя воды, падающей на почву, на мгновение останавливается, меняя направление своего движения по поливаемой поверхности. А в изложенной теории струя считается бесконечно тонкой линией, несущей конечный расход воды.

«Но, – сказал себе Студент, – струя не линия, она уже на выходе из трубки имеет диаметр  $2r_0$ , а при дальнейшем движении еще может распадаться на капли, которые тормозятся в воздухе; и центробежная сила инерции может как-то изменить распределение давления по оси струи; и... следовательно, вся теория нуждается в проверке, доработке...» И много еще мыслей толпилось в голове Студента.

А что же огород? Спросите у бабушки...

# Сколько пузырьков в шампанском?

А. СТАСЕНКО

**В ПРИРОДЕ И В ЧЕЛОВЕЧЕСКОЙ** практике известно немало случаев вскипания жидкостей без преднамеренного нагревания. Например: при истечении на поверхность с больших глубин, при разгерметизации трубопроводов с жидким теплоносителем (аварии энергетических установок), при раскупоривании бутылок с шампанским, пивом, содовой, спрайгом... — кто же не наблюдал с радостью искрящуюся пузырьками газированную воду в жаркий день!

При транспортировке таких жидкостей по трубам бывает важно знать, какой объем растворенных в них газов уже выделился в виде пузырьков. Конечно, можно было бы сделать забор пробы, но — пока эту пробу проанализируют, какое отношение она будет иметь к той смеси, что была в момент забора? Поэтому лучше всего воспользоваться электромагнитным полем — ведь информация о его изменениях распространяется со скоростью порядка скорости света, так что реальные технологические процессы будут казаться как бы застывшими (квазистатическими).

Рассмотрим, например, как можно воспользоваться простейшим плоским конденсатором для почти мгновенной регистрации свойств протекающей через него жидкости с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , содержащей газовые пузыри или пузырьки, внутри которых  $\epsilon_1 = 1$  (рис.1). Под «пузырями» будем понимать объемы газа, размеры которых сравнимы с характерными размерами конденсатора  $l$  и  $d$ , а

под «пузырьками» — те объемы, размеры которых существенно меньше  $d$ .

Пусть пластины конденсатора, площадью  $S$  каждая, подключены к источнику постоянной ЭДС  $U$  (батарея). Ясно, что что-то будет неодинаково в двух случаях: когда конденсатор полностью занят жидкостью или когда он содержит только газ. Что же именно?

Если пренебречь сопротивлением проводов и внутренним сопротивлением источника  $r$ , то разность потенциалов между пластинами конденсатора будет постоянна и равна  $U$ . (Следовательно, электропроводность газожидкостной смеси предполагается пренебрежимо малой.) Значит, и напряженность электрического поля в обоих случаях будет одной и той же и равной  $E = U/d$ . А вот заряд на пластинах будет различен — ну, хотя бы потому, что емкость пустого плоского конденсатора равна  $C_1 = \epsilon_0 S/d$ , емкость заполненного диэлектриком в  $\epsilon$  раз больше:  $C_\epsilon = \epsilon C_1$ , а заряд равен  $q_{1,\epsilon} = C_{1,\epsilon} U$ . Иными словами, сам заряд и его поверхностная плотность на пластинах в этих двух крайних случаях будут отличаться в  $\epsilon$  раз:

$$q_\epsilon = \epsilon q_1, \quad \sigma_\epsilon = \epsilon \sigma_1,$$

где

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{S} = \epsilon_0 \frac{U}{d}.$$

Кстати, напряженность поля между пластинами будет одинаковой, даже если диэлектрик лишь частично «вдвинут» в конденсатор, как это показано

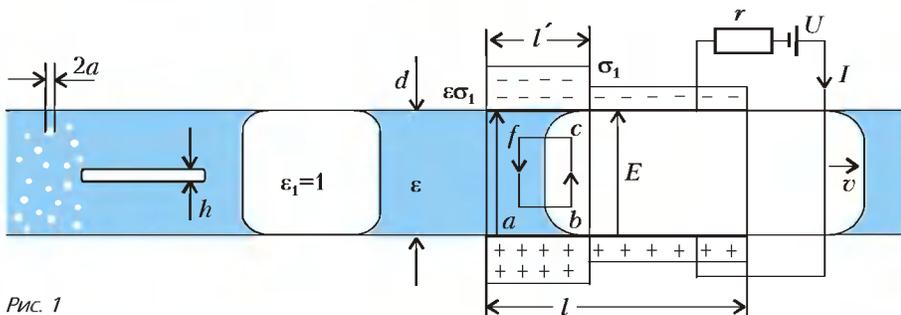


Рис. 1

на рисунке 1. (В противном случае работа по перемещению некоего заряда по пути  $abcfa$  не была бы равна нулю, а это строго запрещено в электростатике.)

Легко понять, что если в данный момент времени диэлектрик занимает часть объема конденсатора, равную  $l'/l$ , то суммарный заряд на конденсаторе равен

$$q = q_1 \left(1 - \frac{l'}{l}\right) + q_\epsilon \frac{l'}{l} = \frac{\epsilon_0 S U}{d} \left(1 + \frac{l'}{l} (\epsilon - 1)\right). \quad (1)$$

Если диэлектрик будет «вдвигаться» с постоянной скоростью  $v$ , то  $l' = vt$ , так что в цепи потечет постоянный ток

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\epsilon_0 S U v}{d l} (\epsilon - 1) \quad \text{при } 0 < t < \frac{l}{v}. \quad (2)$$

Когда жидкость заполнит весь конденсатор, заряд достигнет наибольшей величины  $q_\epsilon = \epsilon q_1$  и перестанет изменяться, а когда в конденсатор начнет входить следующий газовый пузырь, заряд станет убывать с той же скоростью — ток будет отрицательным (рис.2). Таким образом, даже если наша плоская «труба» будет совершенно непрозрачной, по изменению электрического тока мы сможем «увидеть» перемежающиеся участки движущейся жидкости и газа.

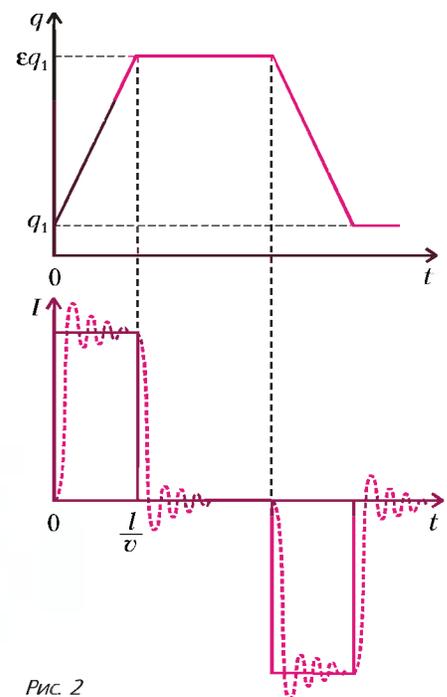


Рис. 2

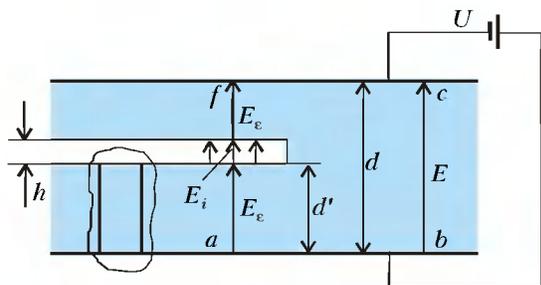


Рис. 3

Рассмотренный тип течения газожидкостной смеси (когда газовый пузырь заполняет все сечение потока) представляется нежелательным с точки зрения производства, например, газированной воды, ибо обе фазы, как видно, полностью разделены, а их как раз хотелось бы смешать. Поэтому обсудим далее более благоприятный случай. Пусть теперь газовый «пузырь» представляет собою плоскую «щель» шириной  $h$ , параллельную пластинам конденсатора (см. рис. 1 и 3). По-прежнему перемещая некий пробный заряд по контуру  $abcfa$  (см. рис. 3), мы должны совершить нулевую работу. Другими словами, разность потенциалов между точками  $a$  и  $f$  равна таковой для точек  $b$  и  $c$ :

$$E_\epsilon(d-h) + E_i h = U, \quad (3)$$

где  $E_i$  — напряженность поля в щели, а  $E_\epsilon$  — в диэлектрике (жидкости) с обеих сторон от щели. Кроме того, учтем, что

$$E_i = \epsilon E_\epsilon. \quad (4)$$

Собственно говоря, в школьном учебнике так и написано: «Диэлектрическая проницаемость среды — это физическая величина, показывающая, во сколько раз модуль напряженности электрического поля ( $E_\epsilon$ ) внутри однородного диэлектрика меньше модуля напряженности поля ( $E_i$ ) в вакууме». И дана справедливая оговорка, что такое определение справедливо лишь в частных случаях — например, для пластин в однородном поле (и несправедливо для шаровой полости). Поэтому подумаем еще раз, что такое  $\epsilon$ . (Ранее мы приняли его как множитель, который показывает, во сколько раз увеличивается емкость плоского конденсатора с диэлектриком по сравнению со случаем пустого конденсатора.) Мысленно вырежем из нашего устройства призму с поперечным сечением площадью  $\Delta S$  (рис. 4). Пластина конденсатора несет заряд  $+\sigma\Delta S$ , и поле над этой пластиной (в вакууме) равно  $E_i = \sigma/\epsilon_0$  (а ниже этой пластины, т.е. вне конденсатора, оно равно нулю). Кусок диэлектрика в выделенной призме, попав во внешнее (по отношению к нему) поле  $E_i$ , поляризуется. Этот факт условно показан в виде не-

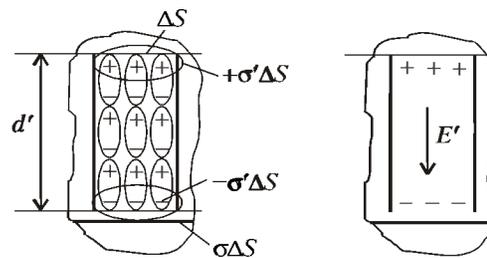


Рис. 4

скольких диполей, выстроившихся вертикально. Видно, что внутри диэлектрика заряды противоположных знаков, принадлежащие соседним диполям, компенсируют друг друга, а на поверхностях диэлектрика торчат их «хвосты» с зарядами  $\pm\sigma'\Delta S$ . Дипольный момент этого призматического куска диэлектрика равен  $\Delta p = \sigma'\Delta S d'$  и направлен вверх (от отрицательного заряда к положительному). А напряженность поля, порожденного этими поляризационными зарядами, равна  $E' = -\sigma'/\epsilon_0$  и направлена противоположно дипольному моменту и внешнему полю. Таким образом, напряженность суммарного электрического поля равна

$$E_\epsilon = E' + E_i = -\frac{\sigma'}{\epsilon_0} + \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Остался последний шаг. Введем еще одно понятие — объемную плотность дипольного момента:

$$P = \frac{\Delta p}{\Delta S d'} = \sigma' = -\epsilon_0 E'.$$

Вот она-то и связана с суммарным полем в диэлектрике соотношением

$$P = \epsilon_0(\epsilon - 1)E_\epsilon,$$

которое и можно считать более общим локальным определением диэлектрической проницаемости, приемлемым для любой точки однородного или неоднородного диэлектрика.

Из соотношений (3) и (4) легко найти электрический заряд на пластинах в том случае, когда рассматриваемый газовый «пузырь» длиннее длины конденсатора  $l$  (и выступает за его края):

$$q = \epsilon_0 \epsilon S E_\epsilon = \epsilon_0 S \frac{U}{d} \langle \epsilon \rangle.$$

Здесь введено обозначение средне-объемной диэлектрической проницаемости

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\epsilon}{1 + (\epsilon - 1)h/d},$$

которая учитывает долю объема  $h/d$ , занятую плоским «пузырем».

Если теперь аналогично (1) рассмотреть процесс постепенного вдвигания этого «пузыря» в конденсатор с постоянной скоростью  $v$ , то аналогич-

но (2) можно найти ток в цепи:

$$I = \frac{-\epsilon_0 S U v}{d} \frac{\epsilon(\epsilon - 1)h/d}{1 + (\epsilon - 1)h/d}.$$

Это выражение явно отличается от выражения (2) и совпадает с ним по модулю лишь в случае  $h/d \rightarrow 1$ , когда в конденсатор вдвигается газовый пузырь (см. падающую ветвь  $I(t)$  на рисунке 2).

Но пора вспомнить о пузырьках (см. левую часть рис. 1), таких маленьких и круглых. Хотя каждый из них мал, их суммарный относительный объем может изменяться в широких пределах — от нуля (совсем нет газовой фазы) до единицы (все пузырьки слились в один газовый «снаряд»). Трудность описания такой среды усугубляется тем, что радиусы пузырьков могут быть различны, расстояния между ними случайны; сталкиваясь, они могут сливаться в более крупные или дробиться. А тут еще электрическое поле, которое поляризует их и заставляет дополнительно взаимодействовать, как и положено диполями. Кстати, а в каком поле находится каждый из них? Конечно, в поле, порожденном всеми зарядами — и свободными (на проводящих пластинах конденсатора), и связанными (поляризационными). И что же означают слова «пузырек находится в поле»? По-видимому, это значит, что он находится в поле, которое осталось бы, если бы пузырек был удален, — тогда в возникшей полости осталось бы поле, порожденное всеми оставшимися электрическими зарядами. С этой проблемой до нас мучились многие замечательные ученые: Ленгмюр, Клаузиус, Моссоли, Лоренц и др.

Все эти слова сказаны для того, чтобы обрисовать сложность проблемы. Конечно, ученый скажет так: давайте разобьем проблему на части. Сначала рассмотрим один сферический пузырек в безграничной жидкости, в которой достаточно далеко от пузырька (на «бесконечности») задано однородное поле  $E_\epsilon$ . Потом предположим, что пузырьков много —  $N$

штук в кубическом метре, но все они одинаковы и находятся в среднем на одном и том же расстоянии друг от друга — порядка  $1/\sqrt[3]{N}$ . И в результате найдем некоторую эффективную, или среднеобъемную, диэлектрическую проницаемость такой пузырьковой жидкости. Но даже эту скромную программу выполнить не очень легко, да это и не обязательно делать сейчас до конца — на основе двух рассмотренных выше примеров ясно, что результат будет зависеть от суммарного объема пузырьков, попавших в конденсатор, и что временная зависимость тока будет скорее всего иной, чем в упомянутых примерах.

А что еще мы не учли в этих случаях? Многое. Например, что диэлектрик втягивается в конденсатор. Это значит, что в первом случае «снарядного» течения газовый пузырь, попавший в конденсатор, будет сжиматься слева и справа двумя пробками жидкости. То же самое будет происходить и с пузырьковой жидкостью, если суммарный объем пузырьков будет непостоянен в пространстве, так что дви-

жение такой газожидкостной смеси в конденсаторе не будет равномерным.

Далее, в реальности существует сопротивление проводов и внутреннее сопротивление источника напряжения. Если их сумма равна  $r$ , то разность потенциалов между пластинами конденсатора запишется в виде

$$\frac{q}{C(t)} = U - rI(t)$$

и уже не будет постоянной величиной. А если учесть еще индуктивность цепи  $L$  и соответствующую ей ЭДС самоин-

дукции  $-L \frac{dI}{dt}$ , то закон Кирхгофа даст страшное дифференциальное уравнение для заряда:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + r \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C(t)} = U,$$

которое описывает затухающие колебания. Решить это уравнение сложно, так как емкость конденсатора изменяется со временем (в этом-то и состоит суть метода), но можно ожидать, что на вышениарисованные кривые зависимости заряда и тока от времени нало-

жатся «гармошки» колебаний (см. рис.2, точечные кривые).

Кроме того, можно предложить и другую схему измерений. Например, зарядить конденсатор от какого-либо источника, затем отключить последний и сохранять на пластинах постоянный заряд (вот тут-то и пригодится пренебрежимо малая электропроводность жидкости). Тогда при прохождении через конденсатор жидкости с различным содержанием газа в пузырьках будет изменяться разность потенциалов между пластинами. Такие приборы существуют и называются *емкостными датчиками*.

Надо признаться, что такими способами мы найдем только суммарный относительный объем газовой фазы, а не концентрацию пузырьков. Не худо было бы определить как-нибудь и их средний размер. Нужно, следовательно, использовать еще какие-то физические явления и приборы (например, оптические)... Так что, прежде чем открыть бутылку нарзана, подумайте о числе пузырьков и законах физики. И — приятного аппетита!

## Малая теорема Ферма

(Начало см. на с. 9)

последнего уравнения. Зная  $x$  и  $y$ , легко находим

$$d = x + y = 9, \quad c = x + 6d = 62, \quad b = d + 5c = 319,$$

$$a = b + c = 381, \quad k = b + 4a = 1843, \quad f = a + 2k = 4067.$$

Победа! Числа  $k$  и  $f$  найдены! (Проверка:  $9007 \cdot 4067 = 36631469 = 1 + 19876 \cdot 1843$ .)

**Упражнение 44\*** (для тех, кто очень любит программировать). а) Найдите число  $f$ , которое нашли Аткинс, Крафт, Ленстра и Лейланд. б) Расшифруйте фразу, зашифрованную в 1978 году Ривестом, Шамиром и Адлеманом.

### Что дальше?

*Что остается от сказки потом,  
После того, как ее рассказали?*

В.Высоцкий

Подытожим. В первой части статьи мы доказали малую теорему Ферма и ее обобщение — теорему Эйлера. Рассказали о практическом применении теоремы Эйлера в криптографии. Правда, осталось тайной, откуда взялись числа  $p$ ,  $q$  (точнее говоря, как можно конструировать большие — в несколько десятков или сотен цифр — простые числа).

Во второй части мы расскажем об основанных на малой теореме Ферма методах конструирования больших простых чисел. Расскажем и о числах Кармайкла, история которых

началась в древности, а существование бесконечного множества которых доказано в 1994 году.

Малую теорему Ферма не обязательно доказывать именно так, как это сделано выше. Во второй части мы изложим другие способы. Один из них приведет к теореме о существовании первообразного корня по простому модулю и далее — к теореме о строении мультипликативной группы вычетов по (не обязательно простому) модулю  $n$ .

Чтобы вы лучше оценили силу результатов второй части статьи, подумайте над следующими задачами. Все они будут решены во второй части. Не огорчайтесь даже в том случае, если ни одна из них не получится: это не упражнения, а довольно трудные задачи!

### Задачи

1. Существует ли такое составное число  $n$  (число Кармайкла), что для любого целого числа  $a$  разность  $a^n - a$  кратна  $n$ ?

2. Ни для какого натурального числа  $n$  число  $2^n + 1$  не кратно  $n + 1$ . Докажите это.

3. Если  $2^n + 1$  кратно  $n$ , то  $n = 1$  или  $n$  кратно 3. Докажите это.

4. Для каких  $n$  числа  $1, 2, \dots, n - 1$  можно расставить вдоль окружности так, чтобы для любых подряд идущих чисел  $a, b, c$  разность  $b^2 - ac$  была кратна  $n$ ? (На рисунке 2 изображен случай  $n = 7$ .)

5. Для каких простых чисел  $p$  существует такое целое число  $a$ , что  $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$  кратно  $p$ ?

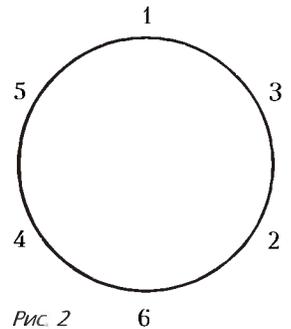


Рис. 2 6

# Внутренняя энергия идеального газа

А. ЧЕРНОУЦАН

**В**НУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ – ВАЖнейший параметр любой *термодинамической системы*. Зависимость внутренней энергии системы от основных параметров, определяющих ее *равновесное состояние*, изучается как в рамках термодинамики, так и методами статистической физики.

**Справка.** В случае однородной однокомпонентной термодинамической системы основных параметров два – например, температура и объем. Говорят, что такая система обладает двумя *термодинамическими степенями свободы*. Значит, каждому равновесному состоянию системы можно сопоставить одну точку на координатной плоскости  $(V, T)$ , а равновесный (квазиравновесный) процесс изображается линией на этой плоскости. Значение третьего параметра – давления  $p$  – в каждой точке плоскости можно вычислить с помощью *уравнения состояния* (в случае идеального газа, например, с помощью уравнения Клапейрона–Менделеева).

Возникает естественный вопрос: существует ли какая-нибудь связь между уравнением состояния системы и зависимостью внутренней энергии  $U$  от параметров, определяющих это состояние? Можно ли, зная функцию  $p(V, T)$ , что-либо узнать о функции  $U(V, T)$ ? Простейший (но очень важный) полигон для изучения этого вопроса – хорошо вам знакомый идеальный газ. Однако начнем мы с того, что вспомним и систематизируем сведения об идеальном газе, известные из школьного курса.

## Идеальный газ в термодинамике. Закон Джоуля

Чем более разреженным является реальный газ, тем ближе он к идеальному. Многочисленные эксперименты действительно показывали, что чем более разрежен газ, тем точнее он подчиняется уравнению Клапейрона–Менделеева

$$pV = \nu RT. \quad (1)$$

Можно сказать, что с точки зрения термодинамики идеальным называет-

ся газ, точно подчиняющийся уравнению состояния (1).

В рамках первого закона (начала, постулата) термодинамики, выражающего закон сохранения энергии с учетом тепловых процессов, невозможно, исходя только из уравнения состояния (1), получить какую-либо информацию о виде функции  $U(V, T)$ . Крупнейшие физики прошлого столетия (Гей-Люссак, Джоуль, Томсон) затратили значительные экспериментальные усилия для установления этой зависимости. Из их экспериментов убедительно следовало, что внутренняя энергия идеального газа зависит *только от температуры*:

$$U(V, T) = U(T),$$

или

$$U(V_1, T) = U(V_2, T).$$

Это соотношение называют *законом Джоуля*. Оно выполняется тем точнее, чем более разреженным является газ, т.е. чем точнее он подчиняется уравнению состояния (1).

Закон Джоуля позволяет выразить внутреннюю энергию через другой параметр, более удобный для экспериментального определения, – теплоемкость при постоянном объеме  $C_V$ . Поскольку работа в изохорном процессе равна нулю, из первого закона термодинамики:  $Q = \Delta U$  и определения теплоемкости:  $Q = C_V \Delta T$  следует, что теплоемкость при постоянном объеме есть производная от внутренней энергии по температуре:

$$C_V = U'(T),$$

а внутренняя энергия, соответственно, – первообразная от теплоемкости:

$$U(T) = \int C_V dT.$$

Опыт показывает, что теплоемкость любого разреженного газа остается постоянной в широком диапазоне температур: от 10–40 К до 1000–2000 К. Теплоемкость одного моля (молярная теплоемкость) любого одноатомного газа в этом диапазоне тем-

ператур одна и та же и равна  $1,5R$ , двухатомного –  $2,5R$ , многоатомного –  $3R$ . В этом случае для внутренней энергии можно использовать простое выражение

$$U = C_V T \quad (2)$$

(напомним, что энергия всегда определяется с точностью до константы).

## Экспериментальное подтверждение закона Джоуля

Эксперименты, приведшие к установлению закона Джоуля, интересны не только с исторической точки зрения. Опишем кратко физический смысл этих опытов.

**а) Расширение газа в пустоту. Опыт Гей-Люссака и Джоуля.** Что произойдет, если позволить газу свободно расширяться в пустоту? Например, можно соединить два сосуда – один с газом, другой откачанный – трубкой с краном (рис. 1) и наблюдать за изменением температуры газа после открывания крана. Как Гей-Люссак, так и повторивший его опыты (в усовершенствованном виде) Джоуль пришли к выводу, что температура достаточно разреженного газа в конечном состоянии такая же, как в началь-

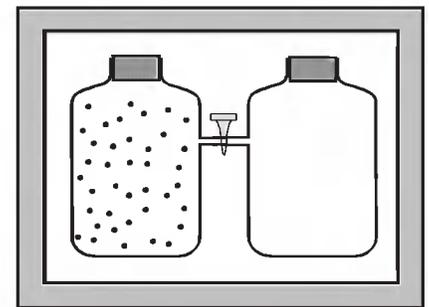


Рис. 1

ном. Однако только Джоуль сумел сделать из этого результата правильный вывод: *внутренняя энергия разреженного (идеального) газа не зависит от объема!*

При расширении в пустоту газ не получает тепла (теплообменом за малое время расширения можно пренебречь) и не совершает работы. Из первого закона термодинамики следует, что изменение внутренней энергии за время расширения также равно нулю. Из опытов получаем

$$U(V_1, T) = U(V_2, T),$$

где  $V_1, V_2$  – начальный и конечный объемы газа.

При анализе расширения газа в пустоту многие школьники допускают характерную

ошибку. Исходя из того, что тепло в этом процессе не подводится, они делают вывод, что это не что иное, как адиабатический процесс, а при адиабатическом расширении, говорят они, газ охлаждается! Ошибка состоит в том, что адиабатический процесс — это равновесный процесс, происходящий при очень медленном расширении газа без подвода тепла. При таком расширении газ совершает работу над медленно перемещающейся перегородкой, и его внутренняя энергия действительно уменьшается. Расширение же в пустоту — процесс *неравновесный*, газ расширяется свободно, не совершая работы над стенками сосуда, которые остаются неподвижными.

А что же будет, если расширению в пустоту подвергнуть плотный газ, в поведении которого наблюдаются заметные отклонения от идеальности? Оказывается, температура такого (реального) газа при расширении уменьшается. Дело в том, что в реальных газах заметную роль играет притяжение между молекулами и связанная с этим притяжением потенциальная энергия взаимодействия между молекулами газа. При расширении среднее расстояние между молекулами увеличивается, силы притяжения совершают отрицательную работу, и потенциальная энергия увеличивается. А поскольку полная внутренняя энергия остается постоянной, кинетическая энергия молекул, а значит, и температура газа уменьшаются.

**Справка.** Наиболее удачной и широко применяемой моделью реального газа является газ Ван-дер-Ваальса, подчиняющийся уравнению состояния

$$(V - b) \left( p + \frac{a}{V^2} \right) = RT \quad (3)$$

(для одного моля газа). Постоянные Ван-дер-Ваальса  $a$  и  $b$  учитывают притяжение между молекулами на больших расстояниях (постоянная  $a$ ) и сильное отталкивание на малых (постоянная  $b$ ). Это отталкивание делает недоступным внутреннее пространство данной молекулы для остальных молекул и уменьшает общий свободный объем. Внутренняя энергия одного моля газа Ван-дер-Ваальса равна

$$U = C_V T - \frac{a}{V}. \quad (4)$$

**Пример.** Для кислорода  $a = 0,137 \text{ Па} \cdot \text{м}^6 / \text{моль}^2$ . Один моль кислорода находится в сосуде объемом 10 л. На сколько понизится температура газа после соединения данного сосуда с другим сосудом объемом тоже 10 л, но полностью откачанным? (Напомним, что теплоемкость одного моля кислорода  $C_V = 2,5R$ .) **Ответ:** на 0,33 К.

**б) Процесс Джоуля–Томсона.** Опыты по расширению газа в пустоту

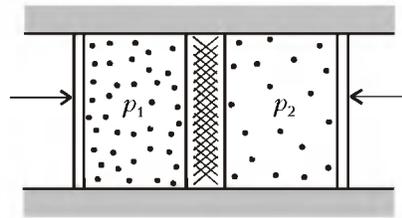


Рис. 2

не обладали высокой точностью и не могли служить надежным обоснованием закона Джоуля. Совместно с Томсоном Джоуль провел серию опытов по просачиванию газа через пористую перегородку. В двух частях теплоизолированного цилиндрического сосуда, разделенных пористой перегородкой (в опытах Джоуля–Томсона использовалась пробка из плотной ваты и очесов шелка), находится исследуемый газ (рис.2). Если в левой части сосуда поддерживать постоянное давление  $p_1$ , а в правой — меньшее давление  $p_2$ , то газ будет очень медленно просачиваться слева направо. Вначале весь газ находится слева от перегородки при температуре  $T_1$ , а в опыте измеряется температура  $T_2$  газа в правой части сосуда. Изменение температуры в таком процессе ( $T_2 - T_1$ ) называется *эффектом Джоуля–Томсона*. При комнатной температуре для всех исследованных газов был обнаружен отрицательный эффект Джоуля–Томсона, кроме водорода, для которого эффект был положительный. Однако во всех случаях при переходе к более разреженным газам эффект Джоуля–Томсона стремился к нулю. В пределе, т.е. для сильно разреженных (идеальных) газов, эффект Джоуля–Томсона отсутствует:  $T_1 = T_2$ !

Легко убедиться, что из этого результата следует вывод о независимости внутренней энергии идеального газа от объема. Если начальный объем газа  $V_1$ , а конечный  $V_2$ , то работа газа в этом процессе равна  $A = -p_1 V_1 + p_2 V_2$ . Поскольку теплообмен в процессе отсутствует ( $Q = 0$ ), из первого закона термодинамики следует

$$0 = U_2 - U_1 + p_2 V_2 - p_1 V_1.$$

Так как  $T_2 = T_1 = T$ , из уравнения состояния идеального газа следует

$$p_1 V_1 = p_2 V_2.$$

Значит,

$$U_2(V_2, T) = U_1(V_1, T).$$

Изучение процесса Джоуля–Томсона для реальных газов имеет большое значение — как научное, так и практическое. Оказалось, что для каждого газа существует так называемая *тем-*

*пература инверсии*, ниже которой эффект Джоуля–Томсона становится отрицательным. Процесс Джоуля–Томсона используется для получения низких температур.

### Идеальный газ в молекулярно-кинетической теории (МКТ)

С точки зрения МКТ, идеальным называется газ, в котором молекулы между соударениями не взаимодействуют друг с другом. Давление газа является результатом многочисленных ударов молекул о стенку. Если газ находится в тепловом равновесии со стенкой, эти соударения в среднем упругие. Исходя из этого, выводится основное уравнение МКТ идеальных газов

$$p = \frac{2}{3} n \langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle \quad (5)$$

— давление газа пропорционально его концентрации и средней кинетической энергии поступательного движения его молекул. Умножим обе части уравнения (5) на объем газа:

$$pV = \frac{2}{3} N \langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{2}{3} E_{\text{пост}}.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением состояния (1), видим, что температура газа должна определяться средней кинетической энергией поступательного движения его молекулы:

$$E_{\text{пост}} = \frac{3}{2} \nu RT. \quad (6)$$

Именно так определяется температура в молекулярно-кинетической теории — через среднюю кинетическую энергию поступательного движения в расчете на одну молекулу:

$$\langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT \quad (7)$$

(здесь  $k = R/N_A$  — постоянная Больцмана).

**Справка.** Чтобы такое определение было законным, надо убедиться в том, что оно согласуется с основным свойством температуры: равенством температур двух тел, находящихся в тепловом равновесии. В МКТ строго доказывается, что если два газа находятся в тепловом равновесии друг с другом, то средние поступательные энергии этих газов одинаковы. Это и позволяет дать энергетическое определение температуры идеального газа.

В случае одноатомного газа кинетическая энергия поступательного движения — это единственный вид внутренней энергии теплового движения (потенциальная энергия взаимодействия между молекулами идеального газа считается пренебрежимо малой).

Тогда для внутренней энергии газа из выражения (6) получаем

$$U = \frac{3}{2} \nu RT, \quad (8)$$

т.е. внутренняя энергия одноатомного газа, вычисленная в рамках МКТ, зависит только от температуры. Соответственно, теплоемкость одного моля одноатомного газа равна  $C_V = (3/2)R$ .

Обратим внимание на то, что в рамках МКТ и уравнение состояния идеального газа, и утверждение о независимости внутренней энергии от объема (для одноатомного газа) получаются при одном и том же предположении — пренебрежимой малости взаимодействия между молекулами. Это показывает, что выражение для внутренней энергии должно быть как-то связано с уравнением состояния.

**Справка.** В случае многоатомных газов надо учитывать кинетическую энергию не только поступательного, но и вращательного движения молекул, а в некоторых случаях и энергию колебаний атомов в молекуле относительно друг друга. Учесть эти виды энергии позволяет закон равнораспределения энергии по степеням свободы. Этот закон можно считать обобщением энергетического определения температуры (7). Он утверждает, что на каждую степень свободы молекулы приходится в среднем энергия  $(1/2)kT$  (в расчете на одну молекулу). Поступательному движению соответствуют 3 степени свободы, и поэтому средняя энергия поступательного движения равна  $(3/2)kT$ . У двухатомных молекул есть еще две степени свободы, отвечающие вращательному движению, поэтому полная кинетическая энергия этих молекул равна  $(5/2)kT$ . Что касается колебательного движения атомов, то энергия этих движений оказывается пренебрежимо малой вплоть до температур 1000–2000 К. Объяснение такому «замораживанию» определенных движений дает квантовая механика.

### Закон Джоуля и второй закон термодинамики

Когда в середине прошлого века был сформулирован второй закон (начало, принцип) термодинамики, выяснилось, что он накладывает определенные ограничения на то, как может выглядеть внутренняя энергия  $U(V, T)$  для вещества с определенным уравнением состояния  $p(V, T)$ . В частности, для идеального газа с уравнением состояния (1) может быть строго доказан закон Джоуля.

Второй закон термодинамики накладывает также строгие ограничения на возможность превращения внутренней

энергии хаотического теплового движения в механическую работу. В формулировке Томсона (лорда Кельвина) этот закон гласит: «Невозможен круговой процесс, единственным результатом которого было бы производство работы за счет охлаждения теплового резервуара». Простейшим следствием этого закона, имеющим аналитическую формулировку, является теорема Карно. Сформулируем ее следующим образом: КПД тепловой машины Карно любого типа, получающей тепло только от нагревателя с температурой  $T_1$  и отдающей тепло только холодильнику с температурой  $T_2$ , не может превышать КПД обратимой машины Карно, равного

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (9)$$

Напомним, что Сади Карно, которого по праву считают основоположником второго закона термодинамики, сформулировал свою знаменитую теорему в 1824 году, задолго до окончательного утверждения не только второго, но и первого закона термодинамики.

С помощью теоремы Карно можно получать различные физические следствия. Покажем, например, как можно доказать закон Джоуля, исходя только из уравнения Клапейрона–Менделеева. (Другие примеры применения теоремы Карно можно найти в статьях «О ледниках, скороварках и теореме Карно» — см. Приложение к «Кванту» №4 за 1995 г. и «Как зависит  $U$  от  $p$ ?» — см. «Квант» №5 за 1998 г.)

Рассмотрим два состояния одного моля идеального газа, характеризующиеся одинаковой температурой  $T$ , но различными объемами  $V_1$  и  $V_2$  (рис.3). Вычислим разность внутренних энергий этих состояний  $\Delta U = U_2 - U_1$  и докажем, что она равна нулю. Для этого построим цикл Карно, минимальная температура которого на очень малую величину  $\Delta T$  отличается от максимальной температуры  $T$ . Рабо-

та, совершенная газом при изотермическом расширении, равна

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT}{V} dV = RT \ln \frac{V_2}{V_1},$$

а количество теплоты, полученное им в этом процессе, равно

$$Q_1 = \Delta U + A = \Delta U + RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Работа  $\delta A$ , совершенная газом за цикл, равна площади внутри цикла. Для подсчета этой площади можно, учитывая близость двух изотерм (малость  $\Delta T$ ), заменить два наклонных адиабатических участка вертикальными прямыми. Получим

$$\delta A = RT \ln \frac{V_2}{V_1} - R(T - \Delta T) \ln \frac{V_2}{V_1} = R\Delta T \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Согласно теореме Карно, КПД этого цикла, равный  $\delta A/Q_1$ , должен быть равен  $\Delta T/T$ :

$$\frac{R\Delta T \ln \frac{V_2}{V_1}}{\Delta U + RT \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{\Delta T}{T},$$

откуда немедленно следует, что  $\Delta U = 0$ . (Отметим, что такой же результат получился бы для любого уравнения состояния вида  $p = f(V)T$ .)

**Задание.** Попробуйте применить теорему Карно к газу Ван-дер-Ваальса — а именно, из уравнения состояния (3) получить выражение (4).

Возникает вопрос: зачем же было тратить такие большие экспериментальные усилия на проверку закона Джоуля, если его можно просто вывести? Не говоря о самостоятельной ценности этих экспериментов (особенно опытов Джоуля–Томсона), отметим следующее. Несомненно, Джоуль и Томсон прекрасно знали не только первый закон термодинамики (одним из создателей и обоснователей которого был Джоуль), но и второй (одним из основоположников которого был Томсон) — ведь они приступили к своим опытам уже после их открытия. Однако именно в этих условиях экспериментальное подтверждение закона Джоуля приобретало исключительное значение — оно должно было теперь служить одновременно проверкой и уравнения состояния идеального газа (незадолго до этого установленного Клапейроном), и самого второго закона термодинамики!

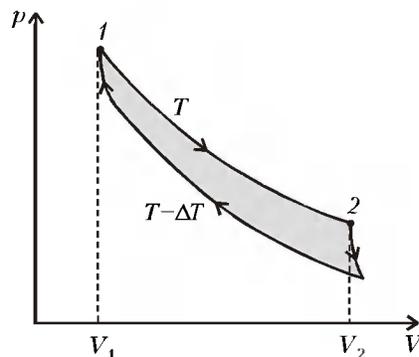


Рис. 3

# Две задачи Архимеда

Л. ШИБАСОВ

**В** ТРАКТАТЕ «МАТЕМАТИКА» ДРЕВНЕГРЕЧЕСКОГО УЧЕНОГО ПАППА, ЖИВШИЕГО В III ВЕКЕ, СОДЕРЖАТСЯ ДВЕ ЗАДАЧИ, РЕШЕННЫЕ, КАК ПРЕДПОЛАГАЮТ, АРХИМЕДОМ. ПРИВЕДЕМ ЭТИ ЗАДАЧИ В ФОРМУЛИРОВКЕ ПАППА, ЗАМЕНИВ ТОЛЬКО ОБОЗНАЧЕНИЯ: ВМЕСТО ГРЕЧЕСКИХ БУКВ БУДЕМ ИСПОЛЬЗОВАТЬ БОЛЕЕ ПРИВЫЧНЫЕ НАМ ЛАТИНСКИЕ.

**Задача 1.** «Возьмем три касающиеся друг друга окружности  $ADB$ ,  $AEC$ ,  $CFB$  и в заключение между их окружностями фигуру, которую называют арбелон<sup>1</sup>, впишем несколько кругов, касающихся друг друга и основных полуокружностей (рис.1); пусть центры этих кругов будут  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ ,  $O_4$ . Требуется показать, что опущенный из центра  $O_1$  на  $AB$  перпендикуляр будет равен диаметру круга, описанного около  $O_1$ , далее, что перпендикуляр, опущенный из  $O_2$ , будет вдвое больше диаметра круга около  $O_2$ , а перпендикуляр из  $O_3$  втрое больше соответствующего диаметра, и вообще последовательные перпендикуляры будут кратными соответствующих диаметров в прогрессии натурального ряда чисел, причем вписывание кругов может продолжаться до бесконечности.»

Таким образом, в задаче утверждается, что отношения длин перпендикуляров, опущенных из центров окружностей, вписанных в арбелон, к диаметрам этих окружностей образуют последовательность натуральных чисел 1, 2, 3, ...

**Задача 2.** «Пусть  $ADB$  и  $AEC$  будут полуокружности (рис.2), опишем касательные к их окружностям круги с центрами  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ , а также следующие за ними

*вплоть до точки A. Теперь то, что опущенный из  $O_1$  на  $AB$  перпендикуляр будет равен радиусу круга  $O_1$ , является очевидным; еще я утверждаю, что перпендикуляр, опущенный из  $O_2$ , будет втрое больше радиуса круга  $O_2$ , опущенный из  $O_3$  – в пять раз больше радиуса круга  $O_3$ , и все следующие перпендикуляры будут больше соответствующих радиусов в кратностях последовательных нечетных чисел.»*

По мнению ученых, авторство Архимеда в решении этих задач наиболее вероятно, поскольку Папп в процессе доказательства ссылается на результаты Архимеда. К тому же Архимед решал и другие задачи, связанные с арбелоном, например следующие.

### Упражнения

1. Покажите, что площадь арбелона равна площади круга, построенного на перпендикуляре  $CD$  как на диаметре (рис.3).

2. Докажите, что круги, вписанные в арбелон по обе стороны от перпендикуляра  $CD$  (рис.4), равны.

Правда, древнегреческий текст этих задач не дошел до наших дней, но сохранился его перевод на арабский язык. Переводчик, арабский математик Сабит ибн Курра (IX в.), приписывает их Архимеду.

Античные ученые решали геометрические задачи, сравнивая рассматри-

ваемые отрезки и устанавливая отношения между ними. С этой целью им часто приходилось выстраивать длинные цепи пропорций – решения получались довольно громоздкими.

Оказывается, можно получить совсем короткое решение задач Архимеда и даже более общего утверждения, если обратиться к интересному преобразованию плоскости – инверсии. Древнегреческие математики воспользоваться им не могли, так как понятие инверсии появилось в математике лишь в 30-е годы прошлого столетия. И хотя на страницах «Кванта» уже рассказывалось об этом преобразовании, целесообразно вновь напомнить о нем новому поколению читателей.

Рассмотрим на плоскости окружность  $\omega$  радиуса  $R$  с центром в некоторой точке  $O$ . *Инверсией* (от лат. *inversio* – переворачивание, обращение) называют такое преобразование плоскости, при котором любой точке  $M$ , отличной от  $O$ , ставится в соответствие точка  $M'$  такая, что  $M'$  лежит на луче  $OM$  и  $OM \cdot OM' = R^2$ . Точка  $O$  называется *центром инверсии*,  $R$  – *радиусом инверсии*,  $\omega$  – *базисной окружностью*. Построение точки, инверсной данной, ясно из определения (рис.5): если точка  $M$  лежит внутри окружности  $\omega$ , то восставляют в этой точке перпендикуляр к лучу  $OM$  до пересечения его в точке  $A$  с окружностью  $\omega$ , а затем проводят касательную к  $\omega$  в точке  $A$ ; эта касательная пересекает луч  $OM$  в искомой точке  $M'$ . Для точек, расположенных вне  $\omega$ , построение проводится в обратном порядке. Приведенный способ построения может быть принят за геометрическое определение инверсии.

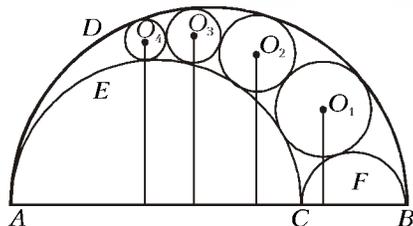


Рис. 1

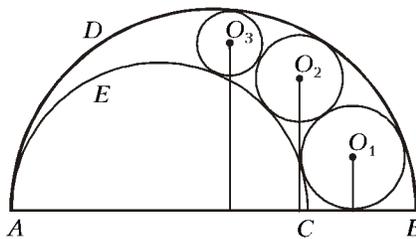


Рис. 2

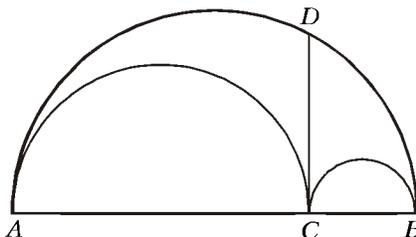


Рис. 3

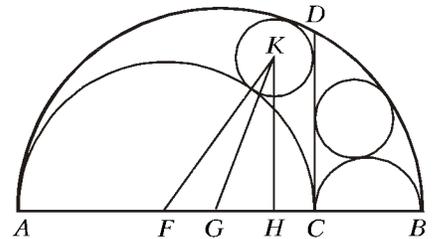


Рис. 4

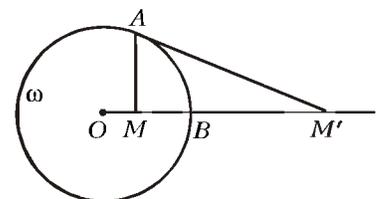


Рис. 5

<sup>1</sup> Скребок, секира, сапожный нож.

Ясно, что точки базисной окружности  $\omega$  при инверсии остаются неподвижными; точки, расположенные внутри базисной окружности, переходят в точки, лежащие вне  $\omega$ , и наоборот; прямая, проходящая через центр инверсии, переходит в себя (заметим, что эта прямая перпендикулярна  $\omega$ ). Эти свойства позволяют назвать инверсию *симметрией относительно базисной окружности*. Для полного обоснования такого названия покажем, что осевая симметрия является предельным случаем инверсии при  $R \rightarrow \infty$ . В самом деле, обозначим расстояния  $MB = d$  и  $BM' = d'$  (см. рис.5); так как  $(R - d)(R + d') = R^2$ , то  $d' = d/(1 - d/R)$ . Если теперь оставить точку  $B$  на месте, а центр  $O$  по лучу  $BO$  устремить в бесконечность, то окружность  $\omega$  перейдет в прямую, перпендикулярную отрезку  $MM'$ , и будет выполняться равенство  $d' = d$ .

Инверсия, как и осевая симметрия, часто используется при решении геометрических задач. В основном к ней обращаются, когда в условии фигурируют касающиеся окружности и прямые. Но прежде чем применять инверсию, познакомимся с некоторыми ее свойствами.

1. Окружность  $\gamma$ , проходящая через центр инверсии, переходит в прямую, перпендикулярную линии центров данной окружности и базисной.

Пусть  $O_1$  – центр окружности  $\gamma$ , проходящей через центр  $O$  инверсии. Линия центров  $OO_1$  пересекает  $\gamma$  в точке  $A$  (рис.6),  $A'$  – точка, инверсная  $A$ . Покажем, что  $\gamma$  переходит в прямую  $l$ , пересекающую луч  $OO'$  в точке  $A'$  под прямым углом. Возьмем произвольную точку  $B$  на  $\gamma$  и построим инверсную ей точку  $B'$ . Достаточно убедиться, что угол  $OA'B'$  прямой. Так как  $OB \cdot OB' = OA \cdot OA' = R^2$ , то  $OA : OB = OB' : OA'$ , следовательно, треугольники  $OBA$  и  $OA'B'$  подобны, откуда  $\angle OA'B' = \angle OBA$ , а последний из них прямой (как вписанный, опирающийся на диаметр). Свойство доказано.

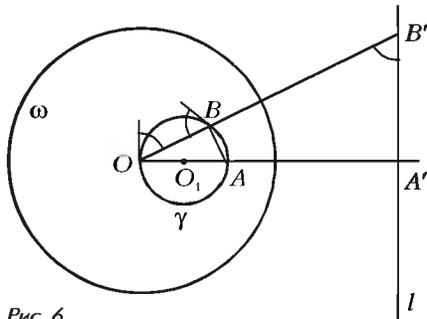


Рис. 6

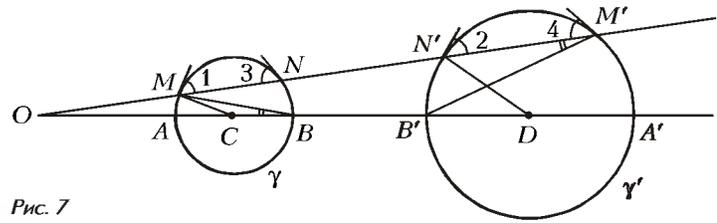


Рис. 7

Очевидно, верно и обратное утверждение: *прямая, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в окружность, проходящую через центр инверсии*.

2. Окружность  $\gamma$ , не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность  $\gamma'$ , также не проходящую через точку  $O$ ; причем окружности  $\gamma$  и  $\gamma'$  гомотетичны с центром гомотетии  $O$ .

Пусть  $O$  – центр базисной, а  $C$  – центр данной окружности  $\gamma$  (на рисунке 7 базисная окружность не изображена). Линия центров пересекает окружность  $\gamma$  в точках  $A$  и  $B$ . Инверсные им точки обозначим через  $A'$  и  $B'$ . Так как  $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = R^2$ , то  $OA' : OB = OB' : OA = k$ . Зададим гомотегию с центром  $O$  и коэффициентом  $k$ . При этой гомотетии окружность  $\gamma$  с диаметром  $AB$  перейдет в окружность  $\gamma'$  с диаметром  $B'A'$ . Покажем, что  $\gamma'$  – окружность, инверсная  $\gamma$  (при этом их центры  $C$  и  $D$  не переходят друг в друга при инверсии). Возьмем на  $\gamma$  произвольную точку  $M$  и проведем луч  $OM$ . Пусть он второй раз пересекает окружность  $\gamma$  в точке  $N$ , а окружность  $\gamma'$  – в точках  $N'$  и  $M'$ ; здесь точка  $N'$  гомотетична точке  $M$ , а  $M'$  – точке  $N$ . Так как  $CM \parallel DN'$ , то центральные углы  $OCM$  и  $ODN'$  равны, и следовательно,  $\angle OBM = \angle OM'B'$ . Поэтому треугольники  $OBM$  и  $OM'B'$  подобны, откуда  $OM' : OB' = OB : OM$ , или  $OM \cdot OM' = OB \cdot OB' = R^2$ . Таким образом, при инверсии произвольная

точка  $M$  окружности  $\gamma$  переходит в единственную точку  $M'$  окружности  $\gamma'$ . Свойство доказано.

3. При инверсии сохраняются углы между линиями.

Напомним, что под углом между двумя линиями в точке их пересечения понимается угол между касательными к ним в этой точке. Мы докажем свойство 3 применительно к прямым и окружностям.

Сначала покажем, что прямая, проходящая через центр инверсии, пересекает данную окружность и инверсную ей прямую или окружность под одинаковыми углами. В первом случае обратимся к рисунку 6 и проведем в точках  $O$  и  $B$  касательные к окружности  $\gamma$ . Утверждение следует из равенства отмеченных на рисунке углов. Во втором случае (см. рис.7) проведем касательные к  $\gamma$  в точках  $M$  и  $N$ , а к  $\gamma'$  в точках  $N'$  и  $M'$ . Из гомотетии окружностей получаем  $\angle 1 = \angle 2$ ,  $\angle 3 = \angle 4$ , но  $\angle 1 = \angle 3$ , что и доказывает наше утверждение.

Пусть теперь  $M$  – точка пересечения двух линий  $\beta$  и  $\gamma$  (каждая из них может быть окружностью или прямой); при инверсии они перейдут в линии  $\beta'$  и  $\gamma'$ , пересекающиеся в точке  $M'$ . Проведем через точки  $M$  и  $M'$  прямую  $l$ , она пройдет через центр инверсии. Углы, образованные линиями  $\beta$  и  $\beta'$  с прямой  $l$ , равны между собой; аналогично равны между собой углы, образованные  $\gamma$  и  $\gamma'$  с прямой  $l$ . Отсюда и следует свойство 3.

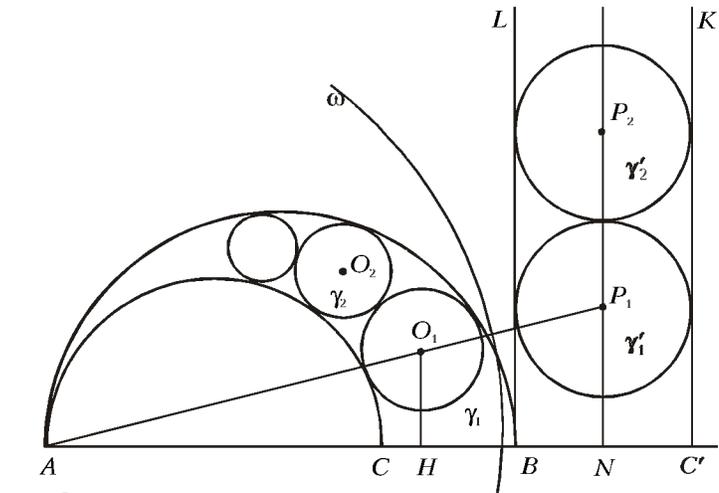


Рис. 8

А теперь сформулируем и докажем утверждение, обобщающее задачи 1 и 2 Архимеда.

**Предложение.** Пусть  $AB$  и  $AC$  – диаметры полукругов (рис.8). Впишем в образовавшийся роковидный угол последовательность окружностей  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  с радиусами  $r_1, r_2, \dots$ , попарно касающихся друг друга; положение первой окружности произвольно. Обозначим через  $h_n$  длину перпендикуляра, опущенного из центра  $n$ -й окружности на  $AB$ . Отношения  $x_n = h_n : r_n$  образуют арифметическую прогрессию с разностью 2.

**Доказательство.** Пусть  $O_1, O_2, \dots$  – центры окружностей  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ . Будем считать  $AB = 2R, AC = 2r$ . Произведем инверсию полученной конструкции относительно окружности  $\omega$  произвольного радиуса с центром в точке  $A$ . На рисунке 8 взята окружность  $\omega$  радиуса  $2R$ . В результате инверсии исходные полуокружности перейдут в лучи  $BL$  и  $C'K$ , перпендикулярные прямой  $AB$ , а  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  – в окружности  $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots$ , касающиеся этих лучей и попарно друг друга. (Напомним, что центры  $P_1, P_2, \dots$  этих окружностей не являются инверсными для точек  $O_1, O_2, \dots$ .) Обозначим через  $\rho$  радиусы полученных окружностей. Опустим из центров  $O_1$  и  $P_1$  перпендикуляры  $O_1H$  и  $P_1N$  на прямую  $AB$  и обозначим  $O_1H = h_1, P_1N = \eta$ . Окружности  $\gamma_1$  и  $\gamma'_1$ , как и треугольники  $AO_1H$  и  $AP_1N$ , гомотетичны с одним и тем же коэффициентом гомететии. Поэтому  $x_1 = h_1/r_1 = \eta/\rho$ . Для следующей окружности имеем  $x_2 = h_2/r_2 = x_1 + 2$ . Аналогично, для любого натурального числа  $n$  выводится рекуррентное соотношение

$$x_{n+1} = x_n + 2.$$

Следовательно, последовательность  $\{x_n\}$  представляет собой арифмети-

ческую прогрессию с разностью 2. Предложение доказано.

Чтобы получить решение задачи 1 Архимеда, нужно к последовательности  $\{x_n\}$  присоединить еще один член  $x_0 = 0$ . При этом к последовательности вписанных окружностей присоединяется полуокружность арбелона с диаметром  $CB$ . Нужно только помнить, что в задаче 1 Архимед рассматривает отношение  $h_n$  не к радиусам  $r_n$ , а к диаметрам, поэтому у него возникает последовательность натуральных чисел, а у нас – четных чисел: 2, 4, 6, ...

Полагая в последовательности  $\{x_n\}$   $x_1 = 1$ , получаем последовательность нечетных чисел, т.е. решение задачи 2 Архимеда.

Архимеда интересовало и выражение для радиуса окружности, вписанной в арбелон (т.е. для  $r_1$ ), через радиусы  $R$  и  $r$  исходных кругов. Он рассмотрел случай, когда  $r : R = 3 : 5$  и, используя пропорциональность отрезков, получил, что  $r_1 : R = 6 : 19$ . Доказательство Архимеда легко может быть перенесено на любой арбелон.

Инверсия дает возможность выразить  $r_n$  через  $R$  и  $r$  для любого  $n$  при произвольном расположении первой окружности. Для упрощения вычислений проведем их лишь для случая арбелона. Оставим те же обозначения, которые использовались при доказательстве предложения; радиус базисной окружности будем считать равным  $2R$ . Тогда  $AC' = 2R^2/r$  и  $\rho = R(R-r)/r$ . Центры  $P_1, P_2, \dots$  окружностей  $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots$  лежат на серединном перпендикуляре  $NP_1$  отрезка  $BC'$  (рис.9). При инверсии относительно окружности  $\omega$  этот перпендикуляр перейдет в полуокружность  $\Gamma$ , построенную на диаметре  $AN'$ , равном  $4Rr/(R+r)$ . Пусть  $D$  – центр

окружности  $\Gamma$ ;  $M_1, M_2, \dots$  – точки пересечения  $\Gamma$  с  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  соответственно; инверсными им будут точки  $M'_1, M'_2, \dots$ . Так как при инверсии углы сохраняются, то окружность  $\Gamma$  пересекает каждую из окружностей  $\gamma_n$  под прямым углом. Обозначим  $\angle BAM_1 = \varphi_0, \angle M_n AM_{n+1} = \varphi_n$  для любого номера  $n$ , тогда  $\angle BDM_1 = 2\varphi_0, \angle M_n DM_{n+1} = 2\varphi_n$ . Очевидно,

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \rho / AN = (R-r)/(R+r),$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_0 + \varphi_1) = 3\rho / AN = 3(R-r)/(R+r),$$

и вообще,

$$\operatorname{tg}(\varphi_0 + \varphi_1 + \dots + \varphi_n) = (2n+1)(R-r)/(R+r).$$

Из треугольника  $M_1 DO_1$  имеем

$$\begin{aligned} r_1 &= DM_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = \\ &= \frac{2Rr}{R+r} \operatorname{tg}((\varphi_0 + \varphi_1) - \varphi_0) = \\ &= \frac{2Rr}{R+r} \cdot \frac{2 \frac{R-r}{R+r}}{1 + 3 \frac{(R-r)^2}{(R+r)^2}} = \frac{Rr(R-r)}{R^2 + r^2 - Rr}. \end{aligned}$$

Это результат Архимеда для произвольных  $R$  и  $r$ . Записывая для любого  $n$  угол  $\varphi_n$  в виде разности  $\varphi_n = (\varphi_0 + \dots + \varphi_n) - (\varphi_0 + \dots + \varphi_{n-1})$ , аналогично находим

$$r_n = \frac{Rr(R-r)}{Rr + n^2(R-r)^2}.$$

**Упражнение 3.** Покажите, что для второй задачи Архимеда (здесь  $\varphi_0 = 0$ )

$$r_n = \frac{4Rr(R-r)}{(R+r)^2 + 4n(n-1)(R-r)^2}.$$

В общем случае формулы для  $r_n$  имеют сложный вид.

В Предложении фиксированные окружности радиусов  $r$  и  $R$  касались друг друга внутренним образом. Как

(Окончание см. на с.54)

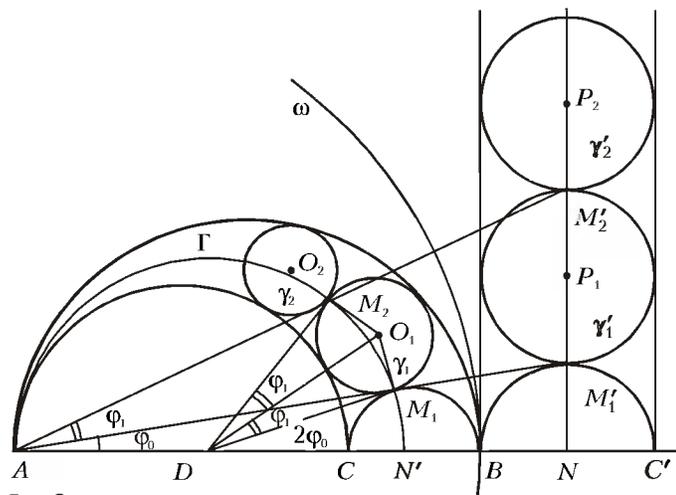


Рис. 9

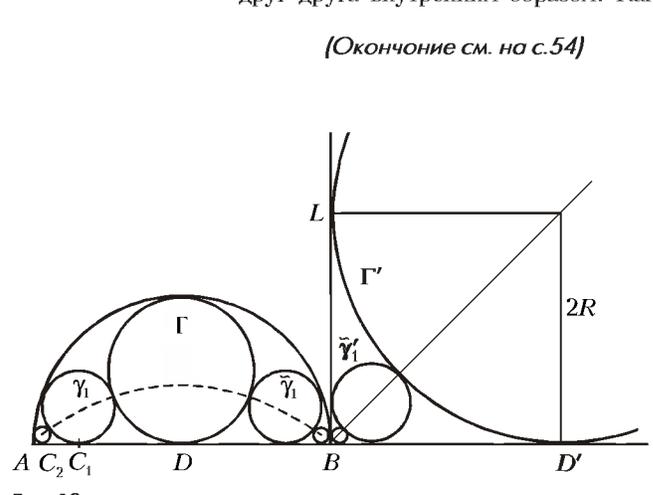


Рис. 10

# Движение по окружности

А.ОВЧИННИКОВ, В.ПЛИС

**СИСТЕМАТИЗИРУЯ ЗАДАЧИ** О движении по окружности, обычно рассматривают два типа задач: о равномерном и неравномерном движениях.

## Равномерное движение по окружности

Криволинейное движение всегда характеризуется не равным нулю ускорением. Когда говорят о равномерном движении по окружности, имеют в виду постоянство величины (модуля) скорости и изменение ее направления. Ускорение в таком случае перпендикулярно вектору скорости и направлено по радиусу к центру окружности. Учет этого обстоятельства существенно облегчает решение задач, так как в соответствии со вторым законом Ньютона точно известно направление суммы всех сил, действующих на тело. Векторное уравнение, отвечающее второму закону Ньютона, часто бывает удобнее заменить скалярными уравнениями, куда входят проекции соответствующих векторов на координатные оси. При этом одну ось обычно направляют по радиусу к центру окружности, а другую (если не все силы лежат в плоскости окружности) – перпендикулярно плоскости окружности.

**Задача 1.** Кольцо, изготовленное из однородного резинового жгута длиной  $l$ , массой  $m$  и жесткостью  $k$ , вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца, с угловой скоростью  $\omega$ . Найдите радиус  $R$  вращающегося кольца.

Рассмотрим элементарный участок вращающегося кольца длиной  $\Delta L$  и массой  $\Delta m = m\Delta L/(2\pi R)$ . На выделенный участок действуют силы упругости  $\vec{T}_1$  и  $\vec{T}_2$  (рис.1), направленные по касательным к кольцу и одинаковые по модулю:  $T_1 = T_2 = T$ . По второму закону Ньютона,

$$\Delta m \vec{a} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2.$$

Рассматриваемый участок равномерно движется по окружности; следовательно, его ускорение в любой момент времени направлено к центру окружности и по величине равно  $\omega^2 R$ . Это ускорение сообщается суммой сил  $\vec{T}_1 + \vec{T}_2$ , приложенных к участку.

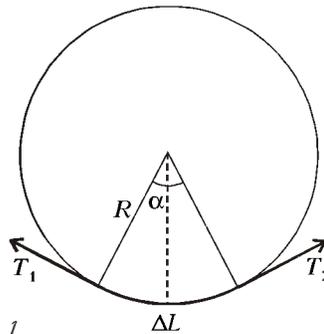


Рис. 1

Запишем второй закон Ньютона в проекциях сил и ускорений на радиальное направление:

$$\frac{m\Delta L}{2\pi R} \omega^2 R = 2T \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Величина  $T$  упругой силы (силы натяжения) связана с удлинением  $(2\pi R - l)$  кольца законом Гука:

$$T = k(2\pi R - l).$$

При малых углах  $\sin(\alpha/2) \approx \alpha/2 = \Delta L/(2R)$ . С учетом этих соотношений уравнение движения принимает вид

$$\frac{m}{2\pi} \omega^2 \Delta L = 2k(2\pi R - l) \frac{\Delta L}{2R}.$$

Отсюда

$$R = \frac{2\pi kl}{4\pi^2 k - \omega^2 m}.$$

Из полученного выражения следует, что при  $\omega = 2\pi\sqrt{k/m}$  кольцо должно неограниченно растягиваться. Однако этого не случится, так как закон Гука нарушится уже при небольших удлинениях, а при некоторой скорости вращения кольцо просто разорвется.

**Задача 2.** Маленький деревянный шарик прикреплен с помощью нерастяжимой нити длиной  $l = 30$  см к дну цилиндрического сосуда с водой. Расстояние от центра дна до точки закрепления нити  $r = 20$  см. Сосуд раскручивают вокруг вертикальной оси, проходящей через центр дна. При какой угловой скорости вращения  $\omega$  нить отклонится от вертикали на угол  $\alpha = 30^\circ$ ? Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

Нить с шариком отклонится к оси вращения (рис.2). На шарик будут действовать три силы: сила тяжести

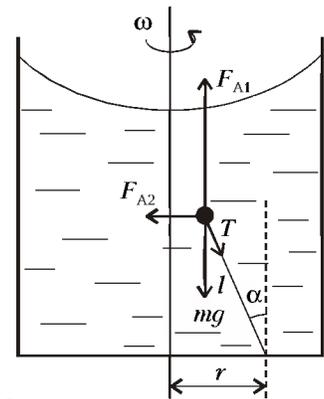


Рис. 2

$m\vec{g}$ , сила натяжения нити  $\vec{T}$  и сила Архимеда  $\vec{F}_A$ . Найдем последнюю силу. Обозначим объем шарика  $V$ , плотность дерева, из которого изготовлен шарик,  $\rho_{ш}$ , плотность воды  $\rho_в$ . Рассмотрим сначала движение жидкости до погружения в нее шарика. Любой элементарный объем воды равномерно движется по окружности в горизонтальной плоскости. Следовательно, вертикальная составляющая суммы сил давления, т.е. силы Архимеда, уравновешивает силу тяжести, действующую на жидкость в рассматриваемом объеме, а горизонтальная составляющая силы Архимеда сообщает этой жидкости центростремительное ускорение. При замещении жидкости в элементарном объеме соответствующим фрагментом шарика эти составляющие не изменяются. Тогда вертикальная составляющая  $\vec{F}_{A1}$  силы Архимеда, действующей на шарик, по величине равна  $\rho_в V g$ , а направленная к оси вращения горизонтальная составляющая  $\vec{F}_{A2}$  силы Архимеда по величине равна  $\rho_в V \omega^2 (r - l \sin \alpha)$ . Под действием приложенных сил шарик движется равномерно по окружности радиусом  $r - l \sin \alpha$  в горизонтальной плоскости.

По второму закону Ньютона,

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_A,$$

или

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{A1} + \vec{F}_{A2}.$$

Переходя к проекциям сил и ускорения на вертикальную ось, находим

$$0 = -\rho_{\text{ш}} V g - T \cos \alpha + \rho_{\text{в}} V g,$$

а проецируя силы и ускорение в горизонтальной плоскости на радиальное направление, получаем

$$\begin{aligned} \rho_{\text{ш}} V \omega^2 (r - l \sin \alpha) = \\ = \rho_{\text{в}} V \omega^2 (r - l \sin \alpha) - T \sin \alpha. \end{aligned}$$

Исключая  $T$  из двух последних соотношений, определяем искомую угловую скорость:

$$\omega = \sqrt{\frac{g \operatorname{tg} \alpha}{r - l \sin \alpha}} \approx 11 \text{ с}^{-1}.$$

\*\*\*

Умение описывать движение по окружности может существенно помочь при анализе движений по еще более сложным траекториям: винтовой линии или циклоиде. Действительно, движение по винтовой линии можно представить в виде суперпозиции движения по окружности и движения по прямой, перпендикулярной плоскости окружности и проходящей через точку окружности. Движение по циклоиде тоже возможно представить как одновременные два движения: по окружности и по прямой, лежащей в плоскости окружности.

**Задача 3.** По длинной проволочной винтовой линии с шагом  $H$ , ось которой вертикальна, скользит бусинка. Радиус воображаемой цилиндрической поверхности, на которой расположена винтовая линия, равен  $R$ . Коэффициент трения скольжения бусинки по проволоке  $\mu$  ( $\mu < H/(2\pi R)$ ). Найдите установившуюся скорость  $v_*$  скольжения бусинки. Ускорение свободного падения  $g$ .

На бусинку действуют силы тяжести  $m \vec{g}$ , нормальной реакции  $\vec{N}$  и трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ . При этом  $F_{\text{тр}} = \mu N$ , как обычно, а  $N = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$ , где  $\vec{N}_1$  – горизонтальная составляющая, направленная к оси винтовой линии, а  $\vec{N}_2$  лежит в одной вертикальной плоскости с  $m \vec{g}$  и  $\vec{F}_{\text{тр}}$  (рис.3).

Из второго закона Ньютона следует, что с ростом величины скорости будет расти величина силы трения, так что

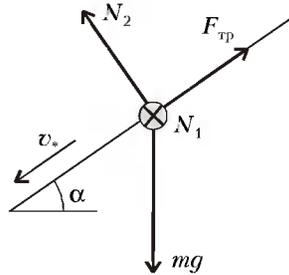


Рис. 3

естественно ожидать выхода движения на установившийся режим скольжения с некоторой скоростью  $v_*$ . Для определения этой скорости перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся по вертикали вниз со скоростью  $v_* \sin \alpha$ , где  $\alpha$  – угол наклона вектора скорости к горизонту и  $\operatorname{tg} \alpha = H/(2\pi R)$ . В выбранной системе бусинка равномерно движется по окружности радиусом  $R$  со скоростью  $v_* \cos \alpha$ , при этом ускорение бусинки направлено к оси винтовой линии и по величине равно  $(v_* \cos \alpha)^2/R$ . Из второго закона Ньютона

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}},$$

переходя к проекциям сил и ускорения на радиальное направление, находим

$$m \frac{(v_* \cos \alpha)^2}{R} = N_1.$$

В вертикальной плоскости справедливо равенство

$$0 = m \vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}},$$

откуда, переходя к проекциям сил на взаимно ортогональные направления, получим

$$F_{\text{тр}} = mg \sin \alpha, \quad N_2 = mg \cos \alpha.$$

Из этих соотношений с учетом того, что  $F_{\text{тр}} = \mu \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$ , окончательно имеем

$$v_* = (gR/\mu)^{1/2} \left( (\operatorname{tg}^2 \alpha - \mu^2) (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) \right)^{1/4}$$

**Задача 4\*.** Протон движется в однородном и постоянном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ . Векторы начальной скорости  $\vec{v}_0$  и индукции  $\vec{B}$  образуют угол  $\alpha$ . Определите вид траектории протона в лабораторной системе отсчета. Масса протона  $m$ , заряд  $e$ .

В соответствии со вторым законом Ньютона и выражением для магнитной составляющей силы Лоренца имеем

$$m \vec{a} = e [\vec{v}, \vec{B}],$$

где  $[\vec{v}, \vec{B}]$  – векторное произведение.<sup>1</sup> Проанализируем это уравнение. Сила Лоренца перпендикулярна вектору скорости  $\vec{v}$ ; следовательно, эта сила не совершает работы, и по теореме об изменении кинетической энергии величина  $v$  скорости протона остается постоянной и равной своему начальному значению  $v_0$ . Сила Лоренца перпендикулярна также вектору индукции  $\vec{B}$ ; следовательно, составляющая  $v_{\parallel}$  вектора скорости, параллельная вектору индукции, тоже остается постоянной и равной своему начальному значению  $v_0 \cos \alpha$ . Тогда величина  $v_{\perp}$  перпендикулярной вектору индукции составляющей скорости протона тоже остается постоянной и равной своему начальному значению  $v_0 \sin \alpha$ .

Перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся поступательно относительно лаборатории со скоростью  $\vec{V} = \vec{v}_{\parallel}$ . С учетом закона сложения скоростей и представления скорости в виде суммы составляющих:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} = \vec{v}'_{\perp} + \vec{v}'_{\parallel}$$

получаем, что в рассматриваемой системе протон движется в плоскости, перпендикулярной  $\vec{B}$ , с постоянной по величине (но не по направлению!) скоростью  $\vec{v}' = \vec{v}'_{\perp}$ . Уравнение движения принимает вид

$$m \vec{a}' = e [\vec{v}'_{\perp}, \vec{B}].$$

Отсюда следует, что величина вектора ускорения равна

$$a' = \frac{e v_{\perp} B}{m} = \frac{e B v_0 \sin \alpha}{m}$$

и постоянна, а его направление перпендикулярно вектору скорости  $\vec{v}'_{\perp}$ . Значит, в рассматриваемой системе отсчета протон равномерно движется по окружности радиусом

$$R = \frac{v_{\perp}^2}{a'} = \frac{m v_0 \sin \alpha}{e B}$$

с частотой

$$\omega = \frac{v_{\perp}}{R} = \frac{e B}{m},$$

не зависящей от скорости.

Соответственно, движение протона относительно лабораторной системы отсчета осуществляется по винтовой

<sup>1</sup> При решении этой и следующей задач используется понятие векторного произведения, которое известно учащимся специализированных классов физико-математического профиля. (Прим. ред.)

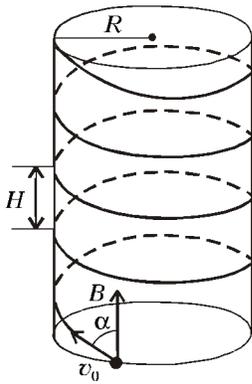


Рис. 4

линии (рис.4) с шагом винта

$$H = v_{\parallel} T = v_0 \cos \alpha \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = 2\pi \frac{mv_0}{eB} \cos \alpha.$$

**Задача 5\*.** Протон движется в области пространства, где созданы однородные и постоянные электрическое  $\vec{E}$  и магнитное  $\vec{B}$  поля. Векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и вектор  $\vec{v}_0$  начальной скорости протона взаимно перпендикулярны (рис.5), причем  $E \ll Bc$ , где  $c$  – скорость света. Определите вид

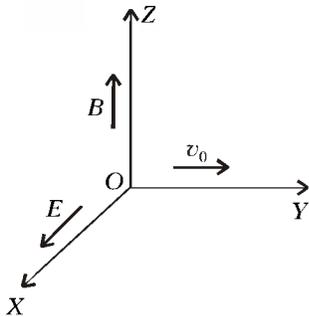


Рис. 5

траектории протона в этой системе отсчета. Масса протона  $m$ , заряд  $e$ .

Уравнение второго закона Ньютона для протона в скрещенных электрическом и магнитном полях имеет вид

$$m \vec{a} = e \vec{E} + e[\vec{v}, \vec{B}].$$

Попытаемся найти систему отсчета, в которой протон «чувствует» только магнитное поле. Для этого перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся поступательно относительно лабораторной системы с постоянной скоростью  $\vec{V}$ . Учитывая закон сложения скоростей:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$$

и закон сложения ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A},$$

уравнение движения запишем в виде

$$m(\vec{a}' + \vec{A}) = e(\vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}]) + e[\vec{v}', \vec{B}].$$

Отсюда следует, что в выбранной системе, движущейся с постоянной скоростью

$$\vec{V} = \frac{[\vec{E}, \vec{B}]}{B^2}, \quad V = \frac{E}{B} \ll c,$$

первое слагаемое в правой части уравнения движения обращается в ноль. Кроме того, вследствие постоянства скорости,

$$\vec{A} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = 0,$$

так что уравнение движения протона

$$m \vec{a}' = e[\vec{v}', \vec{B}]$$

совпадает с уравнением, полученным в предыдущей задаче. Приходим к выводу, что в системе отсчета, перемещающейся в отрицательном направлении оси  $OY$  со скоростью  $V = E/B$  (рис.6,а), протон равномерно движется по окружности ( $\vec{v}' \perp \vec{B}$ ) радиусом  $R = \frac{v'}{\omega} = \frac{m}{eB} \left( v_0 - \frac{E}{B} \right)$  с частотой  $\omega = \frac{eB}{m}$ .

Итак, относительно лаборатории частица участвует в двух движениях: равномерном движении по окружности в подвижной системе отсчета и движении вместе с подвижной системой отсчета с постоянной скоростью  $\vec{V}$ . Средняя (дрейфовая) скорость частицы относительно лаборатории равна  $E/B$  и не зависит ни от массы, ни от величины заряда, ни от знака заряда. Все эти параметры влияют лишь на движение по окружности. В

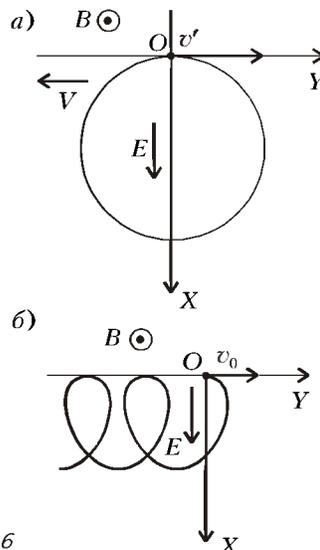


Рис. 6

зависимости от соотношения между  $v$  и  $E/B$  траектория выглядит как сжатая, удлиненная или обычная циклоида (рис.6.б).

Заметим, что с такой же суперпозицией движений мы встречаемся при изучении движения точек катящегося колеса.

### Неравномерное движение по окружности

В отличие от равномерного движения по окружности, в случае неравномерного движения ускорение характеризует изменение не только направления скорости, но и ее величины. Соответственно, вектор ускорения удобно представить в виде суммы двух компонентов: ускорения, перпендикулярного скорости, его называют нормальным  $\vec{a}_n$ , или центростремительным (иногда осецистремительным), и ускорения, касательного к траектории, его называют тангенциальным  $\vec{a}_t$  (латинское tangens означает касающийся).

**Задача 6.** Автомобиль, трогаясь с места, равномерно набирает скорость, двигаясь по горизонтальному участку дороги, представляющему собой дугу в  $1/6$  длины окружности радиусом  $R = 100$  м. С какой наибольшей по величине скоростью автомобиль может выехать на прямолинейный участок дороги, если коэффициент трения скольжения шин по дорожному покрытию  $\mu = 0,3$ ? Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Все колеса автомобиля ведущие. Нагрузки на переднюю и заднюю оси одинаковы. Центр масс автомобиля расположен очень низко.

На автомобиль в процессе разгона действуют сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила нормальной реакции  $\vec{N}$  и сила трения  $\vec{F}_{тр}$ , которая единственная сонаправлена с ускорением  $\vec{a}$ . Проанализируем изменение вектора ускорения со временем. Для этого удобно обратиться к величинам тангенциальной  $a_t$  и нормальной  $a_n$  составляющих ускорения. По условию  $a_t$  постоянна; следовательно, скорость  $v$  автомобиля в конце разгона и тангенциальная составляющая  $a_t$  связаны соотношением

$$v = \sqrt{2a_t s} = \sqrt{2a_t \frac{\pi R}{6}},$$

откуда получаем

$$a_t = \frac{3v^2}{\pi R}.$$

Нормальная (центростремительная)

составляющая определяется формулой

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

и достигает наибольшего значения в конце участка разгона, где скорость наибольшая. По теореме Пифагора

$$a_{\max} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{3v^2}{\pi R}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} = \frac{v^2}{R} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{\pi}\right)^2}$$

Из второго закона Ньютона следует

$$N = mg,$$

а сила трения может сообщить наибольшее по величине ускорение

$$a_{\max} = \frac{F_{\text{тр max}}}{m} = \frac{\mu N}{m} = \mu g.$$

Таким образом, наибольшая скорость в конце участка разгона равна

$$v = \sqrt{\frac{\mu g R}{1 + \left(\frac{3}{\pi}\right)^2}} \approx 15 \text{ м/с.}$$

\*\*\*

Однако значительное количество задач о неравномерном движении по окружности не решается простой записью проекций уравнения второго закона Ньютона (уравнения движения) на радиальное и касательное направления. На таком пути возникают математические трудности при использовании тангенциальной составляющей уравнения движения. Выход находят в замене этого уравнения формулой, описывающей закон сохранения механической энергии.

**Задача 7.** На горизонтальной поверхности лежит полушар массой  $M = 100 \text{ г}$  (рис.7). Из его верхней точки

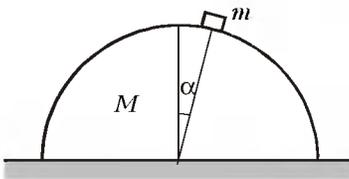


Рис. 7

без трения с нулевой начальной скоростью скользит шайба массой  $m = 10 \text{ г}$ . Из-за трения между полушаром и горизонтальной поверхностью движение полушара начинается при  $\alpha = 10^\circ$ . Найдите коэффициент трения  $\mu$ .

Рассмотрим силы, действующие на каждое из тел. На шайбу действуют сила тяжести  $m\vec{g}$  и сила нормальной реакции  $\vec{N}_1$  (рис.8). Из второго зако-

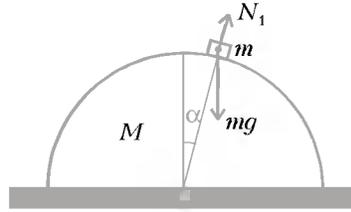


Рис. 8

на Ньютона,

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1.$$

Переходя к проекциям сил и ускорения на радиальное направление, в момент начала движения полушара получаем

$$m \frac{v^2}{R} = mg \cos \alpha - N_1.$$

По закону сохранения энергии,

$$\frac{mv^2}{2} = mgR(1 - \cos \alpha).$$

Из этих соотношений находим

$$N_1 = mg(3 - 2 \cos \alpha).$$

На полушар действуют силы тяжести  $M\vec{g}$ , нормальной реакции  $\vec{N}_2$ , трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$  и давления со стороны шайбы  $\vec{F}$  (рис.9). Из второго закона Ньюто-

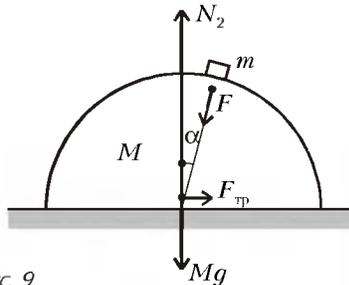


Рис. 9

на, записанного в проекциях на вертикальное направление с учетом равенства  $F = N_1$ , получаем

$$N_2 = Mg + F \cos \alpha = Mg + mg(3 - 2 \cos \alpha) \cos \alpha.$$

В момент начала движения полушара величина силы трения связана с величиной силы нормальной реакции соотношением  $F_{\text{тр}} = \mu N_2$ , а из второго закона Ньютона, записанного в проекциях на горизонтальное направление, следует

$$F_{\text{тр}} = F \sin \alpha = mg(3 - 2 \cos \alpha) \sin \alpha.$$

Отсюда находим

$$\mu = \frac{F_{\text{тр}}}{N_2} = \frac{m(3 - 2 \cos \alpha) \sin \alpha}{M + m(3 - 2 \cos \alpha) \cos \alpha} \approx \frac{m}{M} \alpha = 0,017.$$

**Упражнения**

1. По резиновой трубке, свернутой в виде кольца, циркулирует со скоростью  $v$  вода. Радиус кольца  $R$ , диаметр трубки  $d \ll R$ . С какой силой  $T$  растянута резиновая трубка?

2. Закрытая пробирка длиной  $l$ , полностью заполненная жидкостью, составляет угол  $\alpha$  с вертикальной осью, проходящей через ее нижний конец. В жидкости плавает легкая пробка. До какой угловой скорости  $\omega$  следует раскрутить пробирку вокруг вертикальной оси, чтобы пробка погрузилась до середины пробирки?

3. Слабо расходящийся пучок протонов, стартующих из одной точки пространства, в котором создано однородное постоянное магнитное поле  $\vec{B}$ , так, что векторы скорости  $\vec{v}_0$  протонов составляют малые углы с вектором поля  $\vec{B}$ . На каком расстоянии  $L$  от точки старта пучок протонов впервые сфокусируется? Масса протона  $m$ , заряд  $e$ .

4\*. Протон движется в области пространства, где созданы взаимно перпендикулярные однородные и постоянные электрическое  $\vec{E}$  и магнитное  $\vec{B}$  поля. Вектор  $\vec{v}_0$  начальной скорости перпендикулярен  $\vec{E}$  и имеет ненулевую составляющую  $v_{\text{о||}}$ , параллельную  $\vec{B}$ . Считая, что  $E \ll Bc$ , где  $c$  – скорость света, найдите скорость  $\vec{V}$  системы отсчета, в которой протон движется по окружности.

5. На кольцевой горизонтальной дороге радиусом  $R = 1000 \text{ м}$  стартует гоночный автомобиль и разгоняется так, что величина скорости увеличивается на  $2 \text{ м/с}$  за каждую секунду. В течение какого времени  $\tau$  гонщику удастся удерживать автомобиль на дороге, если коэффициент трения скольжения шин по дорожному покрытию  $\mu = 0,5$ ? Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Ведущие колеса автомобиля – задние, нагрузки на переднюю и заднюю оси одинаковы. Центр масс автомобиля расположен очень низко.

6. Маятник, имеющий на конце нити шарик массой  $m$  и зарядом  $Q$ , находится в поле тяжести и в однородном электрическом поле, напряженность  $\vec{E}$  которого перпендикулярна ускорению свободного падения  $\vec{g}$ . Маятник отклоняют до горизонтального положения в плоскости векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{g}$  и отпускают. Найдите натяжение нити  $T$ , когда маятник будет проходить положение равновесия в данных полях.

7. На горизонтальной поверхности лежит полушар массой  $M = 200 \text{ г}$ . Из его верхней точки в противоположных направлениях без трения с нулевыми начальными скоростями начинают скользить две шайбы массами  $m_1 = 20 \text{ г}$  и  $m_2 = 15 \text{ г}$ . Из-за трения между полушаром и горизонтальной поверхностью движение полушара начинается в тот момент, когда одна из шайб пройдет  $1/36$  длины окружности большого круга. Найдите коэффициент трения  $\mu$ .

# Материалы вступительных экзаменов 1999 года

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет, олимпиада «Абитуриент 99», май)

1. Решите уравнение

$$(x^2 + 4) \lg \sin^2 3x + x^2 \lg \cos^2 2x = 4 \lg(\cos 2x \sin^3 3x).$$

2. Сумма членов конечной геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, а знаменатель положительный, равна  $\frac{40}{27}$ , а сумма тех же членов с чередующимися знаками (первый – со знаком «плюс», второй – со знаком «минус» и т.д.) равна  $\frac{20}{27}$ . Найдите знаменатель прогрессии.

3. Найдите все  $x$ , при которых хотя бы одно из двух выражений

$$|x - 3|(|x - 5| - |x - 3|) - 6x$$

и

$$|x|(|x| - |x - 8|) + 24$$

неположительно и при этом его модуль не меньше модуля другого.

4. Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $B$  проведена прямая, пересекающая окружности в точках  $C$  и  $D$ , лежащих по разные стороны от прямой  $AB$ . Касательные к этим окружностям в точках  $C$  и  $D$  пересекаются в точке  $E$ . Найдите  $AE$ , если  $AB = 10$ ,  $AC = 16$ ,  $AD = 15$ .

5. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{a + 2 - 2^{x-2}}{a + 3} \geq \frac{5a + 5}{2(2^x + 3a + 3)}$$

содержит какой-либо луч на числовой прямой.

6. Основанием пирамиды  $SABCD$  является трапеция  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$  такими, что  $BC : AD = 2 : 5$ . Диагонали трапеции пересека-

ются в точке  $E$ , а центр  $O$  вписанной в пирамиду сферы лежит на отрезке  $SE$  и делит его в отношении  $SO : OE = 7 : 2$ . Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если площадь боковой грани  $SBC$  равна 8.

Вариант 2

(механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$3^{(x+3)^2} + \frac{1}{9} \leq 3^{x^2-2} + 27^{2x+3}.$$

2. Решите уравнение

$$\begin{aligned} \log_2(2x + 7) &= \\ &= \log_2(1 + |x + 3|) + \log_2(1 - |x + 3|). \end{aligned}$$

3. При каких значениях  $\varphi$  все положительные корни уравнения

$$\cos\left(\frac{x}{2} + \varphi\right) - \cos\left(\frac{3x}{2} + \varphi\right) = \sin \frac{x}{2},$$

расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию?

4. В трапеции  $ABCD$  с боковыми сторонами  $AB = 9$  и  $CD = 5$  биссектриса угла  $D$  пересекает биссектрисы углов  $A$  и  $C$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно, а биссектриса угла  $B$  пересекает те же две биссектрисы в точках  $L$  и  $K$ , причем точка  $K$  лежит на основании  $AD$ .

а) В каком отношении прямая  $LN$  делит сторону  $AB$ , а прямая  $MK$  – сторону  $BC$ ?

б) Найдите отношение  $MN : KL$ , если  $LM : KN = 3 : 7$ .

5. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых сумма длин интервалов, составляющих решение неравенства

$$\frac{x^2 + (2a^2 + 6)x - a^2 + 2a - 3}{x^2 + (a^2 + 7a - 7)x - a^2 + 2a - 3} < 0,$$

не меньше 1.

6. Три шара радиусов 1, 2 и 5 расположены так, что каждый из них касается двух других шаров и двух данных плоскостей. Найдите расстояние между точками касания первого из этих шаров с плоскостями.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики, олимпиада «Абитуриент-99», апрель)

1. Пункты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  расположены на одной прямой в указанной последовательности. Пешеход выходит из пункта  $A$  со скоростью 5 км/ч и направляется в пункт  $D$ . Достигнув пункта  $D$ , он поворачивает обратно и доходит до пункта  $B$ , затратив на всю дорогу 5 ч. Известно, что расстояние между  $A$  и  $C$  он прошел за 3 ч, а расстояния между  $A$  и  $B$ ,  $B$  и  $C$ ,  $C$  и  $D$  (в заданном порядке) образуют геометрическую прогрессию. Найдите расстояние между  $B$  и  $C$ .

2. Решите неравенство

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{8}{x}\right) \cdot \log_{2x-3} \left(x^2 - 4x + 4\right) &\geq \\ &\geq 9 \log_{\frac{2}{2x-3}} \left(x^2 - 4x + 4\right). \end{aligned}$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{1 + \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{8}} = -\sin x \cos x.$$

4. На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  взята точка  $D$  такая, что  $\angle CAD = 2 \angle DAB$ . Радиусы окружностей, вписанных в треугольники  $ADC$  и  $ADB$ , равны соответственно 8 и 4, а расстояние между точками касания этих окружностей с прямой  $BC$  равно  $\sqrt{129}$ . Найдите  $AD$ .

5. При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$3^{x^2 + 2ax + 4a - 3} - 2 = \frac{a - 2}{|x + a|}$$

имеет ровно два корня, лежащих на отрезке  $[-4; 0]$ ?

6. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  ( $ABCD$  и  $A_1 B_1 C_1 D_1$  – основания,  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ ) отрезки  $M_1 N_1$ ,  $M_2 N_2$ ,  $M_3 N_3$  – общие перпендикуляры к парам отрезков  $A_1 C_1$  и  $AB_1$ ,  $BC_1$  и  $AC$ ,  $DC_1$  и  $AD_1$  соответственно. Объем параллелепипеда равен  $V$ , радиус описанной сферы равен  $R$ , а сумма длин ребер  $AA_1$ ,  $AB$  и  $AD$  равна  $m$ . Найдите сумму объемов пирамид  $AA_1 M_1 N_1$ ,  $AB M_2 N_2$  и  $AD M_3 N_3$ .

Вариант 4

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Известно, что  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$ . Сравните  $\arccos(-\sqrt{-3 \cos \alpha - 1})$  и  $\frac{19\pi}{24}$ .

2. На координатной плоскости  $(x, y)$  проведена окружность радиуса 4 с центром в начале координат. Прямая, заданная уравнением  $y = 4 - (2 - \sqrt{3})x$ , пересекает ее в точках  $A$  и  $B$ . Найдите сумму длин отрезка  $AB$  и меньшей дуги  $AB$ .

3. Решите неравенство

$$\left| \log_{x+1} \sqrt{(x-2)^4} + 2 \right| \geq -3 + \log_{\frac{1}{\pi+1}} \sqrt{(x-2)^6}$$

4. В четырехугольной пирамиде  $SABCD$  высоты боковых граней, опущенные из вершины пирамиды  $S$ , равны  $\sqrt{2}$ . Известно, что  $AB = 2$ ,  $BC = 6$ ,  $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$ ,  $\angle ADC = \frac{2\pi}{3}$ . Найдите высоту пирамиды, если ее основание находится внутри четырехугольника  $ABCD$ .

5. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} 14x + 3 \operatorname{ctg} 14x + \sin 6x - 2\sqrt{2} \sin \left( 3x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{4}{\sqrt{3} + 1}$$

6. В остроугольном треугольнике  $ABC$  угол  $\angle ACB = 75^\circ$ , а высота, опущенная из вершины этого угла, равна 1. Найдите радиус описанной окружности, если известно, что периметр треугольника  $ABC$  равен  $4 + \sqrt{6} - \sqrt{2}$ .

Вариант 5

(физический факультет, олимпиада «Абитуриент 99», май)

1. Решите уравнение

$$\sin x - \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{2x+1} = x+4$$

3. Решите неравенство

$$\frac{2}{\log_3(x+1)} \leq \frac{1}{\log_9(x+5)}$$

4. В треугольнике  $ABC$  взяты точка  $N$  на стороне  $AB$ , а точка  $M$  — на стороне  $AC$ . Отрезки  $CN$  и  $BM$  пересекаются в точке  $O$ ,  $AN : NB = 2 : 3$ ,  $BO : OM = 5 : 2$ . Найдите  $CO : ON$ .

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \left( \frac{y}{x} + \frac{3x}{y} \right) = 16, \\ \sqrt{y} - \sqrt{2x} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}. \end{cases}$$

6. В ромбе  $ABCD$  высоты  $BP$  и  $BQ$  пересекают диагональ  $AC$  в точках  $M$  и  $N$  ( $M$  между  $A$  и  $N$ ),  $AM = p$ ,  $MN = q$ . Найдите  $PQ$ .

7. При каких значениях  $a$  уравнение

$$\cos 2x + 2 \cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0$$

имеет ровно одно решение на промежутке  $0 \leq x < 2\pi$ ?

8. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  ( $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ )  $AB = BC = 2a$ ,  $AA_1 = a$ . Плоскость сечения проходит через точки  $B_1$  и  $D$  параллельно прямой  $AC$ . Найдите радиус шара, касающегося этого сечения и трех граней параллелепипеда с общей вершиной  $B$ .

Вариант 6

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\cos 7x + \cos 3x + 2 \sin^2 x = 1$$

2. Решите неравенство

$$\left| 2 - \frac{1}{x-4} \right| < 3$$

3. В равнобокую трапецию  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) вписана окружность,  $BC : AD = 1 : 3$ , площадь трапеции равна  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Найдите  $AB$ .

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{6}{2^{1-x}} + 2 \cdot 3^{y+1} = 21, \\ 5 \cdot 2^{x+2} - \frac{18}{3^{2-y}} = 56. \end{cases}$$

5. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{4}{x-2} + 1} = \frac{1}{x-2}$$

6. Через точку  $N$  проведены две прямые, касающиеся некоторой окружности с центром  $O$ . На одной из этих прямых взята точка  $A$ , а на другой прямой взята точка  $B$  так, что  $OA = OB$ ,  $OA > ON$ ,  $NA \neq NB$ . Известно, что  $NA = a$ ,  $NB = b$ ,  $OA = c$ . Найдите  $ON$ .

7. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  с вершиной  $S$  боковое ребро  $SA$  равно  $b$ . Сфера радиуса  $\frac{b}{2}$  касается плоскости  $SAC$  в точке  $C$  и проходит через точку  $B$ . Найдите  $\angle ASC$ .

8. Для любого допустимого значения  $a$  решите неравенство

$$\log_{2a}(\log_3 x^2) > 1$$

и найдите, при каком значении  $a$  множество точек  $x$ , не являющихся решением неравенства, представляет собой промежуток, длина которого равна 6.

Вариант 7

(химический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \leq 2$$

2. Решите уравнение

$$(\sin x + \cos x - \sqrt{2}) \sqrt{-11x - x^2 - 30} = 0$$

3. Решите неравенство

$$\begin{aligned} & (\log_{3-x}(2x+1)) (\log_{2x+1} x^2) \leq \\ & \leq (\log_{3-x}(3x+1)) (\log_{3x+1}(x+2)) \end{aligned}$$

4. В треугольнике  $ABC$  угол  $\angle B$  равен  $\pi/6$ . Через точки  $A$  и  $B$  проведена окружность радиуса 2, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ . Через точки  $B$  и  $C$  проведена окружность радиуса 3, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $C$ . Найдите длину стороны  $AC$ .

5. В сферу радиуса  $\sqrt{3}$  вписан параллелепипед, объем которого равен 8. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

6. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$\left| \frac{x(2^x - 1)}{2^x + 1} + 2a \right| = a^2 + 1$$

имеет нечетное число решений.

7. Последовательность чисел  $a_1, a_2, \dots$  определяется следующим правилом:  $a_1 = 0$ ,

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2, & \text{если число } n \text{ нечетное,} \\ 2a_n, & \text{если число } n \text{ четное,} \end{cases}$$

т.е.  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 4$ ,  $a_4 = 6$ ,  $a_5 = 12$ ,  $a_6 = 14$  и т.д. Найдите  $a_{1999}$ .

Вариант 8

(факультеты биологический и фундаментальной медицины)

1. Решите уравнение

$$8 \cos 6x - 12 \sin 3x = 3$$

2. Решите неравенство

$$\frac{3}{|x-1|} \geq 2x + 5$$

3. Решите уравнение

$$\begin{aligned} & \log_{8-7x} \left( x^3 - 3x^2 - \frac{37}{8}x + \frac{55}{8} \right) + \\ & + 2 \log_{(8-7x)^2} (x+3) = 1 \end{aligned}$$

4. На основаниях  $AD$  и  $BC$  трапеции  $ABCD$  построены квадраты  $ADEF$  и  $BCGH$ , расположенные вне трапеции. Диагонали трапеции пересекаются в точке  $O$ . Найдите длину отрезка  $AD$ , если  $BC = 2$ ,  $GO = 7$ , а  $GF = 18$ .

5. Найдите все значения  $y$ , удовлетворяющие условию  $y > \frac{1}{2}$ , такие, что

неравенство

$$16y^3 + 6y^3x - 4y^3x^2 - 50y^2 - 11y^2x + 10y^2x^2 + 52y + 4yx - 8yx^2 - 18 + x + 2x^2 > 0$$

выполняется при всех  $x$  из интервала  $1 < x < 2y$ .

6. Два велосипедиста стартуют одновременно из двух точек круговой велотрассы — первый из точки  $A$ , второй из точки  $B$  — и едут в противоположных направлениях с постоянными скоростями. Известно, что из их первых 15 встреч на трассе после старта только третья и пятнадцатая состоялись в точке  $B$ . Найдите отношение скорости первого велосипедиста к скорости второго, если известно, что к моменту их пятой встречи каждый из велосипедистов проехал не менее одного круга.

Вариант 9

(факультет почвоведения)

1. Решите уравнение

$$4^x - 2^x = 56.$$

2. Решите уравнение

$$\cos 2x = \sin x.$$

3. Решите уравнение

$$\log_{\pi} |x^2 - 1| = \log_{\sqrt{\pi}} |x|.$$

4. Решите неравенство

$$\sqrt[5]{y^5} \geq \sqrt[4]{y^4}.$$

5. Какое количество воды надо добавить в один литр 10%-го водного раствора спирта, чтобы получить 6%-й раствор?

6. Дан треугольник  $ABC$  с основанием  $AB$ , равным  $\sqrt{3}/2$ , и высотой  $CH$ , опущенной на это основание и равной  $\sqrt{6}/3$ . Известно, что точка  $H$  лежит на  $AB$  и  $AH : HB = 2 : 1$ . В угол  $ABC$  треугольника  $ABC$  вписана окружность, центр которой лежит на высоте  $CH$ . Найдите радиус этой окружности.

7. Для каждого значения параметра  $b \leq 0$  решите неравенство (относительно  $x$ )

$$\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \geq b.$$

Вариант 10

(геологический факультет)

1. Найдите область определения функции

$$y = \left( \log_{\frac{1}{2}}(x+3) \right) \cdot \sqrt{\frac{25}{(x+2)^2} - 1}.$$

2. Известно, что  $x_1, x_2$  — корни уравнения

$$2x^2 - (\sqrt{3} + 5)x - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 0.$$

Найдите значение  $A = x_1 + x_1x_2 + x_2$  и выясните, какое из чисел больше:  $A$  или 1,999?

3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости  $(x, y)$  системой неравенств

$$\begin{cases} x(x + y - \sqrt{2}) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 2. \end{cases}$$

4. Медиана  $AM$  треугольника  $ABC$  равна половине стороны  $BC$ . Угол между  $AM$  и высотой  $AH$  равен  $40^\circ$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .

5. Решите уравнение

$$\left| \operatorname{ctg}^2 2x + 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3 \right| = \left| \operatorname{ctg}^2 2x - 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3 \right|.$$

6. Дана арифметическая прогрессия  $a_1, a_2, \dots$ , в которой  $a_3 = -13$  и  $a_7 = 3$ . Определите, при каком количестве членов сумма прогрессии будет наименьшей; найдите значение этой суммы.

7. Сфера радиуса  $\sqrt{41}$  проходит через вершины  $B, C, C_1$  и через середину ребра  $A_1D_1$  куба  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  ( $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ ). Найдите площадь поверхности этого куба.

8. Решите неравенство

$$\log_{84-2x-2x^2} \cos x \leq \log_{x+19} \cos x.$$

Вариант 11

(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$\log_{4x-8} (x^2 - 2x - 3) = 1.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 8x + 5} = x - 2.$$

3. По реке из пункта  $A$  в пункт  $B$  выплыл катер. Одновременно из пункта  $B$  в пункт  $A$  выплыла моторная лодка. Пройдя четверть пути от  $B$  к  $A$ , лодка встретилась с катером. Катер, достигнув пункта  $B$ , повернул обратно и прибыл в пункт  $A$  одновременно с лодкой. Во сколько раз скорость катера больше скорости лодки?

4. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых среди корней уравнения

$$\sin 2x + 6a \cos x - \sin x - 3a = 0$$

найдутся два корня, разница между которыми равна  $\frac{3}{2}\pi$ .

5. В четырехугольнике  $ABCD$  диагонали  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $K$ . Точки  $L$  и  $M$  являются, соответственно, серединами сторон  $BC$  и  $AD$ . Отрезок  $LM$  содержит точку  $K$ . Четырехугольник  $ABCD$  таков, что в него

можно вписать окружность. Найдите радиус этой окружности, если  $AB = 3$ ,  $AC = \sqrt{13}$  и  $LK : KM = \frac{1}{3}$ .

6. В пространстве заданы три луча  $DA, DB$  и  $DC$ , имеющие общее начало  $D$ , так что

$$\angle ADB = \angle ADC = \angle BDC = 90^\circ.$$

Сфера пересекает луч  $DA$  в точках  $A_1$  и  $A_2$ , луч  $DB$  — в точках  $B_1$  и  $B_2$ , а луч  $DC$  — в точках  $C_1$  и  $C_2$ . Найдите площадь треугольника  $A_2B_2C_2$ , если площади треугольников  $DA_1B_1, DA_1C_1, DB_1C_1$  и  $DA_2B_2$  соответственно равны  $\frac{15}{2}, 10, 6$  и  $40$ .

Вариант 12

(социологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{y-1} = 6 - y.$$

2. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, для которой сумма первых пяти членов с нечетными номерами на единицу больше суммы первых пяти членов с четными номерами и равна квадрату первого члена.

3. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  проведены диагонали  $AC$  и  $BD$ . При этом оказалось, что  $\angle BAC = \angle BDC$ , а площадь круга, описанного около треугольника  $BDC$ , равна  $\frac{25\pi}{4}$ .

1) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .

2) Зная, что

$$BC = 3, AC = 4, \angle BAD = 90^\circ,$$

найдите площадь четырехугольника  $ABCD$ .

4. Кандидат в депутаты за время избирательной кампании имеет право на одно бесплатное выступление в газете, а также на платные выступления по радио и телевидению. Выступление в газете увеличивает число сторонников кандидата на 1000 человек; каждое выступление по радио увеличивает количество голосов на 40% и стоит 32 тысячи рублей; каждое выступление по телевидению — на 80% и стоит 47 тысяч рублей. Определите количество и последовательность выступлений в этих средствах массовой информации, при которых кандидат получит наибольшее возможное число голосов, если на всю кампанию можно израсходовать не более 112 тысяч рублей.

5. Решите неравенство

$$\frac{4|2-x|}{4-|x|} - |x-2| \leq 0.$$

6. При каких значениях параметра  $a$  неравенство

$$\log_{ax^2+2a^2x+1} \sqrt{16 \arcsin^{-4}(x+3a)} \geq \left| \log_{ax^2+2a^2x+1} \sqrt{16 \arcsin^{-4}(x+3a)} \right|$$

не имеет решений на отрезке  $[-5; 6]$ ?

Вариант 13

(отделение экономики экономического факультета)

1. Решите неравенство

$$\log_{|x|-2} |x-3| \leq 0.$$

2. Решите неравенство

$$4 \sqrt{\frac{2^x-1}{2^x}} + \sqrt{14} \leq 14 \sqrt{\frac{2^{x-2}}{2^x-1}}.$$

3. Первая и вторая бригады, работая вместе, могут выполнить задание не более чем за 9 дней. Вторая и третья бригады, работая вместе, могут выполнить то же задание не менее чем за 18 дней. Первая и третья бригады, работая вместе, могут выполнить то же задание ровно за 12 дней. Известно, что третья бригада всегда работает с максимальной возможной для нее производительностью труда. За сколько дней может выполнить задание одна вторая бригада?

4. В трапеции  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) диагонали  $AC = a$ ,  $BD = \frac{7}{5}a$ . Найдите площадь трапеции, если  $\angle CAB = 2\angle DBA$ .

5. Решите уравнение

$$x + \frac{1}{6} \arccos(\cos 15x + 2 \cos 4x \sin 2x) = \frac{\pi}{12}.$$

6. В треугольной пирамиде  $SABC$  угол  $\angle ACB = \alpha$ , ребро  $SC = d$  является диаметром сферы, пересекающей ребра  $SA$  и  $SB$  в их серединах. Найдите объем пирамиды, если  $\angle SAC = \angle SBC = \beta$ , причем  $\beta < \frac{\pi}{4}$ .

7. Найдите все значения  $b$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} b \sin|2z| + \log_5 \left( x^{\sqrt[8]{2-5x^8}} \right) + b^2 = 0, \\ \left( (y^2-1) \cos^2 z - y \cdot \sin 2z + 1 \right) \times \\ \times \left( 1 + \sqrt{\pi+2z} + \sqrt{\pi-2z} \right) = 0 \end{cases}$$

разрешима и имеет не более двух решений; определите эти решения.

Вариант 14

(факультет психологии)

1. Решите неравенство

$$\frac{5x-3}{\sqrt{7x-4}} < 1.$$

2. Решите уравнение

$$x^{\log_7 4} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0.$$

3. Решите систему

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{4}, \\ \cos x \sin y = \frac{\sqrt{6}}{4}, \\ \cos x \geq 0. \end{cases}$$

4. Найдите все значения параметра  $p$ , при каждом из которых множество значений функции  $f(x) = \frac{3x+p}{x^2+5x+7}$  содержит полуинтервал  $(-1; 3]$ . Определите при каждом таком  $p$  множество значений функции  $f(x)$ .

5. Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Длины противоположных сторон  $AB$  и  $CD$  равны, соответственно, 9 и 4,  $AC = 7$ ,  $BD = 8$ . Найдите площадь четырехугольника  $ABCD$ .

6. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых ровно пять различных наборов натуральных чисел  $(x, y, z)$  удовлетворяют системе условий

$$\begin{cases} 12x^2 - 4x - 2xy + 3y - 9 = 0, \\ a \cdot yz + a \cdot xz + a \cdot xy > xyz. \end{cases}$$

Вариант 15

(отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета)

1. Расстояние в 160 км между пунктами  $A$  и  $B$  автомобиль проехал со средней скоростью 40 км/ч. Часть пути по ровной дороге он ехал со скоростью 80 км/ч, а другую часть, по бездорожью, — со скоростью 20 км/ч. Какую часть пути между  $A$  и  $B$  занимает ровная дорога?

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{x^2+8x-9} \geq \frac{1}{3x^2-5x+2}.$$

3. В треугольнике  $ABC$  медиана  $AK$  пересекает медиану  $BD$  в точке  $L$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если площадь четырехугольника  $KCDL$  равна 5.

4. Решите уравнение

$$\log_{(1-2\cos z)} (\cos 2z + \sin z + 2) = 0.$$

5. Найдите все решения системы

уравнений

$$\begin{cases} \cos^3(z+4y+\pi/4) + \\ + 1/\sin(2z+2y-\pi/4) = 0, \\ \cos(3z+\pi/4) + \\ + 1/\sin^3(4z-2y-\pi/4) = 0. \end{cases}$$

Вариант 16

(Институт стран Азии и Африки)

1. Решите уравнение

$$\lg^2(2x-3)^2 + 4^{\left(3\log_4 \sqrt[3]{2}\right) \left(\frac{\log_4(3-2x)}{\log_4 10}\right)} = 0.$$

2. Упростив выражение

$$A = 1 - y + \frac{\sqrt[3]{(y-3)\sqrt{xy} + (3-y^{-1})\sqrt{xy^{-1}}}}{\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{y^{-2}}} y^{\frac{5}{6}} x^{\frac{1}{6}},$$

где  $x > 0$ ,  $y > 0$  — действительные числа, выясните, что больше:  $A$  или  $\frac{5}{7}$ .

3. Решите уравнение

$$\sin 9x = 6 \sin 5x \cos 2x - \sin x.$$

4. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом  $\frac{\pi}{8}$ . Каждое боковое ребро равно  $\sqrt{6}$  и наклонено к плоскости основания под углом  $\frac{5\pi}{13}$ . Определите объем пирамиды.

5. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-5}-3}{|x+4|-7} \geq 1.$$

6. Окружности радиусов 2 и 6 с центрами, соответственно, в точках  $O_1$  и  $O_2$  касаются внешним образом в точке  $C$ . К окружностям проведены общая внешняя касательная и общая внутренняя касательная; эти касательные пересекаются в точке  $D$ . Найдите радиус вписанной в треугольник  $O_1O_2D$  окружности.

7. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2x^2 - \log_2(y\sqrt{2}+6)^3 - 16 \geq y^4 - 3x - y^2, \\ x^2 - y^2 \leq \log_2(y\sqrt{2}+6) + x + 1. \end{cases}$$

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. На край доски, лежащей на гладкой горизонтальной плоскости, кладут небольшую шайбу, масса которой в  $k$

раз меньше массы доски. Шайбе щелчком сообщают скорость, направленную к центру доски. Если эта скорость больше  $u$ , то шайба соскальзывает с доски. С какой скоростью будет двигаться доска, если скорость шайбы будет в  $n$  раз больше  $u$  ( $n > 1$ )?

2. Неоднородная балка (рис. 1) подвешена к потолку на трех одинаковых

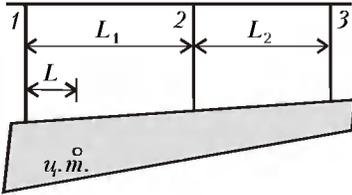


Рис. 1

в недеформированном состоянии легких резиновых шнурах так, что шнуры вертикальны и лежат в одной плоскости. Расстояния между шнурами  $L_1$  и  $L_2$ , а между первым шнуром и центром тяжести балки (по горизонтали)  $L$ . Точки крепления шнуров к балке лежат на одной прямой. Найдите отношение сил натяжения первого и второго шнуров, считая деформации шнуров малыми.

3. На внутренней поверхности тонкого обода колеса массой  $M$  и радиусом  $R$  лежит груз малых размеров массой  $m$ . Коэффициент трения груза об обод  $\mu \ll 1$ . Колесо может свободно вращаться вокруг своей оси, расположенной горизонтально. Пренебрегая массой спиц и втулки колеса, найдите максимальную скорость груза, при которой колебания колеса еще могут быть гармоническими.

4. В горизонтально расположенный цилиндр с поршнем, касающимся дна, через кран в дне накачали гелий. В результате поршень несколько передвинулся. Закрыв кран, цилиндр медленно нагрели, а затем начали охлаждать. Когда от гелия отвели в  $n = 4$  раза меньшее количество теплоты, чем было им получено при нагревании, поршень начал двигаться. Найдите отношение сил трения и атмосферного давления, действующих на поршень, если отношение максимального объема гелия к его объему перед нагреванием  $k = 5$ .

5. Между поршнем и дном гладкого расположенного горизонтально цилиндра находится кусочек льда массой  $m$  и насыщенный водяной пар. В некоторый момент температура льда стала равной  $0^\circ\text{C}$ , а объем пара стал равным  $V$ . Пренебрегая объемом образующейся воды и теплообменом пара и льда с другими телами, найдите перемещение поршня по прошествии достаточно большого промежутка времени. Пло-

щадь поперечного сечения цилиндра  $S$ , молярные теплоты плавления льда и парообразования воды  $\lambda$  и  $L$ , молярные теплоемкость и масса воды  $C$  и  $M$ . Опыт проводился при нормальном атмосферном давлении.

6. В плоский воздушный конденсатор параллельно его обкладкам вставили тонкую проводящую пластину, размеры которой совпадают с размерами обкладок. Обкладки соединены проводником. Пластина имеет заряд  $q$ . Какую минимальную работу нужно совершить против сил электрического поля, чтобы расстояние между одной из обкладок и пластиной изменить от начального  $a$  до конечного  $b$ , если площадь пластины  $S$ , а расстояние между обкладками конденсатора равно  $d$  и много меньше линейных размеров пластин?

7. К гальваническому элементу последовательно подключены два резистора. Сопротивление первого резистора в  $n$  раз меньше внутреннего сопротивления элемента, а сопротивление второго выбрано таким, что на нем выделяется максимально возможное количество теплоты. Во сколько раз изменится скорость растворения отрицательного электрода элемента, если эти резисторы подключить к нему, соединив их параллельно?

8. Тонкий стержень длиной  $L$  и массой  $m$  подвесили за концы на двух одинаковых легких нерастяжимых нитях в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  так, что его ось горизонтальна, а нити вертикальны. Затем через стержень пропустили заряд  $q$  столь быстро, что стержень практически не сместился из положения равновесия. Зная, что максимальная высота поднятия стержня много меньше длины нитей  $H$ , найдите максимальную вертикальную составляющую его скорости после прохождения заряда.

9. Чтобы лучше рассмотреть мелкие детали рисунка, человек берет лупу. Поднося ее к рисунку, он видит на нем резкое изображение нити лампочки, висящей над столом под потолком комнаты, когда расстояние между лупой и рисунком равно  $b = 5$  см. Поднося лупу к глазу, человек рассматривает рисунок. Найдите увеличение изображения рисунка, если оно находится на расстоянии наилучшего зрения  $D = 25$  см.

10. Угловое расстояние между максимумами первого и второго порядков синего света с длиной волны  $\lambda_c = 0,44$  мкм, наблюдаемыми при освещении дифракционной решетки параллельным пучком света от ртутной

лампы, падающим под углом  $\alpha = 50^\circ$ , оказалось равным  $\Delta\varphi = 5^\circ$ . При этом в спектре третьего порядка наблюдались две близкие желтые линии, угловое расстояние между максимумами которых было равно  $\delta\varphi = 4,3'$ . Найдите разность длин волн  $\delta\lambda_{\text{ж}}$  желтого дублета ртути.

### Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. В кабине лифта высотой  $H = 2,5$  м, движущейся с ускорением, равным  $a = 0,8$  м/с<sup>2</sup> и направленным вниз, с высоты  $h = 0,5$  м от пола вертикально вверх бросают маленький шарик. С какой начальной скоростью  $v_0$  относительно лифта брошен шарик, если после броска он поднялся точно до потолка кабины?

2. К грузику массой  $M = 300$  г

прикреплена пружина, другой конец которой привязан к нити, перекинутой через блок (рис. 2). На втором конце нити подвешен грузик массой  $m = 200$  г. Когда блок заторможен, длина пружины  $l = 15$  см. Какую длину  $l_1$  будет иметь пружина, если блок освободить? Считать, что колебания в системе не возникнут, т.е. грузики будут двигаться с постоянным ускорением. Длина недеформированной пружины  $l_0 = 10$  см. Массой пружины, нити и блока, а также трением в блоке пренебречь.

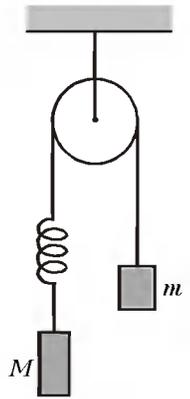


Рис. 2

3. Металлический стержень, изогнутый под углом  $\varphi = 45^\circ$ , как показано на рисунке 3, вращается с угловой скоростью  $\omega = 6$  с<sup>-1</sup> вокруг вертикальной оси  $OO'$ . К концу стержня прикреплен груз массой  $m = 0,1$  кг на расстоянии  $l = 0,1$  м от точки  $O$ . Определите модуль  $F$  силы, с которой стержень действует на груз.

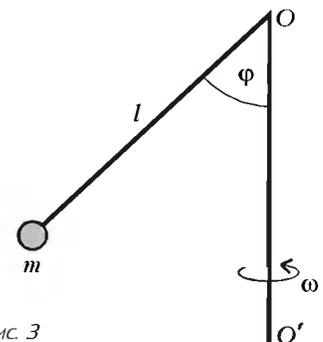


Рис. 3

Ускорение свободного падения  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ .

4. Какую минимальную работу  $A$  нужно совершить, чтобы с высоты  $h = 2 \text{ м}$  перебросить через стенку высотой  $H = 4 \text{ м}$  камень массой  $m = 0,2 \text{ кг}$ ? Стенка расположена на расстоянии  $L = 4 \text{ м}$  от места бросания. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

5. С идеальным одноатомным газом проводят процесс 1–2, показанный на рисунке 4. Во сколько раз ( $\alpha$ ) при этом изменяется средняя кинетическая энергия одной молекулы?

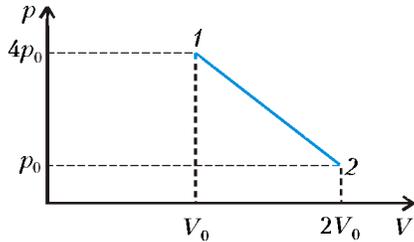


Рис. 4

6. С одним молем идеального газа проводят циклический процесс, состоящий из двух изохор и двух изобар (рис.5). Найдите работу  $A$ , совершаемую газом за цикл, если известно, что

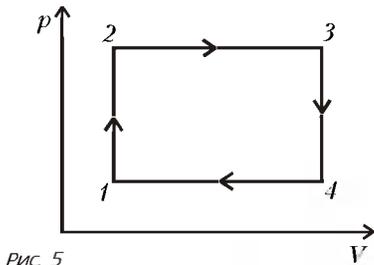


Рис. 5

температура в состоянии 1 равна  $T_1 = 300 \text{ К}$ , а в состояниях 2 и 4 температура одна и та же и равна  $T = 320 \text{ К}$ . Универсальная газовая постоянная  $R = 8,3 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ .

7. Батарея с ЭДС  $\mathcal{E} = 2 \text{ В}$  и внутренним сопротивлением  $r = 0,1 \text{ Ом}$  присоединена к цепи, изображенной на рисунке 6. Сопротивление каждого из резисторов  $R = 1 \text{ Ом}$ . Найдите напряжение  $U_{MN}$  на клеммах батареи. Сопротивлением всех соединительных проводов пренебречь.

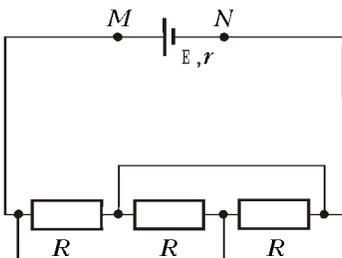


Рис. 6

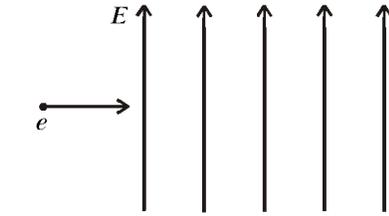


Рис. 7

8. Электрон влетает в область пространства с однородным электрическим полем напряженностью  $E = 6 \cdot 10^4 \text{ В/м}$  перпендикулярно силовым линиям (рис.7). Определите величину и направление вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$ , которое надо создать в этой области пространства для того, чтобы электрон пролетел ее, не отклоняясь от первоначального направления. Кинетическая энергия электрона  $W_k = 1,6 \cdot 10^{-16} \text{ Дж}$ , масса электрона  $m = 9 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ . Силой тяжести пренебречь.

9. Световой луч падает на поверхность стеклянного шара. Угол падения  $\alpha = 45^\circ$ , показатель преломления стекла  $n = 1,41$ . Найдите угол  $\gamma$  между падающим лучом и лучом, вышедшим из шара.

10. Точечный источник света расположен на главной оптической оси тонкой собирающей линзы. По другую сторону линзы находится экран, перпендикулярный ее главной оптической оси. Найдите радиус  $r$  светового пятна на экране, если известно, что расстояние от источника до линзы  $d = 30 \text{ см}$ , расстояние от линзы до экрана  $b = 80 \text{ см}$ , фокусное расстояние линзы  $F = 20 \text{ см}$ , а ее радиус  $R = 3 \text{ см}$ .

*Химический факультет*

1. С наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha = 45^\circ$  с горизонтом, с высоты  $h_1 = 2 \text{ м}$  соскальзывает небольшая шайба (рис.8). В конце спуска у

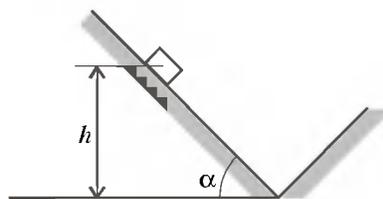


Рис. 8

основания наклонной плоскости шайба испытывает абсолютно упругое соударение со стенкой и поднимается вверх по наклонной плоскости на высоту  $h_2 = 1,2 \text{ м}$ . Найдите коэффициент трения между шайбой и наклонной плоскостью.

2. Два шарика одинаковых размеров – один деревянный, а другой из

алюминия – связаны легкой и достаточно длинной нитью. Шарик опускают в водоем, и через некоторое время оказывается, что их погружение происходит с постоянной скоростью. Найдите натяжение нити при этом движении. Массы шариков  $m_1 = 100 \text{ г}$  и  $m_2 = 300 \text{ г}$ . Принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

3. По поверхности озера бегут волны со скоростью  $u = 2 \text{ м/с}$ . Моторная лодка движется навстречу волнам со скоростью  $v = 5 \text{ м/с}$ . С какой частотой волны бьются о нос лодки, если поплавок на поверхности воды колеблется с частотой  $\nu_0 = 0,5 \text{ Гц}$ ?

4. Мяч массой  $m = 0,2 \text{ кг}$  отпустили без начальной скорости с высоты  $H = 6 \text{ м}$  над полом. Найдите количество теплоты, выделившееся при первом ударе мяча о пол, если промежуток времени между первым и вторым ударами о пол составляет  $\Delta t = 2 \text{ с}$ . Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

5. Два баллона с кислородом соединены трубкой с краном. Массы газа в обоих баллонах одинаковы. При закрытом кране давление в одном баллоне  $p_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$ , а в другом  $p_2 = 3 \cdot 10^5 \text{ Па}$ . Какое давление установится в баллонах, если кран открыть? Температуру в баллонах считать постоянной и одинаковой, а газ – идеальным.

6. Батарею параллельно соединенных конденсаторов с емкостями  $C_1 = 1 \text{ мкФ}$  и  $C_2 = 2 \text{ мкФ}$  сначала подсоединили к источнику с ЭДС, равной  $\mathcal{E} = 6 \text{ В}$  (ключ  $K$  в положении 1 на рисунке 9). Затем ключ переводят в положение 2, соединяя батарею с конденсатором емкостью  $C_3 = 3 \text{ мкФ}$ . Найдите заряд, который получит конденсатор емкостью  $C_3$ .

7. Концентрация электронов проводимости в чистом германии при комнатной температуре  $n = 3 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$ . Найдите, какова доля ионизированных атомов германия ( $n^+$ ). Считать, что каждый ионизированный атом теряет по одному электрону. Плотность германия  $\rho = 5400 \text{ кг/м}^3$ , молярная масса  $M = 0,073 \text{ кг/моль}$ . Число Авогадро принять равным  $N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ .

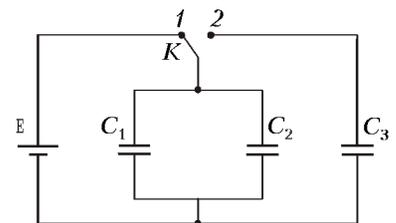


Рис. 9

8. Диод подключен к источнику синусоидального напряжения последовательно с резистором, как показано на рисунке 10. Действующее значение

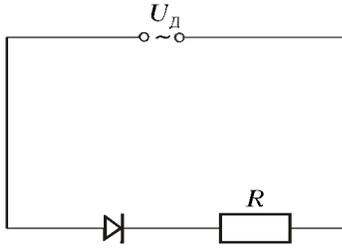


Рис. 10

напряжения источника  $U_d = 20$  В. Сопротивление резистора  $R = 12$  Ом. Найдите величину сопротивления диода при прямом токе, если средняя

мощность, выделяющаяся в цепи, равна  $P = 10$  Вт. Обратным током диода пренебречь.

9. В пространстве с однородными электрическим и магнитным полями движется протон. Линии магнитной индукции и линии напряженности этих полей параллельны. В тот момент, когда скорость протона перпендикулярна линиям электрического и магнитного полей, его ускорение, вызванное действием этих полей, равно  $a = 10^{12}$  м/с<sup>2</sup>. Найдите напряженность электрического поля  $E$ , если скорость протона  $v = 60$  км/с, индукция магнитного поля  $B = 0,1$  Тл. Отношение заряда протона к его массе принять равным  $q/m = 10^8$  Кл/кг.

10. Имеется линза с оптической силой  $D = +2$  дптр. Стержень располагают перпендикулярно главной оптической оси поочередно в двух местах на разных расстояниях от линзы (по одну сторону от нее). В обоих случаях линейные размеры оптического изображения оказываются в  $\Gamma = 10$  раз больше длины стержня. Найдите расстояние между этими положениями стержня.

Публикацию подготовили  
А.Бородин, В.Галкин, Н.Григоренко,  
Е.Григорьев, И.Ломов, Г.Медведев,  
В.Погожев, А.Разгулин, И.Сергеев,  
В.Серов, А.Склякшин, В.Сушко,  
В.Ушаков, М.Федотов, С.Чесноков,  
Б.Щедрин

## Две задачи Архимеда

(Начало см. на с.41)

друг друга внутренним образом. Как видно из доказательства, утверждение остается в силе, если эти окружности будут касаться друг друга внешним образом; более того, оно верно и при замене одной из них на прямую (предельный случай окружности), касающаяся другой окружности. Если же исходные окружности или прямая и окружность не касаются друг друга, а пересекаются, то картина существенно изменится.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда окружность перпендикулярна прямой. Впишем в полукруг, построенный на диаметре  $AB = 2R$ , окружность  $\Gamma$  максимального радиуса (она касается диаметра в точке  $D$ ), а затем по обе стороны от нее впишем две последовательности  $\{\gamma_n\}$  и  $\{\tilde{\gamma}_n\}$  попарно касающихся окружностей (рис.10). Вычислим радиусы  $r_n$  окружностей  $\gamma_n$  и  $\tilde{\gamma}_n$ .

Для этого произведем инверсию с центром  $A$  и радиусом  $2R$ . В результате полукруговость, построенная на  $AB$ , перейдет в луч  $BL$ , перпендикулярный прямой  $AB$ ; вписанные окружности перейдут в окружности  $\Gamma'$ ,  $\gamma'_n$ ,  $\tilde{\gamma}'_n$ , попарно касающиеся друг друга и сторон  $\angle LBD'$ . Так как  $D'$  — точка, инверсная точке  $D$ , то радиус окружности  $\Gamma'$  равен  $2R$  (проверьте), радиусы окружностей  $\gamma'_n$  возрастают с увеличением  $n$ , а  $\tilde{\gamma}'_n$  — убывают. Отметим интересное свойство окружностей, вписанных в полукруг: точки их

попарного касания расположены на дуге окружности радиуса  $R\sqrt{2}$ , проходящей через точки  $A$  и  $B$ , причем окружности  $\Gamma$ ,  $\gamma_n$ ,  $\tilde{\gamma}_n$  перпендикулярны этой дуге.

### Упражнения

4. Докажите этой свойство.

5. Покажите, что радиусы любых двух соседних окружностей, вписанных в угол  $LBD'$ , относятся как  $(\sqrt{2} + 1) : (\sqrt{2} - 1)$ .

Для последовательности  $\gamma'_n$  расширяющихся окружностей, следующих за  $\Gamma'$ , легко найти радиус  $n$ -й окружности  $R_n = 2R(\sqrt{2} + 1)^{2n}$ . Ясно, что на таком расстоянии от  $B$  расположена точка  $C'_n$  (на рисунке она не изображена) касания  $\gamma'_n$  с прямой  $AB$ , следовательно, от центра инверсии она находится на расстоянии  $d'_n = 2R(1 + (\sqrt{2} + 1)^{2n})$ . Обозначим через  $d_n$  расстояние от центра инверсии до точки  $C_n$  касания окружности  $\gamma_n$  диаметра  $AB$ . Очевидно,  $d_n = 2R / (1 + (\sqrt{2} + 1)^{2n})$ . Из гомотетии окружностей  $\gamma_n$  и  $\gamma'_n$  имеем  $R_n : r_n = d'_n : d_n = (1 + (\sqrt{2} + 1)^{2n})^2$ . Поэтому

$$r_n = \frac{(\sqrt{2} + 1)^{2n} \cdot 2R}{(1 + (\sqrt{2} + 1)^{2n})^2} = \frac{2R}{((\sqrt{2} - 1)^n + (\sqrt{2} + 1)^n)^2}.$$

Ответ получен.

Найдем отношение

$$R : r_n = \left( \frac{(\sqrt{2} + 1)^n + (\sqrt{2} - 1)^n}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n}{2} + 1.$$

Числа  $b_n = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n}{2}$  имеют древнюю историю. Они возникли еще у древнегреческого математика Теона Смирнского (II в.) в процессе приближения числа  $\sqrt{2}$  рациональными. Он рассмотрел две последовательности  $\{\beta_k\}$  и  $\{\alpha_k\}$ :

$$1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, \dots$$

$$1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, \dots$$

удовлетворяющие следующим рекуррентным соотношениям:

$$\alpha_1 = \beta_1 = 1, \alpha_{k+1} = \alpha_k + \beta_k,$$

$$\beta_{k+1} = 2\alpha_k + \beta_k,$$

и показал, что отношения  $\beta_k/\alpha_k$  образуют последовательные приближения числа  $\sqrt{2}$ . Встретившиеся у нас числа  $b_n$  равны  $\beta_{2n}$ .

Заметим, что числа, стоящие на четных местах последовательности  $\{\alpha_n\}$ , имеют вид

$$a_n = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n}{2},$$

а пары  $(b_n, a_n)$  задают общее решение во множестве натуральных чисел уравнения Пелля  $x^2 - 2y^2 = 1$ , у которого своя интересная история.



высоты, поэтому площадь треугольника  $APN$  в  $k$  раз больше площади треугольника  $NQD$ . Треугольники  $NRD$  и  $NQD$  имеют общую сторону  $ND$  и одну из сторон, лежащую на общей прямой  $DR$ , поэтому площадь треугольника  $NRD$  также в  $k$  раз больше площади треугольника  $NQD$ . Отсюда следует равенство треугольников  $APN$  и  $NRD$ .

5. Обозначим искомые числа  $\frac{x}{y}$  и  $z$ , где  $x, y, z$  — целые,

$y \neq 0$ . По условию  $\frac{x}{y} + z = \frac{x}{y} \cdot z$ , откуда  $x + yz = xz$ ,  $z =$

$= \frac{x}{x-y}$ . Одно из возможных решений получим, если поло-

жим  $y = x - 1$ .

Итак, пусть  $x \neq 1$  — любое целое число. Условию задачи, например, удовлетворяют пары чисел  $\frac{x}{x-1}, x$ .

### Малая теорема Ферма

1.  $a^3 + 5a = (a^3 - a) + 6a$ .

2.  $x \equiv 71 \pmod{101}$ .

3.  $x \equiv 0 \pmod{6}$ .

6. а) В произведении четырех последовательных целых чисел обязательно есть множитель, кратный 4. Кроме него, есть еще один четный множитель,

в)  $a^5 - 5a^3 + 4a = a(a^2 - 1)(a^2 - 4) = (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$ .

8. *Указание.* Если числа  $m, n$  не кратны 5, то  $(m^4 - 1) - (n^4 - 1)$  кратно 5 вследствие малой теоремы Ферма.

9.  $k^4 - 1 = (k-1)(k+1)(k^2 + 1)$ . Все сомножители четны; при этом одно из чисел  $k-1$  и  $k+1$  кратно 4. Делимость  $k^2 - 1$  на 3 и делимость  $k^4 - 1$  на 5 следуют из малой теоремы Ферма.

10. а) *Первый способ.* Поскольку  $2222 = 7 \cdot 317 + 3$  и  $5555 = 7 \cdot 793 + 4$ , имеем:  $2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 3^{5555} + 4^{2222} \equiv 3^{6 \cdot 925 + 5} + 4^{6 \cdot 370 + 2} \equiv (3^6)^{925} \cdot 3^5 + (4^6)^{370} \cdot 4^2 \equiv 1^{925} \cdot 243 + 1^{370} \cdot 16 \equiv 259 \equiv 7 \cdot 37 \equiv 0 \pmod{7}$ .

*Второй способ.* Число  $(2222^5)^{1111} + (5555^2)^{1111}$  кратно числу  $2222^5 + 5555^2 \equiv 3^5 + 4^2 \equiv 0 \pmod{7}$ .

11.  $11^{10} - 1 = (11-1)(11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1)$ .

12. а)  $a = 10k \pm 3$ , где  $k$  — целое число.

13.  $(-1)^n - (-1) = 2$ .

14. *Указание.* Поскольку число  $2^n - 2$  является одним из значений многочлена  $a^n - a$ , наибольший общий делитель чисел вида  $a^n - a$  не превосходит  $2^n - 2$  (и является делителем числа  $2^n - 2$ ). Для любого целого числа  $a$  существует хотя бы одно число в пределах от 1 до  $2^n - 2$ , сравнимое с  $a$  по модулю  $2^n - 2$ .

15. Да, существует.

18. *Ответ:* 15. *Решение.*  $3^{2000} = 3^{47 \cdot 42 + 26} = (3^{47})^{42} \cdot 3^{26} \equiv 3^{26} = 9^{13} = 9 \cdot 9^{12} = 9 \cdot 81^6 \equiv 9 \cdot (-5)^6 = 9 \cdot 125^2 \equiv 9 \cdot (-4)^2 = 9 \cdot 16 = 144 \equiv 15 \pmod{43}$ .

19.  $a^{16} - 1 = (a^8 - 1)(a^8 + 1)$ .

20.  $56786730 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 61$ .

21.  $5^{p^2} + 1 = (5^p)^p + 1 \equiv 5^p + 1 \equiv 5 + 1 = 6 \pmod{p}$ . *Ответ:*  $p = 2$  или  $3$ .

24. Обозначим первую цифру буквой  $a$ , а число, получаемое из исходного шестизначного числа вычеркиванием первой цифры, обозначим буквой  $b$ . Исходное число равно  $100000a + b$ , а число, полученное из него перестановкой цифр, равно  $10b + a$ . Осталось заметить, что

$$(100000a + b) \cdot 10 = 10^6 a + 10b = (10^6 - 1)a + 10b + a \equiv 10b + a \pmod{7}.$$

25.  $\frac{11\dots 1}{p-1} = \frac{99\dots 9}{p-1} / 9 = (10^{p-1} - 1) / 9$ . Число  $10^{p-1} - 1$  кратно  $p$  по малой теореме Ферма.

26. При  $p = 3$  воспользуйтесь признаком делимости на 3. При  $p = 2$  или 5 утверждение следует из того, что рассматриваемое число оканчивается той же самой цифрой, что и число 123456789.

Пусть  $p \neq 2, 3, 5$ . Докажем, что разность

$$\underbrace{aa\dots a}_{p-1} \underbrace{00\dots 0}_{9-a} - \underbrace{a00\dots 0}_{9-a},$$

где  $1 \leq a \leq 9$ , кратна  $p$ . В силу предыдущего упражнения, число  $\underbrace{aa\dots a}_{p-1}$  кратно  $p$ . Поэтому достаточно заметить, что число

$$\underbrace{a00\dots 0}_{(9-a)p} - \underbrace{a00\dots 0}_{9-a} = a \cdot 10^{(9-a)p} - a \cdot 10^{9-a} = a \left( (10^{9-a})^p - 10^{9-a} \right)$$

кратно  $p$  по малой теореме Ферма.

28. а) Поскольку  $\varphi(9) = 6$ , для любого не кратного 3 числа  $k$ , по теореме Эйлера,  $k^6 - 1$  кратно 9. Далее,  $k^6 - 1 = (k^3 - 1)(k^3 + 1)$ , причем числа  $k^3 - 1$  и  $k^3 + 1$  отличаются на 2 и потому не могут одновременно быть кратны 3.

29. а) В силу предыдущего упражнения, куб не кратного трем числа сравним с 1 или  $-1$  по модулю 9. Сумма трех чисел, каждое из которых равно 1 или  $-1$ , не может быть кратна 9.

30. *Указание.* Поскольку  $7^4 \equiv 1 \pmod{10}$ , последняя цифра числа  $7^k$  определяется остатком от деления числа  $k$  на 4. Далее,

$$7^{2m+1} = (8-1)^{2m+1} \equiv (-1)^{2m+1} = -1 \pmod{4}.$$

31. Применим теорему Эйлера:

$$7^{400} \equiv 1 \pmod{1000}.$$

Следовательно,

$$7^{10000} = (7^{400})^{25} \equiv 1^{25} = 1 \pmod{1000}.$$

Поскольку произведение  $7 \cdot 7^{9999} = 7^{10000}$  оканчивается цифрами 001, то последняя цифра числа  $7^{9999}$  равна 3. Значит, из разряда единиц в разряд десятков при умножении  $7^{9999}$  на 7 переносится 2. Поэтому предпоследняя цифра числа  $7^{9999}$  равна 4, и из разряда десятков в разряд сотен переносится 3. Теперь ясно, что в разряде сотен числа  $7^{9999}$  находится цифра 1. *Ответ:*  $7^{9999}$  оканчивается на 143.

33. Поскольку  $\varphi(n) \leq n$ , число  $n!$  кратно  $\varphi(n)$ . Поэтому  $2^{n!} - 1$  кратно числу  $2^{\varphi(n)} - 1$ , которое кратно  $n$  по теореме Эйлера.

34. Если  $n$  — нечетное число, то можно сгруппировать первое слагаемое с последним, второе с предпоследним и так далее:

$$(1^n + (n-1)^n) + (2^n + (n-2)^n) + \dots + \left( \left( \frac{n-1}{2} \right)^n + \left( \frac{n+1}{2} \right)^n \right).$$

Поскольку  $k^n + (n-k)^n \equiv k^n + (-k)^n = 0 \pmod{n}$ , при нечетном  $n$  рассматриваемая сумма кратна  $n$ .

Если же  $n$  четно, пусть  $2^s$  — наивысшая степень двойки, на которую  $n$  делится нацело. Тогда для любого четного числа  $k$ , очевидно,  $k^n \equiv 0 \pmod{2^s}$ ; а для любого нечетного числа  $k$ , по теореме Эйлера,  $k^n = \left( k^{n/2^{s-1}} \right)^{2^{s-1}} \equiv 1 \pmod{2^s}$ . Следова-

тельно,  $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n \equiv \frac{n}{2} \not\equiv 0 \pmod{2^s}$ . А если сумма не кратна  $2^s$ , то она тем более не кратна числу  $n$ .

35. Пусть  $s = 2^a \cdot 5^b \cdot t$ , где  $a, b$  — целые неотрицательные числа,  $t$  — натуральное число, не кратное ни 2, ни 5. Существует такое натуральное число  $r$ , что  $10^r \equiv 1 \pmod{t}$ . Пусть  $n = 10^{\max(a,b)} \cdot (1 + 10^r + 10^{2r} + \dots + 10^{(s-1)r})$ .

Очевидно, сумма цифр числа  $n$  равна  $s$ . Поскольку  $10^{\max(a,b)}$  делится нацело на  $2^a \cdot 5^b$  и  $1 + 10^r + 10^{2r} + \dots + 10^{(s-1)r} \equiv s \pmod{t}$ , число  $n$  кратно  $s$ .

36.  $2^{a+1} \cdot 5^{b-1}$

37. а)  $\varphi(pq) = pq - q - p + 1 = (p-1)(q-1)$ .

38. а)  $x = 3$ ; б)  $x = 3, y = 2$ . 40.  $\varphi(n)/2$ .

41. а) Пусть простое число  $p$  входит в разложения чисел  $m$  и  $n$  на простые множители, соответственно, в  $s$ -й и  $t$ -й степенях. Для определенности пусть  $s \leq t$ . Если  $s > 0$ , то число  $p$  входит в разложения на простые множители чисел  $\text{НОК}(m, n)$  и  $\text{НОД}(m, n)$  в  $t$ -й и  $s$ -й степенях. Значит, если  $s > 0$ , то благодаря числу  $p$  при подсчете значений функции Эйлера  $\varphi(m)$ ,  $\varphi(n)$ ,  $\varphi(\text{НОК}(m, n))$  и  $\varphi(\text{НОД}(m, n))$  возникнут, соответственно, множители  $p^{s-1}(p-1)$ ,  $p^{t-1}(p-1)$ ,  $p^{t-1}(p-1)$  и  $p^{s-1}(p-1)$ . Если же  $s = 0$ , то  $p$  не входит в разложения на простые множители чисел  $m$  и  $\text{НОД}(m, n)$ , а в разложения чисел  $n$  и  $\text{НОК}(m, n)$  оно входит в одной и той же степени.

в) Следует из пунктов а) и б).

г) Поскольку  $\text{НОД}(m, n) > \varphi(\text{НОД}(m, n))$ , из равенства предыдущего пункта следует, что  $\varphi(m)\varphi(n) < \varphi(mn)$ .

42. а)  $x = 19, 38, 27$  или  $54$ .

б)  $x = 13, 26, 21, 42, 28$  или  $36$ .

в) Так как при  $x > 2$  число  $\varphi(x)$  четно, то четным должно быть и само число  $x$ . Поскольку каждое второе натуральное число четно,  $\varphi(x) \leq x/2$ . Следовательно,  $12 = x - \varphi(x) \geq x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ , откуда  $x \leq 24$ . *Ответ:*  $x = 18, 20$  или  $22$ .

г) *Ответ:*  $x$  – простое число. *Указание.* Если  $p$  – простое число,  $m$  – натуральное число, то  $\varphi(p^{2m}) = p^{2m} - p^{2m-1} \leq p^{2m} - p^m$ , причем неравенство обращается в равенство лишь при  $m = 1$ . Далее, для любых отличных от 1 натуральных чисел  $x$  и  $y$  докажите неравенство

$$(x^2 - x)(y^2 - y) < (xy)^2 - xy.$$

Теперь легко доказать, что  $\varphi(x^2) < x^2 - x$  для любого составного числа  $x$ .

д)  $x = 2^m$ , где  $m$  – натуральное число.

е) Число  $x$  кратно 3. Поэтому его можно представить в виде  $x = 3^m y$ , где  $m$  – натуральное число, а  $y$  не кратно 3. Поскольку  $\varphi(3^m y) = \varphi(3^m)\varphi(y) = 2 \cdot 3^{m-1}\varphi(y)$ , то уравнение

$\varphi(x) = x/3$  принимает вид  $2\varphi(y) = y$ . Последнему уравнению удовлетворяют, как мы знаем из предыдущего пункта этого упражнения, только степени двойки. *Ответ:*  $x = 2^k \cdot 3^m$ , где  $k, m$  – натуральные числа.

ж) *Указание.* Если бы в разложении числа  $x$  на простые множители содержалось более одного нечетного простого числа, то степень двойки в левой части равенства была бы выше, чем в правой. Если  $x = 2^k p^m$ , где  $k, m$  – натуральные числа,  $p$  – нечетное простое число, то  $\varphi(x) = 2^{k-1}(p-1)p^{m-1}$ , и уравнение  $\varphi(x) = x/n$  можно записать в виде  $p-1 = 2p/n$ .

*Ответ:* решений нет.

з) В силу пункта в) предыдущего упражнения,  $\varphi(nx) \geq \varphi(n)\varphi(x)$ . Следовательно,  $\varphi(n) \leq 1$ , т.е.  $n = 2$ . При  $n = 2$  в качестве  $x$  можно взять любое нечетное число.

43. в) Задачу удобно решать с конца, т.е. искать кратчайший способ получения нуля из произвольного числа  $n$  с помощью двух операций – вычитания единицы и деления пополам. Пусть  $f(n)$  – число операций в таком кратчайшем способе. Если  $n = 2k + 1$  – нечетное число, то делить его пополам нельзя, так что  $f(2k + 1) = 1 + f(2k)$ . Докажем индукцией по  $k$ , что  $f(2k) = 1 + f(k)$ . Для  $k = 1$  это ясно. Пусть утверждение доказано для всех  $k < K$ . Если из числа  $2K$  сначала вычесть единицу, то для получения нуля потребуется как минимум  $1 + f(2K - 1) = 2 + f(2K - 2) = 3 + f(K - 1)$  операций.

Если же сначала разделить  $2K$  пополам, то потребуется лишь  $1 + f(K) \leq 2 + f(K - 1)$  операций. Теперь индукцией по  $m$  легко доказать, что  $f(n) = m + a_m + a_{m-1} + \dots + a_1 + a_0$ .

а), б) В частности,  $f(100) = f(1100100_2) = 6 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 = 9$  и  $f(9907) = f(10011010110011_2) = 13 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 = 21$ .

44. б) The magic words are squeamish ossifrage.

### Калейдоскоп «Кванта»

#### Вопросы и задачи

- Поскольку оба тела движутся с одинаковыми ускорениями, расстояние между ними будет оставаться неизменным.
- Вес человека, полностью погруженного в воду, пропорционален ускорению свободного падения и разности плотностей его тела и воды. Если вода на Земле и на Луне одна и та же, то легче плавать на Луне, где ускорение свободного падения примерно в 6 раз меньше, чем на Земле.
- Да.
- По закону всемирного тяготения по мере удаления от Земли сила притяжения уменьшается от  $mg$  до нуля. Поэтому вес тела убывает от  $2mg$  у поверхности Земли до  $mg$  на бесконечности.
- Нет.
- Космонавтам приходится спать вниз головой, чтобы обеспечить привычный за время полета приток в нее крови, как в невесомости.
- Да, поскольку невесомость не сказывается на тепловом расширении жидкости.
- Нет.
- Это связано с вращением Земли вокруг собственной оси.
- У крупных массивных тел сила тяжести преобладает над силой упругости и «топит» любую выступающую часть планеты. На астероидах и ядрах комет сила тяжести ничтожна, их форма определяется процессами соударения, слияния и разрушения, поэтому может быть весьма разнообразной.
- Из-за сплюснутости Земного шара у полюсов длина пути по меридиану будет меньше, чем по экватору; поэтому второй путешественник вернется раньше.
- Со скоростью, при которой линейная скорость на экваторе сравняется с первой космической скоростью.
- Обратимся к объяснению Ричарда Фейнмана: «... притяжение Луной суши и воды уравновешено в центре < Земли – А.Л. >. Но притяжение Луной тех масс воды, которые находятся на «лунной» стороне Земли, сильнее, чем среднее притяжение всей Земли, а притяжение масс воды на обратной стороне Земли слабее среднего. Кроме того, вода в отличие от суши может течь. Истинная причина приливов определяется этими двумя факторами».
- На приливное действие Луны накладывается приливное действие Солнца.
- В те далекие времена (около двух миллиардов лет назад) затмения были не только более продолжительными, но и значительно более частыми – ведь лунная тень покрывала значительно большую площадь Земли, чем сейчас.
- Из-за неоднородности поля тяготения Солнца даже на сферически симметричной планете, не вращающейся вокруг своей оси, ускорения свободного падения в разных точках поверхности планеты оказались бы неодинаковыми.

#### Микроопыт

Нет. На вас со стороны воды действует выталкивающая сила, равная силе тяжести; значит, с вашей стороны на воду действует ваш вес.

### Две задачи Архимеда

- Пусть  $AB = 2R$ ,  $AC = 2r$ , тогда площадь арбелона  $S = \pi(R^2 - r^2 - (R-r)^2)/2 = \pi r(R-r)$ . Из равенства  $CD^2 =$

$= AC \cdot CB = 4r(R-r)$  (см. рис.3 статьи) находим, что площадь круга, построенного на диаметре  $CD$ , равна  $\pi r(R-r)$ .  
 2. Пусть  $F$  и  $G$  – середины отрезков  $AC$  и  $AB$  (см. рис.4 статьи);  $K$  – центр окружности, касающейся отрезка  $CD$  слева; ее радиус обозначим через  $x$ . Из треугольника  $GKH$  находим  $KH^2 = (R-x)^2 - (2r-R-x)^2$ , а из треугольника  $FKH$  получаем  $KH^2 = (r+x)^2 - FH^2 = (r+x)^2 - (r-x)^2$ . Отсюда  $x = r(R-r)/R$ . Полученное выражение симметрично относительно  $r$  и  $(R-r)$ , следовательно, радиус окружности, касающейся отрезка  $CD$  справа, тот же.

3. Следует учесть, что  $\text{tg}(\varphi_1 + \dots + \varphi_n) = 2n(R-r)/(R+r)$ , а поэтому  $\text{tg} \varphi_n = 2(R-r)(R+r)/((R+r)^2 + 4n(n-1)(R-r)^2)$ .

4. Биссектриса угла  $LBD'$  перпендикулярна всем окружностям  $\Gamma', \gamma'_n, \tilde{\gamma}'_n$  (см. рис.10 статьи). При инверсии она перейдет в дугу окружности, ортогональную  $\Gamma, \gamma_n, \tilde{\gamma}_n$  и проходящую через точки  $A$  и  $B$ . Центром этой окружности является точка пересечения биссектрисы и серединного перпендикуляра к  $AB$ . Этот центр находится на расстоянии  $R\sqrt{2}$  от точки  $A$ .

5. Пусть  $R_n > R_{n-1}$  – радиусы соседних окружностей. Соединим их центры. Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник, гипотенузой которого является полученный отрезок, а катеты параллельны  $BL$  и  $BD'$ . Имеем  $R_n + R_{n-1} = (R_n - R_{n-1}) \cdot \sqrt{2}$ , откуда  $R_n : R_{n-1} = (\sqrt{2} + 1) : (\sqrt{2} - 1)$ .

**Движение по окружности**

- $T = \rho v^2 \pi d^2 / 4$ , где  $\rho$  – плотность воды.
- $\omega = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2g \cos \alpha}{l}}$       3.  $L \approx 2\pi m v_0 / (eB)$ .
- $\vec{V} = \frac{[\vec{E}, \vec{B}]}{B^2} + v_{\text{ол}}$ .
- $\tau = \frac{\sqrt{R}}{a_i} (\mu^2 g^2 - 4a_i^2)^{1/4} \approx 27$  с, где  $a_i = 2$  м/с<sup>2</sup>.
- $T = 3\sqrt{(QE)^2 + (mg)^2} - 2QE$ .
- $\mu = \frac{(m_1 - m_2)(3 - 2\cos \alpha) \sin \alpha}{M + (m_1 + m_2)(3 - 2\cos \alpha) \cos \alpha} \approx \frac{m_1 - m_2}{M} \alpha = 4,4 \cdot 10^{-3}$ , где  $\alpha = 10^\circ$ .

**Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова**

**МАТЕМАТИКА**

**Вариант 1**

- $\sqrt{2}; \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$       2.  $1/3$ .
- [3; 5]. *Указание* Условие задачи равносильно тому, что сумма данных выражений неположительна, т.е. что  $|y| \leq |y-15| - 15$ , где  $y = x^2 - 8x + 15$ .
24. *Указание.* Треугольники  $ABC$  и  $ADE$  подобны, так как около четырехугольника  $ACED$  можно описать окружность ( $\angle CED = 180^\circ - (\angle ECD + \angle EDC) = 180^\circ - (\angle BAC + \angle BAD) = 180^\circ - \angle CAD$ ).
- $a \in (-\infty; -3) \cup \{-1\} \cup [3; +\infty)$ . *Указание.* Неравенство приводится к виду

$$f(x) = \frac{(y-2a-2)(y+a-3)}{(a+3)(y+3a+3)} \leq 0, \text{ где } y = 2^x.$$

Если  $a+3 < 0$ , то неравенство справедливо при всех  $y > y_0$ , где  $y_0$  – наибольший из корней числителя и знаменателя. При  $a+3 > 0$  должно быть либо  $f(0) \leq 0$ , либо  $3a+3 = 0$ . В обоих случаях неравенство справедливо на некотором проме-

жутке  $0 < y < \alpha$ , где  $\alpha > 0$ . Но тогда множество решений исходного неравенства содержит луч  $x < \log_2 \alpha$ .

6. 126. *Указание.* Пусть  $S_1, S_2, S_3, S_4$  – площади треугольников  $SBC, SAB, SAD$  и  $SCD$  соответственно,  $V_1, V_2, V_3, V_4$  – объемы треугольных пирамид  $ESBC, ESAB, ESAD$  и  $ESCD$ . Поскольку точка  $E$  одинаково удалена от боковых граней (она лежит на прямой  $SO!$ ),  $S_1 : S_2 : S_3 : S_4 = V_1 : V_2 : V_3 : V_4 = S_{EBC} : S_{EAB} : S_{EAD} : S_{ECD}$  (последнее равенство получается из того, что треугольные пирамиды с вершиной  $S$  имеют общую высоту). Следовательно,

$$S_2 = S_1 \cdot \frac{S_{EAB}}{S_{EBC}} = S_1 \cdot \frac{AD}{BC} = 20,$$

$$S_3 = S_2 \cdot \frac{AD}{BC} = 50,$$

$$S_4 = S_1 \cdot \frac{AD}{BC} = 20.$$

Осталось заметить, что отношение полной поверхности  $S_{\text{полн}}$  к площади основания  $S_{\text{осн}}$  равно отношению объемов  $V_{SABCD} : V_{OABCD} = h : r = SE : OE = 9/2$ , отношение  $S_{\text{полн}} : S_{\text{бок}} = \frac{9}{7}$ . Откуда  $S_{\text{полн}} = 98 \cdot \frac{9}{7} = 126$ .

**Вариант 2**

- $(-\infty; -11/6] \cup \{0\}$       2.  $-3$ .
- $\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ . *Указание.* Уравнение равносильно совокупности  $x = 2\pi k, \sin(x + \varphi) = \frac{1}{2}$ , решениям которой соответствуют 3 точки тригонометрической окружности, которые должны располагаться в вершинах правильного треугольника.
- а) 1 : 1, 5 : 9; б) 5 : 21. *Указание.* Точки  $L$  и  $N$  лежат на средней линии трапеции,  $AB = AK, KD = CD, AK : KD = 9 : 5$ .

Углы  $KLM$  и  $KNM$  прямые, точки  $K, L, M, N$  лежат на одной окружности. Отсюда следует, что треугольники  $KLM$  и

$DNK$  подобны, откуда  $\frac{KM}{KD} = \frac{LM}{KN}$ , аналогично

$$\frac{MN}{KL} = \frac{KM}{AK} = \frac{KM}{KD} \cdot \frac{KD}{AK} = \frac{5}{21}.$$

5.  $a \in (-\infty; 3] \cup [4; +\infty)$ . *Указание.* Пусть  $f(x)$  – числитель, а  $g(x)$  – знаменатель дроби из условия задачи. Поскольку  $f(0) = g(0) < 0$ , а разность  $f(x) - g(x) = (a^2 - 7a + 13)x$  положительна при  $x > 0$  и отрицательна при  $x < 0$ , корни трехчленов  $f(x)$  и  $g(x)$  различны и перемежаются (рис.5). Решения неравенства удовлетворяют условию, если и только если  $(x_3 - x_1) + (x_4 - x_2) \geq 1$ , или, по теореме Виета,

$$a^2 - 7a + 12 \geq 0.$$

$\frac{1}{2} \sqrt{31}$ . *Указание.* Центры шаров – вершины треугольника со сторонами 3, 6, 7 и площадью  $S = 4\sqrt{5}$ . Точки касания с одной из плоскостей – вершины треугольника со сторонами  $2\sqrt{2}, 2\sqrt{5}, 2\sqrt{10}$  и площадью  $S' = \sqrt{31}$ .

Угол  $\varphi$  между плоскостями этих треугольников удовлетворяет соотношению  $\cos \varphi = \frac{S'}{S}$ . Дальнейшее ясно.

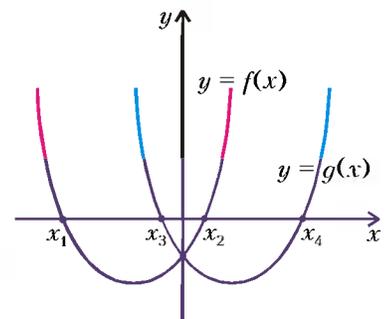


Рис. 5

Вариант 3

1. 5 км.      2.  $\{3\} \cup [8; +\infty)$ .

3.  $\frac{23\pi}{36} + \pi k, \frac{35\pi}{36} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$ .

4.  $\frac{\sqrt{129} + 31}{2}$ . Указание. Пусть  $\angle O_1AD = \alpha$  (рис.6). Тогда

$$\angle O_2AD = 2\alpha$$

и

$$AN = \frac{8}{\operatorname{tg} 2\alpha} < \frac{4}{\operatorname{tg} \alpha} = AM,$$

Пусть также  $DM = u, DN = v$ . Из подобия треугольников  $O_1DM$  и  $O_2DN$  следует, что  $uv = 32$ . Кроме того,  $u + v = FD + DE = \sqrt{129}$ .

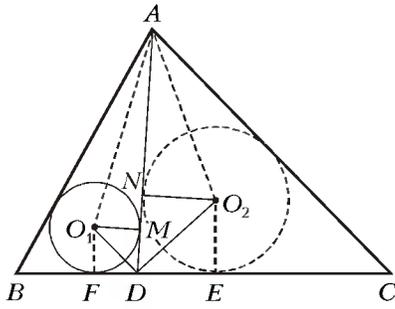


Рис. 6

уравнение к виду

$$3^{(t^2-1)(a-2)^2+1} - 2 = \frac{1}{|t|},$$

где  $t = \frac{x+a}{a-2}$ . При  $a = 2$  решений нет, а при  $a \neq 2$  решениями служат  $t = \pm 1$  (убедитесь, что других решений нет).

6.  $\frac{1}{6}V - \frac{2}{3}R^2V^3 \left( \left( \frac{m^2 - 4R^2}{2} \right)^2 - 4mV \right)^{-2}$ .

Указание. Пусть  $\vec{AD} = \vec{a}, \vec{AB} = \vec{b}, \vec{AA_1} = \vec{c}$ . По условию  $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a} = \mathbf{0}, \vec{a}\vec{a} = a^2, \vec{b}\vec{b} = b^2, \vec{c}\vec{c} = c^2$ , причем

$$\begin{cases} a + b + c = m, \\ a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2, \\ abc = V. \end{cases} \quad (*)$$

Введем обозначения

$$\frac{AM_1}{AB_1} = \alpha, \frac{A_1N_1}{A_1C_1} = \beta.$$

Тогда

$$V_1 = V_{AA_1M_1N_1} = \alpha V_{AA_1B_1N_1} = \alpha\beta V_{AA_1B_1C_1} = \frac{\alpha\beta}{6}V.$$

Выразите  $\alpha$  и  $\beta$  через  $a, b, c$ , получите затем выражение суммы объемов пирамид, после чего исключите  $a, b, c$ , пользуясь системой (\*).

Вариант 4

1.  $\arccos(-\sqrt{-3\cos\alpha - 1}) < \frac{19\pi}{24}$ .      2.  $\frac{2\pi}{3} + 4\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ .

3.  $\left[-1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$ . Указание. После

замены  $t = \log_{x+1}|x-2|$  получаем

$$|2t+2| \geq -3-3t \Leftrightarrow t \geq -1.$$

4.  $2\sqrt{3\sqrt{2}-4}$ . Указание. Из условия следует, что в четырехугольнике  $ABCD$  можно вписать окружность, центр которой совпадает с основанием высоты пирамиды. Задача сводится к нахождению радиуса этой окружности.

5.  $\frac{2\pi}{3} + 2\pi l, \frac{\pi}{6} + 2\pi l, l \in \mathbf{Z}$ . Указание. Уравнение можно переписать в виде

$$(\operatorname{tg} 14x + 3\operatorname{ctg} 14x) + \left( \sqrt{2} \sin \left( 3x + \frac{\pi}{4} \right) - 1 \right)^2 = 2\sqrt{3}.$$

Оценивая выражение в первой скобке с помощью неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, рассмотрим два случая.

Пусть сначала  $\operatorname{tg} 14x > 0$ . Тогда

$$\operatorname{tg} 14x + 3\operatorname{ctg} 14x \geq 2\sqrt{3},$$

причем равенство достигается при

$$\operatorname{tg} 14x = 3\operatorname{ctg} 14x \Rightarrow \operatorname{tg} 14x = \sqrt{3}.$$

Таким образом, вся левая часть преобразованного уравнения не меньше  $2\sqrt{3}$ . Поэтому получаем эквивалентную систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 14x = \sqrt{3}, \\ \sin \left( 3x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

При  $\operatorname{tg} 14x < 0$  решений нет.

6.  $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ . Указание. Положим  $AC = x, BC = y, AB = z$ . Тогда

$$\begin{cases} z = xy \sin 75^\circ, \\ z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 75^\circ, \\ x + y + z = 4 + \sqrt{6} - \sqrt{2}. \end{cases}$$

Так как

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},$$

эта система принимает вид

$$\begin{cases} xy = \frac{z}{\sin 75^\circ}, \\ z^2 = (x+y)^2 - 2xy(1+\cos 75^\circ), \\ x+y = 4 + 4\cos 75^\circ - z. \end{cases}$$

Исключая  $x, y$ , получаем

$$z^2 = (4 + 4\cos 75^\circ - z)^2 - \frac{2z}{\sin 75^\circ}(1 + \cos 75^\circ).$$

Отсюда

$$z = \frac{8\sin 75^\circ(1 + \cos 75^\circ)}{1 + 4\sin 75^\circ} = \frac{8\sin 75^\circ + 4\sin 150^\circ}{4\sin 75^\circ + 1} = 2.$$

По теореме синусов находим

$$R = \frac{z}{2\sin 75^\circ} = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

Вариант 5

1.  $\pi n, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$ .      2.  $(3 + \sqrt{65})/2$ .      3.  $(-1; 0)$ .

4.  $5/2$ .      5.  $x = 1; y = 3$ .

6.  $q(2p+q)/(p+q)$ . Указание. Пусть  $PQ = x$ . Тогда

$$\frac{x}{q} = \frac{BP}{BM}.$$



5.  $-\frac{\pi}{26}; \frac{\pi}{34}$ . *Указание.* Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{9}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{12}, \\ \cos 15x - \sin 12x = 0. \end{cases}$$

6.  $\frac{d^3}{3} \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 2\beta}$ . *Указание.* Пусть  $O$  – центр сферы,  $M$  – середина  $AS$ . Тогда  $OM = \frac{d}{2}$ ,  $AC = d$ . Аналогично,  $BC = d$ . При отыскании высоты  $SH$  данной пирамиды докажете, что точка  $H$  лежит на продолжении высоты  $CP$  треугольника  $ABC$  за точку  $C$ .

7. При  $b = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$  – единственное решение  $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; 0; 0\right)$ . При

$$b = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$
 – два решения:  $\left(\frac{1}{\sqrt[8]{5}}; 1; \frac{\pi}{4}\right)$  и  $\left(\frac{1}{\sqrt[8]{5}}; -1; -\frac{\pi}{4}\right)$ .

*Указание.* Второе уравнение исходной системы равносильно тому, что  $y = \operatorname{tg} z$ ,  $|z| < \pi/2$ , а первое уравнение имеет вид  $f(x) = g(z)$ , где  $f(x) = -\log_5(x^8\sqrt{2-5x^8})$ ,  $g(z) = b^2 + b \sin 2|z|$ . Пусть  $E_f$  и  $E_g$  – области значений функций  $f$  и  $g$ . Для того чтобы уравнение  $f(x) = g(z)$  имело конечное число решений, необходимо, чтобы  $E_f \cap E_g$  состояло из единственной точки.

**Вариант 14**

1.  $\left(\frac{4}{7}; \frac{37 + \sqrt{69}}{50}\right)$ . 2.  $7^{\log_2\left(\frac{\sqrt{41-5}}{2}\right)}$ .

3.  $\left(\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n; (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k\right)$ ,  $\left(\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n; (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k\right)$ ,  $k, n \in \mathbf{Z}$ .

4.  $p = 9; [-1; 3]$ . 5.  $1820\sqrt{21}/341$ .

6.  $a \in (5/11; 6/13]$ . *Указание.* Из первого уравнения получаем  $y = 6x + 7 + \frac{12}{2x-3}$ , откуда  $x$  может равняться 1, 2, или 3, а  $y$ , соответственно, 1, 31 и 29. Осталось подставить найденные пары в неравенство исходной системы и выяснить, при каких  $a$  ровно 5 натуральных чисел  $z$  дают вместе с  $x$  и  $y$  решения задачи.

**Вариант 15**

1.  $\frac{2}{3}$ . 2.  $(-\infty; -9) \cup \left(\frac{2}{3}; 1\right) \cup \left[\frac{11}{2}; +\infty\right)$ . 3. 15.

4.  $\arcsin \frac{\sqrt{17}-1}{4} + \pi + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

5.  $y = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{6}k + \pi n$ ,  $z = -\frac{\pi}{12} + \pi k$ ,  $k, n \in \mathbf{Z}$ . *Указание.* Из первого уравнения следует, что

$$\cos\left(z + 4y + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(2z + 2y - \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1.$$

Аналогично, из второго уравнения получаем

$$\cos\left(3z + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(4z - 2y - \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1,$$

после чего приходим к системе

$$\begin{cases} z + 4y + \frac{\pi}{4} = \pi k_1, \\ 2z + 2y - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + \pi k_2, \\ 3z + \frac{\pi}{4} = \pi k_3, \\ 4z - 2y - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + \pi k_4, \end{cases}$$

где  $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbf{Z}$ , причем  $k_1$  и  $k_2$ , а также  $k_3$  и  $k_4$  имеют одинаковую четность.

**Вариант 16**

1.  $1; \frac{30 - \sqrt{10}}{20}$ . 2.  $A = 1 > \frac{5}{7}$ .

3.  $\frac{\pi}{5}k$ ,  $\pm \frac{1}{2} \arccos \frac{3 - \sqrt{17}}{4} + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

4.  $\sqrt{3} \sin \frac{10\pi}{13} \cos \frac{5\pi}{13}$ . 5.  $(-\infty; -11) \cup [\sqrt{5}; 3)$ .

6.  $2(\sqrt{3}-1)$ . *Указание.* Воспользуйтесь тем, что треугольник  $O_1DO_2$  прямоугольный,  $DC \perp O_1O_2$  и  $O_1D^2 = O_1C \cdot O_1O_2$ .

7.  $(3; \sqrt{2})$ . *Указание.* Вычитая из утроенного второго неравенства первое, получаем следствие

$$(x-3)^2 + (y^2-2)^2 \leq 0.$$

**ФИЗИКА**

*Физический факультет*

1. Из закона сохранения импульса следует, что скорость шайбы непосредственно после щелчка  $u_{ш}$ , ее скорость  $v_{ш}$  и скорость доски  $v_d$  в момент соскальзывания шайбы должны удовлетворять соотношению

$$mu_{ш} = Mv_d + mv_{ш}, \tag{1}$$

где  $m$  – масса шайбы, а  $M$  – масса доски. Учитывая, что перемещение шайбы относительно доски к моменту соскальзывания не зависит от ее начальной скорости, на основании закона изменения механической энергии можно утверждать, что

$$\frac{mu_{ш}^2}{2} = \frac{Mv_d^2}{2} + \frac{mv_{ш}^2}{2} + A, \tag{2}$$

где  $A$  – работа сил трения. Из равенств (1) и (2) при  $u_{ш} = u$  и  $M/m = k$  получим

$$\frac{2A}{m} = \frac{k}{k+1}u^2. \tag{3}$$

При  $u_{ш} = u$  из соотношений (1) – (3) следует, что искомая скорость доски должна удовлетворять уравнению

$$k(k+1)v_d^2 - 2nkuv_d + ku^2/(k+1) = 0.$$

Очевидно, что при  $n \rightarrow \infty$  время взаимодействия шайбы с доской должно стремиться к нулю; следовательно, искомая скорость доски по мере увеличения  $n$  (после того, как оно превысит некоторое критическое значение) должна уменьшаться (в пределе до нуля). Поэтому из двух возможных решений полученного квадратного уравнения условиям задачи удовлетворяет корень

$$v_d = u \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{k+1}.$$

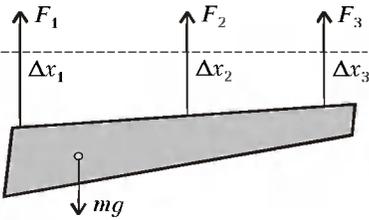


Рис. 8

2. Ясно, что ответ на поставленный вопрос зависит от характера движения балки. Поскольку в условии задачи нет никаких специальных оговорок о характере движения балки, решать задачу следует в предположении, что балка остается неподвижной относительно точек крепления шнуров к потолку. На рисунке 8 показаны силы, действующие на балку: это силы  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_3$  со стороны удерживающих ее шнуров и сила тяжести  $m\vec{g}$ , где  $m$  – масса балки. Ускорение центра масс балки будет равно нулю, если

$$F_1 + F_2 + F_3 = mg.$$

При этом балка будет находиться в равновесии, если сумма моментов всех сил относительно любой оси будет равна нулю. Если в качестве оси выбрать прямую, проходящую через точку крепления первого шнура к балке перпендикулярно плоскости, в которой лежат действующие на нее силы, то условие отсутствия углового ускорения у балки должно иметь вид

$$L_1 F_2 + (L_1 + L_2) F_3 = Lmg.$$

Чтобы получить полную систему уравнений, необходимо учесть упругие свойства шнуров. Так как деформации шнуров по условию являются малыми, на основании закона Гука можно утверждать, что силы упругости шнуров  $F_i$  пропорциональны деформациям шнуров  $\Delta x_i$ . Отсюда и из рисунка 8 следует соотношение

$$\frac{L_1 + L_2}{L_2} = \frac{\Delta x_1 - \Delta x_3}{\Delta x_2 - \Delta x_3} = \frac{F_1 - F_3}{F_2 - F_3}.$$

Решая совместно три полученных уравнения, найдем искомое отношение сил:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{2L_1^2 + (2L_1 + L_2)(L_2 - L)}{L_1(L_2 + L) + L_2(L_2 - L)}.$$

3. Колебания колеса с грузом будут оставаться гармоническими до тех пор, пока не возникнет скольжение груза по колесу. Очевидно, что в положении равновесия груз должен находиться на одной вертикали с осью обода. При смещении из этого положения проекция силы тяжести груза на направление касательной к ободу становится отличной от нуля, и, для того чтобы груз не скользил по ободу, между грузом и ободом должна действовать сила трения покоя. Максимальная величина этой силы равна произведению коэффициента трения на величину нормальной составляющей силы реакции. Если радиус, проведенный в точку нахождения груза, образует с вертикалью угол  $\alpha$  (причем  $|\alpha| < \pi/2$ ) и груз имеет при этом скорость  $v$ , то на основании второго закона Ньютона величина нормальной составляющей равна  $N = (v^2/R + g \cos \alpha)m$ , где  $m$  – масса груза. Отсюда следует, что  $N$  тем меньше, чем меньше  $v$  и больше угол  $\alpha$ , т.е.  $N$  достигает минимального значения при максимальном отклонении груза от положения равновесия. В этом положении проекция силы тяжести груза на направление касательной к ободу равна  $mg \sin \alpha_{\max}$ . Следовательно, груз не будет скользить по ободу, если  $\mu \geq \tan \alpha_{\max}$ , или, поскольку  $\mu \ll 1$ , если  $\alpha_{\max} = \mu$ . При гармонических колебаниях скорость тела достигает максимума в момент прохождения им положения равновесия, поэтому искомую скорость можно определить на основании закона сохранения механической энергии:

$$\Delta W_{\text{п}} = mgR(1 - \cos \alpha_{\max}) = mgR\alpha_{\max}^2/2 = \Delta W_{\text{к}} = (m + M)v_{\max}^2/2,$$

откуда

$$v_{\max} = \mu \sqrt{mgR/(m + M)}.$$

4. При достаточно медленном наполнении цилиндра сила давления гелия на поршень должна быть равна сумме действующих на него сил атмосферного давления и трения скольжения:

$$p_0 S = F_{\text{атм}} + F_{\text{тр}},$$

где  $p_0$  – давление гелия непосредственно перед его нагреванием, а  $S$  – площадь поперечного сечения цилиндра. Поскольку величина силы трения скольжения равна максимальному значению силы трения покоя, не зависит ни от температуры цилиндра, ни от положения поршня в нем и после закрытия крана число  $V$  молей гелия в цилиндре под поршнем не изменяется, при нагревании давление в цилиндре должно оставаться неизменным, а объем гелия должен увеличиваться. Пусть температура гелия непосредственно перед нагреванием  $T_0$ , перед охлаждением  $T_{\max}$ , а в тот момент, когда поршень начинает двигаться после некоторого охлаждения гелия,  $T_{\text{к}}$ . Тогда можно записать

$$p_0 V_0 = \nu RT_0, \quad p_0 V_{\max} = \nu RT_{\max}, \quad p_{\text{к}} V_{\max} = \nu RT_{\text{к}},$$

где  $V_0$  и  $V_{\max}$  – объемы гелия до и после нагревания,  $R$  – универсальная газовая постоянная. При этом давление гелия непосредственно перед началом движения поршня при охлаждении равно  $p_{\text{к}} = (F_{\text{атм}} - F_{\text{тр}})/S$ , так как направление силы трения покоя к этому моменту должно стать противоположным направлению силы атмосферного давления, а ее величина вновь принять максимальное значение. Поскольку гелий является одноатомным газом, его молярная теплоемкость при изохорическом процессе равна  $C_V = 1,5R$ , а при изобарическом –  $C_p = 2,5R$ . Отсюда следует, что при нагревании гелий должен был получить количество теплоты  $Q_+ = 2,5\nu R(T_{\max} - T_0)$ , а при охлаждении отдать  $Q_- = 1,5\nu R(T_{\max} - T_{\text{к}})$ . Учитывая, что  $V_{\max}/V_0 = k$  и  $Q_+/Q_- = n$ , найдем отношение давлений:

$$\frac{p_{\text{к}}}{p_0} = 1 - \frac{5(k-1)}{3nk},$$

а затем и искомое отношение сил:

$$\frac{F_{\text{тр}}}{F_{\text{атм}}} = \frac{1 - p_{\text{к}}/p_0}{1 + p_{\text{к}}/p_0} = \frac{5(k-1)}{6nk - 5(k-1)} = 0,2.$$

5. Очевидно, что в тот момент, когда температура льда стала равной  $0^\circ\text{C}$ , давление насыщенного пара воды должно было стать равным атмосферному:  $p_{\text{н}}(0) = p_{\text{атм}} = 1$  атм, а потому температура пара  $T(0) = 373$  К. Из уравнения Клапейрона–Менделеева найдем число молей пара, находившегося в цилиндре в указанный момент времени:  $\nu(0) = p_{\text{атм}} V / (RT(0))$ . Как известно, любая система по прошествии достаточного промежутка времени (при фиксированных внешних условиях) самопроизвольно переходит в состояние термодинамического равновесия, при котором все части системы имеют одну и ту же температуру. Поскольку теплообмен пара и льда со всеми другими телами исключен, за счет теплообмена со льдом пар будет конденсироваться, а лед будет плавиться. При этом давление в цилиндре будет оставаться равным 1 атм. Если количество пара  $\nu(0)$  было достаточно малым, то он весь сконденсируется, и искомое перемещение поршня следует считать равным  $\Delta h = V/S$ . В противном случае произойдет лишь частичная конденсация пара, а образовавшаяся вода будет иметь температуру  $100^\circ\text{C}$ . Уравнение теплового баланса для этого случая можно записать в виде  $L\Delta\nu = (\lambda + 100C)m/M$ , где  $\Delta\nu$  – количество молей сконденсированного пара. Определив из уравнения теплового баланса число молей сконденсированного пара, а из уравнения Клапейрона–Менделеева изменение объема пара, найдем искомое перемещение поршня во втором случае. Объединяя оба

случая и учитывая, что  $\Delta v \leq v(0)$ , искомое перемещение поршня можно представить в виде

$$h = \begin{cases} \frac{V}{S} & \text{при } (\lambda + 100C)m = k > \frac{p_{\text{атм}} VLM}{RT(0)} = b, \\ \frac{(\lambda + 100C)RT(0)m}{Mp_{\text{атм}}SL} & \text{при } k < b, \end{cases}$$

или, подставив значения  $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ ,  $M = 18 \text{ г}/\text{моль}$ ,  $p_{\text{атм}} = 1 \text{ атм} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$  и  $T(0) = 373 \text{ К}$ ,

$$h = \begin{cases} \frac{V}{S} & \text{при } k > 0,59VL, \\ 1,7 \frac{(\lambda + 100C)m}{SL} & \text{при } k < 0,59VL. \end{cases}$$

6. Как известно, избыточный статический заряд располагается на поверхности проводника. Если обозначить величину заряда поверхности пластины, находящейся на расстоянии  $a$  от одной из обкладок конденсатора,  $q_{1a}$ , а заряд другой поверхности обозначить  $q_{2a}$ , то по условию задачи  $q = q_{1a} + q_{2a}$ . На обращенных к пластине поверхностях обкладок конденсатора (в силу явления электростатической индукции) должны появиться заряды  $-q_{1a}$  и  $-q_{2a}$ . Таким образом, между обкладками и пластиной возникают электрические поля, напряженности которых равны  $E_{1a} = q_{1a}/(\epsilon_0 S)$  и  $E_{2a} = q_{2a}/(\epsilon_0 S)$ . Соответственно, разности потенциалов между обкладками и заряженной пластиной равны  $\Delta\phi_{1a} = aE_{1a}$  и  $\Delta\phi_{2a} = (d-a)E_{2a}$ . Поскольку пластины по условию соединены проводником, эти разности потенциалов должны быть равны друг другу, откуда получим

$$q_{1a} = (1 - a/d)q, \quad q_{2a} = aq/d.$$

Видно, что при изменении положения заряженной пластины внутри конденсатора должно происходить перераспределение зарядов как между поверхностями пластины, так и между обкладками конденсатора. При этом должны изменяться напряженности полей внутри конденсатора, а значит, и энергия, соответствующая этим полям. Очевидно, что такое изменение может произойти только за счет работы внешних сил, под действием которых происходит перемещение пластины. Ясно также, что перераспределение зарядов – их упорядоченное движение – в общем случае должно сопровождаться выделением тем большего количества теплоты и тем более интенсивным излучением, чем больше скорость упорядоченного движения зарядов. Следовательно, работа внешних сил будет минимальной, если перемещение пластины будет происходить бесконечно медленно. На основании закона сохранения энергии можно утверждать, что искомая работа  $A$  должна удовлетворять уравнению

$$\frac{q_{1a}^2}{2C_{1a}} + \frac{q_{2a}^2}{2C_{2a}} + A = \frac{q_{1b}^2}{2C_{1b}} + \frac{q_{2b}^2}{2C_{2b}},$$

где  $C_{1a}$  и  $C_{1b}$  – емкости конденсатора, образованного пластиной и обкладкой, находящейся от нее на расстояниях  $a$  и  $b$  соответственно, а  $C_{2a}$  и  $C_{2b}$  – емкости конденсатора, образованного пластиной и второй обкладкой. Учитывая, что емкость плоского воздушного конденсатора с площадью каждой пластины  $S$  и расстоянием между ними  $d$  равна  $C = \epsilon_0 S/d$ , из последнего уравнения получаем

$$A = \frac{q^2(b-a)(d-a-b)}{2\epsilon_0 Sd}.$$

7. Как известно, гальванический элемент состоит из двух изготовленных из разных проводников электродов, погруженных в электролит. ЭДС гальванического элемента определяется разностью электрохимических потенциалов его электро-

дов, а при подключении к элементу нагрузки ток через электролит обусловлен упорядоченным движением только ионов. Поэтому на основании закона Фарадея для электролиза можно утверждать, что скорость растворения отрицательного электрода при подключении к элементу нагрузки должна быть прямо пропорциональна величине текущего через элемент тока. Следовательно, для ответа на поставленный вопрос необходимо найти отношение токов при указанных способах подключения резисторов.

Если ЭДС элемента  $E$ , сопротивление первого резистора  $R_1$ , а второго  $R_2$ , то при последовательном соединении резисторов и источника через каждый из них должен протекать ток

$$I_{\text{пс}} = \frac{E}{(1+n)R_1 + R_2}.$$

При этом на втором резисторе должна выделяться тепловая мощность  $Q_2 = I_{\text{пс}}^2 R_2$ . Поскольку эта мощность должна быть максимальной, можно определить величину  $R_2$ , приравнявая нулю первую производную  $Q_2$  по  $R_2$ . Вычисления дают  $R_2 = (n+1)R_1$ .

В случае соединенных параллельно резисторов ток через элемент равен

$$I_{\text{пр}} = \frac{E}{nR_1 + R_1 R_2 / (R_1 + R_2)} = \frac{(n+2)E}{((n+3)n+1)R_1}.$$

Тогда искомое отношение, равное отношению токов, будет равно

$$x = \frac{(n+3)n+1}{2(n+1)(n+2)}.$$

8. Поскольку стержень находится в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ , направленной вертикально, а сам располагается горизонтально, во время  $(-\tau \leq t \leq 0)$  протекания тока  $I$  на стержень должна действовать сила Ампера, равная  $F_{\Lambda} = IBL$  и направленная горизонтально перпендикулярно его оси. Так как величина импульса силы Ампера равна

$$\int_{-\tau}^0 F_{\Lambda} dt = \int_{-\tau}^0 I(t)BL dt = BLq,$$

на основании закона изменения импульса получаем, что к моменту  $t = 0$  окончания протекания заряда все точки стержня приобретут скорость  $v_0 = BLq/m$  и в дальнейшем будут (подобно грузу математического маятника при малых амплитудах) совершать гармонические колебания с угловой частотой  $\omega = \sqrt{g/H}$ . Следовательно, зависимость от времени угла  $\alpha$  отклонения нитей подвеса от вертикали будет иметь вид  $\alpha(t) = \alpha_0 \sin \omega t$ . Проекция скорости точки, движущейся по окружности радиусом  $H$  с угловой скоростью  $d\alpha/dt = \alpha'(t)$ , на положительное направление касательной к ее траектории равна  $v_{\kappa} = H\alpha'(t)$ , тогда зависимость вертикальной составляющей скорости от времени можно представить в виде  $v_{\nu}(t) = v_{\kappa}(t) \sin \alpha(t) = v_{\kappa}(t)\alpha(t)$ , т.к.  $\alpha(t) \ll 1$ . Отсюда, учитывая ранее найденные значения угловой частоты колебаний и амплитуды скорости, найдем искомое максимальное значение вертикальной составляющей скорости стержня:

$$v_{\nu \text{max}} = \frac{v_0^2}{2\omega H} (\sin 2\omega t)_{\text{max}} = \frac{(BLq)^2}{2m^2 \sqrt{gH}}.$$

9. Будем решать эту задачу, полагая, что лупу можно считать тонкой собирающей линзой, для которой справедлива формула  $1/d + 1/f = 1/F$ , где  $d$  – расстояние от линзы до точки предмета, изображение которой находится от линзы на расстоянии  $f$ , а  $F$  – фокусное расстояние линзы. Поскольку в первом случае изображение нити на рисунке действительное, обозначив расстояние от линзы до лампочки через  $H$ , из формулы линзы получим  $F = bH/(b+H) \approx b$  (расстояние от линзы до лампочки, которая висит под потолком комнаты, явно не меньше 1 м, т.е. значительно больше  $b = 5 \text{ см}$ ). Во втором

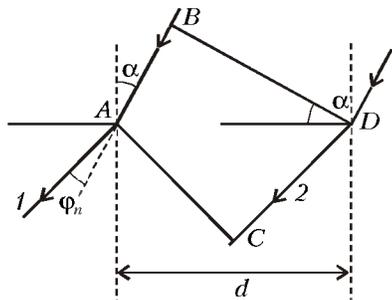


Рис. 9

увеличение рисунка:

$$\Gamma = \frac{D}{d} \approx 1 + \frac{D}{b} = 6.$$

10. Используя обозначения на рисунке 9, найдем, что разность хода идущих в направлении на  $n$ -й максимум лучей 1 и 2 равна  $\Delta = CD - AB = d(\sin(\alpha + \varphi_n) - \sin \alpha)$ . В то же время эта разность хода должна быть равна  $n\lambda$ . Если угол между направлением падающего пучка и направлением на первый максимум обозначить  $\varphi_1$ , получим

$$\lambda_c = d \sin(\alpha + \varphi_1 + \Delta\varphi) - \sin(\alpha + \varphi_1),$$

или, учитывая малость углов  $\varphi_1$  и  $\Delta\varphi$ ,

$$\lambda_c = d \cos \alpha \cdot \Delta\varphi.$$

Рассуждая аналогично, можно показать, что угловое расстояние  $\delta\varphi$  между направлениями на максимумы третьего порядка ка желтого дублета ртути должно удовлетворять уравнению

$$3\delta\lambda_{\text{ж}} = d \cos \alpha \cdot \delta\varphi.$$

Решая совместно два последних уравнения, определим искомую разность длин волн:

$$\delta\lambda_{\text{ж}} = \lambda_c \delta\varphi / (3\Delta\varphi) = 2,1 \text{ нм}.$$

Факультет вычислительной математики и кибернетики

- $v_0 = \sqrt{2(H-h)(g-a)} = 6 \text{ м/с}.$
- $l_1 = \frac{(M-m)l_0 + 2ml}{M+m} = 14 \text{ см}.$
- $F = m\sqrt{g^2 + \omega^4 l^2 \sin^2 \varphi} \approx 1,01 \text{ Н}.$
- $A = \frac{mg}{4} \frac{L^2 + 4(H-h)^2}{H-h} = 8 \text{ Дж}.$
- $\alpha = 1/2$ , кинетическая энергия уменьшится в 2 раза.
- $A = \frac{R(T-T_1)^2}{T_1} \approx 11,07 \text{ Дж}.$
- $U_{MN} = \frac{ER}{R+3r} \approx 1,54 \text{ В}.$
- $B = E \sqrt{\frac{m}{2W_{\text{к}}}} \approx 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}$ , магнитное поле перпендикулярно плоскости рисунка и направлено на читателя.
- $\gamma = 2\alpha - 2 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha\right) = 30^\circ.$
- $r = R \left( \frac{b}{F} - \frac{b}{d} - 1 \right) = 1 \text{ см}.$

Химический факультет

- $\mu = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \operatorname{tg} \alpha = 0,25.$
- $T = (m_2 - m_1)g/2 = 1 \text{ Н}.$
- $v = v_0(v+u)/u = 1,75 \text{ Гц}.$
- $Q = mg(H - g\Delta t^2/8) = 2 \text{ Дж}.$
- $p = 2p_1 p_2 / (p_1 + p_2) = 2,4 \cdot 10^5 \text{ Па}.$
- $q_3 = EC_3(C_1 + C_2) / (C_1 + C_2 + C_3) = 9 \text{ мкКл}.$
- $n^+ = nM / (pN_{\Lambda}) \approx 6,6 \cdot 10^{-10}.$
- $r = U_{\Lambda}^2 / (2P) - R = 8 \text{ Ом}.$
- $E = \sqrt{\left(\frac{a}{q/m}\right)^2 - (vB)^2} = 8 \text{ кВ/м}.$
- $d_1 - d_2 = 2l / (\Gamma D) = 0,1 \text{ м}.$

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования  
<http://www.courier.com.ru>

Vivos Voco!  
<http://www.techno.ru/vivovoco>  
(раздел «Из номера»)

# КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов,  
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

Ю.А.Ващенко, В.В.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк,  
А.И.Пацхверия, М.А.Сумнина, В.М.Хлебникова,  
П.И.Чернуцкий

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

## ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.  
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:  
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»,  
тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени  
Чеховском полиграфическом комбинате  
Комитета Российской Федерации по печати  
142300 г. Чехов Московской области  
Заказ №

## От ПЕРВОРАЗРЯДНИКА ДО ГРОССМЕЙСТЕРА

Прежде всего поздравляем наших шахматных читателей с юбилеем: «Шахматной страничке» исполнилось двадцать лет! С первого номера 1980 года не было ни одного «Кванта» без «Шахматной странички» — этот факт так и прописан в «Книгу рекордов Гиннесса». О значительном научном прогрессе за эти годы свидетельствует, например, то обстоятельство, что если в 1980 году компьютеры играли на уровне первого разряда, то теперь многие из них стали сильными гроссмейстерами. А два года назад, как мы помним, программа «Дип Блю» обыграла в матче сильнейшего шахматиста планеты Гарри Каспарова.

Что произошло в мире шахмат в прошедшем году? Прежде всего получила развитие идея, принадлежащая Каспарову, — «продвинутые шахматы» (advanced chess); возможно, стоило бы называть их «улучшенными шахматами». Сражаются два шахматиста-человека, но при этом им разрешается пользоваться компьютером, каждому — своим. Первый такой матч состоялся в 1998 году, тогда вничью 3:3 сыграли Каспаров и Топалов. Теперь Каспаров собирался играть такой же матч с Анандом, но у него возник конфликт с организаторами, и в результате 13-го чемпиона мира заменил 12-й. Матч из шести партий Карпов — Ананд состоялся в Испании, участникам давалось по 1 часу на всю партию и игровая программа «Fritz» в помощники. У индийского гроссмейстера намного богаче опыт общения с машинами, он вообще не пользуется деревянными шахматами — работает только за экраном монитора. Поэтому его победа неудивительна, правда, результат довольно неожиданный: Ананд разгромил Карпова в продвинутые шахматы со счетом 5:1.

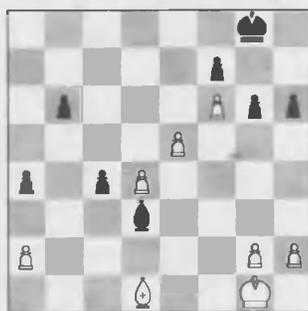
Еще одна идея Каспарова вызвала в минувшем году большой интерес. Речь идет об игре по Интернету. В принципе этот вид шахмат сейчас весьма популярен, многие шахматисты из разных стран встречаются друг с другом по Интернету. Проводят различные турниры, не говоря уже об оперативном получении шахматной информации. Каспаров же предложил сыграть по Интернету партию против «сборной мира». Специальная комиссия из четырех молодых гроссмейстеров на каждом ходу предлагала «сборной» четыре наиболее разумных ответа, поэтому откровенно слабые ходы про-

тивники Каспарова сделать не могли. Окончательный ответ выбирался по большинству, причем число обращений на каспаровский сайт достигло нескольких миллионов. В итоге эта партия прошла в острой и увлекательной борьбе и завершилась победой чемпиона мира.

Напомним, что с 1974 года по 1995 состоялось восемь чемпионатов мира среди суперкомпьютеров, которые проходили раз в три года. Очередной, девятый, чемпионат состоялся в июне 1999 года в немецком городе Падерборне. Вместе с тем, с 1980 по 1997 год почти ежегодно проходили чемпионаты мира среди микрокомпьютеров, всего их состоялось 15. Но в последние годы разница между супер- и микро-ЭВМ сгладилась (первые значительно уменьшились в размерах, а вторые явно усилились), к тому же заметно возрос интерес к встречам Человек — Компьютер, и традиции нарушились. Таким образом, соревнования среди микрокомпьютеров отпали сами по себе.

Турнир в Падерборне проходил по швейцарской системе (всего играло 30 программ), и в конце концов 1-2-е места разделили «Shredder» (Германия) и «Ferret» (США) — 5,5 очков из семи. На пол-очка отстал знаменитый «Fritz» (Германия). Напряженная дополнительная встреча между победительницами продолжалась 101 ход и закончилась вничью. В результате чемпионом мира по так называемому коэффициенту Бухгольца была объявлена программа «Shredder», кстати, единственная избежавшая поражений.

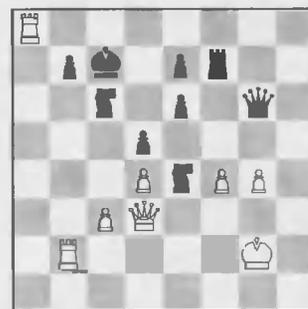
Эту программу отличает то, что она хорошо играет эндшпиль — в прежние времена самое слабое место в игре машин. Вот как элегантно обыграла она израильскую программу в сложном окончании.



«Shredder» — «Junior»

43. d5! ♖e4 44. d6 ♖c6 45. ♔f2 ♖d7 46. ♖e3 b5 47. ♖d4 ♖f8 48. ♖f3 ♖e8 49. ♖d5 h5 50. h4! ♖f8 51. a3! ♖e8 52. ♖c3 ♖f8 53. ♖b4 ♖g8 54. ♖e4 ♖f8 55. e6! fe 56. ♖:g6 e5 57. ♖:h5 e4 58. g4 ♖c8. Черные сдались.

И наконец, еще одно, пожалуй самое важное, состязание прошлого года с участием «Fritz». Во Франкфурте состоялся большой шахматный фестиваль по быстрым шахматам, главным украшением которого был турнир четырех — Каспарова, Крамника, Ананда и Карпова (в нем победил Гарри Каспаров), однако большое внимание привлек и турнир «Мастерс-99», в котором участвовали семь шахматистов, расположенных в таблице о рангах недалеко от этой четверки: Морозевич, Лeko, Топалов, Свидлер, Адамс, Юдит Полгар, Лутц, а также «Fritz»! И каков же результат? Компьютер вышел победителем турнира; кстати, на сей раз была представлена модификация программы «Fritz» под номером 6. Машина проиграла только один матч — Морозевичу и один матч — со Свидлером — свела вничью. Остальные гроссмейстеры были повержены. Очередная победа машины, хоть и в быстрых шахматах, весьма впечатлительна. В позиционном отношении она традиционно уступала своим соперникам, но в тактике ей не было равных.



«Fritz» — Ю.Полгар

43. ♖:b7+! ♖:b7 44. ♖a6+, и чудо-шахматистка сдалась чудо-машине (44... ♖c7 45. ♖c8+ и 46. ♖:c6×).

«Fritz» — М.Адамс

По положению, победитель «Мастерс-99» допускается в этом году в главный турнир — интересно, чем он закончится... Впрочем, там же, во Франкфурте, честь белковых гроссмейстеров удалось отстоять Вишванату Ананду, выигравшему со счетом 2,5 : 1,5 матч-реванш у программы «Fritz» (в первом матче в 1998 году также победил Ананд). Как видим, пока еще гроссмейстеры сопротивляются компьютерам.

Е.Гук

# ФИЗИКИ НА МОНЕТАХ МИРА



В 1980 году Германская Демократическая Республика выпустила монету достоинством в 20 марок, посвященную ЭРНСТУ АББЕ. На монете изображена основная часть многих оптических приборов: окуляр в виде простой линзы и объектив, состоящий из двух плосковыпуклых линз, между которыми размещена ограничивающая ширину светового пучка диафрагма. Схема свидетельствует о большом вкладе, который внес Аббе в развитие теории и практики изготовления многих оптических приборов

КАРЛУ ЦЕЙСУ посвящена монета достоинством в 10 марок, выпущенная в 1988 году в Федеративной Республике Германии к 100-летию со дня смерти ученого. На монете изображен портрет знаменитого оптика и один из микроскопов, выпускавшихся его фирмой.

Являясь одним из основных инструментов исследования во многих областях естествознания, микроскоп оказался весьма популярным объектом изображения на монетах и банкнотах мира. Так, в частности, классический цейссовский микроскоп изображен на банкноте достоинством в 50 крузадо, выпускавшейся в Бразилии в 1987 – 1992 годах.

(Подробнее о вкладе Э.Аббе и К.Цейса в развитие практической оптики – внутри журнала.)

