ISSN 0130-2221

НОЯБРЬ/ДЕКАБРЬ

1999 · №6

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Эту головоломку легко сделать из шариков для настольного тенниса. Вам понадобятся шесть шариков, не обязательно новых и целых. Два шарика разрезают на две части (рисунок справа вверху), из которых склеивают корпус. На четырех других шариках рисуют по шесть кружков четырех цветов, как на рисунке. И эти шарики вставляют в корпус (в произвольном порядке).

Головоломка состоит из двух задач:

1. Расположите шарики так, чтобы сверху и снизу получились все четыре цвета, а по бокам никакие два одинаковых цвета не стояли бы рядом.

2. Расположите шарики так, чтобы, как и в задаче 1, сверху и снизу получились все четыре цвета, а с боков — по два одинаковых.

Поворачивая один шарик вокруг вертикальной оси, мы получим 4 варианта его внешнего вида. Так как сверху может быть любой из шести цветных кружков, число возможных положений шарика равно 24. Для четырех шариков количество расцветок равно $24^4 = 331776$. Найти решение головоломок очень непросто. Вы можете гордиться, если на решение потратите не более 15 минут.

КВАНТ НОЯБРЬ ДЕКАБРЬ 1999 №6

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Квант

Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

Бюро Квантум

От транзистора – к искусственному разуму?

Ю.НОСОВ

Бытует такая притча. Биллу Гейтсу во сне явился дьявол под личиной нищего и выпросил мельчайшую частичку того, что лежало в основе богатства Б.Г. Проснувшись наутро, миллиардер обнаружил, что его гигантская фирма перестала существовать. Не обанкротилась, не рухнула – бесследно исчезла. Дьявол унес *транзистор*.

«Атом» электроники

Да, без транзисторов и состоящих из них микросхем стало бы невозможным существование не только компьютеров и компьютерных программ, прославивших и обогативших Гейтса, но и современного телевидения, аудиотехники, мобильных телефонов, Интернета и еще многого из того, что объединяется в нашем представлении понятием электроника. А без электроники немыслима и сама сегодняшняя жизнь. Поэтому вполне закономерно, что уходящий XX век все чаще осознается человечеством как век электроники, век транзистора.

Примечательно, что в прошлом, 1998, году транзистор отметил свой полувековой юбилей – в последний июньский день 1948 года американская фирма «Белл телефон лабораторис» продемонстрировала общественности только что изобретенный электронный прибор, о котором назавтра «Нью-Йорк Таймс» сообщила буднично и без пафоса: «Рабочие элементы прибора состоят из двух тонких проволочек, прижатых к кусочку полупроводникового вещества... Вещество усиливает ток, подводимый к нему по одной проволочке, а другая проволочка отводит усиленный ток. Прибор под названием «транзистор» в некоторых случаях можно использовать вместо электронных ламп».

Да, именно так выглядел первый транзистор, и неудивительно, что даже специалисты не сразу смогли разглядеть его триумфальное будущее. А между тем представленный прибор мог усиливать и генерировать электрические сигналы, а также выполнять функцию ключа, по команде открывающего или запирающего электрическую цепь. И, что принципиально важно, все это осуществлялось внутри твердого кристалла, а не в вакууме, как это происходит в электронной лампе. Отсюда

Иллюстрация В.Власова

следовал целый набор потенциальных достоинств транзистора: малые габариты, механическая прочность, высокая надежность, принципиально неограниченная долговечность. Через три-четыре года, когда были разработаны значительно более совершенные конструкции транзисторов, все эти ожидаемые достоинства начали становиться реальностью.

Честь открытия транзисторного эффекта, за которое в 1956 году была присуждена Нобелевская премия по физике, выпала *У.Шокли, Дж.Бардину, У.Браттейну.* Характерно, что все трое были блистательными физиками, целенаправленно шедшими к этому открытию. Шокли, руководитель группы исследователей, еще в предвоенные годы читал лекции по квантовой теории полупроводников и подготовил фундаментальную монографию (по разным причинам ее издание задержалось до 1950 г.), которая надолго стала настольной книгой «полупроводникистов» всего мира. Высочайшая квалификация Бардина как физика-теоретика подтверждена не только изобретением транзистора и предсказанием ряда эффектов в поведении полупроводников, но и тем, что позднее, в 1972 году, совместно с двумя другими исследователями он был повторно (!) удостоен «Нобеля» – теперь за создание теории сверхпроводимости. Браттейн, самый старший в группе, к моменту изобретения транзистора имел за плечами пятнадцатилетний опыт исследования поверхностных свойств полупроводников. Хотя само открытие транзисторного эффекта явилось до некоторой степени счастливой случайностью (говоря сегодняшним языком, они пытались изготовить *полевой* транзистор, а изготовили *биполярный*), теоретическая подготовка исследователей позволила им практически мгновенно осознать открытое и предсказать целый ряд гораздо более совершенных устройств. Иными словами, создание транзистора оказалось под силу лишь физикам, которые по необходимости владели еще и минимумом изобретательских навыков (ситуация, во многом аналогичная созданию атомной бомбы и ряду других открытий второй половины XX века, в которых «первую скрипку» сыграли физики).

У нас в стране транзистор был воспроизведен в 1949 году во фрязинской лаборатории, возглавляемой *А.В.Красиловым*, крупным ученым, обладающим широчайшей эрудицией.

Однако вернемся к предмету разговора. Поначалу многие конструкторы традиционной радиоаппаратуры встретили транзистор настороженно. Недостатки у первых транзисторов, увы, действительно были. Дело в том, что *германий* – полупроводник, из которого они изготавливались, в силу своих физических свойств обеспечивал рабочую температуру транзисторов лишь до 70 °С, а этого во многих прикладных задачах было недостаточно. Кроме того, технологам никак не удавалось (да так и не удалось) «обуздать» химическую активность поверхности германиевых кристаллов, что вело к нестабильности параметров, особенно заметной при повышенных температурах. Но создатели новых направлений электроники – больших вычислительных машин, устройств ракетно-космического назначения, миниатюрной переносной радиоаппаратуры – встретили транзистор с восторженным энтузиазмом: было очевидно, что без него эти новые направления просто не смогут существовать. Вместо критики из этого лагеря неслось лишь одно – «давай». Давай меньшие габариты и большую надежность, большее быстродействие и меньшую стоимость.

Во второй половине пятидесятых годов в развитии транзисторов произошел решающий качественный скачок: вместо германия стали использовать другой полупроводник – *кремний*. В итоге рабочая температура транзисторов выросла до 120–150 °С, при этом их характеристики сохраняли высокую стабильность, а срок службы приборов стал практически бесконечным. Но, пожалуй, главное заключалось в том, что в 1959 году американской фирмой «Фэйерчайлд» применительно к кремнию была разработана так называемая *планарная технология.* Принципиальным здесь было то, что тончайшая пленка диоксида кремния, выращенная при высокой температуре на поверхности кристалла, надежно защищает кремний от агрессивных воздействий и является отличным изолятором. В этой пленке создают «окна», через которые, также при высокой температуре, в полупроводник вводят легирующие добавки – так изготавливаются фрагменты будущего прибора. Затем на изолированную от объема поверхность напыляют тонкопленочные алюминиевые токоподводы к активным зонам – и транзистор готов. Особенностями процесса является то, что все воздействия на пластину осуществляются в одной плоскости и что обеспечивается одновременная обработка тысяч и миллионов транзисторов на пластине, а это ведет к высочайшей степени воспроизводимости изделий и фантастической производительности. А что еще надо от технологии?

Методами планарной технологии легко обеспечить изоляцию транзисторов от подложки и друг от друга, а отсюда лишь шаг до создания *интегральной схемы (микросхемы).* И этот шаг был сделан в том же 1959 году (в этом году – сорокалетний юбилей!). Идея интеграции, т.е. создания электронных схем с активными и пассивными компонентами и их соединениями в едином технологическом процессе, эта идея, очевидная в своей привлекательности, будоражила специалистов давно. С изобретением транзистора стало ясно, что интеграция реальна, разработка планарной технологии окончательно закрыла этот вопрос, одновременно открыв эру *микроэлектроники.*

Типичная микросхема представляет собой кремниевый кристаллик (чип), в приповерхностной области которого изготовлено множество транзисторов, соединенных между собой пленочными алюминиевыми дорожками в заданную электрическую схему. В первой микросхеме «множество» состояло всего лишь из 12 транзисторов, но уже через два года уровень интеграции превысил 100 элементов на чипе, а к середине 60-х годов стали доминировать большие интегральные схемы (БИС), содержащие тысячи элементов. И пошло-поехало.

На первый взгляд, с развитием микроэлектроники транзистор «растворился» в микросхеме. Растворился, но бесследно не исчез. Вобрав в себя все от транзистора, микросхема живет и по своим специфическим законам. «Транзистор – кремний – планарная технология» вот три кита, на которых покоится современная микроэлектроника, вернее, не покоится, а развивается, и развивается бешеными темпами. Киты оказались крепкими и смышлеными – они дают этой гонке все, что надо. И как бы в дальнейшем не складывалась судьба транзистора, очевидно, что он уже вправе быть причисленным к самым значимым приобретениям человечества в XX веке, таким, как авиация, атомная энергия, телевидение...

Пределы «плотности памяти»

Микросхема обладает тем большей информационной мощностью, чем большее количество транзисторов она содержит, т.е. чем выше *плотность интеграции.* А это определяется минимальными размерами, которые способна воспроизводить технология, т.е. тем, что называют *проектными нормами* (d_{min}), на которые вправе ориентироваться тополог – разработчик структуры микросхемы. Это комплексная характеристика технологии: назовите величину d_{min} – и специалист безошибочно укажет, какое оборудование и какие типовые процессы обработки кремниевых пластин используются, каковы размеры этих пластин и степень их совершенства, насколько стерильны производственные помещения, и даже перечислит особенности организации труда.

Современный[1] высший мировой уровень, характеризующийся величиной $d_{min} \approx 0{,}25$ мкм, позволяет создавать *микросхемы памяти* емкостью 256 Мбит и *микропроцессоры* с 20 млн транзисторов. Ожидается, что в XXI век микроэлектроника войдет с $d_{min} \approx 0{,}15-0{,}18$ мкм и с вчетверо большим объемом памяти одной микросхемы. Магия цифр завораживает: 2000 год – 1 Гбит! Для пользователей это означает, что в одну микросхему можно будет записать 15 минут телевизионного действия с аудиосопровождением. А к 2010–2012 годам ожидается $d_{min} \approx$ $\approx 0{,}05 - 0{,}07$ мкм и, соответственно, объем памяти 65 Гбит (например, весь сериал «Семнадцать мгновений весны» – на одном кристалле!).

Обратим внимание, что приведенные цифры характеризуют рост уровня интеграции более резкий, чем $\sim 1/d_{min}^2$. Это обусловлено тем, что прогресс микроэлектроники идет не только по параметру d_{min}. Так, уменьшение дефектности кремния позволит увеличить площадь отдельного чипа – за три предстоящих года она возрастет раза в полтора и для самых крупных образцов достигнет приблизительно 3×5 см. Всего же за полвека существования микроэлектроники (т.е. к 2010 г.) площадь чипа увеличится примерно в 1000 раз, а уровень интеграции – в 10 млрд раз. Для сравнения укажем, что в электротехнике за столетие со дня изобретения электромотора мощность, отнесенная к единице его веса, возросла раз в 10–15, и это преподносится как ошеломляющий успех, а микроэлектронные достижения вызывают у широкой публики лишь одну реакцию – «почему не больше?».

При всей важности высокой плотности размещения транзисторов в чипе, это, тем не менее, не единственный показатель его «способностей». Если в микросхему памяти вы записали содержимое книг целой библиотеки, но для нахождения и извлечения нужной книги требуется, скажем, день, то это уже будет не библиотека, а «электронная версия» свалки.

Еще острее временно́й фактор выступает при оценке микропроцессоров. Очень часто речь идет о работе «в реальном масштабе времени», типичный пример – это обсчет траектории летящей на вас вражеской ракеты и выдача необходимых команд для ее перехвата. Микропроцессор-«тугодум» в такой ситуации вам попросту не нужен, какой бы интеллектуальной мощью он ни обладал. (Как в шахматном блице: «задумался – проиграл».) К счастью, уменьшение размеров транзисторов способствует и повышению скорости обмена информацией; оценки показывают, что к 2010–2020 годам *тактовые частоты* микросхем достигнут значения 2–3 ГГц, т.е. в 3–4 раза превысят высший современный уровень.

Уместно спросить, а возможно ли соединить в единую схему миллионы транзисторов и при этом не перезамкнуть соединения? Нет, невозможно. Невозможно, если вести разводку по одной поверхности, так сказать, по одному «техническому этажу». Поэтому уже давно трассировка сложных микросхем осуществляется в нескольких уровнях: на пленку диоксида кремния, покрывающую чип, наносят первую паутинку алюминиевых дорожек, затем поверх них выращивают вторую пленку диоксида кремния, на нее наносят следующую алюминиевую паутинку и т.д. В каких-то местах в изолирующих пленках проделывают отверстия-колодцы, через которые осуществляют соединения паутинок разных уровней в единую схему. (Заметим для сравнения, что сеть водо-газо-электро-теле-коммуникаций Москвы с ее 1–2 миллионами квартир сродни разводке средненькой микросхемы начала 90-х годов – с ее трассировкой справился бы рядовой цеховой тополог.) В современных микросхемах приходится использовать 4–5-уровневую разводку, через 15 лет дело дойдет до 8–10 «этажей». А общая длина межсоединений превысит 10 км(!), так что обежать их самый быстроногий кенией сможет лишь за полчаса. И все это на кристалле площадью в пару десятков квадратных сантиметров.

Еще одна прогнозная цифра – к 2010 году стоимость бита информации, хранимого в микросхеме памяти, уменьшится до 0,0000001 цента. Так что за 10–15 центов можно будет приобрести однокристальную электронную версию всей школьно-вузовской премудрости: все учебники, все задачники с ответами, все справочники да еще и энциклопедию впридачу. Сбудется, наконец-то, вековечная мечта мыслящего человечества об идеальной шпаргалке.

Два замечания к сказанному. Процентов девяносто микросхем в мире производится с проектными нормами 0,8–1,5 мкм, а приведенными выше рекордными цифрами могут похвастаться лишь несколько фирм-лидеров, главным образом из Юго-Восточного региона (даже не из США), и лишь применительно к схемам памяти, для которых характерна простейшая регулярная топология. И второе. Наши лучшие заводы (прежде всего –зеленоградские «Ангстрем» и «Микрон») уверенно выдерживают достигнутые ранее 1–1,5 мкм, и реально просматривается интервал 0,8–0,5 мкм – уровень вполне пристойный, позволяющий массово экспортировать микросхемы.

История подсказывает, что при каком-то уровне интеграции неизбежен диссонанс между технологичес-

[1] *Т.е. уровень 1997–98 гг.; достоверные промышленные показатели можно получить лишь спустя год-два от момента отсчета.*

кой мощью чипа и его микропроцессорным интеллектом. Все настойчивее обкатывается идея *нейронного* принципа организации связей между транзисторами, подобных тем, которые определяют функционирование человеческого мозга. И если в начале третьего тысячелетия технологические достижения гармонично дополнятся адекватной схемотехнической философией, то мы увидим не просто микроэлектронику девяностых годов, разросшуюся во столько-то раз, а станем свидетелями формирования ее качественного нового облика. Какого? Осталось не так уж долго ждать.

Прогнозы, прогнозы... Мистическое стремление заглянуть в будущее присуще самой природе человека. Фактически основополагающим положением при прогнозах в микроэлектронике является давно подмеченная закономерность: «уровень интеграции микросхем удваивается каждые 1,5 года». Американцы назвали это *«законом Мура»*, по имени первооткрывателя.

Но будет ли этот закон, фактически относящийся к прошлому, справедлив и впредь, хотя бы на ближайшие 10—20 лет? Ответ проблематичен. Во всяком случае многие серьезные специалисты утверждают, что далеко за уровень 1 Гбит микросхемы вообще не уйдут.

Сцены «кремниевой жизни»

В микроэлектронике нерасторжимо соединяется множество разнородных технологических процессов, у каждого из них свои физико-химические основы, обо всем сразу не рассказать. Но об исходном полупроводнике говорить надо обязательно, какникак это – фундамент.

Итак, если в начале следующего века будет создана наконец-то «клетка» (микросхема) искусственной жизни, то она, несомненно, будет кремниевой. Это вроде предопределения свыше. «В земной коре кремний играет такую же первостепенную роль, как углерод в животном и растительном мире» (Большая Советская Энциклопедия). Кремний располагается в IV группе таблицы Менделеева, как раз под углеродом. А уникальная роль углерода в живой природе обусловлена тем, что между его атомами существуют прочные химические связи, в разрыв которых также прочно могут встраиваться атомы других элементов – кислорода и водорода прежде всего. Из этих элементов – C, O, H – в различных комбинациях и состоит на 98% общая масса всего живого на Земле. Нечто подобное присуще и кремнию: заполненность и прочность собственных химических связей, возможность встраивания в их разрыв других элементов, существенно изменяющих свойства кристалла. Разрыв связи в углеродном соединении, вызываемый слабым физиологическим воздействием, представляет собой элементарный акт рождения биологического импульса; разрыв связи в кремниевом монокристалле под действием тепла, света, электрического поля может знаменовать элементарный акт формирования информационного импульса. Кроме того, запасы кремния на Земле практически неограниченные: к примеру, песок на морском пляже наполовину состоит из кремния. Кремний – второй по распространенности элемент (первый – кислород).

Но кремний плавится при 1420 °C, и не просто сделать аппаратуру для выращивания кремниевых кристаллов (они вытягиваются из расплава), сохраняющую стерильность при столь высокой температуре. Первые кремниевые монокристаллы были размером с мизинец, потом на какоето время техника задержалась на слитках диаметром 40 мм, к концу семидесятых стандартом стал диаметр 100 мм, а к 2010—2012 годам ожидается, что диаметр кремниевых слитков достигнет 400—450 мм.

Автору довелось вживую познакомиться с американским станком разделки на «вафли» (пластины) трехсотмиллиметровых (уже!) слитков кремния. Эдакий массивный металлический колосс в полтора человеческих роста. Иначе нельзя – на хлипком основании никаких точностей не получишь. А точности и фантастическими не назовешь – бледновато будет. Сопровождающий буднично так информирует, что после чистовой обработки высота микронеровностей на поверхности кремниевой пластины не превышает 1 нм (это называется «шероховатостью» – остроумно, не правда ли?). Однако после окончательной обработки рабочей поверхности пластины ее шероховатость снижается до 0,1 нм. Разве не чудо: ведь поперечник кремниевого атома около 0,5 нм?!

Но если бы все сводилось только к устранению шероховатости! Увы, как бы тщательно не выращивался слиток, идеальная кристаллическая решетка во всем объеме недостижима: в каком-то узле случайно не оказывается атома кремния, где-то внедряется неконтролируемая примесь, при остывании образуются микротрещинки и перенапряженные области и т.п. Транзистор, изготовленный на месте структурного дефекта, как правило, оказывается негодным. «Отлавливание» структурных несовершенств стало главным делом металловедов, и справляются с этим они неплохо: в лучших современных пластинах содержится менее 200 дефектов на квадратный метр, а к 2010 году ожидается снижение этого показателя еще на порядок.

Замечено, что когда одни рвутся в космос, другие «назло» им бурят сверхглубокую скважину в земной коре, изобретения телескопа и микроскопа непременно соседствуют друг с другом. А что если кремниевые кристаллы сделать очень маленькими? Чтобы понять, чего при этом можно ожидать, надо заглянуть в *квантовый микромир.*

Атом кремния в кристалле прочно связан с четырьмя соседними атомами (схематично, в плоскости, это иллюстрируется рисунком 1). Кремний четырехвалентен, поэтому все электроны внешних орбит оказываются связанными. Эти связи одно-

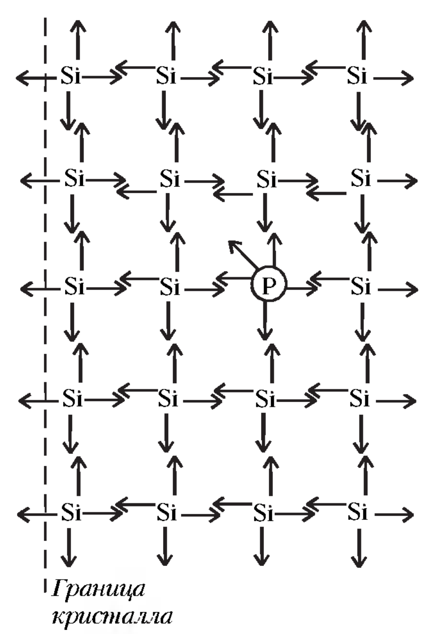


Рис.1

значно объединяют весь кристалл в единое целое, в квантовую систему, условно характеризующуюся некой *зонной диаграммой*, т.е. набором энергетических уровней, на которых могут располагаться валентные электроны, строго по два на каждом уровне (рис.2). Изменениям состояния

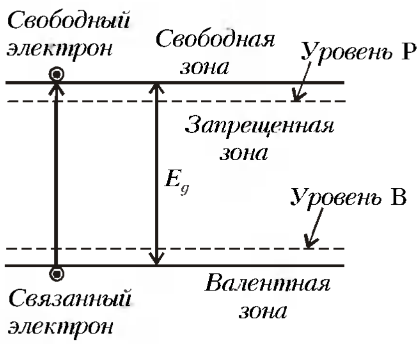


Рис.2

электрона соответствуют его переходы с одного уровня зонной диаграммы на какой-то другой. Квантовый характер процессов проявляется в том, что при этих переходах энергия электрона меняется скачкообразно, и только если «скачки» очень маленькие, кажется, что она изменяется плавно. Электроны, связанные с атомами, на зонной диаграмме заполняют все уровни валентной зоны, поэтому изменение состояния системы, т.е. кристалла, невозможно. Но если приложить значительное усилие, то валентная связь разрывается и пара электронов обретает возможность свободно перемещаться по кристаллу – при приложении электрического поля движение таких свободных электронов образует ток. На языке зонной диаграммы разрыв связи проявляется в том, что при поглощении кристаллом порции энергии $\Delta E \geq E_g$ электрон из валентной зоны переходит в свободную, где имеется множество незанятых близкорасположенных энергетических уровней. (Заметим, что «скачки» электрона в «пространстве энергий» не сопровождаются сколько-нибудь заметным изменением его положения в реальном пространстве.)

Параметр E_g, называемый *шириной запрещенной зоны*, является важнейшей характеристикой кристалла: когда $E_g \leq 0,1$ эВ, вещество ведет себя как проводник (металл), а при $E_g \geq 3,5$ эВ – как изолятор. В промежуточных случаях мы имеем дело с полупроводником – таков и кремний с энергией $E_g \approx 1,1$ эВ. Если в кристалл внедрить немного инородных атомов (это обеспечивается легированием расплава при выращивании слитка), его механические свойства заметно не изменяются, однако зонная диаграмма ревностно отслеживает тончайшие нюансы. Если атом примеси пятивалентный (фосфор P, например), то одна из его валентных связей не заполняется четырехвалентными соседями и свободный электрон образуется очень легко – на зонной диаграмме это проявляется в появлении энергетического уровня вблизи свободной зоны. Аналогично этому, атом трехвалентной примеси (бор B, например) образует уровень вблизи валентной зоны – легко «впрыгивающие» на него валентные электроны создают иллюзию реального появления свободного положительного заряда, называемого *дыркой*.

Порция энергии ΔE, передаваемая кристаллу для заброса электрона с нижнего уровня на верхний, обычно отбирается от электрического поля. А при обратном переходе электрона точно такая же порция энергии выделяется в виде кванта излучения (фотона), длина волны которого определяется простым соотношением: $\lambda(\text{нм}) = 1240/\Delta E\,(\text{эВ})$. Так, для испускания «темно-красного» фотона ($\lambda = 700$ нм) необходимо, чтобы электрон совершил переход между уровнями с $\Delta E = 1,8$ эВ, а для генерации «синего»[2] фотона, на другом краю видимого спектра ($\lambda = 480$ нм), – с $\Delta E = 2,6$ эВ. Как видим, кремний с его наибольшим возможным значением $\Delta E = E_g = 1,1$ эВ ни одному из этих требований не удовлетворяет, потому-то и нет кремниевых светодиодов. Надо еще добавить, что не всякий переход электронов возможен – для каждого полупроводника действует свой набор «правил запрета». Например, в кремнии переход «вниз» через всю запрещенную зону происходит не прямо, а многоступенчато, с выделением нескольких порций энергии, которые лишь в сумме дают E_g.

Рассмотренные понятия – ширина запрещенной зоны, положение уровней примесных атомов, разрешенные и запрещенные электронные переходы – есть некие константы, которые определяются природой вещества, а хочешь что-то изменить – подбирай другой полупроводник. Но физика не была бы физикой, если бы периодически не опрокидывала собственные «незыблемые» представления. Сказанное выше справедливо, пока кристалл безграничен, но атомам, расположенным на поверхности, нечем «насытить» одну из валентных связей (например, нет «соседа» слева, как на рисунке 1). В структуре зонной диаграммы появляются уровни «поверхностных состояний», подобные примесным уровням в объеме.

И это не все. При малых размерах кристалла внутри него возникают значительные механические напряжения – механизм здесь тот же, что и при сжатии капли жидкости силами поверхностного натяжения. Чем меньше кристалл, тем сильнее он сжат, а сжатие, как давно установлено, вызывает изменение величины E_g, а нередко и трансформацию «правил запрета». Таким образом, уменьшая размеры кристалла, можно воздействовать на его «святая святых» – зонную диаграмму. Это – *квантово-размерный эффект.*

А при каких размерах можно считать кристалл «маленьким»? Представим для простоты кремниевый кубик, вдоль ребра которого располагается 100 атомов. Тогда доля поверхностных атомов (60000 шт.) от их количества во всем объеме (1000000 шт.) составит всего 6%, и вряд ли при этом квантово-размерные эффекты могут проявиться в полной мере. Но при 10 атомах на ребро доля поверхностных атомов составит 60%, и ситуация изменится на прямо противоположную. Поперечник этого кубика близок к 5 нм – так родился термин *«нанокристалл»*. Похоже, что нанокристаллы образуются в так называемом пористом кремнии, когда в результате специальной электрохимической обработки пластины создается текстура из тончайших кремниевых волосков, подобная сладкой вате. Во всяком случае, свечение таких структур наблюдалось, так что можно начинать фантазировать о микросхемах, сочетающих электрические и световые связи, надежные и безынерционные. Обретут ли нанокристаллы воспроизводимую технологию, встроится ли этот проект в традиционную микроэлектронику? Очень большой вопрос...

---

[2] *Вообще-то на коротковолновом краю видимого спектра находится фиолетовый свет, но он практически почти не используется.*

Что такое комбинаторика

А.ЛЕВИН

Что такое счастье

Вернемся к уравнению (6) $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m)$. Уместно посмотреть, что произойдет, если игнорировать порядок слагаемых. Для определенности будем считать слагаемые положительными и рассмотрим следующую задачу.

Задача 13. *Сколькими способами можно разбить число m на $n\,(\le m)$ натуральных слагаемых, если разбиения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются тождественными?*

Решили? Нет? Это и неудивительно: задача не решается в привычном смысле. Хотелось бы, чтобы, как и ранее, ответ давался в виде явно выписываемой функции $f(m, n)$. Но на этот раз сколько-нибудь «явно» выразить ответ через параметры задачи m, n не удается.

Разумеется, для любых конкретных чисел m, n мы в принципе можем вычислить численное значение $f(m, n)$ – хотя бы перебором, на худой конец. Например, легко убедиться, что $f(8, 3) = 5$, ибо существует 5 способов разбиения (с точностью до порядка) числа 8 на 3 слагаемых:

$$1 + 1 + 6,\ 1 + 2 + 5,\ 2 + 2 + 4,\ 1 + 3 + 4,\ 2 + 3 + 3.$$

С помощью компьютера можно быстро вычислять и такие значения, как, например, $f(100, 10)$. Только перебором не стоит заниматься, существует куда более эффективный алгоритм. Полезно заметить, что отождествление разбиений, отличающихся порядком, можно заменить требованием упорядоченности x_i, скажем, в неубывающем порядке:

$$(1 \le)x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n. \qquad (8)$$

Таким образом, $f(m, n)$ есть число решений в натуральных числах системы, состоящий из уравнения (6) и неравенств (8). Такая переформулировка удобна во многих отношениях; она может помочь и при выборе эффективного алгоритма вычисления f. Разработка и программная реализация алгоритма – а заодно и вычисление $f(100, 10)$ – предоставляется читателю в качестве полезного и интересного самостоятельного задания. Заметим лишь, что алгоритм будет носить рекуррентный характер – от меньших значений параметров к бо́льшим.

Относится ли данное задание к комбинаторике или к информатике? К тому и к другому. Можно назвать это компьютерной комбинаторикой. Жаль, что в русском языке пока нет слова «алгоритмика». Оно было бы кстати. (Впрочем, скорее всего, оно появится в недалеком будущем).

Разумеется, для вычислений с $n!$ при заданном n также можно написать программу (причем число операций будет расти вместе с n). Почему же мы относим выражения $n!$, $\binom{n}{m}$ и т.п. к «явным» аналитическим выражениям в отличие от $f(m, n)$? Обозначения здесь ни при чем: ведь при желании можно и для $f(m, n)$ придумать какое-нибудь специальное обозначение (скажем, $m?n$). Суть в том, что особая простота «факториального» алгоритма и в самом деле позволяет обращаться с факториалами как с аналитическими выражениями – подставлять в формулы и проводить преобразования. Об этом наглядно свидетельствует, например, приводимая ниже выкладка (15). С произвольными программами такое, разумеется, невозможно.

При первом знакомстве с комбинаторикой «нерешабельные» задачи обычно не затрагиваются. Мы нарушили эту традицию, чтобы читатель с самого начала имел правильное представление о предмете. Он должен почувствовать, что наличие «явного» ответа для комбинаторной задачи с параметрами (т.е. для задачи, в формулировку которой входят буквы) – это удача, счастливый случай, который надо ценить. Такие случаи осуществляются в комбинаторике довольно часто. Но, к сожалению, не всегда.

Знак Σ

Те, кто знаком с этим обозначением, могут данный пункт пропустить. Они ведь и так знают, что эта прописная греческая буква (сигма) является общепринятым символом суммирования. Обычно суммирование идет по одному или нескольким целочисленным индексам. Если индекс пробегает значения «от и до», то нижняя и верхняя границы указываются, соответственно, внизу и вверху; в более сложных случаях область изменения индексов обычно указывается под буквой Σ. Вот несколько примеров:

$$1)\ \sum_{k=1}^{n} a_k;\ 2)\ \sum_{k} a_k;\ 3)\ \sum_{k=1}^{n} a_k = m;$$

$$4)\ \sum_{j=0}^{\infty} aq^j = \frac{a}{1-q};\ 5)\ \sum_{1\le i<j\le 4} x_{i,j};$$

$$6)\ \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 \ge 0 \\ n_1+n_2+n_3=2}} \frac{1}{n_1!\,n_2!\,n_3!}.$$

В случае 1) записана сумма $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ (здесь Σ легко заменить многоточием, но так дело обстоит не всегда). В 2) указан индекс суммирования k, но не его границы; они, следовательно, должны быть ясны из контекста. В 3) читатель узнает уже знакомое нам «уравнение дележа» (6), а в 4) – формулу для суммы членов геометрической прогрессии (при $|q| < 1$); здесь число слагаемых, очевидно, бесконечно. В 5) записано выражение

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{24} + x_{34},$$

Окончание. Начало см. в «Кванте» №5.


К
ОМ

а в 6) – величина

$$\frac{1}{2!0!0!}+\frac{1}{0!2!0!}+\frac{1}{0!0!2!}+\frac{1}{1!1!0!}+ +\frac{1}{1!0!1!}+\frac{1}{0!1!1!}(=4,5).$$

Как видим, в случаях 5), 6) легко обойтись и без Σ. Но представьте себе, что в 6), например, 2 заменено на 200. Запись с Σ останется столь же короткой, а о «явной» записи (без Σ) даже думать не хочется.

При многоиндексном суммировании довольно часто встречаются «кратные» Σ (Σ под знаком Σ); мы их применять не будем.

Комбинаторика помогает алгебре

Все знают формулу

$$(x_1+x_2)^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2.$$

Эрудиты помнят также выражения для куба суммы двух слагаемых и для квадрата суммы произвольного числа слагаемых. Но даже из эрудитов мало кто подозревает, что все это – одна и та же формула, вернее, ее частные случаи. Вот она, эта формула:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n= =\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_m\ge 0\\ k_1+\ldots+k_m=n}}\frac{n!}{k_1!\ldots k_m!}x_1^{k_1}\ldots x_m^{k_m}. \quad (9)$$

Некоторая сложность выражения является, так сказать, платой за универсальность – ведь формула верна для любых натуральных m и n. Суммирование в (9) ведется по всем целочисленным кортежам, удовлетворяющим указанным условиям.

Читателю предлагается самостоятельно проверить, что при $n = 2$ (9) переходит в обычную формулу для квадрата суммы. Такая проверка, конечно, не заменяет обоснования, которым мы теперь и займемся.

Тот факт, что правая часть (9) является суммой членов вида

$$cx_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_m^{k_m}\,(k_1,\ldots,k_m\ge 0, \quad k_1+\ldots+k_m=n),$$

ясен. Все дело в том, чтобы найти коэффициент c (зависящий, конечно, от k_1, …, k_m).

Чтобы не утомлять читателя суетой с индексами, затемняющей суть дела, мы, как и ранее, ограничимся частным случаем. Основная идея очевидным образом переносится на общий случай.

Примем для определенности $m=3$, $n=7$ и найдем коэффициент при $x^2y^2z^3$ в выражении

$$(x+y+z)^7, \quad (10)$$

или, точнее, в выражении, которое получится после возведения в степень и приведения подобных членов.

Забудем временно о показателях степени и запишем (10) в виде произведения 7 скобок

$$(x+y+z)(x+y+z)\ldots(x+y+z). \quad (11)$$

Выполняя почленное умножение без изменения порядка сомножителей, мы будем получать произведения, выглядящие как слова. Скажем, если в каждой скобке берется первое слагаемое, получим $xxxxxxx$. Нас, однако, сейчас интересуют произведения, куда x, y и z входят сомножителями 2, 2 и 3 раза соответственно. Например, произведение

$$yxxzzzy,$$

которое получается, если в первой скобке берется второе слагаемое, во второй и третьей – первое и т.д. Сколько будет слагаемых этого типа?

Знакомая ситуация, не правда ли? Помните, мы переставляли буквы слова КОЛОКОЛ и нашли, что таким образом можно получить $\frac{7!}{2!2!3!}=210$ различных слов (перестановки с повторениями)? Теперь у нас вместо К, Л, О буквы x, y, z. Разумеется, на ответ это не влияет. Итак, соответствующее слагаемое имеет вид

$$\frac{7!}{2!2!3!}x^2y^2z^3=210x^2y^2z^3.$$

Мы получили (для $m=3$, $n=7$) одно из слагаемых в правой части (9). Все остальные получаются точно так же.

Да, кстати, а сколько всего этих слагаемых? Конечно же, слагаемых ровно столько, сколько решений в целых числах $k_i\ge 0$ у нашего любимого уравнения $k_1+\ldots+k_m=n$, т.е. $\binom{n+m-1}{m-1}$. В данном случае получится $\binom{9}{2}=36$ слагаемых.

Кому-то наши скоростные способы «возведения в степень без возведения в степень» могут показаться сомнительными. Что ж, скептики могут, например, честно перемножить скобки в (11), привести подобные и непосредственно проверить, сколько получится слагаемых и каков окажется коэффициент при $x^2y^2z^3$.

По-человечески жаль их, конечно. Все-таки седьмая степень. Почти наверняка где-то собьются, надо будет искать ошибку, исправлять… чтобы после всех трудов «причалить», наконец, к числам 36, 210, которые мы нашли, можно сказать, устно.

Любимая формула Коровьева (бином Ньютона)

«Подумаешь, бином Ньютона», – говаривал небезызвестный Коровьев, вице-премьер еще более небезызвестного Воланда. Что, собственно, он имел в виду?

Смысл ясен – это, мол, не проблема. Но все-таки: что за бином такой?

А это просто частный случай формулы (9) при $m=2$:

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k. \quad (12)$$

Кстати, бином в переводе значит двучлен (а речь здесь идет именно о степени двучлена). Теперь читателю ясно, почему числа сочетаний обычно называют биномиальными коэффициентами.

Для примера возьмем, скажем, $n=4$:

$$(x+y)^4=\binom{4}{0}x^4+\binom{4}{1}x^3y+ +\binom{4}{2}x^2y^2+\binom{4}{3}xy^3+\binom{4}{4}y^4= =x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4. \quad (13)$$

Разумеется, для столь малого $n(=4)$ тот же результат легко получить простым возведением в степень – например, возведя в квадрат $x^2+2xy+y^2$. Суть биномиальной формулы (12) именно в том, что она дает ответ непосредственно, без обращения к низшим степеням. То же относится и к более общей формуле (9) (ее иногда называют полиномиальной).

Следующая таблица известна как арифметический треугольник, или

Иллюстрация Ю.Ващенко

треугольник Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

....

Если считать верхнюю строку нулевой, то в n-й строке стоят (в естественном порядке) коэффициенты разложения $(x+y)^n$. Например, четвертую строку образуют коэффициенты в правой части (13). Ясно, что таблицу можно продолжать неограниченно.

Данное расположение биномиальных коэффициентов обладает очень симпатичным свойством: каждый элемент таблицы (кроме окаймляющих единиц) есть сумма двух, стоящих непосредственно над ним. Соответствующее равенство

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad (14)$$

можно доказать тремя простыми способами.

Во-первых, прямой выкладкой:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} =$$

$$= \frac{(k-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} =$$

$$= (n-1)!\left(\frac{k}{k!(n-k)!} + \frac{n-k}{k!(n-k)!}\right) =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \qquad (15)$$

Во-вторых, при помощи комбинаторных соображений: число k-подмножеств n-множества, т.е. $\binom{n}{k}$, есть число k-подмножеств, содержащих какой-либо фиксированный элемент, т.е. $\binom{n-1}{k-1}$, плюс число k-подмножеств, не содержащих того элемента, т.е. $\binom{n-1}{k}$.

Третий способ – приравнивание коэффициентов при $x^{n-k}y^k$ в тождестве

$$(x+y)^n = (x+y)^{n-1}(x+y).$$

Конечно, для доказательства (14) вполне достаточно одного способа. Но для решения более сложных задач полезно уяснить связь между разными подходами.

До сих пор для вычисления $\binom{n}{k}$ у нас была формула (5), основанная на операциях умножения и деления. Треугольник Паскаля показывает, между прочим, что можно обойтись только операцией сложения (натуральных чисел). Требуемое число операций не слишком велико (кстати, найдите его), хотя и заметно больше, чем в формуле (5).

Помимо (14), имеется ряд других любопытных закономерностей. Скажем, сумма элементов n-й степени равна 2^n. Действительно, она равна $(x+y)^n$ при $x = y = 1$. Далее, в каждой строке (кроме нулевой) суммы элементов на четных и на нечетных местах совпадают. Для первой, третьей и т.д. строк это очевидно из соображений симметрии (одинаковые слагаемые в обеих суммах). Но, например, и для четвертой строки имеем $1 + 6 + 1 = 4 + 4$, хотя слагаемые различны. Почему бы это? Ключ к разгадке – та же биномиальная формула.

В общем, арифметический треугольник заслуживает того, чтобы изучить его вдоль и поперек. Да и наискосок тоже.

Ал-Каши и школьники

Комбинаторные понятия и, в частности, биномиальные коэффициенты встречаются в математике на каждом шагу. В связи с этим возникает пикантный вопрос об отношении к комбинаторике авторов наших школьных программ и учебников. Если, конечно, полное игнорирование можно считать отношением.

Важность комбинаторики была осознана давно. Бином Ньютона и треугольник Паскаля, вопреки названиям, были известны до Ньютона и Паскаля. Например, в начале XV века самаркандский математик и астроном ал-Каши написал общедоступный учебник элементарной математики «Ключ к арифметике». Наряду с десятичными дробями, извлечением корней и т.п. там приводились биномиальные коэффициенты и арифметический треугольник.

Для постановки образования на Руси усилия ал-Каши не могли иметь заметных последствий. Не до науки было – смуты, междоусобицы, монголы... Да и вдобавок объединитель Руси Иван III к тому времени еще и родиться-то не успел.

С тех пор прошло без малого шесть веков. А выпускники наших школ знают о комбинаторике примерно столько же, сколько во времена монгольского ига. Вот разве что само название бинома Ньютона знакомо теперь многим школьникам. Да и то благодаря роману «Мастер и Маргарита»!

Несколько слов об операциях над множествами

Вообще-то эта тема заслуживает более чем нескольких слов, но мы коснемся ее лишь по мере надобности. К тому же для большинства читателей, вероятно, тема эта не нова.

Простейшая операция над множеством A – образование его дополнения $\overline{A}$, т.е. множества, состоящего из всех элементов, не принадлежащих A (при этом предполагается наличие некоторого «объемлющего» множества B, для которого A и $\overline{A}$ – подмножества). Мы по существу уже пользовались понятием дополнения, когда переходили к множеству «ненужных» объектов. При этом применялось очевидное соотношение $|A| + |\overline{A}| = |B|$. Здесь и далее через $|C|$ обозначается количество элементов множества C (мы рассматриваем лишь конечные множества).

Объединением

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$$

множеств $A_1, \ldots, A_m$ называется множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств $A_1, \ldots, A_m$. Пересечением

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m$$

или просто $A_1A_2\ldots A_m$

множеств $A_1, \ldots, A_m$ называется множество элементов, принадлежащих всем множествам $A_1, \ldots, A_m$.

Если, например, A_1 – множество четных цифр, т.е. $A_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, A_2 – множество цифр, кратных трем, т.е. $A_2 = \{0, 3, 6, 9\}$, то

$$A_1 \cup A_2 = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9\},$$

$$A_1A_2 = \{0, 6\},$$

$$|A_1 \cup A_2| = 7, \ |A_1A_2| = 2.$$

Далее используются некоторые очевидные свойства операций объединения и пересечения – например, независимость их от порядка $A_1, \ldots$ $\ldots, A_m$, а также свойства типа

$$AA = A,$$

$$A(B \cup C \cup \ldots \cup D) = AB \cup AC \cup \ldots \cup AD.$$

(Принимается, что пересечение связывает сильнее, чем объединение, т.е., например, $AB \cup AC = (AB) \cup (AC)$.)

Теперь мы можем так записать принцип сложения: если множества $A_1, \ldots A_m$ попарно не пересекаются (т.е. $|A_i A_j| = 0$ при всех $i \neq j$, $1 \le i$, $j \le m$), то

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = \sum_{i=1}^{m} |A_i|. \quad (16)$$

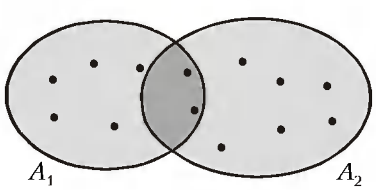
Конечно, этот факт очевиден, как его ни записывай. Но попарно пересекающиеся множества – это очень частный (и очень простой) случай. Можно ли получить аналог формулы (16) для общего случая? Да, и в нескольких формах. Нас будет особо интересовать одна из них (не использующая дополнений к $A_1, \ldots$ $\ldots, A_m$).

Слабонервных просят не читать (формула включений и исключений)

Случай $m = 2$, впрочем, рекомендуется всем, даже слабонервным. Действительно, при $m = 2$ формула, о которой идет речь, имеет вполне симпатичный вид

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 - A_2|. \quad (17)$$

Ее и доказывать-то не надо, достаточно взглянуть на рисунок:



$|A_1 \cup A_2|$ – количество точек (элементов) во всей заштрихованной области. Складывая $|A_1|$ и $|A_2|$, мы дважды засчитываем точки из области с двойной штриховкой, т.е. из A_1A_2. Поэтому вычитание $|A_1A_2|$ все ставит на свои места.

Итак, элементы A_1A_2 сначала «включаются» в сумму избыточным образом, затем это исправляется соответствующим «исключением». Отсюда и название формулы. В общем случае она выглядит довольно устрашающе, и мы прелагаем ее лишь для читателей не робкого десятка:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| =$$

$$= \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i A_j| +$$

$$+ \sum_{i<j<k} |A_i A_j A_k| - \ldots + (-1)^{m+1} |A_1 A_2 \ldots A_m| \quad (18)$$

(все индексы суммирования меняются между 1 и m).

При $m = 2$ получается, конечно, (17), где в правой части всего 3 слагаемых. Сколько же вообще слагаемых (того или иного знака) в «сумме сумм», стоящей в правой части? Столько же, сколько непустых подмножеств у m-множества, т.е. $2^m - 1$. Если, скажем, $m = 30$, то слагаемых уже больше миллиарда. А ведь чтобы найти каждое слагаемое, надо определить число элементов, общих для какого-то набора из множеств $A_1, \ldots, A_m$. Неужели столь громоздкая уродливая формула может быть полезной?

Вопрос, понятно, риторический. Для чего же еще мы стали бы ее приводить – ради красоты, что ли?

В задачниках часто можно найти примеры применения формулы (18) наподобие следующего.

Задача 14. *Ученики некоторого класса занимаются только тремя видами спорта – бегом, плаванием и теннисом. Бегом всего занимается 10 человек, плаванием – 13, теннисом – 11, бегом и плаванием – 4, бегом и теннисом – 5, плаванием и теннисом – 6, бегом, плаванием и теннисом – 2. Сколько учеников данного класса занимается спортом?*

Для решения применим формулу (18). Если множество учеников, занимающихся бегом, обозначить через A_1, плаванием – через A_2 и теннисом – через A_3, то искомая величина есть

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| -$$

$$-|A_1A_2| - |A_1A_3| - |A_2A_3| + |A_1A_2A_3| =$$

$$= 10 + 13 + 11 - 4 - 5 - 6 + 2 = 21.$$

Все правильно, но в полезности формулы (18) подобные примеры не очень убеждают. Как-то трудно поверить, что лица, обладающие столь детальной информацией о занятости учеников всевозможными комбинациями видов спорта, почему-то не знают, сколько же учеников занимается спортом, и обращаются за помощью к нам – т.е. к формуле включений и исключений. Намного более интересное приложение будет рассмотрено в следующем разделе.

Мы увлеклись обсуждением формулы (18) и едва не забыли про доказательство. С применением индукции оно оказывается довольно простым. Пусть формула уже доказана для $m' = 2$ и $m' = m - 1$. Полагая $A_1 \cup \ldots \cup A_{m-1} = B$, находим

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_m| = |B \cup A_m| =$$

$$= |B| + |A_m| - |BA_m| =$$

$$= |B| + |A_m| - A_1A_m \cup \ldots \cup A_{m-1}A_m =$$

$$= \sum_{i<m} |A_i| + |A_m| - \sum_{i<j<m} |A_iA_j| -$$

$$- \sum_{i<m} |A_iA_m| + \ldots =$$

$$= \ldots \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_iA_j| + \ldots$$

Полезная все-таки вещь – индукция!

Число перестановок, имеющих неподвижные элементы

Рассмотрим 3! = 6 возможных перестановок чисел 1, 2, 3:

123, 132, 213, 231, 312, 321.

В первой из них все три числа стоят на своих местах («неподвижны»). Во второй есть один такой элемент (1); также по одному неподвижному элементу имеют третья (3) и шестая (2). В четвертой и пятой перестановках неподвижных элементов нет.

Рассмотрим вопрос: сколько из $m!$ перестановок чисел 1, 2, ..., m имеют неподвижные элементы?

Для $m = 3$ ответ, как мы видели, 4 (для $m = 2$ такая перестановка, очевидно, одна). Вручную нетрудно решить задачу перебором для случая $m = 4$; при $m = 5$ возникает мысль о применении компьютера. В самом деле, даже при m порядка 10 – 12 (когда перебор вручную нереален) компьютерный перебор не занимает много времени. Но уже при $m = 20$ перебор 20! перестановок недоступен для компьютеров. Надо, стало быть, искать какие-то более действенные средства подсчета. Другими словами, обратиться к комбинаторике.

Перестановка с неподвижными элементами – это перестановка, имеющая хотя бы один неподвижный элемент. Некоторые читатели, вероятно, помнят, что, когда возникает выражение «хотя бы один», часто удобно переходить к дополнительному множеству, где таких элементов нет ни одного. Тем более, что и принцип умножения сам в руки просится.

Итак, подсчитываем с помощью этого принципа число «ненужных» (т.е. не имеющих неподвижных элементов) перестановок. На первой позиции кортежа может стоять любое число, за исключением 1, т.е. $n_1 = m - 1$. Далее, на второй позиции может стоять любое число, кроме 2 и числа, стоящего на первой позиции; стало быть, $n_2 = m - 2$. Продолжая это рассуждение, доходим до $n_{m-1} = 1$ и, наконец, до $n_m = 0$. Мы пришли к неожиданному результату – оказывается, перестановок без неподвижных элементов не существует! А то, что примеры таких перестановок у нас перед глазами – это, по-видимому, не более чем мираж...

В чем дело, читатель? Ваша версия? Если таковой нет, подумайте.

Конечно, дело в применении (вернее, в «применении») принципа умножения. Вернемся к нашим рассуждениям. Первый шаг безупречен: $n_1 = m - 1$. Но вот второй... Мы молчаливо предположили, что число, стоящее на первой позиции, и 2 – это два различных числа. Но ведь перестановка может начинаться с 2, тогда для второй позиции имеется не $m - 2$, а $m - 1$ возможностей. Итак, оказывается, наше множество не имеет простой структуры (когда число возможностей не зависит от того, что стоит на предшествующих позициях). Для применимости принципа умножения этот факт является роковым.

Раз не удалось взять крепость кавалерийским наскоком, придется пустить в ход тяжелую артиллерию – формулу включений и исключений.

Пусть A_k – множество перестановок с неподвижным элементом k $(1 \le k \le m)$. Требуется найти величину $N_m = \left|A_1 \cup \ldots \cup A_m\right|$ (мы вернулись к «нужным» перестановкам). Заметим, что для любых k $(1 \le k \le m)$ различных индексов i_1, i_2, ..., i_k

$$\left|A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}\right| = (m-k)!.$$

В самом деле, пересечение $A_{i_1} A_{i_k}$ – это множество перестановок, в которых числа i_1, ..., i_k закреплены на своих местах, а остальные $m - k$ чисел из 1, 2, ..., m могут быть расположены в произвольном порядке на $m - k$ свободных местах (попадут ли какие-либо из них на свои места, не имеет отношения к делу). Итак, искомое число есть количество перестановок из $m - k$, т.е. $(m - k)!$.

Теперь формула (18) резко упрощается. Поскольку число слагаемых в сумме, где участвуют пересечения вида $A_{i_1} \ldots A_{i_k}$, равно

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

и каждое слагаемое в этой сумме равно $(m - k)!$, получаем

$$N_m = \left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m\right| = \frac{m!}{1!} - \frac{m!}{2!} + \frac{m!}{3!} - \ldots + (-1)^{m+1}.$$

Например, при $m = 6$ число перестановок с неподвижными элементами есть

$$N_6 = 720 - 360 + 120 - 30 + 6 - 1 = 455.$$

Еще интереснее вопрос о том, как ведет себя доля таких перестановок (среди всех $m!$ перестановок)

$$\frac{N_m}{m!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{m+1}}{m!}. \qquad (19)$$

С ростом m эта доля приближается к бесконечной сумме

$$\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots \qquad (20)$$

«Бесконечность» здесь относится лишь к числу слагаемых, но не к самой величине суммы, которая имеет вполне определенное и конечное значение, являющееся пределом сумм (19) при $m \to \infty$. Ситуация здесь вполне аналогична суммированию убывающей геометрической прогрессии. Математики в таких случаях говорят, что *ряд* (20) *сходится*. С помощью разных методов удалось, помимо суммы членов убывающей геометрической прогрессии, найти суммы огромного числа других сходящихся рядов. Доказано, в частности, что сумма ряда (20) есть

$$1 - \frac{1}{e} = 0{,}6321\ldots,$$

где $e(= 2{,}718\ldots)$ – основание натуральных логарифмов.

Итак, с ростом m доля перестановок с неподвижными элементами стремится не к 0 или 1 (как можно было бы предположить), а к довольно загадочной величине $1 - e^{-1}$.

После этого красивого результата стоит, пожалуй, пересмотреть наш взгляд на формулу (18). Да, конечно, простые, короткие формулы приятнее для глаза. Но ведь бывает и так – и мы только что это видели, – что громоздкая с виду формула дает кратчайший путь к решению. А простые формулы либо вообще не годятся, либо приводят к длинным, громоздким способам решения задачи.

Так что, может быть, формула (18) вовсе не так уж уродлива? И даже совсем наоборот?

Наука велика, а жизнь коротка

Мы обсудили некоторые простейшие задачи комбинаторики. Можно назвать это введением в комбинаторику, дающим первое представление о предмете. Очень многое, конечно, пришлось оставить за бортом.

Не коснулись мы, например, так называемого метода производящих функций, где уже не комбинаторика помогает алгебре, а, наоборот, алгебра и анализ помогают комбинаторике (впрочем, разобраться, кто кому «помогает», не всегда просто, лучше говорить о взаимодействии различных областей математики). Хотелось бы поговорить о приложениях комбинаторики в теории вероятностей, затронуть интереснейшие приложения в физике (периодическая таблица Менделеева, второе начало термодинамики), обсудить роль комбинаторики в планировании эксперимента, в кодировании, рассмотреть комбинаторную природу генетического кода... Увы, нельзя объять необъятное, как отметил знаменитый Козьма Прутков. И еще до него древние высказывались в том смысле, что, дескать, ars longa, vita brevis. Поскольку «латынь из моды вышла ныне», даем вольный перевод: наука велика, а жизнь коротка.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта 2000 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6 — 99» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1706» или «Ф1713». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1706 и М1708 предлагались на Санкт-Петербургской математической олимпиаде этого года.

Задачи М1706—М1710, Ф1713—Ф1717

М1706. Пусть AL и BM – биссектрисы треугольника ABC. Известно, что одна из точек пересечения описанных окружностей треугольников ACL и BCM лежит на отрезке AB. Докажите, что $\angle ACB = 60°$.

Е.Сопкина

М1707*. Квадрат клетчатой бумаги, состоящий из $n \times n$ клеток, разрезан на $2n$ прямоугольников. При этом каждый прямоугольник расположен либо целиком ниже, либо выше ступенчатой ломаной, разделяющей квадрат (рис.1). Докажите, что найдется клетка клетчатой бумаги, являющаяся одним из названных прямоугольников.

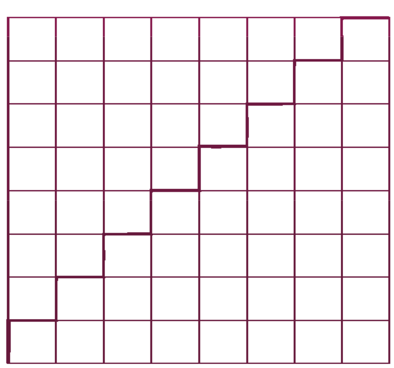


Рис.1

В.Произволов

М1708. Играют двое. Они по очереди пишут на доске делители числа 100!, отличные от 1 (без повторений). Проигрывает тот игрок, после хода которого числа на доске окажутся в совокупности взаимно просты. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его противник?

Д.Карпов

М1709. Окружность пересекает стороны прямоугольника в восьми точках, которые последовательно занумерованы. Докажите, что площадь четырехугольника с вершинами в точках с нечетными номерами равна площади четырехугольника с вершинами в точках с четными номерами (рис.2).

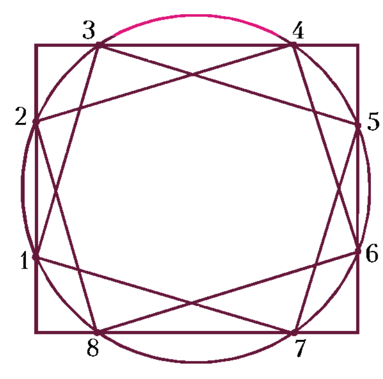


Рис.2

В.Произволов

М1710*. Пусть x, y, z, p, q, r – положительные числа такие, что $p+q+r=1$, $x^p y^q z^r = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{p^2x^2}{qy+rz}+\frac{q^2y^2}{px+rz}+\frac{r^2z^2}{px+qy} \geq \frac{1}{2}.$$

С.Калинин

Ф1713. Система состоит из большого тела массой M, к которому прикреплены два блока, и двух одинаковых гладких тел массой $M/5$ каждое (рис.3). Каким должен быть коэффициент трения между большим телом и поверхностью стола, чтобы это тело могло оставаться неподвижным при любых значениях направленной вертикально вниз силы $\vec{F}$? Нити считать легкими и нерастяжимыми, трение учитывать только между поверхностью стола и большим телом. Считайте, что за время решения этой задачи тела не успеют удариться о блоки.

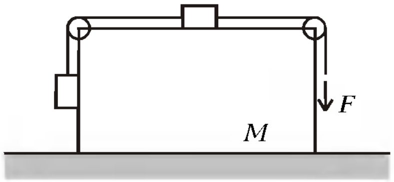


Рис.3

З.Рафаилов

Ф1714. Внутри большого теплоизолированного сосуда находится 32 г кислорода, температура сосуда и кислорода 300 К, манометр показывает давление 1 атм. Еще внутри сосуда находится очень легкая капсула, содержащая 1 г гелия при температуре 500 К. Капсула лопается, и гелий выходит из нее в сосуд. Как будут меняться со временем показания манометра? Теплоемкость большого сосуда составляет 1000 Дж/К.

А.Теплов

Ф1715. Собрана схема их трех одинаковых батареек по 9 В и четырех одинаковых вольтметров (рис.4). Найдите показания приборов.

А.Повторов

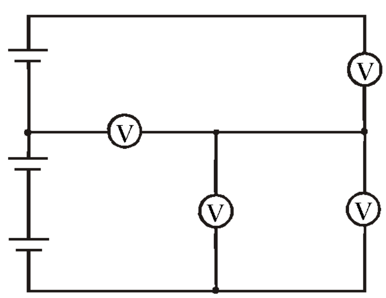


Рис.4

Ф1716. Две одинаковые катушки индуктивности расположены недалеко друг от друга. Одна из них подключена к источнику синусоидального переменного напряжения последовательно с амперметром, к концам другой катушки подключен второй амперметр. Амперметры показывают 1 А и 0,2 А (угадайте сами, какой из них показывает 1 А, а какой 0,2 А). Один из амперметров отключают (при отключении амперметра цепь разрывается). Что покажет после этого оставшийся амперметр? Катушки, приборы и источник можно считать идеальными. Сопротивление проводов пренебрежимо мало.

Р.Александров

Ф1717. На расстоянии $d = 0{,}6$ см от центра стеклянного шара радиусом $R = 1$ см находится точечный источник света. При каких значениях коэффициента преломления стекла n весь испускаемый источником световой поток выйдет наружу? Оцените долю вышедшего наружу потока при $n_1 = 1{,}6$. Снаружи – вакуум; источник излучает во все стороны равномерно.

А.Зильберман

Решения задач М1681–М1690, Ф1698–Ф1702

М1681. *Квадрат целого числа оканчивается на ...21. Может ли третья цифра справа быть четной?*

Ответ: не может.

Число y, возводимое в квадрат, оканчивается на 1 или на 9.

Пусть $y = 10a + 1$. Так как $2a$ оканчивается на 2, то последней цифрой ,будет a – 1 или 6.

Пусть $y = 10a + 9$. Так как $8(a + 1)$ оканчивается на 2, то $a + 1$ – на 4 или на 9. Итак, последней цифрой a будет 3 или 8. Но

$$11^2 = 121,\ 61^2 = 3721,$$

$$39^2 = 1521,\ 89^2 = 7921.$$

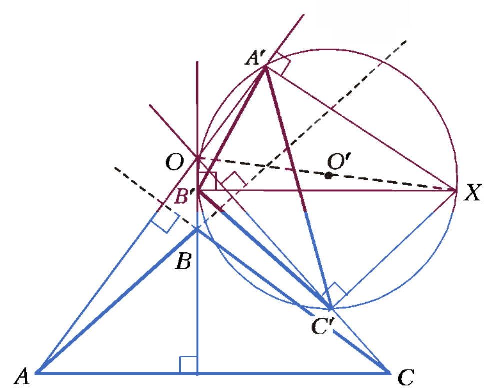
Значит, третья цифра справа всегда нечетна.

Наметим другое решение. Если третья цифра четна, то $y^2 \equiv 5 (\bmod 8)$ – противоречие: квадрат нечетного числа при делении на 8 дает остаток 1.

В.Сендеров

М1682. *Из какой-либо точки плоскости опускаются перпендикуляры на высоты треугольника (или на их продолжения). Докажите, что основания перпендикуляров являются вершинами треугольника, подобного исходному.*

Для исходного треугольника ABC основания названных перпендикуляров, опущенных из точки X, – точки A', B' и C', а точка O – точка пересечения его высот (см. рисунок).



Заметим, что углы $C'XB'$ и BAC, а также $A'XB'$ и ACB равны. Соединим точки X и O. Очевидно, что точки A', B' и C' лежат на одной окружности с центром в середине XO (эти точки являются вершинами прямых углов, опирающихся на XO). Поэтому угол $C'XB'$ равен углу $C'A'B'$, а угол $A'XB'$ равен углу $A'C'B'$, следовательно, треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны.

Р.Кудинов

М1683. *Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок. Известно, что можно выбрать по бусинке из каждой коробки так, что все цвета будут представлены. Докажите, что число способов такого выбора есть ненулевая степень двойки.*

Ясно, что пустых коробок нет. Если имеется коробка, в которой находится только одна бусинка, то эта бусинка в любом случае должна быть выбрана. Уберем эту коробку с бусинкой, а также вторую бусинку того же цвета (из другой коробки). Останутся 18 бусинок, разложенные в 9 коробок. Количество способов выбрать по бусинке из каждой коробки осталось при этом тем же, что и в исходной задаче. Будем продолжать действовать так до тех пор, пока имеются коробки, содержащие всего одну бусинку. Пустых коробок при этом появиться не может, так как это привело бы к противоречию с условием задачи: в этом случае не существовало бы ни одного способа требуемого выбора.

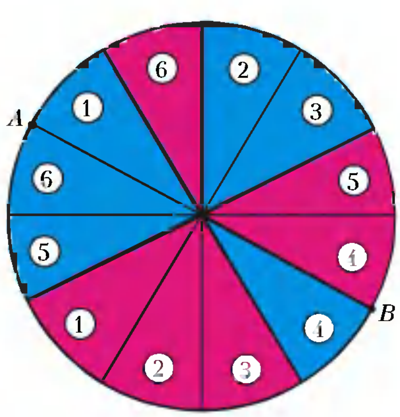
В результате останется $2n$ бусинок, разложенных в n коробок, по две в каждой. Будем выстраивать коробки в «цепочку» так, чтобы соседними были коробки, содержащие бусинки одного цвета (аналогично правилам игры в домино). Это можно делать до тех пор, пока цепочка не «замкнется», т.е. на концах не будут находиться коробки, содержащие бусинки одного цвета.

Все коробки при этом разобьются на несколько цепочек (в частности, если коробка содержит две бусинки одного цвета, то цепочка состоит из нее одной). Ясно, что выбрав одну из двух бусинок в любой из коробок, мы однозначно определяем выбор бусинок из других коробок той же цепочки и никак не ограничиваем выбор бусинок из коробок других цепочек. Поэтому общее количество способов требуемого выбора равно 2^k, где k – количество получившихся цепочек.

А.Гришин, В.Бугаенко

М1684*. *Круг разделен радиусами на 2n равных секторов, из которых какие-то n – синие, а остальные n – красные. В синие сектора, начиная с некоторого, по ходу часовой стрелки последовательно вписаны все натуральные числа от 1 до n. В красные сектора, начиная с некоторого, против хода часовой стрелки тоже последовательно вписаны все числа от 1 до n. Докажите, что найдется полукруг, в сектора которого вписаны все числа от 1 до n.*

Нужно доказать, что найдется диаметр AB, разделяющий сразу все пары одинаковых чисел (см. рисунок; здесь $n = 6$). Условимся называть красными числа, стоящие в красных секторах, и синими – стоящие в синих секторах. Расстоянием между двумя числами a и b назовем количество чисел, расположенных на меньшей дуге между числами a и b. Числа, расставленные по окружности, разбиваются на пары равных. Выберем ту пару равных чисел, расстояние между которыми наименьшее (если таких пар несколько, выберем любую из них). Пусть, для определенности, выбранная пара – красная единица и синяя единица, причем меньшая дуга ω между ними идет от красной единицы к синей против часовой стрелки. На дуге ω либо нет чисел (т.е. две единицы стоят рядом), либо все числа одного цвета, иначе красное и синее



числа n были бы на расстоянии меньшем, чем расстояние между единицами. Пусть все числа на этой дуге (если они есть) – синие (случай, когда они красные, аналогичен). Проведем диаметр, отделяющий синюю единицу от числа, следующего за ним по часовой стрелке; покажем, что этот диаметр искомый. Действительно, рассмотрим полукруг, содержащий синюю единицу. Прочтем синие числа, записанные в этом полукруге, начиная с единицы, против часовой стрелки – это числа 1, 2, ..., l (l – некоторое число). Прочтем теперь красные числа. Поскольку на дуге ω нет красных чисел, это будут числа n, $n-1$, ..., $n-m$ (m – некоторое число). Так как всего в полукруге n чисел, то в нем записаны все числа от 1 до n по одному разу.

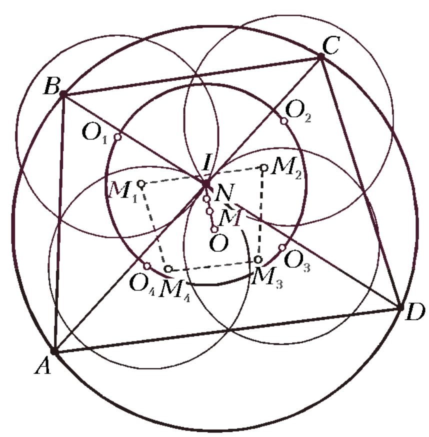
Мы разобрали ситуацию такую, когда пара разноцветных чисел с наименьшим расстоянием представлена единицами. Если таковые числа не единицы, то можно устроить циклическую перенумерацию так, чтобы они стали единицами.

В.Произволов

М1685. *В окружность вписан четырехугольник ABCD. Докажите, что окружности, проведенные через середины сторон треугольников ABC, BCD, CDA, DAB, имеют общую точку, а их центры лежат на одной окружности.*

Рассматриваемые в задаче окружности называются окружностями Эйлера, или окружностями девяти точек, так как они проходят через девять замечательных точек: середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с точкой пересечения его высот.

Обозначим центры окружностей Эйлера треугольников ABC, BCD, CDA, DAB соответственно O_1, O_2, O_3, O_4, точки пересечения медиан этих треугольников – M_1, M_2, M_3, M_4, центр окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$, обозначим O (см. рисунок).



Так как окружности Эйлера проходят через середины сторон соответствующих треугольников, то они гомотетичны описанной около четырехугольника $ABCD$ окружности с коэффициентом гомотетии $-\frac{1}{2}$ и центрами гомотетии соответственно в точках M_1, M_2, M_3, M_4. Но тогда O_1, O_2, O_3, O_4 можно рассматривать как точки, гомотетичные соответственно точкам M_1, M_2, M_3, M_4, с центром гомотетии в точке O и коэффициентом гомотетии

$K_1 = \frac{3}{2}$, т.е. четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$ гомотетичен четырехугольнику $M_1M_2M_3M_4$.

Теперь докажем, что четырехугольник $M_1M_2M_3M_4$ гомотетичен исходному четырехугольнику $ABCD$ с коэффициентом гомотетии $K_2 = -\frac{1}{3}$.

Поместим в вершинах четырехугольника $ABCD$ равные точечные массы. Центр масс системы A, B, C находится в точке M_1, поэтому центр масс системы A, B, C, D лежит на отрезке DM_1 и делит этот отрезок в отношении 3:1 (считая от точки D). Иными словами, точка M_1 гомотетична точке D с центром гомотетии, совпадающим с центром масс системы A, B, C, D, и коэффициентом гомотетии $K_2 = -\frac{1}{3}$.

Такое же заключение можно сделать и в отношении остальных вершин четырехугольника $M_1M_2M_3M_4$.

Следовательно, четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$ гомотетичен четырехугольнику $ABCD$ с коэффициентом гомотетии $K = K_1 \cdot K_2 = -\frac{1}{2}$, поэтому около четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$ можно описать окружность. Пусть I – центр этой окружности. Ее радиус равен половине радиуса окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$, так как $K = -\frac{1}{2}$. Но таковы же радиусы всех четырех окружностей Эйлера, т.е. их центры лежат на окружности того же радиуса, поэтому все окружности Эйлера проходят через точку I.

Нетрудно доказать, что центр масс системы A, B, C, D (или, что то же самое, точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$, и отрезка, соединяющего середины его диагоналей) находится на середине отрезка OI.

Пусть M – указанный центр масс, N – центр окружности, описанной около четырехугольника $M_1M_2M_3M_4$. По доказанному выше, точка N гомотетична точке O с центром гомотетии в точке M и коэффициентом гомотетии $-\frac{1}{3}$. Это утверждение можно записать иначе: точка N гомотетична точке M с центром гомотетии в точке O и коэффициентом гомотетии $\frac{4}{3}$.

В то же время, точка I гомотетична точке N с центром гомотетии в точке O и коэффициентом гомотетии $\frac{3}{2}$.

Следовательно, точка I гомотетична точке M с центром гомотетии в точке O и коэффициентом гомотетии $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2$.

Так как точка N делит отрезок OI в отношении 2:1 (считая от точки O), то точка N – центр гомотетии, переводящей четырехугольник $ABCD$ в четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$.

И.Вайнштейн

М1686. *Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке [0; 1] и удовлетворяют равенствам*

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = 1$$

и

$$\int_0^1 \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}\,dx = \sqrt{2}.$$

Докажите, что $f(x) = g(x)$ на отрезке [0; 1].

Для любой пары неотрицательных чисел a и b справедливо элементарное неравенство $a + b \le \sqrt{2\left(a^2 + b^2\right)}$. При этом неравенство обращается в равенство лишь тогда, когда $a = b$. Ввиду этого и условий задачи, можно записать цепочку неравенств

$$2 \le \int_0^1 \left(|f(x)| + |g(x)|\right)dx \le \sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}dx = 2.$$

Отсюда следует, что функции $f(x)$ и $g(x)$ равны и неотрицательны на отрезке [0; 1].

Подобным образом читатель может доказать аналогичное утверждение для трех (и более) функций: если $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке [0; 1] и

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \varphi(x)dx = 1,$$

а

$$\int_0^1 \sqrt{f^2(x) + g^2(x) + \varphi^2(x)}dx = \sqrt{3},$$

то

$$f(x) = g(x) = \varphi(x) \text{ на } [0, 1].$$

В.Произволов

М1687. *Будем называть размером прямоугольного параллелепипеда сумму трех его измерений – длины, ширины и высоты. Может ли случиться, что в некотором прямоугольном параллелепипеде поместится больший по размеру прямоугольный параллелепипед?*

Ответ: не может.

Пусть мы имеем прямоугольный параллелепипед P', лежащий внутри прямоугольного параллелепипеда P. Оценим двумя способами сумму l длин проекций трех взаимно перпендикулярных ребер параллелепипеда P' на три прямые, параллельные ребрам параллелепипеда P.

С одной стороны, сумма проекций трех взаимно перпендикулярных ребер параллелепипеда P' на любое ребро параллелепипеда P не превосходит длины этого ребра. Действительно, проекция внутреннего параллелепипеда на любое ребро внешнего есть отрезок, концы которого – это проекции двух противоположных вершин. От одной из них до другой можно пройти по трем взаимно перпендикулярным ребрам. Поэтому рассматриваемая проекция равна сумме проекций этих трех ребер; она, очевидно, не больше, чем длина ребра, на которое мы проецируем. Значит, l не превосходит размера параллелепипеда P.

С другой стороны, длина любого отрезка не превосходит суммы его проекций на три взаимно перпендикулярных направления. Поэтому размер параллелепипеда P' не больше l.

Тем самым, размер внутреннего параллелепипеда не больше размера внешнего.

А.Шень, В.Бугаенко

М1688*. *Дана функция* $f(x)=\left(x^2+ax+b\right)/\left(x^2+cx+d\right)$, *где трехчлены* x^2+ax+b *и* x^2+cx+d *не имеют общих корней. Докажите, что два утверждения равносильны:*
1) найдется числовой интервал, свободный от значений $f(x)$*;*
2) $f(x)$ *представима в виде* $f(x)=f_1\left(f_2\left(\ldots f_{n-1}\left(f_n(x)\ldots\right)\right)\right)$, *где каждая из функций* $f_i(x)$ *есть функция одного из видов:* k_ix+m_i, x^{-1}, x^2.

Поскольку квадрат функции принимает только неотрицательные значения, появляется интервал, свободный от значений функции.

С другой стороны, если есть интервал, свободный от значений функции f, тогда есть и интервалы, свободные от значений f^{-1}, $kf+m$. Поэтому, если f – суперпозиция функций вида x^2, x^{-1} и $kx+m$, то найдется интервал, свободный от значений f.

Теперь покажем, что если есть интервал, свободный от значений f, то f можно представить в виде искомой композиции. Для начала сведем задачу к случаю, когда множество значений f ограничено. В самом деле, пусть f не принимает значений из интервала $\left(x_0, x_0+\varepsilon\right)$, тогда функция

$$\left(f(x)-\left(x_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^{-1}<2\varepsilon^{-1}$$

ограничена.

Теперь рассмотрим пространство квадратных трехчленов x^2+px+q, где каждый квадратный трехчлен задается парой параметров (p, q).

Рассмотрим дискриминантную параболу $p^2=4q$. Для таких трехчленов $D=0$ и $x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$. Область внутри параболы отвечает множеству трехчленов с отрицательным дискриминантом, область вне – с положительным.

Если дробь $\dfrac{x^2+p_1x+q_1}{x^2+p_2x+q_2}$ несократима и определена при всех x, то знаменатель $x^2+p_2x+q_2$ не обращается в ноль и, стало быть, имеет отрицательный дискриминант (это означает, что соответствующая точка в пространстве трехчленов лежит внутри дискриминантной параболы). Теперь решение задачи вытекает из того факта, что прямая не может содержаться целиком внутри параболы, и следующих вспомогательных утверждений.

1. Пусть $X_1\left(p_1,q_1\right)$ и $X_2\left(p_2,q_2\right)$ – точки в пространстве параметров и пусть точки $X_3\left(p_3,q_3\right)$ и $X_4\left(p_4,q_4\right)$ лежат на прямой X_1X_2, тогда

$$\frac{x^2+p_3x+q_3}{x^2+p_4x+q_4}=\frac{\alpha\varphi+\beta}{\gamma\varphi+\delta},$$

где $\varphi=\dfrac{x^2+p_1x+q_1}{x^2+p_2x+q_2}$.

Доказательство. Поскольку точки X_3 и X_4 лежат на прямой X_1X_2, найдутся такие μ, ν, что

$$p_3=\mu p_1+(1-\mu)p_2,\ q_3=\mu q_1+(1-\mu)q_2,$$
$$p_4=\nu p_1+(1-\nu)p_2,\ q_4=\nu q_1+(1-\nu)q_2.$$

Тогда

$$\frac{x^2+p_3x+q_3}{x^2+p_4x+q_4}=$$
$$=\frac{\mu\left(x^2+p_1x+q_1\right)+(1-\mu)\left(x^2+p_2x+q_2\right)}{\nu\left(x^2+p_1x+q_1\right)+(1-\nu)\left(x^2+p_2x+q_2\right)}=\frac{\mu\varphi+(1-\mu)}{\nu\varphi+(1-\nu)},$$

что и требовалось.

2. Дробно-линейную функцию $\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ можно представить в виде композиции функций вида $kx+m$ и x^{-1}.

Доказательство. Можно считать, что $\gamma\neq 0$. Вычитая константу из дроби, сводим задачу к случаю, когда $\alpha=0$. Обращая такую дробь, приходим к линейной функции.

А.Белов, Г.Челноков

М1689. *Арифметическая прогрессия из натуральных чисел содержит не менее трех членов, их произведение – делитель некоторого числа* n^2+1.
а) Докажите, что существует такая прогрессия с разностью 12.
б) Докажите, что такой прогрессии с разностью 10 или 11 не существует.
в) Какое наибольшее число членов может содержать такая прогрессия с разностью 12?*

а) Рассмотрим числа 1, 13, 25; для них $5^2+1=13\cdot 2$, $7^2+1=25\cdot 2$. Число 57^2+1 делится на $13\cdot 25$: к этому легко придти непосредственно, а общий метод см. ниже.

б) Из трех чисел a, $a+10$, $a+20$ одно делится на 3, а n^2+1 на 3 не делится.

Случай разности 11 рассматривается аналогично.

в) Ни один из членов прогрессии не делится на 7, ибо на 7 не делится n^2+1. Значит, из семи членов прогрессии (если бы такая была) можно было бы выбрать два, разность которых делится на 7. Получили противоречие: $k\cdot 12$ кратно 7 (пишут: $k\cdot 12\,\vdots\,7$), где $0<k<7$.

Докажем, что прогрессия из шести членов есть:

$$(5,\ 17,\ 29,\ 41,\ 53,\ 65).$$

Нам нужно доказать существование такого числа n, что n^2+1 делится на

$$5\cdot 17\cdot 29\cdot 41\cdot 53\cdot 65=(25)\cdot 17\cdot 29\cdot 41\cdot 53\cdot 13. \qquad (*)$$

Каждое из шести чисел в правой части $(*)$ обладает нужным свойством:

$$(7+25x)^2+1\,\vdots\,25,\ (4+17y)^2+1\,\vdots\,17,$$
$$(12+29z)^2+1\,\vdots\,29,\ (9+41u)^2+1\,\vdots\,41,$$
$$(23+53v)^2+1\,\vdots\,53\ (\text{так как } 23^2+1=530),$$
$$(5+13w)^2+1\,\vdots\,13.$$

Теперь нам понадобится предложение, известное как «китайская теорема об остатках».

Теорема. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ – натуральные числа, каждые два из которых взаимно просты, $r_1, \ldots, r_m$ – произвольные целые числа. Тогда существуют целые числа $x_1, \ldots, x_m$ такие, что

$$a_1x_1+r_1=\ldots=a_mx_m+r_m.$$

При $m = 2$ теорема доказывается с помощью алгоритма Евклида, после чего ее утверждение распространяется на общий случай $m > 2$ по индукции.

Об этом важном предложении элементарной теории чисел и его применениях уже не раз рассказывалось на страницах нашего журнала (см., например, статью Д.Флейшмана «Китайская теорема об остатках и гипотеза Ченцова» в №3 за 1997 год).

Для окончания решения пункта в) достаточно применить теорему к системе уравнений $7 + 25x = 4 + 17y = \ldots$ $\ldots = 23 + 53v = 5 + 13w$.

Дополнение. Существуют ли более длинные арифметические прогрессии, удовлетворяющие всем условиям нашей задачи? На этот вопрос нетрудно ответить с помощью результатов статьи «Суммы квадратов и целые гауссовы числа» (см. «Квант» №3 за 1999 год). Именно, легко показать, что разность любой прогрессии задачи обязана делиться на 12. С другой стороны, выше мы показали, что разность любой такой прогрессии, содержащей не менее семи членов, должна делиться на 7.

Прогрессия задачи с разностью $12 \cdot 7 = 84$ существует: с помощью статьи «Суммы квадратов...» и китайской теоремы об остатках легко показать, что делителем некоторого числа $n^2 + 1$ является произведение всех членов прогрессии (29, 113, 197, 281, 365, 449, 533, 617, 701, 785).

Эта прогрессия содержит 10 членов; 11 же членов прогрессия задачи с разностью 84 содержать не может: 84 не делится на простое число $p = 4k + 3 = 11$.

В.Сендеров

М1690. *В каждой вершине выпуклого многогранника сходятся три ребра. Одна грань многогранника красная, остальные – синие. Известно, что любая синяя грань является многоугольником, около которого можно описать окружность. Докажите, что и красная грань является многоугольником, около которого можно описать окружность.*

Каждой вершине многогранника припишем сферу, которая проходит через нее и через три вершины, соединенные с ней ребрами. Сколько вершин у многогранника, столько будет и приписанных сфер, хотя некоторые из них могут совпадать. Покажем, что сферы, приписанные соседним вершинам, т.е. вершинам, являющимся концами одного ребра, обязательно совпадают при условии, что это ребро является общей стороной двух синих граней.

Пусть AB – такое ребро многогранника, а S_A и S_B – сферы, приписанные вершинам A и B. Заметим, что две окружности, описанные около двух граней, стороной которых является ребро AB, должны лежать как на сфере S_A, так и на сфере S_B. А это значит, что сферы S_A и S_B совпадают.

Если бы среди сфер, приписанных вершинам, нашлись несовпадающие, то нашлись бы несовпадающие сферы, приписанные соседним вершинам. Но этого не может быть, как показано выше. Значит, все приписанные сферы совпадают и являются сферой S, описанной вокруг многогранника.

Плоскость, которой принадлежит красная грань, пересекает сферу S по окружности, являющейся описанной окружностью для красной грани.

В.Произволов

Ф1698. *На рисунке вы видите изображение идущих часов, полученное с помощью компьютерного сканера. Принцип его работы прост. Мощная лампа создает на сканируемом объекте узкую освещенную полоску, а отраженный свет попадает на набор фотодатчиков, которые расположены в виде линейки, параллельной этой полоске. И лампа, и линейка датчиков расположены на подвижной каретке. Каретка движется с постоянной скоростью, и датчики через равные интервалы времени передают в компьютер изображение. Таким образом, при перемещении каретки получается много «срезов» объекта, из которых и состоит изображение. Пользуясь данным изображением, определите направление и скорость движения каретки сканера, если длина секундной стрелки (от оси до острия) составляет 15 мм.*

Направление сканирования определяется просто. Очевидно, что кривизна изображения стрелки максимальна там, где скорость каретки направлена вдоль стрелки. На рисунке максимальная кривизна соответствует точкам вблизи оси, причем стрелка в этот момент почти вертикальна. Следовательно, сканирование осуществлялось в вертикальном направлении. Проведем касательную к секундной стрелке в точке ее крепления к оси. Деление на циферблате, на которое «покажет» касательная, есть момент начала или конца сканирования стрелки (в зависимости от того, вверх или вниз движется каретка). В нашем случае касательная «уперлась» в деление, соответствующее 28 секундам, в то время как острие стрелки показывает 20 секунд. Значит, каретка сканера пересекла острие секундной стрелки раньше, чем ее ось, т.е. каретка двигалась от цифры «6» к цифре «12». Отсюда сразу же можно найти время Δt, за которое каретка просканировала стрелку:

$$\Delta t = 28 \text{ с} - 20 \text{ с} = 8 \text{ с}.$$

Теперь найдем скорость каретки. Расстояние, которое прошла каретка за время Δt, равно расстоянию от острия секундной стрелки до прямой, проходящей через ось и цифру «3» на циферблате. Обозначим его через L. На рисунке это расстояние составляет $L_1 = 11$ мм. Кроме того, длина секундной стрелки на рисунке равна $l_1 = 20$ мм, а по условию задачи истинная длина стрелки $l = 15$ мм.[1] Так как при увеличении рисунка все размеры изменились в одинаковое число раз (изображение не искажено), то справедлива пропорция

$$\frac{L}{L_1} = \frac{l}{l_1}.$$

[1] *При воспроизведении рисунка в журнале масштаб изображения был несколько изменен, но это никак не сказалось на окончательном результате. (Прим. ред.)*

Таким образом, скорость каретки сканера равна

$$v = \frac{L}{\Delta t} = \frac{l}{l_1}\frac{L_1}{\Delta t} \approx 1 \text{ мм/с}.$$

А.Селиверстов

Ф1699. *Очень легкая жесткая квадратная пластинка подвешена в горизонтальном положении на четырех одинаковых вертикальных нитях, прикрепленных к ее углам. Найдите ту область пластинки, куда можно положить точечный груз таким образом, чтобы все четыре нити в положении равновесия оказались натянутыми. Нити считать упругими, но очень слабо растяжимыми.*

Введем прямоугольную систему координат с началом в одном из углов пластинки и направим координатные оси X и Y вдоль ее сторон. Нарисуем вид пластинки сверху (рис.1) и обозначим N_1, N_2, N_3 и N_4 силы натяжения

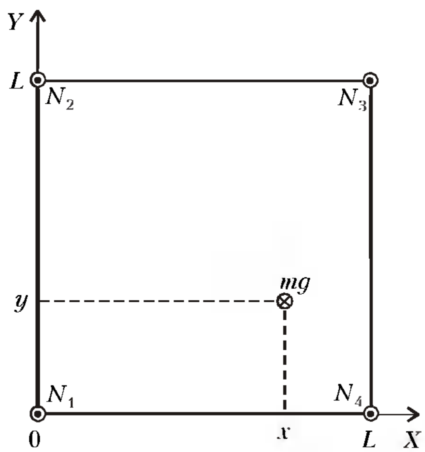


Рис.1

нитей, L – длину стороны пластинки, m – массу груза, x и y – координаты точки, где находится груз.

Запишем условия равновесия пластинки. Первое уравнение представляет собой условие равенства нулю суммы всех сил, действующих на пластинку:

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = mg.$$

Далее, сумма моментов всех сил относительно осей, параллельных осям координат и проходящих через точку, в которой находится груз, также должна быть равна нулю. Отсюда имеем еще два уравнения:

$$(N_1 + N_4)y = (N_2 + N_3)(L - y),$$

$$(N_1 + N_2)x = (N_3 + N_4)(L - x).$$

Полученная система уравнений неполна. Для того чтобы получить еще одно уравнение, нужно найти, как связаны друг с другом величины малых деформаций нитей, возникших после того, как на пластинку положили груз. Пусть нити деформировались на величины Δl_1, Δl_2, Δl_3 и Δl_4 соответственно. Тогда центр пластинки сместился на

$$h = \frac{1}{2}(\Delta l_1 + \Delta l_3) = \frac{1}{2}(\Delta l_2 + \Delta l_4).$$

Поскольку $N_i \sim \Delta l_i$ и все нити одинаковы, из последнего соотношения получаем недостающее уравнение:

$$N_1 + N_3 = N_2 + N_4.$$

Решив полученную систему, находим

$$N_3 = \frac{mg}{2}\left(\frac{x+y}{L} - \frac{1}{2}\right).$$

Так как по условию все нити натянуты, то $N_3 > 0$, т.е.

$$y > \frac{L}{2} - x.$$

Область пластинки, удовлетворяющая этому условию, изображена на рисунке 2.

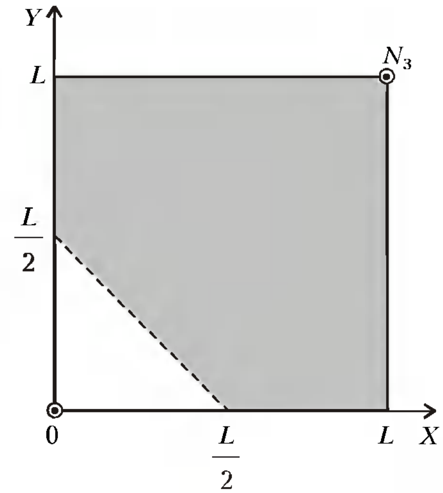


Рис.2

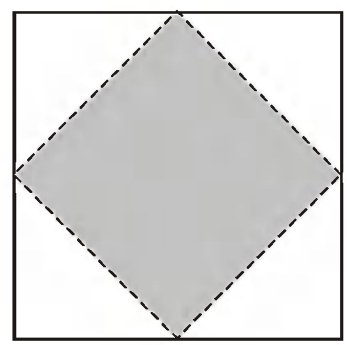


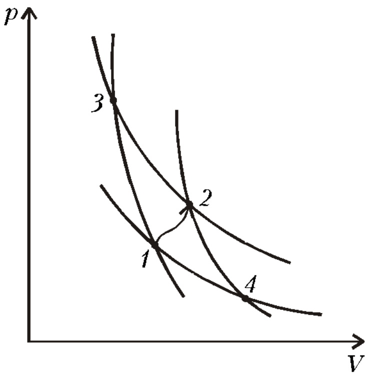
Рис.3

Поскольку все нити одинаковы и пластинка квадратная, из соображений симметрии следует, что область, в которую можно положить груз для того, чтобы все нити были натянуты, будет представлять собой квадрат с вершинами, находящимися в серединах сторон пластинки. Эта область изображена на рисунке 3.

Р.Компанеец

Ф1700. *Требуется перевести идеальный газ из состояния 1 с температурой T_1 в состояние 2 с температурой $T_2 > T_1$ таким образом, чтобы температура в течение всего обратимого процесса $1 \to 2$ не убывала, а тепло не отводилось от газа. Минимальное количество теплоты, которое передается газу в таком процессе, равно Q_1. Какое максимальное количество теплоты можно сообщить газу при данных условиях проведения процесса?*

Нарисуем координатную плоскость p, V и обозначим состояния с температурами T_1 и T_2 точками *1* и *2* соответственно (см. рисунок). Проведем через эти точки изотермы и адиабаты и обозначим точки их пересечения цифрами *3* и *4*. Из условия задачи следует, что процесс $1 \to 2$,



в течение которого температура не убывает, а тепло не отводится от газа, возможен. Это означает, что точка 2 лежит справа от адиабаты, проходящей через точку 1. При этом график произвольного процесса $1 \to 2$, для которого выполняются условия задачи, лежит внутри цикла $1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 1$.

Обозначим через Q_{12}, Q_{132} и Q_{142} количества теплоты, сообщаемые газу в процессах $1 \to 2$, $1 \to 3 \to 2$ и $1 \to 4 \to 2$ соответственно. Рассмотрим процесс $1 \to 3 \to 2 \to 1$. В нем газ сначала получает количество теплоты Q_{132}, потом отдает Q_{12}, совершая при этом работу $Q_{132} - Q_{12}$, которая равна площади фигуры, ограниченной на диаграмме линиями $1-3$, $3-2$ и $2-1$. Так как эта площадь неотрицательна, то

$$Q_{132} \ge Q_{12}.$$

Рассмотрим аналогичным образом процесс $1 \to 2 \to 4 \to 1$. Работа, которую совершает газ в этом процессе, также неотрицательна и равна $Q_{12} - Q_{142}$, откуда

$$Q_{12} \ge Q_{142}.$$

Из двух неравенств имеем

$$Q_{142} \le Q_{12} \le Q_{132}.$$

Поскольку процесс $1 \to 2$ – произвольный (из числа удовлетворяющих условию задачи), из последнего неравенства следует, что минимальное количество теплоты Q_1, которое может передаваться газу в таком процессе, равно Q_{142}. Максимальное же количество теплоты Q_2, которое может передаваться газу в данном процессе, из тех же соображений равно Q_{132}. Таким образом, для того чтобы получить ответ задачи, нужно рассмотреть цикл Карно $1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 1$, КПД которого равен

$$\eta = 1 - \frac{Q_{142}}{Q_{132}} = 1 - \frac{T_1}{T_2}.$$

Отсюда, с учетом того, что $Q_{142} = Q_1$ и $Q_{132} = Q_2$, находим

$$Q_2 = Q_1 \frac{T_2}{T_1}.$$

О.Шведов

Ф1701. *В настоящее время для проведения небольших сварочных работ иногда используют смесь водорода с кислородом, получаемую при электролизе воды. Оцените КПД устройства для электролиза воды, если напряжение между электродами одной его ячейки равно U = 2 В. Известно, что при сгорании m = 2 г водорода в кислороде выделяется Q = 0,29 МДж тепла.*

При электролизе воды происходит поляризация электродов, в результате чего ячейка устройства становится гальваническим элементом. ЭДС этого элемента можно найти, полагая, что выделяющаяся при сгорании водорода энергия при электролизе должна быть затрачена на совершение работы против сторонних электрических сил. В соответствии с законом электролиза Фарадея, для получения массы m водорода через ячейку должен протечь заряд

$$q = \frac{mZeN_A}{M},$$

где $Z = 1$ – валентность, $M = 1$ г/моль – атомарная масса водорода, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона, $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ 1/моль – постоянная Авогадро. Поскольку при этом, как уже говорилось, должна быть совершена работа, численно равная Q, ЭДС элемента равна

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{q} = \frac{QM}{mZeN_A}.$$

Отсюда для КПД ячейки – он равен КПД соответствующего гальванического элемента – и всего устройства для электролиза воды получаем

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A_{\text{затр}}} = \frac{q\mathcal{E}}{qU} = \frac{QM}{mZeN_AU} \approx 0{,}75 = 75\%.$$

В.Погожев

Ф1702. *Параллельные рельсы длиной $2L$ закреплены на горизонтальной плоскости на расстоянии l друг от друга. К их концам подсоединены две одинаковые батареи с ЭДС $\mathcal{E}$ (рис.1). На рельсах лежит перемычка массой m, которая может поступательно скользить вдоль них. Вся система помещена в однородное вертикальное магнитное поле с индукцией B. Считая, что сопротивление перемычки равно R, а сопротивление единицы длины рельсов равно ρ, найдите период малых колебаний, возникающих при смещении перемычки от положения равновесия, пренебрегая затуханием, внутренним сопротивлением источников, сопротивлением контактов, а также индуктивностью цепи.*

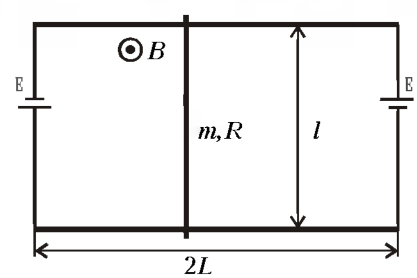


Рис.1

Выясним сначала, где находится положение равновесия перемычки. Поскольку батареи имеют одинаковые ЭДС, при схеме их включения, показанной на рисунке 1, разность потенциалов между серединами рельсов равна нулю. Следовательно, если перемычка покоится посередине, ток через нее не протекает и на нее не действует сила Ампера. Значит, это положение и является положением равновесия перемычки. Отметим далее, что при движении перемычки через нее протекает ток, обусловленный как изменением омического сопротивления частей цепи, так и явлением электромагнитной индукции. По правилу Ленца, часть силы Ампера, связанная с индукционным током, приводит к затуханию колебаний (можно показать, что эта часть силы пропорциональна скорости перемычки и является аналогом вязкого трения). Поэтому, в соответствии с условием задачи, ЭДС индукции при решении задачи можно пренебречь.

Введем прямоугольную систему координат с началом в

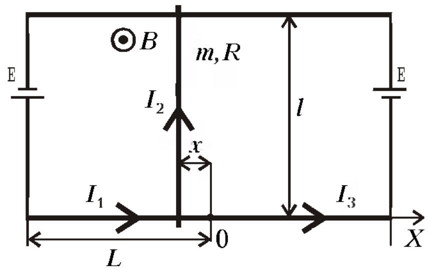


Рис.2

середине нижнего рельса и направим ось X вдоль него вправо (рис.2). Рассмотрим малое смещение перемычки вдоль оси X – например, влево. После того как перемычка сдвинется вдоль рельсов на расстояние x, в ней начнет протекать ток. Обозначим ток, текущий от левой батареи к началу координат, через I_1, ток, ответвляющийся из начала координат в перемычку, через I_2, ток, текущий от начала координат к правой батарее, через I_3 и запишем первый закон Кирхгофа:

$$I_1 = I_2 + I_3 .$$

Для контура, содержащего левую батарею и перемычку, а также для контура, содержащего правую батарею и перемычку, запишем второй закон Кирхгофа:

$$2I_1\rho(L - x) + I_2 R = \mathcal{E} ,$$

$$2I_3\rho(L + x) - I_2 R = \mathcal{E} .$$

Решая полученную систему трех уравнений, найдем ток, текущий через перемычку:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}x}{\rho\left(L^2 - x^2\right) + RL} \approx \frac{\mathcal{E}x}{\rho L^2 + RL}$$

(поскольку колебания малые, $x^2 \ll L^2$). Так как перемычка находится в магнитном поле, на нее действует сила Ампера, равная

$$F_{\text{А}} = I_2 lB = \frac{\mathcal{E}lBx}{L(\rho L + R)} .$$

Эта сила направлена вправо, т.е. стремится вернуть перемычку в положение равновесия. Уравнение движения перемычки имеет вид

$$ma_x = -\frac{\mathcal{E}lB}{L(\rho L + R)} x .$$

Отсюда и находим период малых колебаний перемычки:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mL(\rho L + R)}{\mathcal{E}lB}} .$$

А.Якута

НАША ОБЛОЖКА

(Окончание . Начало см. на 4-й странице обложки)

Экспериментируя с любыми из перечисленных объектов – например, с сетками от электробритвы, кусочками прозрачной ткани, вырезанными из бумаги регулярными решетками и т.п., – можно установить некоторые закономерности, присущие муаровым узорам. Вот некоторые из них.

1) В опытах наблюдается эффект, называемый муаровым увеличением. Если в двух одинаковых регулярных сеточках период структуры очень малый, меняя взаиморасположение сеточек, удается получить как бы увеличенное изображение отдельных ячеек сеточки и без труда определить вид ее структуры и тип симметрии. (Объясните, каким образом достигается увеличение в муаре.)

2) Муаровые узоры, как уже отмечалось, очень чувствительны к относительному перемещению сеточек. Это позволяет изготавливать прецизионные измерители линейных перемещений и поворотов. (Попробуйте оценить возможную чувствительность таких муаровых датчиков.)

3) Муаровые узоры пропадают, если сеточки имеют слишком разные периоды или если они расположены далеко друг от друга. (Подумайте, почему.) По муаровым узорам можно определять величину неизвестного периода структуры одной из сеточек, когда известен другой, и измерять величину зазора между сеточками. Теневые или зеркально отраженные картины от одной сеточки с достаточно малым шагом позволяют изучать качество или форму поверхности тела, на которой создается тень или которая служит зеркалом. Сравнительно просто проверить по муаровым узорам качество изготовления решеток, сеточек и других регулярных структур на просвет.

4) Для электронно-оптических приборов, визуализирующих изображение, существует термин «муаровый предел разрешения», описывающий ограничения характеристик технических систем с дискретным набором регулярно расположенных фотодатчиков или световых волокон, по которым распространяется свет.

Несмотря на то, что эффект образования муара обсуждается в научной литературе еще со времен лорда Рэлея, у муаровых узоров появляются все новые и новые приложения, включая тонкие вопросы метрологии и художественного оформления предметов, архитектурных сооружений, одежды и т.д.

А.Митрофанов

Задачи

1. Расшифруйте числовой ребус:

(одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные).

И.Акулич

2. Можно ли расставить в клетках квадрата 4×4 числа от 1 до 16 так, чтобы в каждой клетке стояло число или меньшее всех своих соседей по сторонам, или большее всех своих соседей?

А.Голованов

3. «Квадрат или не квадрат?»– рассуждал Лягушонок, разглядывая выражение:

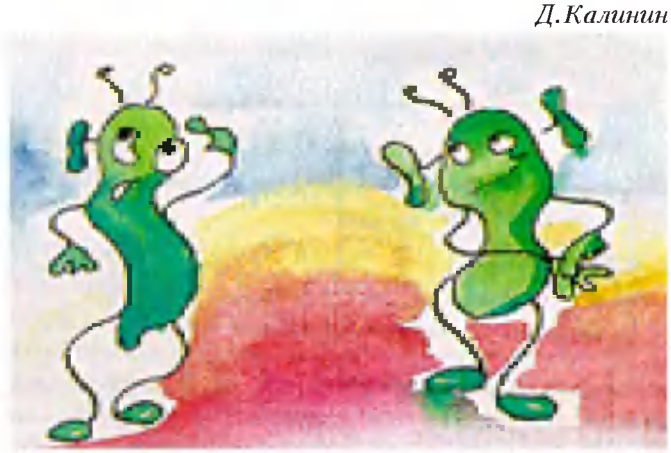
$$1111112222222 - 3333333.$$

А что по этому поводу думаете вы?

Д.Мамедьяров

4. На планете Куб (разумеется, имеющей форму куба) каждой гранью владеет правдолюб (который всегда говорит правду) или лжец (который всегда врет). Каждый из них утверждает, что не менее трех из его соседей – лжецы. Сколько правдолюбов и сколько лжецов владеют гранями планеты?

Д.Калинин



5. Шестнадцать точек находятся в узлах квадратной решетки. Раскрасьте их в два цвета так, чтобы не оказалось прямоугольников с одинаково окрашенными вершинами.

А.Авилов

Иллюстрации Д.Гришуковой

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков. Победители конкурса будут награждены грамотами и призами журнала.

11. Какие целые числа k представимы в виде

$$k = \frac{x - \frac{1}{x}}{y - \frac{1}{y}},$$

где x, y – тоже целые?

В.Сендеров

12. Двое играют на доске $m \times n$ клеток. Каждый по очереди проводит отрезок по одной стороне или диагонали одной клетки (дважды проводить один и тот же отрезок нельзя), причем ни в одной клетке ее диагонали не должны пересекаться. Тот, кто первым нарушит это условие, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре и как он должен играть?

В.Замков

13. Числа x, y, z удовлетворяют соотношению

$$x^4y^3 + y^4z^3 + z^4x^3 = x^3y^4 + y^3z^4 + z^3x^4.$$

Докажите, что среди них есть два равных.

В.Произволов

14. Электронная Гадалка по сообщенному ей натуральному числу N вычисляет остаток k от деления числа N на 6 и делает предсказания в соответствии с таблицей:

k	Предсказание
0	«любит»
1	«не любит»
2	«плюнет»
3	«поцелует»
4	«к сердцу прижмет»
5	«к черту пошлет»

Предскажет ли когда-нибудь Электронная Гадалка «к черту пошлет», если в нее последовательно вводить числа: 1, 12, 123, 1234, 12345, ...?

А.Жуков

15. Тренер хоккейной команды из 18 кандидатов должен выяснить наиболее перспективную пару нападающих. Для этого он выпускает на игровое поле различные составы по 5 игроков из этих 18. Какое наименьшее количество «пятерок» надо испытать, чтобы каждая пара кандидатов побывала в игре (в составе какой-либо «пятерки»)?

В.Попов, Н.Попов

Что думали о дальнозоркости две тысячи лет назад

А.ПЯТАКОВ

Иной современный школьник, кое-что знающий в области естественных наук, глядит с чувством несомненного превосходства на людей, живших две тысячи лет назад, и на их представления о природе. Не будем говорить о моральной обоснованности такого взгляда (ведь не глупее же нас были древние

люди!), а займемся стороной фактической. Так ли мало было известно античным ученым о природе знакомых им физических явлений? Намного ли их способ построения гипотез отличался от нашего?

Представьте себе группу почтенных древнегреческих мужей, собравшихся за столом и рассуждающих на темы, часто далекие по своей сложности от застольных. Постоянный участник этих бесед Плутарх записывает все, что говорится за столом. Позднее он объединит свои записи в девять книг, ставших известными как «Застольные беседы» Плутарха.

...Итак, трапеза окончена, и Плутарх садится за рукопись. Пишет он тонкой кисточкой из стебля камыша, время от времени макая ее в раствор сажи с клеем. Полюбопытствуем, что интересного было сказано сегодня за столом:

«Рассматривался вопрос, почему люди старшего возраста читают, отодвигая написанное от глаз, а вблизи разглядеть не могут. Это подтверждает Софокл, говоря о старике:

Невнятны звуки речи для ушей его,
И вдаль хоть видит, но вблизи он слеп совсем.

Если у стариков органы чувств отзываются преимущественно на сильные и резкие воздействия, то почему же старики при чтении не выносят отблеска букв на близком расстоянии и, отодвигая книгу подальше, разбавляют этот блеск воздухом, словно вино водой?».

Ах, вот оно что, Плутарха и его сотрапезников заинтересовала проблема дальнозоркости. Это должно быть интересно. Прочтем еще:

«Некоторые отвечали на это, что из каждого глаза исходит световой конус, вершина которого находится у глаза, а основание охватывает видимый предмет; до некоторого расстояния каждый из конусов простирается в отдельности, но, удалившись, они совпадают друг с другом и образуют единое свечение; предмет освещается уже двумя глазами, и буквы достигают большей отчетливости. Так мы поднимаем двумя руками то, что не можем одной».

Любопытно, как здесь проявилась нелюбовь собеседников к эксперименту, свойственная некоторым античным мыслителям. (Заметим, что это ни в коей мере не относится к Клавдию Птолемею, Герону Александрийскому или Архимеду, тщательно проводившим свои эксперименты с точностью, удивительной при скромных технических средствах, которыми они располагали.) Не может быть, чтобы ни один из присутствующих за столом (а здесь, в основном, люди зрелого возраста) не страдал дальнозоркостью. Ведь ничего не стоило закрыть один глаз и убедиться в несправедливости этих рассуждений. Возможно, никто не хотел признавать себя стариком:

«Мой брат Ламприй сказал, что мы видим благодаря образам, приходящим к нам от предметов. В начале своего пути образы грубы и землисты и приводят в расстройство слабые глаза стариков. Несясь же по воздуху, грубые части отпадают, а более тонкие безболезненно проходят в зрительные поры стариков. Так запах цветов, несущийся с лугов, издали чист и благороден, вблизи же полон землистых и загрязняющих примесей. Я же, соблюдая платоновское направле-

ние, говорил, что из очей наших исходит некое лучеобразное дыхание. Глаза ночных животных светятся соизмеримо с сиянием ночных светил, а днем их зрение беспомощно. С годами блеск очей ослабевает и не может вступить в надлежащее сочетание с ярким дневным светом. Поэтому старики отодвигают написанное от себя, дабы блеск букв пришел в необходимую соразмерность с блеском их очей».

Странные рассуждения, не правда ли? Для объяснения дальнозоркости привлечены или светящиеся глаза, или летящие «слепки» с предметов. Ламприй не первый пришел к мысли о несущихся по воздуху образах. За 400 лет до него греческий философ Демокрит (тот самый, которому принадлежит идея об атомном устройстве мира) писал об «идолах» (образах), летящих к нам от предметов и, подобно тончайшим пленкам, копирующих рельеф и особенности тел. Спустя триста лет после Демокрита (и за сто лет до Ламприя) римский поэт Тит Лукреций Кар в поэме «О природе вещей», популяризирующей учение философа Эпикура, напишет:

«Видим из этого мы, что причиною зрения служат
Образы нам, и без них ничего мы не можем увидеть.
Призраки эти вещей, о каких говорю я, несутся
Всюду, и мчатся они, разлетаясь,
по всем направлениям».

Этой, как видим, довольно распространенной теории, противопоставлялась другая – теория зрительных лучей, говорившая, что из глаз людей и животных исходят лучи, которые «ощупывают» предмет и с помощью которых мы узнаем о его существовании. Гипотезу зрительных лучей принимали такие великие мыслители древнего времени, как Евклид и Птолемей. Может быть, это покажется не столь невероятным, если мы вспомним, как часто нам приходится слышать об «озорном огоньке в глазах» и о «потухшем взоре», о «зловещем блеске» и «мягком свете глаз».

«...Глаза княжны, большие, глубокие и лучистые (как будто лучи теплого света иногда снопами выходили из них), были так хороши, что очень часто, несмотря на некрасивость всего лица, глаза эти делались привлекательнее красоты», – так описывает Л.Н.Толстой одну из героинь романа «Война и мир». Конечно, Лев Николаевич прекрасно знал, что свет из глаз исходить не может, но получилось так живо и выразительно, точно бойкая кисть художника солнечными красками набросала портрет.

Корни мифа о светоносных глазах, столь близкого нашему сердцу, уходят в глубину тысячелетий, когда сознание первобытного человека смешивало органы зрения и источники света, когда глаза «лучились», а звезды «глядели» с высоты на землю. С тех пор минуло не одно тысячелетие, мы уже не думаем так, а светоносные глаза, перекочевав с папируса древних свитков, прочно обосновались на бумажных страницах книг современных. Здесь же нашли свое пристанище и светила, щедрой рукой поэтов наделенные даром зрения. Вспомним волшебные строки Афанасия Фета, рисующие мимолетную летнюю ночь:

«Робко месяц смотрит в очи,
Изумлен, что день не минул,
Но широко в область ночи
День объятия раскинул.

Над безбрежной жатвой хлеба
Меж заката и востока
Лишь на миг смежает небо
Огнедышащее око».

Солнце – око, месяц – смотрит... Почему эти образы так легко проникают в нашу душу, достигая самых глубин ее? Наверное, древняя «оптика детей и поэтов» (так назвал оптику древних С.И.Вавилов в своей замечательной книге «Глаз и солнце») жива в нас и поныне.

Воздав должное поэтическим достоинствам гипотезы о световых лучах, поинтересуемся, имелись ли таковые со стороны физической? Как ни странно, и здесь были у нее свои сильные стороны. Несомненным преимуществом зрительных лучей перед летящими образами было то, что с их помощью можно было строить оптические изображения. В трудах Евклида и Птолемея приводятся построения в плоских и сферических зеркалах, не потерявшие силу и по сей день. На основе неправильной теории делались верные выводы – ситуация довольно частая в истории физики.

Попробуем, став на место античных ученых, ничего не знающих о ходе лучей света, попадающих в глаз, объяснить видимое нами в зеркале. Лучи, идущие от источника света – точки P (рис.1,*а*), отражаются от зеркала под тем же углом, что и падали (закон отражения света тогда уже был известен). После отражения

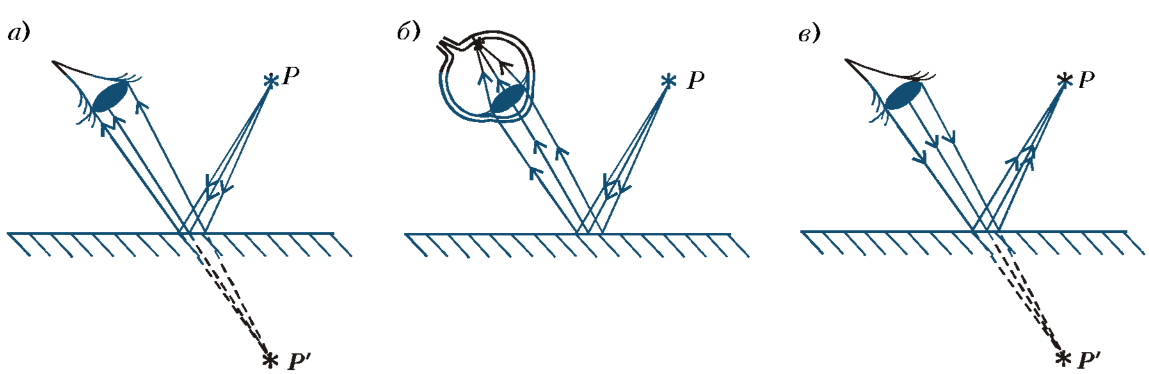


Рис. 1

лучи попадают в глаз: они, очевидно, расходятся и не могут создать образ светящейся точки (тогда еще не знали, что на самом деле лучи, преломляясь в хрусталике (линзе) глаза, начинают сходиться и пересекаются на сетчатке, усеянной клетками, способными чувствовать свет (рис.1,*б*)). Античные ученые вышли из этого затруднительного положения, предположив, что лучи исходят из глаза, отражаются от зеркала и «нащупывают» предмет (рис.1,*в*). Теперь существование изображения точки P за зеркалом получало простое объяснение. Глаз «не знает», что лучи, посланные им, отражаются от поверхности зеркала и только после этого натыкаются на предмет; он продолжает их за плоскость зеркала до пересечения в точке P', где, как ему кажется, находится точка P. Заметим, что в наше время изображение строят точно так же, но при этом, конечно, предполагается, что лучи идут из точки, а не из глаза. Здесь древних ученых спасало одно счастливое обстоятельство, а точнее закон – обратимость хода световых лучей. Действительно, если убрать стрелочки, показывающие направление хода лучей, то рисунок 1,*в* ничем не будет отличаться от рисунка 1,*а*.

Как видим, идея о лучистых глазах была физической теорией в полном смысле этого слова. Более того, с ее помощью можно было бы построить изображение и в линзах, знай древние чуть больше о ходе лучей в них (благодаря все той же обратимости хода световых лучей). Но тогда о свойствах стеклянных чечевиц – так называли линзы – было известно лишь то, что ими можно зажигать предметы, собирая свет в точку, да ходили еще неясные слухи о том, что с помощью чечевиц, дескать, можно и зрение исправлять (император Нерон, например, использовал для этой цели граненый изумруд). Заметим, что явление преломления света при этом не было откровением для людей древности, в чем легко убеждаемся, читая Лукреция:

«Кажется в гавани тем, кто не знает морей,
что хромают
Все корабли на воде и стоят с перебитой кормою,
Ибо у весел та часть, что из волн выдается соленых,
Прямо идет, и пряма у рулей их надводная доля;
Все же, что в воду ушло,
представляется нам преломленным,
Загнутым будто назад
и как будто изогнутым кверху».

Пора, однако, дать объяснение дальнозоркости с современной точки зрения. На рисунке 2 показано, как строится в линзе изображение предмета отдаленного (*а*) или более близкого (*б*). Напомним основные правила построения изображений в линзе:

1) Для получения изображения линейного предмета будем строить изображения только двух его точек – вершины и основания.

2) Изображение точки находится там, где пересекаются после преломления два луча, выходящие из нее.

3) Лучи, параллельные оптической оси, после преломления проходят через точку фокуса F.

4) Лучи, проходящие через центр линзы, не преломляются.

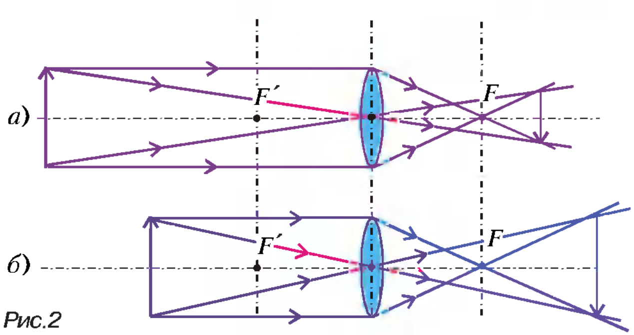


Рис.2

Как видно из рисунка 2, изображение более близкого предмета формируется дальше от линзы и от точки фокуса.

Хрусталик глаза – та же линза, только способная изменять фокусное расстояние (расстояние между центром линзы и точкой фокуса), меняя кривизну своей поверхности (рис.3). Не имея возможности отодвинуться от сетчатки подальше при рассматривании близких предметов (как того требуют построения рисунка 2), хрусталик уменьшает фокусное расстояние, и изображение попадает на сетчатку. Уменьшение фокусного расстояния происходит в результате увеличения кривизны хрусталика (он становится более «круглым»), что требует напряжения глазных мышц. С годами мышцы слабеют, и глаз уже не может приспосабливаться к рассматриванию близких предметов, хотя далекие видит довольно сносно. Так появляется дальнозоркость.

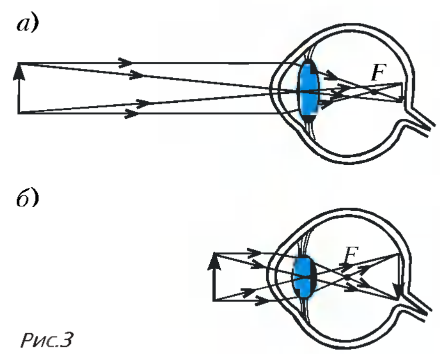


Рис.3

Иногда точка фокуса попадает за сетчатку (рис.4,*а*), и тогда никакие предметы – ни далекие, ни близкие – не выглядят четко (но далекие предметы видны все же чуть резче, так как ближе к сетчатке создается их изображение). Очки исправляют этот недостаток зрения, помогая мышцам глаза уменьшить его фокусное расстояние (рис.4,*б*).

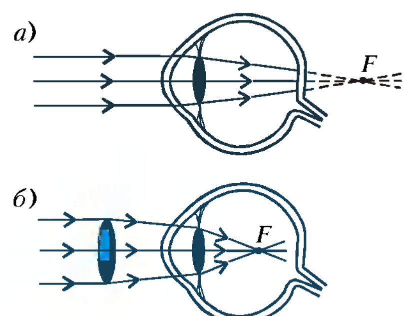


Рис.4

...Ну что ж, будем надеяться, что вам было интересно прочитать и о Плутархе, и о дальнозоркости.

Александр Пятаков – студент физического факультета МГУ.

Странные игроки

Б.ФРЕНКИН

Парадоксы турнирных таблиц

Спортивные турниры служат источником множества логических задач. Даже при простой схеме проведения легко возникают необычные ситуации.

Пример. *Тридцать три богатыря устроили соревнования по борьбе. Каждый боролся с каждым один раз. Победа давала 1 очко, поражение – 0, ничьих не было. Один богатырь выступил странно. Он победил всех, кто в итоге набрал больше очков, чем он, и проиграл всем, кто набрал меньше, чем он. Равного с ним количества очков не набрал никто. Докажите, что странный богатырь занял место не выше тринадцатого и не ниже двадцать первого.*

Решение. Предположим, что странный богатырь занял место выше тринадцатого. Количество тех, кто набрал меньше очков, превышает двадцать. Рассмотрим их поединки между собой. Каждый из них провел не менее 20 поединков. Кто-то выиграл не менее половины этих поединков и, следовательно, набрал в них не менее 10 очков. Кроме того, он победил странного – значит, всего получил не менее 11 очков. Странный богатырь набрал больше его, т.е. не менее 12 очков. Но странный победил только тех, кто выше его в турнирной таблице – следовательно, их не менее 12, и странный не мог занять место выше тринадцатого.

Поменяем теперь результаты всех матчей на противоположные. Условия задачи по-прежнему выполняются, а последовательность занятых мест изменилась на обратную. Странный богатырь занял теперь место не выше тринадцатого. Остается заметить, что при 33 участниках двадцать первое место – это тринадцатое с конца.

На любом турнире возможен странный участник вроде такого богатыря. Изучим эту ситуацию подробнее: в ней кроется немало интересного.

Итак, *странный* участник кругового турнира характеризуется тем, что он выиграл у всех, кто набрал больше очков, чем он, и проиграл всем, кто набрал меньше. С теми, кто выступил наравне с ним, такой игрок мог сыграть как угодно. Подразумевается, что турнир проходит в один круг, причем победа дает одно очко, ничья – половину, поражение – ноль. Число участников турнира далее обозначаем N. Результат игрока – это сумма очков, которую он набрал.

Однако такое определение странного игрока имеет некий изъян. А именно, пусть все участники турнира получили поровну. Тогда для каждого из них отсутствуют и набравшие больше, и набравшие меньше. Формально мы можем считать всех игроков странными. Но это само по себе странно, особенно в такой тривиальной ситуации. Поэтому в дальнейшем всегда предполагается, что *не все участники турнира набрали одинаковое количество очков.* При этом считается допустимым, если никто не набрал больше очков, чем странный игрок. Точно так же ему не запрещается разделить и последнее место.

Где искать странных?

Представьте себе таблицу результатов турнира. Где в ней могут располагаться странные игроки? Для начала докажем следующий факт:

Задача 1. *Все странные участники имеют одинаковое количество очков.*

Решение. Пусть А и Б – странные, причем А набрал больше очков, чем Б. Тогда А проиграл Б. Очевидно, А сыграл с каким-то третьим игроком (и не с одним) лучше, чем с ним сыграл Б. Но если такой игрок В набрал меньше очков, чем А, то В выиграл у А (по определению странного игрока). Если же В набрал не меньше очков, чем А, то В набрал больше, чем Б, и тогда Б (как странный) выиграл у В. Значит, А ни с кем не сыграл лучше, чем Б, в противоречии с предыдущим.

Если игрок получил столько же очков, сколько и странные, но сам не является странным, то назовем его *средним*. Тех, кто набрал больше, будем называть *сильными*, а тех, кто набрал меньше, – *слабыми.*

В какой же части турнирной таблицы располагаются странные? Например:

Задача 2. *а) Может ли странный игрок разделить первое место? А последнее?*

б) Могут ли на первом или последнем месте находиться только странные?

Решение. а) Пусть в турнире шесть участников (см. таблицу). Первые трое сыграли между собой вничью, четвертый с пятым – также вничью, причем проиграли первым троим, а шестой выиграл у первых трех и проиграл четвертому и пятому. Тогда шестой разделил первое место с первыми тремя игроками и при этом является странным.

	1	2	3	4	5	6
1		$\frac12:\frac12$	$\frac12:\frac12$	1 : 0	1 : 0	0 : 1
2	$\frac12:\frac12$		$\frac12:\frac12$	1 : 0	1 : 0	0 : 1
3	$\frac12:\frac12$	$\frac12:\frac12$		1 : 0	1 : 0	0 : 1
4	0 : 1	0 : 1	0 : 1		$\frac12:\frac12$	1 : 0
5	0 : 1	0 : 1	0 : 1	$\frac12:\frac12$		1 : 0
6	1 : 0	1 : 0	1 : 0	0 : 1	0 : 1	

Чтобы поместить странного игрока на последнее место, поменяем все результаты на противоположные.

б) Пусть первое место полностью принадлежит странным, и их число равно M. Любой из них проиграл всем, кто не делит первое место, и поэтому набрал не более $M - 1$ очков. Игрок, не находящийся на первом месте, выиграл у всех странных и потому получил результат не меньше M, что противоречит предыдущему. Значит, первое место не может принадлежать только странным.

Для последнего места рассуждение аналогичное.

Мы видели, что все странные набирают одинаковое количество очков. И не нужно знать исход каждого матча, чтобы определить это количество:

Задача 3. *Известны результаты всех игроков. Известно также, что на турнире были странные участники. Как определить, сколько очков они набрали?*

Решение этой задачи, а также задач 4, 5 и 7 см. в конце журнала.

Обычных – всегда большинство. Но не всегда подавляющее

Сколько же может быть на турнире странных участников? Ясно, что все одновременно такими не бывают. Более точно:

Задача 4. *а) Число странных всегда не больше $[N/2] - 1$. Докажите это.*

Напомним, что N – общее число игроков, а квадратные скобки служат для обозначения целой части числа.

При доказательстве можно воспользоваться задачей 1. Но не обязательно.

б) Для произвольного $N \geq 4$ и произвольного натурального $K \leq [N/2]-1$ постройте пример, когда число странных равно K.

Пусть на турнире отсутствуют средние игроки (т.е. не странные, но набравшие столько же очков). Тогда появляются новые ограничения на количество странных и их положение в таблице результатов. (Это выглядит парадоксально: отсутствие одних ограничивает других. Дело, конечно, в том, что игрок бывает странным не сам по себе, а в зависимости от того, как сыграли другие – с ним и между собой.)

Задача 5. *а) Докажите, что на любом турнире сильные вместе со странными составляют меньше 2/3 от общего числа игроков, и что то же верно для слабых вместе со странными.*

Если же на турнире нет средних, то сильные и слабые составляют более чем по трети участников турнира, а странные – менее трети. Более точно, если N имеет вид $3M$, $3M+1$ или $3M+2$ (M натуральное), то число странных не превосходит, соответственно, $M-2$, $M-1$, M.

Отсюда вытекает решение задачи о богатырях, с которой мы начали, а также задачи 2б).

б) Постройте пример (для произвольного $N \geq 5$), когда на турнире есть странные, нет средних, а число сильных, как и число слабых, равно наименьшему целому, большему $N/3$.

Когда же появляются странные?

Наличие в турнире странных игроков показывает, что его участников трудно упорядочить по силе. В этих условиях естественно ожидать, что будет много совпадающих результатов. Например, в решении задачи 2а) встретилась такая ситуация: в турнирной таблице есть странные игроки, причем заняты лишь первое и последнее места и на одном из них – два игрока. Возникает вопрос: может ли быть странный участник на турнире, где набрали поровну все, кроме одного? Отрицательный ответ вытекает из следующего факта (может быть, уже известного вам):

Задача 6. *Если в круговом турнире все участники, кроме одного, получили одинаковое число очков, то этот участник либо у всех выиграл, либо всем проиграл. Докажите это.*

Решение. Пусть «нестандартный» участник набрал больше очков, чем «стандартные». Результат «среднеарифметического» участника составляет $(N-1)/2$. Недобор «стандартного» участника до этого количества не может быть меньше $1/2$, поэтому «стандартные» вместе не добрали не менее чем $(N-1)/2$ очков. «Нестандартный» должен на столько же превысить средний уровень, т.е. он получил не меньше $N-1$ очков. Это возможно лишь в случае, когда «нестандартный» у всех выиграл.

Аналогично разбирается случай, когда «нестандартный» набрал меньше, чем «стандартные».

Что же наблюдается в противоположном случае, когда любые два игрока набрали разное количество очков? Если при этом нет ничьих, то участники турнира «выстраиваются в цепочку»: занявший первое место выиграл у всех, занявший второе – у всех, кроме первого, и т.д. (если вам не был известен этот факт, то докажите его в качестве **задачи 6′**). В таком случае, конечно, странных нет. Однако для их появления требуется не так уж много:

Задача 7. *а) Пусть в круговом турнире все участники набрали разное количество очков. Постройте пример, когда ровно две ничьих и имеется странный игрок.*

Естественно возникает вопрос, возможен ли странный игрок в ситуации, промежуточной между условиями задач 6′ и 7а), т.е. при одной ничьей. Ответ отрицательный, причем доказать его гораздо труднее, чем во всех предыдущих случаях. Этой задачей мы и закончим знакомство с турнирными парадоксами:

б) В круговом турнире была только одна ничья. Любые два участника набрали разное количество очков. Докажите, что странных игроков нет.

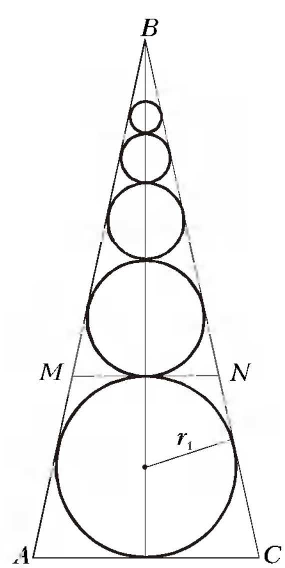
НАМ ПИШУТ

Метод размерностей в геометрии

Задача. *Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$, $\angle B = 2\alpha$. Высота, опущенная на основание, равна h. В треугольник вписана окружность. Вторая окружность касается первой окружности и боковых сторон треугольника. Третья окружность касается второй окружности и боковых сторон треугольника и т.д. до бесконечности. Найдите сумму площадей всех получившихся кругов.*

Традиционное решение основано на рассмотрении окружностей, вписанных в подобные треугольники. Сумма площадей всех кругов получается как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Поступим по-другому.

Из соображений размерностей площадь всех кругов можно выразить формулой $S_{(ABC)} = fh^2$, где f – некоторый неизвестный безразмерный коэффициент. Для его отыскания проведем отрезок MN, который касается первой окружности и параллелен основанию треугольника. Очевидно, что для кругов, вписанных в треугольник MBN, справедлива та же формула для суммы их площадей с заменой, разумеется, высоты h на высоту треугольника MBN: $S_{(MBN)} = f(h-2r_1)^2$, где r_1 – радиус первого круга. Ясно, что площадь всех кругов, вписанных в треугольник ABC, равна сумме площадей первого круга и всех кругов, вписанных в треугольник MBN: $fh^2 = \pi r_1^2 + f(h-2r_1)^2$.



Радиус первого круга равен $r_1 = \dfrac{h\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$. Получим уравнение относительно неизвестной величины f; его решение $f = \dfrac{\pi\sin\alpha}{4}$. Следовательно, сумма площадей всех кругов, вписанных в треугольник ABC, равна $S = \dfrac{\pi}{4}h^2\sin\alpha$.

А.Колодочко

Давление поля

А.ЧЕРНОУЦАН

Увидев название статьи, читатель, возможно, подумает, что речь пойдет о давлении света (электромагнитного поля). Это явление обсуждается в школьном курсе. Его объяснение становится особенно понятным, если рассматривать свет как поток фотонов, каждый из которых обладает определенным импульсом. При отражении от тела или поглощении им фотонов происходит изменение их импульса, а это означает, что на тело действует сила давления. При таком подходе давление света становится весьма похожим на давление идеального газа, молекулярно-кинетическое объяснение которого также связано с ударами молекул о поверхность. Если же поставить себе цель объяснить давление света, не выходя за рамки электромагнитной теории, то происхождение силы надо связать с воздействием магнитного поля волны на упорядоченно движущиеся заряды вещества, что вызывается другим компонентом волны — ее электрическим полем.

Однако не имеет смысла дальше углубляться в обсуждение давления электромагнитных волн, потому что эта статья посвящена совсем другому явлению — давлению *статического* поля, как электрического, так и магнитного. Понятно, что в этом случае не может быть речи об изменении импульса, поэтому сам термин «давление» можно считать условным. Тем не менее в научно-популярных статьях и книгах вы можете встретиться с таким понятием. Читая, например, о создании сверхсильного магнитного поля, можно узнать, что одну из основных проблем представляет давление этого поля на стенки соленоида. Это тесно связано с возможностью создания управляемого термоядерного синтеза, где встает задача удержания раскаленной плазмы сильным магнитным полем («магнитной ловушкой»). Но начнем мы не с магнитного поля, а с более понятного школьнику — поля электростатического.

Давление электрического поля

Разберемся с механизмом возникновения давления электростатического поля на заряженную поверхность, которое возникает в том случае, если напряженности полей по разные стороны этой поверхности различны. Начнем, как всегда, с самого простого случая — заряженного плоского конденсатора. Напряженность поля внутри конденсатора равна

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

где $\sigma = q/S$ — поверхностная плотность заряда. При вычислении силы, действующей на единицу площади одной из пластин, надо учитывать только поле другой пластины, равное $E/2$ (сама на себя пластина не действует):

$$p = \frac{F}{S} = \frac{E}{2}\sigma = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Обсудим полученный результат.

Во-первых, давление выражается через напряженность поля, существующего с одной стороны от пластины (поле вне конденсатора пренебрежимо мало). Во-вторых, сила, действующая на пластину, направлена внутрь конденсатора – пластины притягиваются. Это значит, что если мы хотим приписать электрическому полю давление, то мы должны считать это давление *отрицательным* (поле не «давит», а «тянет»!). И наконец, в-третьих, давление поля совпадает по величине с объемной плотностью электрического поля. В итоге можно написать

$$p = -w = -\frac{W}{V} = -\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}. \qquad (1)$$

Перечисленные свойства становятся вполне естественными, если посмотреть на них с точки зрения закона сохранения энергии. Рассмотрим изолированный (отключенный от источника) плоский конденсатор. Прикладывая внешнюю силу, медленно увеличим расстояние между пластинами на Δx. Поскольку напряженность поля между пластинами не изменится (она зависит только от σ), энергия поля увеличится на $wS\Delta x$. Следовательно, внешняя сила должна совершить положительную работу $F\Delta x$, а сила давления поля — отрицательную работу $-pS\Delta x$. Таким образом, давление поля должно быть отрицательным и равным объемной плотности энергии.

Формула (1) действует и в случае заряженной поверхности любой формы, если напряженность поля по одну сторону от нее равна нулю. Важный пример: на участок поверхности проводника площадью ΔS, возле которого напряженность поля равна E, действует наружу сила, равная $\Delta F = \left(\varepsilon_0 E^2/2\right)\Delta S$. Не останавливаясь на обосновании этого утверждения, обсудим сразу общую формулировку: если по одну сторону от заряженной поверхности напряженность поля равна E_1, а по другую E_2, то в направлении от первой области ко второй действует сила, обусловленная давлением

$$p = \frac{\varepsilon_0 E_2^2}{2} - \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{2}. \qquad (2)$$

Эту формулу можно обосновать тремя способами. Самый простой и естественный — энергетический. Надо мысленно сместить поверхность на Δx и приравнять работу внешней силы к изменению энергии поля. (Работа силы давления со стороны поля равна работе внешней силы, взятой с противоположным знаком.)

Можно, как и в случае плоского конденсатора, отделить собственное поле от внешнего (рис.1). Будем считать, что оба поля перпендикулярны

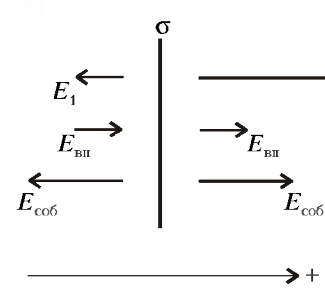


Рис. 1

к заряженной поверхности; действительно, касательная составляющая поля (если она есть) имеет одно и то же значение по обе стороны поверхности (это утверждение следует из потенциальности поля — подумайте сами, каким образом) и сокращается в формуле для давления. Для собственного поля $E_{соб}$ и внешнего поля

$E_{вн}$ получим соотношения

$$\begin{cases} E_1 = E_{вн} - E_{соб}, \\ E_2 = E_{вн} + E_{соб}. \end{cases}$$

Собственное поле вблизи поверхности неотличимо от поля плоскости, т.е. $E_{соб} = \sigma/(2\varepsilon_0)$. Выражая из этих уравнений $E_{вн}$ и σ:

$$E_{вн} = \frac{E_1 + E_2}{2}, \quad \sigma = \varepsilon_0(E_2 - E_1), \quad (3)$$

найдем давление:

$$p = \sigma E_{вн}$$

и получим формулу (2).

Чтобы почувствовать, что давление определяется именно полным полем, а разделение поля на внешнее и собственное является только искусственным приемом, рассмотрим силу, действующую на тонкий слой объемного заряда (рис.2). Внутри слоя напряженность плавно меняется от E_1 на

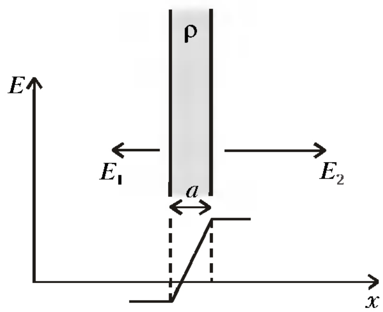


Рис. 2

одной поверхности до E_2 на другой. Если объемная плотность заряда ρ постоянна, то напряженность поля меняется линейно и сила, действующая на площадку площадью S, выражается через среднюю напряженность поля:

$$F = \sigma S \frac{E_1 + E_2}{2} = \varepsilon_0 (E_2 - E_1) S \frac{E_1 + E_2}{2} = \left(\frac{\varepsilon_0 E_2^2}{2} - \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{2} \right) S,$$

где $\sigma = \rho a$ — заряд единицы поверхности слоя. Связь между σ, E_1 и E_2 можно получить с помощью теоремы Гаусса (если вы знакомы с этой теоремой) или же рассуждениями с внешним и собственным полями, приведшими к формуле (3).

При произвольной зависимости $\rho(x)$ поступим следующим образом. Разделим слой на много тонких слоев толщиной dx и просуммируем силы, действующие на эти слои (рис.3):

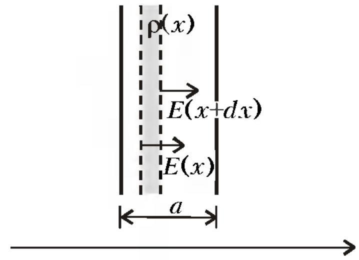


Рис. 3

$$F = \int_0^a E(x)\rho(x) S dx.$$

Изменение напряженности на очередном слое равно (для доказательства используйте теорему Гаусса; см. также формулу (3))

$$dE = \frac{\rho dx}{\varepsilon_0}.$$

Для давления получаем

$$p = \frac{F}{S} = \int_1^2 E\varepsilon_0 dE = \frac{\varepsilon_0 E_2^2}{2} - \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{2}.$$

Отметим важную особенность: в случае объемного заряда не надо выделять собственное поле. Причина в том, что при уменьшении толщины слоя его собственное поле стремится к нулю.

Давление магнитного поля

В случае магнитного поля мы сталкиваемся с двумя трудностями. Одна из них — чисто методическая. Дело в том, что в обычном (не расширенном) школьном курсе нет формул для магнитной индукции, создаваемой элементом тока (закон Био – Савара), током в прямом проводе, катушкой с током (соленоидом), а также нет формулы для объемной плотности энергии магнитного поля. Мы ограничимся случаем длинного соленоида (все обобщения проводятся аналогично электрическому полю), поле в котором почти всюду (кроме концов) однородно и равно

$$B = \mu_0 I \frac{N}{l} = \mu_0 i. \qquad (4)$$

Здесь $\mu_0 = 1/(\varepsilon_0 c^2) = 1{,}26 \cdot 10^{-6}$ Гн/м — *магнитная постоянная*, l — длина соленоида, N — число витков, i — *поверхностная плотность тока* (ток на единицу длины), во многом аналогичная поверхностной плотности заряда в электростатике. Направление поля находят по движению буравчика, который вращают в направлении тока. Вычислив магнитный поток в соленоиде $\Phi = NBS$, можно выразить индуктивность $L = \Phi/I$ и энергию соленоида $W = LI^2/2$. Разделив энергию на объем соленоида, получим выражение для объемной плотности энергии магнитного поля:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Вторая трудность носит принципиальный характер. Как было показано в статье «Осторожно: магнитное поле» (см. «Квант», 1999, №3), неаккуратное применение энергетических соотношений в задачах с магнитным полем может привести к кажущимся парадоксам и противоречиям. С аналогичной ситуацией мы столкнемся и при обсуждении давления магнитного поля.

Вычисление силы, действующей на небольшой прямоугольный участок ΔS поверхности соленоида, проведем с помощью рассуждений, аналогичных электростатике (рис.4). Поле возле поверхности разделим на собственное поле $B_{соб}$ (очень близко к поверхности

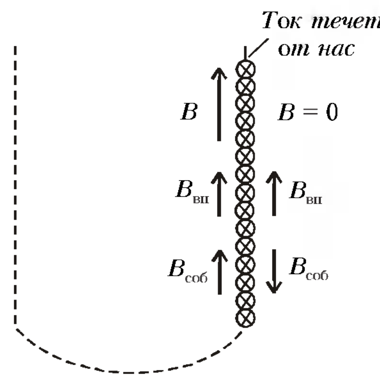


Рис. 4

оно должно быть равно полю бесконечной плоскости с током) и внешнее поле $B_{вн}$ (поле, создаваемое остальными участками соленоида). Получим

$$\begin{cases} B = B_{вн} + B_{соб}, \\ 0 = B_{вн} - B_{соб}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $B_{вн} = B_{соб} = B/2$. Величину силы найдем из закона Ампера (с учетом формулы (4)):

$$\Delta F = B_{вн}(i\Delta l)\Delta d = \frac{B^2}{2\mu_0}\Delta S,$$

где Δl — ширина участка вдоль соленоида, а Δd — его длина вдоль тока.

На первый взгляд все выглядит замечательно и совершенно аналогично электростатике — давление поля численно совпадает с плотностью энергии магнитного поля. Но после определения направления силы по правилу левой руки мы обнаруживаем существенное различие: сила направлена наружу, т.е. давление магнитного поля надо, в отличие от электрического случая, считать *положительным*.

Казалось бы, ничего плохого в этом нет — наоборот, такой ответ лучше согласуется с привычным представлением о давлении. Однако нетрудно обнаружить, что в этом случае немедленно возникают трудности с законом сохранения энергии. Действительно, при мысленном смещении поверхности с током, например, в сторону поля (при уменьшении радиуса соленоида) внешние силы совершают положительную работу против магнитных сил, а объем соленоида, содержащий магнитное поле, уменьшается — значит, уменьшается и энергия поля! Как же объяснить такое противоречие?

Причина в том, что мы не учли работу источника, необходимую для поддержания постоянного тока соленоида, — а только при этом условии величина магнитной индукции в соленоиде не изменится. Дополнительная работа источника должна скомпенсировать работу ЭДС самоиндукции, возникающей при уменьшении магнитного потока в соленоиде. На рассматриваемом участке при смещении внутрь на расстояние Δx изменение потока равно

$$\Delta\Phi = -B\Delta x\Delta d\ ,$$

возникающая на этом участке ЭДС самоиндукции равна

$$\mathrm{E}_{\text{сам}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\ ,$$

а работа источника против ЭДС самоиндукции равна (с учетом формулы (4))

$$A_{\text{ист}} = -\mathrm{E}_{\text{сам}}\Delta q =$$

$$= -\frac{B\Delta x\Delta d}{\Delta t} i\Delta l\Delta t = -\frac{B^2}{\mu_0}\Delta V\ ,$$

где Δq — заряд, прошедший через этот участок за время Δt. Получаем, что работа внешней силы *вместе* с работой источника в точности равняется изменению энергии!

Для интереса отметим, что с очень похожей ситуацией мы сталкиваемся при записи закона сохранения энергии (первого закона термодинамики) при изобарном изменении объема идеального газа (где давление, конечно, тоже положительно). А удобно рассматривать именно изобарный процесс потому, что в этом случае остается постоянной объемная плотность внутренней энергии газа:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\nu C_V T}{V} = \frac{C_V}{R} p$$

(здесь C_V — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме). Например, при сжатии газа работа внешней силы положительна (работа газа отрицательна), а внутренняя энергия газа уменьшается. Впрочем, в этом случае ответ хорошо известен — от газа отводится ровно столько тепла, сколько надо для баланса энергии. Тепловой резервуар играет тут такую же роль, как источник тока в задаче с соленоидом.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Геометрическая оптика

А.ЧЕШЕВ

При описании многих явлений, связанных с распространением световых волн, удобно пользоваться простыми геометрическими представлениями световых волн в виде узкого пучка (луча), направление которого определяет направление распространения волны.

Световой пучок (луч), падающий на границу раздела двух сред, подчиняется закону отражения, согласно которому угол падения α равен углу отражения γ:

$$\alpha = \gamma\ ,$$

и закону преломления, в соответствии с которым

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}\ ,$$

где β – угол преломления, n_1 и n_2 – показатели преломления первой и второй сред соответственно.

Уникальным оптическим прибором, осуществляющим преобразование лучей, является линза. При этом справедлива так называемая формула линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

где d – расстояние от предмета до линзы, f – расстояние от линзы до даваемого ею изображения и F – ее фокусное расстояние.

А теперь – несколько конкретных задач.

Задача 1. *В отверстие радиусом R = 1 см, сделанное в тонкой непрозрачной перегородке, вставлена рассеивающая линза. По одну сторону перегородки на главной оптической оси линзы расположен точечный источник света. По другую сторону перегородки на расстоянии L = 24 см от нее находится экран. Радиус светлого пятна на экране равен r_1 = 4 см. Если линзу убрать, то радиус пятна на экране станет r_2 = 2 см. Определите расстояние от источника до линзы и фокусное расстояние линзы.*

Пусть S – точечный источник, а S^* – его мнимое изображение в линзе (рис.1). По формуле линзы,

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F},$$

где d – расстояние от источника S до

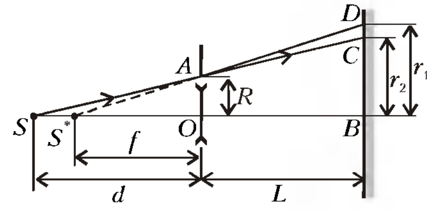


Рис. 1

линзы, f – расстояние от линзы до изображения S^*, F – фокусное рассто-

(Окончание см. на с. 34)

Узы дружбы в

В МИРЕ ЧИСЕЛ СУЩЕСТВУЕТ МНОЖЕСТВО всевозможных отношений. Мы сравниваем числа по величине, по принадлежности их к тем или иным классам (четных, простых, удовлетворяющих определенным уравнениям и т.п.). Ряд любопытных отношений связан с собственными делителями натуральных чисел. Напомним, что к *собственным* делителям натурального числа относятся лишь те делители, которые отличны от него самого, например, собственные делители числа 6 – это 1, 2, 3. Назовем число *a приветливым к* числу *b*, если сумма собственных делителей *a* равна числу *b*. Так, число 16 приветливо к числу 15, потому что $1 + 2 + 4 + 8 = 15$, а 15 уже *не* приветливо к 16, потому что $1 + 3 + 5 = 9 \neq 16$.

На рисунке 1 показана *схема приветливости* некоторой группы чисел. Рассматривать (и рисовать) подобные

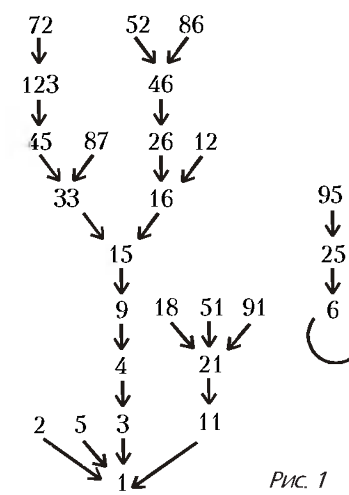


Рис. 1

схемы порой бывает так же интересно и увлекательно, как и рассматривать географические атласы. Каждое число на этой схеме, за исключением 1, приветливо к какому-нибудь другому числу. Числа 2, 5 не вызывают симпатий ни у кого (интересно, имеются ли еще и другие «несимпатичные» числа?), а вот число 6 приветливо к самому себе: $1 + 2 + 3 = 6$. Числа, приветливые к самим себе, в математике получили название *совершенных*. Они цени-

«Среди всех проблем, рассматриваемых в математике, нет таких, которые считались бы в настоящее время более бесплодными и лишенными приложений, чем те, которые состоят в изучении природы числа и исследования делителей... В этом отношении нынешние математики сильно отличаются от древних, придававших гораздо большее значение исследованиям подобного рода... А именно, они не только считали, что отыскание истины похвально само по себе и достойно человеческого познания, но, кроме того, совершенно справедливо полагали, что при этом замечательным образом развивается изобретательность и перед человеческим разумом раскрываются новые возможности решать сложные задачи...»

Леонард Эйлер. О дружественных числах *(1849).*

Арабский математик Сабит ибн Курра (836—901) придумал следующий способ получения дружественных чисел. Если числа *p*, *q* и *r* – простые нечетные числа вида $p = 3 \cdot 2^{k-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^k - 1$, $r = 9 \cdot 2^{2k-1} - 1$, то числа $m = 2^k pq$ и $n = 2^k r$ – дружественные.

При $k = 2$ по рецепту Сабита ибн Курры получаются дружественные числа 220 и 284, при $k = 4$ – пара дружественных чисел 17296 и 18416, а при $k = 7$ – дружественные числа 9363584 и 9437056. Дальнейшие попытки найти этим способом дружественные пары, перебирая значения *k* от 8 до 20000, к успеху не приводят.

Один из первых способов получения совершенных чисел придумали пифагорейцы. В IX книге евклидовых «Начал» он формулируется так:

«Если от единицы откладывать сколь угодно последовательно пропорциональных чисел в двойном отношении до тех пор, пока вся их совокупность сложенная не сделается первым (т.е. простым – *Прим.ред.*) числом и вся совокупность, умноженная на последнее число, произведет что-то, то возникающее число будет совершенным». В современной терминологии, число $\left(1+2+2^2+\ldots+2^{k-1}\right)\cdot 2^{k-1} = \left(2^k-1\right)\cdot 2^{k-1}$ является совершенным, если число $2^k - 1$ простое. Этот факт получается из аккуратного подсчета суммы собственных делителей числа $\left(2^k-1\right)\cdot 2^{k-1}$.

Справедлив и более общий факт: четное число совершенно тогда и только тогда, когда оно имеет вид $\left(2^k-1\right)\cdot 2^{k-1}$, где $2^k - 1$ – простое число.

«Работы, посвященные нечетным совершенным числам, напоминают охоту за призраком: никто никогда его не видел, но проведено много остроумных исследований того, как он не может выглядеть»

Вальтер Боро, современный немецкий математик

«КВАНТА»

мире чисел

лись и почитались в старину. Например, в Древнем Риме существовал обычай отводить на пирах шестое место самым знатным и почетным гостям. К совершенным числам относятся 28, 496, 8128 и другие. В наше время поиском больших совершенных чисел занимаются компьютеры.

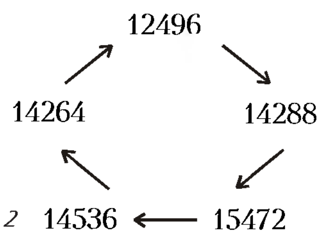


Рис. 2

Существуют ли два числа, приветливых друг к другу? Да, например числа 220 и 284 (пожалуйста, проверьте) – они были известны еще Пифагору. По свидетельству неопифагорейца Ямвлиха из Хальциса (III в.), великий Пифагор на вопрос, кого следует считать своим другом, ответил: «Того, кто является моим вторым я, как числа 220 и 284». Два натуральных числа a и b называются *дружественными*, если a приветливо к b, а b приветливо к a.

В мире чисел существуют и более причудливые связи. Если в схеме приветливости обнаруживается «хоровод», в котором кружится более чем два числа, то такие числа называются *общительными*. На рисунке 2 показан «хоровод», объединяющий пять общительных чисел, а вокруг текста на этой странице водят «хоровод» аж 28 общительных чисел»! Существуют ли более крупные «хороводы»? Неизвестно.

На схему приветливости можно взглянуть и по-другому: как на систему «рек», впадающих в более крупные «русла» и «водосборы». Такие ассоциации вызывает рисунок 1: в пунктах, обозначенных числами 15, 21, 46, 33, сливаются русла нескольких «речушек» – соответствующих цепочек чисел. Существуют ли «реки», берущие начало в некотором числе и устремляющиеся в бесконечность? Это один из вопросов, на которые пока нет ответа.

А.Жуков

Удивительные числовые «раскопки» провел в 1747—1750 гг. Леонард Эйлер. Придумав несколько оригинальных числовых методов, он подарил изумленным современникам сразу 61 пару дружественных чисел, причем среди найденных им чисел оказались и нечетные, например 69615 и 11498355, 87633 и 12024045.

Неизвестно, существуют ли нечетные совершенные числа. По крайней мере, среди первых 10^{50} чисел нечетных совершенных чисел нет.

Если нечетное совершенное число существует, то оно должно содержать по меньшей мере 6 различных простых делителей и иметь вид $n = p^{4r+1}q_1^{2s_1}q_2^{2s_2}\dots q_m^{2s_m}$, где p – простое число вида $4k+1$, а $q_1, q_2, \dots, q_m$ – произвольные простые нечетные числа. При этом если все s_k, кроме s_1, равны 1, то $s_1 \neq 2$, а если все s_k, кроме s_1 и s_2, равны 1, то $s_1 \neq 2$ и $s_2 \neq 2$. Не может быть и того, что все $s_k = 2$.

Если наименьший из простых делителей числа n равен $t+1$, то это число должно иметь по крайней мере t простых делителей.

В старину дружественные числа служили для изготовления талисманов, якобы сохраняющих и укрепляющих дружбу. Мадридский ученый аль-Маджрити (ум. 1007) в своем трактате «Цель мудреца» приводит «чудодейственный рецепт», позволяющий добиться взаимности в любви. Оказывается, для этого достаточно записать на чем-либо числа 220 и 284, меньшее дать съесть предмету страсти, а большее съесть самому...

Пары дружественных чисел в пределах 100 000:

220 – 284
1184 – 1210
2620 – 2924
5020 – 5564
6232 – 6368
10744 – 10856
12285 – 14595
17296 – 18416
63020 – 76084
66928 – 66992
67095 – 71145
69615 – 87633
79750 – 88730

Любопытно, что в 1866 году 16-летний итальянец Н.Паганини (однофамилец великого скрипача) нашел пару дружественных чисел 1184 и 1210, которую все, в том числе и выдающиеся математики, проглядели!

Дружественные числа скрывают множество загадок. Каков общий закон образования таких чисел? Существуют ли среди дружественных чисел смешанные пары, в которых одно число четное, а другое – нечетное? Сколько всего дружественных чисел? Конечно их количество или бесконечно? На эти и другие вопросы

(Начало см. на с.31)

яние линзы. Из подобия треугольников SAO и SCB следует, что

$$\frac{d}{d+L}=\frac{R}{r_2}.$$

Отсюда

$$d=\frac{L}{r_2/R-1}=24 \text{ см}.$$

Аналогично, из подобия треугольников S^*AO и S^*DB находим

$$f=\frac{L}{r_1/R-1}=8 \text{ см}.$$

Наконец, из формулы линзы для фокусного расстояния получаем

$$F=\frac{df}{d-f}=12 \text{ см}.$$

Задача 2. *Точечный источник света S расположен на расстоянии d = = 40 см от собирающей линзы на ее главной оптической оси. Оптическая сила линзы D = 5 дптр. При повороте линзы на некоторый угол относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через оптический центр линзы, изображение источника сместилось на Δl = 10 см. Найдите угол поворота линзы.*

Изображение (S^*) источника (рис.2) сначала расположено на главной оптической оси линзы на расстоянии f от линзы. По формуле линзы,

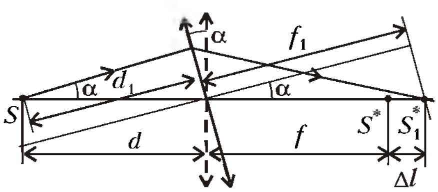


Рис. 2

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=D,$$

откуда

$$f=\frac{d}{Dd-1}=0{,}4 \text{ м}.$$

При повороте линзы на угол α ее главная оптическая ось тоже поворачивается на угол α, а изображение (S_1^*) смещается на Δl. Из рисунка 2 видно, что $d_1 = d\cos\alpha$ и $f_1 = (f+\Delta l)\cos\alpha$. Формула линзы в этом случае примет вид

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_1}=D.$$

Отсюда для угла α находим

$$\cos\alpha=\frac{d+f+\Delta l}{Dd(f+\Delta l)}=0{,}9,$$

и

$$\alpha=\arccos 0{,}9.$$

Задача 3. *Шар из оптически прозрачного материала помещен в параллельный пучок света (рис.3). Угол падения одного из лучей на поверхность шара $\varphi = \operatorname{arctg}(4/3)$, а угол его отклонения от первоначального направления после двух преломлений на поверхности шара $\theta = 2\operatorname{arctg}(7/24)$. Найдите показатель преломления материала шара.*

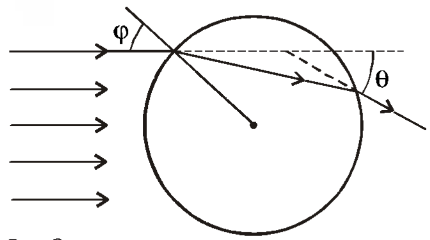


Рис. 3

Луч света $1A$ (рис.4), падающий на шар под углом φ, проходит в шаре по

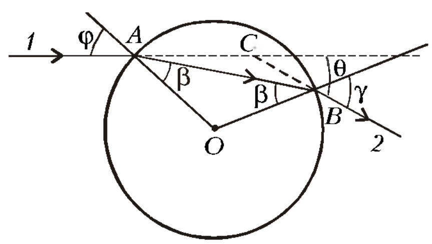


Рис. 4

линии AB, составляющей углы β с радиусами AO и BO, так, что

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\beta}=n.$$

Для выходящего из шара луча $B2$ имеем

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{1}{n}.$$

Рассмотрим треугольник ABC. Очевидно, что он равнобедренный и угол θ является его внешним углом; следовательно,

$$\theta=2(\varphi-\beta)=2\operatorname{arctg}\frac{7}{24},$$

или

$$\operatorname{tg}(\varphi-\beta)=\frac{7}{24}.$$

Отсюда, используя известную тригонометрическую формулу $\operatorname{tg}(\varphi-\beta) = (\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\beta)/(1+\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\beta)$, получим

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{3}{4}.$$

Окончательно, для показателя преломления находим

$$n=\frac{\sin\varphi}{\sin\beta}=\frac{\sqrt{1+1/\operatorname{tg}^2\beta}}{\sqrt{1+1/\operatorname{tg}^2\varphi}}=\frac{4}{3}.$$

Задача 4. *Тонкая рассеивающая линза с фокусным расстоянием F = 15 см прикреплена к стенке аквариума, заполненного водой (показатель преломления воды n = 4/3). На линзу под углом α падает параллельный пучок света. Известно, что луч, прошедший сквозь линзу на расстоянии h от ее оптического центра, не изменяет своего направления. Найдите h, если $\operatorname{tg}\alpha$ = 0,08.*

Проведем луч $1A$, падающий на линзу в точке A на расстоянии h от главной оптической оси, которая пересекается этим лучом в точке C на расстоянии d от линзы (рис.5). Из геометрии рисунка видно, что

$$d=\frac{h}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Если бы в аквариуме не было воды, то луч света после преломления линзой пошел бы в направлении $A2$. В случае заполненного водой аквариума, по условию задачи, он идет в направлении $A3$, не изменяя своего первоначально-

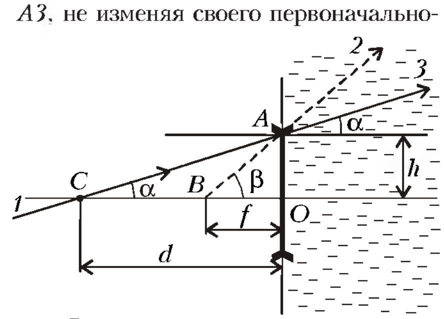


Рис. 5

го направления. Пусть β – угол между лучом $A2$ и оптической осью линзы и $BO = f$. Очевидно, что $\sin\beta/\sin\alpha = n$, или, так как углы β и α маленькие,

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}=n.$$

Кроме того,

$$f=\frac{h}{\operatorname{tg}\beta}.$$

В соответствии с формулой линзы,

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=-\frac{1}{F}.$$

Решая систему полученных четырех уравнений, для искомой величины получаем

$$h=F(n-1)\operatorname{tg}\alpha=0{,}4 \text{ м} = 40 \text{ см}.$$

Задача 5. *В комнате на столе лежит плоское зеркало, на котором находится тонкая плосковыпуклая линза с фокусным расстоянием $F = 40$ см (рис.6). По потолку ползет муха со скоростью $v = 2$ см/с. Расстояние от потолка до зеркала $h = 220$ см. На каком расстоянии от зеркала находится изображение мухи*

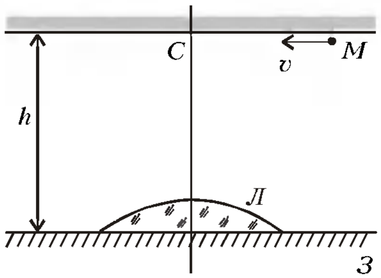


Рис. 6

в данной оптической системе? Чему равна скорость изображения мухи в тот момент, когда она пересекает главную оптическую ось линзы (в точке C)?

Построим изображение мухи в оптической системе линза – зеркало – линза. На рисунке 7 точка M_1 – первое изображение мухи, даваемое линзой, а M_2 – изображение мухи, даваемое линзой после отражения лучей от зеркала. Запишем формулу линзы для первого случая:

$$\frac{1}{h}+\frac{1}{a}=\frac{1}{F}$$

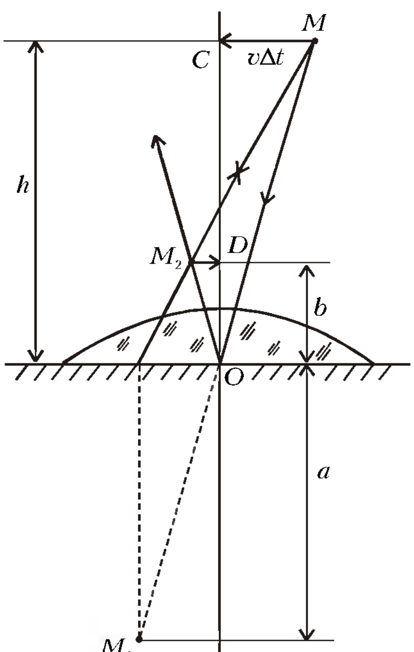


Рис 7

и для второго:

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}.$$

Отсюда находим искомое расстояние:

$$b=\frac{Fh}{2h-F}=22 \text{ см}.$$

Из подобия треугольников OCM и ODM_2 имеем

$$\frac{CM}{DM_2}=\frac{v\Delta t}{u\Delta t}=\frac{h}{b},$$

где u – скорость изображения мухи. Таким образом,

$$u=v\frac{b}{h}=0{,}2 \text{ см/с}.$$

Задача 6. *На главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 20$ см расположено плоское зеркальце на расстояние $L = 3F$ от линзы (рис.8). Зеркальце вращается с угловой скоростью $\omega = 0{,}1$ $с^{-1}$ вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и*

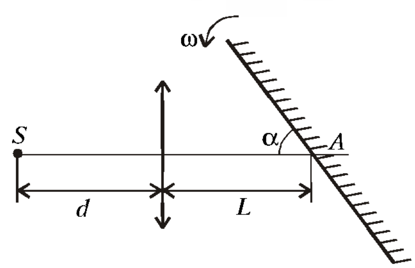


Рис. 8

проходящей через точку A. На расстоянии $d = 5F/4$ от линзы находится точечный источника света S. На каком расстоянии от точки A получится изображение источника в системе линза – зеркальце в результате однократного прохождения лучей от источника через линзу? Найдите скорость (модуль и угол между вектором скорости и главной оптической осью) этого изображения в момент, когда угол между плоскостью зеркальца и главной оптической осью $\alpha = 60°$.

Построение изображения источника в данной оптической системе показано на рисунке 9. Здесь S_1 – изображение источника, даваемое линзой, S_2 – изображение «источника» S_1 в зеркальце. Из формулы линзы

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$$

находим

$$f=\frac{Fd}{d-F}=5F=100 \text{ см}.$$

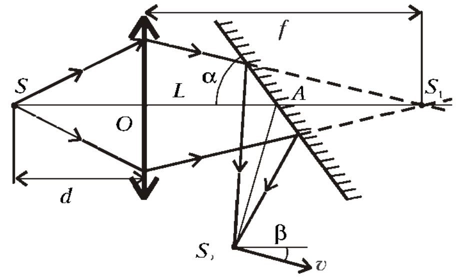


Рис. 9

Из соображений симметрии $AS_2 = AS_1$, а $AS_1 = f - L$. Отсюда находим искомое расстояние:

$$AS_2 = f - L = 2F = 40 \text{ см}.$$

Вектор скорости изображения $\vec{v}$ перпендикулярен отрезку AS_2 и с оптической осью составляет угол

$$\beta = 2\alpha - \frac{\pi}{2} = 30°.$$

Модуль скорости изображения равен

$$v=\frac{\Delta\beta}{\Delta t}AS_2=2\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}AS_2=$$

$$=2\omega\cdot 2F=8 \text{ см/с}.$$

Упражнения

1. Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 15$ см прикреплена к стенке аквариума, заполненного водой ($n = 4/3$). На линзу под углом α падает параллельный пучок света. Известно, что луч, прошедший сквозь линзу на расстоянии h от ее оптического центра, не изменяет своего направления. Найдите угол α, если $h = 5$ мм.

2. Точечный источник света расположен на главной оптической оси рассеивающей линзы в ее фокусе. Оптическая сила линзы $D = 4$ дптр. На какое расстояние сместится изображение источника, если линзу повернуть на угол $\alpha = 30°$ относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через оптический центр линзы?

3. На главной оптической оси тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = 10$ см расположено плоское зеркальце на расстоянии $L = 4{,}2F$ от линзы (см. рис.8). Зеркальце вращается с угловой скоростью $\omega = 0{,}05$ $с^{-1}$ вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку A. На расстоянии $d = 4F$ от линзы находится точечный источник света S. На каком расстоянии от точки A получится изображение источника в системе линза – зеркальце в результате однократного прохождения лучей от источника через линзу? Найдите скорость (модуль и угол между вектором скорости и главной оптической осью) этого изображения в момент, когда угол между плоскостью зеркальца и главной оптической осью $\alpha = 40°$.

Материалы вступительных экзаменов 1999 года

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найдите действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 2y - 1 = 0, \\ y^2 - 2x + 6y + 14 = 0. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\cos 3x - \sin x}{\cos 5x - \sin 3x} = 1.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}} \log_2 \frac{x^2 - |x| - 12}{x + 3} > 0.$$

4. Окружность с центром на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ касается прямой AB и проходит через точки C и D. Найдите стороны параллелограмма, если его площадь $S = \sqrt{2}$, а $\angle BAC = \arcsin\frac{1}{3}$.

5. Найдите все пары целых чисел x, y, для которых верны неравенства $3y - x < 5$, $x + y > 26$, $3x - 2y < 46$.

6. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a, точка K – середина ребра AB, точка E лежит на ребре CD и $EC : ED = 1 : 2$, точка F – центр грани ABC. Найдите: а) угол между прямыми BC и KE; б) расстояние между этими прямыми; в) радиус сферы, проходящей через точки A, B, E и F.

Вариант 2

1. Найдите решения $(x;\ y)$ системы уравнений

$$\begin{cases} \log_3(5y - x - 2) - \log_9(x - y)^2 = 1, \\ \log_3\left(1 - \frac{2}{y} - 4x\right) - \log_9 x^2 = 1, \end{cases}$$

которые удовлетворяют неравенству $x - y < 0$.

2. Решите уравнение

$$2 + \sqrt{3}\sin 2x - |\cos 2x| = 4\sin^2\frac{x}{2}.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{3x^2 - 22x^2 + 40x}}{x - 4} \geq 3x - 10.$$

4. Медиана AE и биссектриса CD равнобедренного треугольника ABC $(AB = BC)$ пересекаются в точке M. Прямая, проходящая через M параллельно AC, пересекает AB и BC в точках P и Q соответственно. Найдите MQ и радиус окружности, описанной около треугольника PQB, если $AC = 4$, а $\angle ACB = \operatorname{arctg}\left(2\sqrt{2}\right)$.

5. Дана система неравенств

$$\begin{cases} |x| + |y| \leq 2, \\ x^2 + y^2 \geq 4(x + y - 1), \\ (y - 3x - 2)(3y - x + 2) \leq 0. \end{cases}$$

Найдите площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют: а) первому неравенству системы; б) первым двум неравенствам системы; в) всем трем неравенствам системы.

6. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, высота пирамиды, опущенная на основание, равна $2\sqrt{2}$. На ребрах SA и SD расположены точки E и F так, что $AE = 2 \cdot ES$, $SF = 5 \cdot DF$. Через точки E и F проведена плоскость α, параллельная CD. Найдите: а) площадь фигуры, полученной при пересечении пирамиды плоскостью α; б) радиус сферы с центром в точке A, касающейся плоскости α; в) угол между плоскостью α и плоскостью ABC.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. На гладкой наклонной плоскости с углом наклона α к горизонту в точке O закреплена нить длиной l; к другому концу нити привязан небольшой шарик (рис.1). В начальный момент шарик находится в положении равновесия в точке A. Какую минимальную скорость надо сообщить шарику в точке A вдоль наклонной плоскости в горизонтальном направлении, чтобы шарик совершил полный оборот, двигаясь по окружности?

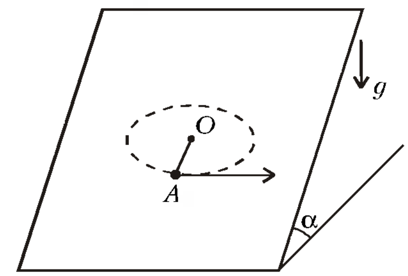


Рис. 1

2. Летним днем перед грозой плотность влажного воздуха (масса пара и воздуха в 1 $м^3$) равна $\rho = 1140$ г/$м^3$ при давлении $p = 100$ кПа и температуре $t = 30$ °С. Найдите отношение парциального давления водяного пара, содержащегося в воздухе, к парциальному давлению воздуха. Принять, что молярные массы воздуха и пара равны $M_в = 29$ г/моль и $M_п = 18$ г/моль соответственно; универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

3. В электрической схеме, состоящей из батареи с ЭДС $\mathcal{E} = 15$ В, резисторов с сопротивлениями $R_1 = 10$ Ом и $R_2 = 30$ Ом, замыкают ключ K (рис.2). 1) Найдите ток

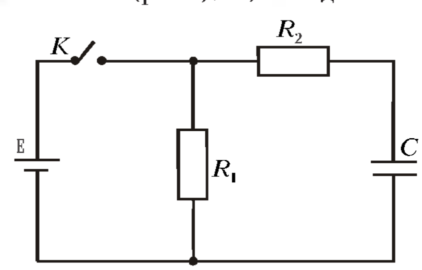


Рис. 2

через резистор R_2 сразу после замыкания ключа. 2) Найдите ток через батарею в тот момент, когда напряжение на конденсаторе равно $\mathcal{E}/3$. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

4. На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая жесткая тонкая рамка в виде равностороннего треугольника со стороной, равной a. Рамка находится в однородном горизонтальном магнитном поле, линии индукции которого

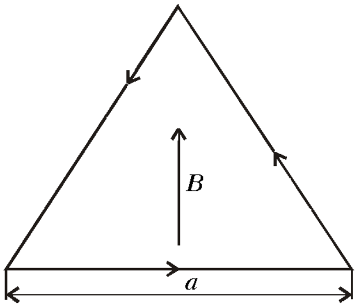


Рис. 3

перпендикулярны одной из сторон рамки (рис.3). Масса рамки M, величина индукции B. Какой силы ток нужно пропустить по рамке (против часовой стрелки), чтобы она начала приподниматься относительно одной из вершин треугольника?

5. Часовщику необходимо рассматривать детали часов, размеры которых в $N = 3$ раза меньше, чем то минимальное расстояние между двумя точками, которое он может рассмотреть с расстояния наилучшего зрения $d_0 = 25$ см. Чему равно максимальное фокусное расстояние лупы (собирающая линза), которую он должен использовать, чтобы рассмотреть эти детали? При использовании лупы глаз наблюдателя аккомодирован на бесконечность, а рассматриваемые предметы расположены в фокальной плоскости лупы.

Вариант 2

1. Небольшой брусок массой m лежит на гладком столе внутри жесткой рамы. Длина рамы L, масса m. Рама пружиной жесткостью k соединена с неподвижной опорой (рис.4). Раму отводят направо так, что брусок касается ее левой стенки, и отпускают. В результате упругих столкновений брусок и рама совершают периодические движения. 1) Найдите скорость бруска сразу после первого столкновения с рамой. 2) Найдите период колебаний бруска.

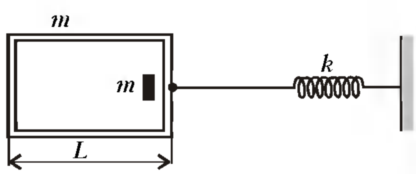


Рис. 4

2. Брусок может двигаться поступательно по прямолинейным горизонтальным салазкам, не отрываясь от них. На бруске укреплен в вертикальной плоскости, параллельной салазкам, желоб радиусом R, по которому может скользить без трения небольшой по размерам шарик массой m (рис.5). Масса бруска с желобом $6m$. Вначале брусок покоился. Шарику в верхней точке желоба сообщили горизонтальную скорость v_0. 1) Найдите скорость бруска при прохождении шариком нижней точки желоба. 2) На каком расстоянии от первоначального положения окажется брусок через время t_0, когда шарик совершит несколько оборотов и окажется в нижней точке желоба?

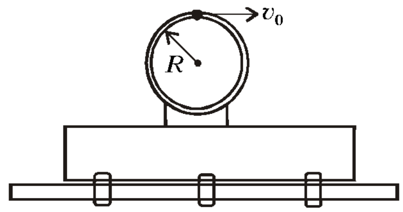


Рис. 5

3. Моль гелия из начального состояния с температурой $T = 300$ К расширяется в адиабатическом процессе так, что относительные изменения давления $\Delta p/p$, объема $\Delta V/V$ и температуры газа $\Delta T/T$ малы. Найдите работу, совершенную газом, если относительное изменение его давления равно $\Delta p/p = -1/120$.

4. В схеме, изображенной на рисунке 6, при разомкнутых ключах K_1 и K_2 конденсаторы с емкостями C_1 и C_2 не заряжены. ЭДС батареи $\mathcal{E}$, внутреннее сопротивление r. Сначала замыкают ключ K_1, а после установления стационарного состояния в схеме замыкают ключ K_2. 1) Чему равен ток через батарею сразу после замыкания ключа K_1? 2) Какое количество теплоты выделится во всей схеме после замыкания ключа K_2?

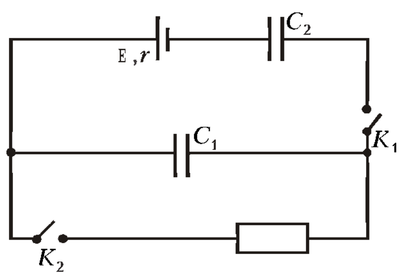


Рис. 6

5. Если рассматривать свое изображение в плоскопараллельной стеклянной пластинке толщиной $H = 10$ см, то можно увидеть ряд последовательных изображений лица, отстоящих друг от друга на $L = 14$ см. Чему равен показатель преломления стекла пластинки?

Публикацию подготовили
В.Трушин, Ю.Чешев, М.Шабунин

Московский государственный институт электроники и математики (технический университет)

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты электроники, информатики и телекоммуникаций, автоматики и вычислительной техники)

1. Решите относительно x уравнение

$$\frac{2x-a-2}{x^2+ax-2a^2}+\frac{4a+3}{x+2a}=2.$$

2. Решите неравенство

$$\left(6x^2-11x-7\right)\log_5(x-2)>0.$$

3. Решите уравнение

$$\log_9(15\sin x+9\cos 2x)+\log_{\frac{1}{3}}(4\cos x)=0.$$

4. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы, равная 6, составляет угол 30° с плоскостью другой боковой грани. Найдите объем призмы.

5. В двух группах более 52 студентов. Известно, что число студентов первой группы превышает число студентов второй группы уменьшенное на 21, более чем в два раза, а число студентов второй группы более чем в пять раз превышает число студентов первой группы, уменьшенное на 16. Сколько студентов в каждой из групп?

Вариант 2

(факультеты прикладной математики и экономико-математический)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2ax+y=-3,\\ x+2ay=3.\end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\log_{2x-3}\left(3x^2-6x+2\right)>1.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{3-4\sin 2x}\,(3\cos 2x+\sin x-2)=0.$$

4. Сторона AB пятиугольника $ABCDE$, у которого углы A и B – прямые, служит диаметром окружности, касающейся сторон ED и DC. Радиус окружности равен R, угол $EOA = 30°$, угол COB равен α (O – центр окружности). Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$ и определите значение угла α, при котором эта площадь минимальна.

5. а) При $a = 6$ решите неравенство

$$\log_{|2a|}\left(3x^2+ax\right)<2.$$

б) Найдите все значения a, при каждом из которых данное неравенство выполняется для всех $x \in [-4; -3]$.

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. Чаша в форме полусферы с радиусом R вращается вокруг вертикальной оси (рис.1). В чаше находится небольшое тело, радиус-вектор кото-

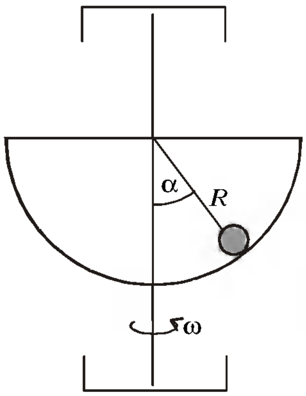


Рис. 1

рого составляет при вращении угол α с вертикалью. С какой угловой скоростью ω должна вращаться чаша, чтобы тело не соскальзывало, если коэффициент трения покоя равен μ?

2. Две частицы массами m и $2m$ движутся во взаимно перпендикулярных направлениях со скоростями v и $v/4$ соответственно. После соударения частицы обмениваются импульсами. Определите выделившееся при ударе количество теплоты.

3. В начальный момент времени смещение частицы x_0 = 1,7 см, а скорость v_0 = –1 м/с. Масса частицы m = 0,4 кг, ее полная энергия W = 800 мДж. Напишите закон колебаний частицы и определите путь, пройденный частицей за время t = = 0,1π с.

4. Шарик, подвешенный на пружине, опускают в воду. Растяжение пружины при этом уменьшается в n = 1,6

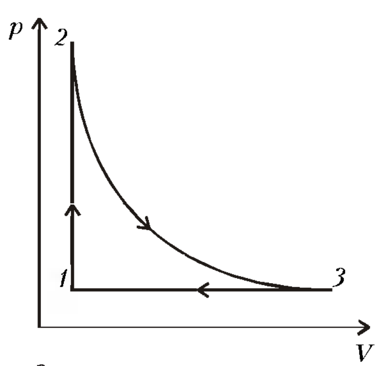


Рис. 2

раза. Определите плотность материала шарика.

5. Определите КПД цикла (рис.2), совершаемого ν = 3 моль одноатомного идеального газа и состоящего из изохоры, адиабаты и изобары, если известно, что газ получил Q = 3000 Дж тепла и в результате адиабатного расширения его температура понизилась на ΔT = 40 К.

6. Определите количество теплоты, выделившееся в резисторе R_3 при пе-

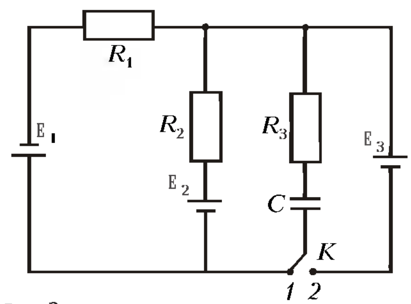


Рис. 3

реключении ключа K из положения *1* в положение *2* (рис.3). Внутренние сопротивления всех источников одинаковы и равны r = 1 Ом, ЭДС источников составляют $\mathcal{E}_1$ = 4 В, $\mathcal{E}_2$ = = 2В, $\mathcal{E}_3$ = 1 В. Сопротивления всех резисторов одинаковы и равны R = = 20 Ом. Емкость конденсатора C = = 1,4 мкФ.

7. При номинальной нагрузке сила тока в первичной обмотке сварочного трансформатора равна I_1 = 30 А. Ее сопротивление R_1 = 0,1 Ом. Полагая, что сечения проводов пропорциональны силам тока и обмотки мотаются на сердечник в один слой, определите потери мощности на их нагрев.

8. Контур состоит из катушки индуктивностью L = 64 мкГн и конденсатора емкостью C = 200 пФ. Конденсатор зарядили до напряжения U_0 = 8 В. Каким будет ток в тот момент, когда энергия контура окажется распределенной поровну между электрическим и магнитным полями? Каков максимальный ток в этом контуре?

9. Отношение скоростей вылетающих электронов при освещении поверхности металла светом с длинами волн λ_1 и λ_2 равно n = 0,5. Определите λ_2, если λ_1 = 400 нм и красная граница фотоэффекта для этого металла $\lambda_{кр}$ = = 600 нм.

10. Увеличение, даваемое линзой, равно Γ = 5. Определите фокусное расстояние линзы, если расстояние от нее до предмета d = 12 см.

Публикацию подготовили
С.Кашина, В.Тонян

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{|x|}\right) + \log_{|x|} 3 \ge 2.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{6}{\operatorname{ctg}\left(1{,}5\pi + \frac{x}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{3}\right)} = \left(\cos\frac{x}{3} - \sin\frac{x}{3}\right)^2.$$

3. Дана функция $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$. Напишите уравнения тех касательных к графику этой функции, которые параллельны прямой $2x - y + 5 = 0$.

4. Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – равнобедренная трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $BC < AD$). Через точки A, B_1, C_1 проведена плоскость. Найдите площадь полученного сечения и объем призмы, если AA_1 = = 12 см, AB = 15 см, BC = 6 см, AD = = 24 см.

5. Пароход через два часа после отправления от пристани A останавливается на 1 ч и затем продолжает путь со скоростью, равной 0,8 первоначальной, вследствие чего опаздывает к пристани B на 3,5 ч. Если бы остановка произошла на 180 км дальше, то при тех же остальных условиях пароход опоздал бы в B на 1,5 ч. Найдите расстояние AB.

Вариант 2

(математический факультет)

1. Решите неравенство

$$\log_x(x+1) < \log_{\frac{1}{x}}(2-x).$$

2. Решите уравнение

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin^3\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$$

3. Напишите уравнения касательных к графику функции $f(x) = 2x^2 + + 2$, если эти касательные проходят через точку (0; 1).

4. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит прямоугольная трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $CD < < AB$, $BC < AD$). Через вершины C_1, D_1 и B проведена плоскость. Найдите площадь полученного сечения и объем призмы, если $AD = 14$ см, $BC = 6$ см, $AB = 10$ см, $AA_1 = 8$ см.

5. Если две трубы открыть одновременно, то бассейн наполнится за 2 ч 24 мин. В действительности же сначала была открыта только первая труба в течение 1/4 времени, которое необходимо второй трубе, чтобы наполнить бассейн, действуя отдельно. Затем действовала вторая труба в течение 1/4 времени, которое необходимо первой, чтобы одной наполнить бассейн, после чего оказалось, что остается наполнить 11/24 полной вместимости бассейна. Сколько времени необходимо для наполнения бассейна каждой трубой в отдельности?

Вариант 3

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sin 2x - 4\cos 2x = 4.$$

2. Найдите угол, который образует с осью ординат касательная к кривой

$$y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{x^3}{9},$$

проведенная в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

3. Решите неравенство

$$\lg 2 + \lg\left(2x - x^2\right) > \lg\left(1 + x^2\right).$$

4. Решите уравнение

$$5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} = 24.$$

5. В конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α, вписан шар. Определите расстояние от вершины конуса до поверхности шара, если площадь основания конуса равна S.

Вариант 4

(химический факультет)

1. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 5 и наклонено к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

2. Решите уравнение

$$\sin 7x + \sin 5x = 2\cos x.$$

3. Решите неравенство

$$\log_3 \log_2 \log_{0,5} x \le 1.$$

4. Решите уравнение

$$49^x - 8\cdot 7^x + 7 = 0.$$

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = x^4 - 8x^2$$

на отрезке $[-3;\ 1]$.

Задачи устного экзамена

1. Докажите при $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ тождество

$$\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha} = 2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

2. Найдите значение выражения

$$\operatorname{tg}20^\circ + \operatorname{tg}25^\circ + \operatorname{ctg}70^\circ \operatorname{ctg}245^\circ.$$

3. Вычислите

$$2 + \log_2 \sin 7^\circ 30' + \log_2 \sin 82^\circ 30' - \log_{0,5} \sin 75^\circ.$$

4. Решите уравнение

$$\sin x + |\cos x| = -1.$$

5. Вычислите

$$\sin\left(\arccos\frac{1}{3} - \operatorname{arctg} 2\right).$$

6. В треугольнике ABC $\angle ABC = 120°$, $AB = BC$, радиус вписанной окружности равен $4\sqrt{3}$ дм. Найдите стороны треугольника.

7. В равнобедренный треугольник с основанием 12 см вписана окружность радиуса 3 см. Найдите боковую сторону и высоты треугольника.

8. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$. Перпендикуляр, проведенный из середины BC к AB, равен 6 см, а расстояние от середины AB до катета BC равно 7,5 см. Найдите стороны треугольника ABC.

9. Решите неравенство

$$\log_7\left(3^{x-1} + 4\right) + x(\log_7 21 - 1) < 1 + \log_7 9.$$

10. Сравните с нулем значение выражения

$$\log_{\frac{1}{5}} 7 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{5}} 1{,}2 - 3\log_{\frac{1}{5}} 2.$$

11. Решите уравнение

$$\lg(\lg x) + \lg\left(\lg x^3 - 2\right) = 0.$$

12. Решите уравнение

$$3 - \sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{x+3}.$$

13. При каких значениях k корни уравнения

$$x^2 - (2k+1)x + k^2 = 0$$

относятся как 1:4?

14. Постройте график функции

$$y = x + \left|x^2 - 3x\right|.$$

15. Постройте график функции

$$y = x^4 - 8x^2 + 8.$$

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. Тело брошено с земли вертикально вверх со скоростью 49 м/с. На какой высоте его кинетическая энергия будет равна потенциальной? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Льдина равномерной толщины плавает, выступая над уровнем воды на 2 см. Найдите массу льдины, если площадь ее основания 200 см^2. Плотность льда $0{,}9\cdot 10^3$ кг/м^3, плотность воды 10^3 кг/м^3.

3. В комнате объемом 40 м^3 при температуре 20 °С относительная влажность воздуха составила 20%. Какую массу воды нужно испарить для увеличения относительной влажности воздуха до 50%? Плотность насыщенного водяного пара при 20 °С равна $17{,}3\cdot 10^{-3}$ кг/м^3.

4. Какую работу совершит идеальный тепловой двигатель, имеющий температуру нагревателя 527 °С и температуру холодильника 47 °С, если от нагревателя он получит 30 кДж тепла?

5. В сеть напряжением 120 В включены две электрические лампочки с сопротивлениями по 200 Ом. Какой ток пройдет через каждую лампочку при их параллельном и последовательном соединениях?

6. Аккумулятор с ЭДС 6 В и внутренним сопротивлением 0,1 Ом питает внешнюю цепь сопротивлением 11,9 Ом. Какое количество теплоты выделится за 10 мин во всей цепи?

7. Плоский виток площадью 10 см^2 помещен в однородном магнитном поле перпендикулярно линиям индукции. Сопротивление витка 1 Ом. Какой ток потечет по витку, если магнитная индукция поля будет убывать со скоростью 0, 01 Тл/с?

8. Из некоторой жидкости на границу ее раздела с воздухом падает луч света. Угол падения равен 30°. Отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу. Найдите показатель преломления жидкости.

9. Звуковые колебания распространяются в воде со скоростью 1480 м/с, а в воздухе – со скоростью 340 м/с. Во сколько раз изменится длина звуковой волны при переходе звука из воздуха в воду?

10. Возникнет ли фотоэффект в цинке под действием излучения, имеющего длину волны 0,45 мкм? Постоянная Планка $4{,}14\cdot 10^{-15}$ эВ·с, работа выхода электронов из цинка 3,74 эВ.

Публикацию подготовили
Г.Брайчев, Б.Кукушкин,
М.Чернецов, М.Чистова, Г.Шадрин

VIII Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Очередная, васьмая, тест-рейтинговая алимпиада «Интеллектуальный марафан» прашла с 26 апреля по 3 мая в рамках Международнаго фестиваля «Дети. Интеллект. Культура», катарый был праведен Международным интеллект-клубом «Глюон» при участии Фонда греческих исследаваний и поддержке компании «Хелленик Панарама» (Греция, Афины).

Участники и гости фестиваля собрались в одном из красивейших мест эгейскаго пабережья, на мысе Суниан, недалека ат историческага памятника – храма Пасейдана.

Большой интерес вызвала традицианная канференция юных ученых. На различных секциях были заслушаны даклады па математике, физике, эколагии, истории; рассматрены праекты студии «Нааcфериум», работы юных художников, паэтическае творчества и художественный перевод. Все участники заслужили самой высокай оценки; мнагие были награждены дипломами и памятными падарками. Особенно были атмечены выступления учениц масковскай школы 1239 Маши Алексеевай (7 класс) – за интересные переводы из Роберта Стивенсона и Маши Новиковой (6 класс) – за цикл собственных стихов.

Увлекательно слажилась барьба на олимпиаде «Интеллектуальный марафон». В командном устнам туре па математике выиграла команда инженерна-техническага лицея 3 из Волгограда, па физике – каманда из Иордании (она же выиграла и главный приз этих сарeвнований, получив лучший суммарный результат), по истории научных идей и аткрытий – совсем юная команда московской школы 1239, составленная из учеников 6—8 классов.

По результатам индивидуальнаго письменнога тура лучшим математиком была признана Оксана Навицкая из волгаградскаго лицея 3, а лучшим физиком – Станислав Патапов из тага же лицея. Интересна атметить, что О.Новицкая, паказав высакие результаты во всех турах соревнаваний, стала пабедителем в абщем зачете и палучила звание «Мисс Олимпиада-98».

Богатой и интересной была и культурно-экскурсианная праграмма фестиваля.

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» приглашает учебные центры, школы, лицеи и гимназии на ачередную международную тест-рейтинговую олимпиаду «Интеллектуальный марафон», катарая пройдет с 25 сентября па 3 октября 2000 гада в Болгарии в рамках Европейскага фестиваля науки.

Заявки на участие принимаются не пазднее 25 января 2000 года па адресу: 115522 Масква, Пролетарский праспект, д. 15/6, кам. 2, МИК «Глюан».

Телефон: (095) 324-20-30; факс: (095) 396-82-27; e-mail: olgo@mics.msu.su

Задачи

Письменный индивидуальный тур

Математика

1. На какие цифры надо заменить звездочки в записи девятизначного числа $32{*}35717{*}$, чтобы оно разделилось на 72?

2. Разрежьте листок клетчатой бумаги размером 8×9 клеток на фигурки, состоящие из четырех клеток и имеющие форму буквы Г (рис.1).

3. Найдите три простых числа, произведение которых в 7 раз больше их суммы.

4. В треугольнике ABC площадью S точка K – середина медианы AM. Прямая BK пересекает AC в точке L. Найдите площадь треугольника AKL.

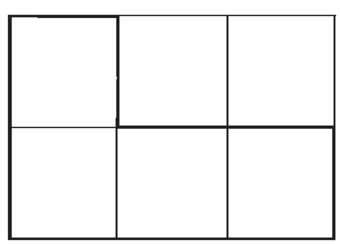


Рис. 1

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 6y = 0, \\ y^2 - 2xy + 9 = 0. \end{cases}$$

6. Можно ли увезти 50 камней, массы которых 370 кг, 372 кг, 374 кг, 376 кг, ..., 468 кг на семи трехтонных грузовиках?

7. В ромбе $ABCD$ величина угла B равна 40°, E – середина BC, F – основание перпендикуляра, опущенного из A на DE. Найдите величину угла DFC.

Физика

1. Мальчику, живущему в доме, находящимся на расстоянии $h_1 = 200$ м от реки, надо принести ведро воды бабушке, живущей в доме, расположенном вниз по течению на расстоянии $L = 400$ м и удаленном от реки на $h_2 = 100$ м. Какое минимальное время необходимо мальчику, чтобы выполнить поручение? Скорость мальчика считать равной $v = 2$ м/с, временем наполнения ведра пренебречь.

2. Тонкое кольцо скатывается без проскальзывания с высоты h по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтальной поверхностью. Определите скорость движения кольца у основания наклонной плоскости, если его начальная скорость равна нулю.

3. Какую минимальную механическую работу надо совершить, чтобы вытянуть пробку длиной l из горлышка бутылки, если минимальная сила, под действием которой пробка приходит в движение, равна F_0?

4. Определите силу взаимодействия точечного заряда q с идеально проводящей металлической пластиной, имеющей поверхностную плотность заряда σ, если расстояние между пластиной и зарядом равно l.

5. Определите электрическое сопротивление цепей, представленных на рисунке 2. Сопротивления всех элементов одинаковы и равны r.

6. Оцените время замерзания слоя воды толщиной $h = 100$ мкм, находящегося в вакуумной камере при температуре $t = 0$ °С. Давление насыщенного водяного пара при указан-

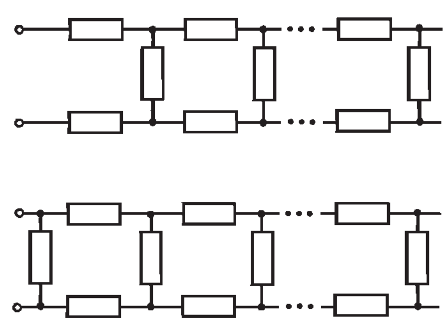


Рис. 2

ной температуре p_0 = 4,5 мм рт. ст. Удельная теплота испарения воды r = 2260 Дж/г, удельная теплота плавления λ = 334 Дж/г, плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3.

7. Полый стальной шар радиусом R = 50 см, погруженный на дно глубокого водоема, всплывает за некоторое время t. Если наполнить шар водой, он погружается на дно водоема за то же самое время. Определите толщину стенок шара. Плотность стали ρ = 7,8 г/см^3, плотность воды ρ_0 = 1,0 г/см^3.

Устный командный тур

Математика

1. Какое из двух чисел $A = 1997^{1998} \cdot 1998^{1999} \cdot 1999^{1997}$ или $B = 1997^{1997} \cdot 1998^{1998} \cdot 1999^{1999}$ больше?

2. Площадь заштрихованного прямоугольника равна Q, площадь прямоугольника $ABCD$ равна P (рис.3).

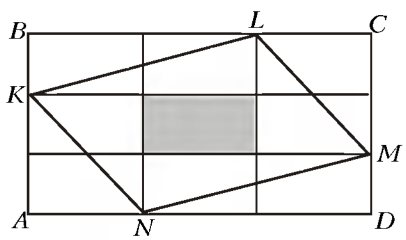


Рис. 3

Чему равна площадь четырехугольника $KLMN$?

3. Является ли число $3^{22} + 5 \cdot 3^{10} + 1$ простым?

4. Что вы можете сказать о треугольнике, площадь которого равна $\frac{1}{4}\left(a^2 + b^2\right)$, где a и b – две из его сторон?

5. Найдите сумму цифр всех трехзначных чисел.

6. Можно ли разрезать выпуклый 17-угольник на 14 треугольников?

7. Два участника шахматного турнира выбыли после 5-го тура, и потому в турнире было сыграно 38 партий. Играли ли выбывшие участники друг с другом?

8. Существует ли натуральное число n такое, что $6n$ является шестой степенью целого числа, а $8n$ – восьмой степенью?

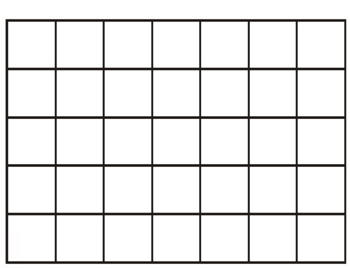


Рис. 4

9. Какое из чисел $A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{9 \cdot 10}$ или $B = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{40}$ больше?

10. Сколько прямоугольников имеется на рисунке 4?

Физика

1. На Земле, Луне и Марсе на пружинных весах взвешивают тела и получают один и тот же результат. Каково соотношение между массами этих тел?

2. В рассказе О.Генри поросенок, получив пинок в зад, полетел, «опережая собственный визг». Какова должна быть минимальная скорость движения поросенка?

3. В Храме неба в Пекине есть кольцевая стена (d = 80 м), хорошо и четко передающая речь на большие расстояния. Объясните этот эффект.

4. В сосуде с водой плавает тонкостенный стакан. Изменится ли уровень воды в сосуде, если в этот стакан налить немного воды из сосуда так, чтобы он продолжал плавать?

5. Если комета видна в Афинах вечером, сразу после захода Солнца, то куда направлен ее хвост?

6. Какую минимальную силу надо приложить, чтобы перекатить через балку высотой 0,1 м колесо весом 1000 Н и радиусом 0,5 м? Какова минимальная величина коэффициента трения между бруском и плоскостью, при которой это возможно?

7. Два одинаковых сосуда с одним и тем же газом соединены горизонтальной трубкой с небольшим столбиком ртути посередине. В одном сосуде температура газа T_1, а в другом T_2. Сместится ли ртуть в трубке, если оба сосуда нагреть на одну и ту же разность температур ΔT?

8. Воздушный конденсатор заряжается до разности потенциалов $\Delta\varphi$ и заливается керосином с диэлектрической проницаемостью ε. При этом его энергия изменяется. Объясните, во что она переходит.

9. Резерфорд, проводя опыты по рассеянию α-частиц на тонких золотых фольгах, пришел к выводу о существовании внутри атома компактного ядра. Он был первый, кто оценил его размер: $R \approx 10^{-12}$см. Как он это сделал? (Энергия α-частиц 5 Мэв, порядковый номер золота 79.)

10. Вы в случайный момент времени измеряете угол отклонения от положения равновесия математического маятника, совершающего колебания с амплитудой α_0. Эксперимент повторяется многократно и в случайные моменты времени. Как будет выглядеть полученное распределение вероятности W по углам отклонения α?

История научных идей и открытий

Математика

1. Каково происхождение терминов «трапеция», «конус», «цилиндр»?

2. Запишите формулой фразу из древнего трактата: «квадрат на отрезке a равен прямоугольнику на отрезках b и c».

3. Назовите известные вам наиболее знаменитые числа. Что вы можете сказать о них?

4. Какие знаменитые проблемы древности вам известны? Когда и кем они были решены?

5. Назовите имена известных вам математиков, являвшихся крупными государственными деятелями.

Физика

1. Один из классиков современной физики в начале XX века провел серию экспериментов по изучению структуры атомов. В чем заключались эти эксперименты и какую модель атома удалось построить с их помощью? Кто был этот замечательный ученый?

2. Величайший ученый античных времен создал физическую картину мира, которая продержалась около 2000 лет. И только под влиянием результатов исследований ученых эпохи позднего Возрождения эта картина мира сменилась более современной. Какова была картина мира для современников этого ученого? Назовите этого ученого. Когда и где он жил?

3. Какая планета Солнечной системы была впервые открыта с помощью математических расчетов? Какая идея лежала в основе этого открытия? Кто и когда его сделал?

4. В классической механике Ньютона уравнение движения имеет вид $\vec{F} = m\vec{a}$. Какое уравнение движения использовалось в механике Аристотеля? Какой вид движения оно описывает с точки зрения механики Ньютона?

5. Ньютон в детстве провел опыт по измерению скорости ветра: он прыгал по ветру и против него и по разнице в длине прыжка сумел оценить величину скорости ветра. Как он это сделал?

Публикацию подготовили В.Альминдеров, Б.Алиев, А.Егоров, А.Попов

Межобластная заочная математическая олимпиада школьников

Всероссийская школа математики и физики «АВАНГАРД» совместна с Министерством образования РФ и при участии журнала «Квант» провадит Межабластную заачную математическую олимпиаду для шкальникав 6—10 классав. Срак присылки решений – до 30 января 2000 года.

Чтобы принять участие в олимпиаде, нужно решить предлагаемые ниже задачи, аккуратна афармить решения (каждую задачу – на отдельнам листачке) и атослать их па почте в абычнам канверте в Оргкамитет алимпиады по адресу: 115551 Масква, Ореховый б-р, д.11, карп. 3, ВШМФ «АВАНГАРД», Оргкомитет алимпиады.

Для переписки и сообщения вам результатав праверки в письмо обязательно влажите:

– пустой канверт с маркой с заполненным дамашним адресам;

– дапалнительную почтовую марку (марки) достаинством в 1 руб. 20 коп.;

– краткую анкету: вазраст, класс и номер школы, фамилия учителя математики.

Не забудьте сделать пометку, чта инфармацию аб олимпиаде вы узнали из журнала «Квант».

Заметим, что для участия в алимпиаде неабязательно решить все задачи – достатачна хатя бы одной. Победители алимпиады получат призы, среди котарых несколько бесплатных подписак на журнал «Квант». Оргкамитет приложит все усилия к тому, чтобы поащрения и дипломы получили все приславшие хотя бы одно провильнае решение. Списки победителей будут апубликованы в журнале «Квант».

Победители, приславшие наиболее интересные решения, будут приглашены к участию в традиционной очередной Всерассийской конференции одаренных школьникав, которая састоится в Москве, и, вазможно, войдут в каманду для участия в международных встречах.

Все учащиеся, приславшие сваи работы в Оргкамитет алимпиады, независимо ат результатов их проверки, палучат приглашение учиться на заочном атделении Всероссийскай шкалы математики и физики «АВАНГАРД» в 2000/01 учебнам гаду на льготных условиях.

ВНИМАНИЮ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ 6—10 КЛАССОВ! ПРИГЛАСИТЕ К УЧАСТИЮ В ОЛИМПИАДЕ СВОИХ УЧЕНИКОВ!

Задачи олимпиады

6 класс

1. Восстановите пропущенные цифры (т.е. замените нули):

$$\begin{array}{r} \times\ 249 \\ 000 \\ \hline 000 \\ 008 \\ 200 \\ \hline 00007 \end{array}$$

2. Определите пропущенные числа и найдите сумму:

$$3 + 8 + 15 + \ldots + 255.$$

3. В городе Тьмускорпиони телефонные номера состоят из пяти цифр. Первая цифра номера не может быть восьмеркой или нулем. Сколько телефонных номеров в Тьмускорпиони?

4. Фраза

Bekybekjwe – tvunemwe ctyd meuw,

имеющая прямое отношение к математике, зашифрована следующим образом: русские буквы заменены на латинские, причем гласные заменены на гласные, а согласные – на согласные. Расшифруйте фразу.

5. На плоскости даны два одинаковых квадрата с общим центром. Какова может быть минимальная площадь их общей части?

6. Веревка равномерно намотана сверху донизу в виде винтовой линии в 8 оборотов на столб высотой 6 м и обхватом 1 м. Найдите длину веревки.

7. Двое играют в следующую игру: по очереди кладут на круглый стол по одной десятикопеечной монетке. Проигрывает тот, кому не останется места. Докажите, что первый может не проиграть.

7 класс

1. Найдите последнюю цифру числа 7^{1999}.

2. Докажите, что произведение всех натуральных чисел от 1 до 19 не является квадратом натурального числа.

3. На какое максимальное число частей могут разбить плоскость n прямых?

4. См. задачу 6 для 6 класса.

5. Найдите сумму:

$$1 + 3 + 11 + 26 + \ldots + 1013.$$

6. Докажите, что нельзя обойти конем шахматную доску с вырезанными полями a1 и h8, побывав на остальных полях ровно по одному разу.

7. См. задачу 7 для 6 класса.

8 класс

1. Сравните числа

$$\frac{1}{\sqrt{2000}-\sqrt{1999}} \text{ и } \frac{1}{\sqrt{1999}-\sqrt{1998}}.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 1 - x.$$

3. См. задачу 6 для 6 класса.

4. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy = 1 \end{cases}$$

при различных значениях параметра a?

5. На какое максимальное число частей могут разбить плоскость n окружностей?

6. Докажите, что нельзя обойти конем шахматную доску с вырезанными полями a3 и h6, побывав на остальных полях ровно по одному разу.

7. В вершинах единичного квадрата расположены центры четырех кругов единичного радиуса. Найдите площадь общей части всех четырех кругов.

9 класс

1. Докажите неравенство

$$\frac{a+b+c}{2} \geq \sqrt[4]{abcd},$$

где a, b, c, d – положительные числа.

2. См. задачу 6 для 6 класса.

3. Решите в целых числах уравнение

$$x^5 - x = 2000.$$

4. В каких пределах может изменяться площадь четырехугольного сечения единичного куба?

5. См. задачу 7 для 8 класса.

6. Изобразите на координатной плоскости $0xy$ множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют неравенству $\sin xy < 0$.

7. В каждом из узлов бесконечной клетчатой решетки расположен центр круга радиусом 10^{-1999} см. Докажите, что любая прямая, проходящая через один из узлов сетки, пересечет бесконечное множество этих кругов. Размеры сетки 1×1 км.

10 класс

1. Решите уравнение

$$x+\frac{1}{x}=2\sin\frac{\pi x}{2}.$$

2. См. задачу 6 для 6 класса.

3. Изобразите на координатной плоскости $0xy$ множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют уравнению

$$\left(x+|x|\right)^2+\left(x^2+y^2-1\right)^2=0.$$

4. Найдите последнюю цифру числа $7^{9^{11}}$.

5. См. задачу 7 для 9 класса.

6. На сколько частей делят плоскость продолжения сторон правильного n-угольника?

7. Прожектор освещает октант (восьмую часть) прямоугольной системы координат. Какой максимальный объем кубической комнаты может осветить этот прожектор, если его поместить в геометрический центр комнаты? Ребро куба 10 м.

ИНФОРМАЦИЯ

Очередной прием в ОЛ ВЗМШ

Вот уже в 37 раз открытый лицей «Всероссийская заочная многопредметная школа (ВЗМШ)» Российской академии образования, работающий при Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова, проводит набор учащихся.

ВЗМШ – государственное учреждение дополнительного образования, причем не только для школьников: «открытый» – это значит для всех желающих пополнить свои знания в одной или нескольких из следующих областей науки: математика, биология, физика, филология, экономика, химия, правоведение, история (перечисление – в хронологическом порядке открытия отделений).

За время существования ВЗМШ удостоверения об ее окончании получили несколько сотен тысяч школьников и тысячи кружков – групп «Коллективный ученик ВЗМШ».

Обучение в школе ЗАОЧНОЕ. Это значит, что начиная с сентября-октября 2000 года все поступившие будут систематически (примерно раз в месяц) получать специально разработанные для заочного обучения материалы, содержащие изложение теоретических вопросов и методов рассуждений, разнообразные задачи для самостоятельной работы с образцами решений, деловые игры, контрольные и практические задания.

Сейчас ОЛ ВЗМШ совместно с другими научно-педагогическими учреждениями ведет исследовательские работы по разработке новых интерактивных технологий в образовании и переводу части своих учебно-методических комплексов на язык современных телекоммуникаций.

Контрольные работы учащихся будут тщательно проверяться и рецензироваться преподавателями ВЗМШ – студентами, аспирантами, преподавателями и научными сотрудниками МГУ, а также других вузов и учреждений, где имеются филиалы школы. Многие из наших преподавателей в свое время сами закончили ВЗМШ и поэтому особенно хорошо понимают, как важно, помимо конкретных недочетов, указать пути исправления имеющихся пробелов в знаниях, порекомендовать дополнительную литературу, поругать за невнимательность и похвалить за заметный (а иногда – и за самый маленький) прогресс и трудолюбие.

Поступившие в ОЛ ВЗМШ смогут узнать об увлекательных вещах, часто остающихся за страницами школьного учебника, познакомиться с интересными нестандартными задачами и попробовать свои силы в их решении. Для многих станет откровением, что задачи бывают не только в математике, физике и химии, но и в биологии, и в филологии, и в экономике и в других науках. Решение задач поможет прояснить многие казавшиеся неинтересными и скучными разделы и целые предметы.

Одна из главных причин успеха учебных программ и пособий ВЗМШ – в том, что они созданы действующими на переднем крае науки талантливыми учеными и опытными незаурядными педагогами (часто эти два качества совмещаются в одном и том же человеке).

Чтобы успешно заниматься в заочной школе, вам придется научиться самостоятельно и продуктивно работать с книгой, грамотно, четко, коротко и ясно излагать свои мысли на бумаге и других носителях информации, а это, как известно, умеют далеко не все. Возможно, наша школа поможет вам выбрать профессию, найти свое место в окружающей мире.

Все выполнившие программу ОЛ ВЗМШ получают соответствующие удостоверения, и, хотя формальных преимуществ они не дают, приемные комиссии многих вузов учитывают, что обладатели этих удостоверений в течение продолжительного времени самоотверженно трудились над приобретением знаний, научились самостоятельно творчески работать, а это значит, что из них получатся хорошие студенты и, в дальнейшем, грамотные, вдумчивые, широко образованные специалисты своего дела.

Для поступления в ОЛ ВЗМШ надо успешно выполнить вступительную контрольную работу. Успешно – это не значит обязательно решить все задачи. Приемную комиссию интересует, в первую очередь, ваше умение рассуждать, попытки (пусть поначалу не совсем удачные) самостоятельно мыслить и делать выводы. Преимуществом пользуются проживающие в сельской местности, поселках и небольших городах, где нет крупных научных центров и учебных заведений и получить дополнительное образование можно лишь заочно.

Решения задач вступительной работы надо написать на русском языке в обычной ученической тетради в клетку (кроме отделений экономики и права, подробнее – см. ниже) и выслать *простой бандеролью, не сворачивая в трубку*. Желающие поступить сразу на несколько отделений каждую работу присылают в *отдельной* тетради.

На обложке тетради укажите: *фамилию, имя, отчество, год рождения, базовое образование (сколько классов средней школы будет закончено к сен-*

тябрю 2000 года), полный почтовый адрес (с индексом), откуда узнали о ВЗМШ (из «Кванта», от друзей, из афиш ВЗМШ и т.п.).

Вступительные работы обратно не высылаются.

Срок отправки работ – не позднее 15 апреля 2000 года.

Без вступительной работы, только по заявлению, принимаются на индивидуальное обучение победители областных (краевых, республиканских) туров Всероссийских олимпиад, заочного и второго туров Соросовских олимпиад по соответствующим предметам, а также участники финальных туров этих олимпиад.

Учащиеся ОЛ ВЗМШ частично возмещают расходы на свое обучение. Плата невелика и на каждом отделении своя. По просьбе тех, кто не в состоянии внести эту плату, ВЗМШ готова обратиться в любое учреждение (школа, орган народного образования, другой спонсор) с ходатайством об оплате этой организацией соответствующих расходов.

Помимо индивидуального обучения, на всех отделениях ВЗМШ, кроме экономического и филологического, имеется еще одна форма работы – «Коллективный ученик». Это группа учащихся, работающая под руководством преподавателя (школьного учителя, преподавателя вуза, студента или другого энтузиаста), как правило, по тем же пособиям и программам, что и индивидуально. Прием в эти группы проводится *до 15 октября 2000 года*. Для зачисления группы требуется заявление ее руководителя (с описанием его профессии и должности, со списком учащихся и четким указанием, в каком классе они будут учиться с сентября 2000 года); заявление должно быть подписано руководителем группы, заверено и подписано руководителем учреждения, при котором будет работать группа. Работа групп «Коллективный ученик» может оплачиваться школами по представлению ОЛ ВЗМШ как факультативные занятия.

На Северо-Западе России работает Заочная школа Ленинградского областного Министерства образования, созданная при Санкт-Петербургском университете и имеющая отделения математики, биологии, химии. Проживающие в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках, желающие поступить на отделения математики и химии, высылают вступительные работы по адресу:

198097 Санкт-Петербург, ул. Трефолева, д. 32, С-З ЗМШ (на прием); тел. (812) 252-10-00.

Проживающие в остальных регионах России, дальнем и ближнем зарубежье высылают свои работы в адрес ВЗМШ (или – только по математике – соответствующего филиала):

117234 Москва В-234, МГУ, ВЗМШ, на прием (с указанием отделения);
тел. (095) 939-39-30.

Филиалы математического отделения ОЛ ВЗМШ имеются:

• при университетах – в городах Воронеж, Донецк, Екатеринбург, Иваново, Ижевск, Магадан, Ростов-на-Дону, Самара, Ульяновск, Челябинск, Ярославль;

• при педагогических институтах – в городах Киров, Петрозаводск, Тернополь;

• при Брянском Дворце творчества молодежи;

• при Калужском Центре научно-технического творчества молодежи;

• при Могилевском областном Дворце пионеров.

Ниже вы найдете краткие сведения об отделениях ОЛ ВЗМШ и условия вступительных контрольных заданий.

Отделение математики

Из этого отделения выросла вся заочная школа (вначале она так и называлась – математическая).

За время обучения вы более глубоко, чем в обычной школе, сможете осознать основные идеи, на которых базируется курс элементарной математики, познакомиться (по желанию) с некоторыми дополнительными, не входящими сейчас в школьную программу, разделами, а также поучиться решать олимпиадные задачи. На последнем курсе большое внимание уделяется подготовке к сдаче школьных выпускных и вступительных экзаменов в вузы.

На отделении созданы учебно-методические комплексы, приспособленные для заочного обучения. Часть из них издана массовым тиражом.

Окончившие отделение математики получат, в зависимости от желания и способностей, либо подготовку, необходимую для выбора математики как профессии, либо математическую базу для успешного усвоения вузовского курса математики, лежащего в основе профессиональной подготовки по другим специальностям: ведь сейчас математика служит мощным инструментом исследований во многих отраслях человеческой деятельности.

Обучение длится 4 года. Можно поступить на любой курс. Для этого к сентябрю 2000 года надо иметь следующую базу: на 1 курс – 7 классов средней школы, на 2 курс – 8 классов, на 3 – 9 классов, на 4 – 10. При этом поступившим на 2 и 3 курсы будет предложена часть заданий за предыдущие курсы. Для поступивших на 4 курс обучение проводится по специальной интенсивной программе с упором на подготовку в вуз.

Для поступления надо решить хотя бы часть задач помещенной ниже вступительной работы (около номера каждой задачи в скобках указано, учащимся каких классов она предназначена; впрочем, можно, конечно, решать и задачи для более старших классов). На обложке напишите, на какой курс вы хотите поступить.

Группы «Коллективный ученик» (на все курсы по любой программе) принимаются без вступительной работы.

Задачи

1 (7 – 10). Длину кирпича увеличили на 20%, ширину уменьшили на 25%. Что надо сделать с высотой кирпича – уменьшить или увеличить и на сколько процентов, – чтобы его объем: а) уменьшился; б) увеличился; в) не изменился?

2 (7 – 10). На линейке отмечены три деления: 0, 33 и 47. Как отложить с ее помощью отрезок длины 1?

3 (7 – 10). Три друга купили вместе один мяч стоимостью 60 руб. Каждый внес не больше, чем двое других вместе. Сколько денег дал каждый?

4 (8 – 10). Пусть BM – биссектриса треугольника ABC, причем $BM = AB$. На продолжении биссектрисы за точку M выбрана такая точка K, что сумма углов BAK и BAM равна 180°. Верно ли, что $BK = BC$?

5 (7 – 10). Разложите выражение

$$(y + z)(z + x)(x + y) + xyz$$

на два множителя.

6 (7 – 10). Пусть E – точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, причем $AB = CE$, $BE = AD$, углы AED и BAD равны. Что больше: BC или AD?

7 (8 – 10). Решите уравнение

$$\frac{x^2}{2-x^2} + \frac{x}{2-x} = 2.$$

8 (9 – 10). Пусть I – центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC, R и r – радиусы окружностей, описанных около треугольников CIA и CIB соответственно. Найдите гипотенузу AB.

9 а) (9 – 10). Найдите все тройки неотрицательных чисел $(x; y; z)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^3 \cdot \sqrt{1-y} = \sqrt{1-z}, \\ y^3 \cdot \sqrt{1-x} = z^3. \end{cases}$$

б) (10). Найдите все тройки чисел $(x;\ y;\ z)$, принадлежащие отрезку $[0;\ \pi/2]$, для которых

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \sin z, \\ \cos x \sin y = \cos z. \end{cases}$$

10 (7 – 10). Пусть один из углов треугольника равен 120°. Верно ли, что треугольник, образованный основаниями его биссектрис, прямоугольный?

11 (7 – 10). Представьте число 96 в виде суммы как можно большего количества попарно различных простых чисел. (Напомним, что простым называется натуральное число, большее 1 и не имеющее делителей, отличных от 1 и самого этого числа.)

12 (9 – 10). а) Известно, что значения квадратного трехчлена

$$ax^2 + 2bx + c$$

отрицательны при всех значениях x. Докажите, что значения трехчлена

$$a^2x^2 + 2b^2x + c^2$$

при всех значениях x положительны.

б) Известно, что при всех целых значениях x квадратный трехчлен

$$x^2 + px + q,$$

где p и q – целые числа, положителен. Имеет ли он корни?

Отделение биологии

Набор проводится в 27 раз.

Основное внимание при обучении уделяется наименее изучаемым в школе, но бурно развивающимся в настоящее время разделам биологической науки: молекулярной биологии, биохимии, иммунологии, генетике, биофизике, физиологии и т.д.

На отделении созданы известные в стране оригинальные учебники, задачники и другие учебные пособия для школьников (часть из них издана массовым тиражом издательствами «Мирос» и «Фазис» и хорошо известна в школах).

Проводится набор на два потока – трехгодичное обучение на базе 8 классов и двухгодичное – на базе 9 классов. Принимаются также группы «Коллективный ученик». Такой группе надо выслать коллективно выполненную вступительную работу и заверенный печатью учреждения, при котором она будет работать, список членов группы с указанием фамилии, имени и отчества руководителя кружка.

При решении задач вступительной работы можно использовать и факты, найденные в литературе (в этом случае приведите ссылки на источник), и собственные идеи. Вместе с работой необходимо прислать стандартный конверт с маркой и полным (с индексом) почтовым адресом для отправки решения Приемной комиссии.

Поступающие на трехгодичное обучение решают 1 – 5, на двухгодичное обучение – задачи 1, 2, 6 – 8.

Задачи

1. Какие приспособления помогают разным живым организмам обитать в условиях дефицита воды?

2. Предложите план действий, которые вы бы рекомендовали предпринять для восстановления исходного состояния реки, загрязненной в результате деятельности человека. Разумеется, эти действия зависят от того, какая именно река и от каких загрязнений пострадала. Поэтому план должен начинаться с обследования реки, а последующие действия – определяться результатами обследования. Какие из предложенных вами мероприятий «запускают» те или иные механизмы самовосстановления природных сообществ?

3. Составьте список примеров симбиотических взаимоотношений между двумя видами животных таким образом, чтобы все пары в списке оставались разными при замене названий видов названиями классов, к которым эти виды относятся. Для каждого примера объясните, почему его можно считать симбиозом.

4. Перед вами – перечень млекопитающих: выхухоль, кашалот, коала, кролик, кулан, лама, морж, морская свинка, муравьед, сайгак, соболь, утконос, ушан, человек. Предложите как можно больше разных критериев, по которым их можно разделить на две группы. Для каждого критерия укажите, какие животные в какую группу попадут.

5. Отставной поручик Чебурков, обнаружив у себя в вещмешке семечко подсолнечника, посадил его на огороде. Урожай превзошел все ожидания: никому из соседей Чебуркова не удавалось получить от одного растения так много семян. Восторженный Чебурков призывает соседей выбросить имеющиеся запасы и покупать семенной материал у него. Но достаточно ли имеющихся данных для того, чтобы принять такое решение? Какую информацию, по вашему мнению, нужно получить, прежде чем переходить к широкому выращиванию потомков этого уникального подсолнечника?

6 (эта задача предлагалась на Соросовской олимпиаде школьников в 1994 г.). Вероятность того, что человек заболеет некоторой болезнью, зависит от его конституции (индивидуальных анатомических и физиологических особенностей) и образа жизни. Перед вами – список героев «Мертвых душ» Н.В.Гоголя: Чичиков, Манилов, Ноздрев, Собакевич, Коробочка, Плюшкин. Для каждого из них укажите, какими болезнями он может заболеть с большей вероятностью, чем другие персонажи, а какими – с меньшей. Ответы обоснуйте.

7. Перечислите различные признаки, по которым гормоны человека можно разделить на несколько групп. Для каждой из получившихся групп укажите входящие в нее гормоны. Попробуйте составить определители, классифицирующие гормоны человека (или хотя бы часть из них):

а) по молекулярному строению;

б) по физиологическому действию.

8. Вам поручено экспериментально установить механизмы, обеспечивающие возникновение ощущений голода и жажды у разных животных. Какие принципиально возможные гипотезы об этих механизмах вы можете предложить? Какие опыты следует поставить для проверки выдвинутых вами гипотез?

Отделение физики

Отделение работает 8 лет. За это время создан и прошел проверку оригинальный двухгодичный курс заочного обучения, ведется работа по дополнению его до трехгодичного.

Основное внимание уделяется решению физических задач. В пособиях излагаются методы, пригодные как для стандартных, так и более для сложных ситуаций. Акценты делаются как на выяснение физического смысла тех или иных явлений, так и на техническую, вычислительную сторону, на использование математического аппарата и на качественное истолкование полученных результатов.

В программе – все основные разделы школьного курса, а также темы, мало или совсем не изучаемые в школе. Изложение максимально приближено к современным взглядам и достижениям физической науки. Обучение двухгодичное (все разделы физики) или одногодичное (разделы «Электричество и магнетизм», «Колебания», «Оптика»).

Поступающие на двухгодичный поток (на базе 9 классов средней школы) должны решить задачи 1 – 5 контрольной работы; чтобы быть зачисленным на одногодичный поток (на базе 10 классов) – задачи 4 – 8; желающие за один год пройти всю двухгодичную программу (на базе 10 классов) решают все задачи и пишут дополнительно к сведениям о себе «10+11» на обложке тетради с решениями.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы.

Задачи

1. Мячик подпрыгивает в вагоне на одном месте, абсолютно упруго ударяясь о пол через промежутки времени $\tau = 2$ с. Вагон движется равномерно и прямолинейно со скоростью $v = 4$ м/с. По какой траектории движется мячик относительно земли? Найдите перемещение мячика относительно земли в моменты времени $t_1 = 2{,}5$ с и $t_2 = 3$ с, если в начальный момент времени мячик находился в самом верхнем положении.

2. Два тела, связанные нитью, переброшенной через блок, приходят в движение из начального положения, показанного на рисунке 1. Горизонтальная поверхность, на которой лежит одно из тел, гладкая, за исключением крайнего участка длиной $2L$, на котором коэффициент трения тела о поверхность равен μ. Известны величина L и соотношение $m_2 = 5m_1$. Постройте графики зависимостей ускорения тел от пройденного ими пути $a(l)$ и (качественно) от времени $a(t)$. Нить и блок идеальные.

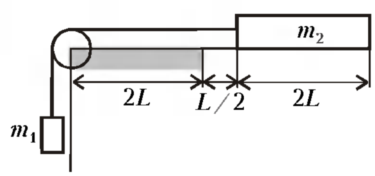


Рис. 1

3. Три тела одной и той же массы лежат в гладком горизонтальном желобе на некотором расстоянии друг от друга. Тело *1* получает скорость v в направлении лежащего посередине тела *2*. Последующие соударения тел как *1* и *2*, так и *2* и *3*, могут быть любыми: от абсолютно упругих до абсолютно неупругих. Выясните, какими должны быть эти соударения, чтобы тело *3* получило максимальную скорость.

4. Шарик находится между двумя плоскостями, составляющими угол $\alpha = 60°$ друг с другом. Одна из плоскостей расположена горизонтально и является абсолютно шероховатой, т.е. шарик по ней не проскальзывает. Каким должен быть коэффициент трения шарика о другую плоскость, чтобы он не двигался при попытках уменьшить угол между плоскостями?

5. Солнечные лучи падают перпендикулярно на непрозрачный круг и на экран, установленный на расстоянии $d = 3$ м за кругом. Найдите минимальное значение диаметра круга D, при котором на экране существует область, куда не попадают прямые солнечные лучи. Известно, что для наблюдателя на Земле угол между лучами, проведенными к противоположным концам диаметра Солнца, равен $\alpha = 0{,}5°$.

6. К нижнему концу нерастянутой пружины жесткостью $k = 20$ Н/м, подвешенной вертикально, прикрепляют груз массой $m_1 = 200$ г и отпускают. Груз начинает совершать колебания. При прохождении нижней точки к нему подвешивают дополнительный груз массой $m_2 = 150$ г. Найдите амплитуду и период колебаний системы. Массой пружины пренебречь.

7. Смесь азота и гелия, каждый из которых занимал объем $V_0 = 10$ л при давлении $p_0 = 1$ атм и температуре $t_0 = 15$ °С, находится при той же температуре в сосуде объемом $V = 30$ л, закрытом подвижным поршнем. Какое количество теплоты нужно сообщить смеси, чтобы ее объем увеличился вдвое? Трением поршня о стенки сосуда и потерями тепла пренебречь.

8. В схеме, изображенной на рисунке 2, в начальный момент времени ключи *1* и *2* замкнуты. Ключ *1* размыкают, а затем, когда левый конденсатор зарядится, размыкают и ключ *2*. Найдите, какой заряд установится на правом конденсаторе и какое количество теплоты выделится на резисторе R за все время после размыкания ключа *1*. Величины ЭДС $\mathcal{E}$ и емкости C считать известными. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

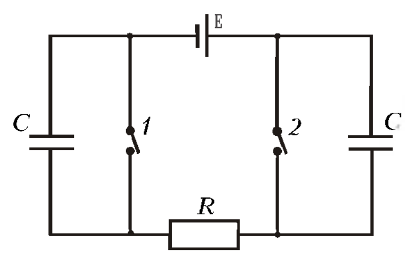


Рис. 2

Отделение химии

На отделение принимаются имеющие базовое образование в объеме 8, 9 или 10 классов средней школы на, соответственно, трехгодичное, двухгодичное или одногодичное обучение.

В программе обучения следующие одногодичные курсы:

- общая химия (с элементами неорганической химии);
- неорганическая химия;
- органическая химия;
- химия окружающей среды.

Трехгодичное обучение рекомендуется начать с курса общей химии.

Более подробные сведения о программе и порядке обучения высылаются вместе с извещением о решении Приемной комиссии.

Задачи вступительной работы – общие для всех поступающих, независимо от базового образования.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы.

Задачи

1. Сколько атомов кислорода содержится в 49 г серной кислоты?

2. Какие вещества и в каком количестве образуются при пропускании 11,2 л углекислого газа через 150 г 20%-го раствора гидроксида натрия?

3. Опишите схему получения сульфата меди, используя только следующие вещества: серу, медь и воду. Допускается применение любого оборудования. Реакции должны быть уравнены, обязательно указание условий их протекания.

4. Приведите примеры *различных* (до 10) реакций получения хлора.

5. Сколько молей брома может присоединиться к 59 г изопропенилбензола? Сколько всего молей брома может прореагировать с этим же количеством вещества? Приведите уравнения реакций, укажите условия их протекания.

Отделение филологии

Отделение скоро отметит свой десятилетний юбилей. За это время подготовлено и издано большое количество уникальных учебных пособий по русскому языку, литературе, общей филологии.

Принимаются *все желающие, имеющие базовую подготовку в объеме 8 классов.*

Отделение предлагает на выбор несколько учебных циклов, которые могут удовлетворить самым разным требованиям и вкусам. Среди них есть и ориентированные на исправление грамотности, и на знакомство с любопытными проблемами теории и практики русского языка, и на изучение приемов лингвистического и литературоведческого анализа, и на приобретение навыков, необходимых для успешной сдачи вступительных экзаменов в вуз.

Чтобы специалисты отделения могли предложить вам наиболее подходящую форму обучения, им необходимо как можно больше знать о ваших целях и проблемах, поэтому в качестве вступительного задания предлагается ответить на вопросы помещенного ниже теста.

Внимание! Отвечайте на вопросы теста на двойном тетрадном листе, указав на первой странице важные для нас данные: ФИО, какой класс заканчиваете, полный (с индексом!) почтовый адрес, телефон (если есть). Затем полностью перепишите условия теста и выполните задания 1 – 6 (впишите, подчеркните нужное, проставьте галочки или цифры в квадратики и т.п.).

Тест

1. Впишите нужное

К 1 сентября 2000 года я закончу ______ класс.

2. Заполните клетки

Моя средняя оценка:

☐ по русскому языку;

☐ по литературе.

3. Подчеркните нужное

Моя грамотность:

а) абсолютная (или почти);

б) вполне приличная;

в) так себе;

г) низкая.

4. Расставьте цифры от 1 до 6 в соответствии с тем, насколько для вас важны следующие задачи (1 –самое важное, 6 – наименее важное):

☐ узнать как можно больше об устройстве русского языка;

☐ узнать как можно больше о русской литературе;

☐ научиться хорошо и логично выражать свои мысли в сочинении;

☐ писать грамотнее;

☐ узнать больше об устройстве языков мира;

☐ узнать больше о том, что за наука – литературоведение.

5. Подчеркните нужное

Надеюсь, что учеба на филологическом отделении ОЛ ВЗМШ даст мне возможность

а) удовлетворить свое природное любопытство;

б) заняться в свободное время тем, что мне интересно;

в) исправить школьные оценки по русскому языку и литературе;

г) приобрести знания и навыки, необходимые для успешной сдачи экзаменов в вуз.

6. Подчеркните нужное

Скорее всего, я буду поступать в вуз

а) на филологическую специальность, где пишут сочинение и сдают русский устно;

б) на гуманитарную специальность, где пишут сочинение;

в) в негуманитарный вуз и писать сочинение;

г) в негуманитарный вуз и писать диктант;

д) мне важно школу закончить!

Желающие поступить *только* на новые курсы «Журналистика: первый шаг» (основы журналистики, анализ текста, практическая работа в разных публицистических жанрах) и/или «Английский язык» (для тех, кто знает язык в объеме «Yes, it is» и более) принимаются на основании заявления и анкету не заполняют.

Вместе с анкетой и/или заявлением пришлите, пожалуйста, стандартный конверт с маркой и заполненным вашим адресом (с индексом) для ответа Приемной комиссии.

Отделение экономики

Отделение проводит прием в седьмой раз.

Идет набор на одногодичный курс «Прикладная экономика». Предполагается изучение основ экономической теории, а также знакомство с практикой бизнеса в деловой игре по переписке. Окончившим этот курс на будущий год будет предложена специализация по выбору: «Предпринимательство и менеджмент», «Бухгалтерский учет и финансовый анализ» и др.

Желающим подготовиться к вступительным экзаменам одновременно на экономический факультет МГУ и в другие экономические вузы предлагается специальная программа «Экономика ПЛЮС», включающая, наряду с экономическими дисциплинами, изучение математики, литературы, истории и географии.

Принимаются *все желающие с образованием не ниже 7 классов*. Обучение проводится индивидуально либо в небольших группах (2 –5 человек). Формы обучения «Коллективный ученик» пока нет.

Вступительная работа – тест – включает вопросы по экономике, математике, истории, литературе, общей культуре. В этом году весь мир отмечал 200 лет со дня рождения А.С.Пушкина. Наш тест тоже связан с этим событием.

Решения присылайте ТОЛЬКО на открытках с указанием полного почтового адреса и индекса, фамилии, имени и отчества (все – ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ); обязательно укажите источник информации об ОЛ ВЗМШ и напишите «Экономика, вступительный тест 2000 г.». На открытке достаточно записать в строчку номера вопросов и под каждым написать букву, соответствующую ответу, который вы считаете правильным. Верно ответившие на все вопросы получат из букв своих ответов осмысленную фразу, которую, как нам кажется, одобрил бы Александр Сергеевич Пушкин, правда, вложив в нее свой смысл (пробелы между словами и знаки препинания расставьте по собственному желанию).

Тест

1. Какое слово во времена А.С.Пушкина использовалось в дуэльном кодексе, а теперь совсем в другом смысле применяется в экономике:

М) конкуренция; Б) синдикат; Э) предприятие; Д) картель; И) монополия?

2. В один из дней 1999 года один доллар США стоил 24р. 50к. Через неделю он поднялся на 5%. На сколько упал рубль за эту неделю:

К) на 1/20; Р) на 1/21; Ы) на 5%; У) на 4%; Я) на 6%?

3. После приватизации кондитерской фабрики «Тридцать три богатыря» производительность труда возросла на 50%, поэтому рабочий день было решено сократить на 20%. В результате выпуск продукции:

У) возрос на 20%; О) возрос на 30%; Э) не изменился; Д) уменьшился на 30%; Х) уменьшился на 10%.

4. Защита от иностранной конкуренции посредством ограничения ввоза товаров с целью поощрения развития собственной экономики называется:

Т) аболиционизм; Е) монополизм; Н) патриотизм; О) изоляционизм; З) протекционизм.

5. Какого экономиста почитывал пушкинский герой:

А) Милля; М) Тюрго; Ь) Смита; О) Рикардо; Ч) Маркса?

6. Обед трех братьев стоил 25 рублей на троих. Каждый дал по десятке, и официант дал каждому рубль сдачи. Они уже уходили, когда официант подошел к старшему и дал еще два рубля. Тот задумался: мы заплатили $3 \cdot 9 = 27$ рублей да плюс два рубля, это будет 29 рублей. Где же еще рубль:

Б) официант взял 1 рубль себе; С) официант ошибся, следует вернуть ему два рубля; М) официант ошибся, следует вернуть ему рубль;

Я) вопрос неуместен, все правильно; У) старший брат должен отдать по рублю братьям, тогда будет поровну?

7. Создатель музея изобразительных искусств им. А.С.Пушкина в Москве:

Е) А.С.Пушкин; У) Г.Шлиман; И) П.М.Третьяков; П) И.В.Цветаев; Т) С.Г.Строганов.

8. Известные сказочные персонажи Баба Яга (БЯ), Серый Волк (СВ), Иванушка Дурачок (ИД), Красная Шапочка (КШ) и Три Поросенка (ТП) выросли вместе с детьми и задумались о выборе профессии. Учитывая их сказочные биографии, дайте совет, что им больше всего подойдет из таких сфер деятельности, как строительство (С), транспорт (Т); здравоохранение (З); образование (О); общественное питание (П):

Д) БЯ-С, СВ-Т, ИД-З, КШ-О, ТП-П; К) БЯ-О, СВ-З, ИД-С, КШ-П, ТП-Т; З) БЯ-Т, СВ-З, ИД-П, КШ-С, ТП-О; Р) БЯ-З, СВ-Т, ИД-О, КШ-П, ТП-С; А) БЯ-П, СВ-О, ИД-С, КШ-Т, ТП-З.

9. У французов есть выражение «C'est Beresina!» – «Это Березина». Что оно может означать:

А) «Ничего не поделаешь!»; У) «Полная чушь!»; Е) «Это полный провал!»; О) «Ах, какое счастье!»; К) «Ура, победа!»?

10. Средний балл по экономике среди учащихся экономического класса, в котором учится 30 школьников, составил 4,3, а среди 45 учащихся других классов – всего 3,8. Каков средний балл по экономике среди всех учащихся школы, изучавших этот предмет:

И) 3,9; Щ) 3,95; К) 4; П) 4,05; Ч)4,1?

11. Друг А.С.Пушкина, философ, подвергавшийся гонениям за свои мысли и произведения о судьбах России:

А) Пущин; Т) Кюхельбекер; Р) Чаадаев; И) Якушкин; О) Волконский.

12. Предприниматель собирается закупить партию легковых автомобилей, автобусов и троллейбусов. Какие города России и ближнего зарубежья ему нужно посетить, чтобы закупить все необходимое прямо у производителей:

Ь) Минск, Рига, Мурманск; Е) Набережные Челны, Казань, Элиста; Т) Ульяновск, Челябинск, Владивосток; Л) Тольятти, Ростов-на-Дону, Волгоград; А) Нижний Новгород, Павлово, Энгельс?

13. Какой любимый А.С.Пушкиным поэт сражался за свободу чужого народа и умер на чужбине:

Э) Овидий; Н) Лукреций; С) Байрон; Ь) Парни; Е) Мицкевич?

14. Привезя на оптовую ярмарку 2000 центнеров яблок, фермер увидел, что при цене 500 рублей за центнер он сможет продать все яблоки, а при росте цены за центнер на один рубль общее количество проданных яблок уменьшается на два центнера. При какой цене (рублей за центнер) следует продать яблоки оптом, чтобы выручка от продажи была наибольшей:

З) 600; Е) 750; Э) 800; К) 1000; О) 500?

15. После появления у князя Гвидона белочки, грызущей орешки с золотыми скорлупками, увеличились цены на все товары и услуги. Такое явление в экономике называется:

В) девальвация; О) дефляция; А) экспроприация; К) инвестиция; Н) инфляция.

16. До своей встречи с Робинзоном Пятница питался исключительно бананами (б) (1600 штук в год), как и все его предки. Робинзон посоветовал ему разнообразить диету, добавив в нее киви (к), хотя от одного плода киви Пятница получал вдвое меньше удовольствия, чем от банана. Посоветуйте Пятнице, какой рацион ему избрать, чтобы получить максимум удовольствия:

Н) диету менять не нужно; У) 2400 к и 0 б; Н) 700 к и 1200 б; О) 900 к и 1100 б; А) 1800 к и 300 б.

17. Система организации работы фирмы, основанная на изучении рынка сбыта, называется:

Ю) реклама; О) презентация; Н) хеджирование; А) маркетинг; Я) демпинг.

18. А.С.Пушкин с иронией повествует об успехах Онегина во время его учебы в следующем предмете:

Н) стихосложении; О) латыни; М) математике; Ш) экономике; Ж) истории.

19. Средний уровень цен на чебуреки в январе-мае 1999 года в городе N составил (на конец месяца): 4 рубля; 4 рубля 40 копеек; 4 рубля 82 копейки; 5 рублей 28 копеек; 5 рублей 81 копейка; 6 рублей 37 копеек. В каком месяце темп инфляции был наибольшим:

А) мае; С) апреле; М) марте; И) феврале; Р) январе?

20. Кто такой «брокер»:

О) посредник в торговых операциях; С) оператор пункта обмена валюты; И) банкир, занимающийся валютными операциями; У) любое лицо, торгующее на бирже; З) остепенившийся рокер?

21. В 1937 году была сооружена первая в России пассажирская железная дорога, соединившая:

К) Петербург и Москву; Т) Москву и Владимир; Н) Москву и Сергиев Посад; Ю) Петербург и Царское Село; В) Петербург и Петродворец.

22. Ученик Коля Кулебякин, пройдя на уроках физики радиоволны, смастерил устройство, приводящее на расстоянии в действие любые торговые автоматы. Кто, в конечном итоге, будет оплачивать его бесплатные бутерброды, кока-колу и другие «покупки»:

А) родители Кулебякина; У) учитель физики; З) неизобретательные покупатели, оплачивающие свои покупки; Ы) Международный валютный фонд; Ь) Пушкин?

Отделение «Нравственность, право, закон»

Это – четвертый набор на отделение.

Для поступления необходимо иметь базовое образование не ниже 8 классов средней школы.

Предлагается одногодичный курс «Беседы о правах человека, нравственности, праве, законе и государстве». В программе:

- человек и природа, обычай, мораль, право, закон и государство, гражданское общество, либерализм – возникновение этих понятий, что они значат для нас сейчас;
- права человека;
- основы современного законодательства России;
- общекультурная тематика, связанная с основным направлением курса;
- информация и дополнения.

Успешно окончившим годовой курс будут затем предложены на выбор следующие спецкурсы:

- курс «Беседы – 2» – продолжение одногодичного курса;
- углубленный юридический курс.

Предварительных знаний в области права от поступающих на отделение не требуется, нужны только желание учиться и настойчивость. Формы обучения – индивидуальная и в небольших группах «Коллективный ученик».

Желающие поступить должны сообщить: свой полный почтовый адрес (с индексом), фамилию, именя и отчество, сведения о базовом образовании (сколько классов средней школы закончено) и об источнике информации об ОЛ ВЗМШ – все должно быть написано РАЗБОРЧИВО. В письмо обязательно вложите чистый конверт с маркой и обратным адресом. На отдельном листе напишите: «Ответы на вопросы теста 1, 2, 3, 4, 5» и под каждым номером впишите букву, соответствующую ответу, который вы считаете правильным. Верно ответившие на все вопросы получат из выписанных ими букв ключевое слово.

Тест

1. Незнание закона:

Е) освобождает от наказания; Ж) усиливает ответственность; З) не влияет на наказание.

2. Сергей Юльевич Витте был:

А) министром финансов, путей сообщения, председателем Кабинета министров России; Б) полярным исследователем; Г) героем Отечественной войны 1812 г.

3. Чрезмерное возвеличивание какой-либо личности называется:

З) деспотизм; И) авторитет; К) культ.

4. «...Двуногих тварей миллионы для нас орудие одно» – это слова:

Н) Наполеона; О) А.С.Пушкина; П) Т.Джефферсона.

5. Вопросами мировой культуры занимается международная организация:

Л) ООН; М) МВФ; Н) ЮНЕСКО.

Отделение истории

Отделение в третий раз объявляет набор на курс «История России».

Изучение этого курса позволит расширить кругозор, подготовиться к поступлению в вуз. По окончании выдается диплом, желающие смогут продолжить свое историческое образование, выбрав спецкурсы.

Наши преподаватели будут поддерживать со своими учениками постоянную связь. По нашим книжкам вы будете выполнять ОСОБЫЕ задания и сообщать нам, ЧТО ВЫ РАСКОПАЛИ. Мы подскажем вам, как действовать дальше. Ведь в сущности труд историка и состоит из этих раскопок:

- историк-археолог копает землю и песок, добывая крупицы знаний об ушедших временах;
- историк–архивариус копается в груде бумаг и достает из архивов и даже из частной переписки все, что может позволить ему понять образ времени;
- историк-теоретик как увлекательный роман читает археологические таблицы, сухие сводки, статистику и превращает их в живую ткань ушедшей жизни.

У историка особая профессия: он в одном лице и следователь, и прокурор, и адвокат времени.

Для поступления на историческое отделение необходимо выполнить следующие два задания. Работу надо оформить на двух листах бумаги и выслать в отдельном конверте с пометкой «ИСТОРИЧЕСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ».

Задания

1. Отгадайте, чей это портрет.

- Над его гробом воздвигнут храм.
- Ему посвящены икона Андрея Рублева «Троица» и картина Нестерова «Видение отроку Варфоломею».
- Сын бедного ростовского дворянина.
- В детстве имел необычный для XIV века интерес – страсть к грамоте.
- В XX веке о нем сказали бы: «Не от мира сего, белая ворона».
- Возможная карьера для такого юноши в Древней Руси – книгочей в храме, переписчик книг, составитель летописного свода, ..., если бы не его подвижническая натура.
- В молодости – отшельник. В лесу на крутом холме поставил келью и уединился, дав обет молчания, иночества, безбрачия.
- Основатель Троице-Сергиева монастыря.
- Любил молиться у иконы Троицы (образ Троицы в годы ига – символ единства Руси).
- Личным примером увлек массы русских людей на неосвоенные земли. Один из организаторов переселения в края, недоступные для ордынских набегов.
- Один за другим его ученики уходят в глухие места на пустоши и ставят монастыри духовные и культурные центры Руси.
- Его ученики поставили 40 монастырей, ученики учеников – 60.
- Его последователи – Савва Сторожевский, Кирилл Белозерский и др.
- Примиритель князей, посол юного князя Дмитрия (будущего Донского) в Нижний Новгород.
- Современник Куликовской битвы.

2. Нарисуйте не более чем в семи предложениях политический портрет Председателя первого Советского правительства.

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) Министерства образования РФ при Московском физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т.п.), расположенных на территории Российской Федерации, на 2000/01 учебный год.

ЗФТШ при МФТИ как федеральное государственное учреждение дополнительного образования работает с 1966 года. За это время школу окончили свыше 56 тысяч учащихся; практически все ее выпускники поступают в ведущие вузы страны, а каждый второй студент МФТИ – выпускник ЗФТШ. Финансирует ЗФТШ Министерство образования Российской Федерации. Обучение в ЗФТШ бесплатное.

Научно-методическое руководство школой осуществляет Московский физико-технический институт, который готовит специалистов по существующей только в МФТИ единой специальности «Прикладные математика и физика». В их подготовке принимают участие ведущие отраслевые и академические научно-исследовательские институты и научно-производственные объединения страны (базовые организации МФТИ). Преподаватели МФТИ – крупнейшие ученые, среди которых около ста членов Российской академии наук. Физтеховское образование позволяет не только успешно работать в науке, но и хорошо ориентироваться в жизни.

Цель ЗФТШ при МФТИ – помочь учащимся, интересующимся физикой и математикой, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам.

Набор в 8, 9, 10 и 11 классы ЗФТШ на 2000/01 учебный год проводится на следующие отделения:

– *Заочное (индивидуальное). Телефон: (095) 408-51-45*

Прием на заочное отделение проводится на конкурсной основе по результатам выполнения вступительного задания по физике и математике, приведенного ниже. Полная программа обучения рассчитана на 4 года (8–11 кл.), но поступать можно в любой из этих классов.

В течение учебного года, в соответствии с программой ЗФТШ, ученик будет получать по каждой теме задания по физике и математике (4 задания по каждому предмету для 8 класса, 6–7 заданий по каждому предмету для 9, 10 и 11 кл.), а затем рекомендуемые ЗФТШ авторские решения этих заданий вместе с проверенной работой учащегося.

Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и 8—12 контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Задания ЗФТШ составляют опытные преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ. Работы учащихся-заочников проверяют студенты, аспиранты и выпускники МФТИ (часто – выпускники ЗФТШ).

– *Очно-заочное (в факультативных группах). Телефон: (095) 485-42-27*

Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении двумя преподавателями – физики и математики. Руководители факультатива принимают в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Группа (не менее 8 человек) принимается в ЗФТШ, если директор общеобразовательного учреждения сообщит в ЗФТШ фамилии, имена, отчества ее руководителей и поименный список обучающихся (с указанием класса и итоговых оценок за вступительное задание по физике и математике). Все эти материалы и конверт с маркой достоинством 1 руб. 50 коп. для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом на имя одного из руководителей следует выслать *до 25 мая 2000 года* по адресу: *141700 г.Долгопрудный Московской области, Институтский пер., 9, МФТИ, ЗФТШ (с указанием «Факультатив»).* Тетради с работами учащихся в ЗФТШ не высылаются. Работа руководителей факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением по представлению ЗФТШ при МФТИ как факультативные занятия.

Руководители факультативов будут получать в течение учебного года учебно-методические материалы ЗФТШ (программы по физике и математике, задания по темам программы, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся) и информационно-рекламные материалы (газеты МФТИ «За науку», проспекты МФТИ и его факультетов с правилами приема и т.п.). Работы учащихся проверяют и оценивают руководители факультативов, а в ЗФТШ ими высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию.

– *Очное (в вечерних консультационных пунктах). Телефон: (095) 485-42-27*

Для учащихся Москвы и Московской области по программе ЗФТШ ра-

Л.№								
№ п/п								Σ
Ф.								
М.								

1. Область	*Самарская*
2. Фамилия, имя, отчество	*Лекучев Олег Станиславович*
3. Класс, в котором учитесь	*девятый*
4. Номер школы	*№32*
5. Вид школы (обычная, лицей, гимназия, с углубленным изучением предмета и т.п.)	*физико-технический лицей*
6. Подробный домашний адрес (с указанием индекса и телефона)	*445030 г.Тольяти, ул.Академическая, д.20, кор.1, кв.53, тел. 21-32-43*
7. Место работы и должность родителей:	
отец	*АО АвтоВАЗ, инженер*
мать	*поликлиника №1, врач*
8. Адрес школы и телефон	*445037 г.Тольяти, ул. Фрунзе, д. 4, тел. 31-23-34*
9. Фамилия, имя, отчество преподавателей:	
по физике	*Сапогин Сергей Александрович*
по математике	*Решетников Андрей Николаевич*
10. Каким образом к Вам попало это объявление?	

ботают вечерние консультационные пункты, набор в которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам собеседования по физике и математике, которое проводится в мае и в сентябре.

Программы ЗФТШ при МФТИ являются дополнительными образовательными программами и едины для всех видов обучения.

Кроме занятий по этим программам, ученикам ЗФТШ предлагается участвовать в пробных вступительных экзаменах в МФТИ, которые проводятся в марте, в очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультетов, конкурсах и научно-технических конференциях.

По окончании учебного года учащиеся, успешно выполнившие программу ЗФТШ по выбранной форме обучения, переводятся в следующий класс, а выпускники (11 кл.) получают Свидетельство об окончании с итоговыми оценками по физике и математике, которое учитывается на собеседовании при поступлении в МФТИ.

Вне конкурса (без выполнения вступительного задания) в ЗФТШ принимаются участники областных, краевых, республиканских, зональных и всероссийских олимпиад по физике и математике. Для зачисления необходимо заполнить анкету вступительного задания (без таблицы оценок) и подтвердить победу в олимпиаде копией диплома.

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу сделайте на русском языке и аккуратно перепишите в одну школьную тетрадь. Порядок задач сохраняйте тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради.

На лицевую сторону обложки наклейте лист бумаги, четко заполненный по приведенному здесь образцу.

В ЗФТШ ежегодно приходит более 6 тысяч вступительных работ. Пожалуйста, обратите внимание на правильность заполнения анкеты! Пишите аккуратно, лучше печатными буквами.

Внимание! Для получения ответа на вступительное задание и материалов первого задания *обязательно* вложите в тетрадь два бандерольных конверта размером 160×230 мм с наклеенными марками на сумму в 1 руб. 50 коп. на каждый конверт. На конвертах напишите свой домашний адрес.

Срок отправления решения – *не позднее 1 марта 2000 года*. Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 2000 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (по физике и математике) высылайте по адресу: *141700 г.Долгопрудный Московской области, Институтский пер., 9, МФТИ, ЗФТШ.*

Для учащихся Украины работает Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Желающим поступить следует высылать работы по адресу: 252680 г.Киев, пр. Вернадского, д.36, Институт металлофизики, Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Телефон: (044) 444-95-24.

Для учащихся из стран ближнего зарубежья возможно платное обучение на заочном и очно-заочном отделениях ЗФТШ. Условия обучения для прошедших конкурсный прием будут сообщены дополнительно.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике. В задании *по физике*: задачи 1–5 предназначены для учащихся седьмых классов, 3–8 – для восьмых классов, 6–11 – для девятых классов, 10–16 – для десятых классов. В задании *по математике*: задачи 1–5 предназначены для учащихся седьмых классов, 2–8 – для восьмых классов, 5–11 – для девятых классов, 8–14 – для десятых классов. Номера классов указаны на текущий 1999/2000 учебный год.

Вступительное задание по математике

1. Дома Винни-Пуха и Пятачка находятся на расстоянии 1 км друг от друга. Однажды они одновременно вышли из своих домов, и каждый пошел в каком-то направлении по прямой. Винни-Пух проходил 3 км в час, а Пятачок – 4 км в час. Через некоторое время они встретились. Сколько времени могло продолжаться их путешествие? Укажите наибольшее и наименьшее время.

2. Внутри острого угла отмечена точка A. Найдите на сторонах угла точки B и C такие, чтобы периметр треугольника ABC был наименьшим.

3. Имеются три сосуда емкостей 3 л, 3 л и 7 л. Можно ли, пользуясь этими сосудами, налить в большой сосуд ровно 5 л воды?

4. Найдите все пятизначные числа вида

$$\overline{2m57n} = 2\cdot 10^4 + m\cdot 10^3 + 5\cdot 10^2 + 7\cdot 10 + n$$

(m и n – цифры),

которые делятся на 15.

5. На плоскости даны три прямые a, b и c, не проходящие через одну точку. Постройте на прямых a и b точки A и B так, чтобы отрезок AB был перпендикулярен прямой c и делился этой прямой пополам.

6. Числа x, y, z – последовательные члены арифметической прогрессии, их сумма равна 21. Числа $x-1$, $y+1$, $z+21$ являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найдите числа x, y, z.

7. Решите уравнение

$$\sqrt{2-x} = |x-1| - 2.$$

8. В корзине лежало не более 70 грибов. После разбора оказалось, что 52% из них – белые. Если отложить три самых маленьких гриба, то среди оставшихся будет ровно половина белых. Сколько грибов было в корзине?

9. Острый угол ABC ромба $ABCD$ равен 60°. Окружность проходит через точку пересечения диагоналей ромба, касается прямой AB в точке B и пересекает сторону CD в точке E. Определите, в каком отношении точка E делит отрезок CD.

10. Множество A состоит из всех точек плоскости, координаты $(x;\ y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + (a+4)x + 4a \le y, \\ 3x + y - (2a+4) \le 0. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях параметра a множество A содержит отрезок $[-2;\ -1]$ оси Ox.

11. Решите неравенство

$$\frac{10 - 3x + \sqrt{x^2 + x - 6}}{4 - x} \ge 1.$$

12. Точки K и L являются серединами боковых сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC. Точка M расположена на медиане AL так, что $AM : ML = 13 : 12$. Окружность с центром в точке M касается прямой AC и пересекает прямую KL в точках P и Q. Найдите периметр треугольника ABC, если $KL = 10$, $PQ = 4$.

13. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 17\cos 2x - 7 = 21\sin x\cdot\cos 2y, \\ \cos x = \sqrt{3\sin x}\cdot\cos y. \end{cases}$$

14. На координатной плоскости рассматривается фигура Ф, состоящая из всех точек, координаты $(a;\ b)$ которых таковы, что система уравнений

$$\begin{cases} ax + by = 1, \\ 3x + ay = -1, \\ (a-1)x + (b+2)y = -2 \end{cases}$$

имеет решение. Изобразите фигуру Ф и составьте уравнения всех прямых, каждая из которых проходит через точку (4; 3) и имеет с фигурой Ф единственную общую точку.

Вступительное задание по физике

1. Автомобиль первую треть пути ехал со скоростью $v_1 = 30$ км/ч, оставшуюся часть пути он ехал со скоростью, в два раза большей средней скорости на всем пути. Найдите скорость автомобиля на второй части пути.

2. Труба массой $m = 100$ кг лежит на земле. Какую минимальную силу F надо приложить к концу трубы, чтобы его приподнять?

3. С вертолета сфотографирован пароход, идущий по озеру курсом на север. На фотографии (рис.1) запечатлен шлейф дыма от парохода. Определите по фотографии скорость парохода, если съемка проводилась при юго-западном ветре, скорость которого $v = 5$ м/с.

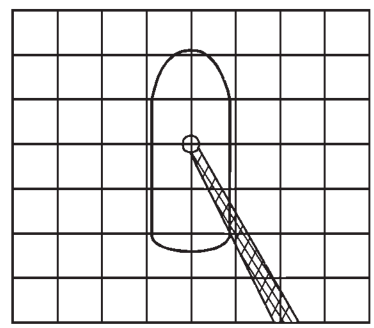


Рис. 1

4. В два цилиндрических сообщающихся сосуда наливают ртуть. Площадь сечения одного из сосудов вдвое больше площади сечения другого. Широкий сосуд доливают водой до края. На какую высоту h поднимется при этом уровень ртути в другом сосуде? Первоначально уровень ртути был на расстоянии l от верхнего края сосуда. Плотности ртути ρ и воды ρ_0 известны.

5. В сосуде с водой плавает кусок льда, удерживаемый нитью (рис.2). Сила натяжения нити $F = 10$ Н. На

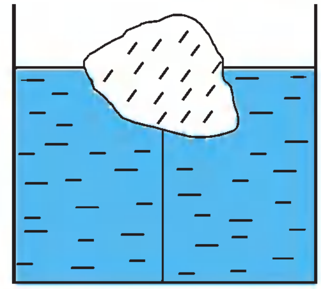


Рис 2

сколько изменится уровень воды в сосуде, если лед растает? Площадь сечения сосуда $S = 100$ см^2.

6. В калориметр налили ложку горячей воды, после чего его температура возросла на $\Delta t_1 = 5$ °С. После того как добавили вторую ложку той же горячей воды, температура калориметра возросла на $\Delta t_2 = 3$ °С На сколько градусов увеличится температура калориметра, если в него добавить третью ложку той же горячей воды? Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

7. Электронагреватель мощностью 100 Вт не может довести до кипения 1 л воды в кастрюле. Оцените, за какое время температура воды упадет на 1 градус после выключения нагревателя.

8. Цепочка из двух последовательно соединенных резисторов подключена к источнику постоянного напряжения $U = 12$ В. Сопротивление одного из резисторов $R_1 = 36$ Ом. При каком значении сопротивления R_2 второго резистора тепловая мощность, выделяемая на нем, будет максимальна? Найдите эту максимальную мощность.

9. Трамвай движется со скоростью 10 м/с. После включения тормозов он начинает двигаться равнозамедленно. При каком ускорении трамвай пройдет путь 8 м за 2 с?

10. Бусинка может двигаться по неподвижному кольцу радиусом R, подталкиваемая спицей, равномерно вращающейся с постоянной угловой скоростью ω в плоскости кольца (рис.3). Ось вращения спицы проходит через точку O кольца. Определите ускорение бусинки. Бусинка и спица при движении касаются друг друга.

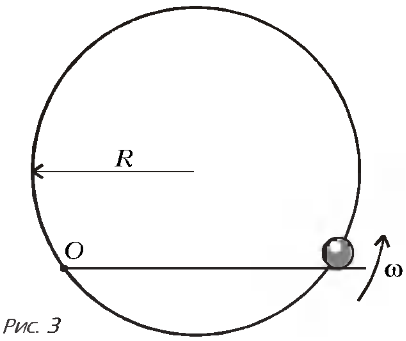


Рис. 3

11. Плот массой $m = 200$ кг оттолкнули от берега озера, сообщив ему начальную скорость $v_0 = 1$ м/с. На каком расстоянии от берега остановится плот? Сила сопротивления движению плота пропорциональна его скорости: $F = kv$, где $k = 25$ кг/с.

12. Снаряд, выпущенный вертикально, в верхней точке траектории разрывается на четыре осколка. Осколок массой $m_1 = 4$ кг полетел вертикально вниз со скоростью $v_1 = 150$ м/с. Осколок массой $m_2 = 3$ кг – горизонтально на юг со скоростью $v_2 = 100$ м/с. Осколок массой $m_3 = 3$ кг – горизонтально на восток. Осколок массой $m_4 = 3{,}5$ кг полетел со скоростью $v_4 = 200$ м/с. Найдите скорость осколка массой m_3.

13. Мыльный пузырь надувается азотом при комнатной температуре. При каком диаметре пузырь начнет всплывать в атмосферном воздухе в комнате? Поверхностное натяжение мыльного раствора $\sigma = 40$ мН/м, весом пленки пренебречь.

14. В цилиндрическом сосуде под поршнем массой M и площадью S находится идеальный одноатомный газ (рис.4). Какое количество теплоты надо подводить к газу в единицу времени, чтобы поршень двигался равномерно вверх со скоростью v? Атмосферное давление p_0, ускорение свободного падения g. Трением поршня о стенки сосуда пренебречь.

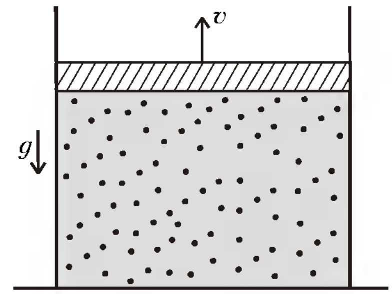


Рис. 4

15. При изотермическом сжатии 9 г водяного пара при температуре $T = 373$ К его объем уменьшился в три раза, а давление возросло вдвое. Найдите начальный объем пара.

16. Две соединенные проводником пластины конденсатора площадью S каждая (рис.5) находятся на расстоянии d друг от друга (это расстояние мало по сравнению с размерами пластин) во внешнем однородном электрическом поле, напряженность которого равна E_0. Какую работу нужно совершить, чтобы медленно сблизить пластины до расстояния $d/2$?

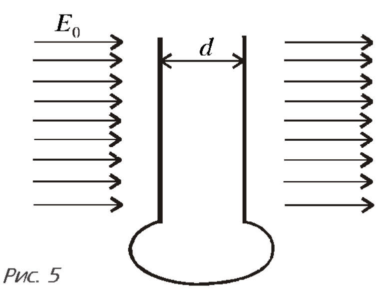


Рис. 5

Новый прием в школы-интернаты при университетах

Специализированный учебно-научный центр (сокращенно — СУНЦ) при МГУ (школа им. академика А.Н.Колмогорова), СУНЦ НГУ, СУНЦ УрГУ и Академическая гимназия при СПГУ объявляют набор школьников в 10 (двухгодичное обучение) и 11 (одногодичное обучение) классы.

Обучение ведется на двух отделениях: физико-математическом и химико-биологическом. В составе физико-математического отделения кроме основного профиля предлагаются компьютерно-информационный, биофизический (СУНЦ МГУ) и экономический. Химико-биологическое отделение представлено специализациями по химии и биологии.

Зачисление в школу производится на конкурсной основе по итогам нескольких туров. Первый тур — заочный письменный экзамен по математике, физике, химии. Успешно выдержавшие письменный экзамен по решению приемной комиссии в апреле — мае приглашаются в областные центры Российской Федерации на устные экзамены.

Ниже приводятся условия задач заочного вступительного экзамена. Работа должна быть выполнена в обычной ученической тетради (на титульном листе напишите желаемый профиль обучения). На первой странице укажите свои анкетные данные: 1) фамилию, имя, отчество (полностью); 2) домашний адрес (подробный), индекс; 3) подробное название школы, класс.

Работу отправляйте простой бандеролью (обязательно вложите конверт с маркой, заполненный на свой домашний адрес) по одному из следующих адресов:

121357 Москва, Кременчугская ул., 11, СУНЦ МГУ, Приемная комиссия, заочный экзамен (внимание: жители Москвы принимаются в учебный центр без предоставления общежития, телефон для справок 445-11-08);

199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/96, Академическая гимназия;

620137 Екатеринбург, ул. Голощекина, 30, СУНЦ УрГУ;

630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, Учебно-научный центр НГУ, Олимпиадный комитет.

Срок отправки работ — *не позднее 10 марта 2000 года* (по почтовому штемпелю). Работы, высланные позже этого срока, рассматриваться не будут.

Если вы не сможете решить все задачи, не отчаивайтесь — комиссия рассмотрит работы с любым числом решенных задач.

Желаем успеха!

Вступительное задание

Математика

Для поступающих в 10 класс

1. Решите уравнение

$$x^2 + x = 1111111122222222.$$

2. Какую наибольшую площадь может иметь треугольник со сторонами $a \le 6$, $b \le 5$, $c \le 3$?

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y^2 = z^3, \\ x^2 + y^3 = z^4, \\ x^3 + y^4 = z^5. \end{cases}$$

4. Биссектрисы AM и BL разностороннего треугольника ABC пересекаются в точке I. Найдите угол C, если известно, что $MI = IL$.

5. У восьми школьников имеются 7 рублей 19 копеек. Известно, что у любых двух школьников различные суммы денег, причем у одного из них в целое число раз больше денег, чем у другого. Сколько денег у каждого школьника?

Для поступающих в 11 класс

1. Может ли сумма трех последовательных квадратов целых чисел быть равной сумме кубов двух последовательных целых чисел?

2. Найдите наибольшую возможную площадь четырехугольника со сторонами 1, 4, 7, 8 (в произвольном порядке).

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3, \\ y - \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0. \end{cases}$$

4. Середины сторон неравнобедренного треугольника ABC лежат на окружности, центр которой принадлежит биссектрисе угла C. Найдите сторону AB, если $BC = a$, $AC = b$.

5. Три фермера отправились на базар для продажи баранов. Первый пригнал 10 баранов, второй – 16, третий – 26. Каждый продал часть своих баранов (не менее одного, но не всех) в течение первого дня, причем все они продавали по одной цене, не менявшейся в течение всего первого дня. На второй день цена на баранов упала, и фермеры, опасаясь дальнейшего понижения цен, немедленно продали остальных баранов, снова по одинаковой цене. Сколько стоили бараны в 1 и во 2 день, если каждый из фермеров выручил 3500 рублей?

Физика

Для поступающих в 10 класс

1. Две частицы движутся по оси X. Начальные скорости частиц $v_1 = 6$ м/с, $v_2 = -4$ м/с. Ускорения частиц $a_2 = -a_1 = 1$ м/с^2. Найдите наименьшее значение начального расстояния s между частицами, при котором они не столкнутся.

2. Жонглер бросил шарик вертикально вверх. Когда шарик достиг максимальной высоты $h_m = 2$ м относительно точки бросания, был брошен второй шарик с той же начальной скоростью. Найдите высоту h, на которой шарики встретились.

3. Вес тела массой $m = 100$ кг в лифте, движущемся вниз, равен $P = 1020$ Н. Найдите величину ускорения лифта.

4. Спутник запущен на круговую орбиту, расположенную в плоскости экватора, и вращается в направлении вращения Земли. Семь раз в сутки спутник проходит над некоторым пунктом. Найдите отношение радиуса орбиты спутника к радиусу орбиты геостационарного спутника (неподвижного относительно экватора).

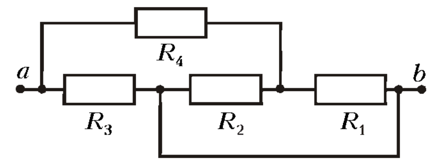
5. Бассейн с водой имеет форму параллелепипеда с площадью основания S. Найдите приращение уровня воды Δh, если в бассейн опустить тело массой m плотностью ρ. Плотность воды $\rho_{\text{в}}$.

Для поступающих в 11 класс

1. Уравнение процесса, проведенного с ν молями идеального газа при изменении объема в области $V_0 \le V \le 2V_0$, имеет вид $p(V) = (p_0/2)(3 - V/V_0)$, где p_0, V_0 – постоянные величины. Найдите максимальное значение температуры T_m в этом процессе.

2. Найдите количество теплоты Q, переданное газу, работу A', совершенную над газом, и приращение внутренней энергии ΔU в процессе, уравнение которого приведено в задаче 1.

3. В схеме, приведенной на рисунке, разность потенциалов между точ-



ками a и b равна $U = 10$ В, сопротивления резисторов $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 10$ Ом, $R_4 = 6$ Ом. Найдите силу тока, протекающего через резистор R_2.

4. К батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 4$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом подключены последовательно соединенные конденсаторы емкостью $C_1 = 3$ мкФ и $C_2 = 2$ мкФ. Найдите количество теплоты, которое выделится в батарее, если расстояние между пластинами конденсатора емкостью C_1 уменьшить в два раза.

5. Ребра правильного тетраэдра $AKCD$ изготовлены из однородной проволоки. Сопротивление каждого ребра длиной $L = 5$ см равно $R = 1$ Ом. К вершинам A и K тетраэдра приложено постоянное напряжение $U = 10$ В. Тетраэдр помещают в однородное постоянное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, направленной перпендикулярно ребру AK. Величина индукции $B = 0{,}01$ Тл. Найдите величину силы, действующей на тетраэдр.

Химия

Для поступающих на химико-биологическое отделение

1. В некоторых оксидах массовая доля элемента составляет примерно 71%. Определите формулы этих оксидов.

2. 13,2 г кристаллогидрата сульфата марганца $MnSO_4 \cdot nH_2O$ растворили в 106,8 мл воды, при этом образовался раствор с массовой долей растворенного вещества 0,074. Установите состав кристаллогидрата.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. При сложении из разряда единиц в разряд десятков была перенесена единица (иначе разряд десятков не изменился бы). Но заметим, что разряд сотен также изменился, т.е. туда из разряда десятков была перенесена единица. Но в разряде десятков производилось сложение Е и 1, т.е. Е + + 1 оказалось не меньше 10, откуда следует, что Е = 9, и Е + 1 = 10, поэтому У = 0. Ребус приобрел вид: Б999 + Б =

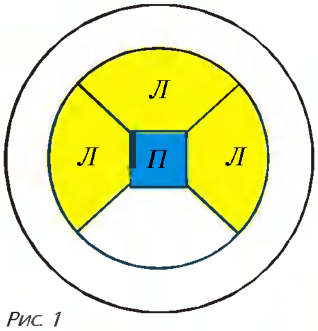


Рис. 1

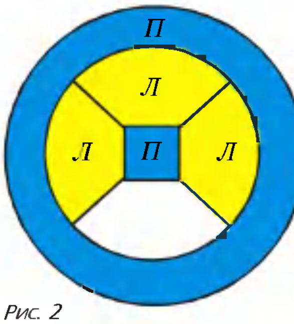


Рис. 2

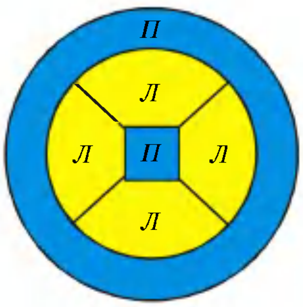


Рис. 3

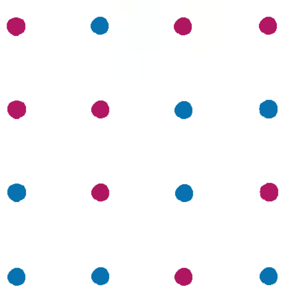


Рис. 4

= М000. Анализируя разряд единиц, получаем, что (9 + + Б) должно оканчиваться нулем, поэтому Б = 1, и тогда М = 2. В расшифрованном виде ребус выглядит так:

$$1999 + 1 = 2000.$$

2. *Ответ*: можно. Раскрасим клетки квадрата в шахматном порядке в белый и черный цвета. Искомую расстановку чисел получим, если в белые клетки поставим все числа от 1 до 8, а в черные – все числа от 9 до 16.

3. Поскольку $11111112222222 = 1111111\cdot\left(10^7+2\right) = 3333333\cdot\left(\frac{9999999+3}{3}\right) = 3333333\cdot\left(3333333+1\right)$, то исходное выражение равно числу 3333333^2, т.е. является квадратом.

4. На планете обязательно должен обитать правдолюб (иначе каждый из лжецов будет говорить правду, что невозможно). Нарисуем карту планеты, для удобства изменив форму и размеры граней, как показано на рисунке 1. В центре карты изображена грань, которой владеет правдолюб (П). По условию, она соседствует с тремя гранями, которыми владеют лжецы (Л). Рассмотрим лжеца, соседствующего с двумя другими лжецами (на рисунке 1 территория этого лжеца показана сверху территории правдолюба). Его утверждение будет ложным только в том случае, если он будет соседствовать с двумя правдолюбами – см. рисунок 2. Но в этом случае на последней незанятой грани может находиться только лжец (рис.3).

Ответ: на планете Куб обитают 2 правдолюба и 4 лжеца.

5. Один из возможных вариантов решения показан на рисунке 4.

Задачи

(см. «Квант» №5)

1. Если меньшая палочка укладывается в большей не менее 2 раз, то ее длина заведомо меньше $\frac{2}{3}$ длины большей палочки. Пусть меньшая палочка, дважды приложенная к большей, выступает на длину d (рис.5). Длина меньшей палочки меньше $\frac{2}{3}$ длины большей палочки, если отрезок длины d более 3 раз откладывается на большей палочке.

2. Красные точки разбивают периметр правильного 110-угольника на 5 равных частей. Одна из этих частей содержит 3 синие точки (в противном случае синих точек оказалось бы $5\times2 = 10$, что меньше 11 – заданного в условии задачи их количества). 3 синие точки вместе с другими расположенными между ними вершинами 110-угольника образуют в совокупности 21 вершину – а это как раз число вершин, расположенных между двумя соседними красными точками. Следовательно, красная точка обязательно соседствует с одной из синих, т.е. у 110-угольника есть сторона, концы которой окрашены в красный и синий цвета.

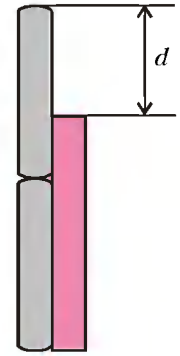


Рис. 5

3. Среди натуральных чисел квадраты встречаются вообще-то чаще, чем кубы, поэтому на первый взгляд кажется, что больше листов вырвет Миша. Но на самом деле больший ущерб нанесет учебнику Гриша, потому что Мише не удастся вырвать *ни одного* листа! Причина этого в следующем. Нумерация страниц в учебниках (и других книгах тоже) такова, что номера страниц на обеих сторонах листа различаются на 1, причем меньший из номеров всегда *нечетный*. Пусть он равен $2n + 1$ (где n – целое неотрицательное), тогда номер страницы на другой стороне листа равен $2n + 2$, и сумма номеров страниц на обеих сторонах листа составляет $(2n + 1) + (2n + 2) = 4n + 3$. При делении на 4 это число дает, как видно, остаток 3. В самом деле, если число – четное, т.е. делится на 2, то его квадрат делится на 4, и остатка нет совсем. Если же число – нечетное, то его можно записать в виде $2m + 1$ (m – целое), и квадрат равен $(2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 4\left(m^2+m\right) + 1$, что при делении на 4 дает в остатке 1. Таким образом, в учебнике просто нет ни одного листа, удовлетворяющего Мишиным требованиям. В то же время листы, подходящие для Гриши, имеются, например – 27 = 13 + 14. Так что окончательный ответ: Гриша.

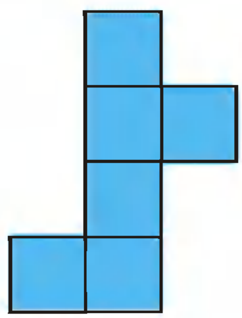


Рис. 6

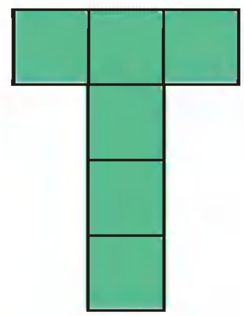


Рис. 7

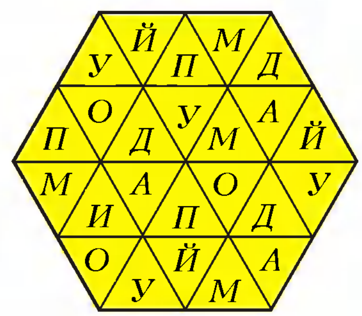


Рис. 8

4. Существует (см. рис.6, 7).

5. См. рис.8.

Странные игроки

3. Странный игрок набирает очки только во встречах с теми, кто получил не меньше. Поэтому он обладает следующим свойством:

(∗) *Количество очков, полученное странным игроком, меньше числа игроков, набравших столько же или больше (включая его самого).*

Пусть игрок А набрал больше, чем странный (который по определению выиграл у всех, кто набрал больше его). Тогда сумма очков игрока А заведомо больше, чем число игроков, имеющих столько или больше, чем он. Как следствие, А не обладает свойством (*).

Ответ на поставленный вопрос теперь ясен: количество очков странного участника – это наибольшее количество очков, которое меньше числа игроков, набравших столько или больше. Отметим, что мы заново решили задачу 1, поскольку не пользовались тем, что все странные имеют одинаковую сумму очков.

Попутно возникает **задача 3'**. *В каждом ли круговом турнире найдется участник со свойством (*)? А не имеющий этого свойства? Может ли в турнире быть участник с количеством очков, равным числу игроков, которые набрали столько или больше?*

Решение. Те, кто занял последнее место, заведомо обладают свойством (*): наравне с ними или выше находятся все N участников турнира, тогда как сумма очков любого игрока не больше $N-1$.

Напротив, игроки без свойства (*) могут отсутствовать. Так будет, если число участников турнира $N > 2$, один из них проиграл всем остальным, а они сыграли между собой вничью. (См. также задачу 2 а).)

Пусть теперь один из игроков выиграл у всех остальных, другой – у всех, кроме первого, и т.д. Если число участников N четно, то имеется игрок с $N/2$ очками. Наравне с ним и выше находятся также $N/2$ участников. Таким образом, случай равенства рассматриваемых величин возможен. (Однако, ввиду показанного в решении задачи 3, он несовместим с наличием странных игроков.)

4. а) Согласно задаче 1 все странные игроки делят одно и то же место в турнирной таблице. Пусть это место не является первым. Тогда участник, находящийся на первом месте, проиграл всем странным. Но он выступил лучше, чем «среднестатистический» игрок, и потому проиграл меньше матчей, чем выиграл. Значит, число проигранных им матчей меньше $N/2-1$ и (как целое) не больше $[N/2]-1$, что и требуется. Если же странные участники делят первое место, то аналогичное рассуждение можно применить к последнему месту.

Можно и не опираться на задачу 1. Действительно, положим $M=[N/2]-1$. Пусть число странных больше M. Участник, занявший (или разделивший) первое место, проиграл не более M матчей. При этом он проиграл всем странным, не разделившим первое место. Значит, кто-то из странных получил первое место. Он, в свою очередь, проиграл не более M матчей, но при этом проиграл всем участникам, не разделившим первое место. Следовательно, большинство игроков делит первое место. Но аналогично и на последнем месте находится большинство, что противоречит предыдущему.

б) Пусть $M=[N/2]$, $1 \le L \le M-1$, игроки занумерованы от 1 до N и разделены на четыре группы. В первую группу включим участников с номерами от 1 до L, во вторую – от $L+1$ до M, в третью – от $M+1$ до $N-L$ и в четвертую – остальных. Пусть при этом игроки первой группы проиграли все матчи со второй группой и выиграли матчи с третьей и четвертой. Четвертая группа выиграла у второй и проиграла первой и третьей. Все остальные встречи закончились вничью. Нетрудно подсчитать, что игроки первой группы набрали по $N-M+(L-1)/2$ очков, т.е. не меньше $N/2$. Игроки четвертой группы получили по $M-(L+1)/2$ очков – не больше $N/2-1$. Во второй и третьей группах результат равен $(N-1)/2$. Отсюда следует, что вторую группу составляют странные, первую – сильные, третью – средние, а четвертую –слабые. При этом число странных равно $[N/2]-L$, и за счет выбора L его можно сделать любым натуральным числом в пределах от 1 до $[N/2]-1$.

5. а) Рассмотрим «среднеарифметического» сильного игрока (т.е. сложим очки, набранные сильными, и разделим на число таких участников). Этот условный игрок выиграл у стольких же сильных, скольким и проиграл. При этом он проиграл всем странным. Поэтому сумма очков «среднеарифметического» сильного игрока не больше, чем число средних и слабых плюс половина числа сильных. Аналогично, результат «среднеарифметического» странного игрока не меньше, чем число сильных плюс половина числа странных. Но эта сумма меньше, чем в первом случае. Как следствие, общее число средних и слабых больше, чем половина общего числа сильных и странных. А это и означает, что сильные и странные составляют менее двух третей от всего состава игроков. Утверждение о численности странных вместе со слабыми доказывается аналогично.

б) Построение примера по существу содержится в решении п. а). Разделим участников турнира на три группы, причем в первых двух по $[N/3]+1$ человек. Пусть игроки первой группы выиграли все матчи у игроков второй группы. Аналогично, вторая группа выиграла у третьей, а третья – у первой. Внутри каждой группы все матчи закончились вничью. Нетрудно убедиться, что третья группа состоит из странных, первая из сильных и вторая из слабых.

Как и в задаче 4б), здесь можно построить пример, когда количество странных равно произвольно заданному числу, которое не превосходит максимально возможного. Предоставляем вам сделать это самостоятельно.

6'. Если на турнире не было ничьих, то число очков каждого участника – целочисленное, в промежутке от 0 до $N-1$. Если все они различны, то это – все целые числа от 0 до $N-1$. Очевидно, игрок с $N-1$ очками выиграл у всех остальных. Тогда игрок с $N-2$ очками выиграл у всех, кроме первого, и т.д.

7. а) Пусть число игроков нечетно, они занумерованы от 1 до $2M+1$ и меньшие номера выиграли у больших со следующими исключениями. Вничью сыграли первый с M-м и $(M+2)$-й с последним. Игрок с номером $M+1$ выиграл у всех предыдущих и проиграл всем последующим. Нетрудно убедиться, что сумма очков убывает с ростом номера и $(M+1)$-й игрок – странный.

б) Нам потребуется следующая

Лемма. *Пусть в круговом турнире все N участников набрали различное число очков и сделали ровно одну ничью. Тогда: 1) разность соседних результатов не может быть больше 2; 2) если разность соседних результатов равна 2, то игроки не участвовали в ничьей.*

Доказательство леммы. Пусть лемма неверна. Выберем турнир с наименьшим числом участников, в котором она нарушается. Очевидно, $N>2$. Для краткости вместо «разность соседних результатов» будем говорить просто «разность».

Пусть S – сумма всех разностей, D – разность, нарушающая 1) и 2). Число полуцелых разностей среди остальных игроков обозначим K. Каждая полуцелая разность не меньше $1/2$, а целая – не меньше 1. Поэтому

$$S \ge D + N - 2 - K/2. \qquad (**)$$

Результаты участников ничьей – полуцелые, а остальных – целые. Поэтому в каждой полуцелой разности обязательно «участвует» один из тех, кто сделал ничью, и число таких разностей не больше 4.

Пусть нарушено 1), т.е. $D>2$. Если $D \ge 3$, то ввиду (**) $S \ge N-1$ (поскольку $K \le 4$). Если же $D=5/2$, то $K \le 3$ (так как D полуцелое), и опять $S \ge N-1$. Пусть теперь нарушено 2), т.е. $D=2$ и один из «участников» этой разности участвовал в ничьей. Его результат – полуцелый, поэтому второй «участник» разности D тоже имеет полуцелый результат и участвовал в ничьей. Отсюда $K \le 2$, и ввиду (**) снова $S \ge N-1$.

Итак, во всех случаях разность между наилучшим и наихудшим результатами не меньше $N-1$. Но больше она и не бывает, а равенство означает, что один из участников у всех выиграл, а другой – всем проиграл. В разности D не участвует хотя бы один из «крайних» игроков. Удалим его из турнирной таблицы. Утверждение леммы по-прежнему нарушается. Но число участников уменьшилось, что и дает противоречие. Лемма доказана.

Предположим, что все участники турнира набрали разное количество очков, имеется ровно одна ничья и при этом есть странный игрок А. Согласно задаче 2 б) он не может занять первое или последнее место. Игроки Б и В, находящиеся на соседних местах, отличаются от А по сумме очков не меньше чем на 1/2. Поэтому между собой они различаются не меньше чем на 1.

Удалим А из турнирной таблицы. Результаты слабых (которые выигрывали у А) уменьшатся на 1, а результаты сильных останутся без изменения. Поэтому у всех игроков снова будет разное число очков. Ничья сохранится, поскольку А (как странный) в ней не участвовал. Результаты Б и В теперь соседние, и их разность не меньше 2. Но в силу леммы это означает, что она равна 2, причем Б и В не участвуют в ничьей.

Как следствие, в исходной таблице результаты Б и В различаются на 1. Значит, оба они отличаются на 1/2 от результата А. Но А, Б и В не участвуют в ничьей, поэтому их результаты – целочисленные. Получено искомое противоречие.

Геометрическая оптика

1. $\alpha = \mathrm{arctg}\,\dfrac{h}{(n-1)F} = \mathrm{arctg}\;0{,}1$.

2. $l = \dfrac{1}{2D}\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \approx 0{,}9$ см.

3. $l = 5F = 50$ см; $v = 10\omega F = 5$ см/с; $\beta = \pi/2 - 2\alpha = 10°$.

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. (3; –2). *Указание.* Сложите уравнения системы.

2. $x = \pi n,\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Уравнение равносильно такому:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)-\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)-\sin 3x} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)} = 1.$$

3. $-\sqrt{15} < x < \dfrac{1-\sqrt{73}}{2},\ 5 < x < 6$.

4. $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. *Решение.* Пусть O – центр окружности, R – ее радиус; F – основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую AB; $\angle BAC = \angle ACD = \alpha$ (рис.9). Тогда

$$OF = OC = OD = R,$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{3},\ \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

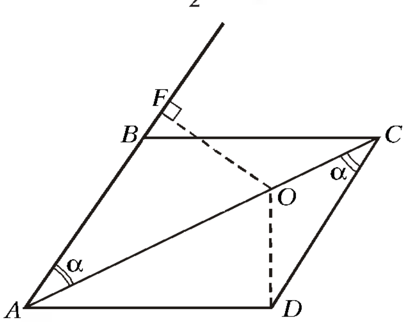


Рис. 9

Если $AB = CD = x$, S – площадь параллелограмма $ABCD$, то

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}x\cdot AC\sin\alpha = \sqrt{2},$$

где

$$x = 2\cdot OC\cos\alpha = 2R\cos\alpha,$$

$$AC = AO + OC = \frac{R}{\sin\alpha} + R = 4R.$$

Следовательно,

$$\sqrt{2} = 2R\cos\alpha\cdot 4R\sin\alpha = \frac{16\sqrt{2}}{9}R^2,$$

откуда

$$R = \frac{3}{4},\ x = \sqrt{2}.$$

Из ΔACD по теореме косинусов

$$AD^2 = 9 + 2 - 2\cdot 3\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = 3,$$

откуда

$$BC = AD = \sqrt{3}.$$

5. $x = 20,\ y = 8$. *Решение.* Умножая первое неравенство на 3 и складывая с третьим, получаем $7y < 61$, откуда $y < 8\frac{5}{7}$. Умножая второе неравенство на –3 и складывая с третьим, получаем $-5y < -32$, откуда $y > 6\frac{2}{5}$. Итак, $y = 7$ или $y = 8$. Подстановка этих значений в исходную систему показывает, что целочисленное решение только одно: – $y = 8,\ x = 20$.

6. $\arccos\dfrac{7}{2\sqrt{19}},\ \dfrac{a\sqrt{6}}{9},\ a\sqrt{\dfrac{11}{6}}$.

Решение. а) Пусть M – середина AC, $\angle DCF = \alpha$, φ – угол между прямыми BC и KE (рис.10). Тогда

$$\angle EKM = \varphi,\ \cos\alpha = \frac{CF}{CD} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Из треугольников KEM, CEM и KEC по теореме косинусов

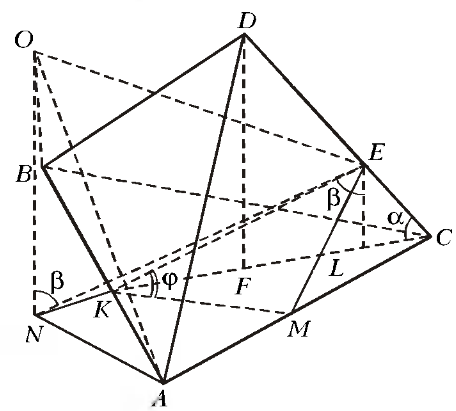


Рис. 10

получаем

$$EM^2 = KE^2 + KM^2 - 2KE\cdot KM\cdot\cos\varphi,$$

$$EM^2 = EC^2 + MC^2 - 2EC\cdot MC\cdot\cos\frac{\pi}{3} =$$

$$= \frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{4} - 2\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{36}a^2,$$

$$KE^2 = \frac{a^2}{9} + \frac{3a^2}{4} - 2\frac{a}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{19a^2}{36},$$

откуда следует, что

$$\frac{7a^2}{36} = \frac{19a^2}{36} + \frac{a^2}{4} - 2\frac{a\sqrt{19}}{6}\cdot\frac{a}{2}\cos\varphi,\ \cos\varphi = \frac{7}{2\sqrt{19}},$$

$$\sin\varphi = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{19}}.$$

б) Расстояние ρ между прямыми BC и KE равно расстоянию от точки C до плоскости KEM, так как прямая BC параллельна этой плоскости. Вычислим двумя способами объем v пирамиды $KEMC$:

$$v = \frac{1}{3}\rho S_1 = \frac{1}{3}hS_2,$$

где S_1 и S_2 – площади треугольников KEM и KMC соответственно,

$$h = EL\left(L \in KC,\ EL \| DF\right),\ h = \frac{1}{3}DF = \frac{1}{3}a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{9}.$$

Так как

$$S_1 = \frac{1}{2}KE \cdot KM \sin\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{19}}{6}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{19}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16},$$

$$S_2 = \frac{1}{4}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16},$$

то

$$\rho = h = \frac{a\sqrt{6}}{9}.$$

в) Пусть O – центр сферы, проходящей через точки A, B, E и F. Точка O лежит на перпендикуляре к плоскости ABF, проведенном через центр N окружности, описанной около треугольника ABF (см. рис.10). Если R – радиус этой окружности, а x – радиус сферы, то

$$OB = OE = x,\ R = NF = \frac{AB}{\sin\frac{2\pi}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = NA.$$

Пусть $ON = y$, $\angle ONE = \angle NEL = \beta$. Тогда из треугольника ONA по теореме Пифагора имеем

$$x^2 = y^2 + \frac{a^2}{3}, \qquad (1)$$

а из треугольника ONE по теореме косинусов находим

$$x^2 = y^2 + NE^2 - 2y \cdot NE\cos\beta,$$

где

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{NL}{EL},\ NL = NF + FL = \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{5a}{3\sqrt{3}},\ \operatorname{tg}\beta = \frac{5}{\sqrt{2}},$$

$$\cos\beta = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}},\ NE = \frac{EL}{\cos\beta} = a.$$

Следовательно,

$$x^2 = y^2 + a^2 - 2ay\cdot\frac{a\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) находим $y = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, $x = a\sqrt{\frac{11}{6}}$.

Вариант 2

1. $\left(1-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right)$. *Указание.* Потенцируя, получаем систему

$$\begin{cases} 5y - x - 2 = 3(y - x), \\ y - 2 - 4xy = 3y|x|, \\ y > x,\ x \neq 0, \\ y(y - 2 - 4xy) > 0, \end{cases}$$

равносильную данной. Рассмотрите 2 случая: $x > 0$ и $x < 0$.

2. $x = -\frac{\pi}{9} + 2\pi k$, $x = \frac{11}{9}\pi + 2\pi k$, $x = \frac{4}{9}\pi + 2\pi k$, $x = \frac{4}{3}\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Указание. Уравнение равносильно совокупности из двух систем:

$$\begin{cases} \cos 2x \geq 0, \\ \sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \cos 2x < 0, \\ \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 0. \end{cases}$$

3. $0 \leq x \leq \frac{8}{3}$, $x = \frac{10}{3}$, $4 < x \leq 5$.

Решение. Область определения неравенства задается условиями

$$3x^3 - 22x^2 + 40x = 3x\left(x - \frac{10}{3}\right)(x-4) \geq 0,\ x \neq 4,$$

откуда

$$0 \leq x \leq \frac{10}{3},\ x > 4.$$

Обозначим

$$f(x) = 3\left(x - \frac{10}{3}\right)(x-4).$$

а) Пусть $x > 4$, тогда $f(x) > 0$. В этом случае исходное неравенство равносильно каждому из следующих неравенств:

$$\sqrt{xf(x)} \geq f(x),\ x \geq f(x),\ 3x^2 - 23x + 40 = 3\left(x - \frac{8}{3}\right)(x-5) \leq 0,$$

откуда, учитывая условие $x > 4$, получаем $4 < x \leq 5$.

б) Пусть $0 \leq x \leq \frac{10}{3}$, тогда $x - 4 < 0$, $f(x) \geq 0$ и исходное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{xf(x)} \leq f(x)$. Значение $x = \frac{10}{3}$ является решением этого неравенства, а если $0 \leq x < \frac{10}{3}$, то $f(x) > 0$ и неравенство примет вид $3x^2 - 23x + 40 =$

$$= 3\left(x - \frac{8}{3}\right)(x-5) \geq 0,$$

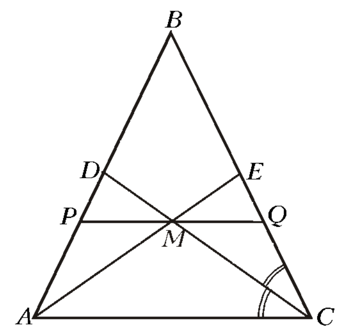


Рис. 11

откуда, с учетом условия $0 \leq x \leq \frac{10}{3}$, получаем $0 \leq x \leq \frac{8}{3}$.

4. $\frac{12}{7}$, $\frac{45\sqrt{2}}{28}$.

Решение. Пусть $\angle ACB = \alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $AB = BC = \frac{2}{\cos\alpha} = 6$ (рис.11).

а) По свойству биссектрисы в треугольнике ACE имеем

$$\frac{ME}{MA} = \frac{EC}{AC} = \frac{3}{4},$$

откуда

$$\frac{ME}{AE} = \frac{3}{7}.$$

Из подобия треугольников MEQ и AEC следует, что

$$\frac{MQ}{AC} = \frac{ME}{AE} = \frac{3}{7},\ \text{откуда}\ MQ = \frac{12}{7}.$$

б) Радиус R окружности, описанной около треугольника BPQ, равен

$$R = \frac{BQ}{2\sin\alpha} = \frac{3}{2\sqrt{2}BQ},$$

где

$$BQ = BE + EQ = 3 + EQ,\ EQ = \frac{3}{7}EC = \frac{9}{7},$$

откуда

$$BQ = \frac{30}{7},\ R = \frac{45\sqrt{2}}{28}.$$

5. а) 8; б) $10-\pi$; в) $6-\pi$.

Указание. а) Первому неравенству удовлетворяют точки, лежащие в квадрате (рис.12) с вершинами $A(-2;0)$, $B(0;2)$, $C(2;0)$, $D(0;-2)$. Площадь этого квадрата равна 8.

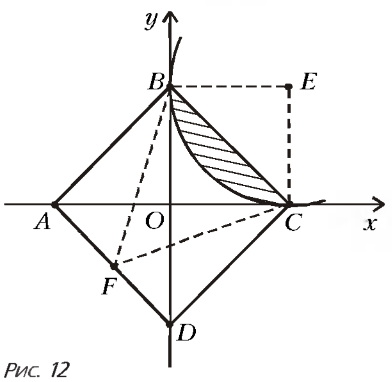


Рис. 12

б) Второму неравенству, которое можно записать в виде

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 \geq 4,$$

удовлетворяют точки квадрата, лежащие вне круга радиуса 2 с центром в точке $E(2;2)$.

в) Прямые $y - 3x - 2 = 0$ и $3y - x + 2 = 0$ пересекаются в точке $F(-1;1)$ и проходят соответственно через точки B и C. Третьему неравенству удовлетворяют точки двух вертикальных углов с вершиной F, один из этих углов – угол, образуемый лучами FB и FC и содержащий точку O, а системе из трех неравенств – точки «криволинейного треугольника» FBC.

6. а) $\frac{77}{36}$; б) $\frac{40\sqrt{2}}{33}$; в) $\arccos\frac{7}{11}$.

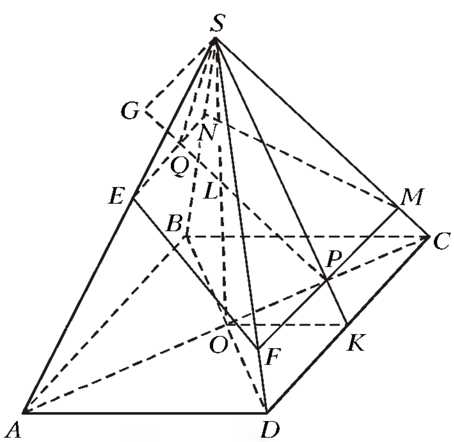


Рис. 13

Решение. При пересечении пирамиды плоскостью α получается равнобедренная трапеция $ENMF$ (рис.13), где

$$EN \| FM \| CD.$$

а) Пусть P и Q – середины сторон FM и EN, σ – площадь сечения. Тогда

$$\sigma = \frac{1}{2}(EN + FM)PQ,$$

где

$$EN = \frac{1}{3}AB = \frac{2}{3},\ FM = \frac{5}{6}CD = \frac{5}{3}.$$

Если O – центр основания $ABCD$, L – точка пересечения SO и PQ, $\varphi = \angle QSL = \angle PSL$, K – середина CD, то

$$SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = 3,\ SP = \frac{5}{6}SK = \frac{5}{2},\ SQ = \frac{1}{3}SK = 1,$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{OK}{SO} = \frac{1}{2\sqrt{2}},\ \cos\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3},\ \sin\varphi = \frac{1}{3},\ \cos 2\varphi = \frac{7}{9},$$

$$\sin 2\varphi = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

Из ΔSPQ по теореме косинусов находим

$$PQ = \frac{11}{6},\ \sigma = \frac{77}{36}.$$

б) Искомый радиус r сферы равен расстоянию от точки A до плоскости α, а $r = 2x$, где x – расстояние от точки S до плоскости α. Но x – высота SG в треугольнике SPQ, проведенная из вершины S. Пусть σ_1 – площадь треугольника SPQ, тогда

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}SQ \cdot SP \sin 2\varphi = \frac{5\sqrt{2}}{9},\ x = \frac{2\sigma_1}{PQ} = \frac{20\sqrt{2}}{33},\ r = 2x = \frac{40\sqrt{2}}{33}.$$

в) Угол ω между плоскостью α и плоскостью $ABCD$ равен углу между SG и SL, так как $SG \perp \alpha$, $SL \perp ABCD$; $\cos\omega = \frac{x}{SL}$. Для вычисления SL воспользуемся формулой для биссектрисы в треугольнике SPQ. Получим

$$SL = \frac{2SQ \cdot SP \cdot \cos\varphi}{SQ + SP} = \frac{40\sqrt{2}}{21},$$

откуда

$$\cos\omega = \frac{7}{11}.$$

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Шарик сможет совершить полный оборот, двигаясь по окружности, в том случае, если в точке, диаметрально противоположной точке A, натяжение нити будет больше нуля или равно нулю. Минимальная скорость в точке A соответствует нулевому натяжению нити в верхней точке траектории. Обозначим через $v_{\min}$ минимальную скорость шарика в точке A, через u – скорость шарика в диаметрально противоположной точке и запишем закон сохранения энергии для этих двух точек:

$$\frac{mv_{\min}^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + 2mgl\sin\alpha.$$

Здесь m – масса шарика, а потенциальная энергия в поле тяжести отсчитывается от точки A. При отсутствии натяжения нити в верхней точке центростремительное ускорение шарику сообщает только проекция силы тяжести $mg\sin\alpha$, поэтому уравнение движения шарика для этой точки имеет вид

$$mg\sin\alpha = m\frac{u^2}{l}.$$

Из совместного решения двух уравнений найдем искомую скорость:

$$v_{\min} = \sqrt{5gl\sin\alpha}.$$

2. Плотность влажного воздуха складывается из плотности пара и плотности сухого воздуха:

$$\rho = \frac{M_п p_п}{RT} + \frac{M_в p_в}{RT},$$

где $p_п$ и $p_в$ – парциальные давления водяного пара и воздуха соответственно. Давление влажного воздуха равно сумме парциальных давлений пара и сухого воздуха:

$$p = p_{\text{п}} + p_{\text{в}}.$$

Из полученных уравнений найдем искомое отношение:

$$\frac{p_{\text{п}}}{p_{\text{в}}} = \frac{1 - \dfrac{\rho RT}{\text{М}_{\text{в}} p}}{\dfrac{\rho RT}{\text{М}_{\text{в}} p} - \dfrac{\text{М}_{\text{п}}}{\text{М}_{\text{в}}}} = 0{,}027.$$

3. 1) Сразу после замыкания ключа напряжение на конденсаторе остается равным нулю, а ток через резистор сопротивлением R_2 равен

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2} = 0{,}5\ \text{А}.$$

2) В некоторый момент времени после замыкания ключа напряжение на конденсаторе будет равно $\mathcal{E}/3$ (рис.14). По

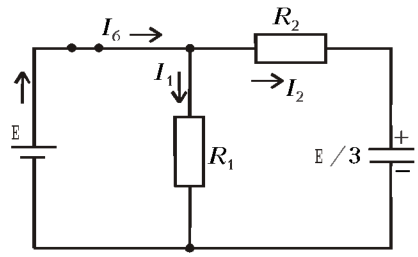


Рис. 14

закону Ома для замкнутой цепи для контура, содержащего батарею и резистор сопротивлением R_1, можно записать

$$\mathcal{E} = I_1 R_1,$$

а для контура, охватывающего батарею, резистор сопротивлением R_2 и конденсатор, –

$$\mathcal{E} = I_2 R_2 + \frac{\mathcal{E}}{3}.$$

Очевидно, что ток через батарею равен

$$I_б = I_1 + I_2.$$

Отсюда находим

$$I_б = \frac{\mathcal{E}}{R_1} + \frac{2}{3}\frac{\mathcal{E}}{R_2} = \frac{11}{6}\ \text{А} = 1{,}83\ \text{А}.$$

4. На рамку с током I, протекаемым против часовой стрелки,

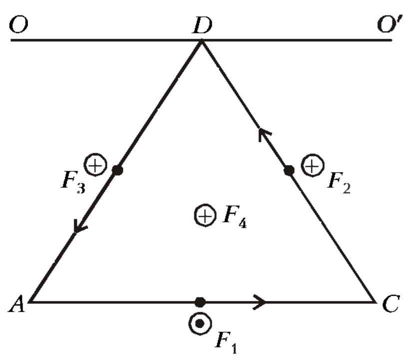


Рис. 15

будут действовать четыре силы: три силы Ампера $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ и сила тяжести $\vec{F}_4 = m\vec{g}$ (рис.15). Сила $\vec{F}_1$ направлена вертикально вверх, приложена к середине стороны AC и равна $F_1 = IaB$. Силы $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ направлены вертикально вниз, приложены к серединам сторон DC и AD и равны $F_2 = F_3 = IaB\sin 30°$. Сила тяжести приложена в точке пересечения биссектрис треугольника. Очевидно, что рамка начнет приподниматься относительно вершины D. Подъем рамки начнется при условии, что суммарный момент сил относительно оси OO' будет больше нуля или равным нулю:

$$IaB\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} - 2\cdot IaB\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{4} - Mg\frac{a}{\sqrt{3}} \ge 0.$$

В этом уравнении первый член соответствует моменту силы F_1, второй член – моментам сил $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$, а последний – моменту силы тяжести. Величина тока, при котором рамка начнет приподниматься относительно вершины D, равна

$$I = \frac{4}{3}\frac{Mg}{aB}.$$

5. Обозначим минимальное расстояние между двумя точками, которое часовщик может рассмотреть с расстояния наилучшего зрения, через l. Угловой размер этого расстояния равен $\varphi_1 = l/d_0$. Под таким углом лучи от этих точек проходят через оптический центр хрусталика глаза часовщика. При использовании лупы минимальный размер равен l/N, а угловой – $\varphi_2 = (l/N)/F$, где F – фокусное расстояние лупы. Из условия равенства угловых размеров находим

$$F = \frac{d_0}{N} = \frac{25}{3}\ \text{см} \approx 8{,}3\ \text{см}.$$

Вариант 2

1. 1) $v = L\sqrt{k/m}$; 2) $T = 2(\pi + 1)\sqrt{m/k}$.

2. 1) $v = \left(3v_0 + \sqrt{9v_0^2 + 42gR}\,\big/21\right)$; 2) $L = v_0 t_0/7$.

3. $A = -\dfrac{3}{5}RT\dfrac{\Delta p}{p} \approx -12{,}5$ Дж.

4. 1) $I = \dfrac{\mathcal{E}}{r}$; 2) $Q = \dfrac{C_2^2}{C_1 + C_2}\dfrac{\mathcal{E}^2}{2}$.

5. $n = 2H/L = 10/7 \approx 1{,}43$.

Московский государственный институт электроники и математики

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $x_1 = 2$, $x_2 = (2a+1)/2$ при $a \ne -1, -1/6, 3/2, 2$; $x = -1/2$ при $a = -1$; $x = 2$ при $a = -1/6$ и $a = 3/2$; $x = 5/2$ при $a = 2$.

2. $\left(2; \dfrac{7}{3}\right) \cup (3; +\infty)$. **3.** $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

4. $18\sqrt{2}$.

5. 22 и 31. *Указание.* Пусть x и y – количества студентов в 1 и во 2 группах. Из условия следует, что

$$\begin{cases} x + y \ge 53, \\ x \ge 2(y - 21) + 1, \\ y \ge 5(x - 16) + 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Перепишем систему (1) так:

$$\begin{cases} y \ge 53 - x, \\ y \le \dfrac{x}{2} + \dfrac{41}{2}, \\ y \ge 5x - 79. \end{cases} \qquad (2)$$

Из системы (2) получаем

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{41}{2} \ge 53 - x, \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{41}{2} \ge 5x - 79, \end{cases}$$

откуда

$$21\frac{2}{3} \le x \le 22\frac{1}{9},$$

но это значит, что $x = 22$, при этом $y = 31$.

Вариант 2

1. $(3/(1-2a);\ 3/(2a-1))$ при $a \ne \pm 1/2$; $(u+3;\ u)$, $u \in \boldsymbol{R}$ при $a = -1/2$; нет решений при $a = 1/2$.

2. $\left(\left(3+\sqrt{3}\right)/3;\ 5/3\right) \cup (2;\ +\infty)$.

3. $x = (-1)^n \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{3}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $x = (-1)^{n+1}\arcsin\dfrac{1}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Уравнению удовлетворяют все корни уравнения $\sin 2x = 3/4$, а также корни уравнения

$$6\sin^2 x - \sin x - 1 = 0,$$

удовлетворяющие неравенству $\sin 2x \le \dfrac{3}{4}$.

4. $R^2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3} + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)\right)$; $\alpha = 30^\circ$.

Указание. Пусть M и N – точки касания сторон ED и CD с окружностью, O – центр окружности (рис.16). Воспользуйтесь тем, что

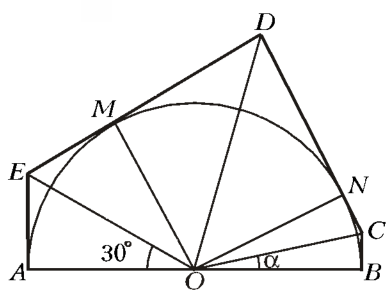


Рис. 16

$$S_{ABCDE} = 2\left(S_{OAE} + S_{OBC} + S_{OND}\right),\ \text{а}\ \angle NOD = 60^\circ - \alpha.$$

Поскольку

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) = \frac{2\sqrt{3}}{2\cos 2(\alpha - 30^\circ) + 1},$$

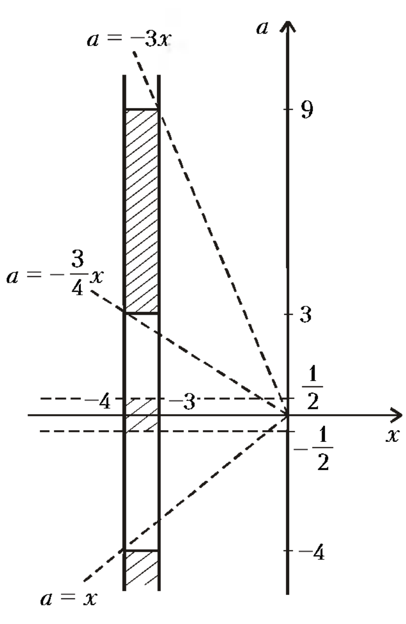


Рис. 17

наименьшее значение площади достигается при $\cos 2(\alpha - 30^\circ) = 1$, т.е. при $\alpha = 30^\circ$.

5. 1) $(-8;\ -2) \cup (0;\ 6)$; 2) $a \in (-\infty;\ -4) \cup \left(-\dfrac{1}{2};\ 0\right) \cup \left(0;\ \dfrac{1}{2}\right) \cup (3;\ 9)$.

Указание. Исходное неравенство равносильно совокупности из двух систем

$$\begin{cases} 0 < |2a| < 1, \\ 3x^2 + ax > 4a^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} |2a| > 1, \\ 0 < 3x^2 + ax < 4a^2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 0 < |a| < \dfrac{1}{2}, \\ (x-a)\left(x + \dfrac{4}{3}a\right) > 0, \\ -4 \le x \le -3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} |a| > \dfrac{1}{2}, \\ (x-a)\left(x + \dfrac{4}{3}a\right) < 0, \\ x(3x+a) > 0. \end{cases}$$

Изобразим в левой полуплоскости плоскости xOa точки $(x;\ a)$, удовлетворяющие этой совокупности, а затем найдем проекцию на ось Oa точек $(x;\ a)$, принадлежащих множеству решений при всех $-4 \le x \le -3$ (это множество показано штриховкой на рисунке 17).

ФИЗИКА

1. $\sqrt{\dfrac{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{R\sin\alpha(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}} \le \omega \le \sqrt{\dfrac{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{R\sin\alpha(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}}$.

2. $Q = 3mv^2/16$. **3.** $x = 0{,}02\cos\left(100t + \dfrac{\pi}{6}\right)$; $s = 0{,}4$ м.

4. $\rho = \dfrac{\rho_0 n}{n-1} = 2{,}7$ г/см^3, где $\rho_0 = 1$ г/см^3 – плотность воды.

5. $\eta = \dfrac{5\nu R\Delta T}{2Q} - \dfrac{2}{3} = 0{,}16 = 16\%$.

6. $Q = \dfrac{CR\left(\left(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2\right)^2 - 4\mathcal{E}_3^2\right)}{8(R+r)} = 5{,}3$ мкДж.

7. $P_{\text{тепл}} = 2I_1^2 R_1 = 180$ Вт.

8. $I = U_0\sqrt{\dfrac{C}{2L}} = 10$ мА; $I_0 = U_0\sqrt{\dfrac{C}{L}} = 14$ мА.

9. $\lambda_2 = \dfrac{n^2\lambda_{\text{кр}}\lambda_1}{\lambda_{\text{кр}} - \lambda_1\left(1 - n^2\right)} = 200$ нм.

10. $F_1 = d\Gamma/(\Gamma + 1) = 10$ см или $F_2 = d\Gamma/(\Gamma - 1) = 15$ см.

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $(-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$. *Указание.* Перейдите к логарифмам по основанию 3 и обозначьте $y = \log_3|x|$.

2. $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{4} + 3\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Воспользуйтесь формулой $\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{2}{\sin 2\varphi}$; заметьте, что область определения уравнения задается условием $\sin\dfrac{2x}{3} \ne 0$.

3. $y = 2x + \dfrac{7}{6}$, $y = 2x - \dfrac{10}{3}$. *Указание.* Угловой коэффициент касательной должен равняться 2.

4. $180\sqrt{2}$ см^2, 2160 см^3. *Указание.* Сечение – равнобедренная трапеция AB_1C_1D.

5. 270 км. *Указание.* Первое плавание продолжается на $\frac{180}{0{,}8v} - \frac{180}{v}$ часов больше, чем второе, поэтому $\frac{180}{0{,}8v} - \frac{180}{v} = 3{,}5 - 1{,}5$, откуда $v = 22{,}5$ (км/ч).

Вариант 2

1. $(0;1)\cup\left(\left(1+\sqrt{5}\right)/2;2\right)$. *Указание.* Учитывая область определения, рассмотрите два случая: $0 < x < 1$ и $1 < x < 2$.

2. $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Заметьте, что

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right).$$

3. $y = 2\sqrt{2}x + 1$, $y = -2\sqrt{2}x + 1$.

4. 60 см^2, 480 см^3. *Указание.* Сечение – прямоугольник.

5. 4 часа и 6 часов. *Указание.* Пусть V – объем бассейна, t_1 и t_2 – искомые промежутки времени. Тогда производительности труб равны V/t_1 и V/t_2, и из условия получаем

$$\begin{cases}\left(\dfrac{V}{t_1}+\dfrac{V}{t_2}\right)\cdot\dfrac{12}{5} = V,\\ \dfrac{V}{t_1}\cdot\dfrac{t_2}{4}+\dfrac{V}{t_2}\cdot\dfrac{t_1}{4} = \dfrac{13}{24}V.\end{cases}$$

Вариант 3

1. $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\operatorname{arctg}4+\pi k$, $n,\ k \in \mathbf{Z}$.

2. $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}3 = \operatorname{arcctg}3 = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. *Указание.* Угол между касательной и осью абсцисс равен $\operatorname{arctg}3$.

3. $(1/3;\ 1)$.

4. 1, –1.

5. $\sqrt{S/\pi}\left(\operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{S/\pi}\cdot\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}^2\alpha/2$. *Указание.* Пусть R – радиус основания конуса. Тогда высота конуса равна $R\operatorname{tg}\alpha$, радиус вписанного шара – $R\operatorname{tg}\alpha/2$.

Вариант 4

1. $125\sqrt{6}/16$.

2. $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $k,\ n \in \mathbf{Z}$.

3. $\left(0{,}5^8;\ 0{,}5\right)$. *Указание.* Область определения задается условием $\log_2\log_{0,5}x > 0$, откуда $\log_{0,5}x > 1$, т.е. $0 < x < 0{,}5$.

4. 0, 1.

5. 9, –16.

Задачи устного экзамена

1. *Указание.* $1\pm\sin\alpha = \left(\cos\frac{\alpha}{2}\pm\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$.

2. 1. *Указание.* Запишите данное выражение в виде

$$\operatorname{tg}20^\circ + \operatorname{tg}25^\circ + \operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}25^\circ$$

и приведите к общему знаменателю.

3. –1. *Указание.* «Сверните» выражение, записав сумму логарифмов как логарифм произведения.

4. $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Заметьте, что $\sin x \ge -1$, $|\cos x| \ge 0$.

5. $2\left(\sqrt{2}-1\right)/3\sqrt{5}$.

6. $AB = BC = 8\left(2+\sqrt{3}\right)$ дм, $AC = 8\left(3+2\sqrt{3}\right)$ дм. *Указание.* Сначала найдите BO, где O – центр вписанной окружности.

7. Боковая сторона равна 10 см, $h_{осн} = 8$ см, $h_{бок} = 9{,}6$ см. *Указание.* Пусть α – угол при основании. Найдите $\operatorname{tg}\alpha/2$, затем $\operatorname{tg}\alpha$.

8. 15 см, 20 см, 25 см. *Указание.* Найдите AC и $\angle ABC$, равный углу между перпендикулярами из условия.

9. $(-\infty;\ 2)$. *Указание.* Заметьте, что

$$x\left(\log_7 21 - 1\right) = x\log_7 3 = \log_7 3^x.$$

10. Больше нуля.

11. 10.

12. $\left(\sqrt{5}-3\right)/2$, $\left(9-\sqrt{29}\right)/2$. *Указание.* Учитывая, что $x \ge -3$, рассмотрите случаи $-3 \le x < 1$ и $x \ge 1$.

13. 2, –2/9. *Указание.* Пусть корни уравнения равны a и $4a$ ($a \ne 0$). Запишите теорему Виета и решите получившуюся систему уравнений.

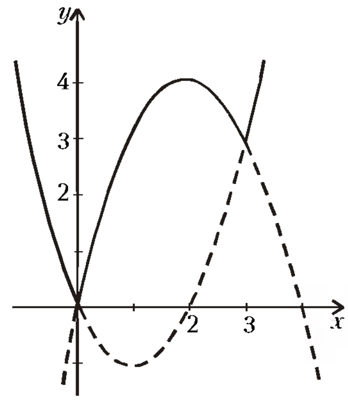


Рис. 18

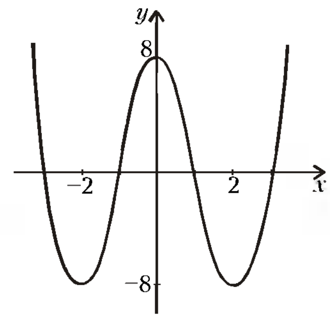


Рис. 19

14. См. рис.18.

15. См. рис.19.

ФИЗИКА

1. $h = 245$ м.	**2.** $m = 3{,}6$ кг.	**3.** $m \approx 0{,}2$ кг.
4. $A = 18$ кДж.	**5.** $I_1 = 1{,}2$ А; $I_2 = 0{,}3$ А.	
6. $Q = 1{,}8$ кДж.	**7.** $I = 10^{-5}$ А.	**8.** $n = \sqrt{3} \approx 1{,}7$.
9. $k \approx 4{,}35$.	**10.** Не возникнет.	

VIII Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Письменный индивидуальный тур

МАТЕМАТИКА

1. 322357176.

2. См. рис.20.

3. (3; 5; 7). *Указание.* Если a, b, c – искомые простые числа, то $abc = 7(a + b + c)$. Пусть, для определенности, $a = 7$. Тогда $bc = b + c + 7$, т.е. $(b - 1)(c - 1) = 8$.

4. $\frac{1}{12}S$. *Указание.* Заметим, что $S_{ABK} = \frac{1}{4}S$. Пусть P – середина отрезка LC. Тогда MP – средняя линия треугольника BLC, а KL – средняя линия треугольника AMP. Поэтому $PC = LP = AL$, т.е. $AL = \frac{1}{3}BC$, $S_{ABL} = \frac{1}{3}S$ и $S_{AKL} = S_{ABL} - S_{AKB}$.

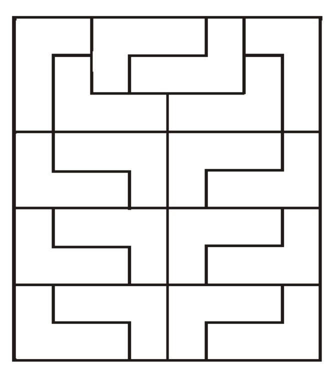


Рис. 20

5. $\left(\pm3\sqrt{2};\ -3\pm3\sqrt{2}\right)$. *Указание.* Сложите уравнения системы.
6. Нельзя. *Указание.* Масса восьми самых легких камней больше трех тонн.
7. $110°$. *Указание.* Пусть P – точка пересечения прямых DE и AB. Поскольку $AB = BP = BC$, треугольник APC – прямоугольный, а точки F и C лежат на окружности с диаметром AP. Поэтому $\angle AFC = 180° - \angle APC = 160°$, а $\angle DFC = 360° - (90° + 160°) = 110°$.

ФИЗИКА

1. $t = \sqrt{L^2 + \left(h_1 + h_2\right)^2} \Big/ v = 250$ с ≈ 4 мин. **2.** $v = \sqrt{gh}$.
3. $A_{\min} = F_0 l/2$. **4.** $F = \dfrac{\sigma q}{\varepsilon_0} - \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{(2l)^2}$.
5. $R_1 = r\left(1+\sqrt{3}\right)$; $R_2 = r\left(\sqrt{3}-1\right)$.
6. $t \approx 4\dfrac{\rho_0}{\rho_{п}}\dfrac{\lambda}{r}\dfrac{h}{v} \approx 0{,}03$ с. *Указание.* Здесь $\rho_{п} = \dfrac{p_0 M}{RT}$ – плотность насыщенного водяного пара при 0 °С, $v = \sqrt{\dfrac{3kT}{m}}$ – тепловая скорость молекул воды.
7. $\Delta R \approx \dfrac{1}{6}\dfrac{\rho_0}{\rho}R \approx 1$ см.

Устный командный тур

МАТЕМАТИКА

1. $B > A$.
2. $(P+Q)/2$.
3. Нет (оно делится на 5).
4. Равнобедренный и прямоугольный с катетами $a = b$.
5. 12600. *Указание.* Разобьем все числа от 0 до 999 на пары: (0, 999), (1, 998), ..., (499, 500). Суммы цифр каждой пары равны 27. Осталось из числа $500 \cdot 27$ вычесть сумму цифр всех чисел от 0 до 99, которая равна $50 \cdot 18$.
6. Нельзя. *Указание.* Суммы углов 14 треугольников меньше суммы углов 17-угольника.
7. Не играли. *Указание.* Каждый из двух выбывших игроков сыграл 5 партий. Общее число сыгранных ими партий равно 9, если они играли между собой, и 10, если не играли. Оставшиеся игроки в своем подтурнире сыграли либо 29, либо 28 партий.
8. Нет. *Указание.* Пусть $6n = p^6$, а $8n = q^8$, тогда $\dfrac{3}{4} = \left(\dfrac{p^3}{q^4}\right)^2$, т.е. $\sqrt{3} = 2\dfrac{p^3}{q^4}$ – рациональное число. Противоречие!
9. $A < B$. *Указание.* $A = 1 - \dfrac{1}{10} < 1$, $B = \dfrac{1}{11} + \ldots \dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{21} + \ldots$ $\ldots + \dfrac{1}{30} + \dfrac{1}{31} + \ldots + \dfrac{1}{40} > \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} > 1$.
10. $28 \cdot 15 = 420$. *Указание.* Число прямоугольников равно произведению количества пар вертикальных прямых на количество пар горизонтальных прямых.

ФИЗИКА

1. $m_2 > m_3 > m_1$.
2. Больше скорости звука в воздухе.
3. *Указание.* Эффект связан с многократными отражениями звуковой волны от стены.
4. Нет.
5. Перпендикулярно линии горизонта за горизонт.
6. $F_{\min} = 750$ Н; $\mu_{\min} = 0{,}75$.
7. Да.
8. Во внутреннюю энергию диэлектрика.
9. *Указание.* Альфа-частица отклоняется на значительный угол, если электрическая энергия ее взаимодействия с положительным ядром того же порядка, что и кинетическая энергия частицы.
10. Максимумы кривой $W(\alpha)$ расположены вблизи точек поворота маятника (где скорость минимальна), а минимумы – вблизи положений равновесия маятника (где скорость максимальна).

История научных идей и открытий

МАТЕМАТИКА

1. От древнегреческих слов (дошедших до нас через латынь), означавших столик, еловая шишка, валик.
2. $a^2 = bc$.
3. Например: π, e, 0.
4. Трисекция угла, квадратура круга, удвоение куба, построение циркулем и линейкой правильного 7-угольника.
5. Например: Монж, Лаплас, Кондорсе, Карно, Улугбек, Вышеградский, Веллис.

ФИЗИКА

1. Эрнест Резерфорд провел опыты по рассеянию α-частиц на золотых фольгах и предложил планетарную модель атома.
2. Древнегреческий ученый Клавдий Птолемей (ок. 90 – ок. 160) построил геоцентрическую картину мира.
3. Джон Адамс (Англия) и Урбен Леверье (Франция) в середине XIX века, независимо друг от друга, вычислили орбиту и положение планеты Нептун на основе исследования возмущений Урана.
4. Аристотель предполагал, что скорость тела пропорциональна действующей на него силе. Механика Аристотеля описывает установившееся движение с учетом силы вязкого трения.
4. Пусть l_1 – дальность прыжка по ветру, l_2 – против ветра, u – скорость ветра, v – горизонтальная составляющая скорости прыгуна. Тогда $l_1 = (v+u)\tau$, $l_2 = (v-u)\tau$. Длительность прыжка τ можно оценить, считая, что прыжок происходит под углом 45° к горизонту, тогда $\tau = 2v/g$.

НАПЕЧАТАНО В 1999 ГОДУ

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования
http://www.courier.com.ru

Vivos Voco!
http://www.techno.ru/vivovoco
(раздел «Из номера»)

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Ю.А.Ващенко, В.В.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, М.М.Константинова, М.А.Сумнина, В.М.Хлебникова, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

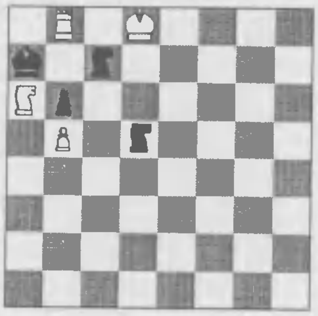
Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати 142300 г.Чехов Московской области Заказ №

КоролевскиЕ ЭТЮДЫ-II

Продолжаем наш рассказ об этюдах, составленных шахматными королями.

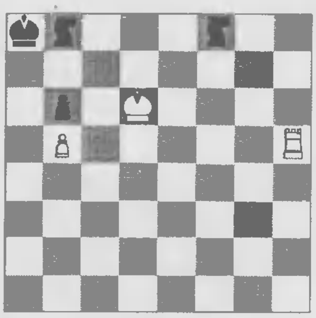


Х.Р.Капабланка – Эм.Ласкер

Берлин, 1914

1. ♘: c7 ♞:c7 2. ♖a8+!! Удивительная идея: 2. ♔:c7 вело к пату, а 2. ♔c8 ♞:b5 – к простой ничьей. **2... ♞:a8.** После 2... ♚:a8 3. ♔:c7 ♚a7 4. ♔c6 ♚a8 5. ♔:b6 пешка проходит в ферзи. **3. ♔c8! Черные сдались.** На 3... ♚a7 взятие на c7 уже решает.

Партия с таким пикантным финалом была сыграна в блиц-матче двух корифеев шахмат, но возникшая позиция, по существу, представляет собой готовый этюд и иногда приводится, как совместное произведение двух королей. А спустя двадцать лет идея Капабланки была усовершенствована.



М.Либуркин, 1934

Выигрыш

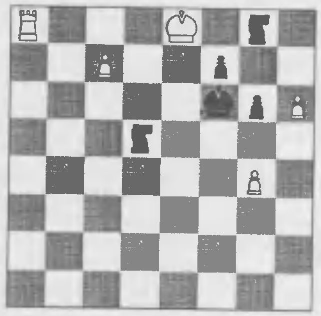
1. ♖h8 ♞fd7 2. ♔c7 ♚a7 3. ♖e8! ♞f6! 4. ♖:b8 ♞e8+! 5. ♔d7! ♞c7! 6. ♖a8+! ♞:a8 7. ♚c8 со знакомой позицией, дальше все ясно.

Итак, к знаменитому финалу композитор добавил пять ходов. Однако на этом дело не кончилось, – спустя почти полвека решение удалось еще удлинить!

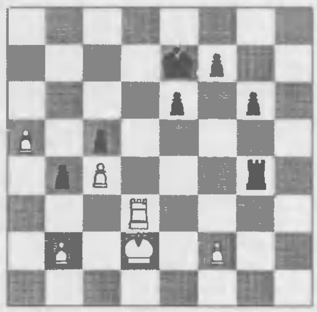
Э.Погосянц, 1981

Выигрыш

Замечательный шахматный композитор, гроссмейстер Погосянц, придумал остроумное вступление.



1. h7 ♚g7 2. h8♕+! ♚:h8 3. ♔:f7 ♞e7 4. g5 ♚h7 5. ♖d8!, и на доске позиция после третьего хода в этюде Либуркина, только в данном случае все фигуры сосредоточились на противоположном фланге.



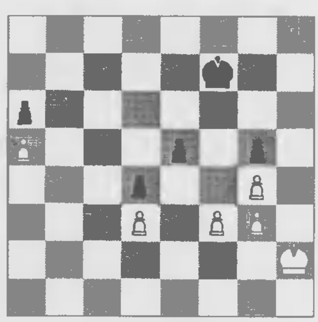
А.Алехин, 1933

Выигрыш

Подобная позиция возникла у Александра Алехина, игравшего белыми, в сеансе одновременной игры. Он ее отшлифовал, и получился забавный этюд. Решает, конечно, пешка "а", но без жертвы ладьи не обойтись...

1. a6 ♜h4. 2. ♖d8! ♚:d8 3. a7 или **1...♜g1 2. a7 ♜a1 3. ♖a3! ba 4. a8♕ ab 5. ♕b7+** и **6. ♕:b2.**

Макс Эйве часто анализировал окончания, некоторые из его находок носят этюдный характер, но составлял он и настоящие этюды.



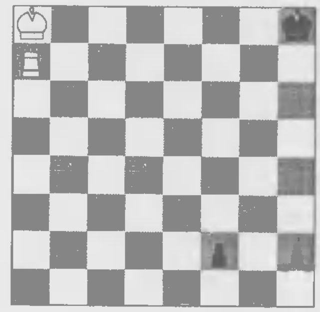
М.Эйве, 1924

Выигрыш

Пример пешечного эндшпиля на почти математическую тему – полей соответствия. В ответ на ♔b3 черный король должен занять поле c5, а после f3-f4, разменов на f4 и появления короля на f3 черный король обязан успеть на поле g5. Тонкими маневрами белые запутывают противника...

1. ♔g1! ♚g7 2. ♔f1 ♚f7. 3. ♔e1 ♚e7 4. ♔f2 ♚f6. 5. ♔e2 ♚e6. Или 5...♔g6 6. ♚d2! с прорывом на ферзевом фланге.

6. f4! ef 7. gf gf 8. ♔f3 ♚e5 9. g5 ♚f5 10. g6 ♚:g6 11. ♔:f4 с победой.



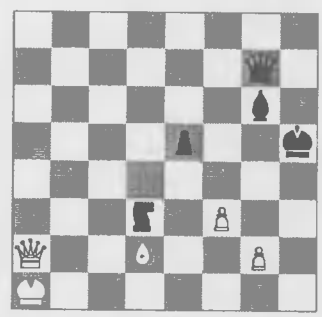
М.Эйве, 1940

Ничья

Еще один этюд Эйве, без которого не обходится ни одна книга по эндшпилю.

1. ♖a1 ♚g7 2. ♔b7 ♚f6 3. ♔c6 ♚e5 4. ♔c5 ♚e4 5. ♔c4 ♚e3. 6. ♖h1! ♚f3 7. ♔d3 ♚g2 8. ♔e2 ♚:h1 9. ♔:f2 пат.

Михаил Ботвинник внес немалый вклад в шахматную композицию. Десять составленных им этюдов весьма популярны, а свое первое этюдное произведение он опубликовал еще в 14 лет!



М.Ботвинник, С.Каминер, 1925

Выигрыш

1. g4+ ♚h4 2. ♗h6! ♛:h6 3. ♕h2+ ♚g5 4. ♕d2+ ♞f4 5. ♕d8×.

Е.Гик

Индекс 70465

МУАРОВЫЕ УЗОРЫ

В книгах по технической оптике можно встретить термин "муар" (или "муаровый узор" - "moire pattern"). Этот термин используется в быту - когда речь идет о шелковой ткани с разводами, переливающимися на свету разными оттенками (муаровый шелк). Явление муара достаточно интересно, чтобы обратить на него наше внимание.

Что такое муар, легче всего понять, если взять две одинаковые регулярные сеточки - например, кусочки ткани, которой закрывают летом открытые окна и форточки от комаров и мух, - и наложить их друг на друга.

В месте пересечения сеточек будут отчетливо видны регулярные узоры, которые называют муаром (рис.1). Существенно, что картина узоров очень "живая": при малейшем перемещении сеточек относительно друг друга муар мгновенно изменяется.

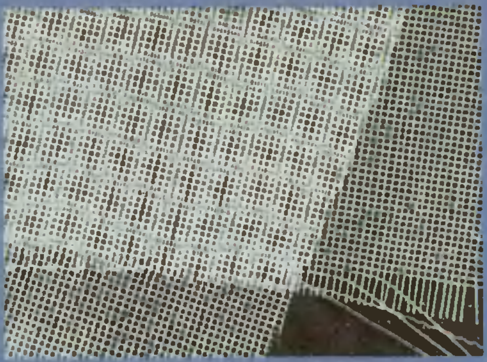
Если сеточки одномерные (т.е. если это решетки), муаровые узоры от них имеют вид полос, похожих на раскраску зебры (рис.2). Такие узоры можно наблюдать, например, проезжая мимо заслоняющих друг друга заборов из регулярных прутьев, кольев или досок.

На рисунке 3 приводятся фотографии участка одной из сеточек от электробритвы и одного из многочисленных вариантов муаровых узоров, получающихся на просвет, когда две сеточки накладываются друг на друга. (В этом опыте при фотографировании использовался фотоувеличитель, а сеточки помещались в рамку вместо негатива.)

На рисунке 4 показаны муаровые узоры, полученные с помощью скрещенных листов цветной бумаги с прорезями.

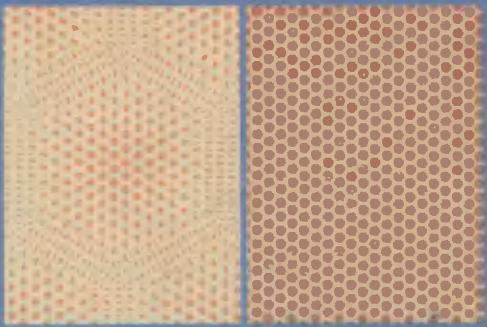
(Окончание - внутри номера в рубрике "Наша обложка".)

1.



2.

3.



4.