

КВАНТ

МАЙ
ИЮНЬ 1999

№3

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

квант
№

Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Ю.М.Брук, А.А.Варламов, А.Н.Виленин,
С.А.Гордюнин, Н.П.Долбилин,
В.Н.Дубровский, А.А.Егоров,
А.Р.Зильберман,

С.С.Кротов (*директор «Бюро Квантум»*),

А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,
В.В.Можаев, Н.Х.Розов, Ю.П.Соловьев,
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров

(*заместитель главного редактора*),

В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,
А.И.Черноуцан

(*заместитель главного редактора*),

И.Ф.Шарыгин

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Ю.А.Данилов, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,
Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев,
А.И.Шапиро

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И.Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский,
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро  Квантум

©1999, Президиум РАН,
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 Внутренние волны в океане, или Нет покоя в толще вод.
А.Ямпольский
- 6 Два этюда о расстояниях. *Е.Шикин*
- 9 О волнах, поплавах, шторме и прочем. *Е.Соколов*
- 14 Суммы квадратов и целые гауссовы числа. *В.Сендеров,*
А.Сливак

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 23 Задачи М1681–М1690, Ф1688–Ф1697
- 25 Решения задач М1661–М1665, Ф1673–Ф1682

НАМ ПИШУТ

- 30 Супермагические квадраты
- 31 Головокружительный бросок

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Центр масс

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 34 Задачи
- 35 Коварные проценты. *В.Петров*

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 36 Как гора спутник родила. *А.Стасенко*
- 39 Эта загадочная магнитная сила. *Е.Ромишевский*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 41 Осторожно: магнитное поле. *А.Черноуцан*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 44 Определение гидродинамического сопротивления. *С.Бетяев*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 46 Ловушка для треугольника. *В.Дубровский, В.Сендеров*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 50 Заряженные частицы и поля. *В.Можаев*

ОЛИМПИАДЫ

- 54 III Международная астрономическая олимпиада

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

- 56 Статфизическая трагедия
- 56 Субъективный идеализм

ИНФОРМАЦИЯ

- 57 Новый прием на заочное отделение Малого мехмата
- 57 Заочная физическая школа при физическом факультете МГУ
- 58 ЗИФМШ объявляет прием
- 59 Костромская летняя школа

- 60 Ответы, указания, решения

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье А.Ямпольского*
- II *Коллекция головоломок*
- III *Шахматная страничка*
- IV *Игрушки по физике*



Внутренние волны в океане, или Нет покоя в толще вод

А. ЯМПОЛЬСКИЙ

В БЛИЗИ ПОЛУОСТРОВА ТАЙМ-мир, небольшого островка того же названия, летом 1893 года произошел любопытный случай, которому суждено было стать толчком к интенсивному исследованию такого интереснейшего явления, как внутренние волны в океанах и морях. Работала тогда в этом районе норвежская полярная экспедиция под руководством знаменитого ученого-мороведа Фритьофа Нансена на корабле «Фрам».

Ф. Нансен (1861—1930) известен не только как выдающийся моревед и исследователь Арктики, но и как выдающийся общественный деятель. После первой мировой войны он был верховным комиссаром Лиги Наций по делам военнопленных, одним из организаторов продовольственной помощи голодающим Поволжья (1921 г.). За плодотворную общественную деятельность в 1922 году Нансену была присуждена Нобелевская премия мира.

«Фрам» (по-норвежски «вперед») — исследовательское судно, предназначенное для работы в полярных водах. Построено по специальному проекту в 1892 году. Водоизмещение около 400 т. Характерной особенностью его конструкции была яйцевидная форма корпуса, благодаря которой при сжатии во льдах «Фрам» не мог быть раздавлен, а просто выжимался вверх из ледовых объятий. После многолетних плаваний как в арктических, так и в антарктических водах «Фрам» помещен навечно в специально построенном павильоне музея в столице Норвегии Осло.

Однажды «Фрам» шел по направлению к кромке льда. Лед был далеко, погода стояла отличная, был полный штиль, шли полным ходом. Вдруг судно почти остановилось, как бы

наткнувшись на какое-то препятствие. Скорость движения резко упала. По словам самого Нансена, «чтобы пройти то небольшое расстояние, которое мы и на веслах прошли бы в полчаса или того меньше, «Фраму» понадобилась целая вахта (4 часа)». Как потом выяснилось, такая ситуация возникла благодаря тому, что над соленой морской и, естественно, более тяжелой водой оказался слой распресненной из-за таяния льда воды меньшей плотности. «Вода, взятая с поверхности, была годна даже для питья, а вода, поступавшая через кингстон, была слишком солона даже для котла» (Ф. Нансен). Причиной такой резкой переслоенности была летняя теплая штилевая погода — пресная вода от таяния льдов накапливалась, не смешиваясь, сравнительно тонким слоем на поверхности воды обычной океанской солености и плотности.

Опубликованные Нансеном материалы наблюдений послужили толчком для теоретических исследований этого вопроса. В результате удалось установить, что в такой ситуации почти вся энергия судового двигателя расходуется не на продвижение судна, а на образование волн на поверхности раздела между слоями (скорость этих волн, как показывают оценки, была сравнима со скоростью судна). Иначе говоря, в этом случае «Фрам» тащил за собой целую вереницу волн, которые, в отличие от волн на поверхности океана, называются внутренними, а обнаруженная резкая переслоенность впоследствии была названа «мертвой водой».

В Мировом океане внутренние волны встречаются не только в таких

экзотических условиях, в которых их наблюдал знаменитый норвежец Нансен. В большинстве случаев в океане нет столь резкого деления на слои различной плотности. Обычно плотность морской воды весьма плавно увеличивается с глубиной. Основным параметром, от которого зависит плотность воды на не очень большой глубине, является температура. С увеличением глубины h температура уменьшается все медленнее (градиент температуры $|dT/dh|$ становится все меньше), и на большой глубине надо учитывать сжимаемость воды, т.е. зависимость плотности от давления. Кроме того, плотность воды зависит от ее химического состава («солености»), и в некоторых случаях изменение состава с глубиной играет, наряду с изменением температуры, важную роль в образовании вертикального градиента плотности (т.е. величины dp/dh).

Простейшая схематическая модель возникновения внутренних волн выглядит следующим образом. Пусть некоторый объем воды сместился по вертикали из положения равновесия так, что его глубина изменилась на x . Будем считать, что, хотя смещение происходит плавно, температура воды в рассматриваемом объеме измениться не успевает (пренебрежем процессом теплообмена). Тогда плотность воды в смещающемся объеме можно считать неизменной (сжимаемостью воды пренебрежем). В то же время плотность окружающей воды изменилась на $\Delta\rho = \frac{d\rho}{dh} \cdot x$, где $\frac{d\rho}{dh}$ — градиент плотности в рассматриваемом месте. Значит, на сместившийся объем воды действует сила, равная измене-

нию силы Архимеда:

$$F = -\Delta\rho Vg = -\frac{d\rho}{dh} xVg.$$

Уравнение движения этого объема

$$\rho Vx'' = -\frac{d\rho}{dh} Vgx$$

представляет собой уравнение гармонических колебаний с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dh}}.$$

Если градиент плотности по каким-то причинам оказывается очень маленьким, то необходимо учитывать изменение объема сместившейся жидкости за счет изменения давления. Принято эту поправку выражать через скорость звука c в воде (которая также определяется ее сжимаемостью):

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dh} + \frac{g^2}{c^2}}.$$

(Проверьте сами, что в этой формуле все в порядке с размерностью.) Обычно второй член гораздо меньше первого, и его можно отбрасывать. Выражение для частоты ω было получено в 20-х годах почти одновременно и независимо финским геофизиком В. Вайсяля и англичанином Д. Брентом. С тех пор частота эта носит их имена.

Благодаря тому, что вертикальный градиент плотности морской воды обычно невелик (за исключением редких экзотических случаев — таких, как «мертвая вода»), малы и силы, препятствующие смещению частиц воды из положения равновесия. Именно поэтому амплитуды внутренних волн могут достигать десятков, а иногда и сотен метров. Периоды свободных внутренних волн, соответствующие значениям частот Вайсяля—Брента, могут принимать значения от нескольких минут в верхних слоях до нескольких часов в глубине. Несмотря на то, что такие огромные смещения на сотни метров за сравнительно короткое время происходят где-то в толще вод и на поверхности никаких катастроф в это время не происходит, внутренние волны с такими большими амплитудами далеко не безобидны. Вот тому пример.

11 апреля 1963 года все информационные агентства мира передали

экстренное сообщение о гибели во время испытательного рейса атомной подводной лодки ВМС США «Трешер».

«Трешер» (по-английски «молотилка») — головная из серии атомных подводных лодок ВМС США. Водоизмещение 4300 т, длина 85 м, ширина 9,6 м, предельная глубина погружения 400 м. Скорость хода в надводном положении 16 узлов (30 км/ч), в подводном — до 30 узлов (55 км/ч).

Поскольку рейс был испытательный, после ремонта в порту Портсмут, на борту помимо 16 офицеров и 96 матросов находились еще 17 инженеров и техников Портсмутских доков. Связь с «Трешером» прекратилась через два часа после начала первого испытательного погружения. Предполагаемое место гибели «Трешера» находилось недалеко от выхода из залива Мэн на глубине около 3000 м. Поиски погибшей лодки, так же, как и выяснение причин катастрофы, были организованы очень быстро и с размахом. Однако только к осени 1963 года вырисовалась одна из возможных причин катастрофы, высказанная американским океанологом К. Айзлином из Вудс-Холского океанографического института, расположенного в непосредственной близости от залива Мэн. Оказалось, что в начале апреля, за несколько дней до катастрофы, в этом районе был зарегистрирован сильный шторм, центр которого 8–10 апреля сместился на северо-восток и находился уже над заливом Св. Лаврентия. Индуцированные этим штормом внутренние волны могли к моменту гибели «Трешера» оказаться у выхода из залива Мэн (по оценкам, скорость распространения этих волн ~ 3 м/с). Анализ местных гидрометеорологических условий дает все основания предполагать, что эти внутренние волны имели амплитуду до 100 м, длину волны 1–2 км и период около 8 минут. К сожалению, во время катастрофы никаких гидрологических наблюдений не велось, и поэтому приведенные соображения носят предположительный характер. Однако можно себе представить ситуацию, что «Трешер» в какой-то момент попал на гребень подобной внутренней волны и затем за полпериода, т.е. за 4 минуты, опустился на 200 м! Непредусмотренное заранее столь быстрое погружение мог-

ло оказаться роковым для «Трешера». Точная причина катастрофы так и не была установлена.

Обычные волны на поверхности морей и океанов также можно рассматривать как внутренние волны на поверхности раздела двух сред разной плотности — воды и воздуха. В этом случае вертикальный градиент плотности очень велик, и поэтому на поверхности, к счастью, очень редки волны высотой более 10 м. Кстати, если рассматривать волны на поверхности как внутренние, то можно представить некий аналог явления «мертвой воды» и объяснить, почему скорость подводной лодки в надводном положении почти в два раза меньше, чем в подводном. В надводном положении существенная часть энергии двигателя лодки расходуется на образование волн на поверхности раздела вода — воздух, а в подводном положении в среде, где вертикальные градиенты плотности малы, возникающие при движении внутренние волны отбирают на себя меньшую часть энергии двигателя.

Следует также отметить, что интенсивные внутренние волны весьма способствуют перемешиванию вод и, тем самым, обогащению их кислородом и питательными веществами. Отсюда недалеко и до оценки перспектив рыбного промысла в данном районе.

Одним словом, важность исследований внутренних волн как для надводного, так и для подводного мореплавания очевидна. И самое главное, с нашей точки зрения, — это же очень интересно! Человек разумный должен интересоваться тем, что творится в окружающей его природе.

Оказывается, определение параметров внутренних волн по данным океанографических наблюдений сопряжено с определенными трудностями. Еще несколько лет назад ученые судили о высоте внутренних волн по показаниям прибора, регистрирующего, например, температуру воды на некоторой глубине. В этом случае изменение температуры за промежуток времени, сравнимый с периодом внутренних волн, позволяет судить об их амплитуде. В самом деле, если ΔT — упомянутая разность температур, а dT/dh — ее вертикальный градиент, то амплитуда равна

$$A = \frac{1}{2} \frac{\Delta T}{dT/dh}.$$

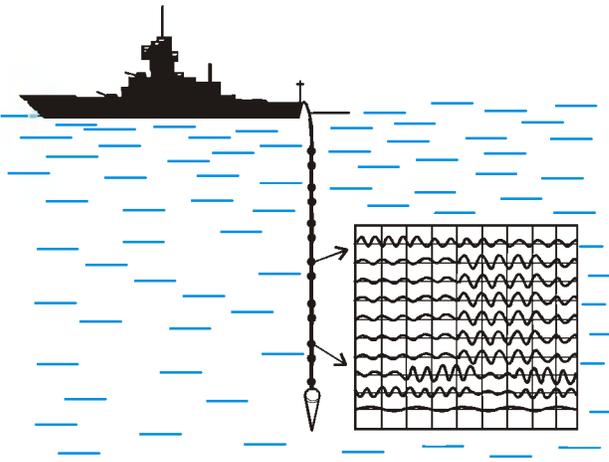


Рис. 1. Схема исследования внутренних волн с помощью одной вертикали. Кривые по врезке — покосония датчиков, по которым определяют амплитуды и периоды этих волн

По мере развития техники измерений, для определения амплитуд и периодов внутренних волн появилась возможность использовать одновременно несколько таких приборов, помещенных на одной вертикали. В настоящее время применяются многоэлементные датчики, измеряющие одновременно на разных глубинах не только саму температуру, но и ее вертикальный градиент, и химический состав воды. Сигналы от таких датчиков поступают в судовой компьютер, на дисплее которого рождаются картинки, подобные приведенной на рисунке 1.

Но по измерениям на одной вертикали нельзя судить о длине внутренних волн, скорости и направлении их распространения. Чтобы получить такие сведения, надо иметь данные измерений на нескольких вертикалях одновременно. Однако при этом следует иметь в виду, что все эти измерения выполняются в открытом океане на глубине сотен и даже тысяч метров, не всегда в штилевую погоду и часто с качающейся палубы. В таких условиях запуск даже одной измерительной вертикали — дело сложное и трудоемкое.

Интересным и, пожалуй, весьма перспективным источником сведений о внутренних волнах являются так называемые поплавки нейтральной плавучести. Такой поплавок представляет собой довольно внушительное сооружение, которое, будучи уравновешенным в некотором слое заданной плотности, остается в нем длительное время и совершает вместе с ним колебания в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Пе-

риодически такой поплавок «сообщает» о своем положении в пространстве. Обработка этих сообщений позволяет судить о параметрах внутренних волн в районе движения поплавка.

Из самых общих соображений можно представить, что такие волны в толще вод должны вызывать и какие-то эффекты на поверхности. Современные оптические методы исследования поверхностных явлений подтверждают существование таких эффектов. Было обнаружено, например, что при не очень сильном ветре характеристики поверхностных волн над гребнями и ложбинами внутренних волн могут различаться. Схематически влияние внутренних волн на поверхностные можно представить себе так, как изображено на рисунке 2: в верхней части гребня внутренней волны скорость воды направлена по движению волны, а в ложбине — в противоположном направлении.¹ Стало быть, на поверхностные волны над гребнем внутренней волны и над ее ложбиной действуют противоположные по направлению течения.

Для иллюстрации рассмотрим случай, когда поверхностные и внутренние волны бегут навстречу друг другу. Тогда на волны, которые оказались над ложбиной, действует попутное течение, а на волны над гребнем — встречное. Попутное течение «растягивает» волны, и они становятся

более длинными и более пологими, в то время как встречное течение «сжимает» их, и они становятся короче и круче. Следует отметить, что при определенном соотношении между скоростями встречного течения и волн последние могут совсем остановиться или даже отразиться, как от препятствия. Участки поверхности океана, где высоты и периоды волн изменились под влиянием внутренних волн, могут существенно отличаться по внешнему виду от окружающей акватории. При определенных условиях такие зоны с измененными параметрами поверхностных волн прекрасно видны сверху с самолета или даже из космоса.

В настоящее время океанологи разных стран продолжают интенсивные

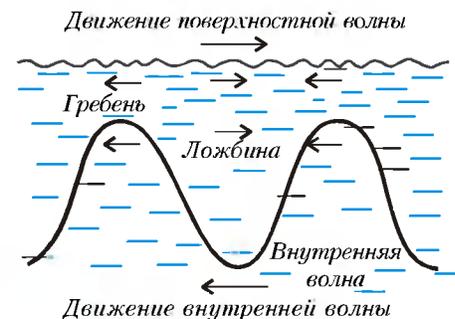


Рис. 2. Влияние внутренних волн на поверхностные. Когда они бегут навстречу друг другу, поверхностные волны, оказавшиеся над гребнем внутренней волны, «сжимаются», а над ее ложбиной — «растягиваются»

как теоретические, так и натурные исследования внутренних волн. Есть все основания полагать, что исследования эти приведут к открытию новых интересных особенностей внутренних волн и к дальнейшему прогрессу этой важнейшей ветви океанологии.

¹ О движении воды в различных точках волны можно прочитать, например, в статье И. Воробьева «Океанская зыбь» («Квант» №9 за 1992 г.). (Прим.ред.)

Два этюда о расстояниях

Е. ШИКИН

В ОСНОВУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАССТОЯНИЯ положены три свойства — положительная определенность, симметричность и неравенство треугольника, которые с житейской точки зрения выглядят совершенно естественными. В самом деле, разве возникают сомнения в том, что расстояние между двумя различными пунктами должно характеризоваться положительным числом, не зависящим от того, из какого из этих пунктов ведется отсчет и как часто, срезая углы, мы пользуемся тропинками («народными тропами»), протоптанными ранее другими нетерпеливыми пешеходами (рис.1)?

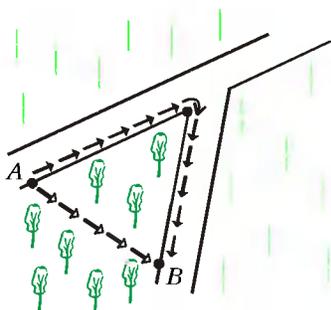


Рис. 1

Само понятие расстояния вводится в два этапа.

Сначала формулируется правило.

Говорят, что на множестве X введено расстояние, если указан закон, согласно которому любым двум элементам A и B этого множества ставится в соответствие число (будем обозначать его $\text{dist}(A, B)$), и выполнены следующие условия:

1) *положительная определенность*:

$$\text{dist}(A, B) \geq 0,$$

причем равенство $\text{dist}(A, B) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда элементы A и B совпадают;

2) *симметричность*:

$$\text{dist}(A, B) = \text{dist}(B, A)$$

для любых элементов A и B ;

3) *неравенство треугольника*:

$$\text{dist}(A, C) \leq \text{dist}(A, B) + \text{dist}(B, C)$$

для любых элементов A , B и C рассматриваемого множества.

Число $\text{dist}(A, B)$ называется *расстоянием между элементами A и B* .

Обычно мы встречаемся с ситуацией, когда способ вычисления расстояний задан (уже кем-то придуман). Но как поступать в случае, когда подобного правила еще нет?

В принципе существует универсальный способ введения расстояния на любом множестве, вне зависимости от природы его элементов. Достаточно положить расстояние между разными элементами множества равным единице:

$$\text{dist}(A, B) = 1 \text{ при } A \neq B,$$

а между совпадающими — нулю:

$$\text{dist}(A, B) = 0 \text{ при } A = B.$$

Нетрудно убедиться в том, что все три условия определения выполнены, причем неравенство треугольника всегда будет строгим (за исключением тривиального случая, когда среди элементов A , B и C есть совпадающие).

Вместе с тем, предложенное правило лишено привычного нам свойства, которое позволяло бы сравнивать расстояния, пользуясь словами *больше* и *меньше*, — расстояние между любыми двумя различными элементами оказывается всегда одним и тем же.

Существуют, разумеется, и другие правила исчисления расстояний. Наиболее распространенные опираются на использование *единицы измерения*, или *эталона длины*. Однако и здесь часто приходится сталкиваться с расстояниями, наделенными иными, иногда довольно неожиданными свойствами.

Проиллюстрируем сказанное.

Этюд первый: внутренняя геометрия бумажного листа

Обычный лист бумаги имеет форму прямоугольника (рис.2). Пусть A и B — противоположные вершины. Как

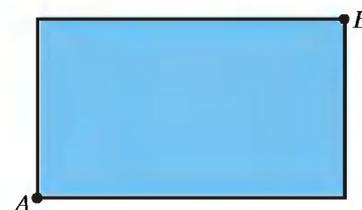


Рис. 2

вычисляется расстояние между ними? Да очень просто — точки A и B соединяются отрезком и измеряется его длина (рис.3). Это и будет искомым расстоянием.

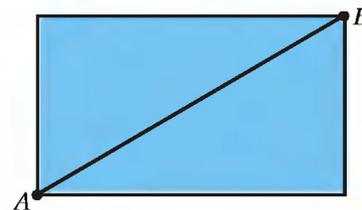


Рис. 3

Теперь немного изогнем лист. Например, так, как это показано на рисунке 4. И вновь поставим тот же

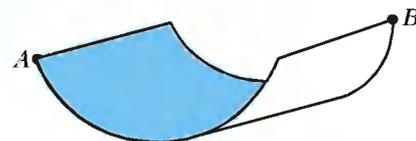


Рис. 4

вопрос: как вычислить расстояние между точками A и B ? Кажется, тоже

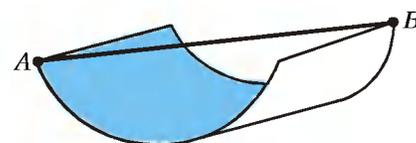


Рис. 5

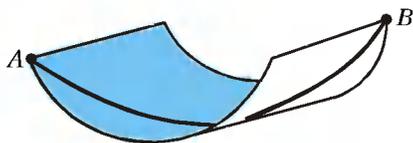


Рис.6

очень просто: соединим точки A и B отрезком и измерим его длину (рис.5). Рассмотрим, однако, тот же изогнутый лист, но на этот раз с прочерченной на нем диагональю AB (рис.6), длина которой (при деформации листа она не изменилась) определяла ранее расстояние между точками A и B . Она определяет его и теперь.

Итак, расстояние между точками A и B на изогнутом бумажном листе можно вычислять по-разному, причем, как нетрудно заметить, расстояние между точками A и B , вычисленное описанными способами, приводит к разным результатам (ясно, что длина отрезка AB на рисунке 5 меньше длины диагонали AB на рисунке 6).

Изгибая бумажный лист чуть сильнее, мы легко убеждаемся в том, что длина отрезка AB становится меньше (рис.7), в то время как длина изогнутой диагонали остается неизменной.

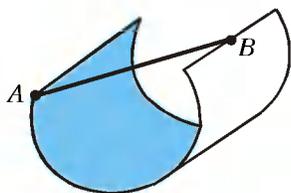


Рис.7

Теперь представим себе, что мы находимся на краю оврага в точке A и хотим попасть на другой его край – в точку B . Выбранный путь будет зависеть от наших возможностей – если мы умеем перемещаться по воздуху (как муха), то это отрезок AB , если нет (как муравей) – то это искривленная диагональ (рис.8). Каждый из двух этих путей будет кратчайшим, но в первом случае самый короткий путь ищется среди всех

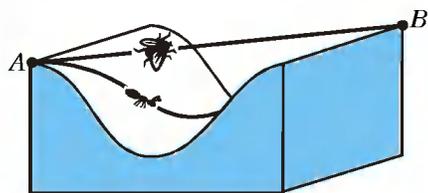


Рис.8

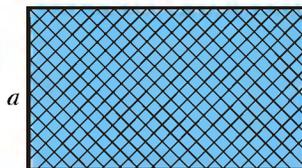


Рис.9

возможных путей, соединяющих точки A и B , а во втором – среди всех путей, соединяющих точки A и B и проходящих по дну оврага.

Таким образом, если разрешено перемещение только по листу бумаги, то кратчайшим путем всегда будет искривленная диагональ (с неизменной длиной), а если никаких ограничений нет и допускается перемещение вне изогнутого листа, то кратчайшим окажется прямолинейный отрезок переменной длины.

И мы можем сделать следующий важный вывод: точки бумажного листа связаны числовыми характеристиками, которые не зависят от того, как именно этот лист располагается в пространстве.

Заметим также, что при любых деформациях листа (без растяжений и разрывов) неизменна и его площадь – она всегда остается равной ab (рис.9).

Возможное ощущение неожиданности сделанного вывода, если оно и появилось, может быстро исчезнуть, если рассмотреть следующую ситуацию. В помещении, имеющем форму, изображенную на рисунке 10, требуется указать самый короткий путь от окна C к окну D . Стены не позволяют идти напролом, и поэтому искомым маршрут будет складываться из трех прямолинейных отрезков CE , EF и FD . (Вместо стен может быть просто проведенная на земле линия, переступать которую запрещено.) Таким образом, оставаясь внутри помещения и решая поставленную задачу, мы получаем один результат, а имея возможность выходить вовне – другой.

Тем самым, можно говорить и о внутренней геометрии путей (путей с

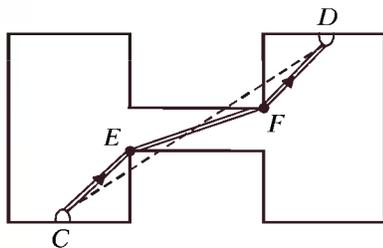
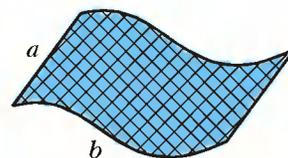


Рис.10



ограничениями), и о внешней геометрии путей (путей без ограничений), и эти две геометрии оказываются разными.

В качестве примера рассмотрим куб со стороной, равной 1 (рис.11). Расстояние между его противоположными вершинами A и B равно $\sqrt{3}$ – длине диагонали куба AB . Если же вычислять расстояние между этими

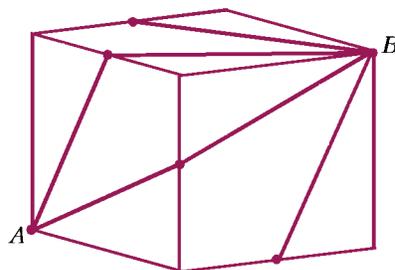


Рис.11

точками, не уходя с поверхности куба, то оно окажется равным

$$2\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{5},$$

причем путей такой длины будет целых шесть.

Этюд второй: расстояние в один фарсах

Вспомним, как начинается «Песнь о вещем Олеге» [1] –

Как ныне собирается вещий Олег

Отмстить неразумным хазарам:

Их села и нивы за буйный набег

Обрек он мечам и пожарам...

Название «хазары» было известно уже первому русскому летописцу, автору «Повести временных лет», и с тех пор упоминалось в русской исторической литературе неоднократно. Огромное количество сведений о хазарском народе, иногда совпадающих, а иногда исключаящих одно другое, оставили и другие соседи. Но документом, дающим самые исчерпывающие сведения о хазарах, является письмо хазарского царя Иосифа в Испанию к сановнику халифа Абдрахмана III – Хасдаи ибн Шафруту, написанное в середине X века.



В этом письме Иосиф сообщает, в частности, расстояния от своей столицы до границ хазарского царства: на восток до Гирканского (Каспийского) моря – 20 фарсахов, на юг до реки Уг-ру (Терек) – 30 фарсахов, на север до реки Бузан (Дон) и «до склона нашей реки к морю Гирканскому» (т.е. до сближения излучин Дона и Волги в современном месте Волго-Донского канала) – 20 фарсахов.

Казалось бы, пользуясь этим описанием, найти место, где когда-то располагалась столица Хазарского каганата, обширный и многолюдный Итиль, дело простое. Достаточно перевести фарсахи в километры и провести несложные геометрические построения.

Тридцать семь лет назад вышел капитальный труд по истории хазар [2], где можно прочесть, какие победы одерживали хазары и какие терпели поражения, но нельзя получить удовлетворительного представления о том, где они жили, где были расположены те «села и нивы», каковы были их быт и культура. Оценивая территорию Хазарского каганата в междуречье Волги, Дона и Терека, М.И.Артамонов отмечает, что до сих пор точно не установлено местонахождение главнейших городов хазар, неизвестны их вещественные остатки.

Действительно, к моменту написания этой книги никто из историков не знал, в каком именно месте в низовьях Волги находилась столица Хазарского каганата Итиль. Общепринятая величина фарсаха – 5,5 км – противоречила всем расчетам. Гео-

метрические построения, основанные на этом эталоне, приводили в места столь скудными археологическими находками, что становилось ясно – нужно внести в методику поиска существенные изменения. Задача казалась неразрешимой.

Конечно, можно попытаться объяснить неудачи ученых тем, что в X веке картография находилась в весьма зачаточном состоянии. Но не будем торопиться с выводами, а возьмем современный географический атлас и откроем его на карте Европейской части России.

Если поставить одну ножку циркуля в центр Москвы, вторую – в Вышний Волочёк и провести через него окружность радиусом, равным раствору циркуля, то эта окружность пройдет через Ярославль, Иваново и Касимов. По раствору циркуля и масштабу карты несложно определить расстояние до каждого из этих городов. Оно, разумеется, будет одним и тем же. Вместе с тем, время, необходимое для того, чтобы попасть из Москвы в каждый из городов, потребует разное – как сложатся обстоятельства. Значит, если измерять расстояние временными затратами, то результаты окажутся совсем иными.

Итак, расстояния можно измерять разными способами. Разными будут и результаты, и свойства самих расстояний. Вооружившись этими полезными наблюдениями, вновь вернемся к проблеме отыскания Итиля.

Все говорило о необходимости обратиться с эталоном длины. Это и было сделано М.И.Артамоновым и Л.Н.Гумилевым. В книге [3] об этом

написано довольно подробно и увлекательно. Фарсах оказался довольно своеобразной единицей измерения расстояния – он был мерой не длины, а усилий, которые человек должен был затратить, чтобы достигнуть цели. А это означало, что длина фарсаха зависела и от рельефа местности, и от направления перемещения. Иными словами, для фарсаха привычное свойство симметричности расстояния,

$$\text{dist}(A, B) = \text{dist}(B, A),$$

явно нарушалось.

Длина фарсаха (5,5 км) была высчитана европейцами в условиях пересеченного Иранского плоскогорья. Ясно, что в ровных, как стол, прикаспийских степях она должна быть значительно больше. Исследователи остановились на 10 км. После соответствующих сопоставлений, геометрических расчетов и построений, опирающихся на новую длину фарсаха, место расположения Итиля было рассчитано с достаточной точностью. Последовавшие затем экспедиции подтвердили результаты расчетов – столица Хазарского каганата была найдена.

Кстати, современным аналогом фарсаха, обладающим весьма похожими свойствами, является таджикский чакрым. Если идти в гору или по болоту – чакрым короткий, если с горы или по хорошей дороге – длинный.

В жизни мы часто сталкиваемся с весьма разными «расстояниями», в которых нарушается подчас не только симметричность. Бывает, что и эталоны длины, называемые одним и тем же словом, оказываются далеко не одинаковыми – в разное время и в разных местах Руси под саженью понималась мера длины от 152 до 213 сантиметров (правда, мерой усилий сажень уже не была).

Литература

1. Пушкин А.С. Собрание сочинений в десяти томах. Т.1. – М.: Правда, 1981.
2. Артамонов М.И. История хазар. – Л.: Труды Гос. Эрмитажа. 1962.
3. Гумилев Л.Н. Открытие Хазарии. – М.: ДИ-ДИК, 1996.

О волнах, поплавках, шторме и прочем

Е. СОКОЛОВ

О ВОЛНАХ НА ВОДЕ НА СТРАНИЦАХ журнала «Квант» рассказывалось уже не раз. Но тема эта неисчерпаема. Вглядываясь в ряды волн, бегущих по бушующему морю, или в рябь на поверхности тихой речушки, невольно поражаешься изменчивости и многообразию возникающих картин. И тем заманчивее становится желание найти скрытые закономерности, управляющие таким движением.

В этой статье мы обсудим три явления, связанные с кинематикой распространения гравитационных волн по поверхности воды. В дни летнего досуга вы можете исследовать их экспериментально. Инвентарь для этого вам понадобится нехитрый: поплавок, часы да пригоршня камней.

Цуг волн

Эта история произошла на рыбалке. Клева не было, и, дожидаясь лучших времен, я принялся подсчитывать число волн, время от времени поднимающих поплавок. Однако через некоторое время мое душевное равновесие было нарушено. Подсчет не сошелся. Волны упорно отказывались подчиняться обычной арифметике. В чем дело? Что произошло? Попробуем разобраться.

Для начала обсудим такой простой вопрос:

По спокойной поверхности водоема бежит группа волн, состоящая из 20 горбиков (рис.1). (Другие научные названия такого образования: *цуг волн*, *волновой пакет*.) Сколько раз поплавок поднимется вверх?

Обычно здесь все солидарны – 20 раз. Правда, иногда осторожные люди дают более уклончивый ответ: ну, может быть, 19 или 21. Но при этом все мы ошибаемся и ошибаемся существенно. На самом деле двадцать горбиков поднимают поплавок сорок раз, пятьдесят горбиков – сто раз, сто – двести раз!

Это настолько непривычно, что однажды один из слушателей, для того чтобы доказать нелепость такого ответа, специально изготовил из бумаги модель цуга (рис.2,а) и предложил всем желающим непосредственно «руками» проверить, сколько раз поднимется поплавок за время прохождения цуга мимо неподвижного наблюдателя. На бумаге получилось 20, но на воде всегда получается ровно в два раза больше. В чем же ошибка?



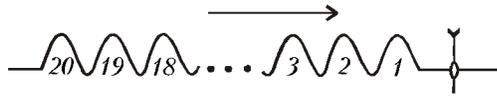


Рис. 1

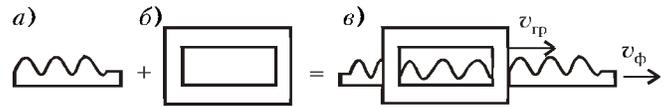


Рис. 2

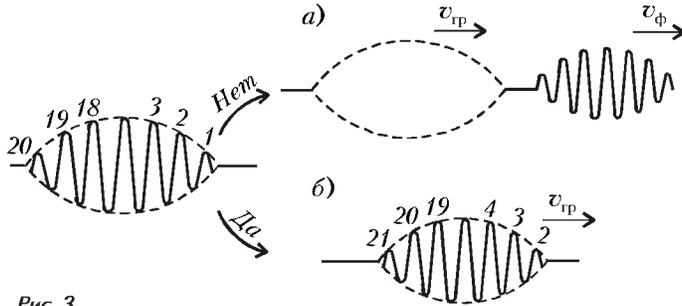


Рис. 3

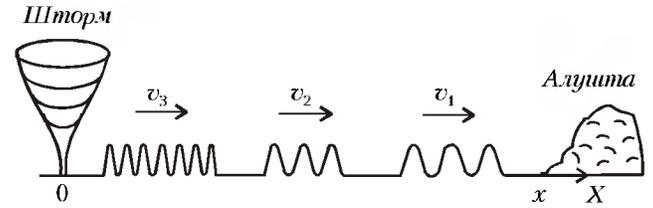


Рис. 4

Оказывается, чтобы правильно произвести подсчет в модельном эксперименте, его следовало бы проводить несколько иначе. Вместе с моделью волны надо еще изготовить экран с прорезью (рис.2,б), в которую помещается ровно 20 горбиков. И показывать их надо вместе, только двигать с разными скоростями (рис.2,в). Дело в том, что при анализе движения волновых пакетов следует пользоваться двумя правилами.

Во-первых, волновой пакет – это симбиоз двух объектов: плавной *огibaющей* и быстроменяющейся *наполняющей*. Во-вторых, у каждого типа волн не одна, а две скорости. Первая (именно о ней мы обычно говорим как о скорости движения волны) – это фазовая скорость волны v_ϕ , т.е. скорость, с которой движется наполняющая, в нашем случае – горбики. Вторая – это групповая скорость волны $v_{гр}$, с которой движется огибающая, в нашем примере – экран. Фазовая и групповая скорости связаны между собой соотношением

$$v_{гр} = \frac{d}{dk}(kv_\phi),$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число волны. Мы будем пользоваться именно этим числом, а не длиной волны λ , так как это существенно упрощает математические записи. Отметим важную особенность приведенного соотношения. Если v_ϕ не зависит от k , то $v_{гр} = v_\phi$. Эти скорости различны только в том случае, если v_ϕ зависит от длины волны, т.е. если волны обладают *дисперсией*.

Предвидя возможные возражения, давайте сразу же обсудим эти правила. Первое вряд ли вызовет сомнения. С точки зрения математики,

профиль волнового пакета $h(x)$ представляет собой произведение двух функций: гладкой функции $F(x)$ – огибающей и бесконечной гармонической волны – наполняющей:

$$h(x) = F(x)\cos(kx).$$

Что касается второго правила, то здесь могут возникнуть вопросы. Например, такие. Разве могут облочка и содержимое двигаться с разными скоростями, и как же тогда назвать то, что получится спустя некоторое время? Оказывается, могут. Только происходит это движение не так, как показано на рисунке 3,а, а иначе. Горбик не обгоняет огибающую. Просто доходя до переднего фронта, он исчезает, а ему на смену на заднем фронте рождается новый (рис.3, б). Стать первым, чтобы исчезнуть, – вот кредо каждого горбика.

А как получить формулу, связывающую групповую и фазовую скорости? Здесь достаточно ограничиться лишь пояснением. Рассмотрим простой «суррогат» волнового пакета – две волны, имеющие частоты $\omega + \Delta\omega/2$ и $\omega - \Delta\omega/2$ и волновые числа $k + \Delta k/2$ и $k - \Delta k/2$ соответственно. Их сумма равна

$$\begin{aligned} & A \cos\left(\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(k + \frac{\Delta k}{2}\right)x\right) + \\ & + A \cos\left(\left(\omega - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(k - \frac{\Delta k}{2}\right)x\right) = \\ & = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \cos(\omega t - kx). \end{aligned}$$

Видно, что основная волна – с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$ и скоростью $v_\phi = \omega/k$ – модулируется огибающей в виде волны с длиной волны $\lambda =$

$$= 2\pi/\Delta k \text{ и скоростью } v_{гр} = \Delta\omega/\Delta k = \Delta(v_\phi k)/\Delta k.$$

Теперь нам по силам объяснить, почему число подъемов поплавка равно в два раза больше числа горбиков. Причина – в особом законе дисперсии для гравитационных волн, который мы примем без доказательства¹:

$$v_\phi = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}} = \sqrt{\frac{g}{k}}.$$

Вычислим групповую скорость:

$$v_{гр} = \frac{d}{dk}\sqrt{gk} = \frac{1}{2}v_\phi.$$

Это и есть ключ к отгадке! Групповая скорость для гравитационных волн ровно в два раза меньше, чем фазовая. За время, пока волновой пакет пройдет мимо точки наблюдения (поплавка), успеет родиться еще ровно столько же гребней, сколько содержится в волновом пакете. И на каждом из этих гребней поднимется поплавок.

Вернемся к модельному эксперименту. Будем двигать и огибающую и наполняющую, только скорость наполняющей установим в два раза большей скорости огибающей. Проверим, сколько раз поднимется поплавок. Все правильно – ровно 40 раз!

Шторм

Попробуем свои силы на более масштабной задаче:

¹ Можно получить этот закон с помощью метода размерностей. Действительно, скорость гравитационных волн v (размерность м/с) может зависеть только от плотности ρ (кг/м³), ускорения свободного падения g (м/с²) и длины волны λ (м). Единственно возможный вариант: $v \sim \sqrt{g\lambda}$. (Прим. ред.)

20 июля 1996 года в 9 часов утра на южном побережье Крыма в районе Алушты было спокойно – полный штиль. Но о берег с завидной регулярностью бились волны. Период ударов не составляло труда измерить – он оказался равным 5,0 с. 21 июля в тот же час и в том же месте по-прежнему был штиль, но по-прежнему на море было волнение. Однако период ударов волн был уже другой – 3,3 с. Надо определить, когда и на каком расстоянии от берега разыгрался шторм.

Выберем в качестве рабочей модели следующую. В некоторой области Черного моря в некоторый неизвестный пока момент времени разыгрался шторм. Шторм – это ветер, шум, брызги и, конечно, рождение волн. Волны разбегаются в разные стороны и через некоторое время достигают берега. Вот почему даже в штиль море может быть беспокойным.

Теперь проведем расчет. Поместим начало координат в эпицентр шторма (рис.4). Тогда в точку с координатой x к моменту времени t придет группа волн, у которых групповая скорость равна x/t :

$$v_{гр} = \frac{1}{2} v_{\phi} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{x}{t}.$$

Отсюда легко определить волновой вектор и период пришедших волн:

$$k = \frac{gt^2}{4x^2},$$

$$T = \frac{\lambda}{v_{\phi}} = \frac{2\pi}{k} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{4\pi x}{gt}.$$

Видно, что период пришедших волн уменьшается с течением времени (рис.5, а). Это легко объяснить. Длинные волны имеют большую скорость, поэтому приходят раньше. Но у них и период больший:

$$T = \frac{\lambda}{v_{\phi}} = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}.$$

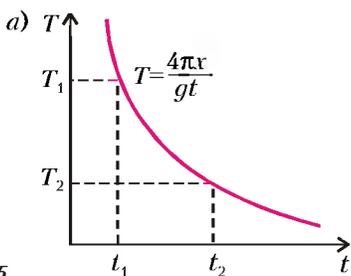


Рис. 5

Для вычисления расстояния до эпицентра и времени начала шторма удобно построить график зависимости частоты $\nu = 1/T$ приходящих волн от времени (рис.5, б). С его помощью, используя данные нашей задачи, легко получить

$$t = \Delta t \frac{\nu_1}{\nu_2 - \nu_1} = \Delta t \frac{T_2}{T_1 - T_2} = 24 \text{ ч} \frac{3,3 \text{ с}}{5 \text{ с} - 3,3 \text{ с}} \approx 47 \text{ ч},$$

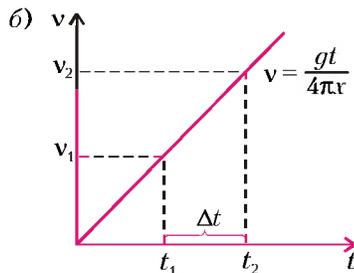
$$x = \frac{g}{4\pi} \frac{\Delta t}{\nu_2 - \nu_1} = \frac{g}{4\pi} \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \Delta t \approx 650 \text{ км}.$$

Итак, шторм разыгрался в 650 км от берега утром 18 июля 1996 года.

Глядя на эти цифры, невольно задумываешься: а реально ли, что волны проходят по морю такой громадный путь и не затухают за счет вязкого трения? Оказывается, вполне реально. Убедиться в этом можно, оценив по размерности время затухания волн за счет вязкости. Попробуйте сделать это самостоятельно, а мы возьмем из справочника готовую формулу, которая отличается от полученной по размерности лишь постоянным множителем:

$$t = \frac{\lambda^2 \rho}{8\pi^2 \eta}$$

(здесь $\eta = 10^{-3}$ кг/(м·с) – коэффициент вязкости воды), и сделаем вычисления. Подсчет показывает, что уже для обычных волн, бороздящих наши пруды и реки ($\lambda \sim 1$ м), время затухания достаточно велико – порядка 3 часов, а для морских волн ($\lambda \sim 10 - 100$ м) оно в сотни и тысячи раз больше. Поэтому для длинных волн затухание за счет вязкости совершенно несущественно. Оно определяет лишь эволюцию коротких капиллярных волн ($\lambda \sim 1$ см).



Резонанс

«Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые; иначе такое бросание будет пустою забавою». Воспользуемся и мы советом Козьмы Пруткова и кинем в воду, через равные промежутки времени, сорок камешков. Сколько волн побежит при этом?

Математик скажет – задача некорректна. И будет прав. Но давайте подойдем к этому вопросу без излишней математической строгости и попробуем сначала получить ответ экспериментально. Правда, опыт лучше провести не на пруду, а в длинном, узком и прямом канале – в этом случае движение волн одномерное, и наблюдать их можно гораздо дольше. Результат эксперимента таков: через некоторое время из образовавшегося на поверхности воды хаоса выделится движущийся волновой пакет, состоящий из двадцати волн.

Итак, ответ у поставленного вопроса есть. Теперь попытаемся получить его теоретически.

Для этого надо знать один простой секрет – когда камень падает в воду, он порождает бесконечное количество гармонических волн. «Как же так, – скажете вы, – он просто изменяет профиль поверхности $h(x)$, делая его похожим на параболу». Оказывается, это одно и то же.

Основой такого утверждения является знаменитая *теорема Фурье*, согласно которой любая четная функция $h(x)$ (для наших целей достаточно рассматривать лишь четные функции) может быть представлена как сумма бесконечного количества косинусов (разложена в ряд Фурье):

$$h(x) = \int_0^{\infty} a(k) \cos(kx) dk.$$

Человеку, который первый раз знакомится с теоремой Фурье, она кажется неправдоподобной – косинус совершенно непохож на всем привычную параболу. Но все же она справедлива. Попробуйте построить на экране компьютера функцию, заданную рядом

$$h(x) = -\cos \pi x + \frac{1}{2^2} \cos 2\pi x - \frac{1}{3^2} \cos 3\pi x + \dots$$

на интервале $-1 < x < 1$. Складываем косинусы, а получаем... параболу!

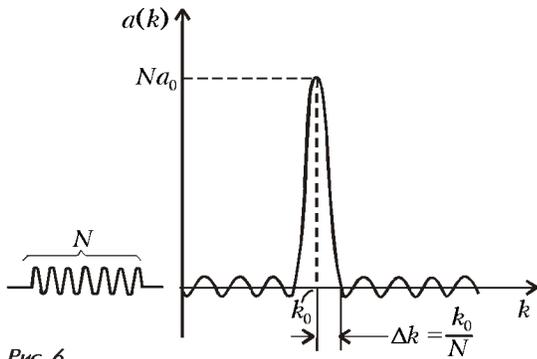


Рис. 6

Коэффициенты $a(k)$ определяют «вес» каждой гармоники в разложении. Для каждого профиля поверхности $h(x)$ их можно определить с помощью интегрирования:

$$a(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cos(kx) dx.$$

Если вы умеете интегрировать, можете проверить сами, если нет – поверьте на слово.

Отметим необычные свойства спектра, которым обладает волновой пакет. Если на поверхности волновой пакет и может затеряться, то в спектре его присутствие видно сразу (рис.6). Волновому пакету с наполняющей, имеющей волновое число k_0 , и состоящему из N элементарных волн, соответствует пик при $k = k_0$. Высота пика прямо пропорциональна N , а его полуширина, что особенно важно для нас, равна $\Delta k = k_0 / N$. (Проверьте это сами, выбрав любую простую огибающую.)

Теорема Фурье дает нам в руки мощное оружие. Теперь решение любой задачи, в которой речь идет об искажении поверхности воды, мы можем начинать стандартными словами: в результате удара произошло рождение бесконечного количества гармонических волн. Именно так мы и поступим.

Итак, в результате удара камня о воду произошло рождение бесконечного количества гармонических волн. Каждая волна начинает свою собственную жизнь. А жизнь гармонической волны проста – она равномерно движется со своей фазовой скоростью. Поэтому спустя время t гармоника, дававшая в начальное разложение вклад $a(k) \cos(kx)$, будет давать вклад

$$\frac{1}{2} a(k) \cos(k(x + vt)) + \frac{1}{2} a(k) \cos(k(x - vt))$$

– для простоты мы будем говорить лишь об одномерной волне, которая бежит вправо и влево. Для нахождения результирующего профиля следует сложить вклады всех гармоник:

$$h(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} a(k) \cos(k(x + vt)) dk + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} a(k) \cos(k(x - vt)) dk.$$

Теперь вернемся к нашей задаче о камнях. Будем считать, что мы кинули $n = 40$ камней, бросая их через одинаковые промежутки времени τ . Начало решения нам известно. Первый камень упал, создал бесконечно много волн, волны стали двигаться. Второй камень упал... и т.д. Осталось сложить все гармоники от каждого удара с учетом их сдвигов.

Вместо того чтобы приступить к лобовому штурму, посмотрим на суммарный вклад одинаковых гармоник от разных ударов. Для определенности будем считать, что наблюдение мы проводим слева от места падения камней (рядом с ним), поэтому рассмотрим гармоники, бегущие влево. Их общий вклад сразу после послед-

него удара равен

$$\frac{1}{2} a(k) \cos kx + \frac{1}{2} a(k) \cos k(x + v_\phi \tau) + \dots + \frac{1}{2} a(k) \cos k(x + (n-1)v_\phi \tau),$$

или

$$\frac{1}{2} a(k) (\cos(kx) + \cos(kx + \phi) + \dots + \cos(kx + (n-1)\phi)),$$

где $\phi(k) = kv_\phi(k)\tau = \sqrt{kg}\tau$. Сумма косинусов, стоящая в скобках, хорошо известна – она связана и с дифракционными решетками, и с правильными n -угольниками, и с функцией-«гребенкой», изображенной на рисунке 7,а. Но давайте обо всем по порядку.

Как подойти к вычислению такой суммы? Очень просто. Надо от сложения косинусов перейти к более сложной задаче – сложению векторов. Посмотрите на n единичных векторов, изображенных на рисунке 8,а. Если мы построим их сумму, то найдем и интересующую нас сумму косинусов – она будет равна проекции суммарного вектора на ось X . Искомая сумма будет снова косинусом, умноженным на длину суммарного вектора $A(\phi)$:

$$A(\phi) \cos\left(kx + \frac{n-1}{2}\phi\right).$$

Амплитуду $A(\phi)$ можно определить из рисунка 8,б, на котором мы изобразили эти же векторы приложенными друг к другу. Вычисление оставляем вам в качестве упражнения, а здесь дадим лишь ответ:

$$A(\phi) = \frac{\sin \frac{n}{2}\phi}{\sin \frac{\phi}{2}}.$$

Функция-«гребенка» и есть график

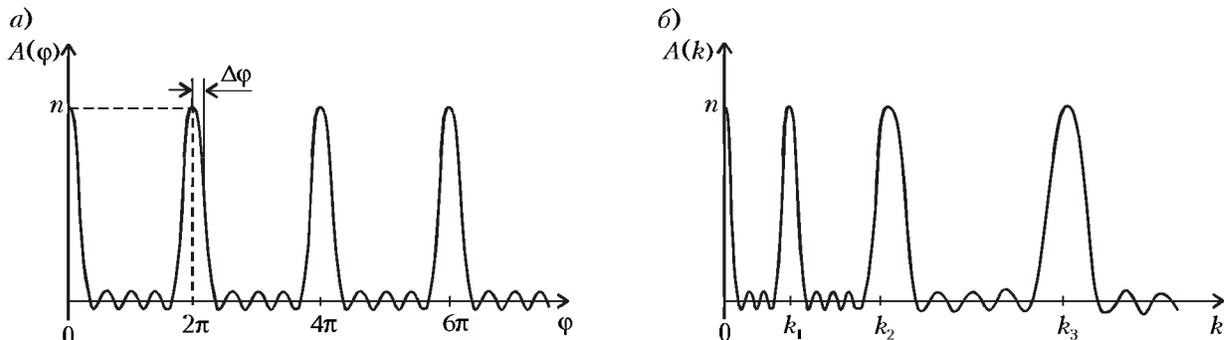


Рис. 7

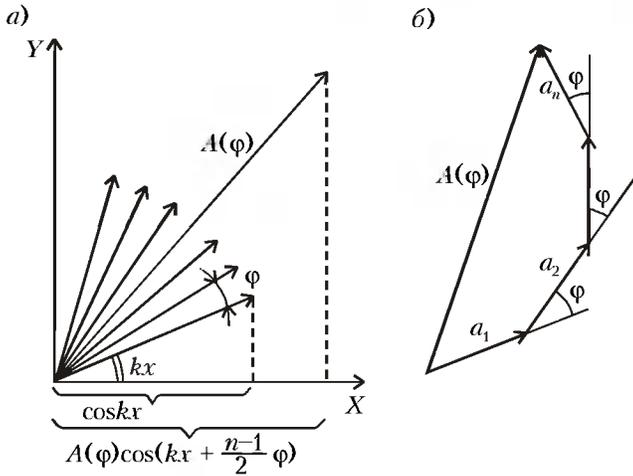


Рис. 8

этой функции. Особенности ее строения легко понять, если обратиться к векторной диаграмме (рис.9). При $\varphi(k) = 2\pi m$ все векторы вытянуты в линию, и их суммарная длина $A(\varphi) = n$. При небольшом изменении на $\Delta\varphi = 2\pi/n$ они складываются в правильный n -угольник, а $A(\varphi) = 0$. Затем происходит долгое движение вблизи нуля, пока при возрастании $\Delta\varphi$ на 2π векторы снова не вытянутся в ряд.

Скомпоновав таким образом вклад одинаковых гармоник от всех ударов, для получения ответа нам осталось только проинтегрировать:

$$h(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty a(k) A(k) \cos\left(kx + vt + \frac{n-1}{2} \varphi\right) dk.$$

А обязательно ли это делать? Нет, ответ можно предсказать и без интегрирования!

Произведение $a(k)A(k)$ можно рассматривать как спектр суммарного возмущения, а его легко узнать. Амплитуда A , построенная как функция волнового числа $k = \frac{\varphi}{g\tau^2}$, по-прежнему имеет вид «гребенки» с пиками высотой n (см. рис.7,б). Единствен-

ное, теперь пики расположены не равномерно, а соответственно значениям

$$k_m = \frac{4\pi^2 m^2}{g\tau^2}$$

и полуширины у них различны:

$$\begin{aligned} \Delta k_m &= \frac{dk}{d\varphi} \Delta\varphi = \\ &= 2k_m \frac{\Delta\varphi}{\varphi_m} = \frac{2k_m}{nm}. \end{aligned}$$

При перемножении гладкой функции $a(k)$ с «гребенкой»

$A(k)$ получится снова «гребенка». Ну, а в таком случае мы, пожалуй, обойдемся без интегрирования. Ведь каждый пик – это волновой пакет (как на рисунке 6)!

Бросив много камней, мы создали бесконечный ряд волновых пакетов. Почему так происходит? Почему возбуждаются не все волны, а лишь избранные и близкие к ним? Причина простая – резонанс. Перепишем условие максимума амплитуды $\sqrt{kg}\tau = 2\pi m$, используя период $T = \lambda/v_\varphi = 2\pi/(kv_\varphi)$. Оно примет вид

$$\tau = mT$$

– а это и есть условие резонанса. Раскачиваются те волны, для которых удары приходятся ровно через период или целое число периодов. Совсем как для обычных качелей.

Рассказывая в начале о результатах наших наблюдений, мы немного лукавили. На самом деле, на воде возникает не один волновой пакет, а несколько (рис.10). Нам удавалось наблюдать пакеты до четвертого порядка включительно. Самое заметное и четкое образование, которое к тому же и появляется первым, – это пакет

первого порядка. В нем $n/2$ горбиков, и он достаточно быстро движется. Если немного подождать на месте, а не идти за первым пакетом, то можно увидеть возникновение более слабого пакета второго порядка, в котором уже n горбиков, а затем – и возникновение пакетов следующих порядков.

Это все можно объяснить теоретически. Длина волны, наполняющей пакет m -порядка, равна

$$\lambda_m = \frac{g\tau^2}{2\pi m^2},$$

поэтому первый волновой пакет состоит из наполняющей с самой большой длиной волны. У него самая большая групповая скорость, он быстрее всех удаляется от начальной точки. А сколько в нем горбиков? На этот вопрос очень просто ответить. Полуширина пика первого порядка составляет $\Delta k = 2k_m/n$, а полуширина волнового пакета, состоящего из N волн, равна k_0/N ; следовательно, в нем $n/2$ горбиков. Волновые пакеты более высоких порядков имеют наполняющую с меньшей длиной волны $\lambda_m = \lambda_1/m^2$. Поэтому групповые скорости у них меньше, и расходятся они через большее время. Кроме того, полуширина соответствующих им пиков меньше: $\Delta k = 2k_m/(nm)$, поэтому пакет m -го порядка состоит из

$$N_3 = \frac{3}{2}n \quad N_2 = n \quad N_1 = \frac{n}{2}$$

Рис.10

$nm/2$ горбиков. Что касается амплитуды, то она в m раз меньше, чем у первого. При увеличении числа волн в пакете он не только должен сужаться, но и вытягиваться. Однако высота пиков «гребенки» $A(k)$ одна и та же.

Итак, бросив в воду сорок камушков, вы увидите двадцать горбиков.

Сознаюсь, этот ответ мне по душе. Он подтверждает присущее всем нам чувство веры в общность и неизбежность законов сохранения. Все сходится: сорок камушков – двадцать горбиков – сорок раз поднимается поплавок. Правда, есть и другие пакеты, и поплавок еще не раз поднимется... Но согласитесь, что это несколько не портит картину, а лишь обогащает ее.

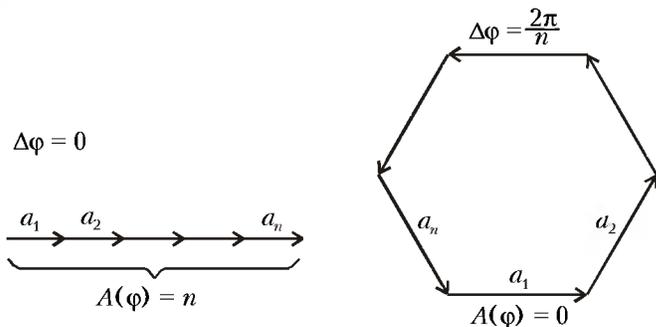


Рис. 9

Суммы квадратов и целые гауссовы числа

В. СЕНДЕРОВ, А. СПИВАК

«Зачем складывать простые числа? – недоумевал великий физик Ландау. – Простые числа созданы для того, чтобы их умножать, а не складывать!»

ЗАЧЕМ СКЛАДЫВАТЬ КВАДРАТЫ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ? Почему бы не складывать их кубы или 666-е степени? Вопросы эти весьма серьезные и встают перед каждым, кто начинает изучать математику. Из огромного разнообразия задач не все достойны пристального внимания. Задача о сумме квадратов – в высшей степени достойна. К сожалению для философа, это невозможно объяснить, не рассказав ее решение и не углубившись тем самым в детали.

«Детали» – это критерий того, какие натуральные числа представимы в виде суммы квадратов двух целых чисел. В доказательстве этого критерия будут использованы не только «обычные» целые числа, но и числа комплексные – прекрасный пример применения абстрактной теории к конкретной арифметической задаче! Хотя эта статья содержит лишь малую часть богатейшей теории делимости алгебраических чисел, надеемся, ее очарование никого не оставит равнодушным.



Иллюстрация В. Власова

Суммы квадратов

Если вы внимательно проследите за вычислениями в основном тексте и будете рассматривать упрощения вычислительного характера не только как отнимающие время (неизбежно они обладают этой особенностью), но и как представляющие интерес, доставляющие наслаждение и понимание, то я убежден, что вы сможете оценить как мощь, так и крайнюю простоту теории.

Г.Эдвардс

Таблица сумм квадратов

Рассмотрим таблицу, в верхней строке и левом столбце которой – квадраты целых чисел, а в других клетках – суммы квадратов:

0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1	2	5	10	17	26	37	50	65	82	101
4	5	8	13	20	29	40	53	68	85	104
9	10	13	18	25	34	45	58	73	90	109
16	17	20	25	32	41	52	65	80	97	116
25	26	29	34	41	50	61	74	89	106	125
36	37	40	45	52	61	72	85	100	117	136
49	50	53	58	65	74	85	98	113	130	149
64	65	68	73	80	89	100	113	128	145	164
81	82	85	90	97	106	117	130	145	162	181
100	101	104	109	116	125	136	149	164	181	200

Эта таблица позволяет выписать представления: $1 = 1^2 + 0^2$, $2 = 1^2 + 1^2$, $4 = 2^2 + 0^2$, $5 = 2^2 + 1^2$, $8 = 2^2 + 2^2$, $9 = 3^2 + 0^2$, $10 = 3^2 + 1^2$, $13 = 3^2 + 2^2$, ... Не вошедшие в таблицу числа первой сотни (3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, ...) в виде суммы двух квадратов не представимы.

Упражнение 1. Найдите наименьшее число, которое двумя существенно разными (т. е. не получающимися один из другого перестановкой слагаемых) способами представимо в виде суммы двух квадратов а) целых; б) натуральных чисел.

Остатки от деления на 3

Наименьшее натуральное число, не представимое в виде суммы двух квадратов целых чисел, – это 3. Кратные 3 числа 6, 12, 15, 21 тоже не представимы, а вот числа $9 = 3^2 + 0^2$ и $18 = 3^2 + 3^2$ – представимы. Возникает гипотеза: числа, которые кратны 3, но не кратны 9, не представимы в виде суммы двух квадратов. Эта гипотеза верна. Верно даже более сильное утверждение:

Теорема 1. Если сумма квадратов $x^2 + y^2$ целых чисел x, y кратна 3, то числа x, y тоже кратны 3.

Доказательство. Выпишем остатки от деления квадратов целых чисел на 3:

Закономерность очевидна: остатки периодически повто-

Квадрат	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Остаток	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1

ряются, и никаких остатков кроме 0 и 1 не бывает. (Точнее говоря, остаток от деления квадрата целого числа x на 3 равен 0, если x кратно 3, т. е. представимо в виде $x = 3k$, где k – целое число, и остаток равен 1, если x не кратно 3, т. е. представимо в виде $x = 3k \pm 1$. В самом деле, в первом случае $x^2 = 9k^2$ делится на 3 без остатка, а во

втором случае $x^2 = 9k^2 \pm 6k + 1$ дает при делении на 3 остаток 1.)

Суммы остатков $0 + 1$ и $1 + 1$ не кратны 3. Значит, сумма квадратов $x^2 + y^2$ кратна 3 в том и только том случае, когда x и y кратны 3.

Упражнение 2. Докажите, что если сумма квадратов двух целых чисел кратна 3^{1999} , то эта сумма кратна 3^{2000} .

Остатки от деления на 7

Следующее после 3 и 6 не представимое в виде суммы двух квадратов число – это 7. Кратные 7 числа 14, 21, 28, 35, 42, 56, 63 не представимы в виде суммы квадратов. Опять возникает гипотеза: если сумма квадратов $x^2 + y^2$ кратна 7, то и сами целые числа x, y кратны 7.

Для доказательства составим таблицу остатков от деления квадратов на 7:

Квадрат	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196
Остаток	0	1	4	2	2	4	1	0	1	4	2	2	4	1	0

Остатки, как видите, периодически повторяются. Поскольку сумма никаких двух из остатков 1, 2, 4 не кратна 7, мы доказали нашу гипотезу.

Упражнения

3. Остаток от деления квадрата целого числа x на 7 равен 0, если $x = 7k$, где k – целое число; равен 1, если $x = 7k \pm 1$; равен 2, если $x = 7k \pm 3$; равен 4, если $x = 7k \pm 2$. Докажите это.

4. Докажите, что если сумма квадратов двух целых чисел кратна 21, то она кратна и 441.

5. а) Какие остатки дают квадраты целых чисел при делении на 11? б) Докажите, что если сумма квадратов двух целых чисел кратна 11, то она кратна 121. в) Докажите, что если сумма квадратов двух целых чисел кратна 1331, то она кратна и 14641.

Остатки от деления на 19

Если простое число p представлено в виде суммы квадратов, $p = x^2 + y^2$, то, очевидно, числа x, y меньше p и потому не могут быть кратны p . Значит, на роль тех чисел p , для которых из делимости суммы квадратов на p следует делимость на p обоих слагаемых, претендуют только числа, не представимые в виде суммы двух квадратов. Любое такое число можно исследовать аналогично числам 3 и 7.

Например, пусть $p = 19$. Составим таблицу остатков от деления квадратов на 19:

Квадрат	0	1	4	9	16	25	36
Остаток	0	1	4	9	16	6	17
Квадрат	49	64	81	100	121	144	169
Остаток	11	7	5	5	7	11	17
Квадрат	196	225	256	289	324		
Остаток	6	16	9	4	1		

В верхней строке – квадраты чисел 0, 1, ..., 18. (Другие квадраты можно не рассматривать, поскольку любое целое число x можно представить в виде $x = 19q + r$, где q – целое, $0 \leq r \leq 18$, и при этом число $x^2 = 19^2q^2 +$

$+ 38qr + r^2$ дает при делении на 19 такой же остаток, как и r^2 .)

В нижней строке таблицы один раз присутствует число 0 и по два раза – числа 1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16 и 17. Ненулевые остатки от деления квадратов целых чисел на простое число $p > 2$ называют *квадратичными вычетами* по модулю p . Все другие ненулевые остатки – *квадратичные невычеты* (при $p = 19$ это 2, 3, 8, 10, 12, 13, 14, 15 и 18).

Поскольку сумма никаких двух из чисел 1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16 и 17 не кратна 19, приходим к выводу: сумма квадратов двух целых чисел кратна 19 в том и только том случае, когда слагаемые кратны 19.

Упражнение 6. Если p – простое число, $p > 2$, то существует $(p - 1)/2$ квадратичных вычетов и ровно столько же квадратичных невычетов по модулю p . Докажите это.

Свойство простых чисел, не являющихся суммами двух квадратов

Как относиться к трудностям? В области неведомого надо рассматривать трудности как скрытый клад! Обычно: чем труднее, тем полезнее. Не так ценно, если трудности возникают от твоей борьбы с самим собой. Но когда трудности исходят от увеличившегося сопротивления предмета – это прекрасно!

А.И.Солженицын

Чем больше по величине простое число p , тем больше квадратичных вычетов по модулю p . Поэтому пора менять метод исследования: если мы не желаем погрязнуть в нескончаемых вычислениях, то должны каким-то одним общим рассуждением охватить числа 3, 7, 11, 19 и многие другие простые числа.

Пока не вполне ясно, что это за числа и чем они отличаются от чисел 2, 5, 13, 17, ... Впрочем, одно отличие очевидно: числа 3, 7, 11, 19 не представимы, а числа 2, 5, 13, 17 представимы в виде суммы квадратов двух целых чисел. Кроме того, простые числа $p = 3, 7, 11, 19$ обладают, как мы уже доказали, тем свойством, что если сумма квадратов целых чисел кратна p , то каждое из слагаемых кратно p . Продолжив (довольно утомительные, если не использовать компьютер) вычисления, можно доказать это свойство для $p = 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, 79, 83, 87$. Осечки ни разу не будет:

Теорема 2. Если простое число p не представимо в виде суммы двух квадратов и если сумма квадратов $x^2 + y^2$ кратна p , то каждое из целых чисел x, y кратно p .

Мы получим эту теорему как одно из следствий теории целых гауссовых чисел. Поскольку это не так уж просто, давайте отвлечемся на некоторое время от теоремы 2 и обратим внимание на другое свойство рассматриваемых простых чисел 3, 7, 11, ..., 83, 87: при делении на 4 они дают остаток 3.

Числа вида $4n + 3$

В виде суммы двух квадратов не представимы не только простые числа, которые при делении на 4 дают остаток 3, но и вообще все числа 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, ...:

Теорема 3. Всякое представимое в виде суммы квадратов двух целых чисел нечетное число при делении на 4 дает остаток 1, а не 3.

Доказательство. Из двух квадратов, сумма которых нечетна, обязательно один четен, а другой нечетен. Квадрат четного числа нацело делится на 4, а квадрат не-

четного числа при делении на 4 дает остаток 1 (проверьте!).

Упражнение 7 а) Квадрат нечетного числа дает остаток 1 не только при делении на 4, но даже при делении на 8. Докажите это. б) Решите в целых числах уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 8n - 1$. в) Никакое число вида $4^m(8n + 7)$, где m, n – целые неотрицательные числа, не представимо в виде суммы квадратов трех целых чисел. Докажите это.

Произведение сумм квадратов

Мы уже нашли несколько признаков непредставимости числа в виде суммы двух квадратов. Не менее важны признаки представимости. Начнем с того, что если $n = x^2 + y^2$, то

$$(x + y)^2 + (x - y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = 2(x^2 + y^2) = 2n.$$

Значит, вместе с каждым представимым числом n представимо и число $2n$. Далее,

$$(2x + y)^2 + (x - 2y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2 + x^2 - 4xy + 4y^2 = 5(x^2 + y^2) = 5n.$$

Легко проверить и формулы

$$(2x + 3y)^2 + (3x - 2y)^2 = 13n,$$

$$(4x + y)^2 + (x - 4y)^2 = 17n.$$

Все они являются частными случаями общей формулы, которая представляет произведение сумм двух квадратов в виде суммы двух квадратов. Чтобы получить ее, раскроем скобки

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = a^2x^2 + b^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2,$$

прибавим и отнимем $2abxy$ и изменим порядок слагаемых:

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + b^2x^2 - 2baxy + a^2y^2 = (ax + by)^2 + (bx - ay)^2. (1)$$

Упражнение 8. Докажите, что

а) если четное число n есть сумма квадратов двух целых чисел, то и число $n/2$ представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел;

б)* если кратное 5 число n есть сумма квадратов двух целых чисел, то число $n/5$ тоже представимо в таком виде;

в)* если $13k = x^2 + y^2$, где k, x, y – целые числа, то хотя бы одна из формул $k = \left(\frac{3x + 2y}{13}\right)^2 + \left(\frac{2x - 3y}{13}\right)^2$ и $k = \left(\frac{3x - 2y}{13}\right)^2 + \left(\frac{2x + 3y}{13}\right)^2$ представляет k в виде суммы квадратов целых чисел.

Теорема Ферма–Эйлера

Поскольку мы научились представлять произведение сумм двух квадратов в виде суммы двух квадратов, очень важно выяснить, какие простые числа представимы в виде суммы двух квадратов целых чисел, а какие не представимы. Числа вида $4n + 3$, как утверждает теорема 3, не представимы. Поэтому рассмотрим простые числа, которые при делении на 4 дают остаток 1. Это: $5 = 2^2 +$

$+1^2$, $13 = 3^2 + 2^2$, $17 = 4^2 + 1^2$, $29 = 5^2 + 2^2$, $37 = 6^2 + 1^2$, $41 = 5^2 + 4^2$, $53 = 7^2 + 2^2$, ...

Теорема 4. Любое простое число p , которое при делении на 4 дает остаток 1, представимо в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

Мы приведем доказательство, состоящее из следующих двух лемм.

Лемма 1. Для любого простого числа $p = 4n + 1$, где $n \in \mathbf{N}$, существует такое целое число m , что $m^2 + 1$ кратно p .

Лемма 2. Любой простой делитель p числа $m^2 + 1$, где m – целое, представим в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

Упражнение 9. Пользуясь формулой (1), объясните, почему в лемме 2 слова «любой простой» можно заменить на «любой натуральный».

Лемму 1 мы выведем из теоремы Вильсона (1741–1793), лемму 2 – из теории делимости целых гауссовых чисел. Но сначала сформулируем ответ на один важный вопрос.

Какие натуральные числа – суммы двух квадратов?

По теоремам 3 и 4, простое число $p > 2$ не представимо в виде суммы двух квадратов, если оно имеет вид $p = 4k + 3$, и представимо – если $p = 4k + 1$, где k – целое. Вспомнив формулу (1) и применив (еще не доказанную нами) теорему 2, получаем следующий элегантный критерий: натуральное число представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел тогда и только тогда, когда в его разложение на простые множители любой простой множитель вида $4k + 3$ входит в четной степени.

Этот критерий впервые был сформулирован голландцем Альбером Жираром (1595–1632) в следующем виде: натуральное число представимо в виде суммы двух квадратов тогда и только тогда, когда оно является или квадратом, или числом 2, или простым числом, которое на 1 больше, чем некоторое кратное 4, или произведением нескольких вышеперечисленных чисел. Скорее всего, Жирар опирался лишь на изучение таблиц и не претендовал на то, что может доказать необходимость и достаточность своих условий.

Упражнения

10. Докажите, что 15 не представимо в виде суммы квадратов двух рациональных чисел. (Этот факт упомянут в «Арифметике» древнегреческого математика Диофанта.)

11. Выведите из критерия представимости числа в виде суммы двух квадратов, что если сумма квадратов $x^2 + y^2$ целых чисел кратна p^{2s-1} , где s – натуральное число, p – простое число, которое при делении на 4 дает остаток 3, то числа x и y кратны p^s .

12. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые дают остаток 1 при делении на 4, но не представимы в виде суммы квадратов двух целых чисел.

13. а) Для любого делителя d числа $n^2 + 1$, где $n \in \mathbf{N}$, существует бесконечно много таких $m \in \mathbf{N}$, что $m^2 + 1$ кратно d . Докажите это. б) Сколько существует натуральных чисел $n < 1000$, для которых $n^2 + 1$ кратно 65?

14. Из леммы 2 и теоремы 3 выведите, что число вида $n^2 + 1$, где $n \in \mathbf{N}$, не имеет ни одного делителя вида $4k - 1$, где $k \in \mathbf{N}$.

15. Докажите, что если x, y, z – целые числа и $4xy - x - y = z^2$, то $x \leq 0$ и $y \leq 0$. (Это упражнение придумал Л. Эйлер.)

16. а) Никакое число вида $m^2 + 1$ не кратно никакому числу вида $n^2 - 1$, где m, n – целые числа, $n > 1$. Докажите это.

б) Решите в целых числах уравнение $x^2 y^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Доказательство леммы 1

В качестве числа m в лемме 1 гонится $m = (2n)!$, т. е. произведение первых $2n$ натуральных чисел. Чтобы это увидеть, рассмотрим число

$$\begin{aligned} (p-1)! &= 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n) \times \\ &\times (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot \dots \cdot (4n-1) \cdot (4n) = \\ &= 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n) \cdot (p-2n) \times \\ &\times (p-(2n-1)) \cdot \dots \cdot (p-2) \cdot (p-1). \end{aligned}$$

Оно дает при делении на p такой же остаток, как и число

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n) \cdot (-1)^{2n} \cdot (2n) \cdot (2n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = m^2.$$

Значит, $m^2 + 1$ при делении на p дает такой же остаток, как и число $(p-1)! + 1$. Последнее число кратно p по теореме Вильсона, которая впервые была сформулирована англичанином Эдуардом Варингом (1734–1798), а доказана французом Жозефом Луи Лагранжем (1736–1813).

Теорема Вильсона. Для любого простого числа p сумма $(p-1)! + 1$ кратна p . (Другими словами, произведение $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1)$ дает остаток $(p-1)$ при делении на p .)

Доказательство этой теоремы можно узнать, например, из статьи А. Егорова и А. Котовой «Необыкновенные арифметики» (Приложение к журналу «Квант» № 2 за 1994 год).

Итак, мы вывели лемму 1 из теоремы Вильсона. Идея доказательства леммы 2 – разложение на множители $m^2 + 1 = (m+i)(m-i)$. Что такое i и что делать дальше, вы узнаете, когда познакомитесь с комплексными числами.

Упражнения

17. Докажите, что числа а) $97! \cdot 1901! - 1$; б) $98! \cdot 1900! + 1$ кратны 1999. *Указание.* 1999 – простое число.

18. Если p – простое число, $p > 2$, $m = ((p-1)/2)!$, то $m^2 \equiv (-1)^{(p+1)/2} \pmod{p}$, т. е. остаток от деления на p числа m^2 равен 1, если $p = 4n + 3$, и равен $p-1$, если $p = 4n + 1$. Докажите это.

19. Докажите, что а) если составное число $n > 4$, то $(n-1)!$ кратно n ; б) если $(n-1)! + 1$ кратно n , где $n > 1$ – натуральное число, то n – простое.

Комплексные числа

*Что нам стоит дом построить?
Нарисуем – будем жить!*

Что такое комплексное число?

Новые числа в математике вводят, когда старых оказывается недостаточно. Изобретение целых чисел, т. е. расширение множества $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ натуральных чисел до множества $\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, дает возможность решить, например, уравнение $x + 7 = 5$. Построив еще более широкое множество $\mathbf{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\}$ рациональных чисел, мы получаем возможность решать уравнения вроде $3x = 8$. Желание измерить диагональ единичного квадрата (или, что то же, решить уравнение $x^2 = 2$) приводит к очередному расширению множества

чисел до множества $Q[\sqrt{2}]$ чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in Q$. Нет никаких сомнений, что сумма, разность и произведение чисел вида $a + b\sqrt{2}$ — число такого же вида. С делением тоже все в порядке:

$$\frac{1 + \sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})}{(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})} = 7 + 5\sqrt{2},$$

$$\frac{2 - 5\sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} = \frac{(2 - 5\sqrt{2})(3 - \sqrt{2})}{(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})} = \frac{16 - 17\sqrt{2}}{7}.$$

Видите, как просто? В общем виде это выглядит так:

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{(c + d\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})} = \frac{ac - 2bd + (bc - ad)\sqrt{2}}{c^2 - 2d^2}.$$

Для алгебраических вычислений важно, что квадрат числа $\sqrt{2}$ равен 2. Комплексные числа мы получим, введя в рассмотрение число i , квадрат которого равен -1 . Может показаться, что «такого не бывает», ведь уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет решений не только в рациональных, но и в вещественных числах. Однако число $\sqrt{2}$, заметьте, тоже «не существовало» до тех пор, пока мы рассматривали только рациональные числа.

Итак, рассмотрим выражения вида $a + bi$, где a, b — вещественные числа. Эти выражения мы и будем называть *комплексными числами*. Сумму и произведение *определим* естественными формулами

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Последняя формула, быть может, нуждается в комментарии:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 =$$

$$= ac + adi + bci - bd.$$

Это именно комментарий, а не доказательство, поскольку пользоваться обычными правилами раскрытия скобок можно только после того, как даны определения сложения и умножения комплексных чисел и проверены эти «обычные правила», т. е. формулы $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (переместительный закон, или коммутативность сложения), $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (коммутативность умножения), $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (сочетательный закон, или ассоциативность сложения), $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (ассоциативность умножения), $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ (распределительный закон, или дистрибутивность).

Упражнения

20. Выполните эту проверку.

21. Докажите, что а) для любого комплексного числа z существует и определено единственным образом такое число w , что $z + w = 0 + 0i$; б) для любого отличного от числа $0 + 0i$ комплексного числа z существует и определено единственным образом такое число w , что $zw = 1 + 0i$.

в) Научитесь делить комплексные числа, т. е. для вещественных чисел a, b, c, d найдите, при условии $c^2 + d^2 \neq 0$, такие вещественные числа x и y , что $a + bi = (c + di)(x + yi)$. (Не удивляйтесь, что последняя формула записана без знака деления: если бы он был, то все равно пришлось бы дать определение частного $(a + bi)/(c + di)$ комплексных чисел. А самый разумный способ сделать это — назвать частным u/v , где $v \neq 0$, такое число w , что $u = vw$.)

22. Вычислите: а) i^{-3} ; б) i^4 ; в) i^{1999} ; г) $1 + i + i^2 + \dots + i^{10} + i^{11}$; д) $(1 + i)^{12}$; е) $(i^{34} + i^{39}) / (i^{41} + i^{44})$.

Геометрическая интерпретация

Формулы сложения и умножения комплексных чисел позволяют отождествить комплексное число $a + 0i$ с вещественным числом a . Поэтому в дальнейшем мы будем писать не $a + 0i$, а попросту a .

Расширение множества R вещественных чисел до множества C комплексных чисел можно пояснить геометрически. Отождествим ось абсцисс координатной плоскости с вещественной осью

(т. е. множеством всех вещественных чисел); единичный вектор $(1; 0)$ оси абсцисс обозначим просто 1, а единичный вектор $(0; 1)$ оси ординат обозначим через i (рис. 1). Произвольный вектор $z = (x; y)$ плоскости

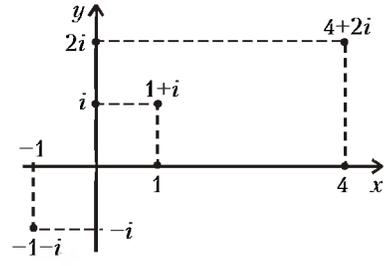


Рис. 1

можно теперь записать

в виде $z = x(1; 0) + y(0; 1) = x + yi$. Принято вещественные числа x и y называть *вещественной и мнимой частями* комплексного числа z . Обозначения: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Сложение комплексных чисел — это обычное сложение векторов. А умножение определяется, как мы уже видели, более «хитрой» формулой.

Модуль комплексного числа

Определение. Модулем (абсолютной величиной) числа $z = a + bi$ называют расстояние $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ от начала координат до точки $(a; b)$.

Теорема 5. Модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей:

$$|(a + bi)(x + yi)| = |a + bi| \cdot |x + yi|.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (1):

$$|(a + bi)(x + yi)| = |(ax - by) + (ay + bx)i| =$$

$$= \sqrt{(ax - by)^2 + (ay + bx)^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} =$$

$$= |a + bi| \cdot |x + yi|.$$

Упражнения

23. Научитесь извлекать квадратный корень из комплексного числа, т. е. для вещественных чисел a, b найдите такие пары $(x; y)$ вещественных чисел, что $(x + iy)^2 = a + bi$.

24. Решите в комплексных числах уравнения: а) $z^2 - 2z + 1 = i$; б) $z^2 - 5z + 7 = i$; в) $z^2 + 10 + 2i = (4 + i)z$.

Сопряженные числа

Уравнение $z^2 = -1$ имеет два корня: i и $-i$. Поскольку при вычислениях используется именно равенство $i^2 = -1$, возникает идея заменить i на $-i$. Верное равенство при одновременной замене всех входящих в него символов i на $-i$ останется верным!

Точная реализация этой идеи такова: два комплексных числа, действительные части которых равны, а мнимые части равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, называют сопряженными. Число, сопряженное

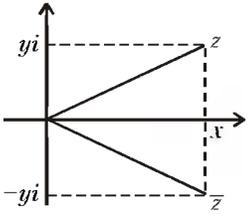


Рис. 2

с $z = x + yi$, обозначают $\bar{z} = x - yi$ (рис.2). Геометрический смысл перехода от числа к сопряженному – симметрия относительно оси абсцисс. Легко проверить тождества

$$\overline{u + v} = \overline{u} + \overline{v}, \quad \overline{u \cdot v} = \overline{u} \cdot \overline{v},$$

которые как раз и позволяют заменять в формулах все числа на сопряженные.

Между прочим, $|z|^2 = x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = z\bar{z}$. Это позволяет очень изящно доказать теорему 5:

$$|uv|^2 = (uv)\overline{uv} = uv\overline{uv} = (u\bar{u})(v\bar{v}) = |u|^2 \cdot |v|^2.$$

Формула (1) не потребовалась! Точнее, формула (1) – это по сути и есть формула $|uv|^2 = |u|^2 \cdot |v|^2$.

Целые гауссовы числа

Определения

Комплексное число $a + bi$ называют *целым гауссовым*, если a и b – целые числа. Сумма, разность и произведение целых гауссовых чисел – целые гауссовы числа, так что множество $\mathbf{Z}[i]$ целых гауссовых чисел является, как говорят алгебраисты, кольцом.

Определение. Целое гауссово число u кратно целому гауссову числу v , если существует такое целое гауссово число w , что $u = vw$.

Отметив на плоскости целые гауссовы числа, мы получим решетку (рис.3). Интересно, что числа, кратные данному числу z , тоже образуют решетку (рис.4).

На рисунке 5 синим цветом выделены кратные числа $2 + i$, а красным – кратные числа $2 - i$. Давайте спросим себя, какие целые гауссовы числа являются кратными и числа $2 + i$, и числа $2 - i$ одновременно. Ответ очевиден: пересечение множеств «синих» и «красных» чисел состоит из чисел, кратных 5. Другими словами, наименьшее общее кратное чисел $2 + i$ и $2 - i$ равно 5.

Произведение $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ комплексного числа $z = a + bi$ и сопряженного с ним числа $\bar{z} = a - bi$ является числом вещественным. Поэтому для любого ненулевого целого гауссова числа z существует кратное ему натуральное число $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

Теорема 6. Если числа a и b взаимно просты, то наименьшим натуральным числом n , которое кратно числу $a + bi$, является именно число $a^2 + b^2$.

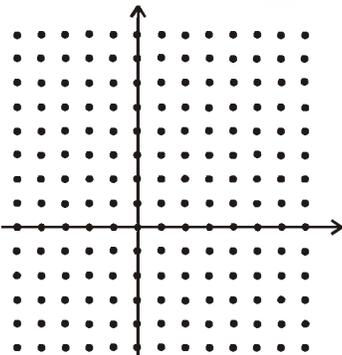


Рис. 3

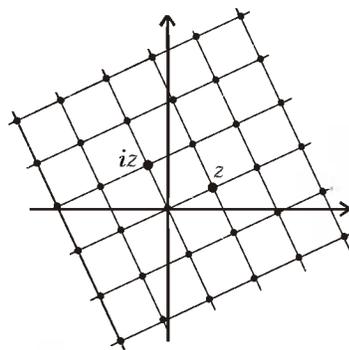


Рис. 4

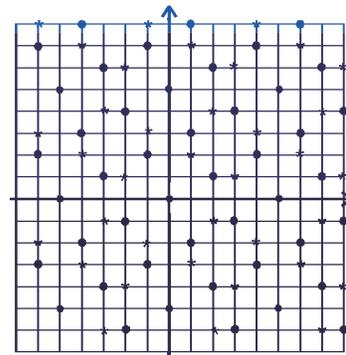


Рис. 5

Доказательство. Поскольку

$$\frac{n}{a + bi} = \frac{n(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{na}{a^2 + b^2} - \frac{nb}{a^2 + b^2}i,$$

натуральное число n кратно числу $a + bi$ только в тех случаях, когда числа na и nb кратны $a^2 + b^2$. Поскольку числа a и b взаимно просты, это бывает только когда n кратно $a^2 + b^2$.

Упражнения

25. При каком условии на целые числа a и b частное $(a + bi)/(1 + i)$ является целым гауссовым числом?

26. Изобразите на плоскости числа, кратные числу а) $1 + 3i$; б) $1 - 3i$. в) Какие целые гауссовы числа являются кратными и числа $1 + 3i$, и числа $1 - 3i$ одновременно?

27. Докажите, что если целое вещественное число n кратно ненулевому целому гауссову числу $a + bi$, то n кратно числу $(a^2 + b^2)/НОД(a, b)$.

Делители единицы

Очевидно,

$$1 = 1 \cdot 1 = i \cdot (-i) = (-1) \cdot (-1) = (-i) \cdot i.$$

Других способов разложить 1 в произведение двух целых гауссовых чисел нет:

Теорема 7. В $\mathbf{Z}[i]$ нет делителей единицы, кроме чисел $1, i, -1$ и $-i$. (Другими словами, целое гауссово число $a + bi$ является делителем единицы в том и только том случае, когда $a^2 + b^2 = 1$.)

Доказательство. Если $1 = uv$, где $u, v \in \mathbf{Z}[i]$, то $1 = |u| \cdot |v|$. Поскольку модуль ненулевого целого гауссова числа не меньше 1, имеем $|u| = |v| = 1$, откуда и следует утверждение теоремы.

Ассоциированные числа

Числа u и v называют *ассоциированными*, если они кратны друг другу, т.е. u кратно v и v кратно u . Всякое целое гауссово число z можно представить в виде произведения

$$z = 1 \cdot z = i(-iz) = (-1)(-z) = (-i)(iz),$$

первый множитель которого – делитель единицы, а второй – ассоциирован с числом z . Столь же очевидно, что если целое гауссово число w кратно числу z , то делителями числа w являются также и числа $-z, iz, -iz$. Поэтому, рассматривая разложения на множители, можно «не различать» ассоциированные числа.

Упражнения

28. Для комплексного числа $z = 2 + i$ отметьте на комплексной плоскости числа iz , $-z$, $-iz$.

29. Ассоциированные с числом z числа εz в точности числа вида εz , где ε — делитель единицы. Докажите это.

30. Докажите, что а) числа $1 + i$ и $1 - i$ ассоциированы; б) числа $a + bi$ и $a - bi$ ассоциированы в том и только том случае, когда выполнено хотя бы одно из условий: $a = 0$, $b = 0$, $a = b$, $a = -b$.

Доказательство теоремы Ферма–Эйлера**Доказательство леммы 2**

Вернемся к лемме 2, от которой мы надолго отвлеклись, чтобы придать смысл разложению $m^2 + 1 = (m + i)(m - i)$. Число p не кратно ни один из множителей $m + i$ и $m - i$, но кратно произведению $m^2 + 1$. Что это значит? Как может произведение быть кратно p , если ни один из множителей не кратно p ? Неужели арифметика гауссовых чисел настолько своеобразна, что в ней нет никаких привычных нам законов? Например, мы привыкли к тому, что разложение натурального числа на простые множители единственно с точностью до порядка множителей. Вдруг основная теорема арифметики неверна для $\mathbf{Z}[i]$?

Оказывается, все не так плохо. Разложение на простые множители в $\mathbf{Z}[i]$ единственно в том же смысле, в каком оно единственно для обычных целых чисел (мы докажем это в разделе «Основная теорема арифметики»). А кажущееся противоречие устраняется тем, что простое число p может перестать быть простым при расширении \mathbf{Z} до $\mathbf{Z}[i]$. Например, $2 = (1 + i)(1 - i)$ и $5 = (1 + 2i)(1 - 2i)$. Вообще, $p = (a + bi)(a - bi)$ для всякого числа $p = a^2 + b^2$.

Итак, разрешим себе пофантазировать: вообразим, что мы уже доказали теорему о единственности разложения целых гауссовых чисел на простые множители, и докажем лемму 2. Делитель p числа $(m + i)(m - i)$ не может быть простым гауссовым числом. Значит,

$$p = (a + bi)(c + di),$$

где целые гауссовы числа $(a + bi)$ и $(c + di)$ — не делители единицы. Поскольку модуль произведения равен произведению модулей, имеем

$$p = \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2},$$

т. е. $p^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$, откуда $p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Лемма 2, а заодно и теорема 4 доказаны.

Разложение простого числа на простые множители

Заголовок этого подраздела мог бы удивить, если бы выше мы не разлагали уже простые натуральные числа на простые гауссовы множители. Какие же простые натуральные числа останутся простыми во множестве целых гауссовых чисел, а какие станут составными? И как устроены разложения «новых составных» чисел?

Теорема 8. *Всякое простое натуральное число вида $p = 4n + 3$ является простым в $\mathbf{Z}[i]$; число 2 ассоциировано с квадратом простого гауссова числа $1 + i$; всякое простое натуральное число вида $p = 4n + 1$ разлагается*

на два сопряженных множителя: $p = (a + bi)(a - bi)$, причем множители $a + bi$ и $a - bi$ — простые гауссовы числа.

Доказательство. Если число $p = 4n + 3$ представлено в виде произведения двух целых гауссовых чисел $p = (a + bi)(c + di)$, то

$$|p| = |a + bi| \cdot |c + di|,$$

откуда $p^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$. Значит, либо один из множителей $(a^2 + b^2)$ и $(c^2 + d^2)$ равен 1, а другой равен p^2 , либо $p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. В первом случае ясно, что число p было представлено в виде произведения делителя единицы и ассоциированного с p числа. Второй случай невозможен в силу теоремы 3.

С числом 2 дело обстоит еще проще: $2 = -i(1 + i)^2$. Впрочем, мы должны объяснить, почему число $1 + i$ простое.

Лемма 3. *Простое натуральное число p нельзя представить в виде произведения более чем двух целых гауссовых чисел, не являющихся делителями единицы. (Другими словами, если p ассоциировано с произведением двух не являющихся делителями единицы целых гауссовых чисел, то эти числа — простые.)*

Доказательство леммы 3. Если $p = (a + bi)(c + di)(e + fi)$, то

$$|p| = |a + bi| \cdot |c + di| \cdot |e + fi|,$$

откуда $p^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(e^2 + f^2)$. Квадрат простого числа никак не может быть произведением трех отличных от 1 натуральных чисел. Лемма 3 и теорема 8 доказаны.

Упражнения

31. Изобразите на комплексной плоскости все числа, на которые нацело делится число $5 - i$.

32. Сколько среди делителей числа а) $3 - 11i$; б) $6 + 12i$ таких, у которых и вещественная, и мнимая части положительны?

33. Разложите на простые гауссовы множители числа а) 16; б) 1001; в) $47 + i$.

Доказательство теоремы 2

Помните, мы обещали получить теорему 2 как одно из следствий теории целых гауссовых чисел? Настало время это сделать. Пусть простое число p не представимо в виде суммы двух квадратов и сумма квадратов $x^2 + y^2$ кратна p . Из теоремы 8 следует, что всякое простое натуральное число p либо является простым гауссовым числом, либо представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел. Значит, в рассматриваемой ситуации p — простое гауссово число. Поскольку произведение $(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ кратно p , хотя бы один из сомножителей кратен p . Это в точности означает, что x и y кратны p . Теорема 2 доказана.

Количество представлений**Единственность представления простого числа в виде суммы двух квадратов**

По теореме Ферма–Эйлера любое простое число p , которое при делении на 4 дает остаток 1, представимо в виде суммы двух квадратов. Давайте докажем, что такое представление единственно с точностью до порядка слагаемых.

Теорема 9. Никакое простое число не может быть представлено в виде суммы квадратов двух целых чисел существенно разными (т. е. не получающимися один из другого перестановкой слагаемых) способами.

Доказательство. Если бы простое число p имело два существенно разных представления, $p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, то разложения $p = (a + bi)(a - bi) = (c + di)(c - di)$ противоречили бы теореме 8.

Упражнение 34 (M1288*). Докажите, что число $1000009 = 235^2 + 972^2$ составное.

Можно обойтись в доказательстве теоремы 9 и без комплексных чисел. Предположим, что простое число p двумя существенно разными (т. е. отличающимися не только порядком слагаемых) способами разложено в сумму квадратов натуральных чисел:

$$p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

Тогда $a^2 \equiv -b^2$ и $c^2 \equiv -d^2 \pmod{p}$. Следовательно, $a^2 c^2 \equiv \equiv (-b^2)(-d^2) \pmod{p}$, т. е. число $a^2 c^2 - b^2 d^2$ кратно p . (Если рассуждения со сравнениями по модулю p непривычны и потому подозрительны, вы можете получить то же самое, рассматривая тождество $a^2 c^2 - b^2 d^2 = = a^2(c^2 + d^2) - (a^2 + b^2)d^2$.)

Поскольку число p простое, из делимости произведения $(ac + bd)(ac - bd)$ на p следует, что один из множителей кратен p . Если число $ac + bd$ кратно p , то воспользуемся формулой (1):

$$p^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

Если $ad - bc \neq 0$, то противоречие очевидно, ибо первое слагаемое $(ac + bd)^2$ кратно p^2 и потому не меньше p^2 . Если же $ad - bc = 0$, то $ad = bc$. Поскольку как числа a и b , так и числа c и d взаимно просты, имеем $a = c$ и $d = b$.

Случай, когда $ac - bd$ кратно p , можно рассмотреть аналогично, воспользовавшись формулой $p^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$.

Упражнение 35. Представьте число $1000009 = 235^2 + 972^2$ в виде произведения двух отличных от 1 натуральных чисел.

Итак, простое число нельзя двумя существенно разными способами представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел. Число, единственным образом представимое в виде суммы квадратов двух натуральных чисел, не всегда является простым: $10 = 1^2 + 3^2$, $25 = = 3^2 + 4^2$. Легко сформулировать условия, при которых число имеет единственное представление в виде суммы двух квадратов. Но давайте не будем тратить на это свои силы, а ответим на более общий вопрос.

Сколькими способами число можно представить в виде суммы двух квадратов?

В III веке нашей эры греческий математик Диофант не только знал, что число 65 представимо двумя способами, но и объяснял это тем, что 65 является произведением чисел 13 и 5, каждое из которых – сумма двух квадратов. Комплексных чисел Диофант не знал, иначе он непременно выписал бы разложения $5 = (2 + i)(2 - i)$, $13 = = (3 + 2i)(3 - 2i)$ и продолжил бы свои объяснения

следующим образом:

$$\begin{aligned} 65 &= (2 + i)(3 + 2i) \cdot (2 - i)(3 - 2i) = (4 + 7i) \cdot (4 - 7i) = \\ &= 4^2 + 7^2 = (2 + i)(3 - 2i) \cdot (2 - i)(3 + 2i) = \\ &= (8 - i) \cdot (8 + i) = 8^2 + 1^2. \end{aligned}$$

Понимаете? По-разному группируя множители, получили два разных разложения!

Следующий пример – число 25. Тот, кто решил упражнение 1, знает, что 25 – наименьшее число, двумя способами представимое в виде суммы квадратов двух целых чисел. Оба эти разложения легко получить, по-разному группируя множители:

$$\begin{aligned} 25 &= (2 + i)^2 \cdot (2 - i)^2 = (3 + 4i) \cdot (3 - 4i) = 3^2 + 4^2 = \\ &= (2 + i)(2 - i) \cdot (2 + i)(2 - i) = 5 \cdot 5 = 5^2 + 0^2. \end{aligned}$$

Последний пример – число 5746. Как мы хорошо знаем, всякому представлению $5746 = a^2 + b^2$ соответствует разложение $5746 = (a + bi)(a - bi)$ на сопряженные множители. Поэтому разложим рассматриваемое число сначала на простые натуральные, а затем и на простые гауссовы множители:

$$\begin{aligned} 5746 &= 2 \cdot 13^2 \cdot 17 = \\ &= (1 + i)(1 - i)(3 + 2i)^2 (3 - 2i)^2 (4 + i)(4 - i). \end{aligned}$$

Теперь мы должны из нескольких этих множителей составить $a + bi$, да так, чтобы произведение остальных множителей равнялось $a - bi$. Это нетрудно сделать:

$$\begin{aligned} a + bi &= (1 + i)(3 + 2i)^2 (4 + i) = -45 + 61i, \\ a - bi &= (1 - i)(3 - 2i)^2 (4 - i) = -45 - 61i. \end{aligned}$$

При этом, разумеется, $45^2 + 61^2 = 2025 + 3721 = 5746$. Легко найти и еще два варианта:

$$a + bi = (1 + i)(3 + 2i)(3 - 2i)(4 + i) = 39 + 65i$$

или

$$a + bi = (1 + i)(3 - 2i)^2 (4 + i) = 75 - 11i.$$

Они приводят к представлениям $39^2 + 65^2 = 1521 + 4225 = = 5746$ и $75^2 + 11^2 = 5625 + 121 = 5746$. Никаких других представлений нет (попытайтесь их придумать – и довольно скоро поймете причину этого).

Аналогично можно найти число представлений в виде суммы двух квадратов любого натурального числа $n = = 2^a p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r} Q$, где p_1, \dots, p_r – попарно различные простые числа, каждое из которых дает остаток 1 при делении на 4, Q – число, не имеющее простых делителей кроме тех, которые дают остаток 3 при делении на 4. А именно, если Q не является точным квадратом, то n не представимо в виде суммы двух квадратов; если же Q – точный квадрат, то, применив необходимое число раз теорему 2, получаем: количество представлений числа n в виде суммы двух квадратов равно количеству представлений числа $m = 2^a p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$ в виде суммы двух квадратов. Формулу для этого количества нашел немец Петер Густав Лейбен Дирихле (1805–1859).

Теорема 10. Количество представлений числа n в виде суммы квадратов двух целых чисел равно $[(a_1 + 1) \cdot \dots \cdot (a_r + 1) + 1] / 2$. (Если число сомножителей равно 0, то произведение считается равным 1. Представления, отличающиеся порядком слагаемых, не различаются.)

Надеемся, доказательство не представит непреодолимой трудности. Если трудности возникли – не огорчайтесь, а перечитайте статью заново (и так много раз – до тех пор, пока не поймете, почему формула Дирихле верна).

Упражнения

36. При каком наименьшем радиусе окружности с центром в начале координат на ней лежат ровно а) 4 целочисленные точки; б) 8 точек; в) 12; г) 16?

37. а) Сколько решений в натуральных числах $x < y$ имеет уравнение $x^2 + y^2 = 5^n$, где n – данное натуральное число? б) Докажите, что для всякого натурального n существует бесконечно много окружностей с центрами в начале координат, на каждой из которых лежат ровно $4n$ точек с целыми координатами.

38. Рассмотрим окружность с центром в начале координат радиуса $\sqrt{2^a p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}}$, где p_1, \dots, p_r – попарно различные простые числа, каждое из которых дает остаток 1 при делении на 4. Сколько на этой окружности точек с целыми координатами?

39*. Может ли так быть, что натуральное число n не представимо в виде суммы двух квадратов а) целых; б) натуральных; в) взаимно простых чисел, а число n^{1999} представимо в таком виде?

40*. Какие числа единственным с точностью до перестановки слагаемых образом представимы в виде суммы квадратов двух а) целых неотрицательных; б) натуральных; в) взаимно простых чисел?

41. Если число $n > 2$ представимо в виде суммы квадратов двух взаимно простых чисел, то число таких представлений равно 2^{s-1} , где s – количество простых делителей n , имеющих вид $4k + 1$. Докажите это.

42*. Количество точек с целыми координатами на окружности радиуса \sqrt{n} с центром в начале координат (т.е. количество решений в целых числах уравнения $x^2 + y^2 = n$) равно учетверенной разности между количеством натуральных делителей числа n , которые имеют вид $4k + 1$, и количеством натуральных делителей вида $4k + 3$. Докажите это.

Приложение

Основная теорема арифметики

Прежде чем доказывать единственность разложения целого гауссова числа на простые множители, напомним, что для «обычных» натуральных чисел единственность разложения на простые натуральные множители вовсе не очевидна. Наиболее известны два доказательства. Одно из них изложено в «Началах» Евклида (III век до н. э.), а другое придумал немец Эрнст Цермело (1871–1953). Мы рассмотрим доказательство Цермело (сразу для целых гауссовых чисел).

Теорема 11. *Разложение на простые множители в $\mathbf{Z}[i]$ единственно (с точностью до перестановки множителей и ассоциированности).*

Доказательство. Тот факт, что любое ненулевое целое гауссово число можно представить в виде произведения простых гауссовых чисел, очевиден: разлагаем, пока можно, а когда перестанет разлагаться, то все уже разложилось! (Любитель абсолютной строгости то же самое оформит следующим образом. Предположим, что не все целые гауссовы числа имеют разложения на простые гауссовы множители. Рассмотрим такое число z с *наименьшим* модулем. Если z – делитель единицы или простое число, то оно в разложении не нуждалось. А если z представимо в виде произведения $z = uv$ целых гауссовых чисел, где $|u| < |z|$ и $|v| < |z|$, то числа u и v имеют разложения на простые множители. Объединив их, мы как раз получаем разложение числа z .)

Намного труднее и интереснее доказательство единственности разложения. Предположим, что некоторое целое гауссово

число z двумя существенно разными способами представлено в виде произведения простых гауссовых чисел:

$$z = p_1 p_2 \dots p_r = q_1 q_2 \dots q_s. \tag{2}$$

Можно считать, что z – *наименьшее* по абсолютной величине из чисел, обладающих разными разложениями на простые гауссовы множители. Тогда ни одно из чисел p_1, \dots, p_r не ассоциировано ни с одним из чисел q_1, q_2, \dots, q_s (в противном случае мы сократили бы обе части равенства (2) на общий множитель, получив меньшее по модулю число).

Обозначим $P = p_2 \dots p_r$ и $Q = q_2 \dots q_s$. Тогда $z = p_1 P = q_1 Q$. Не ограничивая общности, можно считать, что $|p_1| \leq |q_1|$. При этом $|P| \geq |Q|$ и, значит, $|p_1 Q| \leq |z|$. Рассмотрим число $w = \varepsilon z - p_1 Q$, где ε – такой делитель единицы, что $|w| < |z|$. (Почему такой делитель единицы ε можно выбрать, ясно из рисунка 6. В самом деле, числа $z, iz, -z$ и $-iz$ – вершины квадрата. Точка $p_1 Q$ расположена внутри описанного круга этого квадрата. Весь описанный круг можно покрыть четырьмя кругами с центрами в вершинах квадрата, радиусы которых равны половине диагонали квадрата. Значит, хотя бы одна из вершин квадрата расположена к точке $p_1 Q$ ближе, чем на расстояние $|z|$.) Число w может быть разложено на множители двумя способами:

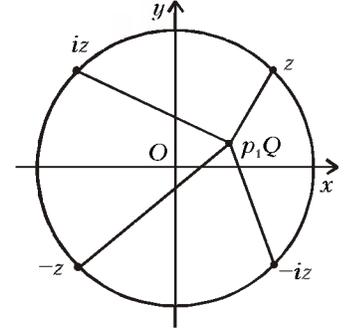


Рис. 6

$$w = \varepsilon z - p_1 Q = p_1 (\varepsilon P - Q) = (\varepsilon q_1 - p_1) q_2 \dots q_s.$$

Поскольку $|w| < |z|$, для числа w должна иметь место единственность разложения на простые гауссовы множители. Значит, хотя бы один из множителей $\varepsilon q_1 - p_1, q_2, \dots, q_s$ должен быть кратен простому числу p_1 . Если число $\varepsilon q_1 - p_1$ кратно p_1 , то q_1 кратно p_1 , откуда следует, поскольку q_1 – простое гауссово число, что числа p_1 и q_1 ассоциированы, что невозможно. Еще очевиднее противоречие в случае, когда кратен числу p_1 один из множителей q_2, \dots, q_s .

Доказательство Лагранжа леммы 2

Могло сложиться впечатление, что обойтись в доказательстве леммы 2 без комплексных чисел невозможно. Тем не менее, Лагранж придумал следующее удивительно короткое рассуждение.

Рассмотрим все такие пары $(r; s)$ целых чисел, что $0 \leq r, s < \sqrt{p}$, и для каждой пары рассмотрим остаток от деления числа $r + ms$ на p . Поскольку количество таких пар равно $(\lfloor \sqrt{p} \rfloor + 1)^2 > p$, среди них обязаны найтись такие две пары $(r_1; s_1)$ и $(r_2; s_2)$, что остатки от деления на p чисел $r_1 + ms_1$ и $r_2 + ms_2$ равны. При этом число $r + ms$, где $r = r_1 - r_2$ и $s = s_1 - s_2$, кратно p . Поэтому число

$$r^2 + s^2 = r^2 - m^2 s^2 + (m^2 + 1)s^2 = (r + ms)(r - ms) + (m^2 + 1)s^2$$

тоже кратно p . Заметим, что $0 < r^2 + s^2 < p + p = 2p$. Единственным кратным p числом, которое больше 0, но меньше $2p$, является само число p . Значит, $r^2 + s^2 = p$, что и требовалось.

Замечание. В статье В.Тихомирова «Теорема Ферма – Эйлера о двух квадратах» («Квант» №10 за 1991 год), помимо доказательства Лагранжа, приведены еще два доказательства теоремы Ферма – Эйлера.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 1999 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3 – 99» и номера задач, решения которых Вы пасылаете, например «М1681» или «Ф1688». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письма вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1683, М1687 и М1688 предлагались на осеннем Турнире Гарадов 1998 года, а задача М1684 — на Московской математической олимпиаде этого года.

Задачи Ф1689 – Ф1693 и Ф1696 предлагались на втором (очном) туре V Соросовской олимпиады по физике.

Задачи М1681 – М1690, Ф1688 – Ф1697

М1681. Квадрат целого числа оканчивается на ...21. Может ли третья цифра справа быть четной?

В. Сендеров

М1682. Из какой-либо точки плоскости опускаются перпендикуляры на высоты треугольника (или на их продолжения). Докажите, что основания перпендикуляров являются вершинами треугольника, подобного исходному.

Р. Кудинов

М1683. Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок. Известно, что можно выбрать по бусинке из каждой коробки так, что все цвета будут представлены. Докажите, что число способов такого выбора есть ненулевая степень двойки.

А. Гришин

М1684*. Круг разделен радиусами на $2n$ равных секторов, из которых какие-то n – синие, а остальные n – красные. В синие сектора, начиная с некоторого, по ходу часовой стрелки последовательно вписаны все натуральные числа от 1 до n . В красные сектора, начиная с некоторого, против хода часовой стрелки тоже последовательно вписаны все числа от 1 до n . Докажите, что найдется полукруг, в сектора которого вписаны все числа от 1 до n .

В. Произволов

М1685. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что окружности, проведенные через середины

сторон треугольников ABC , BCD , CDA , DAB , имеют общую точку, а их центры лежат на одной окружности.

И. Вайнштейн

М1686. Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[0; 1]$ и удовлетворяют равенствам

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx = 1$$

и

$$\int_0^1 \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} dx = \sqrt{2}.$$

Докажите, что $f(x) = g(x)$ на отрезке $[0; 1]$.

В. Произволов

М1687. Будем называть *размером* прямоугольного параллелепипеда сумму трех его измерений – длины, ширины и высоты. Может ли случиться, что в некотором прямоугольном параллелепипеде поместится больший по размеру прямоугольный параллелепипед?

А. Шень

М1688*. Дана функция $f(x) = (x^2 + ax + b) / (x^2 + cx + d)$, где трехчлены $x^2 + ax + b$ и $x^2 + cx + d$ не имеют общих корней. Докажите, что два утверждения равносильны: 1) найдется числовой интервал, свободный от значений $f(x)$;

2) $f(x)$ представима в виде $f(x) = f_1(f_2(\dots f_{n-1}(f_n(x)\dots)))$, где каждая из функций $f_i(x)$ есть функция одного из видов: $k_i x + m_i$, x^{-1} , x^2 .

А. Белов

M1689. Арифметическая прогрессия из натуральных чисел содержит не менее трех членов, их произведение – делитель некоторого числа $n^2 + 1$.

- а) Докажите, что существует такая прогрессия с разностью 12.
 б) Докажите, что такой прогрессии с разностью 10 или 11 не существует.
 в)* Какое наибольшее число членов может содержать такая прогрессия с разностью 12?

В.Сендеров

M1690. В каждой вершине выпуклого многогранника сходятся три ребра. Одна грань многогранника красная, остальные – синие. Известно, что любая синяя грань является многоугольником, около которого можно описать окружность. Докажите, что и красная грань является многоугольником, около которого можно описать окружность.

В.Произволов

Ф1688. Автомобиль на прямой передаче (на четвертой скорости коробки передач) может на прямом шоссе развивать скорость от 50 км/ч до 140 км/ч. При скорости 70 км/ч расход бензина составляет 7 л на 100 км пробега; КПД двигателя не зависит от скорости. Сопротивление движению пропорционально квадрату скорости автомобиля. Емкость бензобака автомобиля 40 л, других емкостей для топлива в автомобиле нет. Два водителя (чтобы можно было ехать без перерывов) должны перегнать автомобиль на расстояние 2000 км; заправочные станции по пути расположены на расстояниях 200 км или 300 км друг от друга; перегоны разной длины строго чередуются. За какое минимальное время водители смогут проделать весь путь? Какое минимальное количество бензина можно потратить, если ехать помедленнее? Езда на пониженной передаче приводит к увеличению расхода бензина.

С.Варламов

Ф1689. По гладкому горизонтальному столу свободно скользит прямая однородная палочка длиной L . В данный момент скорость одного из концов палочки равна v и составляет угол α с палочкой, а скорость другого конца по величине равна $2v$. Найдите скорость центра палочки и ускорения ее концов.

А.Палочкин

Ф1690. Небольшое тело бросают параллельно поверхности Земли с высоты 1 км. Определите, где находится точка падения тела на Землю, если его скорость на 1% меньше первой космической скорости. Можно считать Землю идеальным шаром, на котором нет атмосферы.

З.Рафаилов

Ф1691. Динамометр состоит из подставки и прикрепленной к ней однородной пружинки втрое меньшей массы. Один крючок динамометра соединен с подставкой, другой – со свободным концом пружинки. Два таких динамометра соединены «последовательно» – сцеплены двумя крючками, а внешние силы приложены к свободным крючкам. Приложим к этим крючкам противоположно направленные силы \vec{F} и \vec{f} – динамометры поедут по гладкой горизонтальной плоскости, вытянувшись вдоль линии действия сил. Считая, что пружинки не касаются

витками оснований динамометров, определите показания приборов.

С.Варлберман

Ф1692. Поверхность планеты, имеющей такие же размеры, массу и состав атмосферы, как Земля, была полностью покрыта океаном с одинаковыми повсюду глубиной 230 м и температурой $+10^\circ\text{C}$. В результате внутренних процессов температура поднялась повсюду до $+100^\circ\text{C}$, однако глубина океана осталась прежней. Считая, что размеры твердой части планеты совершенно не изменились при нагревании, определите средний коэффициент объемного расширения воды в указанном диапазоне температур.

С.Варламов

Ф1693. Лампочка для фонаря рассчитана на напряжение 2,5 В, ток при этом составляет 0,2 А. В нашем распоряжении имеются мощный источник напряжением 6 В и реостат на 10 Ом (у реостата сделаны выводы от краев обмотки и от движка, который может контактировать с любым витком – такой прибор часто называют потенциометром). Как присоединить лампочку к источнику, чтобы она горела нормально? Где должен находиться движок реостата?

М.Учителев

Ф1694. В компьютерной модели атома водорода все размеры и заряды частиц увеличили в N раз. Считая, что плотность «вещества» частиц в модели сохранена, определите, во сколько раз изменится период обращения «электрона» вокруг ядра. И еще: известно, что в атоме Резерфорда электрон излучает электромагнитные волны и, теряя энергию, должен упасть на ядро через малое время τ . Оцените время падения «электрона» на ядро в увеличенной модели.

А.Зильберман

Ф1695. В схеме на рисунке 1 конденсаторы вначале не заряжены. Напряжение во внешней цепи непрерывно изменяют так, чтобы ток в этой цепи оставался равным I_0 . Какое количество теплоты выделяется в резисторе за время T ?

А.Теплов

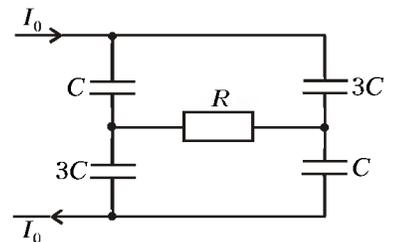


Рис. 1

Ф1696. Цепь из двух конденсаторов емкостью по 10 мкФ и двух резисторов сопротивлением по 1 кОм (рис.2) подсоединена к источнику переменного напряжения 220 В, 50 Гц. Что покажет вольтметр, включенный между точками А и Б? А если вместо вольтметра подключить амперметр – какой ток он покажет? А если включить в цепь ваттметр, подсоединив высокоомную его обмотку (обмотку напряжения) непосредственно к источнику, а низкоомную (токовую) к точкам А и Б, – что он покажет?

З.Рафаилов

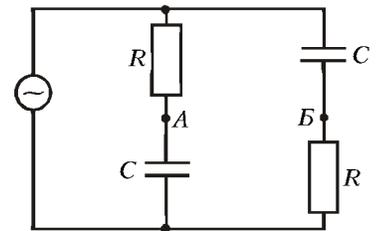


Рис. 2

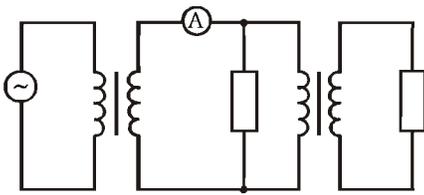


Рис.3

Трансформаторы соединены между собой так, как показано на рисунке 3 (никаких дополнительных подробностей нет!), и подключены к сети переменного напряжения 220 В. Что может показывать в этой схеме амперметр? Сердечники трансформаторов сделаны из материала с очень большой магнитной проницаемостью, потерь энергии в трансформаторах нет. Сопротивления резисторов – по 1 кОм каждое.

Р.Александров

Поправка. В условии задачи Ф1683, опубликованном в предыдущем номере журнала, должна быть задана высота вала H над поверхностью воды. Редакция приносит читателям свои извинения.

Решения задач М1661 – М1665, Ф1673 – Ф1682

М1661. Можно ли отметить 64 единичных кубика в кубе $8 \times 8 \times 8$ так, чтобы среди любых 8 отмеченных кубиков некоторые два находились в одном слое, параллельном грани куба, и при этом в каждом слое, параллельном грани, было отмечено 8 кубиков?

Ответ: да.

Можно считать, что центры кубиков расположены в точках (x, y, z) , $x, y, z \in \mathbb{Z}$, $0 \leq x, y, z \leq 7$. Отметим все клетки, центры которых имеют сумму координат, кратную восьми. Нетрудно сообразить, что таких клеток будет ровно 64, по 8 в любом слое, параллельном грани. Допустим, что нам удалось выбрать восемь отмеченных клеток, никакие две из которых не лежат в одном слое, параллельном грани. Тогда сумма координат этих клеток должна быть равна утроенной сумме чисел от 0 до 7. Этого не может быть, поскольку это число не делится на 8.

А.Вершик

М1662. Может ли куб натурального числа начинаться с 1998?

Ответ: да, может.

Предположив противное, рассмотрим кубы, большие чем 10^{3n} . Наименьшее из чисел y^3 , больших $1998 \cdot 10^{3n}$, не меньше чем $1999 \cdot 10^{3n}$. Обозначим через x^3 наибольший из кубов, меньших чем $1998 \cdot 10^{3n}$; очевидно, $x \geq 10$. Получили:

$$(x + 1)^3 - x^3 > 10^{3n}.$$

Но

$$3x^2 + 3x + 1 < 4x^2$$

при $x \geq 10$. Так как

$$x^3 < 2 \cdot 10^{3n+3},$$

то

$$x^2 < 2^{2/3} \cdot 10^{2n+2} < 2 \cdot 10^{2n+2}.$$

Ф1697. Каждый из двух одинаковых трансформаторов имеет две многовитковые обмотки, в одной из которых витков вдвое больше, чем в другой.

Окончательно получим

$$8 \cdot 10^{2n+2} > 10^{3n}$$

– неравенство, неверное при любом $n \geq 3$.

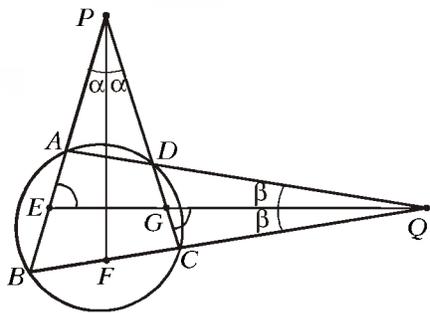
Замечание 1. Подобным же образом доказывается и общее утверждение: любая степень натурального числа может начинаться с любой наперед заданной комбинации цифр.

Замечание 2. Фактически мы доказали существование числа $x = \overline{12abc}$ такого, что $x^3 = 1998 \dots$

В действительности таких чисел даже два: $12596^3 = 1998471484736$, а $12597^3 = 1998947500173$. При этом 12596 – наименьшее из всех пятизначных чисел, удовлетворяющих условиям задачи.

В.Сендеров

М1663. Биссектрисы вписанного четырехугольника образуют в пересечении выпуклый четырехугольник. Докажите, что диагонали полученного четырехугольника перпендикулярны.



Продолжим противоположные стороны исходного четырехугольника ABCD до пересечения в точках P и Q (см. рисунок).

Докажем сначала, что биссектриса PF угла P перпендикулярна биссектрисе QE угла Q.

Поскольку четырехугольник ABCD – вписанный, внешний угол DCQ равен внутреннему углу в противоположной вершине A. Так как прямая QE – биссектриса угла Q, то углы треугольника AQE соответственно равны углам треугольника CQG. Следовательно, $\angle CGQ = \angle AEQ$. Но углы CGQ и PGE равны как вертикальные. Поэтому $\angle PEG = \angle PGE$ и $\triangle PEG$ – равнобедренный. Следовательно, биссектриса угла P является серединным перпендикуляром к отрезку EG, т.е. биссектриса PF угла P перпендикулярна биссектрисе QE угла Q.

Отсюда легко следует утверждение задачи, так как диагонали четырехугольника, образованного на биссектрисах четырехугольника ABCD, лежат на биссектрисах PF и QE.

В случае, когда какие-либо две противоположные стороны четырехугольника ABCD параллельны, утверждение задачи следует из симметричности чертежа.

С.Берлов

М1664. Существуют ли отличный от константы многочлен P с целыми коэффициентами и натуральное число $k > 1$ такие, что все числа вида $P(k^n)$ попарно взаимно просты?

Ответ: не существуют.

Предположим противное.

В некоторой точке k^m имеем $|P(k^m)| > 1$. Это следует из того, что $|P(x)| \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$; но можно рассуждать и по-другому.

Именно, пусть r – степень многочлена. Тогда каждое свое

значение он принимает не более чем в r точках; поэтому $|P(k^i)| \leq 1$ не более чем при $3r$ значениях i .

Будем рассматривать ниже вместо k число $k_1 = k^m$. Рассмотрим какой-либо простой делитель p числа $|P(k_1)|$. Если k_1 делится на p (а значит, и свободный член многочлена $P(x)$ делится на p) – все ясно: в этом случае $P(k_1^j)$ делится на p при любом натуральном j .

Пусть k_1 не делится на p . В этом случае из принципа Дирихле следует, что среди чисел k_1^2, k_1^3, \dots найдется такое k_1^j , что $k_1^j \equiv k_1 \pmod{p}$. Следовательно, $P(k_1^j) \equiv P(k_1) \pmod{p}$, т.е. p делит и $P(k_1)$, и $P(k_1^j)$.

Замечание. Если взять вместо k^n более «разреженную» последовательность k^{2^n} , то ответ задачи сменится на противоположный: достаточно положить $P(x) = x + 1$, $k = 2$. Легко показать, что при $n \neq m$ числа $2^{2^n} + 1$ и $2^{2^m} + 1$ взаимно просты. Такие числа называются *числами Ферма*. Нетрудно доказать и более сильное утверждение: при любом фиксированном натуральном t *обобщенные числа Ферма* $(2t)^{2^n} + 1$ тоже взаимно просты. Таким образом, при построении примера можно брать $k = 2t$, где t – произвольное фиксированное натуральное число.

А.Пастор

M1665. а) В сферу вписано несколько кубов. Каждые три из них имеют общую вершину. Докажите, что все кубы имеют общую вершину.

б)* Четыре куба расположены в пространстве так, что каждые три из них имеют общую вершину. Обязательно ли все четыре имеют общую вершину?

а) В сферу вписаны кубы K_1, K_2, K_n ($n > 3$). Заметим сначала, что если два куба вписаны в сферу и имеют общую вершину, то они имеют общую диагональ, которая является диаметром сферы. При этом, если два куба имеют две общие диагонали, то они совпадают.

По условию задачи кубы K_1, K_2 и K_3 имеют общую вершину, а значит, они имеют общую диагональ d_1 с одним из концов в этой вершине. Кубы K_2, K_3 и K_4 тоже имеют общую диагональ d_2 . Если диагонали d_1 и d_2 совпали, то все четыре куба имеют одну общую диагональ (а значит, две общие вершины). Если же d_1 и d_2 не совпали, то кубы K_2 и K_3 имеют две общие диагонали d_1 и d_2 , а значит, кубы K_2 и K_3 совпадают, и тогда по условию кубы K_1, K_2, K_3 и K_4 имеют общую вершину. Приведенное рассуждение можно считать первым шагом индукции, но заключительный переход от n к $n + 1$ проводится точно так же.

б) Возьмем вспомогательный куб и впишем в него вспомогательный правильный тетраэдр с вершинами в вершинах куба. Четыре нужных нам куба получаются, когда мы симметрично отразим вспомогательный куб относительно каждой из четырех граней вспомогательного тетраэдра. Каждые три из этих кубов имеют общую вершину, но все четыре общей вершины не имеют.

В.Произволов

Ф1673. На гладком клине с углом α при основании находится небольшое тело. С каким вертикальным ускорением нужно двигать клин, чтобы тело оставалось на одной и той же высоте?

На рисунке показаны силы, действующие на тело при движении, и разложенное на составляющие ускорение

тела. А именно: ускорение представлено в виде векторной суммы вертикального ускорения a , с которым тело движется вместе с клином, и ускорения \vec{b} вдоль клина.

Полное ускорение тела вдоль вертикального направления равно нулю:

$$b \sin \alpha - a = 0.$$

Для сил в проекциях на вертикальное и горизонтальное направления можно записать

$$N \cos \alpha - mg = 0, \quad N \sin \alpha = mb \cos \alpha.$$

После простых преобразований получаем

$$a = g \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

А.Клинов

Ф1674. В системе, изображенной на рисунке 1, ускорения блоков направлены по вертикали, куски нитей также вертикальны. С какими силами приходится при этом действовать на блоки? Массы блоков и нитей пренебрежимо малы, нити нерастяжимы.

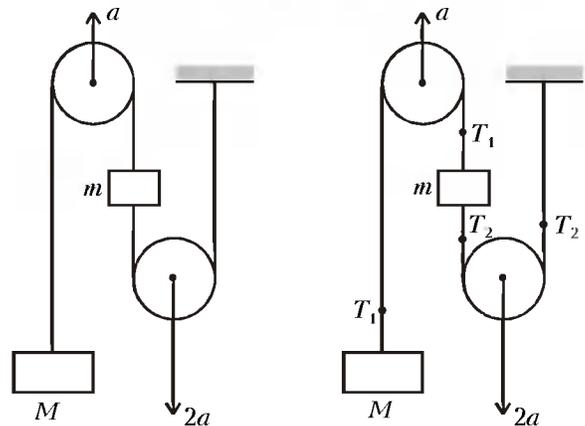


Рис. 1

Рис. 2

По условию задачи ускорение груза массой m направлено вниз и равно $4a$. Тогда (рис.2)

$$mg + T_2 - T_1 = 4ma.$$

Ускорение груза массой M при этом направлено вверх и равно $6a$. Для него

$$T_1 - Mg = 6Ma.$$

Из этих уравнений находятся силы T_1 и T_2 . На верхний блок нужно действовать силой

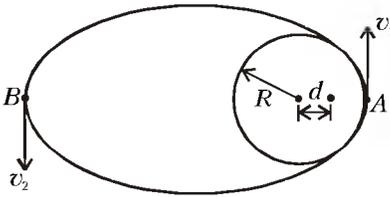
$$F_1 = 2T_1 = 2M(g + 6a),$$

а к нижнему блоку нужно прикладывать силу

$$F_2 = 2T_2 = 2(M(g + 6a) + m(4a - g)).$$

М.Учителев

Ф1675. Для съемок очередного фильма Спилберга был изготовлен макет Земли – в натуральную величину и с той же массой (внутри большого очень легкого пласт-



массового шара находится тяжелый шар из очень плотного вещества). В результате неточностей при сборке центр масс тяжелого шара оказался смещенным в

плоскости экватора на расстояние $d = 100$ км от центра большого шара. Найдите минимальное время оборота спутника, который движется в экваториальной плоскости.

Найдем «минимальную» орбиту спутника. Пусть она почти касается Земли в точке A – ближайшей к сдвинутому центру масс (см. рисунок). Ускорение спутника в этой точке перпендикулярно вектору скорости \vec{v}_1 и определяется гравитационным притяжением «Земли»:

$$a = \frac{GM}{(R-d)^2} = \frac{v_1^2}{R}$$

(мы учли, что радиус кривизны орбиты в этом месте не может быть меньше радиуса Земли R). Отсюда мы можем найти наименьшую возможную скорость в этой точке:

$$v_1 = \frac{\sqrt{GMR}}{R-d}.$$

Рассмотрим теперь самую дальнюю точку орбиты B . Обозначим высоту спутника над поверхностью через x , тогда расстояние от спутника до центра масс в этой точке получится $R + d + x$. Для нахождения связи между скоростями в ближней и дальней точках траектории воспользуемся законом сохранения момента импульса (или вторым законом Кеплера):

$$v_2(R+d+x) = v_1(R-d)$$

и законом сохранения энергии (энергия взаимодействия спутника и «Земли» отрицательна!):

$$-\frac{GMm}{R-d} + \frac{mv_1^2}{2} = -\frac{GMm}{R+d+x} + \frac{mv_2^2}{2}.$$

Подставив сюда значение v_1 из предыдущего уравнения и исключив v_2 , найдем значение высоты x :

$$x = \frac{2d^2}{R-2d} \approx 3200 \text{ м}.$$

Получилась совсем небольшая высота; значит, размер большой полуоси эллипса практически не отличается от радиуса Земли и период обращения T_1 почти равен $T_0 = 2\pi\sqrt{R/g} \approx 5060$ с – периоду обращения вокруг Земли по круговой орбите радиусом R . Отношение этих периодов можно найти, используя третий закон Кеплера:

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{R+x/2}{R}\right)^{3/2} \approx 1,0004.$$

Замечание. На рисунке изображен сильно вытянутый эллипс, однако из расчетов следует, что это практически окружность.

З.Рафаилов

Ф1676. При изучении падения тел в воздухе были получены любопытные результаты. Металлический шарик падал с установившейся скоростью 100 м/с, шарик вдвое большего диаметра из того же металла падал с установившейся скоростью 140 м/с. К маленькому шарiku прикрепили длинную нить, и с таким «хвостом» он падал с установившейся скоростью 15 м/с. Когда длину «хвоста» увеличили в два раза, скорость установившегося падения уменьшилась до 9 м/с. Попробуйте оценить скорость падения этого шарика при очень большой длине «хвоста». Считайте, что «хвост» при движении не изгибается, а остается вертикальным.

При падении шарика в воздухе на него действует сила лобового сопротивления, пропорциональная квадрату его скорости и площади поперечного сечения падающего тела – данные в условии задачи числа позволяют это установить (при увеличении диаметра шарика в два раза его масса увеличивается в восемь раз, а площадь поперечного сечения – в четыре раза, отношение скоростей установившегося движения $140/100$ как раз соответствует «квадратичному» закону). На шарик с «хвостом», кроме силы лобового сопротивления, действует еще сила вязкого трения (на нить), пропорциональная скорости падения и величине боковой поверхности «хвоста», т.е. длине нити. Эта сила явно получается «главной» – скорость установившегося движения в случае шарика с нитью во много раз меньше скорости шарика без нити. Ясно также, что придется учесть и массу длинной нити. Итак, не учитывая силу лобового сопротивления и обозначив массу шарика M , массу единицы длины нити ρ , длину нити в первом случае L , во втором $2L$ и в третьем nL , запишем условия движения системы с установившейся скоростью:

$$(M + \rho L)g = kLv_3,$$

$$(M + \rho \cdot 2L)g = k \cdot 2Lv_4,$$

$$(M + \rho \cdot nL)g = k \cdot nLv_5.$$

После простых преобразований найдем

$$M = 4\rho L, \quad \frac{M + \rho nL}{M + \rho L} = \frac{M + \rho nL}{5\rho L} = \frac{nv_5}{v_3}.$$

При большом n получим

$$\frac{v_5}{v_3} = \frac{1}{5}, \quad \text{и} \quad v_5 = \frac{v_3}{5} = 3 \text{ м/с}.$$

Р.Шаринов

Ф1677. В жестком закрытом литровом сосуде находится 900 г воды; воздуха в сосуде нет. Температура внутри сосуда +100 °С. Содержимому сосуда сообщили 1000 Дж тепла. Оцените количество испарившейся при этом воды. Считайте, что при повышении температуры до +101 °С давление насыщенных паров воды увеличивается от 1 атм до 1,04 атм.

Часть переданного системе тепла пойдет на нагревание воды, часть – на испарение. Попробуем оценить соотношение этих частей.

Пусть все тепло пошло на нагрев – тогда изменение температуры воды составит

$$\Delta T = \frac{Q}{cm} = \frac{1000 \text{ Дж}}{4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}) \cdot 0,9 \text{ кг}} \approx 0,26 \text{ К}.$$

При этом давление насыщенных паров увеличится от 1 атм до 1,01 атм, и «лишнее» количество пара в объеме 0,1 л составит

$$\Delta m_1 = \frac{MV\Delta p}{RT} = \frac{0,018 \text{ кг/моль} \cdot 0,0001 \text{ м}^3 \cdot 1000 \text{ Н/м}^2}{8,3 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)} \cdot 373 \text{ К}} \approx 6 \cdot 10^{-7} \text{ кг}.$$

А если бы все тепло ушло на испарение, то испарилось бы

$$\Delta m_2 = \frac{Q}{r} = \frac{10^3 \text{ Дж}}{2,26 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}} \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ кг},$$

что во много раз больше дополнительного количества испарившейся воды, определяемого насыщением пара. Очевидно, что только очень небольшая часть тепла пойдет на испарение – «лишнее» количество воды не может испариться, так как очень быстро наступит насыщение пара в свободной части объема. Можно теперь вычистить количество теплоты, необходимое для испарения массы воды Δm_1 , и уточнить величину ΔT , т.е. найти $\Delta T_1 = (Q - r\Delta m_1)/cm$. Однако поправка получится совсем малой: $r\Delta m_1/Q = \Delta m_1/\Delta m_2 \approx 0,015 = 0,15\%$, и ею вполне можно пренебречь.

Итак, первая оценка выглядит вполне разумной, и количество испарившейся воды чуть меньше $\Delta m_1 \approx 0,6$ мг.

Р.Александров

Ф1678. К выводам источника подключают последовательно амперметр и вольтметр, который показывает при этом напряжение 6 В. Когда параллельно ему подключили еще один такой же вольтметр, они в сумме показали 10 В. Подключим параллельно еще очень много таких же вольтметров. Сколько они в сумме покажут? Во сколько раз при этом возрастут показания амперметра?

Обозначим сопротивление амперметра буквой r (если источник не идеальный, используем это обозначение для суммы сопротивления амперметра и внутреннего сопротивления источника). Для случая, когда вольтметр показывает напряжение $U_1 = 6$ В, можно записать

$$rI = U - U_1,$$

где U – напряжение на источнике. Во втором случае, когда вольтметры показывают по $U_2 = 5$ В, полный ток через амперметр увеличится в $(5+5)/6$ раз и составит $I \cdot 10/6$. Тогда получим

$$r \cdot \frac{10}{6} I = U - U_2.$$

У нас теперь есть два уравнения с тремя неизвестными – но нам вовсе не обязательно находить все неизвестные величины r , I и U . Нас интересует, во сколько раз ток, который будет течь через амперметр при большом количестве соединенных параллельно вольтметров, превышает величину I , тогда мы легко найдем и сумму показаний вольтметров.

Итак, при большом количестве вольтметров напряжение на каждом из них должно получиться совсем малым, и для тока kI запишем соотношение

$$r \cdot kI = U.$$

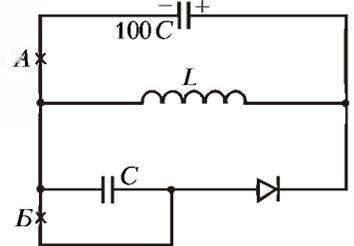
Из полученных уравнений находим $k = 5$. Следовательно, суммарный ток (сумма токов через все вольтметры) в 5 раз больше, чем в самом первом случае, когда один вольтметр показывал 6 В. А это означает, что сумма показаний вольтметров возрастет тоже в 5 раз, т.е. будет равна 30 В.

А.Простов

Ф1679. В вашем распоряжении есть незаряженный конденсатор емкостью C , заряженный до напряжения U конденсатор емкостью $100C$, катушка индуктивности и полупроводниковый диод (никаких других элементов у вас нет). До какого максимального напряжения можно было бы зарядить конденсатор малой емкости, если бы все эти элементы были идеальными? Как для этого нужно было бы действовать? Можете ли вы придумать больше одного способа?

Мы можем придумывать самые разные схемы «перекачки» зарядов, но если у нас нет источников дополнительной энергии, то в лучшем случае вся начальная энергия без потерь будет перенесена в конденсатор емкостью C , при этом его напряжение окажется в 10 раз больше величины U . Одна из возможных схем приведена на рисунке. После подключения конденсатора емкостью $100C$, заряженного в показанной на рисунке полярности, к остальной части схемы по катушке начнет течь ток (диод не дает заряжаться конденсатору емкостью C). Подождя некоторое время (больше чем $T/4 = 0,5\pi\sqrt{L \cdot 100C}$), перережем провод в точке A – к этому моменту конденсатор емкостью $100C$ окажется разряженным, а по замкнутому контуру катушка–диод будет течь неизменный по величине ток, т.е. вся энергия конденсатора перейдет в энергию катушки (по условию элементы цепи можно считать идеальными). Осталось перерезать провод в точке B – тогда начнет заряжаться конденсатор емкостью C . Когда ток через катушку уменьшится до нуля и вся энергия катушки перейдет в энергию заряжаемого конденсатора, процесс прекратится – диод не позволит зарядам покинуть конденсатор, в котором и окажется вся энергия. В этом случае напряжение конденсатора емкостью C станет равным максимально возможному, и условие задачи будет выполнено.

Есть еще несколько способов добиться такого же результата (если бы мы могли мгновенно и в нужный момент подключать и отключать конденсаторы, мы смогли бы даже обойтись без диода!). Однако идеальную катушку нельзя «отрывать» от внешней цепи даже на очень короткое время, поэтому не всякая схема пригодна. Обсудим, например, такой вариант – подключим к заряженному конденсатору емкостью $100C$ последовательную цепь из катушки, пропускающей в данной полярности диода и незаряженного конденсатора емкостью C . По цепи протечет некоторый заряд, и процесс прекратится. Теперь поменяем местами выводы конденсатора емкостью C – процесс продолжится, и заряд этого конденсатора возрастет. Повторим такие переключения несколько раз – после очередного переключения конденсатор емко-



стью 100С будет практически разряжен, а почти вся его энергия окажется у конденсатора емкостью С. Если на этом остановиться, условие задачи окажется выполненным. Подумайте, однако, что произойдет, если продолжить процесс переключений.

А.Зильберман

Ф1680. В схеме, изображенной на рисунке, поочередно замыкают переключатели (перед замыканием одного из них другой размыкают). Найдите напряжение «среднего» конденсатора после большого числа переключений. Элементы цепи считайте идеальными. Конденсаторы вначале не заряжены.

Если вначале замкнуть левый ключ, присоединенный к батарейке с напряжением 2Е, конденсаторы емкостями С и 2С зарядятся каждый до напряжения Е, и дальнейшие включения-выключения уже ничего не изменят – конденсатор емкостью 2С не будет заряжаться вовсе (он подключается между плюсом батарейки с напряжением Е и плюсом конденсатора емкостью С, заряженного до такого же напряжения). Если же первым замкнуть правый ключ, присоединенный к батарейке с напряжением Е, то процесс будет более сложным. После первого замыкания этого ключа конденсатор емкостью 2С зарядится до напряжения Е/3, а «средний» конденсатор емкостью С – до напряжения 2Е/3. Разомкнем этот ключ и замкнем второй. Простой расчет показывает, что теперь «средний» конденсатор будет заряжен до 4Е/3, «правый» конденсатор – до напряжения 2Е/3, а заряд «левого» не изменится. Разомкнем этот ключ и снова замкнем первый – напряжение «среднего» конденсатора станет равным 8Е/9, а «левый» конденсатор зарядится до напряжения Е/9. Можно проводить анализ и дальше, но ясно, что напряжение «среднего» конденсатора приближается к Е, а напряжение «левого» – к нулю. Легко можно вывести формулу: после каждой пары переключений напряжение «левого» конденсатора уменьшается в три раза.

Итак, после большого числа переключений напряжение «среднего» конденсатора станет очень близким к Е.

А.Зильберман

Ф1681. На ферромагнитный кольцевой сердечник с очень большой магнитной проницаемостью намотаны две совершенно одинаковые обмотки – катушки индуктивностью L каждая. Последовательно с одной из обмоток включаем конденсатор емкостью С, к получившейся последовательной цепочке подключаем параллельно вторую обмотку. При помощи генератора синусоидального напряжения и лампочки накаливания исследуем свойства получившейся схемы (рис.1). Как меняется накал лампочки при изменении частоты генератора? Что изменится, если поменять местами выводы одной из обмоток?

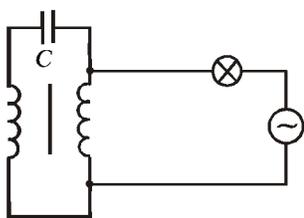


Рис. 1

В одном из возможных вариантов включения выводов

катушек напряжение, приложенное к конденсатору, все время равно нулю, и ток в левой части цепи течь вообще не будет – тогда останется только правая катушка. В этом случае накал лампочки при увеличении частоты генератора будет монотонно убывать – индуктивное сопротивление катушки пропорционально частоте.

Если теперь любую из катушек переключить наоборот, то напряжения катушек останутся равными, но теперь они не вычитаются, а складываются. Исследуем получившийся двухполюсник (рис.2): приложим к его выводам переменное напряжение $U(t) = U_0 \cos \omega t$ и посмотрим, какой ток потечет от источника. Напряжение одной из катушек равно напряжению источника, а равенство магнитных потоков через катушки приводит к тому, что и напряжение второй катушки будет таким же. Значит, к конденсатору будет приложено удвоенное напряжение источника, и через него будет идти ток $I_2 = -2U_0 \omega C \sin \omega t$. Поле, пронизывающее витки каждой из катушек, определяется разностью токов в них:

$$L(I'_1 - I'_2) = U_0 \cos \omega t,$$

и

$$I_1 - I_2 = \frac{U_0}{\omega L} \sin \omega t.$$

Общий ток равен

$$I_1 + I_2 = (I_1 - I_2) + 2I_2 = U_0 \left(\frac{1}{\omega L} - 4\omega C \right) \sin \omega t,$$

а сопротивление двухполюсника составляет

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{\omega L} - 4\omega C} = \frac{\omega L}{1 - 4\omega^2 LC}.$$

Такая зависимость Z от частоты ω характерна для параллельного контура из катушки индуктивностью L и конденсатора емкостью 4C. Видно, что на низких частотах двухполюсник ведет себя как катушка, а на высоких – как конденсатор. Таким образом, накал лампочки становится большим на совсем низких и на достаточно высоких частотах. По мере возрастания частоты от малых значений накал лампочки уменьшается. На частоте $\omega_p = 1/\sqrt{2LC}$ сопротивление двухполюсника возрастает до очень больших значений – при приближении к этой частоте накал лампочки уменьшается практически до нуля, а дальше снова возрастает при увеличении частоты.

З.Рафаилов

Ф1682. В половине шара радиусом R из прозрачного стекла с коэффициентом преломления $n = 2$ сделано симметричное сферическое углубление так, что толщина стекла на линии центров сфер составляет R/2 (рис.1). Точечный источник света помещен в точке А (в центре внешней сфе-

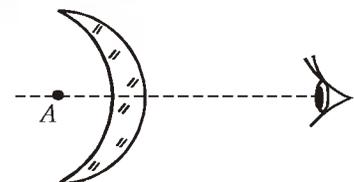


Рис. 1

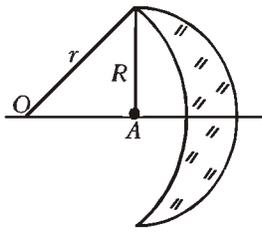


Рис. 2

рической поверхности). Где его видит наблюдатель, глаз которого находится вдали на линии центров сферических поверхностей?

Найдем радиус кривизны r углубления – внутренней сферической поверхности (рис.2). Из прямоугольного треугольника получим

$$r^2 = R^2 + (r - R/2)^2, \text{ и } r = 1,25R.$$

Теперь построим ход луча, испущенного источником (рис.3). Для удобства мы будем изображать на рисунке лучи, падающие на сферические поверхности под достаточно большими углами (иначе ничего нельзя будет разобрать), но надо помнить, что изображение формируется лучами, идущими под очень малыми углами к главной оптической оси – зрачок наблюдателя маленький и расположен далеко. Поэтому мы можем пользоваться стандартными упрощениями – для малых углов заменять синусы и тангенсы значениями самих углов, выраженными в радианах. Итак, рассмотрим ход луча, испущенного под углом α к главной оси. Он попадает на внутреннюю сферическую поверхность на расстоянии $0,5R\alpha$ от оси.

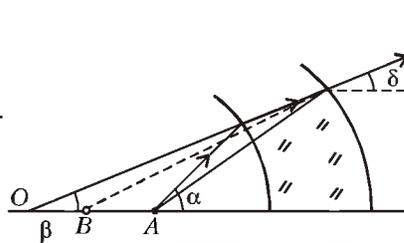


Рис.3

Нарисуем луч, падающий в эту же точку из центра внутренней сферической поверхности O (нормаль); пусть он составляет с главной осью угол β . Легко выразить этот угол через α :

$$0,5R\alpha = r\beta = 1,25R\beta, \text{ и } \beta = 0,4\alpha.$$

Угол падения луча с нормалью составит при этом $0,6\alpha$, а после преломления на поверхности стекла с $n = 2$ получится угол $0,3\alpha$ с нормалью. С главной оптической осью это луч составляет угол $0,4\alpha + 0,3\alpha = 0,7\alpha$. Ко второй сферической поверхности (внешней) луч подойдет изнутри на расстоянии $0,5R\alpha + 0,5R \cdot 0,7\alpha = 0,85R\alpha$ от главной оптической оси. Проведем нормаль к сферической поверхности в этой точке (радиус из точки A – центра этой поверхности) – угол между этим радиусом и главной оптической осью получится $\gamma = 0,85R\alpha/R = 0,85\alpha$, тогда угол падения составит $\gamma - 0,7\alpha = 0,15\alpha$, а после преломления угол увеличится вдвое и будет равен $0,3\alpha$. Вышедший луч составит угол $\delta = \gamma - 0,3\alpha = 0,55\alpha$ с главной оптической осью. Продолжение этого луча пересекается с главной оптической осью в точке B на расстоянии $L = 0,85R\alpha/0,55\alpha = 17R/11 \approx 1,55R$ от места выхода луча (с учетом малости углов – от точки пересечения внешней сферической поверхности с главной оптической осью). Мы взяли произвольный малый угол падения луча источника на нашу линзу, положение полученной точки не зависит от величины этого угла – узкий пучок лучей после преломления кажется исходящим из этой точки; следовательно, мы нашли положение изображения, наблюдаемого глазом.

А.Очков

НАМ ПИШУТ

Супермагические квадраты

На рисунках 1 и 2 приведены магические квадраты, обладающие целым букетом замечательных свойств. Напомним, что числовая таблица называется

Первый супермагический квадрат 8×8 на шахматной доске

8	394	243	457	306	194	43	257	106
7	156	207	293	344	356	407	93	144
6	56	107	193	244	256	307	393	444
5	494	343	157	6	294	143	357	206
4	242	189	311	258	442	389	111	58
3	208	361	339	492	8	161	139	292
2	308	461	39	192	108	261	239	392
1	142	89	211	158	342	289	411	358
	a	b	c	d	e	f	g	h

Рис. 1

магическим квадратом, если сумма чисел в каждом ее горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и по каждой из диагоналей одна и та же – эта сумма называется магической константой. Магическая константа обоих приведенных квадратов равна 2000. Дру-

Второй супермагический квадрат 8×8 на шахматной доске

8	227	53	433	761	107	139	233	47
7	89	239	389	509	73	11	449	241
6	353	127	183	13	181	109	383	751
5	97	61	163	191	409	401	331	347
4	151	797	317	29	419	43	113	131
3	311	443	431	101	79	307	179	149
2	269	23	167	197	293	709	271	71
1	503	257	17	199	439	281	41	263
	a	b	c	d	e	f	g	h

Рис. 2

гие замечательные свойства этих квадратов связаны с маршрутами шахматных фигур и расположением шахматных полей.

Квадрат рисунка 1. Рассмотрим любую из 20 горизонтальных полосок, состоящих из 4 соседних клеток и расположенных на территории «белых» фигур (т.е. в пределах первых четырех горизонталей на шахматной доске). Каждой такой полоске соответствует симметричная ей относительно горизонтальной оси полоска из 4 клеток на территории «черных» фигур. Например, полоске b3-c3-d3-e3 соответствует полоска b6-c6-d6-e6. Сумма чисел, стоящих в клетках каждой пары симметричных полосок, равна магической константе 2000.

Рассмотрим маршруты движения белопольного слона – главную диагональ a8-h1 и три пары малых диагоналей: а) a3-b1, c8-h3; б) a4-d1, e8-h5; в) a6-f1, g8-h7. Суммы чисел, расположенных на восьми полях главной диагонали и каждой из пар малых диагоналей, равны магической константе. Та-

ыми же свойствами обладает главная черепица диагональ a1-h8 и три пары соответствующих ей малых диагоналей a) a3-f8, g1-h2, б) a5-d8, e1-h4, в) a7-h8, с1-h6. Отсюда, кстати, следует, что сумма чисел, расположенных на 32 белых полях, равна сумме чисел, расположенных на 32 черных полях.

Рассмотрим маршрут с ходом короля на восьми полях a1-c2 a3-c4 a5-c6 a7-c8 Сумма чисел, стоящих на этих полях, равна 2000. На обычной шахматной доске существует 12 аналогичных маршрутов, а на цилиндрической шахматной доске, образованной из обычной доски склейкой ее левой и правой границ, — 16.

Отметим следующие шесть кольцевых маршрутов ферзя a2-a3-b4-c4-d3-d2-c1-b1, c2-c3-d4-e4-f3-f2-e1-d1, e2-e3-f4-g4-h2-g1-f1, a6-a7-b8-c8-d7-d6-c5-b5, c6-c7-d8-e8-f7-f6-e5-d5, e6-e7-f8-g8-h7-h6-g5-f5. Сумма чисел, стоящих в восьми полях каждого из этих маршрутов, равна магической константе 2000.

Отметим два любых поля в квадрате a1-a4 d4-d1, затем два поля в квадрате e1-e4 h4-h1, симметричных первым двум относительно вертикальной оси шахматной доски. Полученные четыре поля образуют симметрию относительно горизонтальной оси доски. Сумма чи-

сел расположенных на восьми полученных таким образом полях, равна магической константе 2000.

Справедливы также следующие свойства: сумма, сумма квадратов и суммы кубов всех 32 чисел, расположенных на территории «белых» фигур (первые четыре горизонтали шахматной доски), равны соответственно сумме, сумме квадратов и сумме кубов всех 32 чисел, расположенных на территории «черных» фигур.

Квадрат рисунка 2. Все 64 числа этого квадрата — простые числа.

Отмечены ниже замечательные свойства справедливо как для обычной, так и для цилиндрической шахматных досок.

Магическую константу 2000 составляет в сумме каждые 8 чисел, расположенных на зигзагообразных маршрутах короля a1-b2-a3-b4-a5-b6-a7-b8, d1-c2-d3-c4-d5-c6-d7-c8, e3-b4-c3-d4-e3-f4-g3-h4, a8-b7-c8-d7-e8-f7-g8-h7 и других маршрутах подобного типа. Отсюда следует, что сумма чисел, расположенных на всех 32 белых полях, равна сумме чисел, расположенных на всех черных полях.

Рассмотрим движения пона по вертикальным и горизонтальным маршрутам следующих типов a1-c2-a3-e4-a5-

c6-a7-e8 и a1-b3-c1-d3-e1-f3-g1-h3. Сумма восьми чисел, расположенных по каждому из таких маршрутов, равна магической константе 2000.

Каждой сумме четырех чисел, расположенных в вершинах квадрата на территории «белых» фигур, соответствует равная ей сумма четырех чисел, расположенных также в вершинах квадрата на территории «черных» фигур. Например, справедливы следующие 8 равенств

$$\begin{aligned} 503 + 311 + 431 + 17 &= \\ &= 409 + 73 + 449 + 331; \\ 257 + 443 + 101 + 199 &= \\ &= 401 + 11 + 241 + 347; \\ 439 + 79 + 179 + 41 &= \\ &= 97 + 69 + 389 + 163; \\ 281 + 307 + 149 + 263 &= \\ &= 61 + 239 + 509 + 191; \\ 269 + 151 + 317 + 167 &= \\ &= 181 + 107 + 233 + 383; \\ 23 + 797 + 28 + 197 &= \\ &= 189 + 139 + 47 + 751; \\ 293 + 419 + 113 + 271 &= \\ &= 353 + 227 + 433 + 83; \\ 709 + 43 + 131 + 71 &= \\ &= 127 + 53 + 761 + 13. \end{aligned}$$

С. Берковичко

Головокружительный бросок

Однажды вечером, просматривая газету «Известия», я наткнулся на заметку о том, как мастер гимнастических трюков Иохен Нихен Шапфер совершил головокружительный бросок на мотоцикле массой 100 килограммов с телевизионной вышки в Гамбурге, предварительно захватив мотоцикл на резиновой норе «банджи» (который гимнаст, собственно, и рекламировал). «Интересно было бы посмотреть график возникающих при этом колебаний», — подумал я и принялся за дело.

Прежде всего нужно было сформулировать условие соответствующей физической задачи.

Точечное тело массой m, прикрепленное к упругому шнуру длиной l_0 и жесткостью k, падает с высоты $h > l_0$ такой, что тело может совершать свободные колебания. Как будет изменяться со временем скорость тела?

Для облегчения задачи давайте сначала построим график зависимости действующей силы от координат тела (рис 1). Для этого совместим начальное положение тела с началом координат, а ось X направим вертикально вниз. Пока шнур не деформирован, на

тело действует только сила тяжести mg . Когда длина шнура станет больше l_0 , на тело будет действовать сумма сил $F = mg - k\Delta x$, где $\Delta x = x - l_0$. При $x = d_1$ на тело вообще не действует сила. Эту координату легко найти $d_1 = l_0 + mg/k$. Дальше на тело начинает действовать отрицательная сила, при этом скорость тела уменьшается, а шнур продолжает растягиваться. На сколько он может растянуться? На этот вопрос поможет ответить закон сохранения энергии. Площадь прямоугольной граници над осью X численно равна кинетической энергии. Эта энергия переходит в энергию деформированного шнура, численно равную площади треугольника под осью. На равенства этих площадей и находится d_2 — координата максимального отклонения тела от начального положения

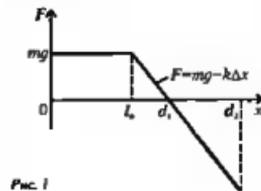


Рис. 1

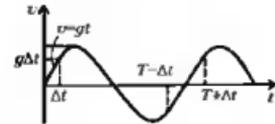


Рис. 2

Затем тело начинает совершать колебания. Зная, как меняется сила при таких колебаниях, можно построить график зависимости скорости от времени. Прежде всего отметим, что эти колебания периодические и на промежутке от l_0 до d_2 — гармонические, так как сила здесь пропорциональна смещению. А вот на участке от 0 до l_0 , где действует постоянная сила, скорость меняется согласно формуле $v = gt$.

Теперь можно построить график колебаний (рис 2). Видно, что график этот необычен. Каждый период можно поделить на два участка: на одном скорость меняется линейно, а на втором — по гармоническому закону.

В реальных условиях, при наличии сил трения, происходит затухание колебаний. При этом по мере затухания участок равноускоренного движения становится все меньше, а потом и совсем исчезает.

О. Донченко

Центром тяжести каждого тела является некоторая расположенная внутри его точка – такая, что если за нее мысленно подвесить тело, то оно остается в покое и сохраняет первоначальное положение.

Архимед

Два тяжелых тела, связанных друг с другом, не могут сами по себе прийти в движение без того, чтобы их общий центр тяжести не опускаялся.

Эванджелиста Торричелли

Я заметил удивительный закон природы...: «общий центр тяжести двух или трех или скольких угодно тел продолжает двигаться равномерно в ту же сторону по прямой линии как до, так и после удара».

Христиан Гюйгенс

Ведь из того положения, что брошенная в пустоте точка описывает параболу, можно также сделать вывод, что всякое конечное тело, если оно будет брошено, должно двигаться по параболе.

Леонард Эйлер

А так ли хорошо знаком вам центр масс?

Не удивляйтесь тому, что это словосочетание не встречается в эпитафиях, хотя именно о нем идет в них речь. Просто долгое время исследователям этого понятия не приходилось сталкиваться с обстоятельствами, в которых необходимо отличать «центр тяжести» тела от его «центра масс». В одной из задач мы предложим вам такую ситуацию, однако в подавляющем большинстве случаев один термин безболезненно можно заменять другим.

Изучение замечательных свойств «центров», которому более двух тысячелетий, оказалось полезным не только для механики – например, при конструировании транспортных средств и военной техники, расчете устойчивости сооружений или для вывода уравнений движения реактивных аппаратов. С помощью этих свойств стало возможным доказывать новые математические факты, находить решения некоторых трудных геометрических проблем, а впоследствии – строить плодотворные модели в таких областях знания, как химия, генетика, статистика, металлургия, теория цветного зрения... Вряд ли Архимед мог даже помыслить о том, что понятие центра масс окажется весьма удобным для исследований в ядерной физике или в физике элементарных частиц.

Многочисленные достоинства центра масс позволяют поместить его сегодня в центр вашего внимания.

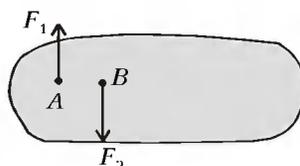
Вопросы и задачи

1. При перемещении тела с экватора на полюс действующая на него сила тяжести меняется. Отражается ли это на положении центра тяжести тела?
2. Можно ли найти центр тяжести

«гантели», состоящей из двух массивных шариков, соединенных невесомым стержнем, при условии, что длина «гантели» сравнима с диаметром Земли?

3. Почему при резком торможении автомобиля его передняя часть опускается?

4. Однородное тело находится в покое. К точкам A и B приложили две равные и противоположно направленные силы, как показано на рисунке. В каком направлении станет двигаться точка B ?



5. Отчего автобус, совершая поворот на относительно большой скорости, наклоняется в сторону, противоположную повороту?

6. Канат длиной L и массой m лежит на земле. Один его конец подняли на высоту L . Какая при этом была совершена работа?

7. Где находится центр тяжести пузырька?

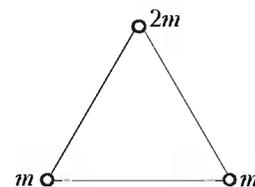
8. В цилиндрический стакан понемногу наливают воду. Как будет изменяться положение центра тяжести системы стакан – вода?

9. Какой длины конец надо отрезать от однородного стержня, чтобы его центр тяжести сместился на Δl ?

10. Однородный стержень согнули посередине под прямым углом. Где оказался теперь его центр тяжести?

11. Найдите центр тяжести системы шаров, находящихся в вершинах рав-

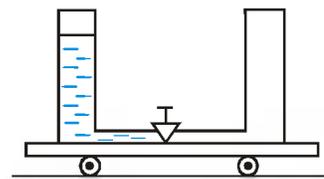
ностороннего невесомого треугольника, изображенного на рисунке.



12. Невысокий деревянный цилиндр, обточенный с одного конца в форме полушара, остается в покое, если его поставить на горизонтальную плоскость любой точкой закругления. Где находится его центр тяжести?

13. Неподвижная космическая станция представляет собой цилиндр. Космонавт начинает круговой обход станции по ее поверхности. Что произойдет со станцией?

14. Как будет двигаться изображенная на рисунке тележка после открытия крана? Трением колес о плоскость пренебречь.



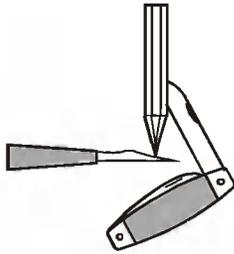
15. Две заряженные частицы массы m и $2m$, которые взаимодействуют только между собой, одновременно вылетают навстречу друг другу из точек A и B , имея равные по величине импульсы. По траектории частицы массой $2m$, приведенной на рисунке, восстановите траекторию другой частицы.



16. Почему трудно передвигаться на ходулях?

17. Когда канатоходцу легче удерживать равновесие – при обычном передвижении по канату или при переносе сильно изогнутого коромысла, нагруженного ведрами с водой?

18. Как объяснить сохранение равновесия в случае, показанном на рисунке?



19. Глубина лунки в доске, в которую вставлен шар, в два раза меньше радиуса шара. При каком угле наклона доски к горизонту шар выскочит из лунки?

Микроопыт

Поставьте детскую игрушку неваляшку (Ваньку-Встаньку) на шероховатую доску и приподнимите правый край доски. В какую сторону отклонится «голова» игрушки при сохранении ее равновесия?

Любопытно, что...

...в своем труде «О равновесии плоских тел» Архимед употреблял понятие центра тяжести, фактически не определяя его. Видимо, оно впервые было введено неизвестным предшественником Архимеда или же им самим, но в более ранней, не дошедшей до нас работе.

...должно было пройти долгих семнадцать столетий, прежде чем наука прибавила к исследованиям Архимеда о центрах тяжести новые результаты. Это произошло, когда Леонардо да Винчи сумел найти центр тяжести тетраэдра. Он же, размышляя об устойчивости итальянских наклонных башен, в том числе – Пизанской, пришел к «теореме об опорном многоугольнике».

...представленный в эпиграфах принцип Торричелли (а его имя носят и формулы для расчета центра масс), оказывается, был предвосхищен его

учителем Галилеем. В свою очередь, этот принцип лег в основу классического труда Гюйгенса о маятниковых часах, а также был использован в знаменитых гидростатических исследованиях Паскаля.

...выясненные еще Архимедом условия равновесия плавающих тел впоследствии пришлось переоткрывать. Занимался этим в конце XVI века голландский ученый Симон Стевин, применявший, наряду с понятием центра тяжести, и понятие «центр давления» – точку приложения силы давления окружающей тело воды.

...метод, позволивший Эйлеру изучать движение твердого тела под действием любых сил, состоял в разложении этого движения на перемещение центра масс тела и вращение вокруг проходящих через него осей.

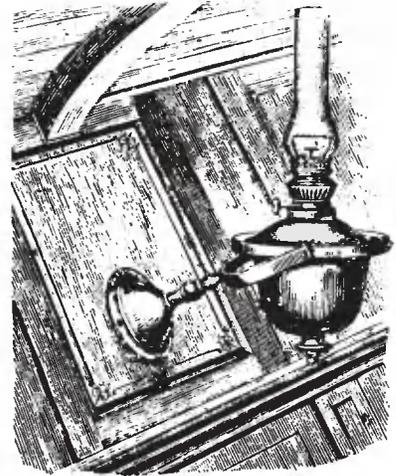
...для сохранения в неизменном положении предметов при движении их опоры уже несколько столетий применяется так называемый карданов подвес – устройство, в котором центр тяжести тела располагают ниже осей, вокруг которых оно может вращаться. Примером может служить показанная на рисунке корабельная керосиновая лампа.

...хотя на Луне сила тяжести в шесть раз меньше, чем на Земле, увеличить там рекорд по прыжкам в высоту удалось бы «всего» лишь в четыре раза. К такому выводу приводят расчеты по изменению высоты центра тяжести тела спортсмена.

...помимо суточного вращения вокруг своей оси и годового обращения вокруг Солнца, Земля принимает участие еще в одном круговом движении. Вместе с Луной она «крутится» вокруг общего центра масс, расположенного примерно в 4700 километрах от центра Земли.

...некоторые искусственные спутники Земли снабжены складной штангой в несколько или даже в десятки метров, утяжеленной на конце (так называемый гравитационный стабилизатор). Дело в том, что спутник вытянутой формы стремится при движении по орбите повернуться вокруг своего центра масс так, чтобы его продольная ось расположилась вертикально. Тогда он, подобно Луне, будет все время обращен к Земле одной стороной.

...движение центра масс системы из разгоняемой в ускорителе частицы и мишени, с которой она затем сталкивается, приводит лишь к неоправданным потерям энергии. Эффективно использовать энергию относительного движения налетающих друг на друга



Карданов подвес

частиц удаётся в ускорителях на встречных пучках, где центр масс системы остается в покое. Для ультрарелятивистских частиц выигрыш в энергии может быть очень большим – в тысячи или даже в миллионы раз (для классических частиц в случае одинаковых масс выигрыш всего лишь четырехкратный).

...наблюдения за движением некоторых видимых звезд свидетельствуют о том, что они входят в двойные системы, в которых происходит вращение «небесных партнеров» вокруг общего центра масс. Одним из невидимых компаньонов в такой системе может быть нейтронная звезда или, возможно, черная дыра.

Что читать в «Кванте» о центре масс

(публикации последних лет)

1. «Системы отсчета в механике» – 1994, Приложение №3, с.103;
2. «Что такое центр масс?» – 1995, Приложение №4, с.35;
3. «Почему не лежит Ваньке-Встаньке» – 1996, №1, с.38;
4. «Задачи на центр масс» – 1996, №2, с.43;
5. Калейдоскоп «Кванта» – 1998, №1, с.32;
6. «Задачи с распределенной массой» – 1998, №2, с.46;
7. «Куда проскользнет палочка?» – 1998, №4, с.41;
8. «Палочка продолжает падать...» – 1999, №2, с.26.

Материал подготовил
А.Леонович

Задачи

1. На столе лежала горсть конфет. Первый мальчик взял десятую часть всех конфет. Второй взял десятую часть того, что осталось, и еще десятую часть того, что



взял первый. Третий взял десятую часть того, что осталось, и еще десятую часть того, что взяли первые двое. Четвертый взял десятую часть того, что осталось, и еще десятую часть того, что взяли первые трое... Так продолжалось до тех пор, пока конфеты не кончились. Сколько было мальчиков, и кому из них досталось больше всех конфет?

И. Акулич

2. Бабушка хочет поставить на край круглого стола кастрюлю так, чтобы она только на $\frac{1}{3}$ площади своего дна соприкасалась с поверхностью стола. Дедушка утверждает, что в этом случае кастрюля на столе не удержится. Прав ли дедушка?

В. Сендеров



3. Все натуральные числа от 1 до 100 записаны подряд. Какие-то 25 из них вычеркнули. Можно ли вычеркнуть еще 25 чисел так, чтобы сумма всех 50

вычеркнутых чисел равнялась сумме всех 50 невычеркнутых?

В. Произолов

4. Шерлок Холмс обнаружил начальный обрывок зашифрованного послания, написанного неизвестным ему шифром:

ШЫР-ПИР Ю ПЯПЮЖГЫ
ЗЭЛЭМЪГЫЙ ГЭСРЫГ ...

Помогите Холмсу расшифровать сообщение.

(Из архивов ВЗМШ)



5. Каждый житель некоторого царства мог быть либо рыцарем, либо лжецом. Рыцари обычно говорят правду. Когда какой-нибудь рыцарь произносит ложь, он тут же погибает. Лжецы обычно говорят неправду. Если какой-то лжец произносит правду, то с этого момента он становится рыцарем. Однажды царь сообщил одному из своих придворных фразу, которая, передаваясь из уст в уста, погубила почти все население царства – уцелел один лишь царь. Докажите, что в этом царстве был по крайней мере один лжец.

А. Жуков



Коварные проценты

В. ПЕТРОВ

– Хорошо ли ты знаешь проценты? – спросил как-то Пончик у Незнайки.

– Я их знаю, как свои пять пальцев! – похвастался Незнайка. – Это проще простого! Пальцы на одной руке составляют $1/2$ общего количества всех пальцев на моих руках, т.е. половину от ста процентов, т.е. пятьдесят процентов! Правда, я молодец?

– Правда, что ты хвастун.

– Нет, я не хвастун, я самый скромный в мире великий математик.

– В таком случае, Ваше Скромное Величество, как Вы решите такую задачу? До празднования дня рождения у Синеглазки я весил 100 г, а после празднования я поправился на 10%. Спустя неделю я похудел на 10%. Какой же теперь у меня вес?

– Ага! Сколько прибывло, столько и убывло. Значит, каким ты был, таким ты и остался – стограммовым.

– А вот и неправда!

– Почему?

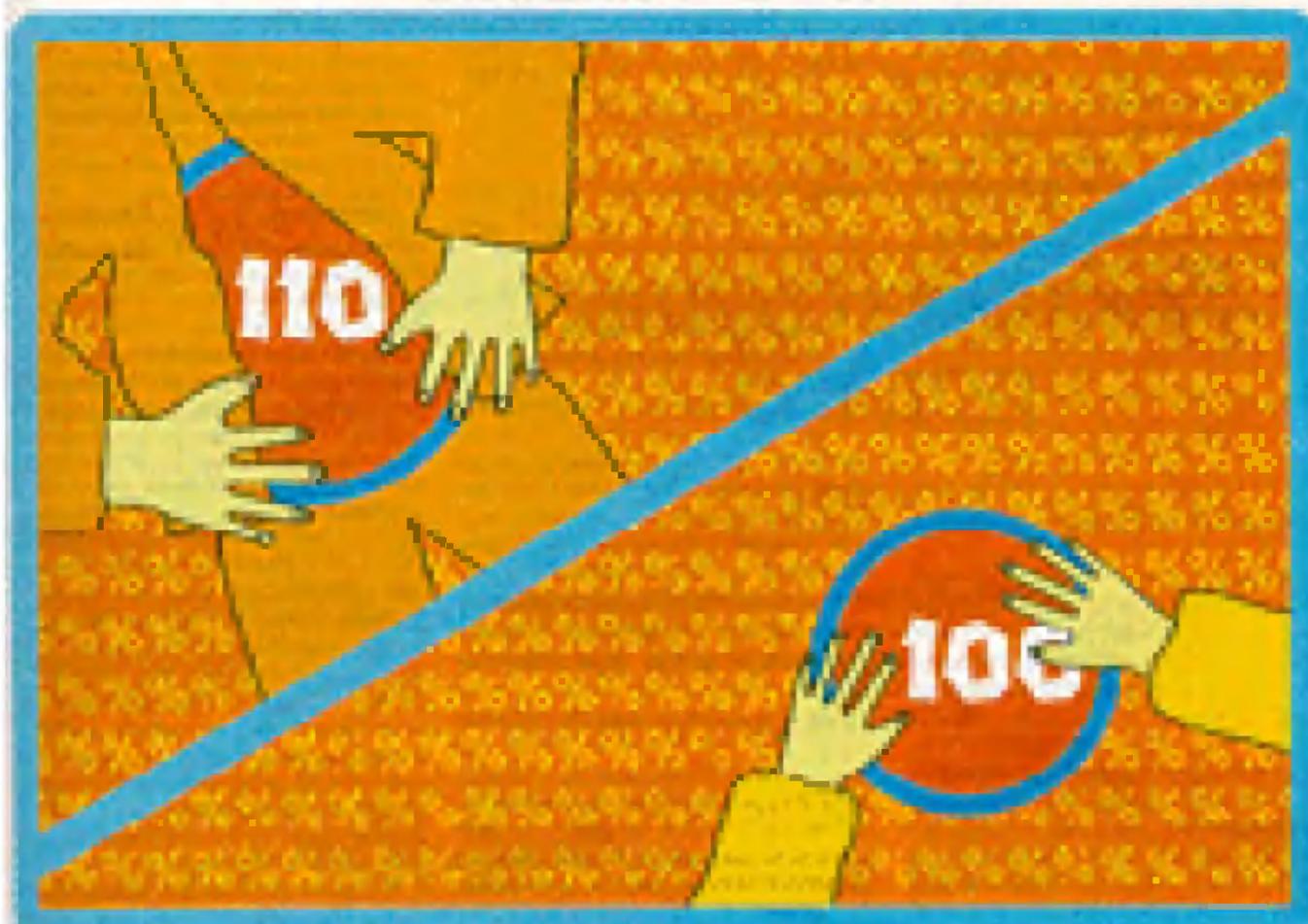
– Ты ошибся, считая, что сколько прибывло, столько и убывло. Ведь десять процентов потолстения совсем не равны десяти процентам похудения.

– Это почему же?

– Потому что проценты берутся от разных количеств. В первом случае, когда я поправился, десять процентов берутся от моего исходного веса 100 г – после празднования дня рождения я стал весить 110 г. Во втором случае проценты берутся уже от нового веса 110 г – это составляет 11 г. Итак, сейчас я вешу всего-навсего 99 г.

– Вот чудеса! Глядя на тебя, Пончик, я никогда не смог бы этого подумать!

– При чем тут «гляди – не гляди»? Надо знать математику!



* * *

Сюжеты следующих задач о процентах почерпнуты из публикаций в различных периодических изданиях, а также из художественных книг. Оказывается, не один только Незнайка путается, когда речь заходит об этом простом математическом понятии.

1. «В начале одного из сезонов мне неожиданно сообщили, что я должен буду уплатить за снятые помещения почти в три раза дороже, чем прежде... На следующий день я получил письмо, извещавшее меня, что арендная плата будет увеличена только на пятьдесят, а не на триста процентов.» (*Дейл Карнеги, «Как завоевывать друзей и оказывать влияние на людей»*)

Не допустил ли автор математической ошибки?

2. «Сбор с физических лиц в Пенсионный фонд России временно увеличивается с 1 августа на 2 процента, до 3 процентов. ...Сегодня... отчисляют физические лица 1 процент.» (*Сообщение ИТАР – ТАСС, опубликованное в газетах 24 июля 1998 г.*)

Все ли верно в этом тексте?

3. «Руководителей районных сельхозуправлений попросили ответить на такой вопрос: сколько сенажа выйдет из одного килограмма травы с влажностью 80%, если его влажность должна составлять 50%? Из

двадцати руководителей верно ответили только четыре.» (*«Известия», 9 июля 1985 г.*)

А вы можете ответить? Желательно устно.

4. В повести Иосифа Герасимова «Ночные трамваи» приводится следующее якобы имевшее место обращение одного из руководителей страны к руководителю пищевой отрасли: «Мне наука сказала – масла надо полтора миллиона тонн. А сколько у тебя на блюде? Семьсот тридцать тысяч тонн!.. Ты масло какой жирности выпускаешь? Более восьмидесяти процентов? А Европа, между прочим, семьдесят три процента ест... Вот и думай!» Пищевик дал указание на заводы, рассказывает далее писатель, и добыча масла почти в полтора раза возросла.

Верны ли приведенные выше данные, если масло жирности ниже 61,5% (бутиробродное) никогда не выпускалось?

5. В статье «Чем пахнет?» в сороковом номере журнала «Огонек» за 1997 год говорится, что некоторые умельцы из прогорклого импортного сливочного масла 82-процентной жирности «добавлением *энного количества* свежего молока» делают «масло» жирности 72,5%, получая лишние 100 кг на тонну.

Нет ли в этих данных ошибки?

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

Физика 9–11

Публикуемая ниже заметка «Как гора спутник родила» предназначена девяти- и десятиклассникам, заметка «Эта загадочная магнитная сила» – десяти- и одиннадцатиклассникам.

Как гора спутник родила

А. СТАСЕНКО

...и вот, произошло великое землетрясение, и солнце стало мрачно как власяница... и звезды пали на землю... и небо скрылось, свившись как свиток; и всякая гора и остров двинулись с мест своих...

Откровение св. Иоанна Богослова (6:12–14)

ВУЛКАНЫ – ИНТЕРЕСНЕЙШИЕ объекты природы, величественные и грозные. Вот, например: «Кракатау – действующий вулкан в Зондском проливе, между островами Явы и Суматрой. Высота 813 м. Известен исключи-

тельным по силе извержением в августе 1883. Взрыв уничтожил более половины вулканического острова... и был слышен на расстоянии более 3 тыс. км. Огромная морская волна, возникшая при взрыве, погубила на берегах Явы и

Суматры более 36 тыс. чел. Объем продуктов извержения составил около 19 км³. Выброшенный на высоту до 80 км вулканический пепел носился в воздухе несколько лет...»

Это – цитата из энциклопедии. А в одной Очень Научной Книге по космической газодинамике есть слова о возможности выброса вулканами астероидов: «Особый интерес с теоретической точки зрения представляет действие нормальных вулканических взрывов, результатом которых могут являться грандиозные катастрофические извержения типа Кракатау. Подобные взрывы не представляют собой какое-либо исключительное явление, а должны рассматриваться как закономерный результат физико-химических процессов, протекающих в недрах Земли... Высокие скорости газа при вулканических извержениях, несомненно превышающие несколько километров в секунду, объясняют большую высоту поднятия столба извержений, достигающую в ряде случаев 60 км... в некоторых случаях, когда начальная скорость выброса материала достигает 11 км/с, этот материал будет выброшен за пределы земного притяжения».

Ну, разве не заманчиво поподробнее рассмотреть процесс рождения земной

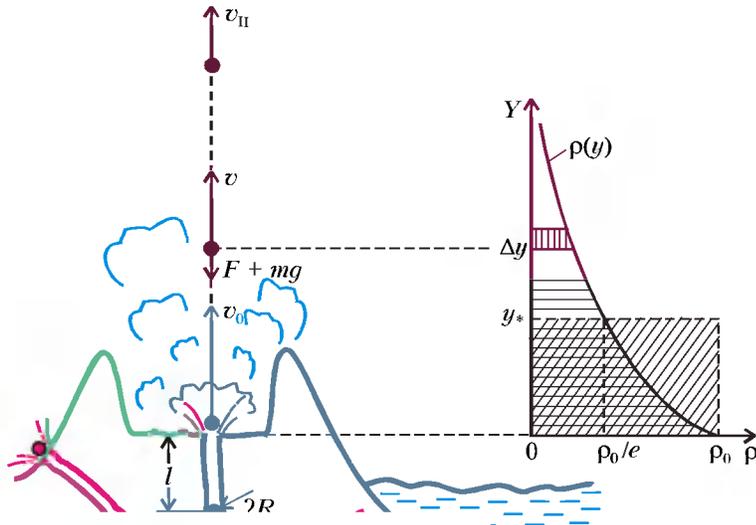


Рис. 1

горой спутника Земли или Солнца? К чему и приступим.

Предположим, что по вертикальному стволу вулкана движется случайно оторвавшаяся «пробка» базальта, лавы или чего-то еще (рис.1). Конечно же, ствол цилиндрический, а пробка шаровая. И оба имеют одинаковый радиус R . А ускоряется эта пробка под действием давления p вулканических газов, намного превышающего атмосферное (по оценкам упомянутой Очень Научной Книги, давление при вулканическом взрыве порядка ста тысяч атмосфер).

По выходе из жерла вулкана эта пробка приобретет наибольшую скорость v_0 , после чего она начнет замедляться под действием сил тяготения и сопротивления атмосферы. Кстати, мы здесь не собираемся говорить привычных слов: «сопротивлением воздуха пренебречь», потому что эта начальная скорость заведомо должна превосходить вторую космическую скорость

$$v_{II} = \sqrt{2gR_3} \approx 11 \text{ км/с} \quad (1)$$

(здесь R_3 – радиус Земли) и, следовательно, пробка должна двигаться с большой сверхзвуковой скоростью. Действительно, приняв скорость звука по порядку величины равной $c = 300 \text{ м/с}$, получим следующее значение отношения скоростей (его называют числом Маха¹):

$$\frac{v_0}{c} \gtrsim \frac{v_{II}}{c} = \frac{11 \cdot 10^3 \text{ м/с}}{3 \cdot 10^2 \text{ м/с}} \sim 40.$$

Это уже случай *гиперзвуковых* скоростей, и конструктору летательных аппаратов даже не придет в голову пренебречь сопротивлением воздуха.

Чему же равна эта сила сопротивления? Из соображений размерностей уже не раз получали ее зависимость от плотности воздуха ρ , площади поперечного сечения движущегося тела S и скорости его движения v (проверьте, что слева и справа стоят ньютоны):

$$F = C\rho S v^2. \quad (2)$$

А вот безразмерный коэффициент C не может быть определен при помощи размерностей – на то он и безразмерный. Но что удивительно – сам сэр Исаак Ньютон позаботился о нем: для таких гиперзвуковых движений его теоретические рассуждения дают значение $C = 1/2$.

Итак, что же происходит после «выстрела пробки» из вулкана? Ее потенциальная энергия по мере движения вверх вдоль оси Y увеличивается, а кинетическая энергия уменьшается. И мы сказали бы, что их сумма остается постоянной – применили закон сохранения механической энергии, – и получили бы формулу (1). Но это в том случае, если бы эта энергия не тратилась частично на преодоление силы сопротивления воздуха. Значит, здесь мы должны записать, что изменение (убыль) суммарной механической энергии равно работе силы сопротивления F на участке пути Δy :

$$\Delta \left(\frac{mv^2}{2} + mgy \right) = -F\Delta y. \quad (3)$$

Можно показать, что кинетическая

¹ См., например, статью Г.Голыгина «От капли до землетрясения» в предыдущем номере журнала. (Прим.ред.)

энергия тела за пределами атмосферы (на высоте порядка, например, 100 км, характерной для спутников Земли) много больше потенциальной. Действительно, принимая $v = v_{II}$, $g = 10 \text{ м/с}^2$, $y = 10^5 \text{ м}$, получим, что $v^2/2$ превышает gy раз в двадцать (а если учесть, что начальная скорость v_0 должна превосходить v_{II} , чтобы «пробить» атмосферу, – то и больше). Таким образом, вторым слагаемым в скобках в уравнении (3) можно пренебречь в сравнении с первым с высокой точностью (ошибка – порядка нескольких процентов).

Сила сопротивления (см. выражение (2)) изменяется не только из-за изменения скорости, но также и вследствие падения плотности воздуха с высотой в соответствии с так называемой *барометрической формулой Больцмана*:

$$\rho = \rho_0 e^{-y/y_*}, \quad (4)$$

где ρ_0 – значение плотности атмосферы на уровне моря (при $y = 0$), а y_* – характерная толщина атмосферы (порядка высоты Эвереста), на которой значение плотности в $e \approx 2,7$ раза меньше, чем ρ_0 . Эта зависимость изображена на рисунке 1 справа (значения $\rho(y)$ показаны горизонтальными отрезками). Видно, что плотность атмосферы Земли очень быстро (физики говорят «экспоненциально») падает с высотой.

Зависимость (4) интересна тем, что если мы захотим приравнять массу вертикального столба атмосферы переменной плотности массе столба конечной высоты, но постоянной плотности ρ_0 , то для этой высоты и получим значение y_* . Иначе говоря, площадь прямоугольника $\rho_0 y_*$, заштрихованного на рисунке косыми линиями, равна площади под кривой $\rho(y)$. Этот факт нам сейчас и пригодится.

С учетом всего сказанного, уравнение (3) можно записать в виде

$$\frac{\Delta v^2}{v^2} = -\frac{S}{m} \left(\frac{-y}{\rho_0 e^{y/y_*} \Delta y} \right). \quad (5)$$

Математик скажет, что это похоже на обыкновенное дифференциальное уравнение с разделенными переменными (слева – только v^2 , справа – только y). А Новый Русский увидит здесь нечто от сложных банковских процентов (для кинетической энергии).

Теперь ничего не остается сделать, как решить уравнение (5). Конечно, студент первого курса Московского физико-технического института проделает эту операцию в уме. Но и школьник может тут сделать немало. Преж-

де всего заметим, что справа в скобках стоит элементарная площадка, заштрихованная на рисунке 1 вертикальными линиями. Значит, по мере того как «вулканическая пробка» будет лететь вдоль оси Y вверх, эти элементарные площадки покроют всю площадь под кривой $\rho(y)$, равную $\rho_0 y_*$, как было упомянуто ранее. И где-то недалеко от поверхности Земли (атмосфера тонкая!) сила сопротивления перестанет влиять на энергию поднимающегося тела. Именно здесь телу и нужно достичь второй космической скорости, чтобы в дальнейшем выйти за пределы притяжения Земли.

А что при этом творится в левой части уравнения (5)? Здесь после интегрирования по y (прохождения толщи атмосферы) получится натуральный логарифм от v^2 , так что будем иметь

$$\ln \frac{v_{11}^2}{v_0^2} = -\rho_0 y_* \frac{S}{m}. \quad (6)$$

С другой стороны, начальная скорость вылета «пробки» из вулкана достигается за счет силы давления pS , действующей на массу m . Если считать давление постоянным и пренебречь трением о стенки канала, эта сила обеспечивает постоянное ускорение $a = pS/m$. Следовательно, по законам равноускоренного движения на длине канала l разогнаемое тело приобретет удельную кинетическую энергию (энергию единичной массы)

$$\frac{v_0^2}{2} = al = \frac{pS}{m} l.$$

Подставив это выражение в уравнение (6) и сделав некоторые преобразования, получим

$$\frac{v_0^2}{v_{11}^2} = \frac{2pl}{v_{11}^2} \frac{S}{m} = e^{\rho_0 y_* \frac{S}{m}}. \quad (7)$$

Теперь для простоты записи введем новые безразмерные (проверьте!) величины:

$$x = \rho_0 y_* \frac{S}{m}, \quad k = \frac{2pl}{\rho_0 y_* v_{11}^2}.$$

Первая из них зависит от характеристик тела: $\frac{S}{m} = \frac{\pi R^2}{4\pi R^3 \rho_S / 3} = \frac{3}{4\rho_S R}$, где ρ_S — его плотность, а вторая — от параметров ускоряющего канала: давления p и длины l . В этих переменных уравнение (7) выглядит совсем просто:

$$kx = e^x. \quad (8)$$

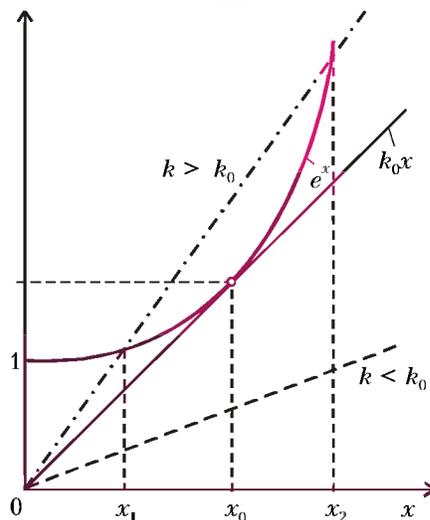


Рис. 2

Слева — уравнение прямой линии, справа — экспоненты. Обе эти линии изображены на рисунке 2. Видно, что при малых значениях k (когда, например, малы давление ускоряющих газов p или длина канала l) решения этого Последнейшего Уравнения (8) не пересекает экспоненту. А при некотором значении k_0 имеется единственная точка касания, для которой $x_0 = 1$, $k_0 = e$ (убедитесь подстановкой). Отсюда и найдем все интересующие нас величины:

$$\begin{aligned} \text{радиус шарового тела } R_0 &= \frac{3}{4} \frac{\rho_0 y_*}{\rho_S}, \\ \text{необходимую длину канала } l_0 &= \\ &= e \frac{\rho_0 y_* v_{11}^2}{2p}, \end{aligned}$$

начальную скорость выброса $v_0 = \sqrt{e} v_{11}$ ($\approx 1,65 v_{11}$), необходимую для того, чтобы выброшенное вулканом тело, «пробив» атмосферу, все еще имело бы вторую космическую скорость.

(Заметим, однако, что при такой скорости газу трудно улететь за телом, тем более — оказывать на него постоянное давление. Так что, вообще говоря, нужно было бы рассматривать *нестационарное* движение сильно нагретых газов при вулканическом взрыве, когда быстро изменяются во времени и температура, и давление газов на ускоряемое тело. Надеемся, так и поступят наши читатели в недалеком будущем.)

Но каковы же канал и шар? Подставив в последние формулы $\rho_0 \sim 1 \text{ кг/м}^3$, $y_* \sim 10 \text{ км} = 10^4 \text{ м}$, $\rho_S \sim 5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $p \sim 10^5 \text{ атм} = 10^{10} \text{ Н/м}^2$, получим

$$R_0 \approx 1,5 \text{ м}, \quad l_0 \approx 160 \text{ м}.$$

Масса такого шара равна

$$m_0 = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_S \approx 70 \text{ т}.$$

Совсем неплохо для спутника!

Но у Последнейшего Уравнения (8) есть и другие решения. Так, при $k > k_0$ прямая (штрих-пунктир на рисунке 2) дважды пересекает экспоненту. Два корня x_1 и x_2 соответствуют тяжелому и легкому шарам (ведь $x \sim 1/R$). Первый из них может быть выброшен с меньшей скоростью (чем определенная выше v_0), второй — с большей. Это и понятно: для камня сопротивление воздуха менее существенно, чем для пушинки.

И еще. Мы рассмотрели только вертикальный выброс. Конечно, вулкан мог бы выбросить «пробку» и через наклонный ствол (см. рис. 1) и, может быть, таким образом породить спутник Земли. Для этого нужна меньшая скорость, а именно — первая космическая $v_1 \approx 8 \text{ км/с}$. Желающие да рассмотрят этот случай сами.

Итак, что сказал бы осторожный физик, принимая во внимание многочисленные упрощающие предположения, сделанные нами в процессе оценки? Он сказал бы: «Если удастся обеспечить постоянное давление вулканических газов порядка 100 атмосфер на длине канала порядка 100 метров, то, пожалуй, вулкан мог бы выбросить из своего жерла тело массой порядка 100 тонн со скоростью, достаточной для того, чтобы это тело ушло на бесконечность от Земли. Если, конечно, найдется такое тело, которое выдержит ускорение в десять тысяч g ».

Ну, а нам в любом случае полезно было поговорить о физике на примере такого величественного явления, как извержение вулкана.

Эта загадочная магнитная сила

Е. РОМИШЕВСКИЙ

ОПЫТНО УСТАНОВЛЕНО, ЧТО СИЛА, действующая на точечный электрический заряд q , помещенный в электрическое и магнитное поля, зависит в общем случае от положения этого заряда и от его скорости движения. Обычно эту силу разделяют на две составляющие – электрическую $\vec{F}_э = q\vec{E}$, которая не зависит от движения заряда, а определяется его положением в электрическом поле с напряженностью \vec{E} , и магнитную $\vec{F}_м$, зависящую от скорости заряда \vec{v} . Именно о магнитной силе и пойдет речь в дальнейшем.

В любой точке пространства магнитная сила перпендикулярна вектору скорости заряда. Перпендикулярна она также и определенному выбранному в пространстве направлению. Величина же магнитной силы (ее модуль) пропорциональна той составляющей скорости заряда, которая перпендикулярна этому выделенному направлению. Эти свойства магнитной силы можно описать, пользуясь понятием магнитного поля. Магнитное поле характеризуется вектором магнитной индукции \vec{B} , который и определяет выбранное направление в пространстве.

Для определения магнитной силы можно записать следующее выражение:

$$\vec{F}_м = qvB \sin \alpha \cdot \vec{\zeta},$$

где v и B – модули векторов скорости заряда и индукции магнитного поля, α – угол между этими векторами, а единичный вектор $\vec{\zeta}$ – правый винт (или буравчик) – указывает только направление магнитной силы. Это направление соответствует направлению движения правого винта, головка которого лежит в плоскости векторов \vec{v} и \vec{B} и который мы закручиваем, поворачивая его на наименьший угол от вектора \vec{v} к вектору \vec{B} (рис.1). Магнитная сила $\vec{F}_м$ перпендикулярна и вектору \vec{v} , и вектору \vec{B} .

Полную электромагнитную силу $\vec{F} = \vec{F}_э + \vec{F}_м$, действующую на электрический заряд q , называют силой Лоренца (заметьте, что иногда силой Лоренца

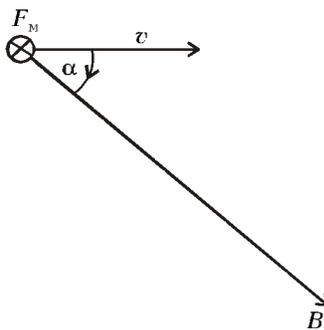


Рис. 1

называют лишь магнитную силу). По действию силы Лоренца на электрический заряд известного знака можно, в принципе, определить модули и направления векторов \vec{E} и \vec{B} .

Следует особо отметить, что на покоящийся электрический заряд магнитное поле не действует. Важной особенностью магнитной силы является также то, что она всегда перпендикулярна вектору скорости заряда, поэтому работы над зарядом не совершает. Это означает, что в постоянном магнитном поле кинетическая энергия заряженной частицы всегда остается неизменной, как бы частица ни двигалась.

Рассмотрим, например, как будут двигаться две разноименно заряженные частицы с зарядами $+q$ и $-q$, имеющие разные массы $M_1 = 2m$ и $M_2 = m$, если в начальный момент скорости этих частиц равны v_0 и направлены перпендикулярно границе области существования однородного магнитного поля с индукцией \vec{B} (рис.2; вектор \vec{B} перпендикулярен плоскости листа и направлен от нас). На оказавшуюся в области однородного магнитного поля положительную частицу действует магнитная сила, равная $F_m = qv_0B$ и направленная вначале вверх. На отрицательную частицу действует такая же по величине

не сила, но направленная вначале вниз. Каждая из частиц опишет полуокружность, после чего покинет область магнитного поля. Радиус окружности можно найти из второго закона Ньютона:

$$qv_0B = \frac{Mv_0^2}{R},$$

откуда

$$R = \frac{Mv_0}{qB}.$$

Угловая скорость движения частицы по окружности и период ее полного обращения будут равны

$$\omega = \frac{v_0}{R} = \frac{qB}{M} \text{ и } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi M}{qB}.$$

Видно, что положительная частица ($M_1 = 2m$) опишет полуокружность в два раза большего радиуса, чем отрицательная ($M_2 = m$), которая будет двигаться в противоположную сторону. Возвратится же обратно тяжелая частица (зеркально отразившись) через промежуток времени, в два раза больший, чем отрицательная. Таким образом, однородное магнитное поле как бы разделяет в пространстве и во времени влетевшие вместе, но разные по заряду и по массе частицы.

Если магнитное поле воздействует только на движущиеся заряды, то, как показывает опыт, движущиеся заряды (электрические токи), в свою очередь, всегда возбуждают в пространстве магнитное поле. В результате обобщения экспериментальных данных был получен элементарный закон, определяющий индукцию \vec{B} магнитного поля точечного заряда q , движущегося с постоянной скоростью v , много меньшей по величине скорости света c . Этот закон можно записать в виде

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{qv \sin \alpha}{r^2} \vec{\zeta},$$

где α – угол между вектором скорости

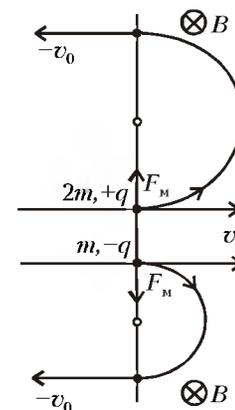


Рис. 2

заряда \vec{v} и радиусом-вектором \vec{r} , проведенным от заряда в точку наблюдения, $\vec{\zeta}$ – единичный «вектор буравчика», получаемый вращением вектора \vec{v} к вектору \vec{r} (рис.3) и отвечающий за направление вектора \vec{B} . Константу $1/(\epsilon_0 c^2)$ обычно обозначают μ_0 и называют магнитной постоянной.

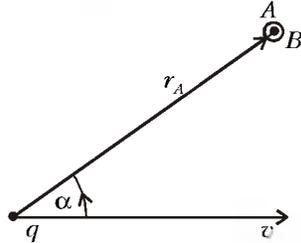


Рис. 3

Заметим, что если умножить обе части приведенной формулы на число электронов $\Delta N = n\Delta l S$, находящихся в элементе провода длиной Δl , по которому течет ток $I = qnvS$, то получим известный закон Био – Савара для индукции $\Delta \vec{B}$ магнитного поля, созданного элементом тока $I\Delta \vec{l}$:

$$\Delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\Delta l \sin \alpha}{r^2} \vec{\zeta}.$$

Линии магнитной индукции в данном случае представляют собой концентрические окружности, окружающие ли-

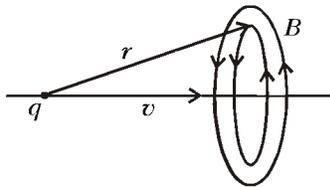


Рис. 4

нию движения заряда (рис.4), а величина магнитной индукции убывает с расстоянием пропорционально $1/r^2$, как и величина напряженности электрического поля точечного заряда. Но магнитное поле не имеет источников и стоков, магнитные линии всегда замкнуты. Это физическое векторное поле уже иного свойства, его называют соленоидальным или вихревым.

Рассмотрим теперь такой пример.

Пусть две достаточно массивные точечные частицы 1 и 2, заряженные одним и тем же зарядом q , движутся параллельно друг другу с одинаковыми нерелятивистскими скоростями \vec{v} (рис.5). На каждую частицу действуют электрическая сила отталкивания, рав-

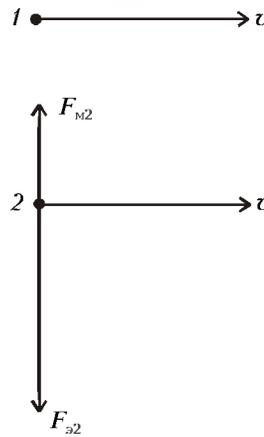


Рис. 5

ная $F_s = qE$, и магнитная сила притяжения, равная $F_m = qvB$ (скорость одной частицы перпендикулярна магнитному полю, создаваемому другой частицей). Сравним количественно эти две составляющие общей электромагнитной силы Лоренца, действующей, к примеру, на частицу 2:

$$\frac{F_{m2}}{F_{s2}} = \frac{qvB_{21}}{qE_{21}},$$

где B_{21} и E_{21} – индукция магнитного поля и напряженность электрического поля, создаваемых зарядом 1 в месте нахождения заряда 2. Подставив соответствующие значения индукции и напряженности, получим

$$F_{m2} : F_{s2} = qv \frac{qv}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2} : q \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = v^2 : c^2.$$

Это означает, что при нерелятивистских скоростях движения зарядов магнитная сила существенно меньше электрической и является очень малой поправкой к их общей силе электромагнитного взаимодействия – силе Лоренца.

А что если выбрать другую инерциальную систему отсчета, движущуюся равномерно и прямолинейно со скоростью \vec{v} наших заряженных частиц? В этой системе заряды будут покоиться, пропадут их магнитные поля, пропадет и магнитная сила их взаимодействия. Иными словами, поскольку магнитная составляющая силы Лоренца зависит от скорости частицы, она изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Вместе с тем, сама сила Лоренца в нерелятивистском случае, как любая другая сила, не зависит от выбора инерциальной системы отсчета. Это означает, что в системе отсчета, в ко-

торой пропадает магнитная составляющая силы, должна изменяться и электрическая ее составляющая. Получается, что разделение полной силы Лоренца на электрическую и магнитную составляющие без указания конкретной системы отсчета не имеет смысла.

После рассмотренного нами примера движения двух заряженных частиц может возникнуть естественный вопрос – стоит ли вообще изучать и учитывать такие относительно малые магнитные силы? Оказывается, стоит, и вот почему.

Во-первых, полученное соотношение сил справедливо и при релятивистских скоростях $v \sim c$, а тогда магнитные силы оказываются уже сравнимыми с электрическими. Так происходит, например, когда мы имеем дело с пучками быстрых заряженных частиц.

Во-вторых, бывают ситуации, когда ничтожная по величине магнитная сила является единственной действующей силой. Например – при движении электронов вдоль проводов (электрические токи), ибо в этом случае электрические силы отсутствуют в результате почти идеального баланса отрицательных и положительных зарядов в проводниках. Кроме того, участие в создании электрического тока громадного числа носителей зарядов (их примерно 10^{23} в одном кубическом сантиметре проводника) делает магнитную силу весьма значительной.

В-третьих, приходится встречаться с движением заряженных частиц в самых разных по величине внешних электрических и магнитных полях, создаваемых различным образом. В этих случаях соотношения между электрическими и магнитными силами могут быть самыми разнообразными.

Осторожно: магнитное поле

А. ЧЕРНОУЦАН

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ является, как известно, мощным инструментом решения задач. Он позволяет не выяснять деталей процессов, происходящих при переходе системы из начального состояния в конечное, а непосредственно связывать параметры этих состояний. Закон позволяет также рассчитать работу, которую совершили внешние силы при изменении состояния. Однако неаккуратное применение закона сохранения энергии может привести к неправильным и даже парадоксальным результатам. Напомним известный пример.

Работа внешних сил, затраченная на медленное увеличение расстояния между пластинами плоского конденсатора от d_1 до d_2 , равна изменению энергии конденсатора только в том случае, когда пластины отключены от источника:

$$A_{\text{вн}} = W_2 - W_1 = \frac{Q^2}{2C_2} - \frac{Q^2}{2C_1},$$

где $C_1 = \epsilon_0 S/d_1$ (здесь S – площадь каждой пластины, ϵ_0 – электрическая постоянная), $C_2 = \epsilon_0 S/d_2$ ($C_2 < C_1$). Если же попытаться рассчитать таким образом работу для конденсатора, подключенного к источнику тока, она получится отрицательной, что наверняка неправильно – пластины в любом случае притягиваются друг к другу. Выход из положения известен – надо учесть работу сторонних сил источника:

$$A_{\text{вн}} + E \Delta q = W_2 - W_1,$$

или

$$A_{\text{вн}} + E(C_2 E - C_1 E) = \frac{C_2 E^2}{2} - \frac{C_1 E^2}{2},$$

откуда

$$A_{\text{вн}} = \frac{C_1 E^2}{2} - \frac{C_2 E^2}{2},$$

где E – электродвижущая сила источника.

С аналогичными или даже более неожиданными ситуациями и «пара-

доксами» можно встретиться при использовании закона сохранения энергии в применении к магнитному полю. Для наглядности мы сравним поведение во внешнем поле двух простейших систем: плоского конденсатора и соленоида. При расчете энергии собственного поля этих объектов можно считать однородным, что позволит нам использовать формулы для объемной плотности энергии; внешнее поле тоже будем считать однородным. Однако для начала нам надо собрать вместе и обсудить некоторые формулы.

Поле конденсатора и поле соленоида

Напряженность электрического поля плоского конденсатора выражается через поверхностную плотность заряда его пластин:

$$E_{\text{к}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S},$$

а энергия плоского конденсатора – через объемную плотность энергии поля:

$$W = \frac{\epsilon_0 E_{\text{к}}^2}{2} \cdot Sd = w \cdot V.$$

Таким же образом можно найти энергию в любом объеме, содержащем однородное электрическое поле. Например, если заряженный конденсатор поместить во внешнее однородное поле \vec{E} , направленное противоположно собственному полю конденсатора, внутри конденсатора будет заключена энергия

$$W = \frac{\epsilon_0 (E - E_{\text{к}})^2}{2} \cdot Sd.$$

Формулы для магнитного поля выглядят достаточно просто и весьма похоже. Хотя в школьном учебнике эти формулы отсутствуют, их приводят во многих пособиях для классов и школ с углубленным изучением математики и физики. Магнитные формулы, записанные в единицах СИ, содержат маг-

нитную постоянную μ_0 , связанную с электрической постоянной ϵ_0 и скоростью света в вакууме c простым соотношением:

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}.$$

Эта постоянная играет в магнитных формулах такую же роль, как электрическая постоянная – в электрических¹.

Магнитная индукция внутри соленоида длиной l с числом витков N , по которому течет ток силой I , равна

$$B_c = \mu_0 I \frac{N}{l} = \mu_0 i,$$

где i – ток, приходящийся на единицу длины соленоида (поверхностная плотность тока). Направление поля определяется по правилу буравчика: вращаем ручку по току, буравчик движется по полю. Объемная плотность энергии магнитного поля равна

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B_c^2}{2\mu_0}.$$

Если поместить соленоид во внешнее магнитное поле \vec{B} , направленное параллельно собственному полю, то внутри соленоида будет заключена энергия

$$W = \frac{(B + B_c)^2}{2\mu_0} \cdot Sl,$$

где S – площадь сечения соленоида.

Для того чтобы иметь возможность вычислить работу по повороту конденсатора и соленоида во внешнем поле, нам надо вспомнить о поведении во внешнем поле простейших объектов – электрического диполя и витка с током.

Электрический диполь и виток с током

Электрическим диполем называется система из двух точечных зарядов $+q$ и $-q$, находящихся на расстоянии d друг от друга. Электрический диполь обладает *дипольным моментом*

$$\vec{p} = q\vec{d},$$

где вектор \vec{d} направлен от отрицательного заряда к положительному (рис. 1). На электрический диполь в однородном электрическом поле \vec{E} действует вращательный момент

$$M = qEd \sin \alpha = pE \sin \alpha,$$

¹ См., например, статью «Эта загадочная магнитная сила» в этом номере журнала. (Прим. ред.)

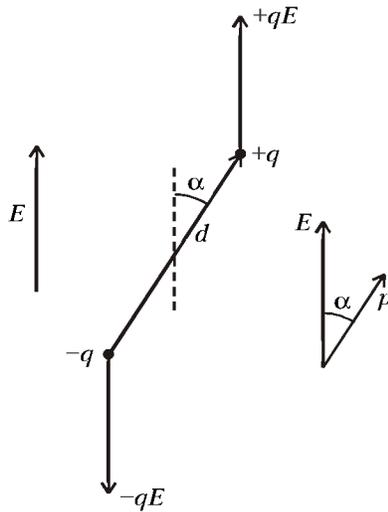


Рис. 1

где α – угол между векторами \vec{p} и \vec{E} . Поскольку сумма сил, действующих на заряды диполя со стороны поля, равна нулю, вращательный момент имеет одинаковые значения для любой оси (перпендикулярной \vec{p} и \vec{E}). При этом у диполя есть только одно устойчивое положение равновесия, при котором дипольный момент параллелен напряженности внешнего поля (противоположное, антипараллельное, положение соответствует неустойчивому равновесию).

Работу силы δA при повороте диполя на малый угол $\delta\alpha$ можно выразить через вращательный момент:

$$\delta A = M\delta\alpha.$$

Тогда для работы поля по повороту диполя на угол α из положения равновесия можно записать

$$A_E = -\int_0^\alpha pE \sin\alpha \cdot d\alpha = -pE(1 - \cos\alpha).$$

Эта работа отрицательна, а работа внешних сил при медленном повороте диполя из положения равновесия положительна:

$$A_{\text{вн}} = pE(1 - \cos\alpha).$$

Видно, что потенциальная энергия диполя во внешнем поле равна

$$W_{\text{п}} = -pE \cos\alpha.$$

(Можно было начать с вывода формулы для энергии – подумайте, как это сделать, – и из нее получить выражение для работы.) Минимальная энергия ($-pE$) соответствует устойчивому положению равновесия.

Очень похожими свойствами обладает виток с постоянным током, находя-

щийся в однородном магнитном поле. Для простоты рассмотрим виток прямоугольной формы со сторонами a и b и будем поворачивать его относительно оси OO' , проходящей через середины противоположных сторон и перпендикулярной магнитному полю \vec{B} (рис.2). Момент сил Ампера, действующих на две стороны контура, которые параллельны оси вращения, равен

$$M = 2IBa \frac{b}{2} \sin\alpha = BIS \sin\alpha,$$

где α – угол между нормалью \vec{n} к плоскости витка и полем \vec{B} . Отметим, что нормаль надо проводить вполне определенным образом – по движению буравчика, ручка которого поворачивается в плоскости витка в направлении протекания тока. Если для характеристики свойств витка ввести

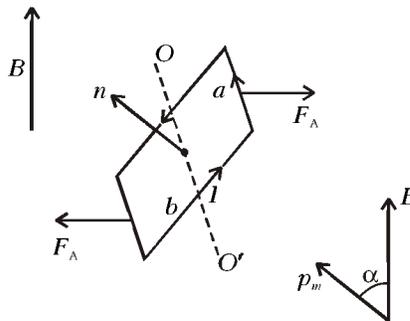


Рис. 2

магнитный момент \vec{p}_m , направленный вдоль указанной нормали и равный

$$p_m = IS,$$

то все свойства витка во внешнем магнитном поле окажутся формально идентичными свойствам электрического диполя во внешнем электрическом поле. Так, у витка есть одно устойчивое положение равновесия, при котором \vec{p}_m параллелен \vec{B} , и работа внешних сил при медленном повороте витка из положения равновесия на угол α равна

$$A_{\text{вн}} = p_m B(1 - \cos\alpha).$$

Более того, если чисто формально ввести потенциальную функцию (имеющую смысл потенциальной энергии) витка во внешнем поле:

$$W_{\text{п}} = -p_m B \cos\alpha,$$

то работа внешних сил будет равна $\Delta W_{\text{п}}$.

Интересно отметить, что формальная аналогия между дипольным и магнитным моментами имеет важное значение для описания диэлектрических и магнитных свойств вещества. Поляризация диэлектрика, состоящего из по-

лярных молекул (т.е. обладающих собственным дипольным моментом), происходит за счет преимущественной ориентации этих дипольных моментов в направлении поля. Степень ориентации определяется соотношением между выигрышем в энергии, равным pE , и характерной энергией теплового движения, которая равна kT (здесь k – постоянная Больцмана, T температура). Совершенно так же происходит намагничивание парамагнетиков, молекулы которых обладают собственным магнитным моментом и стремятся сориентироваться по магнитному полю.

Заметим, что полученные нами выражения годятся и для конденсатора во внешнем поле \vec{E} (в этом случае дипольный момент равен $p = qd$, где q – заряд пластин конденсатора), и для соленоида во внешнем поле \vec{B} (в этом случае $p_m = NIS$).

Поворачивание конденсатора и соленоида

Повернем конденсатор и соленоид на 180° из положения устойчивого равновесия. Рассчитаем работу, которую совершили внешние силы в каждом случае, и сравним ее с соответствующим изменением энергии.

Работа в обоих случаях положительна. Для конденсатора в поле \vec{E} она равна

$$A_{\text{вн}} = 2pE = 2qdE = 2\epsilon_0 E_{\text{к}} SdE = 2\epsilon_0 E_{\text{к}} E \cdot Sd$$

($E_{\text{к}}$ – поле конденсатора), а для соленоида в поле \vec{B} –

$$A_{\text{вн}} = 2p_m B = 2NISB = 2 \frac{B_{\text{с}}}{\mu_0} SIB = 2 \frac{B_{\text{с}} B}{\mu_0} \cdot SI$$

($B_{\text{с}}$ – поле соленоида).

Однако с изменением энергии все не так просто. Самое важное различие между конденсатором и соленоидом состоит в том, что в положении устойчивого равновесия поле конденсатора $\vec{E}_{\text{к}}$ направлено против внешнего поля \vec{E} , а поле соленоида $\vec{B}_{\text{с}}$ направлено вдоль внешнего поля \vec{B} (рис.3). При

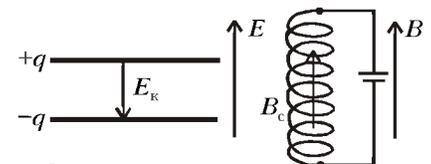


Рис. 3

повороте на 180° изменение энергии электрического поля в конденсаторе положительно:

$$\Delta W = \frac{\epsilon_0(E + E_k)^2}{2} \cdot Sd - \frac{\epsilon_0(E - E_k)^2}{2} \cdot Sd = 2\epsilon_0 E E_k \cdot Sd$$

и равно работе внешних сил. Напротив, изменение энергии магнитного поля в соленоиде отрицательно:

$$\Delta W = \frac{(B - B_c)^2}{2\mu_0} \cdot SI - \frac{(B + B_c)^2}{2\mu_0} \cdot SI = -2 \frac{B B_c}{\mu_0} \cdot SI$$

и равно работе внешних сил только по модулю.

Как же объяснить такое расхождение?

Работа источника. Но это не все ...

Естественное объяснение, возникающее из аналогии с электростатикой, состоит в необходимости учесть работу источника. Продемонстрируем, как это сделать для расчета работы, которую необходимо совершить для поворота на 180° конденсатора, соединенного с источником тока (рис. 4). Поскольку полное поле внутри конденсатора до и

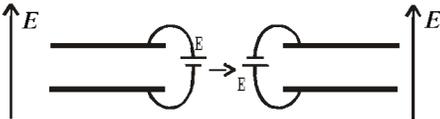


Рис. 4

после поворота равно E/d , энергия поля вообще не изменяется, и закон сохранения энергии принимает вид

$$A_{\text{вн}} + A_{\text{ист}} = 0.$$

Поле, создаваемое зарядами конденсатора, до поворота равно $E/d + E$, а после поворота составляет $E/d - E$; следовательно, заряд на пластине, подключенной к положительному полюсу источника, изменяется на Δq от $\epsilon_0(E/d + E)$ до $\epsilon_0(E/d - E)$. Работа источника при этом отрицательна и равна

$$A_{\text{ист}} = E\Delta q = -2\epsilon_0 E E,$$

а работа внешних сил положительна и равна

$$A_{\text{вн}} = 2\epsilon_0 E E.$$

Теперь обратимся к соленоиду. Ис-

точник, поддерживающий постоянное значение тока I , совершает при повороте соленоида дополнительную работу против сторонних сил, возникающих вследствие явления электромагнитной индукции. При малом изменении магнитного потока работа источника равна

$$\delta A_{\text{ист}} = (-E_{\text{инд}}) \Delta q = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} I \Delta t = I \Delta \Phi,$$

а за все время поворота –

$$A_{\text{ист}} = I((B_c - B)SN - (B_c + B)SN) = -2IBSN = -2 \frac{B B_c}{\mu_0} \cdot SI.$$

Видно, что работа источника в точности равна по величине, но противоположна по знаку механической работе внешних сил при повороте соленоида. Этому есть простое объяснение. Дело в том, что полная работа сил, действующих на заряды соленоида со стороны постоянного магнитного поля \vec{B} , равна нулю (сила Лоренца перпендикулярна скорости и работу не совершает). Магнитное поле совершает при повороте соленоида отрицательную механическую работу и точно такую же по величине положительную работу (в качестве сторонней силы) над зарядами замкнутого контура.

Но как же быть с законом сохранения энергии? Если записать его в виде

$$A_{\text{вн}} + A_{\text{ист}} = \Delta W,$$

то получается, что левая часть равна нулю, а правая отлична от нуля и отрицательна.

Чего же мы еще не учли?

Откуда берется внешнее магнитное поле?

Разгадка кроется в следующем. Внешнее поле \vec{B} тоже создается какими-то токами. Можно, например, представить себе, что наш соленоид находится в центре соленоида значительно больших размеров. При повороте нашего соленоида на токи, создающие поле \vec{B} , действует ЭДС индукции, и источник, поддерживающий постоянство этих токов, совершает дополнительную работу. В написанном выше законе сохранения энергии $A_{\text{ист}}$ должна включать в себя как работу источника в нашем поворачиваемом соленоиде, так и работу источника, поддерживающего постоянным внешнее поле \vec{B} . Но сразу же возникает резонный (и на первый взгляд безнадешный) вопрос: как можно вычис-

лить работу этого источника, если даже не известна форма токов, создающих внешнее поле?

Ответ на этот вопрос дает очень важная для электродинамики *теорема взаимности*, которую мы сформулируем следующим образом. Рассмотрим два контура с токами I_1 и I_2 . При данном расположении контуров магнитный поток, создаваемый в первом контуре магнитным полем, которое создано током второго контура, равен $\Phi_{12} = L_{12}I_2$; обратное соотношение имеет вид $\Phi_{21} = L_{21}I_1$. Введенные коэффициенты, характеризующие влияние контуров друг на друга, называются *коэффициентами взаимной индукции*. Теорема взаимности утверждает, что эти два коэффициента равны друг другу: $L_{12} = L_{21}$.

С помощью этой теоремы мы сможем узнать, как поворот нашего соленоида влияет на внешний контур, создающий поле \vec{B} . Пусть ток в этом внешнем контуре равен \tilde{I} . Поворот нашего соленоида приводит к изменению потока во внешнем контуре, вызванному изменением коэффициента взаимной индукции: $\Delta \tilde{\Phi} = \Delta L_{21}I$. Источник в этом внешнем контуре совершит работу

$$\tilde{A}_{\text{ист}} = \tilde{I} \Delta \tilde{\Phi} = \tilde{I} \Delta L_{12}I = I \Delta \Phi = A_{\text{ист}}.$$

Значит, работа источника во внешнем контуре в точности равна работе источника в самом поворачиваемом соленоиде, которая отрицательна и в точности равна изменению энергии магнитного поля.

Согласитесь, что «спасение» закона сохранения энергии потребовало от нас изрядных усилий и привлечения довольно-таки «тяжелой артиллерии»!

Определение гидродинамического сопротивления

С. БЕТЯЕВ

КАК СЧИТАЛ АНРИ ПУАНКАРЕ, «опыт – единственный источник истины: только опыт может научить нас чему-либо новому, только он может вооружить нас достоверностью». И с этим нельзя не согласиться – действительно в основе любой точной науки краеугольным камнем лежит опыт.

Опыты большие и малые. С точки зрения материальных затрат на экспериментальные исследования, условно различают «малую науку» и «большую науку». Малой наукой занимаются малые коллективы или даже одиночки за малые деньги. Большая наука способствует осуществлению грандиозных проектов – строительству гигантских ускорителей заряженных частиц, космических кораблей, ядерных установок.

Без большой науки, в частности, невозможно создание самолетов, морских судов и ракет. Их облик формируется в результате промышленного эксперимента, который проводится в аэрогидродинамических установках, оснащенных современной аппаратурой. В соответствии с принципом относительности, используются два эквивалентных способа создания потока: движение модели в покоящейся среде либо

обтекание покоящейся модели движущейся средой. Первый способ реализуется в баллистических установках, гидроканалах и опытовых бассейнах, второй – в гидродинамических и аэродинамических трубах.

В гидроканале, изображенном на рисунке 1, имеется специальная тележка, движущаяся по установленным над каналом рельсам и буксирующая модель гидросамолета; производится кинофотосъемка картины обтекания и измерение действующих на модель сил и моментов. С помощью аэродинамических труб, типа представленной на рисунке 2, удалось в течение одного века пройти трудный путь от первых примитивных самолетов до современных авиалайнеров.

Однако многие физические закономерности можно установить и в маломасштабных опытах. К таким научным (в отличие от технических) опытам относятся так называемые «опыты в ванной». Большинство из них можно провести дома или в школьном физическом кабинете, как говорил американский физик-экспериментатор Вуд – с помощью «...палки, веревки, сургуча и слюды». А о Фарадее, например, Гельмгольц сказал так: «Старые куски

провода, дерева и железа кажутся ему достаточными для того, чтобы идти к величайшим открытиям».

Великие «шаробросатели». Силу сопротивления, которую испытывает тело, движущееся относительно среды, проще всего определить, если следить за падением тел в воздухе.

Проведением подобных опытов одним из первых занялся Леонардо да Винчи (1452 – 1519). Впрочем, он экспериментировал не только с падающими телами, но и с телами, движущимися в воде, и даже с плоскими поверхностями, движущимися в воздухе под углом атаки. Ему удалось найти оптимальную форму судна наименьшего сопротивления.

Дело Леонардо продолжил Галилео Галилей (1564 – 1642). Бросая с наклонной Пизанской башни тяжелые и легкие шары, он установил независимость скорости падения тяжелых тел от их веса и сформулировал один из величайших физических принципов – принцип инерции: если на тело не действуют силы, то оно движется равномерно и прямолинейно. Немаловажное значение Галилей придавал логическому объяснению результатов эксперимента, пониманию физической сущности явления. «Природа дала нам глаза, чтобы мы узрели ее творения, – говорил он своим ученикам. – Но она наделила нас также мозгом, способным понимать эти творения.»

Еще одним великим «шаробросателем» был Исаак Ньютон (1643 – 1727), основатель физики и (совместно с Г.Лейбницем) высшей математики. Он бросал шары в Лондонском соборе святого Павла. Вопрос о сопротивлении тел был для Ньютона далеко не праздным. Он хотел доказать, что (в отличие от утверждений аристотельянцев) космическое пространство не заполнено материей. В противном случае космическая материя оказывала бы сопротивление движению небесных тел, и вся стройная механическая система мира, созданная трудами Ньютона, рассыпалась бы, как картонный домик.

Сопротивление движущегося в жидкости тела, по Ньютону, состоит из трех частей: первой – постоянной, второй – пропорциональной скорости, третьей – пропорциональной квадрату скорости. Постоянная часть сопротивления пренебрежимо мала; сопротивление, пропорциональное скорости, обусловлено трением; сопротивление, пропорциональное квадрату скорости, обусловлено действием сил инерции.

Сегодня мы знаем, что в общем слу-

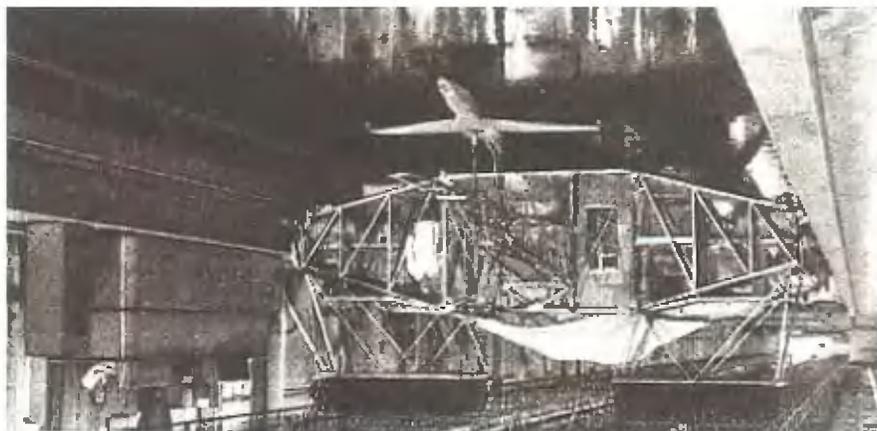


Рис. 1. Гидроканал ЦАГИ



Рис.2. Легкий маневренный истребитель МиГ-29 в аэродинамической трубе

чае расчитать сопротивление на отдельные части не удастся – в слишком плотный клубок сплетены различные эффекты, сопутствующие обтеканию тел. Тем не менее, именно Ньютон впервые установил, что сила сопротивления движущегося со скоростью v шара прямо пропорциональна его площади поперечного сечения S и плотности жидкости ρ :

$$F = C_x \frac{\rho v^2}{2} S,$$

где C_x – коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом сопротивления.

А что будет, если несколько изменить условия обтекания? Например, можно телу придать вращение вокруг вертикальной оси. Какой шар быстрее достигнет земной поверхности: вращающийся или не вращающийся? Оказывается, вращающийся – для убедительности можно одновременно сбросить с высоты многоэтажного дома вращающийся и не вращающийся волчки.

Закон о том, что сопротивление тела тем меньше, чем больше скорость его вращения, – качественный. Количественные измерения в таком эксперименте затруднены. И вот почему. В образующемся за телом следе реализуется потеря импульса, порожденная действием силы сопротивления. Течение сохраняет «память» о прошлом – о том, как формировался след раньше.

Если скорость падающего тела на некотором отрезке пути не изменяется, то сила сопротивления тоже оказывается постоянной. А скорость постоянна, если сумма действующих на тело сил равна нулю; значит, сила сопротивления равна силе тяжести. Для одного и того же тела такое равенство достигается в воздухе при гораздо больших высотах падения, чем в воде. Видимо, Ньютон имел в виду эти соображения, когда приступил к опытам с бросанием шаров в воду (которые он проводил в наполненной водой деревянной бочке высотой 4,5 м).

Воздуходувка Циолковского. В XIX веке осуществилась

идея о том, что количественные измерения сил сопротивления необходимо проводить в аэродинамических трубах.

Первую в России аэродинамическую трубу непрерывного действия с открытой рабочей частью построил в 1897 году К.Э.Циолковский. Для создания воздуходувки (рис.3) – так он ее называл – Циолковский использовал веялку, лопасти которой крутились вручную. К сожалению, в опытах Циолковского скорости оказались недостаточно большими, чтобы результаты можно было применять для нужд авиации. Однако такая воздуходувка весьма пригодна для малых опытов по исследованию силы сопротивления.

Аэродинамическую трубу можно изготовить и с помощью обычного пылесоса, подключив насадку к его выхлопному отверстию, – в струю воздуха такой «трубы» можно помещать испытываемые модели.

Интересно, что законы сопротивления можно учитывать по-разному. Так, самолет должен иметь малую силу сопротивления, но большую подъемную силу. Парашют, напротив, должен иметь большую силу сопротивления, тормозящую его движение.

Любопытны опыты с телами простейшей геометрии. Например, обдувая струей воздуха (или воды) двугранники с различными углами раствора β , но с одинаковой шириной грани l , можно обнаружить, что наибольший коэффициент сопротивления имеет не плоская пластина ($\beta = 0$), а двугранник с некоторым отрицательным углом раствора β (рис.4). В связи с этим можно задуматься о придании удлиненным крыльям самолетов обратной V-образности, как показано на рисунке 5 (тогда в плоскости, поперечной к набегающему потоку, течение будет напоминать обтекание того же двугранника с углом $\beta < 0$, а подъемная сила крыла – силу сопротивления двугранника). Но это относится уже к большой науке...

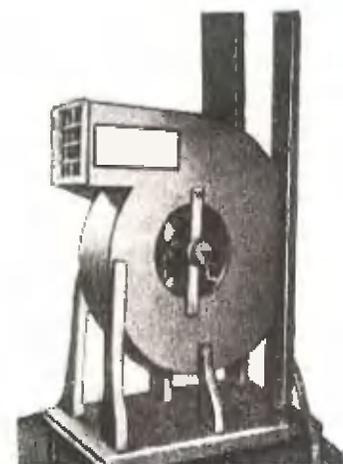


Рис.3. Воздуходувка Циолковского

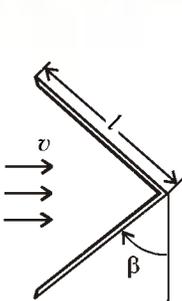


Рис.4. Обтекание воздухом двугранника

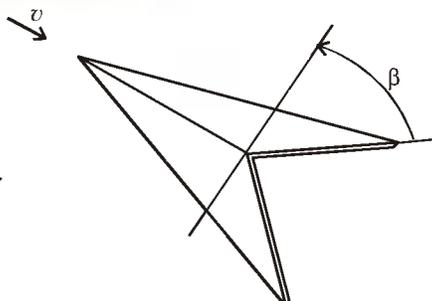


Рис.5. Крыло самолета с обратной V-образностью

Ловушка для треугольника

В.ДУБРОВСКИЙ, В.СЕНДЕРОВ

МНОГО ЛЕТ НАЗАД НА ПРИЕМНОМ экзамене на физфак МГУ предлагалась следующая задача:

Упражнение 1. Медианы прямоугольного треугольника пересекаются на его вписанной окружности. Найдите углы этого треугольника.

Есть и другие задачи о треугольниках, в которых центроид (точка пересечения медиан) лежит на вписанной окружности. Например, треугольник, одна из медиан которого делится вписанной окружностью на три равные части, фигурировал в задаче М1224 «Задачника «Кванта».

А как расположен относительно вписанной окружности ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника? Если треугольник правильный, то его ортоцентр находится в центре вписанной окружности. Ортоцентр неостроугольного треугольника, очевидно, лежит вне ее. Отсюда понятно, что, деформируя любой такой треугольник в правильный, мы обязательно пройдем через положение, в котором ортоцентр лежит точно на вписанной окружности.

А можно ли «посадить» на вписанную окружность сразу обе эти замечательные точки? Этот вопрос оказывается довольно сложным. Мы покажем, что ответ на него утвердительный:

треугольник, у которого и центроид, и ортоцентр лежат на вписанной окружности, существует.

Доказательство этого факта требует привлечения богатого арсенала методов и фактов геометрии треугольника, которые пригодятся читателям и при решении других задач.

Нам придется иметь дело с многочисленными соотношениями в треугольнике. Напомним стандартные обозначения его элементов (рис.1): стороны треугольника ABC обозначаются a ($= BC$), b , c ; центры вписанной и описанной окружностей – I и O , а их радиусы, соответственно, – r и R ; ортоцентр (точка пересечения высот) – H ,

центроид (точка пересечения медиан) – G .

В искомом треугольнике должно выполняться равенство $IG = IH = r$. Прежде чем заняться анализом этих

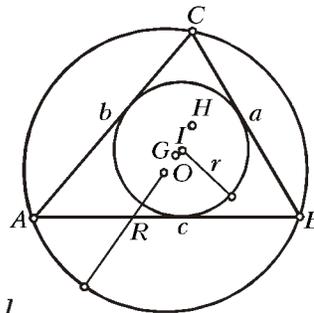


Рис. 1

уравнений, сделаем несколько полезных для дальнейшего «заготовок».

Замечательная формула для «замечательных расстояний»

Начнем с формулы, которая позволит нам выражать расстояния между различными «замечательными точками» треугольника ABC через другие его элементы.

Упражнение 2. Докажите, что для любой точки P и произвольных чисел x, y, z

$$\left| x\vec{PA} + y\vec{PB} + z\vec{PC} \right|^2 = s \cdot (xPA^2 + yPB^2 + zPC^2) - (xyc^2 + yza^2 + zx b^2), \quad (1)$$

где $s = x + y + z$ (рис.2).

Как известно из физики, при $s = x + y + z = 1$ точка D , определяемая равенством $\vec{PD} = x\vec{PA} + y\vec{PB} + z\vec{PC}$, есть центр масс системы трех масс x, y, z , помещенных в точки A, B, C , и формула (1) дает квадрат расстояния от точки P до D . В частности, при $x = y = z = 1/3$ точка D есть центроид G

треугольника:

$$\vec{PG} = \frac{1}{3}(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}), \quad (2)$$

а само равенство (1) принимает вид формулы Лейбница

$$PG^2 = (PA^2 + PB^2 + PC^2)/3 - (a^2 + b^2 + c^2)/9$$

для квадрата расстояния от произвольной точки P до G .

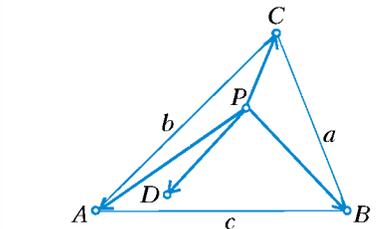


Рис. 2

Если $P = O$ – центр описанной окружности треугольника ABC , то (1) дает

$$OM^2 = s^2 R^2 - (xyc^2 + yza^2 + zx b^2), \quad (3)$$

где $\vec{OM} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$.

Приведем еще два интересных частных случая формулы (1).

Упражнение 3. Докажите, что а) если точка D лежит на стороне AB треугольника PAB (рис.3) и делит ее в

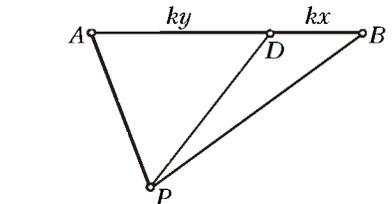


Рис. 3

отношении $AD : DB = y : x$, где $x + y = 1$, то

$$PD^2 = xPA^2 + yPB^2 - xyAB^2$$

(формула Стюарта);

б) расстояние между ортоцентром и центром описанной окружности треугольника можно найти по формуле

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Многочлен треугольника

Один из способов доказать существование треугольника, удовлетворяющего тем или иным условиям, – составить, исходя из этих условий, уравнение

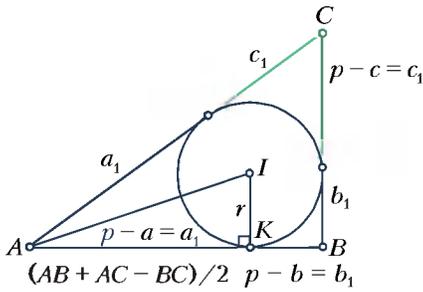


Рис. 4

$F(x) = 0$, корнями которого являются длины a, b, c его сторон, и доказать, что оно имеет три положительных решения, причем эти решения должны удовлетворять «неравенствам треугольника» для сторон ($a < b + c$ и т.д.). Часто удобнее иметь дело не с самими сторонами, а с отрезками, на которые они разбиваются точками касания вписанной окружности. Любые два таких отрезка, выходящих из одной вершины, равны по теореме о касательных; обозначим их a_1 (для отрезков, выходящих из A), b_1 и c_1 (рис.4).

Упражнение 4. Покажите, что а) $a_1 = (b + c - a)/2 = p - a$, $b_1 = p - b$ и $c_1 = p - c$; б) треугольник с заданными величинами a_1, b_1 и c_1 существует (и однозначно определен) при любых положительных значениях этих величин.

Таким образом, перейдя от сторон к отрезкам a_1, b_1, c_1 , мы избавляемся от необходимости заботиться о неравенстве треугольника.

Итак, рассмотрим кубический многочлен $F_1(x)$ с корнями a_1, b_1, c_1 :

$$F_1(x) = (x - a_1)(x - b_1)(x - c_1) = x^3 - (a_1 + b_1 + c_1)x^2 + (a_1b_1 + b_1c_1 + c_1a_1)x - a_1b_1c_1.$$

Выразим его коэффициенты через радиусы R, r и периметр $2p$ треугольника. Очевидно, $a_1 + b_1 + c_1 = 3p - (a + b + c) = p$. Пользуясь формулой Герона и формулой $S = rp$ для площади треугольника, вычислим свободный член:

$$a_1b_1c_1 = (p - a)(p - b)(p - c) = S^2/p = r^2p.$$

Наконец, коэффициент при x можно найти, вычислив $F_1(p)$:

$$F_1(p) = (p - a_1)(p - b_1)(p - c_1) = abc = p^3 - p \cdot p^2 + (a_1b_1 + b_1c_1 + c_1a_1)p - r^2p.$$

Из формул $S = pr$ и $S = \frac{abc}{4R}$ получаем

$$abc = 4Rrp, \quad (4)$$

откуда

$$a_1b_1 + b_1c_1 + c_1a_1 = r^2 + 4Rr,$$

и «уравнение треугольника» принимает вид

$$F_1(x) = x^3 - px^2 + (r^2 + 4Rr)x - r^2p = 0. \quad (5)$$

Нам нужно найти коэффициенты этого уравнения в нашей задаче и доказать его разрешимость.

Упражнение 5. Проведите аналогичное рассуждение для многочлена $F(x) = (x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$. Докажите, что $F(x) = x^3 - 2px^2 + (r^2 + 4Rr + p)x - 4Rrp$.

В алгебре коэффициенты многочлена $F(x)$ – выражения $a + b + c, ab + bc + ca$ и abc – называют *элементарными симметрическими* (т.е. не меняющимися при перестановке переменных) *многочленами* от трех переменных (a, b и c). Через них можно выразить любой симметрический многочлен от a, b, c . Поэтому любую величину в треугольнике, имеющую геометрический смысл (т.е. одинаковую для равных треугольников, а значит, не меняющуюся при перестановке сторон) и выражаемую многочленом от длин сторон, можно записать через радиусы вписанной и описанной окружностей и периметр. Ниже мы встретимся с несколькими такими выражениями.

Упражнение 6. Для треугольника ABC докажите, что

$$\begin{aligned} \text{а) } a^2 + b^2 + c^2 &= 2p^2 - 8Rr - 2r^2; \\ \text{б) } a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= p^2 - 8Rr - 2r^2 = a^2 + b^2 + c^2 - p^2; \\ \text{в) } ab^2 + a^2b + bc^2 + b^2c + ca^2 + c^2a &= 2p(r^2 - 2Rr + p^2). \end{aligned}$$

Условие на центроид

Обратимся непосредственно к треугольнику, который рассматривается в нашей задаче. Выразим с помощью формулы Лейбница расстояние IG от центра I вписанной окружности до центра G . Расстояние IA найдем из прямоугольного треугольника AIK (см. рис.4), где K – точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной AB . Поскольку $AK = a_1 = p - a$ (см. упражнение 4), то $IA^2 = a_1^2 + r^2$. Аналогично выражаются величины IB^2 и IC^2 . Поэтому (см. упражнение 6)

$$IG^2 = (a_1^2 + r^2 + b_1^2 + r^2 + c_1^2 + r^2)/3 - (a^2 + b^2 + c^2)/9 = (p^2 - 16Rr + 5r^2)/9.$$

Значит, *центроид треугольника лежит на вписанной окружности* ($IG = r$) тогда и только тогда, когда

$$p^2 = 16Rr + 4r^2. \quad (6)$$

Заметим, что при этом условии «уравнение треугольника» (5) упрощается:

$$x^3 - px^2 + (p^2/4)x - r^2p = 0,$$

а после замены $x = pu/2$ становится совсем «хорошим»:

$$u(u - 1)^2 = 8(r/p)^2. \quad (5')$$

Условие на ортоцентр

Мы хотим найти треугольник, в котором и *ортоцентр лежит на вписанной окружности*, т.е. $IH = IG = r$. В задачах, где идет речь одновременно о центре и ортоцентре, почти неизбежно на арене появляется еще одна замечательная точка треугольника – центр описанной окружности O . Наша задача – не исключение.

Упражнение 7. Докажите, что в любом треугольнике

$$\begin{aligned} \text{а) } \vec{OH} &= \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}; \\ \text{б) } \vec{OI} &= \frac{a\vec{OA} + b\vec{OB} + c\vec{OC}}{a + b + c}, \end{aligned}$$

иначе говоря, центр I вписанной окружности есть центр масс системы масс a, b, c , помещенных в вершинах A, B, C соответственно;

$$\begin{aligned} \text{в) } \vec{IH} &= \left(1 - \frac{a}{2p}\right)\vec{OA} + \left(1 - \frac{b}{2p}\right)\vec{OB} + \left(1 - \frac{c}{2p}\right)\vec{OC}. \end{aligned}$$

Упражнение 8. Покажите, что в любом треугольнике

$$IH^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2. \quad (7)$$

Подставим в равенство (7) $IH = r$, выразим из него p^2 и приравняем это выражение к правой части (6):

$$p^2 = 4R^2 + 4Rr + 2r^2 = 16Rr + 4r^2.$$

Отсюда получаем важное соотношение между радиусами вписанной и описанной окружностей искомого треугольника:

$$r^2 + 6Rr - 2R^2 = 0. \quad (8)$$

Малость, которой хватает

Возьмем для определенности $R = 1$, тогда из последнего уравнения получим $r = \sqrt{11} - 3$ (второй корень уравнения (8) отрицательный), а из предпоследнего – $p^2 = 8(4 - \sqrt{11})$. Подста-

вим величину $8\left(\frac{r}{p}\right)^2 = \frac{(\sqrt{11}-3)^2}{4-\sqrt{11}} = 2(7-2\sqrt{11})/5$ в «уравнение треугольника» (5'):

$$u(u-1)^2 = 2(7-2\sqrt{11})/5.$$

Нам остается доказать, что это уравнение имеет три положительных корня. На рисунке 5 показан график левой

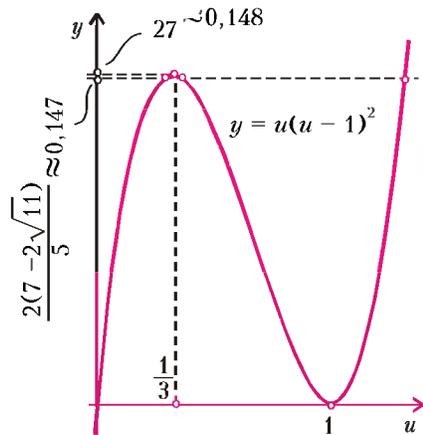


Рис. 5

части этого уравнения. Ее значение в точке $1/3$ (являющееся ее наибольшим значением на отрезке $[0, 1]$, что сейчас для нас не существенно) равно $4/27$ и больше $2(7-2\sqrt{11})/5$ (проверьте!), причем разница между этими величинами едва превышает одну тысячную.

Отсюда, очевидно, следует, что наше «уравнение треугольника» действительно имеет три положительных решения, а значит, искомый треугольник существует. Более того, его стороны, с точностью до пропорциональности, определены однозначно, а значит, все треугольники, удовлетворяющие нашему условию, подобны. Стоит сказать, что циркулем и линейкой этот треугольник не строится.

Геометрия вместо алгебры

Идея приведенного выше вычислительного решения предельно проста: «записать условия в виде уравнений и посчитать», хотя сами вычисления достаточно хитроумны. Но, как это часто бывает, наша задача имеет и более изысканное «геометрическое» решение, использующее несколько классических теорем о треугольнике. С этих теорем мы и начнем изложение второго решения.

Упражнение 9 (прямая Эйлера). Докажите, что в любом треугольнике центроид G лежит на отрезке OH между центром опи-

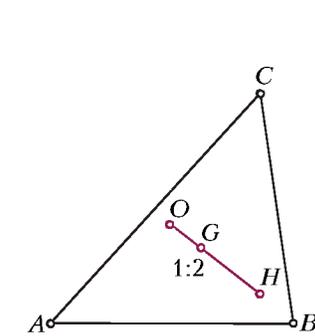


Рис. 6

санной окружности и ортоцентром и делит его в отношении $OG : GH = 1 : 2$ (рис.6). Прямая OH (при $O \neq H$) называется *прямой Эйлера* данного треугольника.

Упражнение 10 (формула Эйлера). Докажите, что расстояние $d = OI$ между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника вычисляется по формуле $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Таким образом, две окружности могут служить вписанной и описанной окружностями некоторого треугольника лишь в том случае, когда их радиусы связаны с расстоянием между их центрами формулой Эйлера. (В частности, отсюда видно, что в любом треугольнике $R \geq 2r$.)

Верно и обратное. Более того, если расстояние между центрами двух окружностей связано с их радиусами формулой $d^2 = R^2 - 2Rr$, то исходя из любой точки A на окружности радиуса

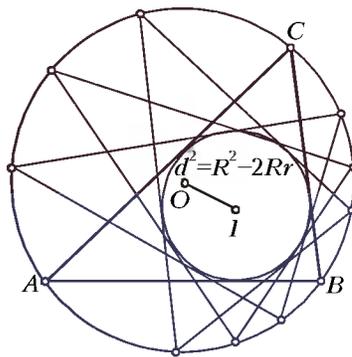


Рис. 7

R можно построить треугольник ABC , вписанный в эту окружность и описанный около второй окружности (рис.7).

Упражнение 11. Докажите последнее утверждение.

Сформулируем теперь одну из самых красивых теорем планиметрии – *теорему Фейербаха*. Она касается окружности, проходящей через середины сторон треугольника, а также, что является отдельной теоремой, через основания его высот и середины отрезков от ортоцентра до вершин (рис.8; эту ок-

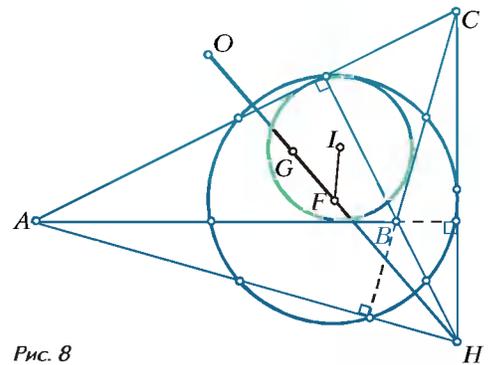


Рис. 8

ружность называют *окружностью девяти точек*). Ее можно представить как образ описанной окружности при гомотетии относительно центра G с коэффициентом $-1/2$ или относительно ортоцентра с коэффициентом $1/2$. В любом случае получим, что центр F окружности девяти точек лежит на прямой Эйлера, точнее, в середине отрезка OH , а ее радиус равен $R/2$. Теорема Фейербаха утверждает, что *окружностью девяти точек касается вписанной окружности треугольника и трех его вневписанных окружностей*. В частности, это означает, что $IF = R/2 - r$; именно это равенство нам и понадобится.

Упражнение 12. Докажите, что

$$\vec{IF} = \frac{1}{2p} \left((p-a)\vec{OA} + (p-b)\vec{OB} + (p-c)\vec{OC} \right),$$

и выведите отсюда равенство $IF^2 = (R/2 - r)^2$.

Последнее свойство, которое мы хотим напомнить, хорошо известно:

Упражнение 13. Если на плоскости даны окружность и точка P , то для любой прямой, проходящей через P и пересекающей окружность, произведение $PA \cdot PB$, где A и B – точки пересечения прямой с окружностью, будет одним и тем же; оно равно $|d^2 - R^2|$, где d – расстояние от точки P до центра окружности, а R – радиус окружности.

В учебниках эту теорему обычно формулируют в виде двух утверждений – для точки внутри и вне окружности; величину $d^2 - R^2$ называют *степенью* точки P относительно данной окружности.

Теперь, наконец, мы можем вплотную заняться нашим треугольником.

Проведем в нем прямую Эйлера OH . Допустим, что точка H уже попала на вписанную окружность, и выведем условие, при котором и точка G окажется на ней (рис.9).

Пусть K – вторая точка пересечения прямой OH с вписанной окружностью.

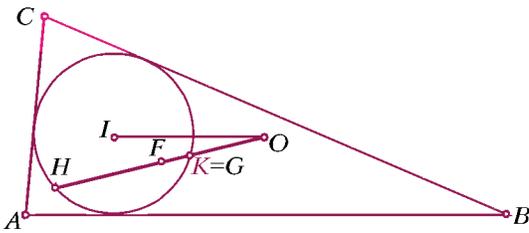


Рис. 9

Обозначим $OH = l$, $OK = kl$, где k – числовой множитель. Тогда степень точки O относительно вписанной окружности равна $OK \cdot OH = kl^2$, а с другой стороны, в силу упражнения 13 и формулы Эйлера, она равна $OI^2 - r^2 = R^2 - 2Rr - r^2$. Аналогично, степень точки F относительно вписанной окружности равна

$$\begin{aligned} FH \cdot FK &= (l/2) \cdot |l/2 - kl| = \\ &= |1 - 2k| \cdot (l/2)^2 = r^2 - IF^2 = \\ &= r^2 - (R/2 - r)^2 = -R^2/4 + Rr. \end{aligned}$$

В искомом треугольнике точка $K = G$ – центроид и $k = 1/3$. Это дает равенство $l^2/3 = R^2 - 2Rr - r^2 = 4(-R^2/4 + Rr)$, из которого сразу получается уже знакомое нам уравнение (8). Обратное,

если радиусы R и r удовлетворяют этому уравнению и известно, что ортоцентр лежит на вписанной окружности, то для множителя k точно таким же способом получим уравнение $k = |2k - 1|$, имеющее два решения: $k = 1/3$ и $k = 1$. В первом случае $OK = (1/3)OH$, т.е. $K = G$ –

центроид G лежит на вписанной окружности.

Упражнение 14. Покажите, что случай $k = 1$ невозможен.

Итак, нарисуем окружности Ω и ω радиусов R и $r = (\sqrt{11} - 3)R$ с центрами в точках O и I на расстоянии $d = \sqrt{R^2 - 2Rr} = R\sqrt{7 - 2\sqrt{11}}$. Как уже было сказано, для любой точки A на окружности Ω можно построить треугольник ABC , вписанный в Ω и описанный около ω . Пусть A пробегает окружность Ω , тогда ортоцентр H треугольника ABC , очевидно, опишет некоторую замкнутую непрерывную линию. Нам достаточно показать, что он побывает и внутри, и снаружи вписанной окружности ω . Тогда его траектория непременно должна пересечь ω , т.е. при некотором положении точки A ортоцентр H треугольника ABC попадает на ω ; выше мы доказали, что в силу заданного соотношения между R и r соответствующий треугольник и будет искомым.

Проведем в окружности Ω диаметр A_1A_2 через I (рис. 10) и рассмотрим равнобедренные треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, отвечающие его концам. Треугольник $A_1B_1C_1$ (см. рис. 10, а) тупоугольный, так как O – центр его описанной окружности – лежит вне этого треугольника. (Действительно, достаточно убедиться, что $IO = d > r$, или $d^2 = R^2 - 2Rr > r^2$. После подстановки численных значений это неравенство принимает вид $7 - 2\sqrt{11} > (\sqrt{11} - 3)^2 \Leftrightarrow 4\sqrt{11} > 13 \Leftrightarrow 176 > 169$.) Следовательно, ортоцентр H_1 этого треугольника лежит вне его – на продолжении радиуса OA_1 , т.е. не только вне ω , но и вне Ω . Второй треугольник, $A_2B_2C_2$, остроугольный (он содержит O), и его ортоцентр H_2 лежит на его высоте A_2M . Установить, что он находится внутри впи-

санной окружности, точнее на ее радиусе IM , можно, сославшись на то, что в любом треугольнике биссектриса любого угла делит пополам угол между высотой и радиусом описанной окружности, проведенными из той же вершины. что и биссектриса (на рисунке 10, б, например, $\angle H_2B_2I = \angle IB_2O$); в нашем случае отсюда следует, что точки O и H_2 лежат по разные стороны от I .

Упражнение 15. Докажите выделенное курсивом утверждение о биссектрисе.

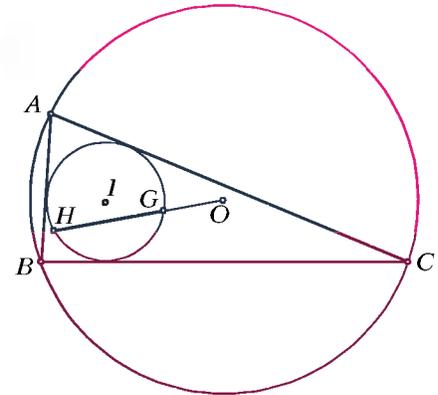


Рис. 11

Этим завершается второе решение нашей задачи. Искомый треугольник изображен на рисунке 11.

Задачи «на закрепление»...

Упражнение 16. Покажите, что каждое из условий а) $2R + r = p$ и б) $8R^2 = a^2 + b^2 + c^2$ необходимо и достаточно для того, чтобы треугольник был прямоугольным. В случае остроугольного треугольника знак « \Leftrightarrow » в обоих соотношениях нужно заменить на « \leq », а в случае тупоугольного – на « \geq ».

Упражнение 17 (M1487). Пусть H – точка пересечения высот, O и I – центры описанной и вписанной окружностей неравностороннего треугольника. Докажите, что из трех отрезков OH , IH , OI наибольший – OH .

...и для исследования

Интересно выяснить, хотя для решения задачи это само по себе и не нужно, какую именно траекторию описывает ортоцентр треугольника ABC , «зажатого» между данными окружностями ω и Ω . Ответ оказывается неожиданно простым – окружность! Для доказательства возьмем на луче OI точку J так, что $OJ = 2OI$ (рис. 12). Тогда IF – средняя линия треугольника OJH , следовательно, $JH = 2IF = R - 2r$. Диаметр этой окружности, очевидно, будет отрезок H_1H_2 , соединяющий ортоцентры рассмотренных выше равнобедрен-

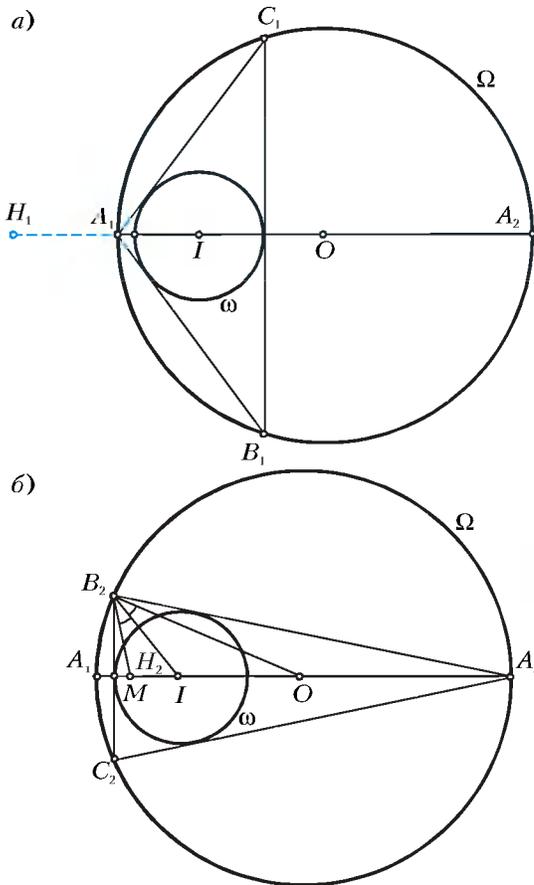


Рис. 10

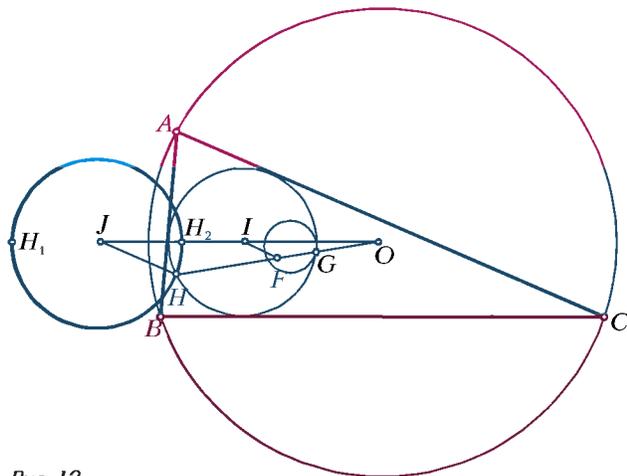


Рис. 12

ных треугольников. Из соображений непрерывности ясно, что когда A пробегает указанную окружность, H пройдет всю указанную окружность, причем за один оборот точки A точка H совершит три полных оборота.

Заметим, что по теореме о прямой Эйлера (упражнение 9) центроид G нашего треугольника также описывает окружность; ее радиус равен $(R - 2r)/3$, а центр делит отрезок IO в отношении 1:2. В связи с этим возникает следующая задача.

Рассмотрим две окружности ω и Ω ,

первая из которых лежит внутри второй. Допустим, что существует *четыреугольник*, вписанный в Ω и описанный около ω . Можно доказать, что тогда, как и в случае треугольника, такой четырехугольник можно нарисовать, взяв за одну из его вершин *любую* точку окружности Ω ; это утверждение называется *теоремой Понселе* (для четырехугольника). **Верно ли, что множество центроидов всех этих четырехугольников тоже окружность?** (Центроид четырехугольника – это

чек, сосредоточенных в его вершинах; он находится на пересечении средних линий четырехугольника.) Эксперимент дает утвердительный ответ на этот вопрос (рис.13), но к моменту написания этой статьи доказательством мы не располагали.

Теорема Понселе справедлива и для многоугольников с произвольным числом сторон n . **Будет ли центроид «многоугольника Понселе» описывать окружность при любом n ?**

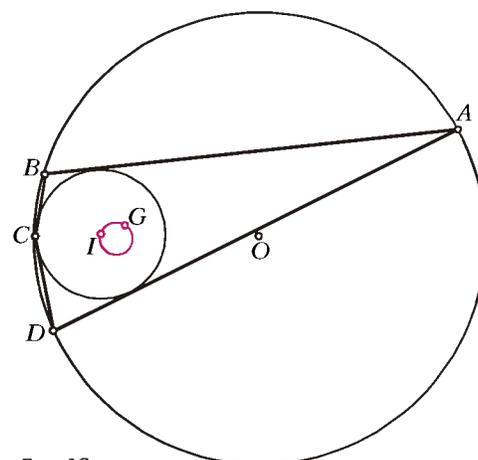


Рис. 13

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Заряженные частицы и поля

В.МОЖАЕВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ БУДУТ РАССМОТРЕНЫ задачи о движении отдельных зарядов в заданных электрических и магнитных полях.

Силовой характеристикой электростатического поля является вектор напряженности электрического поля \vec{E} . Если заряженная частица с зарядом q находится в некоторой точке пространства, где напряженность электрического поля равна \vec{E} , то на частицу со стороны электрического поля действу-

ет сила $\vec{F}_э = q\vec{E}$. А если в системе координат, в которой заряженная частица движется со скоростью \vec{v} , существует магнитное поле с индукцией \vec{B} , то на частицу будет действовать магнитная сила, или (как ее обычно называют) сила Лоренца, равная $F_{л} = qvB \sin \alpha$, где α – угол между вектором скорости и вектором магнитной индукции. Сила Лоренца перпендикулярна векторам \vec{B} и \vec{v} , а ее направ-

ление определяется с помощью правила левой руки. Поскольку сила, действующая со стороны магнитного поля на заряженную частицу, перпендикулярна вектору скорости, она не совершает работы, а лишь искривляет траекторию движения частицы, не меняя ее энергии.

Перейдем к рассмотрению конкретных задач.

Задача 1. *Рассматривая классическое приближение, вычислите скорость электрона в атоме водорода, если радиус его круговой орбиты $r = 0,53 \cdot 10^{-10}$ м, заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m = 0,9 \cdot 10^{-30}$ кг, электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.*

Электрон в атоме водорода находится в центральном электростатическом поле протона. На него действует сила Кулона, которая в данном случае обеспечивает центростремительное ускорение при движении электрона по круговой орбите. Уравнение движения элект-

трона имеет вид

$$\frac{mc^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

где v – скорость электрона на орбите. Отсюда получаем

$$v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 mr}} = 2,2 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

Задача 2. Пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 3,52 \cdot 10^3 \text{ В}$, электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,01 \text{ Тл}$ перпендикулярно линиям индукции и движется по окружности радиусом $r = 2 \text{ см}$. Вычислите по этим данным отношение заряда электрона к его массе.

Пройдя ускоряющую разность потенциалов, электрон приобретет скорость v , которую можно найти по закону сохранения энергии

$$eU = \frac{mv^2}{2},$$

где e – заряд электрона, m – его масса. В магнитном поле на электрон будет действовать сила Лоренца, равная $e\vec{v}\vec{B}$ и направленная перпендикулярно векторам скорости \vec{v} и индукции \vec{B} . Сила Лоренца в данном случае будет сообщать электрону центростремительное ускорение:

$$\frac{mv^2}{r} = evB,$$

откуда и находим удельный заряд электрона:

$$\frac{e}{m} = \frac{v}{rB}.$$

Подставляя сюда выражение для скорости из первого уравнения, окончательно получим

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{(rB)^2} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг.}$$

Задача 3. Электрон со скоростью $v_0 = 10^9 \text{ см/с}$ влетает в пространство плоского конденсатора, между пластинами которого поддерживается постоянная разность потенциалов $U = 425 \text{ В}$ (рис.1). Определите величину h максимального удаления электрона от нижней пластины конденсатора.

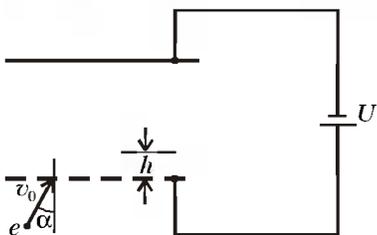


Рис. 1

Удельный заряд электрона $e/m = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$, угол падения $\alpha = 30^\circ$. Расстояние между пластинами $d = 1 \text{ см}$.

Рассмотрим движение электрона в системе координат, изображенной на рисунке 2. Электрон движется в однородном электрическом поле с напря-

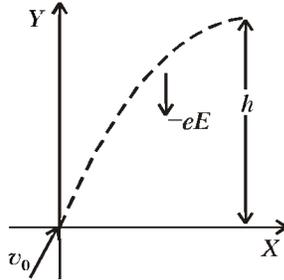


Рис. 2

женностью, равной $E = U/d$ и направленной по оси Y . Уравнение движения электрона вдоль этой оси имеет вид

$$ma_y = -eE = -\frac{eU}{d},$$

т.е. он движется в этом направлении равнозамедленно. Если через время $t = \tau$ электрон максимально удалится от нижней пластины, его координата y , а в наших обозначениях h , будет равна

$$h = v_0 \cos \alpha \cdot \tau - \frac{eU}{2md} \tau^2.$$

Очевидно, что в верхней точке вертикальная составляющая скорости электрона равна нулю:

$$v_0 \cos \alpha - \frac{eU}{md} \tau = 0.$$

Исключая время τ из двух последних уравнений, находим искомую величину:

$$h = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha \cdot d}{2Ue/m} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат можно получить также из закона сохранения энергии. Если отсчитывать потенциальную энергию электрона в электрическом поле от нижней пластины ($y = 0$), то потенциальная энергия электрона на высоте h составит eUh/d . Закон сохранения энергии электрона, записанный для точек с координатами $y = 0$ и $y = h$, будет иметь вид

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{eUh}{d},$$

где $v_x = v_0 \sin \alpha$ – скорость электрона на высоте h . После подстановки выражения для v_x получим

$$h = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha \cdot d}{2Ue/m}.$$

Задача 4. Электрон влетает в однородное магнитное поле и в точке A имеет скорость \vec{v}_0 , вектор которой составляет угол α с направлением магнитного поля (рис.3). При каких значениях индукции магнитного поля

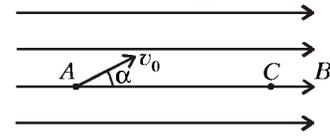


Рис. 3

В электрон окажется в точке C ? Заряд электрона e , его масса m , а расстояние $AC = L$.

Введем систему координат (рис.4), направив ось X вдоль вектора магнитной индукции. Разложим скорость электрона в точке A на составляющие $v_x = v_0 \cos \alpha$ и $v_y = v_0 \sin \alpha$. На электрон в магнитном поле будет действовать

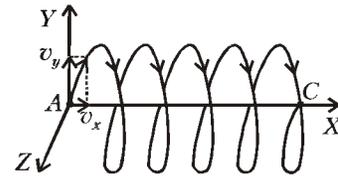


Рис. 4

сила Лоренца, проекция которой на ось X всегда равна нулю, поэтому вдоль оси X электрон будет двигаться равномерно с постоянной скоростью $v_x = v_0 \cos \alpha$. В плоскости, перпендикулярной оси X , электрон будет двигаться по окружности радиусом R под действием силы Лоренца, обеспечивающей центростремительное ускорение электрона:

$$\frac{m(v_0 \sin \alpha)^2}{R} = ev_0 \sin \alpha \cdot B.$$

В результате электрон станет двигаться по винтовой линии, изображенной на рисунке 4, пересекая ось X через равные промежутки времени (период обращения)

$$T = \frac{2\pi R}{v_0 \sin \alpha} = \frac{2\pi m}{eB}.$$

Очевидно, что электрон попадет в точку C , если за время t_{AC} равномерного движения вдоль оси X от точки A до точки C он совершит целое число полных оборотов:

$$t_{AC} = \frac{L}{v_0 \cos \alpha} = TN = \frac{2\pi m}{eB_N} N,$$

где $N = 1, 2, \dots$. Каждому целому числу N соответствует свое значение индук-

ции магнитного поля

$$B_N = \frac{2\pi m v_0 \cos \alpha}{eL} N.$$

Задача 5*. Протон с удельным зарядом $q/m = 0,96 \cdot 10^8$ Кл/кг налетает на систему из трех плоских металлических сеток, между которыми с помощью двух источников с ЭДС $E_1 = 500$ В и $E_2 = 200$ В поддерживаются постоянные разности потенциалов (рис.5). Расстояния между сетками равны d и много меньше поперечных

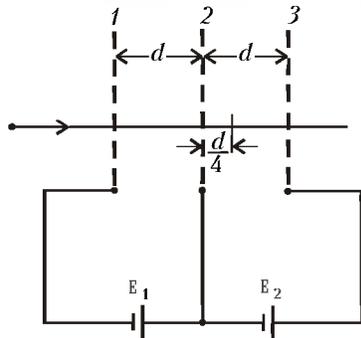


Рис. 5

размеров сеток. В точке, находящейся на расстоянии $d/4$ за второй сеткой, скорость протона оказалась равной нулю. Чему была равна скорость протона на большом удалении от сеток?

Скорость v протона на большом удалении от сеток можно найти по закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = q\Phi\left(\frac{d}{4}\right),$$

где $\Phi(d/4)$ – значение потенциала электрического поля сеток (относительно бесконечности) в точке остановки протона.

Найдем распределение потенциала $\Phi(x)$ между сетками 2 и 3 вдоль оси X , приняв за начало отсчета положение второй сетки (рис.6). Потенциал $\Phi(x)$ является суммой потенциалов $\Phi_{12}(x)$ и $\Phi_{23}(x)$, где $\Phi_{12}(x)$ создается только зарядами сеток 1 и 2, между которыми поддерживается разность потенциалов

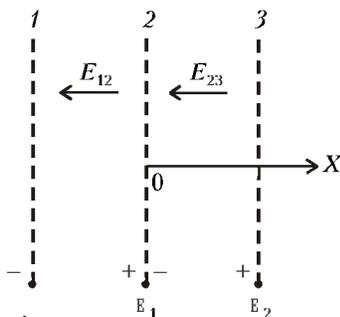


Рис. 6

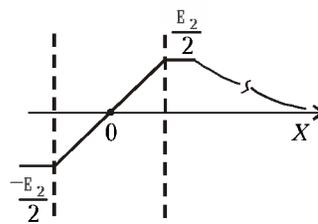


Рис. 7

E_1 , а $\Phi_{23}(x)$ – только зарядами сеток 2 и 3 с разностью потенциалов E_2 .

Рассмотрим конденсатор, образуемый сетками 2 и 3. На рисунке 7 приведен график распределения потенциала внутри этого конденсатора. Из соображений симметрии ясно, что потенциал центра конденсатора равен потенциалу на бесконечности, т.е. нулю. (Отметим, что нулю равен потенциал всех точек в плоскости симметрии системы.) Значит, внутри конденсатора потенциал меняется от значения $-E_2/2$ на отрицательной пластине до $+E_2/2$ на положительной по линейному закону. Вне конденсатора, где напряженность поля гораздо меньше, чем внутри, при удалении от пластин на малое расстояние (по сравнению с их размерами) потенциал почти не изменяется (а при удалении на бесконечно большое расстояние потенциал убывает до нуля). Аналогичные рассуждения можно провести и для конденсатора, образуемого сетками 1 и 2. Поскольку рассматриваемая точка остановки протона лежит внутри правого конденсатора (на расстоянии $d/4$ от отрицательной пластины), но вне левого конденсатора, для $0 \leq x \leq d$ получаем

$$\Phi_{12}(x) = \frac{1}{2} E_1 \text{ и } \Phi_{23}(x) = E_2 \left(\frac{x}{d} - \frac{1}{2} \right).$$

После суммирования находим

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} (E_1 - E_2) + E_2 \frac{x}{d},$$

и

$$\Phi\left(\frac{d}{4}\right) = \frac{1}{4} (2E_1 - E_2).$$

Итак, скорость протона вдали от сеток будет равна

$$v = \sqrt{2 \frac{q}{m} \Phi\left(\frac{d}{4}\right)} = \sqrt{\frac{q}{m} \left(E_1 - \frac{E_2}{2} \right)} \approx 1,96 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

Задача 6*. Частица с удельным зарядом $\alpha = 10^8$ Кл/кг влетает в камеру Вильсона, находящуюся в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10^{-2}$ Тл, перпендикулярно линиям

магнитной индукции поля. После поворота вектора скорости на 90° – относительное изменение радиуса траектории частицы при этом равно $\epsilon = 5\%$ – поле выключают. Затем частица проходит путь $L = 30$ см до полной остановки. С какой скоростью влетела частица в камеру, если сила сопротивления при ее движении пропорциональна скорости?

Рассмотрим сначала движение частицы в однородном магнитном поле. На частицу действуют две силы: сила Лоренца F_L , которая обеспечивает движение по окружности с центростремительным ускорением, и сила сопротивления F_c со стороны окружающего водяного пара (рис.8). Уравнение движе-

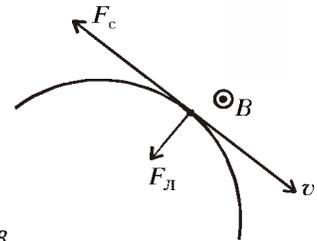


Рис. 8

ния под действием силы Лоренца имеет вид

$$\frac{mv^2}{R} = qvB,$$

где v – скорость, q – заряд, m – масса частицы, а R – радиус кривизны ее траектории. Из этого уравнения найдем связь между R и v :

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{v}{\alpha B}.$$

При малом относительном изменении радиуса кривизны ($\Delta R/R = \epsilon/100\% = 0,05$) можно записать

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta v}{v} \approx \frac{\Delta v}{v_0},$$

где v_0 – скорость частицы при влете в магнитное поле. Изменение абсолютной величины скорости Δv происходит под действием тормозящей силы $F_c = kv$, где k – константа. Уравнение движения частицы вдоль траектории имеет вид

$$kvdt = -mdv,$$

или, поскольку $vdt = ds$ (отрезок пути, пройденного частицей),

$$ds = -\frac{m}{k} dv.$$

В конечных приращениях (за время поворота вектора скорости на 90°)

$$\Delta s \approx \frac{\pi R}{2} = \frac{\pi v_0}{2\alpha B} \text{ и } \Delta v = -v_0 \frac{\epsilon}{100\%},$$

откуда получаем

$$\frac{\pi}{2\alpha B} \approx \frac{m}{k} \frac{\epsilon}{100\%}. \quad (1)$$

Теперь рассмотрим прямолинейный участок траектории частицы после выключения магнитного поля. В этом случае на частицу действует только сила сопротивления, поэтому

$$\Delta s = L, \text{ а } \Delta v = -v_0 \left(1 - \frac{\epsilon}{100\%}\right).$$

Решение уравнения движения в конечных приращениях будет иметь вид

$$L = \frac{m}{k} v_0 \left(1 - \frac{\epsilon}{100\%}\right). \quad (2)$$

Совместное рассмотрение движения на обоих участках траектории позволяет из выражений (1) и (2) найти скорость v_0 , с которой частица влетела в магнитное поле:

$$v_0 \approx \frac{2\epsilon\alpha LB}{(100\% - \epsilon)\pi} \approx 10^4 \text{ м/с.}$$

Задача 7*. Положительно заряженная частица движется в однородных и взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях. В некоторый момент времени ее скорость равна \vec{v}_0 ($\vec{v}_0 \perp \vec{E}$ и $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$; рис.9). Чему

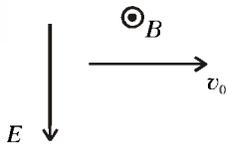


Рис. 9

будет равна величина скорости частицы в те моменты времени, когда вектор ее скорости будет составлять 180° с вектором \vec{v}_0 , при условии, что $E = v_0 B$?

Запишем уравнение движения частицы (аналогичное предыдущей задаче) вдоль оси X (рис.10):

$$m \frac{dv_x}{dt} = -qv_y B,$$

где m – масса, q – заряд частицы.

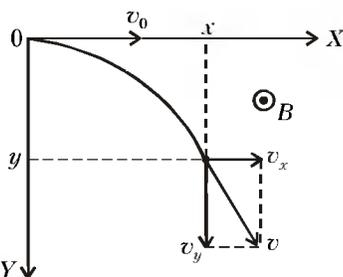


Рис. 10

Решение этого уравнения имеет вид

$$v_x(t) = v_0 - \frac{qB}{m} y.$$

В те моменты времени $t = t_n$, когда скорость частицы \vec{v} будет составлять 180° с вектором начальной скорости,

$$v_x(t_n) = -v \text{ и } y(t_n) = \frac{v_0 + v}{qB/m}.$$

По закону сохранения энергии,

$$\frac{mv_0^2}{2} + qEy(t_n) = \frac{mv^2}{2}.$$

При условии, что $E = v_0 B$, для скорости v получаем квадратное уравнение

$$v^2 - 2v_0 v - 3v_0^2 = 0,$$

откуда находим искомую скорость:

$$v = 3v_0.$$

Для любознательных приведем еще одно – краткое и красивое – решение этой задачи. Сразу оговоримся, что это решение выходит за рамки школьной программы, поскольку оно связано с преобразованием электромагнитных полей при переходе из одной инерциальной системы в другую. Будем рассматривать движение нашей заряженной частицы в системе координат, движущейся вдоль оси X со скоростью $-v_0$, т.е. навстречу частице со скоростью v_0 . В этой системе координат появляется дополнительное электрическое поле с напряженностью, равной $v_0 B$ и направленной навстречу электрическому полю \vec{E} .¹ В результате электрическое поле оказывается равным нулю, и остается только магнитное поле. Частица, имеющая начальную скорость $2v_0$, будет двигаться по окружности с постоянной скоростью $2v_0$. Следовательно, и в тот момент, когда вектор скорости частицы будет составлять 180° с вектором \vec{v}_0 , ее скорость будет равна $2v_0$. Если теперь вернуться в неподвижную систему координат, то понятно, что скорость частицы будет равна $3v_0$.

Упражнения

1. Пучок однократно заряженных положительных ионов Li^+ ($A = 6$) испускается эмиттером Э, ускоряется электрическим

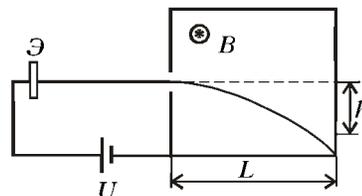


Рис. 11

¹ См. статью Е.Ромишевского «Эта загадочная магнитная сила» в этом номере журнала. (Прим. ред.)

полем и, пройдя разность потенциалов $U = 3000$ В, попадает в камеру с поперечным магнитным полем с индукцией $B = 3 \cdot 10^{-2}$ Тл (рис.11). Найдите величину отклонения пучка h . Длина камеры $L = 15$ см, заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса протона $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг.

2. Электрон влетает в пространство плоского конденсатора, между пластинами которого поддерживается постоянная разность потенциалов $U = 60$ В (см. рис.1). Определите минимальную скорость электрона, при которой он достигнет верхней пластины. Удельный заряд электрона $e/m = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг, угол падения $\alpha = 60^\circ$.

3. Положительно заряженная частица пролетает через три плоские металлические сетки, между которыми с помощью двух источников с ЭДС $E_1 = 250$ В и $E_2 = 200$ В поддерживаются постоянные разности потенциалов (рис.12). На каком расстоянии x

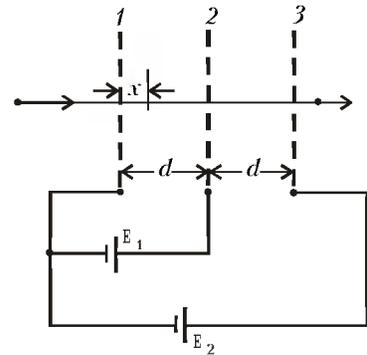


Рис. 12

от первой сетки скорость частицы будет равна скорости, которую она имела вдали от сеток? Расстояние d между сетками много меньше размеров сеток.

4. На вакуумный плоский диод, в котором расстояние между катодом K и анодом

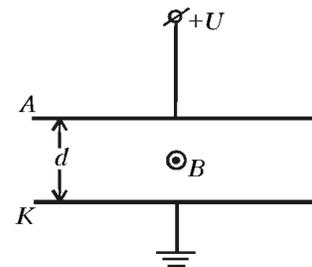


Рис. 13

A равно d , подано постоянное напряжение U (рис.13). Диод находится в однородном магнитном поле, индукция которого направлена параллельно плоскости электродов. При какой минимальной величине индукции магнитного поля электроны, покидающие поверхность катода, не смогут достичь анода? Электроны у поверхности катода можно считать неподвижными, а полем тяжести можно пренебречь. Заряд электрона e , его масса m .

III Международная астрономическая олимпиада

Очередная международная астрономическая олимпиада школьников прошла с 20 по 27 октября 1998 года в Специальной астрофизической обсерватории (САО) Российской академии наук. Волимпиаде приняли участие 5 национальных команд, в том числе две команды из весьма дальних стран зарубежья – Бразилии и Индии, а также несколько наблюдателей из европейских стран.

Участники и гости олимпиады проживали в поселке Нижний Архыз, где размещаются административные здания САО, гостиница, библиотека, научные лаборатории и вычислительный центр. Поселок расположен в одном из красивейших уголков Северного Кавказа на территории Карачаево-Черкессии (в 200 км от города Минеральные Воды), на высоте 1200 метров от уровня моря.

Олимпиада проходила по той же схеме, что и две предыдущие (см. «Квант» №4 за 1997 г. и «Квант» №3 за 1998 г.). Официальными языками олимпиады были русский и английский – на этих языках оргкомитет подготовил задания, но перед турами руководители команд могли перевести задания на родные языки участников (этим правом воспользовались команды Болгарии и Бразилии). Олимпиада включала в себя три тура: теоретический, практический и наблюдательный. Для проведения теоретического тура школьники были разделены на две возрастные группы: 8–10 классы (возраст участников – до 16 лет) и 11–12 классы (до 18 лет).

Кроме собственно соревновательных мероприятий, для участников и гостей олимпиады было организовано несколько экскурсий: по нижней научной площадке (лабораторный корпус, библиотека и т.п.); на радиотелескоп РАТАН-600, расположенный на окраине станции Зеленчукской (20 км от Нижнего Архыза), где проходят радионаблюдения; на верхнюю научную площадку (в 16 км от поселка), где находятся 6-метровый телескоп БТА и метровый телескоп ЦЕЙСС-1000; по историческим местам в окрестностях Нижнего Архыза (памятники архитектуры конца прошлого – начала нашего тысячелетия); в Архыз (поселок, расположенный в 25 км вверх по долине) и дальше в горы.

Ниже приводятся условия задач и список призеров III Международной астрономической олимпиады.

Теоретический тур

8–10 классы

1. Что чаще можно увидеть на небе Луны: Солнце или Землю?

2. Огромная пушка выстрелила из Англии так, что послала почтовый снаряд в Новую Зеландию (новый почтовый сервис). Оцените время его полета.

3. Известно, что экваториальные координаты точки весеннего равноденствия составляют 0 часов и 0 градусов. А каковы координаты северного полюса эклиптики?

4. Предположим, что Солнце в результате неожиданного коллапса превратилось в черную дыру. Как при этом изменится орбитальный период Земли?

5. Можно ли различить невооруженным глазом на Луне Море Кризисов, диаметр которого 520 км?

6. В эллиптической галактике M32 (спутник Туманности Андромеды) примерно 250 млн звезд. Видимый блеск этой галактики составляет 9^m . Считая, что все звезды в галактике примерно одинаковые, вычислите видимый блеск одной ее звезды.

11–12 классы

1. Можно ли наблюдать на Луне солнечные затмения, метеоры, кометы, полярные сияния, радугу, серебристые облака, искусственные спутники?

2. Переменные звезды-цефеиды есть в любой галактике, в том числе и в нашей. Поче-

му же зависимость «период-светимость» для цефеид удалось установить только после их открытия в Магеллановых облаках?

3. Как известно, прецессия, или предварение равноденствия, – это медленное ($50''$ в год) обратное перемещение точек равноденствия. А по какому кругу небесной сферы происходит это перемещение: по экватору или по эклиптике?

4. Искусственный спутник Земли движется со скоростью $6,9$ км/с по круговой орбите в плоскости экватора в направлении вращения Земли. С каким периодом времени он будет проходить через зенит пункта, лежащего на экваторе?

5–6. См. задачи 5–6 для 8–10 классов.

Практический тур

1. Массы компонент Капеллы

Шестиметровый телескоп САО – один из немногих, на которых проводятся спекл-интерферометрические наблюдения тесных визуально-двойных звезд. Цель таких наблюдений – прямое измерение звездных масс. Вам предлагается, используя наш наблюдательный материал, оценить массы компонент Капеллы.

Капелла (α Aug) – очень тесная

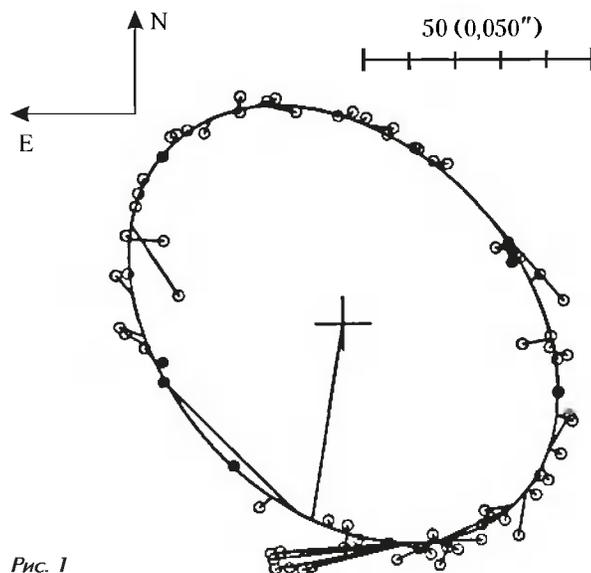


Рис. 1

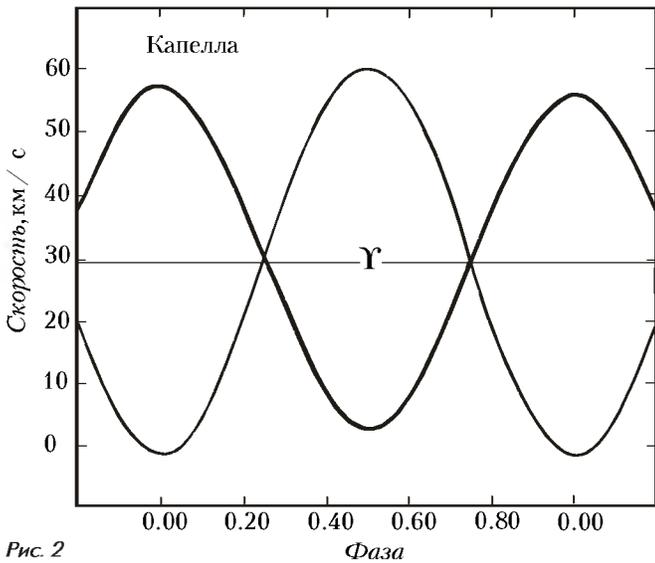


Рис. 2

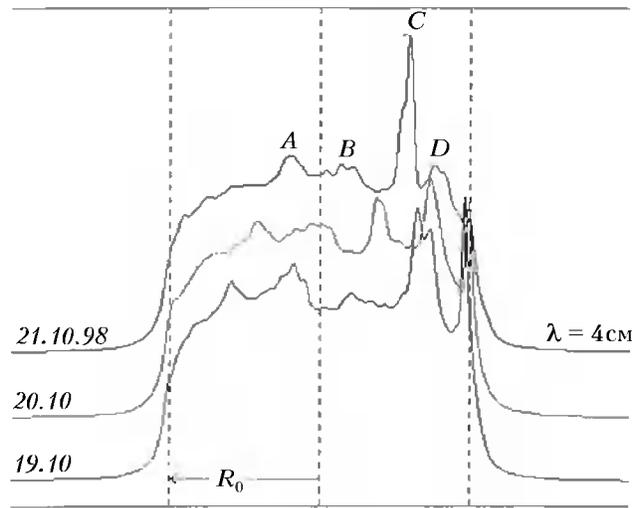


Рис. 4

визуальная пара. На рисунке 1 изображена относительная орбита компоненты *B*, построенная по результатам многолетних наблюдений в разных обсерваториях (точки, полученные в САО, изображены жирно). Положение компоненты *A* отмечено крестиком (и соединено прямой с точкой периастра). На рисунке 2 приведены кривые лучевых скоростей обеих компонент. Параллакс Капеллы $\pi = 0,077''$. Период обращения компонент $P = 104^d$.

Рассмотрите пространственную модель системы, учитывающую, в частности, эксцентриситет орбит и наклон их плоскости к лучу зрения. Используя

третий закон Кеплера, оцените массы компонент. Рассмотрите возможные источники погрешностей вашей оценки.

2. Масса галактики

Спиральные галактики, видимые с ребра, удобны для определения их масс. И.Д.Караченцевым с сотрудниками составлен каталог таких галактик и выполнена их массовая спектроскопия. Спектр одной из них, а именно FGS 1908 в Драконе, представлен на рисунке 3. Он получен 4 марта 1997 года с помощью спектрографа, размещенного в прямом фокусе 6-метрового телескопа САО. Щель спектрографа была со-

вмещена с большой осью галактики. Вертикальные прямые, пересекающие спектр, это — эмиссии ночного неба. Остальные эмиссии принадлежат галактике, их лабораторные длины волн указаны на рисунке. При определении массы галактики использовалось значение постоянной Хаббла $H = 74 \text{ км}/(\text{с} \cdot \text{Мпс})$. Вам предлагается повторить оценку массы галактики. Напоминаем, что $1 \text{ пс} = 3,09 \cdot 10^{16} \text{ м}$, масса Солнца $M = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$, постоянная тяготения $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$.

Объясните, почему двумерный спектр галактики выглядит именно так, как показано на рисунке 3. Оцените массу FGS 1908 и сравните ее с массой нашей Галактики. Рассмотрите возможные неточности вашей оценки.

Наблюдательный тур

1. Солнце в оптическом и радио-диапазонах

С помощью школьного телескопа рассмотрите и зарисуйте детали, видимые на диске Солнца. Сориентируйте изображение Солнца по странам света.

Отождествите детали своего рисунка с деталями одномерных радиорезов Солнца (рис.4), сделанных в предыдущие дни на радиотелескопе РАТАН-600. Пометьте их соответствующими буквами. Радионаблюдения проводились в полдень, ножевая диаграмма направленности была ориентирована вертикально и перекрывала весь диск Солнца.

2. Звездокол

Тот телескоп прозвали Звездоколом За то, что каждую звезду колол На две, на три звезды — как шарик ртути,

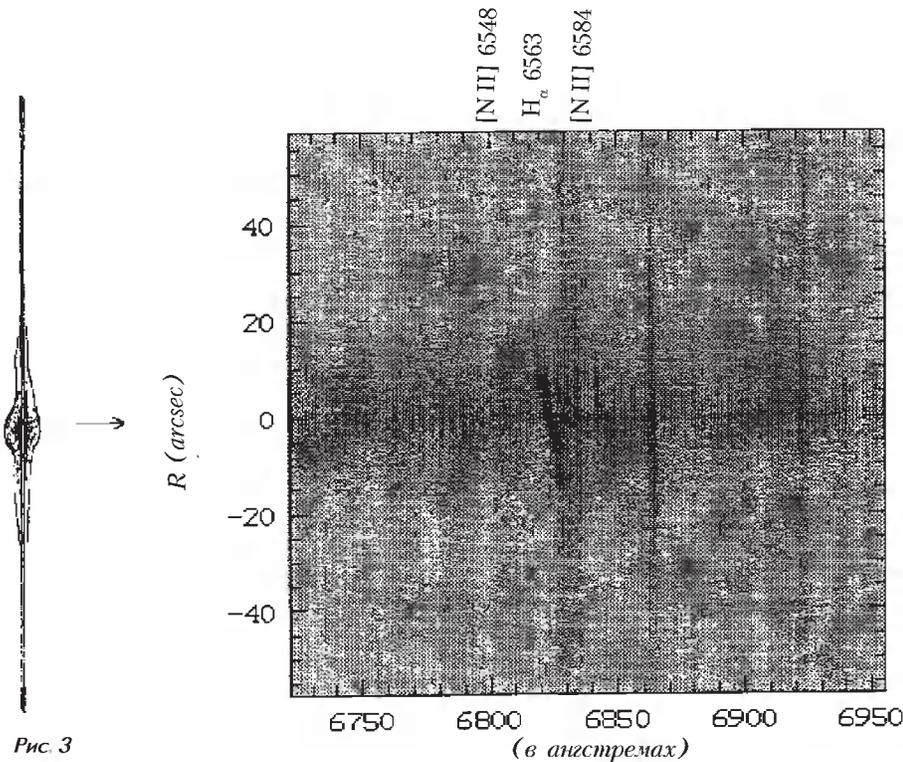


Рис. 3

Лежащий на ладони, можно пальцем
Разбить на два-три шарика

поменьше...
Роберт Фрост. Звездокол.
Перевод А.Сергеева

С помощью школьного телескопа
найдите и разделите на компоненты
несколько (не более 5) визуально-двой-
ных звезд. Заполните таблицу. Обра-
тите внимание на блеск и цвета компо-
нент. Объясните наблюдаемое соотно-
шение блеска и цветов компонент.

Публикацию подготовил
М.Гаврилов

Призеры III Международной астрономической олимпиады

Дипломы I степени получили

Бирюков А. – Россия, Нижний Новго-
род,
Золотухин И. – Москва,
Матеев Р. – Индия,
Митева А. – Болгария,
Пенев К. – Болгария,
Тассев С. – Болгария.

Дипломы II степени получили

Войцкич П. – Москва,
Дянков Н. – Болгария,
Задорин А. – Россия, Калининград.

Дипломы III степени получили

Бхалерао В. – Индия,
Гедерцев А. – Россия, Ухта,
Джаянти Ш. – Бразилия,
Илиев Н. – Болгария,
Курилова Т. – Москва,
Матяж И. – Россия, Казань,
Радж Д. – Индия,
Рахчиев М. – Россия, Челябинск,
Сайфутдинов А. – Россия, Челябинск,
Шукла Д. – Индия.

«К В А Н Т» У Л Ы Б А Е Т С Я

Статфизическая трагедия

Случилось это в фазовом пространстве
Одной из многих замкнутых систем.
Координата после долгих странствий
Устала и измучилась совсем.

Так холодно вокруг, куда ни кинься,
В рассеянной в системе теплоте...
В одной ячейке обобщенный импульс
Провел с координатой Δt .

И так их было радостно свиданье,
И так им было хорошо вдвоем
В одном и том же микросостоянье
Средь хаоса, царящего кругом.

Но в физике закон, суров и точен.
Сомнет тебя, борись иль не борись.
По прихоти фигуративных точек
Они по разным клеткам разошлись.

И вот они уже с другими связаны,
И с ним навряд ли встретится она,
Поскольку эргодичность не доказана,
А может быть и вовсе неверна.

Случайное случается на свете,
В работу превращается тепло,
Но если ты единственную встретил,
Тебе невероятно повезло.

В системе жизни незаметный атом,
В тоскливой ежедневной суете,
Не потеряй свою координату,
Не покорись жестокому кТ!

06.12.68



Субъективный идеализм

Мучаясь проклятыми вопросами.
Для себя решенными заранее,
Понапрасну скучные философы
Спрячут о границах мироздания.

Логика, формально безупречная,
Силлогизм, плод рассудка голого, —
Ясно, что вселенная конечная,
Раз она легко влезает в голову.

Были звезды, а к утру померкли,
Спрашиваешь — некому ответить.
Как давно сказал епископ Беркли,
Каждый человек один на свете.

Каждый строит заново вселенную,
И она единственно реальная.
Есть вселенные довольно ценные,
Большинство вселенных тривиальные.

Сколько их, и грязных и заброшенных,
Для других вселенных просто бедствие.
Делайте вселенные хорошими,
Ведь они слегка взаимодействуют!

20.01.68

Л.Блюменфельд

Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Малый механико-математический факультет (МММФ) – математическая школа при механико-математическом факультете МГУ – объявляет прием учащихся на заочное отделение. На трехгодичное обучение принимаются учащиеся, оканчивающие восьмые классы одиннадцатилетних общеобразовательных школ, на четырехгодичное обучение – учащиеся, заканчивающие седьмые классы. Зачисление на МММФ производится по результатам решения задач вступительной работы, опубликованных ниже.

Основные задачи МММФ – приобретение к математике, углубление знаний в рамках школьной программы, расширение математического кругозора учащихся средних школ, а также знакомство с механико-математическим факультетом МГУ.

Зачисление на заочное отделение МММФ происходит в октябре. Занятия начинаются в ноябре. Обучение платное. Для хорошо успевающих учащихся из малообеспеченных семей возможно снижение оплаты. Учащиеся, особо успешно выполнившие все задания, получают удостоверение об окончании МММФ.

Преподают на заочном отделении МММФ аспиранты и сотрудники механико-математического факультета МГУ. Разработку тематических брошюр осуществляет методический совет, состоящий из профессоров и преподавателей факультета.

Желающие поступить на МММФ должны не позднее 20 сентября 1999 года выслать в наш адрес решения

задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все задачи). Поступающим в восьмой класс решать задачи 9, 10, 11 не нужно. Возможно обучение коллективных учеников, а также поступление на МММФ учащихся, заканчивающих 9 (10) класс, на основании заявления с приложением итоговых оценок за 9 (10) класс.

Вступительную работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. На обложку тетради наклейте лист бумаги со следующими данными:

- 1) Республика, край, область
 - 2) Фамилия, имя учащегося (для коллективных учеников – Ф.И.О. руководителя и полный список учащихся)
 - 3) Школа, класс
 - 4) Полный домашний адрес с указанием индекса почтового отделения
 - 5) Фамилия, имя, отчество родителей, место их работы и должность
- В работу вложите листок бумаги размером 10×12 см, на котором напишите полный домашний адрес и индекс.

Наш адрес: 119899 Москва, Воробьевы горы, МГУ, Малый мехмат.

Для школьников 6–11 классов Москвы и ближнего Подмосковья работает вечернее отделение МММФ. Справки по телефону 939-39-43.

Вступительная работа

1. Найдите все пары целых чисел x и y , удовлетворяющих уравнению

$$9xy - 1 = 3(x - y).$$

2. Разложите многочлен $4x^4 + 1$ на множители с целыми коэффициентами.

3. В свежем арбузе массой 10 кг 99% воды. После того, как арбуз расколол-

ся и высох, вода стала составлять 98%. Какова теперь его масса?

4. Найдите наименьшее число, половина которого – полный квадрат, $1/3$ – полный куб, а $1/4$ – 5-я степень натурального числа.

5. Существует ли такой выпуклый четырехугольник, в котором любая из сторон длиннее каждой из диагоналей?

6. Из города в деревню одновременно вышли два пешехода. Один из них половину затраченного времени шел со скоростью 5 км/ч, а вторую половину – со скоростью 4 км/ч. Второй же пешеход первую половину пути шел со скоростью 4 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью 5 км/ч. Кто из пешеходов придет раньше?

7. Докажите, что если в четырехугольнике каждый из углов больше 89° , то каждый из них меньше 93° .

8. На каждой клетке шахматной доски 1999×1999 стоит конь. Можно ли одновременно пойти всеми этими конями так, чтобы никакие два не оказались на одном поле?

9. На стороне AB произвольного треугольника ABC взята точка K так, что $AK:KB = 3$. Где на сторонах треугольника ABC нужно выбрать точку D , чтобы прямая KD делила его площадь пополам?

10. При каких значениях k оба корня квадратного уравнения

$$x^2 + 2(k+1)x + 7k - 3 = 0$$

отрицательны?

11. Докажите, что число

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{4}}} + \frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{6}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{98+\sqrt{99}}}$$

больше 4.

Заочная физическая школа при физическом факультете МГУ

Физический факультет МГУ объявляет прием учащихся в 10 и 11 классы Заочной физической школы на очередной учебный год.

Физический факультет МГУ готовит физиков–теоретиков и экспериментаторов по всем разделам современной физики и астрономии. Фундаментальное университетское образование позволяет выпускникам физического факультета быстро осваивать специфику любого научного или технического направлений – таких, например, как гео-

физика и биофизика, астрофизика и химическая физика, компьютерная физика и математическое моделирование.

Выпускникам физического факультета присваивается степень магистра.

Основная цель ЗФШ – помочь учащимся средней школы глубже изучить физику, лучше подготовиться к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения, прежде всего – на физический факультет МГУ.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать до 1 сентября по адресу: 119899 Москва, ГСП, Воробьевы горы, МГУ,

физический факультет, ЗФШ. В письмо вложите два экземпляра анкеты, заполненной на листах плотной бумаги размером 7×12 см по приведенному здесь образцу, и конверт с Вашим адресом.

Решение о зачислении в ЗФШ будет сообщено до 20 октября.

Принятым в ЗФШ в течение года высылаются контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решенные задания оцениваются, рецензируются и отсылаются обратно. Учащиеся 10 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 11 класс. Успешно прошедшие обучение получают удостоверение об окончании ЗФШ (при

Фамилия, имя, отчество
Класс ЗФШ
Профессия родителей

Подробный домашний адрес

Номер и адрес школы

Пирогов Юрий Андреевич
10

*мать – инженер,
отец – врач
120713 г.Тула, ул.Лермонтова,
д. 24, кв. 26
школа №444, Огородный пр., д.11*

поступлению на физический факультет МГУ удостоверение об окончании ЗФШ учитываются приемной комиссией).

Для проживающих в Москве и Московской области имеется вечерняя физическая школа.

Справки по телефону (095) 939-38-78 с 16 до 18 часов по рабочим дням.

Вступительное задание

Поступающим в 10 класс ЗФШ нужно решить задачи 1–4, поступающим в 11 класс – задачи 3–6.

ЗИФМШ объявляет прием

Заочная инженерная физико-математическая школа (ЗИФМШ) объявляет прием учащихся в 9, 10 и 11 классы на 1999/2000 учебный год. Главная цель школы – помочь учащимся глубже изучить математику и физику, развить инженерный склад мышления и лучше подготовиться к поступлению в высшие учебные заведения, в частности – в Петербургский государственный университет путей сообщения (ПГУПС).

Прием в ЗИФМШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Рядом с номером каждой задачи в скобках указывается, для какого класса она предназначена. Например, 4(9, 10 кл.) означает, что задача 4 входит в конкурсное задание для 9 и 10 классов. Задание для каждого класса состоит из шести задач.

Решение вступительного задания необходимо прислать по адресу: 190031 Санкт-Петербург, Московский проспект, д.9, ПГУПС, ЗИФМШ, на конкурс. В письмо вложите два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 9×12 см и заполненной по прилагаемому образцу.

Зачисленным в ЗИФМШ в течение года высылаются учебные пособия и контрольные задания; решенные задания оцениваются и рецензируются. Успешно закончившие ЗИФМШ получают удостоверение об окончании.

Вступительное задание

1 (9 кл.). Будет ли плавать в ртути стеклянная бутылка, заполненная ртутью?

1. Приборы, установленные на берегу, показывают, что ветер дует с юго-запада, а величина скорости ветра составляет $v = 5$ м/с. Что покажут аналогичные приборы, установленные на корабле, идущем на запад со скоростью $u = 36$ км/ч?

2. На пути тела массой m , скользящего по гладкой горизонтальной плоскости, находится горка высотой H и массой M . При какой минимальной скорости v тела оно сможет преодолеть горку? Горка может скользить

Фамилия, имя, отчество
Класс (указывается по состоянию на 1 сентября 1999 г.)
Подробный домашний адрес
Номер и адрес школы

Будет ли плавать в воде стеклянная бутылка, заполненная водой? Ответ обоснуйте.

2 (9 кл.). Вычислите значение числового выражения, прибегнув не к счетным машинкам, а к сообразительности:

$$\left(\frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 14} + \frac{1}{14 \cdot 15} \right) \cdot 30.$$

3 (9, 10 кл.). По параллельным путям в одну сторону движутся два электропоезда. Скорость первого электропоезда 54 км/ч, второго 10 м/с. Сколько времени будет продолжаться обгон одного поезда другим, если длина каждого поезда 150 м?

4 (9, 10 кл.). Поезд проходит мимо платформы длиной 350 м за 45 с, а мимо светофора – за 27 с. Определите длину поезда и его скорость.

5 (9, 10, 11 кл.). В стакане содержится 250 см³ воды. Опущенный в стакан термометр показал 78 °С. Какова действительная температура воды, если теплоемкость термометра 20 Дж/град, а до опускания в воду он показывал 20 °С?

6 (9, 10, 11 кл.). Слиток из олова и свинца массой 20 кг при погружении в воду «потерял» 2 кг. Известно, что 10 кг олова «теряют» при погружении в воду $1\frac{3}{8}$ кг, а 5 кг свинца «теряют»

без трения по плоскости, не отрываясь от нее.

3. Однородный стержень согнут в виде прямого угла со сторонами a и b и подвешен за гвоздь, вбитый в вертикальную стенку. Какой угол образует сторона a с вертикалью?

4. Придумайте качественную задачу по любому разделу физики (и приведите ее решение).

5. Смешали объем V_1 воздуха с относительной влажностью ϕ_1 и объем V_2 воздуха с влажностью ϕ_2 , при этом обе порции были взяты при одной и той же температуре. Смесь занимает объем $V_1 + V_2$. Определите ее относительную влажность.

6. Чему равен заряд заземленной металлической сферы радиусом R , если на расстоянии a ($a > R$) от ее центра находится точечный заряд $q > 0$?

Сидоров Иван Петрович

десятый

*524806 г.Тверь, ул.Садовая, д.55, кв.77
школа №5, ул.Зеленая, д.7*

3/8 кг. Определите процентное содержание олова и свинца в сплаве.

7 (10, 11 кл.). Какую среднюю мощность должен развивать кузнечик массой 0,01 кг для прыжка на высоту 1 м? Время отталкивания 0,2 с. Размерами кузнечика можно пренебречь.

8 (10, 11 кл.). Решите уравнение

$$\frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1.$$

9 (11 кл.). Две лампочки номинальной мощностью 25 Вт и 150 Вт, рассчитанные каждая на напряжение 127 В, соединили последовательно и включили в сеть с напряжением 220 В. Какая из лампочек перегорит?

10 (11 кл.). Найдите значение параметра a , при котором корни x_1 и x_2 уравнения

$$2x^2 + (2a - 1)x + a - 1 = 0$$

удовлетворяют соотношению $3x_1 - 4x_2 = 11$.

Костромская летняя школа

С 1 по 24 августа 1998 года в одном из санаториев Костромы учились и отдыхали школьники 6–10 классов – работала Костромская летняя многопредметная школа (ЛМШ). Этой школе уже шесть лет. Основные задачи ЛМШ – дополнительное образование школьников и развитие интереса к знаниям. В этом году работали отделения математики, физики, программирования, химии, биологии и экологии.

Каждый учебный день с завтрака до обеда идут занятия, посещение которых обязательно. После обеда проводятся лекции, консультации и дополнительные занятия для желающих. После ужина – игры «Что? Где? Когда?», «Супервикторина», «Завалинка», разнообразные спортивные соревнования.

24 дня смены были разделены на день заезда, день вступительной олимпиады, четыре пятнадцатидневки, в каждой из которых 4 дня учебных и один выходной, день консультаций перед зачетом и последний день – день зачета.

Правила летней школы гласят: не сдавшие зачет не принимаются в ЛМШ на следующий год, сдавшие на 5 – получают персональное приглашение. Отбор учащихся происходит по конкурсу – вступительные задания рассылаются по всей области. При этом учитываются результаты выступлений на олимпиадах, математических боях и т.п.

В прошлые годы в школе было очень много преподавателей, работавших в Кировской ЛМШ. Были они и в этом году, но появились уже и костромские преподаватели, способные работать в ЛМШ. В будущем ситуация еще улучшится, поскольку каждый год в ЛМШ есть стажеры – студенты, помогающие преподавателям проводить занятия. Набравшись опыта, многие из них в будущем приедут в качестве преподавателей.

Автор этой заметки проводил занятия по математике в группе восьмиклассников. Поэтому речь пойдет о них (впрочем, в капле воды отражается море). Основную массу составляли ребята из Костромы. Только двое были из сельских школ. (Обычно в ЛМШ сельских школьников больше – школа старается максимально охватить территорию области.) Оба чувствовали себя поначалу очень скованно. Один так по-настоящему и не включился в работу, хотя и присутствовал на всех занятиях, стараясь выполнять посильные задания. Другой смог преодолеть трудности и очень хорошо проявил

себя – занимался в коридорах, на подоконниках, везде находил тихий угол для размышлений. (А найти было не просто – полторы сотни школьников заполняли все предоставленное им пространство.)

Вначале восьмиклассников было 15 человек, но после первых двух дней занятий одна девочка уехала домой готовиться к спортивным соревнованиям, поскольку поняла, что совмещать жизнь и учебу в ЛМШ с другими занятиями невозможно. Другая попыталась совмещать учебу с уроками танцев, но, съездив один раз, сделала выбор в пользу ЛМШ.

В первый день занятий (2 августа) была проведена вступительная олимпиада. Ее цель – выявить начальный уровень подготовки школьников и сформировать учебные группы.

На следующий день занимались комбинаторикой и вписанными углами. Комбинаторика – традиционная тема в любом классе ЛМШ. Вписанные углы, казалось бы, должны изучаться в течение учебного года в общеобразовательной школе. Но который год подряд выясняется, что школьники не только не умеют доказывать теорему о вписанном угле, но вообще ничего не помнят ни о ней, ни о ее многочисленных следствиях (угол между хордой и касательной, между двумя хордами, между двумя секущими, признаки того, что четырехугольник можно вписать в окружность, и т.д.).

Вообще, сейчас сложилась парадоксальная ситуация: благодаря ЛМШ, матбоям и кружкам, школьники порой знают олимпиадные задачи гораздо лучше, чем школьную программу. Например, я спросил восьмиклассников, как вывести формулу для решения квадратного уравнения. Ни один не смог это сделать! Но после занятия некоторые из них задержались, пытались решить квадратное уравнение, и на следующий день двое справились с задачей! Та же история повторилась со средней линией трапеции. Только один из восьмиклассников справился с ней. Он двумя способами записал формулу площади трапеции: $S = \frac{(a+b)h}{2}$ и $S = \frac{(a+m)h}{2} + \frac{(m+b)h}{2}$, где h – высота трапеции, a, b, m – ее основания и средняя линия, S – площадь. Приравняв, он получил равенство

$$a + b = \frac{a + m}{2} + \frac{m + b}{2},$$

откуда $m = (a + b)/2$. Таким образом, к стандартной задаче он вынужден был подойти творчески (потому что не знал стандартного решения).

К сожалению, невозможно в короткой статье рассказать о каждом дне летней школы. Поэтому ограничимся лишь задачами заключительной олимпиады:

1. Некто решил поделить свои сбережения поровну между своими сыновьями и завещал старшему 1000 рублей и $1/8$ часть остатка, следующему – 2000 рублей и $1/8$ часть остатка, третьему – 3000 рублей и $1/8$ часть остатка, и так далее. Определите число сыновей и размер завещания.

2. Уравнение $x^2 + bx + c = 0$ имеет два целых корня, причем $bc = 1996$. Докажите, что по крайней мере один из корней меньше нуля.

3. На доске было написано 5 чисел. Сложив их попарно, получили следующие 10 чисел: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Какие числа были написаны?

4. Разрежьте параллелограмм на две равные части, из которых можно сложить ромб.

5. Найдите все целые n , при которых число $\frac{(n^5 + 3)}{(n^2 + 1)}$ – целое.

6. Число 51.2 трижды увеличивали на одно и то же число процентов, а затем трижды уменьшали на то же самое число процентов. В результате получилось число 21.6. На сколько процентов увеличивали, а затем уменьшали это число?

7. Какие значения может принимать сумма цифр числа, делящегося на 11?

8. Квадратная комната разгорожена перегородками, параллельными стенам, на несколько меньших квадратов. Длина стороны каждой комнаты – целое число метров. Может ли сумма длин всех перегородок равняться 1998 метрам?

9. Существуют ли натуральные числа x, y, z такие, что $x^{19} + y^{19} = z^{96}$?

10. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CD . Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно CD , пересекает AC в точке E . Докажите, что $EC = 2AD$.

В заключение замечу, что костромская ЛМШ активно сотрудничает со многими другими летними школами (Киров, Белорецк, Ярославль – список можно продолжить), и приведу координаты центра «Эврика-М», который организует ЛМШ:

Адрес: 156019, г.Кострома, ул.Фестивальная, д.29.

Телефон: 22-71-41.

Электронная почта:

root@evrika.kti.kostroma.su

или

scmen@kmt.h.ru

Д.Калинин

Суммы квадратов и целые гауссовы числа

1. а) $25 = 5^2 + 0^2 = 4^2 + 3^2$;
 б) $50 = 7^2 + 1^2 = 5^2 + 5^2$.
4. *Указание.* $21 = 3 \cdot 7$.
5. а) 0, 1, 3, 4, 5 или 9.
6. Рассмотрим числа $1^2, 2^2, \dots, (p-2)^2, (p-1)^2$. При любом p строка остатков этих чисел симметрична, т. е. читается слева направо так же, как справа налево. Это легко объяснить: остатки от деления на p чисел x^2 и $(p-x)^2 = p(p-2x) + x^2$ совпадают. Поэтому достаточно рассмотреть числа $1^2, 2^2, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. Все они при делении на p дают разные остатки. Действительно, если бы какие-то два из этих чисел, скажем r^2 и s^2 , где $r \neq s$, давали одинаковые остатки, то разность $r^2 - s^2 = (r-s)(r+s)$ делилась бы на p . Но ни $(r-s)$, ни $(r+s)$ не делится на p (объясните, почему!).
7. а) *Первый способ.* Нечетное число при делении на 8 может дать один из остатков 1, 3, 5 и 7. Квадраты этих чисел (1, 9, 25 и 49) при делении на 8 дают остаток 1.
Второй способ. $(2n+1)^2 = 4n(n+1) + 1$, где n или $n+1$ четно.
Третий способ. $x^2 = (x-1)(x+1) + 1$, где при нечетном x один множитель четен, а другой кратен 4.
 в) Если все три числа x, y, z четны, то разделим обе части уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = 4^m(8n+7)$ на 4. Так будем делать до тех пор, пока хотя бы одно из чисел x, y, z не станет нечетным. Поскольку квадрат нечетного числа при делении на 8 дает остаток 1, а квадрат любого целого числа – остаток 0, 1 или 4, и поскольку ни одна из сумм $1+0+0, 1+0+1, 1+0+4, \dots, 1+4+4$ не дает при делении на 8 ни остатка 7, ни остатка 4, ни остатка 0, получаем желанное противоречие.
Замечание. Гаусс доказал, что в виде суммы квадратов трех целых чисел представимы все натуральные числа, кроме чисел вида $4^m(8n+7)$, где m, n – целые неотрицательные числа. (В современном изложении этот факт доказан в «Курсе арифметики» Ж.Серра. Там использованы p -адические числа, символ Гильберта и теорема Минковского – Хассе.)
8. а) Если $n = x^2 + y^2$, где x, y – целые числа, то $\frac{n}{2} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$. Если бы одно из чисел x, y было четным, а другое нечетным, то сумма квадратов $x^2 + y^2$ была бы нечетной. Значит, числа x, y оба четны или оба нечетны. Следовательно, числа $(x+y)/2$ и $(x-y)/2$ – целые.
 б) *Указание.* Если $x^2 + y^2$ кратно 5, то $(x-2y)(x+2y) = x^2 - 4y^2 = x^2 + y^2 - 5y^2$ кратно 5. Если, например, $x - 2y$ кратно 5, то $2x + y = 2(x - 2y) + 5y$ тоже кратно 5.
 в) Если $x^2 + y^2$ кратно 13, то $(2x - 3y)(2x + 3y) = 4x^2 - 9y^2 = 4(x^2 + y^2) - 13y^2$ кратно 13. Если, например, $2x - 3y$ кратно 13, то $3x + 2y = 8(2x - 3y) - 13x + 26y$ тоже кратно 13.
 То же самое можно изложить на языке сравнений. Поскольку $x^2 \equiv -y^2$ и $3^2 \equiv -2^2 \pmod{13}$, имеем $3^2 x^2 \equiv 2^2 y^2$, т. е. $(3x + 2y)(3x - 2y) \equiv 0 \pmod{13}$, откуда следует, что хотя бы одно из чисел $3x + 2y$ и $3x - 2y$ кратно 13. Дальнейшее очевидно.
12. Рассмотрим числа вида $21 \cdot 5^n$ (или $3^{2n-1} \cdot 7$).
13. а) Если $n^2 + 1$ кратно d , то кратно d и каждое из чисел вида $(n + dk)^2 + 1$, где $k \in \mathbb{Z}$.
 б) Число $n^2 + 1$ кратно 65 тогда и только тогда, когда оно кратно 5 и 13. Поскольку $n^2 + 1 = n^2 - 4 + 5 = (n-2)(n+2) + 5$ и $n^2 + 1 = n^2 - 25 + 26 = (n-5)(n+5) + 26$, число n при делении на 5 должно давать остаток 2 или 3, а при де-

- лении на 13 – остаток 5 или 8. Таких чисел среди первых 65 натуральных чисел всего четыре: 8, 18, 47 и 57. *Ответ:* 62.
15. Умножив обе части уравнения на 4 и прибавив затем к обеим частям 1, получим: $(4x-1)(4y-1) = (2z)^2 + 1$. Поскольку правая часть не может иметь натуральных делителей вида $4x-1$, имеем: $x \leq 0$. По той же самой причине $y \leq 0$. *Замечание.* Рассматриваемое уравнение имеет бесконечно много решений в целых числах. Например, $x = 0, y = -z^2$ или $x = -1, y = -5n^2 - 2n, z = -5n - 1$.
16. а) Если n нечетно, то $n^2 - 1$ кратно 4, а число $m^2 + 1$ не кратно 4 ни при каком целом m . Если же $n = 2k$, то $n^2 - 1 = 4k^2 - 1$ дает остаток 3 при делении на 4.
 б) Перенесем x^2 и y^2 в левую часть и прибавим 1 к обеим частям. Получим: $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = z^2 + 1$. В силу пункта а), $x = y = 0$, откуда $z = 0$.
17. Вообще, при простом $p > 2$ числа вида $(p-k-1)! \cdot k! + (-1)^k$ кратны p .
22. а) $-i$; б) 1; в) $-i$; г) 0; д) -64 ; е) -1 .
23. Равенство комплексных чисел $x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Любитель тождеств заметит, что $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = a^2 + b^2$. (Впрочем, теорема 5 позволяет написать это равенство сразу, без тождеств.) Зная величины $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ и $x^2 - y^2 = a$, находим $x^2 = \frac{(\sqrt{a^2 + b^2} + a)}{2}$ и $y^2 = \frac{(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}{2}$.

Ответ: если $b \geq 0$, то $x = \pm \sqrt{\frac{(\sqrt{a^2 + b^2} + a)}{2}}$ и $y = \pm \sqrt{\frac{(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}{2}}$; если $b < 0$, то $x = \pm \sqrt{\frac{(\sqrt{a^2 + b^2} + a)}{2}}$

и $y = \mp \sqrt{\frac{(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}{2}}$.

25. Когда a и b одной четности, т. е. когда сумма $a + b$ четна.
 26. в) Кратные числа $5 + 5i$.
 28. Точки $z, iz, -z, -iz$ – вершины квадрата с центром в нуле.
 31. *Указание.* $5 - i = (1 + i)(2 - 3i)$. Ответ изображен на рисунке 1.
 32. а) $3 - 11i = (1 + i)(4 + 7i)$. Делители числа $4 + 7i$ содержатся среди делителей числа $(4 + 7i)(4 - 7i) = 4^2 + 7^2 = 65 = 5 \cdot 13 = (1 + 2i)(1 - 2i)(2 + 3i)(2 - 3i)$. Значит, число $4 + 7i$ есть произведение простого гауссова делителя числа 5 на простой гауссов делитель числа 13 (объясните, почему!). *Ответ:* 7. (Легко вычислить, что $3 - 11i = (1 + i)(1 - 2i)(2 - 3i)$.) б) $6 + 12i = 3(1 + i)(1 - i)(1 + 2i)$. *Ответ:* 8.

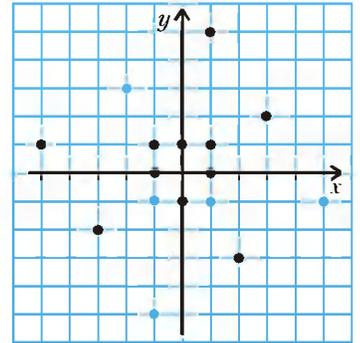


Рис. 1

33. а) $16 = (1 + i)^8$. б) $1001 = 7 \cdot 11 \cdot (3 + 2i) \cdot (3 - 2i)$.
 в) Благодаря результату упражнения 29, $47 + i$ кратно числу $1 + i$. Разделив $47 + i$ на $1 + i$, получаем равенство $47 + i = (1 + i)(24 - 23i)$. Поскольку $(24 - 23i)(24 + 23i) = 24^2 + 23^2 = 1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$, в разложение числа $24 - 23i$ на простые гауссовы множители входят по одному простому делителю каждого из чисел 5, 13, 17.
Ответ: $47 + i = (1 + i)(2 + i)(3 + 2i)(-1 - 4i)$.
 35. $1000009 = 293 \cdot 3413$. Пусть $a = 1000, b = 3, c = 235, d =$

= 972. Тогда $ac + bd = 237916$ и $ac - bd = 232084$. Произведение $237916 \cdot 232084$ кратно 1000009. Вычислим наибольший общий делитель чисел 237916 и 1000009. Поскольку $1000009 = 4 \cdot 237916 + 48345$, имеем $\text{НОД}(1000009, 237916) = \text{НОД}(48345, 237916)$. Далее, $237916 = 5 \cdot 48345 - 3809$. Значит, $\text{НОД}(48345, 237916) = \text{НОД}(48345, 3809) = \text{НОД}(13 \cdot 3809 - 1172, 3809) = \text{НОД}(1172, 3809) = \text{НОД}(1172, 3 \cdot 1172 + 293) = \text{НОД}(1172, 293) = 293$. (Аналогично можно было бы найти $\text{НОД}(1000009, 232084) = 3413$.)

36. а) 1; б) $\sqrt{5}$; в) 5; г) $\sqrt{65}$.

38. $4(a_1 + 1) \dots (a_n + 1)$.

39. Не может.

40. а) В разложение n на натуральные простые множители простые числа вида $4k - 1$ должны входить только в четных степенях, а простой множитель вида $4k + 1$ может быть не более чем один, причем не более чем в первой степени.

б) Число n должно иметь вид $n = 2^m p^a Q^2$, где $p = 4k + 1$ – простое число, $a \leq 2$, Q – произведение простых чисел вида $4k - 1$, причем m должно быть четным при $a = 2$ и нечетным при $a = 0$.

в) В разложение n на натуральные простые множители не должны входить простые числа вида $4k - 1$, число 2 может войти в степени не выше первой, а простой множитель вида $4k + 1$ может быть не более чем один.

42. Указание. Воспользуйтесь результатом упражнения 38 и подумайте, как изменяется разность между количеством натуральных делителей вида $4k + 1$ и количеством натуральных делителей вида $4k + 3$ при переходе от числа n к числам pn , p^2n , p^3n , ..., где p – простое число вида $4k + 3$, не являющееся делителем числа n .

Калейдоскоп «Кванта»

Задачи

Вопросы и задачи

- Нет, так как относительные изменения силы тяжести всех элементов тела одинаковы.
- Нет. Условие существования центра тяжести – однородность поля тяготения. В неоднородном гравитационном поле повороты «гантели» вокруг ее центра масс приводят к тому, что линии действия L_1 и L_2 равнодействующих сил тяжести, приложенных к шарикам, не имеют общей точки (рис.2).
- При торможении на колеса со стороны дороги действует сила трения, создающая вращающий момент вокруг центра масс автомобиля.
- Пара сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 сообщает телу вращение по часовой стрелке вокруг его центра масс, лежащего правее точки B . Следовательно, точка B станет двигаться против направления силы \vec{F}_2 .
- Силы трения, сообщающие автобусу центростремительное ускорение, приложены не к его центру масс, а к нижним точкам колес, поэтому кузов автобуса движется по кривой большего радиуса, чем колеса.
- Работа равна $mgL/2$, так как центр тяжести каната оказался поднят на высоту $L/2$.

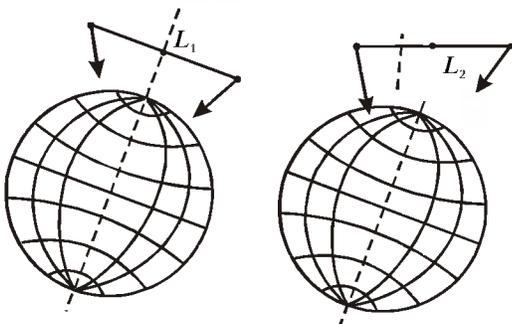


Рис. 2

7. В дырке!

8. Центр тяжести системы сначала будет понижаться, а потом – повышаться.

9. Длиной $2\Delta l$.

10. В точке O – середине отрезка O_1O_2 , соединяющего середины участков AB и BC стержня (рис.3).

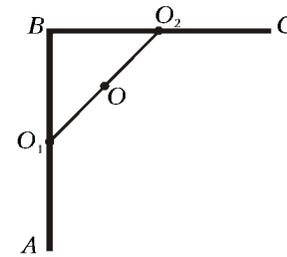


Рис. 3

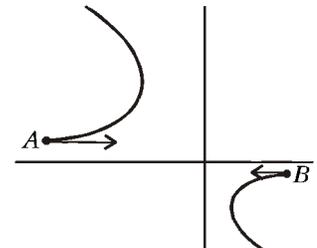


Рис. 4

11. Центр тяжести лежит на середине биссектрисы угла, в вершине которого находится шар массой $2m$.

12. В центре шара.

13. Станция придет во вращение в противоположную сторону, причем ее центр будет описывать окружность вокруг общего с космонавтом центра масс.

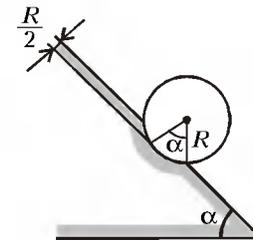


Рис. 5

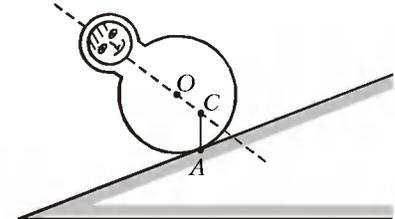


Рис. 6

14. Тележка и находящаяся в сосудах вода будут совершать колебания вокруг общего центра масс. После того как уровни воды в сосудах окончательно сравняются, движение тележки прекратится.

15. Траектория частицы массой m получается растяжением с коэффициентом подобия 2 траектории частицы массой $2m$ (рис.4).

16. Центр тяжести человека на ходулях значительно повышается, а площадь его опоры на землю уменьшается.

17. Во втором случае, так как центр масс канатоходца с ведрами лежит ниже, т.е. ближе к опоре – канату.

18. Центр тяжести системы карандаш – нож лежит ниже точки опоры.

19. При $\alpha > \pi/3$ (рис.5).

Микроопыт

Центр тяжести C неваляшки находится ниже геометрического центра O шарообразной поверхности «туловища». В положении равновесия точка C и точка касания A игрушки с наклонной плоскостью должны находиться на одной вертикали; следовательно «голова» неваляшки отклонится влево (рис.6).

«Квант» для младших школьников

Задачи

(см. «Квант» № 2)

1. Обозначим цифры b_1, b_2, b_3, b_4 таким образом, что

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq b_4.$$

Тогда

$$0 \leq b_1 + b_3 - b_2 - b_4 \leq 9.$$

Действительно,

$$b_1 + b_3 - b_2 - b_4 = (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) \geq 0,$$

левое неравенство доказано. Справедливо и правое неравенство:

$$b_1 + b_3 - b_2 - b_4 = (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) \leq (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) = b_1 - b_4 \leq b_1 \leq 9.$$

2. Синеглазка задумала число 1981. Поскольку разность между произвольным натуральным числом и суммой его цифр кратна 3, а число 2000 на 3 не делится, то Незнайка, очевидно, ошибся.
3. Разобьем упомянутые 6 расстояний на 3 пары, где в состав каждой пары входит расстояние от искомой точки до одной из трех вершин и от искомой точки до противоположной стороны. Заметим, что сумма этих двух значений не меньше высоты, опущенной из вершины на сторону, причем равенство достигается только если искомая точка лежит на высоте. Таким образом, сумма всех указанных в условии расстояний не меньше суммы высот данного треугольника, причем равенство достигается только в случае, когда искомая точка принадлежит каждой из трех высот, т.е. является точкой пересечения высот. Для остроугольного треугольника она как раз находится внутри треугольника.
4. ТЕТИВА = 141376.
5. Разность масс девяти железных гирек и девяти бронзовых гирек может равняться 90 г лишь в одном случае, когда девять более легких из них имеют массы 1 г, 2 г, ..., 9 г, а девять более тяжелых – массы 11 г, 12 г, ..., 19 г. Следовательно, масса золотой гирьки 10 г.

Конкурс «Математика 6–8»

Задачи

(см. «Квант» №6 за 1998 год)

11. Искомое число должно одновременно делиться на 9 и на 11. Согласно признаку делимости на 9, сумма S цифр искомого числа должна делиться на 9, а поскольку все его цифры четные, то и на 18. Обозначим $S = 18z$, где z – некоторое натуральное число. Применим признак делимости на 11: число делится на 11 тогда и только тогда, когда сумма цифр, стоящих на четных местах в десятичной записи этого числа, отличается от суммы цифр, стоящих на нечетных местах, на число, кратное 11. Обозначим сумму цифр, стоящих на четных местах в десятичной записи искомого числа, через $2x$, а сумму цифр, стоящих на нечетных местах, – через $2x + 22y$ (все цифры искомого числа – четные!), где x, y – целые неотрицательные числа, причем $x + y > 0$. Имеем равенство $2x + 2x + 22y = 18z$, или $2x + 11y = 9z$. Отсюда $z = \frac{2x + 11y}{9} = y + \frac{2(x + y)}{9}$ может быть целым числом лишь когда $2(x + y) = 9u$, где u – целое. Отсюда $x + y = 9t$; $u = 2t$, где t – некоторое целое, причем, учитывая ограничение $x + y > 0$, заключаем, что число t может быть только натуральным. Следовательно, $z = y + \frac{2 \cdot 9t}{9} = y + 2t$. Поскольку t – натуральное число, а y – целое неотрицательное, то область возможных значений z находится среди множества чисел 2, 3, 4, 5, 6, ... Соответственно, сумма цифр $S = 18z$ в искомом числе принадлежит множеству чисел 36, 54, 72, ... Построим требуемое число с суммой цифр 36. Полусумму – число 18 – можно представить тремя различными способами в виде суммы наименьшего количества четных слагаемых: $18 = 6 + 6 + 6 = 4 + 6 + 8 = 2 + 8 + 8$. Наименьшее шестизначное число, которое можно построить из этих цифр, – 228888. Для построения числа с суммой цифр 36 и более потребуется не менее шести четных цифр, что заведомо даст число, превышающее 228888. Таким образом, искомое число – 228888.

12. Первый кондуктор может продать все 175 билетов. Для этого ему достаточно действовать так, чтобы после его ухода не было пассажиров, к которым подходили два раза (тогда второй кондуктор не сможет продать ни одного билета). Ясно, что после первого хода это условие выполняется. Предположим, что оно выполняется после очередного хода первого кондуктора, и покажем, что он может обеспечить его выполнение и после следующего своего хода. Если второй кондуктор подходит к какому-то пассажиру, к которому уже подходили, то первый может подойти к тому же пассажиру (в третий раз) и продать ему билет. Если же второй подходит к пассажиру, к которому еще не подходили, то первый может найти еще одного пассажира, к которому ни разу не подходили. Действительно, если после хода второго таких пассажиров не осталось, то к каждому подходили один или три раза, а так как пассажиров нечетное число, то общее количество подходов кондукторов к пассажирам нечетно. Но это количество должно быть четным, так как первый и второй кондукторы сделали поровну ходов.
13. Каждым ходом конь сдвигается на 2 клетки в одном направлении и на 1 клетку в другом. Значит, за 8 ходов сумма сдвигов коня равна $8 \cdot 3 = 24$. Если конь побывал на всех горизонталях, то он прошел с самой нижней до верхней и спустился назад. Значит, сумма сдвигов по вертикали не меньше $7 + 7 = 14$. Аналогично, сумма горизонтальных сдвигов не меньше 14. Поскольку $14 + 14 > 24$, конь не мог за 8 ходов побывать на всех горизонталях и вертикалях и вернуться на исходное поле.
14. На стороне BC построим точку M такую, что $B_1M \parallel AB$, на стороне AB построим точку C_1 такую, что $MC_1 \parallel AC$, на стороне AC построим точку N такую, что $C_1N \parallel BC$ и на стороне BC построим точку A_1 такую, что $NA_1 \parallel AB$ (рис.7). Докажем, что площади треугольников AC_1B_1 , BA_1C_1 и CB_1A_1 равны. Площади параллелограммов AC_1MB_1 и BA_1NC_1 равны, так как каждый из них равновелик параллелограмму C_1MCN .

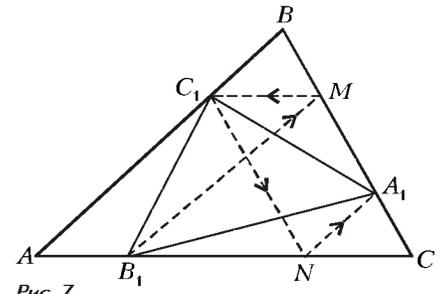


Рис. 7

- Значит, треугольники AC_1B_1 и BA_1C_1 , занимая половину площадей равновеликих параллелограммов AC_1MB_1 и BA_1NC_1 , равновелики. Аналогично проверяется равенство других пар треугольников.
15. Назовем точки, разбивающие окружность на дуги, узловыми и отнесем их к тем дугам, которые расположены по отношению к ним по часовой стрелке. Замечаем, что если блоха хотя бы раз попадет в такую точку, то все ее дальнейшие прыжки будут происходить в соседние узловые точки, и, таким образом, блоха побывает на всех дугах. Предположим, в начальный момент блоха находится внутри некоторой дуги l . Если после кругового путешествия блоха попадет в исходную точку старта, то она непременно побывает на всех дугах. Если же этого не произойдет – какие-то дуги окажутся перепрыгнутыми, – то, попав на дугу l , блоха сместится в сторону узловой точки этой дуги, причем смещение будет равно сумме длин перепрыгнутых дуг. Далее, стартова уже из этой новой точки, блоха после завершения кругового маршрута либо побывает на всех дугах, либо опять сместится к узловой точке дуги l (возможно, уже на другую величину). Не более чем за n круговых маршрутов, где n – количество дуг, блоха либо побывает на всех дугах, не посетив при этом ни одной узловой точки, либо окажется в узловой точке дуги l , и в дальнейшем уже не минует ни одной дуги, прыгая по узловым точкам.

Коварные проценты

1. Первоначально арендную плату предлагали увеличить не на 300, как думал автор, а на 200 процентов.
2. Сбор увеличен не на 2, а на 200 процентов (это все равно, что стоимость проезда увеличилась с 1 рубля до 3 рублей). В таких случаях иногда говорят, что сбор увеличился на 2 *процентных пункта*.
3. 400 г.
4. Жирность масла 80% говорит о том, что в 730 тыс. тонн масла содержится $730 \times 0,8$ тыс. тонн жира. Если это количество жира перераспределить в $730 \cdot 1,5$ тыс. тонн масла, то последнее будет иметь жирность $\frac{0,8}{1,5} \cdot 100\% \approx 53\%$, что не соответствует действительности.
5. Если жирность добавляемых n килограммов молока $p\%$, то должно выполняться соотношение $82 \cdot 1000 + np = 72,5 \cdot 1100$, что невозможно ни при каком n , даже для обезжиренного ($p = 0$) молока. Значит, слишком скромно (100 кг) оценен «коммерческий навар». Обозначив его через x (кг), получим соотношение $82 \cdot 1000 + np = 72,5 \cdot (1000 + x)$, откуда следует, что $x > 131$ (кг).

Ловушка для треугольника

1. Наименьший угол треугольника равен

$$\arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4}.$$

2. *Указание.* Умножьте скалярно вектор в левой части на себя и воспользуйтесь тождеством

$$2\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v}^2 + \vec{u}^2 - (\vec{v} - \vec{u})^2.$$

3. а) К вектору $\vec{PD} = x\vec{PA} + y\vec{PB}$ примените формулу (1) из статьи с $z = 0$.

- б) Используйте результат упражнения 7,а) и формулу (3).

4. Оба утверждения следуют из соотношений $a_1 + b_1 = c$,

$$b_1 + c_1 = a, \quad c_1 + a_1 = b.$$

6. а) $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$, вторая скобка выражается с помощью упражнения 5; б) аналогично а); в) добавляя к левой части $Zabc = 12Rrp$, получим $(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

7. а) *Указание.* Пусть $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH}'$; проверьте, что отрезки AH' и BH' перпендикулярны сторонам BC и CA соответственно, т.е. $AH' \cdot BC = BH' \cdot CA = 0$.

- б) *Указание.* Используйте теорему об отношении, в котором биссектриса треугольника делит сторону.

- в) следует из а) и б).

8. Из упражнения 7,в) и формулы (3) следует, что $IH^2 = 4R^2 - [(1-a/2p)(1-b/2p)c^2 + \dots]$. Вычитаемое после раскрытия скобок приводится к виду

$$(a^2 + b^2 + c^2) - (ab^2 + a^2b + bc^2 + b^2c + ca^2 + c^2a) / 2p + abc/2p$$

и преобразуется с помощью формул из упражнения 6.

9. *Указание.* Сравните формулу (2) и упражнение 7,а).

10. *Указание.* Используйте упражнение 7,б) и формулы (3) и (4).

11. Во-первых, заметим, что $d + r < R$, т.е. меньшая окружность ω лежит внутри большей окружности Ω . Пусть касательные к ω , проведенные из точки A , произвольно взятой на Ω , пересекают Ω в точках B и C (рис.8). Будем изменять радиус окружности ω , не меняя ее центра. Ясно, что если он достаточно мал, то соответствующая этой маленькой окружности ω_1 хорда B_1C_1 будет лежать вне ω_1 , а окружность ω_2 , «почти касающаяся» Ω , будет пересекать соответствующую ей хорду B_2C_2 . Поэтому найдется промежуточная окружность ω_0 радиуса r_0 , которая касается соответствующей ей

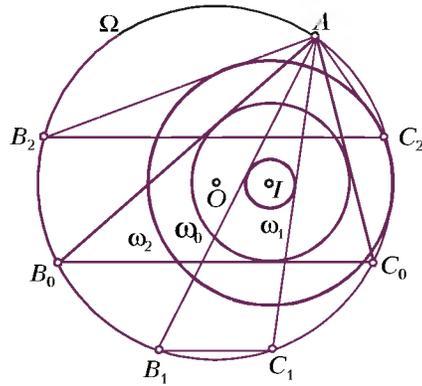


Рис. 8

хорды. По формуле Эйлера, $R^2 - 2Rr_0 = d^2 = R^2 - 2Rr$. Следовательно, ω_0 совпадает с ω .

12. Векторное равенство следует из того, что $\vec{OF} = \frac{1}{2}\vec{OH}$, и из формул упражнения 7. Применяя к нему (3), получим $4p^2 \cdot IF^2 = p^2 R^2 - (a_1 b_1 c^2 + b_1 c_1 a^2 + c_1 a_1 b^2)$, где, согласно нашим обозначениям, $a_1 = p - a$ и т.д.; выражение в скобках с учетом приведенных в статье формул для симметрических многочленов от a_1, b_1 и c_1 можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} a_1 b_1 c^2 + \dots &= (a_1 b_1 (c^2 - p^2) + a_1 b_1 p^2) + \dots = \\ &= -a_1 b_1 c_1 (c + p + b + p + a + p) + p^2 (a_1 b_1 + b_1 c_1 + c_1 a_1) = \\ &= -5pa_1 b_1 c_1 + p^2 (r^2 + 4rR) = p^2 (-5r^2 + r^2 + 4rR), \end{aligned}$$

откуда $4IF^2 = R^2 - 4rR + 4r^2 = (R - 2r)^2$.

13. Проведем из P прямую через центр O данной окружности. Пусть она пересекает окружность в точках A_1 и B_1

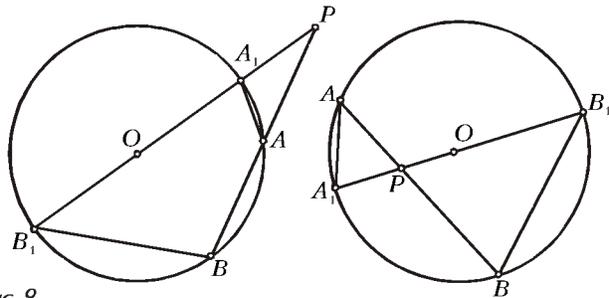


Рис. 9

(рис.9). Из теоремы о вписанном угле следует, что треугольники PAA_1 и PBB_1 подобны, поэтому $PA \cdot PB = PA_1 \cdot PB_1 = |d - R| \cdot (d + R)$.

14. При $k = 1$ прямая Эйлера должна касаться вписанной окружности в точке H . Но если выполнено уравнение (8), то центр F окружности 9 точек попадает внутрь вписанной окружности (легко проверить, что $IF = R/2 - r < r$ при $r = (\sqrt{11} - 3)R$) и, стало быть, прямая Эйлера пересекается с ней. Можно и не ссылаться на уравнение (8), а прямо из условий $IH = r$ и $OH^2 + IH^2 = OI^2$ вывести равенство $r = 2R$.
15. *Указание.* Покажите, что угол между прямыми AH и AB равен углу между прямыми AO и AC (оба угла равны $|\pi/2 - \angle ABC|$).

16. Из формулы упражнения 6,а) следует, что $8R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 2(2R + r)^2 - 2p^2$. В то же время $8R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = OH^2 - R^2$ (см. упражнение 3,б)). Орто-

центр остроугольного треугольника лежит внутри треугольника, т.е. и внутри его описанной окружности, прямоугольного – в вершине, т.е. на описанной окружности, а тупоугольного – вне треугольника и, как легко понять, вне окружности. Эти три случая задаются соотношениями $OH < R$, $OH = R$ и $OH > R$.

17. Условие $OH > OI$ переписывается в виде $4R^2 + 5Rr + r^2 > p^2$. Но из формулы (7) для расстояния IH следует, что $4R^2 + 4Rr + 3r^2 \geq p^2$. Остается сложить это неравенство с неравенством $Rr - 2r^2 \geq 0$, которое обращается в равенство только для правильного треугольника.

Аналогично, перепишем $OH > IH$ в виде $5R^2 + 4Rr - r^2 > p^2$, и оно получается добавлением к тому же неравенству, что и выше, неравенства $R^2 - 4r^2 \geq 0$.

Заряженные частицы и поля

$$1. h = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2AmU}{e}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{(LB)^2 e}{2AmU}} \right) = 1,9 \text{ см.}$$

$$2. v_{\min} = \frac{\sqrt{2Ue/m}}{\cos \alpha} = 9,2 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

$$3. x = \frac{dE_2}{2E_1} = 0,4d. \quad 4. B_{\min} = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

III Международная астрономическая олимпиада

Теоретический тур

8–10 классы

1. Поскольку Луна совершает один оборот вокруг оси относительно направления на Солнце за один синодический месяц, равный 29,53 сут, в любой точке ее поверхности Солнце видно над горизонтом в течение примерно двух недель; следующие две недели его не видно. А вот Земля постоянно видна только из одного полушария Луны (мы называем его «видимой стороной Луны»), а из другого полушария («обратная сторона Луны») Землю не видно никогда. Поэтому на видимой стороне Луны чаще можно увидеть Землю, а на невидимой – Солнце.

2. Легко видеть, что Англия и Новая Зеландия расположены на земном шаре почти диаметрально противоположно. Следовательно, траектория полета снаряда будет весьма близка к половине траектории облета вокруг Земли искусственного спутника, движущегося по низкой орбите. Как известно, продолжительность такого оборота около 1,5 часа; значит снаряд долетит до цели примерно за 45 минут.

3. Вспомнив величину наклона земной оси ($\epsilon = 23,5^\circ$), без труда определим, что северный полюс эклиптики имеет прямое восхождение 18^h и склонение $66,5^\circ$.

4. Если в процессе коллапса Солнце не потеряло вещество и не излучило гравитационные волны, то его масса не изменилась. Поэтому не изменится ни орбита Земли, ни ее орбитальный период.

5. При диаметре 3476 км Луна видна на земном небосводе под углом $31'$; значит, Море Кризисов будет видно под углом $31' \times 520/3476 = 4,6'$. Формально это в 3–5 раз превышает предел углового разрешения глаза. И действительно, зоркий глаз в хороших условиях способен различить Море Кризисов, что доказано зарисовками Луны, сделанными еще до изобретения телескопа.

6. Представим число 250 млн как $2,5 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100$. Теперь ясно, что блеск одной звезды будет на $1^m + 5^m + 5^m + 5^m + 5^m = 21^m$ слабее блеска всей галактики, т.е. составит $9^m + 21^m = 30^m$.

11–12 классы

1. Метеоры, полярные сияния, радуга и серебристые облака – это атмосферные явления, а на Луне атмосферы нет; значит, они там не наблюдаются. А вот затмения Солнца Земли, искусственные спутники и кометы на Луне наблюдаются даже лучше, чем на Земле, поскольку не мешает атмосфера.

2. Поскольку все звезды-цефеиды Магеллановых облаков находятся примерно на одинаковых расстояниях от Земли, их блеск пропорционален светимости. Найденная астрономами зависимость «период-блеск» для цефеид в Магеллановых облаках натолкнула их на мысль, что существует зависимость «период-светимость». Наблюдения цефеид в любой другой галактике могли бы дать те же результаты: важно то, что расстояния от нас до галактик много больше, чем расстояния между исследуемыми звездами.

3. Перемещение точек равноденствия происходит по эклиптике, поскольку движение в пространстве испытывает плоскость земного экватора.

4. Поскольку центростремительное ускорение V^2/R спутнику сообщают сила гравитационного притяжения Земли GM_0/R^2 , из второго закона Ньютона найдем скорость движения спутника по круговой орбите: $V = \sqrt{GM_0/R}$. Отсюда, вспомнив, что $GM_0 = gR_0^2$, легко найти орбитальный период: $P = 2\pi R/V = 2\pi GM_0/V^3 = 2\pi gR_0^2/V^3 \approx 127$ мин. Теперь, используя уравнение синодического движения $1/T = 1/P - 1/P_0$ и учитывая, что спутник обращается в направлении движения Земли, имеющей период $P_0 = 24^h$, находим искомое время T :

$$T = P_0 P / (P_0 - P) \approx 139 \text{ мин.}$$

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

А.А.Васин, В.А.Иванюк, В.М.Митурич-Хлебникова, А.В.Родионова, В.В.Полякова, П.И.Шевелев

АРТ-ДИРЕКТОР

П.И.Шевелев

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»,
тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховском полиграфическом комбинате
Комитета Российской Федерации по печати
142300 г. Чехов Московской области
Заказ №