

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ  
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

СЕНТЯБРЬ/ОКТАБРЬ · 1998 · №5

В номере:



Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Ю.М.Брук, А.А.Варламов, **Н.Б.Васильев**,  
А.Н.Виленин, С.А.Гордюнин, Н.П.Долбилин,  
В.Н.Дубровский, А.А.Егоров,  
А.Р.Зильберман,

С.С.Кротов (*директор «Бюро Квантум»*),

А.А.Леонич, Ю.П.Лысов,

В.В.Можжаев, Н.Х.Розов, Ю.П.Соловьев,  
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров

(*заместитель главного редактора*),

В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,

А.И.Черноуцан

(*заместитель главного редактора*),

И.Ф.Шарыгин

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,  
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,  
Ю.А.Данилов, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,  
Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев,  
А.И.Шапиро

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,

В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,

Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,

П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,

В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,

А.И.Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,

Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,

А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,

М.Л.Смолянский, Я.А.Смородинский,

В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро Квантум

©1998, Президиум РАН,  
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 Вакуум. А.Семенов  
6 Покрытия полосками. М.Смуров, А.Спивак  
В Тамэси-вари. А.Бирюков

## ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 16 Опыты Резерфорда. А.Васильев

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 19 Задачи М1651–М1660, Ф1658–Ф1667  
21 Решения задач М1631–М1635, Ф1643–Ф1652  
28 Победители конкурса «Задачник «Кванта» 1997 года

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 29 Задачи  
30 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»  
30 Победители конкурса «Математика 6–8» 1997 года

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Твердое тело

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 34 Не стреляйте в белых лебедей. А.Стасенко  
36 Хаос молекул. А.Стасенко  
38 Зачем быть конденсатору в магнитном поле? А.Стасенко

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 39 Как зависит  $U$  от  $\rho$ ? А.Черноуцан

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 41 Неожиданная поворотная гомотетия. А.Спиров

## ИНФОРМАЦИЯ

- 44 Школа «АВАНГАРД» — школа для всех

## ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 46 Непотопляемый диск. А.Лузин

## ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 47 Оптические системы и приборы. Ю.Чешев

## ОЛИМПИАДЫ

- 50 XXIV Всероссийская математическая олимпиада школьников  
54 XXXII Всероссийская олимпиада школьников по физике

- 58 Ответы, указания, решения

«Квант» улыбается (17, 31)

## НА ОБЛОЖКЕ

- I Иллюстрация к статье А.Семенова  
II Коллекция головоломок  
III Шахматная страничка  
IV Физики на монетах мира



# Вакуум

А. СЕМЕНОВ

**О**Н ОКРУЖАЕТ нас повсюду и остается невидимым. Он неощутим и незаметен, но энергии у него достаточно, чтобы родить новую Вселенную. Он – ничто, пустота, которая может стать источником всего. Он – вакуум.

Многие современные физики считают, что вакуум будет центральным объектом науки двадцать первого века. «Сегодня мы знаем, что вакуум содержит целый спектр удивительных эффектов в огромном диапазоне масштабов от микроскопических до космических», – сказал профессор Миллони из Лос-Аламосской научной лаборатории в Нью-Мексико.

Я буду перемежать свои вакуумно-научные размышления цитатами из эссе Ханса Кристиана Андерсена «Муза нового века», поскольку творения великого датчанина удивительно актуальны и глубоки. Его слова о грядущей музе очень удачно подходят и к науке, если вместо «поэзия» читать «наука».

*«Когда же впервые проявит себя Муза нового века, которую узрят наши правнуки, а может быть и еще более поздние поколения? Какова будет она? О чем поет? Каких душевных струн коснется? На какую высоту поднимет свой век? Да можно ли задавать столько вопросов в наше суетливое время, когда поэзия является чуть ли не помехой, когда ясно сознают, что от большинства «бессмертных» произведений современных поэтов останется в будущем в лучшем случае что-то вроде надписей углем, встречающихся на торевных стенах и привлекающих внимание разве некоторых случайных любопытных?..»*

## Немного из истории

До конца прошлого века вакуум оставался темой для глубокомысленных споров философов. В семнадцатом веке, например, Рене Декарт с помощью длинной цепи умозаключений пришел к выводу, что вакуум не может существовать: если «ничто» разделяет две частицы, значит, их ничто не отделяет друг от друга – такова была его логика.

Однако вакуум существовал, и квантовая теория наполнила его смыслом и содержанием. Впервые в работах Макса Планка 1911 года стало ясно, что даже если охладить тело до абсолютного нуля, то у него будет оставаться энергия. А откуда же она может браться?

Физики начали ее искать, и в 1925 году Роберт Милликен первым обнаружил ее проявление в спектрах излучения монооксида бора (BO). Частота излучения электрона при переходе с орбиты на орбиту отличалась от расчетной, как будто при своем движении по орбите вокруг ядра электрон наталкивался на «ничто».

Еще через два года Вернер Гейзенберг предложил соотношение неопределенностей и показал, что даже в абсолютном вакууме на короткое время могут рождаться и исчезать пары виртуальных частиц. Дело в том, что возможны кратковременные флуктуации энергии любой системы такие, что произведение неопределенности в энергии на неопределенность во времени – постоянная величина ( $\Delta E \cdot \Delta t \geq h$ ). Именно на эти виртуальные пары и наталкивается электрон при движении по орбите вокруг ядра.

Вакуумные флуктуации приводят к случайным шумам в электронных приборах. Они же устанавливают предел на коэффициент усиления сигнала в радиоприемниках. Силы Ван-дер-Ваальса – силы взаимодействия между молекулами – обязаны своим появлением вакуумным флуктуациям энергии молекул. Энергия, упрямая в вакуум, не позволяет жидкому гелию стать твердым при любом охлаждении. И она же включает разряд в ртутной лампе дневного света. Когда атом ртути под действием разряда в лампе возбуждается, то выталкивает атом из возбужденного состояния обратно в основное те же вакуумные флуктуации. Включая такие лампы, помните, что прикасаетесь к процессу, который породил нашу Вселенную!

*«Находятся еще люди, у которых в «ленивые понедельники» просыпается потребность в поэзии; ис-*

*пытывая от голода духовное урчание в соответствующих благородных частях своего организма, они посылают слугу в книжный магазин купить поэзии, самой прославленной, на четыре гроша! Некоторые довольствуются и той поэзией, которую могут получить в придачу к покупкам, или удовлетворяются чтением тех листков, в которые лавочники завертывают им покупки. Так обходится дешевле, а в наше суетливое время нельзя не обращать внимания на дешевизну. Итак, возникающие потребности удовлетворяются – чего же еще? А поэзия будущего, как и музыка будущего, – только донкихотство, и говорить о них все равно что говорить о путешествии с научной целью на Уран!»*

## Рожденные из «ничто»

Последние двадцать-тридцать лет в астрономии торжествует модель Большого Взрыва, суть которой в том, что Вселенная наша родилась двадцать миллиардов лет назад в результате взрыва из сверхплотной и сверхгорячей точки. Однако пристальное исследование ее предсказаний и выводов показало, что есть немало сложностей, которые она объяснить не в состоянии. Алан Гут из Массачусетского технологического института и московский теоретик Андрей Линде (сейчас он профессор физики в Стэнфорде) создали модификацию модели под названием «космическая инфляция».

Новая модель предполагает, что в первые мгновения после рождения Вселенной вакуум был в неустойчивом состоянии с очень большой внутренней энергией. В качестве наглядной аналогии можно представить себе шарик на вершине горки. Такое состояние неустойчиво, и «шарик-вакуум» сваливается вниз, высвобождая при этом колоссальное количество энергии. За крошечные доли секунды Вселенная раздувается в число раз, выражающееся единицей с сотней нулей!

Это инфляционное раздувание делает нашу Вселенную очень однород-

ной, плоской и устраняет многие другие проблемы, стоящие перед Большим Взрывом. К примеру, ни в одном эксперименте не могут найти магнитные монополи – частицы, содержащие один магнитный полюс. Их должно было родиться много – куда же они делись? Ответ: инфляция разбросала все монополи на такие колоссальные расстояния, что на наблюдаемую часть нашей Вселенной их осталось совсем мало. Получается, что все современное многообразие квазаров, пульсаров, планет, ракет, в том числе и мы с вами родились из этого «ничто», благодаря открытой Эйнштейном взаимосвязи энергии и массы.

Однако большинство космологов были бы рады, если бы вакуум утих, совершив благое дело творения Вселенной, и не волновал ученые умы своим присутствием. Дело в том, что наличие большой внутренней энергии вакуума сильно усложняет уравнения общей теории относительности, добавляя туда дополнительные члены. Но кто знает, как обстоит дело в действительности?

*«Муза нового века родилась в наше светлое время под грохот и стук машин. Привет ей!.. Мы не слышали скрипа ее колыбели из-за шума машин, свиста паровозов, взрывов материальных и духовных твердьей... На зубок ей положили в колыбель великолепные дары. В изобилии были насытаны туда, словно лакомства, загадки природы с их разгадками; из водолазного колокола выстали ей разные безделушки и диковинки морского дна. На положе была отпечатана карта неба, напоминающего океан с мириадами островов-миров. Солнце рисовало ей картины; фотография должна была доставлять игрушки.»*

### Пуст вакуум или полон?

Последние пару лет мировое физическое сообщество то и дело будоражат приходящие от исследователей-астрономов известия о том, что наша Вселенная моложе собственных звезд. Новые определения возраста Вселенной основаны на измерении постоянной Хаббла. Неопределенность в этих измерениях не только порождает всякие кривотолки, но и заставляет физиков переосмысливать свои модели развития Вселенной.

Одно из возможных объяснений противоречия заключается в том, что

вакуум не сбросил всю свою энергию и продолжает потихоньку расталкивать космос и сегодня. Это увеличивает скорость разбегания галактик и вводит в заблуждение астрономов: чем больше скорость разбегания галактик, тем ближе мы к моменту Большого Взрыва.

Вакуум способен и на большее. Хорошо известна еще одна проблема современной космологии – скрытая масса. Инфляция предсказывает определенную плотность вещества во Вселенной. Наблюдения дают лишь десять-двадцать процентов этой величины. Есть немало гипотез, где прячется скрытая масса, но ни одна из них не нашла подтверждения.

Джордж Эфстатиу из Оксфорда считает, что скрытая масса прячется в виде энергии вакуума. А Крис Кошанек из Кембриджа полагает, что наблюдение гравитационных линз служит экспериментальным подтверждением этому предположению.

Гравитационная линза – это нечто очень массивное, встречающееся на пути света от далеких звезд к земному наблюдателю. Из-за искривления пути световых лучей на Земле можно увидеть два, а то и больше изображений одного и того же объекта. Найдено уже немало кандидатов на роль гравитационных линз. Кошанек считает, что из их количества можно сделать оценку энергии, спрятанной в вакууме. По его мнению, до половины скрытой массы может содержаться в форме скрытой энергии вакуума.

Здесь необходимо подчеркнуть, что вышеизложенные воззрения – это гипотезы, так сказать, рабочие варианты теоретиков в поисках решения.

Вакуум заботит не только космологов и астрономов. Есть у него и более земные занятия.

*«Муза нового века еще дитя, но она уже выпрыгнула из колыбели; она полна стремления, но еще и сама не знает, к чему ей стремиться... Много, слишком много она читала; она ведь родилась в наше время, многое ей придется забыть, и она сумеет позабыть... Ну а какое ее отношение к религии? Она изучила всю философскую премудрость, сломала себе в поисках «первопричины мира» один из молочных зубов, но получила взамен новый, вкусила плода познания еще в колыбели и стала так умна, что бессмертие кажется ей гениальнейшей мыслью человечества.»*

## Инерция

Одно из наиболее интригующих земных гипотетических проявлений вакуума – инерция, свойство тел сохранять движение. С ним знаком любой, кто летел в сугроб, разогнавшись на коньках. О сути инерции серьезно думали такие эксперты, как Альберт Эйнштейн и Ричард Фейнман. Эйнштейн считал, что при ускорении какого-либо тела мы неявным образом влияем и на все другие тела. Но как это происходит, он не прояснил.

Несколько лет назад Бернар Хьюиш из Пало-Альто и Шел Пытхов из Техаса решили возродить идеи Эйнштейна к жизни. По их мнению, тело обладает инерцией потому, что при движении взаимодействует с вакуумными флуктуациями. Они даже модернизировали закон Ньютона, вставив туда вместо массы тела величину, определяющую его взаимодействие с вакуумом.

Грубо говоря, по мнению авторов гипотезы, флуктуации вакуума приводят к возникновению некоего аналога магнитного поля. Чем больше в теле атомов, тем сильнее оно взаимодействует с этим «вакуумно-магнитным» полем, тем труднее его сначала разогнать, а потом – остановить.

Но идея – есть идея, а расчеты пока не получаются. Все оценки расходятся с опытом в такое количество раз, что просто стыдно признаваться: единица с сотней нулей... Нобелевский лауреат Стивен Вайнберг даже пошутил, что это, вероятно, самое неточное предсказание в истории науки.

Однако авторы гипотезы не отчаиваются. Они даже обсуждают пути извлечения энергии из вакуума. Это уж совсем научная фантастика, но Хьюиш напоминает, что всего век назад никто и понятия не имел о радио, самолетах и телевидении, не говоря уж об атомной бомбе.

*«А какова будет программа новой музыки? – спросят сведущие депутаты от нашего времени. – Чего она хочет?»*

*Спросите лучше, чего она не хочет.*

*Она не хочет выступить тенью истекшего времени! Не хочет мстительно терять новые драмы из сданных в архив сценических эффектов или прикрывать убожество драматической архитектуры ослепительными лирическими драпировками... Не*

*захочет она и вновь взять старых богов из могучих как скалы ирландских sag! Она захочет поднести современникам жизненный эликсир! Биение сердца каждой национальности является для нее лишь буквою в великой азбуке мирового развития, и она возьмет каждую букву с одинаковой любовью, составит из них слова, и они ритмично польются в гимне, который она воспевает своему веку!»*

### Лирическое отступление

Вакуум – вещь загадочная. К ней подступали великие умы от Аристотеля до Эйнштейна. «Природа не терпит пустоты», – эта фраза содержит в себе некий приговор вакууму как чему-то абстрактному и нереальному и заранее обрекает научное исследование его на неудачу. Тем не менее, в работах физиков-теоретиков без флуктуаций вакуума не обойтись, вакуумное состояние и вакуумный уровень энергии – обычные понятия практически любой модели в физике микромира. Мне кажется, что до сих пор исследователи просто-напросто пасовали перед невероятной глобальностью проблемы, и говорить о ней было столь же бестактно, как и беседовать на тему «Что есть Бог?».

К теме вакуума опосредованно подступали писатели-фантасты. Им неудобно было наделять своих героев умением черпать энергию из «ничто», поэтому они брали ее из самых неожиданных мест: из времени, из будущего, из гиперпространства, но суть всех этих «изобретений» одна – совершенно неисчерпаемый источник энергии. Физический вакуум?..

Или все пышнее расцветающее движение экстрасенсов и прочей непонятной мистики, которая не укладывается в научные рамки, – передачи информации непонятно через что, связь с космосом, диагностика астральных тел. Честно говоря, я удивляюсь, что вакуум и вакуумные флуктуации еще не стали терминами этой области человеческой деятельности. А что если все эти астральные поля и информационные космические потоки как-то связаны с вакуумом? И там и там много непонятного, но если что-то непонятно, надо изучать. Естественно, изучать по-научному, очистив от безграмотной шелухи, но не отмахиваться.

А то ведь отношение к вакууму порой напоминает реплику короля Лира: «Из ничего не выйдет ничего». Но наша оценка «ничего» означает лишь то, что мы ничего не знаем о предмете. Столь же неощутимы и невидимы были до недавнего времени электромагнитное поле или рентгеновские лучи.

Все существование нашего мира состоит из взаимодействия частиц и полей, их связывающих. Вакуум – это когда нет ничего, по-нашему – нет никакого существования. А может, это просто другое существование?..

### Что можно выжать из вакуума?

Идея выжать из вакуума что-нибудь полезное родилась не вчера. Еще в 1948 году голландец Хенрик Казимир предположил, что если очень близко сдвинуть две пластины, то между ними должно возникнуть притяжение, хотя и совсем крошечное. Внешние флуктуации вакуума как бы придавливают пластины друг к другу. Давление, правда, получается совсем крошечным – одна стомиллионная доля атмосферы на пластины с зазором в тысячную долю миллиметра. Но дело в принципе. Если взять пластины метр на метр, хорошенько отполировать их, сдвинуть до микронного зазора, а потом дать им схлопнуться, то получится мощность в мик-

роватт. Маловато, но... Сам я уже так долго занимаюсь научной работой, что подобные «сумасшедшие» проекты вызывают у меня скептическую усмешку. Но я должен объективно признавать, что мое научное время уже ушло. Я останусь со своей скептической усмешкой в двадцатом веке. Впереди – двадцать первый век. Для возрождения веры общества в науку, для возрождения самой науки необходимо открыть что-то такое, чего не найдешь со скептической усмешкой. Хочется верить, что человек, который сделает этот шаг, не потонет в современном антинаучном бреде и, сохранив все лучшее, что создал век уходящий, рванется дальше.

*«Привет тебе, Муза поэзии нового века. Привет наш вознесется и будет услышан, как бессловесный гимн червя, перерезанного плугом. Когда настанет новая весна, плуг опять пойдет взрезывать землю и перерезывать нас, червей, ради удобрения почвы, для новой богатой жатвы, нужной грядущим поколениям.»*

Итак, образование Вселенной, объяснение инерции, неистощимые запасы энергии – вот что такое вакуум. Пока нет ясности, концы с концами не сходятся, вместо расчетов – фантазии, сомнений нет лишь в том, что надо начинать. Впереди – век Вакуума!



# Покрyтия полосками

М. СМУРОВ, А. СПИВАК

Во второй части статьи доказана теорема Банга—Тарского: если выпуклая фигура  $F$  покрыта полосами, то ширина фигуры не превышает суммы ширин полос. Сформулированы гипотезы Банга и Дэвенпорта, рассказано о некоторых других проблемах комбинаторной геометрии.

## Покрyтия круга и выход в пространство

Очевидно, круг диаметра  $d$  можно покрыть параллельными друг другу полосами, сумма ширин которых равна  $d$  (рис.31).

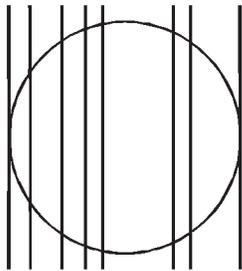


Рис. 31

**Задача 5.** Нельзя ли так расположить полосы разных направлений, чтобы они покрыли круг большего диаметра, чем сумма ширин полос?

**Решение.** Нельзя. Доказательство использует, как ни странно, выход в пространство.

Пусть круг диаметра  $d$  покрыт  $n$  полосами ширин  $w_1, w_2, \dots, w_n$ . Рассмотрим сферу, экватором которой служит этот круг, т. е. сферу, центр

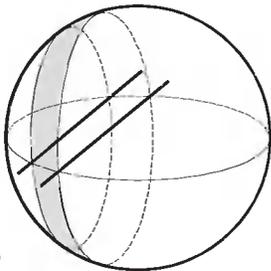


Рис. 32

и радиус которой совпадают с центром и радиусом круга (рис.32). Про-

ведя через границы полос плоскости, перпендикулярные экватору, сопоставим каждой полосе сферическую полосу (или шапочку, если круг пересечен только одной из ограничивающих полосу прямых).

Теперь используем замечательный (и известный уже Архимеду) факт: *площадь сферической полоски, высекаемой на сфере двумя параллельными плоскостями, выражается через расстояние  $w$  между плоскостями и диаметр  $d$  сферы формулой  $\pi dw$* . (Обе плоскости, разумеется, должны пересекать сферу или хотя бы касаться ее.) Поскольку площадь сферы равна  $\pi d^2$  и поскольку сфера должна быть полностью покрыта, имеем

$$\pi dw_1 + \pi dw_2 + \dots + \pi dw_n \geq \pi d^2,$$

откуда

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n \geq d. \quad (1)$$

**Упражнение 21.** В круге радиусом  $R$  расположен кружок радиусом  $r$ . Сколько прямых необходимо провести, чтобы хотя бы одна из них пересекла кружок? (Подразумевается, что мы видим круг, но не видим кружок.)

**Указание.** Прямая пересекает кружок в том и только том случае, когда центр кружка удален от нее не более чем на расстояние  $r$ , т. е. лежит в соответствующей полосе шириной  $2r$ .

**Упражнение 22.** Квадрат разрезали на прямоугольники. Может ли сумма меньших сторон прямоугольников оказаться меньше стороны квадрата?

**Замечание.** Это упражнение предлагалось десятиклассникам на московской олимпиаде 1998 года.

**Упражнение 23.** Докажите, что если квадрат покрыт полосами, то сумма ширин полос не может быть меньше стороны квадрата.

**Указание.** Впишите в квадрат круг.

## Теорема Банга—Тарского

В 1932 году польский математик А.Тарский поставил задачу: доказать неравенство (1) для любой ограниченной выпуклой фигуры  $F$ .

В 1950 году датский математик Т. Банг решил эту задачу и поставил проблему, не решенную по сей день. Чтобы сформулировать ее, запишем

неравенство (1) в виде

$$\frac{w_1}{d} + \frac{w_2}{d} + \dots + \frac{w_n}{d} \geq 1,$$

где  $w_1, w_2, \dots, w_n$  — ширины полос, покрывающих выпуклую фигуру  $F$ ,  $d$  — ширина фигуры  $F$ . Банг предложил делить ширину  $w_i$  полосы не на (наименьшую) ширину  $d$ , а на ширину  $d_i$  фигуры  $F$  в направлении  $i$ -й полосы:

$$\frac{w_1}{d_1} + \frac{w_2}{d_2} + \dots + \frac{w_n}{d_n} \geq 1. \quad (2)$$

Поскольку  $\frac{w_i}{d} \geq \frac{w_i}{d_i}$ , из неравенства (2) следует неравенство (1).

В 1991 году американский математик К. Болл доказал неравенство Банга (2) в случае, когда фигура  $F$  имеет центр симметрии.

**Упражнение 24.** В кубическом куске сыра имеется дырка — сферическая полость диаметром в  $1/1998$  длины ребра. Каким минимальным числом плоских разрезов ее можно обнаружить? (Считайте, что кусок сыра после разрезания не распадается.)

## План доказательства теоремы Банга—Тарского

Доказательство будем вести «от противного». Предположим, что выпуклая фигура  $F$  покрыта полосами, сумма ширин  $w_1 + \dots + w_n$  которых меньше ширины  $d$  фигуры  $F$ .

Построим векторы  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ , каждый из которых перпендикулярен границе соответствующей полосы и равен по длине ее ширине. Как и в решении задачи М1600 в первой части статьи (см. рис. 16), выбор одного из двух возможных (противоположных) направлений каждого из векторов  $\vec{v}_i$  произволен.

Поскольку сумма  $w_1 + \dots + w_n$  ширин полос строго меньше ширины  $d$  фигуры, можно увеличить длину каждого из векторов  $\vec{v}_i$  таким образом, чтобы сумма длин полученных векторов по-прежнему была меньше  $d$ . Теперь длины векторов будут больше, чем ширины соответствующих полос:  $|\vec{v}_i| > w_i$  при  $i = 1, \dots, n$ , но  $|\vec{v}_1| + \dots + |\vec{v}_n| < d$ .

Чтобы доказать теорему Банга–Тарского, мы введем понятие остова  $S(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ , построенного по системе векторов  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ . Мы докажем, что остов можно расположить внутри  $F$ . Для этого будет использована лемма о ширине пересечения выпуклой фигуры со своим сдвигом. Завершит доказательство теоремы применение леммы Банга.

**Лемма Банга.** Пусть каждому из векторов  $\vec{v}_i$ , где  $i = 1, \dots, n$ , поставлена в соответствие перпендикулярная полоса  $p_i$ , края которой перпендикулярны вектору  $\vec{v}_i$ , а ширина меньше  $|\vec{v}_i|$ . Тогда система полос  $p_1, \dots, p_n$  не покрывает остова  $S(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ . (Более того, обязательно найдется вершина остова, не лежащая ни в одной из полос.)

Тот, кто преодолевает весь этот путь, будет приятно удивлен: все леммы не только являются этапами доказательства теоремы Банга–Тарского, но и представляют самостоятельный интерес.

Вот пример применения леммы Банга.

**Оценка снизу в задаче M1600**

В первой части статьи решена задача M1600 – доказано, что если на плоскости дано конечное число полос, сумма ширин которых равна  $\pi + 2$ , то параллельными сдвигами этих полос можно покрыть круг единичного радиуса. Оказывается, число  $\pi + 2$  нельзя заменить никаким числом, меньшим  $\pi$ . Более того, частным случаем леммы Банга является следующее утверждение:

Если к каждой стороне вписанного в единичный круг правильного  $2n$ -угольника построить перпендикулярную полосу, то получим  $n$  полос, параллельными сдвигами которых нельзя покрыть никакой  $2n$ -угольник, гомотетичный исходному с коэффициентом гомотетии, большим 1.

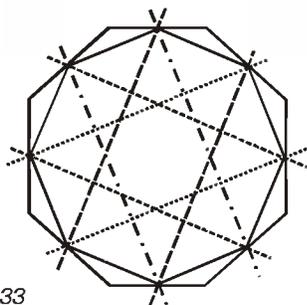


Рис. 33

Полосы, образованные перпендикулярами к сторонам правильного  $n$ -угольника, покрывают не только этот многоугольник, но и больший правильный многоугольник (рис.33). Его стороны не параллельны сторонам исходного многоугольника, так что никакого противоречия нет. Мы только видим, что слово «гомотетичный» нельзя заменить словом «подобный».

Важно, что покрыты должны быть не только граничные, но и внутренние точки многоугольника. Например, на рисунке 34 граница шестиугольника покрыта полосами даже

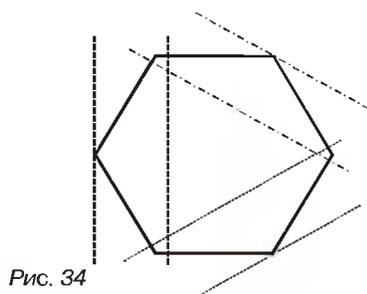


Рис. 34

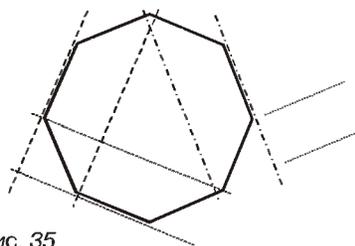


Рис. 35

более узкими, чем сторона шестиугольника. А для восьмиугольника (рис.35) одна полоса оказалась лишней!

**Упражнение 25.** Перпендикулярные сторонам правильного  $2n$ -угольника полосы покрывают не только описанную окружность, но даже изображенный на рисунке 33 описанный вокруг этой окружности  $2n$ -угольник. Докажите, что никакой больший правильный  $2n$ -угольник сдвигами рассматриваемых полос покрыть невозможно.

**Гомотетичные образы**

Подготовку к доказательству теоремы Банга–Тарского начнем издалека. Пусть выпуклая фигура  $F$  разрезана на выпуклые фигуры. Впишем в них фигуры, гомотетичные  $F$  (рис.36).

**Гипотеза.** При любом разрезании гомотетичные  $F$  фигуры можно выбрать настолько большими, чтобы сумма коэффициентов гомотетии была не меньше 1.

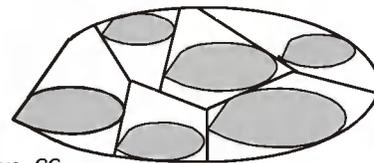


Рис. 36

Мы умеем доказывать следующий частный случай гипотезы:

Если выпуклая фигура  $F$  разрезана прямой  $l$  на две части, то в эти части можно вписать гомотетичные образы фигуры  $F$  так, чтобы сумма соответствующих коэффициентов гомотетии равнялась 1.

Для доказательства проведем опорные прямые  $m$  и  $k$ , параллельные прямой  $l$  (рис. 37). Отметим на пря-

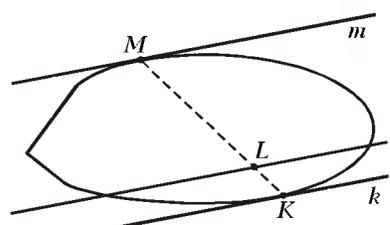


Рис. 37

мых  $m$  и  $k$  точки  $M$  и  $K$  «соприкосновения» с фигурой  $F$ , т. е. точки, принадлежащие одновременно и соответствующей прямой, и границе фигуры  $F$ . (Эти точки не всегда определены однозначно – см. рис. 38.)

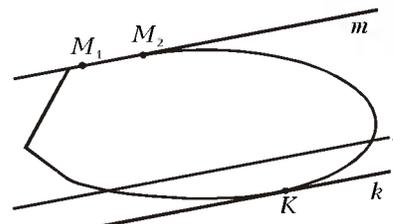


Рис. 38

Обозначим буквой  $L$  точку пересечения отрезка  $KM$  с прямой  $l$ . Образы  $H_K^{KL/KM}(F)$  и  $H_M^{ML/MK}(F)$  фигуры  $F$  при гомотетиях с центрами  $K$  и  $M$  и коэффициентами  $KL/KM$  и  $ML/MK$  содержатся в частях, на которые прямая  $l$  делит фигуру  $F$  (рис.39). Сумма коэффициентов го-

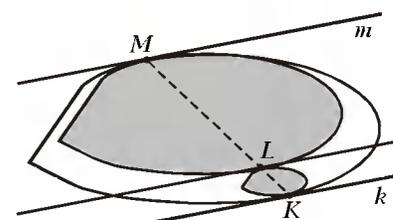


Рис. 39

мотетии

$$\frac{KL}{KM} + \frac{ML}{MK} = \frac{KL + LM}{KM}$$

равна 1.

**Упражнение 26.** Дан прямоугольник, не являющийся квадратом. Разместите внутри него два непересекающихся подобных ему с коэффициентами  $k_1$  и  $k_2$  прямоугольника так, чтобы сумма  $k_1 + k_2$  была больше 1.

**Решение.** Выберем точку на диагонали прямоугольника вблизи его вершины<sup>1</sup> и проведем через нее прямые параллельно сторонам (рис.40). Прямоугольник окажется разбит на четыре части, две из

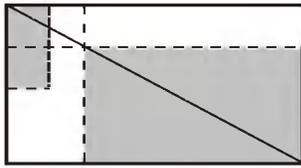


Рис. 40

которых содержат отрезки его диагонали и являются прямоугольниками, гомотетичными исходному. Сумма коэффициентов гомотетии равна 1.

Отразив меньший из прямоугольничков относительно биссектрисы его угла, являющегося заодно и углом исходного прямоугольника, видим, что образовался зазор, который позволяет увеличить прямоугольничек.

**Упражнение 27.** Ограниченная фигура  $F$  разрезана прямой на две части. Докажите, что нельзя вписать в них гомотетичные образы фигуры  $F$  так, чтобы сумма коэффициентов гомотетии была больше 1.

**Упражнение 28.** Между параллельными опорными прямыми фигуры  $F$  провели на равных расстояниях одну от другой  $n$  параллельных прямых (рис.41). Дока-

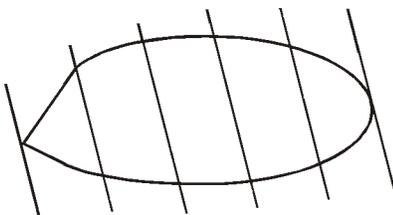


Рис. 41

жите, что ни в одну из  $n + 1$  частей, на которые оказалась разбита фигура  $F$ , нельзя поместить ее гомотетичный образ с коэффициентом гомотетии, превосходящим  $1/(n + 1)$ .

*Замечание.* Американский математик Дэвенпорт выдвинул гипотезу: как бы ни были расположены  $n$  прямых, хотя бы в одной из частей, на которые они делят

<sup>1</sup> Это нужно, чтобы при описываемой далее симметрии прямоугольничек не вылез из границ исходного прямоугольника.

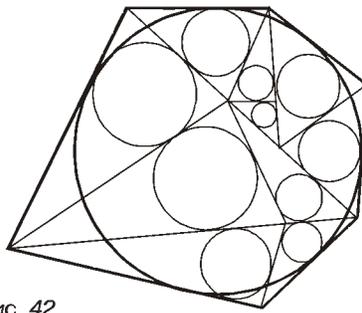


Рис. 42

выпуклую ограниченную фигуру  $F$ , можно разместить гомотетичный образ фигуры  $F$  при гомотетии с коэффициентом  $1/(n + 1)$ .

**Упражнение 29.** Если описанный около окружности радиусом  $r$  многоугольник разбит на треугольники, то сумма  $r_1 + \dots + r_n$  радиусов их вписанных окружностей не меньше  $r$  (рис.42).

**Свойство наибольшей хорды**

Прежде чем применять гомотетии для доказательства теоремы Банга–Тарского, рассмотрим всевозможные хорды выпуклой фигуры  $F$ , параллельные некоторому фиксированному направлению. Опорные прямые, проведенные в концах хорды  $AB$  рисунка 43, не параллельны одна другой. Не параллельны и опорные прямые,

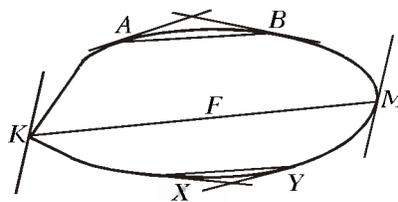


Рис. 43

проведенные в концах хорды  $XY$ , но пересекаются они «с другой стороны». Интуиция подсказывает, что для какой-то промежуточной между  $AB$  и  $XY$  хорды опорные прямые окажутся параллельными.

**Лемма.** *Через концы  $K$  и  $M$  самой длинной<sup>2</sup> из семейства параллельных хорд выпуклой фигуры  $F$  можно провести параллельные опорные прямые.*

**Доказательство.** Проведем всевозможные лучи с началом  $K$ , пересекающие фигуру  $F$  (рис.44). Образуется угол  $K_1KK_2$ . Аналогично строим угол  $M_1MM_2$ . Проведем лучи  $ML_1$  и  $ML_2$  параллельно лучам  $KK_1$  и  $KK_2$

<sup>2</sup> Существование такой хорды мы не доказываем, поскольку соответствующие теоремы математического анализа не имеют прямого отношения к теме статьи.

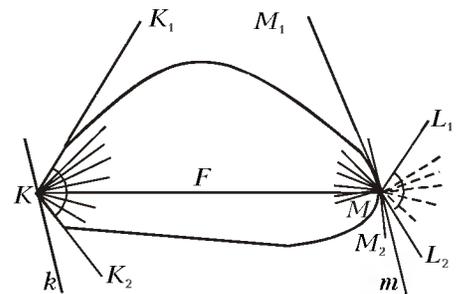


Рис. 44

соответственно.

Отделим углы  $M_1MM_2$  и  $L_1ML_2$  один от другого прямой  $m$  – и останется лишь провести через точку  $K$  прямую  $k$ , параллельную  $m$ . Параллельные опорные прямые построены!

**Упражнение 30.** Мы использовали не доказанный (хотя и очевидный) факт, что углы  $M_1MM_2$  и  $L_1ML_2$  можно отделить один от другого прямой, т. е. что  $\angle K_1KM + \angle KMM_2 \leq 180^\circ$  и  $\angle K_2KM + \angle KMM_2 \leq 180^\circ$ . Докажите эти неравенства.

**Упражнение 31.** Провели две опорные прямые выпуклой замкнутой фигуры, расстояние между которыми равно ширине фигуры. Докажите, что фигура имеет хорду с концами на этих прямых, которая перпендикулярна этим прямым.

*Указание.* Проведите хорды, перпендикулярные опорным прямым (рис. 45). Выберите из них самую длинную. Если ее

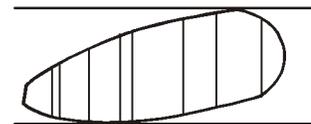


Рис. 45

длина меньше, чем расстояние между опорными прямыми, то проведите через концы этой хорды параллельные опорные прямые.

**Ширина пересечения фигуры со своим сдвигом**

Следующая лемма потребуется нам для доказательства теоремы Банга–Тарского.

**Лемма.** *Пусть  $F$  – выпуклая фигура,  $w$  – ее ширина,  $F'$  – фигура, полученная из  $F$  параллельным переносом на вектор  $\vec{v}$  (рис.46). Тогда*

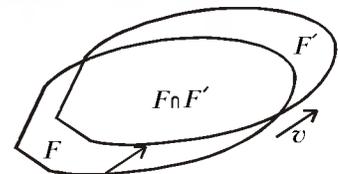


Рис. 46

ширина пересечения  $F \cap F'$  не меньше чем  $w - |\vec{v}|$ .

В частности, если  $w > |\vec{v}|$ , то пересечение  $F \cap F'$  не пусто.

**Доказательство.** Рассмотрим хорды фигуры  $F$ , параллельные вектору  $\vec{v}$ . Наибольшая из них  $KM$  обладает, как сказано в предыдущем разделе, тем свойством, что через ее концы можно провести параллельные опорные прямые  $k$  и  $m$  (рис.47).

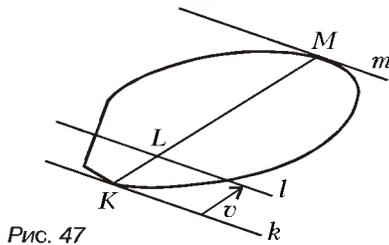


Рис. 47

Обозначим буквой  $L$  точку пересечения с отрезком  $KM$  прямой  $l$ , которая получается из опорной прямой  $k$  параллельным переносом на вектор  $\vec{v}$ . Рассмотрим фигуру  $\tilde{F} = H_M^{LM/KM}(F)$ . Она содержится в  $F$  (рис.48). Та же самая фигура  $\tilde{F}$

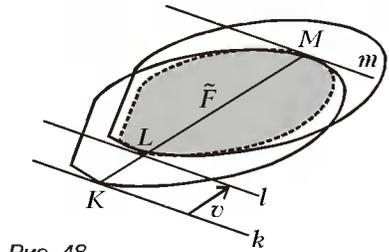


Рис. 48

есть образ фигуры  $F'$  при гомететии с центром  $L$  и тем же коэффициентом  $LM/KM$ . (Это видно из

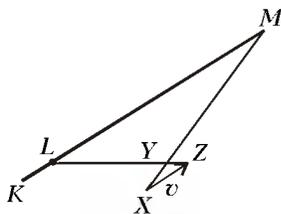


Рис. 49

подобия треугольников  $MYL$  и  $XYZ$  на рисунке 49, где  $Z$  — образ точки  $X$  при сдвиге на  $\vec{v}$ .) Следовательно,  $\tilde{F}$  содержится не только в  $F$ , но и в  $F'$ , а значит — в пересечении  $F \cap F'$ . Ширина фигуры  $\tilde{F}$  — гомететичного образа фигуры  $F$  — равна ширине  $w$  фигуры  $F$ , умноженной на коэффициент гомететии  $(KM - |\vec{v}|)/KM$ .

**Упражнение 32.** Проверив неравенство  $w - w \frac{|\vec{v}|}{KM} \geq w - |\vec{v}|$ , завершите доказательство леммы.

### ОСТОВЫ

При доказательстве леммы Банга мы будем следить не за всеми точками многоугольника, а только за верши-

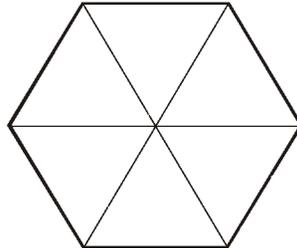


Рис. 50

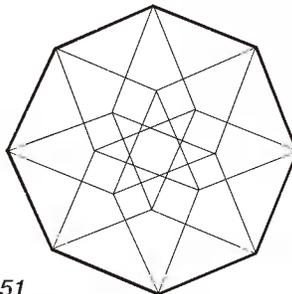


Рис. 51

нами его остова. На рисунках 50, 51 и 52 изображены остовы правильных шести-, восьми- и десятиугольника.

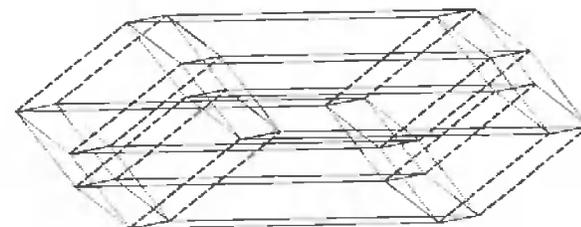


Рис. 52

### Центрально-симметричные многоугольники

Точное определение остова мы дадим чуть позже, а пока взгляните на рисунок 53. На нем изображены центрально-симметричные многоугольники — четырехугольник (параллело-

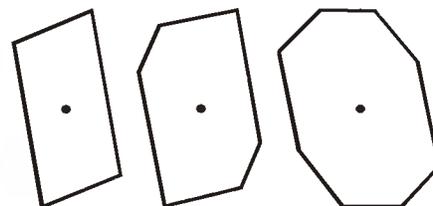


Рис. 53

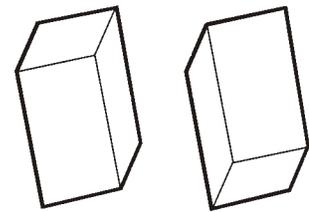


Рис. 54

грамм), шестиугольник и восьмиугольник. Любой многоугольник, имеющий центр симметрии, имеет четное число вершин, а его противоположные стороны равны и параллельны.

На рисунке 54 центрально-симметричный шестиугольник разрезан на

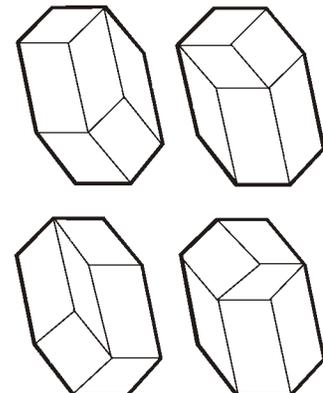


Рис. 55

параллелограммы, стороны которых равны и параллельны сторонам шестиугольника. На рисунке 55 на параллелограммы разными

способами разрезан восьмиугольник.

Изобразим на одном рисунке все разбиения выпуклого центрально-симметричного многоугольника  $F$  на параллелограммы со сторонами, параллельными и равными сторонам многоугольника (рис.56, 57). Возникнет система точек и отрезков, которую будем называть *остовом* многоугольника  $F$ .

Хотя нам это и не потребуется для

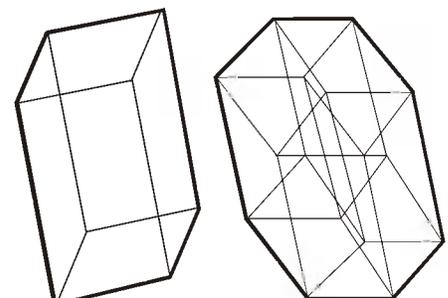


Рис. 56

Рис. 57

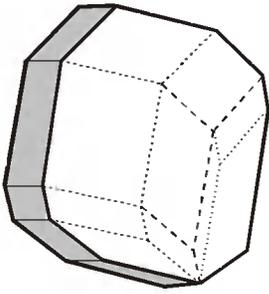


Рис. 58

доказательства теоремы Банга—Тарского, отметим, что любой центрально-симметричный выпуклый многоугольник можно разрезать на параллелограммы со сторонами, равными и параллельными сторонам многоугольника. Идея доказательства показана на рисунке 58.

**Определение остова**

Рассмотрим систему векторов  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  и точку  $O$  (рис.59). Понять,

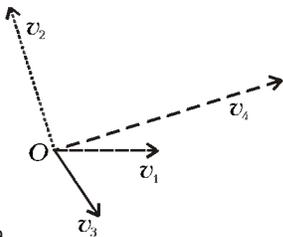


Рис. 59

что такое остов, поможет следующее упражнение.

**Упражнение 33.** От незагашенного окурка в одной точке загорелся лес. Ветер дул один час со скоростью  $\vec{v}_1$ , второй час — со скоростью  $\vec{v}_2$ , ...,  $n$ -й час — со скоростью  $\vec{v}_n$ . Пожар распространялся от загоревшихся участков со скоростью ветра (причем загоревшиеся участки продолжали гореть). Какой участок выгорел за  $n$  часов?

Точное определение остова таково. Сдвинем точку  $O$  на вектор  $\vec{v}_1$ . Соединив полученную точку с исходной, получим отрезок  $S_1$  (рис. 60). Сдвинем  $S_1$  на вектор  $\vec{v}_2$ . Получим параллелограмм  $S_2$ . Из  $S_2$  при помо-

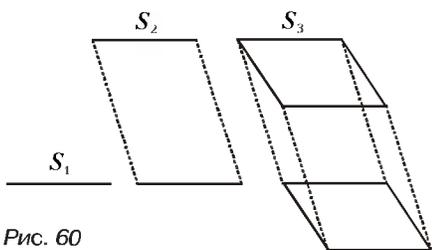


Рис. 60

щи вектора  $\vec{v}_3$  получаем систему отрезков  $S_3$ . Вообще, чтобы получить  $S_{k+1}$ , мы к  $S_k$  добавляем образ  $S_k$  при параллельном переносе на вектор  $\vec{v}_{k+1}$ . Кроме того, добавляем отрезки, соединяющие вершины остова  $S_k$  с вершинами, в которые они переходят при сдвиге на  $\vec{v}_{k+1}$ . Таким образом по системе векторов  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  мы строим остов  $S_n = S(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ . Произвольная вершина этого остова получается из начальной точки  $O$  сдвигом на вектор  $a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$ , где коэффициенты  $a_i$  суть 0 или 1. Например, точка  $P$  рисунка 61 получена из  $O$  сдвигом на  $\vec{v}_2$ , точка  $Q$  получена сдвигом на  $\vec{v}_1 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4$ , а  $\vec{OR} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_4$ .

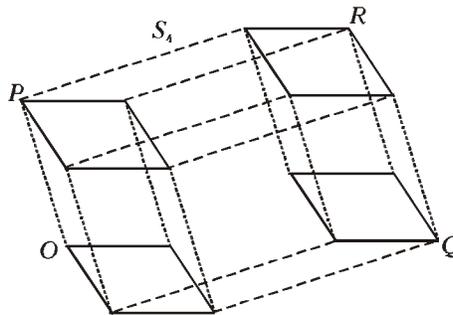


Рис. 61

Так как число вершин системы  $S_{k+1}$ , вообще говоря, вдвое больше числа вершин системы  $S_k$ , то число вершин остова  $S_n$  равно  $2^n$ . Мы употребили выражение «вообще говоря» из-за того, что какие-то вершины могли совпасть, как это произошло, например, на рисунке 50, где в центре правильного шестиугольника совпали две вершины его остова.

Остов назовем невырожденным, если все его вершины различны. Из каждой вершины невырожденного остова  $S_n$  исходит ровно  $n$  ребер. (Некоторые ребра могут, как это показано на рисунке 57, лежать на одной прямой. На существо дела это не влияет. Надо только не дать себя запутать случайными совпадениями.) При доказательстве теоремы Банга—Тарского будем рассматривать только невырожденные остовы. Мы имеем право это делать, поскольку длины векторов  $\vec{v}_i$ , как вы помните, можно чуточку варьировать.

**Упражнение 34.** Докажите, что набор векторов  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  дает невырожденный остов в том и только том случае, когда никакой вектор этого набора не представим в виде  $\vec{v}_k = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_{k-1} \vec{v}_{k-1}$ , где коэффициенты  $a_i$  суть 0, 1 или  $-1$ .

Итак, для того чтобы построить остов выпуклого центрально-симметричного  $2n$ -угольника  $A_1 A_2 \dots A_n A_{n+1} \dots A_{2n}$ , достаточно взять  $\vec{v}_1 = A_1 A_2, \vec{v}_2 = A_2 A_3, \dots, \vec{v}_n = A_n A_{n+1}$ , а в качестве начальной точки  $O$  — точку  $A_1$ .

**Почему остов можно разместить в фигуре?**

Сдвинем фигуру  $F$  на вектор  $\vec{v}_1$  и пересечение полученной фигуры  $F'$  с  $F$  обозначим через  $F_1$  (рис.62). Как пересечение выпуклых фигур, фигура  $F_1$  выпуклая. Ее ширина не меньше чем  $d - |\vec{v}_1|$ .

Сдвинем  $F_1$  на вектор  $\vec{v}_2$  и обозначим через  $F_2$  пересечение полученной фигуры с  $F_1$ . Ширина фигуры  $F_2$  не меньше чем  $d - |\vec{v}_1| - |\vec{v}_2|$ .

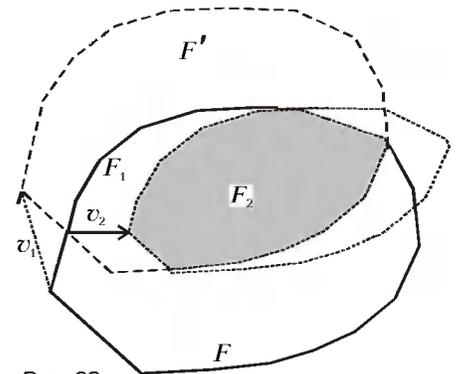


Рис. 62

Будем сдвигать и пересекать фигуры до того момента, когда из  $F_{n-1}$  получим  $F_n$  (на рисунке 63  $n = 4$ ). Каждое из множеств  $F_i$ , где  $i = 1, \dots$

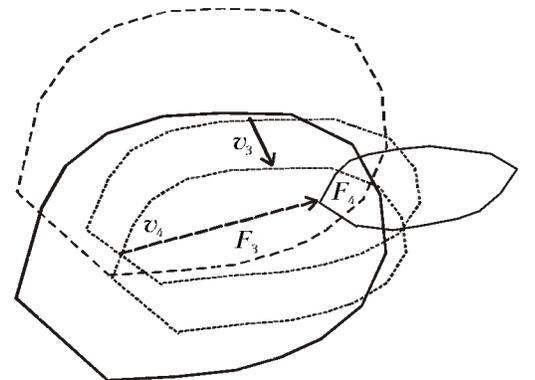


Рис. 63

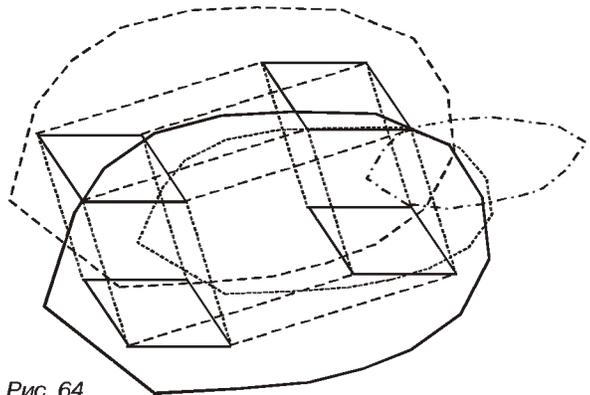


Рис. 64

...,  $n$ , содержится в  $F_{i-1}$ . (Чтобы это утверждение имело смысл при  $i = 1$ , пусть  $F_0 = F$ .) Более того, вместе с фигурой  $F_i$  в  $F_{i-1}$  содержится ее сдвиг на вектор  $-\vec{v}_i$ .

Ширина фигуры  $F_n$  не меньше чем  $d - |\vec{v}_1| - \dots - |\vec{v}_n| > 0$ . Поэтому существует точка  $O \in F_n$ . Если начать построение с нее, то легко понять, что остов  $S(-\vec{v}_n)$  будет содержаться в  $F_{n-1}$ , остов  $S(-\vec{v}_{n-1}, -\vec{v}_n)$  — в  $F_{n-2}$ , ...,  $S(-\vec{v}_1, \dots, -\vec{v}_n)$  — в  $F$  (рис.64).

### Доказательство леммы Банга

Возьмем наугад произвольную вершину остова. Укажем способ, двигаясь в соответствии с которым по ребрам остова, мы дойдем до вершины, не лежащей ни в одной из данных полос.

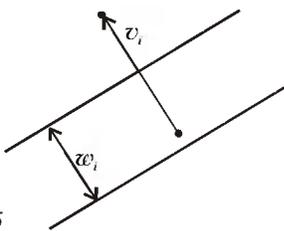


Рис. 65

Если вершина не лежит ни в одной из полос, то двигаться никуда не надо. Если же она содержится в некоторой полосе  $p_i$ , рассмотрим выходящее из этой вершины ребро остова, соответствующее вектору  $\vec{v}_i$  (рис.65).

Длина этого ребра равна  $|\vec{v}_i|$ . Она больше, чем ширина  $w_i$  полосы  $p_i$ , поэтому второй конец ребра расположен вне полосы  $p_i$ . Туда и надо идти. (Если вершина принадлежала сразу нескольким полосам, то можно идти по любому из соответствующих ре-

бер.) Применяя к новой вершине остова то же правило, мы перейдем в следующую вершину, и т.д.

К сожалению, чтобы доказать, что мы убежим из всех полосок, недостаточно сказать, что можно выбежать из любой полоски. Дело в том, что, выбежав на некотором шаге из полосы, мы не имеем гарантии, что не вернемся в нее же через несколько шагов. И все-таки процесс убегания завершится (причем менее чем за  $2^n$  шагов).

Чтобы доказать это, рассмотрим произвольное ребро  $PQ$  остова  $S_n$  (рис.66). Оно соответствует некоторому вектору  $\vec{v}_i$  и полосе  $p_i$ . Ребру

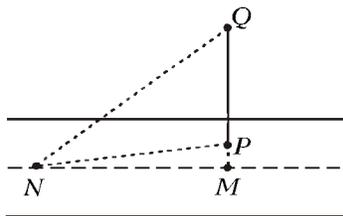


Рис. 66

$PQ$  сопоставим разность квадратов  $QM^2 - PM^2$  расстояний от точек  $Q$  и  $P$  до оси полосы  $p_i$  (ось полосы — это прямая, параллельная ее краям и делящая ее на две полосы одинаковой ширины). По теореме Пифагора,

$$\begin{aligned} QN^2 - PN^2 &= \\ &= (QM^2 + MN^2) - (PM^2 + MN^2) = \\ &= QM^2 - PM^2 \end{aligned}$$

для любой точки  $N$  оси полосы, так что рассматриваемая величина есть разность расстояний от точек  $Q$  и  $P$  до любой точки  $N$  оси полосы.

Ломаной  $A_1A_2 \dots A_n$ , состоящей из ребер остова, сопоставим сумму чисел, сопоставленных ее звеньям  $A_1A_2, A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$ . Отметим, что если ломаная возникла в процессе убегания от полосок, то соответствующее ломаной число положительно (начало всякого ребра  $A_iA_{i+1}$  лежит в соответствующей этому ребру полосе, а конец — не лежит).

**Лемма.** Любому замкнутому (т.е. заканчивающемуся там же, где начался) маршруту по вершинам остова сопоставлено число 0.

**Доказательство.** Рассмотрим сначала короткий замкнутый маршрут

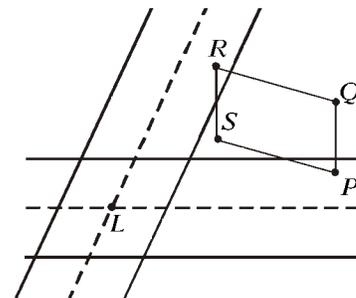


Рис. 67

— параллелограмм  $PQRS$  (рис.67). Ребрам  $PQ, QR, RS$  и  $SP$  сопоставлены числа  $QL^2 - PL^2, RL^2 - QL^2, SL^2 - RL^2$  и  $PL^2 - SL^2$ . Их сумма равна нулю.

**Упражнение 35.** Разберите самостоятельно изображенный на рисунке 68 случай, когда оси полос параллельны.

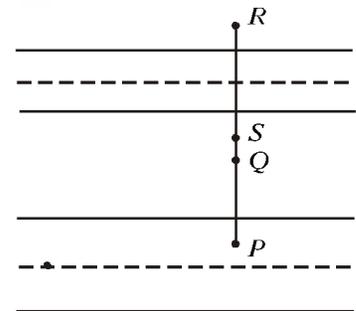


Рис. 68

Если маршрут состоит более чем из четырех ребер, то, выбрав любую его точку в качестве начальной, запишем последовательность ребер, из которой маршрут состоит. То, что по любому параллелограмму сумма сопоставленных его сторонам величин равна 0, означает, что можно, не меняя сопоставленной всему маршруту величины, менять маршрут, переставляя соседние векторы. Рассмотрим любой входящий в маршрут вектор и противоположный ему, перестановками будем приближать их друг к другу. Когда они окажутся рядом, эти два вектора исключим из маршрута. Лемма доказана. (Тем, кто знаком с понятием  $n$ -мерного куба, проще всего понять это доказательство, если вообразить, что «стягивается в точку» замкнутый путь, состоящий из ребер  $n$ -мерного куба.)

Из этой леммы как раз следует, что в процессе убегания от полосок вершины не повторяются. (Последнее утверждение могло бы оказаться неверным, если бы мы рассматривали не только невырожденные остовы. Но утверждение все же было бы верно и для вырожденных остовов,

если бы мы следили не только за положением вершины остова на плоскости, но и за набором коэффициентов  $a_1, \dots, a_n$ , задающих вершину по формуле  $\vec{OA} = a_1\vec{v}_1 + \dots + a_n\vec{v}_n$ . Поскольку число вершин остова конечно, лемма Банга доказана.

Есть и другой способ доказательства леммы Банга. Скалярное произведение  $\vec{v}_i \cdot \vec{OM}$  не меняется, когда точка  $M$  перемещается параллельно оси полосы  $p_i$ . Выбрав на оси полосы любую точку  $M_i$ , положим  $b_i = \vec{v}_i \cdot \vec{OM}_i$ . Прямые, ограничивающие полосу  $p_i$ , можно задать уравнениями

$$\vec{v}_i \cdot \vec{OM} = b_i = \pm \frac{1}{2} |\vec{v}_i| w_i.$$

Рассмотрим для каждого вектора  $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n$ , где коэффициенты  $a_i$  суть 0 или 1, величину

$$f(a_1, \dots, a_n) = \vec{v}^2 - 2a_1b_1 - 2a_2b_2 - \dots - 2a_nb_n.$$

Выберем набор  $(a_1, \dots, a_n)$ , для которого величина  $f(a_1, \dots, a_n)$  наибольшая. Тогда при любом  $i = 1, \dots, n$  должно выполняться неравенство

$$f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) \geq f(a_1, \dots, 1 - a_i, \dots, a_n),$$

которое можно записать в виде

$$\begin{aligned} \vec{v}^2 - 2a_1b_1 - 2a_2b_2 - \dots - 2a_nb_n &\geq \\ &\geq \left( \vec{v} + (1 - 2a_i)\vec{v}_i \right)^2 - \\ &- 2a_1b_1 - 2a_2b_2 - \dots - 2a_nb_n - 2(1 - 2a_i)b_i. \end{aligned}$$

Раскрыв скобки и упростив, получаем неравенство

$$\vec{v}_i^2 \leq 2(2a_i - 1)(\vec{v}_i \cdot \vec{v} - b_i),$$

из которого, поскольку  $|2a_i - 1| = 1$  и  $\vec{v}_i^2 > |\vec{v}_i| w_i$ , следует, что

$$\frac{1}{2} |\vec{v}_i| w_i < \vec{v}_i \cdot \vec{v} - b_i,$$

т.е. соответствующая набору  $(a_1, \dots, a_n)$  вершина остова не лежит в  $i$ -й полосе. Что и требовалось.

### Приложение

#### Определения

Фигура называется выпуклой, если вместе с любыми двумя своими точками  $A$  и  $B$  она содержит все точки отрезка  $AB$ .

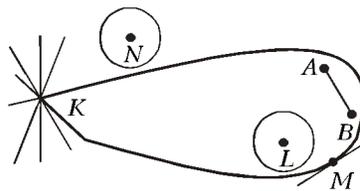


Рис. 69

Точка  $A$  плоскости называется граничной точкой фигуры, если любой круг с центром  $A$  содержит как точки фигуры, так и точки, ей не принадлежащие. Множество граничных точек фигуры называется ее границей.

Точка называется внутренней точкой фигуры, если некоторый круг с центром в этой точке целиком содержится в фигуре. На рисунке 69 точки  $K, M$  – граничные точки фигуры  $F$ , точки  $A, B, L$  – внутренние. Точка  $N$  не является ни внутренней, ни граничной точкой, поскольку существует круг с центром  $N$ , в котором нет ни одной точки фигуры  $F$ . В точке  $M$  к фигуре  $F$  можно провести единственную опорную прямую, а в точке  $K$  – бесконечно много.

**Теорема.** Через любую граничную точку выпуклой фигуры проходит хотя бы одна опорная прямая.

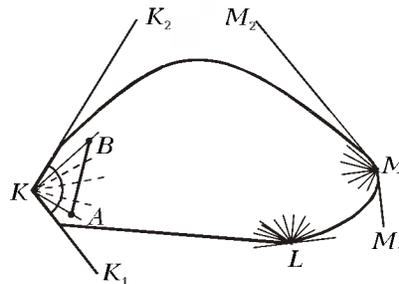


Рис. 70

**Доказательство.** Пусть  $K$  – граничная точка выпуклой фигуры  $F$ . Проведем всевозможные лучи с началом  $K$  через точки фигуры  $F$  (рис.70). По определению выпуклой фигуры, вместе с любыми проведенными лучами  $KA$  и  $KB$ , где  $A, B \in F$ , окажутся проведены (через точки отрезка  $AB$ ) все лучи угла  $AKB$ . Значит, образуется угол  $K_1KK_2$ . Он может оказаться развернутым (в роли точки  $K$  могла выступить точка  $L$ ). Ограничивающие этот угол лучи могут войти в построенное множество лучей (как, например, луч  $KK_1$ ), а могут и не войти в него (как  $MM_2$ ). Но в любом случае через точку  $K$  можно провести опорную прямую к фигуре  $F$ .

#### Разделяющая прямая

**Теорема.** Если  $F$  и  $G$  – выпуклые замкнутые ограниченные непересекающиеся фигуры, то существует прямая, относительно которой  $F$  и  $G$  лежат по раз-

ные стороны (в разных полуплоскостях).

**Доказательство.** Рассмотрим кратчайший отрезок  $AB$ , где  $A \in F, B \in G$ . (Длина этого отрезка называется расстоянием между фигурами  $F$  и  $G$ .) Перпендикуляр к отрезку  $AB$ , как легко доказать методом «от противного», разделяет фигуры  $F$  и  $G$ .

**Упражнение 36.** Докажите, что для любых двух непересекающихся выпуклых многоугольников в качестве разделяющей прямой годится одна из их сторон (точнее, прямая, на которой она лежит).

**Упражнение 37.** Докажите, что если  $F$  и  $G$  – выпуклые непересекающиеся фигуры, то существует прямая, относительно которой  $F$  и  $G$  лежат по разные стороны.

#### Почему ширина существует?

Мы считали очевидным, что ограниченная фигура  $F$  имеет ширину по любому направлению. Чтобы прояснить ситуацию, спроецируем фигуру вдоль данного направления на перпендикулярную прямую. Мы приходим к известной теореме о существовании точной верхней (нижней) грани ограниченного сверху (соответственно, снизу) множества. Эта теорема – один из краеугольных камней учения о вещественных числах. Ее доказательство можно найти в учебниках математического анализа.

Если каждой прямой  $l$ , проходящей через начало координат, сопоставить ширину  $w(l)$  ограниченной фигуры  $F$  по направлению  $l$ , мы получим непрерывную функцию (докажите!). По теореме Вейерштрасса, доказательство которой тоже можно найти в учебниках, определенная на ограниченном замкнутом множестве непрерывная функция принимает и наибольшее, и наименьшее значения. Значит, среди всех ширин  $w(l)$  существуют наименьшая и наибольшая.

# Тамэси-вари

А. БИРЮКОВ

**Т**АМЭСИ-ВАРИ – это проверка психологической подготовки и техники удара в каратэ различных предметов. Известно, что каратэ пришло к нам с Окинавы, крупнейшего острова Японии. Наибольшее развитие каратэ получило в XVI–XVII веках, когда власти, опасаясь восстаний, изъяли у населения все оружие, включая кухонные ножи и церемониальные мечи. Конечно, сопротивляться хорошо вооруженной армии самураев голыми руками крестьянам было не под силу, но, зная приемы каратэ, они могли дать отпор нескольким оголтелым насильникам. Видимо, отсюда и берет начало практика тамэси-вари, которая всегда интересна для зрителей и производит на непосвященных впечатление некоторого чуда. В наше время на показательных выступлениях и соревнованиях по каратэ в тамэси-вари чаще всего используются доски определенных размеров из деревьев хвойных пород.

В статье рассматривается простая физическая модель удара по доске, которая позволяет сделать некоторые оценки и дать рекомендации, а также оценить возможности человека в тамэси-вари. Определение ряда параметров этой модели требует решения нескольких самостоятельных задач, которые могут быть интересны читателю и сами по себе. Чтобы не загромождать изложение, задачи вынесены в Приложение в конце статьи.

Пусть по центру лежащей на двух опорах доски с размерами  $d$ ,  $l$  и  $h$  (рис. 1) наносят удар кулаком массой  $m$  со скоростью  $v$  в момент контакта. Волокна доски направлены параллельно опорам, расстояние между которыми для оценки также будем полагать равным длине доски  $l$ . Из «секретов» каратэ известно, что для увеличения эффективности удара надо к уже разогнанному перед ударом кулаку в течение времени его взаимодействия с доской прикладывать еще и силу, которую обозначим

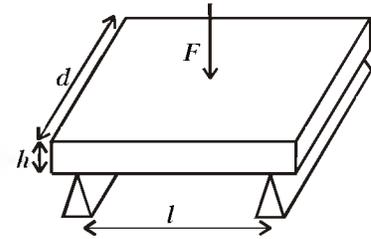


Рис. 1

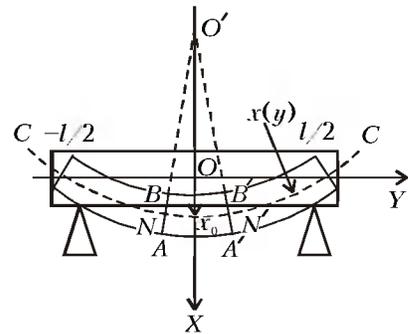


Рис. 2

через  $F$ . Введем систему координат, как показано на рисунке 2. Обозначим через  $x_0$  смещение центра доски



из положения равновесия. Пусть разлом доски, т.е. разрыв ее внешней поверхности, происходит при некотором значении  $x_0 = x_p$ . Такой разрыв происходит, когда напряжение  $\sigma$  (сила, действующая на единицу площади сечения доски) на поверхности доски достигает определенного значения  $\sigma_p$ , характеризующего материал.

Найдем вначале связь между  $x_p$  и  $\sigma_p$ , которая, очевидно, определяется упругими свойствами и геометрическими размерами доски. Максимальный изгиб и, следовательно, максимальное напряжение на поверхности доски будет в ее середине. Как показано в Приложении 1, это напряжение равно

$$\sigma = \frac{Eh}{2R},$$

где  $R$  – радиус кривизны центральной линии  $CC$  в середине доски (см. рис. 2), а  $E$  – модуль Юнга материала доски.

Зададим теперь форму доски при изгибе, учитывая, что края доски закреплены в точках  $y = \pm l/2$ , а максимальное смещение из положения равновесия имеет ее центр. Отметим, что точная форма доски зависит от конкретных (не очень ясных) условий контакта ударной поверхности кулака с доской (при правильном ударе – это суставы указательного и среднего пальцев). Поэтому для расчетов можно ограничиться удобной формулой, основанной на практическом опыте и позволяющей провести простые оценки. Будем считать форму доски при изгибе косинусоидой, закрепленной в точках  $y = \pm l/2$ . В этом случае смещение  $x$  какой-либо точки центральной линии зависит от ее координаты  $y$  по закону

$$x(y) = x_0 \cos\left(\frac{\pi y}{l}\right).$$

В Приложении 2 показано, что при этом радиус кривизны в центре доски будет равен

$$R = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \frac{1}{x_0}.$$

Подставив полученное выражение для радиуса кривизны в выражение для  $\sigma$ , найдем напряжение в середине доски на ее поверхности при смещении центра доски на величину  $x_0$ :

$$\sigma = \frac{x_0 E h \pi^2}{2l^2}.$$

Отсюда видно, что разлом ( $\sigma = \sigma_p$ ) происходит при смещении центра доски на величину

$$x_p = \frac{2\sigma_p l^2}{\pi^2 E h}.$$

Смоделируем далее упругие свойства доски относительно приложенной внешней силы пружинной жесткостью  $k$ . Этот коэффициент найден в Приложении 3 и имеет величину

$$k = \frac{\pi^2 E h^3 d}{3l^3}.$$

После определения необходимых параметров вернемся к сформулированной раньше динамической задаче об ударе по доске и запишем уравнение движения кулака в виде второго закона Ньютона:

$$m\ddot{x} = -kx + F,$$

где  $x$  теперь – смещение кулака от исходной поверхности контакта с доской, а штрихи обозначают производные по времени. Для оценки будем полагать, что приложенная к кулаку сила  $F$  постоянна во времени. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что общее решение уравнения движения имеет вид

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{F}{k}$$

и содержит две произвольные константы  $A$  и  $B$ . Для их определения зададим условия в начальный момент времени  $t = 0$ :  $x = 0$  и  $x' = v$ . Тогда получим

$$x = \frac{f}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) + \frac{v}{\omega} \sin \omega t,$$

где  $f = F/m$  – величина, имеющая размерность ускорения, и  $\omega = \sqrt{k/m}$  – частота собственных колебаний кулака под действием упругой силы со стороны доски. Найдем теперь максимальное отклонение кулака  $x_{\max}$  при заданном значении начальной скорости  $v$  и силы  $F$ . Приравняв к нулю производную от  $x$  по времени  $t$  и затем исключая  $t$ , находим

$$x_{\max} = \frac{f}{\omega^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{v\omega}{f}\right)^2} \right).$$

Для получения условий разлома это отклонение нужно приравнять к отклонению  $x_p$ , откуда получаем урав-

нение

$$\frac{2\sigma_p h^2 d}{3Fl} = 1 + \sqrt{1 + \frac{\pi^2 E h^3 v^2 d m}{3F^2 l^3}},$$

связывающее свойства материала доски и ее геометрические размеры с параметрами, характеризующими удар.

Решим это уравнение относительно силы  $F$ , опять вводя для удобства значения  $x_p$  и  $k$ . В этих обозначениях получим простое выражение

$$F = \frac{kx_p}{2} - \frac{mv^2}{2x_p}$$

– такую силу необходимо приложить в момент контакта к кулаку, движущемуся с начальной скоростью  $v$ , чтобы разбить доску. Очевидно, что если скорость кулака достаточно велика, выражение для  $F$  получается отрицательным и силу можно не прикладывать. В этом случае начальная скорость должна превышать значение

$$v = x_p \omega = \frac{2\sigma_p}{\pi\sqrt{3}} \sqrt{\frac{h d}{m E}},$$

которое пропорционально квадрату корню из толщины доски  $h$ . Наоборот, если начальная скорость кулака  $v$  равна нулю, то из выражения для  $F$  следует, что, для того чтобы сломать (продавить) доску, необходимо приложить силу

$$F = \frac{kx_p}{2} = \frac{h^2 \sigma_p d}{3l},$$

пропорциональную квадрату толщины  $h$ . Значит, с увеличением толщины доски выгоднее увеличивать скорость, а не силу.

Решим теперь уравнение, определяющее условие разлома доски, относительно  $h$  и получим значение толщины доски, которую можно разбить при заданных параметрах удара:

$$h = \frac{3\pi^2 E v^2 m}{8\sigma_p^2 l d} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{64 F l^3 \sigma_p^3 d}{3\pi^4 E^2 v^4 m^2}} \right).$$

Проведем некоторые численные оценки, задав характерные параметры материала доски:  $E = 10^8$  Н/м<sup>2</sup> и  $\sigma_p = 5 \cdot 10^6$  Н/м<sup>2</sup>, взятые из экспериментальных измерений. Стандартные в тамэси-вари ширина и длина доски составляют 20 см и 30 см, однако в расчетах будем полагать  $l = 25$  см, поскольку края доски, выс-

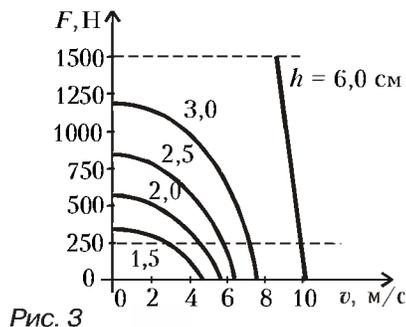


Рис. 3

тупающие за опоры, можно не учитывать. Массу кулака с учетом предплечья можно положить равной 1 кг. На рисунке 3 показана зависимость силы  $F$  от начальной скорости  $v$  при различных значениях толщины доски  $h$ . Если сила и скорость таковы, что соответствующая точка лежит выше кривой для заданного  $h$ , то доска ломается.

Теперь оценим толщину доски, которую может сломать человек. Примем реальную силу одной руки обычного человека равной  $F = 250$  Н. Как видно из рисунка, продавить такой силой (показана пунктиром) даже достаточно тонкую доску толщиной 1,5 см при начальной скорости  $v = 0$  обычному человеку невозможно. Для этого необходимо развить силу около 300 Н. Экспериментальное значение максимальной скорости удара кулаком оценивается как 10 м/с. Подставив в выражение для  $h$  значения  $v = 10$  м/с и  $F = 250$  Н, находим толщину доски:  $h = 6$  см. Эта величина достаточно большая и доступная, по-видимому, только для тренированных людей, обладающих высокой техникой удара и психологически подготовленных. Однако любопытный читатель может попытаться разбить доску толщиной 2 см, поскольку требуемые значения силы и скорости доступны для среднего человека. При этом важно следовать известному психологическому «секрету» каратэ – не сомневаться в себе.

**Приложение 1**

Определим напряжение на поверхности доски. Проведем (см. рис.2) симметричные сечения доски  $AB$  и  $A'B'$ , нормальные к линии  $CC$  и находящиеся на малом расстоянии  $l_0$  друг от друга вдоль этой линии. Рассмотрим элемент  $AA'B'B$ . Ввиду его малости, можно считать, что кривые  $AA'$ ,  $NN'$ ,  $BB'$  есть дуги окружностей с центрами, лежащими на так называемой оси изгиба  $O'$ , перпендикулярной к плоскости рисунка. Наружная поверх-

ность доски между точками  $A$  и  $A'$  при изгибе растянута, а внутренняя поверхность между точками  $B$  и  $B'$  – сжата. Длины кривых  $AA'$  и  $BB'$  в отсутствие изгиба одинаковы и равны длине  $l_0$  центральной кривой  $NN'$ , не меняющей своей длины при изгибе доски. Пусть  $R$  – радиус кривизны линии  $NN'$ , тогда  $l_0 = R\alpha$ , где  $\alpha$  – центральный угол, опирающийся на дугу  $NN'$ . Если доска не слишком толстая, т.е.  $h \ll R$ , длина кривой  $AA'$  будет  $l_1 = (R + h/2)\alpha$ , а ее удлинение из-за изгиба составит  $\Delta l = l_1 - l_0 = h\alpha/2$ . Следовательно, напряжение, действующее вдоль наружной поверхности доски, согласно закону Гука, есть

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{Eh}{2R}$$

**Приложение 2**

Найдем радиус кривизны поверхности доски в ее середине ( $y = 0$ ) при изгибе. Заметим, что если  $R$  есть радиус кривизны какой-либо кривой в данной точке, то проходящая через эту точку окружность радиусом  $R$ , центр которой лежит на нормали к кривой в этой точке, совпадает (по определению радиуса кривизны) с кривой в малой окрестности этой точки. Из формулы для  $x(y)$  при  $|\pi y/l| \ll 1$  имеем

$$x(y) = x_0 - \frac{x_0}{2} \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 y^2$$

(здесь использована известная приближенная формула  $\cos \gamma = 1 - \gamma^2/2$  для  $|\gamma| \ll 1$ ).

Искомая окружность радиусом  $R$  с центром в точке  $O'$  (см. рис.2), проходящая через точку с координатами  $(x_0, 0)$ , о которой говорилось также в Приложении 1, описывается уравнением

$$y^2 + (x - x_0 + R)^2 = R^2,$$

которое легко решить относительно смещения  $x(y)$ :

$$x(y) = x_0 - R + R \sqrt{1 - \left( \frac{y}{R} \right)^2}.$$

Пользуясь известной приближенной формулой  $\sqrt{1 - \gamma} \approx 1 - \gamma/2$  при  $|\gamma| \ll 1$ , находим при  $|y/R| \ll 1$

$$x(y) = x_0 - \frac{y^2}{2R}.$$

Сравнивая два выражения для  $x(y)$ , получаем значение для радиуса кривизны:

$$R = \left( \frac{l}{\pi} \right)^2 \frac{1}{x_0}.$$

**Приложение 3**

Определим зависимость величины отклонения  $x_0$  центра доски, лежащей на двух опорах, от величины приложенной к ней внешней силы  $F$ , распределенной вдоль центральных волокон и направленной вниз. Массой доски будем пренебрегать.

Вследствие предполагаемой симметрии, сила  $F$  распределится между опорами поровну. Рассечем мысленно доску на две части, проведя нормальное сечение через центр доски (см. рис.2), и рассмотрим условие равновесия левой половины доски. Справа на нее будет действовать внешняя сила  $F/2$ , сосредоточенная вблизи ее края и направленная вниз. Эта сила компенсируется силой реакции левой опоры. Сумма моментов обеих сил относительно центра доски будет, очевидно, определяться только моментом силы со стороны левой опоры:

$$M = \frac{Fl}{4}.$$

С другой стороны, этот момент уравновешивается моментом сил растяжения и сжатия, действующих в проведенном нормальном сечении на левую часть доски со стороны правой части. Значение этого момента сил можно получить из формулы для  $\sigma$ , модифицировав ее для вычисления напряжения в объеме доски вдоль оси  $Y$ . Как следует из вывода этой формулы (см. Приложение 1), для этого достаточно вместо отклонения  $h/2$  от линии  $NN'$ , соответствующего точке на внешней поверхности доски, ввести расстояние  $\delta$  от этой линии ( $-h/2 < \delta < h/2$ ). Тогда для напряжения в объеме доски получим

$$\sigma = \frac{E\delta}{R}.$$

Искомый момент упругих сил растяжения и сжатия относительно центра доски будет равен

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \delta \sigma d \cdot d\delta = \frac{E}{R} d \int_{-h/2}^{h/2} \delta^2 d\delta = \frac{Eh^3 d}{12R}.$$

Подставив сюда значения радиуса кривизны  $R$  и приравняв правые части двух выражений для  $M$ , находим связь между силой  $F$  и смещением  $x_0$ :

$$x_0 = \frac{3Fl^3}{\pi^2 Eh^3 d}.$$

Это равенство можно переписать в виде  $F = kx_0$ , откуда следует искомое выражение для коэффициента жесткости  $k$  эквивалентной пружины:

$$k = \frac{\pi^2 Eh^3 d}{3l^3}.$$

# Опыты Резерфорда

А. ВАСИЛЬЕВ

**А**ТОМИСТИЧЕСКИЕ представления о строении вещества принадлежат еще философам древности, в частности – Левкиппу и Демокриту, однако современная атомная физика возникла лишь около ста лет назад. Ярким представителем плеяды основоположников атомной (и ядерной) физики является создатель планетарной модели атома Эрнест Резерфорд (1871–1937).

Обучаясь в школьные и студенческие годы в Новой Зеландии, Резерфорд обнаружил блестящие способности к точным наукам и по окончании колледжа получил стипендию, позволявшую наиболее талантливым выпускникам провинциальных университетов проходить стажировку в одном из университетов Англии. Резерфорд выбрал Кембриджский университет, где работал знаменитый физик Дж. Дж. Томсон, в то время директор Кавендишской лаборатории. Вначале Резерфорд успешно занимался проблемой передачи радиосигналов на большие расстояния, однако вскоре Томсон убедил его посвятить себя новой области физики, возникшей после открытия в 1895 году рентгеновских лучей.

В 1896 году произошло еще одно знаменательное событие. Французский физик А. Беккерель, изучая способность люминесцирующих веществ излучать рентгеновские лучи, обнаружил новое загадочное излучение, создаваемое солями урана. Это сообщение заинтересовало ученых Кавендишской лаборатории, и Резерфорд занялся опытами по сравнению рентгеновских и «беккерелевых» (несколько позже их стали называть радиоактивными) лучей. В ходе этих исследований в 1899 году он обнаружил, что излучение урана не однородно, а содержит по крайней мере две составляющие. Резерфорд назвал их  $\alpha$ - и  $\beta$ -лучами и показал, что  $\alpha$ -лучи обладают гораздо большей ионизирующей способностью, чем  $\beta$ -лучи.

Природа  $\beta$ -излучения была выяснена довольно быстро – уже в 1900 году



Эрнест Резерфорд

было показано, что в электрическом и магнитном полях эти лучи ведут себя так же, как и пучки электронов. Природа  $\alpha$ -частиц пока не была известна, но Резерфорд уже тогда предугадал важность  $\alpha$ -частиц и затем многие годы посвятил их изучению.

Поставленные Резерфордом опыты свидетельствуют о его необычайном экспериментальном мастерстве и изобретательности. Для определения природы  $\alpha$ -частиц в 1903 году он сконст-

руировал прибор, схема которого приведена на рисунке 1. Электроскоп, сделанный из золотой фольги, помещался над двадцатью близко расположенными металлическими пластинками в эбонитовом ящике. Благодаря узким щелям между пластинками,  $\alpha$ -частицы, испускаемые радиевой солью, проходили в камеру электроскопа параллельным пучком. Через прибор пропусклся водород, который увлекал с собой накапливающийся в приборе радон и, тем самым, увеличивал длину свободного пробега  $\alpha$ -частиц. Заряженные частицы ионизировали находившийся в электроскопе газ, и листочки электроскопа отклонялись от вертикального положения.

Для определения знака заряда  $\alpha$ -частиц Резерфорд использовал эффект изменения направления движения заряженных частиц под действием магнитного поля. Щели между пластинками сверху прикрывались щитками, закрепленными с одной стороны. Прикладываемая магнитное поле параллельно плоскостям пластинок, можно было так отклонять  $\alpha$ -частицы, что они попадали либо на щитки, либо на стенки экрана. При этом ионизация воздуха в камере электроскопа прекращалась, и золотая фольга опускалась. Меняя направление магнитного поля, Резерфорд установил, в каком именно направлении отклоняются  $\alpha$ -частицы, и отсюда заключил, что знак заряда этих частиц положительный. Затем

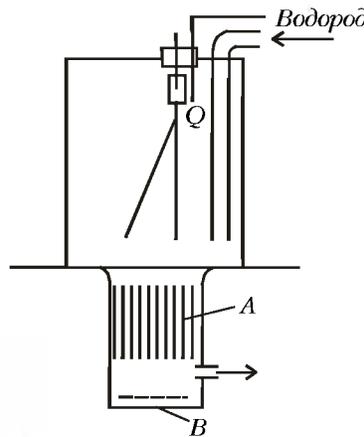


Рис. 1

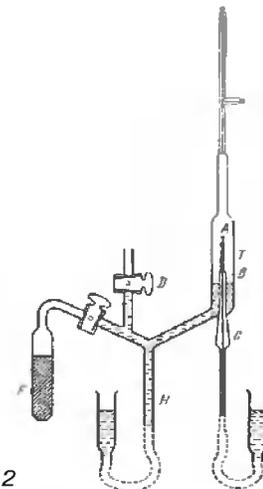


Рис. 2

О Резерфорде см. также 4-ю страницу обложки. (Прим. ред.)

Резерфорд подключил металлические пластинки к полюсам электрической батареи и по отклонению  $\alpha$ -частиц в электрическом поле установил отношение их заряда к массе. Все указывало на то, что  $\alpha$ -частицы являются, по-видимому, двукратно ионизованными атомами гелия.

Однако для полной идентификации  $\alpha$ -частиц в 1909 году Резерфорд поставил еще один тонкий эксперимент. Изображенный на рисунке 2 прибор для опыта был изготовлен высококачественным стеклодувом. Радиоактивный газ радон, испускавший  $\alpha$ -частицы, помещался в тонкостенную стеклянную трубку, вставленную, в свою очередь, в более широкую трубку, из которой был тщательно откачан воздух. Через несколько дней во внешней трубке обнаруживался газ, который образовывался благодаря проникновению  $\alpha$ -частиц через стенки внутренней трубки. Этот газ вытеснялся в малый отросток внешней трубки, через который пропускаться электрический разряд. При этом наблюдались характерные желтые линии спектра излучения гелия. В результате этого опыта Резерфорд окончательно удостоверился, что  $\alpha$ -частицы – это двукратно ионизованные атомы гелия.

В 1903 году Э. Резерфорд, совместно с английским физиком и химиком Ф. Содди, разработал теорию радиоактивного распада. Согласно этой теории, атомы тяжелых химических элементов могут самопроизвольно распадаться, и в этом процессе происходит превращение одних элементов в другие.

За проведенные им исследования распада радиоактивных элементов в 1908 году Резерфорд был удостоен Нобелевской премии по химии. По этому поводу он шутил, что имел дело со многими самыми различными превращениями, однако самым замечательным из них оказалось его собственное

превращение в один миг из физика в химика.

Наиболее значительным вкладом Резерфорда в науку стало создание им планетарной модели атома. Еще проводя опыты по отклонению  $\alpha$ -частиц магнитным полем, Резерфорд заметил, что если вакуум, в котором проводился эксперимент, был недостаточен, путь некоторых частиц слегка искривлялся. Для такого искривления требовалось сильное поперечное электрическое поле, и Резерфорд заключил, что атомы вещества должны быть средоточием больших электрических сил. Для проверки этой гипотезы Резерфорд поручил своему стажеру Э. Марсдену посчитать число  $\alpha$ -частиц, проходящих от излучателя к экрану через различные пластинки. Этот опыт заключался в том, что через тонкую щель пучок  $\alpha$ -частиц направлялся на экран из сернистого цинка, вспышки (сцинтилляции) на котором можно было наблюдать в микроскоп. При хорошем вакууме на экране наблюдалась лишь яркая полоска света, но когда на пути  $\alpha$ -частиц оказывалась тонкая пластинка какого-нибудь вещества,  $\alpha$ -частицы распределялись по большей площади экрана. В процессе этих измерений Марсден обнаружил крайне неожиданное явление: некоторые  $\alpha$ -частицы отклонялись от предполагаемого направления гораздо сильнее, чем это допускалось существовавшими тогда представлениями о строении атома.

Согласно модели атома Томсона, положительные и отрицательные заряды равномерно распределены внутри атомной сферы. Анализируя же результаты своих экспериментов, Резерфорд понял, что силы, способные отклонить  $\alpha$ -частицы на большой угол, могут возникать лишь в том случае, если положительный электрический заряд атома сконцентрирован в очень малом объеме и там же, в основном, сосредоточена его масса. Эту централь-

ную часть атома Резерфорд, используя биологическую терминологию, назвал ядром. Вокруг ядра на большом расстоянии от него по орбитам вращаются легкие электроны. Такая модель была подобна Солнцу с вращающимися вокруг него планетами, и поэтому Резерфорд назвал ее планетарной.

Допустив, что положительный заряд атома сконцентрирован в точке, Резерфорд показал, что частица, попадающая на близкое расстояние от него, описывает гиперболическую орбиту, причем угол отклонения частицы  $\Phi$  определяется равенством  $\text{ctg}(\Phi/2) = 2p/b$ , в котором  $p$  – прицельное расстояние, а буквой  $b$  обозначено выражение  $2NeE/(mv^2)$ , где  $Ne$  – центральный заряд,  $E$  – заряд  $\alpha$ -частицы,  $m$  и  $v$  – ее масса и скорость соответственно. Величина  $b$  представляет собой наименьшее расстояние, до которого  $\alpha$ -частица может проникнуть в глубь атома. По оценке Резерфорда, это расстояние порядка  $3,4 \cdot 10^{-12}$  см. Проведенная Г. Гейгером и Э. Марсденом проверка теории путем изучения рассеяния  $\alpha$ -частиц на атомах многих элементов (от углерода до платины) показала полное согласие с выводами Резерфорда.

Созданная Резерфордом теория и выведенная им формула выдержали испытание временем, подвергаясь в дальнейшем лишь проверкам и уточнениям. Из предложенной им модели атома стал ясен смысл периодического закона элементов, согласно которому они размещаются в таблице в соответствии с зарядом их ядер. В очень короткий срок, с 1911 по 1913 год, на основе опытов Резерфорда и теории квантов Планка были разработаны основы электронной оболочки атома и создана модель атома Бора. Так, опираясь на, казалось бы, простые опыты, формировалась обширная наука об атоме и атомном ядре, отцом которой по праву может быть назван Эрнест Резерфорд.

## «ФИЗИКИ ПРОДОЛЖАЮТ ШУТИТЬ»

...Резерфорд говорил, что все науки можно разделить на две группы – на физику и коллекционирование марок.

...Эрнест Резерфорд пользовался следующим критерием при выборе своих сотрудников. Когда к нему приходили в первый раз, Резерфорд давал задание. Если после этого новый сотрудник спрашивал, что делать дальше, его увольняли.

...Резерфорд демонстрировал слушателям распад радия. Экран то светился, то темнел.

– Теперь вы видите, – сказал Резерфорд, – что ничего не видно. А почему ничего не видно, вы сейчас увидите.

...Однажды вечером Резерфорд зашел в лабораторию. Хотя время было позднее, в лаборатории склонился над прибором один из его многочисленных учеников.

– Что вы делаете так поздно? – спросил Резерфорд.

– Работаю. – последовал ответ.

– А что вы делаете днем?

– Работаю, разумеется, – ответил ученик.

– И рано утром тоже работаете?

– Да, профессор, и утром работаю, – подтвердил ученик, рассчитывая на похвалу из уст знаменитого ученого.

Резерфорд помрачнел и раздраженно спросил:

– Послушайте, а когда же вы думаете?

## ПАМЯТИ НИКОЛАЯ БОРИСОВИЧА ВАСИЛЬЕВА



Николай Борисович Васильев  
1940 – 1998

28 мая этого года умер Николай Борисович Васильев, человек редкостного ума и огромного обаяния, интеллигент, превосходный математик, добрый и верный друг.

Математическое образование в России потеряло без преувеличения одного из самых ярких и выдающихся людей.

Еще студентом мехмата Николай Борисович руководил школьным математическим кружком при МГУ, входил в состав жюри и оргкомитета Московской, затем Всероссийской и Всесоюзной олимпиад.

Он был одним из организаторов ВЗМШ, до последних дней определял концепцию преподавания в этой знаменитой заочной школе. Им написано более десяти книг и брошюр, ставших классикой научно-популярной литературы.

Николай Борисович принял непосредственное участие в создании журнала

«Квант» и был бессменным членом его редколлегии. Он основал один из важнейших разделов нашего журнала – «Задачник «Кванта» – и руководил им до последнего дня своей жизни. Им придуманы многие десятки оригинальных, красивейших задач, написаны сотни решений и более тридцати статей – подлинных шедевров математического творчества. Трудно найти номер «Кванта», в котором не было бы его материалов, – «Квант» воистину был огромной частью жизни Николая Борисовича.

А в последние годы его усилиями был возрожден журнал «Математическое просвещение».

Трудно перечислить все, что сделано Николаем Борисовичем Васильевым на ниве математического образования. Многие нынешние математики могут низко поклониться ему – своему учителю и коллеге.

Но просвещение – только одна часть жизни Николая Борисовича. Он активно занимался наукой, им опубликовано более двадцати статей по различным разделам современной математики. С детства проявилась его музыкальная одаренность. В выборе между профессиональной математикой и музыкой победила математика. Однако музыка всегда оставалась с ним. И не только музыка – литература, живопись, архитектура входили в круг интересов этого энциклопедически образованного человека.

Пусть вечным памятником Николаю Борисовичу Васильеву будут его произведения – ценность их неподвластна времени.

*Главный редактор,  
редакционная коллегия,  
редакционный совет,  
редакция журнала «Квант»*

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 1999 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5 — 98» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1651» или «Ф1658». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1652 — М1660 предлагались на Всероссийской математической олимпиаде. Задачи Ф1658 — Ф1667, кроме Ф1663, предлагались на Соросовской физической олимпиаде.

## Задачи М1651 — М1660, Ф1658 — Ф1667

**М1651.** Найдите а) наименьшую, б) наибольшую возможную площадь выпуклой фигуры, все проекции которой на оси  $Ox$ ,  $Oy$  и прямую  $x = y$  суть отрезки единичной длины.

*В.Тиморин*

**М1652.** Внутри параболы  $y = x^2$  расположены окружности  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$  так, что каждая окружность  $\omega_{n+1}$  касается ветвей параболы и внешним образом — окружности  $\omega_n$  (рис.1). Найдите радиус окружности  $\omega_{1998}$ , если известно, что диаметр окружности  $\omega_1$  равен 1 и она касается параболы в ее вершине.

*М.Евдокимов*

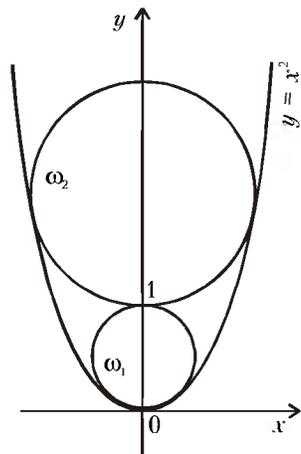


Рис.1

**М1653.** На столе лежат 5 часов со стрелками. Разрешается любые из них перевести вперед. Для каждых часов время, на которое при этом их перевели, назовем временем перевода. Требуется все часы установить так, чтобы они показывали одинаковое время. За какое наименьшее суммарное время перевода это можно гарантированно сделать?

*О.Подлицкий*

**М1654.** Через основания  $L$  и  $M$  биссектрисы  $BL$  и медианы  $BM$  неравнобедренного треугольника  $ABC$  провели прямые параллельно, соответственно, сторонам  $BC$  и  $BA$  до пересечения с прямыми  $BM$  и  $BL$  в точках  $D$  и  $E$ . Докажите, что угол  $BDE$  прямой.

*М.Сонкин*

**М1655.** Существуют ли 1998 различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых делится нацело на квадрат их разности?

*Г.Гальперин*

**М1656.** Даны два выпуклых многоугольника. Известно, что расстояние между любыми двумя вершинами первого не больше 1, расстояние между любыми двумя вершинами второго также не больше 1, а расстояние между любыми двумя вершинами разных многоугольников больше чем  $1/\sqrt{2}$ . Докажите, что многоугольники не пересекаются.

*В.Дольников*

**М1657.** Назовем *лабиринтом* шахматную доску  $8 \times 8$ , на которой между некоторыми полями поставлены перегородки. По команде ВПРАВО ладья смещается на одно поле вправо или, если справа находится край доски или перегородка, остается на месте; аналогично выполняются команды ВЛЕВО, ВВЕРХ и ВНИЗ. Марья Ивановна пишет программу — конечную последовательность указанных команд — и дает ее Вовочке, после чего Вовочка выбирает лабиринт и помещает ладью на любое поле. Верно ли, что Марья Ивановна может

программу, что ладья обойдет все доступные поля в лабиринте при любом выборе Вовочки?

*В.Уфнаровский, А.Шатовалов*

**M1658.** Обозначим  $S(x)$  сумму цифр числа  $x$ . Существуют ли такие натуральные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$ , что  $S(a + b) < 5$ ,  $S(a + c) < 5$  и  $S(b + c) < 5$ , но  $S(a + b + c) > 50$ ?

*С.Волченков, Л.Медников*

**M1659\*.** Фигура  $\Phi$ , составленная из клеток  $1 \times 1$ , обладает следующим свойством: при любом заполнении клеток прямоугольника  $m \times n$  числами, сумма которых положительна, фигуру  $\Phi$  можно так расположить в прямоугольнике, чтобы сумма чисел в клетках прямоугольника под фигурой  $\Phi$  была положительна (фигуру  $\Phi$  можно поворачивать). Докажите, что данный прямоугольник может быть покрыт фигурой  $\Phi$  в несколько слоев.

*А.Белов*

**M1660\*.** В стране 1998 городов. Из каждого осуществляются беспосадочные авиарейсы в три других города (все рейсы двусторонние). Известно, что из любого города, сделав несколько пересадок, можно долететь до любого другого. Министерство Безопасности хочет объявить закрытыми 200 городов, никакие два из которых не соединены авиалинией. Докажите, что это можно сделать так, чтобы можно было долететь из любого незакрытого города в любой другой, не делая пересадок в закрытых городах.

*Д.Карпов, Р.Карасев*

**Ф1658.** Из четырех одинаковых тонких стержней длиной  $L$  каждый сделали ромб, скрепив их концы шарнирно (рис.2). Шарнир  $A$  закреплен, противоположный шарнир  $B$  двигают вдоль диагонали ромба с постоянным ускорением  $a$ . Вначале упомянутые противоположные вершины находятся близко друг к другу, а скорость точки  $B$  равна нулю. Какое ускорение будет иметь шарнир  $V$  в тот момент, когда стержни  $AB$  и  $VB$  составят угол  $2\alpha$ ? Считайте движение всех точек плоским.

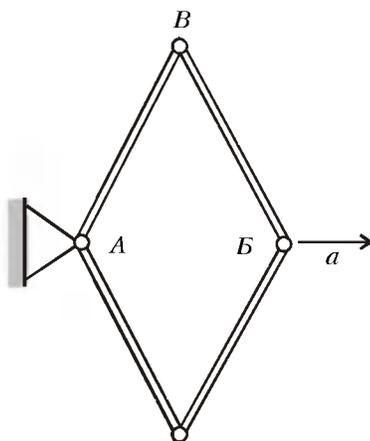


Рис.2

*З.Рафаилов*

**Ф1659.** Тележка массой  $m$  движется по горизонтально расположенным рельсам со скоростью  $v$  (рис.3). Рельсы дальше идут вниз и плавно переходят в новый горизонтальный участок, находящийся на  $H$  ниже. Тележка наезжает на неподвижный вагон массой  $M$ , стоящий на нижнем горизонтальном участке, и между тележкой и вагоном происходит абсолютно упругий удар. При какой начальной скорости  $v$  тележка

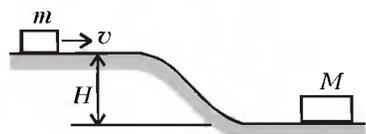


Рис.3

после удара вновь сможет подняться на верхний горизонтальный участок? Трение отсутствует.

*А.Зильберман*

**Ф1660.** На гладкий горизонтально расположенный стержень надеты две одинаковые шайбы массой  $M$  каждая, связанные легкой нерастяжимой нитью длиной  $2L$  (рис.4). К середине нити привязан груз массой  $2M$ , который вначале удерживают так, что нить не натянута, но практически не провисает. Груз отпускают, и система приходит в движение без рывка. Найдите максимальные значения скоростей шайб и груза в процессе движения. Ускорение свободного падения  $g$ .

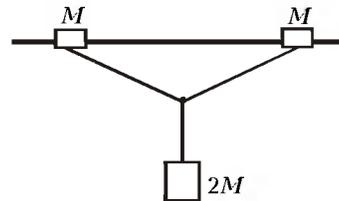


Рис.4

*А.Зильберман*

**Ф1661.** На гладком горизонтальном столе находятся три одинаковые тележки, масса каждой тележки  $M$  (рис.5). Средняя тележка связана с одной из крайних легкой нитью, а с другой – легкой пружинкой жесткостью  $k$ . Вначале систему удерживают так, что пружинка не деформирована, а нить не натянута, но практически не провисает. Толчком придадим «подпружиненной» крайней тележке скорость  $v$  вдоль прямой, соединяющей тележки, в направлении от средней.

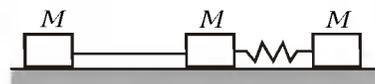


Рис.5

Толчком придадим «подпружиненной» крайней тележке скорость  $v$  вдоль прямой, соединяющей тележки, в направлении от средней.

При какой длине нити удар тележек, которые были связаны этой нитью, получится громче всего? Тележки все время двигаются вдоль прямой, пружинка при деформациях подчиняется закону Гука.

*Р.Александров*

**Ф1662.** В вертикальном теплоизолированном сосуде под тяжелым поршнем находится порция азота. На поршне сверху лежит грудка песка, система находится в равновесии, начальный объем газа  $V_1$ , начальное давление  $p_1$ . Начнем медленно, по одной песчинке, убирать песок и уменьшим давление до  $p_2$ ; при этом объем газа увеличится до  $V_2$  (конечно, можно было этот объем вычислить, но будем считать, что это уже сделали и вам сообщили результат). Теперь проведем эксперимент иначе – снимем всю порцию песка сразу. Какую кинетическую энергию имел бы в этом случае поршень в тот момент, когда объем газа составил бы  $V_2$ ? Считайте газ достаточно разреженным.

*М.Учителев*

**Ф1663.** На закрепленную тонкостенную непроводящую сферу радиусом  $R$  нанесен распределенный равномерно по поверхности заряд  $Q$ . В стенке сделано маленькое круглое отверстие площадью  $S$ . В центре сферы вначале удерживают очень маленькое по размерам массивное тело, на которое помещен заряд  $q$  того же знака, что и заряд сферы. Тело отпускают, и оно начинает двигаться под действием только электростатических сил (сила тяжести отсутствует). Объясните, почему тело будет двигаться в сторону дырки. Найдите кинетическую энергию тела, когда оно окажется в центре дырки. Точно вычис-

лить эту энергию трудно – постарайтесь найти не слишком грубое приближение.

*А.Зильберман*

**Ф1664.** В цепи, изображенной на рисунке 6, все резисторы имеют одно и то же сопротивление. Во сколько раз изменится сопротивление цепи, измеряемое между точками А и В, если замкнуть проводником точки В и Г?

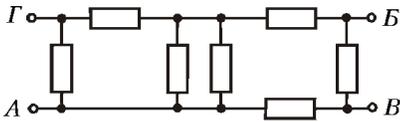


Рис.6

*А.Простов*

**Ф1665.** К батарейке напряжением 10 В подключена схема, содержащая очень большое число одинаковых ячеек. Каждая ячейка состоит из трех одинаковых вольтметров, как показано на рисунке 7. Найдите показания вольтметров в первой ячейке. Что показывают вольтметры в ячейке номер пять?

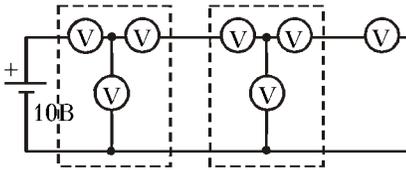


Рис.7

*Р.Повторов*

**Ф1666.** Конденсатор емкостью 1 мкФ заряжен до напряжения 4 В и подключен «минусом» к «плюсу» конденсатора емкостью 2 мкФ, заряженного до напряжения 6 В (рис.8). Параллельно конденсатору большей емкости подключают резистор сопротивлением 3 кОм, а к свободным выводам конденсаторов одновременно подключают резистор сопротивлением 10 кОм. Какое количество теплоты выделится в каждом из резисторов за большой интервал времени?

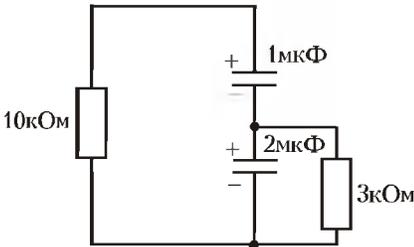


Рис.8

*З.Рафаилов*

**Ф1667.** К сети переменного напряжения частоты 50 Гц подключены последовательно конденсатор емкостью 10 мкФ и амперметр переменного тока. Последовательно с ними включают катушку. При какой индуктивности катушки показания амперметра увеличатся в два раза? При какой индуктивности показания уменьшатся в два раза? Как изменятся токи, если катушки с вычисленными вами параметрами подсоединять не последовательно, а параллельно конденсатору? Элементы цепи считать идеальными.

*М.Учителев*

**Решения задач М1631—М1635, Ф1643—Ф1652**

**М1631.** Верны ли утверждения:

- а) если многоугольник можно разбить ломаной на два равных многоугольника, то его можно разбить на два равных многоугольника отрезком;
- б) если выпуклый многоугольник можно разбить ломаной на два равных многоугольника, то его можно разбить на два равных многоугольника отрезком;

ной на два равных многоугольника, то его можно разбить на два равных многоугольника отрезком; в) если выпуклый многоугольник можно разбить ломаной на два многоугольника, один из которых можно перевести в другой движением, сохраняющим ориентацию (т.е. поворотом или параллельным переносом), то исходный многоугольник можно разбить отрезком на два равных многоугольника, один из которых переводится в другой тем же самым движением?

а) Параллельный перенос переводит левую половину фигуры рисунка 1 в правую, но отрезком, как легко проверить, эту фигуру на две равные части разрезать нельзя. Есть и другие примеры (рис.2–4).



Рис.2

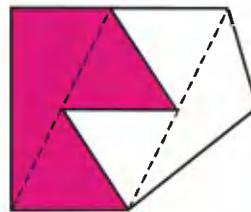


Рис.3

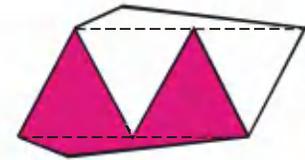


Рис.4

Поскольку многоугольники рисунков 3 и 4 выпуклые, ответ на вопрос пункта б) тоже отрицательный. (Рисунок 3 является частным случаем рисунка 4, в котором к четырем правильным треугольникам добавляются прямоугольные треугольники с углами 30° и 60°.)

Доказательство невозможности разрезания отрезком шестиугольника рисунка 4 на два равных многоугольника не сложно, но требует тщательного разбора нескольких случаев (при этом полезно наложить на длины сторон и величины углов некоторые дополнительные условия). Гораздо проще доказать то же самое для пятиугольника рисунка 3. Дело в том, что если многоугольник с нечетным числом вершин разрезан отрезком на два равных многоугольника, то одним из концов отрезка должна быть вершина многоугольника. Дальнейшее очевидно.

в) Пусть выпуклый многоугольник разбит ломаной  $A_1A_2...A_n$  на два равных многоугольника, один из которых переводится в другой поворотом или параллельным переносом. Рассмотрим два соседних звена ломаной:  $A_{i-1}A_i$  и  $A_iA_{i+1}$ . Докажем, что ломаную можно «выпрямить».

Если точка  $A_i$  лежит на отрезке  $A_{i-1}A_{i+1}$ , то ее можно «выбросить», заменив звенья  $A_{i-1}A_i$  и  $A_iA_{i+1}$  на  $A_{i-1}A_{i+1}$ . Если же  $A_i$  не принадлежит отрезку  $A_{i-1}A_{i+1}$ , то тот из двух углов, образованных лучами  $A_iA_{i-1}$  и  $A_iA_{i+1}$ , величина которого больше 180°, при движении переходит в равный ему угол  $A_{j+1}A_jA_{j-1}$ . В случае  $|i - j| > 1$  (рис.5) звенья  $A_{i-1}A_i$ ,  $A_iA_{i+1}$  и  $A_{j-1}A_j$ ,  $A_jA_{j+1}$  можно заменить на  $A_{i-1}A_{i+1}$  и  $A_{j-1}A_{j+1}$ .

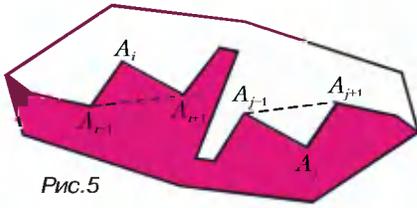


Рис.5

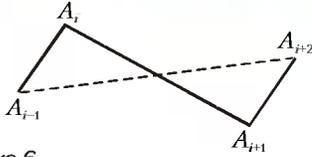


Рис.6

В случае  $j = i + 1$  (рис.6) заменяем ломаную  $A_{i-1}A_iA_{i+1}A_{i+2}$  на  $A_{i-1}A_{i+2}$ . Случай  $j = i - 1$  рассматривается аналогично.

С.Маркелов

**M1632.**<sup>1</sup> Некоторые грани кубика белые, а некоторые черные. Площадь его грани равна площади клетки шахматной доски. Кубик поставили на одну из клеток и прокатили по доске так, что он побывал на каждой клетке ровно по одному разу.

Могло ли случиться, что все время цвета клетки и соприкасающейся с ней грани совпадали?

Нет, не могло. Допустим, что существуют такая раскраска кубика и такой способ перекачивания, о которых идет речь в условии. Соединим синим цветом центры клеток

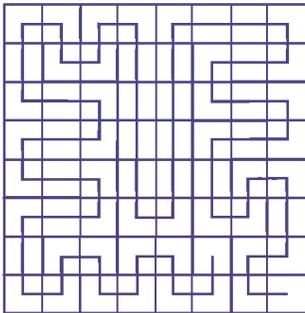


Рис.1

доски в соответствии с тем, как перекачивался кубик. Получим ломаную длиной 63 единичных отрезка (рис. 1).

Рассмотрим все общие стороны соседних клеток шахматной доски (112 отрезков). Те из них, через которые кубик не перекачивался, закрасим красным цветом. Задумаемся о свойствах образовавшейся фигуры из красных отрезков.

Поскольку кубик побывал на всех клетках доски, красная фигура не разделяет доску на части. Значит, она не содержит циклов, т.е. является объединением нескольких деревьев.

Рассмотрим одно из этих деревьев. Всякое дерево, как известно, имеет хотя бы два листа (лист – это вершина, из которой выходит только один отрезок). Если бы два листа рассматриваемого дерева принадлежали границе доски, то красные отрезки делили бы доску на части. Значит, существует лист  $A$ , не лежащий на границе доски. Кубик обязан перекатиться через все три некрайних отрезка, которые выходят из точки  $A$ . Это значит, что кубик должен «обойти» точку  $A$ ,

Рис.2

<sup>1</sup> Автор задачи – А.Шаповалов.

как показано на рисунке 2. При этом обходе с клетками, граничащими по выходящему из точки  $A$  красному отрезку, соприкасается одна и та же грань кубика. Значит, эти клетки должны быть одного цвета, что противоречит шахматной раскраске.

А.Шаповалов, А.Спивак

**M1633.** В треугольнике  $ABC$  отрезки  $CM$  и  $BN$  – медианы,  $P$  и  $Q$  – точки соответственно на  $AB$  и  $AC$  такие, что биссектриса угла  $C$  треугольника одновременно является биссектрисой угла  $MCP$ , а биссектриса угла  $B$  – биссектрисой угла  $NBQ$ . Можно ли утверждать, что треугольник  $ABC$  равнобедренный, если а)  $BP = CQ$ ; б)  $AP = AQ$ ; в)  $PQ \parallel BC$ ?

Отрезки  $BQ$  и  $CP$  называются симедианами.

**Теорема.** Пусть  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $AS$  – симедиана. Тогда  $\frac{BS}{SC} = \frac{c^2}{b^2}$ .

**Доказательство.** Пусть  $AM$  – медиана; обозначим  $\alpha = \angle BAS = \angle CAM$ ,  $\angle MAS = \beta$  (рис.1). Имеем:  $\frac{BS}{SC} = \frac{S_{ABS}}{S_{ASC}} = \frac{c \sin \alpha}{b \sin(\alpha + \beta)}$ ,  $1 = \frac{S_{ABM}}{S_{AMC}} = \frac{c \sin(\alpha + \beta)}{b \sin \alpha}$ .

Значит,  $\frac{BS}{SC} = \frac{c^2}{b^2}$ .

а) Да. Перепишем равенство  $BP = CQ$ , пользуясь теоремой:  $b^3 + ba^2 = c^3 + ca^2$ . Поскольку  $f(x) = x^3 + xa^2$  – монотонная функция, получаем, что  $b = c$ .

К этому равенству можно прийти и так:  $b^3 - c^3 = a^2(c - b)$ ; значит, при  $b \neq c$  будет  $b^2 + bc + c^2 = -a^2$ ; но  $b^2 + bc + c^2 \geq 0$ .

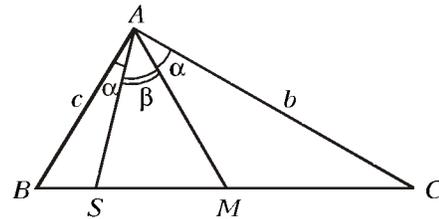


Рис.1

в) Да.  $\frac{AQ}{QC} = \frac{AP}{PB}$ , т.е.  $\frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$ .

б) Нет.  $AP = c \cdot \frac{b^2}{b^2 + a^2}$ ,  $AQ = b \cdot \frac{c^2}{c^2 + a^2}$ . Перепишем  $AP = AQ$ :  $bc(b - c) = a^2(b - c)$ . Значит, в неравнобедренном треугольнике таком, что  $a^2 = bc$ , имеем  $AP = AQ$ . **Замечания**

1. Если  $A$  – наибольший или наименьший угол треугольника,  $AP = AQ$ , то треугольник равнобедренный.

2. Неравнобедренный треугольник такой, что  $AP = AQ$ , – это треугольник со сторонами вида  $d, dq, dq^2$ , где  $q \neq 1$ .

3. Пункт б) (именно он предлагался на Турнире городов) можно решить и без помощи теоремы, пользуясь лишь соображениями непрерывности. Это можно сделать по такой, например, схеме.

Пусть для треугольника  $ABC$  будет  $AP > AQ$ , а для треугольника  $A'B'C'$  пусть будет  $A'P' < A'Q'$ . «Перетянем»  $A$  в  $A'$ ,  $B$  в  $B'$ ,  $C$  в  $C'$ ; по дороге нам встретится

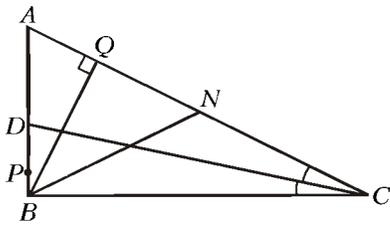


Рис.2

треугольник  $A''B''C''$  такой, что  $A''P'' = A''Q''$ . Если возникающие при этом «перетягивании» треугольники не являются равнобедренными, то задача решена.

Приведем пример реализации этой схемы. Рассмотрим треугольник рисунка 2:  $AB = 1$ ,  $\angle A = \frac{\pi}{3}$ ,  $\angle B = \frac{\pi}{2}$ ;  $CD$

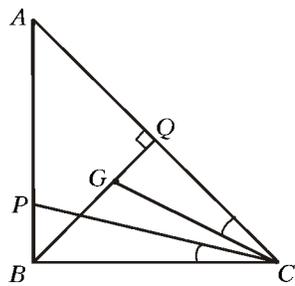


Рис.3

– биссектриса. Так как  $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$ , то  $AD > \frac{1}{2}$ ; следовательно,  $AP > \frac{1}{2}$ . Далее,  $\angle ABQ = \angle NBC = \frac{\pi}{6}$ ; значит,  $AQ = \frac{1}{2}$ .

Рассмотрим теперь треугольник рисунка 3:  $\angle A = \frac{\pi}{4}$ ,

$\angle B = \frac{\pi}{2}$ ,  $BC = 1$ . Имеем:  $AQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; обозначив через  $G$  точку пересечения медиан, из подобия треугольников

$CQG$  и  $CBP$  получаем  $\frac{BP}{BC} = \frac{GQ}{QC} = \frac{GQ}{BQ} = \frac{1}{3}$ . Окончатель-

но:  $AP = 1 - BP = \frac{2}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2} = AQ$ .

В.Сендеров

**M1634.** а) На плоскость положили (с перекрытиями) несколько одинаковых салфеток, имеющих форму правильного шестиугольника, причем все салфетки получены одна из другой параллельными переносами. Всегда ли можно вбить в стол несколько гвоздей так, что все салфетки будут прибиты, причем каждая – только одним гвоздем?

б) Тот же вопрос про правильные 5-угольники.

а) Рассмотрим паркет из шестиугольников, равных нашим салфеткам и так же ориентированных. Поскольку салфеток конечное число, можно так сдвинуть этот паркет параллельно самому себе, что ни один центр шестиугольника паркета не будет лежать на краю салфетки. Вобьем гвозди в центры всех шестиугольников паркета. Каждая салфетка будет прибита, притом только одним гвоздем, как и требуется в задаче.

*Замечание.* Утверждение о том, что паркет можно сдвинуть так, чтобы ни один центр шестиугольника паркета не оказался на краю салфетки, вполне очевидно. Тем не менее, для любителей строгости докажем его. Рассмотрим все центры салфеток, которые не лежат на краях шестиугольников паркета. Обозначим их множество через  $M$ , а их число – через  $n$ .

Если  $M$  содержит не все центры салфеток, то найдется

центр  $A$  салфетки, лежащий на краю. Рассмотрим такое число  $\delta$ , что расстояние от любой точки множества  $M$  до границ шестиугольников паркета больше  $\delta$ . (Такое  $\delta$  найдется, поскольку множество  $M$  конечно.) Сдвинем паркет параллельно самому себе на расстояние меньше  $\delta$  в таком направлении, чтобы точка  $A$  не лежала на границах сдвинутых шестиугольников. Все точки множества  $M$  по-прежнему не лежат на границах шестиугольников паркета, но теперь к ним присоединилась точка  $A$ . Так, точку за точкой, мы можем все центры салфеток включить в  $M$ , сдвигая паркет.

б) Нет, на плоскости можно так расположить конечное число салфеток, что всякая система гвоздей либо пробивает какую-нибудь салфетку дважды, либо какую-нибудь не пробивает вовсе (здесь и далее рассматриваются лишь такие салфетки и способы их укладки, о которых говорится в условии задачи, т.е. равные и одинаково ориентированные правильные пятиугольники).

Для определенности, пусть радиус описанной вокруг салфетки окружности равен 1. Поместим центры салфеток в точки с координатами вида  $(a \cdot 10^{-n}, b \cdot 10^{-n})$ , где  $a$  и  $b$  – любые целые числа (в дальнейшем станет ясно, что нам потребуется не все бесконечное множество пар  $a, b$ , а лишь конечная его часть),  $n$  – некоторое достаточно большое натуральное число.

Предположим, что гвозди вбиты так, что каждая салфетка прибита в точности одним гвоздем. Заметим, что расстояние от вершины пятиугольника до противоположной стороны есть  $1 + \cos 36^\circ$  (рис. 1). Нетрудно убедиться, что любые две точки плоскости, расстояние между которыми не превосходит  $1 + \cos 36^\circ$ , можно покрыть параллельным сдвигом пятиугольника со стороной 1.

Предположим, что расстояние между некоторыми двумя гвоздями меньше чем  $1 + \cos 36^\circ$ . Эти гвозди лежат в некотором правильном пятиугольнике, стороны которого параллельны сторонам салфетки, а их длины меньше длины стороны салфетки. При достаточно большом  $n$  этот пятиугольник будет целиком покрыт некоторой салфеткой. Она окажется прибита двумя гвоздями.

Следовательно, при достаточно больших  $n$  расстояние между любыми двумя гвоздями не меньше  $1 + \cos 36^\circ$ . Рассмотрим некоторый гвоздь  $A$  и круг радиусом  $1 + \cos 36^\circ$  с центром  $A$ . При достаточно большом  $n$  найдутся две салфетки, не прибитые гвоздем  $A$ , у которых только маленькие уголки высовываются за пределы круга, причем эти уголки не пересекаются друг с другом (рис. 2). В эти уголки должно быть вбито по гвоздю. Расстояние между

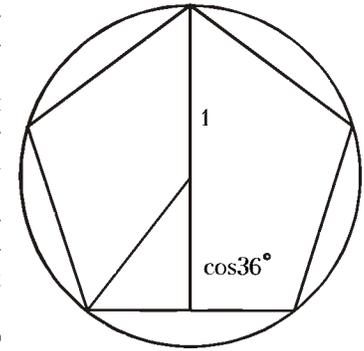


Рис.1

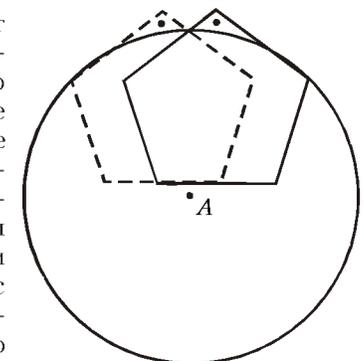


Рис.2

этими гвоздями оказывается заведомо меньше чем  $1 + \cos 36^\circ$ .

*А. Канель, А. Сивак*

**M1635<sup>2</sup>.** Каждая сторона правильного треугольника разбита на  $n$  равных отрезков, и через все точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. Данный треугольник разбился на  $n^2$  маленьких треугольничков-клеток. Треугольники, расположенные между двумя соседними параллельными прямыми, образуют полосу.

- а) Какое наибольшее число клеток можно отметить, чтобы никакие две отмеченные клетки не принадлежали ни одной полоске ни одного из трех направлений, если  $n = 10$ ?
- б) Тот же вопрос для  $n = 9$ .

Когда жюри Турнира городов предлагало эту задачу школьникам, решение для произвольного  $n$  не было известно. Знали только, что максимальное возможное число отмеченных треугольничков есть 7 при  $n = 10$  и 6 при  $n = 9$ . Однако участники турнира нашли общее решение.

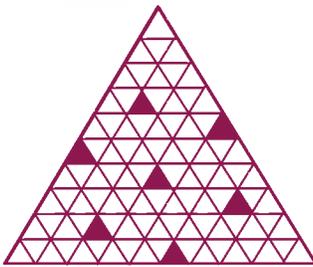


Рис. 1

исходный треугольник средними линиями на четыре треугольника. Каждый из них состоит из 25 треугольничков. Обозначим количества отмеченных треугольничков в угловых треугольниках буквами  $k, l, m$ , а в центральном —  $n$ . Тогда  $k + l + n \leq 5$ , поскольку два угловых треугольника вместе с центральным состоят из 5 полос. Аналогично,  $l + m + n \leq 5$  и  $m + k + n \leq 5$ .

Сложим эти три неравенства:  $2k + 2l + 2m + 3n \leq 15$ . Следовательно,

$$k + l + m + n \leq \frac{1}{2}(2k + 2l + 2m + 3n) \leq \frac{15}{2} < 8.$$

б) Решим задачу для произвольного  $n$ . Рассмотрим одну из сторон исходного треугольника и пронумеруем полоски соответствующего направления следующим образом: полоска, прилегающая к стороне, пусть будет иметь номер 1; следующая за ней — номер 2; ...; полоска, состоящая из одного треугольничка, примыкающего к вершине исходного большого треугольника, получит номер  $n$ .

Теперь положение любого из  $n^2$  треугольничков можно задать тройкой чисел — номеров полосок, в которых он лежит. (Эти тройки номеров являются дискретным аналогом бариецентрических координат, при которых положение любой точки, лежащей внутри правильного треугольника, определяется расстояниями до трех его сторон. Сумма этих расстояний, как легко проверить, равна высоте треугольника.)

Введенные нами тройки номеров — «координаты» треугольничков — не могут принимать произвольные значе-

ния. Их сумма равна  $n + 2$ , если треугольничек расположен «острием вверх» (т.е. ориентирован так же, как исходный большой треугольник), и равна  $n + 1$ , если «острием вниз».

Предположим, отмечены  $k$  треугольничков, никакие два из которых не попали в одну полоску. Оценим сумму  $S$  всех их координат двумя способами. С одной стороны, сумма координат любого треугольника не превышает  $n + 2$ , поэтому  $S \leq k(n + 2)$ . С другой стороны, сумма значений одной из координат по всем отмеченным треугольничкам не меньше чем  $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k + 1)}{2}$ . Значит,

$$3 \frac{k(k + 1)}{2} \leq S \leq k(n + 2),$$

откуда  $3 \frac{k + 1}{2} \leq n + 2$ , т.е.  $k + 1 \leq \frac{2n + 4}{3}$ . Итак,  $k \leq \frac{2n + 1}{3} \dots$

Отметить  $[(2n + 1)/3]$  треугольничков можно следующим образом. Рассмотрим число  $m = [(n + 1)/3]$ . На основании исходного треугольника отметим  $(m + 1)$ -й слева треугольничек, расположенный острием вверх. В этой же вертикали отметим и все остальные треугольнички, ориентированные острием вверх (рис.2). Всего в этой вертикали отмечено  $m + 1$  треугольничков. На второй горизонтальной полосе большого треугольника отметим  $(2m + 1)$ -й (считая слева) треугольничек, расположенный острием вверх. Отметим и все остальные треугольнички этой вертикали, ориентированные острием вверх. Всего в этой вертикали будет отмечено  $n - 1 - 2m$  треугольничков.

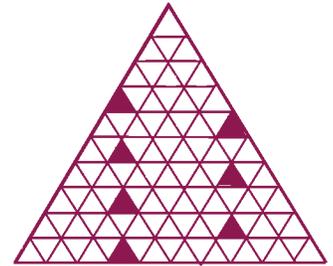


Рис. 2

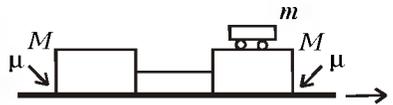
Общее количество отмеченных треугольничков есть

$$m + 1 + n - 1 - 2m = n - m = n - \left[ \frac{n + 1}{3} \right] = \left[ \frac{2n + 1}{3} \right].$$

(Чтобы проверить последнее равенство, достаточно рассмотреть три случая:  $n$  равно  $3a, 3a + 1$  и  $3a + 2$ .)

*Р. Женодаров*

**Ф1643.** На горизонтальной подставке с коэффициентом трения  $\mu$  находятся два одинаковых больших бруска массой  $M$  каждый, связанные легкой нерастяжимой натянутой нитью (см. рисунок). На гладкой верхней грани первого бруска находится небольшой гладкий грузик массой  $m$ . Подставку двигают в горизонтальном направлении с большой скоростью, направленной параллельно нити в сторону первого бруска (того, что с грузиком). Найдите силу натяжения нити, связывающей движущиеся тела, пока грузик не свалится.



<sup>2</sup> Автор этой задачи — Р.Женодаров, а не А.Шаповалов, как было указано в «Кванте» №2.

Брусок с грузиком давит на подставку с силой  $N_1 = (M + m)g$ , второй брусок давит с силой  $N_2 = Mg$ . Из условия задачи ясно, что проскальзывание есть – подставку двигают очень быстро, бруски за время решения задачи не смогут набрать такой скорости (или грузик успеет упасть). Во всяком случае, будем считать, что сила трения, которая действует со стороны подставки на «тяжелый» брусок в сторону движения подставки, равна  $F_1 = \mu N_1$ , на «легкий» брусок действует в ту же сторону сила трения  $F_2 = \mu N_2$ , при этом грузик по горизонтали не ускоряется и без нити «тяжелый» брусок двигался бы с большим ускорением. Это означает, что нить остается натянутой, а ускорения брусков одинаковы. Для определения силы натяжения нити  $T$  запишем уравнения движения брусков:

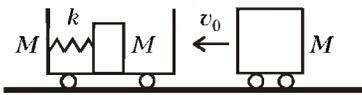
$$\begin{aligned} F_1 - T &= Ma, \\ F_2 + T &= Ma, \end{aligned}$$

откуда, подставив соответствующие значения для  $F_1$  и  $F_2$ , найдем

$$T = \frac{\mu mg}{2}.$$

М.Учительев

**Ф1644.** На гладком горизонтальном столе покоится тележка массой  $M$  (см. рисунок). По дну тележки может скользить без трения груз такой же массы, прикрепленный к боковой стенке горизонтальной легкой



пружинкой жесткостью  $k$ . Кубик массой  $M$  наезжает на тележку со скоростью  $v_0$  и мгновенно прилипает к ней. Чему равна

разность между максимальной и минимальной длинами пружинки при движении?

При ударе двух тел, описанном в условии задачи, часть кинетической энергии переходит в тепло, поэтому тут нельзя непосредственно использовать закон сохранения механической энергии. Но можно поступить иначе – вначале рассчитать удар со «слипанием», а уже потом вести расчет энергий.

Итак, после того как закончился кратковременный удар (учтем, что груз на пружинке за это короткое время не успел сместиться и набрать скорость), скорости тел можно найти из закона сохранения импульса:  $v = v_0/2$ , так что кинетическая энергия системы будет равна  $2Mv^2/2 = Mv_0^2/4$ . В моменты максимального и минимального растяжений пружинки скорость груза равна скорости тележки с прилипшим к ней кубиком, т.е. составляет  $v_0/3$  (опять используем закон сохранения импульса), при этом кинетическая энергия системы равна  $3M(v_0/3)^2/2 = Mv_0^2/6$ . Энергия пружинки равна разности этих кинетических энергий, т.е.

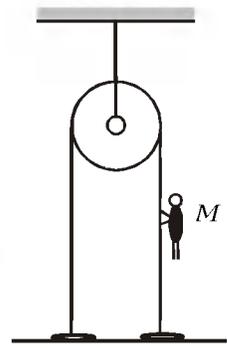
$$\frac{kx^2}{2} = \frac{Mv_0^2}{12}.$$

Отсюда можем найти разность между максимальной и минимальной длинами пружинки при движении:

$$L = 2x = v_0 \sqrt{\frac{2M}{3k}}.$$

А.Кубиков

**Ф1645.** Через легкий блок, закрепленный на большой высоте  $H$  над горизонтальной поверхностью земли, переброшена гибкая веревка (см. рисунок). Концы веревки сложены внизу двумя бухтами, которые не препятствуют движению. С одной стороны за веревку ухватился человек массой  $M$ , который быстро перебирает руками, стараясь висеть на одной высоте над землей. При некоторой установившейся скорости движения веревки это ему удается. Найдите эту скорость. Масса одного метра веревки  $\rho$ , ускорение свободного падения  $g$ . Трение в блоке отсутствует.



Веревка с двух сторон блока уравновешена, «избыточная» сила определяется весом человека и равна  $Mg$ . В установившемся режиме эта сила «вытягивает» веревку из бухты с противоположной стороны блока, сообщая импульс вытянутому куску. Пусть скорость установившегося движения  $u$ , тогда за время  $\tau$  длина веревки, вступившей в движение, составит  $u\tau$ , масса этой веревки  $\rho u\tau$ , а изменение импульса  $\rho u^2\tau$ . Приравняем это изменение импульса к произведению «избыточной» силы на время ее действия:

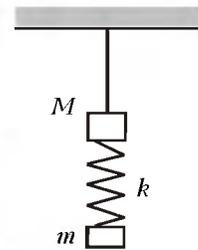
$$\rho u^2\tau = Mg\tau.$$

Тогда искомая скорость будет

$$u = \sqrt{\frac{Mg}{\rho}}.$$

З.Рафаилов

**Ф1646.** На легкой нити к потолку подвешен груз массой  $M$ , к нему на очень легкой пружинке жесткостью  $k$  прикреплен груз массой  $m$  (см. рисунок). Система вначале неподвижна. Нить пережигают, и грузы начинают падать в однородном поле тяжести. Чему равна разность между максимальным и минимальным значениями длины пружинки? Через какое время после пережигания нити натяжение пружинки в первый раз станет нулевым? Считайте, что за время, необходимое для решения задачи, грузы еще не упадут на пол.



После пережигания нити система начинает падать, и ускорение ее центра масс равно  $g$ . Движение грузов относительно друг друга связано только с силой упругости пружинки. Это позволяет поместить два груза, связанные пружинкой, на гладкую горизонтальную поверхность, растянуть пружинку на  $x = mg/k$  и предоставить самой себе. Ясно, что система будет колебаться.

Очень легко ответить на первый вопрос задачи – разность между максимальной и минимальной длинами пружинки будет равна

$$\Delta L = 2x = \frac{2mg}{k}.$$

На второй вопрос ответить немного труднее. Центр масс системы остается на месте (мы положили систему на

горизонтальный стол, и ее скорость в начальный момент была нулевой); это означает, что каждый груз движется под действием «своей» части пружинки – от центра масс до соответствующего груза. Получившиеся куски имеют большую жесткость, чем исходная пружинка, – жесткость куска, присоединенного к грузу массой  $m$ , составляет  $k_1 = k(M+m)/M$ , жесткость второго куска равна  $k_2 = k(M+m)/m$ . Очевидно, что грузы колеблются в противофазе, а период колебаний составляет

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{mM}{k(M+m)}}.$$

Искомое время равно четверти периода колебаний:

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{mM}{k(M+m)}}.$$

А. Повторов

**Ф1647.** В глубоком космосе на большом расстоянии от всех других тел движется длинная цилиндрическая труба, запаянная с одного конца. Неподалеку от этого конца приклеен поршень массой  $M = 1$  кг, отделяющий от окружающего вакуума  $1/100$  полного объема трубы. В этой части трубы находится небольшая порция азота при температуре  $T = 300$  К и давлении  $p = 0,5$  атм. В некоторый момент поршень отклеивается и под давлением газа начинает скользить без трения вдоль трубы. Определите, через какое время после начала движения поршень вылетит из трубы. Длина трубы  $L = 5$  м, площадь поперечного сечения  $S = 100$  см<sup>2</sup>, масса трубы в 10 раз больше массы поршня.

Будем считать, что труба не вращается – иначе решение задачи усложнится (хотя при заданных массах трубы и поршня разница будет незначительной). Газ при расширении охлаждается, его внутренняя энергия переходит в кинетическую энергию трубы и поршня (масса газа оказывается очень малой, так что при расчете кинетической энергии и импульса системы с ней можно не считаться). Поскольку объем газа увеличивается во много раз и приток тепла отсутствует, можно считать, что температура газа в конце процесса будет совсем малой и в кинетическую энергию перейдет практически вся его внутренняя энергия, равная  $U = 2,5\nu RT = 2,5pV = 2,5pSL/100 = 62,5$  Дж.

При отношении масс 10:1 тяжелая труба получит  $1/11$  часть общей энергии, а поршень получит  $10/11$  от энергии газа, т.е. его энергия в конце составит  $E \approx 56,7$  Дж. Это соответствует скорости поршня  $v = \sqrt{2E/M} \approx 10,7$  м/с. Скорость трубы при этом будет направлена в противоположную сторону и равна  $0,1v \approx 1,07$  м/с. Если бы с самого начала скорости были такими, поршень вылетел бы из трубы через время  $\tau = 0,99L/(1,1v) \approx 0,42$  с.

Оценим время набора скорости – если оно окажется существенно меньше  $\tau$ , ответ можно считать полученным (строго говоря, скорость увеличивается все время, вплоть до самого вылета, но все медленнее и медленнее, а нас интересует приближенное значение). Итак, в самом начале движения на поршень действует сила  $F = pS$  и его

начальное ускорение составляет  $a = pS/M = 500$  м/с<sup>2</sup>. Если бы ускорение не менялось, поршень набрал бы свою скорость за время  $0,02$  с, что существенно меньше времени процесса, рассчитанного выше. Понятно, что скорость будет практически достигнута через время, которое в несколько раз больше полученного интервала  $0,02$  с, но и им можно для оценки пренебречь. Таким образом, время до вылета поршня составляет примерно  $0,4$  секунды.

Р. Александров

**Ф1648.** В сосуде объемом  $V = 100$  л находится воздух при нормальных условиях. Снаружи – вакуум. В стенке сосуда на время  $\tau = 1$  с открывается небольшое отверстие площадью  $S = 0,1$  см<sup>2</sup> и сразу после этого закрывается. Оцените количество вылетевших за это время молекул и их суммарную энергию. Кстати заметим, что воздух – смесь двухатомных газов.

Оценим число вылетевших из сосуда молекул и сравним его с полным числом молекул газа  $N$  – если вылетевшая часть велика, то решение задачи сильно усложнится. Число вылетевших молекул посчитаем так же, как обычно считают число ударов молекул о стенку сосуда:  $N_{\text{уд}} = 0,5Su_x\tau N/V$ . Скорость, точнее – составляющую скорости молекулы вдоль заданного направления, оценим через энергию поступательного движения молекул:  $u_x = \sqrt{kT/m} = \sqrt{RT/M_{\text{ср}}} \approx 280$  м/с. Итак, за данное время вылетела часть молекул, равная  $N_{\text{уд}}/N = 0,5Su_x\tau/V \approx 0,14$ . Видно, что для оценки можно считать неизменными давление газа в сосуде и его температуру (впрочем, можно сделать небольшие поправки, пользуясь для расчетов средними значениями). Число молекул в сосуде равно  $N = N_A pV/(RT)$ . Тогда число вылетевших молекул будет

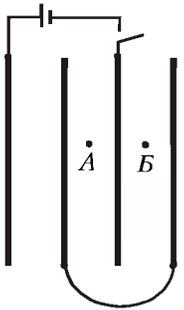
$$N_{\text{в}} = N_{\text{уд}} = 0,5Su_x\tau N/V = 0,5Su_x\tau N_A p/(RT) \approx 3,5 \cdot 10^{22}.$$

При обычных условиях длина свободного пробега молекул в воздухе очень мала, поэтому истечение молекул из отверстия скорее напоминает движение «сплошной среды» – молекулы движутся в заданном направлении толкая друг друга, но практически не обгоняя одна другую. Выделим в сосуде ту область около отверстия, из которой молекулы успеют «эмигрировать». Обозначим объем этой области  $V_1$  и запишем для этих молекул уравнение состояния:  $pV_1 = \nu_1 RT$ . Вылетая наружу, эти молекулы имеют в среднем большую энергию, чем оставшиеся в сосуде, – над этой порцией газа совершил работу окружающий газ, выталкивая порцию наружу. Если считать давление газа в сосуде неизменным, то работа эта равна  $A = pV_1$ . Поэтому энергия вылетевшей порции газа (смесь двухатомных газов) составляет

$$U = 2,5\nu_1 RT + A = 3,5\nu_1 RT = 3,5 \frac{N_{\text{в}}}{N_A} RT = 3,5N_{\text{в}} kT \approx 460 \text{ Дж}.$$

К. Тотов

**Ф1649.** Конденсатор емкостью  $C$  состоит из двух параллельных пластин, находящихся на малом расстоянии друг от друга. Конденсатор зарядили до напряжения  $U_0$  и отключили от источника. Посредине конденсатора параллельно его пластинам вставлена еще одна



пластина, и еще одна пластина расположена параллельно снаружи, так что эти дополнительные пластины образуют точно такой же конденсатор (см. рисунок). Дополнительные пластины соединяют между собой проводником, имеющим большое сопротивление. Какое количество теплоты выделится в этом проводнике?

После отсоединения источника заряды пластин конденсатора не меняются и его энергия равна

$$E_1 = \frac{CU_0^2}{2}.$$

После введения еще двух пластин и соединения их между собой на этих пластинах произойдет перераспределение зарядов и их потенциалы станут равными. У нас получатся три заряженных конденсатора, емкость каждого из которых вдвое больше исходной величины  $C$  (расстояние между обкладками полученных конденсаторов в два раза меньше, чем у исходного). Поля в точках  $A$  и  $B$  равны по величине и противоположны по направлению, поле в точке  $A$  равно сумме полей исходных зарядов пластин первого конденсатора и «новых» зарядов, а поле в точке  $B$  создается только «новыми» зарядами, поэтому ясно, что их поле составит ровно половину поля исходных зарядов. Таким образом, один из получившихся конденсаторов заряжен до напряжения  $U_0/2$  (прежнее поле, но половина расстояния между пластинами), два других – до напряжений  $U_0/4$  и  $-U_0/4$  (поля в этих конденсаторах в два раза меньше). Общая энергия теперь составляет

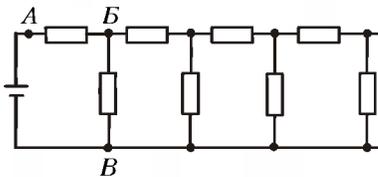
$$E_2 = \frac{2C(U_0/2)^2}{2} + \frac{2C(U_0/4)^2}{2} + \frac{2C(-U_0/4)^2}{2} = \frac{3CU_0^2}{8}.$$

Разность энергий и дает выделившееся тепло:

$$Q = E_1 - E_2 = \frac{CU_0^2}{8}.$$

А.Зильберман

Ф1650. Электрическая цепь составлена из большого количества одинаковых звеньев (см. рисунок). Каждое такое звено состоит из двух резисторов. К началу цепи



подключен источник постоянного напряжения  $U = 12$  В. Идеальный амперметр подключают параллельно первому резистору цепи (между точками  $A$  и  $B$ ), и он показывает силу тока  $I_1 = 5$  мА. Если тот же амперметр подключить между точками  $B$  и  $V$  (параллельно второму резистору), то он покажет  $I_2 = 2$  мА. Определите по этим данным сопротивления резисторов одного звена.

Сопротивление резистора из горизонтального ряда найти совсем просто. Когда амперметр включен между точками  $B$  и  $V$ , все напряжение источника приложено к этому

резистору, измеряемый ток течет через этот резистор, поэтому его сопротивление равно

$$R = \frac{U}{I_2} = 6 \text{ кОм}.$$

Найти сопротивление  $r$  «вертикального» резистора сложнее – при подключении амперметра между точками  $A$  и  $B$  он показывает сумму токов этого резистора и всей остальной бесконечной цепи. Обозначим сопротивление этой цепи через  $X$ , тогда

$$I_1 = \frac{U}{r} + \frac{U}{X} = \frac{U(r+X)}{rX}.$$

Сопротивление  $X$  можно выразить известным способом: при добавлении одного звена к такой длинной цепочке ее сопротивление не должно практически измениться:

$$X = R + \frac{rX}{r+X},$$

или

$$\frac{rX}{r+X} = X - R.$$

Тогда

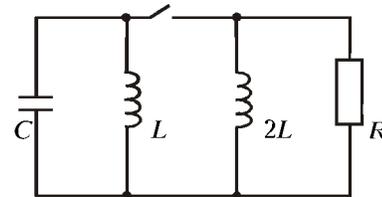
$$\frac{rX}{r+X} = X - R = \frac{U}{I_1} = 2,4 \text{ кОм}.$$

Отсюда

$$X = 8,4 \text{ кОм}, \text{ и } r = 3,36 \text{ кОм}.$$

А.Зильберман

Ф1651. Конденсатор емкостью  $C$  заряжен до напряжения  $U_0$ . К нему подключают катушку индуктивностью  $L$  и в некоторый момент к выводам катушки подключают цепочку из параллельно соединенных катушки индуктивностью  $2L$  и резистора с большим сопротивлением  $R$  (см. рисунок). Какое количество теплоты выде-



лится в резисторе? Зависит ли эта величина от момента подключения цепи к катушке? Элементы цепи считайте идеальными.

Пусть подключение произошло в тот момент, когда ток через катушку был равен  $I$ . В тепло перейдет при этом не вся энергия, запасенная контуром, – часть энергии останется в виде энергии магнитного поля тока, протекающего по контуру из двух идеальных катушек. Найдём эту энергию. Магнитный поток через сверхпроводящий контур (составленный из двух идеальных катушек) не изменяется. Если катушки расположены далеко друг от друга (или специально повернуты нужным образом), то можно пренебречь магнитным потоком, создаваемым полем одной катушки и пронизывающим другую (взаимной индукцией). В этом случае

$$LI = LI_1 + 2LI_1, \text{ отсюда } I_1 = \frac{I}{3}.$$

Энергия магнитного поля в этих двух катушках равна

$$\frac{LI_1^2}{2} + \frac{2LI_1^2}{2} = \frac{LI^2}{6}.$$

Итак, в тепло перешла разность энергий конденсатора  $CU_0^2/2$  (энергия системы в начальный момент) и катушек, т.е.

$$Q = \frac{CU_0^2}{2} - \frac{LI^2}{6}.$$

Видно, что при подключении цепочки в момент нулевого тока через катушку в тепло уйдет вся запасенная энергия, т.е.

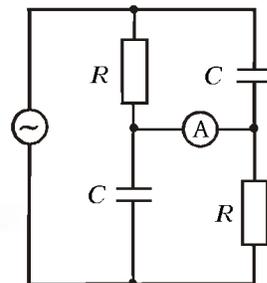
$$Q_0 = \frac{CU_0^2}{2}.$$

Минимальное же количество теплоты выделится при максимальном токе катушки, который можно определить из соотношения  $CU_0^2/2 = LI_m^2/2$ . При этом в контуре останется треть начальной энергии, а в тепло перейдут две трети, т.е.

$$Q_m = \frac{CU_0^2}{3}.$$

*М.Учительев*

**Ф1652.** К простой цепи, собранной из двух резисторов сопротивлением  $R = 1$  кОм и двух конденсаторов емкостью  $C = 1$  мкФ, подведено напряжение сети: 220 В, 50 Гц (см. рисунок). Амперметр в схеме имеет очень маленькое сопротивление. Найдите показания амперметра. Обычно приборы переменного тока градуируются в действующих (эффективных) значениях.



Амперметр по условию имеет пренебрежимо малое сопротивление, поэтому его можно заменить куском провода. Сразу видно, что последовательно к сети подключены две одинаковые цепочки, при этом напряжение на каждой из них составляет 110 В. Ток через резистор равен  $I_R = U/(2R) = 110$  мА, а ток через конденсатор равен  $I_C = U/(2X_C) = U\omega C/2 \approx 35$  мА. Амперметр показывает разность токов «верхнего» резистора и «нижнего» конденсатора, но с учетом сдвига фаз результирующий ток нужно находить по теореме Пифагора:

$$I_A = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} \approx 115 \text{ мА}.$$

*А.Зильберман*

## Победители конкурса «Задачник Кванта» 1997 года

### I место заняли

*по математике*

Гуляев Михаил – Нижний Новгород, школа 139,

*по физике*

Гуляев Леонид – Нижний Новгород, школа 86.

### II место заняли

*по математике*

Землякова Анна – Чебоксары, ФМЛ 27,

Кукина Екатерина – Омск, ФМЛ 64,

*по физике*

Янышин Александр – Канаш, школа 9.

### III место заняли

*по математике*

Гаврилин Кирилл – Железногорск Курской обл.,  
школа 11,

*по физике*

Белобородов Максим – Архангельск, школа 22.

**Кроме того, в число победителей вошли**

*по математике*

Самборский Александр – Кирово-Чепецк, школа 3,  
Букарев Александр – Бор Нижегородской обл.,  
ННГУ,

Волков Олег – Димитров Донецкой обл., Донецкий  
технический колледж,

Гусев Дмитрий – Пенза, лингвистическая  
гимназия 6,

*по физике*

Уфимцев Иван – Новомосковск Тульской обл.,  
Новомосковский лицей,

Агафонов Дмитрий – Киров, ФМЛ.

*Победители, занявшие первые места по математике и по физике, награждаются комплектами журнала «Квант» за второе полугодие 1998 года.*

## Задачи

1. Радиус переднего колеса едущего трактора равен 25 см. За секунду оно совершает 2,5 оборота. Диаметр заднего колеса равен 125 см. Сколько оборотов оно сделает за одну секунду?

*А.Жуков*



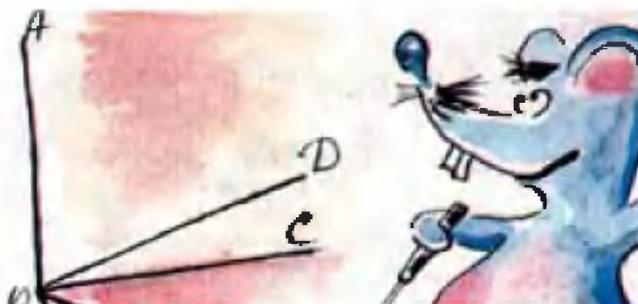
2. В футбольном турнире между четырьмя командами 7-х классов победила команда 7«А», выигравшая все три матча с общим счетом 7:1. Команда 7«Г» проиграла все матчи с общим счетом 1:6. Команды 7«Б» и 7«В» по одной игре выиграли, по одной проиграли и по одной сыграли вни-



чью. Общий счет у команды 7«Б» – 2:3, а у 7«В» – 3:3. Команда 7«А» выиграла у команды 7«Б» со счетом 3:0. С каким счетом окончились остальные матчи?

*А.Павлов*

3. Внутри тупого угла  $AOB$  проведены три луча  $OC$ ,  $OD$  и  $OE$ , причем  $OC \perp OA$ ,  $OD$  – бис-



сектриса угла  $AOB$  и  $OE$  – биссектриса угла  $BOC$ . Чему равен угол  $DOE$ ?

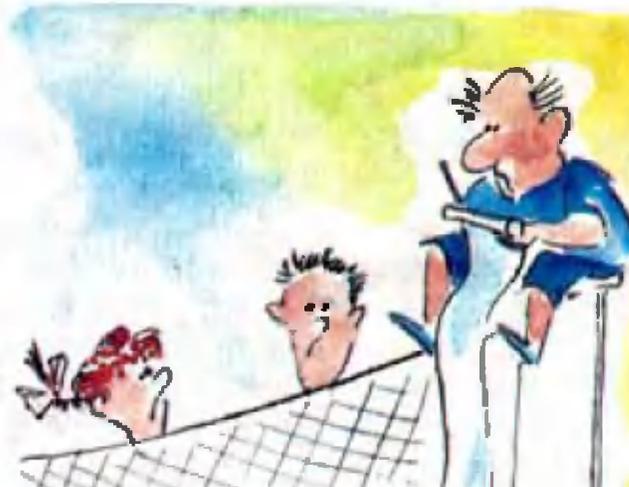
*А.Савин*

4. На прямой расположены 100 гирек. Известно, что массы любых двух соседних гирек отличаются ровно на 1 г. Докажите, что эти гирьки можно разложить по 50 штук на чашки весов так, что весы окажутся в равновесии.

*В.Произволов*



5. Шесть волейбольных команд решили провести турнир в один круг так, чтобы каждая команда ежедневно играла одну игру. Первые три дня команды играли, выбирая партнеров случайным образом, но с условием, что все три дня они играют с разными командами. Сможет ли появившийся судья турнира составить расписание на оставшиеся



два дня так, чтобы все команды сыграли со всеми ровно по одному разу?

*Г.Кукин*

# Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6—8»

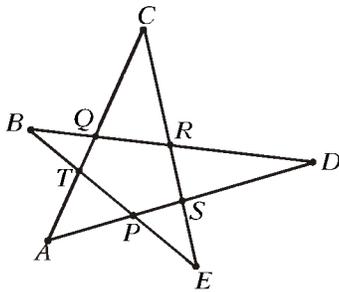
Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов.. Как и в предыдущих конкурсах, будет предложено 20 задач, по 5 задач в номерах 4—6 этого года и в №1 за 1999 год. Решения задач высылайте в течение месяца после получения номера журнала «Квант», в котором опубликованы условия задач, по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес. Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков. Победители конкурса будут награждены призами журнала.

6. Президент Анчурии устроил пресс-конференцию по случаю своего дня рождения. Собравшиеся журналисты были знакомы с друг с другом и все обменялись рукопожатиями.

Когда вошел президент, он обменялся рукопожатиями с теми журналистами, с которыми он был знаком. В результате всего было сделано 80 рукопожатий.

Сколько было журналистов и со сколькими был знаком президент?

*А.Савин*



7. В звездчатом пятиугольнике  $ABCDE$  некоторые точки пересечения сторон делят стороны пополам, а именно:

$$AQ = QC, BR = RD, CR = RE, DS = SA.$$

Докажите, что точки  $T$  и  $P$

делят сторону  $BE$  на три равные части.

*А.Жуков*

8. О целых числах  $x, y, z, a, b, c$  известно, что  $x + y + z = 0$  и  $a + b + c = 0$ .

Докажите, что число

$$(a^2yz + b^2xz + c^2xy)(x^2bc + y^2ac + z^2ab)$$

является четвертой степенью целого числа.

9. Вася купил две игрушки «тамагочи» — растущих электронных зверьков. Первый бодрствует с 7 до 22 часов, каждые 3 часа «взрослея» на год. Остальное время он спит, «взрослея» на год за 6 часов. Второй зверек «взрослеет» на год за каждые 4 часа, независимо от времени суток.

Вася одновременно включил обе игрушки. Оказалось, что трехлетнего возраста оба зверька достигли одновременно. Кому из них раньше исполнится 5 лет?

*И.Акулич*

10. Петя нарисовал на клетчатой бумаге квадрат  $9 \times 9$  и в его клетках записал числа от 1 до 81. Коля нарисовал такой же квадрат и хочет точно так же расставить в нем числа. Петя разрешает Коле указать у себя какой-нибудь квадрат со сторонами, идущими по линиям сетки, после чего называет числа, стоящие в своем аналогичном квадрате, причем в порядке их возрастания. За какое наименьшее количество таких шагов Коля сможет выполнить свое желание?

*С.Токарев*

## Победители конкурса «Математика 6—8» 1997 года

**Лучших результатов в конкурсе добились следующие математические кружки:**

при Ивановском энергетическом университете, руководитель *С.И.Токарев*;

«Эврика» при Харьковском государственном университете, руководители *Е.Л.Аринкина, А.Л.Берштейн, О.Ф.Крыжановский, С.А.Лифшиц, Е.Е.Харин*;

ФМШЛ 64, Омск, руководитель *Л.А.Бачина*;

гимназии 69, Омск, руководитель *И.А.Круглова*;

«Поиск» при Чувашском государственном университете, руководитель *С.А.Иванов*;

гимназии 26, Набережные Челны, руководитель *Л.В.Баева*;

многопрофильного лицея, Луганск, руководитель *А.А.Камин*;

Клуб любителей математики при ДК, Мытищи, руководители *А.И.Саблин, Р.Д.Абакиров*;

«Айсберг» школы 44, Норильск, руководитель *Р.Д.Мирзоев*.

**Кроме того, победителями конкурса стали следующие школьники:**

*Тищенко Сергей* — Москва, лицей «Вторая школа», 8 кл.,

*Авакумов Сергей* — Севастополь, школа-гимназия 7, 6 кл.,

*Солодушкина Марина* — Томск, школа 8, 8 кл.,

*Мануйлович Иван* — Жуковский Московской обл., школа 7, 8 кл.,

*Берштейн Михаил* — Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,

*Белов Дмитрий* — Иваново, школа-лицей 33, 6 кл.,

*Набиуллин Наиль* – д.Октябрь Маслюмовского р-на, Татарстан, Октябрьская школа, 8 кл.,  
*Школьников Михаил* – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,  
*Темкин Михаил* – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,  
*Зинченко Дмитрий* – Санкт-Петербург, ФМГ 30, 6 кл.,  
*Масалов Иван* – с.Мамонтово Алтайского кр., школа 1, 8 кл.,  
*Грук Андрей* – Набережные Челны, школа 15, 7 кл.,  
*Жданов Роман* – Краснодар, школа 3, 7 кл.,  
*Плиев Зелым* – Владикавказ, Школа точной мысли, 8 кл.,  
*Голубов Алексей* – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,  
*Клапчук Мария* – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,  
*Дятлов Семен* – Новосибирск, гимназия 3, 5 кл.,  
*Ляхов Федор* – Нижний Новгород, школа 140, 7 кл.

**Жюри конкурса также отмечает хорошие работы следующих школьников:**

*Штомпеля Андрея* – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,  
*Беляева Дмитрия* – Переславль-Залесский, гимназия 7, 8 кл.,  
*Кощеева Михаила* – Мегион Тюменской обл., школа 4, 7 кл.,  
*Однороженко Дениса* – Радужный Владимирской обл., школа 2, 8 кл.,

*Ульянова Федора* – Иваново, школа-лицей 33, 8 кл.,  
*Дзюва Батраза* – Владикавказ, школа 9, 8 кл.,  
*Епифанова Алексея* – Краснобаррикадная школа Икрянинского р-на Астраханской обл., 7 кл.  
*Куценко Оксаны* – Новосибирск, школа 102, 8 кл.,  
*Носика Евгения* – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,  
*Кравцовой Леси* – Винница, школа 34, 8 кл.,  
*Кобзева Владимира* – Межгорье-1, Башкирия, 7 кл.,

**а также кружков:**

при Четверговой математической школе, Омск, руководитель *А.А.Лантев*,  
 Университета Няяновой, Самара, руководители *В.С.Исаханова, А.С.Савин*,  
 школы 57, Луганск, руководитель *О.И.Форостяненко*,  
 «Военмех-2», Санкт-Петербург, руководитель *Д.О.Вавилов*,  
 «Эрудит» ФМШ, Астрахань, руководители *Н.И.Виноградова, А.В.Забалуева, А.Я.Белоголов*,  
 школы 14, Жуковский Московской обл., руководитель *Г.И.Гайфуллина*.

**Все победившие кружки и школьники награждаются призами, а победившие кружки приглашаются в летний математический лагерь.**

« К В А Н Т » У Л Ы Б А Е Т С Я

**ВЛИЯНИЕ СОЛНЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ НА ЧАСТОТУ РОЖДАЕМОСТИ УМНЫХ ЛЮДЕЙ**

В журнале «Наука и религия» №10 за 1989 год была опубликована статья Е.Виноградова «Когда рождаются гении?». В ней автор приводит результаты сопоставления дат рождений людей, удостоившихся попасть в БСЭ (Большая Советская Энциклопедия), с солнечной активностью и делает вывод о том, что большинство из них рождены в год спокойно-го Солнца.

Мы решили провести аналогичные исследования на жителях города Междуреченска (Кемеровская обл.). Критерием хороших умственных способностей были приняты оценки в аттестате зрелости, причем умными было решено считать медалистов и «хорошистов», имеющих в аттестате не больше трех четверок.

В школах города мы выписали из книг выдачи аттестатов даты рождения этих умников, подсчитав их полное количество в год выпуска. Разделив это количество на число всех выпускников, получили «коэффициент умственного развития» данного года выпуска  $r$ , который был присвоен каждому умнику.

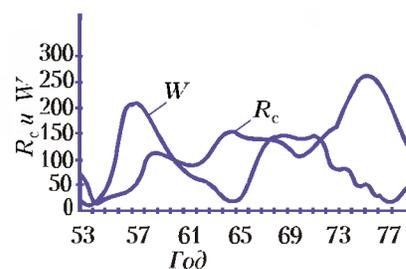
Затем массив умников со своими коэф-

фициентами  $r$  был пересортирован по годам рождения (1953–1977), и по каждому году находилась сумма, получившая название «коэффициента умственного раз-

Год	$R$	$R_c$	$W$
1953	14,0	74,1	13,9
1954	8,4	9,6	4,4
1955	6,4	13,3	38,0
1956	25,2	16,3	141,7
1957	17,2	34,2	90,2
1958	60,2	55,8	184,8
1959	90,0	86,0	159,0
1960	107,4	81,0	112,3
1961	45,4	68,2	53,9
1962	51,5	89,0	37,6
1963	170,8	127,7	27,9
1964	160,7	143,4	10,2
1965	98,8	136,0	15,1
1966	148,1	136,8	47,0
1967	163,4	131,0	93,8
1968	81,5	112,9	105,9
1969	93,7	83,4	105,5
1970	75,0	104,0	104,5
1971	143,1	119,8	66,6
1972	141,3	139,9	68,9
1973	135,2	198,0	38,0
1974	317,4	243,0	34,5
1975	276,5	249,5	15,5
1976	154,7	210,0	12,6
1977	199,9	122,9	27,5

вития» данного года рождения  $R$ . Значения этих коэффициентов, характеризующих частоту рождения умников, умножили на 10, чтобы получились величины одного порядка с числами Вольфа  $W$  – коэффициентами солнечной активности.

На заключительной стадии работы сопоставлялись графики солнечной активности и частоты рождаемости «умников», причем в качестве второго параметра вместо



коэффициента  $R$  брался усредненный по трем ближайшим точкам коэффициент  $R_c$ . Из анализа графиков видно, что наибольшее количество умников рождается в годы минимальной солнечной активности.

Мы понимаем, что все списывать на Солнце нельзя, но куда деваться от обнаруженного эффекта? Все-таки мы – дети Солнца!

*А.Карачи, Д.Карачи, С.Кардаполов*

Если ж, напротив, вещей начала мягкими были б,  
Взяться откуда могли и твердый кремь, и железо...  
Тит Лукреций Кар

Ничто не мешает нам считать частицы эфира состоя-  
щими из материи, сколь угодно приближающейся к  
совершенной твердости...  
Христиан Гюйгенс

Твердость, кристаллизация, преломление света... яв-  
ляются результатом действия сил, знание которых  
есть один из важнейших объектов изучения природы.  
Пьер Симон Лаплас

При твердом состоянии движение происходит таким  
образом, что молекулы движутся около известных  
положений равновесия... это движение можно было  
бы охарактеризовать как колебательное.  
Рудольф Клаузиус

...наши представления о типическом твердом теле –  
кристалле – так определены и просты...  
А.Ф.Иоффе

...рассмотрим движение несуществующего идеально-  
го объекта, который мы назвали твердым телом.  
Ричард Фейнман

## А ТАК ЛИ ХОРОШО ЗНАКОМО ВАМ ТВЕРДОЕ ТЕЛО?

Вспомните, сколько раз приходилось встречаться с этим понятием в школе – практически во всех разделах физики. Абсолютно твердое тело – в механике; твердое состояние вещества, кристаллы и аморфные тела – при изучении тепловых явлений; металлы, полупроводники и ферромагнетики – в электромагнетизме; стеклянные призмы и линзы – в оптике.

Над тем, что же представляет собой твердое тело, ученые ломали голову, как вы могли убедиться по эпиграфам, с древности до наших дней. Уж очень важно было разобраться с его «многоликими» свойствами – чтобы построить прочные машины и овладеть искусством выплавки металлов, научиться передавать энергию на расстояние и создавать уникальные приборы.

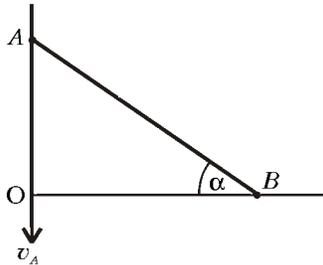
Сложившаяся в XX веке физика твердого тела, опираясь уже не на классические, а на квантовые понятия, позволила объяснить большинство явлений, возникающих в этой «общности» огромного числа связанных воедино частиц. Строение кристаллов и образование сплавов, упругость и прочность, теплоемкость и теплопроводность, электрическое сопротивление и сверхпроводимость, магнетизм и способность реагировать на свет – всем этим успешно занимается невероятно разросшаяся новая научная отрасль. В ней, кстати, зачастую стираются грани между чистой теорией и техническими приложениями. Их плодотворное взаимодействие привело, в частности, к появлению транзисторов и лазеров на твердом теле, новых композиционных материалов и высокотемпературных сверхпроводников, металлических стекол и твердотельной видеоаппаратуры.

Предлагая сегодня лишь небольшую часть из множества посвященных твердому телу задач, мы рассчитываем на то, что они не станут для вас «твердыми орешками».

### Вопросы и задачи

1. Масса сплошного куба, сделанного из твердого вещества, равна 2,5 кг. Какую массу будет иметь куб, изготовленный из того же вещества, если длину его ребра уменьшить в два раза?

2. По сторонам прямого угла  $AOB$  скользит стержень  $AB$ , как показано на рисунке. В момент, когда стержень составляет угол  $\alpha$  со стороной  $OB$ , скорость точки  $A$  равна  $v_A$ . Чему рав-



на в этот момент скорость точки  $B$ ? Решите задачу построением.

3. Один грузик подвешен на нерастяжимой нити, а другой – на жестком невесомом стержне такой же длины. Одинаковые ли минимальные скорости нужно сообщить грузикам в нижнем положении, чтобы они совершили полный оборот в вертикальной плоскости?

4. Какая колба выдерживает большее давление снаружи – круглая или плоскодонная?

5. Для чего домашние хозяйки, пытаясь снять закручивающуюся метал-

лическую крышку со стеклянной банки, поливают крышку горячей водой?

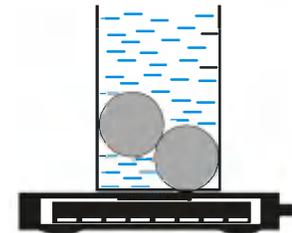
6. Металлический шарик, проходящий сквозь металлическое кольцо, застревает в нем, если шарик нагреть. Что произойдет, если нагреть не шарик, а кольцо?

7. Отчего положенная на снег деревянная доска после оттепели оказывается как бы на снежном холмике, в то время как металлическая пластина еще глубже уходит в снег?

8. Удельная теплоемкость у железа или стали значительно больше, чем у меди. Почему же паяльники делают из меди, а не из стали или железа?

9. Что дает предварительное ополаскивание заварочного чайника кипятком? Какой – медный или фарфоровый – чайник оказывается при этом выгоднее (с учетом внешнего охлаждения)?

10. В сосуд с водой помещены стальные шары одинаковой массы, как изображено на рисунке. После длительного кипячения воды сосуд сняли с пли-



ты, воду из него быстро вылили, а шары сразу же положили на лед. Под каким из них расплавится больше льда?

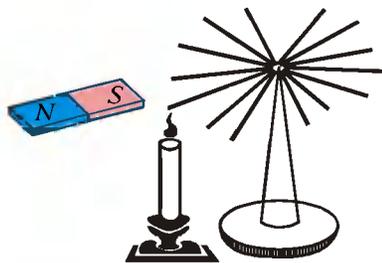
11. К концам графитового стержня, сопротивление которого уменьшается с повышением температуры, приложено постоянное напряжение. В ка-

ком случае выделяемое стержнем количество теплоты будет больше: когда он ничем не покрыт или когда покрыт асбестом?

12. Сплошной металлический цилиндр вращается вокруг своей оси симметрии. Как направлено возникающее в цилиндре электрическое поле?

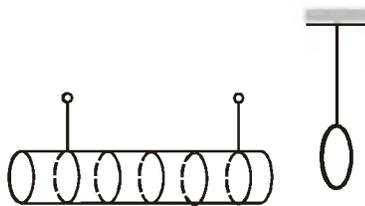
13. Можно ли, понижая температуру, получить сверхпроводящий германий или сверхпроводящий кремний?

14. К вертушке, сделанной из железных проволочек, подносят магнит, как показано на рисунке, а недалеко



от магнита располагают горелку, нагревающую одну из проволочек. Что будет происходить с вертушкой?

15. Перед полюсом электромагнита на длинной нити подвешено кольцо из сверхпроводника так, как показано на рисунке. Что произойдет с кольцом,



если по обмотке электромагнита пропустить переменный ток?

16. Если ударить молотком по одному концу длинной металлической трубы, то у другого ее конца можно услышать образование течей в топливных канистрах, запаянных оловом, – при низких температурах «белое» олово превратилось в серый порошок. Вероятно, то же самое произошло на 100 лет раньше при отступлении Наполеона из России, когда у французских солдат стали отваливаться форменные пуговицы, сделанные из олова.

17. По какой причине калориметры обычно изготавливают из металла, а не из стекла?

18. Отчего мел среди раскаленных углей кажется темным?

19. Стекло мало прозрачно для тепловых (инфракрасных) лучей. Почему же парники покрывают стеклом?

### Микроопыт

Толстый гвоздь плотно оберните полоской бумаги и внесите его в пламя свечи. Загорится ли бумага?

### Любопытно, что...

...более трех тысяч лет назад для изготовления орудий и инструментов использовали железо, извлеченное из

метеоритов (оно «происходит с неба»). На это указывают записи, обнаруженные в клинописных табличках хеттов – народа, жившего в то время на территории Малой Азии.

...по представлениям древних ученых, различные кристаллы должны были быть «родственниками». Так, считалось, что хрусталь образуется из льда, а алмаз – из хрусталя.

...для получения стали к достаточно мягкому чистому железу примешивают углерод. При быстром охлаждении расплавленной массы углерод выделяется в виде маленьких зерен, образуя в кристаллической решетке множество микроскопических дефектов. Они препятствуют передвижению по решетке дефектов иного рода – дислокаций, и поэтому металл становится твердым.

...при растяжении стержней, изготовленных из большинства твердых материалов, прежде всего металлов, их объем увеличивается, несмотря на уменьшение поперечных размеров.

...один моль атомов практически всех химических элементов в твердом состоянии занимает объем порядка объема обычного карандаша (попробуйте сделать эту оценку сами).

...простой способ определения сравнительной твердости тел давно используется в минералогии. Выстроен ряд из десяти минералов по способности оставлять друг на друге царапины. Самым твердым в нем оказался, разумеется, алмаз, а самым мягким – тальк.

...некоторые твердые вещества обладают полиморфизмом – могут существовать в нескольких кристаллических состояниях с разными структурами и свойствами. Так, одной из причин гибели экспедиции Скотта на Южный полюс в 1912 году считается образование течей в топливных канистрах, запаянных оловом, – при низких температурах «белое» олово превратилось в серый порошок. Вероятно, то же самое произошло на 100 лет раньше при отступлении Наполеона из России, когда у французских солдат стали отваливаться форменные пуговицы, сделанные из олова.

...только в середине 80-х годов нашего века была открыта третья кристаллическая форма существования углерода в природе. Это так называемые фуллерены, напоминающие своей формой пустотелые футбольные мячи.

...для изменения объема твердого тела даже на один процент необходимо огромное давление. Скажем, для

металлов оно составляет величину, превосходящую атмосферное давление в 10 000 раз.

...обнаруженная при исследовании под давлением плотная модификация кварца послужила разгадке тайны Аризонского метеорита, в котором были найдены вкрапления неизвестных в земных условиях кристалликов.

...образующийся при сверхнизких температурах твердый диэлектрический водород может под колоссальным давлением перейти в металлическую фазу. Причем, как было показано опытным путем, металлический водород способен проявлять и сверхпроводящие свойства.

...около двадцати лет назад был проведен эксперимент, когда возбужденный в кольцевом сверхпроводнике ток не изменялся по величине в течение двух с половиной лет. А сегодня в США уже приступают к строительству сверхпроводящей линии электропередачи длиной в 1000 километров, рассчитывая полностью избежать в ней потерь энергии.

...по поведению сейсмических волн, бегущих сквозь земную толщу от очага землетрясения, была обнаружена граница между мантией – твердой оболочкой Земли – и ее жидким ядром.

...идея волоконно-оптической связи, похоже, овладела миром. Сейчас по гибким стеклянным проводам, в несколько раз превосходящим по прочности сталь, одновременно передают на тысячи километров десятки тысячи телефонных разговоров.

### Что читать в «Кванте» о твердом теле

(публикации последних лет)

1. «Конструкции из углерода» – 1993, №1/2, с.17;
2. «Из жизни физиков и физики» – 1994, №1, с.2;
3. «На лезвии меча» – 1994, №2, с.17;
4. «Как в металле протекает электрический ток» – 1995, №1, с.37;
5. «Волоконно-оптическая связь» – 1995, №5, с.8;
6. «Точка Кюри» – 1996, №2, с.35;
7. «Идеальные проводники и кинетическая индуктивность» – 1996, №4, с.40;
8. «Гипотеза сотворения мира» – 1997, №1, с.2;
9. «Как устроены металлы?» – 1997, №2, с.2.

Материал подготовил  
А.Леонович

**Физика 9–11**

Публикуемая ниже заметка «Не стреляйте в белых лебедей» предназначена девятиклассникам, заметка «Хаос молекули звезд» — десятиклассникам, «Зачем быть конденсатору в магнитном поле?» — одиннадцатиклассникам.

# Не стреляйте в белых лебедей

**А. СТАСЕНКО**

ИЗВЕСТНО, что на тело, движущееся в воздухе, действует сила сопротивления  $\vec{F}$ . Почти очевидно, что эта сила зависит от скорости движения  $\vec{v}$  и размеров тела, например площади поперечного сечения  $S$ , причем эта зависимость типа «чем больше  $v$  и  $S$ , тем больше  $F$ ». Можно еще уточнить вид этой зависимости, исходя из соображений размерностей (единиц измерения). Действительно, сила измеряется в ньютонах ( $[F] = \text{Н}$ ), а  $\text{Н} = \text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$ . Видно, что секунда в квадрате входит в знаменатель. Отсюда сразу ясно, что сила должна быть пропорциональна квадрату скорости тела ( $[v^2] = \text{м}^2/\text{с}^2$ ) и плотности ( $[\rho] = \text{кг}/\text{м}^3$ ) — конечно, той среды, в которой движется тело. Итак,

$$F \sim \rho S v^2.$$

А чтобы подчеркнуть, что эта сила направлена против вектора скорости, можно записать так:

$$\vec{F} \sim -\rho S v \vec{v}.$$

Мы узнали уже очень много, но это еще не все. Наверняка сила сопротивления (аэродинамическая сила) зависит и от формы тела — не случайно ведь летательные аппараты делаются «хорошо обтекаемыми». Чтобы учесть и эту предполагаемую зависимость, можно в полученное выше соотношение (пропорциональность) ввести безразмерный множитель, который не нарушит равенства размерностей в обеих частях этого соотношения, но превратит его в равенство:

$$\vec{F} = -\alpha \rho S v \vec{v}.$$

Представим себе шарик, движущийся в воздухе, — например дробинку, горизонтально вылетевшую с начальной скоростью  $\vec{v}_0$ . Если бы не было

сопротивления воздуха (в школьных задачах обычно так и говорится: «сопротивлением воздуха пренебречь»), то на расстоянии  $x$  за время  $t_0 = x/v_0$  дробинка сместилась бы по вертикали вниз на

$$y_0 = \frac{gt_0^2}{2} = \frac{g}{2} \left( \frac{x}{v_0} \right)^2. \quad (1)$$

Соответствующая кривая (парабола) изображена на рисунке 1 штриховой линией (заметим, что ось  $Y$  направлена вниз). Но из-за действия силы сопротивления (направленной против вектора скорости) время полета дробинки до вертикальной плоскости  $x$  будет больше  $t_0$ . Следовательно, сила тяжести  $m\vec{g}$  дольше будет действовать на дробинку, так что она опустится ниже  $y_0$ .

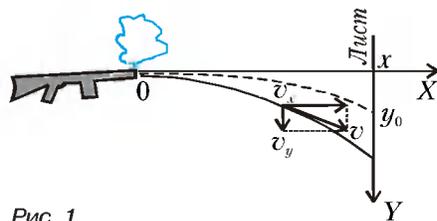


Рис. 1

И вообще, дробинка будет двигаться по другой кривой (сплошная линия на рисунке 1), уже не являющейся параболой (ее называют *баллистической траекторией*).

И тут наше успешное продвижение в познании силы сопротивления резко замедляется. Соображения размерности уже бесполезны: ведь  $\alpha$  — безразмерный множитель. Чтобы узнать его для тела конкретной формы, нужны либо численные решения уравнений газодинамики (описывающих движение воздуха вокруг этого тела), либо экспериментальные исследования (есть наука, которая так и называется:

эксperimentalная аэрогазодинамика).

Что можно сказать об этой кривой? Если были бы известны начальная скорость дробинки  $v_0$  и коэффициент  $\alpha$  в силе сопротивления, то нужно было бы написать уравнение второго закона Ньютона и решить его. Это — дело математики, но кто даст математикам эти величины? Попробуем справиться сами.

Примем такой план действий:

1) Постараемся как можно подробнее (при наших скромных математических знаниях) описать движение дробинки для любых значений  $\alpha$  и  $v_0$ .

2) Экспериментально измерим вертикальные смещения дробинки, например, при помощи вертикального листа бумаги, помещенного на известном расстоянии  $x$  от ружья.

3) Сравнивая теорию и эксперимент, получим  $\alpha$  и  $v_0$ .

Итак, прежде всего запишем уравнение движения дробинки под действием силы тяжести  $m\vec{g}$  и силы сопротивления воздуха  $\vec{F}$ , определенной выше:

$$m\vec{a} = m\vec{g} - \alpha \rho S v \vec{v}.$$

Разделим обе части этого уравнения на массу дробинки  $m$ . Очевидно, что тогда последнее слагаемое будет обратно пропорционально радиусу дробинки: действительно, площадь поперечного сечения шарика пропорциональна квадрату радиуса, а объем (и, значит, масса) — кубу радиуса. Если считать, что  $\alpha$  не зависит от размеров шарика, то эту величину и плотность воздуха можно «спрятать» в новую постоянную  $\beta$ , так что получим

$$\vec{a} = \vec{g} - \frac{\beta}{r} v \vec{v}. \quad (2)$$

Заметим, что в отсутствие сопротивления (когда  $\alpha$  и  $\beta$  равны нулю) траектории всех дробинки одинаковы и все они попадут в точку  $y_0$ . А вот сопротивление воздуха как раз и позволяет «рассортировать» их по размерам. (Это же «сортирующее свойство» используется в сельском хозяйстве, на току, когда боковой ветер отделяет легкую шелуху от полновесных зерен.) Из уравнения (2) видно, что чем меньше дробинка, тем сильнее влияет на ее движение воздух (радиус входит в знаменатель). И наоборот, чем массивнее тело, тем с большей точностью можно пренебречь сопротивлением, так что останется только сила тяжести ( $\vec{a}_0 = \vec{g}$ ). Только в этом предельном случае

и верен вывод из экспериментов Галилея, бросавшего пушечные ядра и мушкетные пули с башни: «скорость падающих тел одинакова, независимо от их веса». Но мы здесь как раз и хотим использовать «сортирующее свойство» силы сопротивления воздуха. Поэтому подробнее исследуем уравнение (2).

Модуль скорости связан с горизонтальной и вертикальной составляющими соотношением  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ . И тут сделаем первое упрощающее предположение. Интуитивно ясно, что вначале скорость вертикального падения дробинок много меньше скорости горизонтального движения (если не очень удаляться от ружья), а уж их квадраты и подавно сильно отличаются друг от друга. Значит, можно приближенно считать, что  $v \approx v_x$ .

Теперь сделаем второе упрощающее предположение. Будем считать, что сила сопротивления воздуха при вертикальном перемещении дробинок мала по сравнению с силой тяжести (в начальный момент времени она вообще равна нулю). Можно короче сформулировать это предположение так: будем считать, что дробинок перемещается в горизонтальном направлении с большой скоростью и заметно тормозится при этом (ведь сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости), а в вертикальном направлении она перемещается как свободно падающее (без сопротивления) тело по тому же закону (1):

$$y = \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2} \left( \frac{x}{v_{xcp}} \right)^2, \quad (3)$$

в который, однако, входит средняя горизонтальная скорость  $v_{xcp}$  на отрезке  $0x$ .

В этих предположениях уравнение (2) для горизонтального и вертикального движений примет вид

$$a_x = -\frac{\beta}{r} v_x^2, \quad a_y = g. \quad (4)$$

Решение второго уравнения уже найдено: это равноускоренное падение (3). Рассмотрим первое уравнение. Ускорение равно отношению изменения скорости  $\Delta v_x$  ко времени  $\Delta t$ , которое, в свою очередь, можно выразить через скорость  $v_x$ , а именно:  $\Delta t = \Delta x / v_x$ . Итак,

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = v_x \frac{\Delta v_x}{\Delta x},$$

и тогда первое уравнение можно сократить на  $v_x$  и получить

$$\Delta v_x = -\frac{\beta}{r} v_x \Delta x. \quad (5)$$

Это так называемое *релаксационное*

*уравнение*: изменение искомой величины (в данном случае – горизонтальной составляющей скорости) пропорционально самой величине. И решение этого уравнения известно – это *экспонента*. Но чтобы не пугать себя словами, посмотрим на рисунок 2 и заметим, что на начальном участке изменение величины  $v_x$  очень похоже на прямую

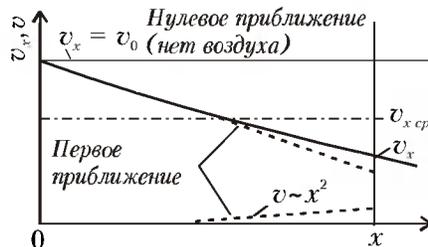


Рис. 2

(пунктир). Попробуем оценить изменение горизонтальной скорости, не решая уравнение (5) точно. Когда физики не могут (или не хотят) решать точно, они применяют *метод последовательных приближений*. Он «работает» так.

Если пренебречь сопротивлением воздуха, то решение известно:  $v_x = v_0$  – горизонтальная составляющая скорости не изменяется. Подставим это так называемое нулевое приближение в уравнение (5):

$$\Delta v_x \approx -\frac{\beta}{r} v_0 \Delta x$$

и получим уравнение для первого приближения. Видно, что в этом приближении скорость линейно уменьшается со временем:

$$v_x = v_0 \left( 1 - \frac{\beta}{r} x \right). \quad (6)$$

Это и есть пунктирная прямая на рисунке 2. Средняя скорость на участке  $0x$  в этом приближении равна (штрих-пунктир на рисунке)

$$v_{xcp} = v_0 \left( 1 - \frac{\beta}{2r} x \right).$$

Подставив это значение в (3), найдем уравнение баллистической кривой в первом приближении:

$$y = \frac{gx^2}{2v_0^2} \frac{1}{1 - \frac{\beta}{r} x}.$$

Предположим, что из ружья вылетели две дробинок радиусами  $r_1$  и  $r_2$ , которые пробили вертикальный лист бумаги, расположенный на расстоянии  $x = l$ , в точках  $y_1$  и  $y_2$ . Тогда из последнего соотношения получим два уравнения с двумя неизвестными, из которых найдем и начальную скорость

вылета, и коэффициент сопротивления дробинок:

$$v_0 = l \sqrt{\frac{g}{2y_1} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1 - \sqrt{y_1/y_2}}{r_1(1/r_2 - \sqrt{y_1/y_2}/r_1)}}}},$$

$$\beta = \frac{1 - \sqrt{y_1/y_2}}{\frac{l}{2} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{\sqrt{y_1/y_2}}{r_1} \right)}.$$

Можно ограничиться этим приближением, а можно пойти дальше. Подставив первое приближение (6) в правую часть уравнения (5), найдем второе приближение для скорости, и так далее. Все эти приближения *сойдутся* (как говорят математики) к точному решению для баллистической кривой:

$$y = \frac{g}{2} \left( \frac{x}{v_0} \right)^2 \left( \frac{r}{2\beta r} e^{2\beta x/r} - \frac{1}{x} \right),$$

где первый множитель есть  $y_0(x)$  (см. (1)).

И тут пора начать сомневаться. Ведь даже если эти две дробинок вытаскиваются одним пыхом – все равно они могут приобрести какие-то начальные вертикальные скорости. А если взять не две дробинок, а много дробинок двух сортов (с теми же радиусами  $r_1$  и  $r_2$ ), то они в процессе движения могут сталкиваться друг с другом или взаимодействовать через те возмущения, которые они производят в воздухе. И сами дробинок могут быть не строго шаровыми, что приведет к появлению «подъемной» силы (вверх или вниз) или боковых сил, или к вращению дробинок, или... И тогда мы получим на листе бумаги разброс точек, качественно показанный на рисунке 3, в

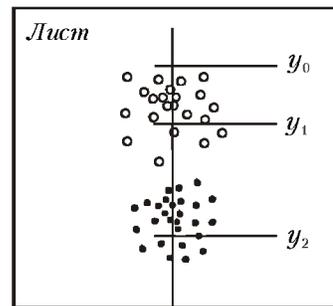


Рис. 3

котором  $y_1$  и  $y_2$  – это «центры тяжести» точек попадания частиц двух сортов. И, значит, траектория дробинок приобретет вероятностный смысл, а в обработке эксперимента придется использовать теорию ошибок. И тогда ...

Но это уже предмет будущих исследований наших читателей.

# Хаос молекул И ЗВЕЗД

**А. СТАСЕНКО**

**Д**АЛЕКО-ДАЛЕКО в глубинах Вселенной живет большое звездное облако, состоящее из одинаковых звезд типа нашего Солнца, которые летят равномерно во всех направлениях с одинаковыми средними скоростями. И средние расстояния между ними тоже одинаковы. Физик сказал бы, что это похоже на однородный изотропный газ. А газ, как сказал бы древний грек, это же просто хаос ( $\chi\acute{o}\sigma$ ).

Однако звезды, согласно закону всемирного тяготения, взаимодействуют друг с другом. Пролетая одна вблизи другой, они не могут двигаться по прямой, их траектории искривляются, так что издали кажется, что два упругих шарика столкнулись друг с другом и разлетелись под углом  $\chi$  с прежней относительной скоростью (рис.1). Но

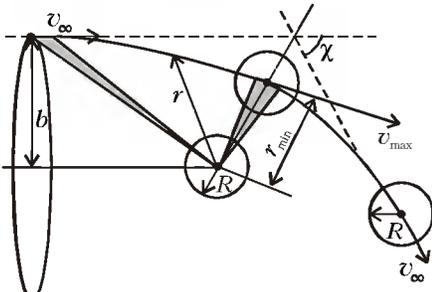


Рис. 1

что произойдет с их планетными системами — это совсем безразлично для их жителей. Для них важен вопрос, каково (хотя бы в среднем) время между столкновениями звезд в этом звездном облаке. И вообще: что такое «столкновение»? Ведь звезды взаимодействуют, в принципе, на любом расстоянии. (То же можно сказать о свободных электронах и протонах в газовой плазме. И даже нейтральные молекулы в «обычных» газах «чувствуют» друг друга издали благодаря электромагнитным полям, порождаемым движением электронов (см., например, статью «Любовь и ненависть в мире молекул» в «Кванте» №2 за 1994 г.).

И тут пора написать несколько формул.

Пусть наименьшее допустимое расстояние между звездами равно  $r_{\min}$ . Согласно второму закону Кеплера, площадь треугольника, «заметаемая» радиусом-вектором  $\vec{r}$  в единицу времени, остается постоянной. Пусть относительная скорость звезд на большом удалении друг от друга равна  $v_{\infty}$ , так называемое *прицельное расстояние* равно  $b$ , а наибольшая скорость при наибольшем сближении равна  $v_{\max}$ . Запишем утверждение второго закона Кеплера для двух заштрихованных треугольников:

$$\frac{1}{2} b v_{\infty} \Delta t = \frac{1}{2} r_{\min} v_{\max} \Delta t. \quad (1)$$

Здесь  $b$  и  $r_{\min}$  — высоты этих треугольников, а  $v_{\infty} \Delta t$  и  $v_{\max} \Delta t$  — их основания, т.е. расстояния, пройденные звездой за малое время  $\Delta t$ .

Ясно, что при сближении звезд их относительная скорость растет. За счет чего? Конечно, за счет работы силы притяжения  $F = -mmG/r^2$ . Это изменение скорости можно найти из второго закона Ньютона. А можно описать этот процесс на основе предположения о постоянстве суммарной механической энергии системы двух звезд. Иными словами, записать, что сумма их кинетической  $E_k$  и потенциальной  $E_p$  энергий одинакова при любом их расположении — например, при самом большом («бесконечном») и наименьшем расстояниях между ними:

$$E_{k_{\infty}} + 0 = E_{k_{\max}} + E_{p_{\min}},$$

или

$$\frac{mv_{\infty}^2}{2} + 0 = \frac{mv_{\max}^2}{2} + \left( -\frac{\alpha}{r_{\min}} \right). \quad (2)$$

Здесь «ноль» (в левой части) означает, что при бесконечном удалении друг от друга звезды не взаимодействуют, а слагаемое  $-\alpha/r_{\min}$  в правой части равно энергии их взаимодействия при  $r = r_{\min}$ . Тут уместно вспомнить, что эта энергия взаимодействия (потенциальная энергия) как раз и равна работе, которую нужно затратить, чтобы «вытащить»

на бесконечность одну звезду из потенциальной ямы, создаваемой другой звездой (рис.2). Поскольку сила притяжения обратно пропорциональна квадрату расстояния, работа против этой силы будет обратно пропорциональна первой степени расстояния, а коэффициент  $\alpha$ , конечно же, содержит произведение масс звезд и гравитационную постоянную:  $\alpha = 2m^2G$ .

Внимательный читатель может спросить, почему здесь появился множитель «2». В механике известно, что движение двух взаимодействующих частиц (например, двух тел, соединен-

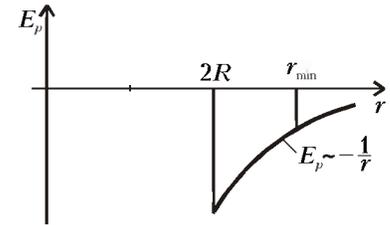


Рис. 2

ных одной пружинкой, двух гравитирующих масс, двух электрических зарядов) на расстоянии  $r$  можно свести к движению одной (так называемой приведенной) массы

$$\frac{m}{2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

с радиусом-вектором  $\vec{r}$ . Поскольку нас интересуют здесь только оценки порядков величин, не будем останавливаться на этом подробнее.

Выразим  $v_{\max}$  из равенства (1) и подставим в (2). Тогда получим

$$\left( \frac{b}{r_{\min}} \right)^2 = 1 + \frac{\alpha}{r_{\min} m v_{\infty}^2}. \quad (3)$$

Видно, что последнее слагаемое есть отношение потенциальной энергии взаимодействия звезд (при наибольшем сближении) к кинетической энергии их относительного движения. Если бы не было никакого взаимодействия ( $\alpha = 0$ ), то получилось бы  $b = r_{\min}$ , что естественно, так как звезды при этом двигались бы по прямым. Значит, взаимодействие приводит к увеличению прицельного расстояния, а именно — все звезды, центры которых на бесконечности попадут в круг радиусом  $b$ , пройдут от нашей звезды не далее чем на расстоянии  $r_{\min}$  (т.е. в этом смысле заведемо «столкнутся» с ней). Если среднее расстояние между звездами равно  $l$ , то концентрация звезд будет  $n = l^{-3}$ . Тогда «поток звезд» через круг с прицельным расстоянием  $b$  равен

$\pi b^2 n v_\infty$ , и, значит, среднее время между столкновениями звезд будет

$$\tau \sim \frac{1}{\pi b^2 n v_\infty} = \frac{l^3}{\pi b^2 v_\infty}. \quad (4)$$

Сделаем теперь численные оценки. Выберем  $r_{\min} = 2R$  ( $R$  – радиус звезды), как для жестких шаров; при этом эти шары «чиркнут» друг о друга. Пусть звезды обладают параметрами Солнца:  $R = 0,7 \cdot 10^9$  м и  $m = 2 \cdot 10^{30}$  кг, среднее расстояние между ними порядка одного светового года:  $l \approx 10^{16}$  м, а средняя относительная скорость  $v_\infty = 30$  км/с. Тогда получаем

$$\left(\frac{b}{2R}\right)^2 = 1 + \frac{2mG}{R} \frac{1}{v_\infty^2} = 1 + \left(\frac{v_{II}}{v_\infty}\right)^2 = 425,$$

где  $v_{II}$  – вторая космическая скорость, т.е. скорость «убегания» от звезды. Эта оценка показывает, что «сечение столкновения»  $\pi b^2$  заметно превосходит таковое для случая невзаимодействующих шаров, равное  $\pi(2R)^2$ . А для среднего времени между такими столкновениями из выражения (4) получим

$$\tau \sim \frac{(10^{16})^3}{\pi \cdot 425 (2 \cdot 0,7 \cdot 10^9)^2 \cdot 3 \cdot 10^4} \text{ с} \approx \approx 10^{32} \text{ с} \approx 3 \cdot 10^{24} \text{ лет}.$$

Конечно, экологи и политологи могут возразить: при «соприкосновении» звезд (когда  $r_{\min} = 2R$ ) перестанут существовать их планетные системы, а сами звезды еще до этого сильно вытянутся навстречу друг другу. Так что допустимое расстояние, с точки зрения целостности системы планет (по крайней мере, ближайших к своему светилу), по-видимому, должно превосходить орбиту Плутона, радиус которой составляет приблизительно десять тысяч радиусов Солнца, т.е. должно быть  $r_{\min} \geq 10^4 R$ . Тогда сечение взаимодействия вырастет в  $10^8$  раз, и во столько же раз изменится среднее «время жизни» планетных систем в нашем гипотетическом звездном газе. Все равно это время много больше времени существования известных на Земле цивилизаций.

В газовой плазме, содержащей положительные и отрицательные частицы, сила взаимодействия между парой частиц тоже обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, только она может быть как положительной, так и отрицательной (закон Кулона). В теории плазмы часто под сечением взаимодействия частиц понимают такое прицельное расстояние, для которого угол разворота частиц  $\chi$  после «столкновения» равен  $90^\circ$  (см. рис.1). А что же газ молекул?

Молекулы, как уже сказано, тоже взаимодействуют не совсем как жесткие шарики. Правда, их сила взаимодействия и потенциальная энергия изменяются с расстоянием гораздо резче, чем гравитационные силы ( $F \sim r^{-7}$ ,  $E_p \sim r^{-6}$ ), поэтому они «чувствуют» друг друга только на близких расстояниях, сравнимых с их размерами. Если учесть, что средняя кинетическая энергия теплового движения молекул пропорциональна температуре, то соотношение (3) можно записать в виде

$$\left(\frac{b}{2r_m}\right)^2 = 1 + \frac{\beta}{r_m^6 \cdot \frac{3}{2} kT},$$

где  $r_m$  – «радиус» молекулы,  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – температура. Отсюда видно, что именно можно понимать под «радиусом молекулы»  $r_m$ . Действительно, для высоких температур последний слагаемый можно пренебречь, тогда  $b$  стремится к  $2r_m$ , а сечение столкновения молекул будет  $4\pi r_m^2$ . В этих условиях молекулы быстро пролетают мимо друг друга, так что сила притяжения «не успевает поработать» над их сближением. Наоборот, при понижении температуры их движения становятся замедленными, сечение столкновения  $\pi b^2$  растет, появляется возможность конденсации. Все тела во Вселенной тоже стремятся «сконденсироваться», но, слава Богу, никак не могут этого сделать благодаря начальным импульсам, прицельным расстояниям (и другим факторам).

Конечно, среднее время между столкновениями для молекул много меньше, чем для звезд. Например, в воздухе при комнатных условиях оно порядка наносекунды. Действительно, принимая радиус молекулы  $r_m \sim 3 \cdot 10^{-10}$  м, концентрацию  $n \sim 3 \cdot 10^{25}$  м<sup>-3</sup>, скорость теплового движения  $v_\infty \sim 500$  м/с, по формуле (4) получим  $\tau \sim 10^{-9}$  с. При этих столкновениях сами «планетные системы» молекул (их электронные облака) существенно участвуют в процессе взаимодействия: в отличие от звезд, здесь сила притяжения сменяется силой отталкивания.

Вспомним еще, что великие физики, внесшие немалый вклад в *кинетическую теорию* вещества, любили лично рассчитывать траектории взаимодействующих тел. В качестве примера на рисунке 3 приведены гиперболические траектории альфа-частиц вблизи тяжелого атомного ядра, построенные самим Эрнестом Резерфордом в 1911 году. Около каждой траектории написано значение угла разворота альфа-частицы после столкновения (сравните с рисунком 1). В этом случае электричес-

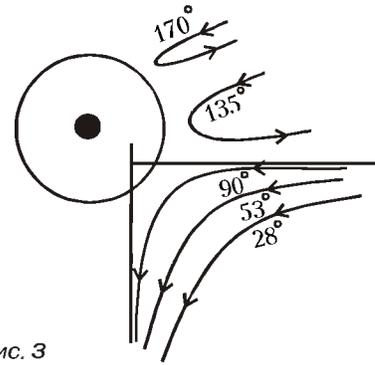


Рис. 3

кие заряды обеих частиц (альфа-частицы и ядра) имеют один знак и  $F \sim r^{-2}$ .

На рисунке 4 изображено несколько траекторий нейтральных молекул относительно такой же фиксированной молекулы  $S$  для случая их взаимодействия с силой, обратно пропорциональной пятой степени расстояния ( $F \sim r^{-5}$ ). Эти молекулы «изобрел» сам Джеймс Клерк Максвелл (они так и называются «максвелловскими молекулами»), и он же сделал этот рисунок еще в прошлом веке.

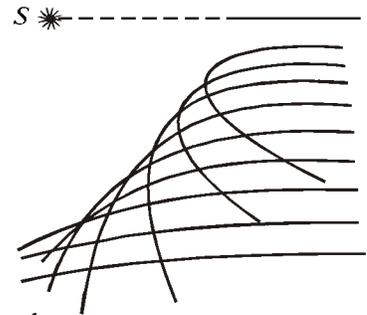


Рис. 4

Хотя в приведенных примерах взаимодействующие частицы считались точками, из рисунков ясно видно, что при «столкновении» они как бы натыкаются на невидимую преграду отнюдь ненулевых размеров. А ведь все эти молекулы, ядра, альфа-частицы, в отличие от звезд, трудно разглядеть. Как тут не восхититься человеческим разумом! Что и сделал еще один замечательный физик и философ: «Все тела, небесный свод, звезды, Земля и ее царства не идут в сравнение с самым низким из умов, ибо ум несет в себе знание обо всем этом, тела же не знают ничего» (Блез Паскаль).

# Зачем быть конденсатору в магнитном поле?

**А. СТАСЕНКО**

ТАК УЖ повелось издавна, что в конденсаторе, этом хранителе зарядов, существует электрическое поле, а в катушке с током — магнитное. Но повесить конденсатор в магнитном поле — такое могло прийти в голову только очень Любопытному ребенку. И не зря — он узнал нечто новое.

А дело было так. Смастерил Любопытный ребенок конденсатор из двух длинных коаксиальных цилиндров с мало отличающимися радиусами  $a$  и  $b$ , так что их разность, т.е. ширина зазора  $b - a = l$ , много меньше любого из этих радиусов ( $l \ll a < b$ ), да и повесил его вертикально в вертикальном же магнитном поле  $\vec{B}_y$ , причем так, что конденсатор мог вращаться вокруг своей оси совсем без трения (см. рисунок).

На внутренний цилиндр он поместил положительный заряд  $+q_0$ , на внешний — отрицательный  $-q_0$ . В результате между обкладками конденсатора возникло радиальное электрическое поле  $E_r$ . Да вот беда: конденсатор оказался заполненным веществом, обладающим электропроводностью, так что началась утечка заряда и возник радиальный электрический ток. Но на каждый за-

ряд  $e_0$ , движущийся поперек линий магнитного поля, действует, как известно, сила Лоренца, перпендикулярная обоим векторам — скорости заряда  $\vec{v}_r$  и индукции магнитного поля  $\vec{B}_y$ , а значит, направленная по касательной к окружности, и равная

$$F_\varphi = e_0 v_r B_y$$

(индексы у букв как раз и подчеркиваются взаимную перпендикулярность этих трех векторов).

Если концентрация движущихся зарядов  $n$ , то на единицу объема будет действовать сила, ее можно назвать *объемной плотностью силы*,

$$f_\varphi = nF_\varphi = ne_0 v_r B_y.$$

Поскольку эта сила направлена по касательной, то весь конденсатор начнет вращаться. Цилиндрический слой вещества между обкладками конденсатора и связанные с ним обкладки будут ускоряться в своем вращательном движении под действием суммарной силы, действующей на весь объем  $2\pi a l h$  и равной

$$f_\varphi \cdot 2\pi a l h = ne_0 v_r B_y \cdot 2\pi a l h$$

(тут-то Любопытному ребенку и пригодились предположение о тонкости зазора между обкладками конденсатора — а то пришлось бы интегрировать по объему).

Итак, уравнение второго закона Ньютона, описывающего ускоренное вращательное движение конденсатора (пусть его масса  $m$ ) можно записать в виде

$$m \frac{dv_\varphi}{dt} = (ne_0 v_r)(2\pi a h) \cdot l B_y.$$

Выражение в первой скобке — это плотность тока  $\vec{j}_r = ne_0 \vec{v}_r$ , а во второй — площадь обкладок  $S = 2\pi a h$  (она почти одинакова для обеих обкладок, опять же в силу малости зазора между ними). Но если плотность тока умножить на поперечную площадь, получится пол-

ный ток  $I = \vec{j}_r S$ . Таким образом,

$$d(v_\varphi m) = l B_y (I dt).$$

Снова не напрасно появились скобки. В скобках справа заключено изменение положительного заряда на внутренней обкладке:

$$dq = -I dt$$

(знак «минус» указывает на тот факт, что положительный радиальный ток уменьшает положительный заряд). Получилось, что приращение импульса конденсатора во вращательном движении  $d(mv_\varphi)$  пропорционально убыли заряда конденсатора. Значит, когда конденсатор полностью разрядится, его «вращательный» импульс достигнет максимально возможной величины

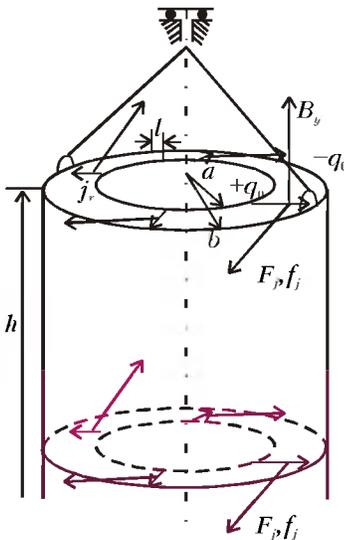
$$mv_\varphi = l B_y q_0.$$

Образованный физик предпочел бы (в случае вращательного движения) говорить не об импульсе (поскольку центр масс конденсатора остается в покое), а о *моменте импульса*. Он умножил бы силу и импульс силы на плечо  $a$  (расстояние до оси вращения) и получил бы совсем грамотное уравнение

$$mv_\varphi a = a l B_y q_0$$

для момента импульса конденсатора. Но дело не в этой тонкости (тем более, что Любопытному ребенку многое простительно). Возникает вопрос: откуда взялся вращательный импульс (или момент импульса) у конденсатора, который первоначально покоился? Ведь, согласно фундаментальным законам физики, эти величины не могут уничтожаться или возникать из ничего. Вывод один: они раньше принадлежали электромагнитному полю. В начальный момент конденсатор покоился, но существовали поля  $E_r$  и  $B_y$ . По мере разрядки конденсатора уменьшалось электрическое поле, и момент импульса электромагнитного поля постепенно переходил к ускоряющемуся (во вращательном движении) конденсатору. Наконец, электрическое поле исчезло совсем, и вместе с этим перестало существовать электромагнитное поле (осталось только магнитное), а конденсатор приобрел наибольшую угловую скорость.

Оказывается, — сказал себе Любопытный ребенок, — *электромагнитное поле обладает атрибутами механики: плотностью импульса и момента импульса!*



# Как зависит $U$ от $p$ ?

**А. ЧЕРНОУЦАН**

**С** ФОРМУЛИРУЕМ вопрос более конкретно: как меняется внутренняя энергия вещества при повышении давления, если температура при этом остается постоянной, т.е. происходит изотермическое сжатие? Оговоримся сразу, что речь идет не о любых веществах, а только о достаточно простых. Простых в том смысле, что они, во-первых, являются однородными и изотропными. (Мы тем самым отвлечемся от фазовых переходов, т.е. будем считать, что вещество состоит из одной фазы.) Во-вторых, будем для ясности предполагать, что рассматриваемые вещества являются однокомпонентными, а не смесью различных химических компонентов с какими-то концентрациями. Равновесное состояние таких веществ — их называют термодинамически простыми — определяется только двумя параметрами, например температурой  $T$  и давлением  $p$ .

Последняя фраза ясно показывает, что внутренняя энергия, вообще говоря, зависит не только от температуры, но и от давления. Тем не менее, многие школьники считают, что внутренняя энергия зависит только от температуры. Это связано с тем, что понятие внутренней энергии наиболее подробно обсуждается при изучении идеального газа, для которого внутренняя энергия действительно зависит только от температуры.

Вспомним, что температура есть мера средней кинетической энергии молекул. Энергия идеального газа определяется только кинетической энергией молекул, а потенциальная энергия их взаимодействия пренебрежимо мала. Однако в случае жидкостей потенциальная энергия составляет существенную часть общей энергии. Это видно хотя бы из того, что при испарении жидкости затрачивается много энергии, которая подводится к ней в виде тепла. Испарение происходит при постоянной температуре, и подведенное тепло идет, главным образом, на увеличение потенциальной энергии взаимодействия молекул.

Однако и в случае жидкостей и твердых тел, когда внутренняя энергия

должна зависеть от давления, школьникам нигде не приходится с этой зависимостью сталкиваться. Например, в задачах на тепловой баланс, даже когда это прямо не указывается, всегда предполагается, что все процессы теплообмена происходят при постоянном внешнем давлении. Удельные теплоемкости, которые используются в этих задачах, это теплоемкости при постоянном давлении  $c_p$  (хотя у жидкостей  $c_p$  и теплоемкость при постоянном объеме  $c_v$  отличаются очень мало). А как можно оценить, на сколько изменяется внутренняя энергия жидкости, если меняется не температура, а, наоборот, только давление?

Отметим сразу, что вопрос о том, как изменяются свойства вещества под воздействием давления, отнюдь не вызван праздным любопытством, а является весьма интересным и важным. Для изучения таких изменений ученые строят мощные прессы, стараясь создать как можно более высокие давления и измерить параметры вещества в этих экстремальных условиях. Но нужны ли столь высокие давления и дорогие прессы? Опираясь на простые оценки, которые мы сделаем при не очень высоких давлениях, постараемся понять, при каких давлениях можно ожидать самых интересных изменений в свойствах веществ.

В качестве объекта исследования выберем какую-нибудь жидкость, например ртуть, и подвергнем ее изотермическому сжатию от нормального давления  $p_0 = 1$  атм до давления  $p$ . Объем ртути при этом уменьшается пропорционально изменению давления:

$$\frac{\delta V_T}{V} = -K_T \Delta p,$$

где  $K_T$  — так называемая изотермическая сжимаемость вещества, значение которой можно найти в соответствующей таблице. Знак « $-$ » показывает, что при увеличении давления объем уменьшается. Получаем

$$\delta V_T = -K_T V (p - p_0).$$

Для ртути  $K_T = 4 \cdot 10^{-11}$  Па $^{-1}$ , значит, при изменении давления на 1 атм отно-

сительное изменение объема составляет величину порядка  $10^{-5}$  (у большинства жидкостей сжимаемость на порядок выше — у воды, например,  $K_T \approx 4 \cdot 10^{-10}$  Па $^{-1}$ ). Ясно, что при таком ничтожном изменении объема работа

$$\begin{aligned} A_T &= p_{cp} \delta V_T = -\frac{p_0 + p}{2} K_T V (p - p_0) = \\ &= -\frac{1}{2} K_T (p^2 - p_0^2) m \end{aligned}$$

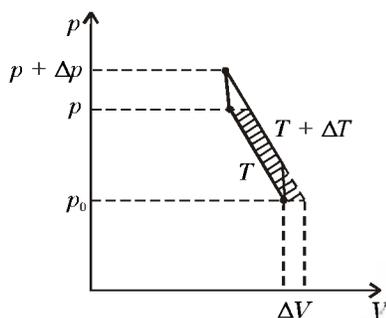
будет очень мала: при повышении давления до  $p = 2$  атм работа в расчете на  $m = 1$  кг ртути (плотность ртути  $\rho = 13,6 \cdot 10^3$  кг/м $^3$ ) составит примерно  $4 \cdot 10^{-5}$  Дж. (Для воды  $A \approx 6 \cdot 10^{-3}$  Дж.) Правда, сосчитав работу, мы ничего пока не можем сказать о том, сколько пришлось забрать (или подвести) тепла для поддержания постоянной температуры, а значит, не можем узнать, как изменилась внутренняя энергия вещества. В рамках первого начала (закона) термодинамики преодолеть эту неопределенность невозможно.

Однако, если воспользоваться даже теми немногими сведениями, которые можно почерпнуть из школьного учебника о втором начале термодинамики, мы сможем продвинуться гораздо дальше. А именно, воспользуемся теоремой Карно, которая утверждает, что все обратимые машины, получающие тепло только от резервуара с температурой  $T_1$  и отдающие тепло только резервуару с температурой  $T_2$ , имеют один и тот же КПД

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

независимо от того, что именно используется в качестве рабочего тела машины. Чтобы с помощью теоремы Карно получить какое-нибудь конкретное физическое соотношение, надо построить бесконечно узкий цикл Карно, где тепло отдается при температуре  $T$ , а получается при температуре  $T + \Delta T$ , найти получаемое тепло  $Q_1$  и работу  $\delta A$ , вычислить КПД  $\eta = \delta A / Q_1$  и приравнять его к  $\eta = \Delta T / T$ . Этот метод называется методом циклов. (В напечатанной ранее статье «О ледниках, скороварках и теореме Карно» — см. «Квант» №3/91 или Приложение к журналу «Квант» №4/95 — этот метод применялся для определения того, как смещается точка плавления (кипения) при увеличении давления.)

Как же сформировать цикл Карно в нашем случае, чтобы с его помощью выяснить, какое количество теплоты (и какого знака) мы должны были подве-



сти к ртути при ее изотермическом сжатии? Поступим следующим образом (см. рисунок).

После окончания изотермического сжатия подвергнем жидкость небольшому *адиабатическому* сжатию, т.е. увеличим давление на  $\Delta p$  без подвода тепла. При этом температура жидкости изменится на  $\Delta T$ . Увеличится температура или уменьшится, т.е. знак  $\Delta T$ , мы выясним позже, а сейчас заметим, что этот знак очевидным образом связан с тем, подводили мы тепло или отбирали при изотермическом сжатии. Действительно, если для поддержания постоянной температуры мы были вынуждены тепло отбирать, то после того, как мы перестанем это делать, жидкость будет нагреваться ( $\Delta T > 0$ ). (Именно так, как мы увидим, обстоит дело для большинства жидкостей. Это может быть не так только для самой необычной жидкости — для воды.) Следующим шагом изотермически (при температуре  $T + \Delta T$ ) уменьшим давление до значения, чуть большего  $p_0$ , после чего адиабатически вернем жидкость в начальное состояние.

Получившийся цикл Карно, хотя и изображен на рисунке сильно растянутым по горизонтали (на самом деле все линии на графике почти вертикальны), имеет вид узкой полоски. Работа  $\delta A$  в цикле равна площади этой полоски. Проведем из двух вершин цикла два горизонтальных отрезка — две изоба-

ры при давлениях  $p_0$  и  $p$ . Площадь заштрихованной на рисунке фигуры, состоящей из двух изотерм и двух изобар, практически равна площади нашего цикла Карно. Сосчитать эту площадь нетрудно: она равна произведению  $p - p_0$  на  $\Delta V$ , а изменение объема, вызванное изменением температуры жидкости на  $\Delta T$  при постоянном давлении, может быть выражено через обычный коэффициент теплового расширения  $\alpha$ :

$$\frac{\Delta V}{V} = \alpha \Delta T.$$

Это соотношение позволит нам не только вычислить  $\Delta V$ , но и выяснить, когда  $\Delta T$  положительно, а когда отрицательно. Так, если коэффициент теплового расширения положителен (что верно для большинства нормальных жидкостей), то  $\Delta T > 0$ , значит, при изотермическом сжатии тепло у жидкости надо забирать, а при адиабатическом сжатии жидкость нагревается. Если же коэффициент теплового расширения отрицателен (как для воды в интервале от 0 до 4 °С), то при адиабатическом сжатии жидкость охлаждается, а при изотермическом — поглощает тепло.

Перейдем к расчетам. Работа за цикл равна

$$\delta A = (p - p_0)\Delta V = (p - p_0)\alpha V \Delta T.$$

Подставим это выражение в формулу для КПД цикла Карно и запишем теорему Карно:

$$\frac{(p - p_0)\alpha V \Delta T}{Q} = \frac{\Delta T}{T},$$

откуда получим, что количество теплоты, отобранное у жидкости при изотермическом сжатии, равно

$$Q = (p - p_0)\alpha VT = \frac{\alpha T(p - p_0)}{\rho} m.$$

Сделаем численные оценки. Для ртути  $\alpha \approx 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$  (при температуре 300 К), т.е. при изотермическом сжатии до  $p = 2$  атм от 1 кг ртути надо забрать примерно 0,4 Дж тепла. (Если тепло не отводить, т.е. увеличивать давление адиабатически, то ртуть нагреется примерно на 0,003 К, так как удельная теплоемкость ртути 138 Дж/кг.) Сравнивая с работой, которая совершается при сжатии ртути до 2 атм, видим, что работа в  $10^4$  раз меньше отбираемого количества теплоты. Это же самое верно и для изменения внутренней энергии: при изотермическом сжатии изменение внутренней энергии

$$\Delta U = -\frac{\alpha T(p - p_0)}{\rho} m$$

на несколько порядков больше работы по сжатию жидкости. Вспомним, что при изотермическом сжатии идеального газа  $\Delta U = 0$ , а работа равна подведенному количеству теплоты.

При каких же давлениях можно ожидать значительного изменения структуры и свойств жидкостей и качественно нового ее поведения? Оценим, при каких давлениях изменение внутренней энергии будет равно потенциальной энергии взаимодействия атомов 1 кг ртути, которую будем считать равной удельной теплоте испарения  $r$ . Для ртути  $r \approx 3 \cdot 10^5$  Дж/кг, поэтому равенство  $\Delta U = r$  наступит при давлении  $p \sim 10^6$  атм. В современных прессах удастся достичь давлений в несколько десятков тысяч атмосфер, причем в достаточно больших объемах вещества, когда можно производить тщательное исследование свойств этого вещества. Рекордных же давлений в миллионы атмосфер, к которым, как теперь понятно, не зря стремятся ученые, сегодня удастся достичь лишь на короткое время и в ничтожных объемах вещества — на кончике алмазной иглы.

## Дорогие читатели!

**Мы надеемся, что вы не забудете подписаться на наш журнал на первое полугодие 1999 года. Наш подписной индекс 70465.**

**Оформить подписку можно и в помещении редакции — это избавит вас от возможных недоразумений, связанных с доставкой через почту.**

**В редакции можно также приобрести журналы «Квант» и Приложения к ним за прошлые годы.**

**Наш адрес: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64А, редакция журнала «Квант». Телефон: 930-56-48.**

**Мы ждем вас ежедневно с понедельника по пятницу с 11 до 16 часов. Звоните и приходите!**

# Неожиданная поворотная гомотетия

А. СПИРОВ

Я считаю формальную строгость обязательной и думаю, что в конечном счете после большой (и обычно полезной для окончательного понимания) работы она может быть соединена (при изложении важных, т. е. по сути простых результатов) с полной простотой и естественностью. Единственное средство добиться осуществления этого — требовать логической отчетливости даже там, где она пока обременительна.

А.Н. Колмогоров

**В** СТАТЬЕ «Покрывтия полосками» авторы пользовались тем, что все вершины наибольшего квадрата, который можно расположить в данном треугольнике  $ABC$ , должны лежать на сторонах этого треугольника. Но так ли уж это очевидно?

Задумавшись над этим вопросом, мы вспомнили такую задачу:

**Задача 1.** Впишите в треугольник  $ABC$  наибольший возможный треугольник, подобный данному треугольнику  $XYZ$  (рис. 1).

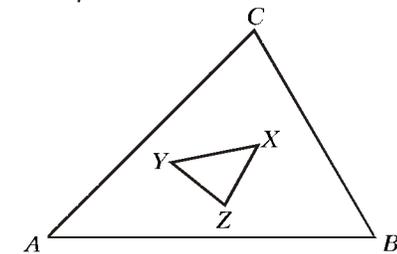


Рис. 1

Ответ в этой задаче вполне бесхитростный: одна из сторон наибольшего вписанного треугольника должна лечь на сторону треугольника  $ABC$ .

Намного интереснее решение. Оказывается, существует семейство вписанных в треугольник  $ABC$  треугольников, получающихся один из другого поворотной гомотетией. Об этом красивом и удивительном явлении, а также о некоторых свойствах вписанных друг в друга многоугольников рассказано ниже.

## Как вписать в треугольник квадрат?

Начнем с классической задачи:

**Задача 2.** Впишите в данный треугольник  $ABC$  квадрат, две вершины

которого лежат на  $AB$ , а две другие — на двух других сторонах (рис. 2).

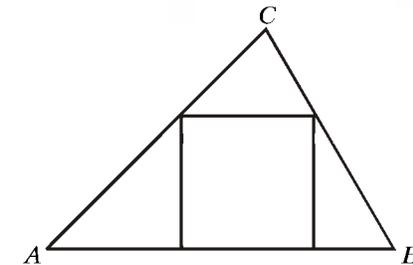


Рис. 2

Американский математик Пойа в книге «Как решать задачу?» изложил решение этой задачи в форме диалога учителя с учеником:

Учитель: — Что неизвестно?

Ученик: — Квадрат.

— Что дано?

— Только треугольник, больше ничего.

— Что надо сделать?

— Четыре вершины квадрата должны лежать на сторонах треугольника: две из них — на основании и по одной — на боковых сторонах.

— Бывает ли такое?

— Конечно, да.

— Для всякого ли треугольника  $ABC$  такой квадрат можно построить?

— Нет. Например, угол  $A$  может быть тупым (рис. 3).

— А если углы  $A$  и  $B$  оба нетупые, квадрат обязательно существует?

— Наверно. Хотя точно я не знаю.

— Нельзя ли решить более простую задачу? Например, для прямого угла  $A$ ?

— Конечно, это очень легко: вершина на квадрата будет на биссектрисе угла

$A$ . Но я не понимаю, как это обобщить: не проводить же мне биссектрису этого угла в общем случае! От нее никакой пользы нет!

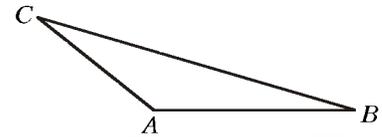


Рис. 3

— Если задача не получается, попытайтесь удовлетворить не все сразу, а только некоторые ее требования.

— Я могу нарисовать квадрат, две вершины которого лежат на  $AB$ .

— Сколько таких квадратов?

— Бесконечно много. Среди них есть совсем маленькие, есть побольше. Мне кажется, если взять такой маленький квадратик и начать его потихоньку увеличивать, то он упрется в стороны треугольника. Может быть, искомый квадрат — это самый большой из квадратов с основаниями на  $AB$ , помещающийся в треугольнике?

— Вы правы, но пока не знаете, как это доказывается. Не будем слишком увлекаться. Напоминаю: требовалось построить квадрат циркулем и линейкой! Лучше подумайте, нельзя ли сделать чуть больше, чем Вы только что сделали? Как построить квадрат с тремя вершинами на сторонах треугольника?

— Иными словами, как нарисовать квадрат в момент, когда он одной своей вершиной уперся в  $AC$ ?

— Да.

— Я могу взять точку  $K$  на луче  $AC$  и опустить перпендикуляр  $KL$  на  $AB$  (рис. 4). Квадрат  $KLMN$  по известной

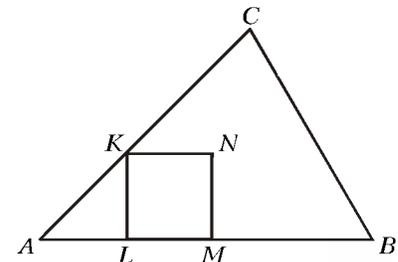


Рис. 4

стороне  $KL$  строится.

— Таких квадратов можно построить много. Иначе говоря, квадрат не определен однозначно той частью условий, которую мы сохранили. Как он может меняться?

— Не знаю.

— Три вершины квадрата лежат на сторонах треугольника, а четвертая

вершина пока не там, где она должна быть. Квадрат может меняться; его четвертая вершина может перемещаться. Как она может перемещаться?

— Все равно не понял.

— Поэкспериментируйте. Постройте еще несколько таких квадратов. Начертите маленькие и большие квадраты. Где может находиться четвертая вершина квадрата, если две его вершины лежат на одной стороне данного остроугольного угла, а третья — на другой? Иными словами, как перемещается четвертая вершина, когда квадрат меняется?

Поля уверен, что после такой обстоятельной подсказки ученик обязательно

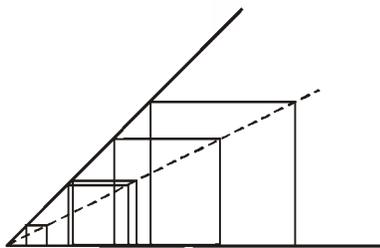


Рис. 5

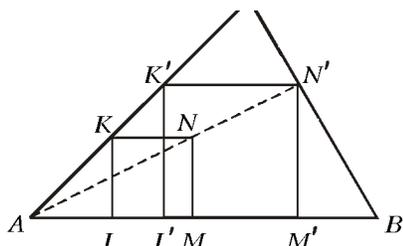


Рис. 6

нарисует что-то вроде рисунка 5 и смекнет, что вершина  $N'$  искомого квадрата — это точка пересечения луча  $AN$  с отрезком  $BC$  (рис. 6).

### Как вписать треугольник, гомотетичный данному?

Теперь мы легко справимся со следующей задачей:

**Задача 3.** Разместите в данном треугольнике  $ABC$  наибольший треугольник  $X'Y'Z'$ , стороны которого параллельны сторонам данного треугольника  $XYZ$ .

**Решение.** Параллельным переносом можно свести задачу к случаю, когда вершина  $X$  лежит на стороне треугольника  $ABC$  (рис.7). «Раздутием» (точнее говоря, гомотетией) с центром  $X$  получим треугольник  $XY_1Z_1$ , две вершины которого лежат на сторонах  $\triangle ABC$ . Осталось применить гомотетию с центром  $C$  — и мы получим треугольник  $X'Y'Z'$ , все верши-

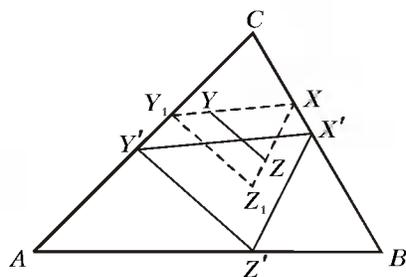


Рис. 7

ны которого лежат на сторонах треугольника  $ABC$ .

«Очевидно», что треугольник  $X'Y'Z'$  — наибольший возможный. Столь же «очевидно», что он гомотетичен или равен треугольнику  $XYZ$ .

Если задуматься над доказательствами последних двух утверждений, то станет ясно, что лучше было рассуждать не так, как это делали мы, а следующим образом.

Проведем через вершины треугольника  $XYZ$  прямые параллельно сторонам треугольника  $ABC$  (рис. 8). Треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  с параллельными сторонами подобны, а прямые,

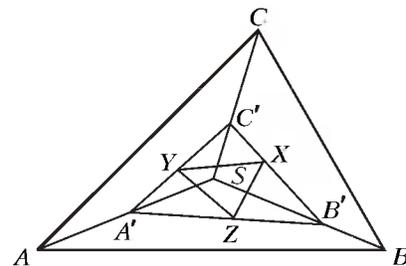


Рис. 8

соединяющие соответствующие вершины, пересекаются в одной точке  $S$  — центре гомотетии.

Последнее утверждение становится очевидным, если мы приподнимем треугольник  $A'B'C'$  над плоскостью чертежа. Получим в параллельной плоскости треугольник  $A''B''C''$ . Три плоскости боковых граней усеченной пирамиды, основаниями которой служат треугольники  $ABC$  и  $A''B''C''$ , пересекаются в одной точке (рис. 9). В этой точке пересекаются и продолжения боковых ребер  $AA''$ ,  $BB''$ ,  $CC''$  пирамиды. Спроецировав пирамиду на исходную плос-

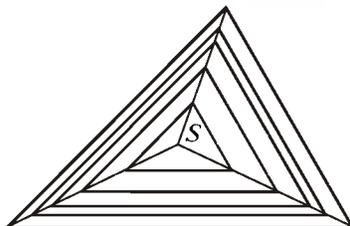


Рис. 9

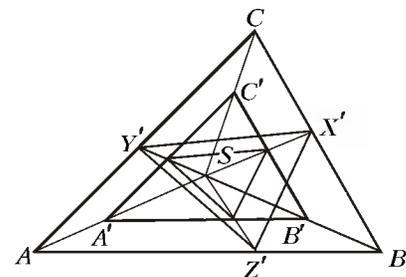


Рис. 10

кость, получим, что упомянутые три прямые действительно пересекаются в одной точке  $S$ .

Гомотетией с центром  $S$  из треугольника  $XYZ$  можно получить треугольник  $X'Y'Z'$ , вершины которого лежат на сторонах  $\triangle ABC$  (рис.10).

**Упражнение 1.** Докажите для любого треугольника неравенство  $2r \leq R$ , где  $r$  и  $R$  — радиусы вписанной и описанной окружностей.

**Указание.** Рассмотрите окружность радиусом  $R/2$ , описанную вокруг треугольника, образованного средними линиями. Проведите касательные к ней, параллельные сторонам исходного треугольника.

### Семейство вписанных подобных треугольников

Наше решение задачи 1 основано на том, что треугольник  $XYZ$ , вписанный в данный  $\triangle ABC$ , порождает семейство подобных вписанных треугольников. Для построения этого семейства нам потребуется один из красивейших геометрических фактов.

**Задача 4.** Если точки  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  лежат, соответственно, на прямых  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ , то описанные окружности треугольников  $AYZ$ ,  $CXY$  и  $BZX$  пересекаются в одной точке.

**Решение.** Рассмотрим точку  $M$  пересечения описанных окружностей треугольников  $AYZ$  и  $CXY$  (рис. 11). Поскольку сумма противоположных углов вписанного четырехугольника рав-

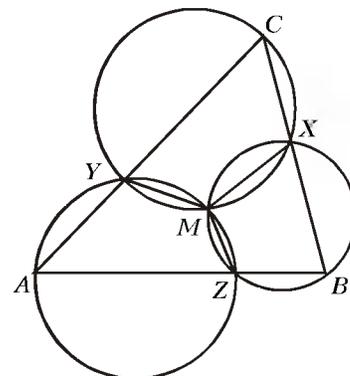


Рис. 11

на  $180^\circ$ , имеем:

$$\angle YMZ = 180^\circ - \angle A,$$

$$\angle YMX = 180^\circ - \angle C.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \angle XMZ &= 360^\circ - (180^\circ - \angle A) - \\ &\quad - (180^\circ - \angle C) = \angle A + \angle C, \end{aligned}$$

так что сумма противоположных углов четырехугольника  $BXMZ$  равна  $\angle B + \angle A + \angle C = 180^\circ$ . Значит, вокруг четырехугольника  $BXMZ$  и в самом деле можно описать окружность.

*Замечание.* На рисунке 12 показано расположение окружностей и точек,

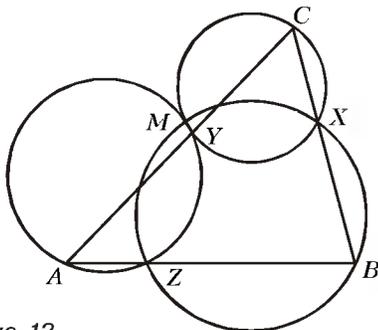


Рис. 12

отличное от разобранного нами. Для действительно полного решения задачи 4 следовало либо разобрать все возможные случаи, либо предложить решение, охватывающее все случаи сразу. Прodelайте эту работу!

Мы готовы решать задачу 1. Рассмотрим  $\triangle XYZ$ , вписанный в  $\triangle ABC$ . Пусть  $M$  — точка пересечения описанных окружностей треугольников  $AZY$ ,  $CXY$  и  $BZX$ . Повернем лучи  $MX$ ,  $MY$  и  $MZ$  на некоторый угол и обозначим точки пересечения полученных лучей со сторонами треугольника  $ABC$  через  $X'$ ,  $Y'$  и  $Z'$  соответственно (рис. 13).

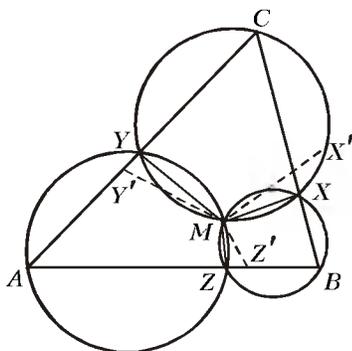


Рис. 13

По свойству вписанного четырехугольника,

$$\angle MMX' = 180^\circ - \angle MYC = \angle MYU'.$$

Аналогично можно доказать, что  $\angle MYU' = \angle MZZ'$ . Мы приходим к неожиданному выводу: треугольники  $MXX'$ ,  $MYU'$  и  $MZZ'$  подобны! Значит,  $\triangle X'Y'Z'$  подобен  $\triangle XYZ$  (и даже получается из него поворотной гомотетией с центром  $M$ ).

Перемещая точку  $X'$  по отрезку  $BC$ , мы получим целое семейство вписанных в  $\triangle ABC$  треугольников. Размеры треугольника  $X'Y'Z'$  тем больше, чем больше расстояние  $MX'$ . Поэтому размеры вписанного треугольника можно увеличивать до тех пор, пока одна из его вершин не упрется в вершину треугольника  $ABC$ .

**Упражнение 2.** Завершите решение задачи 1.

### Наименьший вписанный треугольник

Решив задачу о наибольшем вписанном в  $\triangle ABC$  треугольнике, подобном данному треугольнику  $XYZ$ , спросим себя: как получить не наибольший, а *наименьший* треугольник?

Ответ очевиден: размеры треугольника  $X'Y'Z'$  тем меньше, чем меньше длина отрезка  $MX'$ . Значит, в случае остроугольных треугольников (мы наложим это требование, чтобы основание опущенного из  $M$  перпендикуляра попало на саму сторону, а не на продолжение) наименьшим является треугольник с вершинами в основаниях перпендикуляров, опущенных из точки  $M$  на стороны треугольника  $ABC$ . (Такой треугольник называется *педальным* треугольником. О многих интересных свойствах педальных треугольников рассказано в книге Г.Коксетера и С.Грейгера «Новые встречи с геометрией» — М.: Наука, 1978.)

Частный случай рассмотренной задачи был предложен десятиклассником на московской олимпиаде 1998 года:

**Задача 5.** На пол положили вытисленный из фанеры равносторонний треугольник  $ABC$  и вбили три гвоздя, по одному вплотную к каждой стороне треугольника. Первый гвоздь делит сторону  $AB$  в отношении  $1:3$ , считая от вершины  $A$ . Второй гвоздь делит сторону  $BC$  в отношении  $2:1$ , считая от вершины  $B$  (рис. 14).

В каком отношении делит сторону  $CA$  третий гвоздь, если треугольник невозможно повернуть, не отрывая от пола?

Прежде чем решать задачу, вообразите, что гвозди вбиты в середины сторон равностороннего треугольника  $ABC$ , и подумайте, почему треугольник «прибит» этими гвоздями. Теперь можно заняться самой задачей.

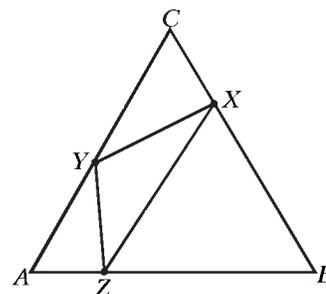


Рис. 14

**Решение. Первый способ.** Если бы  $\triangle XYZ$  не был наименьшим из семейства вписанных в  $\triangle ABC$  подобных треугольников, то можно было бы уменьшать его размеры при помощи поворотной гомотетии из предыдущего раздела статьи. Значит, треугольник  $XYZ$  должен быть педальным треугольником, т.е. перпендикуляры, восстановленные в точках  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  к сторонам треугольника  $ABC$ , должны пересекаться в одной точке  $S$  (рис. 15).

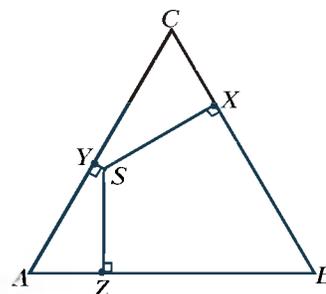


Рис. 15

Теперь легко найти ответ — вычислить, в каком отношении точка  $Y$  должна делить сторону  $AC$ .

**Упражнение 3.** Сделайте это, воспользовавшись равенством

$$\begin{aligned} (AZ^2 - ZB^2) + (BX^2 - XC^2) + (CY^2 - YA^2) &= \\ &= (AS^2 - SB^2) + (BS^2 - SC^2) + \\ &\quad + (CS^2 - SA^2) = 0. \end{aligned}$$

Большинство участников олимпиады, разумеется, ничего не знало о педальных треугольниках. Они рассуждали следующим образом.

**Второй способ.** Если перпендикуляр, восстановленный в точке  $Y$  к стороне  $AC$ , не проходит через точку пересечения перпендикуляров, восстановленных в точках  $X$  и  $Z$  к сторонам  $BC$  и  $AB$ , то отметим внутри образованного перпендикулярами треугольника некоторую точку  $O$  (рис. 16). Поскольку углы  $OZB$ ,  $OYA$  и  $OXC$  острые, гвозди не

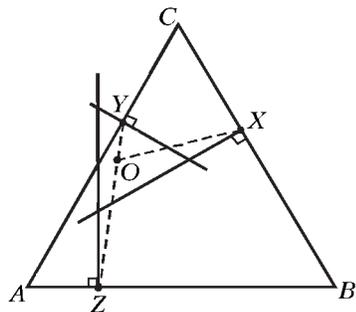


Рис. 16

помешают повороту треугольника  $ABC$  вокруг точки  $O$  против часовой стрелки.

**Упражнение 4.** Любителю строгих рассуждений могло показаться, что мы рассмотрели не все возможные расположения точки  $Y$ . Придумайте «абсолютно строгое» решение задачи 5, не использующее ни одного чертежа.

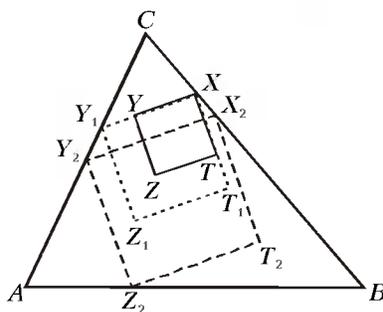


Рис. 17

### Наибольший вписанный квадрат

Докажем напоследок, что все четыре вершины наибольшего квадрата, который можно расположить в данном треугольнике  $ABC$ , обязаны лежать на сторонах треугольника. Рассмотрим квадрат, содержащийся в  $\triangle ABC$ . Па-

раллельным переносом одну из вершин  $X$  квадрата поместим на границу треугольника (рис. 17). Затем гомотетией с центром  $X$  добьемся, что на границе окажутся уже вершины  $X$  и  $Y_1$ . Гомотетией с центром  $C$  сведем дело к случаю, когда три вершины  $X_2$ ,  $Y_2$  и  $Z_2$  лежат на сторонах треугольника.

**Упражнение 5.** Завершите доказательство, рассмотрев семейство подобных треугольников  $X_2Y_2Z_2$  треугольников, вписанных в  $\triangle ABC$ .

## ИНФОРМАЦИЯ

### Школа «АВАНГАРД» — ШКОЛА ДЛЯ ВСЕХ

Как подготовиться в вуз, в физико-математическую школу или лицей, если ограничен в средствах или живешь в небольшом городке или деревне? Конечно же, поступить во Всероссийскую школу математики и физики (ВШМФ) «АВАНГАРД». Эта школа, учрежденная Министерством общего и профессионального образования РФ, имеет уже десятилетний практический опыт ЗАОЧНОГО обучения школьников:

по физике — с 8 по 11 класс (включая двухлетний углубленный курс);

по математике — с 7 по 11 класс.

**В этом году ВШМФ проводит дополнительный набор учащихся на курс «Математика для будущих экономистов».**

В школе «АВАНГАРД», в зависимости от знаний, Вы можете выбрать программу обучения, доступную Вам. Всего программ три: «А», «В» и «С». Освоил программу «А» или «В» — открыта дорога в большинство областных вузов, а прошел полный курс по программе «С» — и можешь смело идти в МИФИ, МГТУ и т.п. Плата за обучение — самая доступная. Существует возможность занятий сразу по двум программам «А» + «В» или «В» + «С».

За последние пять лет 90% наших выпускников поступили в вузы! И это закономерно, так как методики и задачи разработаны лучшими преподавате-

лями МИФИ и МФТИ.

Учебный год в школе — с 1 сентября по 30 июня. Прием в школу ведется круглогодично. Достаточно прислать личное заявление на адрес школы и оплатить обучение. Стоимость обучения зависит не от сложности программы («А», «В» и «С»), а только от класса и не превышает 2–3 минимальных месячных зарплат за полный годичный курс обучения по данному предмету.

Школа «АВАНГАРД» совместно с Министерством общего и профессионального образования РФ и при участии журнала «Квант» ежегодно проводит:

— межобластную олимпиаду по математике и физике (заочный тур; результаты олимпиады 1997 года см. в «Кванте» №4);

— межгосударственную конференцию одаренных школьников и очный тур олимпиады.

Ниже приводятся тестовые вступительные задания по математике и физике по программе «С».

Вам нужно:

— выбрать предмет, класс, программу и написать заявление о приеме в школу (в произвольной форме);

— решить выбранный вариант задания (не обязательно весь!);

— выслать нам заявление и решенный вариант (с пометкой «Квант»), а получив наш ответ, заполнить учетную карточку и прислать ее нам вместе с копией чека об оплате.

На курс «Математика для будущих экономистов» принимаются:

— учащиеся 10 и 11 классов школы «АВАНГАРД» из числа занимающихся по математике по программам «В» или «С» (или «В» + «С»);

— все желающие, успешно решившие вступительные задания для 10 и 11 классов и прошедшие конкурсный отбор.

Наш адрес:

115551 Москва, Ореховый бульвар, д.11, кор.3, ВШМФ «АВАНГАРД»

### Тестовое вступительное задание по математике

#### Программа «С»

##### 7 класс

##### 1. Вычислите

$$4,07 - 5,49 + 8,93 - 1,51 +$$

$$+ \frac{4,2:6 - 3\frac{1}{3} \cdot 0,3}{7,5:0,5}$$

2. Докажите, что число 123456789 является составным.

3. Запишите число 1000 с помощью восьми одинаковых цифр и знаков арифметических действий.

4. Число содержит 4 сотни,  $b$  десятков и  $c$  единиц. При каких значениях  $b$  и  $c$  данное число кратно 30?

5. Три класса школьников сажали деревья. Первый класс посадил  $a$  деревьев, второй — 70% того, что посадил первый, а третий класс — на 5 деревьев

больше второго. Сколько деревьев посадили три класса?

**8 класс**

1. Упростите выражение

$$(x+1)(x+2) + (x+3)(x+4)$$

и вычислите его значение при  $x = -0,4$ .

2. Решите уравнение

$$\frac{8(x+10)}{15} - 24\frac{1}{2} = 7\frac{x}{10} - \frac{2(11x-5)}{5}$$

3. Известно, что  $x + \frac{1}{x} = 3$ . Найдите значение выражения  $x^2 + \frac{1}{x^2}$ .

4. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, на 54 больше данного числа. Найдите это число.

5. Постройте график функции

$$\frac{y-x}{x-1} = -2$$

**9 класс**

1. Натуральное пятизначное число  $A$  имеет в разряде десятков цифру 8. Если эту цифру десятков переставить в начало числа  $A$ , сохранив порядок остальных цифр, то вновь полученное пятизначное число будет больше  $A$  на 69570. Определите число  $A$ , если известно, что оно кратно 6.

2. Решите неравенство  $ax + 1 > 0$ .

3. Постройте график функции

$$|x| + |y| = 2$$

4. Произведение двух целых чисел равно 216, а их наименьшее общее кратное равно 36. Найдите эти числа.

5. Смешали  $P\%$ -й и  $10\%$ -й растворы соляной кислоты и получили 600 г  $15\%$ -го раствора. Сколько грамм каждого раствора было взято?

**10 класс**

1. Решите уравнение

$$\frac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x = 6$$

2. Определите, при каких значениях параметра  $a$  оба корня уравнения

$$x^2 + 2(a-4)x + a^2 + 6a = 0$$

положительны.

3. Длины сторон треугольника равны 4, 5 и 7 см. Найдите радиус вписанной в этот треугольник окружности.

4. Решите уравнение

$$|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 5$$

5. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{1-ax}{-2x^2+6x-7}}$$

**11 класс**

1. Решите неравенство

$$x(x+1)(x+2)(x+3) < 48$$

2. Найдите площадь наибольшего прямоугольника, который можно вписать в правильный треугольник со стороной  $a$ .

3. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} = a - \sqrt{x^2 + 6x + 9}$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sin x + (0,04c^2 + 1,2c)\cos \frac{y}{5} = c + 8, \\ \sin x + 20\cos \frac{y}{5} = -21. \end{cases}$$

5. Сторона равностороннего треугольника равна  $a$ . На высоте этого треугольника построен новый равносторонний треугольник. На высоте нового треугольника построен еще один равносторонний треугольник, и т.д. до бесконечности. Найдите сумму периметров и сумму площадей всех этих треугольников.

**Тестовое вступительное задание по физике**

**Программа «С»**

**8 класс**

1. На рисунке 1 изображены четыре тела одной и той же массы. На тела 2 и 4 поставлены гири, тела 3 и 4 помещены на катки. При равномерном движении какого из тел по горизонтальной поверхности сила трения наибольшая?

2. Тело  $A$  массой 40 г соединили с телом  $B$  массой 80 г и объемом 40 см<sup>3</sup>. Оба тела вместе поместили в измерительный цилиндр с водой. При полном погружении в воду тела вытеснили

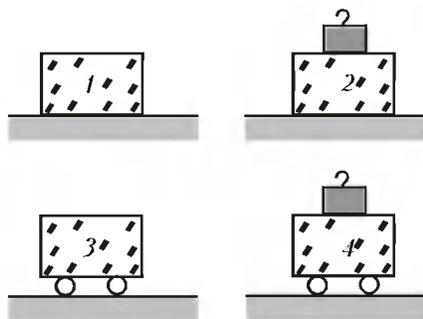


Рис. 1

ли 140 см<sup>3</sup> воды. Определите плотность тела  $A$ .

3. Площадь большого поршня гидравлического пресса 1000 см<sup>2</sup>, малого 2 см<sup>2</sup>. Какая сила действует на боль-

шой поршень, если малый испытывает действие силы 200 Н? Трение не учитывать.

4. Почему при открывании крана в трубке (рис.2), из которой откачан воздух, образуется водяной фонтан?

5. Какую работу нужно совершить, чтобы переместить груз массой 100 кг на расстояние 2 м по совершенно гладкой горизонтальной поверхности?

6. Резиновый шар надули воздухом и завязали. Как изменится объем шара и

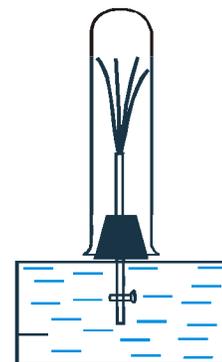


Рис. 2

давление внутри него при повышении атмосферного давления?

**9 класс<sup>1</sup>**

1. Человек бежит по эскалатору. В первый раз он насчитал  $n_1 = 50$  ступеней, во второй раз, двигаясь в том же направлении со скоростью втрое большей, он насчитал  $n_2 = 75$  ступеней. Сколько ступеней он насчитал бы на неподвижном эскалаторе?

2. Первую половину пути поезд шел со скоростью в  $n = 1,5$  раза большей, чем вторую половину пути. Средняя скорость поезда на всем пути  $v_{cp} = 43,2$  км/ч. Каковы скорости поезда на первой и второй половинах пути?

3. В железном калориметре массой  $m = 0,1$  кг находится  $m_1 = 0,5$  кг воды при температуре  $t_1 = 15$  °С. В калориметр бросают свинец и алюминий общей массой  $m_2 = 0,15$  г и температурой  $t_2 = 100$  °С. В результате температура воды поднимается до  $t = 17$  °С. Определите массы свинца и алюминия. Удельная теплоемкость свинца  $c_1 = 125,7$  Дж/(кг·К), алюминия  $c_2 = 836$  Дж/(кг·К), железа  $c_3 = 460$  Дж/(кг·К).

4. Вычислите сопротивление проводящего куба, к противоположным вершинам которого подано напряжение. Сопротивления всех ребер одинаковы и равны  $R = 1$  Ом.

<sup>1</sup> Задачи по физике для 10–11 классов можно получить по почте, прислав заявку в адрес школы «Авангард».

# Непотопляемый диск

А. ЛУЗИН

**Д**ЛЯ ОПЫТОВ вам понадобится тонкий диск, изготовленный из материала более тяжелого, чем вода. Например, из листа мягкой стали толщиной 0,2–0,3 мм, из алюминиевого листа толщиной 0,2–1,9 мм или оргстекла толщиной 0,3–6 мм. Наиболее удобен диск диаметром от 90 до 150 мм. В центре диска должно быть углубление высотой 1,5–3 мм и диаметром 12–15 мм.

Если такой диск положить на воду, то он может и не утонуть вследствие поверхностного натяжения жидкости. Но плесните на диск воду – он обязательно утонет, так как тяжелее воды. Подержите диск в руке, подставив его под струю воды, и вы заметите, что вода сильно давит на диск (это гидродинамическое давление струи воды). Результаты таких экспериментов вполне понятны, и в них нет ничего удивительного.

Теперь положите диск на воду и направьте в его центр (в углубление) сильную вертикальную струю воды – диск не тонет. Струя топит, а диск не тонет. Наиболее яркое впечатление производит диск из цветного оргстекла, сквозь который видны мелкие предметы, лежащие на дне сосуда. Опыт легко удастся, если струя воды достаточно ровная, гладкая, без видимых завихрений.

Так почему же диск не тонет? Понаблюдайте некоторое время и вы увидите, что на поверхности диска возникает кольцевая водяной порожек-ступенька, который растекающаяся из крана тонким слоем струя воды отгоняет все дальше и дальше к краям диска. В результате в области между центром диска и ступенькой образуется область

пониженного давления, и возникающая разность сил давления на диск снизу и сверху может оказаться достаточной для того, чтобы диск не тонул, несмотря на довольно значительное давление вертикальной струи воды. Здесь в интересной форме проявляются закономерности, описываемые уравнением Бернулли, в соответствии с которым тонкая быстрая струя воды, растекающаяся радиально по диску, отгоняет высокий водяной порожек, где скорость течения мала.

В гидравлике (это прикладная наука о законах движения и равновесия жидкостей) наблюдаемый нами водяной порожек называется гидравлическим прыжком. Гидравлический прыжок – это резкое, скачкообразное повышение уровня воды в открытом русле при переходе от бурного течения к спокойному. Его можно увидеть, например, в нижнем бьефе плотины, только там он не кольцевой, а прямолинейный. Кольцевой же гидравлический прыжок можно наблюдать и без диска, пустив вертикальную струю воды на дно кухонной раковины, даже если оно не совсем плоское и не совсем горизонтальное.

Основной теории гидравлического прыжка является уравнение Бернулли, которое в случае открытого сверху канала с вертикальными стенками (берегами) и горизонтальным дном можно привести к виду

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} + h_2, \text{ или } E_1 = E_2,$$

где  $h$  – глубина потока жидкости,  $v$  – скорость течения жидкости в некотором поперечном сечении канала,  $E = h + v^2/(2g)$  – величина, в гидравлике называемая удельной энергией сечения.

Если жидкость неидеальная, но внутреннее трение в ней не очень велико, вместо равенства записывается неравенство  $E_1 > E_2$ . В простейшем случае прямолинейного прыжка, когда ширина канала  $b$  везде одинакова, неравенство можно переписать в виде  $E(h_1) > E(h_2)$ , где  $E(h) = h + Q^2/(2b^2gh^2)$ , а  $Q = vbh$  – расход жидкости, одинаковый во всех сечениях канала в случае стационарного течения.

Удельную энергию сечения  $E$  можно рассматривать как величину, зависящую только от  $h$ , причем немонотонно. При некоторой глубине потока  $h_k$  называемой критической, удельная энергия сечения имеет минимальное значение, при  $h \rightarrow \infty$  она растет за счет первого слагаемого, а при  $h \rightarrow 0$  – за счет второго слагаемого. Критическую глубину потока можно получить из условия  $E'(h_k) = 0$ , т.е. из равенства нулю производной  $E$  по  $h$ :

$$h_k = \sqrt{\frac{Q^2}{b^2g}}.$$

Легко видеть, что возможны стационарные потоки двух типов: а) скорость потока достаточно велика – при относительно малой его глубине ( $h < h_k$ ) последняя медленно растет вдоль канала, а удельная энергия сечения медленно уменьшается; б) скорость потока достаточно мала – при относительно большой его глубине ( $h > h_k$ ) последняя медленно уменьшается, а вместе с ней медленно уменьшается и удельная энергия сечения. Опыт показывает, что возможен и стационарный в целом поток, состоящий из трех частей: поток первого типа, поток второго типа и довольно узкая зона гидравлического прыжка между ними.

Как формируется такой сложный поток, как возникает гидравлический прыжок, разобраться довольно сложно. Поэтому мы ограничимся лишь приближенными представлениями. Ясно, что гидравлический прыжок образуется в канале с плоским горизонтальным дном, если кинетическая энергия жидкости в некотором сечении достаточно велика ( $h < h_k$ ). По мере удаления от этого места по течению энергия  $E$  плавно уменьшается вследствие вязкости жидкости, глубина потока при этом плавно растет и достигает критического значения  $h = h_k$ . Дальше  $h$  плавно расти не может, так как при этом возрастала бы  $E$ , что противоречит нашему неравенству. Жидкость замедляется там, где  $h \approx h_k$ , и накапливается до тех пор, пока поток не стабилизируется. В потоке при этом образуется резкий скачок глубины.

Более детально разобраться в теории наблюдаемого в нашем опыте явления можно с помощью так называемой волновой теории гидравлического прыжка, которая позволяет рассчитать высоту ступеньки, скачок давления и возникающую дополнительную «подъемную» силу, удерживающую диск от погружения. Об этом можно прочитать, например, в замечательной книге Дж. Уокера «Физический фейерверк» (М.: Мир, 1989; задача 4.58).



# ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И приборы

Ю. ЧЕШЕВ

**О**ПТИЧЕСКИЕ системы представляют собой совокупность различных оптических инструментов – линз, диэлектрических пластин, зеркал и т.п. Роль их огромна при изучении физических явлений. Это – исследования микромира с помощью микроскопа, изучение звезд и галактик при использовании телескопов и зрительных труб, наблюдение далеко расположенных объектов с применением бинокля, фотографирование объектов фотоаппаратом, исследование диэлектрических свойств различных сред. Одно из основных требований, предъявляемых к таким приборам, – это требование преобразования лучей, исходящих от предмета, в лучи, сходящиеся в одну точку наблюдения (действительное изображение), или в лучи, продолжение которых исходит из одной, отличной от исходной, точки пространства (мнимое изображение). Следовательно, решение задач, в которых обсуждаются различные оптические инструменты, основано на умении построения хода лучей от предметов до их изображений.

**Задача 1.** Рассеивающая линза  $L_1$  и собирающая линза  $L_2$  расположены на одной главной оптической оси (рис. 1). Такая оптическая система создает

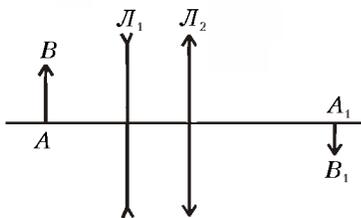


Рис. 1

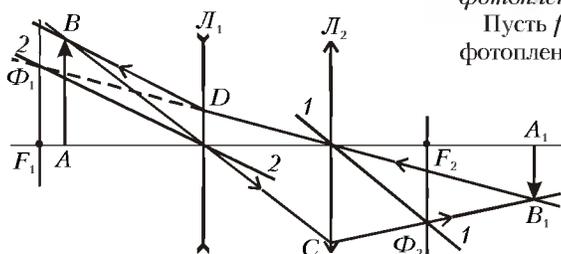


Рис. 2

действительное изображение  $A_1B_1$  предмета  $AB$ . С помощью построения найдите положение главных фокусов обеих линз.

Из точки  $B$  через центр линзы  $L_1$  проведем луч до пересечения с линзой  $L_2$  в точке  $C$  (рис. 2). После преломления линзой  $L_2$  этот луч пойдет по траектории  $CB_1$ . Из точки  $B_1$  через центр линзы  $L_2$  проведем луч  $B_1D$  до пересечения с линзой  $L_1$ . После преломления линзой  $L_1$  он пойдет по направлению  $DB$ . Через центр линзы  $L_2$  проведем прямую 1–1, параллельную  $CB_1$ . Тогда точка  $\Phi_2$  пересечения отрезка  $CB_1$  с прямой 1–1 лежит в фокальной плоскости линзы  $L_2$ . Пересечение этой фокальной плоскости с главной оптической осью системы определяет положение правого фокуса  $F_2$  линзы  $L_2$ . Найдем теперь левый фокус линзы  $L_1$ . Для этого проведем прямую 2–2, параллельную лучу  $BD$  до пересечения с продолжением луча  $DB_1$  в точке  $\Phi_1$ , которая определит положение фокальной плоскости линзы  $L_1$ . Пересечение этой плоскости с главной оптической осью системы задает положение левого фокуса  $F_1$  линзы  $L_1$ . Аналогичным образом строятся правый фокус линзы  $L_1$  и левый фокус линзы  $L_2$ .

**Задача 2.** Газетный текст фотографируется фотоаппаратом с объективом, имеющим фокусное расстояние  $F = 50$  см, дважды: а) с наименьшего допустимого для этого объектива расстояния  $d = 0,5$  м; б) присоединив объектив к камере через удлинительное кольцо высотой  $h = 25$  мм (также с минимально возможным в этом случае расстоянием). Найдите отношение размеров изображений, полученных на фотопленке в этих случаях.

Пусть  $f$  – расстояние от объектива до фотопленки. Формула линзы в этом случае дает

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

откуда для  $f$  получим

$$f = \frac{dF}{d-F}.$$

Увеличение в этом случае равно

$$\Gamma_1 = \frac{f}{d} = \frac{F}{d-F}.$$

Во втором варианте расстояние от объектива до пленки равно  $f_1 = f + h$ , и увеличение составляет

$$\Gamma_2 = \frac{F}{d_1 - F},$$

где  $d_1$  – наименьшее расстояние от объектива до фотографируемого предмета, которое опять-таки можно выразить с помощью формулы линзы. Отношение размеров изображений равно отношению увеличений, т.е.

$$\beta = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} = \frac{(d-F)h}{F^2} + 1 = 5,5.$$

**Задача 3.** Наблюдатель с нормальным зрением рассматривает Луну в телескоп, объектив которого имеет фокусное расстояние  $F_1 = 2$  м, а окуляр  $F_2 = 5$  см. Глаз наблюдателя аккомодирован на расстояние наилучшего зрения  $d_0 = 25$  см. На сколько нужно переместить окуляр для того, чтобы получить изображение Луны на экране на расстоянии  $d_0 = 25$  см от окуляра? Чему равен при этом размер изображения Луны на экране, если ее угловой диаметр  $\alpha = 30'$ ?

Изображение Луны, даваемое объективом  $L_1$  (рис. 3), расположено в его фокальной плоскости на расстоянии  $F_1$  от линзы. Это изображение, находящееся на расстоянии  $d_1$  от окуляра  $L_2$ , наблюдается глазом на расстоянии  $d_0$  от линзы  $L_2$  с фокусным расстоянием  $F_2$ . Из формулы линзы

$$\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_0} = \frac{1}{F_2}$$

находим

$$d_1 = \frac{d_0 F_2}{d_0 + F_2} = 4,17 \text{ см.}$$

В том случае, когда изображение Луны

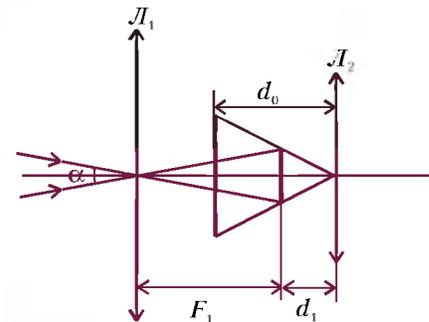


Рис. 3

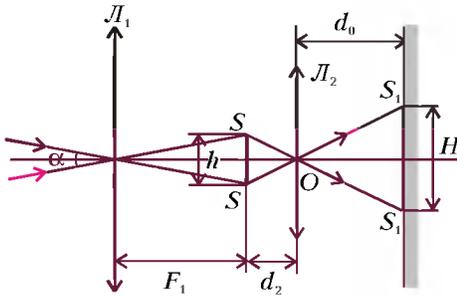


Рис. 4

проектируется на экран (рис.4) на расстоянии  $d_0$  от линзы  $L_2$ , расстояние от изображения, даваемого линзой  $L_1$ , до окуляра  $L_2$  равно

$$d_2 = \frac{d_0 F_2}{d_0 - F_2} = 6,25 \text{ см.}$$

Очевидно, что смещение окуляра составляет

$$\Delta d = d_2 - d_1 = 2,08 \text{ см.}$$

Зная угловой диаметр Луны, легко найти линейный размер ее изображения. Из подобия треугольников  $SSO$  и  $S_1S_1O$  получаем

$$H = \frac{d_0}{d_2} h,$$

где (при условии малости угла  $\alpha$ )  $h = F_1 \alpha$ . Окончательно,

$$H = \alpha F_1 \frac{d_0}{d_2} = 7 \text{ см.}$$

**Задача 4.** На тонкую отрицательную линзу падает параллельный пучок лучей от удаленного источника, находящегося на оптической оси. На расстоянии  $a$  за линзой перпендикулярно к ее оптической оси расположено плоское зеркало. После прохождения лучей через линзу, отражения от зеркала и вторичного прохождения через линзу образуется мнимое изображение, расположенное между линзой и зеркалом на расстоянии  $3a/4$  от линзы. Определите фокусное расстояние линзы.

Параллельный пучок от удаленного источника при прохождении через рассеивающую линзу дает мнимое изображение  $S_1$ , находящееся в фокусе линзы (рис.5). Изображение  $S_2$  «источника»  $S_1$  в зеркале расположено на расстоянии  $2a + F$  от линзы и является «предметом» для линзы, которая дает его мнимое изображение в точке  $S_3$ . Применяя формулу линзы для  $S_2$  и  $S_3$ , имеем

$$\frac{1}{F + 2a} - \frac{4}{3a} = -\frac{1}{F},$$

откуда для  $F$  получаем квадратное урав-

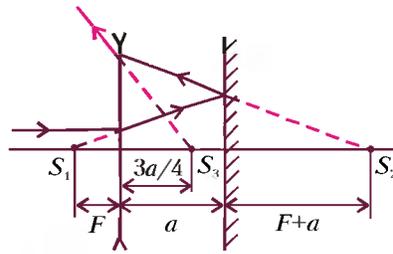


Рис. 5

нение

$$2F^2 + aF - 3a^2 = 0.$$

Решая это уравнение относительно  $F$ , получим

$$F = a \text{ и } F = -3a/2.$$

Очевидно, что второе значение не подходит, следовательно,

$$F = a.$$

**Задача 5.** Две тонкие линзы находятся на расстоянии  $L = 25$  см друг от друга так, что их главные оптические оси совпадают. Эта система линз создает прямое действительное изображение предмета в натуральную величину. Если линзы поменять местами, то снова получается прямое действительное изображение предмета, но с увеличением  $\Gamma = 4$ . На сколько отличаются оптические силы линз?

Легко видеть, что если изображение предмета прямое и действительное (рис.6), то обе линзы положительные.

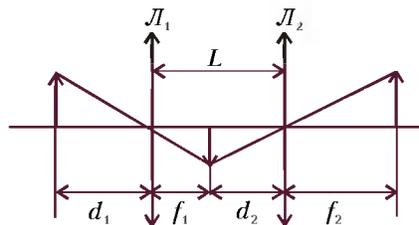


Рис. 6

Увеличение, даваемое линзой  $L_1$ , равно

$$\Gamma_1 = \frac{F_1}{d_1 - F_1}.$$

Для линзы  $L_2$  оно равно

$$\Gamma_2 = \frac{F_2}{d_2 - F_2} = \frac{F_2}{L - f_1 - F_2} = \frac{F_2}{L - \frac{d_1 F_1}{F_1 - F_2} - F_2}.$$

Увеличение системы из двух линз составляет

$$\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 = \frac{F_1 F_2}{d_1 (L - (F_1 + F_2)) + F_1 F_2 - F_1 L},$$

откуда

$$\frac{1}{\Gamma} = \frac{d_1 (L - (F_1 + F_2)) + F_1 F_2 - F_1 L}{F_1 F_2} - \frac{L}{F_2}.$$

Для случая, когда линзы поменяли местами, для увеличения системы  $\Gamma_*$  запишем

$$\frac{1}{\Gamma_*} = \frac{d_1 (L - (F_1 + F_2)) + F_1 F_2 - F_1 L}{F_1 F_2} - \frac{L}{F_1}.$$

Взяв разность двух последних выражений, имеем

$$\frac{1}{\Gamma} - \frac{1}{\Gamma_*} = L \left( \frac{1}{F_1} - \frac{1}{F_2} \right) = L(D_1 - D_2),$$

где  $D_1$  и  $D_2$  – оптические силы линз  $L_1$  и  $L_2$ . Окончательно, разность оптических сил равна

$$\Delta D = D_1 - D_2 = \frac{1}{L} \left( \frac{1}{\Gamma} - \frac{1}{\Gamma_*} \right) = 3 \text{ дптр.}$$

**Задача 6.** Предмет находится между линзой и плоским зеркалом, перпендикулярным главной оптической оси линзы. Зеркало, линза и предмет заключены в кожух из светопрозрачной матовой пластмассы (рис.7). Такая система создает два изображения предмета и изображение линзы. Оба изображения предмета имеют одинаковые размеры, независимо от расстояния от линзы до предмета. С каким увеличением изображается линза?

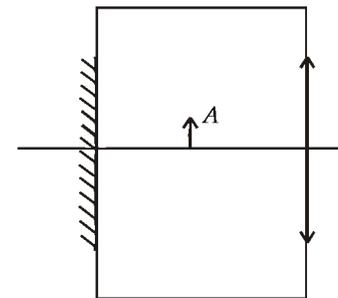


Рис. 7

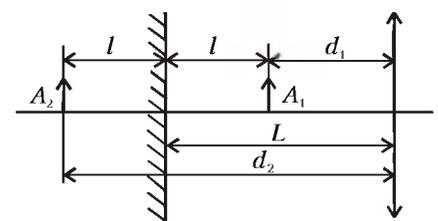


Рис. 8

Оптическая система создает два изображения, одно из которых есть изображение самого предмета  $A_1$ , второе – изображение предмета  $A_2$ , являющегося зеркальным изображением предмета  $A_1$  (рис.8). Ввиду того, что оба изображения имеют одинаковые размеры, равны и их увеличения. Ясно, что это возможно только в случае, когда одно из изображений – действительное а другое – мнимое. Следовательно, предмет  $A_1$  находится между линзой и ее фокусом, а предмет  $A_2$  – за фокусом линзы. Воспользуемся формулой линзы для этих случаев:

$$\frac{1}{d_1} - \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F} \text{ и } \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F},$$

где  $f_1$  и  $f_2$  – расстояния до изображений предметов. Для увеличений  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  получим

$$\Gamma_1 = \frac{F}{F - d_1} \text{ и } \Gamma_2 = \frac{F}{d_2 - F}.$$

Из равенства  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  следует, что  $d_1 + d_2 = 2F$ , или  $d_1 + l = F$ . Таким образом, зеркало должно быть расположено в фокальной плоскости линзы:  $L = F$ .

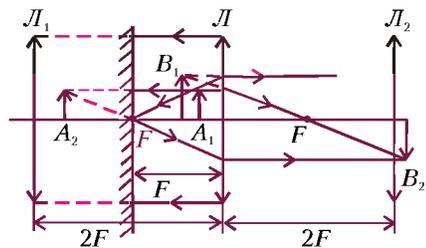


Рис. 9

На рисунке 9 показан ход лучей, позволяющих получить изображение источников  $A_1$  и  $A_2$ , даваемых линзой. Легко видеть, что изображение линзы в зеркале находится на удвоенном фокусном расстоянии. Следовательно, увеличение линзы в системе равно  $\Gamma = 1$ .

**Задач 7.** Сложный объектив состоит из двух тонких линз: положительной с фокусным расстоянием  $F_1 = 20$  см и отрицательной с фокусным расстоянием  $F_2 = 10$  см. Линзы расположены на расстоянии  $l = 15$  см друг от друга. С помощью объектива получают на экране изображение Солнца. Какое фокусное расстояние должна иметь тонкая линза, чтобы изображение Солнца, полученное с ее помощью, имело такой же размер?

Пусть  $\alpha$  – угловой размер Солнца. Изображение Солнца, даваемое первой линзой, находится в ее фокальной

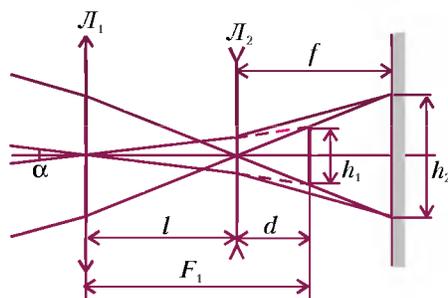


Рис. 10

плоскости и имеет размер (с учетом малости  $\alpha$ )  $h_1 = \alpha F_1$  (рис.10). Расстояние от этого изображения до второй линзы  $d = F_1 - l$ . Из формулы линзы

$$-\frac{1}{F_1 - l} + \frac{1}{f} = -\frac{1}{F_2}$$

находим расстояние между экраном и линзой  $L_2$ :

$$f = \frac{F_2(F_1 - l)}{F_2 - F_1 + l}.$$

Тогда размер второго изображения равен

$$h_2 = h_1 \frac{f}{d} = \frac{\alpha F_1 F_2}{F_2 - F_1 + l}.$$

Если используется одинокая тонкая линза с фокусным расстоянием  $F$ , то размер изображения Солнца в ней составляет

$$h_2 = \alpha F.$$

Окончательно, для фокусного расстояния этой линзы получаем

$$F = \frac{F_1 F_2}{F_2 - F_1 + l} = 40 \text{ см.}$$

**Упражнения**

1. Источник света расположен на двойном фокусном расстоянии от собирающей линзы на ее оси. За линзой перпендикулярно к оптической оси помещено плоское зеркало. На каком расстоянии от линзы нужно поместить зеркало, чтобы лучи, отраженные от зеркала, пройдя вторично через линзу, стали параллельными? Фокусное расстояние линзы  $F$ .
2. Покажите, что оптическая сила системы, состоящей из двух тонких линз, приложенных вплотную друг к другу, равна сумме оптических сил этих линз.
3. Перпендикулярно главной оптической оси тонкой положительной линзы с фокусным расстоянием  $F$  расположено плоское зеркало (рис.11). Эта оптическая система создает действительное изображение предмета  $A$ , находящегося между линзой и ее фокусом, с увеличением  $\Gamma = F/d$ , где  $d$  – расстояние между

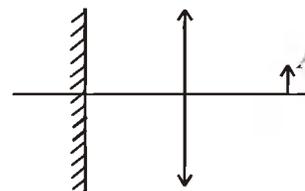


Рис. 11

линзой и предметом. Найдите расстояние между линзой и зеркалом.

4. Система из двух тонких линз, собирающей и рассеивающей, с одинаковыми по модулю фокусными расстояниями  $F$  дает изображение точечного источника света. Главные оптические оси линз совпадают. Расстояние между линзами  $L = 3F$ . Источник расположен на главной оптической оси на расстоянии  $d = 2F$  перед собирающей линзой. На сколько и в какую сторону сместится изображение источника, если ближайшую к источнику (собирающую) линзу сместить перпендикулярно главной оптической оси на  $x = 2$  см?
5. Точечный источник света расположен на расстоянии  $d = 30$  см от собирающей линзы, оптическая сила которой  $D = 5$  дптр. На какое расстояние сместится изображение источника, если между линзой и источником поместить толстую стеклянную пластинку толщиной  $L = 15$  см с показателем преломления  $n = 1,57$ ?
6. Из-за конечной разрешающей способности фотопленки при фотографировании резко получаются предметы, находящиеся на расстояниях от  $d_1 = 15$  м и до  $d_2 = 30$  м от фотоаппарата. Величину  $d_1$  называют ближней границей глубины резкости,  $d_2$  – дальней. Не меняя наводки фотоаппарата, объектив задиафрагмировали (т.е. уменьшили диаметр открытой части линзы объектива). При этом ближняя граница глубины резкости стала  $d_{1*} = 10$  м. Найдите дальнюю границу.
7. Найдите эквивалентное фокусное расстояние системы двух линз с фокусными расстояниями  $F_1$  и  $F_2$ , расположенными на одной оптической оси на расстоянии  $l$  друг от друга, и местоположение эквивалентной линзы.

# XXIV Всероссийская математическая олимпиада ШКОЛЬНИКОВ

Как всегда, мы публикуем материалы IV (зонального) и V (заключительного) этапов Всероссийской математической олимпиады школьников. Каждый из этапов проходил в два дня, в каждом из которых участникам предлагалось решить по четыре задачи (ниже в списках по каждому классу задачи 1–4 предлагались в первый день, а задачи 5–8 – во второй).

## Задачи олимпиады

### Зональный этап

#### 8 класс

1. Существуют ли  $n$ -значные числа  $M$  и  $N$  такие, что все цифры  $M$  – четные, все цифры  $N$  – нечетные, каждая цифра от 0 до 9 встречается в десятичной записи  $M$  и  $N$  хотя бы по одному разу и  $M$  делится на  $N$ ?

*Н. Агаханов*

2. В параллелограмме  $ABCD$  точки  $M$  и  $N$  – середины сторон  $BC$  и  $CD$  соответственно. Могут ли лучи  $AM$  и  $AN$  делить угол  $BAD$  на три равные части?

*Д. Кузнецов*

3. В колоде 52 карты, по 13 каждой масти. Ваня вынимает из колоды по одной карте. Вынутые карты в колоду не возвращаются. Каждый раз перед тем, как вынуть карту, Ваня загадывает какую-нибудь масть. Докажите, что если Ваня каждый раз будет загадывать масть, карт которой в колоде осталось не меньше, чем карт любой другой масти, то загаданная масть совпадет с мастью вынутой карты не менее 13 раз.

*И. Измestьев*

4. На плоскости дано множество из  $n \geq 9$  точек. Для любых 9 его точек можно выбрать две окружности так, что все эти точки окажутся на выбранных окружностях. Докажите, что все  $n$  точек лежат на двух окружностях.

*В. Дольников*

5. Числа от 1 до 9 разместите в кружках фигуры (рис.1) так, чтобы сумма четырех чисел, находящихся в кружках-вершинах всех квадратов (их шесть) была постоянной.

*Н. Авилев*

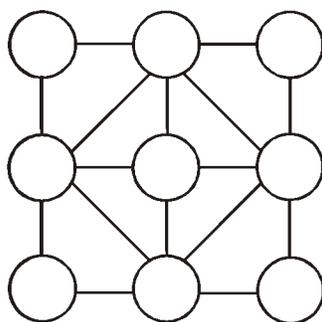


Рис. 1

6. См. задачу M1644 из «Задачника «Кванта».

7. Пусть  $O$  – центр окружности, описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ ,  $S_A$ ,  $S_B$ ,  $S_C$  – окружности с центром  $O$ , касающиеся сторон  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  соответственно. Докажите, что сумма трех углов: между касательными к  $S_A$ , проведенными из точки  $A$ , к  $S_B$  – из точки  $B$  и к  $S_C$  – из точки  $C$ , равна  $180^\circ$ .

*М. Сонкин*

8. На выборах в городскую Думу каждый избиратель, если он приходит на выборы, отдает голос за себя (если он является кандидатом) и за тех кандидатов, которые являются его друзьями. Прогноз социологической службы мэрии считается *хорошим*, если в нем правильно предсказано количество голосов, поданных хотя бы за одного из кандидатов, и *нехорошим* в противном случае. Докажите, что при любом прогнозе избиратели могут так явиться на выборы, что этот прогноз окажется *нехорошим*.

*А. Разборов*

#### 9 класс

1. Длины сторон некоторого треугольника и диаметр вписанной в него ок-

ружности являются членами последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите все такие треугольники.

*Я. Губин*

2. Две окружности пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Прямая пересекает эти окружности в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , как показано на рисунке 2. Докажите, что  $\angle APB = \angle CQD$ .

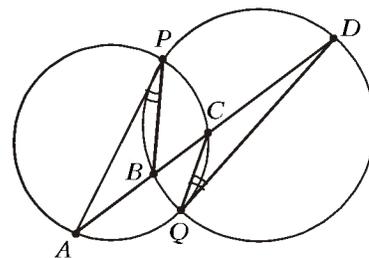


Рис. 2

3. Назовем десятизначное число интересным, если оно делится на 11111 и все его цифры различны. Сколько существует интересных чисел?

*И. Рубанов, А. Вронецкий*

4. Имеется квадрат клетчатой бумаги размером  $102 \times 102$  клетки и связанная фигура неизвестной формы, состоящая из 101 клетки. Какое наибольшее число таких фигур можно с гарантией вырезать из этого квадрата? Фигура, составленная из клеток, называется связанной, если любые две ее клетки можно соединить цепочкой ее клеток, в которой любые две соседние клетки имеют общую сторону.

*И. Рубанов*

5. Корни двух приведенных квадратных трехчленов – отрицательные целые числа, причем один из этих корней – общий. Могут ли значения этих трехчленов в некоторой положительной целой точке равняться 19 и 98?

*И. Рубанов*

6. На концах клетчатой полоски размером  $1 \times 101$  клеток стоят две фишки: слева фишка первого игрока, справа – второго. За ход разрешается сдвинуть свою фишку в направлении противопо-

ложного края полоски на 1, 2, 3 или 4 клетки. При этом разрешается перепрыгивать через фишку соперника, но запрещается ставить свою фишку на одну клетку с ней. Выигрывает тот, кто первым достигнет противоположного края полоски. Кто выигрывает при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его соперник?

*О. Подлитский*

7. Дан бильярд в форме правильного 1998-угольника  $A_1A_2\dots A_{1998}$ . Из середины стороны  $A_1A_2$  выпустили шар, который, отразившись последовательно от сторон  $A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{1998}A_1$  (по закону «угол падения равен углу отражения»), вернулся в исходную точку. Докажите, что траектория шара – правильный 1998-угольник.

*П. Кожевников*

8. Ножки циркуля находятся в узлах бесконечного листа клетчатой бумаги, клетки которого – квадраты со стороной 1. Разрешается, не меняя раствора циркуля, поворотом его вокруг одной из ножек перемещать вторую ножку в другой узел на листе. Можно ли за несколько таких шагов поменять ножки циркуля местами?

*Д. Храмов*

#### 10 класс

1. Пусть  $f(x) = x^2 + ax + b \cos x$ . Найдите все значения параметров  $a$  и  $b$ , при которых уравнения  $f(x) = 0$  и  $f(f(x)) = 0$  имеют совпадающие непустые множества корней.

*Н. Агаханов*

2. В остроугольном треугольнике  $ABC$  через центр  $O$  описанной окружности и вершины  $B$  и  $C$  проведена окружность  $S$ . Пусть  $OK$  – диаметр окружности  $S$ ,  $D$  и  $E$  – соответственно точки ее пересечения с прямыми  $AB$  и  $AC$ . Докажите, что  $ADKE$  – параллелограмм.

*М. Сонкин*

3. Докажите, что из любого конечного множества точек на плоскости можно так удалить одну точку, что оставшееся множество можно разбить на два множества, диаметры которых меньше диаметра первоначального множества. (Диаметр – это максимальное расстояние между точками множества.)

*В. Доляников*

4. В первые 1999 ячеек памяти компьютера в указанном порядке записаны числа: 1, 2, 4, ...,  $2^{1998}$ . Два программиста по очереди уменьшают за один ход на единицу числа в пяти различных ячейках. Если в одной из ячеек появляется отрицательное число, то компьютер ломается и сломавший его оплачивает ремонт. Кто из программистов

может гарантировать себя от финансовых потерь независимо от ходов партнера и как он должен для этого действовать?

*Р. Женодаров*

5. Решите уравнение  $\{(x+1)^3\} = x^3$ ,  $\{z\}$  – дробная часть числа  $z$ , т.е.  $\{z\} = z - [z]$ .

*А. Шаповалов*

6. В пятиугольнике  $A_1A_2A_3A_4A_5$  проведены биссектрисы  $l_1, l_2, \dots, l_5$  углов  $A_1, A_2, \dots, A_5$  соответственно. Биссектрисы  $l_1$  и  $l_2$  пересекаются в точке  $B_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$  – в  $B_2$  и т.д.,  $l_5$  и  $l_1$  пересекаются в точке  $B_5$ . Может ли пятиугольник  $B_1B_2B_3B_4B_5$  оказаться выпуклым?

*Л. Смирнова, Д. Тарасенко*

7. Куб со стороной  $n$  разбит перегородками на единичные кубики. Какое минимальное число перегородок между единичными кубиками нужно удалить, чтобы из каждого кубика можно было добраться до границы куба?

*Д. Храмов*

8. Загадано число от 1 до 144. Разрешается выделить одно подмножество множества чисел от 1 до 144 и спросить, принадлежит ли ему загаданное число. За ответ «да» надо заплатить 2 рубля, за ответ «нет» – 1 рубль. Какая наименьшая сумма денег необходима для того, чтобы наверняка угадать число?

*М. Островский*

#### 11 класс

1. Есть две колоды, из 36 карт каждая. Первую перетасовали и положили на вторую. Затем для каждой карты первой колоды посчитали количество карт между ней и такой же картой второй колоды (т.е. сколько карт между семерками червей, между дамами пик и т.д.). Чему равна сумма 36 полученных чисел?

*А. Шаповалов*

2. Окружность  $S$  с центром  $O$  и окружность  $S'$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На дуге окружности  $S$ , лежащей внутри  $S'$ , взята точка  $C$ . Точки пересечения  $AC$  и  $BC$  с  $S'$ , отличные от  $A$  и  $B$ , обозначим  $E$  и  $D$  соответственно. Докажите, что прямые  $DE$  и  $OC$  перпендикулярны.

*М. Сонкин*

3. См. задачу 3 для 10 класса.

4. Имеется таблица  $n \times n$  ( $n > 100$ ), в которой стоит  $n - 1$  единица, а в остальных клетках – нули. С ней разрешается проделывать следующую операцию: выбрать клетку, вычесть из числа, стоящего в этой клетке, единицу, а ко всем

остальным числам, стоящим в одной строке или в одном столбце с выбранной клеткой, прибавить единицу. Можно ли из этой таблицы с помощью указанных операций получить таблицу, в которой все числа равны?

*О. Подлитский*

5. На доске записано целое число. Его последняя цифра запоминается, затем стирается и умноженная на 5 прибавляется к тому числу, что осталось на доске после стирания. Первоначально было записано число  $7^{1998}$ . Может ли после применения нескольких таких операций получиться число  $1998^7$ ?

*Л. Емельянов*

6. Из бесконечной шахматной доски вырезали многоугольник со сторонами, идущими по сторонам клеток. Отрезок периметра многоугольника называется черным, если примыкающая к нему изнутри многоугольника клетка – черная, соответственно белым, если клетка белая. Пусть  $A$  – количество черных отрезков на периметре,  $B$  – количество белых и пусть многоугольник состоит из  $a$  черных и  $b$  белых клеток. Докажите, что  $A - B = 4(a - b)$ .

*И. Измestьев*

7. Даны два правильных тетраэдра с ребрами длины  $\sqrt{2}$ , переводящихся один в другой при центральной симметрии. Пусть  $\Phi$  – множество середин отрезков, концы которых принадлежат разным тетраэдрам. Найдите объем фигуры  $\Phi$ .

*А. Белов*

8. В последовательности натуральных чисел  $\{a_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  каждое натуральное число встречается хотя бы один раз и для любых различных  $n$  и  $m$  выполнено неравенство

$$\frac{1}{1998} < \frac{|a_n - a_m|}{|n - m|} < 1998.$$

Докажите, что тогда  $|a_n - n| < 2\,000\,000$  для всех натуральных  $n$ .

*Д. Храмов*

#### Заключительный этап

##### 9 класс

1. Угол, образованный лучами  $y = x$  и  $y = 2x$  при  $x \geq 0$ , отсекает на параболы  $y = x^2 + px + q$  две дуги. Эти дуги спроектированы на ось  $Ox$ . Докажите, что проекция левой дуги на 1 короче проекции правой.

*Жюри*

2. Выпуклый многоугольник разбит на параллелограммы. Вершину много-

угольника, принадлежащую только одному параллелограмму, назовем хорошей. Докажите, что хороших вершин не менее трех.

*М.Смутов*

3. См. задачу M1658 из «Задачника «Кванта».

4. См. задачу M1657 из «Задачника «Кванта».

5. См. задачу M1653 из «Задачника «Кванта».

6. См. задачу M1654 из «Задачника «Кванта».

7. Ювелир сделал незамкнутую цепочку из  $N > 3$  пронумерованных звеньев. Капризная заказчица потребовала изменить порядок звеньев в цепочке. Из вредности она заказала такую незамкнутую цепочку, чтобы ювелиру пришлось раскрыть как можно больше звеньев. Сколько звеньев придется раскрыть?

*А.Шаповалов*

8. На доске написаны два различных натуральных числа  $a$  и  $b$ . Меньшее из них стирают и вместо него пишут число  $\frac{ab}{|a-b|}$  (которое может уже оказаться нецелым). С полученной парой чисел делают ту же операцию и т.д. Докажите, что в некоторый момент на доске окажутся два равных натуральных числа.

*И.Изместьев*

## 10 класс

1. Прямые, параллельные оси  $Ox$ , пересекают график функции  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  первая – в точках  $A, D$  и  $E$ , вторая – в точках  $B, C$  и  $F$  (рис.3). Докажите, что длина проекции дуги

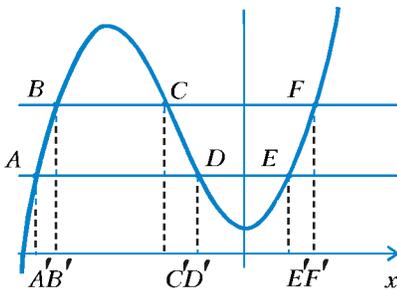


Рис. 3

$CD$  на ось  $Ox$  равна сумме длин проекций дуг  $AB$  и  $EF$ .

*И.Изместьев*

2. См. задачу M1656 из «Задачника «Кванта».

3. Проведем через основание биссектрисы угла  $A$  разностороннего треугольника  $ABC$  отличную от стороны  $BC$  касательную к вписанной в треугольник окружности. Точку ее касания с окружностью обозначим через  $K_a$ . Аналогично построим точки  $K_b$  и  $K_c$ . Докажите, что три прямые, соединяющие точки  $K_a, K_b$  и  $K_c$  с серединами сторон  $BC, CA$  и  $AB$  соответственно, имеют общую точку, причем эта точка лежит на вписанной окружности.

*И.Шарыгин*

4. Часть подмножеств некоторого конечного множества выделена. Каждое выделенное подмножество состоит в точности из  $2k$  элементов ( $k$  – фиксированное натуральное число). Известно, что в каждом подмножестве, состоящем не более чем из  $(k+1)^2$  элементов, либо не содержится ни одного выделенного подмножества, либо все в нем содержащиеся выделенные подмножества имеют общий элемент. Докажите, что все выделенные подмножества имеют общий элемент.

*В.Дольников*

5. С числом разрешается производить одно из двух действий: возводить в квадрат или прибавлять единицу. Даны числа 19 и 98. Можно ли из них за одно и то же количество действий получить равные числа?

*Е.Малишкова*

6. На множестве действительных чисел задана операция  $*$ , которая каждому двум числам  $a$  и  $b$  ставит в соответствие число  $a*b$ . Известно, что равенство  $(a*b)*c = a + b + c$  выполняется для любых трех чисел  $a, b$  и  $c$ . Докажите, что  $a*b = a + b$ .

*Б.Френкин*

7. Дан выпуклый  $n$ -угольник ( $n > 3$ ), никакие четыре вершины которого не лежат на одной окружности. Окружность, проходящую через три вершины многоугольника и содержащую внутри себя остальные его вершины, назовем описанной. Описанную окружность назовем граничной, если она проходит через три последовательные (соседние) вершины многоугольника; описанную окружность назовем внутренней, если она проходит через три вершины, никакие две из которых не являются соседними вершинами многоугольника. Докажите, что граничных описанных окружностей на две больше, чем внутренних.

*О.Мусин*

8. В каждую клетку квадратной таблицы размера  $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$  ставится одно из чисел  $+1$  или  $-1$ . Расстанов-

ку чисел назовем удачной, если каждое число равно произведению всех соседних с ним (соседними называются числа, стоящие в клетках с общей стороной). Найдите число удачных расстановок.

*Д.Любшин*

## 11 класс

1. См. задачу 1 для 10 класса.

2. Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается сторон  $BC, CA, AB$  в точках  $A_1, B_1, C_1$  соответственно. Точки  $A_2, B_2, C_2$  – середины дуг  $BAC, CBA, ACB$  описанной около треугольника  $ABC$  окружности. Докажите, что прямые  $A_1A_2, B_1B_2$  и  $C_1C_2$  пересекаются в одной точке.

3. На плоскости нарисовано некоторое семейство  $S$  правильных треугольников, получающихся друг из друга параллельными переносами так, что любые два треугольника пересекаются. Докажите, что найдутся три точки такие, что любой треугольник семейства  $S$  содержит хотя бы одну из них.

4. См. задачу M1660 из «Задачника «Кванта».

5. См. задачу M1652 из «Задачника «Кванта».

6. См. задачу M1655 из «Задачника «Кванта».

7. В тетраэдр  $ABCD$ , длины всех ребер которого не более 100, можно поместить две непересекающиеся сферы диаметра 1. Докажите, что в него можно поместить одну сферу диаметра 1,01.

*Р.Карасев*

8. См. задачу M1659 из «Задачника «Кванта».

*Публикацию подготовил Н.Агаханов*

## Призеры олимпиады

### Дипломы I степени

по 9 классам получили

*Лифшиц Юрий* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

*Скопенков Михаил* – Саратов, ФТЛ 1,

*Красненко Екатерина* – Омск, ФМШЛ 64;

по 10 классам –

*Петров Федор* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

*Поярков Алексей* – Рыбинск, лицей 2, 9 кл.,

*Лузгарев Александр* – Киров, КФМЛ;

по 11 классам –

*Дуров Николай* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239.

### Дипломы II степени

по 9 классам получили

*Каленков Максим* – Набережные Челны, гимназия 26,

*Гайфуллин Александр* – Жуковский, школа 10,

*Карвонен Максим* – Рыбинск, лицей 2,

*Воробьев Андрей* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

*Халявин Андрей* – Киров, КФМЛ, *Бурцев Александр* – Омск, ФМШЛ 64,

*Тихомиров Сергей* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239;

по 10 классам –

*Лебедев Алексей* – с.Семеново Уренского р-на Нижегородской обл., школа 1 г.Урень,

*Кузнецов Максим* – Нижний Новгород, ФМЛ 40,

*Мартыанов Владимир* – Нижний Новгород, ФМЛ 40,

*Мазин Михаил* – Москва, лицей «Вторая школа»,

*Бейлин Андрей* – Ростов-на-Дону, школа 58,

*Евсеев Антон* – Москва, школа 57, *Лобарев Андрей* – Новосибирск, СУНЦ НГУ;

по 11 классам –

*Растатурин Алексей* – Краснодар, школа 48,

*Дремов Владимир* – Волгодонск, школа 24, 9 кл.,

*Шаповалов Данил* – Иваново, школа-лицей 33,

*Дильман Степан* – Челябинск, ФМЛ 31,

*Розенберг Антон* – Санкт-Петербург, школа 419,

*Черепанов Евгений* – Рыбинск, школа 17,

*Етеревский Олег* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

*Анно Ирина* – Москва, школа 57,

*Сорокин Алексей* – Калуга, школа 19,

*Фирсова Татьяна* – Саров, школа 2, *Бахарев Федор* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

*Сопкина Екатерина* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239.

### Дипломы III степени

по 9 классам получили

*Агапов Андрей* – Москва, школа 57, *Исмагилов Ильнур* – Саров, лицей 3,

*Незлобин Александр* – Санкт-Петербург, ФТШ,

*Мойкина Татьяна* – Ярославль, гимназия 1,

*Гарбер Михаил* – Ярославль, школа 33, 8 кл.,

*Надеин Антон* – Владивосток, школа 23,

*Зинин Евгений* – Краснодар, школа 87,

*Смирнов Филипп* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239, 8 кл.,

*Федотов Алексей* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

*Николаев Андрей* – Омск, ФМШЛ 64,

*Праведников Константин* – Пермь, школа 17,

*Колесников Андрей* – Нижний Новгород, педагогическая гимназия,

*Зарубина Анна* – Москва, школа 57, *Свердлова Дарья* – Вологда, естественно-математический лицей,

*Крамаренко Денис* – Краснодар, школа 42;

по 10 классам –

*Чухнов Антон* – Санкт-Петербург, школа 642.

*Жилыев Владимир* – Москва, гимназия 1543,

*Рачков Роман* – Нижний Тагил, политехническая гимназия,

*Шпениев Алексей* – Краснодар, школа 36,

*Проскурников Антон* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

*Шшишкин Сергей* – Челябинск, ФМЛ 31,

*Певзнер Игорь* – Киров, КФМЛ, *Мовчан Игорь* – Москва, школа 57,

*Галкин Сергей* – Москва, лицей «Вторая школа»,



*Никокошев Илья* – Москва, СУНЦ МГУ,

*Баскаков Илья* – Москва, школа 710;

по 11 классам –

*Чернышенко Дмитрий* – Москва, школа 57,

*Железняк Александр* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

*Плахов Андрей* – Волгодонск, школа 19/20,

*Андреев Михаил* – Краснодар, лицей КГТУ,

*Вишневский Александр* – Долгопрудный, школа 5,

*Боярченко Дмитрий* – Ростов, школа 33,

*Митягин Антон* – Москва, школа 57,

*Мельник Сергей* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

*Попов Александр* – Пермь, ФМШ 146,

*Ткаченко Артем* – Омск, школа-гимназия 88,

*Доценко Владимир* – Москва, школа 57,

*Любимов Андрей* – Москва, школа 57,

*Фахрутдинов Валентин* – Челябинск, ФМЛ 3,

*Сленев Владимир* – Москва, школа 57,

*Егоров Арсений* – Санкт-Петербург, ФМГ 30,

*Ковшов Николай* – Долгопрудный, школа 11,

*Интохин Александр* – Калуга, школа 12,

*Гусаков Владимир* – Владивосток, школа 23,

*Беленький Алексей* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

*Антонов Михаил* – Омск, школа-гимназия 88.

# XXXII Всероссийская олимпиада школьников по физике

С 20 по 26 апреля в столице Чувашской республики городе Чебоксары проходил заключительный этап очередной Всероссийской физической олимпиады. В олимпиаде приняли участие 175 школьников из 54 субъектов Российской Федерации.

Ниже приводятся условия теоретических и экспериментальных задач, а также списки призеров олимпиады.

## Задачи олимпиады

### Теоретический тур

#### 9 класс

1. На стержень радиусом  $r$  прочно насажен моток нерастяжимой липкой ленты внешним радиусом  $R$  (рис.1). На этом же стержне на легкой нити

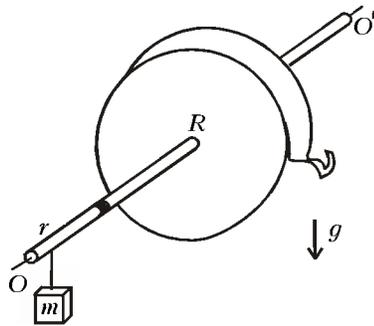


Рис. 1

висит груз массой  $m$ . Если ленту тянуть с силой  $F$ , груз будет подниматься с постоянной скоростью. С какой силой надо тянуть ленту, чтобы поднимать груз массой  $2m$  с той же скоростью? Стержень может свободно вращаться вокруг неподвижной оси  $OO'$ .

*Л.Мельниковский*

2. Тонкостенный цилиндр катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания со скоростью  $v_0 = 6$  м/с. Коэффициент трения между цилиндром и поверхностью  $\mu = 0,2$ . Цилиндр сталкивается с вертикальной гладкой стенкой и упруго отражается от нее. 1) Найдите скорости верхней и нижней точек цилиндра непосредственно после отражения. 2) Определите скорость центра цилиндра через  $t_1 = 2$  с и через  $t_2 = 4$  с после столкновения со стенкой. 3) Определите, какой путь пройдет центр цилиндра к момен-

там времени  $t_1$  и  $t_2$ . Принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

*А.Гуденко*

3. Два высоких сообщающихся с атмосферой цилиндра соединены одинаковыми тонкими трубками  $AB$  и  $CD$  и

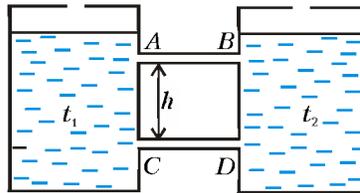


Рис. 2

заполнены водой (рис.2). Расстояние между трубками равно  $h = 1$  м. Температуры воды в цилиндрах поддерживаются постоянными и равными  $t_1 = 100$  °С и  $t_2 = 40$  °С. Плотность воды зависит от температуры по закону  $\rho = \rho_0(1 - \beta(t - t_0))$ , где  $t_0$  – комнатная температура,  $\rho_0 = 1,0 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> – плотность воды при комнатной температуре, коэффициент  $\beta = 2,1 \cdot 10^{-6}$  град<sup>-1</sup>. В такой системе возникает круговая циркуляция воды по трубкам между цилиндрами. Известно, что масса воды, перетекающей по трубке в единицу времени, пропорциональна разности давлений на ее концах. Определите разности давлений на концах трубок  $AB$  и  $CD$ .

*Л.Мельниковский*

4. Лампочки  $L_1$  и  $L_2$ , имеющие вольт-амперные характеристики, показанные на рисунке 3, соединили последовательно и подключили к источнику с напряжением  $U = 12$  В. 1) Найдите ток, текущий при этом через лампочку  $L_1$ . 2) Какой ток будет течь через лампочку  $L_1$ , если последовательно соединить лампочки  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$ , имеющую такую же вольт-амперную характеристику, как и  $L_2$ , и подключить эту

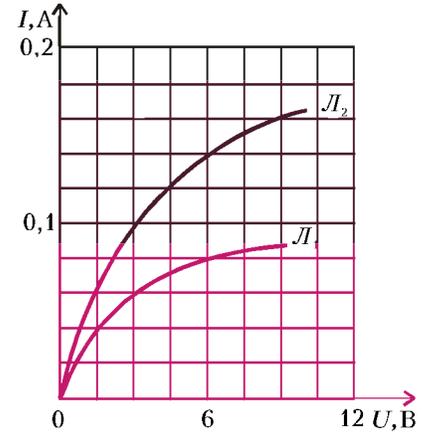


Рис. 3

«гирлянду» к источнику с напряжением  $U = 12$  В?

*А.Пушинов*

#### 10 класс

1. Тело массой  $m$  бросают вертикально вверх с поверхности земли, вдоль которой с постоянной скоростью  $u$  дует ветер. Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости тела и равна  $\vec{F} = -k\vec{v}$ . Через время  $\tau$  тело возвращается на землю на расстоянии  $s$  от точки бросания с вертикальной составляющей скорости, которая на  $\Delta v$  меньше стартовой скорости. Найдите работу сил трения о воздух за все время полета.

*Ю.Чешев*

2. В тепловой машине в качестве рабочего тела используется один моль идеального одноатомного газа. Рассматриваются циклы I и II (рис.4). Найдите коэффициенты полезного действия (КПД)  $\eta_1$  и  $\eta_2$  этих циклов, если их отношение равно  $\alpha = 1,6$ .

*В.Слободянин*

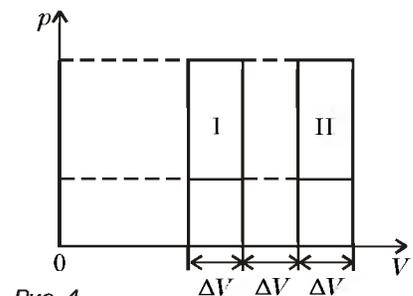


Рис. 4

3. Водяной пар массой  $m = 1$  г находится в теплоизолированной камере объемом  $V = 39$  л при температуре  $T = 300$  К. В той же камере находится вода, масса которой меньше массы пара. В процессе адиабатического сжатия температура пара возрастает на  $\Delta T = 1$  К, а часть воды испаряется. На сколько граммов увеличится при этом масса пара в камере? Удельная теплота испарения воды  $L = 2370$  Дж/г, пар можно считать идеальным газом с молярной теплоемкостью  $C_V = 3R \approx 25$  Дж/(моль·К), теплоемкостью воды можно пренебречь. Известно также, что при малых изменениях температуры насыщенного пара  $\Delta T$  его давление изменяется на величину  $\Delta p = k\Delta T$ , где  $k = 2 \cdot 10^2$  Па/К.

А.Шеронов

4. В электрической схеме, параметры которой указаны на рисунке 5, определите токи, протекающие через диоды  $D_1$  и  $D_2$ . Диоды считать идеальными.

Ю.Чешев

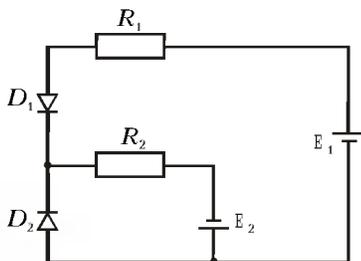


Рис. 5

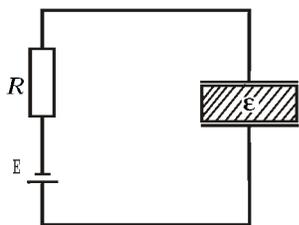


Рис. 6

5. В воздушный конденсатор емкости  $C_0$  вставлена пластина с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Диэлектрик заполняет весь объем конденсатора. Конденсатор подключен к батарее с ЭДС  $E$  через резистор  $R$  (рис.6). Пластины быстро вынимают из конденсатора, так что его начальный заряд не успевает измениться. После этого начинается процесс перезарядки конденсатора. Найдите: 1) механическую работу, совершаемую внешней силой против сил электрического поля; 2) изменение электрической энергии конденсатора в процессе перезарядки; 3) работу батареи; 4) количество теплоты, выделившееся на резисторе.

Ю.Чешев

11 класс

1. На гладкой горизонтальной поверхности стола лежит доска массой  $M = 1$  кг и длиной  $L = 1$  м, прикрепленная легкой пружиной жесткостью  $k = 100$  Н/м к вертикальной неподвижной стене (рис.7). В начальный момент пружина не деформирована. По доске пускают небольшой кубик массой  $m = 0,1$  кг, сообщив ему начальную скорость  $v_0 = 1$  м/с так, как показано на

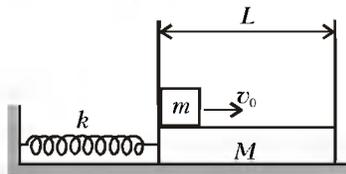


Рис. 7

рисунке. При каком коэффициенте трения кубика о поверхность доски тепло, выделившееся в системе, будет максимальным? Найдите это максимальное тепло. Трением доски о поверхность пренебречь. Считайте, что кубик движется все время в одном направлении (относительно стола). Проверьте, удовлетворяют ли условия задачи этому предположению для всех полученных решений.

Д.Подлесный

2. Два высоких сосуда с водой соединены тонкими длинными трубками  $AB$  и  $CD$ , расположенными на расстоянии  $h$  друг от друга (рис.8). Вода в сосудах поддерживается при температурах  $T_1$  и  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ). Для поддержания темпе-

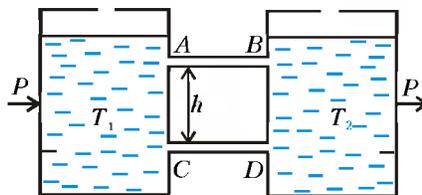


Рис. 8

ратур в сосудах неизменными к более теплому сосуду приходится подводить некоторую тепловую мощность  $P$  (от нагревателя), а от холодного – отводить такую же мощность. Пренебрегая теплообменом с окружающей средой и теплопроводностью материала трубок, определите: 1) уровень, отсчитываемый от нижней трубки, на котором давления в обоих сосудах будет одинаковыми; 2) разность давлений на концах трубок  $AB$  и  $CD$ ; 3) мощность, подводимую к теплому сосуду (и отводимую от холодного). Плотность воды зависит от ее температуры по закону  $\rho = \rho_0 - \alpha(T - T_0)$ , где  $\rho_0$  и  $\alpha$  – постоянные величины. В единицу времени через любую точку трубки проте-

кает масса жидкости  $\Delta m/\Delta t = k\Delta p$ , где  $\Delta p$  – разность давлений на концах трубки,  $k$  – некоторый известный коэффициент. Удельная теплоемкость  $c$  воды задана.

Л.Мельниковский

3. Теплоизолированный сосуд разделен на две части теплонепроницаемой перегородкой (рис.9). В перегородке

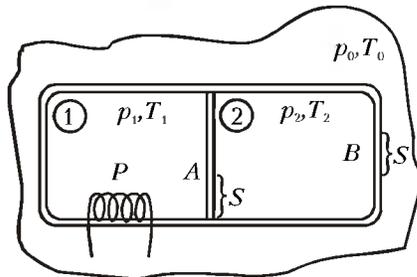


Рис. 9

родке  $A$  и в одной из стенок  $B$  имеется большое количество маленьких отверстий общей площадью  $S$  в каждой. В первой части сосуда включили нагреватель мощностью  $P$ . Сосуд заполнен аргоном и помещен в атмосферу аргона. Внешнее давление  $p_0$  и температура  $T_0$  поддерживаются неизменными. Оцените установившиеся значения давлений и температур в обеих частях сосуда. Сделайте численные оценки при  $P = 20$  Вт,  $S = 10$  мм<sup>2</sup>,  $p_0 = 10^5$  Па,  $T_0 = 300$  К. Молярная масса аргона  $M = 40 \cdot 10^{-3}$  кг/моль, универсальная газовая постоянная  $R = 8,3$  Дж/(моль·К).

К.Захарченко

4. На двух гладких горизонтальных и параллельных рельсах, расстояние между которыми  $l = 2$  м, находится тонкая проводящая перемычка массой

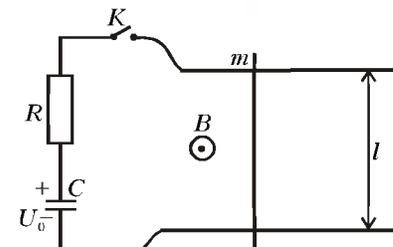


Рис. 10

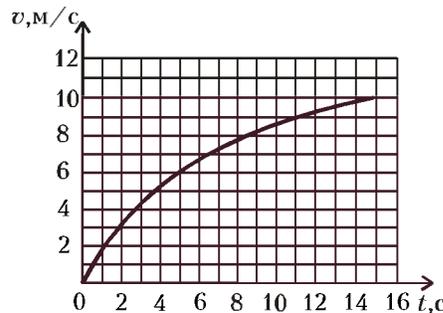


Рис. 11

$m = 0,01$  кг (рис.10). Рельсы через ключ  $K$  и резистор сопротивлением  $R = 14$  кОм подключены к конденсатору, заряженному до некоторого напряжения  $U_0$ . Рельсы расположены в однородном магнитном поле с индукцией, равной  $B = 1$  Тл и перпендикулярной их плоскости. На рисунке 11 приведена экспериментально снятая зависимость скорости  $v$  перемычки от времени  $t$  после замыкания ключа  $K$ . Пренебрегая омическим сопротивлением проводов, рельсов и перемычки, по заданному графику  $v(t)$  определите: 1) начальное напряжение на конденсаторе; 2) емкость конденсатора; 3) установившуюся скорость перемычки.

*В.Можаев*

5. Атомарный цезий испускает при возбуждении две монохроматические линии излучения с близкими длинами волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Для анализа этого излучения используется интерферометр Майкельсона (рис.12). Излучение це-

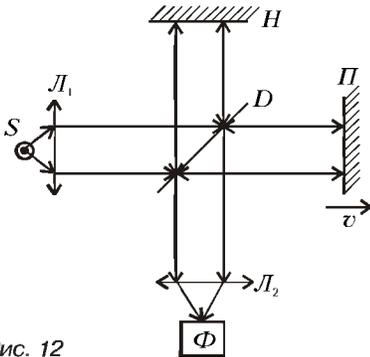


Рис. 12

зиевой лампы  $S$  с помощью линзы  $L_1$  направляется в виде параллельного пучка на полупрозрачное зеркало-делитель  $D$ . Это излучение частично отражается от делителя и падает на неподвижное зеркало  $H$ . Другая часть излучения проходит через делитель и падает на подвижное зеркало  $\Pi$ . После отражения от зеркал  $H$  и  $\Pi$  оба пучка вновь возвращаются к делителю  $D$ . Часть энергии этих пучков делитель направляет в сторону линзы  $L_2$ , которая фокусирует оба пучка на поверхность катода фотоэлемента. Ток фотоэлемента пропорционален суммарной интенсивности падающего на него потока излучения. Подвижное зеркало  $\Pi$  начинает медленно двигаться от делительной пластины с постоянной скоростью  $v = 2,02 \cdot 10^{-6}$  м/с; при этом ток фотоэлемента изменяется так, как показано на рисунке 13. Определите: 1) среднюю длину волны излучения  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ ; 3) отношение  $I_1/I_2$  интенсивностей спектральных линий, испускаемых атомом цезия.

*А.Шеронов*

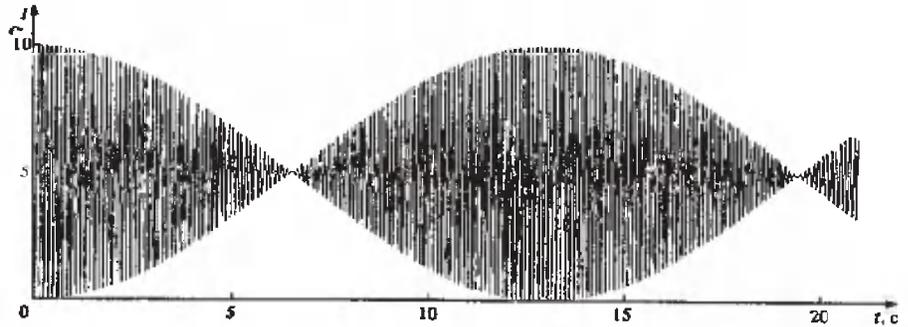


Рис. 13

### Экспериментальный тур

#### 9 класс

1. Проверьте выполнение закона Гука и определите модуль упругости (модуль Юнга) стальной проволоки.

*Приборы и оборудование:* штатив с двумя крепежами; два стержня; стальная проволока (диаметром 0,26 мм); пластилин; линейка, нить; динамометр.

*Примечание:* модуль упругости определяется через коэффициент жесткости  $k$  проволоки как  $E = k l_0 / S$ , где  $l_0$  и  $S$  — длина и площадь поперечного сечения проволоки.

*Ф.Денисов*

2. Определите массу поваренной соли, растворенной в единице объема воды.

*Приборы и оборудование:* раствор с неизвестной концентрацией поваренной соли; пол-литровая банка с водой; два электрода; соединительные провода; источник переменного тока с регулируемым напряжением; амперметр; вольтметр; набор 8 навесок поваренной соли; миллиметровая бумага.

*В.Самсонов*

#### 10 класс

1. Определите мощность электрокипятника и количество электроэнергии, затраченной на нагревание воды от комнатной температуры до (выбранной по усмотрению) температуры из интервала 80 – 85 °С. Оцените количество теплоты, потерянное в процессе нагревания.

*Приборы и оборудование:* источник тока неизвестного напряжения; термометр со шкалой до 100 °С; стеклянная банка для воды объемом 0,5 л; кипятильник; часы; миллиметровая бумага; штатив.

*Примечание:* теплоемкости стекла и воды принять не зависящими от температуры и равными, соответственно, 670 Дж/(кг · К) и 4200 Дж/(кг · К); масса банки 250 г.

*В.Самсонов*

2. Найдите расстояние между тонкими параллельными стеклами в ящике.

Оцените погрешность с наибольшей возможной точностью.

*Приборы и оборудование:* два параллельных стекла, ограниченных стенками ящика (без крышки); линейка; карандаш; лист бумаги.

*С.Лебедев, В.Самсонов*

#### 11 класс

1. Известно, что визуализация электрического сигнала в осциллографе может осуществляться с помощью генератора развертки, т.е. генератора периодически повторяющихся пилообразных импульсов, посылаемых на горизонтально отклоняющие пластины электронно-лучевой трубки. Таким образом в отсутствие внешнего сигнала светящаяся точка перемещается по экрану равномерно слева направо, после чего быстро возвращается в исходное положение. Используя напряжение генератора развертки, определите неизвестное сопротивление. При каком сопротивлении магазина эксперимент дает наибольшую точность?

*Приборы и оборудование:* осциллограф; магазин сопротивлений; неизвестное сопротивление; соединительные провода.

*Примечание:* при работе с осциллографом следует пользоваться только ручками смещения по горизонтали и вертикали, а также ручкой усиления по оси Y; разрешается также использовать гнезда входа и выхода осциллографа.

*Л.Виноградов*

2. Определите толщину стеклянных пластинок, собранных в пакет, не открывая обертку его торцов.

*Приборы и оборудование:* бумага; карандаш; линейка; пакет стеклянных пластинок с одним и тем же показателем преломления.

*С.Лебедев*

*Публикацию подготовили  
С.Козел, В.Коровин*

## Призеры олимпиады

### Дипломы I степени

#### по 9 классам получили

*Многолетний Владимир* – Северодвинск, лицей 17,  
*Попов Илья* – Москва, лицей «Вторая школа»,  
*Ващенко Андрей* – Брянск, лицей 1,  
*Муслиенко Дмитрий* – Киров, ФМЛ 35,  
*Шутович Андрей* – Владивосток, школа 23;

#### по 10 классам –

*Чудновский Александр* – Челябинск, школа 96,  
*Сырицын Сергей* – Саратов, ФТЛ 1,  
*Дельцов Василий* – Чебоксары, УВК СШ 54,  
*Кравцов Константин* – Москва, лицей «Вторая школа»;

#### по 11 классам –

*Водомеров Александр* – Вологда, естественно-математический лицей,  
*Имамбеков Адилет* – Москва, СУНЦ.

### Дипломы II степени

#### по 9 классам получили

*Любимова Дина* – п.Черноголовка Московской обл., ЭШ 82,  
*Кулигин Леонид* – Бийск, лицей,  
*Прокотьев Максим* – Ноябрьск, школа-лицей 10,  
*Полищук Олег* – Москва, школа 57,  
*Ульянов Андрей* – Снежинск, гимназия 122,  
*Полтавский Ярослав* – Ноябрьск, школа-лицей 10;

#### по 10 классам –

*Канделаки Вахтанг* – Вологда, естественно-математический лицей,  
*Соломатин Константин* – Протвино, МОУ лицей,  
*Полянский Юрий* – Радужный, школа 2,  
*Матвеев Артур* – Белорецк, комплексная школа,  
*Хегай Александр* – Новосибирск, школа 130,  
*Румянцев Леонид* – Ростов-на-Дону, лицей 1,  
*Васильев Михаил* – Долгопрудный, ФМШ 5,  
*Каган Григорий* – Нижний Новгород, лицей 40,  
*Шаширо Александр* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Панов Евгений* – Челябинск, ФМЛ 31,

*Черемухин Антон* – Сергиев Посад, ФМШ 2;

#### по 11 классам –

*Соболев Дмитрий* – Нижний Новгород, лицей 40,  
*Рубцов Григорий* – п.Черноголовка Московской обл., ЭШ 82,  
*Слизовский Сергей* – Санкт-Петербург, академическая гимназия,  
*Гагарин Максим* – Пермь, гимназия 17,  
*Барышев Владимир* – Нижний Новгород, лицей 40,  
*Цыганков Дмитрий* – Москва, СУНЦ,  
*Хохлов Михаил* – Брянск, лицей 1,  
*Макурин Михаил* – Архангельск, школа 22.

### Дипломы III степени

#### по 9 классам получили

*Емелин Михаил* – Нижний Новгород, лицей 40,  
*Астрецов Сергей* – Москва, школа 91,  
*Сарбаев Руслан* – Чебоксары, школа 53,  
*Сыроваткин Дмитрий* – Новороссийск, школа 40,  
*Шварц Осип* – Новороссийск, школа 10,  
*Ласкин Виктор* – Санкт-Петербург, Аничков лицей,  
*Кислицын Дмитрий* – Братск, лицей 1,  
*Брагин Сергей* – Ростов-на-Дону, школа 58,  
*Медников Леонид* – Москва, лицей «Вторая школа»;

#### по 10 классам –

*Мелешков Илья* – Ноябрьск, школа-лицей 10,  
*Матушкин Тимофей* – Ноябрьск, школа-лицей 10,  
*Жолобов Александр* – Киров, ФМЛ 35,  
*Курасов Александр* – Санкт-Петербург, Аничков лицей,  
*Яньшин Александр* – Чебоксары, школа 9,  
*Нарышкин Юрий* – Чебоксары, ЧТЛ,  
*Соколов Андрей* – Нижний Новгород, лицей 40,  
*Агафонцев Дмитрий* – Киров, ФМЛ 35,  
*Шитулина Галина* – Березники, школа 3,  
*Черемин Руслан* – Москва, СУНЦ;

#### по 11 классам –

*Абанин Дмитрий* – Ростов-на-Дону, школа 56,



*Широковский Николай* – Заречный, школа 230,  
*Чеховской Александр* – Московская обл., школа-лицей 11,  
*Турицын Константин* – Новосибирск, СУНЦ,  
*Барыгин Илья* – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,  
*Дурашкин Александр* – Челябинск, школа 31,  
*Мартьянов Кирилл* – Нижний Новгород, лицей 40,  
*Ли Дмитрий* – Новгород, педагогический лицей,  
*Трубицын Дмитрий* – Новосибирск, гимназия 3,  
*Подшивалин Андрей* – Чебоксары, УВК СШ 54,  
*Храмцов Дмитрий* – Новосибирск, СУНЦ.

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №4)

1. Покажем, что на доске не может быть написано более одного положительного числа. Пусть  $M$  – наибольшее положительное число из написанных на доске чисел, причем имеется еще по крайней мере одно число  $m$  такое, что  $0 < m \leq M$ . Тогда на доске должно быть записано также и число  $m + M$ , большее  $M$ , что невозможно. Аналогично показывается, что на доске не может быть написано и более одного отрицательного числа. Итак, написано либо два, либо три числа, например:  $\{0, 2\}$  или  $\{-2, 0, 2\}$ .

2. Обозначим через  $x$  год рождения члена редколлегии, а через  $y$  – его возраст. По условию задачи

$$x + (x + y) - (x + 20) - (x + 30) = 16.$$

Решая это уравнение, находим  $y = 66$ .

3. Распилить обычную доску  $8 \times 8$  клеток так, как это требуется в условии задачи, невозможно. Однако шашкисты сражаются и на столеточных досках. Такую доску можно разделить, причем несколькими способами

4. Перебрав варианты, находим  $\sqrt[2]{64} = 8$  или  $\sqrt[6]{64} = 2$ . Показатель извлекаемой степени 2 в школьном учебнике писать не принято. Поэтому истинным можно считать лишь ответ  $\sqrt[6]{64} = 2$ .

5. Допустим, что никакая ладья не бьет другую. Значит, на каждой вертикали и каждой горизонтали стоит строго по одной ладье. Тогда в вертикальных рядах с нечетными номерами – по их числу – стоит ровно 6 ладей. Но эти 6 ладей стоят в пяти горизонтальных рядах с четными номерами, и, следовательно, в каком-то горизонтальном ряду две ладьи бьют друг друга.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. 312,5 г.

2. Так как длина стержня остается неизменной, проекции скоростей его концов на ось стержня должны быть равными (рис.1). Расчет дает  $v_B = v_A \operatorname{tg} \alpha$ .

3. При вращении на стержне минимальная скорость грузика в верхней точке равна нулю, а при вращении на нити она больше нуля, поскольку нить должна быть все время натянутой – вилот до верхней точки. Следовательно, в нижнем положении грузику на нити нужно сообщить большую скорость.

4. Большее давление выдерживает круглая колба, так как ее стенки испытывают сжатие, а плоское дно – изгиб (известно, что прочность на изгиб меньше).

5. Расширившаяся от нагревания металлическая крышка не так крепко держится на стеклянной резбе.

6. Шарик пройдет сквозь нагретое кольцо.

7. Теплопроводность слежавшегося снега больше теплопроводности деревянной доски, поэтому вокруг доски снег будет таять быстрее, чем под доской. Теплопроводность же металлической пластины, напротив, много больше теплопроводности слежавшегося снега, поэтому под ней снег будет таять быстрее.

8. Благодаря лучшей теплопроводности меди (по сравнению с

железом или сталью) припой и материал, на который он наносится, быстрее нагреваются.

9. При предварительном ополаскивании чайника кипятком он нагревается, и вода, налитая во второй раз (для заварки), оказывается более горячей. Из-за большей теплоемкости и меньшей теплопроводности фарфоровый чайник остывает медленнее, чем медный.

10. Дно сосуда имеет более высокую температуру, чем кипящая в нем вода. Благодаря хорошей теплопроводности стали, нижний шар в месте его соприкосновения с дном сосуда будет иметь более высокую температуру, поэтому под ним расплавится больше льда.

11. Количество теплоты, выделяемое в стержне, при постоянном напряжении будет тем больше, чем меньше его сопротивление. Так как асбест замедляет отдачу тепла в окружающее пространство, стержень под асбестом будет горячее. Но сопротивление графита падает с повышением температуры, поэтому тепла выделится больше, когда стержень покрыт асбестом.

12. Во вращающемся цилиндре происходит перераспределение свободных электронов, и возникает электрическое поле, направленное вдоль радиуса от оси цилиндра к его периферии.

13. Нет, так как электрическое сопротивление полупроводников при понижении температуры возрастает.

14. Нагреваемая горелкой проволока теряет свои магнитные свойства, силы притяжения симметрично расположенных проводочек перестают уравниваться, и вертушка начинает вращаться.

15. Так как сопротивление кольца равно нулю, суммарная ЭДС в нем всегда должна быть равна нулю. Это значит, что полный поток магнитной индукции через кольцо не будет меняться, следовательно, поле индукционных токов в кольце направлено всегда против поля электромагнита, т.е. кольцо будет отталкиваться от электромагнита.

16. Поскольку скорость звука в металле больше, чем в воздухе, первый удар обусловлен звуковой волной, прошедшей по трубе, а второй – волной, прошедшей по воздуху.

17. Для калориметра важно, чтобы как можно меньше тепла уходило наружу, а металл излучает тепла меньше, чем стекло.

18. В отличие от черного угля, почти полностью поглощающего видимый свет, белый мел этот свет отражает. Поэтому при нагревании мел излучает значительно меньше, чем уголь.

19. В солнечном спектре максимум излучения приходится на видимую часть спектра, которая стеклом пропускается. Накрывая парники стеклом, мы пропускаем к земле солнечное тепло, но не выпускаем наружу излучаемые землей тепловые лучи.

Микроопыт

Железо, обладая хорошей теплопроводностью, отводит тепло от бумаги, поэтому она не загорится.

ПОКРЫТИЯ ПОЛОСКАМИ

1. Проведем через вершины  $A, B$  и  $C$  треугольника перпендикуляры к сторонам полосы. Исключительный случай, когда некоторые два из этих перпендикуляров совпадают, разберите самостоятельно. В общем случае один из перпендикуляров  $p$  попадет между двумя другими (на рисунке 4 в статье такая прямая  $p$  проходит через  $B$ ). Прямая  $p$  пересечет сторону  $AC$  в некоторой точке  $D$ . Разумеется, длина отрезка  $BD$  не превышает ширины полосы. В то же время высота  $h$  треугольника, опущенная из  $B$  на сторону  $AC$ , не превосходит  $BD$ .

2. 12 см.

3. а) Наибольшая сторона; б) диагональ; в) диаметр окружности.

4. Для прямоугольных.

7. Для любых точек  $A$  и  $B$  фигуры  $F$  расстояние между перпен-

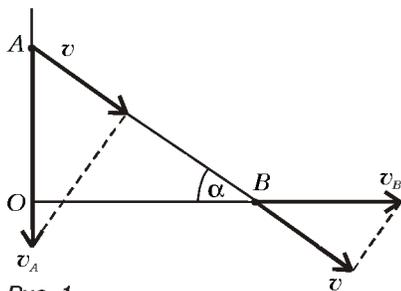


Рис. 1

дикулярными отрезку  $AB$  опорными прямыми не меньше длины отрезка  $AB$ . Поэтому диаметр фигуры  $F$  не превосходит максимальной из ширин фигуры  $F$ . С другой стороны, ширина любой полосы, образованной опорными прямыми фигуры  $F$ , не превосходит диаметра фигуры.

8. а) Может. Если  $F$  — внутренность круга, то граница фигуры  $F$  (окружность) не входит в  $F$ .

б) Может. Например, ось абсцисс — опорная прямая к ветви гиперболы  $y = 1/x, x > 0$  — не имеет с гиперболой общих точек.

*Замечание.* Можно доказать, что если фигура  $F$  замкнута и ограничена, то любая опорная прямая имеет с  $F$  хотя бы одну общую точку.

11. Из любого. *Указание.* Разберите два случая: когда средний по величине угол треугольника больше  $60^\circ$  и когда это не так.

14. а)  $ab/(a+b)$ ; б)  $hc/(h+c)$ . в) Поскольку  $ab = hc$ , достаточно сравнить значения выражений  $h+c$  и  $a+b$ . Воспользуемся формулой  $r = (a+b-c)/2$  для радиуса  $r$  вписанной окружности прямоугольного треугольника. Поскольку  $h > 2r$ , имеем  $h > 2r = a+b-c$ , откуда  $h+c > a+b$ .

*Замечание.* Если бы мы выразили ответ пункта б) не через высоту  $h$  и гипотенузу  $c$ , а через катеты  $a$  и  $b$ , то возникла бы необходимость сравнить между собой значения выражений  $ab/(a+b)$  и  $ab\sqrt{a^2+b^2}/(a^2+ab+b^2)$ .

15. Поставим такую задачу: вписать в треугольник с углом  $2\varphi$ , где  $2\varphi$  — величина угла правильного  $2n$ -угольника, правильный  $2n$ -угольник наибольшего возможного периметра. Рассмотрим два расположения правильного  $2n$ -угольника внутри такого треугольника (рис. 2, 3). Обозначим длины сторон треугольника, образующих угол  $2\varphi$ , через  $x$  и  $y$ . Тогда третья сторона равна  $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos 2\varphi}$ .

Найдем длину стороны правильного  $2n$ -угольника в обоих случаях.



Рис. 2



Рис. 3

*Случай 1* (см. рис. 2). Диаметр  $l$  описанной окружности  $2n$ -угольника равен биссектрисе треугольника, т.е.

$$l = \frac{2xy \cos \varphi}{x+y}.$$

Значит, искомая сторона равна

$$a_1 = l \cos \varphi = \frac{2xy \cos^2 \varphi}{x+y}.$$

*Случай 2* (см. рис. 3).

Из подобия маленького (верхнего) и всего большого треугольников следует равенство  $\frac{h}{h-a_2 \operatorname{tg} \varphi} = \frac{z}{a_2}$ , где  $h$  — высота большого треугольника,  $a_2$  — искомая сторона  $2n$ -угольника. Значит,

$$a_2 = \frac{hz}{h+z \operatorname{tg} \varphi} = \frac{hz^2}{hz+z^2 \operatorname{tg} \varphi} = \frac{xyz \sin 2\varphi}{xy \sin 2\varphi + z^2 \operatorname{tg} \varphi} = \frac{2xyz \cos^2 \varphi}{x^2 + y^2 + 2xy \sin^2 \varphi}.$$

Для доказательства неравенства  $a_1 > a_2$  осталось показать, что  $\frac{1}{x+y} > \frac{z}{x^2 + y^2 + 2xy \sin^2 \varphi}$ . В левой части этого неравенства — среднее арифметическое чисел  $(x+y)(x^2 + 2xy \sin^2 \varphi)$  и  $(x^2 + y^2 - 2xy \cos 2\varphi) / ((x+y)(x^2 + y^2 + 2xy \sin^2 \varphi))$ , а в правой части — среднее геометрическое этих же чисел (проверить!). Дальнейшее рассуждение аналогично решению задачи 2 в статье.

22. *Первый способ.* Пусть квадрат со стороной  $a$  разбит на прямоугольники размером  $a_i \times b_i$ , где  $a_i \leq b_i$ . Тогда сумма площадей  $a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$  всех прямоугольников разбиения равна  $a^2$ . Поскольку  $b_i \leq a$ , имеем  $a^2 = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \leq a_1 a + \dots + a_n a$ . Осталось разделить обе части последнего неравенства на  $a$ .

*Второй способ.* Каждый прямоугольник разбиения покроем по-

лосой, перпендикулярной самой короткой стороне прямоугольника (если прямоугольник является квадратом, то выберем любую из двух полос). Далее можно сослаться на теорему Банга-Гарского. А можно просто сказать, что если сумма меньших сторон прямоугольников меньше стороны квадрата, то в квадрате найдутся как не покрытая вертикальными полосами вертикаль, так и не покрытая горизонтальными полосами горизонталь. Точка их пересечения не будет покрыта ни горизонтальными, ни вертикальными полосами.

25. Чтобы покрыть правильный  $2n$ -угольник, необходимо покрыть весь вписанный в него круг. Среди вписанных в этот круг правильных  $2n$ -угольников, в свою очередь, содержится многоугольник со сторонами, параллельными сторонам исходного  $2n$ -угольника.

27. *Указание.* Спроецируйте вписанные фигуры вдоль данной прямой на перпендикулярную прямую. Другими словами, рассмотрите ширины фигур в соответствующем направлении.

29. Воспользуемся формулой  $S = Pr/2$ , выражающей площадь описанного многоугольника через его периметр  $P$  и радиус вписанной окружности  $r$ . Если  $P_1, \dots, P_n$  — периметры треугольников разбиения, то

$$\frac{1}{2} Pr = \frac{1}{2} P_1 r_1 + \dots + \frac{1}{2} P_n r_n,$$

откуда

$$r = \frac{P_1}{P} r_1 + \dots + \frac{P_n}{P} r_n \leq r_1 + \dots + r_n,$$

поскольку периметры  $P_1, \dots, P_n$  треугольников не превосходят периметра  $P$  объемлющего многоугольника.

30. *Указание.* Допустив противное, т.е. предположив, что сумма углов  $K_1KM$  и  $M_1MK$  больше  $180^\circ$ , поверните немного эти лучи друг к другу так, чтобы получились два новых луча  $KK'$  и  $MM'$ , которые пересекают внутренность фигуры  $F$ , а сумма углов  $K'KM$  и  $M'MK$  по-прежнему больше  $180^\circ$ . Проведя в достаточной близости от  $KM$  параллельный  $KM$  отрезок с концами на этих лучах, получите отрезок, целиком лежащий в  $F$ , длина которого больше  $MN$ .

32. Ширина полосы, ограниченной прямыми  $k$  и  $m$ , не превосходит длины  $KM$ . Ширина  $w$  фигуры  $F$  не превосходит ширины любой полосы, в которой содержится фигура. Значит,  $w \leq KM$ .

## ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ПРИБОРЫ

1.  $l = 3F/2$ . 2. *Указание.* Сделайте соответствующее построение.

3.  $l = F/2$ . 4. Источник сместится в ту же сторону на расстояние  $y = x = 2$  см.

5.  $l = \frac{L(n-1)}{((dD-1)n - LD(n-1))(dD-1)} = 40$  см.

6.  $\frac{1}{d_{2*}} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_{1*}} = 0, d_{2*} \rightarrow \infty$ .

7.  $F = F_1 F_2 / \Delta$ , где  $\Delta$  — расстояние между задним фокусом первой линзы и передним фокусом второй (так называемый оптический интервал); эквивалентная линза находится на расстоянии  $a = -l F_2 / \Delta$  от второй линзы.

## XXIV ВСЕРОССИЙСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

### Зональный этап

#### 8 класс

1. *Ответ:* не существуют.

2. *Ответ:* не могут. *Указание.* Предположив противное, докажете, что в треугольнике  $BAL$  (рис.4) отрезок  $AK$  является медианой и биссектрисой. Следовательно, он является и высотой, т.е.  $AK \perp BD$ . Аналогично,  $AL \perp BD$ . Но два различных перпендикуляра из одной точки  $A$  на прямую  $BD$  опустить нельзя.

3. Назовем характеристикой колоды количество имеющихся в ней карт той масти, которой в колоде осталось больше все-

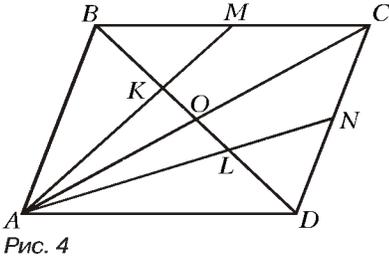


Рис. 4

го. При каждом ходе характеристика либо не меняется, либо уменьшается на 1. В последнем случае, очевидно, берется карта загаданной масти. Поскольку в начале характеристика колоды равнялась 13, а в конце

– 0, по ходу игры она уменьшалась 13 раз.

**4. Указание.** Так как любые 9 точек лежат на двух окружностях, то найдется окружность  $O$ , на которой лежит не менее 5 точек. Рассмотрим все точки множества, не лежащие на  $O$ . Если таких точек четыре или меньше, то утверждение задачи верно.

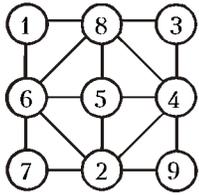


Рис. 5

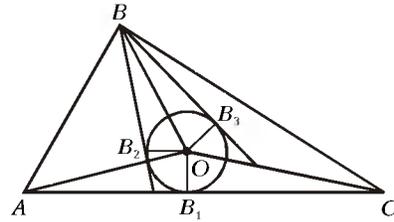


Рис. 6

Пусть вне окружности  $O$  лежит не менее пяти точек. Возьмем пять точек  $A_1, \dots, A_5$  на  $O$  и три точки  $B_1, B_2, B_3$  вне  $O$ . Через точки  $B_1, B_2, B_3$  проходит единственная окружность  $O_1$ . Возьмите теперь любую точку  $V$ , отличную от  $A_1, \dots, A_5, B_1, B_2, B_3$ , и докажите, что она принадлежит одной из окружностей  $O$  или  $O_1$ .

**5.** Пример приведен на рисунке 5.

**7. Указание.** Для окружности  $S_B$  из равенства треугольников  $B_2OB, B_3OB, B_1OA$  и  $B_1OC$  (рис.6) следует, что  $\angle B_2BB_3 = \angle OAC + \angle OCA$ . Аналогичные равенства верны и для  $S_A$  и  $S_C$ .

**8.** Прогноз, в котором нет нулей, окажется *нехорошим*, если все избиратели не явятся на выборы. Поэтому в каждом *хорошем* прогнозе должны быть нули. Пусть в прогнозе  $\Pi$  у кандидата  $A$  и некоторых из его друзей  $A_1, \dots, A_k - 0$  голосов. Тогда при явке  $A$  на выборы прогноз по  $A, A_1, \dots, A_k$  ошибочен. Исключим  $A, A_1, \dots, A_k$  из списков кандидатов и уменьшим на 1 прогноз по остальным друзьям  $A$ . Тогда мы вернемся к исходной задаче, но с меньшим числом кандидатов и меньшим на одного человека ( $A$ ) числом избирателей. Продолжая эту процедуру, мы приходим к несопадению по каждому кандидату числа поданных голосов с прогнозируемым. Значит, исходный прогноз – *нехороший*.

**9 класс**

**1. Ответ:** все треугольники, длины сторон которых пропорциональны 3, 4 и 5. **Указание.** Диаметр  $2r$  вписанной в треугольник окружности меньше любой из ее сторон. Поэтому прогрессия имеет вид  $2r, 2r + d, 2r + 2d, 2r + 3d$ . Выразите  $d$  через  $r$ , воспользовавшись формулами Герона и  $S = pr$ .

**2.** По теореме о вписанных углах имеем равенства:  $\angle PAC = \angle PQC, \angle PBD = \angle PQD$ . Угол  $\angle PBD$  – внешний для треугольника  $ABP$ , поэтому  $\angle PBD = \angle PAB + \angle APB$ . Отсюда  $\angle APB = \angle PBD - \angle PAB = \angle PBD - \angle PAC = \angle PQD - \angle PQC = \angle CQD$ , что и требовалось.

**3. Ответ:**  $9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 3456$ .

**Указание.** Если все цифры десятизначного числа различны, то их сумма равна 45, и потому это число делится на 9. Значит, если оно делится на 11111, то оно делится и на 99999.

Десятизначное число  $X = \overline{a_9 \dots a_0} = 10^5 \cdot \overline{a_9 \dots a_5} + \overline{a_4 \dots a_0} = 99999 \cdot \overline{a_9 \dots a_5} + \overline{a_9 \dots a_5} + \overline{a_4 \dots a_0}$  делится на 99999 тогда и только тогда, когда делится на 99999 сумма  $\overline{a_9 \dots a_5} + \overline{a_4 \dots a_0}$ . Эта сумма меньше чем  $2 \cdot 99999$ . Поэтому она делится на 99999 тогда и только тогда, когда она равна 99999. А это равносильно тому, что  $a_0 + a_5 = 9, a_1 + a_6 = 9, a_2 + a_7 = 9, a_3 + a_8 = 9$  и  $a_4 + a_9 = 9$ . Таким образом, последние пять цифр интересного числа полностью определяются пятью его первыми цифрами, а первые пять цифр можно выбирать произвольно, следя только, чтобы никакие две из них не давали в сумме 9 и  $a_9$  не равнялось нулю.

**4. Ответ:** 4. **Указание.** Докажите, что всякую связную фигуру, составленную из 101 клетки, можно заключить в прямоугольник с такими сторонами  $a$  и  $b$ , что  $a + b = 102$ . Поэтому 4 фигуры, равные данной, удастся вырезать всегда: для этого достаточно заключить ее в прямоугольник с суммой сторон 102, а затем вырезать из данного квадрата четыре таких прямоугольника так, как показано на рисунке 7. В то же время из квадрата нельзя вырезать больше 4-х фигур, имеющих форму креста, каждый «луч» которого состоит из 25 клеток.

**5. Ответ:** не могут.

**6. Ответ:** выиграет первый.

Сначала ему надо делать ходы длиной в 4 клетки, пока он не встанет на 45-ю клетку. Теперь очередь хода за вторым. Если он тоже все время делает ходы длины 4, очередной ход приведет его на клетку 57. Тогда первый следующим ходом должен пойти на клетку 48 и после ответа второго пойти так, чтобы между ним и вторым оказалось 3 клетки (легко видеть, что это всегда возможно). После этого второй будет вынужден пойти на 1, 2 или 3 клетки и окажется в итоге правее 49-й клетки. Значит, до финиша ему останется больше 48 клеток, и, чтобы добраться туда, он должен будет сделать не меньше 13 ходов. Первый же находится не левее 49-й клетки, и ему до финиша остается не более 52 клеток, которые он сумеет преодолеть за 13 ходов.

Рассмотрим теперь случай, когда среди 11 первых ходов второго был ход менее чем на 4 клетки. Тогда он после 11-го хода окажется более чем в 56 клетках от цели, и для ее достижения ему понадобится минимум 15 ходов, а первому до цели остается 55 клеток, и он сможет добраться до нее за 15 ходов, даже если второй при встрече вынудит его сделать ход длины 3 вместо хода длины 4.

**7. Указание.** Пусть  $B_1$  – середина стороны  $A_1A_2$  и  $B_1B_2, \dots, B_{1998}B_1$  – траектория шара. Докажите, что треугольники  $B_1A_2B_2, B_2A_3B_3, \dots, B_{1998}A_1B_1$  попарно равны. Для этого воспользуйтесь их почти очевидным подобием (подсчитайте их углы) и докажите, что коэффициент подобия равен 1.

**8. Ответ:** Нельзя. **Указание.** Введем на листе прямоугольную систему координат с осями, проходящими по линии сетки. Назовем четностью узла четность суммы его координат. Одну из ножек циркуля будем считать первой, другую – второй. Докажите, что четности углов, в которые попадают ножки циркуля, не меняются при выполнении шагов. Если изначально четности первой и второй ножек были различны, ножки поменяются местами не могут. Если эти четности одинаковы, рассмотрите вместо исходной новую сетку, у которой ячейки в 2 раза больше, а ножки циркуля изначально расположены в ее узлах, после чего повторите уже приведенные рассуждения.

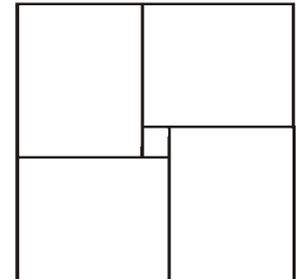


Рис. 7

10 класс

1. *Ответ:*  $b = 0, 0 \leq a < 4$ . *Указание.* Если  $x_0$  — общий корень, то  $f(x_0) = 0$ . Отсюда следует, что  $b = 0$ .

2. *Указание.* Пусть  $\angle BAC = \alpha$ . Тогда  $\angle OBC = \frac{\pi}{2} - \alpha$ , а

$$\angle KEA = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \angle CO = \pi - \alpha.$$

Отсюда следует, что  $KE \parallel AD$ . Аналогично,  $KD \parallel AE$ , значит,  $ADKE$  — параллелограмм.

3. *Указание.* Пусть  $A$  и  $B$  — любые две точки данного множества  $M$ , расстояние между которыми равно диаметру  $d$  этого множества. Тогда из определения диаметра следует, что если  $P \in M$ , то  $P$  лежит внутри или на границе «линзы», образованной пересечением

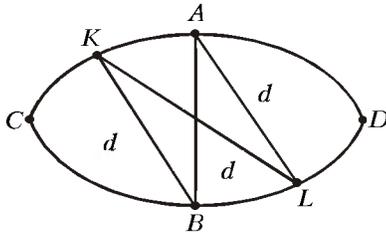


Рис. 8

кругов радиуса  $d$  с центрами  $A$  и  $B$  (рис.8). Докажите, что на одной из дуг  $AKC$  и  $BLD$  нет точек множества  $M$ , т.е. что если  $K \neq A, L \neq B$ , то  $KL > d$ .

Пусть, например, это дуга  $AKC$ . Удалим

точку  $A$ , а оставшиеся точки разделим на 2 части прямой  $AB$ , присоединив точки самой прямой  $AB$  к левой части.

4. *Ответ:* начинающий. *Указание.* Первым ходом начинающий уменьшает на единицу числа в первой и четырех последних ячейках. В дальнейшем в ответ на каждый ход второго он уменьшает на единицу числа в тех же ячейках, что и второй.

5. *Ответ:*  $x = \frac{-3 + \sqrt{9 + 12n}}{6}, n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . *Указание.*

Заметим, что  $0 \leq x < 1$ . Равенство  $\{a + b\} = a$  выполняется только когда  $b$  — целое число. Поэтому  $3x^2 + 3x - \text{целое}$ , т.е.  $3x^2 + 3x = n$ , где  $0 \leq n < 6$ .

6. *Ответ:* нет. *Указание.* Докажите, что хотя бы один угол пятиугольника  $B_1B_2B_3B_4B_5$  больше  $180^\circ$ .

7. Пусть мы убрали минимальное количество перегородок. Рассмотрим кубик, путь из которого до границы самый длинный. Одна из перегородок убрана. Вернем ее на место. Тогда из всех кубиков, кроме этого, пройти на границу все еще можно (поскольку путь из них был не длиннее, через этот кубик он не проходил). Из этого кубика на границу пройти больше нельзя, так как набор был минимальным.

С оставшимися кубиками будем продельваться ту же операцию, пока неотрежем от границы все кубики, не являющиеся пограничными. Их  $(n-2)^3$ , значит операцию мы проводили  $(n-2)^3$  раз, и перегородок было не менее  $(n-2)^3$ . Этого количества удаленных перегородок достаточно: из каждого непограничного кубика нужно убрать его нижнюю грань.

8. *Ответ:* 11 рублей. *Указание.* Пусть  $a_1 = 2, a_2 = 3, a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$  для  $i \geq 3$ . Тогда  $a_{10} = 144$ .

Алгоритм отгадывания задуманного числа: на каждом шаге содержащее загаданное число множество  $M$ , состоящее из  $a_i$  чисел, нужно разбивать на множества  $M_1$  из  $a_{i-2}$  чисел и  $M_2$  из  $a_{i-1}$  чисел и задавать вопрос о принадлежности числа множеству  $M_1$ .

11 класс

1. *Ответ:*  $36 \cdot 35 = 1260$ .

Занумеруем карты сверху вниз по порядку. В верхней колоде номера от 1 до 36, в нижней — от 37 до 72. Обозначим  $K_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 36$ ) номер карты нижней колоды такой же, как  $i$ -я верхняя. Между  $i$  и  $K_i$  лежит  $K_i - i - 1$  карта, поэтому искомая сумма  $S = (K_1 - 1 - 1) + (K_2 - 2 - 1) + \dots$

$\dots + (K_{36} - 36 - 1)$ . Переставим слагаемые  $K_1, K_2, \dots, K_{36}$  по возрастанию — сумма не изменится. Получим  $S = (37 - 1 - 1) + (38 - 2 - 1) + \dots + (72 - 36 - 1) = 36 \cdot 35 = 1260$ .

2. *Указание.* Докажите, что касательная к окружности  $S$  в точке  $C$  параллельна  $DE$

4. *Ответ:* нельзя. *Указание.* Докажите, что в исходной таблице найдется подтаблица  $2 \times 2$ , в которой в трех клетках стоят нули, а в одной — единица. После этого проследите за «судьбой» этой таблицы  $2 \times 2$ . Пусть через несколько ходов в ней стоят числа  $a$  и  $b$ , образующие верхнюю ее строку, а числа  $c$  и  $d$  — нижнюю. Докажите затем, что остаток от деления на 3 числа  $D = (a + d) - (b + c)$  не меняется в результате применения разрешенных операций во всей таблице. Поскольку вначале этот остаток равен 1 или  $-1$ , числа  $a, b, c, d$  не могут быть сделаны равными.

5. *Ответ:* нет. *Указание.* Докажите, что из чисел, делящихся на 7, в результате данной операции получаются числа, делящиеся на 7.

6. Сосчитаем стороны всех клеток, составляющих многоугольник, следующим образом: из количества сторон черных клеток вычтем количество сторон белых клеток. Эта величина равна  $4(a - b)$ , так как у каждой клетки четыре стороны, в то же время каждый отрезок, лежащий внутри многоугольника, был посчитан один раз со знаком «+» и один раз — со знаком «-». Таким образом, полученная величина равна сумме отрезков периметра с соответствующими знаками: «+» для черных и «-» для белых, откуда и получаем требуемое равенство.

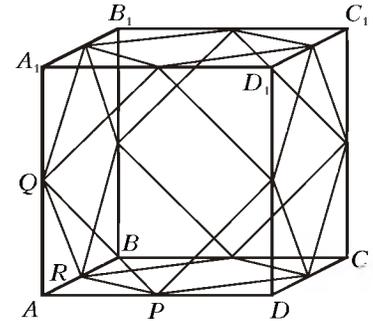


Рис. 9

7. *Ответ:*  $5/6$ . *Указание.* Докажите, что фигура  $\Phi$  состоит из середин отрезков, концы которых лежат на тетраэдрах  $ACB_1D_1$  и  $C_1A_1DB$ , «вписанных» в куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  с ребром 1 (рис.9). Докажите, что  $\Phi = U$ , и найдите объем многогранника  $U$ , вершины которого — середины ребер куба.

8. Из неравенства  $\frac{|a_n - a_m|}{|n - m|} > \frac{1}{1998}$  следует, что все члены последовательности попарно различны. Докажем, что для каждого числа  $n$  количество индексов  $i > n$ , для которых  $a_i < a_n$ , меньше  $1998^2$ . Пусть  $i > n$  и  $a_i < a_n$ . Интервал  $[1, a_n]$  содержит лишь конечное число членов последовательности, значит, все  $a_k$  с достаточно большими  $k$  будут больше  $a_n$ . При возрастании индекса от  $i$  до бесконечности найдется такое  $j$ , что  $a_j < a_n < a_{j+1}$ . Расстояние между  $a_j$  и  $a_{j+1}$  ввиду неравенства  $\frac{|a_n - a_m|}{|n - m|} < 1998$  меньше 1998, поэтому либо  $a_n - a_j < 999$ , либо  $a_{j+1} - a_n < 999$ . В первом из этих случаев по условию  $\frac{j - n}{1998} < a_n - a_j < 999$ , значит,

$i \leq j < n + 1998 \cdot 999 < n + 2 \cdot 10^6$ , во втором, аналогично,  $i \leq j < n - 1 + 1998 \cdot 999 < n + 2 \cdot 10^6$ . Таким образом, число индексов  $i > n$ , для которых  $a_j < a_n$ , строго меньше  $2 \cdot 10^6$ . По условию в последовательности встречаются все натуральные числа, значит,  $a_n$  равно числу членов последовательности, лежащих в интервале  $[1, a_n]$ . Член последовательности, лежащий в  $[1, a_n]$ , имеет индекс меньший  $n$  или больший  $n$ , количество первых не более  $n - 1$ , количество вторых, по до-

казанному, меньше  $2 \cdot 10^6$ . Тогда  $a_n < n - 1 + 2 \cdot 10^6 < n + 2 \cdot 10^6$ . С другой стороны, также по доказанному, если  $i < n - 2 \cdot 10^6$ , то  $a_i < a_n$ , отсюда сразу следует, что  $n - 2 \cdot 10^6 < a_n < n + 2 \cdot 10^6$ , т.е.  $|a_n - n| < 2 \cdot 10^6$ .

**Заключительный этап**

**9 класс**

**1.** Абсциссы  $x_1$  и  $x_2$  точек пересечения параболы и прямой  $y = x$  удовлетворяют уравнению  $x^2 + (p-1)x + q = 0$ . По теореме Виета  $x_1 + x_2 = 1 - p$ . Аналогично получаем, что абсциссы  $x_3$  и  $x_4$  точек пересечения параболы и прямой  $y = 2x$  связаны соотношением  $x_3 + x_4 = 2 - p$ .

Если  $x_1 < x_2$ , а  $x_3 < x_4$ , то проекция левой дуги равна  $x_1 - x_3$ , а правой  $x_4 - x_2$ . Разность их равна

$$(x_4 - x_2) - (x_1 - x_3) = (x_3 + x_4) - (x_1 + x_2) = (2 - p) - (1 - p) = 1.$$

**2.** Отметим углы параллелограммов, являющиеся частью углов многоугольника. Пусть в многоугольнике  $n$  сторон. Тогда сумма отмеченных углов равна  $180^\circ \cdot (n - 2)$ . К каждой стороне многоугольника примыкают стороной по два отмеченных угла, их сумма, очевидно, не менее  $180^\circ$ . Просуммировав такие пары по всем сторонам, получим не менее  $180^\circ \cdot n$ , т.е. по крайней мере на  $360^\circ$  больше, чем при подсчете другим способом. Избыток возникает за счет того, что некоторые углы посчитаны дважды, а именно те, которые примыкают сразу к двум сторонам. Поскольку каждый такой угол меньше  $180^\circ$ , то таких углов не менее трех. Но вершины таких углов как раз и являются хорошими вершинами многоугольника.

**7. Ответ:**  $\left\lfloor \frac{3N}{4} \right\rfloor$  звена (здесь  $[x]$  — целая часть числа  $x$ ).

Заметим, что в каждой паре звеньев, бывших соседями, но переставших ими быть, по крайней мере одно звено должно быть раскрыто. Это же верно для пары несоседних звеньев, которые должны стать соседями.

Если разбить звенья на группы так, чтобы любые два звена в группе являлись или впоследствии стали соседними (но не то и другое вместе), то из каждой такой группы может остаться нераскрытым не более одного звена. Такой группой, например, являются 4 звена, которые в старой цепочке следовали в порядке 1-2-3-4 а в новой должны быть в порядке 2-4-1-3. Другие примеры: в старой 1-2-3, в новой 1-3 (а 2 с ними не связано), или в старой 1-2, а в новой они не связаны.

Разбив мысленно цепочку на четверки, с возможным остатком в 1, 2 или 3 звена, и потребовав такой порядок, при котором четверки и остаток изменяются указанным образом, казачица обеспечит раскрытие не менее  $\left\lfloor \frac{3N}{4} \right\rfloor$  звеньев (лишнее звено из остатка прицепляется с другого конца).

С другой стороны, раскрыв в исходной цепочке каждое второе звено, ювелир разобьет вторую цепочку на части, где в сумме не более половины всех звеньев. В каждой части надо раскрыть не более половины звеньев, поэтому не менее четверти звеньев можно оставить нераскрытыми.

**8.** Одновременно с операциями на доске будем вести запись в тетради. Но вместо каждого числа  $x$ , появляющегося на доске, будем писать в тетради число  $\frac{ab}{x}$  ( $a$  и  $b$  — исходные числа). Когда на доске пара чисел  $(x, y)$ , где

$x > y$ , заменяется на пару  $(x, \frac{xy}{x-y})$ , в тетради происходит замена

$$\left( \frac{ab}{x}, \frac{ab}{y} \right) \rightarrow \left( \frac{ab}{x}, \frac{ab(x-y)}{xy} \right) = \left( \frac{ab}{x}, \frac{ab}{y} - \frac{ab}{x} \right),$$

т.е., как в алгоритме Евклида, большее число заменяется на разность. Следовательно, на каком-то шаге мы запишем в тетрадь пару чисел, равных НОД( $a, b$ ). В это же время оба числа на доске станут равными  $\frac{ab}{\text{НОД}(a, b)}$ , т.е. НОК( $a, b$ ).

**10 класс**

**1.** Из условия следует, что  $a > 0$ . Если  $y = p$  и  $y = q$  — уравнения заданных прямых, то абсциссы точек  $A, D$  и  $E$  — корни  $x_1 < x_2 < x_3$  уравнения  $ax^3 + bx^2 + cx + d - p = 0$ , а точек  $B, C$  и  $F$  — корни  $X_1 < X_2 < X_3$  уравнения  $aX^3 + bX^2 + cX + d - q = 0$ . По теореме Виета  $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = X_1 + X_2 + X_3$ . Отсюда  $x_2 - X_2 = (X_1 - x_1) + (X_3 - x_3)$ , что и требовалось доказать.

**3.** Сначала докажем, что стороны треугольника  $K_a K_b K_c$  параллельны соответствующим сторонам треугольника  $ABC$ . Пусть  $AC > AB$ . Имеем  $\angle POL = \angle K_a O L$  и  $\angle POB = \angle ROB$  (рис.10), поэтому  $\angle K_a O R = 2\angle LOB$ . Угол  $LOB$  внешний в треугольнике  $AOB$ , значит  $\angle K_a O R = 2(\alpha/2 + \beta/2) = \alpha + \beta$ .

Аналогичными рассуждениями получаем, что  $\angle K_b O R = \alpha + \beta$ . Следовательно точки  $K_a$  и  $K_b$  симметричны относительно прямой  $OR$ , поэтому прямые  $K_a K_b$  и  $AB$  параллельны. Случай  $AC < AB$  разбирается аналогично.

Итак, соответствующие стороны треугольников  $M_a M_b M_c$  и  $K_a K_b K_c$  параллельны ( $M_a, M_b, M_c$  — середины сторон треугольника), поэтому эти треугольники гомотетичны. Центр этой гомотетии является общей точкой прямых  $M_a K_a, M_b K_b$  и  $M_c K_c$ .

Пусть прямая  $M_a K_a$  пересекает вписанную в треугольник  $ABC$  окружность в точке  $T$ . Будем считать, что  $AC > AB$ . Докажем, что описанная вокруг треугольника  $TK_a L$  окружность проходит через основание  $H$  высоты треугольника  $ABC$ . Для этого достаточно проверить равенство

$$M_a L \cdot M_a H = M_a P^2$$

(рис.11).

Это можно сделать, выразив длины отрезков  $M_a P, M_a L$  и  $M_a H$  через стороны треугольника  $ABC$ .

Мы докажем его,

пользуясь известными свойствами точки  $P'$  касания со стороной  $BC$  соответствующей вневписанной окружности треугольника: точка  $P'$  симметрична  $P$  относительно  $M_a$  и отрезок  $AP'$  пересекает вписанную окружность в точке, диаметрально противоположной

точке  $P$ . Поэтому прямые  $AP'$  и  $M_a O$  параллельны ( $O$  — центр вписанной окружности, см. рис. 12). Пользуясь параллельностью прямых  $AH$  и  $OP$ , равенством  $M_a P' = M_a P$  и теоре-

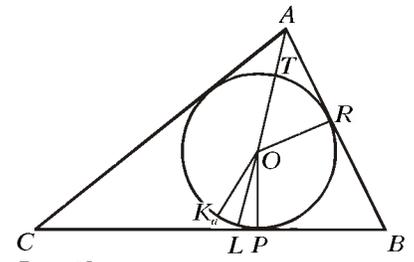


Рис. 10

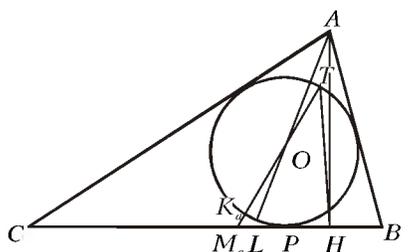


Рис. 11

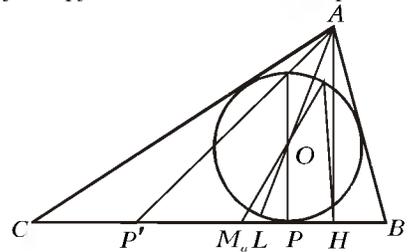


Рис. 12

мой Фалеса, получаем

$$\frac{M_a P}{M_a L} = \frac{M_a P'}{M_a L} = \frac{PH}{LP} = \frac{P'M_a + PH}{M_a L + LP} = \frac{M_a H}{M_a P}.$$

Так как четырехугольник  $TK_a LH$  вписанный, углы  $M_a TH$  и  $M_a LK_a$  равны. Угол  $M_a LK_a$  легко выражается через углы треугольника  $ABC$ :  $\angle M_a LK_a = 180^\circ - 2\angle ALB = \beta - \gamma$ . Рассмотрим теперь четырехугольник  $M_b THM_a$ . Заметим, что  $\angle HCA = \angle CHM_b = \gamma$  (треугольник  $CM_a H$  – равнобедренный),  $\angle CM_a M_b = \beta$ . Поэтому  $\angle M_a M_b H = \beta - \gamma$ , значит  $M_a THM_b$  – вписанный ( $\angle M_a TH = \angle M_a M_b H$ ) и, следовательно,  $\angle M_a TM_b = \angle M_a HM_b = \gamma$ .

Обозначим через  $K$  точку пересечения отрезка  $TM_b$  со вписанной окружностью. Так как вписанный в окружность угол  $K_a TK$  равен  $\gamma$ , а дуга  $RK_a$  вписанной окружности равна  $\alpha + \beta$  (это было доказано ранее), точки  $K_a$  и  $K$  симметричны относительно прямой  $OR$ . Но точки  $K_a$  и  $K_b$ , как отмечено ранее, также симметричны относительно этой прямой. Значит, точки  $K$  и  $K_b$  совпадают, что означает, что прямые  $M_a K_a$  и  $M_b K_b$  пересекаются в точке  $T$  вписанной окружности.

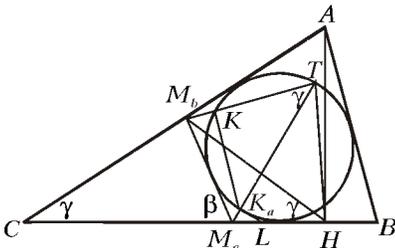


Рис. 13

4. Предположим противное. Тогда найдется такое  $n (n > 1)$ , что

любой набор из  $(n - 1)$ -го выделенного подмножества имеет общий элемент и существует  $n$  выделенных подмножеств  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , не имеющих общего элемента. Исключим из набора  $A_1, A_2, \dots, A_n$  множество  $A_i$ . Оставшиеся имеют общий элемент, который мы обозначим через  $x_i$ . Заметим, что  $x_i \neq x_j$  при  $i \neq j$ . Каждое из множеств  $A_i$  содержит все элементы множества  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , кроме  $x_i$ , поэтому, если из множества  $A_i$  исключить элементы множества  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , то в каждом из них останется  $2k - n + 1$  элемент.

Следовательно, объединение множеств  $A_1, A_2, \dots, A_n$  состоит не более чем из  $n + n(2k - n + 1) = n(2k + 2 - n)$  элементов. Максимальное значение выражения  $n(2k + 2 - n)$  равно  $(k + 1)^2$ . Но тогда, по условию задачи, все  $A_i$  должны иметь общий элемент. Противоречие.

5. Ответ: нельзя.

Допустим, что можно, и рассмотрим способ добиться этого за наименьшее количество действий. Пусть  $a_k, b_k$  – числа, получившиеся из 19 и 98 после  $k$ -го действия,  $s$  – число действий. Тогда  $a_s = b_s = m$  и  $a_{s-1} \neq b_{s-1}$  (так как мы рассматриваем оптимальный способ). Действия, проведенные над  $a_{s-1}$  и  $b_{s-1}$  различны. Значит,  $m = n^2$  и на  $(s - 1)$ -м шаге мы имели числа  $a_{s-1} = n$  и  $b_{s-1} = n^2 - 1$ . Общее количество  $s$  действий не больше, чем  $n - 18$ , так как на  $(s - 1)$ -ом шаге мы получили  $n$ , а каждый шаг увеличивает числа по крайней мере на 1. Тогда  $n^2 - 1$  могло получиться только последовательным прибавлением единиц, так как от ближайшего квадрата  $(n - 1)^2$  до  $n^2 - 1$  будет  $2n - 2$  единицы. Следовательно,  $b_1 > (n - 1)^2$ , и все числа  $b_1, \dots, b_{s-1}$  не являются полными квадратами. Поэтому  $b_s \geq 100$ , с другой стороны,  $a_s = a_{s-1}^2 \geq 19^2$ . Противоречие.

6. Переписав выражение  $((x * y) * z) * t$  двумя способами, получим равенство  $(x + y + z) * t = (x * y) + z + t$ . Подставив в него  $x = y = 0$ , имеем  $z * t = z + t + C$ , где  $C = 0 * 0$ . Тогда  $(x * y) * z = (x + y + C) + z + C = x + y + z$ , откуда  $C = 0$ .

7. Будем говорить, что три вершины  $n$ -угольника ( $n > 3$ ), через которые проходит описанная окружность, образуют *отмеченный треугольник*. Докажем, что все отмеченные треугольники образуют *триангуляцию* многоугольника, т.е. раз-

биение многоугольника непересекающимися диагоналями на треугольники. Для этого докажем следующие свойства отмеченных треугольников:

- 1) Никакие два отмеченных треугольника не имеют общей внутренней точки.
- 2) Если  $ABC$  – отмеченный треугольник и  $AB$  – диагональ  $n$ -угольника, то к  $AB$  примыкает еще один отмеченный треугольник.

Далее будем называть отмеченный треугольник *граничным* (соответственно *внутренним*), если соответствующая описанная окружность граничная (внутренняя). Пусть  $\Gamma$  – число граничных треугольников,  $B$  – число внутренних,  $\Pi$  – число оставшихся отмеченных треугольников (назовем их *простыми*). Каждая из  $n$  сторон  $n$ -угольника принадлежит одному из треугольников, причем граничным треугольникам принадлежат по две стороны, простым – по одной, а внутренним – ни одной. Отсюда получим соотношение

$$n = 2\Gamma + \Pi. \quad (1)$$

Каждая из  $(n - 3)$ -х диагоналей, образующих триангуляцию из отмеченных треугольников, принадлежит двум из них, причем граничным треугольникам принадлежит одна диагональ, простым – две, а внутренним – три. Отсюда вытекает равенство

$$2(n - 3) = \Gamma + 2\Pi + 3B. \quad (2)$$

Так как любая триангуляция состоит из  $(n - 2)$ -х треугольников, то

$$\Gamma + \Pi + B = n - 2. \quad (3)$$

Из соотношений (1), (2) и (3) легко получается требуемое равенство  $\Gamma = B + 2$ .

8. Ответ: удачная расстановка единственна – все числа равны +1.

11 класс

2. Касательная  $l_A$  в точке  $A_2$  к описанной окружности параллельна  $BC$ . Рассмотрев касательные  $l_B, l_C$  в точках  $B_2, C_2$ , аналогично получим  $l_B \parallel AC, l_C \parallel AB$ . Поэтому треугольник  $ABC$  гомотетичен треугольнику, образованному прямыми  $l_A, l_B, l_C$ . При этой гомотетии  $A_1$  переходит в  $A_2, B_1$  – в  $B_2, C_1$  – в  $C_2$ . Поэтому прямые  $A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 C_2$  пересекутся в центре гомотетии.

3. Пусть  $ABC$  – один из треугольников семейства  $S$ . Его высоту примем за единицу. Так как треугольники из  $S$  попарно пересекаются, то они лежат в некоторой полосе ширины 2, параллельной стороне  $AB$ . Аналогично взяв полосы, параллельные  $BC$  и  $CA$ , рассмотрим их пересечение – это будет шестиугольник  $H$  с углами по  $120^\circ$  и с расстояниями между противоположными сторонами, равными 2. У такого шестиугольника длины сторон, чередуются, обозначим их  $a$  и  $b$  (рис.14).

Пусть вначале  $a \leq b$ , тогда все треугольники из  $S$  содержат центр фигуры.

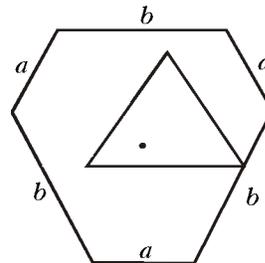


Рис. 14

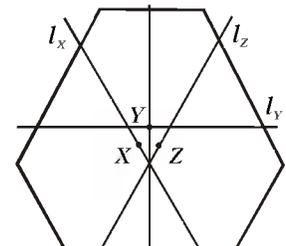


Рис. 15

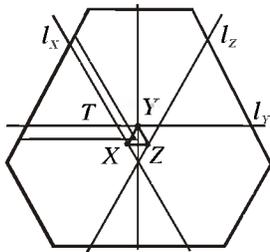


Рис. 16

Если же  $a > b$ , то рассмотрим прямые  $l_x, l_y, l_z$  — параллельные сторонам шестиугольника и равноудаленные от них (рис.15). В качестве искомого точек  $X, Y$  и  $Z$  возьмем середины отрезков, отсекаемых сторонами на этих прямых.

Покажем, что любой треугольник  $T, T \in S$ , содержит какую-то точку из множества  $M = \{X, Y, Z\}$ .

Заметим, что  $T$  пересекает любую из прямых  $l_x, l_y$  и  $l_z$ , так как иначе  $T$  лежит в полосе меньшей ширины, чем его высота. Предположим противное:  $T$  не содержит точек  $X, Y$  и  $Z$ , тогда без ограничения общности можно считать, что  $T$  пересекает  $l_x$  выше и левее  $X$ , а  $l_y$  — левее  $Y$  (рис.16). Так как  $T \sim \Delta XYZ$ , легко видеть, что правая нижняя вершина  $T$  лежит в  $\Delta XYZ$ , а значит,  $T$  не пересекает  $l_z$  — противоречие.

7. Рассмотрим множество  $M$  центров сфер диаметра 1, лежащих в данном тетраэдре  $T$ . Так как  $M$  — множество точек, удаленных от всех граней  $T$  не менее чем на  $1/2$ , то  $M$  — это тетраэдр с гранями, параллельными граням тетраэдра  $T$ , т.е.  $M$  и  $T$  гомотетичны. Центры вписанных сфер обоих тетраэдров совпадают, поэтому коэффициент в гомотетии равен  $\frac{r-1/2}{r}$ , где  $r$  — радиус сферы, вписанной в  $T$ .

С другой стороны, две сферы единичного диаметра не пересекаются, поэтому расстояние между их центрами не меньше 1, значит, длина одного из ребер тетраэдра  $M$ , содержащего

эти центры, не меньше 1. Отсюда следует, что  $k \geq \frac{1}{100}$  (дли-

ны ребер тетраэдра  $T$  не больше 100), т.е.  $1 - \frac{1}{2r} \geq \frac{1}{100}$ , откуда  $2r \geq \frac{100}{99} > 1,01$ . Итак, диаметр сферы, вписанной в  $T$ , больше 1,01, т.е. в качестве искомой можно выбрать сферу, вписанную в  $T$ .

## XXXII ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

### Теоретический тур

#### 9 класс

$$1. F_1 = \sqrt{F^2 + 3m^2 g^2 r^2 / R^2}.$$

$$2. 1) v_B = 0, v_H = 2v_0 = 12 \text{ м/с}; 2) v_1 = v_0 - \mu g t_1 = 2 \text{ м/с}, v_2 = 0; 3) l_1 = v_0 t_1 - \mu g t_1^2 / 2 = 8 \text{ м}, l_2 = v_0^2 / (2\mu g) = 9 \text{ м}.$$

$$3. \Delta p_{AB} = -\Delta p_{CD} = \rho_0 \beta (t_1 - t_2) gh / 2 = 0,63 \text{ Па}.$$

4. 1)  $I_1 = 0,094 \text{ А}; 2) I_1^* = 0,084 \text{ А}$ . Указание. В обоих случаях надо построить соответствующие вольт-амперные характеристики и найти точки их пересечения.

#### 10 класс

$$1. A = m \Delta v g \tau / 2 - k^2 (u \tau - s)^2 / (2m).$$

2.  $\eta_1 = (\alpha - 1)R / (2C_V) = 0,2$ ,  $\eta_2 = (\alpha - 1)R / (2\alpha C_V) = 0,125$ , где  $C_V = 3R/2$  — молярная теплоемкость одноатомного идеального газа при постоянном объеме.

$$3. \Delta m = \frac{kMV - m(C_V + R)}{LM + RT} \Delta T \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ г}.$$

4.  $I_1 = (E_1 + E_2) / (R_1 + R_2)$  и  $I_2 = 0$ , если  $E_1 R_2 - E_2 R_1 > 0$ ;  $I_1^* = E_1 / R_1$  и  $I_2^* = E_2 / R_2 - E_1 / R_1$ , если  $E_1 R_2 - E_2 R_1 < 0$ .

5. 1)  $A_{\text{мех}} = C_0 \epsilon (\epsilon - 1) E^2 / 2$ ; 2)  $\Delta W = -C_0 E^2 (\epsilon - 1) / 2$ ;

3)  $A_{\text{бат}} = -C_0 E^2 (\epsilon - 1)$ ; 4)  $Q = C_0 E^2 (\epsilon - 1)^2 / 2$ .

#### 11 класс

$$1. Q_{\text{max}} = m v_0^2 / 2 \approx 0,05 \text{ Дж при } \mu_1 \approx 0,016, \mu_2 \approx 0,08 \text{ и}$$

$$\mu_3 \approx 0,053 \left( \mu = \frac{v_0}{2\pi g \sqrt{M/k}} \frac{1}{n}, \text{ где } n = 1, 2, 3 \right).$$

$$2. 1) x = h/2; 2) \Delta p_{AB} = -\Delta p_{CD} = \alpha (T_1 - T_2) gh / 2; 3) P = ck \alpha (T_1 - T_2)^2 gh / 2.$$

$$3. T_2 = T_0 \left( 1 + \frac{4P}{p_0 S \sqrt{3RT_0}} \right) = 354 \text{ К}; T_1 = 2T_2 - T_0 = 408 \text{ К};$$

$$p_2 = p_0 \sqrt{T_2/T_0} = 1,09 \cdot 10^5 \text{ Па}; p_1 = p_0 \sqrt{T_1/T_0} = 1,36 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

4. 1)  $U_0 = a_0 m R / (IB) = (100 \pm 10) \text{ В}$ , где  $a_0$  — начальное ускорение перемычки (при  $t = 0$ ), определяемое по графику зависимости

$$v \text{ от } t; 2) C = \left( \frac{R}{v_1} \left( \frac{IBU_0}{mR} - a_1 \right) - \frac{(IB)^2}{m} \right)^{-1} = (1 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ Ф},$$

где  $v_1$  и  $a_1$  — скорость и ускорение перемычки при  $t \neq 0$  (опре-

$$\text{деляются по графику); 3) } v_{\text{уст}} = \left( \frac{IBU_0}{m} \right) \left( \frac{(IB)^2}{m} + \frac{1}{C} \right)^{-1} = (14,3 \pm 1,5) \text{ м/с}.$$

5. 1)  $\lambda = 2vT = (456 \pm 4) \text{ нм}$ , где  $T = (0,113 \pm 0,001) \text{ с}$  — период колебаний фототока, измеряемый по интерференционной картине; 2)  $\Delta \lambda = \lambda T / \tau \approx 4 \text{ нм}$ , где  $\tau \approx 12,9 \text{ с}$  — период «биений», измеряемой по интерференционной картине; 3)  $I_1 / I_2 = 1$ .

### КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

1. Треугольник №3 расположен зеркально по отношению к остальным. 2. 41; 19, 14, 13, 11. 3. 10 и 15.

# КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, В.А.Иванюк, В.М.Митурич-Хлебникова, А.Е.Пацхверия, П.И.Шевелев

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Осипова

## ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати 142300 г.Чехов Московской области  
Заказ №