КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

ИЮЛЬ/АВГУСТ · 1998 · №4

В номере:

К 90-летию со дня рождения И.К.Кикоина

28 марта 1998 года исполнилось девяносто лет со дня рождения основателя журнала «Квант» академика Исаака Константиновича Кикоина (умер 28 декабря 1984 года).

Он был выдающимся физиком, ближайшим помощником академика И.В.Курчатова, одним из создателей Института атомной энергии (современное название – Российский научный центр «Курчатовский институт») и бессменным заместителем директора этого института.

И.К.Кикоин принадлежал к замечательной школе физиков академика А.Ф.Иоффе. Ученики Иоффе со студенческих лет активно включались в самостоятельную научную работу. Так было и с Исааком Константиновичем – научную работу он начал еще на втором курсе, а вскоре после окончания института выполнил серию работ в области физики твердого тела, получивших международное признание. Мы не будем здесь даже пытаться рассказать обо всех его научных работах – их много и они весьма разнообразны. Отметим лишь его вклад в отечественное просвещение.

Стремясь повысить уровень преподавания физико-математических наук в средней школе, И.К.Кикоин возглавил работу по совершенствованию школьных программ и учебников. На протяжении многих лет был председателем Оргкомитета физико-математических и химических олимпиад школьников. Стал главным редактором первого в мире научно-популярного физико-математического журнала для школьников «Квант» и серии научно-популярных книг «Библиотечка «Квант» и руководил ими до последних дней жизни.

И.К.Кикоин любил наш журнал и, несмотря на огромную занятость, находил время для разработки тематики, поиска авторов и обсуждения статей. Он любил молодежь – надо было видеть, как загорались его глаза при встрече с талантливыми школьниками. Он безгранично любил физику, занятия ею были главным смыслом всей его жизни. Незадолго до смерти, выступая перед школьниками, он говорил: «...за долгую жизнь я не успел насладиться любимой своей физикой, не хватило времени, ясно вижу теперь – не хватило. А ведь не было ни одного дня в жизни, ни выходного, ни праздника, ни отпуска, когда бы я ею не занимался. Часто и сны вижу о физике».

Таким мы и запомнили этого замечательного человека и ученого.

В этом номере мы помещаем два материала, посвященных памяти И.К.Кикоина. Статья «ФЭМ-эффект» (написанная совместно с С.Лазаревым) была опубликована в «Кванте» №1 за 1978 год. Стихотворение «Вот Квант, который построил Исаак...» взято из спецвыпуска журнала «Квант», изданного в единственном экземпляре в 1983 году к 75-летию Исаака Константиновича. Автор стихотворения — член редакционной коллегии нашего журнала А.Савин.

ФЭМ-эффект

И.КИКОИН, С.ЛАЗАРЕВ

Фотоэлектромагнитный (ФЭМ) эффект был открыт одним из нас в 1934 году. Заключается этот эффект в следующем. Если освещать полупроводник, помещенный в магнитное поле, то в нем возникает электродвижущая сила. На рисунке 1 приведена схема эксперимента, в котором обнаруживается фотоэлектромагнитный эффект. Полупроводник в виде прямоугольной пластинки помещен в магнитное поле, направленное вдоль оси X. Вдоль оси Y на поверхность пластинки падает пучок света. Тогда между гранями a и a' вдоль оси Z возникает разность потенциалов, которую мы в дальнейшем будем называть фотоэлектромагнитной ЭДС. Если на эти грани нанести электроды и замкнуть их проводником, то включенный в цепь измерительный прибор зарегистрирует наличие тока в цепи.

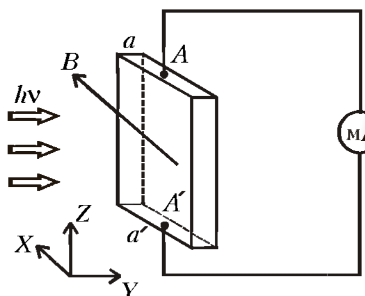


Рис. 1

В первых экспериментах, в которых был обнаружен ФЭМ-эффект, использовались пластинки из закиси меди (Cu_2O). В то время закись меди была самым «модным» веществом, на котором подробно изучались основные закономерности, касающиеся полупроводников. Можно сказать, что в 30-х годах началась эра полупроводников, которым суждено было совершить революцию в радиоэлектронной технике. Описанные выше опыты проводились на образцах закиси меди при температуре жидкого азота (77 К). В небольшом магнитном поле (с индукцией около 1 Тл) при освещении образца довольно слабым светом от лампочки карманного фонарика разность потенциалов между точками A и A' (расстояние между ними было около 2 см) достигала 15—20 В!

Опыты показали, что знак фотоэлектромагнитной ЭДС, а следовательно, и направление электрического поля в образце меняются при изменении направления внешнего магнитного поля. А при заданном направлении поля знак ЭДС меняется, если изменить направление падающего на образец света (т.е. осветить противоположную поверхность образца). При освещении образца в отсутствие магнитного поля ЭДС не возникает.

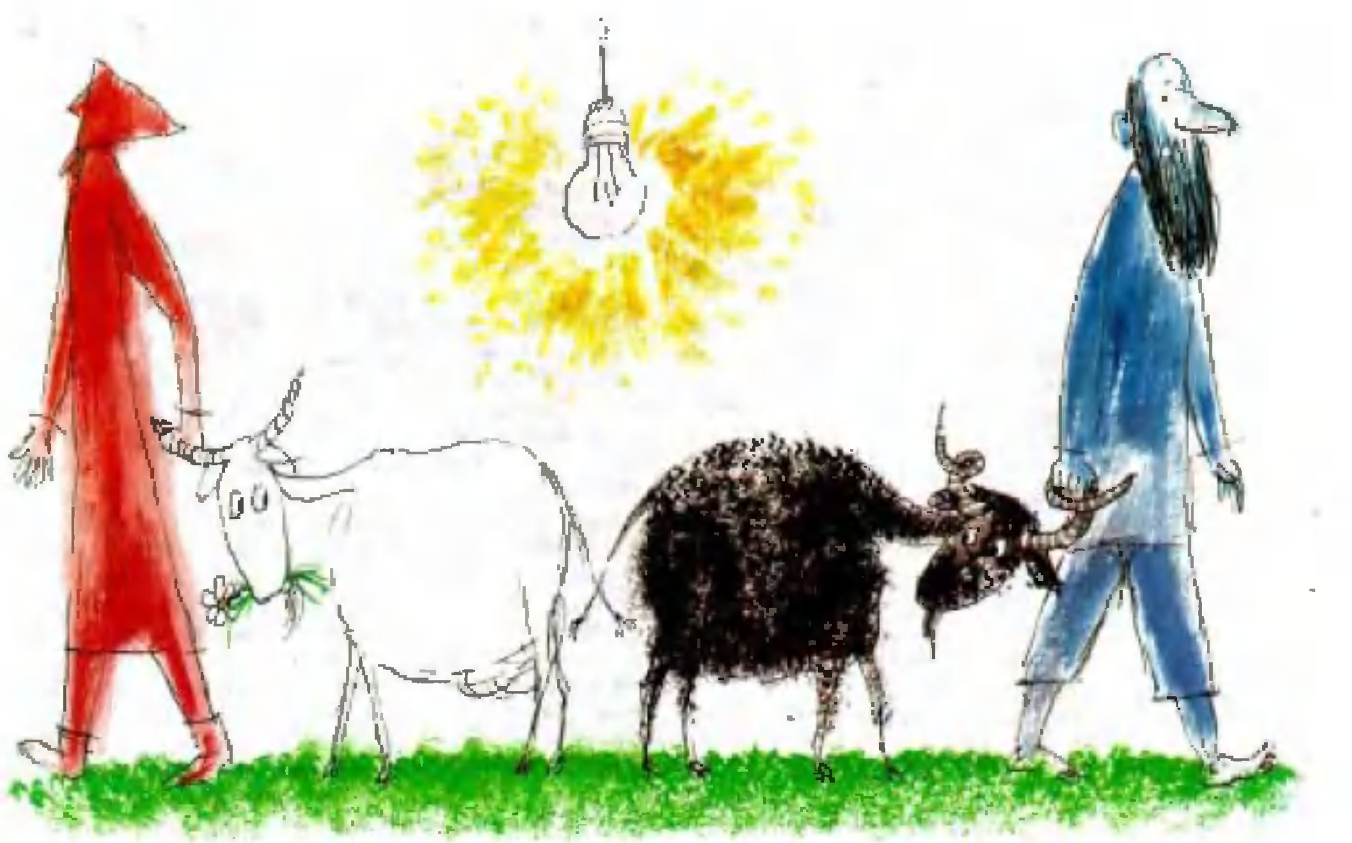


Иллюстрация П.Чернуского

Попытаемся объяснить происхождение ФЭМ-эффекта.

Фотоэлектромагнитная ЭДС возникает при действии на освещаемый образец магнитного поля. Между тем известно, что магнитное поле действует только на движущиеся электрические заряды. Поэтому надо понять, каким образом создается движение зарядов в полупроводнике в отсутствие источника ЭДС.

Свет, падающий на поверхность полупроводника, поглощается в нем (если полупроводник не прозрачен для этого света). Во многих случаях свет поглощается электронами атомов полупроводника. При достаточной энергии ($h\nu$) квантов света (фотонов) поглотивший их электрон отрывается от атома, становится свободным и может перемещаться внутри освещаемого тела. В металлах и без всякого действия света имеется огромное количество свободных электронов. В полупроводниках число свободных электронов обычно мало, а под действием поглощаемого света оно увеличивается. Раз полупроводник непрозрачен, падающий на его поверхность свет поглощается в тонком слое у поверхности, т.е. проникает в образец лишь на небольшую глубину (порядка длины волны света). Следовательно, в тонком приповерхностном слое полупроводника увеличивается число свободных электронов. В остальной части полупроводника, куда свет не проникает, число электронов остается неизменным. Значит, в тонком слое вблизи освещаемой поверхности концентрация электронов оказывается больше, чем в толще образца. Из молекулярной физики известно, что, когда в одной части тела концентрация частиц больше, чем в других его частях, наблюдается явление диффузии – перемещение частиц из области с большей концентрацией в область с меньшей концентрацией. То же происходит и с электронами, рожденными в полупроводнике светом: электроны диффундируют от освещаемой поверхности в глубь образца. Но перемещение электронов – это электрический ток. При освещении полупроводника поглощаемым светом возникает движение электронов от освещенной к неосвещенной поверхности образца. Иными словами, возникает ток, который мы назовем диффузионным электронным током. (Этот ток направлен от неосвещенной грани к освещенной.) Он возникает под действием света без внешнего источника тока. Точнее, свет и служит источником тока. На электроны, создающие диффузионный ток, действует магнитное поле. Как известно, сила Лоренца $\vec{F}_л$, действующая в магнитном поле на движущийся заряд, направлена перпендикулярно скорости $\vec{v}$ заряда и магнитной индукции $\vec{B}$ поля. Следовательно, если направление индукции магнитного поля и направление падающего света такие, как на рисунке 1, то под действием силы Лоренца электроны отклоняются к грани a' и скапливаются на ней. Следовательно, эта грань будет иметь отрицательный заряд. Таким образом, между гранями a и a' возникает разность потенциалов, и если наложить на эти грани электроды, соединенные проводником, то по проводнику потечет электрический ток.

Казалось бы, на этом можно считать объяснение возникновения ФЭМ-эффекта законченным. Однако существенным является тот факт, что электрический ток в замкнутой цепи существует в течение длительного времени, пока на образец падает свет. А приведенные выше рассуждения недостаточны для объяснения этого факта. Действительно, для поддержания разности потенциалов между гранями a и a' пластинки необходим постоянный приток электронов на грань a', а следовательно, постоянный диффузионный ток электронов. Но диффузия электронов не может долго продолжаться, она должна прекратиться. В самом деле, часть электронов, диффундируя в глубь образца, достигает неосвещенной поверхности пластинки и оседает на ней. Со временем на этой поверхности должен накопиться отрицательный заряд, который будет тормозить диффундирующие электроны. Когда на неосвещенной поверхности образца накопится достаточное количество электронов, диффузионный ток прекратится, и, следовательно, прекратится ток во внешней цепи. Как показывают расчеты, время существования диффузионного тока, зависящее от внешних условий (от интенсивности падающего света, значения индукции магнитного поля) и от свойств образца (его размеров, материала и пр.), обычно весьма мало – порядка $10^{-5} - 10^{-6}$ с.

Для объяснения постоянного тока в цепи (постоянной разности потенциалов между гранями a и a') необходимо предположить, что скапливающийся на неосвещенной поверхности пластинки отрицательный заряд «нейтрализуется» точно таким же положительным зарядом. Представим себе, что при освещении поверхности образца рождаются не только электроны, но и положительно заряженные частицы, заряд каждой из которых по абсолютному значению равен заряду электрона. Они тоже будут диффундировать в глубь образца. Тогда совместная диффузия электронов и этих положительных зарядов может продолжаться сколь угодно долго, поскольку, доходя до противоположной поверхности образца, они не заряжают ее. Правда при этом суммарный диффузионный ток равен нулю.

Именно такая картина и реализуется в действительности при освещении полупроводника. А положительные заряды, которые рождаются светом, это – так называемые дырки. Представление о дырках порождено квантовой механикой. ФЭМ-эффект – одно из первых физических явлений, для объяснения которых понятие дырки оказалось совершенно необходимым. В современной теории электропроводности электронно-дырочное представление стало общепринятым.

Итак, при освещении поверхности полупроводниковой пластинки происходит одновременное рождение свободных электронов и дырок (или, как говорят, рождение электронно-дырочной пары), которые диффундируют в одном направлении. В магнитном поле сила Лоренца отклоняет движущиеся электроны и дырки в противоположные стороны, так что на грани a' оседают электроны, а на грани a – дырки. Очевидно, что при изменении направления падающего света или направления магнитной индукции знак возникающей ЭДС меняется на противоположный. Знак ЭДС можно определить по правилу левой руки: если левую руку расположить так, чтобы вектор магнитной индукции входил в ладонь, а четыре вытянутых пальца были направлены вдоль падающего на образец светового пучка, то отогнутый на 90° большой палец укажет направление электрического поля в образце.

Такова в общих чертах качественная теория ФЭМ-эффекта. Конечно, эта теория была разработана после детального экспериментального исследования эффекта. Сам эффект был обнаружен неожиданно значительно раньше создания теории, и сначала он казался удивительным. Расчеты, выполненные на основе развитой теоретической модели, дают следую-

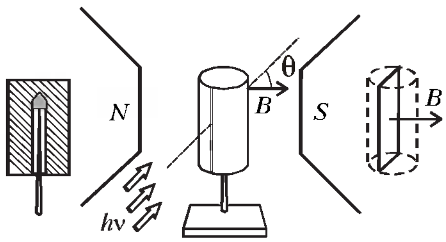


Рис. 2

щую приближенную формулу для силы фотоэлектромагнитного тока I в замкнутой цепи, когда электроды образца замкнуты накоротко (т.е. когда сопротивление внешней цепи пренебрежимо мало по сравнению с сопротивлением самого полупроводника):

$$I = KeNB\,,$$

где e – заряд электрона, N – количество квантов света, поглощаемых 1 м^2 поверхности образца в 1 секунду (очевидно, что N пропорционально освещенности образца), B – значение индукции магнитного поля, а K – коэффициент пропорциональности, значение которого зависит только от материала образца. Прямая пропорциональность тока интенсивности падающего света и индукции магнитного поля была выявлена уже в первых экспериментах.

При обычных условиях опыта в небольшом магнитном поле порядка 1 Тл при освещенности, создаваемой естественным дневным светом, что соответствует $N \sim 10^{21}\,1/(\text{м}^2\cdot\text{с})$, через образец монокристаллического германия шириной 0,01 м в направлении магнитного поля течет фотомагнитный ток $\sim 10^{-3}$ А.

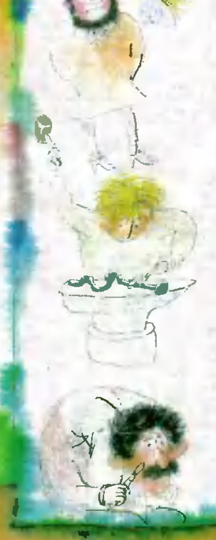
Зная внешние параметры (N, B), можно, измеряя фотомагнитный ток, находить характеристики полупроводниковых материалов, которые определяют величину коэффициента K. ФЭМ-эффект в современных лабораториях стал простым и надежным инструментом для определения параметров, характеризующих качество полупроводниковых материалов, таких, как время жизни носителей (электрона и дырки) τ, скорость поверхностной рекомбинации S, диффузионная длина L, подвижность носителей тока μ и некоторых других. Поясним кратко смысл этих величин.

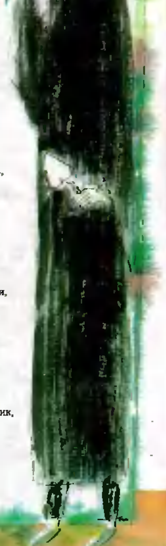
Как мы уже знаем, под действием кванта света валентный электрон может «оторваться» от атома и стать электроном проводимости. Однако этот избыточный носитель тока не может существовать в образце бесконечно долго. Довольно скоро после своего рождения он по тем или иным причинам снова становится связанным, например присоединившись к ионизированному атому (этот процесс называется рекомбинацией). Среднее время τ существования носителя тока в свободном состоянии называют временем жизни. В разных полупроводниках это время различно – от 10^{-10} с до сотых долей секунды. Электроны (или дырки) рекомбинируют не только в объеме полупроводника, но и на его поверхности. Величина S, характеризующая скорость исчезновения носителей тока на поверхности, называется скоростью поверхностной рекомбинации. Длина диффузии носителей L равна приблизительно расстоянию, на которое успевают продиффундировать электроны и дырки за время своей жизни τ. Подвижность носителей μ – это скорость их перемещения под действием электрического поля с напряженностью, равной единице. Эти параметры во многом определяют качества полупроводников, используемых в электронной технике.

В заключение опишем один красивый опыт, который иллюстрирует механизм возникновения ФЭМ-эффекта. Опыт состоит в следующем. Из полупроводника (германия) вырезается образец в виде маленького цилиндра. Внутри цилиндра высверливается тонкий канал, в который запрессовывается подпятник из твердого материала. Образец насаживается на иглу (как магнитная стрелка компаса). Цилиндр помещается между полюсами магнита (рис.2) и освещается светом (угол между направлением луча света и индукцией магнитного поля $\theta \approx 45°$). В результате образец начинает вращаться! Опыт наглядно демонстрирует непосредственное превращение энергии света в механическую энергию. Это явление можно назвать фотомагнитомеханическим эффектом. Попробуем объяснить происхождение этого эффекта.

Луч света, падающий на боковую поверхность цилиндрического образца, освещает узкую вертикальную полоску небольшой ширины по всей длине цилиндра. Рожденные светом электроны и дырки диффундируют из освещенной области в глубь цилиндрического образца. В результате действия силы Лоренца на диффундирующие в магнитном поле электроны и дырки возникает ЭДС ФЭМ-эффекта. При этом все процессы диффузии и рекомбинации рожденных светом носителей разыгрываются в слое образца протяженностью порядка диффузионной длины. Остальная же толща образца пассивна и служит как бы проводником, замыкающим на себя ЭДС. Весь образец можно представить в виде бесконечного числа замкнутых контуров-рамок (одна из сторон этих рамок – узкая освещенная полоска поверхности образца). На каждую такую рамку со стороны магнитного поля действует момент сил, максимальное значение которого пропорционально площади рамки и силе тока в ней. Однако в силу симметрии цилиндрического образца все эти рамки можно заменить одной «эквивалентной» рамкой, плоскость которой определяется направлением пучка падающего света. И если угол θ, который составляет плоскость рамки с направлением индукции магнитного поля, не равен 90°, то рамка поворачивается в магнитном поле (как рамка с током в обычном электродвигателе). В описанном нами опыте $\theta \approx 45°$, и вращающий момент, действующий на эквивалентную рамку, заставляет вращаться весь образец. При вращении цилиндра под пучок света попадают все новые участки его поверхности. Поэтому цилиндр будет вращаться непрерывно.

Если вы разобрались в механизме возникновения ФЭМ-эффекта, вы сможете ответить на такой вопрос: изменится ли направление вращения цилиндра, если направление поля поменять на противоположное?





Вот Квант, который построил Исаак,
А вот ученица,
Которая изредка любит хвалиться,
Что все понимает на целой странице
В Кванте, который построил Исаак.

Вот автор статьи – знаменитый ученый,
Который писал ее так увлеченно
Для этой без меры серьезной девицы,
Которая изредка любит хвалиться,
Что все понимает на целой странице
В Кванте, который построил Исаак.

А вот рецензент – давний член редсовета,
Который прочел сочинение это,
Представив себя симпатичной девицей,
Которая тщетно мурыжит страницу,
Пытаясь понять то, о чем говорится
В Кванте, который построил Исаак

А это редактор, статью эту правивший,
Лишь автора имя на месте оставивший,
Чтоб даже тупейшая в мире девица
Смогла хоть единожды в год похвалиться,
Что все понимает на целой странице
В Кванте, который построил Исаак.

А это художник в глубокой прострации
Пытается выдумать те иллюстрации,
Которые так очаруют девицу,
Что сходу она прочитает страницу
В Кванте, который построил Исаак

Вот главный редактор – большой академик,
Он правит (за это не требуя денег),
Чтоб делалось все только так и вот так,
Поскольку он есть этот самый Исаак,
Который по уши влюбился в девицу,
Которая пальчиком тычет в страницу,
Пытаясь понять то, о чем говорится
В Кванте, который построил Исаак

Простые числа и постулат Бертрана

А.КОРОБОВ

НАПОМНИМ, что *простыми числами* называются натуральные числа, которые имеют ровно два различных натуральных делителя, а именно единицу и само число.

Последовательность простых чисел

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 31,\ 37,\ 41,\ \ldots$$

устроена весьма загадочно; так, никому не удалось найти общей формулы, пригодной для быстрого вычисления простых чисел, и вряд ли такая формула вообще существует. Например, знаменитый французский математик Пьер Ферма предположил, что все числа вида

$$2^{2^n}+1,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

– простые; однако это оказалось неверно уже при $n = 5$. Ошибку обнаружил много лет спустя гениальный ученый Леонард Эйлер, заметив, что $2^{32}+1$ делится на 641. Эйлер также указал многочлен x^2-x+41, принимающий только простые значения при всех $x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 40$. Однако при $x = 41$ значение этого многочлена равно составному числу 41^2. Эйлер внес большой вклад в изучение простых чисел, в частности, предложив доказательство бесконечности последовательности простых чисел, построенное на совершенно новой и плодотворной идее.[1] Впервые бесконечность множества простых чисел установил знаменитый древнегреческий математик Евклид с помощью очень простого и красивого рассуждения «от противного».

Прежде чем приводить доказательство Евклида, заметим, что любое натуральное число, больше единицы, можно записать в виде произведения простых сомножителей, последовательно выделяя делители числа в виде все большего числа сомножителей, пока это возможно; например,

$$360 = 36\cdot 10 = 6\cdot 6\cdot 10 = 2\cdot 3\cdot 6\cdot 2\cdot 5 = 2\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 5.$$

Одно и то же натуральное число можно раскладывать на простые сомножители многими способами, например в различной последовательности разлагать на сомножители делители числа:

$$360 = 2\cdot 180 = 2\cdot 2\cdot 90 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 45 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5.$$

Основная теорема арифметики утверждает, что разложение на простые сомножители всегда одно и то же с точностью до порядка простых сомножителей. Доказательство этой теоремы вполне элементарно, однако мы его приводить не будем, тем более, что многим единственность разложения представляется сама собой разумеющейся (хотя это, конечно, не так!).[2]

Приведем теперь рассуждение Евклида. Предположим, что все простые числа исчерпываются конечным набором: $2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ \ldots,\ p$. Тогда число

$$2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot p+1$$

при делении на $2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ \ldots,\ p$ дает в остатке 1, т.е. не делится ни на одно простое число. Но это число должно

[1] *Доказательство Эйлера можно найти в [4, 8, 10].*

[2] *Доказательство основной теоремы арифметики можно прочитать, например, в «Кванте» №3 за 1998 год.*

Иллюстрация П.Чернуского

иметь разложение на простые сомножители и, значит, должно делиться на некоторое простое число. Мы приходим к противоречию с предположением о конечности множества простых чисел, что и требовалось доказать.

С простыми числами связано много задач, формулировка которых очень проста, но решение до сих пор не найдено. Например, неизвестно, конечно или бесконечно число простых чисел вида $2^n - 1$ или вида $n^2 + 1$. Также до сих пор не доказано и не опровергнуто предположение Эйлера о том, что любое четное число, больше двух, можно представить в виде суммы двух простых чисел.

В последовательности натуральных чисел встречаются пары простых, отличающиеся на двойку, например 3 и 5; 17 и 19; 59 и 61 и т.д.

Предполагают, что таких пар «простых близнецов» бесконечно много, однако до настоящего времени доказать это не удалось, несмотря на усилия многих очень сильных математиков. Вместе с тем, легко построить примеры сколь угодно длинных промежутков из последовательных натуральных чисел, не содержащих простых чисел; например, очевидно, все числа $N + 2$, $N + 3$, ..., $N + 1000$, где $N = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1000$ – составные (так как они делятся соответственно на 2, 3, ..., 1000).

Французскому математику Жозефу Луи Франсуа Бертрану при исследовании некоторых вопросов из высшей алгебры пришлось воспользоваться одним интересным свойством простых чисел. Бертран не смог доказать это утверждение и принял его в качестве постулата.

Постулат Бертрана. *Между n и 2n обязательно найдется простое число p, каково бы ни было натуральное n.*

Доказать постулат Бертрана удалось выдающемуся русскому математику Пафнутию Львовичу Чебышёву. Мы приведем упрощенный вариант доказательства Чебышёва, в котором применяется его замечательное тождество о связи между произведением наименьших общих кратных и факториалом числа.

Для понимания доказательства постулата Бертрана требуется лишь умение проводить несложные преобразования с алгебраическими выражениями и неравенствами. Задачи, приведенные в конце статьи, помогут получить более полное представление о методе Чебышёва. Список литературы адресован тем, кто захочет более глубоко изучить методы элементарной теории простых чисел.

Начнем с определения двух важных понятий арифметики – канонического разложения натурального числа и показателя простого числа в каноническом разложении.

Если в разложении натурального числа n на простые сомножители записать произведение одинаковых простых сомножителей p в виде p^α, то получится *каноническое разложение* числа n:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s},$$

где все простые $p_1, \ldots, p_s$ различны (например, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$).

Будем говорить, что простое число p входит в разложение n с *показателем* α_k, если $p = p_k$. Если же n не делится на простое число p, то будем считать, что показатель равен нулю.

Прежде чем доказывать постулат Бертрана, решим следующую задачу:

Найти показатель $\nu_p(x)$, с которым простое p входит в разложение на простые сомножители произведения всех натуральных чисел, не превосходящих некоторого числа $x \ge 1$.

Наибольшее целое число, не превосходящее x, принято записывать в виде $[x]$ (читается: «*целая часть x*»). Произведение всех натуральных чисел от 1 до n обозначают символом $n!$ (читается: «*n факториал*»).

Заметим, что показатель простого числа p в произведении

$$[x]! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot [x]$$

зависит только от тех сомножителей, которые делятся на p, т.е. равен показателю p в произведении

$$p \cdot 2p \cdot \ldots \cdot (x/p)p = p^{[x/p]} \cdot [x/p]!$$

Следовательно,

$$\nu_p(x) = [x/p] + \nu_p(x/p) =$$

$$= [x/p] + [x/p^2] + \nu_p(x/p^2) =$$

$$= [x/p] + [x/p^2] + [x/p^3] + \ldots,$$

где слагаемые вида $[x/p^k]$ добавляются, пока $x \ge p^k$.

Например, число 5 входит в разложение 1000! в степени

$$[1000/5] + [1000/25] +$$

$$+ [1000/125] + [1000/625] = 249,$$

т.е. 1000! в десятичной записи оканчивается 249 нулями.

Перейдем к доказательству постулата Бертрана.

Обозначим через $A(x)$ наименьшее общее кратное всех натуральных чисел, не превосходящих x:

$$A(x) = \text{НОК}(1, 2, 3, \ldots, [x]).$$

Легко понять, что каждое простое p входит в разложение $A(x)$ на простые сомножители в степени k_p, где k_p – максимальное целое число, удовлетворяющее неравенству $p^{k_p} \le x$, т.е. k_p равно числу решений неравенства $p^k \le x$ в натуральных k.

Найдем теперь показатель $a_p(x)$, с которым простое p входит в произведение

$$A(x) \cdot A(x/2) \cdot A(x/3) \cdot \ldots \cdot A(x/[x]).$$

Очевидно, $a_p(x)$ равно числу решений неравенства $p^k \le x/n$ в натуральных n и k. При каждом фиксированном k имеется $[x/p^k]$ решений этого неравенства, следовательно,

$$a_p(x) = [x/p] + [x/p^2] +$$

$$+ [x/p^3] + \ldots = \nu_p(x),$$

т.е. разложение на простые сомножители произведения

$$A(x) \cdot A(x/2) \cdot A(x/3) \cdot \ldots \cdot A(x/[x])$$

совпадает с разложением на простые сомножители $[x]!$. Тем самым доказано

Тождество Чебышёва.[3] *При любом $x \ge 1$*

$$A(x) \cdot A(x/2) \cdot A(x/3) \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot A(x/[x]) = [x]!.$$

Основная идея доказательства постулата Бертрана состоит в том, что достаточно проверить справедливость неравенства

$$A(x)/A(x/2) > A^2(\sqrt{x}). \quad (*)$$

[3] *Чебышёв применял это тождество в равносильной форме, получающейся логарифмированием приведенного выражения.*

Действительно, предположим, что при некотором $x = 2n$ нет ни одного простого числа такого, что $x/2 < p \le x$. Тогда показатель p в разложении числа $A(x)/A(x/2)$, равный количеству натуральных k, удовлетворяющих неравенствам $x/2 < p^k \le x$, будет равен сумме числа решений неравенств $x/2 < p^{2k} \le x$ и числа решений неравенств $x/2 < p^{2k+1} \le x$ в натуральных k. Очевидно, что эта сумма не превосходит удвоенного числа решений неравенства $p^k \le \sqrt{x}$, т.е. не превосходит показателя p в разложении на простые сомножители числа $A^2(\sqrt{x})$. Следовательно,

$$A(x)/A(x/2) \le A^2(\sqrt{x}),$$

что противоречит неравенству (∗).

Будем предполагать, что $x \ge 2000$ (при меньших значениях x проверка постулата Бертрана не представляет сложности). Заменив в тождестве Чебышёва x на $x/2$ и проведя несложные преобразования, получим основную формулу:

$$\frac{[x]!}{([x/2]!)^2} = \frac{A(x)A(x/2)A(x/3)A(x/4)\ldots}{A^2(x)A^2(x/4)A^2(x/6)\ldots} = \frac{A(x)A(x/3)A(x/5)\ldots}{A(x/2)A(x/4)A(x/6)\ldots}.$$

Заметим, что $A(x)$ при увеличении x не убывает, поэтому из основной формулы следуют оценки:

$$\frac{A(x)}{A(x/2)} \le \frac{[x]!}{([x/2]!)^2} \le \frac{A(x)\cdot A(x/3)}{A(x/2)}.$$

Пусть $[x/2] = m$, т.е. $m \le x/2 < m + 1$. Тогда, применяя неравенство $2k + 1 \le 3k$, получим

$$\text{i)}\ \frac{A(x)}{A(x/2)} \le \frac{[x]!}{([x/2]!)^2} \le \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} = 2^m\cdot\frac{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m} \le 2^m\cdot 3^m \le 6^{x/2}.$$

Аналогично, вследствие неравенства $2k + 1 \ge 2k$,

$$\text{ii)}\ \frac{A(x)A(x/3)}{A(x/2)} \ge \frac{[x]!}{([x/2]!)^2} \ge \frac{(2m)!}{(m!)^2} = \frac{2^m\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2m+1)}{(2m+1)\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m} \ge \frac{2^{2m}}{2m+1} \ge \frac{2^{x-2}}{x+1}.$$

Применяя неравенство i), находим

$$A(x) = \frac{A(x)}{A(x/2)}\cdot\frac{A(x/2)}{A(x/4)}\cdot\frac{A(x/4)}{A(x/8)}\cdot\ldots \le 6^{\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\ldots} \le 6^x.$$

Отсюда следуют оценки:

$$A^2(\sqrt{x}) \le 6^{2\sqrt{x}};\ A(x/3) \le \left(\sqrt[3]{6}\right)^x.$$

Теперь, применяя последнюю оценку, из неравенства ii) получаем

$$\frac{A(x)}{A(x/2)} \ge \frac{2^{x-2}}{(x+1)A(x/3)} \ge \left(\frac{2}{\sqrt[3]{6}}\right)^x\cdot\frac{1}{4(x+1)} \ge \frac{1{,}1^x}{4(x+1)}.$$

Таким образом, для доказательства (∗), а значит, и постулата Бертрана, нам осталось проверить, что при целых $x \ge 2000$ справедливо неравенство

$$1{,}1^x > 4(x+1)\cdot 6^{2\sqrt{x}}. \qquad (**)$$

При $x = 2000$ это неравенство выполняется, в чем можно убедиться непосредственно вычислением. Заметим, что при увеличении натурального $x \ge 2000$ на единицу левая часть неравенства (∗∗) увеличивается в 1,1 раза, а правая — менее чем в 1,05 раза, так как

$$\frac{x+2}{x+1}\cdot 6^{2\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)} < \left(1+\frac{1}{2000}\right)\cdot 6^{1/\sqrt{2000}} < 1{,}05.$$

Следовательно, неравенство (∗∗) останется справедливым при всех целых $x \ge 2000$, что и требовалось доказать.

Итак, постулат Бертрана доказан при всех натуральных $n \ge 1000$. При меньших значениях n постулат Бертрана проверяется непосредственно, например с помощью таблиц простых чисел.[4]

[4] *Другие варианты доказательства постулата Бертрана можно найти в [1, 5, 8, 9].*

Задачи

1. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $4k - 1$. *Указание.* Рассмотрите выражение

$$4\cdot\left(3\cdot 7\cdot 11\cdot 19\cdot\ldots(4k-1)\right)^2 - 1.$$

2. Докажите, что не существует многочлена, принимающего только простые значения при всех целых значениях аргумента.

3. Докажите, что если $2^n - 1$ – простое, то n – простое.

4. Докажите, что если $2^n + 1$ – простое, то $n = 2^m$.

5. Докажите, что между n и $2n$ найдется не менее 10 простых чисел, если $n > 100$. *Указание.* Докажите, что

$$A(x)/A(x/2) > x^{10}\cdot A^2(\sqrt{x}) \text{ при } x > 4000.$$

6. Обозначим через $\pi(x)$ количество простых чисел, не превосходящих x. Докажите, что справедливы неравенства

$$x^{\frac{1}{2}\pi(x)} \le A(x) \le x^{\pi(x)};$$

$$\frac{x}{2\log_2 x} \le \pi(x) \le \frac{6x}{\log_2 x},\ x \ge 2.$$

7. Пусть $B(x) = x\cdot A(x)$. Докажите, что тогда

$$C(x) = B(x)\cdot B(x/2)\cdot\ldots\cdot B(x/[x]) = x^{[x]}.$$

8. Рассмотрев выражение

$$\frac{C(x)\cdot C(x/30)}{C(x/2)\cdot C(x/3)\cdot C(x/5)},$$

докажите, что при достаточно больших x $B(x) > 2{,}5^x$; $B(x)/B(x/6) < 2{,}6^x$; $B(x) < 3{,}1^x$.

9. Докажите, что при целых $n \ge 2$ между n и $1{,}5n$ найдется простое число.

10. Докажите, что при любом положительном ε найдется бесконечно много пар последовательных простых чисел, для которых $p_{n+1} < (1+\varepsilon)p_n$.

Указание. Обобщите утверждение задачи 5.

Литература

1. *М.И.Башмаков.* О постулате Бертрана. («Квант» №5 за 1971 г.)
2. *В.Боро, Д.Цагир, Ю.Рольфс, Х.Крафт, Е.Янцен.* Живые числа.
3. *И.М.Виноградов.* Основы теории чисел.
4. *А.И.Галочкин, Ю.В.Нестеренко, А.Б.Шидловский.* Введение в теорию чисел.
5. *Л.Г.Лиманов.* О числе e и n!. («Квант» №5 за 1972 г.)
6. *Д.Пойа.* Математика и правдоподобные рассуждения.
7. *Э.Трост.* Простые числа.
8. *К.Чандрасекхаран.* Введение в аналитическую теорию чисел.
9. *П.Л.Чебышёв.* Избранные труды.
10. *А.М.Яглом, И.М.Яглом.* Неэлементарные задачи в элементарном изложении.


ПРОСТО ФИЗИКА

Просто физика

М.КАГАНОВ

Думаю, у каждого физика кроме *своей* есть еще по крайней мере две физики: *чужая* – та, которой профессионально занимаются другие физики и с результатами которой очень интересно познакомиться хотя бы поверхностно по изложению в научно-популярных журналах и книгах, и *просто физика*, с которой сталкиваешься совсем неожиданно: читая о чем-то, не напрямую связанном с физикой, или наблюдая что-либо.

Большинство физиков уверены, что окружающая их действительность – работа машин и механизмов, явления природы и т.п. – может быть объяснена и понята на основе физики. Конечно, только то, что находится в области ее применимости. Речь не идет о духовных движениях, о жизни общества и многом другом, возможно, более интересном, чем то, в чем пытается разобраться физика.

О «просто физике» вспоминают, мне кажется, нечасто. Есть физики, которые не любят задумываться о случайно наблюдаемых явлениях, отвечать на возникшие «из жизни» вопросы. Однажды я задал своему коллеге – прекрасному физику – вопрос:

– Почему кипящий на газовой плите чайник окутывается паром *после* того, как газ выключен?

Он, практически не слыша вопроса, сказал раздраженно:

– Не люблю кухонной физики!

Для него и для многих «просто физика» – кухонная физика. Им эта статья, скорее всего, не понравится.

* * *

Вопросы «из жизни» возникают, как правило, совершенно спонтанно, но возникнув, чаще всего (признаюсь) забываются. Но если не забываются, то в процессе ответа на них «обрастают» разнообразными ответвлениями и иногда заставляют обдумывать вполне любопытные вещи. Эта статья – попытка перенести на бумагу поток сознания, возникший из двух источников. Не надо думать, что, задав себе вопросы, я начал раздумывать над ответами или обдумывать затронутые проблемы. Эти серьезные слова плохо описывают то, что происходило. Точнее сказать так: задав себе вопросы, я часто ловил себя на том, что мысленно возвращаюсь к ним, но часто чуть «промазываю», и возникает близкий вопрос – мысль цепляется за мысль.

* * *

С чего началось?

Когда зимой в Соединенных Штатах объявляют прогноз погоды, то, сообщая о температуре завтрашнего дня (по непривычной для нас шкале Фаренгейта), часто добавляют: «А с учетом ветра температура будет...» – и называют совсем пугающее значение. Конечно, мы хорошо знаем, что на ветру холоднее. Возникло два вопроса:

Почему мы ощущаем на ветру воздух более холодным?

Как оценить роль ветра в тепловых процессах?

Итак, первый источник вопросов – сводка синоптика (практически ежедневная).

Второй источник связан с недавним полетом американского космического корабля многоразового использования для ремонта внеземного телескопа «Хаббл». Существование этого фантастического прибора на околоземной орбите столь интересно, что прислушиваешься ко всему, что сообщают о полете к нему. Среди сказанного было сообщение о том, что основные повреждения возникли из-за сложного теплового режима: телескоп то нагревается Солнцем, то охлаждается, когда попадает в тень Земли. В данном случае вопрос может быть строго сформулирован в виде задачи: «Нагретая до определенной температуры (пусть T_0) пластина толщиной $2d$ попадает в неосвещенную область космического пространства. Как быстро она охладится?».

Вокруг этих двух проблем крутились мои мысли. Но когда я решил, что хочу рассказать о своих размышлениях в журнале «Квант», то понял: необходимо сначала «отступить» и поделиться с читателями тем, в каких терминах я размышлял, какими понятиями оперировал.

* * *

Теплота, как вы, конечно, знаете, непростое явление. Теперь, когда атомное строение тел хорошо известно, под теплотой мы понимаем энергию хаотического движения атомных и субатомных частиц в теле. Чем интенсивнее они движутся, тем теплее – больше теплоты. Мерой теплоты избрана *температура*. Мы будем обозначать ее буквой T. Для нее выбрана специальная шкала измерений – градусы (для физических целей наиболее удобны абсолютные градусы – градусы Кельвина, К). Но делать это не обязательно, так как по своему смыслу температура близка средней энергии ε хаотического движения частиц (в расчете на одну частицу). (Так, средняя энергия поступательного движения частицы классического идеального газа равна $\varepsilon = 3/2kT$, где $k = 1{,}4 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.) Температуру даже можно (но неудобно практически) измерять в энергетических единицах (например, в джоулях).

Температура, как мера теплоты, выбрана необычайно удачно. В каждом теле тепловое движение свое (из-за разного состава хотя бы). Одно тело не похоже на другое. Но, не задумываясь о том, как устроены тела, мы уверены: если первое тело имеет температуру более высокую, чем второе ($T_1 > T_2$), то при их соприкосновении первое тело будет охлаждаться, а второе нагреваться – до тех пор, пока их температуры не выровняются. При этом если тела разные, то энергии теплового движения в этих телах («теплоты») будут различны.

В случае когда тело нагрето неоднородно, в нем возникает поток тепла (поток энергии), направленный от горячей части тела к холодной. Поток стремится выровнять температуры. Удается это ему или нет, зависит от постановки задачи. На рисунках 1 и 2 схематически изображены две ситуации. В первом случае в конеч-

Иллюстрация А.Балдина

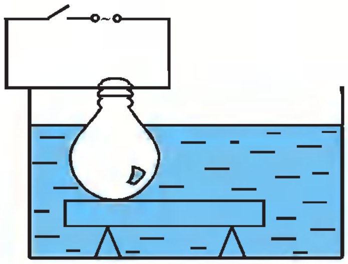


Рис. 1

ном итоге температура тела всюду станет одной и той же и равной температуре жидкости, окружающей

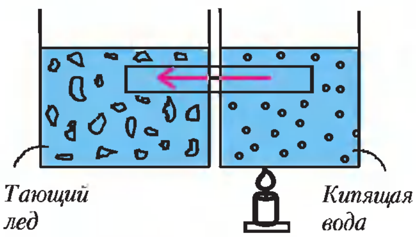


Рис. 2

тело. Во втором случае поток тепла в стержне будет существовать до тех пор, пока будет поддерживаться разность температур между концами стержня.

Как же описать охлаждение или разогрев тел не только на словах, но и количественно? Физики XVII – XVIII веков придумали специальную жидкость – флогистон. Где теплее, там ее больше, где холоднее – меньше. Течение флогистона обеспечивает выравнивание температур и другие тепловые явления. Еще А.Лавуазье (1743 – 1794) показал, что флогистон – фикция. Фикция-то фикция, но породила используемую и сегодня терминологию. Вернитесь к предыдущему абзацу. Ведь если *течет*, то жидкость, наверное? Выяснилось, впрочем, что *течь может не только жидкость.* Понятию «поток тепла» можно придать вполне определенный количественный смысл, не вспоминая о флогистоне.

Рассмотрим элемент объема ΔV в теле, который мал в сравнении с размерами тела, но в нем достаточно много атомов (молекул). Если изменяется температура T этого элемента объема, то изменяется и количество теплоты в нем (т.е. изменяется его внутренняя энергия). Изменение количества теплоты ΔW можно записать в виде $\Delta V C \Delta T$, где C – *теплоемкость* единицы объема тела, т.е. величина, имеющая простой физический смысл: она равна изменению теплоты единицы объема тела при изменении температуры на один градус. Пусть в элементе объема ΔV *нет* источника тепла.[1] Если количество тепла W в элементе объема изменяется, то в отсутствие источника тепла это возможно только за счет того, что оно либо вносится (втекает) в элемент объема, либо выносится (вытекает) из него, а точнее: и вносится (втекает), и выносится (вытекает). Именно этот процесс описывает *плотность потока тепла.* Обозначим ее буквой q. Плотность потока тепла – вектор, поэтому, зная $\vec{q}$, мы знаем не только какова величина потока, но и куда он направлен. Размерность плотности потока тепла есть $Дж/\left(м^2 \cdot с\right)$. Воспользовавшись выписанной размерностью, нетрудно дать словесное определение плотности потока тепла (сделайте это самостоятельно).

Чтобы поток тепла, описываемый вектором $\vec{q}$, обеспечивал изменение со временем температуры T элемента объема ΔV, он должен подчиняться определенному соотношению. Для простоты рассмотрим неоднородно нагретый стержень. Изменение количества тепла в слое толщиной $2\Delta x$, середина которого имеет координату x, за время Δt определяется количеством тепла, протекающего через границы слоя:

$$C\Delta T \cdot 2S\Delta x = q_x(x-\Delta x)S\Delta t - q_x(x+\Delta x)S\Delta t$$

(S – сечение стержня). Отсюда получаем искомое соотношение:

$$\frac{\Delta q_x}{\Delta x} = -C\frac{\Delta T}{\Delta t}, \qquad (1)$$

где индекс «x» указывает, что поток тепла направлен вдоль оси X. Таким образом, скорость изменения температуры со временем определяется скоростью изменения плотности потока тепла вдоль стержня ($\Delta q_x/\Delta x$ называют *градиентом* q_x вдоль оси X). Если q_x не зависит от x, то $T = \mathrm{const}$ (сколько тепла втекает, столько и вытекает).

Равенство (1) – запись закона сохранения. В данном случае – тепла. Подобные равенства встречаются часто. Пусть, например, частицы какого-то сорта растворены в жидкости или в твердом теле (сейчас неважно). Концентрацию растворенных частиц (их число в единице объема) обозначим n. Тогда, если концентрация неоднородна вдоль оси X, то

$$\frac{\Delta j_x}{\Delta x} = -\frac{\Delta n}{\Delta t}. \qquad (1')$$

где j_x – плотность потока частиц вдоль оси X (размерности: $[n] = 1/м^3$, $[j_x] = 1/\left(м^2 \cdot с\right)$). Равенства (1) и (1′) – еще не уравнения. Надо выяснить, от чего зависят q_x и j_x, тогда, возможно, они превратятся в уравнения. Бывает, что приходится выписывать не одно, а несколько уравнений, чтобы иметь возможность описать перенос тепла и/или вещества.

К выяснению того, как возникает поток тепла и от чего зависит q, подойдем феноменологически, т.е. на этом этапе мы не будем интересоваться *механизмом* переноса тепла.

Если температура однородна (т.е. не зависит от координат), то теплоперенос отсутствует. Естественной мерой неоднородности температуры может служить градиент температуры $\Delta T/\Delta x$. Разумно предположить, что

$$q_x = - \frac{\Delta T}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Мы феноменологически ввели коэффициент – *коэффициент теплопроводности* , размерность его легко установить сравнением с размерностью q: [ ] = $Дж/(К \cdot м \cdot с)$. Знак минус в выражении (2) написан для того, чтобы коэффициент теплопроводности был положительным –

---

[1] *Может показаться, что это излишняя фраза: как внутри тела может быть источник тепла? Легко привести примеры, показывающие, что это возможно. Например, если по металлической проволоке течет электрический ток, плотность которого j, то в каждом единичном элементе объема в единицу времени выделяется тепло, равное ρj^2, где ρ – удельное сопротивление металла. Другой пример: на стеклянную пластину падает свет, который частично поглощается пластиной. Чем дальше от источника света в глубь пластины, тем интенсивность света меньше. Куда девается энергия световых квантов при этом? В конечном итоге она тратится на разогрев пластины. В каждом элементе объема пластины выделяется тепло. Источник тепла тем мощнее, чем больше коэффициент поглощения и чем интенсивнее световой поток.*

ведь поток тепла течет от горячего конца тела к холодному.

Если взять производную по x от правой и левой частей уравнения (2), то с помощью выражения (1) можно исключить q_x. Полученное уравнение для T (его называют уравнением теплопроводности) имеет следующий смысл: скорость изменения температуры со временем пропорциональна *второй* производной от температуры по координате. Коэффициент пропорциональности $\chi = \ /C$ называют *температуропроводностью.*

Не привлекая каких-либо представлений о механизме переноса тепла, можно (нужно) обратить внимание на то, что если тепло проходит через границу двух сред, то должны быть выполнены два условия, означающие непрерывность процесса переноса тепла из одной среды в другую:

$$\textit{на границе}\ T_1 = T_2,\ -{}_1\frac{\Delta T_1}{\Delta x} = -{}_2\frac{\Delta T_2}{\Delta x}$$

(ось X направлена перпендикулярно границе сред).

Чтобы понять механизм переноса тепла, рассмотрим два существенно разных случая:

– перенос тепла по твердому телу, но не по металлу (дальше будет понятно, почему мы исключили металл);

– перенос тепла газом, скажем по воздуху в нащей комнате или на улице, или в поле (вспомним о ветре).

В твердом теле неоднородность температуры означает, что там, где температура выше, атомы (молекулы), из которых состоит тело, колеблются более интенсивно, а там, где температура ниже, – менее интенсивно. Думаю, никого не удивит, если то же самое я скажу иначе: *там, где температура выше, число фононов в единице объема больше, чем там, где температура ниже.*[2]

Теплопроводность – это поток фононов из более горячих мест в более холодные. Надо подчеркнуть, что частицы, из которых построено тело, не перемещаются. Если не прибегать к представлению о фононах, то надо было бы рассмотреть взаимодействие между частицами, благодаря которому интенсивно колеблющиеся частицы вовлекают в свое движение соседние частицы, а те своих соседей – так тепло перемещается по телу. На языке фононов все значительно нагляднее.

Фононы двигаются хаотически, очень часто сталкиваются с различными препятствиями: с границами кристаллитов, с дислокациями, друг с другом. Мерой их свободного перемещения служит *длина свободного пробега l* – среднее расстояние между столкновениями. Геометрические представления могут помочь вычислить поток тепла, переносимый фононами, при заданной скорости изменения температуры, а тем самым – коэффициент теплопроводности:

$$\approx C l \overline{u}\,. \qquad (3)$$

Здесь C – по-прежнему теплоемкость единицы объема, но появилась и новая буква (да еще с чертой) $\overline{u}$. Это – средняя (поэтому с чертой) скорость фононов. Фононы – кванты звуковой энергии. Средняя скорость фононов порядка скорости звука u в твердом теле.

Следует обратить внимание на то, что коэффициент теплопроводности в формуле (3) состоит из трех сомножителей: фононной теплоемкости, длины пробега фононов, скорости фононов. Первый сомножитель указывает, что́ переносится, второй – на какое расстояние, третий – с какой скоростью. Так устроены многие кинетические коэффициенты.

Формула для   , как и большинство формул этой статьи, претендует на правильность *по порядку величины,* что подчеркивает значок «$\approx$» вместо знака равенства.

В газе существуют два механизма переноса тепла. Газ отличается тем, что в нем наряду с хаотическим (тепловым) движением частиц возможно упорядоченное движение в виде направленного потока частиц. В потоке средняя скорость частиц отлична от нуля ($\overline{v} \neq 0$). Такой поток, если температура в газе неоднородна, переносит тепло. Подобного механизма, естественно, нет в твердом теле. Если в среднем газ покоится ($\overline{v} = 0$), то в результате столкновений частиц более интенсивное хаотическое (тепловое) движение распространяется по газу – переносится тепло. Этот механизм похож на перенос тепла в твердом теле. Только вводить фононы нет необходимости: перенос тепла осуществляют сами частицы газа. Коэффициент переноса тепла выражается формулой, аналогичной предыдущей:

$$\approx C l \overline{v}\,, \qquad (3')$$

но здесь C – теплоемкость единицы объема газа, l – средняя длина свободного пробега частицы газа, а $\overline{v} \approx \approx \sqrt{kT/m}$ – средняя скорость хаотического движения частиц, где m – масса отдельной частицы.

Чтобы несколько перебить тяжеловесное изложение простого вопроса, скажем: специфически газовый механизм переноса тепла – попросту перемешивание, что особенно очевидно, если упорядоченное (нетепловое) движение газа циклично.

Теперь, наверное, ясно, почему мы исключили металлы, описывая теплопроводность твердых тел: в металлах есть свободные электроны (*газ* электронов). Электроны не просто принимают участие в теплопроводности. Их движение – *главный механизм теплопроводности металла.* Поэтому надо уточнить, *как* движутся, создавая поток тепла, электроны. Перенос тепла электронами называется теплопроводностью, если плотность тока в металле равна нулю, т.е. отсутствует упорядоченное движение электронов.

Перенос тепла электрическим током и возникновение тока (или разности потенциалов) под воздействием градиента температуры – все эти явления носят обобщающее название *термоэлектрических явлений.* Особенно большую роль они играют в полупроводниках, значительно более чувствительных к температуре, чем металлы.

* * *

Теперь можно пытаться отвечать на вопросы, привлекшие мое внимание и послужившие поводом к написанию статьи.

Начнем с наших ощущений.

Дотронувшись до горячего или холодного предмета, сев в ванну с горячей или теплой водой, окунувшись в море, мы довольно точно определяем температуру того, с чем соприкасается наще тело. На ветру мы часто ошибаемся: в холодный ветреный день воздух нам кажется более холодным, чем показывает термометр (это и учитывают синоптики). Что же мы чувствуем, если не температуру окружающей среды? Не вдаваясь в механизм ощущения (я в этом не разбира-

[2] *Фонон – квант звуковых волн (так же, как фотон – квант электромагнитных волн). (Прим. ред.)*

юсь), с большой долей уверенности можно сказать: мы ощущаем изменение теплоотвода или теплопритока по сравнению с обычным. Между прочим, при одной и той же достаточно высокой температуре (но не такой, чтобы обжечься, экспериментируя) металл кажется значительно горячее, чем, скажем, дерево. А холодный металл кажется холоднее дерева. Теплопроводность металла значительно больше теплопроводности дерева. А в воздухе...

Давайте сравним перенос тепла за счет ветра, т.е. за счет упорядоченного перемещения частиц газа, с настоящей теплопроводностью. Пусть скорость ветра есть $v_в$. Плотность потока тепла, переносимого ветром, по порядку величины равна $Wv_в$, где W – количество тепловой энергии в единице объема газа ($C = \Delta W/\Delta T$ – помните?). Сравнивая $Wv_в$ с плотностью потока тепла из выражений (2) и (3′), видим, что при равенстве плотностей потоков скорость ветра должна быть равной величине

$$v_T = \frac{C}{W} l\bar{v}\left|\frac{\Delta T}{\Delta x}\right|.$$

Оценка скорости изменения температуры проста: $\Delta T/\Delta x \approx \delta T/L$, где δT – разность температур на расстоянии L; $C/W \approx 1/T$ (см. определение теплоемкости). Итак,

$$v_T = \bar{v}\,\frac{l}{L}\,\frac{\delta T}{T}.$$

Большая это скорость или маленькая? Естественно посчитать ее для воздуха. Массы молекул N_2 и O_2 (основных составляющих воздуха) близки. Примем их равными $m \approx 6 \cdot 10^{-26}$ кг. Тогда

$$\bar{v} \approx \sqrt{\frac{kT}{m}} \approx 10\sqrt{T}\ (\text{м/с}).$$

Длина свободного пробега l частиц газа тем больше, чем меньше размер молекул газа и меньше число молекул в единице объема n. Нетрудно оценить:

$$\frac{1}{l} \approx na^2,$$

где a – размер молекулы (как правило, это несколько ангстрем, т.е. $\sim 10^{-10}$ м). В газе при нормальных условиях $n = p/(kT) \sim 10^{25}$ 1/м^3. Отсюда $l \sim 10^{-5}$ м. Остается выбрать оценку для $\delta T/L$. Конечно, оценка существенно зависит от конкретных условий: в комнате перепад температуры 1 °С бывает на расстоянии метров, а вокруг человеческого тела (с температурой ~37 °С) есть тонкий слой (~1 мм), в котором происходит изменение температуры иногда на десятки градусов.

При самых оптимистических оценках – при $\delta T \sim 1$ °С, $L \sim 3$ м – скорость переноса тепла по комнате составляет $v_T \sim 10^{-4}$ м/с. Реальные ветерки, которые дуют в комнате, если она не плотно закупорена, имеют значительно большую скорость, и, следовательно, главный механизм переноса тепла – движение воздуха. Это, пожалуй, было и так очевидно: кто не знает, что можно выстудить комнату, неплотно прикрыв форточку. А когда «работает» исключительно теплопроводность (потоков воздуха нет, форточка плотно закрыта), то в комнате при той же работе отопления очень тепло.

Итак, теплопроводность – медленный процесс, что и не удивительно: частицы движутся хаотически и лишь благодаря многократным случайным столкновениям из теплой области попадают в холодную. Не то что при направленном потоке частиц, когда они движутся как бы организованно. Конечно, в потоке они движутся хаотически, но в среднем – *все, как одна*, со скоростью, значительно, как правило, превышающей v_T.

Для теплообмена на поверхности тела человека, когда $\delta T \sim 10$ °С и $L \sim$ ~1 мм, для скорости переноса тепла получаем $v_T \sim 1$ м/с. Скорость небольшого ветра $v_в \approx 2-4$ м/с ненамного превышает скорость v_T. Так почему же на ветру нам становится заметно холоднее? Видимо, при анализе наших ощущений важную роль играют какие-то не учтенные нами факторы. Прежде всего, в ветреную погоду заметно возрастает интенсивность испарения влаги с поверхности тела, что, естественно, охлаждает кожу. Кроме того, ветер сдувает теплый слой воздуха, который в отсутствие ветра окружает кожу и заметно замедляет процесс теплообмена (за счет увеличения L).

* * *

Но поток сознания пока не позволяет перейти к «космической» теме. Вспомнилась одна из задач П.Л.Капицы, которую (как и многие другие) он предлагал поступающим в аспирантуру. Задача формулируется чуть игриво, но прелесть ее, конечно, в физике дела. Чтобы сформулировать задачу Капицы, вернемся к уравнениям, описывающим законы сохранения: тепла – уравнение (1), частиц – уравнение (1′). Последнее уравнение описывает движение растворенных в среде чужеродных частиц. Если никакие механические силы на частицы не действуют, то изменение числа частиц в элементе объема ΔV связано только с «желанием» однородно распределиться по телу. Поэтому

$$j_x = -D\frac{\Delta n}{\Delta x}, \qquad (2')$$

(мы, как и раньше, считаем, что концентрация n зависит только от координаты x). Мы специально не присвоили этому уравнению новый номер, чтобы подчеркнуть его сходство с уравнением (2) (аналогично сходству между уравнениями (1′) и (1)). Коэффициент пропорциональности D между $\Delta n/\Delta x$ и плотностью потока частиц j_x называется *коэффициентом диффузии.*

Уравнения (1′) и (2′) описывают диффузию – случайное блуждание растворенных в теле частиц, которое приводит к движению против градиента их плотности: частицы в среднем движутся туда, где их меньше. Если в теле есть нагретая область (в ней температура больше, чем во всем теле) или область с большой концентрацией растворенных частиц, то постепенно тепло (температура) и/или частицы будут распространяться по всему телу. Из-за того что это – случайный процесс (каждое единичное перемещение происходит в случайном направлении на величину порядка l), диффузия, как и теплопроводность, – медленный процесс. Особенно медленно диффузия происходит в твердом теле, где для перемещения из одной позиции в другую частица должна преодолеть потенциальный барьер.

Раз уравнения, описывающие теплопроводность и диффузию, одинаковы, то должны быть (и есть) общие черты у этих явлений. Например, оба эти явления обладают любопытным (и очень важным) свойством *подобия*, которое мы сформулируем на примере теплопроводности. Пусть разные части тела с характерным размером L находятся в начальный момент при различных температурах. Как оценить характерное время τ, за которое температуры практически выровняются (разность температур уменьщится в несколько раз)? Оказывается, это время зависит от L и от коэффициента температуропроводности $\chi = \quad /C$:

$$\tau = \frac{L^2}{\chi}. \qquad (4)$$

Аналогично, для процесса диффузии

$$\tau = \frac{L^2}{D}. \qquad (4')$$

В самом деле, плотность потока оценивается как $q_x \sim \quad \Delta T/L$, для градиента получаем оценку $\Delta q_x/\Delta x \sim q_x/L \sim \quad \Delta T/L^2$, а скорость изменения температуры оцениваем как $\Delta T/\Delta t \sim \Delta T/\tau$. Из уравнения (1) получаем

$$C\frac{\Delta T}{\tau} \sim \quad \frac{\Delta T}{L^2}, \text{ и } \tau \sim \frac{L^2}{\chi}.$$

Оказывается, если перейти к безразмерным координатам и времени, сделав замену $t' = t/\tau$ и $x' = x/L$, то в уравнениях теплопроводности и диффузии исчезают коэффициенты χ и D (если τ и L связаны соотношениями (4) или (4′)), и эти уравнения приобретают абсолютно одинаковый вид! При этом если увеличить в b раз пространственный масштаб, то временной масштаб надо увеличить в b^2 раз – в этом и заключается подобие.

* * *

Теперь – задача Капицы. За столом достаточно большого кабинета сидит профессор. Дверь открыта. В дверь заходит студентка для сдачи экзамена. Стоящий рядом с ней непременно уловил бы запах духов, которыми она пользуется. Увидев, что профессор что-то читает, студентка смущенно останавливается и стоит в ожидании того, что профессор поднимет голову и пригласит ее к столу. Спрашивается, через какое время профессор поднимет голову, почувствовав запах духов? Вот и все.

П.Л.Капица, давая задачи, разрешал пользоваться чем угодно: в распоряжении экзаменующегося была библиотека Института физических проблем. Даже советоваться можно было с кем угодно, кроме своего будущего руководителя (по-видимому, П.Л. считал, что будущий аспирант должен показать умение получать информацию, находить ее, а у своего руководителя получить консультацию легче легкого).

Эта задача – с подвохом. Многим кажется, что речь идет о диффузии. И сдающий экзамен пытался разыскать значение коэффициента диффузии в воздухе тяжелых молекул (именно они ответственны за аромат). В действительности, время, которое нужно тяжелым молекулам, чтобы обнаружить себя около профессора, определяется движением воздуха в кабинете – *конвективными потоками*. И правильное решение задачи начинается с выяснения условий в кабинете: открыты ли окна – если дело происходит летом, включены ли батареи – если зимой. Иными словами, надо выяснить, какова причина движения воздуха, оценить скорость движения, а время уже определяется тривиально: зная эту скорость и расстояние от стола до двери.

Думаю, что сказанное раньше (правда, о переносе тепла, а не о диффузии) объясняет, почему нужно в этом случае решать задачу не о диффузии, а о движении воздуха (на ученом языке – задачу газодинамики): диффузия тоже медленный процесс – как и теплопроводность.

* * *

Теперь, похоже, можно переходить к нагретой пластине в космосе. Итак, в космическом пространстве, вне воздействия источников тепла (Солнца, например) оказалась пластина, нагретая до температуры T_0. Как будет происходить ее охлаждение?

Первое, что заставляет задуматься, это отсутствие передающей среды вокруг пластины, т.е. среды, которая могла бы унести тепло от пластины. То, что мы обсуждали раньше, сводилось к растеканию тепла, т.е. к вовлечению в тепловое движение «новых» участков тела (твердого, жидкого или газообразного). Но ведь теперь вокруг пластины нет ничего. О каком тепле можно говорить? Вопрос правильный, и ответ на него есть: *охлаждение нагретой пластины происходит за счет излучения ею электромагнитных волн.*

Откуда электромагнитные волны? Ведь нет, вроде, никакого источника электромагнитного поля. Последнее – неверно. Атомы и молекулы состоят из заряженных частиц. Возбуждаясь за счет теплового движения, они имеют возможность, переходя в более низкое энергетическое состояние, испустить фотоны – излучить электромагнитные волны. При любой температуре в теле есть фотоны. Их вклад в тепловую энергию тела (в тепло) пренебрежимо мал по сравнению с вкладом, например, фононов; настолько мал, что не следует его учитывать при вычислении теплоемкости тела. Но только фотоны могут унести энергию тела, если оно находится в пустоте. Именно излучение фотонов определяет здесь поток тепла. Количество излученного из тела тепла очень резко зависит от температуры:

$$q_x = \sigma T^4,$$

где σ – постоянная Стефана – Больцмана, коэффициент, носящий имя двух физиков, сформулировавщих закон излучения (Йозеф Стефан, 1835 – 1893; Людвиг Больцман, 1844 – 1906; первый – экспериментатор, второй – теоретик). Ее значение порядка $6 \cdot 10^{-8}$ Вт$/\left(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4\right)$. Смысл этой величины выяснил Макс Планк (ему принадлежит введение постоянной $\hbar = 1{,}1 \cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с, знаменующее начало квантовой революции). Согласно Планку,

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2(2\pi\hbar)^3},$$

где c – скорость света.[3] Конечно, раздумывая об остывающей пластине, я знал формулу Планка. Одно из обстоятельств, которое привело меня, в конечном итоге, к желанию написать эту статью, «пересечение» квантового и классического подходов. Уравнение теплопроводности может быть выведено без привлечения квантовой механики и в него входят величины, имеющие прозрачный классический (неквантовый) смысл, а граничное условие – в случае остывания в пустоте – нельзя сформулировать, не привлекая кван-

[3] *Строго говоря, коэффициент σ описывает излучение абсолютно черного тела, хорошей моделью которого являеется небольшое отверстие, связывающее полость в теле с внешним миром. Отверстие все поглощает, ничего не отражая. Это – определяющее свойство абсолютно черного тела. Для реальных тел в коэффициент σ надо ввести множитель, который называют коэффициентом серости. При уровне точности наших оценок его можно не учитывать. В наше время термин «коэффициент серости» часто использовался для шуток, не всегда безобидных.*

товой механики. Обратите внимание: если устремить постоянную Планка $\hbar$ к нулю (так обычно совершают переход от квантовых формул к классическим), то постоянная Стефана – Больцмана обратится в бесконечность. Мне показалось интересным рассказать, как переплетаются классические и квантовые формулы.

* * *

Даже если пластину заменить бесконечно протяженным слоем толщиной $2d$, точно решить задачу непросто. Но многое можно выяснить рассуждая, а не решая.

Начнем с очень тонкой пластины, такой тонкой, что можно считать температуру в слое не зависящей от координаты x. Охлаждение пластины происходит, как мы сказали, из-за излучения. Тогда

$$Cd\frac{\Delta T}{\Delta t} = -\sigma T^4, \text{ причем при } t = 0$$

$$T = T_0.$$

Нетрудно убедиться (тому, кто умеет интегрировать и дифференцировать), что решение этого уравнения таково:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt[3]{1 + t/t_0}}, \text{ где } t_0 = \frac{Cd}{3\sigma T_0^3}.$$

Согласно последней формуле, пластина будет остывать бесконечно долго: только при $t \to \infty$ температура T обратится в ноль. Но, наверное, никто не удивится, если за время охлаждения $t_{охл}$ принять величину t_0. Так как известен весь режим охлаждения, то можно уточнить время охлаждения, задав вопрос, например, так: за какое время температура пластины изменится вдвое? По формуле имеем

$$t_{охл} = 7t_0$$

($t_{охл}$ в семь раз больше, чем t_0 (!) – надо быть осторожным, делая оценки).

В толстой пластине охлаждение ограничено не столько излучением, сколько теплопроводностью: тепло должно «добраться» до границы, чтобы излучиться. Поэтому $t_{охл} \sim Cd^2/$ (см. формулу (4)).

Конечно, необходимо уточнить слова «тонкая» и «толстая» пластинка (физика требует более строгого словоупотребления, чем обычная бытовая речь). Грубую оценку характерной величины $d_{хар}$, с которой надо сравнивать толщину пластины d, можно сделать, приравняв $t_{охл}$ в двух предельных случаях:

$$d_{хар} \sim \frac{}{\sigma T_0^3}.$$

Таким образом,

$$t_{охл} \sim \begin{cases} \dfrac{Cd}{3\sigma T_0^3}, & \text{если } d \ll d_{хар}, \\ \dfrac{Cd^2}{}, & \text{если } d \gg d_{хар}. \end{cases}$$

Как мы видели, коэффициент теплопроводности   содержит множителем длину пробега фононов l, т.е.

$$d_{хар} \sim lA,$$

где A – безразмерный множитель, равный $C\bar{u}/(\sigma T_0^3)$. Нетрудно убедиться, что A всегда значительно превосходит единицу, поэтому характерная толщина пластины $d_{хар}$ во много раз превышает длину пробега l. Это – довольно важное замечание, так как надо было убедиться в том, что мы не вышли за пределы макроскопической физики.

Если бы мы решали прикладную задачу, то все величины, которыми оперировали, мы взяли бы из справочника для того материала, из которого сделана пластина (скажем, деталь телескопа «Хаббл») и, точно решив уравнение теплопроводности, нашли бы температурный режим изделия. Скорее всего, пришлось бы учесть освещение пластины лучами Солнца, падение на пластину микрочастиц (при столкновении выделяется тепло) и т.п. Такие расчеты не входят в нашу задачу. Отметим только, что множитель A при $T_0 \to 0$ не стремится к бесконечности. Дело в том, что при низких температурах теплоемкость C пропорциональна T_0^3 и температура вовсе выпадает из ответа.

* * *

Если у читателя эта статья пробудит или укрепит интерес к физике, объясняющей бесконечное число явлений, с которыми нас сталкивает жизнь, автор будет вполне удовлетворен.

Покрытия полосками

М.СМУРОВ, А.СПИВАК

Полоса – часть плоскости, заключенная между двумя параллельными прямыми.

НА МОСКОВСКОЙ олимпиаде 1997 года одиннадцатиклассники решали задачу, вошедшую в «Задачник «Кванта»:

М1600. *На плоскости даны: конечное число полос, сумма ширин которых равна 100, и круг радиусом 1. Докажите, что каждую из полос можно параллельно перенести так, чтобы все они вместе покрыли круг.*

С ней справился только один из 410 участвовавших в олимпиаде одиннадцатиклассников. Между тем при обсуждении варианта многие члены жюри, даже не желая слушать условие до конца, заявляли, что задача им известна. Они путали М1600 со знаменитой задачей, о которой будет рассказано во второй части статьи.

Число 100 играло в условии роль «большого числа». Мы докажем, что достаточно меньшей суммарной ширины полос, равной $\pi + 2$.

В то же время, 100 нельзя заменить ни на какое число, меньшее π. Чтобы доказать это, впишем в круг с радиусом 1 правильный $2n$-угольник. Через концы каждой его стороны проведем перпендикулярные ей прямые (рис. 1). Получим n полос. Сумма их ширин равна половине периметра $2n$-угольника. Она стремится к π при возрастании n. Во второй части статьи мы докажем, что если сузить полосы (т.е. уменьшить их ширины), то никакими их сдвигами рассматриваемый $2n$-угольник не покроешь.

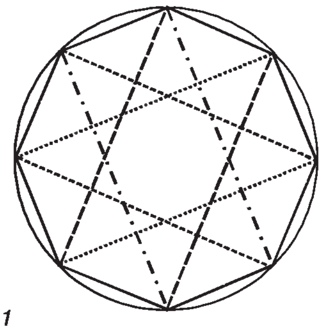


Рис. 1

Впрочем, основное содержание статьи — рассказ о некоторых трудных и интересных проблемах комбинаторной геометрии. Их формулировки привлекательны и просты. Но на многие вопросы еще нет ответа.

Что такое ширина?

Ширина по направлению

Начнем с простой ситуации. Пусть даны фигура F и одна полоса (рис.2). Можно ли полосу параллельно перенести («сдвинуть») так, чтобы накрыть F?

Разумеется, некоторые фигуры (например, угол) вообще не помещаются ни в какую полосу. Поэтому дальше будем предполагать, что фигура F является ограниченной, т.е. содержится в некотором круге. Для таких

Иллюстрация М.Константиновой

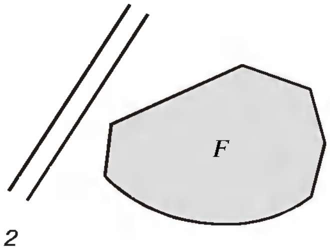


Рис. 2

фигур ответ определяется тем, что больше – ширина полосы *или ширина фигуры в соответствующем направлении*, т.е. ширина самой узкой полосы, в которой содержится F и края которой параллельны заданному направлению.

Чтобы получить такую полосу, можно взять сначала полосу соответствующего направления, достаточно широкую для того, чтобы в ней содержалась фигура F (на рисунке 3 такая полоса ограничена прямыми m и n). Затем края полосы надо двигать друг к другу до тех пор, пока они не упрутся в F. На рисунке 3 эти прямые – a и b. Они называются *опорными прямыми* фигуры F.

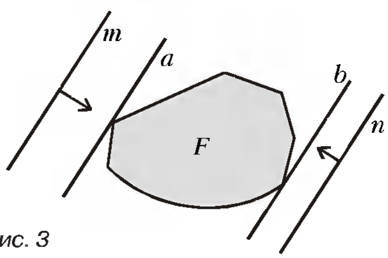


Рис. 3

Каждому направлению соответствует своя пара опорных прямых. Как уже было сказано, расстояние между ними, т.е. ширина получившейся полосы, называется шириной фигуры F в соответствующем направлении. Например, если F – квадрат со стороной 1, то ширина, в зависимости от направления, меняется от 1 до $\sqrt{2}$.

Если F – треугольник, то ширина меняется от минимальной, равной наименьшей из высот треугольника, до максимальной, равной наибольшей его стороне.

Доказать последнее утверждение о максимальной ширине совсем просто: с одной стороны, расстояние между опорными прямыми, перпендикулярными стороне треугольника, не может быть меньше длины этой стороны. С другой стороны, расстояние между параллельными опорными прямыми треугольника не превосходит длины стороны, концы которой лежат на этих прямых (например, ширина горизонтальной полосы рисунка 4 не превосходит AB).

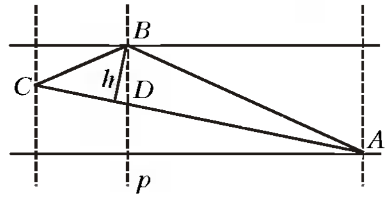


Рис. 4

Упражнение 1. *Докажите, используя рисунок 4, что ширина треугольника по любому направлению не меньше минимальной из высот треугольника.*

Упражнение 2. *Какой должна быть ширина полосы бумаги, чтобы из нее можно было вырезать треугольник со сторонами 15 см, 20 см и 25 см?*

Фигуры постоянной ширины

Ширина круга во всех направлениях одинакова и равна диаметру круга. Хотя это и не связано прямо с темой статьи, отметим, что существуют отличные от круга выпуклые фигуры постоянной ширины.

Пример – *треугольник Рело*. Он получается, если нарисовать правильный треугольник ABC и дуги с центрами A, B, C (рис. 5). Есть и другие примеры. Так, вместо правильного треугольника можно было взять правильный пятиугольник (или даже

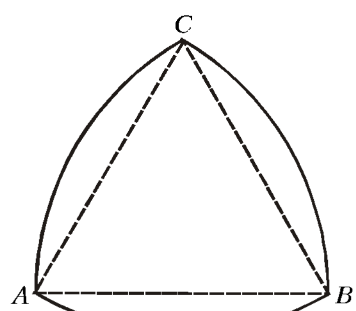


Рис. 5

выпуклый пятиугольник, все диагонали которого одной длины).

Определения

Если ширина фигуры зависит от направления, то естественно рассмотреть наименьшую и наибольшую из ширин. (В *Приложении* будет объяснено, почему эти величины действительно существуют. Пока лучше на это не отвлекаться.)

Определение 1. *Шириной* фигуры называется наименьшая из ее ширин по направлениям, т.е. ширина самой узкой полосы, которой можно покрыть эту фигуру (или, что то же самое, ширина наименьшей полосы, из которой фигуру можно вырезать).

Определение 2. *Диаметром* замкнутой [1] ограниченной фигуры называется наибольшее из расстояний между ее точками.

Упражнение 3. *Найдите диаметр а) треугольника, б) прямоугольника, в) полукруга.*

Упражнение 4. *Для каких треугольников диаметр совпадает с диаметром описанной окружности?*

Упражнение 5. *Докажите, что а) ширина прямоугольника равна его наименьшей стороне; б) ширина параллелограмма равна его наименьшей высоте.*

Упражнение 6. *Докажите, что ширину выпуклого многоугольника можно найти следующим образом: сначала для каждой стороны найти расстояние до наиболее удаленной от нее вершины, а затем из этих расстояний выбрать наименьшее.*

Упражнение 7. *Докажите, что диаметр фигуры совпадает с максимальной из ее ширин по направлениям.*

Упражнение 8. *а) Может ли опорная прямая не иметь с ограниченной фигурой ни одной общей точки? б) Может ли опорная прямая неограниченной замкнутой фигуры не иметь с фигурой ни одной общей точки?*

* * *

Подведем итог в задаче о покрытии фигуры одной полосой: если о направлении полосы ничего не известно, то для того, чтобы ее параллельным сдвигом можно было покрыть фигуру, достаточно потребовать, чтобы ширина полосы была не меньше диаметра фигуры.

Покрытия квадрата двумя полосами обсуждены в разделе «Гипотеза о покрытиях». Покрытия тремя и более полосами примененным там методом не изучишь. Сейчас перейдем к задаче, в условии которой нет слов «полоса» и «ширина». Но именно ширина – ключ к решению.

Разделяющая прямая

Правильные треугольники

Задача 1. *Если в правильном треугольнике со стороной 1 расположены не налегающие друг на друга правильные треугольники со сторонами a и b, то $a + b \le 1$ (рис. 6).*

Решение. Как бы ни были располо-

[1] *Замкнутой называется фигура, которая содержит все точки своей границы.*

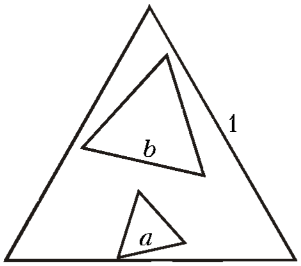


Рис. 6

жены не пересекающие друг друга треугольники, можно провести такую прямую l (рис. 7), что один треугольник окажется по одну сторону от l, а другой – по другую сторону (существование разделяющей прямой l доказано в *Приложении*).

Прямая l разобьет треугольник ABC на две части – треугольник и четырехугольник (который выродится в треугольник, если l пройдет через вершину ΔABC). Пусть, для определенности, $AD \geq BE$.

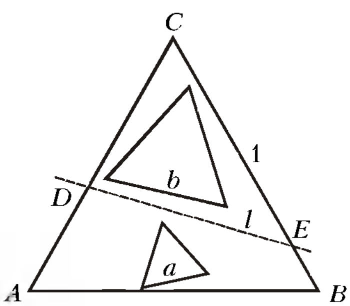


Рис. 7

Проведем через точку D прямые параллельно сторонам AB и BC треугольника ABC. Получим две полосы (рис. 8), одна из которых содержит четырехугольник $ABED$, а другая – треугольник CDE.

Поскольку четырехугольник $ACED$ расположен в полосе шириной $AD\sqrt{3}/2$, для щирины $a\sqrt{3}/2$ правильного треугольника со стороной a выполняется неравенство $a\frac{\sqrt{3}}{2} \leq AD\frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $a \leq AD$. Аналогично, правильный треугольник со стороной b лежит в полосе шириной $DB\sqrt{3}/2$. Значит, $b\frac{\sqrt{3}}{2} \leq DB\frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $b \leq DB$.

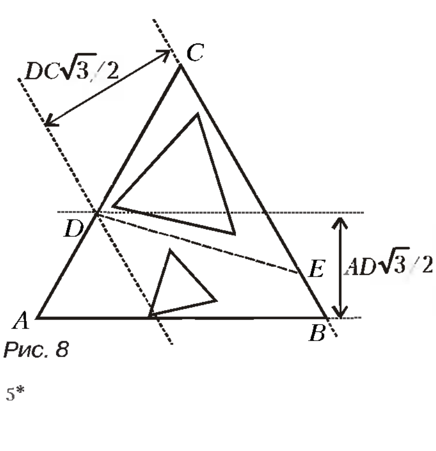


Рис. 8

Итак, $a \leq AD$, $b \leq DC$, откуда $a + b \leq AD + DC = AC$.

Упражнение 9. *Дан треугольник, величина одного из углов которого равна 60°. Разместите в нем равносторонний треугольник наибольшей возможной площади.*

Замечания. В решении задачи 1 использовано очевидное (и важное!) свойство: если некоторая фигура A является подмножеством фигуры B, то ширина A не может быть больше ширины B.

Между прочим, ширина фигуры может совпадать с шириной ее собственной части. Иными словами, от некоторых фигур можно отрезать кусочек, не уменьшив при этом их ширину. Например, ширина прямоугольника $a \times b$, где $a < b$, равна a. Такова же ширина содержащегося в нем квадрата со стороной a. (Ширина вписанного в этот квадрат круга тоже равна a.)

Ширины треугольника CDE и четырехугольника $ABED$ равны ширинам полос рисунка 8 (в решении задачи 1 мы использовали только то, что они не превосходят ширин этих полос). Следовательно, как ни режь правильный треугольник произвольной прямой на две части, сумма ширин частей будет равна ширине треугольника.

Упражнение 10. *Если треугольник не равносторонний, то его можно разрезать прямой на две части, сумма ширин которых больше ширины исходного треугольника.*

Упражнение 11. *Из любого ли неравнобедренного треугольника можно вырезать равнобедренный треугольник той же ширины, что и исходный треугольник?*

Упражнение 12. *а) Если круг разрезан прямой на две части, то сумма ширин этих частей равна ширине (диаметру) круга. б) Сумма диаметров любых двух кругов, расположенных без пересечения в некотором круге, не превосходит его диаметра.*

Упражнение 13. *Квадрат разрезан на две части прямой, не параллельной его сторонам. Докажите, что сумма ширин частей больше ширины (стороны) квадрата.*

Квадраты

Задача 2. *Внутри квадрата разместили два непересекающихся квадрата (рис.9). Докажите, что сумма их сторон не превосходит стороны квадрата.*

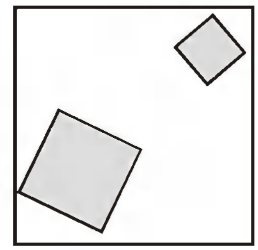


Рис. 9

Решение. Проведем разделяющую прямую. Она разрежет квадрат на треугольник и пятиугольник (рис. 10) или на две трапеции (рис. 11)[2]. Достроим эти фигуры до прямоугольных треугольников и поставим задачу:

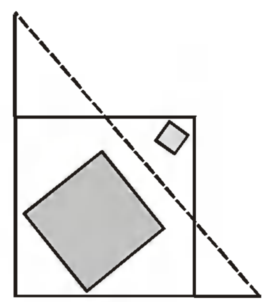


Рис. 10

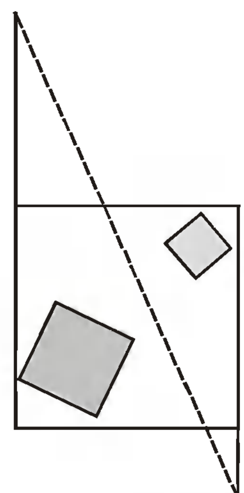


Рис. 11

Задача 3. *В данный прямоугольный треугольник вписать квадрат с наибольшей возможной стороной.*

Решение задачи 3. Интуитивно ясно[3], что все вершины наибольшего квадрата должны лежать на сторонах треугольника. Таким образом, надо рассмотреть два случая: 1) квадрат

[2] *Возможны еще случаи, когда разделяющая прямая проходит через вершину квадрата. Разберите их самостоятельно.*

[3] *На самом деле это — тема для отдельной заметки, которая будет опубликована позже.*

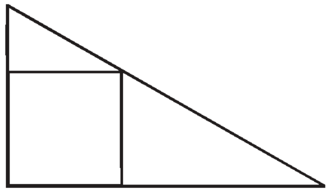


Рис. 12

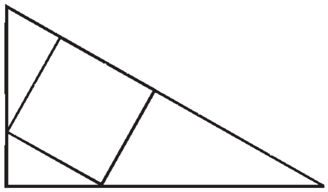


Рис. 13

упирается одним углом в прямой угол треугольника, а противоположным – в гипотенузу (рис. 12); 2) две вершины квадрата лежат на гипотенузе, а две другие – на катетах (рис. 13).

Упражнение 14. *а) Выразите длину стороны квадрата рисунка 12 через катеты a и b рассматриваемого прямоугольного треугольника.*

б) Выразите длину стороны квадрата рисунка 13 через гипотенузу c и опущенную на нее высоту h.

в) Сравните значения выражений – ответов пунктов а) и б).

Из последнего упражнения получаем ответ задачи 3: наибольший квадрат, вписанный в данный прямоугольный треугольник, изображен на рисунке 12 (одна из диагоналей этого квадрата – биссектриса прямого угла треугольника). Теперь в задаче 2 все ясно: сумма сторон квадратиков достигает наибольшего значения, когда их диагонали составляют диагональ квадрата (рис. 14).

Упражнение 15*. *Докажите, что если внутри правильного 2n-угольника лежат два правильных не налегающих друг на друга 2n-угольника, то сумма периметров последних не превосходит периметра объемлющего многоугольника.*

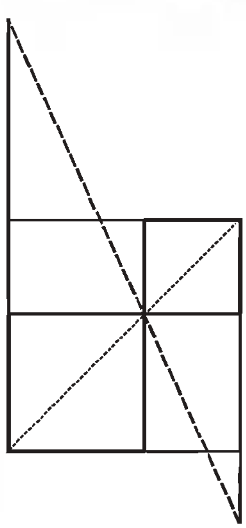


Рис. 14

Замечание. Доказывать аналогичное утверждение для правильных многоугольников с нечетным числом сторон мы не умеем.

Упражнение 16* (М935). *Если внутри правильного 2n-угольника со стороной a и центром O поместить правильный 2n-угольник, сторона которого больше a/2, то он накроет точку O.*

Указание. Если выпуклый многоугольник не содержит точку O, то найдется такая его сторона AB, что точка O и многоугольник лежат по разные стороны от AB. Примените центральную симметрию и результат предыдущего упражнения.

Гипотеза Эрдёша

До сих пор не решена поставленная более 50 лет назад венгерским математиком Эрдёшем задача: доказать, что для любой расположенной в единичном квадрате системы не налегающих друг на друга k^2+1 квадратиков сумма их периметров не превосходит $4k$, т.е. суммы периметров k^2 одинаковых квадратиков со стороной $1/k$, на которые можно разбить единичный квадрат.

Например, при $k=3$ гипотеза Эрдёша состоит в том, что расположение 10 квадратиков рисунка 15 дает

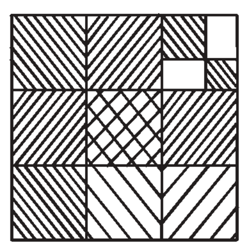


Рис. 15

наибольшую возможную сумму периметров.

Упражнение 17. *Как связана задача 2 с гипотезой Эрдёша?*

Решение задачи М1600

Наивная попытка решения М1600 могла бы состоять в следующем: сумма ширин полос настолько велика, что можно вырезать из каждой полосы по квадрату и потом покрывать такими квадратами единичный круг.

К сожалению, если полосы очень узкие, например, если дана система 1000000 полос с одинаковой шириной $1/10000$, то сумма площадей квадратиков равна

$$1000000\times(1/10000)^2=0{,}01,$$

что гораздо меньше площади единичного круга.

К дню олимпиады мы знали довольно длинное решение. Потом было придумано короткое решение, дающее более точную оценку, так что можете сразу переходить к следующему подразделу.

«Длинное» решение

Каждой полосе сопоставим перпендикулярный вектор (рис. 16), длина которого равна ширине этой полосы (какое именно из двух возможных направлений придать такому вектору, пока не существенно – следующий абзац все прояснит). Отложим векторы от одной и той же точки O (рис. 17).

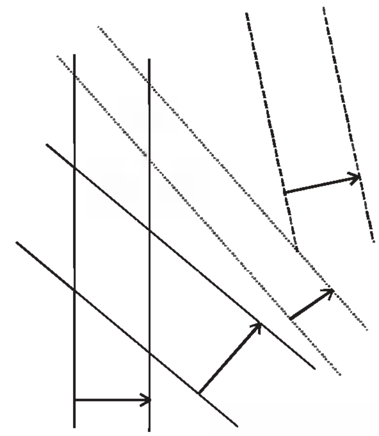


Рис. 16

Рис. 17

Разобьем плоскость на 12 углов величиной 30° с вершиной O. Объединим каждый из этих углов в пару с вертикальным ему углом. Для каждой из полученных 6 пар вертикальных углов подсчитаем сумму длин векторов, лежащих внутри или на границе этих углов. Хотя бы одна из сумм не меньше 100/6 – в противном случае сумма длин всех векторов была бы меньше 100.

Выберем такую пару вертикальных углов. Заменив, если потребуется, некоторые векторы на противоположные, добьемся, чтобы все они попали в один и тот же угол величиной 30°.

Теперь упорядочим векторы по направлению и, прикладывая начало каждого следующего вектора к концу предыдущего, составим из попавших в угол векторов

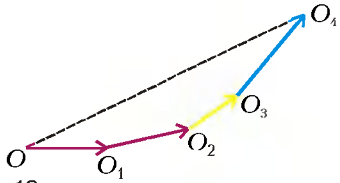


Рис. 18

выпуклую ломаную $OO_1O_2\ldots O_n$ (рис. 18). Длина ее, как уже было сказано, не меньше 100/6.

Поскольку направления всех векторов $\overrightarrow{OO_1}$, $\overrightarrow{O_1O_2}$, ..., $\overrightarrow{O_{n-1}O_n}$ заключены между направлениями векторов $\overrightarrow{OO_1}$ и $\overrightarrow{O_{n-1}O_n}$, направление суммы $\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \ldots + \overrightarrow{O_{n-1}O_n} = \overrightarrow{OO_n}$ тоже заключено между этими направлениями. Следовательно, $\overrightarrow{OO_1}$, $\overrightarrow{O_1O_2}$, ..., $\overrightarrow{O_{n-1}O_n}$ наклонены к вектору $\overrightarrow{OO_n}$ под углами, не превосходящими 30°. Поэтому длина OO_n не меньше $(100/6)\cdot\cos 30° = 25/\sqrt{3}$.

Перенесем полосы параллельно так, чтобы концы отрезков $[OO_1]$, $[O_1O_2]$, ..., $[O_{n-1}O_n]$ лежали бы на краях перпендикулярных им полос (рис. 19). Обозначим через M пересечение перпендикуляров к отрезкам $[OO_1]$ и $[O_{n-1}O_n]$,

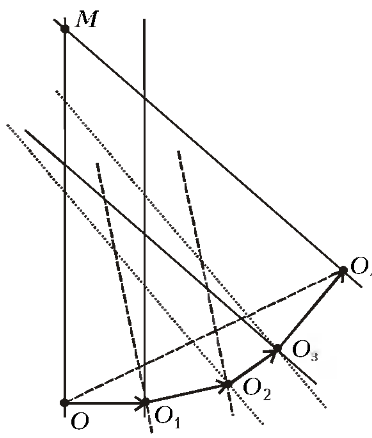


Рис. 19

восставленных в точках O и O_n соответственно.

Индукцией по числу полос легко доказать, что многоугольник $MOO_1O_2\ldots O_n$ полностью покрыт полосами. Поскольку величины углов MOO_n и MO_nO не меньше 90° − 30° = 60°, в треугольнике MOO_n содержится правильный треугольник со стороной OO_n, в который, в свою очередь, вписан круг радиусом $OO_n/(2\sqrt{3}) = (25/\sqrt{3})/(2\sqrt{3}) = \frac{25}{6} > 1$.

Замечание. Жюри не догадалось использовать индукцию для доказательства того, что многоугольник $MOO_1O_2\ldots O_n$ покрыт полосами. Предполагалось следующее рассуждение.

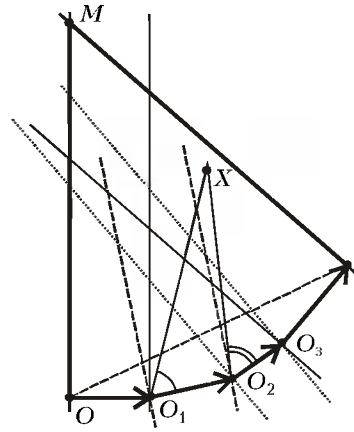


Рис. 20

Рассмотрим любую точку X многоугольника $MOO_1O_2\ldots O_n$. Если перпендикулярная отрезку $[OO_1]$ полоса не покрывает точку X, то угол XO_1O_2 острый (рис. 20). Если точку X не покрывает и полоса, перпендикулярная отрезку $[O_1O_2]$, то угол XO_2O_3 острый. Продолжая в том же духе, мы поймем, что если точка X не покрыта ни одной из первых $n-1$ полос, то все углы XO_1O_2, XO_2O_3, ..., $XO_{n-1}O_n$ острые. Но тогда точка X как раз покрыта полосой, перпендикулярной отрезку $O_{n-1}O_n$!

Упражнение 18. *Из точки, расположенной внутри выпуклого многоугольника, опустили перпендикуляры на стороны или их продолжения. Докажите, что хотя бы один из перпендикуляров попал именно на сторону, а не на ее продолжение. (Другими словами, полосы, построенные перпендикулярно сторонам выпуклого многоугольника, покрывают его.)*

Указание. Физик сделал бы из данного многоугольника колесо, поместив в интересующую его точку грузик, и позволил бы колесу перекатываться (рис. 21).

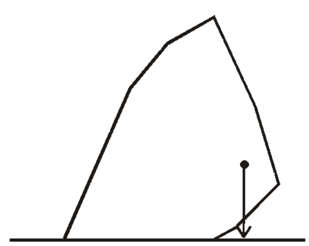


Рис. 21

Математик сделает по сути то же самое, если рассмотрит кратчайшее из расстояний от данной точки до прямых, на которых лежат стороны данного многоугольника.

Упражнение 19. *Дан выпуклый многогранник и точка внутри него. Докажите, что хотя бы один из перпендикуляров, опущенных из этой точки на плоскости граней, пересекается с соответствующей гранью, а не только с ее плоскостью.*

Замечание. Если вам все еще кажется, что утверждение задачи М1600 тривиально для «очень большой» суммарной ширины полос, обдумайте стереометрический вариант:

В пространстве даны: шар радиуса 1 и несколько «слоев»[4], сумма толщин которых равна 1000000. При любом ли расположении слоев можно каждый из них параллельно перенести так, чтобы они покрыли шар?

Эта задача – нерешенная проблема, даже если вместо 1000000 написать сколь угодно большое число.

Более точная оценка

После олимпиады было придумано простое решение задачи М1600. Позже выяснилось, что такое же решение опубликовал в 1984 году американский математик Грёмер.

Рассмотрим систему полос и выпуклую фигуру F, граница которой состоит из кривой AB и отрезков BO, OA. На рисунке 22 полоса p параллельна лучу OB, пересечение полосы q с углом AOB неограниченно, а полосы r – ограничено.

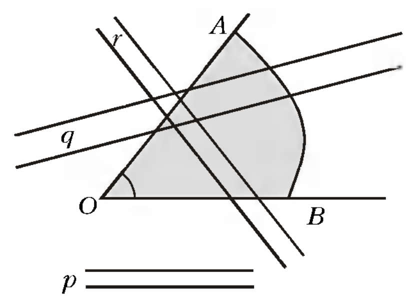


Рис. 22

Пусть в данной системе полос нет полос типа r. Другими словами, проведя через вершину O угла прямые параллельно границам полос, потребуем, чтобы все проведенные прямые имели по лучу внутри или на границе угла AOB. Докажем, что *если сумма ширин полос больше длины кривой AB, то F можно покрыть сдвигами этих полос.*

Для этого упорядочим направления полос по часовой стрелке и возьмем крайнее из них. Перенесем соответствующую полосу так, чтобы одна из ограничивающих ее прямых

[4] Слоем мы называем здесь часть пространства, заключенную между двумя параллельными плоскостями.

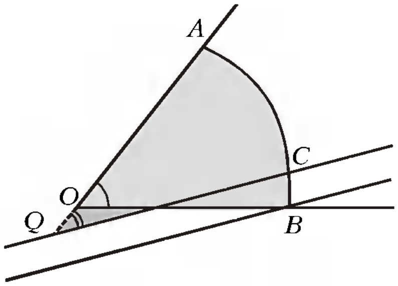


Рис. 23

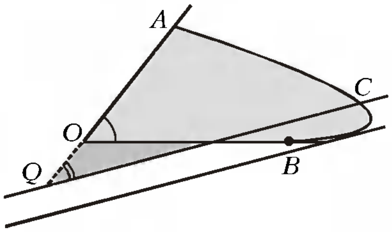


Рис. 24

стала опорной прямой фигуры F (рис. 23, 24). Поскольку от кривой AB будет отрезан кусочек не меньший, чем ширина полосы, то задача будет сведена к покрытию оставшимися полосами фигуры, ограниченной отрезками AQ, QC и кривой CA.

Решение задачи М1600 теперь очевидно (рис. 25): верхняя полуокружность и два вертикальных отрезка образуют кривую длиной $\pi+2$. Круг радиуса 1 заключен между этой кривой и горизонтальной прямой, которую мы представим как две стороны развернутого угла с вершиной O.

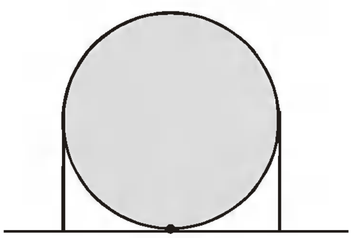


Рис. 25

Гипотеза о покрытиях

Итак, число 100 в формулировке М1600 можно заменить на $2+\pi$. Было бы интересно выяснить, можно ли заменить его на число π. Еще интереснее узнать, верна ли следующая гипотеза.

Гипотеза. *Любую выпуклую фигуру с периметром P можно покрыть параллельными сдвигами любых полос, сумма ширин которых равна половине периметра фигуры.*

Рассмотрим два частных случая: квадрат и шестиугольник.

Покрытия квадрата двумя полосами

Квадрат со стороной 1 невозможно покрыть вертикальной и горизонтальной полосами, ширины которых меньше 1 (рис.26).

Задача 4. *Если сумма ширин двух полос равна 2, то любой квадрат со стороной 1 можно покрыть параллельными сдвигами этих полос.*

Решение. Обозначим большую из ширин полос буквой w. Очевидно, $w \geq 1$ – в противном случае сумма ширин рассматриваемых полос была бы меньше 2. Перенесем эту полосу так, чтобы один из ее краев стал опорной прямой квадрата (рис. 27).

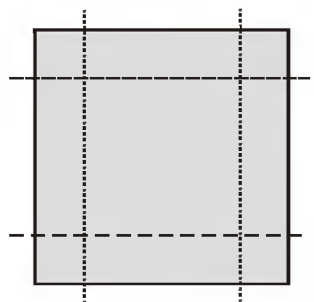


Рис. 26

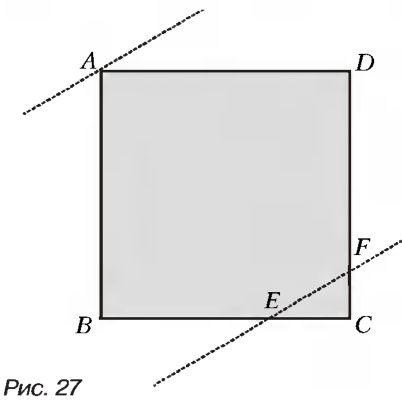


Рис. 27

Докажем, что треугольник EFC можно покрыть второй полосой, т.е. что ширина этого треугольника не превосходит ширины полосы:

$$EF \leq 2 - w. \qquad (*)$$

Рассмотрим EF как функцию от w. Легко понять, что эта функция линейная: $EF = kw + b$ при некоторых не зависящих от w величинах k и b.

Значит, неравенство (*) достаточно проверить в крайних точках. При $w = 1$ рассмотрим окружность радиусом 1 с центром A (рис. 28). По равенству отрезков касательных, $BE = EK$. $KF = FD$. Следовательно,

$$2EF < (EK + KF) + (EC + CF) =$$
$$= BE + DF + EC + CF = 2,$$

откуда $EF < 1$.

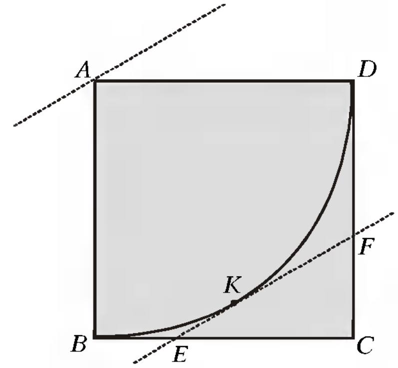


Рис. 28

В другом крайнем случае, когда первая полоса проходит через точку C и целиком покрывает квадрат, $EF = 0$ и неравенство (*) верно.

Покрытие шестиугольника

Полосы рисунка 29 не покрывают шестиугольник. Тем не менее, его можно покрыть их сдвигами (рис.30). Вообще, пусть $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ – выпуклый центрально-симметричный шестиугольник.

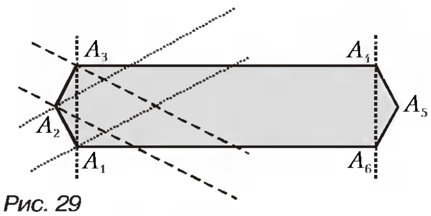


Рис. 29

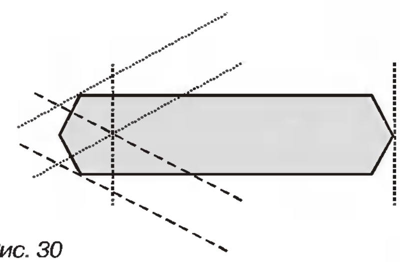


Рис. 30

Оказывается, чтобы покрыть его полосами, образованными перпендикулярами к сторонам A_1A_2, A_2A_3 и A_3A_4, достаточно эти полосы приложить не к «своим» вершинам, а к вершинам A_3, A_1 и A_5 соответственно.

Упражнение 20. Докажите это.

Замечание. Было бы интересно узнать ответ на следующий частный случай гипотезы: *если через концы каждой стороны выпуклого центрально-симметричного многоугольника S проведем перпендикулярные этой стороне прямые и из каждых двух образовавшихся полос одного направления оставим только одну, то всегда ли S можно покрыть сдвигами полученных полос?*

(Продолжение следует)

Макс Планк — основатель квантовой физики

А.ВАСИЛЬЕВ

ЖУРНАЛ, который вы сейчас держите в руках, обязан своим названием немецкому физику Максу Планку (1858 – 1947). Понятие «квант» он ввел в 1900 году, определив тем самым XX век как век квантовой физики.

Квантовая теория возникла в связи с непреодолимыми трудностями, которые испытывала классическая теория при попытке объяснить экспериментально полученные закономерности теплового излучения твердого тела. Краткая история этого величайшего открытия в истории естествознания такова.

Еще в середине XIX века Г.Кирхгоф (1824 – 1887) установил один из основных законов теплового излучения, носящий теперь его имя. Согласно этому закону, отношение излучательной способности ε какого-то тела к его поглощательной способности α не зависит от природы тела и является одинаковой для всех тел функцией частоты ν и температуры T, равной излучательной способности ε_0 абсолютно черного тела:

$$\frac{\varepsilon(\nu,T)}{\alpha(\nu,T)}=\varepsilon_0(\nu,T).$$

Абсолютно черное тело, по определению, это тело, которое поглощает все падающее на него излучение и ничего не отражает. Таких тел в природе не существует, однако хорошим приближением является замкнутая непрозрачная полость с небольшим отверстием. Поскольку вероятность того, что попавшее в отверстие излучение в результате многочисленных отражений выйдет наружу, очень мала, оно практически полностью поглощается. Излучение, возникшее в полости и выходящее из отверстия, считается эквивалентным излучению, испускаемому площадкой размером с отверстие на поверхности черного тела.

Следующим этапом в исследовании теплового излучения было открытие закона Стефана – Больцмана. Л.Больцман (1844 – 1906) в 1884 году на основании теории заключил, что полная объемная плотность излучения (т.е. излучения всех частот) черного тела u пропорциональна четвертой степени температуры T: $u=\sigma T^4$. Поскольку этот закон обосновывает и уточняет результат, полученный экспериментально еще в 1879 году Й.Стефаном (1835 – 1893), он носит имя Стефана – Больцмана; так же называется и постоянная $\sigma=5{,}67\cdot10^{-8}\ \text{Вт}/\left(\text{м}^2\cdot\text{К}^4\right)$. Хотя этот закон и определяет полную энергию спектра, вопрос о распределении энергии в спектре излучения (по частотам) он не рассматривает.

Макс Планк

Первый ответ на этот вопрос дал В.Вин (1864 – 1928), который в 1893 году установил, что максимум излучения в спектре абсолютно черного тела с увеличением температуры смещается в сторону бо́льших частот. В 1896 году Вин из классических соображений получил закон распределения энергии в спектре в явном виде. Оказалось, однако, что этот закон достаточно хорошо описывает излучение черного тела лишь на высоких частотах и расходится с экспериментом на низких.

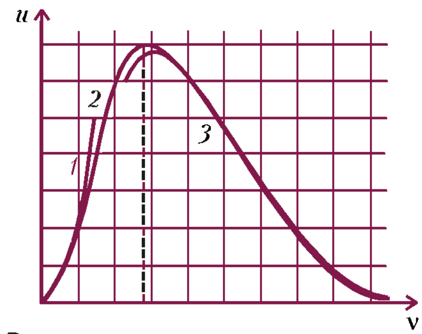
Попытку преодолеть это расхождение независимо друг от друга предприняли в 1900 году Д.Рэлей (Стретт) (1842 – 1919) и в 1905 году Д.Джинс (1877 – 1946). Исходя из классических представлений о равномерном распределении энергии по степеням свободы, они получили формулу распределения энергия излучения в спектре в зависимости от температуры. Эта формула, однако, хорошо согласовывалась с экспериментом лишь на низких частотах. С ростом частоты энергия излучения, согласно формуле Рэлея – Джинса, должна была бы неограниченно расти, достигая огромных значений в ультрафиолетовой области, что противоречило опыту. Этот явно парадоксальный вывод теории даже получил специальное название: «ультрафиолетовая катастрофа».

Такой воистину катастрофической была ситуация, когда Планк занялся теорией излучения. Первоначально он опирался на законы Кирхгофа и Вина, пытаясь связать теорию теплоты с электромагнитной теорией Максвелла, но вскоре осознал, что на основе классической теории объяснить тепловое излучение абсолютно черного тела невозможно.

К своему открытию Планк пришел не сразу. Первый шаг был сделан 19 октября 1900 года. Когда на заседании Немецкого физического общества в Берлине экспериментаторы Ф.Курлбаум и Г.Рубенс докладывали результаты своих исследований по тепловому излучению, явно противоречившие формуле Вина, Планк (узнавший об этих результатах за несколько дней до заседания) в порядке дискуссии предложил эмпирическую формулу распределения энергии в спектре излучения, которая устраняла имеющиеся несоответствия. Экспериментаторы тщательно сверили новую формулу с данными своих измерений и получили разительное совпадение. Несмотря на несомненный успех, сам Планк рассматривал предложенную им формулу лишь как некоторое промежуточное выражение и задался целью дать формуле теоретическое обоснование, «отыскать ее подлинный физический смысл». В этом состоял его второй шаг.

Почти два месяца Планк пытался получить угаданную им формулу, оставаясь на позициях классической физи-

О М.Планке см. также 4-ю страницу обложки. (Прим. ред.)



Распределение энергии в спектре абсолютно черного тела: 1 – кривая, соответствующая формуле Рэлея—Джинса; 2 – графическое изображение формулы Планка; 3 – кривая, которую дает формула Вина

ки, но не достиг успеха. Тогда в поисках решения он пошел по пути Больцмана, использующего статистические методы для объяснения термодинамического равновесия. Больцман рассматривал любое состояние физической системы через вероятность этого состояния и видел содержание второго начала термодинамики в том, что при всяком изменении система переходит в более вероятное состояние.

Применяя метод Больцмана, Планк моделировал вещество набором резонаторов, испускающих и поглощающих излучение частоты ν. Основной и новый момент выдвинутой им гипотезы состоял в предположении, что каждый резонатор может обладать только таким количеством энергии, в котором содержится целое число элементарных порций энергии $E = h\nu$. Здесь $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная величина, которую Планк назвал «элементарным квантом действия», а сейчас ее называют постоянной Планка.[1] Разработка этой гипотезы привела Планка к формуле для энергии излучения абсолютно черного тела в виде

$$u(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Сущность «парадоксальной гипотезы» Планка заключалась в том, что испускание и поглощение электромагнитной энергии атомами и молекулами происходит не непрерывно, а дискретно – порциями, или «квантами», как несколько позже предложил называть их Планк. «Это было сделанное на уровне абстрактного мышления открытие дискретности там, – говорил позже Э.Шрёдингер, – где ее меньше всего ждали», т.е. в процессах обмена энергией. «Подобные счастливые догадки, – скажет потом Х.Лоренц, – есть удел тех, кто заслужил их тяжелой работой и глубокими размышлениями».

Свою «рабочую гипотезу» Планк изложил 14 декабря 1900 года на очередном заседании Немецкого физического общества. Хотя выведенная им формула включала в себя все частные законы излучения черного тела (при малых частотах она переходит в формулу Рэлея—Джинса, при больших частотах – в формулу Вина, а суммирование по всем частотам дает формулу Стефана – Больцмана) и прекрасно описывала эксперимент (см. рисунок), ни сам Планк, ни его слушатели не понимали всей грандиозности происходящего. Гениальная мысль, осенившая Планка, по-прежнему представлялась остроумной догадкой, позволявшей просто улучшить теорию одного из физических явлений.

Первым, кто принял гипотезу Планка о квантах всерьез, был А.Эйнштейн. Он быстро оценил всю глубину работы Планка и стал развивать ее в различных направлениях. В 1905 году Эйнштейн выдвинул удивительную по своей простоте теорию, согласно которой свет не только излучается и поглощается в виде квантов, но и состоит из дискетных порций – квантов света. Это была идея дискретности самого электромагнитного излучения, позволившая, в частности, объяснить явление фотоэффекта. В 1913 году идея Планка о квантах была применена Н.Бором для создания квантовой теории атома, согласно которой электроны в атоме могут находиться только на определенных энергетических уровнях, а их переход с одного уровня на другой сопровождается излучением квантов энергии.

Все дальнейшее развитие естествознания показало, что введенное Планком понятие о дискретности энергии электромагнитного излучения играет такую же фундаментальную роль в физике, как, например, представления об атомистическом строении вещества Демокрита.

В знак признания его заслуг в развитии физики благодаря «открытию кванта действия» Макс Планк был удостоен Нобелевской премии по физике за 1918 год.

[1] *В квантовой физике для удобства написания некоторых формул часто пользуются величиной* $\hbar = h/(2\pi) = 1{,}054 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, *которую также называют постоянной Планка.*

БЕЛОСНЕЖКА И СЕМЬ ГНОМОВ

(см. 2 с. обложки)

Эту головоломку точнее было бы назвать «Белоснежка и семь разных гномов», потому что задача заключается в том, чтобы на лицевой и оборотной сторонах головоломки Белоснежка очутилась в компании семи непохожих друг на друга существ из знаменитой сказки. Предупреждаем, что выполнить это условие даже на одной стороне головоломки – довольно трудная задача.

Зато головоломку легко сделать своими руками. Она состоит из четырех одинаковых по форме элементов, которые нужно соединить между собой в правильном порядке. Каждый элемент склеивается из пяти картонных или пластмассовых квадратиков одинакового размера. Квадратики накладываются друг на друга так, что образуется трехслойный элемент с пазами и выступами. При сборке выступы одного элемента вставляются в пазы другого. Все четыре элемента показаны на рисунках с лицевой и оборотной стороны. В низу страницы помещены картинки, которые вы можете вырезать и наклеить в нужных местах на квадратики. Размер квадратов лучше всего взять равным квадрату с изображением Белоснежки.

Игрушка придумана известным изобретателем головоломок Владимиром Красноуховым, а нарисовала этих симпатичных гномиков художник Ирина Явнель. «Белоснежка» имела большой успех на международном съезде знатоков головоломок в Сан-Франциско (США) в 1997 г. Но затем оказалось, что и после изучения специалистами головоломка сохранила в себе маленькую тайну: дело в том, что по замыслу изобретателя головоломка должна иметь только одно, единственное решение. Но недавно ученица 7-го класса из г.Климовска Маша Литвиненко нашла свое, совершенно оригинальное решение, удовлетворяющее условию задачи.

А.Калинин

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 1998 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4 — 98» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1646» или «Ф1653». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1646 и М1647 предлагались на зональном туре Российской математической олимпиады, М1648 а), М1649 и М1650 — на отборочном туре Московской математической олимпиады.

Задачи Ф1653 – Ф1657 предлагались на окружном туре Московской физической олимпиады.

Задачи М1646—М1650, Ф1653—Ф1657

М1646. У нескольких крестьян есть 128 овец. Если у кого-то из них оказывается не менее половины всех овец, остальные сговариваются и раскулачивают его: каждый берет себе столько овец, сколько у него уже есть. Если у двоих по 64 овцы, то раскулачивают кого-то одного из них. Произошло 7 раскулачиваний. Докажите, что в результате все овцы собрались у одного крестьянина.

А.Шаповалов

М1647. Докажите, что из любого конечного множества точек на плоскости можно так удалить одну точку, что оставшееся множество можно разбить на два множества, диаметры которых меньше диаметра первоначального множества. (Диаметр – это максимальное расстояние между точками множества.)

В.Дольников

М1648. Из центра правильного многоугольника, вписанного в единичную окружность, проведены некоторые векторы в вершины этого многоугольника. Может ли длина суммы этих векторов равняться а) 1998; б)* $\sqrt{1998}$?

В.Сендеров

М1649*. На конференцию приехали 300 участников. Каждый участник знает три языка из пяти, официально принятых на конференции. Докажите, что всех участников можно разбить на три группы по 100 человек так, чтобы для каждой группы нашелся язык, общий для всех ее членов.

А.Берзиньш

М1650*. На плоскости нарисован граф без циклов Г. Известно, что граф Г′, полученный из Г параллельным переносом на вектор (1, 0), не пересекается с Г. На графе Г отмечены две различные точки A и B, в которых в начальный момент времени сидели два жука. Ползая по графу, жуки через некоторое время снова оказались в точках A и B, но при этом поменялись местами. Докажите, что в некоторый момент времени расстояние между жуками было меньше 1.

А.Скопенков

Ф1653. С балкона бросают камешки через равные интервалы времени и без начальной скорости. К моменту, когда первый камешек упал на землю, следующий пролетел ровно половину пути. Какую часть пути пролетел к этому моменту третий камешек? Сколько камешков было в полете непосредственно перед ударом первого камешка о землю? Сопротивлением воздуха пренебречь. Считать ускорение свободного падения равным точно 10 м/с^2.

З.Рафаилов

Ф1654. Предлагается следующий проект движущегося тротуара: человек ступает с земли на первую движущуюся дорожку, через некоторое время переходит на следующую, у которой скорость больше, и так далее. Пусть первая дорожка едет с постоянной скоростью $v_1 = 2$ м/с, человек с неподвижной земли ступает на нее перпендикулярно вектору скорости и, перестав скользить, переходит дальше – опять перпендикулярно вектору скорости. Ожидаемая нагрузка на такую дорожку (число людей, ступающих на нее с земли) составляет $N = 10$ человек в секунду, масса человека в проекте принимается равной $M = 80$ кг. С какой минимальной силой нужно тянуть дорожку в горизонтальном направлении, чтобы ее скорость оставалась постоянной? С какой силой нужно действовать на вторую дорожку, если она движется со скоростью $v_2 = 3$ м/с? Считайте, что в среднем число людей на каждой из дорожек одинаково.

Р.Простов

Ф1655. Моль гелия в процессе расширения получает тепло, его теплоемкость при этом составляет $C = 15$ Дж/(моль · К). Найдите изменение температуры гелия в этом процессе при совершении им работы $A = 20$ Дж.

М.Учителев

Ф1656. В вершинах правильного треугольника со стороной a находятся три маленьких заряженных тела. Одно из них закреплено, два других – масса каждого из них M, заряд Q – свободны. Какой заряд нужно поместить на закрепленное тело, чтобы при отпускании двух других их ускорения оказались минимальными? Чему будет равна величина этого ускорения?

А.Зильберман

Ф1657. Два одинаковых громкоговорителя подключили параллельно к выходу генератора звуковых колебаний, а очень маленький микрофон расположили в отдалении. При неизменной температуре воздуха $T = 300$ К мы проводим эксперимент – изменяем частоту генератора и наблюдаем за показаниями чувствительного вольтметра, который измеряет выходной сигнал микрофона. На частоте $f_1 = 2400$ Гц получается максимум выходного сигнала микрофона, на частоте $f_2 = 2600$ Гц – минимум, а между этими частотами уровень сигнала от микрофона монотонно убывает. Что будет наблюдаться на частоте $f_3 = 400$ Гц? При какой температуре воздуха получился бы максимум на частоте f_2? Отражения звуковых волн от стен, пола и потолка не происходит.

Р.Александров

Решения задач М1621 — М1630, Ф1638 — Ф1642

М1621. *а) В треугольнике заданы две стороны a и b. Какой должна быть третья сторона c, чтобы точки касания ее со вписанной и вневписанной (касающейся третьей стороны и продолжений сторон a и b) окружностями делили сторону c на три равные части? б) Существует ли прямоугольный треугольник, удовлетворяющий условиям пункта а)?*

а) Пусть $D(E)$ – точка касания с отрезком AB вписанной (вневписанной) окружности; тогда $AD = BE$. Поэтому условие задачи можно переписать так: $\frac{a+c-b}{2} = \frac{c}{3}$ (случай $\frac{2c}{3}$ мы без ограничения общности отбрасываем). Получили $c = 3b - 3a$. Если $b \ge c$ (т.е. $3a \ge 2b$), то $b < a + c = 3b - 2a$, или $b > a$ – что выполнено. Если $c > b$ (т.е. $2b > 3a$), то $c < a + b$, или $2a > b$.

Пусть теперь $b > a \ge \frac{2}{3}b$. Тогда, взяв $c = 3b - 3a$, получаем: $b \ge c$, $b < a + c$ – значит, из отрезков a, b, c треугольник построить можно. Если же $\frac{2}{3}b > a > \frac{b}{2}$, то $b > a$, $c = 3b - 3a > b$, $c < a + b$.

Итак, при $b > a > \frac{b}{2}$ надо взять $c = 3b - 3a$.

б) Да. Попытаемся решить систему

$$\begin{cases} b = a + \dfrac{c}{3}, \\ b^2 = a^2 + c^2. \end{cases}$$

Получим $b = \frac{5}{4}a$, $c = \frac{3}{4}a$. Действительно, треугольник со сторонами 4, 5, 3 подходит. Возможен еще один такой треугольник, его стороны $(\sqrt{17}-1)/6$, $(\sqrt{17}+1)/6$, 1.

Н.Васильев, В.Сендеров

М1622. *Пусть K – множество натуральных чисел, представимых в виде суммы различных чисел вида $2^m - 1$ ($m = 1, 2, \ldots$): $K = \{1, 3, 4, 7, 8, 10, \ldots\}$. Рассмотрим отрезок натурального ряда от 1 до N. Каких чисел на этом отрезке больше – принадлежащих множеству K или остальных, если а) N = 1000; б) N – произвольное натуральное число?*

Докажем, что в любом отрезке $[1, k]$ K-чисел не меньше, чем остальных. Равенство достигается в точности тогда, когда $k = 2^n - 2$ ($n \ge 2$). Пусть утверждение верно для всех отрезков $[1, m]$, где $m \le 2^n - 2$. Тогда в любом отрезке $[2^n, m]$, где $2^n \le m \le 2^{n+1} - 3$, K-чисел не меньше, чем остальных. Значит, в любом отрезке $[1, m]$, где $2^n \le m \le 2^{n+1} - 3$, K-чисел больше. Так как на отрезке $[1, 2^n - 2]$ содержится $2^{n-1} - 1$ K-чисел, то на отрезке $[1, 2^{n+1} - 3]$ содержится $2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1$ K-чисел. Но $2^{n+1} - 2$ не является K-числом. Следовательно, на отрезке $[1, 2^{n+1} - 2]$ содержится K-чисел столько же, сколько и остальных.

Б.Кукушкин, Н.Васильев, В.Сендеров

М1623. *Один из углов треугольника равен 60°. Обозначим через H точку пересечения высот, через O и I – центры описанной и вписанной окружностей этого треугольника.*
а) Докажите, что OI = IH.
б) Следует ли из последнего равенства, что один из углов треугольника равен 60°?*

Мы будем пользоваться следующими легко доказываемыми утверждениями.

Лемма 1. В любом треугольнике ABC расстояние от центра описанного круга до стороны треугольника BC вдвое меньше расстояния от точки пересечения высот до вершины A.

Лемма 2. В любом треугольнике биссектриса делит пополам угол между высотой и радиусом описанного круга, проведенным в ту же вершину.

а) Пусть $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Из леммы 1 следует, что $HA = 2R\cos\alpha = R$. Отсюда и из леммы 2 следует утверждение задачи.

б) Пусть ABC не является правильным; тогда $O \neq H$. Пусть A и B лежат по разные стороны прямой OH, $AHIO$ не является выпуклым четырехугольником. Тогда $AH = AO = R$, т.е. $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Другое решение можно получить, опираясь на следующие формулы:

$$IO^2 = R^2 - 2Rr,$$

$$IH^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2.$$

Из них следует, что равенство $IO = IH$ можно переписать так:

$$p = (R + r)\sqrt{3}.$$

Остается воспользоваться такой леммой.

Лемма 3. Алгебраическая сумма расстояний от центра описанной около треугольника окружности до его сторон равна сумме радиусов описанной и вписанной окружностей (при этом, если центр описанной окружности лежит по ту же сторону от некоторой стороны, что и сам треугольник, то расстояние до этой стороны считается положительным, а в противном случае – отрицательным).

А.Савин, Н.Васильев, В.Сендеров

М1625.[1] *Плоскость разбита на единичные квадраты, вершины которых находятся в точках с целочисленными координатами. Квадраты раскрашены поочередно в черный и белый цвета (т.е. в шахматном порядке). Для каждой пары натуральных чисел m и n рассматривается прямоугольный треугольник с вершинами в целочисленных точках, катеты которого имеют длины m и n и проходят по сторонам квадратов. Пусть S_1 – площадь черной части треугольника, а S_2 – площадь его белой части. Положим*

$$f(m,n) = |S_1 - S_2|.$$

а) Вычислите f(m, n) для всех натуральных чисел m и n, которые либо оба четны, либо оба нечетны.

б) Докажите, что $f(m, n) \le \frac{1}{2}\max\{m,n\}$ для всех m и n.

в) Покажите, что не существует константы C такой, что $f(m, n) < C$ для всех m и n.

а) Обозначим рассматриваемый прямоугольный треугольник через ABC ($\angle A = 90^\circ$, $AB = m$, $AC = n$) и достроим его до прямоугольника $ABCD$. Если числа m и n имеют одинаковую четность, то раскраска этого прямоугольника симметрична относительно середины его диагонали BC. Следовательно, $S_1(ABC) = S_1(BCD)$ и $S_2(ABC) = S_2(BCD)$. Значит, $f(m,n) = |S_1(ABC) - S_2(ABC)| = \frac{1}{2}|S_1(ABCD) - S_2(ABCD)|$. Поэтому $f(m, n) = 0$, если m и n оба четны, $f(m, n) = \frac{1}{2}$, если m и n оба нечетны.

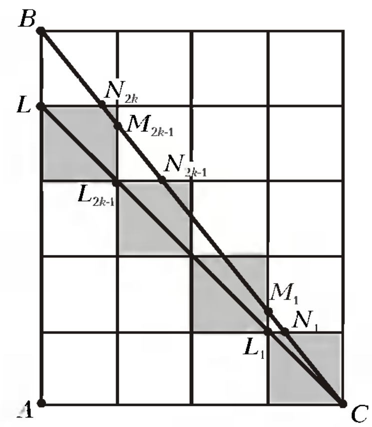
б) Если числа m и n имеют одинаковую четность, то требуемый результат немедленно вытекает из решения пункта а). Пусть теперь m нечетно, а n четно (в противном случае достаточно переобозначить m и n, и наоборот). Рассмотрим на отрезке AB точку L такую, что $AL = m - 1$. Так как число $m - 1$ четно, то $f(m - 1, n) = 0$, т.е. $S_1(ALC) = S_2(ALC)$. Следовательно,

$$f(m,n) = |S_1(ABC) - S_2(ABC)| = |S_1(LBC) - S_2(LBC)| \le$$

$$\le \text{Площадь } LBC = \frac{n}{2} \le \frac{1}{2}\max\{m,n\}.$$

в) Вычислим $f(2k + 1, 2k)$. Как и в решении пункта б), рассмотрим на AB точку L такую, что $AL = 2k$, и получим аналогично, что

$$f(2k+1, 2k) = |S_1(LBC) - S_2(LBC)|.$$



Площадь треугольника LBC равна k. Без ограничения общности будем считать, что отрезок LC черный (см. рисунок). Тогда белая часть треугольника LBC состоит из треугольников BLN_{2k}, $M_{2k-1}L_{2k-1}N_{2k-1}$, …, $M_1L_1N_1$, каждый из которых, очевидно, подобен треугольнику ABC. Их суммарная площадь равна

$$S_2(LBC) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2k}{2k+1}\cdot\left(\left(\frac{2k}{2k}\right)^2 + \left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2k}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4k(2k+1)}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + (2k)^2\right) = \frac{4k+1}{12}.$$

Значит,

$$S_1(LBC) = k - \frac{4k+1}{12} = \frac{8k-1}{12} \text{ и } f(2k+1, 2k) = \frac{2k-1}{6}.$$

Ясно, что $\frac{2k-1}{6}$ принимает сколь угодно большие значения.

Н.Воронович

М1626. *В треугольнике ABC угол A является наименьшим. Точки B и C делят окружность, описанную около этого треугольника, на две дуги. Пусть U – внутренняя точка той дуги с концами B и C, которая не содержит точку A. Серединные перпендикуляры к отрезкам AB и AC пересекают прямую AU в точках V и W соответственно. Прямые BV и CW пересекаются в точке T. Докажите, что*

$$AU = TB + TC.$$

Нетрудно доказать, что если $\angle A$ – наименьший из углов ΔABC, то точка T находится внутри этого треугольника. Пусть прямые BV и CW пересекают окружность, описанную около ΔABC, вторично в точках B_1 и C_1 соответственно (рис.1). В силу симметрии относи-

[1] *Решение задачи М1624 будет опубликовано позже.*

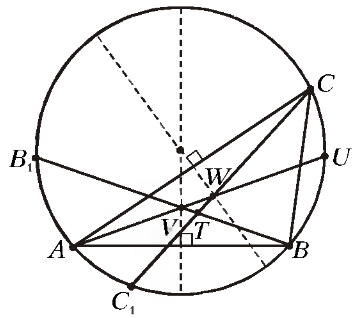


Рис.1

тельно серединного перпендикуляра к стороне AB имеем $AU = BB_1$. Аналогично, $AU = CC_1$. Следовательно, $BB_1 = CC_1$, а значит, и $TB = TC_1$ (BCB_1C_1 – равнобокая трапеция!). Тогда $TB + TC = TC_1 + TC = CC_1 = AU$, что и требовалось.

Замечание

1. Задача имеет много других решений. Участники олимпиады в основном использовали тригонометрию и аналитическую геометрию.

2. Если отказаться от требования минимальности угла A, то (при условии, что прямые BV и CW действительно пересекаются, а не параллельны) справедливо следующее утверждение: из отрезков AU, TB и TC один равен сумме двух других. Например, в ситуации, изображенной на рисунке 2, $TB = AU + TC$.

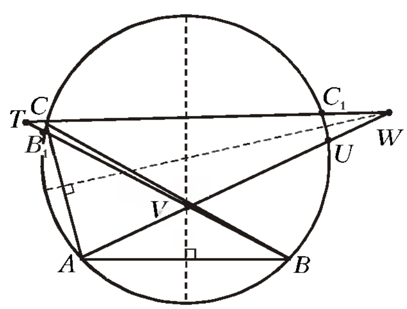


Рис.2

3. Если $\angle A = 30°$, а O – центр окружности, описанной около ΔABC, то $|BT - CT| = OT$ (докажите это самостоятельно).

Д.Терешин

М1627. *Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – действительные числа, удовлетворяющие условиям*

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| = 1$$

и

$$|x_i| \le \frac{n+1}{2},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Докажите, что существует перестановка $y_1, y_2, \ldots, x_n$ чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такая, что

$$|y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n| \le \frac{n+1}{2}.$$

Допустим, что требуемой перестановки не существует, т.е. для любой перестановки выполнено неравенство $|s| = |y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n| > \frac{n+1}{2}$. Изменив, если это необходимо, знаки чисел и их нумерацию, мы можем считать, что $x_1 + \ldots + x_n = 1$ и $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$. Рассмотрим перестановки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$. Пусть $S_1 = x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n$, $S_2 = x_n + 2x_{n-1} + \ldots$ $\ldots + nx_1$. Легко понять, что $S_2 \ge S_1$. Действительно, если в наборе $y_1, \ldots, y_n$ поменять местами y_k и y_{k+1}, то при $y_{k+1} \ge y_k$ получим $S'_{k+1} - S'_k = (y_1 + 2y_2 + \ldots + ky_k + (k+1)y_{k+1} + \ldots + ny_n) - (y_1 + 2y_2 + \ldots + ky_{k+1} + (k+1)y_k + \ldots + ny_n) = y_{k+1} - y_k \ge 0$. Поэтому, если мы последовательно поменяем местами x_1 с x_2, x_1 с x_3, …, x_1 с x_n, затем x_2 с x_3, …, x_2 с x_n, …, x_{n-1} с x_n, то из $x_1, x_2, \ldots, x_n$ получим $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$, причем на каждом шаге рассматриваемая нами сумма не уменьшалась.

Заметим теперь, что $S_1 + S_2 = (n+1)(x_1 + \ldots + x_n) = n + 1$, поэтому $S_2 \ge \frac{n+1}{2} \ge S_1$. Но, согласно предположению, $|S_1| > \frac{n+1}{2}$ и $|S_2| > \frac{n+1}{2}$, следовательно, $S_2 > \frac{n+1}{2}$, а $S_1 < -\frac{n+1}{2}$.

С другой стороны, $|S'_{k+1} - S'_k| = |y_{k+1} - y_k| \le |y_{k+1}| + |y_k| \le n + 1$. Поэтому, если $S'_k > \frac{n+1}{2}$, то и $S'_{k+1} > \frac{n+1}{2}$ (иначе, если $S'_{k+1} < -\frac{n+1}{2}$, то $|S'_{k+1} - S'_k| > n + 1$). Но $S_2 > \frac{n+1}{2}$, значит, в результате наших перестановок мы получим $S_1 > \frac{n+1}{2}$, что противоречит полученному ранее неравенству $S_1 < -\frac{n+1}{2}$. Итак, наше предположение неверно, и искомая перестановка существует.

О.Богопольский

М1628. *Таблица $n \times n$, заполненная числами из множества $S = \{1, 2, \ldots, 2n - 1\}$, называется серебряной, если для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ объединение i-й строки и i-го столбца содержит все числа из S.*

Покажите, что:

а) не существует серебряной таблицы для $n = 1997$;

б) серебряные таблицы существуют для бесконечного числа значений n.

а) Пусть $n > 1$ – натуральное число. Предположим, что серебряная таблица $n \times n$ существует. Пусть k – элемент из множества $\{1, 2, \ldots, 2n - 1\}$, который не стоит на главной диагонали таблицы (такой элемент найдется, так как $n < 2n - 1$). Назовем объединение i-го столбца и i-й строки таблицы i-м крестом. Число k появляется в каждом кресте ровно один раз. Если k стоит на пересечении i-го столбца и j-й строки, то оно входит и в i-й и в j-й крест. Будем говорить, что эти кресты k-связаны. Таким образом, все n крестов разбиваются на пары k-связных, т.е. n – четное число. Но 1997 – число нечетное.

б) При $n = 2$ таблица $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ является серебряной. Из нее легко получить серебряную таблицу 4×4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Конструкция первой из этих таблиц несложным образом обобщается: если A – серебряная таблица $n\times n$, то построим таблицу D размерами $2n\times 2n$ так: $D = \begin{pmatrix} A & B \\ C & A \end{pmatrix}$, где таблица B получена из A добавлением $2n$ к каждому ее элементу, а C получена из B заменой всех ее элементов, стоящих на главной диагонали, на $2n$. Таблица D будет серебряной. Действительно, пусть $i \le n$ (другой случай разбирается аналогично). Рассмотрим i-й крест таблицы D. Он состоит из i-го креста A, i-й строки B и i-го столбца C; i-й крест A содержит числа 1, 2, ..., $2n-1$, а i-я строка B и i-й столбец C содержат числа $2n$, $2n+1$, ..., $4n-1$.

Замечания

1. Серебряные таблицы существуют для всех четных n.
2. Приведем еще один способ построения серебряной таблицы $2^n\times 2^n$. Для целых неотрицательных чисел a и b обозначим через $a\oplus b$ число, полученное следующим образом: запишем a и b в двоичной системе счисления, добавив, если это необходимо, слева нули так, чтобы число разрядов совпадало; затем сложим числа «в столбик», но не учитывая переносов, т.е. поразрядно, а результат вновь запишем в десятичной системе. Например: $7\oplus 9 = 14$, так как $7 = 111_2$, $9 = 1001_2$,

$$\begin{array}{r} 0111_2 \\ \underline{1001_2} \\ 1110_2 \end{array}, \quad 1110_2 = 14.$$

Занумеруем числами от 0 до 2^n-1 строки и столбцы таблицы (сверху вниз и слева направо соответственно). Запишем в клетку, стоящую на пересечении i-й строки и j-го столбца число

$$a_{ij} = \begin{cases} i\oplus j+1 \text{ при } j\le i, \\ i\oplus j+2^n \text{ при } j>i. \end{cases}$$

Полученная таблица будет серебряной.

М1629. *Найдите все пары (a, b) целых чисел $a\ge 1$, $b\ge 1$, удовлетворяющих уравнению*

$$a^{\left(b^2\right)} = b^a.$$

Из равенства $a^{b^2} = b^a$ следует, что $a = b^{a/b^2}$. Пусть $\frac{a}{b^2} = \frac{k}{l}$, где $(k, l) = 1$. Тогда $a = b^{k/l}$, $\left(b^{k/l}\right)^{b^2} = b^{\left(b^{k/l}\right)}$,

$$b^{kb^2/l} = b^{b^{k/l}}. \qquad (1)$$

Если $b = 1$, то и $a = 1$. Если же $b > 1$, то из (1) вытекает, что $\frac{k}{l}b^2 = b^{k/l}$, т.е.

$$\frac{k}{l} = b^{k/l-2}. \qquad (2)$$

1-й случай: $k-2l\ge 0$. Тогда из (2) следует, что $\frac{k}{l}$ – целое, поэтому $l = 1$ (так как $(k, l) = 1$), т.е. $a = b^k$,

$$k = b^{k-2}. \qquad (3)$$

Из неравенства $b^{k-2}\ge 2^{k-2} > k$ при $k\ge 5$ получаем, что (3) возможно лишь при $k < 5$. Перебором убеждаемся, что $k = 4$, $b = 2$, $a = 16$ или $k = 3$, $b = 3$, $a = 27$.

2-й случай. $k-2l < 0$. Из (2) получаем, что $\frac{l}{k} = b^{2-k/l}$, где $2-\frac{k}{l} > 0$, т.е. $k = 1$. Тогда $b = a^l$, $a^{a^{2l}} = a^{a^l}$, $a^{2l-1} = l$, следовательно, $l\ge 2^{2l-1}$, что невозможно при $l\ge 2$.

Ответ: {(1, 1); (16, 2); (27, 3)}.

М1630. *Для любого натурального числа n обозначим через $f(n)$ число способов представления числа n в виде суммы целых неотрицательных степеней числа 2. Преставления, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми. Например, $f(4) = 4$, так как число 4 может быть представлено следующими четырьмя способами: 4; 2 + 2; 2 + 1 + 1; 1 + 1 + + 1 + 1. Докажите, что для любого целого числа $n\ge 3$ $2^{n^2/4} < f\left(2^n\right) < 2^{n^2/2}$.*

Если $n = 2k+1$ – любое нечетное число, большее 1, то каждое его представление в требуемом по условию задачи виде содержит 1 в качестве слагаемого. Убрав эту единицу, мы получим представление числа $2k$. Верно, очевидно, и обратное. Следовательно,

$$f(2k+1) = f(2k). \qquad (1)$$

Если $n = 2k$ – любое четное число, то каждое его представление в требуемом виде принадлежит к одному из двух типов: либо оно содержит слагаемое 1, либо не содержит таких слагаемых. В первом случае, убрав одно слагаемое 1, мы получим представление числа $2k-1$. Как и выше, легко заметить, что есть взаимно однозначное соответствие между всеми представлениями числа $2k-1$ и представлениями числа $2k$ первого типа. Во втором случае мы можем разделить все слагаемые на 2 и получить представление числа k. Это соответствие также взамно однозначно. Итак,

$$f(2k) = f(2k-1)+f(k). \qquad (2)$$

Обе полученные формулы выполнены для всех натуральных $k\ge 1$. Очевидно, что $f(1) = 1$. Пусть по определению $f(0) = 1$, тогда формула (1) выполнена и при $k = 0$. Заметим еще, что из (1) и (2) следует, что $f(n)$ не убывает.

Согласно (1), число $f(2k-1)$ в (2) можно заменить на $f(2k-2)$, откуда

$$f(2k) - f(2k-2) = f(k) \text{ для } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Суммируя эти равенства от 1 до n, получаем, что

$$f(2n) = f(0) + f(1) + \ldots + f(n),\ n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (3)$$

В правой части (3) каждое слагаемое не больше последнего, а так как $2 = f(2)\le f(n)$ для $n\ge 2$, то

$$f(2n) = 2+\left(f(2)+\ldots+f(n)\right)\le 2+(n-1)f(n)\le$$

$$\le f(n)+(n-1)f(n) = nf(n) \text{ для } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Следовательно,

$$f\left(2^n\right)\le 2^{n-1}\cdot f\left(2^{n-1}\right)\le 2^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot f\left(2^{n-2}\right)\le\ldots$$

$$\ldots\le 2^{(n-1)+(n-2)+\ldots+1}\cdot f(2) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot 2.$$

И так как $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2 < 2^{\frac{n^2}{2}}$ для $n \ge 3$, верхняя оценка для $f\left(2^n\right)$ получена.

Чтобы получить нижнюю оценку, докажем сначала, что

$$f(b+1)-f(b) \ge f(a+1)-f(a), \qquad (4)$$

если $b \ge a \ge 0$ – целые числа одинаковой четности. Действительно, если a и b четны, то из (1) следует, что каждая часть неравенства (4) обращается в нуль, а если они оба нечетны, то из (2) следует, что $f(b+1) - f(b) = f\left(\frac{b+1}{2}\right)$ и $f(a+1) - f(a) = f\left(\frac{a+1}{2}\right)$. Остается вспомнить, что f не убывает.

Возьмем произвольные натуральные $r \ge k$, r – четное, и подставим в равенство (4) $a = r - j$, $b = r + j$ для $j = 0, \ldots, k-1$. Сложив полученные неравенства, получаем

$$f(r+k)-f(r) \ge f(r+1)-f(r-k+1).$$

Так как r четно, то $f(r+1) = f(r)$, и следовательно,

$$f(r+k)+f(r-k+1) \ge 2f(r) \text{ для } k = 1, \ldots, r.$$

Суммируя эти неравенства для $k = 1, \ldots, r$, мы получаем, что

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(2r) \ge 2rf(r).$$

В силу равенства (3) левая часть равна $f(4r) - 1$. Поэтому

$$f(4r) \ge 2rf(r)+1 > 2rf(r).$$

Возьмем $r = 2^{m-2}$. Тогда

$$f\left(2^m\right) > 2^{m-1}f\left(2^{m-2}\right). \qquad (5)$$

($r = 2^{m-2}$ четно при $m > 2$, $m \in \mathbf{N}$; заметим, однако, что (5) справедливо и при $m = 2$.)

Наконец, пусть $n > 1$, $n \in \mathbf{N}$. Если l – положительное целое такое, что $2l \le n$, то, применяя неравенство (5) к $m = n, n-1, \ldots, n-2l+2$, получим, что

$$f\left(2^n\right) > 2^{n-1} \cdot f\left(2^{n-2}\right) >$$

$$> 2^{n-1} \cdot 2^{n-3} \cdot f\left(2^{n-4}\right) > 2^{n-1} \cdot 2^{n-3} \cdot 2^{n-5} \cdot f\left(2^{n-6}\right) > \ldots$$

$$\ldots > 2^{(n-1)+(n-3)+\ldots+(n-2l+1)} \cdot f\left(2^{n-2l}\right) = 2^{l(n-l)} \cdot f\left(2^{n-2l}\right).$$

Теперь, взяв $l = \frac{n}{2}$, если n четно, или $l = \frac{n-1}{2}$, если n нечетно, получаем

$$f\left(2^n\right) > 2^{n^2/4} \cdot f\left(2^0\right) = 2^{n^2/4}, \; n \text{ – четно};$$

$$f\left(2^n\right) > 2^{\left(n^2-1\right)/4} \cdot f\left(2^1\right) = 2^{\left(n^2-1\right)/4} \cdot 2 > 2^{n^2/4}, \; n \text{ – нечетно}.$$

Нужный результат доказан для $n \ge 2$. Непосредственно проверяется, что и для $n = 1$ соответствующее неравенство справедливо.

Публикацию решений задач М1628–М1630 подготовил Д.Терешин

Ф1638. *Маленький упругий шарик подпрыгивает, ударяясь о горизонтальную подставку, при этом высота подскоков равна H. Подставку очень медленно сдвигают параллельно самой себе на h вниз и останавливают. Найдите новую высоту, на которую шарик будет подпрыгивать относительно подставки после ее остановки.*

Если подставка движется с постоянной скоростью, то высота подскока с течением времени не меняется. Для того чтобы это понять, достаточно перейти в систему отсчета, которая движется вместе с подставкой. При очень малой скорости движения подставки (как в условии задачи) высота подскока останется равной H.

Тут возникает вопрос: если шарик движется с подставкой вниз и при этом теряет потенциальную энергию, почему же не возрастает его кинетическая энергия (высота подскока связана именно с ней)? Оценим потери энергии шарика при ударе о подставку, которая движется вниз со скоростью u (если бы подставка двигалась вверх, то энергия шарика при ударах возрастала бы). Если скорость шарика перед ударом была v, то после удара о тяжелую подставку его скорость будет направлена вверх и равна $v - u$ относительно подставки и $v - 2u$ относительно неподвижной системы координат. Тогда потеря кинетической энергии шарика при ударе составит $mv^2/2 - m(v-2u)^2/2 = 2mvu - 2mu^2 \approx 2mvu$. За время $\tau \approx 2v/g$ до следующего удара подставка сдвинется вниз на $\Delta h = \tau u = 2vu/g$, и шарик «потеряет» потенциальную энергию $mg\Delta h = 2mvu$. Видно, что «добавка» за счет уменьшения потенциальной энергии равна потере кинетической энергии – но «потерянную» энергию шарик как раз и передает подставке.

А.Зильберман

Ф1639. *Горизонтально расположенный цилиндрический сосуд с массивным поршнем находится в вакууме (рис.1). Пружина жесткостью k, закрепленная с одной стороны, упирается в поршень. В начальном положении газа под поршнем нет, пружина не деформирована. Через дырку в дне сосуда в него впускают некоторое количество гелия и закрывают дырку. После установления равновесия пружина оказалась деформированной на L. Затем газ очень медленно нагревают, пока поршень не сдвигается еще на L. Какое количество теплоты получил газ при этом? Теплоемкостью стенок и поршня пренебречь.*

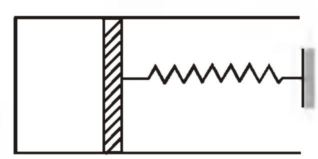


Рис.1

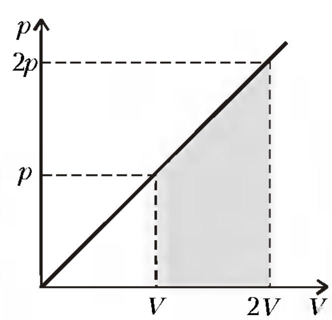


Рис.2

Работа газа при нагреве – это работа по деформации пружины от L до $2L$ (рис.2):

$$A = \frac{k(2L)^2}{2} - \frac{kL^2}{2} = \frac{3kL^2}{2} = \frac{3pV}{2}.$$

(Мы учли, что в самом начале поршень находился у дна сосуда.) Приращение внутренней энергии газа составляет

$$\Delta U = \nu C_V(T_2 - T_1) = \frac{C_V}{R}\nu R(T_2 - T_1) =$$

$$= \frac{C_V}{R}(p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{3}{2}\cdot 3pV = 3A$$

(молярная теплоемкость при постоянном объеме C_V для одноатомного газа равна $3R/2$). Следовательно, газ получил количество теплоты

$$Q = A + \Delta U = 4A = 6kL^2.$$

М.Учителев

Ф1640. *Четыре одинаковые тонкие проводящие пластинки площадью S каждая расположены параллельно и очень близко друг к другу; расстояние между соседними пластинками равно d (рис.1). Первую и третью пластинки соединили проводником, между второй и четвертой включили батарейку напряжением U. Какие силы действуют на каждую из пластинок?*

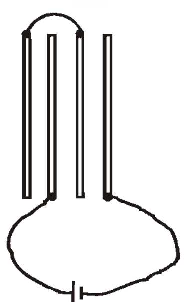


Рис.1

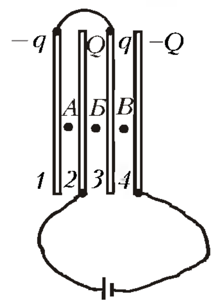


Рис.2

Введем обозначения Q и q для модулей зарядов пластин (рис.2). Выразим через эти величины напряженности поля в точках A, $Б$ и $В$:

$$E_A = -\frac{q}{\varepsilon_0 S},\ E_Б = \frac{Q-q}{\varepsilon_0 S},\ E_В = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}.$$

Ясно, что $E_A = -E_Б$ (иначе не будут равны потенциалы замкнутых между собой пластин *1* и *3*), тогда

$$-q = -(Q-q),\ \text{или}\ Q = 2q.$$

Разность потенциалов между пластинами *2* и *4*, соединенными батарейкой, равна

$$E_Бd + E_Вd = \frac{(Q-q)d}{\varepsilon_0 S} + \frac{Qd}{\varepsilon_0 S} = U,$$

откуда находим

$$q = \frac{U\varepsilon_0 S}{3d},\ Q = \frac{2U\varepsilon_0 S}{3d}.$$

На пластину *1* действует сила только со стороны пластины *3* (силы со стороны пластин *2* и *4* компенсируются):

$$F_1 = q\cdot\frac{1}{2}E_A = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{U^2\varepsilon_0 S}{18d^2}.$$

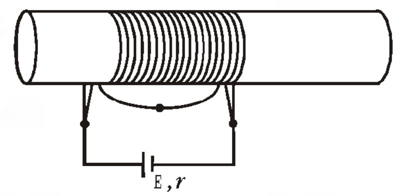
Для остальных пластин получаем

$$F_2 = Q\left(\frac{q}{\varepsilon_0 S} - \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}\right) = 0,\ F_3 = q\left(\frac{Q}{\varepsilon_0 S} - \frac{q}{2\varepsilon_0 S}\right) = \frac{U^2\varepsilon_0 S}{6d^2},$$

$$F_4 = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{2U^2\varepsilon_0 S}{9d^2}.$$

А.Повторов

Ф1641. *Три длинных куска провода сложили вместе и получившимся «тройным» проводом намотали на цилиндрический немагнитный сердечник катушку, состоящую из большого количества витков (см. рисунок). Две из получившихся трех катушек соединили последовательно и к концам образовавшейся двойной катушки параллельно подключили выводы третьей катушки. Систему охладили до температуры, при которой катушки стали сверхпроводящими, и к выводам системы подключили батарейку с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r. Какие токи будут течь через катушки после того, как эти токи практически перестанут изменяться?*



ЭДС катушек в любой момент равны между собой (соединены параллельно), но ЭДС двойной катушки в 2 раза больше (сумма двух ЭДС), что возможно в единственном случае: $\mathcal{E}_i = 0$. Это означает, что поля, создаваемые катушками, друг друга компенсируют (т.е. $B_{\text{общ}} = 0$). Следовательно, токи направлены в противоположные стороны, ток двойной катушки в 2 раза меньше, чем ток одинарной. Сумма токов равна $\mathcal{E}/r$, так как $\mathcal{E}_i = 0$. Тогда через катушки текут токи $2\mathcal{E}/r$ и $-\mathcal{E}/r$ соответственно.

З.Рафаилов

Ф1642. *В сеть переменного напряжения (220 В, 50 Гц) включили последовательно конденсатор некоторой емкости и катушку индуктивностью 1 Гн. Параллельно конденсатору подключили вольтметр с очень большим сопротивлением. При какой емкости конденсатора вольтметр покажет напряжение 220 В? Какую емкость конденсатора ни в коем случае использовать нельзя?*

При одинаковых токах катушки и конденсатора их напряжения *противофазны*; значит, *разность* напряжений равна напряжению сети. Это возможно либо при $U_C = 0$ (бесконечно большая емкость), либо при $U_C = 440$ В. В последнем случае емкостное сопротивление конденсатора в 2 раза больше индуктивного сопротивления катушки:

$$\frac{1}{\omega C} = 2\omega L,\ \text{откуда}\quad C = \frac{1}{2\omega^2 L} = \frac{1}{8\pi^2 f^2 L} \approx 5\ \text{мкФ}.$$

Нельзя подключать конденсатор, емкостное сопротивление которого равно индуктивному сопротивлению катушки, т.е. $C_{\text{запрещ}} \approx 10$ мкФ (ток потечет очень большой – резонанс все-таки!).

Р.Александров

Алгебраические и трансцендентные числа

Подобно тому, как капля росы способна играть в лучах восходящего солнца всеми цветами радуги, так и числа являют нам свои бесчисленные свойства в зависимости от того, под каким углом зрения на них посмотреть. Мы различаем целые числа и дробные, положительные и отрицательные, рациональные и иррациональные, вещественные и комплексные... Если взглянуть на числа с точки зрения: могут или не могут они являться корнями многочленов с целыми коэффициентами, то тем самым мы проведем границу между *алгебраическими* числами (могут быть корнями) и *трансцендентными* (не могут). Таким образом, о трансцендентных числах можно сказать еще и так: они выходят за пределы множества чисел, представляющих корни всевозможных многочленов с целыми коэффициентами (по-латински *transcendentis* означает *выходящий за пределы*). Называть числа *алгебраическими* и *трансцендентными* предложил Леонард Эйлер (1707—1783) в далеком 1775 году, когда еще не было известно ни одного трансцендентного числа.

Все рациональные числа m/n, где m, n – целые, $n \neq 0$, – безусловно алгебраические, поскольку удовлетворяют уравнению $nx - m = 0$. Сообщество алгебраических чисел гораздо богаче, чем общество рациональных – оно включает также все иррациональные числа вида $\sqrt[n]{m}$ (n, m – целые, $n \geq 2$), поскольку $\sqrt[n]{m}$ – корень многочлена $x^n - m$. Сумма, разность, произведение и частное (при ненулевом делителе) алгебраических чисел – числа также алгебраические. Более того, оказалось, что алгебраическими числами являются корни многочленов, коэффициенты которых – алгебраические числа. Это свойство позволят конструировать алгебраические числа весьма затейливого вида. Так, число $\sqrt{\dfrac{1998}{\sqrt[19]{98}-\sqrt[199]{8}}}$ алгебраическое, потому что собрано, как из деталей детского конструктора, из алгебраических чисел с помощью основных арифметических операций и радикалов. Существуют такие многочлены, корни которых через их коэффициенты с помощью арифметических операций и радикалов *вовсе не выражаются*. Этот факт в истории математики связан с драматическим поиском формул, выражающих корни многочленов высоких степеней через их коэффициенты, и достоин отдельного повествования. Здесь же мы отметим, что он открывает необозримую ширь множества алгебраических чисел. Если это множество столь неохватно, что для изображения всех их не хватает даже привычных знаков операций, то где же могут обитать трансцендентные числа?

В 1744 году Леонард Эйлер выдвинул гипотезу, что числа вида $\log_a b$ почти при всех рациональных a и b не могут быть корнями многочленов с целыми коэффициентами (на самом деле, число $\log_a b$ рационально тогда и только тогда, когда существует рациональное число t такое, что $a = t^n$, $b = t^m$, где m и n – целые числа). Это предположение длительное время оставалось хотя и весьма правдоподобной, но все же зыбкой гипотезой. Более ста лет математикам не удавалось ни доказать гипотезу Эйлера, ни найти хоть какое-нибудь трансцендентное число. Поиски трансцендентных чисел напоминали поиски в темной комнате кота, причем без надлежащей уверенности в том, что усатый и полосатый в этой комнате непременно есть. Первый свет забрезжил в 1844 году, когда французский математик Жозеф Лиувилль (1809—1882) не только доказал, что трансцендентные числа существуют, но и построил примеры таких чисел. Точнее, он доказал, что алгебраические числа плохо приближаются рациональными, а именно, если α — алгебраическое число степени n (где n – наименьшая степень многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами такого, что $P(\alpha) = 0$), то для любой дроби p/q выполнено неравенство $|\alpha - p/q| > C/p^n$, где C – некоторая константа, зависящая только от α. Одно из чисел, построенных Лиувиллем, имело следующий вид: $\beta = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \ldots = 0{,}11000100\ldots$, где значком $n!$ обозначено произведение натуральных чисел от 1 до n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Для числа β утверждения теоремы Лиувилля неверны: в самом деле, пусть

$$\beta_n = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \ldots + \frac{1}{10^{n!}},$$

тогда

$$|\beta - \beta_n| < \frac{2}{10^{(n+1)!}} = 2\left(\frac{1}{10^{n!}}\right)^{n+1}.$$

Значит, число β не является алгебраическим.

(Теорема Лиувилля оказалась одной из первых теорем в теории приближения иррациональных чисел рациональными (так называемой *теории диофантовых приближений*). Одним из высших результатов этой теоремы стала теорема Рота (1955), усиливающая теорему Лиувилля: если α — алгебраическое число, а ε — любое наперед заданное положительное число (например, 0,0001), то неравенство $|\alpha - p/q| < 1/q^{2+\varepsilon}$ имеет лишь конечное число решений. Таким образом, алгебраические числа приближаются рациональными значительно хуже, чем по теореме Лиувилля.)

Пользуясь рецептом Лиувилля, трансцендентные числа стали обнаруживать и другие математики. Поначалу их было мало, и эти числа воспринимались как персонаж в известной басне И.А.Крылова: «По улицам Слона водили, как видно – напоказ...» И вдруг случилось нечто поразительное. В 1878 году немецкий математик Георг Кантор (1845 – 1918) доказал изумительный факт: каждому алгебраическому числу можно поставить в соответствие отдельное натуральное число (т.е. их можно как бы сосчитать), а вот трансцендентных чисел так много, что они даже в принципе такого подсчета не допускают. То их не могли найти, собирали по крупицам, то вдруг оказывается, что трансцендентных чисел – несчетная рать!

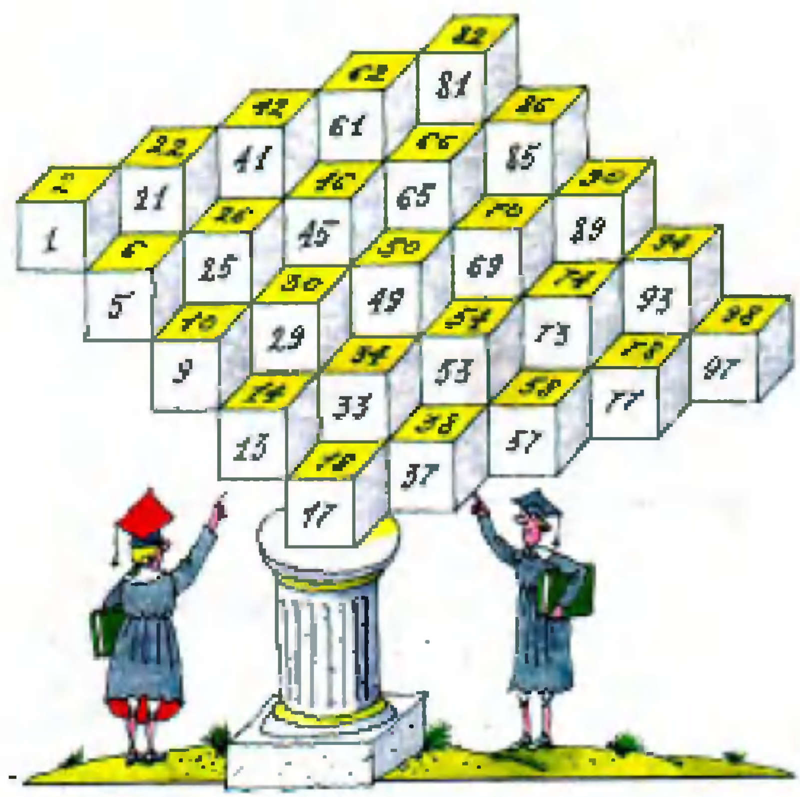
В 1873 году французский математик Шарль Эрмит (1822 – 1901) доказал трансцендентность замечательной константы $e = 2{,}71828\ldots$, служащей основанием натуральных логарифмов и представляющей предел последовательности чисел $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, когда n устремляется к бесконечности, а в 1882 году немецкий математик Карл Фердинанд Линдеман (1852 – 1939) доказал трансцендентность числа π. Результат Линдемана поставил точку в многовековых потугах как профессиональных ученых, так и любителей математики решить задачу *о квадратуре круга*. Эта древняя задача о построении равновеликого данному кругу квадрата с помощью одних только циркуля и линейки без делений оказалась тесно связанной с алгебраической природой числа π.

К концу XIX столетия уже была доказана гипотеза Эйлера о трансцендентности чисел вида $\log_a b$ почти для всех рациональных a и b, а Карл Вейерштрасс (1815 – 1897) обосновал трансцендентность чисел $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ почти для всех алгебраических α.

Выступая в 1900 году на II Всемирном конгрессе математиков, Давид Гильберт (1862 – 1943) сформулировал 23 знаменитые проблемы, которые девятнадцатый век оставлял в наследство двадцатому. Одна из этих проблем касалась доказательства трансцендентности чисел вида α^β, где α – отличное от 0 и 1 алгебраическое число, а β – иррациональное алгебраическое число. Наш соотечественник Александр Осипович Гельфонд (1906 – 1968) разработал метод, который позволил ему решить проблему Гильберта для случая, когда β является корнем квадратного трехчлена, а позже ему и немецкому математику Теодору Шнайдеру (род. 1911) удалось решить эту проблему полностью.

Но вот о числе Эйлера $C \approx 0{,}57726\ldots$, представляющим собой предел последовательности $\left\{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right\}$, при n стремящемся к бесконечности, неизвестно даже, является ли оно иррациональным. К настоящему времени вычислено несколько тысяч десятичных знаков числа C, и никаких признаков периодичности не обнаружено. Однако еще никому не удалось доказать и иррациональность числа C. То же относится к числу $\pi + e$ и $C \cdot \pi$.

А.Жуков



Задачи

1. На доске написано несколько различных целых чисел, причем сумма любых двух из них также написана на доске. Сколько чисел написано?

С.Дворянинов

2. Когда в день рождения одного из членов редколлегии спросили, сколько ему исполнилось лет, он ответил, что если к году его рождения прибавить текущий год, затем вычесть год, когда ему исполнилось 20 лет, и вычесть год, когда ему исполнилось 30 лет, то в результате получится 16. Сколько же лет ему исполнилось?

А.Савин

3. Можно ли доску для игры в шашки распилить на нечетное число прямоугольников таким образом, чтобы все распилы шли по границам клеток, и чтобы количества черных клеток, попавших в эти прямоугольники, составляли возрастающую арифметическую прогрессию?

И.Акулич

4. Из школьного учебника по математике взяли пример на извлечение корня и все цифры заменили звездочками:

$$\sqrt[*]{**} = *.$$

Расшифруйте этот ребус, зная, что все цифры – четные.

И.Акулич

5. Клетки доски размером 11×11 закрашены в шахматном порядке так, что белых клеток на доске на одну больше, чем черных. На черных клетках доски расставлены 11 ладей. Докажите, что среди них найдутся две ладьи, которые бьют друг друга.

В.Произволов

1932 — 1998

Нас постигло большое горе.

Умер замечательный, светлый человек, всеми любимый и уважаемый **АНАТОЛИЙ ПАВЛОВИЧ САВИН**. Трудно свыкнуться с мыслью, что его больше нет с нами – всегда полного энергии и юмора, выдумщика и оптимиста, такого всегда молодого – моложе иных тридцатилетних, – не разучившегося удивляться и радоваться разнообразию и причудам этого мира...

Ученый, популяризатор математики, автор многих статей и книг для юношества, бессменный член редколлегии нашего журнала, ведущий раздела «Квант» для младших школьников», создатель, организатор и вдохновитель конкурса «Математика 6—8», он был одним из тех, на ком двадцать девять лет держится наш журнал...

Счет учеников Анатолия Павловича идет на сотни тысяч – от тех, кто когда-то ходил к нему на занятия математического кружка, до всех тех, кто читал его книжки и решал его задачи, – до всех вас, наши читатели. Сколько людей впервые прикоснулись через него к математике, почувствовали ее красоту, поняли вкус хорошей задачи! Не все они стали математиками, но хочется верить, что этот свет не погас в каждом из них...

Потеря наша невосполнима, но человек жив, пока его помнят и любят, – а мы помним и любим Анатолия Павловича, и, значит, он с нами.

Редколлегия
Редсовет
Редакция журнала «Квант»

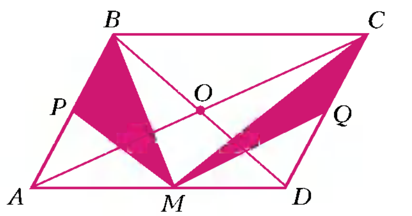
Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6—8»

Мы начинаем очередной конкурс «Математика 6—8». Как и в предыдущих конкурсах, будет предложено 20 задач, по 5 задач в номерах 4—6 этого года и в №1 за 1999 год. Решения задач высылайте в течение месяца после получения номера журнала «Квант», в котором опубликованы условия задач. Решения присылайте по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес. Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков. Победители конкурса будут награждены призами журнала, а также приглашены на заключительный тур конкурса в летней математической школе.

1. Существует ли четырехугольник, любую вершину которого можно перенести в другое место так, чтобы новый четырехугольник был равен исходному?

С.Токарев

2. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята



точка M, а на сторонах AB и CD – точки P и Q соответственно так, что отрезки PM и QM параллельны диагоналям параллелограмма. Докажите, что площади треугольников PBM и QCM равны.

В.Произволов

3. Имеется 24 квадрата с длиной стороны 1 см, на которых написаны натуральные числа от 1 до 24. Из этих квадратов склеили куб с длиной ребра 2 см. Может ли при этом сумма чисел, написанных на любых двух соседних квадратах, делиться на 3? Квадраты называются соседними, если они имеют общую сторону.

С.Дворянинов

4. Существуют ли 5 последовательных
а) шестизначных;
б) 1998-значных
чисел, каждое из которых делится на сумму своих цифр?

В.Замков

5. Используя каждую из цифр от 1 до 9 ровно один раз, запишите четыре квадрата, имеющих отличный от 1 общий делитель.

А.Савин

Внимание! В заметке о заключительном этапе конкурса «Математика 6—8» («Квант» №1 за 1998 г.) в списке участников, получивших дипломы I степени, оказалась пропущенной фамилия участника, показавшего абсолютно лучший результат на этом соревновании. Это – Алексей Поярков из гимназии-лицея 2 города Рыбинска.

Должны уточнить также место учебы Василия Подаксенова из Омска – физико-математическая школа 64.

Приносим свои извинения.

Архимедова сила и киты

Н.РОДИНА

НА СУШЕ гусь производит впечатление малоподвижной, неуклюжей птицы. «На красных лапках гусь тяжелый...» – так писал А.С.Пушкин, применяя очень выразительное слово «тяжелый» для характеристики птицы. Но вот гусь вошел в воду и поплыл... Теперь мы видим уже легкую, грациозную птицу, движущуюся быстро и свободно. Даже дуновения ветра достаточно, чтобы изменить скорость ее движения. Отчего такая перемена?

Особенности поведения тел в воде связаны с малым трением и наличием выталкивающей – архимедовой – силы.

Эта статья была опубликована в «Кванте» №8 за 1982 год. (Прим. ред.)

Положите на стол пробку или пластмассовую крышечку от банки и подуйте на нее сбоку. Она не сдвинется с места. Поместите пробку на поверхность воды – от дуновения она легко начнет двигаться. Вы убедитесь, что сила трения в воде намного меньше силы трения между твердыми телами.

А плавает пробка на поверхности воды потому, что равны друг другу две действующие на нее в противоположных направлениях силы: сила тяжести и архимедова сила.

В совершенстве приспособлено для жизни в воде тело самого большого животного на Земле – кита. Наиболее крупные представители отряда китообразных – голубые киты. Масса голубого кита достигает

130 тонн, но он способен развивать в воде скорость до 20 узлов (узел – скорость, равная одной морской миле в час, т.е. 1,852 км/ч). Для сравнения укажем, что моторная лодка развивает скорость до 30 км/ч, т.е. около 16 узлов. Кит кашалот, имеющий массу приблизительно 60 тонн, выскакивая из воды, поднимается над ее поверхностью на несколько метров.

Многое в поведении морских животных мы с вами можем объяснить на основании законов и понятий физики. Но сначала познакомимся с некоторыми данными о китах.

Знаменитый исследователь морских глубин французский ученый Жак Ив Кусто (это он изобрел акваланг) в своей книге «Могучий властелин морей» пишет: «Трудно описать ощущение человека, который впервые встречается в воде с китом... Прежде всего вас ошеломляют размеры кита. Они превосходят все, что человек привык видеть в мире животных, превосходят все, что он себе представлял». И действительно, длина голубого кита достигает 33 м, он почти на 10 м длиннее пассажирского вагона! (Недаром в русских сказках упоминается «чудо-юдо рыба-кит», у которого «на спине село стоит».)

О массе китов мы уже говорили. Самый большой из добытых китов имел массу 150 000 кг, а самое большое наземное животное – слон – имеет массу от 3000 до 6000 кг (как язык некоторых китов!). Рассчитано, что если бы слон имел в два раза большую массу, то ему нужны были бы ноги вдвое толще, а они и так имеют площадь по 4 дм^2 каждая. (Подумайте и объясните, почему были бы необходимы такие ноги наземному животному.)

Тело плавает в воде, если действующие на него архимедова сила и сила тяжести равны между собой. Давайте рассчитаем архимедову силу, действующую на кита, и сравним ее с силой тяжести.

Архимедова сила равна весу жидкости, вытесненной погруженным в нее телом, т.е.

$$F_A = g\rho_{ж}V,$$

где $g \approx 10$ Н/кг, $\rho_ж$ – плотность жидкости, V – объем тела. Как нам вычислить объем кита? Сделаем это так: предположим, что тело кита имеет форму цилиндра. Тогда объем равен $V = \pi d^2 h/4$, где d – диаметр цилиндра, h – его высота. В нашем случае высота h – это длина кита. Чему равен диаметр нашего кита-

Иллюстрация А.Панцхаерия

цилиндра? Будем считать, что это средний диаметр тела кита, который примерно в 10 раз меньше его длины.

Проделайте дальше все расчеты сами, и вы убедитесь, что архимедова сила, которая поддерживает кита в воде, исчисляется миллионами ньютонов. (Разумеется, вычисления ваши очень приближенны, и нельзя сказать точно, сколько именно ньютонов; но то, что это число между одним и десятью миллионами, – точно.) Понятно, что такая сила спокойно удерживает в равновесии тело массой в сотни тонн, а именно такую массу и имеет голубой кит. Кит в воде невесом – ведь сила тяжести, действующая на него, тоже исчисляется миллионами ньютонов.

Конечно, кит не сможет находиться на суше. Известны случаи, когда киты по неизвестным пока до конца причинам выбрасываются на берег океана. Громадная сила тяжести прижимает животное к земле. Скелет кита не приспособлен к тому, чтобы выдерживать эту тяжесть; даже дышать кит не может, так как для вдоха он должен расширить легкие, приподнять мышцы, окружающие грудную клетку, а в воздухе эти мышцы весят несколько десятков тысяч ньютонов.

Жак Ив Кусто пишет: «...на суше перед гигантами вставали неразрешимые проблемы... дыхание требовало огромных усилий... на суше скелет кита не выдерживает веса мышц и жирового слоя, между тем как в плотной водной среде он отлично служит киту».

Как-то во время экспедиции Кусто и его помощники пытались спасти попавшего на мель китенка, масса которого была «всего» две тонны. Чтобы поднять его на борт судна, пришлось применить специальный гамак, так как даже новорожденный китенок может «сломаться» под действием силы тяжести, если под ним нет равномерной опоры.

Если посмотреть на спящего в воде кита, то вы увидите, что он не полностью погружен в воду. Значит, действующая на него выталкивающая сила должна быть меньше, чем в случае полного погружения (ведь эта сила равна весу жидкости, вытесненной китом). А сила тяжести осталась прежней. Казалось бы, равновесие должно нарушиться. Но кит спокойно спит на воде, он не тонет. Следовательно, выталкивающая сила и сила тяжести по-прежнему равны друг другу. Как объяснить это кажущееся противоречие?

Теперь самое время рассказать о том, как кит ныряет и как всплывает.

Хвост кита имеет горизонтальные лопасти и развивает мощность до 500 лошадиных сил (одна лошадиная сила – это единица мощности, равная 736 Вт). Для сравнения скажем, что эта мощность только в два раза меньше мощности двигателя самолета АН-2 и в семь раз больше мощности двигателя трактора ДТ-75. Когда аквалангиста задевает корпусом плывущий кит, то «впечатление такое, словно толкнул мчащийся паровоз».

Могучим движением хвоста кит направляет свое тело в глубину океана – ныряет. Глубина погружения равна нескольким десяткам метров, а кашалот достигает глубины в 1000–1200 метров. На такой глубине давление воды велико (рассчитайте его сами, учитывая, что плотность морской воды равна 1030 $кг/м^3$). Легкие кита под этим давлением сжимаются до так называемого остаточного объема. (У человека на глубине 30 м, где давление в четыре раза больше атмосферного, объем легких уменьшается в четыре раза – от 6 л на поверхности до 1,5 л; следовательно, для легких человека на глубине 30 м остаточный объем составляет 1,5 л.) От сжатия легких объем тела кита уменьшается, а с ним уменьшается и выталкивающая сила.

По мере того как кит выплывает из глубины на поверхность воды, архимедова сила немного увеличивается (почему?). Вынырнув на поверхность, кит вдыхает воздух, объем его тела увеличивается; значит, увеличивается и выталкивающая сила. Сила тяжести уравновешивается такой же выталкивающей силой, какая действовала на кита, плавающего внутри жидкости, но теперь уже для создания такой же выталкивающей силы киту не нужно полностью погружаться в воду – ведь его объем стал больше. Итак, при вдыхании воздуха объем тела кита увеличивается настолько, что ему уже не нужно полностью погружаться в воду, чтобы вес вытесненной им воды равнялся силе тяжести, действующей на кита.

И в заключение нашего рассказа – несколько вопросов.

Если массу кита разделить на его объем, то мы получим среднюю плотность его тела. Можно ли утверждать, что, где бы ни плавал кит – в глубине океана, в его средних слоях или на поверхности, средняя плотность тела кита всегда равна плотности воды? За счет чего изменяется средняя плотность?

Известно, что киты заплывают иногда в сильно опресненные лагуны у побережья Чукотского полуострова. Что изменяется в расположении кита в этом случае, если считать, что все данные, кроме состава воды, не меняются?

Для наблюдений и съемок китов использовали воздушный шар, наполняемый горячим воздухом при помощи газовой горелки. Почему такой шар – монгольфьер – поднимается в воздух?

По мере подъема шара пламя горелки регулировали, и оказалось, что шар может быть уравновешен в воздухе так, что в безветренную погоду он будет сколь угодно долго висеть над одной точкой моря. Что можно в этом случае сказать о соотношении между массой вытесненного шаром воздуха и массой самого шара вместе с наблюдателем?

Попробуйте объяснить такое явление, наблюдавшееся Кусто: «...вода впереди пузырилась, словно газированная. Это стая рыбешек то уходила вглубь, то снова поднималась к поверхности и выпускала воздух из плавательных пузырей». Зачем рыбешки выпускают воздух из плавательных пузырей и когда именно они это делают: уходя вглубь или поднимаясь на поверхность?

Свойства правильной пирамиды, вписанной в сферу

Э.ГОТМАН

Одним из замечательных свойств правильной пирамиды является ее симметричность. Правильный тетраэдр симметричен относительно плоскости, проходящей через ребро тетраэдра и середину противоположного ребра, и значит, имеет шесть плоскостей симметрии. При симметрии относительно прямой, проходящей через середины противоположных ребер, концы этих ребер меняются местами и правильный тетраэдр переходит в себя. Следовательно, тетраэдр имеет еще три оси симметрии.

Основанием правильной пирамиды служит правильный n-угольник, который имеет n осей симметрии (рис.1).

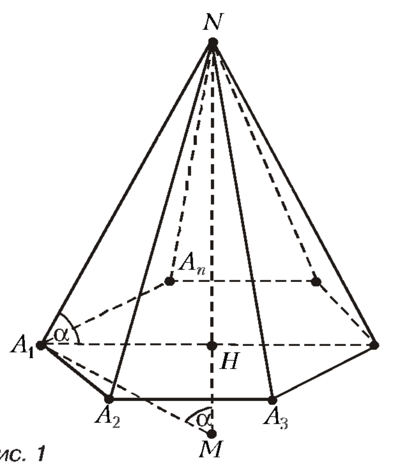


Рис. 1

Все оси пересекаются в центре многоугольника. Правильный n-угольник имеет еще и другие элементы симметрии. Каждая вершина его переходит в соседнюю при повороте вокруг центра на угол $\frac{2\pi}{n}$ и после n таких последовательных поворотов возвращается в исходное положение. Говорят, что правильный n-угольник обладает поворотной симметрией n-го порядка.

Пусть NH – высота правильной n-угольной пирамиды $NA_1A_2\ldots A_n$, точка H – центр ее основания. Ясно, что каждая плоскость, проходящая через прямую NH и ось симметрии правильного n-угольника, лежащего в основании пирамиды, является плоскостью симметрии пирамиды, и потому правильная n-угольная пирамида имеет n плоскостей симметрии.

При поворотах на углы $\frac{2\pi}{n}$, где $n = 1, 2, \ldots, n$, вокруг прямой NH правильная пирамида также переходит в себя и, следовательно, обладает еще поворотной симметрией порядка n. В частности, правильный тетраэдр, кроме перечисленных выше элементов симметрии, имеет четыре оси симметрии третьего порядка, каждая из которых проходит через одну из вершин и центр противоположной грани.

Правильная четырехугольная пирамида имеет четыре плоскости симметрии и ось поворотной симметрии четвертого порядка.

Как известно, около всякой правильной пирамиды можно описать сферу и в нее можно вписать сферу. При повороте пирамиды вокруг оси NH на углы $\frac{2\pi}{k}$ ($k = 1, 2, \ldots, n-1$) точки оси, и только они, остаются на месте, вершины же основания переходят в другие вершины, а пирамида переходит в себя. В себя переходят также сферы, описанная и вписанная. Значит, их центры – неподвижные точки, лежащие на оси NH. Рассмотрим подробнее расположение центров этих сфер относительно пирамиды.

Центр описанной сферы одинаково удален от вершин основания и поэтому лежит на прямой, перпендикулярной основанию и проходящей через центр основания, т.е. на высоте NH пирамиды или на ее продолжении за точку H. Если продолжение высоты NH пересекает сферу в точке M, то MN – диаметр сферы и, следовательно, $\angle MA_1N = 90°$. Центр описанной сферы совпадает с точкой H, когда $\angle NA_1H = 45°$, он лежит на высоте пирамиды или на ее продолжении в зависимости от того, будет ли $\angle NA_1H$ меньше или больше 45°.

Введем обозначения: $MN = 2R$, $A_1A_2 = a$, $NA_1 = b$, $NH = h$, $A_1H = R_1$, $\angle NA_1H = \alpha$. Учитывая, что A_1H – высота прямоугольного треугольника A_1MN, проведенная к его гипотенузе, получим соотношения, которыми удобно пользоваться при решении задач на вычисление элементов правильной пирамиды: $b^2 = 2Rh$, $R_1^2 = (2R-h)h$, $a = 2R_1\sin\frac{\pi}{n}$, $b = 2R\sin\alpha$, $h = b\sin a$, $R_1 = b\cos\alpha$.

Центр сферы, вписанной в правильную пирамиду, всегда лежит внутри пирамиды на ее высоте. Пусть NK – апофема правильной n-угольной пирамиды $NA_1A_2\ldots A_n$ (на рисунке 2 изображена лишь часть пирамиды). Поскольку $NK \perp A_1A_2$ и $NH \perp A_1A_2$, то ребро

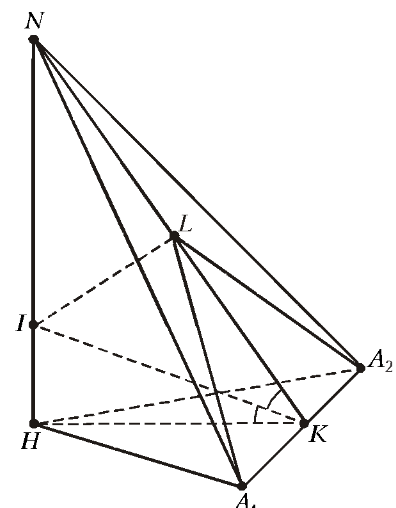


Рис. 2

A_1A_2 перпендикулярно плоскости NHK в силу теоремы о двух перпендикулярах. Проведем биссектрису угла HKN, она пересечет высоту NH в точке, которую обозначим через I. Докажем, что I – центр сферы, вписанной в пирамиду.

Проведем перпендикуляр IL к апофеме NK. Тогда $IL = IH$, и сфера радиусом IL с центром I касается основания пирамиды в точке H. Она касается также боковой грани NA_1A_2. Это следует из того, что $IL \perp A_1A_2$ и $IL \perp NK$. Значит, плоскость NA_1A_2 перпендикулярна радиусу IL и касается сферы в точке L. Поскольку при поворотах вокруг оси NH на углы $\frac{2\pi}{k}$ ($k = 1, 2, \ldots, n-1$) грань NA_1A_2 пирамиды переходит во все другие грани, а точка I остается неподвижной, то расстояния от точки I до всех граней пирамиды одинаковы и равны IL, т.е. сфера с центром I и радиусом IH является вписанной в пирамиду. Центр I

сферы есть точка пересечения высоты NH пирамиды и биссектрисы угла NKH ($\angle NKH$ – линейный угол двугранного угла при основании пирамиды).

Введем дополнительно следующие обозначения: $IH = r$, $NK = l$, $HK = m$, $\angle HKN = \beta$ и $\angle A_1NA_2 = \gamma$. Тогда имеем: $\frac{m}{l} = \cos\beta$, $\frac{r}{h-r} = \cos\beta$ (так как KL – биссектриса угла треугольника HKN, то $\frac{r}{h-r} = \frac{m}{l}$), $r = m\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $h = m\operatorname{tg}\beta$, $a = 2m\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$, $a = 2l\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$.

Пусть теперь $NA_1A_2\ldots A_n$ – правильная n-угольная пирамида, у которой центры O и I описанной и вписанной сфер совпадают. Тогда $A_1L = A_2L = NL$, как проекции равных наклонных IA_1, IA_2, IN. Значит, L – центр окружности, описанной около треугольника NA_1A_2, и поэтому $\angle A_1NA_2 = \frac{1}{2}\angle A_1LA_2$ (вписанный угол вдвое меньше центрального, опирающегося на ту же дугу). Поскольку I – центр вписанной сферы, то $IH = IL$. Значит, $KH = KL$ и $\angle A_1HA_2 = \angle A_1LA_2$ (поворотом вокруг оси A_1A_2 на угол β эти углы совмещаются). Следовательно, $\angle A_1NA_2 = \frac{\pi}{n}$. Тем самым доказано замечательное свойство пирамиды:

Теорема 1. *Если в правильной n-угольной пирамиде центры описанной и вписанной сфер совпадают, то плоский угол при вершине пирамиды равен $\frac{\pi}{n}$, т.е. сумма всех плоских углов при вершине равна π.*

Предлагаем читателю обратную теорему доказать самостоятельно.

Форма правильной n-угольной пирамиды определяется заданием одного из ее угловых элементов. Например, если известен угол α наклона бокового ребра к плоскости основания, то можно вычислить величину плоского угла γ при вершине пирамиды, или отношение высоты пирамиды к стороне основания и т.д. В таком случае говорят, что пирамида определена с точностью до подобия. Если задан один из углов и, кроме того, один линейный элемент пирамиды, то можно вычислить любые другие ее элементы. Например, если известны радиус R описанной сферы и угол α, то его высоту найдем прямым счетом: $b = 2R\sin\alpha$, $h = b\sin\alpha$, следовательно, $h = 2R\sin^2\alpha$ при любом n.

Приведем примеры более трудных задач, в которых раскрываются свойства правильной n-угольной пирамиды.

Задача 1. *Боковое ребро правильной n-угольной пирамиды наклонено к плоскости основания под углом α, двугранный угол при основании равен β, плоский угол при вершине равен γ. Докажите, что*

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}\sin\frac{\gamma}{2},$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Решение. Пусть AB – сторона основания правильной n-угольной пирамиды, NH – высота пирамиды, LK – ее апофема (рис.3). Тогда $\angle NAH = \alpha$, $\angle NKH = \beta$, $\angle ANB = \gamma$ и $\angle AHB = \frac{2\pi}{n}$.

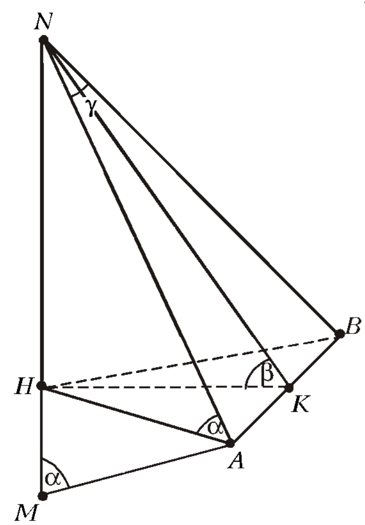


Рис. 3

Из прямоугольных треугольников ANH и ANK, имеющих общую гипотенузу $AN = b$, находим

$$AH = b\cos\alpha,\ AK = b\sin\frac{\gamma}{2}.$$

А так как $AK = AH\sin\frac{\pi}{n}$, то $\cos\alpha = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}\sin\frac{\gamma}{2}$.

Аналогично найдем соотношение между углами β и γ. Имеем:

$$HK = l\cos\beta,\ AK = l\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2},$$

где $l = KN$. А так как $HK = NK\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$, то $\cos\beta = = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$.

Прежде чем знакомиться с решением следующей задачи, предлагаем читателю самостоятельно решить ее для частного случая, полагая $n = 3$ или $n = 4$.

Задача 2. *Пусть r и R – радиусы вписанной и описанной сфер правильной n-угольной пирамиды, h – ее высота, γ – плоский угол при вершине пирамиды. Докажите, что*

$$\frac{h}{R} = \frac{\left(1+k^2\right)\cos\gamma + k^2 - 1}{k^2},$$

$$\frac{r}{R} = \frac{k\sin\gamma + \cos\gamma - 1}{k^2},$$

где $k = \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$.

Решение. Применим способ введения вспомогательного угла. Пусть $\angle NAH = \alpha$ (см. рис.3). Тогда

$$h = 2R\sin^2\alpha = 2R\left(1-\cos^2\alpha\right).$$

Воспользуемся результатом задачи 1:

$$\cos\alpha = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Получим

$$h = 2R\left(1 - \frac{\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\sin^2\frac{\pi}{n}}\right).$$

Выполним несложные преобразования:

$$2\sin^2\frac{\gamma}{2} = 1 - \cos\gamma,$$

$$\sin^2\frac{\pi}{n} = \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}\cdot\cos^2\frac{\pi}{n} = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}} = \frac{k^2}{1+k^2},$$

и выражение для h приводится к виду

$$h = 2R\left(1 - \frac{\left(1+k^2\right)\left(1-\cos\gamma\right)}{2k^2}\right),$$

откуда

$$\frac{h}{k} = \frac{\left(1+k^2\right)\cos\gamma + k^2 - 1}{k^2}.$$

Для доказательства второго соотношения введем вспомогательные отрезки. Обозначим $AB = 2a$, $NK = l$, $HK = m$, $NH = h$.

Из треугольников AMN и AKN находим: $b^2 = 2Rh$ и $b^2 = a^2 + l^2$. Отсюда

$$R = \frac{a^2 + l^2}{2h}.$$

Так как KI – биссектриса треугольника HKN, то

$$\frac{r}{h-r} = \frac{m}{l},\ \text{откуда}\ r = \frac{hm}{l+m}.$$

Таким образом,

$$\frac{r}{R} = \frac{2h^2m}{\left(l+m\right)\left(a^2+l^2\right)}.$$

Из правой части полученного равенства исключим вспомогательные неизвестные h и m. Так как $h^2 = l^2 - m^2$ и $m = a\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$, то после несложных преобразований получим

$$\frac{r}{R} = \frac{2(kl-a)a}{\left(a^2+l^2\right)k^2}, \text{ где } k = \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}.$$

Числитель и знаменатель выражения, стоящего в правой части равенства, разделим на l^2. Учитывая, что $\frac{a}{l} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, будем иметь

$$\frac{r}{R} = \frac{2\left(k - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right)k^2}.$$

А так как $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}} = \sin\gamma$ и $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma}$, окончательно получим

$$\frac{r}{R} = \frac{l\sin\gamma + \cos\gamma - 1}{k^2}.$$

Задача 3. *Радиус сферы, описанной около правильной n-угольной пирамиды, в три раза больше радиуса вписанной сферы. Найдите величину двугранного угла при основании пирамиды.*

Решение. Воспользуемся формулой, полученной при решении задачи 2:

$$\frac{r}{R} = \frac{k\sin\gamma + \cos\gamma - 1}{k^2}, \text{ где } k = \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}.$$

Согласно условию задачи имеем

$$3(k\sin\gamma + \cos\gamma - 1) = k^2.$$

Для решения этого уравнения выразим $\sin\gamma$ и $\cos\gamma$ через $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$. Обозначим $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = x$, получим

$$\left(6+k^2\right)x^2 - 6kx + k^2 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{\left(3 \pm \sqrt{3-k^2}\right)k}{6+k^2}.$$

При $n = 3$ получим: $k = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $x = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, следовательно, $\gamma = 60°$ и пирамида является правильным тетраэдром.

Если $n = 4, 5, 6, \ldots$, то $k = \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} < \sqrt{3}$, и уравнение имеет два положительных корня, удовлетворяющих условию задачи:

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\left(3 \pm \sqrt{3-k^2}\right)k}{6+k^2}.$$

Используя соотношение задачи 1, найдем, что

$$\cos\beta = \frac{3 \pm \sqrt{3-k^2}}{6+k^2}.$$

Аналогично, с использованием формул задачи 2, решается следующая задача.

Задача 4. *Найдите величину двугранного угла при основании правильной n-угольной пирамиды, у которой центры вписанной и описанной сфер симметричны относительно плоскости основания.*

Указание. Центры сфер симметричны относительно плоскости основания тогда и только тогда, когда $h + r = R$, или $\frac{h}{R} + \frac{r}{R} = 1$. Получаем уравнение

$$\left(2+k^2\right)\cos\gamma + k\sin\gamma - 2 = 0.$$

Вычислив $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, воспользуйтесь формулой задачи 1: $\cos\beta = \frac{1}{k}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, и установите, что

$$\cos\beta = \frac{1+\sqrt{5+k^2}}{4+k^2}.$$

Задача при любом n имеет решение, так как $\sqrt{5+k^2} < 3 + k^2$.

Задача 5. *Докажите, что расстояние d между центрами вписанной и описанной сфер правильной n-угольной пирамиды выражается формулой*

$$d = R\frac{\left|\sin\left(\gamma - \frac{\pi}{n}\right)\right|}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Указание. Пусть N – вершина правильной пирамиды, I – центр вписанной сферы и O – центр описанной сферы. Тогда $NI = h - r$, $NO = R$ и $d = IO = |NO - NI| = |R + r - h|$.

Остается воспользоваться формулами задачи 2 и выполнить несложные преобразования.

Из формулы

$$d = \frac{R\left|\sin\left(\gamma - \frac{\pi}{n}\right)\right|}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

следует, что $d = 0$ (т.е. центры вписанной и описанной сфер совпадают) тогда и только тогда, когда $\gamma = \frac{\pi}{n}$ (аналитическое доказательство теоремы 1).

Как известно, в случае тетраэдра $\frac{R}{r} \geq 3$, причем $\frac{R}{r} = 3$ тогда и только тогда, когда тетраэдр правильный.

Выясним, каково аналогичное свойство правильной пирамиды.

Воспользуемся формулой

$$\frac{R}{r} = \frac{k^2}{k\sin\gamma + \cos\gamma - 1}, \quad 0 < \gamma < \frac{2\pi}{n}.$$

Легко проверить истинность тождества

$$(k\sin\gamma + \cos\gamma)^2 + (k\cos\gamma - \sin\gamma)^2 = 1 + k^2,$$

откуда

$$k\sin\gamma + \cos\gamma \leq \sqrt{1+k^2}.$$

Значит,

$$\frac{R}{r} \geq \frac{k^2}{\sqrt{1-k^2} - 1} = 1 + \sqrt{1+k^2} = 1 + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}},$$

причем равенство достигается только тогда, когда

$$k\cos\gamma - \sin\gamma = 0, \text{ или } \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\frac{\pi}{n},$$

т.е. $\gamma = \frac{\pi}{n}$. Таким образом, получен следующий результат:

Теорема 2. *Пусть R и r – радиусы описанной и вписанной сфер правильной n-угольной пирамиды. Тогда*

$$\frac{R}{r} \geq 1 + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда центры сфер совпадают.

В заключение предлагаем еще несколько задач о правильной пирамиде, вписанной в сферу, для самостоятельного решения. Особое внимание следует обратить на выполнение чертежа. Заметим, что часто можно обойтись без изображения сферы. При решении большинства задач достаточно простроить диаметр MN описанной около пирамиды сферы и рассмотреть прямоугольный треугольник AMN, где A – любая вершина основания (см. рис.3).

Задача 6. *Центр сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды, совпадает с центром основания пирамиды. Найдите отношение радиуса R этой сферы к радиусу r вписанной в пирамиду сферы.*

Указание. Пусть $NABC$ – данная правильная пирамида, NH – ее высота, NK – апофема. Радиус вписанной сферы равен радиусу окружности с центром I на высоте пирамиды, касающейся сторон угла AKN (рис.4). Так как KI – биссектриса треугольника HKN,

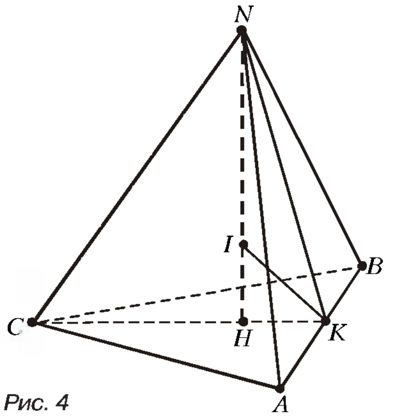


Рис. 4

то

$$\frac{R-r}{r}=\frac{KN}{KH}.$$

Ответ: $\frac{R}{r}=1+\sqrt{5}$.

Задача 7. *Отношение высоты правильной треугольной пирамиды к радиусу описанной около нее сферы равно k. Найдите величину угла δ между ее боковыми гранями. Вычислите δ при* $k=\frac{2}{3}$.

Ответ: $\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}=\sqrt{\frac{2}{3k}}$; при $k=\frac{2}{3}$ $\delta=90°$.

Задача 8. *Отношение радиуса сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, к стороне основания равно* $\sqrt{2}$. *Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости ее основания.*

Ответ: 15° и 75°.

Задача 9. *В сферу с радиусом R вписана правильная четырехугольная пирамида, плоский угол при вершине которой равен* γ. *Найдите площадь боковой поверхности пирамиды. При каком значении* γ *эта площадь будет наибольшей?*

Ответ: $S_{\text{бок}}=4R^2\sin 2\gamma$. Площадь наибольшая при $\gamma=45°$.

Задача 10. *В правильную четырехугольную пирамиду вписана сфера. Расстояние от центра сферы до вершины пирамиды равно d, плоский угол при вершине пирамиды равен* γ. *Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды. Каковы допустимые значения* γ?

Ответ: $R=\frac{d}{1+\sqrt{2}\cos(45°+\gamma)}$, $0°<\gamma<45°$.

Задача 11. *Правильная n-угольная пирамида вписана в сферу с радиусом R. Высота пирамиды равна h. Найдите объем пирамиды. При каком значении h объем будет наибольшим?*

Указание. Объем пирамиды вычисляется по формуле

$$V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}h.$$

Если R_1 – радиус окружности, описанной около основания, то

$$S_{\text{осн}}=\frac{n}{2}R_1^2\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{n}{2}(2R-h)h\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Ответ: $V=\frac{n}{6}(2R-h)h^2\sin\frac{2\pi}{n}$.

Объем пирамиды наибольший при $h=\frac{4}{3}R$ (независимо от n).

Примечание. Наибольшее значение V можно найти без использования производной, если заметить, что сумма сомножителей произведения $(4R-2h)\cdot h\cdot h$ постоянна (равна $4R$), поэтому произведение принимает наибольшее значение при $h=4R-2h$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Куда проскользнет палочка?

А.ЧЕРНОУЦАН

ПОСТАВИМ тонкую палочку вертикально на горизонтальную плоскость и отпустим. Палочка начнет падать, а ее нижний конец через некоторое время сдвинется с места и будет скользить по плоскости. Можно ли заранее предсказать, куда сдвинется нижний конец – в ту же сторону, куда упадет палочка, или в противоположную?

В одном случае ответ хорошо известен: если трения нет, то палочка сразу же начнет проскальзывать в сторону, противоположную падению. Объяснение очень простое – в отсутствие горизонтальных внешних сил центр масс палочки может смещаться только по вертикали.

Можно ожидать, что при малом трении направление проскальзывания будет таким же, причем начнется проскальзывание при небольшом отклонении палочки от вертикали. А вот при достаточно большом трении ответ уже не столь очевиден. Интуитивно чувствуется, что если палочка не начнет проскальзывать при небольших углах отклонения, то потом за счет приобретенной горизонтальной скорости она скорее проскользнет вперед, по движению (верхняя часть палочки «потянет» за собой нижнюю). Чтобы проверить такое предположение, проведем расчет движения палочки и найдем, при каком наклоне палочки начнется проскальзывание и куда будет в этот момент направлена сила трения (она всегда направлена против направления проскальзывания).

Для проведения расчетов нам понадобятся некоторые простые сведения из динамики твердого тела. Во-первых, при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси выполняется уравнение динамики $M=I\varepsilon$, где M — момент внешних сил относительно оси вращения, ε — угловое ускорение, а I – момент инерции тела относительно оси. Это уравнение для описания вращательного движения играет такую же роль, как второй закон Ньютона – для поступательного. В случае если ось вращения проходит через конец палочки, ее момент инерции равен $I=ml^2/3$, где m – масса и l – длина палочки. Во-вторых, кинетическая энергия вращающегося твердого тела равна $I\omega^2/2$, где ω — угловая скорость вращения.

Построим решение следующим образом. Сначала будем считать, что нижний конец палочки прикреплен к плоскости шарниром, и найдем зависимость силы реакции в шарнире от угла наклона палочки α (не беспокоясь о проскальзывании или отрыве от плоскости). Вертикальную составляющую

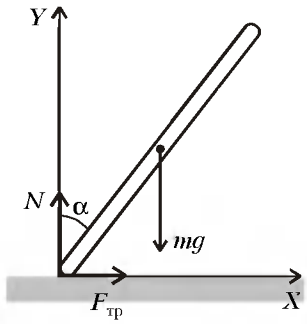


Рис. 1

силы реакции обозначим $\vec{N}$, а горизонтальную $\vec{F}_{тр}$ (рис. 1). Положительное направление для $\vec{N}$ выберем вверх, а для $\vec{F}_{тр}$ — вправо, в сторону падения. Найдя зависимости $N(\alpha)$ и $F_{тр}(\alpha)$ при всех α, мы сможем установить, при каком угле в первый раз выполнится условие проскальзывания

$$\left|F_{тр}(\alpha)\right| = \mu N(\alpha),$$

где μ — коэффициент трения.

Чтобы найти $F_{тр}$ и N, запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси X и Y:

$$F_{тр} = ma_x, \quad N - mg = ma_y.$$

При падении палочки ее центр масс движется по окружности радиусом $l/2$. Пусть в тот момент, когда палочка составляет угол α с вертикалью, ее угловая скорость равна ω, а угловое ускорение равно ε. Тогда нормальное (центростремительное) ускорение центра масс равно $a_n = \omega^2 l/2$, а тангенциальное ускорение (направленное по касательной к окружности) – $a_\tau = \varepsilon l/2$ (рис.2). Отсюда получаем проекции ускорения $\vec{a}$ на горизонтальную и вертикальную оси:

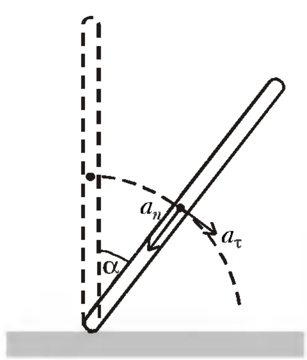


Рис. 2

$$a_x = \varepsilon \frac{l}{2}\cos\alpha - \omega^2 \frac{l}{2}\sin\alpha,$$

$$a_y = -\varepsilon \frac{l}{2}\sin\alpha - \omega^2 \frac{l}{2}\cos\alpha.$$

Нам осталось только определить зависимости ε и ω^2 от угла α. Для этого запишем закон динамики вращательного движения палочки:

$$mg\frac{l}{2}\sin\alpha = \frac{ml^2}{3}\varepsilon$$

и закон сохранения энергии:

$$mg\frac{l}{2}(1-\cos\alpha) = \frac{ml^2}{3}\frac{\omega^2}{2}.$$

Тогда для проекций ускорения получаем следующие выражения:

$$a_x = \frac{9}{4}g\sin\alpha\left(\cos\alpha - \frac{2}{3}\right),$$

$$a_y = \frac{9}{4}g\left(\cos\alpha - \frac{1}{3}\right)^2 - g,$$

откуда находим $F_{тр}$ и N:

$$F_{тр} = \frac{9}{4}mg\sin\alpha\left(\cos\alpha - \frac{2}{3}\right),$$

$$N = \frac{9}{4}mg\left(\cos\alpha - \frac{1}{3}\right)^2.$$

Проанализируем полученные выражения, считая теперь нижний конец палочки свободным. Видно, что при угле $\alpha_1 = \arccos(2/3) \approx 48°$ сила трения меняет знак. Значит, если проскальзывание начнется при угле меньшем α_1, то оно будет происходить против направления падения. Если же в интервале углов $0 < \alpha < \alpha_1$ палочка не начнет проскальзывать, то в итоге она проскользнет в сторону падения.

А почему мы так уверены, что палочка вообще начнет проскальзывать? Это следует из выражения для N: поскольку при $\alpha_2 = \arccos(1/3) \approx 71°$ сила реакции обращается в ноль, то при любом коэффициенте трения условие проскальзывания $F_{тр} = \mu N$ наступит при угле меньшем α_2.

Чтобы выяснить, как зависит угол отклонения палочки в момент проскальзывания от коэффициента трения μ, надо решить уравнение

$$\mu = \frac{\left|F_{тр}\right|}{N} = \frac{\left|\sin\alpha(\cos\alpha - 2/3)\right|}{(\cos\alpha - 1/3)^2}.$$

Функция, стоящая в правой части уравнения, изображена на рисунке 3. Эта функция имеет один максимум при угле α_0, положение которого можно найти численным расчетом. Правда, если вы наберетесь терпения и возьмете производную по α, то в конце вас ждет награда: условие максимума сводится к уравнению $\cos\alpha_0 = 9/11$. Значение функции в максимуме равно $\mu_0 = 15\sqrt{10}/128 \approx 0{,}37$.

Пора делать выводы. Из рисунка 3 следует, что при $0 < \mu < \mu_0 \approx 0{,}37$ уравнение $\left|F_{тр}\right| = \mu N$ имеет три решения, из которых началу проскальзывания соответствует наименьший угол, лежащий в интервале $0 < \alpha < \alpha_0$, где $\alpha_0 = \arccos(9/11) \approx 35°$. При $\mu < \mu_0$ проскальзывание происходит в сторону, противоположную падению, а при $\mu > \mu_0$ проскальзывание будет происходить в сторону падения при угле наклона, лежащем в интервале $\alpha_3 < \alpha < \alpha_2$ ($\alpha_2 = \arccos(1/3) \approx 71°$, смысл угла $\alpha_3 \approx 51°$ ясен из графика на рисунке 3).

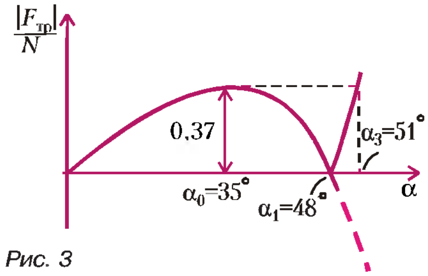


Рис. 3

Как видим, обсуждение конкретной задачи превратилось в маленькое исследование, а точное решение оказалось «богаче» поставленного вопроса: вскрылись такие черты явления, о которых мы заранее не догадывались. Что же именно мы узнали?

Во-первых, мы подтвердили начальное качественное предположение: при достаточно большом коэффициенте трения ($\mu > 0{,}37$) палочка будет проскальзывать в сторону падения (рис.4).

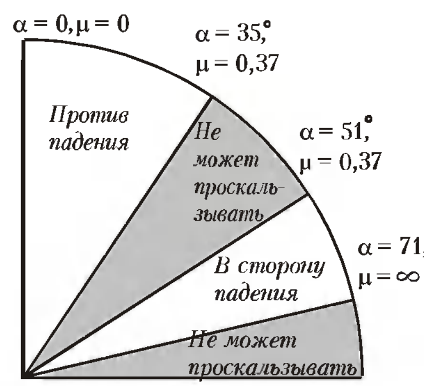


Рис. 4

Во-вторых, мы выяснили, что при любом сколь угодно большом μ проскальзывание начнется при угле отклонения, меньшем 71°. В-третьих, оказалось, что проскальзывание никогда не может начинаться в интервале углов от 35° до 51°. Согласитесь, что трудно было бы догадаться до всего этого заранее.

Диагонально-перпендикулярное отображение четырехугольников

А.ЗАСЛАВСКИЙ

Поводом к написанию этой заметки послужила задача М1154 из «Задачника Кванта»: *докажите, что если четырехугольник является вписанным в окружность и описанным вокруг другой окружности, то прямая, соединяющая центры этих окружностей, проходит через точку пересечения диагоналей четырехугольника.*

Эту задачу можно решать разными способами. В частности, одно из решений приводится в «Кванте» (№8 за 1989 год). Нашей же целью будет формулировка и доказательство более общего утверждения, в котором будет рассматриваться произвольный четырехугольник. Основным инструментом для нас будет диагонально-перпендикулярное отображение, которое мы определим следующим образом:

Определение. Возьмем произвольный четырехугольник $ABCD$ и из точки O пересечения его диагоналей опустим перпендикуляры OK, OL, OM, ON на его стороны. Четырехугольник $KLMN$ будем называть *образом* четырехугольника $ABCD$ при *диагонально-перпендикулярном отображении* (рис.1).

Примечание 1. Строго говоря, наше определение не является вполне корректным, так как четырехугольник $KLMN$ может оказаться вырожденным: три или даже все четыре его вершины могут лежать на одной прямой. Впрочем, для дальнейшего изложения это несущественно.

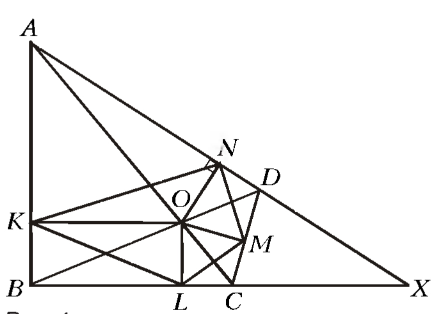


Рис. 1

Исследуем свойства нашего отображения. Прежде всего выясним, можно ли восстановить четырехугольник $ABCD$ по четырехугольнику $KLMN$.

Продолжим на рисунке 1 стороны BC и AD до их пересечения в точке X. Очевидно, что $\angle BXA = \angle BOA - \angle OBC - \angle OAD$. Но четырехугольник $OKBL$ – вписанный, так как его противоположные углы прямые. Поэтому $\angle OBC = \angle LKO$. Аналогично, $\angle OAD = \angle OKN$, и значит, $\angle BXA = \angle BOA - \angle LKN$. С другой стороны, $\angle BOA = (\angle BOA + \angle COD)/2 = (\angle OBC + \angle OCB + \angle OAD + \angle ODA)/2 = (\angle OKL + \angle OKN + \angle OML + \angle OMN)/2 = (\angle LKN + \angle LMN)/2$. Таким образом, $\angle BXA = (\angle LMN - \angle LKN)/2$, и следовательно, $\angle LON = \pi - (\angle LMN - \angle LKN)/2$. Аналогично, $\angle KOM = \pi - (-\angle KNM)/2$.

Мы видим, что четырехугольник $KLMN$ однозначно определяет точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ (известны углы, под которыми видны из точки O диагонали четырехугольника). Нетрудно проверить также, что если соединить построенную таким образом точку O с вершинами $KLMN$ и провести через них перпендикуляры к соответствующим отрезкам, то диагонали получившегося четырехугольника пересекутся в точке O (непосредственное вычисление дает $\angle BOD = \angle COA = \pi$). Следовательно, диагонально-перпендикулярный образ позволяет однозначно восстановить исходный четырехугольник.

Продолжим изучение свойств диагонально-перпендикулярного отображения. Прежде всего докажем

Утверждение 1. *В четырехугольник $KLMN$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность, причем центром окружности, вписанной в $KLMN$, является точка O пересечения диагоналей $ABCD$.*

Доказательство. Если четырехугольник $ABCD$ – вписанный, то углы OBC и OAD равны. Но $\angle OBC = \angle OKL$, $\angle OAD = \angle OKN$, т.е. OK – биссектриса угла K четырехугольника $KLMN$. Аналогично, точно O лежит на биссектрисах остальных углов $KLMN$, и значит, совпадает с центром вписанной в него окружности. С другой стороны, если четырехугольник $KLMN$ – описанный, то соединив центр вписанной окружности с его вершинами и построив четырехугольник $ABCD$, получим, что углы OBC и OAD равны, и точки A, B, C, D лежат на окружности.

Утверждение 1 дает возможность обобщить понятие центра вписанной окружности на четырехугольник, не являющийся описанным: будем называть квазицентром вписанной окружности четырехугольника $KLMN$ точку пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, являющегося диагонально-перпендикулярным прообразом $KLMN$.

Попробуем теперь обобщить понятие центра описанной окружности. Для этого прежде всего сформулируем

Утверждение 2. *Четырехугольник $KLMN$ является вписанным тогда и только тогда, когда диагонали четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны.*

Доказательство. Ранее было показано, что угол между диагоналями четырехугольника $ABCD$ равен полусумме противоположных углов четырехугольника $KLMN$. Утверждение 2 является очевидным следствием этого.

Выясним, где находится центр окружности, описанной около четырехугольника $KLMN$. Продолжим отрезки OK, OL, OM, ON за точку O до пересечения с противоположными сторонами четырехугольника $ABCD$ в точках соответственно K', L', M', N'. Докажите самостоятельно следующие утверждения (рис.2):

Утверждение 3. *$K'L'M'N'$ – прямоугольник, стороны которого параллельны диагоналям $ABCD$.*

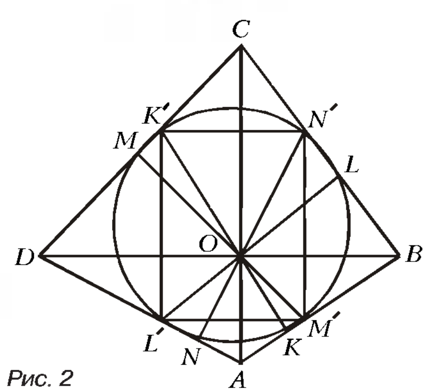


Рис. 2

Утверждение 4. *8 точек K, L, M, N, K′, L′, M′, N′ лежат на одной окружности.*

Из утверждений 3 и 4 вытекает, что центр окружности, описанной около четырехугольника $KLMN$, совпадает с точкой пересечения прямых $K'M'$ и $L'N'$. Поэтому для произвольного четырехугольника полученную таким образом точку будем называть квазицентром описанной окружности.

Примечание 2. В этом месте в наших рассуждениях вновь оказалась нестрогость. Действительно, одна или даже обе пары противоположных сторон четырехугольника $ABCD$ могут быть взаимно перпендикулярными, тогда какие-то из точек K', L', M', N' не будут определены. Используя аппарат проективной геометрии, можно изменить формулировки всех утверждений, чтобы включить и эти случаи, но сейчас мы не будем этого делать.

Итак, мы обобщили понятия центров вписанной и описанной окружности на случай произвольного четырехугольника, и нам осталось выяснить, проходит ли прямая, соединяющая эти центры, через точку пересечения его диагоналей. Сформулируем этот вопрос в виде следующего утверждения:

Утверждение 5. *Из точки O пересечения диагоналей четырехугольника ABCD опущены на его стороны перпендикуляры OK, OL, OM, ON. Их продолжения за точку O пересекают противоположные стороны четырехугольника в точках K′, L′, M′, N′. Прямые KM и LN пересекаются в точке P, K′M′ и L′N′ – в точке P′. Тогда точки P, O, P′ лежат на одной прямой.*

Утверждение 5 действительно является верным. Более того, для его справедливости не требуется, чтобы отрезки OK, OL, OM, ON были перпендикулярны сторонам четырехугольника. Чтобы доказать это, воспользуемся центральной проекцией.

Обозначим плоскость четырехугольника $ABCD$ через α. Пусть противоположные стороны четырехугольника пересекаются в точках X и Y. Возьмем произвольную плоскость α', пересекающую α по прямой, параллельной XY, и точку Z, не лежащую ни в одной из плоскостей, такую, что плоскость XYZ параллельна α'. Легко видеть, что при проекции из точки Z на плоскость α' четырехугольник $ABCD$ переходит в параллелограмм. Соответственно, образы точек K и K', L и L', M и M', N и N' будут симметричны относительно образа точки O, и значит, симметричны будут и соединяющие их прямые и точки их пересечения P и P', что и требовалось доказать.

Примечание 3. Четырехугольник $ABCD$ может быть невыпуклым. В этом случае его образом при центральной проекции будет не параллелограмм, а фигура, состоящая из двух ломаных (начертите ее). Однако доказательство утверждения 5 проходит и в этом случае без каких-либо изменений. Читателям, знакомым с проективной геометрией, понятно, что наша центральная проекция эквивалентна проективному преобразованию, переводящему прямую XY в бесконечно удаленную.

И в заключение три вопроса, ответы на которые автору неизвестны:

1. Какими еще свойствами обладает диагонально-перпендикулярное отображение (точнее, какие свойства четырехугольника $ABCD$ и $KLMN$ соответствуют друг другу)?

2. Обладают ли какими-либо специальными свойствами четырехугольники $K'L'M'N'$ или любой четырехугольник можно получить таким способом из хотя бы одного четырехугольника $ABCD$ (то, что четырехугольник $ABCD$ может быть не единственным, видно из утверждения 3)?

3. Для вписанно-описанных многоугольников выполняются соотношения:

$$1/r^2 = 1/(R+d)^2 + 1/(R-d)^2,$$

$$(R+d_1)/(R+d_1) = (R+d)^2/(R-d)^2,$$

где R, r – радиусы описанной и вписанной окружностей, d – расстояние между их центрами, d_1 – расстояние от центра описанной окружности до точки пересечения диагоналей. Пользуясь этим соотношениями, определим для произвольного четырехугольника «квазирадиусы» описанной и вписанной окружностей (для этого должно быть $2d > d_1$, но, по-видимому, это выполняется всегда). Можно ли дать этим понятиям содержательную геометрическую интерпретацию?

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Катушки индуктивности в электрических цепях

В.МОЖАЕВ

ПРЕЖДЕ всего поясним, что имеют в виду, когда говорят о катушке индуктивности. Любой элемент электрической цепи обладает индуктивностью. Например, кусок провода длиной 1 м и диаметром 1 мм в вакууме имеет индуктивность 10^{-6} Гн. Такого порядка индуктивность в реальных электрических цепях существует всегда, и ее обычно называют паразитной индуктивностью. А когда говорят о катушке индуктивности, то подразумевают индуктивность, которая сосредоточена в одном элементе цепи – в катушке – и по величине превосходит паразитную на два и более порядков.

Как правило, катушка индуктивности представляет собой достаточно большое количество витков изолированного провода, намотанного на цилиндрический или тороидальный каркас, причем для увеличения индуктивности каркасы заменяют на магнитные сердечники в виде цилиндров или торов. Витки наматываются в одну сторону, т.е., если через катушку протекает ток, все направления токов в витках совпадают (по часовой стрелке или против часовой стрелки).

Все реальные катушки индуктивности (кроме сверхпроводящих) обладают омическим сопротивлением, поэтому эквивалентной схемой такой катушки является последовательное соединение идеальной катушки, обладающей чисто индуктивным сопротивлением, и резистора, сопротивление которого равно сопротивлению обмотки. Однако во всехзадачах, разбираемых в этой статье, под катушкой индуктивности будет подразумеваться идеальная индуктивность (чисто реактивный элемент).

Теперь обсудим, какова роль катушки индуктивности, входящей в состав замкнутой электрической цепи. При протекании через катушку постоянного тока она является пассивным элементом, не оказывающим на протекающий ток никакого влияния. Но она была активна тогда, когда происходило установление этого тока, — за это время катушка аккумулировала в себя динамическую энергию носителей тока в виде энергии магнитного поля. При токе через катушку I и ее индуктивности L эта энергия равна $LI^2/2$.

Наиболее интересно ведет себя катушка индуктивности в те моменты, когда происходит изменение протекаемого через нее тока. Изменение тока приводит к изменению магнитного поля внутри катушки, что, в свою очередь, вызывает появление вихревого электрического поля. По правилу Ленца, в моменты нарастания тока напряженность вихревого электрического поля внутри витков катушки направлена против тока, а в моменты уменьшения тока – вдоль тока. Работа, совершаемая вихревым электрическим полем по перемещению единичного положительного заряда вдоль всей обмотки катушки, численно равна ЭДС самоиндукции катушки. При постоянной индуктивности катушки ЭДС самоиндукции равна $\mathcal{E}_s = -L\dfrac{dI}{dt}$.

Рассмотрим теперь несколько конкретных примеров поведения катушек индуктивности в электрической цепи.

Задача 1. *В схеме, изображенной на рисунке 1, переключатель П находится в положении «1» (цепь обесточена). Параметры схемы указаны на рисунке, внутреннее сопротивление батареи пренебрежимо мало. 1) Определите начальные токи через второй резистор (R_2) и катушку индуктивности сразу после перевода переключателя в положение «2». 2) Чему будут равны эти токи после установления стационарного состояния? 3) Какое количество теплоты выделится на втором резисторе при переводе переключателя из положения «2» в положение «3»?*

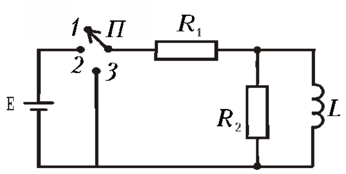


Рис. 1

1) За время замыкания (установление хорошего контакта), которое чрезвычайно мало, появляющийся ток в катушке вызовет ЭДС самоиндукции, которая будет препятствовать возникновению этого тока, поэтому ток в катушке будет равен нулю. С другой стороны, ничто не препятствует установлению тока, который будет протекать через источник и резисторы, при этом ток через резистор сопротивлением R_2 будет равен

$$I_{R_2} = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}.$$

2) Дальше будет происходить следующее. Поскольку в начальный момент ток в катушке равен нулю, но не равна нулю его производная dI/dt, ток в катушке будет нарастать, а ток во втором резисторе – уменьшаться соответственно равенству $LdI/dt = I_{R_2}R_2$. Будет идти переходной процесс. В стационарном состоянии производная dI/dt должна быть равна нулю, следовательно, должен быть равен нулю и ток через второй резистор. Ток в цепи будет теперь течь через первый резистор (R_1) и катушку и будет равен

$$I_L = \frac{\mathcal{E}}{R_1}.$$

На рисунке 2 изображены графики зависимости токов I_{R_2} и I_L от времени в переходном процессе.

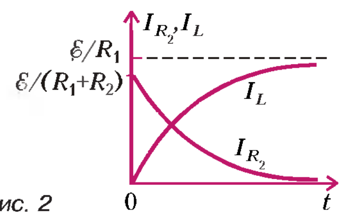


Рис. 2

3) После перевода переключателя в положение «3» в начальный момент в катушке течет ток $I_L = \mathcal{E}/R_1$. Очевидно, что в дальнейшем будет происходить рассеяние (диссипация) энергии, запасенной в катушке. Эта энергия выделится на резисторах в виде тепла:

$$Q_1 + Q_2 = \frac{LI_L^2}{2} = \frac{L\mathcal{E}^2}{2R_1^2}.$$

Поскольку резисторы соединены параллельно,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Из совместного решения последних двух уравнений получим

$$Q_2 = \frac{L\mathcal{E}^2}{2R_1(R_1 + R_2)}.$$

Задача 2. *В схеме на рисунке 3 ЭДС батареи $\mathcal{E}$, сопротивление резистора R, индуктивности катушек L_1 и L_2, оба ключа разомкнуты и цепь обесточена. Сначала замыкают ключ K_1, а через некоторое время, когда ток через резистор достигает значения I_0, замыкают ключ K_2. Определите установившиеся значения токов через катушки. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.*

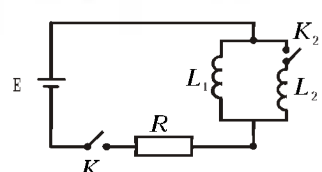


Рис. 3

В качестве отсчета времени выберем момент замыкания ключа K_2. Сразу после замыкания начальные токи в катушках равны $I_{10} = I_0$ и $I_{20} = 0$ соответственно. Поскольку катушки соединены параллельно, для произвольного момента времени t, полагая, что токи в катушках текут в одном направлении, можно записать

$$L_1\frac{dI_1}{dt} = L_2\frac{dI_2}{dt}.$$

Перепишем это равенство в виде

$$\frac{d}{dt}\left(L_1I_1 - L_2I_2\right) = 0,$$

откуда следует

$$L_1I_1 - L_2I_2 = \text{const}.$$

Из начальных условий найдем, что константа эта равна L_1I_0, следовательно, для любого момента времени (после замыкания ключа K_2) токи I_1 и I_2 в катушках связаны соотношением

$$L_1I_1 - L_2I_2 = L_1I_0. \qquad (1)$$

После установления стационарного состояния катушки становятся пассивными элементами, ЭДС самоиндукции в каждой из них равна нулю. Обозначим установившиеся токи через $I_{1у}$ и $I_{2у}$. На основании закона Ома для замкнутой цепи можно записать

$$\mathcal{E} = \left(I_{1у} + I_{2у}\right)R. \qquad (2)$$

Соотношение (1) справедливо для любого момента времени $t > 0$, следовательно, оно справедливо и для момента установления стационарного состояния:

$$L_1I_{1у} - L_2I_{2у} = L_1I_0. \qquad (3)$$

Совместное решение уравнений (2) и (3) позволяет найти $I_{1у}$ и $I_{2у}$:

$$I_{1у} = \frac{L_1I_0 + L_2\,\mathcal{E}/R}{L_1 + L_2},$$

$$I_{2у} = \frac{L_1\left(\mathcal{E}/R - I_0\right)}{L_1 + L_2}.$$

Задача 3. *На рисунке 4 изображена цепь, в которой в начальный момент ключ К разомкнут, а в замкнутом контуре схемы течет установившийся ток. Определите величину и направление тока через резистор (R) сразу после замыкания ключа. Параметры схемы: ЭДС первой батареи $\mathcal{E}_1$ = 10 В, внутренние сопротивления батарей r_1 = 5 Ом и r_2 = 20 Ом, сопротивление резистора R = 4 Ом.*

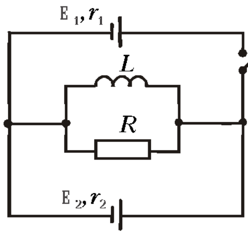


Рис. 4

До замыкания ключа через катушку течет ток $I_L = \mathcal{E}_2/r_2$, а ток через резистор равен нулю. Сразу после замыкания ключа ток через катушку остается неизменным. Если в этот момент через батареи текут токи I_1 и I_2 (рис.5), то

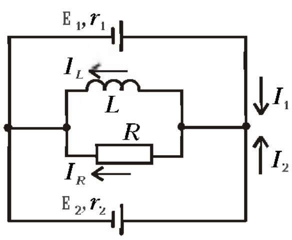


Рис. 5

ток через резистор, очевидно, будет равен

$$I_R = I_1 + I_2 - I_L.$$

На основании закона Ома (точнее – второго правила Кирхгофа) для двух контуров, охватывающих батарею и резистор, можно записать

$$\mathcal{E}_1 = I_1 r_1 + \left(I_1 + I_2 - I_L\right)R,$$

$$\mathcal{E}_2 = I_2 r_2 + \left(I_1 + I_2 - I_L\right)R.$$

Умножив первое уравнение на r_2, а второе на r_1 и сложив левые и правые части уравнений, получим

$$\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1 =$$

$$= \left(I_1 + I_2\right)\left(R\left(r_1 + r_2\right) + r_1 r_2\right) - I_L R\left(r_1 + r_2\right).$$

Используя выражение для I_L, найдем суммарный ток:

$$I_1 + I_2 = \frac{\mathcal{E}_1 r_2}{R\left(r_1 + r_2\right) + r_1 r_2} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2},$$

а также ток через резистор:

$$I_R = \frac{\mathcal{E}_1 r_2}{R\left(r_1 + r_2\right) + r_1 r_2} = 1 \text{ А}.$$

Поскольку мы получили положительное значение тока I_R, выбранное направление тока (см. рис.5) соответствует действительности.

Задача 4. *Электрическая цепь (рис.6) состоит из батареи с ЭДС* $\mathcal{E}$, *резистора сопротивлением* R *и катушки переменной индуктивности, начальное значение которой* L_0. *Через некоторое время после замыкания ключа К ЭДС самоиндукции в катушке равна* $\mathcal{E}_0$. *Начиная с этого момента, индуктивность катушки изменяют таким образом, что ЭДС самоиндукции остается постоянной и равной* $\mathcal{E}_0$. *1) Определите ЭДС самоиндукции в катушке сразу после замыкания ключа. 2) Найдите зависимость изменяющейся индуктивности катушки от времени. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.*

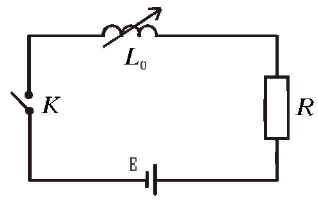


Рис. 6

1) Сразу после замыкания ключа начальный ток в цепи равен нулю, поэтому ЭДС самоиндукции равна ЭДС батареи, взятой с обратным знаком: $\mathcal{E}_s = -\mathcal{E}$.

2) Выберем за начало отсчета времени момент, когда ЭДС самоиндукции в катушке достигает значения $\mathcal{E}_0$, и рассмотрим произвольный момент времени t в этой системе отсчета. На основании закона Ома для замкнутой цепи можно записать

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = IR,$$

где I – сила тока в цепи в данный момент времени. Из этого уравнения следует, что ток в цепи, начиная с момента $t = 0$, будет оставаться постоянным и равным

$$I = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_0}{R}.$$

Следовательно, при $t > 0$ ЭДС самоиндукции будет определяться выражением

$$I\frac{dL}{dt} = \mathcal{E}_0.$$

Отсюда получаем

$$L = L_0 + \frac{\mathcal{E}_0}{I}t,$$

или, после подстановки выражения для тока,

$$L = L_0 + \frac{Rt}{\mathcal{E}/\mathcal{E}_0 - 1}.$$

Задача 5. *В колебательном контуре (рис.7) конденсатор емкостью* C *заряжен до некоторого напряжения. После замыкания ключа К в контуре происходят свободные незатухающие колебания, при которых амплитудное значение тока в катушке индуктивностью* L_2 *равно* I_{2m}. *Когда ток в катушке индуктивностью* L_1 *достигает максимального значения, из нее быстро (за время, малое по сравнению с периодом колебаний) выдвигают сердечник, что приводит к уменьшению ее индуктивности в* μ *раз. Найдите максимальное напряжение на конденсаторе при колебаниях в контуре после выдвижения сердечника.*

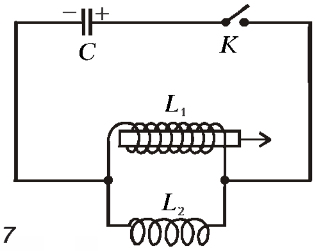


Рис. 7

В любой момент времени после замыкания ключа ЭДС самоиндукции катушек между собой равны:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{d\Phi_2}{dt},$$

где Φ_1 и Φ_2 — магнитные потоки, пронизывающие соответствующие катушки. В интегральной форме это равенство имеет вид

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \text{const}.$$

Поскольку сразу после замыкания ключа $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$, константа также равна нулю. Следовательно, в любой момент времени после замыкания ключа $\Phi_1 = \Phi_2$. Пока индуктивности катушек остаются неизменными, последнее равенство можно записать в виде $L_1 I_1 = L_2 I_2$, где I_1 и I_2 — токи в катушках. В тот момент, когда ток во второй катушке достигает максимального значения I_{2m}, ток в первой катушке будет также максимален и равен $I_{2m}L_2/L_1$.

После быстрого выдвижения сердечника магнитные потоки в катушках сохраняются. Для первой катушки это условие запишем так:

$$L_1 I_{1m} = \frac{L_1}{\mu} I'_{1m},$$

откуда найдем новый ток в катушке:

$$I'_{1m} = \mu I_{1m} = \frac{\mu L_2}{L_1} I_{2m}.$$

Сохранение магнитного потока для второй катушки означает сохранение тока в ней: $I'_{2m} = I_{2m}$.

Суммарная энергия магнитного поля катушек равна

$$W = \frac{L_1}{\mu}\frac{\left(I'_{1m}\right)^2}{2} + \frac{L_2 I_{2m}^2}{2} =$$

$$= \frac{L_2\left(L_1 + \mu L_2\right)}{2L_1} I_{2m}^2.$$

По закону сохранения энергии, энергия магнитного поля катушек будет полностью перекачиваться в энергию электрического поля конденсатора:

$$\frac{L_2(L_1+\mu L_2)}{2L_1}I_{2m}^2=\frac{CU_m^2}{2}.$$

Отсюда находим максимальное напряжение на конденсаторе:

$$U_m=I_{2m}\sqrt{\frac{L_2(L_1+\mu L_2)}{L_1C}}.$$

Задача 6. *Для подзарядки автомобильного аккумулятора с ЭДС $\mathcal{E}$ = 12 В от источника постоянного напряжения U_0 = 5 В собрана схема*

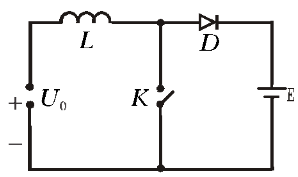


Рис. 8

(рис.8), содержащая катушку индуктивностью L = 0,1 Гн, идеальный диод D и прерыватель K, который периодически замыкается и размыкается на одинаковые промежутки времени τ_1 = τ_2 = 0,1 с. За какое время можно таким образом осуществить подзарядку аккумулятора на q = 0,1 ампер-часов? Омическими потерями пренебречь.

В начальный момент времени ключ K разомкнут и цепь обесточена. После замыкания переключателя в цепи, содержащей источник постоянного напряжения, катушку и ключ, начнет нарастать ток. Согласно закону Ома, для данной цепи можно записать

$$U_0-L\frac{dI}{dt}=0.$$

Поскольку начальный ток равен нулю, зависимость тока от времени имет вид

$$I(t)=\frac{U_0}{L}t.$$

Через время τ_1 ток в катушке станет равным $I(\tau_1)=U_0\tau_1/L$.

После размыкания ключа начинается процесс подзарядки аккумулятора. Закон Ома для новой замкнутой цепи запишется в виде

$$U_0-\mathcal{E}-L\frac{dI}{dt}=0,$$

или

$$\frac{dI}{dt}=-\frac{\mathcal{E}-U_0}{L}.$$

В этом режиме ток линейно спадает со временем по закону

$$I(t)=\frac{U_0}{L}\tau_1-\frac{(\mathcal{E}-U_0)t}{L}.$$

Через время $t_0=U_0\tau_1/(\mathcal{E}-U_0)$ ток в цепи упадет до нуля. Так как $\tau_2=\tau_1>t_0$, ток действительно прекратится и оставшееся время цепь будет обесточена, а после замыкания ключа все будет снова повторяться.

На рисунке 9 показана периодическая зависимость тока через катушку от

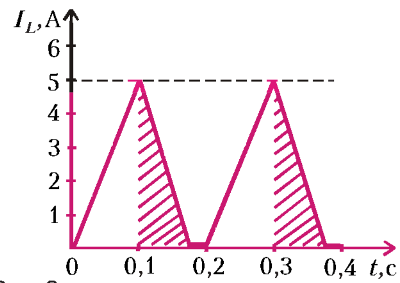


Рис. 9

времени. Заштрихованные участки соответствуют процессу подзарядки. Каждый цикл подзарядки протекает за время $t_з=\tau_1+\tau_2$, а заряд Δq, поступающий при этом в аккумулятор, равен заштрихованной площади:

$$\Delta q=\frac{1}{2}I_L(\tau_1)t_0=\frac{U_0^2\tau_1^2}{2L(\mathcal{E}-U_0)}.$$

Количество циклов N определяется отношением

$$N=\frac{q}{\Delta q}=\frac{2qL(\mathcal{E}-U_0)}{U_0^2\tau_1^2}.$$

Тогда полное время подзарядки равно

$$T=N(\tau_1+\tau_2)=$$

$$=\frac{2qL(\mathcal{E}-U_0)(\tau_1+\tau_2)}{U_0^2\tau_1^2}=22{,}4\ \text{часа}.$$

Упражнения

1. Какое количество теплоты выделится в схеме на рисунке 10 после размыкания ключа K? Параметры схемы указаны на

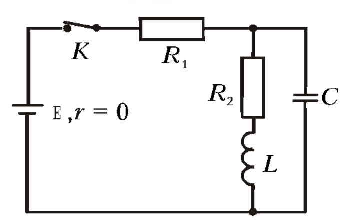


Рис. 10

рисунке.

2. В схеме, изображенной на рисунке 11, в начальный момент ключ K разомкнут, а в замкнутом контуре схемы течет установившийся ток. Определите величину и направление тока через резистор сразу после замыкания ключа. Параметры схемы: ЭДС второй батареи $\mathcal{E}_2$ = 10 В, ее внутреннее сопро-

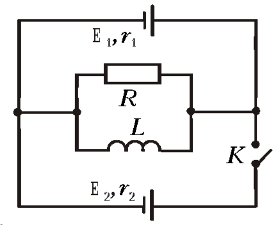


Рис. 11

тивление r_2 = 20 Ом, внутреннее сопротивление первой батареи r_1 = 5 Ом, сопротивление резистора R = 4 Ом.

3. Электрическая цепь (рис.12) включает в себя батарею с ЭДС $\mathcal{E}$, катушку индуктивностью L и переменное сопротивление, начальное значение которого равно R_0. Через

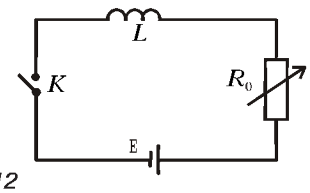


Рис. 12

некоторое время после замыкания ключа K ЭДС самоиндукции в катушке равна $\mathcal{E}_0$. Начиная с этого момента, переменное сопротивление изменяют таким образом, что ЭДС самоиндукции в катушке остается постоянной и равной $\mathcal{E}_0$. 1) Определите ЭДС самоиндукции в катушке сразу после замыкания ключа. 2) Найдите зависимость изменяющегося сопротивления от времени. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

4. В колебательном контуре, состоящем из двух последовательно соединенных катушек с индуктивностями L_1 и L_2 и конденсатора емкостью C (рис.13), происходят свободные незатухающие колебания, при которых амплитуда колебаний тока равна I_0. Когда сила тока в первой катушке максимальна, в нее быстро

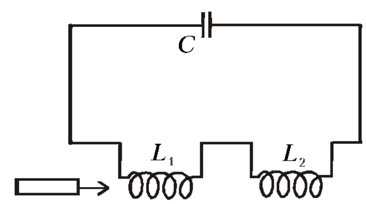


Рис. 13

(за время, малое по сравнению с периодом колебаний) вставляют сердечник, который приводит к увеличению ее индуктивности в μ раз. Определите максимальное напряжение на конденсаторе: 1) до вставки сердечника; 2) после вставки сердечника.

LXI Московская математическая олимпиада

Избранные задачи окружного тура

1. Тренер опросил всех шахматистов, сколько сегодня партий сыграл каждый из них. Шестеро ответили, что сыграли по две партии, трое – что сыграли по три партии. Могло ли такое быть? Если да, то сколько всего партий было сыграно? Если нет, то почему? (6)[1]

А.Котляров

2. Придумайте раскраску клеток доски 6×6 в четыре цвета так, чтобы любые две клетки, между которыми ровно одна клетка (по горизонтали, вертикали или диагонали), были покрашены в разные цвета. Соседние клетки можно красить в один цвет. (6)

3. Квадрат разрезан на четыре прямоугольника и квадрат (рис.1). Прямоугольники, содержащие вершины A и C, имеют соответственно размеры 1×4 и 2×5. Найдите сторону внутреннего квадрата. (7)

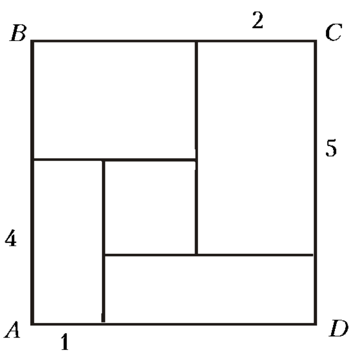


Рис. 1

4. Пройдя $3/8$ длины моста, ослик Иа-Иа заметил сзади на дороге автомобиль, идущий со скоростью 60 км/ч. Если ослик побежит назад, то встретится с автомобилем в начале моста, а если вперед, то автомобиль нагонит его в конце моста. С какой скоростью бегает Иа-Иа? (7)

5. На клумбе, имеющей форму равностороннего треугольника со стороной 2 м, растут 5 гвоздик. Докажите, что в любом случае какие-то две гвоздики растут на расстоянии не больше 1 м. (7)

6. В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE. Точка M – середина AC. Докажите, что $MD = ME$. (8)

7. Известно, что $a^2 + b^2 = 6ab$ и $a > b > 0$. Найдите $(a+b)/(a-b)$. (8)

8. С таблицей чисел разрешается проделывать две операции: менять местами любые две строки и менять местами любые два столбца. Докажите, что такими операциями нельзя получить из левой таблицы правую (рис.2). (8)

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
6	5	4
7	8	9

Рис. 2

9. По кругу написаны числа 1, 2, ..., n, где n – нечетное число. На каждом числе сидит один кузнечик. Кузнечики одновременно прыгают по часовой стрелке так, что величина очередного прыжка равна числу, на котором сидел кузнечик (он прыгает с 1 на 2, с 2 на 4, с 3 на 6 и т.д.). Докажите, что на каждом числе снова окажется один кузнечик. Рассмотрите случаи а) $n = 7$, б) $n = 2k + 1$. (8)

А.Ковальджи

10. Найдите x_{9999}, если $x_0 = 100$, $x_1 = \sqrt{x_0^2 - 1}$, ..., $x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 - 1}$. (9)

А.Канель-Белов

11. В правильном треугольнике ABC на стороне AB взяли точку E и на отрезке EC построили в сторону точки B правильный треугольник EKC. Докажите, что прямые AC и BK параллельны. (9)

12. Окружность разбита на 200 дуг, содержащих целое число градусов. Докажите, что несколько дуг подряд составляют дугу 180°. (9)

В.Произволов

13. Хоккейный матч «Льдинка» – «Снежинка» окончился со счетом 9:5. Докажите, что в матче был такой момент, когда «Льдинке» оставалось забить столько шайб, сколько «Снежинка» уже забила. (9)

14. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка D, а на стороне BC – точка E. Прямые AE и CD пересекаются в точке O. Докажите, что площадь треугольника DOE меньше площади AOC. (10)

А.Ковальджи

15. В чашку налили 20 ложек кофе. Саша выпивает из чашки одну ложку кофе и добавляет одну ложку молока. Перемешивает. Затем выпивает одну ложку смеси и опять доливает ложку молока. Проделав такую операцию несколько раз, может ли Саша получить смесь, состоящую наполовину из кофе и наполовину из молока? (10)

16. Придумайте квадратный трехчлен $x^2 - 2px + q$ такой, что при добавлении маленького числа $e = 10^{-10}$ к параметру p больший корень увеличится на большое число $E = 10^{10}$ (больший корень $x^2 - 2(p + e)x + q$ больше большего корня $x^2 - 2px + q$ на E; если корни равны, то считается, что больший корень равен меньшему). (10)

17. Некоторый многогранник склеен из черных пятиугольников и белых шестиугольников. Каждый пятиугольник граничит только с шестиугольниками, а каждый шестиугольник – с тремя пятиугольниками и тремя шестиугольниками. Каких ребер у многогранника больше: разделяющих белые грани или разделяющих белые и черные грани? (10)

А.Ковальджи

18. Докажите, что

$$\int_0^1 \sin(\sin x)dx < 1. \qquad (11)$$

А.Блинков

---

[1] *В скобках указан класс, в котором предлагалась задача.*

19. Барон Мюнхгаузен склеил из бумаги выпуклый многогранник, разрезал его на грани и послал их Леонарду Эйлеру. По дороге одна грань потерялась. Может ли так случиться, что Эйлер склеит из оставшихся граней выпуклый многогранник? (11)

С.Волченков

20. Даны положительные числа a, b, c. Найдите все x, для которых

$$c\cdot\sqrt{x-a^2-b^2}+b\cdot\sqrt{x-a^2-c^2}+$$
$$+a\cdot\sqrt{x-b^2-c^2}=a^2+b^2+c^2. \quad (11)$$

Городская олимпиада

6 класс

1. На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса? Меридиан – это дуга, соединяющая Северный полюс с Южным. Параллель – это окружность, параллельная экватору (экватор тоже является параллелью).

М.Семенова

2. Три ежика делили три кусочка сыра массами 5 г, 8 г и 11 г. Лиса стала им помогать. Ей разрешили от любых двух кусочков отреза́ть по 1 г сыра (обрезки лиса съедает). Сможет ли лиса оставить ежикам равные кусочки сыра?

А.Ковальджи

3. Расположите в вершинах правильного десятиугольника числа от 1 до 10 так, чтобы для любых двух соседних чисел их сумма была равна сумме двух чисел, им противоположных (симметричных относительно центра окружности).

4. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке 3, на две части, из которых можно сложить треугольник.

5. На кольцевой дороге расположены четыре бензоколонки: A, B, C и D. Расстояние между A и B – 50 км, между A и C – 40 км, между C и D – 25 км, между D и A – 35 км (все расстояния измеряются вдоль кольцевой дороги в кратчайшую сторону). а) Приведите пример расположения бензоколонок (с указанием расстояний между ними), удовлетворяющий условию задачи. б) Найдите расстояние между B и C (укажите все возможности).

Н.Ященко

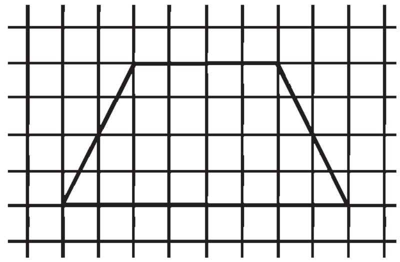


Рис. 3

6. Могут ли две неравные обыкновенные дроби, знаменатели которых 7 и 17, отличаться меньше, чем на а) 0,01; б) 0,005?

7. Расставьте на шахматной доске 32 коня так, чтобы каждый из них бил ровно 2 других.

М.Евдокимов

7 класс

1. См. задачу 1 для 6 класса.

2. В банановой республике прошли выборы в парламент. Все голосовавшие за партию «Мандарин» любят мандарины. Среди голосовавших за другие партии 90% не любят мандарины. Сколько процентов голосов набрала партия «Мандарин» на выборах, если ровно 46% участвовавших в голосовании любят мандарины?

Р.Федоров

3. См. задачу 5 для 6 класса.

4. На острове Контрастов живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Некоторые жители заявили, что на острове четное число рыцарей, а остальные заявили, что на острове нечетное число лжецов. Может ли число жителей острова быть нечетным?

В.Произволов

5. На Луне имеют хождение монеты достоинством в 1, 15 и 50 фартингов. Незнайка отдал за покупку несколько монет и получил сдачу на одну монету больше. Какую наименьшую цену могла иметь покупка?

А.Шаповалов

6. Из квадрата 5×5 вырезали центральную клетку. Разрежьте получившуюся фигуру на две части, в которые можно завернуть куб 2×2×2.

С.Токарев

8 класс

1. Найдутся ли натуральные числа x, y и z, удовлетворяющие уравнению $28x + 30y + 31z = 365$?

В.Произволов

2. Можно ли найти восемь натуральных чисел, таких что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?

А.Канель-Белов

3. Диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Точка M лежит на прямой AB, причем $\angle AMO = \angle MAD$. Докажите, что точка M равноудалена от точек C и D.

М.Смуров

4. Некоторые из чисел a_1, a_2, … …, a_{200} написаны синим карандашом, а остальные – красным. Если стереть все красные числа, то останутся все натуральные числа от 1 до 100, записанные в порядке возрастания. Если же стереть все синие числа, то останутся все натуральные числа от 100 до 1, записанные в порядке убывания. Докажите, что среди чисел a_1, a_2,…, a_{100} содержатся все натуральные числа от 1 до 100 включительно.

В.Произволов

5. За круглым столом сидят несколько гостей. Некоторые из них знакомы между собой; знакомство взаимно. Все знакомые любого гостя (считая его самого) сидят вокруг стола через равные промежутки. (Для другого человека эти промежутки могут быть другими.) Известно, что любые двое имеют хотя бы одного общего знакомого. Докажите, что все гости знакомы друг с другом.

Б.Френкин

6. См. задачу М1638 «Задачника «Кванта».

9 класс

1. Является ли число $4^9 + 6^{10} + 3^{20}$ простым?

А.Ковальджи

2. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AD и CE. Построили квадрат $ACPQ$ и прямоугольники $CDMN$ и $AEKL$, у которых $AL = AB$, $CN = CB$. Докажите, что площадь квадрата $ACPQ$ равна сумме площадей прямоугольников $AEKL$ и $CDMN$.

А.Ковальджи

3. См. задачу М1639 «Задачника «Кванта».

4. В стране Нашии есть военные базы, соединенные дорогами. Набор дорог называется *важным*, если после закрытия этих дорог найдутся две базы, не соединенные путем. Важный набор называется *стратегическим*, если он не содержит меньшего важного набора. Докажите, что множество дорог, принадлежащих ровно одному из двух различных стратегических наборов, образует важный набор.

А.Скопенков

5. Точка O лежит внутри ромба $ABCD$. Угол DAB равен 110°. Углы AOD и BOC равны 80° и 100° соответственно. Чему может быть равен угол AOB?

М.Волчкевич

6. На отрезке [0; 1] отмечены несколько различных точек. При этом каждая отмеченная точка расположена либо ровно посередине между двумя другими отмеченными точками (не обязательно соседними с ней), либо ровно посередине между отмеченной точкой и концом отрезка. Докажите, что все отмеченные точки рациональны.

В.Произволов

10 класс

1. Пусть a, b, c – целые неотрицательные числа такие, что $28a + 30b + 31c = 365$. Докажите, что $a + b + c = 12$.

В.Произволов, С.Анисов

2. См. задачу М1637 «Задачника «Кванта».

3. Дорога протяженностью 1 км полностью освещена фонарями, причем каждый фонарь освещает отрезок дороги длиной 1 м. Какое наибольшее количество фонарей может быть на дороге, если известно, что после выключения любого фонаря дорога будет освещена уже не полностью?

С.Агеев

4. Существует ли натуральное число, делящееся на 1998, сумма цифр которого меньше 27?

А.Канель-Белов, С.Анисов

5. На пол положили правильный треугольник ABC, выпиленный из фанеры. В пол вбили три гвоздя (по одному вплотную к каждой стороне треугольника) так, что треугольник невозможно повернуть, не отрывая от пола. Первый гвоздь делит сторону AB в отношении 1:3, считая от вершины A, второй делит сторону BC в отношении 2:1, считая от вершины B. В каком отношении делит сторону AC третий гвоздь?

А.Шень

6. См. задачу М1645 «Задачника «Кванта».

11 класс

1. Числа x, y, z удовлетворяют равенству

$$x + y + z - 2(xy + yz + xz) + 4xyz = 1/2.$$

Докажите, что хотя бы одно из них равно 1/2.

В.Произволов

2. Про непрерывную функцию f известно, что:

а) f определена на всей числовой прямой;

б) f в каждой точке имеет производную (и, таким образом, график f в каждой точке имеет единственную касательную);

в) график функции f не содержит точек, у которых одна из координат рациональна, а другая – иррациональна.

Следует ли отсюда, что график f – прямая?

С.Вольфрам

3. В неравнобедренном треугольнике ABC проведены медианы AK и BL. Углы $\angle BAK$ и $\angle CBL$ равны 30°. Найдите углы треугольника ABC.

Г.Гальперин

4. Решите в натуральных числах уравнение $3^x + 4^y = 5^z$.

А.Эвнин, В.Сендеров

5. Можно ли в пространстве составить замкнутую цепочку из 61 одинаковых согласованно вращающихся шестеренок так, чтобы углы между сцепленными шестеренками были не меньше 150°? При этом:

а) для простоты шестеренки считаются кругами;

б) шестеренки сцеплены, если соответствующие окружности в точке соприкосновения имеют общую касательную;

в) угол между сцепленными шестеренками – это угол между радиусами их окружностей, проведенными в точку касания;

г) первая шестеренка должна быть сцеплена со второй, вторая – с третьей, ..., 61-я – с первой, а другие пары шестеренок не должны иметь общих точек.

С.Анисов

6. См. задачу М1645 «Задачника «Кванта».

Избранные задачи отбора на Российскую олимпиаду

1. Для каких натуральных n существует такой многочлен с вещественными коэффициентами $P(x)$, что $P(P(x)) = x^n - 1$? (9)

М.Евдокимов

2. Существует ли такое целое число a, что уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$ имеет 99 решений в целых числах? (9)

В.Сендеров

3. Несколько школьников играют в пинг-понг «на вылет». Они образовали очередь, первый играет со вторым, победитель этой пары – с третьим и т.д. вплоть до последнего. На следующий день они снова играют по такой системе, но порядок в очереди заменили на противоположный: последний стал первым, предпоследний – вторым и т.д., первый стал последним. Докажите, что найдется пара, которая играла между собой и в первый день, и во второй. (10)

Б.Френкин

4. Можно ли подобрать рациональные числа a, b, c так, чтобы выполнялось равенство

$$a\cos 20° + b\cos 40° + c\cos 80° = 1? \ (11)$$

В.Сендеров

5. Найдите все непрерывные функции $f(x)$, обладающие свойствами:

а) $f(x)$ определена на всей числовой прямой;

б) для всех x имеет место равенство

$$f(x) = x + f(x - f(x));$$

в) $f(0) = 0$. (11)

И.Дынников

6. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром в точке O. Прямые AB и CD пересекаются в точке P, а прямые AD и BC – в точке Q, причем отрезки BP и DQ пересекаются в точке A; M – основание перпендикуляра, опущенного из точки O на PQ. Докажите, что

а) точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ лежит на прямой OM;

б) углы $\angle BMO$ и $\angle DMO$ равны. (11)

Фольклор

Публикацию подготовили
С.Анисов, А.Ковальджи,
В.Сендеров, Г.Челноков

Избранные задачи Московской физической олимпиады

8 класс

Первый тур

1. Автомобиль в 12 ч 40 мин находился на пути из Анискино в Борискино где-то между 25-м и 50-м километровыми столбами. Мимо отметки 75 км автомобиль проехал в промежутке между 13 ч 50 мин и 14 ч 20 мин. В 15 ч 10 мин он находился между 125-м и 150-м километровыми столбами. Когда следует ожидать прибытия автомобиля в Борискино, если он движется с постоянной скоростью, а на въезде в Борискино стоит километровый столб с отметкой 180 км?

С.Варламов

Второй тур

2. В два калориметра налито по 200 г воды – при температурах +30°С и +40 °С. Из «горячего» калориметра зачерпывают 50 г воды, переливают в «холодный» и перемешивают. Затем из «холодного» калориметра переливают 50 г воды в «горячий» и снова перемешивают. Сколько раз нужно перелить такую же порцию воды туда-обратно, чтобы разность температур воды в калориметрах стала меньше 1 °С? Потерями тепла в процессе переливаний и теплоемкостью калориметров пренебречь.

А.Зильберман

9 класс

Первый тур

1. Брусок массой M положен на другой такой же брусок с небольшим сдвигом a (рис.1). Эта система как целое скользит по гладкому горизонтальному полу со скоростью v_0. На ее пути стоит вертикальная стена, перпендикулярная направлению вектора скорости и параллельная краям брусков. Удар каждого бруска о стену абсолютно упругий, коэффициент трения между брусками μ. Опишите, как будет происходить столкновение системы со стеной, и определите, какие скорости будут иметь бруски, когда этот процесс окончится.

А.Андрианов

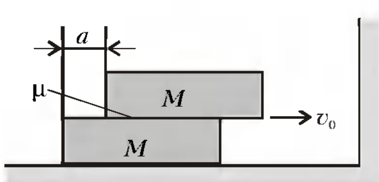


Рис. 1

Второй тур

2. Автобус и велосипедист едут по одной прямой дороге в одном направлении с постоянными скоростями 63 км/ч и 33 км/ч. Грузовик едет по другой прямой дороге с постоянной скоростью 52 км/ч. Расстояние от грузовика до автобуса все время равно расстоянию от грузовика до велосипедиста. Найдите скорость грузовика относительно автобуса.

С.Варламов

10 класс

Первый тур

1. В вертикальном закрытом цилиндре высотой H и площадью основания S, заполненном воздухом при давлении p_0, на дне лежит легкая тонкостенная плоская коробка высотой h и площадью основания s. В дне коробки имеется отверстие. В цилиндр через кран, расположенный вблизи дна, начинают медленно нагнетать жидкость плотностью ρ, много большей плотности воздуха. При каком давлении воздуха в цилиндре коробка упрется в верхнюю крышку цилиндра? Процесс проходит при постоянной температуре; коробка всплывает так, что ее верхняя плоскость остается горизонтальной.

М.Семенов

Второй тур

2. N абсолютно упругих одинаковых шариков лежат на гладкой горизонтальной плоскости. Одному из них сообщили скорость v в горизонтальном направлении. Испытав ряд столкновений с другими шариками, этот шарик стал двигаться в противоположном направлении. Какова максимально возможная величина конечной скорости шарика, если в каждом столкновении участвуют только два шарика, а $N = 101$?

С.Варламов

3. Известно, что сильный человек может согнуть железную кочергу. Оцените, с какой силой человек должен действовать руками на концы кочерги, если железо имеет предел упругости $\sigma = 3 \cdot 10^8$ Н/м^2, длина кочерги $l = 1$ м, ее сечение – квадрат со стороной $a = 1$ см.

М.Семенов

4[1]**.** На гладкую непроводящую нить длиной l надеты три бусинки с положительными зарядами q_1, q_2 и q_3. Концы нити соединены. Найдите силу натяжения нити, когда система находится в равновесии.

А.Кулыгин, Р.Компанеец

11 класс

Первый тур

1. Имеются большой конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ, заряженный зарядом $Q = 100$ мкКл, и $N = 1000$ маленьких незаряженных конденсаторов емкостью $C_1 = 1$ нФ каждый. Требуется изготовить из маленьких конденсаторов батарею, которая одновременно имела бы максимально возможную емкость и максимально возможный заряд. Найдите этот заряд и опишите процедуру изготовления батареи. Маленькие конденсаторы можно только соединять друг с другом и с большим конденсатором.

А.Якута

2[2]**.** Шерлок Холмс и доктор Ватсон переходили Бейкер-стрит. В это

[1] *Это – самая сложная задача олимпиады.*

[2] *Это – самая красивая задача олимпиады.*

время профессор Мориарти а своем кабриолете выехал из бокового переулка и, не притормаживая, помчался по Бейкер-стрит, чуть не сбив их.

– Холмс, – воскликнул доктор, – этот маньяк катается по Лондону с бешеной скоростью!

– Неправда, Ватсон. Я заметил, что «зайчик» от бокового стекла его авто, освещенного заходящим солнцем, некоторое время оставался вот на том фонарном столбе, в десяти футах от кабриолета. Он не мог ехать быстрее двадцати миль в час!

– Но как Вы догадались, Холмс?

– Элементарно, Ватсон!..

Воспроизведите рассуждения великого сыщика. Учтите, что 1 фут ≈ ≈ 0,3 м, а 1 миля ≈ 1,6 км.

А.Селиверстов

Второй тур

3. Вертикальная U-образная трубка постоянного поперечного сечения жестко закреплена, и в нее налита ртуть. Период малых колебаний ртути в трубке равен T_1. В правое колено трубки наливают столько воды, что период малых колебаний системы становится равным T_2. Потом в левое колено наливают спирт в таком количестве, что период малых колебаний становится равным T_3. Каково соотношение масс ртути, воды и спирта? Плотности веществ равны ρ_1, ρ_2 и ρ_3 соответственно. Считать, что при колебаниях ни вода, ни спирт не перетекают в соседние колена трубки.

С.Варламов

4. Над идеальным одноатомным газом совершается цикл, имеющий в pV-координатах вид прямоугольника, стороны которого параллельны осям p и V (рис.2). Найдите максимальный КПД такого цикла.

Р.Компанеец, О.Шведов

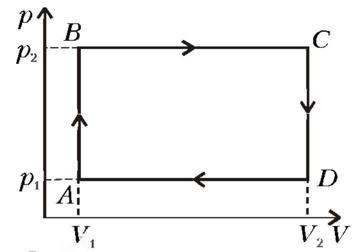


Рис. 2

5. Лампа накаливания включена в сеть переменного напряжения $U = U_0 \cos\omega t$. Найдите амплитуду установившихся малых колебаний температуры нити, имеющей в рабочем режиме практически постоянные сопротивление R и теплоемкость C.

Р.Компанеец

Публикацию подготовили М.Виноградов, М.Семенов, А.Якута

ИТОГИ МЕЖОБЛАСТНОЙ ЗАОЧНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

В середине прошлого 1997/98 учебного года (точнее – с декабря по февраль) Всероссийская школа математики и физики «АВАНГАРД» совместно с Министерством общего и профессионального образования РФ и при участии журнала «Квант» провела ставшую уже традиционной очередную Межобластную заочную математическую олимпиаду. К участию в олимпиаде через региональные органы образования были приглашены школьники 6–10 классов из 19 регионов России (информация о школе «АВАНГАРД» и об олимпиаде была опубликована в журнале «Квант» №5, 6 за 1997 г.). В олимпиаде приняли участие более тринадцати тысяч школьников России и стран СНГ. Следует отметить высокую активность и хороший уровень работ участников. Несмотря на возросшую трудность предложенных заданий, по итогам олимпиады дипломами первой степени награжден 51 школьник (полный список награжденных и решения олимпиадных задач опубликованы в газете «Первое сентября»).

Абсолютными победителями олимпиады стали

по 6 классам – *Ремесло В.*, Одинцовский р-н Московской обл.,
по 7 классам – *Коновалов М.*, г.Новоуральск,
по 8 классам – *Кузин Е.*, г.Новосибирск,
по 9 классам – *Скопенков М.*, г.Саратов,
по 10 классам – *Сапронов И.*, г.Саров.

Наиболее интересные и оригинальные работы, по мнению Оргкомитета олимпиады, представили

по 6 классам – *Барашков В.*, г.Магнитогорск,
по 7 классам – *Хайрулина А.*, г.Уфа, *Фролов М.*, г.Уфа,
по 8 классам – *Загидудин И.*, г.Нижний Тагил, *Погуц Д.*, г.Мурманск,
по 9 классам – *Гурьева Н.*, п.Уемский Архангельской обл., *Николаева Е.*, г.Нюрба (Якутия),
по 10 классам – *Лычев А.*, г.Кисловодск, *Гумеров М.*, г.Уфа.

Все абсолютные победители олимпиады награждаются комплектами журнала «Квант» за 1998 год. Более 30 школьников, приславших наиболее интересные и оригинальные решения и награжденные дипломами первой степени, по решению Оргкомитета приглашены на очередную Межгосударственную научно-практическую конференцию школьников. Дипломанты олимпиады, успешно окончившие 11 класс школы «АВАНГАРД», получают дополнительные льготы при поступлении в Московский инженерно-физический институт (технический университет).

Адрес школы «АВАНГАРД»: 115551 Москва, Ореховый б-р, д.11, кор.3.

ЗАОЧНАЯ ШКОЛА ПРИ НГУ

При Новосибирском государственном университете работает Заочная школа (ЗШ) для учащихся 9–11 классов общеобразовательных школ России и государств, входивших ранее в состав СССР.

В ЗШ пять отделений: математическое, физическое, химическое, биологическое и экономическое. На математическое, физическое и химическое отделения принимаются учащиеся 9–11 классов, на биологическое – только учащиеся 10 классов, на экономическое – только учащиеся 11 классов.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ могут быть приняты также математические, физические, химические, биологические и экономические кружки и факультативы, которые работают в школах под руководством учителя. Руководитель кружка набирает и зачисляет в них учащихся, успешно выполнивших первое задание по соответствующему предмету. Кружок принимается в ЗШ, если руководитель сообщает в ЗШ свою фамилию, имя, отчество и высылает поименный список членов кружка (с указанием итоговых оценок за первое задание), подписанный директором школы и заверенный печатью. После этого члены кружка считаются учащимися ЗШ.

Учащиеся, принятые в ЗШ, и руководители кружков будут получать задания ЗШ и дополнительные материалы. Работы учащихся-заочников проверяются в ЗШ, а работы членов кружка проверяет руководитель (по желанию руководителя часть работ членов кружка может быть проверена и в ЗШ).

Ежегодно часть учащихся 10–11 классов ЗШ (тех, кто будет учиться в этих классах в следующем учебном году) приглашается в Летнюю школу при НГУ. Здесь они вместе с победителями Всесибирской олимпиады слушают лекции крупных ученых, решают интересные задачи на семинарах, знакомятся с университетом и научно-исследовательскими институтами Академгородка, отдыхают. На период зимних каникул учащиеся ЗШ из близлежащих областей приглашаются в Зимнюю школу при НГУ.

Чтобы стать учеником Заочной школы при НГУ, необходимо *до 30 сентября* прислать на имя директора ЗШ заявление, оформленное по приведенному здесь образцу.

Руководитель кружка должен прислать на имя директора ЗШ письмо с просьбой выслать первое задание и дополнительные материалы к нему.

Фамилия, имя, отчество (полностью, печатными буквами)	*НЕДЛИН ИГОРЬ ИВАНОВИЧ*
Класс, в котором Вы учитесь в своей школе	*9 «а»*
Отделение ЗШ, на котором Вы желаете учиться (можно указать два отделения)	*математическое (математическое и физическое)*
Подробный домашний адрес с обязательным указанием индекса почтового отделения	*632149 Новосибирская обл., с.Мезениха, ул.Андрианова, д.28 «а», кв.5*

Заявление о приеме на математическое или физическое отделение ЗШ можно выслать вместе с решениями соответствующего первого задания, публикуемого ниже, *не позднее 15 октября.*

Для получения ответа вложите конверт с маркой с написанным на нем Вашим домашним адресом.

Решения задач запишите в простую ученическую тетрадь в клетку, оставляя поля для замечаний преподавателя. На обложке тетради укажите те же сведения о себе, что и в заявлении. Работу отошлите вместе с заявлением, причем только простой бандеролью (тетрадь не перегибайте, не сворачивайте в трубочку, тетрадь должна быть тонкой). В тетрадь с решениями вложите листок размером 6×10 см с написанным на нем Вашим адресом (его наклеят на конверт, когда будут отсылать ответ).

Для поступления в ЗШ достаточно решить две-три задачи. Сообщение о размере оплаты за обучение Вам будет выслано вместе с проверенным первым заданием. Бесплатное обучение в ЗШ сохраняется для детей-сирот, обучающихся в школах-интернатах и детей из многодетных семей (в которых пять и более детей до 18 лет, находящихся на иждивении родителей).

Наш адрес: 630090 Новосибирск-90, ул.Пирогова, 11. Заочная школа при НГУ.

Телефон: (383-2) 39-78-89.

Первое задание по физике

9 КЛАСС

1. Во время тренировки бегун и велосипедист многократно преодолевают расстояние между пунктами A и B в прямом и обратном направлении. После одновременного старта в пункте A они в первый раз встретились в точке, делящей расстояние между A и B в отношении 2:1. Где они встретятся во второй раз?

2. На поверхности водоема плавает деревянный брус объемом 100 дм^3. Какой минимальной массы стальную гирю необходимо привязать к брусу, чтобы он полностью затонул? Плотность стали, воды и дерева составляют, соответственно, 7800, 1000 и 660 кг/м^3.

3. Нагревательный элемент электроплитки состоит из трех последовательно соединенных секций. Если замкнуть накоротко первую секцию, мощность плитки возрастет в два раза, а если вторую – в полтора раза. Во сколько раз изменится мощность плитки, если будет закорочена третья секция?

4. В калориметр, в котором находилась теплая вода при $t_1 = 50$ °C, добавили $m_2 = 100$ г льда при $t_2 = 0$ °C. Когда лед растаял, в калориметре установилась температура $t_3 = 10$ °C. Найдите установившуюся температуру после того, как в него снова добавили такое же количество льда. Удельная теплоемкость воды $c = 4190$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 335200$ Дж/кг.

10 КЛАСС

1. Решите задачу 4 для 9 класса.

2. Тело запущено под углом 45° к горизонту со скоростью v. На каком расстоянии от точки запуска будет находиться тело в момент, когда вертикальная составляющая его скорости уменьшится в два раза?

3. Одна часть однородного каната лежит на клине, образующем с горизонталью угол α, а другая, перекинутая через блок, свисает вертикально (рис.1). Коэффициент трения каната о плоскость μ ($\mu > \mathrm{tg}\,\alpha$). При какой длине x свисающей части канат будет

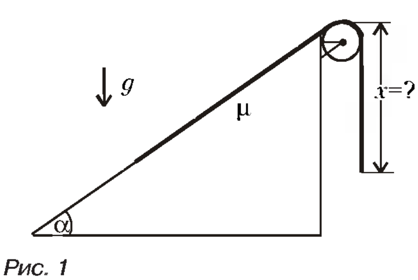


Рис. 1

находится в покое? Длина всего каната L. Размером блока пренебречь.

4. Система состоит из тела массой M с закрепленным на нем невесомым блоком и груза массой m, подвешенного на невесомой нити, перекинутой через блок (рис.2). Груз находится в контакте с

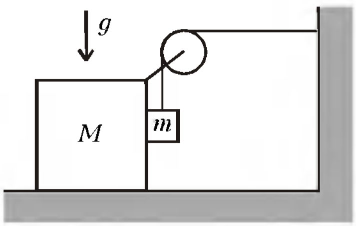


Рис. 2

телом. Второй конец нити прикреплен к неподвижной стенке, причем участок нити между стенкой и блоком горизонтален. Найдите ускорения груза и тела, если коэффициент трения между ними μ, а трение между столом и телом отсутствует.

5. На покоящейся тележке массой M стоит тело массой m (рис.3). Телу «щелчком» сообщили горизонтальную скорость v. К тому моменту, когда прекратилось проскальзывание, тело прошло относительно тележки расстояние x. Чему равен коэффициент трения скольжения между телом и тележкой, если трением качения можно пренебречь?

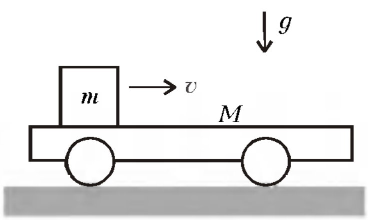


Рис. 3

11 КЛАСС

1. Решите задачу 3 для 10 класса для случая $\mu < \operatorname{tg}\alpha$.

2. Сосуд с газом разделен перегородкой на два отсека: объем первого $2V$, давление газа в нем $2p$, а для второго отсека – V и p соответственно. Во сколько раз увеличится масса газа во втором отсеке после того, как в перегородке открыли отверстие и подождали пока все установится? Температура в системе поддерживается постоянной.

3. Найдите массу электронов, находящихся в одном моле водорода.

4. Связанные нитью шарики, массы которых m и M, имеют одинаковые заряды q и летят в направлении нити с равными скоростями v (рис.4). Нить пережигают. Какова была длина нити, если после разлета шарик массой m остановился?

Рис. 4

5. Конденсатор емкостью C, имеющий вначале разность потенциалов на обкладках U, разряжается через два резистора, которые соединены параллельно и имеют сопротивления R_1 и R_2 (рис.5). Какое количество теплоты выделится на каждом резисторе?

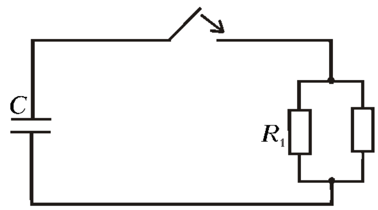


Рис. 5

Первое задание по математике

9 КЛАСС

1. Квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, продолжением высоты, опущенной на гипотенузу, делится на два прямоугольника. Докажите, что эти прямоугольники равновелики квадратам, построенным на катетах треугольника.

2. Запись шестизначного числа в десятичной системе счисления имеет вид $ABCABC$, где буквами A, B, C обозначены некоторые цифры. Покажите, что такое число делится на: а) 7; б) 11; в) 13.

3. Можно ли расставить в вершинах куба числа 1, 2, ..., 7, 8 так, чтобы для каждой грани куба сумма чисел, стоящих в ее вершинах, была одинакова?

4. На окружности выписаны 50 чисел таким образом, что каждое из них равно полусумме двух соседних. Докажите, что все эти числа равны между собой.

5. Из точки C вне данной окружности O проведены к ней касательные CA и CB, и радиусом $CA = CB$ описана окружность с центром в точке C. Через произвольную точку M, взятую на дуге построенной окружности внутри окружности O, проведены хорды AA_1 и BB_1. Докажите, что A_1B_1 – диаметр окружности O.

6. Представьте выражение $n^{2000} + n^{1999} + 1$ в виде произведения двух сомножителей.

10 КЛАСС

1. Для того чтобы купить каменный домик одному, Ниф-Нифу не хватает 19 золотых, а Нуф-Нуфу – 9 золотых. Бережливый Наф-Наф накопил денег столько же, сколько у Ниф-Нифа и Нуф-Нуфа вместе. Определите, смогут ли поросята купить домик втроем.

2. Докажите неравенство

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b},$$

где a, $b > 0$.

3. У натурального числа, являющегося точным квадратом, предпоследняя цифра нечетна. Какой цифрой оканчивается данное натуральное число?

4. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AB и AD взяты точки M и N такие, что

$$AM = \frac{1}{m} \cdot AB, \quad AN = \frac{1}{n} \cdot AD.$$

В каком отношении прямая MN делит диагональ параллелограмма?

5. Можно ли расставить числа 3, 4, 5, ..., 10, 11 в клетках квадрата 3×3 так, чтобы произведение чисел первой строки равнялось произведению чисел первого столбца, произведение чисел второй строки равнялось произведению чисел второго столбца, а произведение чисел третьей строки равнялось произведению чисел третьего столбца?

6. Пусть O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC, и A_1, B_1, C_1 – точки пересечения этой окружности с отрезками AO, BO, CO соответственно. Найдите все треугольники ABC, для которых треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. (Под нахождением треугольника в данном случае подразумевается нахождение величин его углов.)

11 КЛАСС

1. Докажите, что существует треугольник, для которого выполняется соотношение $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$, где α, β, γ – радианные меры углов треугольника. Существует ли прямоугольный треугольник, удовлетворяющий этому условию?

2. При каком значении параметра a уравнение

$$x - 2\sqrt{x} + a = 0$$

имеет единственное действительное решение?

3. Даны две окружности, пересекающиеся в точках M и N. Постройте треугольник ANB наибольшей площади, вершины A и B которого лежат на окружностях, а прямая AB проходит через M.

4. Решите систему

$$\begin{cases}(x-y)^2 = z^2 - c^2,\\ (y-z)^2 = x^2 - a^2,\\ (z-x)^2 = y^2 - b^2\end{cases}$$

при условии $abc \neq 0$.

5. Докажите, что прямая, делящая описанный многоугольник на две части равной площади и равного периметра, проходит через центр окружности, вписанной в данный многоугольник.

6. Дана числовая таблица размером $m \times n$ $(m,\ n > 1)$. Строим новую таблицу по правилу: для каждого числа $0 \le i \le m$ и для каждого числа $0 \le j \le n$ на пересечении i-й строки и j-го столбца пишем сумму всех чисел, стоящих в i-й строке и j-м столбце исходной таблицы (число, стоящее на пересечении, входит в сумму дважды). С полученной таблицей поступаем так же. Докажите, что если на некотором шаге получится первоначальная таблица, то она состоит из нулей.

НОВЫЙ ПРИЕМ НА ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ МАЛОГО МЕХМАТА

Малый механико–математический факультет (МММФ) – математическая школа при механико–математическом факультете МГУ – объявляет прием учащихся на заочное отделение. На трехгодичное обучение принимаются учащиеся, окончившие восемь классов одиннадцатилетних общеобразовательных школ, на четырехгодичное обучение принимаются учащиеся, закончившие седьмые классы. Зачисление на МММФ производится по результатам решения задач вступительной работы, опубликованных ниже.

Основные задачи МММФ – приобщение к математике, углубление знаний в рамках школьной программы, расширение математического кругозора учащихся средних школ, а также знакомство с механико–математическим факультетом МГУ.

Зачисление на заочное отделение МММФ происходит в ноябре. Занятия начинаются в декабре. Обучение платное. Для хорошо успевающих учащихся из малообеспеченных семей возможно снижение оплаты. Учащиеся, особо успешно выполнившие все задания, получают удостоверение об окончании МММФ.

Преподавателями на заочном отделении МММФ работают аспиранты и сотрудники механико–математического факультета МГУ. Разработку тематических брошюр осуществляет методический совет, состоящий из профессоров и преподавателей механико–математического факультета МГУ.

Желающие поступить на МММФ должны *не позднее 10 ноября 1998 года* выслать в наш адрес решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все задачи). Поступающим в восьмой класс решать задачи 7, 8, 9, 10, 11 не нужно. Возможно обучение коллективных учеников, а также возможно поступление на МММФ учащихся, закончивших 9 (10) класс, на основании заявления с приложением итоговых оценок за 9 (10) класс.

Вступительную работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. На обложку тетради наклейте лист бумаги со следующими данными:

1) Республика, край, область

2) Фамилия, имя учащегося (для коллективных учеников – Ф.И.О. руководителя и полный список учащихся)

3) Школа, класс

4) Полный домашний адрес с указанием индекса почтового отделения

5) Фамилия, имя, отчество родителей, место их работы и должность.

В работу вложите листок бумаги размером 10×12 см, на котором напишите полный домашний адрес и индекс.

Наш адрес:

119899 Москва, Воробьевы Горы, МГУ, Малый мехмат.

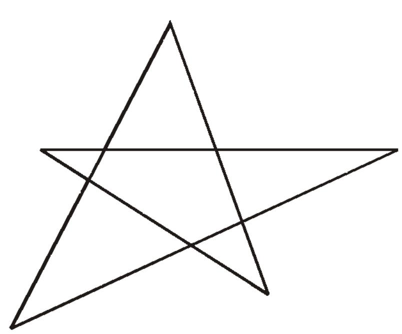
Для школьников 6–11 классов Москвы и ближнего Подмосковья работает вечернее отделение МММФ. Справки по телефону 939–39–43.

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ РАБОТА

1. Решите уравнение

$$(1{,}7x - 1{,}1) - \left(\frac{1}{2} - x\right) = 0{,}9(3x - 1) + 0{,}1.$$

2. Является ли число 111...1 (1998 единиц) квадратом целого числа?



3. Карлсон съедает торт за 10 минут, Малыш за полчаса, а фрекен Бок – за час. За какое время они съедят этот торт вместе?

4. Чему равна сумма острых углов произвольной пятиконечной звездочки (см. рисунок) ?

5. Докажите, что если $q = p - 1$, то $(p^{16} + q^{16})(p^8 + q^8)(p^4 + q^4)(p^2 + q^2)(p + q) = p^{32} - q^{32}$.

6. В классе 30% учеников учатся без троек по математике и 50% учатся без троек по русскому языку. Сколько процентов учеников класса успевают без троек по обоим предметам, если 40% учеников имеют тройки и по математике и по русскому языку?

7. В неравнобедренном треугольнике проведена прямая, делящая его на два треугольника. В каком случае полученные треугольники могут быть подобны?

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}xy + yz = 1997,\\ yz + zx = 1998,\\ xy + zx = 1999.\end{cases}$$

9. При каком значении целых чисел a и b уравнение $x^3 + (a + 2)x^2 - 2x^2 - 7 = 0$ имеет корень, равный 3?

10. В прямоугольном треугольнике радиус описанной окружности в 2,5 раза больше радиуса вписанной окружности. Найдите площадь треугольника, если его наименьшая сторона равна 1.

11. Чему равно значение выражения

$$\sqrt{32\sqrt{2}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{12}} + \ldots$$
$$\ldots + \sqrt{21 - 2\sqrt{110}}\ ?$$

III МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПАМЯТИ С.Н.БЕРНШТЕЙНА

2—9 февраля 1998 года в Санкт-Петербурге состоялась III Открытая международная конференция молодых ученых, посвященная памяти академика С.Н.Бернштейна. На конференцию было представлено 93 работы по математике, физике и информатике. Работа конференции проходила по секциям математического анализа, алгебры, геометрии, прикладной математики и информатики, теоретической физики, теории и методологии научных исследований. Многие доклады были настолько содержательны и интересны, что могли бы составить достойные студенческие курсовые, а то и дипломные работы. Некоторые из представленных докладов безусловно заслуживают внимания специалистов.

Главная премия конференции была присуждена петербуржцам Дмитрию Парилову и Алексею Ежикову. Дмитрию и Алексею по 14 лет, они обучаются в 10 классе Аничкова лицея и в семинарах лаборатории непрерывного математического образования Санкт-Петербургского городского Дворца творчества юных.

Секционными премиями отмечены работы петербургских школьников Андрея Маслова и Юрия Бабашна, студентов из Санкт-Петербурга Михаила Генделева и Сергея Добрынина, студентки из Черновцов Виолетты Берник.

Интересны были также работы школьников Ильдара Халидова, Ариста Кожевникова, Александра Баранова, Максима Вольфсона, Петра Полинского, Вениамина Моргенштерна, Алексея Короткевича, Андрея Никитченко, Юрия Сидорова, Михаила Плискина, Павла Холькина, Андрея Аверина, Анны Григорьевой, Евгения Хорькова, Дениса Апельганса, Александра Кукуты, Андрея Новикова, Андрея Аверина, Веры Карпович, Алексея Павлова, Олега Булатова, Сергея Андреева, Ильи Маляренко, Ивана Кудрявцева, Андрея Чугунова, Дмитрия Фридмана (все – из Санкт-Петербурга), Дмитрия Митина, Юрия Бондаренко, Юрия Шеляженко, Ольги Марковой (все — из Киева), Дмитрия Андрюшина (Москва).

Все представленные работы будут опубликованы в сборнике «Записки научных семинаров», издаваемом математико-механическим факультетом Санкт-Петербургского государственного университета и лабораторией непрерывного математического образования городского Дворца творчества юных.

В 1999 году Оргкомитет конференции планирует провести очередную IV Открытую международную конференцию молодых ученых, которая состоится в начале февраля в Санкт-Петербурге. В конференции предполагается участие молодых ученых – студентов и школьников, возраст которых не превосходит 19 лет. Заявки на участие, полный вариант статьи (доклада) для рецензирования, сведения об участнике, официальный адрес и телефоны просим выслать до 10 декабря 1998 года по адресу:

191011 Санкт-Петербург, Невский пр., 39, СПбГДТЮ, отдел науки, Оргкомитет IV Открытой международной конференции молодых ученых, посвященной памяти академика С.Н.Бернштейна.

Телефон: (812) 310-13-13,
факс: (812) 310-14-14.

При положительном решении Экспертного совета Оргкомитет высылает официальное приглашение 15 — 20 января 1999 года.

И.Чистяков

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ»

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №3)

1. Конечно же, его зовут Сергеем.

2. Обозначим длину каната через $2L$, тогда в прямоугольном треугольнике ABC (рис.1) гипотенуза равна $L + 20$ см, а катеты – L и 100 см. Из уравнения $(L+20)^2 = L^2 + 100^2$ получаем, что $L = 240$ см, и длина каната равна 4 м 80 см.

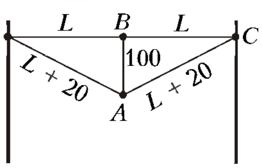


Рис. 1

3. Если мы сложим уравнения системы, то получим $10000x + 10000y = 90000$, или $x + y = 9$. Если вычтем из первого уравнения второе, то получим $5124x - 5124y = 5124$, или $x - y = 1$. Теперь очевидно, что $x = 5$, $y = 4$.

4. Пусть каждый юноша знаком с k девушками, тогда всего будет $9k$ знакомств. Так как все девушки знакомы с разным количеством юношей, то это может быть лишь в случае, если одна знакома со всеми девятью, другая – с восемью, и т.д., десятая – не знакома ни с кем. Поэтому число знакомств равно $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$. Значит, $9k = 45$ и $k = 5$. Нетрудно нарисовать схему знакомств, указанную в задаче (рис.2). Здесь знаком «+» отметены знакомые юноша и девушка с номерами, указанными по горизонтали и по вертикали соответственно.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		+	+	+	+					+
2			+	+	+				+	+
3				+	+			+	+	+
4					+		+	+	+	+
5						+	+	+	+	+
6						+	+	+	+	+
7						+	+	+	+	+
8						+	+	+	+	+
9						+	+	+	+	+

Рис. 2

5. Составим таблицу числа рабочих дней в первой и второй декадах месяца в зависимости от дня недели, с которого начинается месяц:

I декада		II декада	
Понедельник	8	Четверг	7
Вторник	8	Пятница	6
Среда	8	Суббота	6
Четверг	7	Воскресенье	7
Пятница	6	Понедельник	8
Суббота	6	Вторник	8
Воскресенье	7	Среда	8

Из нее видно, что равное количество рабочих дней (7) в I и II декадах может быть лишь в случае, если месяц начинается с четверга. Но тогда декада начнется со среды, и в ней будет разное количество рабочих дней в зависимости от числа дней в месяце. Если в месяце 30 дней, то в третьей декаде 8 рабочих дней. 8 рабочих дней будет и в случае 31 дня в месяце. Но есть еще февраль, в котором 28 или 29 дней. При 28 днях в третьей декаде будет 6 рабочих дней, а при 29 днях, т.е. в високосный год, – 7 рабочих дней, именно то, что требуется. Несложно определить, что первое февраля високосного года было четвергом в 1996 году, и ранее через 28 лет: 1968, 1940, 1912 и т.д. Но в 1968 и 1940 годах не было Городских Дум, а были Советы, а в 1912 и ранее не было в городах троллейбусов.

Таким образом, правильный ответ – февраль 1996 года.

КАТУШКИ ИНДУКТИВНОСТИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

1. $Q = \dfrac{\mathcal{E}^2\left(L + CR_2^2\right)}{2\left(R_1 + R_2\right)^2}$.

2. $I_R = \dfrac{\mathcal{E}_2 r_1}{R\left(r_1 + r_2\right) + r_1 r_2} = 0{,}25$ А; ток течет справа налево.

3. 1) $\mathcal{E}_s = \mathcal{E}$; 2) $R(t) = \dfrac{R_0}{1 + \dfrac{R_0 \mathcal{E}_0 t}{L\left(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0\right)}}$.

4. 1) $U_{m1} = I_0 \sqrt{\dfrac{L_1 + L_2}{C}}$;

2) $U_{m2} = I_0\left(L_1 + L_2\right)\sqrt{\dfrac{1}{C(\mu L_1 + L_2)}}$.

LXI МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Городская олимпиада

6 КЛАСС

1. 432 части.

2. Да, сможет.

3. Числа нужно расположить по кругу, например, в следующем порядке: 1, 4, 5, 8, 9, 2, 3, 6, 7, 10.

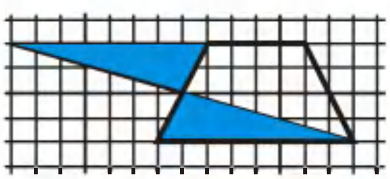


Рис. 3

4. См. рис.3.

5. Расстояние от B до C равно 10 км (рис.4). Бензоколонки A и C разбивают кольцевую дорогу на две дуги. Если бы бензоколонка D находилась на меньшей дуге, то сумма расстояний от A до D и от D до C была бы равна расстоянию от A до C. Но это не так. Значит, бензоколонка D расположена на большей дуге, поэтому длина большей дуги равна 25 + 35 = 60 км (убедитесь в этом сами!). Следовательно, длина дороги 100 км.

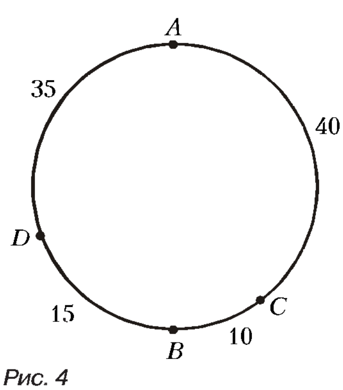


Рис. 4

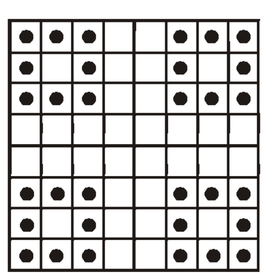


Рис. 5

Теперь ясно, что бензоколонки B и A диаметрально противоположны. Значит, расстояние от B до C равно 50 – 40 = = 10 км.

6. а) Да, 5/7 – 12/17 = 1/119 < 0,01. б) Нет. Приводя разность дробей к общему знаменателю, получим в числителе целое число, не равное нулю, а в знаменателе 119. Поэтому дроби отличаются не меньше чем на 1/119 > 0,005.

7. См. рис.5.

7 КЛАСС

2. 40%.

4. Нет, не может. Ясно, что если два человека сделали одно и то же утверждение, то они либо оба лжецы, либо оба рыцари. Поскольку на острове есть хотя бы один лжец и хотя бы один рыцарь, либо все рыцари сделали первое утверждение, а все лжецы второе, либо наоборот. В первом случае и рыцарей, и лжецов – четное число, а во втором и тех, и других – нечетное число. Значит, число людей на острове обязательно четно.

5. 6 фартингов. Нетрудно построить пример, когда покупка стоит 6 фартингов: Незнайка заплатил две монеты – 1 фартинг и 50 фартингов, а сдачу получил тремя монетами по 15 фартингов.

Докажем, что покупка не могла стоить меньше 6 фартингов. Остаток от деления на 7 достоинства каждой из монет равен 1. Пусть Незнайка отдал k монет, тогда остаток от деления этой суммы на 7 равен остатку от деления k на 7. Остаток от деления на 7 сдачи равен остатку от деления k + 1 на 7. Из

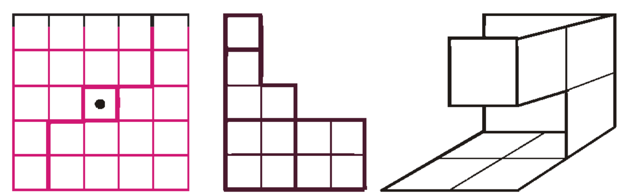


Рис. 6

этого следует, что остаток от деления на 7 стоимости покупки равен 6. Но 6 – наименьшее из натуральных чисел с таким свойством.

6. См. рис.6.

8 КЛАСС

1. Да, найдутся. Например, x = 1 (февраль), y = 4 (апрель, июнь, сентябрь, ноябрь), z = 7 (остальные месяцы года). Или x = 2, y = 1, z = 9.

2. Да, можно. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_8$ – различные простые числа. Тогда числа $p_1^2 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_8$; $p_1 \cdot p_2^2 \cdot \ldots \cdot p_8$; …; $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_8^2$ являются искомыми.

3. Обозначим через P и Q середины сторон AB и CD соответственно. Средняя линия PQ проходит через точку O, и, если точка M не лежит на отрезке AP, то $\angle MPO = \angle MAD = \angle AMO$. Поэтому треугольник MPO равнобедренный, и $MO = PO$. Но $PO = OQ$, следовательно, в треугольнике PMQ медиана MO равна половине стороны PQ. Значит, треугольник PMQ – прямоугольный, причем сторона MQ перпендикулярна стороне PM. Но сторона PM параллельна CD. Поэтому MQ является серединным перпендикуляром для отрезка CD. Следовательно, $MC = MD$. Случай $M \in AP$ разбирается аналогично.

4. Предположим, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ содержится k синих и, соответственно, 100 – k красных. Тогда эти k синих чисел суть числа от 1 до k включительно, а $100 - k$ красных чисел – числа от $k+1$ до 100 включительно (идущие в обратном порядке).

5. Заметим, что если у человека есть знакомые, сидящие рядом (в частности, если он знаком со своим соседом), то этот человек знаком со всеми. Докажем, что такой гость найдется.

Пусть A и B – двое соседей. Если они не знакомы между собой, то их общий знакомый C знаком со всеми, так как его знакомые сидят без промежутков. В противном случае знаком со всеми человек A (по той же причине).

Итак, пусть X – гость, знакомый со всеми. Тогда его соседи тоже знакомы со всеми, так как они знакомы с X (являющимся для них соседом). Соседи этих соседей также знакомы со всеми, и так далее по кругу в обе стороны.

9 КЛАСС

1. Нет. $4^9 + 6^{10} + 3^{20} = \left(2^9 + 3^{10}\right)^2$.

2. Проведем третью высоту BS и продлим ее до пересечения с PQ в точке T. Докажем, что площади прямоугольников $ASTQ$ и $AEKL$ равны. Из подобия прямоугольных треугольников ABS и AEC получаем $AE/AC = AS/AB \Leftrightarrow AE \cdot AB = AS \cdot AC \Leftrightarrow AE \cdot AL = AS \cdot AQ$. Аналогично, равны площади прямоугольников $CSTP$ и $CDMN$.

4. Обозначим военные базы числами от 1 до n. Если некоторый набор – стратегический, то при выкидывании всех входящих в него дорог множество баз $\{1, \ldots, n\}$ распадается ровно на две не соединенные друг с другом части, внутри которых все дороги сохранены. Пусть первый стратегический набор разбивает множество $\{1, \ldots, n\}$ на подмножества A и B, а второй – на C и D.

Пусть $K = A \cap C$, $L = A \cap D$, $M = B \cap C$, $N = B \cap D$. Множества K, L, M, N попарно не пересекаются, пустым может быть только одно из них (или ни одного), а объединение этих множеств дает $\{1, \ldots, n\}$.

При закрытии первого стратегического набора закрыли все дороги, соединяющие множества K и M, K и N, L и M, L и N, и оставили открытыми дороги, соединяющие множества K с L и M с N. При закрытии второго набора закрыли все дороги, соединяющие множества K и L, K и N, L и M, M и N, и оставили открытыми дороги, соединяющие K с M и L с N. Итак, множество дорог, принадлежащих ровно одному стратегическому набору – это все дороги, соединяющие K и L, K и M, L и N, M и N, а также, возможно, некоторые дороги, соединяющие K с N и L с M. Следовательно, при закрытии такого набора дорог множество баз распадется по крайней мере на (непустые) множества $K \cup N$ и $L \cup M$, не соединенные дорогами. Другими словами, мы получим важный набор, что и требовалось доказать.

5. Заметим, что геометрическое место точек O таких, что $\angle AOD = 80°$ и точка O лежит по ту же сторону от AD, что и B – это дуга окружности, проходящей через точки A и D, а множество точек O, для которых $\angle BOC = 100°$, причем точка O лежит по ту же сторону от BC, что и A – это дуга окружности, проходящей через B и C. Точка O должна лежать на пересечении этих двух дуг. Следовательно, таких точек может быть не более двух.

Укажем две точки, удовлетворяющие условиям задачи. Первая точка, O_1, лежит на диагонали AC, причем $\angle BO_1C = 100°$. Тогда, очевидно, $\angle AO_1B = 80°$, и в силу симметрии относительно AC имеем $\angle AO_1D = \angle AO_1B = 80°$, что и требуется в условии. Аналогично, вторая точка, O_2, лежит на диагонали BD, причем $\angle BO_2C = 100°$. В этом случае $\angle AO_2D = 80°$ и $\angle AO_2B = 100°$.

Легко видеть, что эти две точки различны (они лежат на разных диагоналях и отличны от точки пересечения диагоналей P) и обе лежат внутри ромба.

Ответ: 80° или 100°.

6. Координата каждой отмеченной точки удовлетворяет соотношению вида $x = (y + z)/2$, где y и z – координаты других отмеченных точек или концов отрезка. Заменив координаты отмеченных точек переменными, получим систему линейных уравнений с рациональными коэффициентами и свободными членами (будем называть такую систему рациональной).

Предположим, что решение системы не единственно. Сравним то решение, о котором сказано в условии задачи, с каким-либо другим. Назовем *смещением* переменной абсолютную величину разности ее нового и старого значений. Пусть d – наибольшее из смещений переменных, и среди переменных с таким смещением наибольшее значение в первом решении принимает переменная x. Выполнено соотношение $x = (y + z)/2$, где y и z – другие переменные либо концы отрезка. Пусть в первом решении точка y лежит слева от x, а z – справа (по условию все эти точки не совпадают). Ввиду выбора x смещение z меньше d. Но смещение суммы не превосходит суммы смещений. Как следствие, смещение y больше d, что также противоречит выбору x. Поэтому в действительности решение системы единственно.

Задача свелась к доказательству следующего факта: если рациональная система имеет единственное решение, то оно рационально. Докажем это индукцией по числу переменных. Для $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно справедливо при всех $1 \le k < n$. Выразим какую-либо переменную через другие из уравнения, в которое она входит с ненулевым коэффициентом. Подставив полученное выражение в остальные уравнения, получим рациональную систему с меньшим числом переменных. Ее решение единственно (иначе решение исходной системы не было бы единственным) и по предположению индукции рационально. Исключенная переменная выражена через остальные также рационально, поэтому рационально и ее значение, что и требовалось.

Замечание. Несовпадение точек в условии задачи существенно. Действительно, если три иррациональных точки отрезка $[0; 1]$ совпадают, то каждая из них лежит посередине между двумя другими.

10 КЛАСС

1. Пусть $a + b + c \le 11$. Тогда $28a + 30b + 31c \le 11 \cdot 31 = 341$. Противоречие. Пусть $a + b + c \ge 13$. Тогда $28a + 30b + 31c \ge 13 \cdot 28 = 364$, причем равенство достигается только в случае $a = 13$, $b = c = 0$. Во всех остальных случаях $28a + 30b + 31c \ge 366$. Противоречие. Остается единственный случай $a + b + c = 12$.

3. *Ответ*: 1998. Занумеруем фонари натуральными числами в порядке следования вдоль дороги. Если отрезки, освещенные n-м и $(n+2)$-м фонарями, пересекаются, то $(n+1)$-й фонарь можно выключить. Следовательно, отрезки с различными нечетными номерами не пересекаются. На отрезке длиной 1000 м нельзя расположить больше 999 непересекающихся отрезков длиной 1 м. Значит, фонарей не больше 1998.

Расположим 1998 фонарей так, чтобы центры освещенных отрезков образовывали арифметическую прогрессию, первый член которой равен 0,5 м, а 1998-й равен 999,5 м. Между n-м и $(n+2)$-м отрезком остается зазор в $(1/1997)$ м. Его освещает только $(n+1)$-й фонарь. Поэтому никакой фонарь нельзя выключить.

4. *Ответ*: не существует. Обозначим через $S(X)$ сумму цифр числа X. Из алгоритма сложения в столбик видно, что $S(X + Y) = S(X) + S(Y) - 9P(X, Y)$, где $P(X, Y)$ – число переносов при сложении X и Y в столбик. Отсюда $S(1998X) = S(2000X) - S(2X) + 9P(2X, 1998X) = 9P(2X, 1998X)$, так как $S(2000X) = S(2X)$. Но $P(2X, 1998X) \ge 3$, так как сумма этих чисел имеет на конце на 3 нуля больше, чем каждое из слагаемых.

5. *Ответ*: в отношении 5:7, считая от вершины A. Решим сначала «задачу одного гвоздя». Пусть вбит один гвоздь, касающийся треугольника в точке M на стороне AC. Фиксируем центр предполагаемого вращения (точка O). Можно ли повернуть треугольник вокруг точки O на небольшой угол, и если да, то в какую сторону?

Пусть треугольник расположен так, что при повороте вокруг центра на 60° по часовой стрелке вершина A переходит в вершину B. Проведем перпендикуляр к прямой AC в точке M. Он разобьет плоскость на две полуплоскости. Если точка O лежит в той же полуплоскости, что и C, то вокруг точки O можно повернуть треугольник по часовой стрелке, а если в другой полуплоскости, то против часовой стрелки.

Вернемся к «задаче трех гвоздей». Проведем три соответствующих перпендикуляра. Докажем, что если они не пересекаются в одной точке, то треугольник можно повернуть. Действительно, перпендикуляры разбили плоскость на семь областей. Сопоставим каждой области строку из трех символов типа + или −. Первый плюс означает, что гвоздь на стороне AB не препятствует вращению треугольника вокруг точек этой области по часовой стрелке и т.д. Разным областям не могут соответствовать одинаковые строки. Всех возможных строк восемь. Поэтому наверняка встретится или строка +++, или строка − − −.

Итак, перпендикуляры пересекаются в одной точке. Точки, где вбиты гвозди на сторонах AB, BC и AC, обозначим соответственно через D, E и F. Пусть перпендикуляр к AB в точке D пересекает AC в точке K, перпендикуляр к BC в точке E пересекает AC в точке H, и эти перпендикуляры пересекаются в точке R. Тогда $AK = AD/\cos 60^\circ = AC/2$ и $CH = CE/\cos 60^\circ = 2/3AC$. Треугольник HRK равнобедренный, поскольку углы HKR и KHR равны 30°. Отсюда $HF = FK$ и F делит сторону AC в отношении 5:7, считая от вершины A.

11 КЛАСС

1. Заметим, что

$$x+y+z-2(xy+yz+xz)+4xyz-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(2x-1)(2y-1)(2z-1).$$

Если левая часть равенства равна нулю, то хотя бы один множитель справа равен нулю.

2. Нет, не следует. Пример:

$$f(x)=\begin{cases}2-x, & \text{если } x\le 1;\\ 1/x, & \text{если } x>1.\end{cases}$$

3. Обозначим через M точку пересечения медиан треугольника ABC. Рассмотрим равносторонний треугольник APQ, для которого отрезок AK является медианой, а точка P лежит на прямой AB. Так как точка пересечения медиав всегда делит медианы в отношении 2:1, точка M является точкой пересечения медиан, т.е. центром треугольника APQ. Значит, $\angle KPM = 30^\circ = \angle KBM$. Следовательно, точки M, K, P, B лежат на одной окружности. Так как угол $\angle MKP$ прямой, MP – диаметр этой окружности. Эта окружность пересекает AP ровно в двух точках, одна из которых P, а другая, B, – середина AP.

Пусть сторона треугольника APQ равна $2a$. Имеем: $AB = a$, $AK = \sqrt{3}a$. Треугольник BKP – равносторонний, $BK = a = KC$ и $BC = 2a$. Далее, $\angle ABK = 120^\circ$, откуда по теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos 120^\circ = a^2 + 4a^2 + 2a^2 = 7a^2$. Наконец, находим $\cos\angle ACB = (4+7-1)/(2\cdot 2\sqrt{7}) = 5/(2\sqrt{7})$ и $\cos\angle CAB = (7+1-4)/(2\sqrt{7}) = 2/\sqrt{7}$.

4. Правая часть уравнения при делении на 3 должна давать тот же остаток, что и левая, т.е. 1. Поэтому z – четное число. Аналогично, левая часть уравнения делится на 4 с остатком 1, поэтому число x тоже четное. Обозначив $z = 2t$, имеем $5^t - 2^y = 3^u$, $5^t + 2^y = 3^v$. Поэтому $u = 0$, $v = x = 2k$. Значит, $1 + 2^{y+1} = 3^{2k}$, откуда $(3^k+1)(3^k-1) = 2^{y+1}$. Получили $3^k + 1 = 2^m$, $3^k - 1 = 2^n$, $2^m - 2^n = 2$. Отсюда $n = 1$, $k = 1$, $y = 2$, $x = 2k = 2$, $z = 2$.

5. Число 61 нечетное, поэтому на плоскости такая система шестеренок вращаться не сможет: если одна из шестеренок вращается по часовой стрелке, ее соседи должны вращаться против часовой стрелки, и наоборот. Однако в пространстве

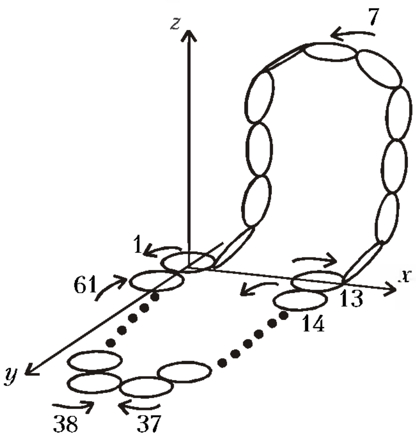


Рис. 7

требуемая конструкция возможна – см. рис.7.

Плоскости шестеренок 1 – 13 перпендикулярны координатной плоскости Oxz; шестеренки 13–61 и 1 содержатся в плоскости Oxy. При этом шестеренки 13, 15, 17, ..., 61 вращаются по часовой стрелке (если смотреть на плоскость Oxy сверху), а шестеренки 14, 16, ..., 60, 1 – против часовой стрелки. На участке 1–13 этой цепочки происходит перемена четности номеров шестеренок, вращающихся в плоскости Oxy в одну сторону: шестеренки 1 и 13 вращаются в разных направлениях.

Комментарий. Встретившийся в этой задаче объект называется лентой Мёбиуса.

Избранные задачи отбора на Российскую олимпиаду

1. *Первое решение.* Пусть $P(x) = a_k x^k + a_m x^m + \ldots$, где $k > m \ge 0$. Тогда $P(P(x)) = a_k\left(a_k x^k + a_m x^m + \ldots\right)^k + a_m\left(a_k x^k + a_m x^m + \ldots\right)^m + \ldots$ При раскрытии первой скобки получаются степени $k^2 > k(k-1) + m > \ldots$ Старшая степень второй скобки равна km. Но $k(k-1) + m > km$ при $k > 1$. В этом случае $k(k-1) + m > 0$. Получили: $k = 1$, $n = 1$. Легко видеть, что $P(x) = x - \frac{1}{2}$.

Второе решение. Обозначим $Q = P'$, тогда $Q(x)Q(P) = nx^{n-1}$. Значит, $Q(x)$ одночлен: $Q(x) = a_k x^k$. $Q(P(x))$ также одночлен. При $k > 0$ это означает, что $P(x)$ – одночлен. Противоречие. Получили: $P(x) = ax + b$, $n = 1$.

2. Перепишем уравнение: $(x-a)(y-a) = a^2$, где $x \ne 0$. Число целых решений этого уравнения имеет вид $4k + 1 \ne 99$.

3. Занумеруем школьников в порядке очереди в первый день. Пусть их всего n. Пусть k – номер школьника, игравшего с последним в первый день. Тогда он играл со школьниками с номерами от $k + 1$ до n. Ясно, что во второй день он также играл с кем-то из них.

4. *Лемма.* Если x_1, x_2, x_3 – корни $x^3 + px + q$, $p, q \in \boldsymbol{Q}$, $x_1, x_2, x_3 \overline{\in} \boldsymbol{Q}$, то $ax_1 + bx_2 + cx_3 \ne 1$ при $a, b, c \in \boldsymbol{Q}$.

Доказательство. Пусть $x_1 \ne x_2$, $Ax_1 + Bx_2 = 1$, $A, B \in \boldsymbol{Q}$, $A \ne 0$.

$$P(x_1) - P(x_2) = (x_1 - x_2)\left(\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right) + p\right) = 0.$$

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 - \frac{B}{A} + 1 > 0.$$

Значит, x_2 – корень многочлена P_2 с рациональными коэффициентами.

Получили: $P(x) = P_2(x)(x - \alpha)$, где $\alpha \in \mathbf{Q}$. Противоречие.

Решение задачи. $\cos 20°$, $-\cos 40°$, $-\cos 80°$ – корни уравнения $\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x$. Достаточно доказать, что $P(y) = y^3 - 3y - 1$ не имеет рациональных корней. Но такими корнями могли бы быть лишь числа ± 1.

5. Пусть $g(x) = x - f(x)$. Тогда условие $f(x) = x + f(x - f(x))$ можно, перенеся x налево, записать в виде $-g(x) = f(g(x))$. Заметим, что:

1) $g(x)$ – непрерывная функция от x;

2) $g(0) = 0$;

3) $g(g(x)) = g(x) - f(g(x)) = 2g(x)$.

Таким образом, если функция g принимает какое-то положительное значение, то она принимает сколь угодно большие положительные значения; аналогично – с отрицательными значениями. Но поскольку $g(x)$ непрерывна, если она принимает значения a и b, то она принимает все значения между a и b.

Таким образом, возможны только 4 случая:

1) $g(x) = 0$ для всех x;

2) $g(x)$ принимает все неотрицательные значения, и только их;

3) $g(x)$ принимает все неположительные значения, и только их;

4) $g(x)$ принимает все значения.

Случай 1. $\forall x\ g(x) = x - f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x\ f(x) = x$.

Случай 2. Поскольку всякое $x \geq 0$ представимо в виде $x = g(y)$, то $f(x) = f(g(y)) = -g(y) = -x$; для $x < 0$ имеем $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq x$. Убедимся, что все такие непрерывные функции подходят. Если $x \geq 0$, то $f(x - f(x)) + x - f(x) = f(2x) + x + x = 0$. Если $x < 0$, то $f(x - f(x)) + x - f(x) = f(x) - x + x - f(x) = 0$, поскольку $x - f(x) \geq 0$.

Случай 3. Аналогично случаю 2, получаем все непрерывные функции, для которых $f(x) = -x$ при $x \leq 0$, $f(x) \geq x$ при $x > 0$.

Случай 4. Все x представимы в виде $x = g(y)$, тогда $f(x) = f(g(y)) = -g(y) = -x$.

6. Решение опирается на два следующих утверждения.

Лемма 1. В описанном четырехугольнике прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон с вписанной окружностью, проходят через точку пересечения диагоналей.

Лемма 2. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ касательные к описанной окружности в точках B и D пересекаются на прямой PQ, проходящей через точки пересечения противоположных сторон четырехугольника.

Обе леммы можно доказать, спроектировав точку пересечения диагоналей четырехугольника в центр окружности или рассматривая четырехугольник как вырожденный шестиугольник и применяя теоремы Брианшона и Паскаля. (Доказательство этих лемм можно найти, например, в статье А.Заславского «Некоторые факты проективной геометрии», опубликованной в «Кванте» №1 за 1996 год.)

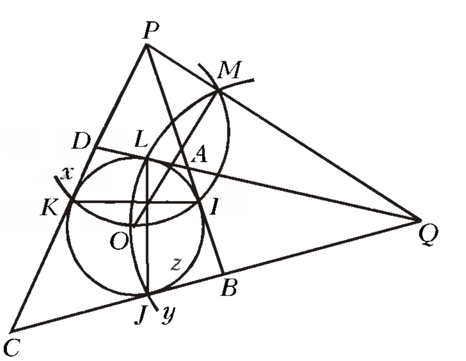


Рис. 8

Пусть теперь $ABCD$ – описанный четырехугольник, I, J, K, L – точки касания вписанной окружности z со сторонами AB, BC, CD, DA, P – точка пересечения AB и CD, Q – точка пересечения AD и BC, M – основание перпендикуляра, опущенного из O на PQ (рис.8).

Построим на отрезках OP, OQ как на диаметрах окружности x, y. Точки M, I, K лежат на окружности x, так как соответствующие углы прямые. Аналогично L, J, M лежат на y.

Прямые LJ, KI, OM являются общими хордами окружностей y и z, x и z, x и y соответственно. Следовательно, они пересекаются в одной точке, которая по лемме 1 совпадает с точкой пересечения диагоналей $ABCD$.

Мы доказали утверждение а).

Для доказательства утверждения б) заметим, что углы OMK и OMI равны, так как равны соответствующие дуги окружности x. Аналогично равны углы OML и OMJ. Поэтому при симметрии относительно OM точки I, J перейдут в точки I', J', лежащие на прямых MK, ML соответственно. Точка B перейдет в точку B' пересечения касательных к окружности в точках I', J'. При этом точки M, B', D лежат на одной прямой по лемме 2. Следовательно, углы BMO и DMO равны (заметим, что углы AMO и CMO также равны).

Примечание. Утверждение а) сразу следует из того, что прямая PQ является полярой точки пересечения диагоналей вписанного четырехугольника.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ МОСКОВСКОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

8 КЛАСС

1. Эту задачу проще всего решать графически (рис.9). Нарисуем прямоугольную систему координат «положение автомобиля – время» $(x - t)$ и отметим на этом чертеже последовательные положения автомобиля настолько точно, насколько

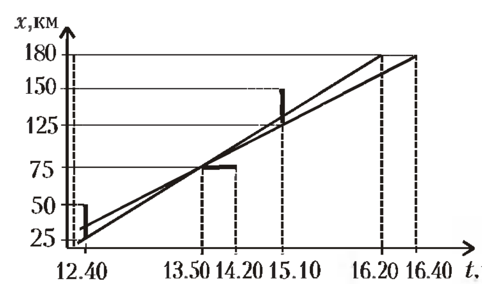


Рис. 9

это позволяет условие задачи. Мы знаем, что в 12 ч 40 мин координата автомобиля удовлетворяла неравенству $25 < x < 50$, т.е. положение автомобиля в указанный момент времени изображается на чертеже вертикальным отрезком. Аналогичными отрезками изображаются и два других положения автомобиля, о которых идет речь в условии. Известно, что при равномерном движении зависимость координаты от времени изображается прямой линией. Значит, для того чтобы получить ответ, нужно провести две прямые линии так, чтобы они обе проходили через нарисованные на чертеже отрезки, но при этом одна из них должна иметь максимально возможный наклон, а вторая – минимально возможный наклон. Эти прямые отсекут на горизонтальной линии, соответствующей координате $x = 180$ км, отрезок, который и даст нам искомый интервал времени. Из рисунка видно, что прибытия автомобиля в Борискино можно ожидать примерно с 16 ч 20 мин до 16 ч 40 мин.

2. Нужно сделать пять переливаний. *Указание.* С помощью уравнения теплового баланса находим, что разность температур после первого переливания туда-обратно составит 6 °С, после второго – 3,6 °С, после третьего – 2,16 °С, после четвертого – 1,296 °С, после пятого – 0,7776 °С. Значит, достаточно пяти переливаний.

9 КЛАСС

1. После удара верхнего бруска о стену его скорость изменится на противоположную по направлению, сохранив свой модуль, а скорость нижнего бруска не изменится. Затем бруски начнут двигаться навстречу друг другу с одинаковыми по модулю начальными скоростями и равными по модулю, но противоположно направленными ускорениями. Из-за этого скорости брусков будут уменьшаться, все время оставаясь равными друг другу. В результате нижний брусок либо не достигнет стены, либо все же ударится о нее, имея некоторую скорость u. В первом случае оба бруска останутся стоять неподвижно на некотором расстоянии от стены. Во втором случае нижний брусок, ударившись о стену, поменяет направление своей скорости на противоположное, в результате чего проскальзывание между брусками прекратится и оба бруска продолжат движение со скоростью, равной u, в направлении от стены. Рассмотрим отдельно оба случая.

Поместим начало координатной оси X в угол между стеной и полом и направим ее в сторону первоначального движения брусков. Ясно, что после первого удара сила трения между брусками составляет $F_{\text{тр}} = \mu M g$, ускорение нижнего и верхнего брусков по модулю равно $F_{\text{тр}}/M = \mu g$. Тогда закон движения передней грани нижнего бруска имеет вид

$$x = -a + v_0 t - \frac{\mu g t^2}{2},$$

а его скорость изменяется по закону

$$v = v_0 - \mu g t,$$

при этом время отсчитывается от момента удара верхнего бруска о стену. Найдем условие на скорость v_0, при которой нижний брусок не доедет до стены (не достигнет координаты $x = 0$). Оно получается из неравенства

$$x = -a + v_0 t - \frac{\mu g t^2}{2} < 0.$$

Решая его, находим, что дискриминант квадратного трехчлена, содержащегося в неравенстве, отрицателен при

$$v_0^2 < 2a\mu g.$$

Это и есть искомое условие. Время, через которое нижний брусок остановится, можно определить, приравняв скорость v нулю:

$$t_1 = \frac{v_0}{\mu g}.$$

Значит, при $v_0^2 < 2a\mu g$ оба бруска в конце концов остановятся. Это первый ответ задачи.

Пусть теперь $v_0^2 \geq 2a\mu g$. Из закона движения нижнего бруска найдем, через какое время t_2 он стукнется о стену:

$$t_2 = \frac{v_0}{\mu g} \pm \frac{\sqrt{v_0^2 - 2a\mu g}}{\mu g} = t_1 \pm \frac{\sqrt{v_0^2 - 2a\mu g}}{\mu g}.$$

Для того чтобы нижний брусок стукнулся о стену, нужно, чтобы выполнялось условие $t_2 < t_1$ (иначе брусок остановится раньше, чем доедет до стены). Поэтому остается только результат со знаком «минус» перед корнем:

$$t_2 = \frac{v_0}{\mu g} - \frac{\sqrt{v_0^2 - 2a\mu g}}{\mu g}.$$

Теперь можно найти скорость, которую будут иметь оба бруска после взаимодействия со стеной:

$$u = v_0 - \mu g t_2 = \sqrt{v_0^2 - 2a\mu g}.$$

Это второй ответ задачи.

2. Автобус, велосипедист и грузовик в каждый момент времени образуют равнобедренный треугольник, основание которого лежит на дороге, по которой едут автобус и велосипедист (рис.10). Направим ось X вдоль этой дороги в направлении

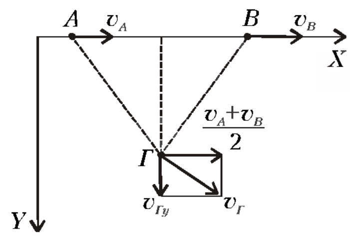


Рис. 10

движения автобуса и велосипедиста, а ось Y – перпендикулярно к ней. Тогда законы движения для автобуса, велосипедиста и грузовика будут иметь вид

$$x_A(t) = x_{A_0} + v_A t, \quad y_A(t) = 0,$$

$$x_B(t) = x_{B_0} + v_B t, \quad y_B(t) = 0,$$

$$x_Г(t) = \frac{x_{A_0} + x_{B_0}}{2} + \frac{v_A + v_B}{2} t, \quad y_Г(t) = y_{Г_0} + v_{Гy} t.$$

Из условия задачи нам известен модуль скорости грузовика, который связан с проекциями скорости формулой

$$v_Г^2 = \left(\frac{v_A + v_B}{2}\right)^2 + \left(v_{Гy}\right)^2,$$

откуда находим проекцию скорости грузовика на ось Y:

$$v_{Гy} = \sqrt{v_Г^2 - \left(\frac{v_A + v_B}{2}\right)^2}.$$

Теперь найти скорость грузовика относительно автобуса не составляет труда. По теореме Пифагора, примененной к треугольнику скоростей, имеем

$$v_{\text{отн}}^2 = \left(v_A - \frac{v_A + v_B}{2}\right)^2 + \left(v_{Гy}\right)^2,$$

откуда

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{v_Г^2 - v_A v_B} = 25 \text{ км/ч}.$$

10 КЛАСС

1. В условии сказано, что коробка легкая. Значит, ее массой можно пренебречь. Поскольку давления воздуха внутри и вне коробки все время одинаковы, легко показать, что всплывающая коробка никогда не упрется в крышку цилиндра.

Заметим, что если учесть массу коробки, то результат будет зависеть от плотности материала $\rho_{\text{м}}$, из которого она изготовлена. Если $\rho_{\text{м}} < \rho$, то коробка в конце концов всплывет и упрется в крышку цилиндра, а если $\rho_{\text{м}} > \rho$, то она утонет.

2. Докажем, что если шарик поворачивает на угол $\alpha < 180°$ за два удара, то при заданной начальной скорости его конечная скорость будет максимальной в том случае, если при каждом ударе он поворачивал на угол $\alpha/2$.

Пусть до первого удара первый шарик двигался со скоростью

v. Тогда после удара первый шарик будет двигаться с некоторой скоростью, равной v_1 и направленной под углом φ к направлению первоначального движения, а второй шарик, который до удара покоился, будет двигаться со скоростью, равной v_2 и направленной под углом ψ к направлению первоначального движения первого шарика. Из закона сохранения импульса для абсолютно упругого удара движущегося шарика о неподвижный имеем

$$mv = mv_1\cos\varphi + mv_2\cos\psi,$$

$$mv_1\sin\varphi = mv_2\sin\psi,$$

причем

$$\varphi + \psi = \pi/2,$$

т.е. после абсолютно упругого нецентрального удара движущегося шара о покоящийся скорости разлетающихся шаров направлены под углом 90° друг к другу.

Отсюда находим

$$v_1 = v\cos\varphi.$$

Это означает, что поворот вектора скорости налетающего шара на угол φ сопровождается уменьшением величины скорости в $\cos\varphi$ раз. Значит, после двух последовательных соударений скорость налетающего шарика будет равна $u_2 = v\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)$ (напомним, что шарик поворачивает за два удара на угол α). Для того чтобы скорость шарика после двух ударов была максимальной, необходимо, чтобы было максимальным произведение $\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)$. Из известной формулы

$$\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-2\varphi)+\cos\alpha\right)$$

ясно, что это выражение будет иметь максимальное значение при $\cos(\alpha-2\varphi) = 1$, т.е. при $\varphi = \alpha/2$, что и требовалось доказать.

Рассматривая таким же способом каждую пару последовательных ударов, приходим к выводу, что, для того чтобы конечная скорость была максимальной, при каждом ударе налетающий шар должен поворачивать на один и тот же угол φ. Так как по условию после $N-1 = 100$ соударений этот шар начинает двигаться в противоположном направлении, то $\varphi = \pi/(N-1) = \pi/100$. После сотого соударения шар будет иметь скорость

$$u_{100} = v(\cos\varphi)^{N-1}.$$

Учитывая малость угла φ, окончательно получим

$$u_{100\max} = v(\cos\varphi)^{N-1} \approx v\left(\sqrt{1-\sin^2\varphi}\right)^{N-1} \approx v\left(\sqrt{1-\varphi^2}\right)^{N-1} \approx$$

$$\approx v\left(1-\frac{N-1}{2}\varphi^2\right) = v\left(1-\frac{\pi^2}{200}\right) \approx 0{,}95v.$$

3. Кочерга начинает гнуться тогда, когда напряжение в ее материале превышает предел упругости σ. При этом слои, находящиеся на внешней стороне дуги изгибаемой кочерги, растягиваются, а находящиеся на внутренней стороне дуги сжимаются. Для оценки момента сил, который надо приложить, чтобы кочерга согнулась, можно считать, что на верхнюю половину сечения кочерги действует растягивающее усилие $\sigma\cdot a\cdot a/2$, а на нижнюю половину – такое же сжимающее усилие. Тогда момент сил равен

$$M = \sigma\frac{a^2}{2}\cdot\frac{a}{2} = \frac{\sigma a^3}{4}.$$

(Более точная оценка получается при учете линейного закона изменения напряжения по сечению.)

Получим теперь оценку для силы. Заметим, что кочергу можно гнуть двумя способами. Первый способ – упираться коленом в середину кочерги, а за ее концы тянуть руками с силой F. Тогда изгибающий момент будет равен $M = Fl/2$, откуда

$$F = \frac{2M}{l} = \frac{2}{l}\frac{\sigma a^3}{4} = \frac{\sigma a^3}{2l} = 150\ \text{Н}.$$

Это не очень большое усилие.

Второй, более «честный», способ гнуть кочергу – создавать моменты сил только ладонями рук, ничем другим не упираясь в кочергу. Считая, что ширина ладони $L \approx 10$ см, получаем

$$F_1 = \frac{M}{L} = \frac{\sigma a^3}{4L} = 750\ \text{Н}.$$

Такое усилие создать пальцами рук достаточно трудно.

4. В данной системе заряды могут располагаться либо на одной прямой, либо образовывать вершины треугольника. Случаев равновесия, когда заряды находятся на одной прямой, возможно три – они показаны на рисунке 11. Все эти случаи реализуются при любых соотношениях между зарядами q_1, q_2 и q_3, но устойчивым положением равновесия является только один из них – в зависимости от соотношения величин зарядов. Во всех этих случаях нить растягивается силами отталкивания зарядов, причем средний заряд располагается так, чтобы сумма действующих на него сил была равна нулю. Так как нить при этом оказывается сложенной пополам, то расстояние между крайними зарядами равно $l/2$, и на каждый из этих зарядов действует сила электрического отталкивания и удвоенная сила натяжения нити. Из условия равновесия зарядов для каждого из случаев находим силы натяжения нити:

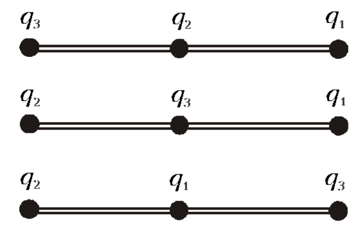


Рис. 11

$$T_1 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l^2}\left(q_1q_3 + \left(\sqrt{q_1q_2}+\sqrt{q_2q_3}\right)^2\right),$$

$$T_2 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l^2}\left(q_1q_2 + \left(\sqrt{q_1q_3}+\sqrt{q_2q_3}\right)^2\right),$$

$$T_3 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l^2}\left(q_2q_3 + \left(\sqrt{q_1q_2}+\sqrt{q_1q_3}\right)^2\right).$$

Далее обсудим случай, когда заряды образуют вершины треугольника (рис.12). Рассмотрим какой-либо заряд, например q_1. Сумма сил, действующих на этот заряд, равна нулю (заряд неподвижен). Со стороны нити действуют две одинаковые по модулю силы натяжения T, направленные вдоль сторон треугольника. Следовательно, равнодействующая этих сил направлена по биссектрисе соответствующего угла. Тогда равнодействующая сил электростатического взаимодействия

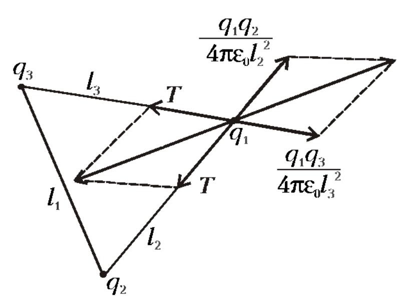


Рис. 12

заряда q_1 с зарядами q_2 и q_3 также должна быть направлена по биссектрисе этого угла, но в другую сторону. А поскольку эти силы тоже направлены вдоль сторон треугольника, то они должны быть равны по модулю между собой и каждая из них должна быть равна T. Учитывая сказанное, а также соотношение $l_1 + l_2 + l_3 = l$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} q_1 l_1^2 = q_2 l_2^2 = q_3 l_3^2, \\ l_1 + l_2 + l_3 = l, \end{cases}$$

решая которую, находим

$$l_1 = \frac{l}{\left(1 + \sqrt{q_1/q_2} + \sqrt{q_1/q_3}\right)},$$

$$l_2 = \frac{l}{\left(1 + \sqrt{q_2/q_3} + \sqrt{q_2/q_1}\right)},$$

$$l_3 = \frac{l}{\left(1 + \sqrt{q_3/q_1} + \sqrt{q_3/q_2}\right)}.$$

Теперь, зная, например, расстояние l_1 между зарядами q_2 и q_3, можно вычислить силу электростатического взаимодействия между ними. Эта сила, как мы уже выяснили, равна силе натяжения нити:

$$T_4 = F_{23} = \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 l_1^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\left(\sqrt{q_2 q_3} + \sqrt{q_3 q_1} + \sqrt{q_2 q_1}\right)^2.$$

Осталось установить, при каком соотношении между величинами зарядов реализуется случай, когда заряды являются вершинами треугольника. По известной теореме сумма двух сторон любого треугольника больше третьей стороны:

$$l_1 + l_2 > l_3,\ l_1 + l_3 > l_2,\ l_2 + l_3 > l_1.$$

Отсюда, используя равенство $l_1 + l_2 + l_3 = l$, получаем

$$l_1 < \frac{l}{2},\ l_2 < \frac{l}{2},\ l_3 < \frac{l}{2}.$$

Подставив полученные ранее выражения для l_1, l_2 и l_3, имеем

$$\sqrt{q_1 q_3} + \sqrt{q_1 q_2} > \sqrt{q_2 q_3},$$

$$\sqrt{q_1 q_2} + \sqrt{q_2 q_3} > \sqrt{q_1 q_3},$$

$$\sqrt{q_1 q_3} + \sqrt{q_2 q_3} > \sqrt{q_1 q_2},$$

т.е. числа $\sqrt{q_1 q_3}$, $\sqrt{q_1 q_2}$ и $\sqrt{q_2 q_3}$ являются сторонами некоторого треугольника. Значит, расположение зарядов в виде треугольника возможно только при выполнении полученного набора условий. Этот набор можно переписать в виде

$$1/\sqrt{q_3} + 1/\sqrt{q_2} > 1/\sqrt{q_1},$$

$$1/\sqrt{q_2} + 1/\sqrt{q_1} > 1/\sqrt{q_3},$$

$$1/\sqrt{q_3} + 1/\sqrt{q_1} > 1/\sqrt{q_2}.$$

Очевидно, что эти условия не выполняются, если один из зарядов существенно меньше остальных. В этом случае заряды будут располагаться на прямой линии, причем маленький заряд будет находиться посредине между большими.

11 КЛАСС

1. Прежде всего, понятно, что максимально возможная емкость будет у батареи тогда, когда все маленькие конденсаторы будут соединены параллельно. Вопрос состоит только в том, как проводить процедуру зарядки и соединения маленьких конденсаторов. Можно, например, сначала соединить все маленькие конденсаторы параллельно, а затем присоединить к большому конденсатору. В этом случае разность потенциалов между обкладками конденсаторов после соединения будет

$$\Delta\varphi = \frac{Q}{C + NC/N} = \frac{Q}{2C},$$

а заряд, который приобретет батарея, будет

$$q' = \frac{Q}{2},$$

т.е. при таком способе зарядки заряд большого конденсатора просто делится пополам.

Однако можно сначала заряжать маленькие конденсаторы, а потом собирать из них батарею. При этом заряжать конденсаторы нужно так, чтобы заряд каждого был по возможности максимальным. Ясно, что самый выгодный способ создания батареи – по очереди подсоединять к большому конденсатору все маленькие конденсаторы, а уже затем собрать из них батарею.

Найдем заряд большого конденсатора после того, как к нему будет подсоединен первый маленький незаряженный конденсатор:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{Q}{C + C/N},\ Q_1 = C\Delta\varphi_1 = \frac{Q}{1 + 1/N}.$$

Заряд большого конденсатора после подключения к нему второго маленького незаряженного конденсатора будет

$$Q_2 = C\Delta\varphi_2 = \frac{Q_1}{1 + 1/N} = \frac{Q}{(1 + 1/N)^2},$$

а после N-го –

$$Q_N = \frac{Q}{(1 + 1/N)^N}.$$

Так как N достаточно велико, число $(1 + 1/1000)^{1000} \approx e \approx 2{,}72$. Поэтому после всех манипуляций на большом конденсаторе окажется заряд Q/e, а на маленьких конденсаторах – суммарный заряд $q = Q(1 - 1/e) \approx 0{,}63\ Q$. Заметим, что заряд получившейся батареи больше, чем заряд, оставшийся у большого конденсатора.

2. Поскольку в начале поворота автомобиля солнечный «зайчик» от его бокового стекла попадает в одну точку, боковое стекло движется по некоторой поверхности, фокусирующей лучи Солнца в этой точке. Считая Солнце точечным бесконечно удаленным источником, расположенным на линии горизонта, можно утверждать, что это – поверхность цилиндрического зеркала с фокусным расстоянием 10 фунтов ($\approx$3 метра).

Рассмотрим участок цилиндрического зеркала OA (рис.13). Один луч падает в точку O, проходя через ось цилиндра R, и при отражении меняет свое направление на противоположное. Другой луч падает в точку A и после отражения проходит через точку F. На рисунке обозначены три равных угла α: угол падения, угол отражения и угол между первым лучом и нормалью к цилиндрической поверхности, проведенной из точки падения второго луча. Треугольник AFR – равнобедренный, откуда следует, что расстояние от центра до точки F при малых углах равно половине радиуса. Следовательно, радиус ок-

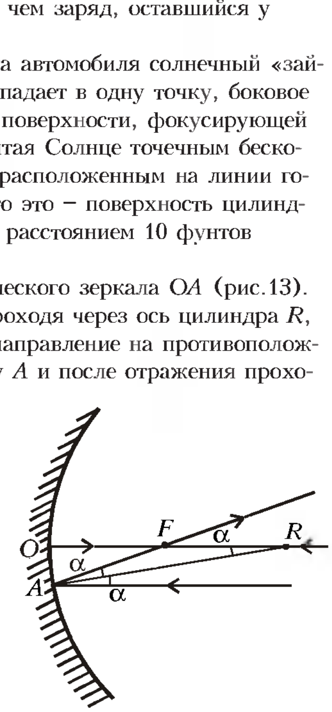


Рис. 13

ружности, по которой движется кабриолет, примерно в два раза больше расстояния от точки поворота до столба: у цилиндрического зеркала фокусное расстояние в два раза меньше радиуса его кривизны.

Максимальное центростремительное ускорение, сообщаемое силой трения, не может превосходить μg, т.е. заведомо меньше ускорения свободного падения. Обозначив скорость кабриолета через v и предполагая, что кабриолет двигался по окружности радиусом r = 20 футов, получим

$$g > \mu g = \frac{v^2}{r}, \text{ откуда } v < \sqrt{gr} \approx 8 \text{ м/с} \approx 18 \text{ миль/ч}.$$

Холмс, как всегда, оказался прав!

3. Обозначим массы ртути, воды и спирта через $m_р$, $m_в$ и $m_с$ соответственно. Пусть S – площадь сечения U-образной трубки, а x – смещение ртути от положения равновесия. Тогда уравнение колебаний ртути в трубке будет иметь вид

$$m_р a = -2\rho_1 gxS,$$

откуда для периода колебаний ртути получаем

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_р}{2\rho_1 gS}}.$$

Если теперь записать уравнения колебаний для ртути и воды, а затем для ртути, воды и спирта, то получатся аналогичные соотношения, в которых под корнем в числителе будет стоять суммарная масса жидкостей, а знаменатель не изменится, потому что возвращающая сила обусловлена только перетеканием ртути из одного колена в другое. В итоге имеем

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_р + m_в}{2\rho_1 gS}}, \quad T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{m_р + m_в + m_с}{2\rho_1 gS}}.$$

Из написанных выражений для периодов находим

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{m_р + m_в}{m_р},$$

$$\frac{T_3^2}{T_2^2} = \frac{m_р + m_в + m_с}{m_р + m_в},$$

откуда после некоторых преобразований получаем

$$m_с : m_в : m_р = \left(T_3^2 - T_2^2\right) : \left(T_2^2 - T_1^2\right) : T_1^2.$$

4. В данном процессе газ получает тепло на участках AB и BC, а отдает тепло на участках CD и DA. Используя первое начало термодинамики и уравнение Менделеева – Клапейрона, найдем полученные количества теплоты:

$$Q_{AB} = \frac{3}{2}\nu R(T_B - T_A) = \frac{3}{2}(p_2 - p_1)V_1,$$

$$Q_{BC} = \frac{3}{2}\nu R(T_C - T_B) + p_2(V_2 - V_1) = \frac{5}{2}p_2(V_2 - V_1).$$

Работа, совершаемая газом за цикл, равна

$$A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1).$$

Отсюда для величины $1/\eta$, где η – КПД, имеем

$$\frac{1}{\eta} = \frac{Q_{AB} + Q_{BC}}{A} = \frac{3/2(p_2 - p_1)V_1 + 5/2\,p_2(V_2 - V_1)}{(p_2 - p_1)(V_2 - V_1)} =$$

$$= \frac{3/2(p_2 - p_1)V_1 + 5/2\,p_2(V_2 - V_1) + p_1V_2 - p_1V_2 + p_1V_1 - p_1V_1}{(p_2 - p_1)(V_2 - V_1)} =$$

$$= \frac{3/2\,\Delta pV_1 + 5/2\,\Delta Vp_1 + 5/2\,\Delta p\Delta V}{\Delta p\Delta V} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\frac{V_1}{\Delta V} + \frac{5}{2}\frac{p_1}{\Delta p}.$$

Здесь $\Delta p = p_2 - p_1$, $\Delta V = V_2 - V_1$. Видно, что максимальное значение КПД (минимальное значение $1/\eta$) достигается при $V_1 \ll \Delta V$ и $p_1 \ll \Delta p$. Графически это означает, что цикл прижимается к началу координат pV-диаграммы. В пределе получаем

$$\frac{1}{\eta} \to \frac{5}{2}, \text{ и } \eta_{max} = \frac{2}{5}.$$

5. Пусть лампа выделяет в окружающую среду мощность P, которая почти не изменяется со временем. Будем также считать, что изменения сопротивления лампы R и теплоемкости материала ее нити C малы. За малое время Δt в лампе выделяется тепловая энергия $\Delta Q = U_0^2/R\cos^2\omega t \cdot \Delta t$, в окружающую среду уходит количество теплоты $P\Delta t$, а разность их уходит на изменение температуры нити на величину ΔT:

$$\left(\frac{U_0^2}{R}\cos^2\omega t - P\right)\Delta t = C\Delta T,$$

или

$$\frac{U_0^2}{2R} + \frac{U_0^2}{2R}\cos 2\omega t - P = \frac{C\Delta T}{\Delta t}.$$

Так как средние значения $\cos 2\omega t$ и $\Delta T/\Delta t$ равны нулю (в среднем температура нити лампы постоянна), из последнего уравнения получаем

$$\frac{U_0^2}{2R} = P_{ср} \approx P.$$

Тогда имеем

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{U_0^2}{2RC}\cos 2\omega t, \text{ откуда } T = T_0 + \frac{U_0^2}{4\omega RC}\sin 2\omega t.$$

Значит, искомая амплитуда установившихся колебаний температуры равна

$$\Delta T = \frac{U_0^2}{4\omega RC}.$$

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

А.Н.Балдин, В.А.Иванюк, А.Е.Пацхверия, М.М.Константинова, Д.Н.Гришукова, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Осипова

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №