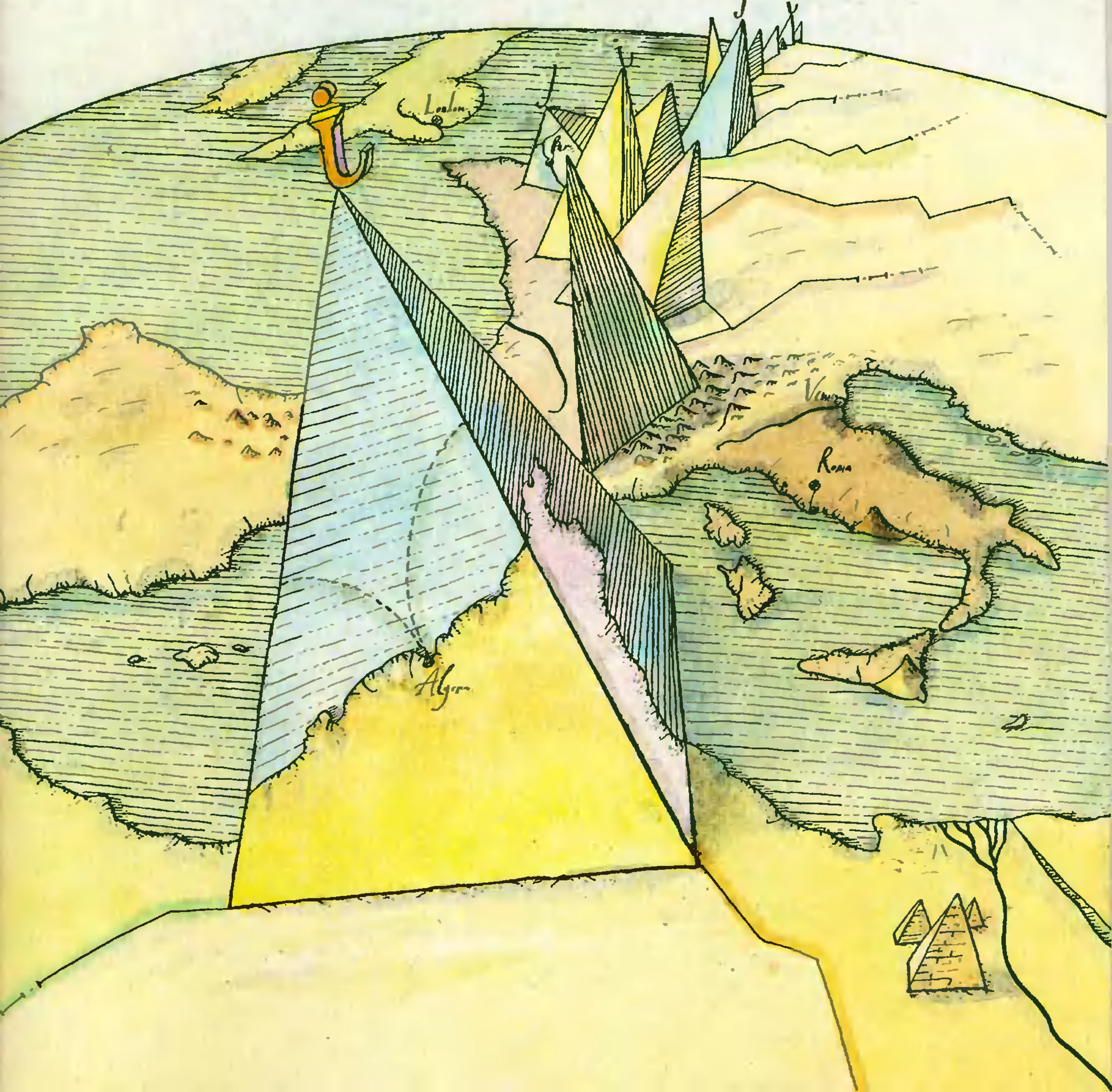
ISSN 0130-2221
ЯНВАРЬ/ФЕВРАЛЬ
1998 · №1

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

ПРОЩЕ ПРОСТОГО

Проще простого сделать головоломку из шести одинаковых полосок, вырезанных из любого гибкого и тонкого материала. Можно использовать пластмассу или картон, металл, линолеум.

На концах каждой полоски делают прорези. Глубина прорезей равна половине ширины пластинки. После этого собирается конструкция, показанная на рисунке.

Головоломка проста только в изготовлении, в ней таится немало сюрпризов. Прежде всего, ее не так легко собрать, как кажется, особенно если не глядеть на наш рисунок.

А вот одна интересная задача. Можно ли собрать эту головоломку из трех пар заранее сцепленных своими концами элементов? Оказывается, нет. При доказательстве будем исходить из того, что если головоломку невозможно разобрать, следовательно, ее невозможно и собрать.

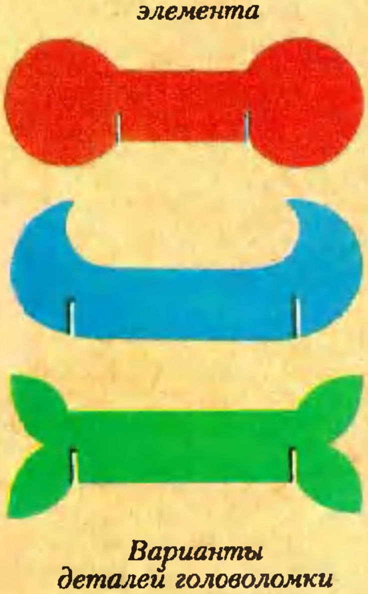
Деталь головоломки

Два сцепленных элемента

Соберите вашу конструкцию, а затем склейте или любым другим способом скрепите пары элементов на шести концах конструкции. Теперь попытайтесь разобрать игрушку. Если полоски, из которых сделана ваша конструкция, достаточно гибкие, вам удастся изменить конфигурацию головоломки. Она превратится в три сцепленных кольца. Эти кольца известны математикам с древних времен. Их замечательная особенность состоит в том, что хотя они не зацеплены друг за друга попарно, их невозможно расцепить. Такое переплетение колец называется «кольцами Борромео», по имени древнего итальянского рода, в гербе которого они были. А раз головоломку из трех колец невозможно разобрать, следовательно, ее невозможно и собрать.

Изменяя форму полосок, их длину, ширину и места прорезей, можно придумывать новые головоломки красивых геометрических форм.

А. Калинин



Варианты деталей головоломки

Кольца Борромео

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

ЯНВАРЬ/ФЕВРАЛЬ · 1998 · №1

Бюро Квантум

В номере:

Статистика первых цифр степеней двойки и передел мира

В.АРНОЛЬД

Первая цифра числа 2^n бывает единицей примерно в 6 раз чаще, чем девяткой. Так же распределены первые цифры населений и площадей стран мира. Предлагаемое ниже объяснение этого факта приводит к большому количеству математических гипотез, часть из которых доказана, а часть лишь подтверждена компьютерными экспериментами и ожидает строгого доказательства.

Степени двойки

Последовательность первых цифр чисел 2^n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) начинается с

$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, \ldots$$

Доклад, прочитанный замечательным математиком, академиком Владимиром Игоревичем Арнольдом в Университете в Торонто 9 июня 1997 г.

Можно проверить, продолжив вычисление, что единицы составляют примерно 30% членов этой последовательности (а девятка — меньше 5%). Такое же распределение получается для последовательности первых цифр чисел 3^n и вообще для почти любой геометрической прогрессии. (Очевидное исключение составляют лишь прогрессии со знаменателями 10, $\sqrt{10}$ и вообще $10^{p/q}$, где p и q целые.)

Доказательство сформулированного удивительного утверждения получено Г.Вейлем почти 100 лет назад. Он доказал даже больше. Напомню, что каждое действительное число c можно представить единственным образом в виде суммы целого числа (называемого *целой частью* числа c) и *дробной доли* $\{c\}$, принадлежащей интервалу $[0, 1)$.

Теорема. *Пусть x — иррациональное число. Тогда последовательность $\{nx\}$ дробных долей чисел nx ($n = 0, 1, 2, \ldots$) равномерно распределена на интервале $(0, 1)$.*

Это значит, что число значений n, $0 \le n < N$, для которых дробная доля nx принадлежит любому фиксированному отрезку длиной a, поделенное на N, стремится к a при N, стремящемся к бесконечности.

Иными словами, рассмотрим движение точки по окружности, в котором точка в целые моменты времени (n) перескакивает вперед на (несоизмеримый с 2π) угол $2\pi x$ (рис.1). Теорема утверждает, что время, проведенное движущейся точкой на лю-

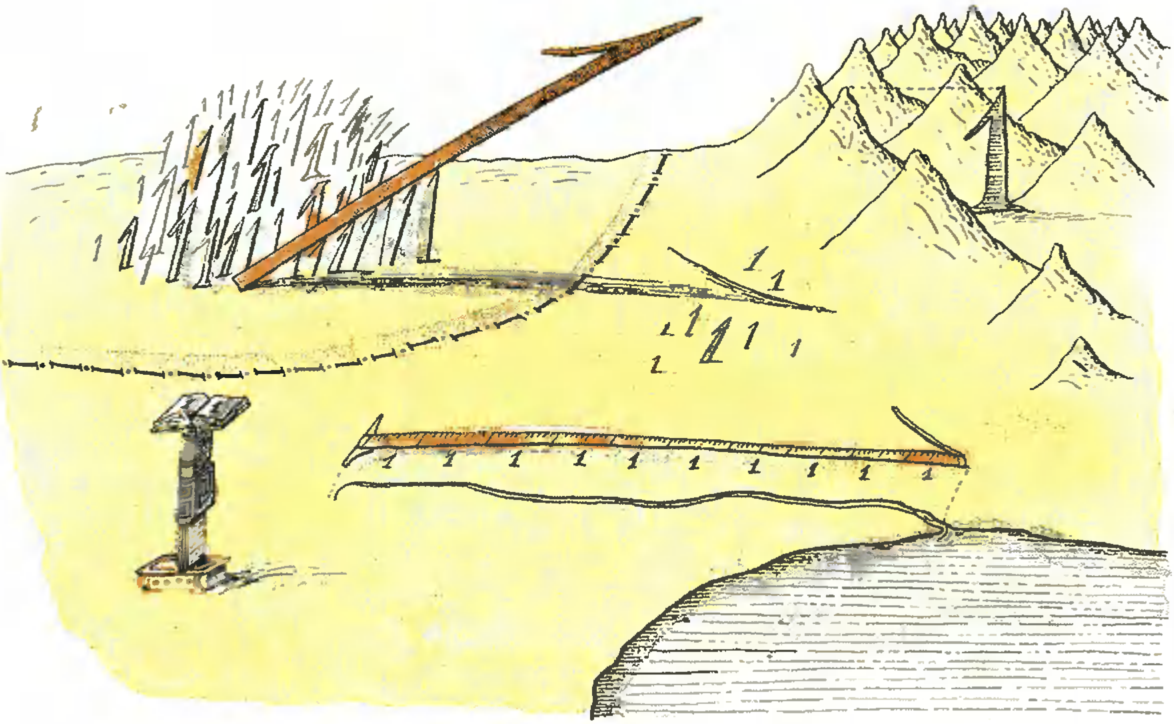


Иллюстрация А.Балдина

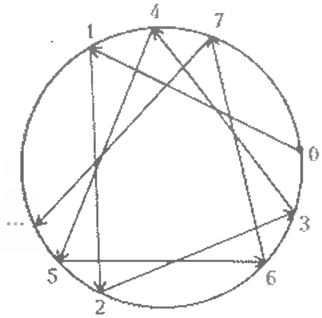


Рис.1. Траектория точки при итерациях поворота окружности

бой дуге окружности, асимтотически (при большом времени наблюдения) пропорционально длине дуги (и не зависит ни от положения дуги на окружности, ни от начальной точки, ни даже от величины угла поворота).

Распределение первых цифр чисел 2^n получается теперь следующим образом. Рассмотрим последовательность чисел $\lg(2^n) = nx$. Число $x = \lg 2$ иррационально (здесь и далее lg — логарифм по основанию 10). По теореме последовательность дробных долей чисел nx равномерно распределена на интервале (0, 1).

Но первая цифра i числа 2^n определяется тем, в какой из интервалов между числами $\lg(i+1)$ и $\lg i$ попадает дробная доля числа $\lg(2^n)$. По теореме, доли чисел 2^n, начинающихся с i ($= 1, 2, \ldots, 9$) составляют $p_i = \lg(i+1) - \lg i$. Например, для первой цифры $i = 1$ эта доля составляет $\lg 2 \approx 0{,}301$ (близость этого логарифма к 3/10 отражает близость $2^{10} = 1024$ к $1000 = 10^3$). Поэтому доля единиц среди первых цифр чисел 2^n составляет примерно 30%. Доли всех цифр (в процентах) даются таблицей 1.

Таблица 1

i	1	2	3	4	5
$100\ p_i$	30	17	12	10	8
i	6	7	8	9	
$100\ p_i$	7	6	5	5	

Девяток примерно в 6 раз меньше, чем единиц (рис.2).

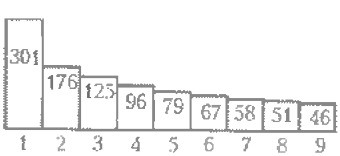


Рис.2. Распределение первых цифр степеней двойки

Из всего сказанного для дальнейшего важен такой вывод: приведенное в таблице странно неравномерное распределение первых цифр чисел последовательности 2^n объясняется равномерным распределением дробных долей логарифмов чисел нашей последовательности.

Этот вывод приводит к одинаковому распределению первых цифр для многих различных последовательностей (например, для геометрических прогрессий 2^n или 3^n, но не только для них).

Население стран мира

Лет двадцать назад Н.Н.Константинов сообщил мне, что первые цифры населений стран мира распределены так же, как первые цифры степеней двойки (табл. 2).

Таблица 2

первая цифра	1	2	3	4	5
процент числа стран, 1995	29	21	10	11	6
первая цифра	6	7	8	9	
процент числа стран, 1995	6	8	3	6	

Вот мое тогдашнее объяснение этого факта.

Согласно теории Мальтуса, население каждой страны растет в геометрической прогрессии. Из теоремы Вейля (см. предыдущий раздел) следует, что первые цифры населения фиксированной страны в последовательные годы распределены как первые цифры степеней двойки (см. рис.2). Согласно «эргодической теореме» (или, лучше сказать, согласно эргодическому принципу), временное среднее можно заменить пространственным: распределение по странам в один и тот же год должно совпадать с распределением в одной стране в разные годы.

Для контроля теории я рассмотрел числа страниц в книгах моей библиотеки, длины рек и высоты гор. Во всех этих случаях доли единиц и доли девяток среди первых цифр полученных чисел оказались практически одинаковыми: $p_i \approx 1/9$. Книги, реки и горы не растут в геометрической прогрессии, теория Мальтуса к ним не применима. Поэтому различие статистик первых цифр в числах, выражающих населения и, скажем, длины рек, служит своеобразным косвенным подтверждением формулы Мальтуса (согласно которой население растет в геометрической прогрессии).

Однако лет десять назад М.Б.Севрюк обнаружил, что не только население, но и площади стран мира подчиняются такому же закону распределения первых цифр, как степени двойки! К площадям теория Мальтуса, по-видимому, неприменима, так что возник вопрос — как объяснить это поведение площадей. Ниже я пытаюсь дать ответ на этот вопрос.

Площади стран мира

Предыдущие примеры подсказывают, что следует искать причину странного распределения первых цифр площадей стран мира либо в их росте, либо в убывании (в геометрической прогрессии). История мира показывает, что площади стран (особенно империй) иногда растут, а иногда убывают за счет то присоединения одних стран к другим, то распада. Рассмотрим вначале самую примитивную модель этого явления. Предположим, что за единицу времени страна с вероятностью половина делится пополам, а с вероятностью половина присоединяет к себе другую страну такой же площади, как она сама.

Теорема. *Распределение дробных долей логарифмов площадей, занимаемых такой случайной страной в момент n, стремится к равномерному распределению на интервале (0, 1) при n, стремящемся к бесконечности.*

Иными словами, вероятность того, что первая цифра площади окажется единицей, стремится при $n \to \infty$ к $\lg 2 \approx 0{,}301$, ..., что она окажется девяткой — примерно к 0,046.

Действительно, рассмотрим последовательность $l_n = \lg S(n)$, где S — площадь в момент n. Точка l_n в следующий момент $n + 1$ с одинаковой вероятностью сдвигается влево или вправо на lg 2 (причем, конечно, выбор, что делать — делиться или объединяться, — в каждый момент времени независим от выбора в другие моменты времени). По законам теории вероятностей, распределение величины l_n при больших n будет в основном сосредоточено на отрезке большой (порядка $\sqrt{n}$) длины и будет пологим и симметричным (рис.3). При переходе к дробным долям (т.е. при «наматывании оси l на окружность $l \bmod 1$») из такого распределения на оси l получится почти равномерное (при больших n) распределение на окружности (детали обоснования предоставляются читателю; важно, что последовательность дробных долей чисел $m \lg 2$ распределена равномерно).

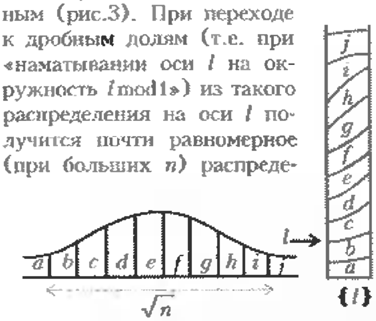


Рис.3. При наматывании прямой с пологим распределением на окружность на ней получается почти равномерное распределение

Имеется множество более сложных моделей передела мира, приводящих в численных экспериментах к такому же эффекту. Вероятно, для целых классов таких моделей можно строго доказать предельную равномерность распределения дробных долей логарифмов площадей стран. Вот несколько примеров.

1. В начальный момент имеется k стран площадей $S_1, \ldots, S_k$. В каждый последующий момент одна (случайно выбираемая) страна с вероятностью 50% делится, а с вероятностью 50% объединяется с какой-либо (случайно выбранной) страной. Разумеется, выборы, делаемые в разные моменты времени, считаются независимыми и все случайно выбираемые страны равновероятны.

По вычислениям М.В.Хесиной (университет Торонто, июнь 1997) при $S_i = i$, $k = 100$ распределение первых цифр площадей стран становится практически таким же, как приведенное выше распределение первых цифр степеней двойки, уже через сотню шагов.

2. Введение деления на неравные части с каким-либо законом распределения частей (например, равномерным) приводит к такому же результату.

3. В моделях, где разрешается объединяться лишь с соседями, устанавливается такое же распределение первых цифр. Например, в одной из моделей Ф.Аикарди (Триест, июнь 1997) страны представлялись дугами

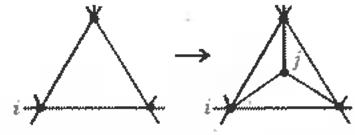


Рис.4. Отделение новой страны j от страны i

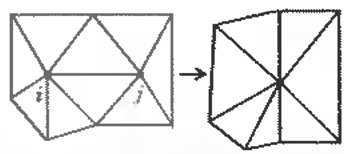


Рис.5. Слияние стран j и i

окружности, а площади — длинами этих дуг. Распределение, практически неотличимое от распределения первых цифр степеней двойки, наступает очень быстро.

4. В другой модели Аикарди мир представляется графом, задающим разбиение сферы на треугольники (n вершин которых представляют n стран и снабжены «площадями», распределенными на интервале $(1, n)$ по закону случая). Граф строится, начиная с икосаэдра, при помощи итераций такой операции: случайно выбирается треугольная грань, добавляется вершина в ее центре и соединяется со всеми тремя вершинами грани.

Передел мира в этой модели организован так: в каждый момент $(1, \ldots, T)$ выбирается случайно вершина i и затем с вероятностью p число стран увеличивается на 1 и с вероятностью $1 - p$ уменьшается на 1. В первом случае случайно выбирается треугольная грань, содержащая эту вершину i, и вставляется новая вершина в центр грани. Затем эта вершина соединяется со всеми тремя вершинами грани и соответствующая вновь созданная страна получает от страны i долю α ее площади (рис.4).

Во втором случае случайно выбирается соседняя с i вершина j и затем страны i и j объединяются (причем на графе исчезает ребро ij и две разделенные им треугольные грани; рис.5).

Таблица 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,297	0,183	0,123	0,107	0,073	0,058	0,065	0,046	0,049
B	0,309	0,180	0,123	0,106	0,297	0,059	0,058	0,050	0,045
C	0,294	0,181	0,111	0,091	0,297	0,077	0,059	0,052	0,048
D	0,301	0,176	0,125	0,096	0,297	0,067	0,058	0,051	0,046

В трех экспериментах A, B, C были выбраны следующие значения параметров (табл. 3).

Средние (по 50 повторениям эксперимента с разными начальными условиями) значения долей единиц, ..., девяток среди первых цифр площадей стран оказались такими (табл. 4; в последней строке (D) указаны частоты первых цифр степеней двойки).

Было бы интересно не только доказать общую теорему, указывающую область применимости равномерного распределения дробных долей логарифмов, но и проверить, подчиняются ли этому распределению, например, размеры компаний и их доходы.

Таблица 3

	A	*B*	*C*
начальное число стран, n	100	62	100
число итераций, T	200	150	200
среднее число стран в момент T	98	114	98
вероятность деления, p	0,5	0,6	0,5
отделяемая доля, α	0,5	0,5	0,3

Появление странного распределения первых цифр во многих различных ситуациях неоднократно обсуждалось в литературе. Однако я нигде не встречал каких-либо математических теорем или гипотез (подобных приведенным в настоящей статье), обосновывающих неизбежность появления этого распределения (исключая, разумеется, теорему Вейля).

Гидродинамические парадоксы

С.БЕТЯЕВ

> Обстоятельства, с которыми мы сталкиваемся, кажутся на первый взгляд совершенно парадоксальными с чисто математической точки зрения и предусмотреть их можно только из физических соображений.
>
> *Ж.Адамар*

ПАРАДОКСОМ называют неожиданное суждение, резко противоречащее общепринятому. Практическое значение парадоксов — двигателей прогресса — состоит в том, что они заставляют по-новому посмотреть на основы старой теории и построить другую, более совершенную теорию, а зачастую и новую науку. Специальная теория относительности — это разрешение парадокса о конечности скорости передачи информации, квантовая механика — разрешение парадокса о прерывистости сигнала в микромире. Парадоксы «породили» физику элементарных частиц и современную космологию, стимулировали развитие современной математики.

Самые фундаментальные парадоксы, стоящие на развилке наук, формулируют и разрешают гении. Это подметил еще А.С.Пушкин:

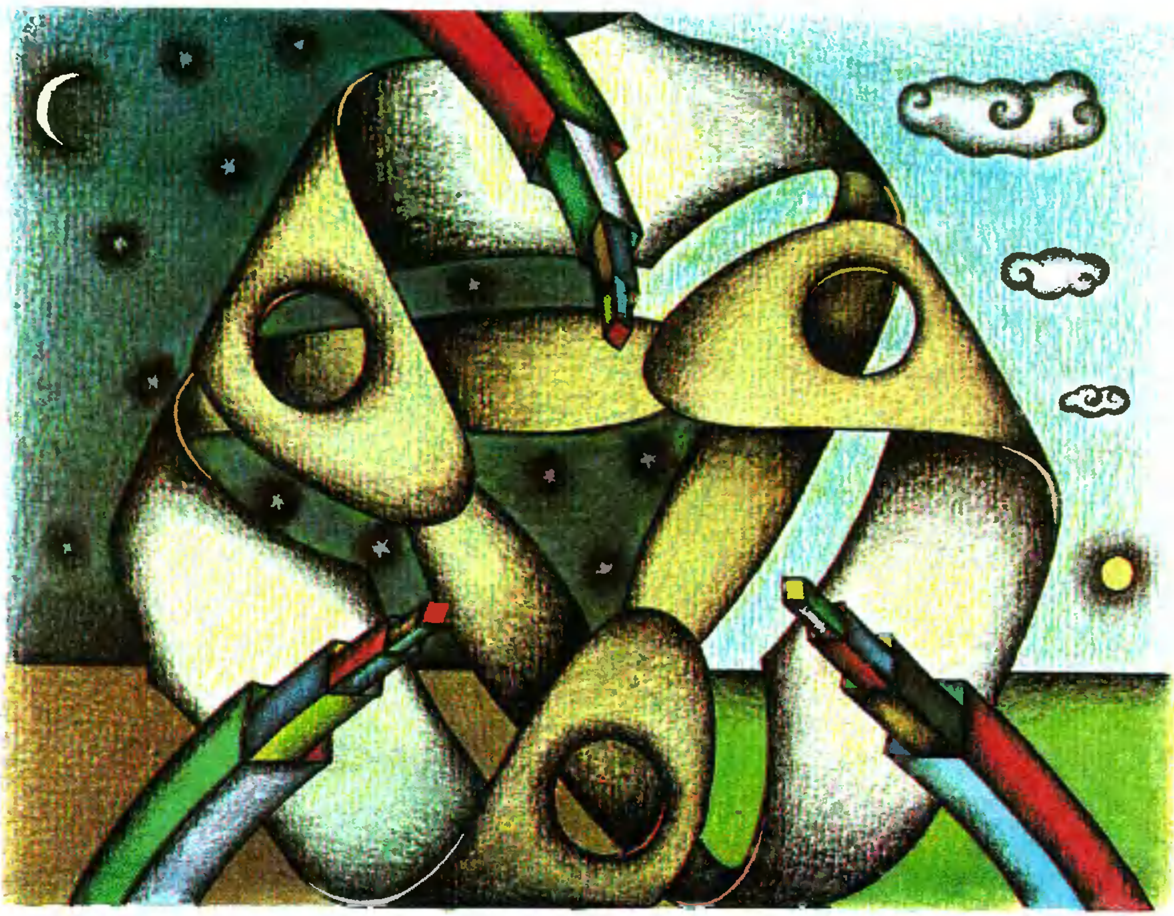


Иллюстрация М.Константиновой

«О, сколько нам открытий чудных
Готовят просвещенья дух
И опыт, сын ошибок трудных,
И гений, парадоксов друг,
И случай, бог изобретатель.»

В науке различают опытное суждение, установленное с помощью эксперимента, и теоретическое суждение, основанное на математическом моделировании явления. Поэтому можно говорить о трех типах научных парадоксов.

Первый из них — противоречие между общепринятым теоретическим суждением и вновь полученным теоретическим суждением. Такой самый простой тип парадокса («теория—теория») возникает в результате улучшения математической модели или усовершенствования метода расчета.

Второй тип парадокса — противоречие между общепринятым опытным суждением и вновь полученным опытным суждением («опыт–опыт») — заслуживает более подробного рассмотрения, чем мы и займемся, отложив на время в сторону определение и анализ парадоксов третьего типа.

Парадоксы симметрии

Всегда ли симметрия причин приводит к симметрии следствия? В микромире — не всегда (об этом можно прочитать, например, в книге Р.Фейнмана «Характер физических законов» — Библиотечка «Квант», вып.62). И в гидродинамике тоже не всегда. Картина обтекания симметричного тела, помещенного в симметричный поток, зачастую оказывается несимметричной. В этом заключена сущность парадокса симметрии.

На рисунке 1 показано симметричное обтекание кругового цилиндра потоком воды. Траектории частиц жидкости сделаны видимыми (визуализированными) с помощью алюминиевого порошка; вода движется слева направо. Верхняя и нижняя половинки симметричны — одна из них является зеркальным отражением другой. Более того, почти симметрично обтекание передней и задней частей цилиндра. Рисунок 2 иллюстрирует обтекание того же цилиндра в других условиях. Симметрия «верх–низ» сохранена, но симметрия левой и правой частей нарушена — за цилиндром образовались две замкнутые зоны с противоположно направленными вращениями частиц жидкости. Наконец, на рисунке 3 представлена картина обтекания цилиндра в условиях, когда нарушена симметрия обоих типов. Обтекание нестационарно, изменяется с течением времени (визуализация осуществлялась с помощью воздушных пузырьков в воде).

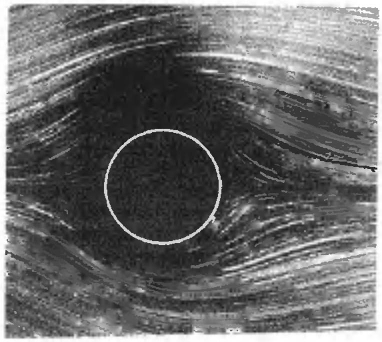


Рис. 1

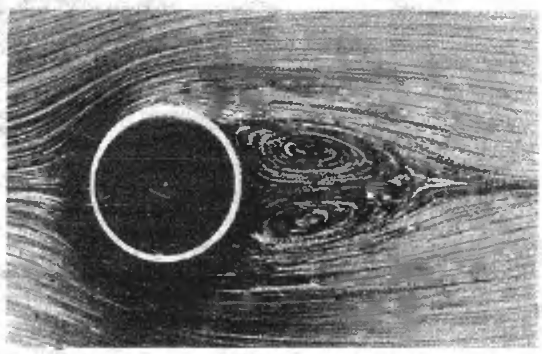


Рис. 2

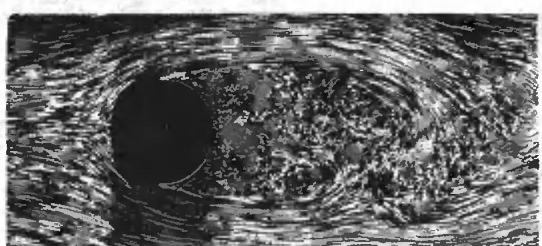


Рис. 3

Почему течение теряет симметрию? Исчерпывающе ответить на этот вопрос в настоящее время нельзя. Поэтому подменим его другим, более простым. Например, чем отличаются условия обтекания цилиндров в трех рассмотренных случаях? Оказывается — разным отношением действующих на частицу сил: силы лобового сопротивления и вязкой силы. Это отношение характеризуется так называемым числом Рейнольдса Re (безразмерным параметром). При малых числах Re силы вязкости значительны, тело движется, как дробинка в меде (рисунку 1 соответствует $Re = 1{,}5$, рисунку 2 — $Re = 26$). При больших числах Re силы вязкости малы, поток становится неустойчивым и даже хаотическим (рисунку 3 соответствует $Re = 2000$).

Смена симметрий, их внезапное разрушение — фундаментальный закон современной гидродинамики. В реальных условиях абсолютная симметрия невозможна, в потоке всегда есть асимметрия. Поэтому если считать, что симметричные причины влекут за собой симметричные последствия, то почти симметричные причины могут приводить к совсем несимметричным последствиям. В этом заключается одно из объяснений парадокса симметрии.

Парадокс Эйфеля

Другой парадокс, близкий в физическом отношении к парадоксам симметрии, обнаружил в 1912 году знаменитый французский инженер-строитель А.Эйфель (1832–1923). На склоне лет заинтересовавшись гидродинамикой в связи с вопросом о воздействии ветровых нагрузок на строительные конструкции, Эйфель построил в Париже аэродинамическую трубу. «Продувая» в ней сферы, он обнаружил парадокс, названный впоследствии его именем: вблизи «критического» числа Рейнольдса $Re \simeq 150000$ сила сопротивления сферы резко (в 4 – 5 раз) уменьшается с увеличением скорости. Этот факт противоречит нашему физическому опыту.

Представим аэродинамическую силу лобового сопротивления в виде

$$F = C_x(Re)\frac{\rho u_\infty^2}{2}\frac{\pi l^2}{4}.$$

Пропорциональность $F \sim \rho u_\infty^2 l^2$, где ρ — плотность, u_∞ — скорость невозмущенного набегающего потока, а l — характерный размер тела, легко получить из соображений размерностей (проверьте!). А коэффициенты $1/2$, $\pi/4$, C_x записаны для удобства. Безразмерный *коэффициент сопротивления* C_x можно определить из экспериментов. Он обычно убывает с ростом числа Re, т.е. с уменьшением сил вязкого трения.

Парадокс Эйфеля обнаружен не только при обтекании сферы, но и при обтекании других тел. На рисунке 4 представлена полученная экспериментально зависимость $C_x(Re)$

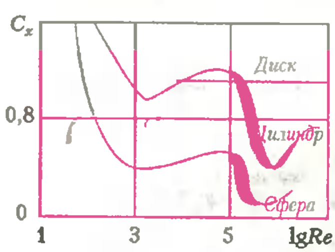


Рис. 4

для сферы, кругового цилиндра и диска, при этом тела имеют один и тот же диаметр l. На участке резкого изменения C_x для сферы и цилиндра наблюдается разброс экспериментальных данных, показанный на рисунке «дорожкой». Коэффициент сопротивления диска практически постоянен — для тел с острыми кромками парадокс Эйфеля не справедлив. Объяснение парадокса заключается в том, что вблизи критического значения числа Рейнольдса происходит переход от плавного, стационарного течения, называемого ламинарным, к нестационарному, хаотическому движению, называемому турбулентным. Малое изменение Re приводит к большой перестройке течения.

Такая ситуация, когда малое изменение какого-либо параметра приводит к коренному изменению течения, типична для гидродинамики. Именно она объясняет многочисленные парадоксы расходимости опытных данных — проведенные при, казалось бы, одних и тех же условиях измерения оказываются совершенно различными. Поэтому при моделировании обтекания тел в аэрогидродинамических трубах следует учитывать влияние стенок трубы, поддерживающих модель устройств, неоднородностей в набегающем потоке, физико-химических свойств поверхности модели (шероховатость, смачиваемость, теплопроводность). Сделать это чрезвычайно трудно, если не сказать — невозможно.

Парадокс Дюбуа

Одним из основателей экспериментальной гидродинамики был французский военный инженер П.Дюбуа (1734 – 1809). В предисловии к своему классическому трехтомному труду «Принципы гидравлики» он писал: «Мы рассматриваем сопротивление воды и воздуха совершенно новым способом, не пользуясь вовсе прежней теорией, которая оказалась столько раз противоречащей опыту, и стараясь отыскать в опытах, до нас не имевшихся, новые точки зрения на предмет».

Исследования Дюбуа показали, что сила сопротивления, действующая со стороны потока на *покоящееся* в трубе тело, в определенном диапазоне чисел Re меньше, чем сила сопротивления, действующая на *движущееся* с той же скоростью тело в покоящейся воде. В соответствии с принципом относительности, результат не должен зависеть от того, движется ли тело в покоящейся жидкости или жидкость обтекает покоящееся тело. Как же объяснить парадокс Дюбуа?

Конечно, влиянием тех факторов, о которых уже упоминалось. Поток в опытном бассейне или в аэродинамической трубе более неравномерен, чем в «спокойном» море или атмосфере, поэтому переход к турбулентному режиму здесь наступает раньше, т.е. при докритических значениях Re, след за телом сужается, сопротивление падает. Парадокс Дюбуа не утратил своей актуальности и в наше время. Различие между результатами трубного эксперимента и натурного, проводимого в условиях реального полета, остается для гидродинамиков проблемой номер один.

Путь к истине слишком сложен — об этом предупреждают нас философы. Может быть, с излишней долей пессимизма, но вот что говорил свыше трех столетий назад выдающийся французский физик и философ Б.Паскаль (1623 – 1662): «Истина — слишком тонкая материя, а наши инструменты слишком тупы, чтобы ими можно было прикоснуться к истине, не повредив ее. Достигнув истины, они сминают ее и отклоняются в сторону, скорее ложную, нежели истинную».

Если вы видели когда-нибудь вертолет на стоянке, то должны были заметить, как низко, почти на метр, свисают его лопасти. Лишь в полете они распрямляются. Точно так же крыло самолета под действием аэродинамических сил изменяет в полете свою форму. Изменяет незначительно, а результаты скрупулезных (и дорогих!) экспериментальных исследований оказываются совсем неверными. Таким образом, для объяснения несоответствия между результатами трубного и натурного экспериментов приходится учитывать, кроме всего прочего, упругие свойства конструкций, подверженных действию гидродинамических сил.

Парадокс Эйлера—Даламбера

Подошло время сказать о парадоксах третьего типа. Кроме парадоксов типа «теория–теория» и «опыт–опыт», существуют еще парадоксы типа «теория–опыт» (или «опыт–теория»). Для них характерно резкое противоречие между теоретическими результатами и тем, что мы называем опытом, интуицией или просто «здравым смыслом».

Самый известный из парадоксов типа «теория-опыт» — это парадокс Эйлера – Даламбера. В 1742 году петербургский академик Л.Эйлер рассчитал сопротивление цилиндра, движущегося в жидкости, лишенной трения, и получил удивительный результат — сила сопротивления оказалась равной нулю! Спустя семь лет выдающийся французский механик Ж.Даламбер с помощью некоторых ухищрений рассчитал обтекание произвольного тела конечного объема и получил все тот же ошеломляющий результат — нулевое сопротивление.

Такой вывод резко отличался от «здравого смысла». Даламбер, как и каждый из нас, из личного опыта знал, что для поддержания движения к телу необходимо приложить силу тяги, преодолевающую силу сопротивления (именно поэтому летательные аппараты, корабли и подводные лодки снабжены двигателями). Даламбер не смог объяснить полученный результат и с горечью заметил, что нулевое сопротивление — «единственный парадокс, разрешение которого я оставляю геометрам будущих времен».

Прямо скажем: геометрам (гидродинамикам и математикам) достался в наследство крепкий орешек. Прежде чем его раскалывать, выясним геометрический смысл парадокса. Течение, исследованное Эйлером и Даламбером, симметрично, т.е. правая половина течения совпадает с левой (аналогично рисунку 1). Следовательно, совпадающая с направлением невозмущенного потока составляющая импульса (количества движения) струйки, обтекающей тело, постоянна: в некотором сечении слева вдали от тела она такая же, как в некотором сечении справа вдали от тела. В соответствии с законом сохранения импульса, на струйку, как и на помещенное в нее тело, не действует сила сопротивления. Математическая модель, использованная Эйлером и Даламбером, оказалась переупрощенной. Реальные течения несимметричны (подобно тем, которые изображены на рисунках 2 и 3).

Конечно, вы уже догадались, что именно трение (вязкость) нарушает симметрию. Именно оно ответственно за образование следа за телом. Так что же, тайна парадокса Эйлера — Даламбера разгадана? Нет, разгадка парадокса оказалась намного сложнее. Давайте снова посмотрим на рисунок 4. Даже при очень больших, предельно достижимых в настоящее время значениях Re, когда силы вязкости пренебрежимо малы, коэффициент сопротивления остается конеч-

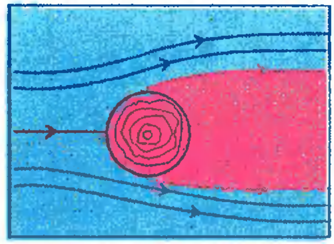


Рис. 5

ным. Значит, и в невязкой жидкости может возникнуть асимметрия и ненулевое сопротивление. Именно такое течение «построил» в 1868 году знаменитый немецкий физик Г.Гельмгольц (1821 — 1894), снявший последнее покрывало с парадокса Эйлера — Даламбера. Обтекание цилиндра по модели Гельмгольца показано на рисунке 5, за цилиндром образуется след — область покоящейся жидкости. Таким образом, реальная математическая модель должна учитывать трение и отрыв потока от тела.

Кроме парадокса Эйлера — Даламбера, известно много парадоксов «переупрощения математической модели». Так, безотрывное обтекание острой кромки пластины (рис.6,*а*) приводит к «парадоксу бесконечности» — скорость жидкости при подходе к кромке неограниченно растет. Бо-

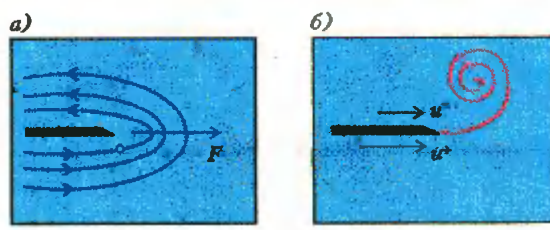


Рис. 6

лее того, для разворота потока на 180° требуется так называемая центростремительная сила. В силу третьего закона Ньютона на пластину будет действовать такая же по величине сила (ее называют подсасывающей). К чему она приложена? К кромке пластины, т.е. к точке! Реальное обтекание кромки — отрывное, от нее отходит линия разрыва касательной составляющей скорости (окрашенная на рисунке 6,*б* в красный цвет), скорость на кромке конечна.

Корректность математической модели

Разработка непарадоксальной математической модели, адекватно описывающей реальный процесс, — очень сложное дело. В большинстве случаев об этом приходится только мечтать, поэтому известный математик Д.Биркгоф в шутку предложил разделить гидродинамиков на экспериментаторов, которые наблюдают то, что нельзя описать, и теоретиков, которые описывают то, что нельзя наблюдать.

Пришла пора сделать выводы. Во избежание парадоксов математическая модель течения не должна быть переупрощенной — следует учитывать тот фактор, пренебрежение которым приводит к парадоксу. С точки зрения физика, такое требование естественно. Однако математик подходит к этому вопросу строже (такова его профессия). С точки зрения математика, постановка задачи должна быть *корректной*. Корректность включает три требования к математической модели: существование решения, его единственность и устойчивость.

Разумеется, отсутствие решения является следствием переупрощения модели. Так, сходящееся течение в угле со скоростями, направленными по радиусу, существует при любом значении числа Рейнольдса (рис.7,*а*). Решение, описывающее радиальное течение (рис.7,*б*), существует лишь при малых значениях Re, меньших некоторого критического значения Re^*. При $Re > Re^*$ такое решение отсутствует. В опыте при достаточно больших значениях Re наблюдается нестационарное, отрывное движение — в этом заключается разгадка парадокса отсутствия радиального расходящегося решения в угле.

Ну а как поступить, если имеется несколько решений? Допустим, при

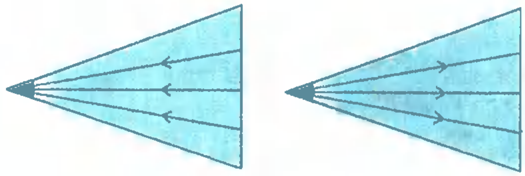


Рис. 7

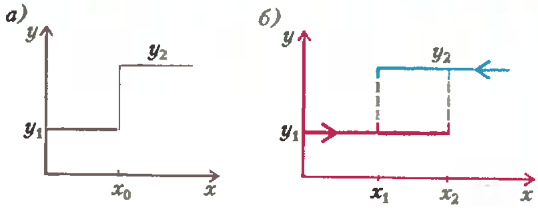


Рис. 8

решении квадратного уравнения вы получили два корня. Какой из них выбрать? Давайте переберем все возможные случаи, обратившись к опыту. Если в опыте не реализуется ни один из возможных корней, то это означает, что математическая модель — квадратное уравнение — несправедлива. Если в опыте реализуется лишь один из полученных корней, то он оказывается устойчивым по отношению к малым внешним возмущениям, а другой корень — неустойчивым. Наконец, имеется третья возможность — когда могут реализоваться оба решения. Если при значении параметра ($x = x_0$)происходит смена одного решения ($y = y_1$) на другое ($y = y_2$), то говорят о *бифуркации* решения (рис.8,*а*). Если в некотором диапазоне значений параметра ($x_1 \le x \le x_2$) существуют оба

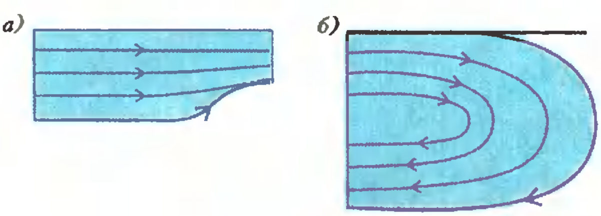


Рис. 9

решения, то говорят о *гистерезисе* (рис.8,*б*): одно решение ($y = y_1$) реализуется, если параметр (x) увеличивать, начиная от некоторого значения ($x < x_1$, прямой ход), другое решение ($y = y_2$) реализуется, если параметр (x) уменьшать, начиная от некоторого значения ($x > x_2$, обратный ход). В этом случае выбор решения зависит от предыстории процесса. (Гистерезисные режимы обтекания крыла наблюдаются, например, вблизи значения угла атаки α, соответствующего максимальному значению коэффициента подъемной силы C_y.)

С парадоксами неединственности ученые столкнулись еще на заре развития авиации. В 1910 году на авиационном салоне под Парижем молодой ученый из Румынии А.Коанда поднял в воздух сконструированный им самолет, который смело можно назвать прототипом современных реактивных летательных аппаратов. Из сопел, расположенных по бокам фюзеляжа, вырывались огненные струи. После успешного полета отделавшийся ушибами изобретатель принимал восторженные поздравления. «Молодой человек! Вы опередили эпоху на 30, а то и на все 50 лет!» — сказал ему Эйфель. Но триумфатор думал о другом — о страшном поведении огненной струи во время разбега самолета. Струя вместо того чтобы отражаться от специально установленных металлических щитков, защищающих фанерный фюзеляж от воспламенения, прижималась к ним, разворачиваясь в обратную сторону.

Открытие, названное впоследствии «эффектом Коанда»[1], сначала не привлекло к себе внимания. В течение последующих 25 лет Коанда, уже известный авиаконструктор, самостоятельно проводил опыты, отыскивая своему открытию возможные области применения. Сегодня эффект Коанда используется при разработке двигателей для аппаратов на воздушной подушке и судов с подводными крыльями, для повышения тяги реактивных сопел, для торможения самолетов при посадке и для глушения шума реактивных двигателей.

С эффектом Коанда мы встречаемся каждый день, досадуя, что струя, вытекающая из носика чайника, вдруг прилипает к его поверхности и льется мимо чашки. Такой поворот струи и прилипание к твердой поверхности гидродинамики в шутку называют еще «эффектом чайника». На рисунке 9,*а* показана схема истечения струи из канала без поворота, а на рисунке 9,*б* — с поворотом. Получено два решения. Но разгадан ли парадокс Коанда? К сожалению, нет — неизвестно, при каких условиях реализуется тот или иной режим.

Мы не обсудили еще один критерий корректности математической модели — устойчивость решения. Случайные, неустойчивые по отношению к малым возмущениям процессы нельзя исследовать с помощью классического аппарата математики. Определить отдельную беспорядочную траекторию невозможно, как невозможно предсказать, будет ли дождь через месяц. В лучшем случае можно рассчитывать на получение некоторых общих выводов. Очень хорошо об этом сказал русский поэт и философ В.С.Соловьев:

«Природа с красоты своей
Покрова снять не позволяет,
И ты машинами не вынудишь у ней,
Чего твой дух не угадает».

Парадокс неустойчивости заключается в том, что обтекание тела при стационарных внешних условиях зависит от времени. Пример нестационарного течения демонстрирует, например, рисунок 3. Обтекание становится нестационарным, когда число Рейнольдса превышает некоторое критическое значение. Доподлинно известно, что нестационарность вызвана неустойчивым характером отрыва потока от тела, но до окончательного разрешения парадокса нестационарности еще далеко.

[1] *См., например, статью Дж. Раскина «Окрыленный эффектом Коанда» в пятом номере журнала за прошлый год. (Прим. ред.)*


d h e f g h a h g f e h d h c f g h b h g f c h

Многочлены деления круга

В. СЕНДЕРОВ, А. СПИВАК

Известны формулы сокращенного умножения

$$x^2-1=(x-1)(x+1),$$
$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1),$$
$$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1),$$
$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1).$$

Раскрыв скобки, легко проверить и общую формулу

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1), \qquad (1)$$

которая изучается в школе как формула суммы геометрической прогрессии.

Мы расскажем о разложениях на множители многочленов вида x^n-1. Оказывается, они тесно связаны с задачей о делении окружности на n равных частей. Именно изучение этих многочленов позволило К.Ф.Гауссу в 1796 году решить задачу о том, при каких n правильный n-угольник может быть построен циркулем и линейкой. (Например, можно построить правильный 17-угольник и даже 65537-угольник. Подробно это объяснено в статье А.Кириллова в «Кванте» №6 за 1994 год и в книге С.Гиндикина «Рассказы о физиках и математиках» — Библиотечка «Квант», вып. 14.) Не обойтись без них и в теории Галуа, позволяющей по алгебраическому уравнению сказать, решается оно в радикалах или нет. Важнейшие объекты алгебры и арифметики — *корни из единицы, функция Эйлера* $\varphi(n)$ и функция $\tau(n)$ (количество натуральных делителей числа n) — встретятся нам на первых же шагах изучения многочленов деления круга.

* * *

На Московской олимпиаде 1997 года девятиклассники решали задачу, вошедшую в «Задачник «Кванта»:

М1598. *Пусть $1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=F(x)G(x)$, $n>1$, $F(x)$ и $G(x)$ — многочлены с неотрицательными коэффициентами.*

а) Докажите, что все коэффициенты этих многочленов — нули и единицы.

б) Докажите, что один из многочленов $F(x)$, $G(x)$ представим в виде $(1+x+\ldots+x^{k-1})T(x)$, где $k>1$, а коэффициенты полинома $T(x)$ — нули и единицы.

Точнее говоря, на олимпиаде было предложено решить пункт б) для многочленов F и G, коэффициенты которых суть нули и единицы. Решил задачу только один школьник, а большинство из остальных 509 участвовавших в олимпиаде девятиклассников вообще не поняли, о чем речь. Дело в том, что М1598 — лишь частичка теории разложений многочленов $f_n(x)=1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}$ на множители. Поэтому она выглядит естественной (и красивой, и не очень трудной!) лишь для того, кто интересовался этими разложениями.

Рассказать обо всем сразу невозможно. Начнем с примеров. Они вполне доступны семикласснику, изучившему формулы сокращенного умножения (особенно если он не станет задумываться над вопросами неприводимости [1]).

Разложения с целыми коэффициентами

> Когда не знаешь, что именно делаешь,
> делай это особенно тщательно.
>
> *Правило для лаборантов*

Начнем копить «экспериментальный материал». Не ленитесь выписывать разложения и решать упражнения — только в этом случае вы всё поймете и правильно оцените.

***n* = 2**, $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Обозначим $\Phi_1(x)=x-1$, $\Phi_2(x)=x+1$.

***n* = 3**, $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$. Обозначим $\Phi_3(x)=x^2+x+1$. Многочлен Φ_3 нельзя разложить на множители с целыми коэффициентами.

Упражнение 1. Докажите это.

***n* = 4**, $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$. Обозначим $\Phi_4(x)=x^2+1$.

***n* = 5**, $x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$. Обозначим $\Phi_5=x^4+x^3+x^2+x+1$. Неразложимость многочлена Φ_5 на множители с целыми коэффициентами уже не вполне очевидна. Можно рассуждать, например, так. Делителей первой степени нет, поскольку в противном случае многочлен Φ_5 имел бы рациональный корень, который заодно был бы корнем многочлена x^5-1, т.е. должен был бы равняться числу 1. Значит, надо привести к противоречию возможность разложения вида

$$x^4+x^3+x^2+x+1=(ax^2+bx+c)(dx^2+ex+f).$$

Разумеется, $ad=1$ и $cf=1$. Следовательно, коэффициенты a, c, d, f могут равняться лишь ±1.

Упражнение 2. Доведите рассуждение до конца.

***n* = 6**, $x^6-1=(x^3-1)(x^3+1)=(x-1)(x^2+x+1)\times(x+1)(x^2-x+1)$. Как и раньше, возник один новый неприводимый делитель $\Phi_6(x)=x^2-x+1$.

***n* = 7**, $x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$. Второй множитель, как обычно, обозначим Φ_7. Неразложимость многочлена Φ_7, как и любого многочлена $f_p(x)=x^{p-1}+\ldots+x+1$, где p — простое число, можно установить при помощи признака Эйзенштейна (формулировка и доказательство — в *Приложении*).

***n* = 8**, $x^8-1=(x^4-1)(x^4+1)=(x-1)(x+1)\times(x^2+1)(x^4+1)$.

***n* = 9**, $x^9-1=(x^3-1)(x^6+x^3+1)=(x-1)(x^2+x+1)\times(x^6+x^3+1)$.

[1] Слова *неразложимый* и *неприводимый* — синонимы, как и слова *многочлен* и *полином*.

Иллюстрация П. Чернуского

Упражнение 3. Проверьте неразложимость многочленов $\Phi_8(x) = x^4 + 1$ и $\Phi_9(x) = x^6 + x^3 + 1$.

Указание. Можно рассуждать как при $n = 5$, т.е. применять так называемый метод неопределенных коэффициентов, а можно использовать признак Эйзенштейна.

Упражнение 4. Разложите на неприводимые множители многочлены $x^n - 1$ при $n = 10, \ldots, 14$.

Заметьте, что для каждого из изученных значений n многочлен $x^n - 1$ разлагается на неприводимые множители, только один из которых ни разу не встречался в разложениях многочленов $x^m - 1$ при $m < n$. Именно этот множитель следует обозначить через Φ_n.

$\boldsymbol{n = 15}$. Применим формулу для разности кубов:

$$x^{15} - 1 = (x^5 - 1)(x^{10} + x^5 + 1) = \\ = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^{10} + x^5 + 1).$$

С другой стороны, как разность пятых степеней,

$$x^{15} - 1 = (x^3 - 1)(x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1) = \\ = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1).$$

Мы получили два разложения на множители. Как «объединить» их в одно? Оказывается, $x^{10} + x^5 + 1$ делится на $x^2 + x + 1$. Поделим в столбик:

$$\begin{array}{l|l}
x^{10} + x^5 + 1 & x^2 + x + 1 \\
-\,x^{10} + x^9 + x^8 & x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1 \\
\quad -x^9 - x^8 + x^5 + 1 & \\
\quad -\,(-x^9 - x^8 - x^7) & \\
\qquad x^7 + x^5 + 1 & \\
\qquad -\,(x^7 + x^6 + x^5) & \\
\qquad\quad -x^6 + 1 & \\
\qquad\quad -\,(-x^6 - x^5 - x^4) & \\
\qquad\qquad x^5 + x^4 + 1 & \\
\qquad\qquad -\,(x^5 + x^4 + x^3) & \\
\qquad\qquad\quad -x^3 + 1 & \\
\qquad\qquad\quad -\,(-x^3 - x^2 - x) & \\
\qquad\qquad\qquad x^2 + x + 1 & \\
\qquad\qquad\qquad -\,(x^2 + x + 1) & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

и получим

$$x^{15} - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) \times \\ \times (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1).$$

Замечание. Неразложимость последнего множителя не очевидна. Она доказана в *Приложении*. Там же показано, почему неприводимы полиномы Φ_{20} и Φ_{60}, которые вскоре потребуются нам. Но при первом чтении лучше об этом не задумываться.

Общий закон вполне очевиден из таблицы, в которой под каждым из исследованных значений n выписано, на сколько неразложимых множителей можно разложить многочлен $x^n - 1$. Множителей оказывается в точности столько, сколько делителей у числа n.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\tau(n)$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4

Проверим этот закон для $\boldsymbol{n = 60}$. Число 60 имеет 12 делителей. Значит, мы должны разложить $x^{60} - 1$ на 12 множителей с целыми коэффициентами. Начнем:

$$x^{60} - 1 = (x^{30} - 1)(x^{30} + 1) = \\ = (x^{15} - 1)(x^{15} + 1)(x^{10} + 1)(x^{20} - x^{10} + 1).$$

Упражнение 5. Завершите это разложение, представив $x^{60} - 1$ в виде произведения 12 многочленов с целыми коэффициентами: Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4, Φ_5, Φ_6, Φ_{10}, Φ_{12}, Φ_{15}, Φ_{20}, Φ_{30}, Φ_{60}.

В учебниках арифметики и алгебры доказывается, что всякий многочлен с целыми коэффициентами единственным с точностью до порядка сомножителей образом разлагается в произведение неприводимых многочленов с целыми коэффициентами. (Ситуация здесь такая же, как и для чисел: как известно, натуральные числа единственным с точностью до порядка сомножителей образом разлагаются в произведение простых чисел.) Для многочлена $x^n - 1$ разложение на неприводимые множители таково:

$$x^n - 1 = \prod_{n \vdots k} \Phi_k(x), \tag{2}$$

где произведение берется по всем делителям k числа n (знак $\vdots$ читается «делится нацело»). Доказательство, к сожалению, далеко выходит за рамки школьной программы.

Но все-таки в следующем разделе мы объясним, почему степень многочлена Φ_n деления круга равна $\varphi(n)$, где $\varphi(n)$ — *функция Эйлера*. (Функция Эйлера, по определению, — это количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с числом n.)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8

Покажем, как можно использовать формулу (2) для нахождения Φ_n. Например, чтобы посчитать Φ_{81}, выпишем два разложения:

$$x^{81} - 1 = \Phi_1(x)\Phi_3(x)\Phi_9(x)\Phi_{27}(x)\Phi_{81}(x),$$

$$x^{27} - 1 = \Phi_1(x)\Phi_3(x)\Phi_9(x)\Phi_{27}(x).$$

Поделив одно на другое, получим

$$\Phi_{81}(x) = (x^{81} - 1)/(x^{27} - 1) = x^{54} + x^{27} + 1.$$

Таким же образом доказывается общая формула $\Phi_{p^\alpha}(x) = (x^{p^\alpha} - 1)/(x^{p^{\alpha-1}} - 1)$, где p — простое число, α — натуральное.

Упражнение 6. а) Докажите равенство $\Phi_{pq}(x) = \left((x^{pq} - 1)(x - 1)\right)/\left((x^p - 1)(x^q - 1)\right)$, где p, q — различные простые числа.

б) Выведите аналогичную формулу для Φ_{pqr}, где p, q, r — различные простые числа.

Упражнение 7. а) Выпишите $\Phi_{2p}(x)$, где $p > 2$ — простое число.

б)* Докажите равенство $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$ при любом нечетном $n > 1$.

Упражнение 8. Докажите, что если p — нечетное простое число, то $\Phi_{4p}(x) = f_p(-x^2)$.

Упражнение 9. Разложите на множители а) $x^4 + x^2 + 1$; б) $f_p(x^2) = x^{2p-2} + x^{2p-4} + \ldots + x^2 + 1$, где p — простое число.

Разложения с комплексными коэффициентами

> ...Всякое объяснение неизвестно откуда начинать, оно же тянется от дальних-дальних азов. Вот сейчас из-под лавки вылезет пещерный человек и попросит объяснить ему за пять минут, как электричеством ходят поезда. Ну как ему объяснить? Сперва вообще пойди научись грамоте. Потом — арифметике, алгебре, черчению, электротехнике... Чему там еще?
> — Ну, не знаю... магнетизму...
> — Вот, и ты не знаешь; а на последнем курсе! А потом, мол, приходи, через пятнадцать лет, я тебе все за пять минут и объясню, да ты и сам уже будешь знать.
>
> *А.И.Солженицын. «В круге первом»*

Чтобы понять, как устроены многочлены Φ_n и почему их степень есть функция Эйлера, потребуется, как это ни странно для новичка, разлагать $x^n - 1$ на множители с комплексными коэффициентами.

Тем, кто не знаком с комплексными числами, достаточно пока знать, что операции над ними выполняются по обычным правилам алгебры, к которым добавлено только одно дополнительное правило: $i^2 = -1$. (Подробности — в статье Ю.Соловьева «Комплексные числа» в Приложении к журналу «Квант» №2 за 1994 год.) Комплексное число $a + bi$, где a и b — «обычные» (т.е. более привычные) вещественные числа, изображается точкой (a,b) координатной плоскости (рис. 1).

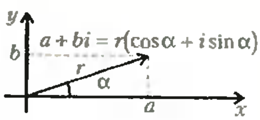


Рис. 1

Приведем несколько примеров.

$\boldsymbol{n = 3}$. Уравнение $x^3 - 1 = 0$ имеет корень $x = 1$ и еще два комплексных корня, которые легко найти, решив по обычной формуле квадратное уравнение $x^2 + x + 1 = 0$:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Итак,

$$x^3 - 1 = (x-1)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Числа 1, $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ — вершины правильного треугольника (рис. 2,*а*).

$\boldsymbol{n = 4}$, $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x+i)(x-i)$. Числа 1, i, -1, $-i$ — вершины квадрата (рис. 2,*б*).

Отложим на время случай $n = 5$ и разберем более простой (ибо само число составное) случай

$\boldsymbol{n = 6}$. Очевидно, $x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1) \times$ $\times (x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$, так что

$$x^6 - 1 = (x-1)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \times$$
$$\times (x+1)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right).$$

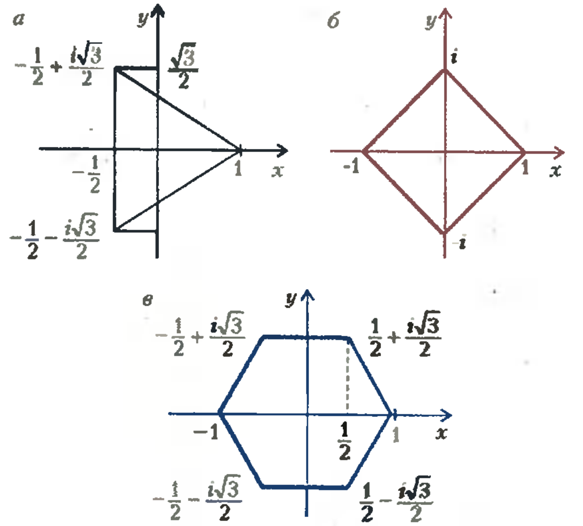


Рис. 2

Числа 1, $\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, -1, $-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ — вершины правильного шестиугольника (рис. 2,*в*). Это, как мы установили, корни шестой степени из единицы.

Теперь рассмотрим случай $\boldsymbol{n = 5}$. Чтобы решить уравнение

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

разделим на x^2 и сгруппируем:

$$x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0,$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0.$$

Сделав замену $x + \frac{1}{x} = y$, получим квадратное уравнение $y^2 + y - 1 = 0$, откуда $y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Осталось решить уравнения $x + \frac{1}{x} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Это легко сделать, но получаются громоздкие ответы. И по ним не очевидно, что полученные корни (вместе с числом 1) делят единичную окружность на 5 равных частей.

Оказывается, гораздо проще воспользоваться тригонометрической формой записи комплексных чисел: точку (a,b) (отличную от начала координат) представим в виде

$$a + bi = r\cos\alpha + ir\sin\alpha, \qquad (3)$$

где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ — расстояние от начала координат до точки (a,b) (так называемый *модуль* числа $a + bi$), а угол α (*аргумент* числа $a + bi$) — угол между положительным направлением оси абсцисс и лучом, выходящим из начала координат и проходящим через точку (a,b) (углы, как обычно, отсчитываем против часовой стрелки). Возможность представления (3) вытекает из определений синуса и косинуса.

Интереснейшее свойство комплексных чисел — то, что закон умножения можно просто записать не только в алгебраической форме:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bic + bidi =$$
$$= (ac - bd) + i(ad + bc),$$

но и в тригонометрической:

$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot R(\cos\beta + i\sin\beta) =$$
$$= rR(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)),$$

так что модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент равен сумме аргументов (как водится, с точностью до 360°).

Теперь, пользуясь тригонометрической формой, легко записать операцию возведения в степень:

$$\left(r\cdot(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right)^n = r^n\cdot(\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$$

Последняя формула называется *формулой Муавра*. Из нее следует, что все решения уравнения $x^n = 1$ имеют модуль, равный 1, а их аргументы удовлетворяют условию $n\alpha = 360°k$, где k — целое число. Следовательно, корни степени n из 1 — это в точности числа вида $\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$, где $k = 1, \ldots, n$. Они являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность единичного радиуса.

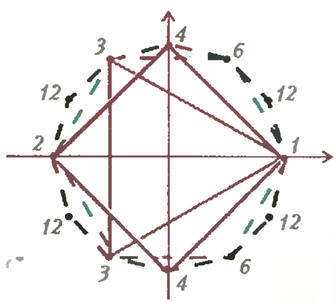


Рис. 3

Заметим, что корни n-й степени из единицы, т.е. решения уравнения $x^n = 1$, заодно являются и корнями mn-й степени: $x^{mn} = 1$. Например, всякий корень 3-й степени является и корнем 12-й степени. Поэтому естественно ввести следующее определение: корень называется *первообразным степени n*, если он не удовлетворяет никакому уравнению $x^k = 1$ при натуральном $k < n$. (Например, 1 — единственный первообразный корень степени 1, −1 — первообразный корень степени 2, $-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$ — первообразные корни степени 3.)

Упражнение 10. а) Для правильного 12-угольника, вписанного в единичную окружность, на рисунке 3 отмечено, первообразными корнями какой степени являются его вершины. На заставке (с.10) буквы расположены в вершинах 24-угольника. Определите, какие буквы первообразным корням какой степени соответствуют.

б) Нарисуйте часы и расставьте около 60 минутных делений числа, показывающие, первообразными корнями какой степени являются соответствующие корни 60-й степени из 1.

в) Как по натуральным числам k и n узнать, корнем какой наименьшей степени является число $\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$?

Внимательному читателю уже ясно, что корни многочлена Φ_n — это в точности первообразные корни n-й степени из 1. Другими словами, корни многочлена Φ_n — это числа вида $\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$, где k — взаимно простое с n число, $1 \le k \le n$. Таким образом, степень многочлена Φ_n действительно равна $\varphi(n)$.

Упражнение 11. Какой остаток дает x^{100} при делении на $x^2 + x + 1$?

Упражнение 12. а) Разложите на множители с целыми коэффициентами многочлен $x^5 + x + 1$.

б) Делится ли $x^{11} + x^7 + 1$ на $x^2 + x + 1$?

в) Докажите, что если натуральные числа m и n не делятся на 3 и их разность $m - n$ не делится на 3, то многочлен $x^m + x^n + 1$ делится на $x^2 + x + 1$.

г) При каких n число

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n}1\underbrace{0\ldots0}_{n}1$$

делится на 37?

Подсказка. $37 \cdot 3 = 111 = 10^2 + 10 + 1$.

Упражнение 13. а) Убедитесь, что если модуль числа x равен 1, а аргумент равен α, т. е. если $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$, то $x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$.

б) Верно ли, что если $x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$, то модуль числа x равен 1, а аргумент равен α?

Упражнение 14. Вычислите а) $\cos 72°$; б) $\sin 72°$.

Упражнение 15. Докажите, что если $x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$, то $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha$.

Упражнение 16•. При каких n многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ делится на а) $x^2 + x + 1$; б) $x^2 - x + 1$; в) $x^4 - x^2 + 1$; г) $x^4 + x^2 + 1$?

Упражнение 17•. При каких n многочлен $x^{2n} - x^n + 1$ делится на а) $x^2 + x + 1$; б) $x^2 - x + 1$; в) $x^4 - x^2 + 1$; г) $x^4 + x^2 + 1$?

Упражнение 18. Проверьте, что $\Phi_{60}(x) = \Phi_{15}(-x^2)$. Вообще, $\Phi_{4n}(x) = \Phi_n(-x^2)$ при нечетных $n > 1$.

Упражнение 19•. Докажите формулы а) $\Phi_{p^\alpha}(x) = \Phi_p\left(x^{p^{\alpha-1}}\right)$, где p — простое число, α — натуральное число;

б) $\Phi_{p^\alpha q^\beta r^\gamma}(x) = \Phi_{pqr}\left(x^{p^{\alpha-1}q^{\beta-1}r^{\gamma-1}}\right)$, где α, β, γ — натуральные числа, p, q, r — различные простые числа.

Разложения с вещественными коэффициентами

Имея формулу

$$x^n - 1 = \prod_{k=1}^{n}\left(x - \cos\frac{2\pi k}{n} - i\sin\frac{2\pi k}{n}\right),$$

легко разложить $x^n - 1$ на множители с вещественными коэффициентами.

Ясно, что любой множитель-многочлен с вещественными коэффициентами, имеющий некоторый комплексный корень $a + bi$, имеет и сопряженный корень $a - bi$. Значит, мы должны «объединить» сопряженные множители.

При нечетном n на вещественной оси лежит лишь один корень n-й степени из единицы (а именно, само число

1), а остальные разбиваются на пары сопряженных (т.е. симметричных относительно оси абсцисс) корней $\cos\varphi + i\sin\varphi$, $\cos\varphi - i\sin\varphi$, где $\varphi = 2\pi k/n$, $k = 1, \ldots, (n-1)/2$.

Поскольку

$$(x-\cos\varphi - i\sin\varphi)(x-\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$
$$= (x-\cos\varphi)^2 - (i\sin\varphi)^2 = x^2 - 2x\cos\varphi + 1,$$

то разложение $x^n - 1$ на неприводимые множители с вещественными коэффициентами легко выписать:

$$x^n - 1 = (x-1)\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi k}{n} + 1\right) \qquad (4)$$

при нечетном n.

Упражнение 20. Разберите случай, когда n четно.

Разложения с неотрицательными коэффициентами

Неразложимость f_p при простом p

В 1937 году в знаменитом парижском журнале «Comptes Rendus» была высказана гипотеза: *ни при каком простом p полином $f_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + 1$ не представим в виде произведения отличных от константы полиномов с вещественными неотрицательными коэффициентами.*

Эта гипотеза вскоре была доказана московским математиком Д.А.Райковым. Мы дадим три доказательства, первое из которых использует комплексные числа и неразложимость f_p на множители с целыми коэффициентами (заметьте — на первый взгляд, не было никакой связи между этими частями статьи, а выясняется, что все едино!), второе опирается на разложение (4) с вещественными коэффициентами, а третье «ничего не использует», но зато требует от читателя сосредоточенности и аккуратности. Итак,

Теорема 1. *Если p — простое число, то в любом разложении многочлена f_p в произведение отличных от константы множителей с вещественными коэффициентами встретится хотя бы один отрицательный коэффициент.*

Начало всех трех способов доказательства одинаково. Предположим, что $f_p(x)$ разложен в произведение многочленов $g(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ и $h(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, все коэффициенты которых неотрицательны. Поскольку любой из многочленов g и h можно разделить на положительное число, умножив одновременно другой на это же число, мы будем считать, что $a_m = 1$. Тогда, поскольку старший коэффициент произведения есть произведение старших коэффициентов, обязательно $b_n = 1$.

Если теперь какой-нибудь коэффициент a_k окажется больше 1, сразу возникнет противоречие: при перемножении g и h члены $a_k x^k$ и x^n дадут $a_k x^{n+k}$. Коэффициент при x^{n+k} окажется больше 1.

Поэтому все $a_k \le 1$. Разумеется, и все $b_l \le 1$. В частности, $a_0 \le 1$, $b_0 \le 1$. Поскольку свободный член произведения равен $a_0 b_0 = 1$, то $a_0 = b_0 = 1$.

Первый способ

Разложение $f_p(x) = g(x)h(x)$ имеет вид

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 =$$
$$= \left(x^m + a_{m-1}x^{m-1}\ldots + a_1 x + 1\right)\left(x^n + b_{n-1}x^{n-1}\ldots + b_1 x + 1\right).$$

Коэффициент при первой степени x равен $1 = a_1 + b_1$. Значит, хотя бы одно из чисел a_1, b_1 отлично от 0. Пусть $a_1 \ne 0$. Обратим внимание на произведения $1\cdot x^n$ и $a_1 x \cdot b_{n-1}x^{n-1}$. Если $b_{n-1} > 0$, то коэффициент при x^n в правой части благодаря им оказывается больше 1.

Если же $b_{n-1} = 0$, то противоречие получается по-другому. Вспомним, что многочлен $h(x)$ разлагается на множители вида

$$h(x) = \left(x-\varepsilon^{k_1}\right)\left(x-\varepsilon^{k_2}\right)\ldots\left(x-\varepsilon^{k_n}\right),$$

где $k_1, \ldots, k_n$ — натуральные числа (меньшие p), $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$. Вычисляя коэффициент при x^{n-1}, получим

$$b_{n-1} = -\varepsilon^{k_1} - \varepsilon^{k_2} - \ldots - \varepsilon^{k_n}.$$

Поскольку $b_{n-1} = 0$, многочлен $x^{k_1} + x^{k_2} + \ldots + x^{k_n}$ (заметьте — многочлен с целыми коэффициентами!) имеет общий корень ε с многочленом $f_p(x)$. Последний, как мы знаем, неприводим. Известно (см. упражнение 36 в *Приложении*), что всякий многочлен с целыми коэффициентами, имеющий общий корень с неприводимым многочленом, делится на него. Значит, $x^{k_1} + x^{k_2} + \ldots + x^{k_n}$, степень которого не превосходит $p-1$, делится на многочлен $f_p(x)$ степени $p-1$. Следовательно, $x^{k_1} + x^{k_2} + \ldots + x^{k_n} = f_p(x)$, что невозможно, поскольку левая часть обращается в нуль при $x = 0$.

Второй способ

Начнем с определения. *Полином $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ называется возвратным, если для любого $0 \le i \le n$ справедливо равенство $a_{n-i} = a_i$.*

Упражнение 21. Полином $P(x)$ степени n возвратный тогда и только тогда, когда $P(x) = x^n \cdot P\left(\frac{1}{x}\right)$.

Упражнение 22. Произведение любых двух возвратных многочленов — возвратно.

Теперь сформулируем два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Многочлены $g(x)$ и $h(x)$ — возвратные.*

Лемма 2. *Все коэффициенты полиномов g, h равны 0 или 1.*

Очевидно, теорема из них следует: подставляя $x = 1$ в разложение $f_p(x) = g(x)h(x)$, получим противоречие с простотой числа $p = f_p(1)$.

Доказательство леммы 1. При $p = 2$ утверждение очевидно. При нечетных p все множители правой части разложения

$$f_p(x) = \prod_{k=1}^{(p-1)/2}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi k}{p} + 1\right),$$

полученного из (4), являются возвратными. Значит, в силу упражнения 22, $g(x)$ и $h(x)$ — возвратные.

Доказательство леммы 2. Предположив противное, обозначим через i наименьший из таких номеров, что хотя бы одно из чисел a_i, b_i отлично от 0 и 1. Пусть, для определенности, a_i не равно ни 0, ни 1. По лемме 1 имеем $a_{m-i} = a_i$. Значит, $a_{m-i} > 0$.

Если $b_i > 0$, то коэффициент при x^m после раскрытия скобок произведения $g(x)h(x)$ получается больше 1 (сообразите, почему!). Если же $b_i = 0$, то первое слагаемое выражения $a_ib_0 + a_{i-1}b_1 + \ldots + a_0b_i = 1$ не равно ни 0, ни 1, а каждое из остальных слагаемых равно 0 или 1.

Третий способ

Этот способ не использует комплексных чисел. Оказывается, верны следующие леммы.

Лемма 1'. *Если возвратный многочлен $f(x)$ разложен в произведение многочленов $g(x)$ и $h(x)$ с неотрицательными коэффициентами, причем все коэффициенты многочлена f не превосходят величины его свободного члена, то полиномы g и h — тоже возвратные. (Разумеется, мы считаем, что многочлен f отличен от тождественного нуля.)*

Лемма 2'. *Если возвратный многочлен $f(x)$, все коэффициенты которого суть 0 и 1, разложен в произведение полиномов $g(x)$ и $h(x)$ с неотрицательными коэффициентами, то и все коэффициенты многочленов $g(x)$, $h(x)$ равны 0 или 1.*

Они сильнее, чем леммы 1 и 2, поэтому вывод теоремы 1 из лемм остается прежним. Доказательство леммы 2' по сути не отличается от доказательства леммы 2, поэтому нам осталось только доказать лемму 1'.

Как обычно, можно считать, что $a_0 = b_0 = b_n = a_m = 1$. Пусть хотя бы один из полиномов g, h не является возвратным. Рассмотрим *наименьшее* i, для которого хотя бы одно из равенств $a_i = a_{m-i}$, $b_i = b_{n-i}$ не выполнено.

Коэффициент при x^i произведения вычисляется по формуле

$$a_0b_i + a_1b_{i-1} + \ldots + a_ib_0. \tag{5}$$

Он должен равняться коэффициенту при x^{m+n-i}, т.е. сумме

$$a_{m-i}b_n + \ldots + a_mb_{n-i}. \tag{6}$$

Поскольку при всех $j < i$ выполнены равенства $a_j = a_{m-j}$, $b_j = b_{n-j}$, в суммах (5) и (6) все слагаемые, кроме крайних, совпадают. Значит,

$$a_0b_i + a_ib_0 = a_{m-i}b_n + a_mb_{n-i},$$

т.е. $b_i + a_i = a_{m-i} + b_{n-i}$.

Осталось решить два упражнения.

Упражнение 23. Докажите, что $b_ia_{m-i} = 0$ и $a_ib_{n-i} = 0$.

Указание. Рассмотрите, соответственно, коэффициенты при x^m и x^n.

Упражнение 24. Завершите доказательство леммы 1'.

Разложения f_n при составном n

Перейдем теперь к описанию разложений с неотрицательными коэффициентами полиномов $f_n(x)$, где n — *произвольное* натуральное число.

Упражнение 25. Завершите разложения

а) $f_4(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(\ldots)$;

б) $f_6(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(\ldots)$;

в) $f_{15}(x) = (x^2 + x + 1)(\ldots)$.

Упражнение 26. Докажите, что при любом составном $n = ab$ полином $f_n(x)$ представим в виде $f_{ab}(x) = f_a(x)f_b(x^a)$.

Упражнение 27. Если $n = abc$ — некоторое разложение в произведение натуральных чисел, то

$$f_n(x) = f_a(x)f_b(x^a)f_c(x^{ab}). \tag{7}$$

Аналогичное разложение можно выписать, если число n разложено не на два или три, а на большее число множителей. Более того, никаких других разложений полиномов $f_n(x)$ на множители с неотрицательными коэффициентами, по существу, не бывает (см. теорему 2). Ключ к доказательству этого — задача M1598. Мы сейчас изложим ее решение.

а) При доказательстве лемм 1 и 2 простота p не использовалась. Поэтому можно считать, что коэффициенты a_i и b_i равны только 0 или 1.

б) Теперь — сюрприз. M1598,б) — это геометрическая задача. Понять ее условие и решение проще всего, если рисовать отрезки и смотреть, что происходит при сдвигах.

В самом деле, давайте изображать многочлен $x^\alpha + x^\beta + \ldots$ системой отрезков $[\alpha, \alpha+1] \cup [\beta, \beta+1] \cup \ldots$ Умножение на x^t будем представлять как параллельный перенос на t единиц. Тогда, например, разложению

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{11} = (1 + x + x^6 + x^7)(1 + x^2 + x^4)$$

будет соответствовать система отрезков $[0,2] \cup [6,8]$, сдвиги которой на 0, 2 и 4 единицы покрывают в точности отрезок $[0,12]$ (рис.4). (Один множитель задает систему отрезков, другой — величины сдвигов. Не удивляйтесь их неравноправию. Скоро все станет ясно.)

Рис. 4

Итак, для геометра задача M1598 может быть сформулирована следующим образом:

На отрезке задана некоторая система S не пересекающихся друг с другом отрезочков. Докажите, что если отрезок можно составить из параллельных сдвигов системы S, то длины всех отрезочков системы S одинаковы. (Отрезочки не имеют никаких общих точек, в частности, не имеют общих концов. При параллельных сдвигах все точки большого отрезка должны быть покрыты; отрезочки не должны накладываться друг на друга внутренними точками, а должны «стыковаться» в концах.)

Решение очень простое. Можно считать, что все сдвиги выполняются только направо. (Если есть и сдвиги налево, то возьмем наибольший из них. Вместо системы S можно рассматривать этот ее сдвиг.)

Рассмотрим самый левый отрезочек. Очевидно, среди сдвигов должен быть сдвиг на длину k этого отрезочка. Из этого следует, что длины всех отрезочков системы не превосходят k (иначе длинный отрезочек накладывался бы на себя при сдвиге).

Если же среди отрезочков системы найдется отрезочек, длина которого меньше k, рассмотрим самый левый из всех таких отрезочков. Противоречие очевидно.

Упражнение 28. Почему?

Задача решена. Для поклонника индексов и формул мы сейчас переведем это красивое геометрическое решение на язык алгебры.

Для этого обозначим

$$F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots,\quad G(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots.$$

Тогда

$$\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\right)\left(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots\right)=1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}.$$

Свободный член произведения равен произведению свободных членов, т. е. $a_0\cdot b_0=1$. Значит, $a_0=1$ и $b_0=1$. Коэффициент при первой степени x произведения $F(x)\cdot G(x)$ вычисляется по формуле $a_0b_1+a_1b_0$. Поскольку он равен 1, то либо $a_1=1$, $b_1=0$, либо $a_1=0$, $b_1=1$. Для определенности предположим, что $a_1=1$ и $b_1=0$.

Если все коэффициенты a_i многочлена $F(x)$ равны 1, то утверждение задачи выполнено. Если же среди них присутствует 0, то рассмотрим наименьшее k, для которого $a_k=0$. Тогда

$$a_0=a_1=\ldots=a_{k-1}=1,\ a_k=0.$$

Если какой-нибудь коэффициент b_m, где $1\le m<k$, равен 1, то сразу видим, что коэффициент при x^m больше 1: член x^m произведения можно получить, умножая $a_0\cdot b_mx^m$, а также $a_m\cdot b_0x^m$. Значит, $b_m=0$ при $1\le m<k$. Теперь ясно, что $b_k=1$: в противном случае коэффициент при x^k был бы равен 0.

Последовательность коэффициентов a_0, $a_1,\ldots$ можно представлять себе как последовательность чередующихся отрезков: сначала отрезок из единиц, потом отрезок из нулей, потом снова из единиц и т.д.

Рассмотрим один из таких отрезков: $a_r=\ldots=a_{r+s-1}=1$, причем $a_{r-1}=0$, $a_{r+s}=0$. Длина s этого отрезка (длиной отрезка натурального ряда будем называть количество натуральных чисел этого отрезка: например, длина отрезка 1, 2, 3 равна 3) не может быть больше k: в противном случае член x^{r+k} произведения можно получить, умножая $a_rx^r\cdot b_kx^k$, а также $a_{r+k}x^{r+k}\cdot b_0$.

Докажем, что эта длина не может быть меньше k. Предположим противное. Рассмотрим самый левый (окаймленный нулями) отрезок из единиц $a_r,\ldots,a_{r+s-1}$, длина s которого меньше k.

Член x^{r+s} произведения $F(x)\cdot G(x)$ должен получаться при умножении какого-то члена вида a_ux^u на некоторый член b_vx^v. (Разумеется, $u+v=r+s$. Поскольку $a_{r+s}=0$, случай $v=0$ невозможен.)

Нетрудно понять, что в таком случае $a_{u-1}=0$ (в противном случае можно получить x^{r+s-1} двумя способами: $a_{u-1}x^{u-1}\cdot b_vx^v$ и $a_{r+s-1}x^{r+s-1}\cdot 1$). Значит, должен существовать отрезок из единиц $a_u,\ldots,a_{u+k-1}$. (Длина его равна k, поскольку он расположен левее отрезка $a_r,\ldots,a_{r+s-1}$: так как $v\ge k$, то $u\le r+s-k<r$.) Далее, $a_rx^r\cdot b_kx^k=a_{r+k-v}x^{r+k-v}\cdot b_vx^v$, где величина $r+k-v$ лежит на отрезке $u,\ \ldots,\ u+k-1$.

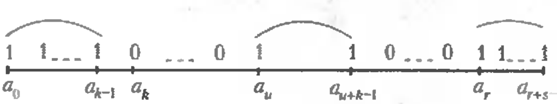


Рис. 5

Чтобы получить противоречие, осталось доказать, что $k\ne v$. Действительно, $r>u+k$ (рис.5), откуда $r+s>u+k+s$. Значит, $v=r+s-u>k+s>k$. Следовательно, все отрезки из единиц имеют одну и ту же длину k. Отсюда ясно, что многочлен F представим в виде произведения многочлена $1+x+\ldots+x^{k-1}$ на многочлен, коэффициенты которого — нули и единицы.

Итак, мы решили задачу M1598. Она позволяет легко получить полное описание всех «неотрицательных» разложений полиномов f_n:

Теорема 2. *Всякое разложение полинома $f_n(x)$ в произведение отличных от константы полиномов с неотрицательными коэффициентами можно получить из равенства типа (7) некоторой группировкой сомножителей.*

Упражнение 29. Докажите, что всякий неразложимый на множители с неотрицательными коэффициентами делитель многочлена $f_n(x)$ имеет вид $f_p\left(x^m\right)$, где p — простой делитель числа n, m — делитель числа n/p.

Для разложений с неотрицательными коэффициентами не выполняется основная теорема арифметики, например:

$$f_6(x)=(x+1)\left(x^4+x^2+1\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^3+1\right),$$

причем многочлены $(x+1)$, (x^4+x^2+1), (x^2+x+1), (x^3+1) не разлагаются на множители с неотрицательными коэффициентами.

Упражнение 30. Разложение $f_n(x)$, где $n>1$, на не разложимые далее множители с неотрицательными коэффициентами единственно тогда и только тогда, когда n — степень простого числа.

Приложение

В первом разделе сказано, что неприводимость f_p следует из признака неразложимости Эйзенштейна. Объясним, что это значит. Сначала сделаем замену $x=y+1$.

Упражнение 31. Вычислите а) $\Phi_3(y+1)$; б) $\Phi_5(y+1)$; в) $\Phi_7(y+1)$.

Убедитесь, что все коэффициенты, кроме старшего, будут делиться на 3 в пункте а), на 5 — в пункте б) и на 7 — в пункте в).

При любом p имеем

$$f_p(y+1)=\frac{(y+1)^p-1}{(y+1)-1}=y^{p-1}+C_p^1y^{p-2}+\ldots+C_p^2y+C_p^1.$$

Упражнение 32. Пусть p — простое. Докажите, что все, кроме старшего, коэффициенты полученного многочлена делятся на p. (Заметьте, что свободный член $C_p^1=p$ не делится на p^2.)

Упражнение 33 *(признак Эйзенштейна).* Если все коэффициенты многочлена $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, кроме старшего коэффициента a_n, делятся на простое число p, а свободный член a_0 не делится на p^2 (но делится, как уже было сказано, на p), то f неразложим на множители с целыми коэффициентами.

(Подробнее о признаке Эйзенштейна рассказано в «Кванте» №4 за 1994 г. в решении задачи M1419.)

• • •

Все встречавшиеся нам полиномы деления круга имели коэффициентами лишь числа ± 1 и 0. В 1938 году Н.Г.Чеботарев задал вопрос, всегда ли это так.

Используя равенство

$$\Phi_{pq}=\frac{x^{pq}-1}{x^p-1}\cdot(1-x)\frac{1}{1-x^q}=\left(x^{p(q-1)}+x^{p(q-2)}+\ldots+x^p+1\right)\times$$
$$\times(1-x)\left(1+x^q+x^{2q}+x^{3q}+\ldots\right),$$

можно доказать, что все коэффициенты многочлена Φ_{pq}, где p и q — различные нечетные простые числа, равны ± 1 или 0. Из этого с помощью упражнений 19 и 7 легко следует, что при $n < 105$ все коэффициенты полиномов Φ_n равны 0 или ± 1 (поскольку $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, любое $n < 105$ имеет не более двух нечетных простых делителей).

В 1941 году В.Иванов доказал эти факты и вычислил:

$$\Phi_{105}(x) = x^{48} + x^{47} + x^{46} - x^{43} - x^{42} - 2x^{41} - x^{40} - x^{39} + x^{36} + x^{35} + x^{34} + x^{33} + x^{32} + x^{31} - x^{28} - x^{26} - x^{24} - x^{22} - x^{20} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} - x^{9} - x^{8} - 2x^{7} - x^{6} - x^{5} + x^{2} + x + 1.$$

Среди коэффициентов этого многочлена деления круга есть -2.

Упражнение 34. При каких n в разложении многочлена $f_n(x) = x^{n-1} + \ldots + x + 1$ на неприводимые множители все коэффициенты всех многочленов-сомножителей неотрицательны?

Подсказка. Если $n = p^\alpha$, то все коэффициенты многочлена $\Phi_{p^\alpha} = f_p\left(x^{p^{\alpha-1}}\right)$ неотрицательны. Если же n делится на различные простые числа p и q, то $x^n - 1$ делится на Φ_{pq}, среди коэффициентов которого есть отрицательные (например, коэффициент при первой степени x полинома Φ_{pq} равен, как легко посчитать, -1).

Упражнение 35. При каких натуральных a и b многочлен $f_a\left(x^b\right)$ неприводим?

* * *

Мы говорили, что многочлены разлагаются на множители «так же, как числа». Ниже сформулированы некоторые факты, придающие этим словам точный математический смысл.

- Многочлены можно делить с остатком: для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x) \neq 0$ с рациональными коэффициентами существуют (и определены единственным образом) такие многочлены $q(x)$ и $r(x)$, что

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \qquad (8)$$

где степень многочлена r меньше степени многочлена g или $r = 0$. (Равенство (8) можно записать и в виде $\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$.)

- Для любых двух ненулевых многочленов $A(x)$ и $B(x)$ многочлен (отличный от нуля) минимальной степени, представимый в виде

$$A(x) \cdot K(x) + B(x) \cdot L(x),$$

где K и L — многочлены, является наибольшим общим делителем многочленов A и B.

Упражнение 36. Любой многочлен, имеющий общий корень с неприводимым полиномом, делится на этот полином.

- *(Основная теорема арифметики для многочленов)* Любой многочлен с рациональными коэффициентами единственным способом разлагается в произведение неразложимых многочленов с рациональными коэффициентами.
- *(Лемма Гаусса)* Если многочлен с целыми коэффициентами разложим на множители с рациональными коэффициентами, то он разложим и на множители с целыми коэффициентами.

Упражнение 37. а) Если многочлен с целыми коэффициентами имеет рациональный корень x и если старший коэффициент этого многочлена равен 1, то x — целое число.

б) Если многочлен $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами имеет рациональный корень p/q, где дробь p/q записана в несократимом виде (т.е. НОД$(p,q)=1$), то числитель p — делитель свободного члена a_0, а знаменатель q — делитель старшего коэффициента a_n.

* * *

Мы пользовались неразложимостью некоторых многочленов. Объясним напоследок, как можно «кустарно», т.е. не используя общую теорию, доказать неразложимость Φ_{15}, Φ_{20} и Φ_{60}.

Упражнение 38. Если $f_n(x)$ разложен в произведение многочленов с вещественными коэффициентами, то каждый из множителей-многочленов возрастает на луче $[1, +\infty)$.

Указание. Все сомножители $x^2 - 2x\cos\varphi + 1$ разложения (4) возрастают при $x \geq 1$.

Упражнение 39. Докажите непосредственно, т.е. не пользуясь формулой (2), неразложимость многочлена $\Phi_{15}(x) = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$ на множители с целыми коэффициентами.

Из неразложимости Φ_{15} сразу следует неразложимость многочлена $\Phi_{30}(x) = \Phi_{15}(-x)$. Поскольку $\Phi_{20}(x) = \Phi_{10}(x^2)$ и $\Phi_{60}(x) = \Phi_{30}(x^2)$, то для доказательства неприводимости Φ_{20} и Φ_{60} можно использовать неприводимость Φ_{10} и Φ_{30}. К сожалению, мы не можем попросту сказать, что если многочлен $f(x)$ неприводим, то и $f(x^2)$ неприводим (контрпримеры: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$, $x^6 - 4 = (x^3 - 2)(x^3 + 2)$).

Упражнение 40. Докажите, что если $f(x)$ неприводим, то $f(x^2)$ или неприводим, или разлагается на неприводимые множители следующим образом: $f(x^2) = \pm P(x)P(-x)$ (выясните, в каком случае какой знак).

Упражнение 41. Докажите непосредственно, т.е. не пользуясь формулой (2), неразложимость многочленов а) $\Phi_{20}(x) = (x^{10} + 1)/(x^2 + 1)$; б) $\Phi_{60}(x) = (x^{20} - x^{10} + 1)/(x^4 - x^2 + 1)$ на множители с целыми коэффициентами.

НАМ ПИШУТ

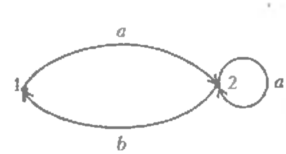
ГЕНЕРАТОР СЛОВ И ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

В 1992 году я предложил на лингвистической олимпиаде следующую задачу:

«С помощью схемы, изображенной на рисунке, строятся слова некоторого искусственного языка. Слова получаются движением из точки 1 в направлении стрелок и записью букв, написанных около проходимых стрелок. Слово может заканчиваться как в точке 1, так и в точке 2.

Таким образом может быть получено лишь одно слово длиной 1 — «*a*», два слова длиной 2 — «*aa*» и «*ab*», три слова длиной 3, пять слов длиной 4 и т.д.

Обозначим через $N(n)$ число слов длиной n. Докажите, что $N(n)$ делится



на 5 тогда и только тогда, когда $n+1$ делится на 5».

Решение этой задачи основано на свойстве чисел $N(n)$: $N(0) = N(1) = 1$, $N(n+1) = N(n) + N(n-1)$. Но именно этими условиями определяется последовательность Фибоначчи! Значит, числа $N(n)$ являются n-ми числами ряда Фибоначчи.

Таким образом, получен еще один механизм возникновения чисел ряда Фибоначчи.

А.Серебряный

Наука в двадцатом веке

В.ВАЙСКОПФ

Часть 3 (1970 — 2000)

Этот период покрывает годы от 1970 до настоящего времени и, может быть, до ближайшего будущего. Фантастическое научное развитие, начавшееся во втором периоде, продолжалось и в третьем, дав немало выдающихся результатов, как например — квантовую хромодинамику. Суть ее — в новом типе взаимодействия между кварками, которое держит их вместе при помощи глюонов. Были открыты новые частицы, состоящие из пары очарованного кварка и антикварка. Обнаружена кварковая структура нуклонов, объяснившая некоторые детали свойств ядер. Эксперименты со столкновением тяжелых ионов позволили изучить высоко возбужденные состояния ядерной материи. Метод ядерного магнитного резонанса нашел широкие применения в медицине и материаловедении. Стали возможными эксперименты с одиночными атомами. Возникла химия «бакиболов» — молекул, состоящих из многих атомов углерода. Были изучены атомные кластеры — нечто среднее между молекулами и твердым телом. Колоссальный прогресс был достигнут в биологии с изучением свойств гена, появилась возможность генной инженерии.

Однако не все шло гладко по целому ряду причин. Именно о них мне и хочется поговорить.

В американском правительстве да и в самом научном сообществе стали все чаще звучать серьезные вопросы типа: стоит ли вкладывать огромные деньги в неприкладные, фундаментальные отрасли знания? Проблема обострилась еще сильнее в связи с экономическим спадом, начавшимся в США и Западной Европе в семидесятые годы.

Кроме того, в последние десятилетия на первый план вышли проблемы окружающей среды — потепление климата из-за парникового эффекта; утоньшение озонового слоя, защищающего все живое на Земле от опасных космических излучений; наступление пустынь как из-за вырубки лесов, так и из-за их гибели от грязного воздуха; загрязнение рек, морей и океанов; взрывной рост населения в развивающихся странах. Все эти острейшие проблемы требовали тщательного научного исследования. Действительно ли парниковый эффект приводит к повышению температуры и если да, то на сколько? Насколько опасны вредные выбросы промышленности? Как сохранить питьевую воду? Нужно было искать новые пути для производства энергии, новые методы контроля над рождаемостью. Для всего этого комплекса вопросов самое деятельное участие науки было просто необходимо.

Именно поэтому все большую финансовую поддержку от правительства и других фондов стали получать прикладные исследования. Да и молодых энтузиастов стала все более привлекать возможность решать актуальные для человечества задачи. Изменился и сам характер прикладной науки: она меньше стала направлена на совершенствование индустрии и вооружения и больше имела дело с окружающей средой.

Естественно, проблемы окружающей среды не могут решаться одними естественными науками — физикой, химией, биологией. Есть масса экономических, политических и психологических аспектов, которые, может быть, даже более важны, поскольку именно их касается реализация проектов. В развитых странах неизбежно должны возникать экономические затруднения. Развивающиеся государства наверняка будут отказываться от решения этих проблем, если они пойдут в ущерб их индустриальному развитию. Начнутся подсчеты и взаимные упреки: кто больше загрязняет.

Все перечисленные обстоятельства требуют тесного сотрудничества естественных и социальных наук. Примеры подобного сотрудничества существуют сегодня в некоторых местах, но хочется надеяться, что число их возрастет в будущем. Все это помогает представителям фундаментальных отраслей вступать в контакт с общественностью не только для новых финансовых запросов, но и для понимания общих проблем.

И все же: где сегодня место неприкладных отраслей? Необходимо четко сформулировать ответ на этот вопрос, чтобы фундаментальная наука не лишилась финансовой и политической поддержки.

Прежде всего, есть культурные и интеллектуальные ценности. Фундаментальная наука несет с собой дух исследования, поисков истины. Она ищет ответы на вопросы «как и почему», пытается решить нерешенные задачи, отыскать новые законы Природы. Просто необходимо поддерживать и культивировать этот дух новаторства, потому что он нужен и для прикладных наук. Вот удачная цитата М.Поляного из Чикагского университета: «Научные методы (имеются в виду фундаментальные науки) созданы для исследования Природы в гораздо более строгих условиях, чем существуют в действительности. Подобные условия и критерии могут возникнуть лишь в мозгу человека из чисто научного интереса, причем человека воспитанного и образованного в научном плане. Интерес к подобным умозрительным построениям нельзя включить волевым усилием, его можно лишь вырастить».

Прикладные и фундаментальные науки соотносятся друг с другом, как корни и ветви дерева. Корни — это фундаментальное знание, и если их обрезать, то дерево постепенно погибнет. Не менее важную роль играют фундаментальные науки в обучении подрастающего поколения. Они воспитывают такое отношение к изучаемой проблеме, которое очень полезно и продуктивно вне зависимости от того, в какой бы области не пришлось потом трудиться. В каком-то смысле они воспитывают студентов в этическом плане: критический подход к любому полученному результату, готовность признать свои выводы лишь промежуточными, открытыми для дальнейших улучшений (это — черты, присущие любому фундаментальному исследованию). Студенты лучше понимают нашу роль и место в Природе — как на Земле, так и во Вселенной, они учатся

Окончание. Начало см. в № 5, 6 за 1997г..

работать в большом международном коллективе, забывая о национальных, рассовых и государственных границах. Конечная цель любой фундаментальной научной работы — это поиск истины.

К сожалению, в последние годы несколько печальных случаев научного обмана стали достоянием широкой публики. Это привело к сомнениям в высоких этических стандартах науки. На самом же деле фальшивые результаты в науке возникают гораздо реже, чем в любой другой области человеческой деятельности. Любой заслуживающий внимания результат проверяется и перепроверяется другими экспериментальными группами, и публиковать заведомо лживые результаты просто неразумно: тебя наверняка разоблачат, и ты навсегда обретешь репутацию лгуна. Конечно, ошибочные результаты публикуются нередко, но они достаточно быстро выявляются и устраняются.

За последние десятилетия фундаментальные науки потеряли свою былую привлекательность. По сравнению с семидесятыми годами финансовая поддержка фундаментальных исследований резко сократилась. Типичный пример из США: Национальный научный фонд, созданный для поддержки фундаментальных исследований, практически полностью перешел на финансирование прикладной науки. Аналогичный процесс — и в Национальном институте здоровья. Похожие тенденции можно проследить и в Европе.

Такие фундаментальные области, как физика элементарных частиц, ядерная физика, астрономия страдают больше, чем биология, наука о мозге, исследования в области хаоса, поскольку последние все же могут найти прикладные применения. Интересно отметить, что астрономия страдает меньше собратьев по несчастью, вероятно, потому, что предмет ее исследований напоминает широкой общественности нечто религиозное — вопросы творения Вселенной. Теперь физика элементарных частиц пытается присоединиться к исследованиям своей более удачливой коллеги, изучая процессы, которые происходили в первые три минуты после Большого Взрыва.

Можно привести немало убедительных доводов в пользу поддержки фундаментальной науки, но всегда остается вопрос количества. Необходимо ли финансирование на уровне второго периода? Нужно ли нам тратить так много денег за короткое время? Какое же количество денег надо считать достаточным? На подобные вопросы очень сложно ответить. Вполне возможно, что послевоенный уровень финансирования является чрезмерным, но нельзя его снижать настолько, чтобы фундаментальные области потеряли всякую привлекательность для молодежи.

Характерный пример подобного сокращения — современное положение физики элементарных частиц в США из-за закрытия строящегося ускорителя в Техасе. Это был совершенно колоссальный проект стоимостью в двенадцать миллиардов долларов, теперь большое число людей может простонапросто уйти из области физики элементарных частиц и потери вполне могут стать критическими. К сожалению, немалую роль в этой трагедии сыграли узконациональные интересы: Европа и США параллельно собирались строить аналогичные и сверхдорогие ускорители.

Научное сообщество можно обвинить и в росте узконациональных настроений, потому что все чаще слышится в научных обсуждениях аргумент о том, что «наша страна не должна терять лидерства в той или иной области» — это просто противоречит духу истинной науки. Известный физик И.Раби писал: «Наука нуждается в единстве и интеграции. Ведь сейчас лишь студенты знают «кое-что обо всем». С ростом числа физиков росла и специализация, а она неизбежно уводит от истинно научного духа «натурфилософии», которая в интеллектуальном смысле и является средством и целью науки».

Непозволительно мало усилий прилагали ученые, чтобы объяснить простоту и красоту, глубину и значимость фундаментальной науки, причем не только ее последних достижений, но и великих открытий прошлого. Это совершенно необходимо делать в книгах, журналах, телепередачах и школах. Причем надо сознательно бороться с представлением о том, что наука материалистична и разрушает моральные ценности в противовес религии. Надо подчеркивать этические ценности науки. В конце концов нельзя забывать о достижениях прикладной науки и о вкладе ученых в решение проблем окружающей среды.

Возможно, мы входим в более прагматичные времена, где основной упор будет перенесен на прикладные науки. Может быть, близится конец столетнего торжества фундаментальных исследований — эры, наполненной блестящими открытиями. Но даже и в этом случае фундаментальная наука необходима нам, чтобы лучше и глубже понимать Природу и самих себя.

Все части и области науки взаимосвязаны. Наука не может развиваться без интуиции и любопытства. Она не сможет выжить, если не будет широко и интенсивно применяться в интересах всего человечества. Человеческое существование зависит от сострадания и знания. Знание без сострадания бесчеловечно; сострадание без знания неэффективно.

Этот материал перевел с английского и подготовил к печати А.Семенов

НОВОСТИ НАУКИ

ЗВУК РАЗОРВАННОГО НЕБА

Во время холодной войны американцы разработали сверхчувствительные системы «слушания», чтобы следить за нашими ядерными испытаниями. Теперь противостояние двух империй ушло в прошлое, и дорогая техника простаивала без цели, пока ученые не сообразили, что с ее помощью можно следить за метеоритами, влетающими в атмосферу Земли.

Быстро летящий метеорит возбуждает ударную волну, идущую со скоростью в сто раз выше звуковой. Она-то и порождает резкий неприятный звук. Те, кто его слышал, говорят, что он напоминает звук рвущейся материи. Этот звук может пролететь много километров вокруг Земли и почти совсем затихнуть, но чуткие «слухачи» все равно почувствуют его и выделят из шумов.

Несколько таких слушающих станций могут точно определить место входа метеорита в атмосферу. Им удается «услышать» даже десятисантиметровых «гостей». Каждый месяц к нам залетает двухметровый метеорит. Конечно, «слухачи» не могут предупредить жителей Земли об опасности, они срабатывают, когда все уже произошло. Но они могут помочь ученым найти останки метеорита, которые несут с собой немало интересного.

А.Семенов

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 1998 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1 — 98» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1621» или «Ф1628». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1625 — М1630 предлагались на XXXVIII Международной математической олимпиаде. Задачи Ф1628 — Ф1637 предлагались на Соровской олимпиаде по физике 1997/98 учебного года.

Задачи М1621 — М1630, Ф1628 — Ф1637

М1621. а) В треугольнике заданы две стороны b и c. Какой должна быть третья сторона a, чтобы точки касания ее со вписанной и вневписанной (касающейся третьей стороны и продолжений сторон b и c) окружностями делили сторону a на три равные части?
б) Существует ли прямоугольный треугольник, удовлетворяющий условиям пункта а)?

М1622. Пусть K — множество натуральных чисел, представимых в виде суммы различных чисел вида $2^m - 1$ ($m = 1, 2, \ldots$) : $K = \{1, 3, 4, 7, 8, 10, \ldots\}$. Рассмотрим отрезок натурального ряда от 1 до N. Каких чисел на этом отрезке больше — принадлежащих множеству K или остальных, если а) $N = 1000$; б) N — произвольное натуральное число?

Б.Кукушкин

М1623. Один из углов треугольника равен 60°. Обозначим через H точку пересечения высот, через O и I — центры описанной и вписанной окружностей этого треугольника.
а) Докажите, что $OI = IH$.
б)* Следует ли из последнего равенства, что один из углов треугольника равен 60°?

А.Савин

М1624. Внутри вписанного в окружность выпуклого n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ нашлась отличная от центра окружности точка P, из которой все стороны видны под равными углами. Могут ли длины всех отрезков A_1P, A_2P, ..., A_nP быть рациональными числами? Разберите случаи:
а) $n = 4$; б) $n = 8$; в)* $n = 6$;
г) $n = 5$ и $n = 7$; д)* $n > 8$.

М.Панов

М1625. Плоскость разбита на единичные квадраты, вершины которых находятся в точках с целочисленными координатами. Квадраты раскрашены поочередно в черный и белый цвета (т.е. в шахматном порядке). Для каждой пары натуральных чисел m и n рассматривается прямоугольный треугольник с вершинами в целочисленных точках, катеты которого имеют длины m и n и проходят по сторонам квадратов. Пусть S_1 — площадь черной части треугольника, а S_2 — площадь его белой части. Положим

$$f(m,n) = |S_1 - S_2|.$$

а) Вычислите $f(m, n)$ для всех натуральных чисел m и n, которые либо оба четны, либо оба нечетны.
б) Докажите, что $f(m,n) \le \frac{1}{2}\max\{m,n\}$ для всех m и n.
в) Покажите, что не существует константы C такой, что $f(m, n) < C$ для всех m и n.

(Белоруссия)

М1626. В треугольнике ABC угол A является наименьшим. Точки B и C делят окружность, описанную около этого треугольника, на две дуги. Пусть U — внутренняя точка той дуги с концами B и C, которая не содержит точку A. Срединные перпендикуляры к отрезкам AB и AC пересекают прямую AU в точках V и W соответственно. Прямые BV и CW пересекаются в точке T. Докажите, что

$$AU = TB + TC.$$

(Великобритания)

М1627. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — действительные числа, удовлетворяющие условиям

$$|x_1+x_2+\ldots+x_n|=1$$

и

$$|x_i|\le\frac{n+1}{2},\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Докажите, что существует перестановка $y_1, y_2, \ldots, x_n$ чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такая, что

$$|y_1+2y_2+\ldots+ny_n|\le\frac{n+1}{2}.$$

(Россия)

М1628. Таблица $n\times n$, заполненная числами из множества $S=\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$, называется серебряной, если для любого $i=1, 2, \ldots, n$ объединение i-ой строки и i-го столбца содержит все числа из S.
Покажите, что:
а) не существует серебряной таблицы для $n=1997$;
б) серебряные таблицы существуют для бесконечного числа значений n.

(Иран)

М1629. Найдите все пары (a, b) целых чисел $a\ge1$, $b\ge1$, удовлетворяющих уравнению

$$a^{\left(b^2\right)}=b^a.$$

(Чехия)

М1630. Для любого натурального числа n обозначим через $f(n)$ число способов представления числа n в виде суммы целых неотрицательных степеней числа 2. Представления, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми. Например, $f(4)=4$, так как число 4 может быть представлено следующими четырьмя способами: 4; 2 + 2; 2 + 1 + 1; 1 + 1 + 1 + 1.
Докажите, что для любого целого числа $n\ge3$

$$2^{n^2/4}<f\left(2^n\right)<2^{n^2/2}.$$

(Литва)

Ф1628. Пластинка радиусом 20 см равномерно вращается в горизонтальной плоскости, совершая 33 оборота в минуту. От центра пластинки к ее краю ползет строго вдоль радиуса жучок маленького размера, его скорость постоянна по величине и составляет 10 см/с. При каком минимальном коэффициенте трения жучка о поверхность пластинки он сумеет добраться таким образом до края пластинки?

А.Жучков

Ф1629. Два одинаковых кубика массой M каждый стоят почти соприкасаясь гранями на гладкой горизонтальной поверхности. Сверху на них аккуратно помещают шар массой m, который начинает смещаться вертикально вниз, раздвигая кубики в стороны. Найдите скорость шара непосредственно перед ударом о горизонтальную поверхность. Начальная скорость шара пренебрежимо мала. Радиус шара R, ребро кубика H. Трения нигде нет.

З.Рафаилов

Ф1630. На гладком горизонтальном столе покоится тележка массой M и длиной L. Посредине тележки находится кубик маленького размера, его масса m. Кубику сообщают толчком скорость v по направлению к одному из бортиков тележки. Найдите смещение тележки к тому моменту, когда кубик снова окажется посредине тележки, испытав ровно 17 ударов. Считать удары кубика о бортики тележки абсолютно упругими.

Р.Александров

Ф1631. Три маленьких заряженных тела одной и той же массы движутся в пространстве вдали от всех других тел. В некоторый момент тела оказываются на одной прямой, при этом ускорение среднего равно по величине a и ускорение одного из оставшихся в этот момент составляет по величине $3a$. Найдите ускорение третьего тела в этот же момент времени.

М.Учителев

Ф1632. Куб с ребром $a=10$ см, имеющий массу $M=1$ кг, подвешен на пружине жесткостью $k=400$ Н/м так, что его основание параллельно земле. Снизу на куб направляют поток маленьких упругих шариков, обладающих скоростью $v_0=20$ м/с на высоте первоначального положения нижней грани куба. Куб начинает колебаться, двигаясь поступательно вдоль вертикальной оси. Найдите период и амплитуду этих колебаний. Оказывается, колебания эти медленно затухают, хотя никакого трения тут нет. Объясните причину затухания колебаний и оцените время, в течение которого амплитуда уменьшится на 10%. Масса одного шарика $m=1$ г, концентрация шариков в потоке $n=1000$ м$^{-3}$. Ударами шариков друг о друга пренебречь.

А.Зильберман

Ф1633. Цикл тепловой машины состоит из двух адиабат и двух изохор. Найдите КПД цикла, если известны температуры T_1 и T_2 — начальная и конечная для одной из адиабат. Рабочее тело — идеальный газ.

А.Зильберман

Ф1634. В распоряжении физика есть два тепловых резервуара — очень горячий с температурой +200 °С и просто горячий с температурой +70 °С. Окружающая среда имеет постоянную температуру +20 °С. Физику велено сообщить очень горячему телу количество теплоты 1000 Дж и просто горячему — количество теплоты 2000 Дж. Какую минимальную механическую работу ему придется для этого совершить? Теплоемкости горячего и очень горячего тел можно считать очень большими.

А.Теплов

Ф1635. Нелинейный двухполюсник имеет вольт-амперную характеристику, которая описывается формулой $U=10\ I^2$, где ток измеряется в амперах, а напряжение — в вольтах. Два таких двухполюсника соединены последовательно и подключены к идеальной батарейке с напряжением $\mathscr{E}=10$ В. Параллельно одному из двухполюсников подключают резистор. При каком сопротивлении этого резистора тепловая мощность, которая на нем выделяется, окажется максимальной?

З.Рафаилов

Ф1636. К идеальной батарейке подключены последовательно конденсатор емкостью $C=100$ мкФ и амперметр, сопротивление которого $r=10$ Ом. При помощи быстродействующего переключателя конденсатор в этой цепи переключается $n = 100$ раз в секунду то в одной, то в другой полярности (выводы конденсатора все время меняются местами друг с другом); стрелка прибора при этом практически не дрожит. Обычный магнитоэлектрический амперметр показывает в таком случае силу тока $I_1 = 0{,}01$ А. Что покажет в такой цепи амперметр тепловой системы с тем же сопротивлением? Приборы были отградуированы в цепи постоянного тока.

А.Повторов

Ф1637. Катушка индуктивностью $L = 1$ Гн присоединена параллельно конденсатору емкостью $C = 10$ мкФ, последовательно с получившимся контуром включен еще один такой же конденсатор и к получившейся цепи подключен генератор низкой частоты с амплитудой выходного напряжения $U_0 = 1$ В. На какой частоте ток, потребляемый от генератора цепью, получается очень малым? На какой частоте этот ток резко возрастает? Оцените максимальную амплитуду напряжения на катушке, если сопротивление провода ее обмотки $R = 10$ Ом. Остальные элементы цепи считайте идеальными.

А.Повторов

Решения задач М1601 — М1605, Ф1613 — Ф1622

М1601. *Пусть $f(x)$ — нечетная возрастающая функция. Докажите, что для любых чисел a, b и c, сумма $a + b + c$ которых равна 0, выполнено неравенство*

$$f(a)f(b)+f(b)f(c)+f(c)f(a)\le 0.$$

Первое решение. При перемене знаков всех трех чисел a, b и c выражение

$$F = f(a)f(b) + f(b)f(c) + f(c)f(a)$$

не меняется (поскольку функция f нечетна); F не меняется и при перестановке a, b, c. Поэтому можно считать, что $c\le 0$, $a\ge 0$, $b\ge 0$. Поскольку $c = -a - b$ и функция f нечетна, условие $F\le 0$ можно переписать так:

$$f(a)f(b)\le -f(c)\bigl(f(a)+f(b)\bigr)=f(a+b)f(a)+f(a+b)f(b).$$

Для монотонной функции f и неотрицательных a, b это неравенство очевидно.

Второе решение, более «симметричное». Будем считать, что $c\le 0$, $a\ge b\ge 0$, тогда $|c| = |a + b|$ и $|f(c)|\ge|f(a)+f(b)+f(c)|$, поскольку $f(b)\ge f(a)\ge 0$, $f(c)<0$. Отсюда

$$|f(c)|^2\ge f^2(a)+f^2(b)+f(c)^2+2\bigl(f(a)f(b)+f(b)f(c)+f(c)f(a)\bigr).$$

Поскольку $f^2(a)+f^2(b)$ — число неотрицательное,

$$f(a)f(b)+f(b)f(c)+f(c)f(a)\le 0.$$

В.Произволов, Н.Васильев

М1602. *1997 фишек расположены на плоскости в вершинах выпуклого 1997-угольника. За один ход можно разбить их на две группы и фишки первой группы сдвинуть на какой-нибудь вектор, а остальные фишки — оставить на месте. Может ли случиться, что после а) 9; б) 10 ходов все фишки окажутся на одной прямой?*

Ответы: а) нет; б) да.

а) Пусть $2^n < N$. На каждой прямой лежит не более двух вершин выпуклого N-угольника (фишек). После первого хода на каждой прямой может оказаться не более четырех фишек, после второго — не более 8, после $(n-1)$-го — не более 2^n. Таким образом, собраться на одной прямой фишки могут не менее чем через n ходов. При $N = 1997 > 1024$ можно взять $n = 10$.

б) Построить пример можно так. Пусть $N\le 2^{n+1}$ (в частности, для $N = 1997$ можно взять $n = 10$). Проведем 2^n равноотстоящих параллельных прямых и расположим на них фишки в вершинах произвольного выпуклого N-угольника, как показано на рисунке 1.

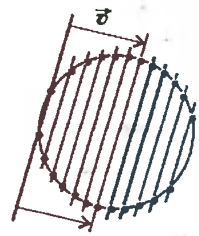


Рис.1

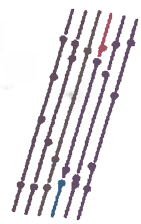


Рис.2

Сдвинув все фишки, лежащие на левой половине прямых на вектор $\vec{v}$ так, чтобы эти прямые совпали соответственно с прямыми правой половины (рис. 2), мы соберем все фишки на 2^{n-1} прямых, а через n аналогичных шагов все они соберутся на одной прямой.

М.Евдокимов

М1603. *а) Фигура М на плоскости Оху представляет собой пересечение единичного квадрата $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ с полуплоскостью $ax + by\le c$ (a, b и c — положительные числа). Докажите, что площадь М вычисляется по формуле*

$$\frac{1}{2ab}\left((c)_+^2-(c-a)_+^2-(c-b)_+^2+(c-a-b)_+^2\right),$$

где $(x)_+$ означает наибольшее из чисел x и 0: $(x)_+ = \max\{x,0\}$. б) Выведите аналогичную формулу для объема многогранника М в пространстве Охуz, представляющего собой пересечение единичного куба $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 1$ с полупространством $ax + by + cz\le d$ (a, b c и d — положительные числа).

Заметим, что выражение $(c-b)_+^2$ (и аналогичные) в условии означает число, равное $(c-b)^2$, если $c - b\ge 0$, и 0, если $c - b < 0$.

Покажем сначала идею решения, а потом ее оформим. У квадрата четыре угла — это очень много. Давайте рассмотрим фигуру с одними углом — положительный квадрант ($x > 0$, $y > 0$).

Полуплоскость $ax + by < c$ содержит все точки ниже прямой $ax + by = c$. Общая часть полуплоскости и квадранта (рис.1) — это треугольник. Прямая пересе-

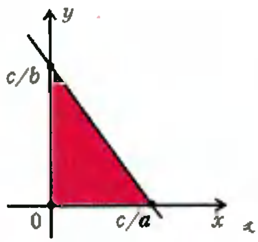


Рис.1

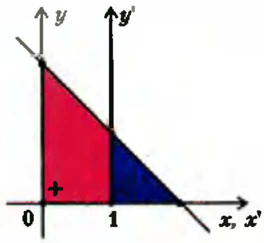


Рис.2

кает оси координат на расстояниях c/a и c/b от начала координат, поэтому площадь общего треугольника равна $c^2/2ab$.

Решив задачу для фигуры с одним прямым углом, решим ее для фигуры с двумя прямыми углами, т.е. для полосы, лежащей в положительном квадранте (рис.2). Для этого надо из треугольника, попавшего в положительный квадрант, вычесть треугольник, попавший в новый положительный квадрант с вершиной в точке (1; 0). Этот новый квадрант задает новую систему координат, в которой все абсциссы точек на единицу меньше.

Уравнение прямой в новой системе координат выглядит так: $a(x'+1)+by'=c$, или $ax'+by'=c-a$. Это уравнение аналогично исходному с той разницей, что $(c-a)$ может быть отрицательным. Следовательно, если $(c-a)>0$, то площадь треугольника в новом квадранте будет $(c-a)^2/2ab$, а если $(c-a)<0$, то пересечения нет, и площадь считаем равной нулю. Тогда формулу для площади пересечения полуплоскости с

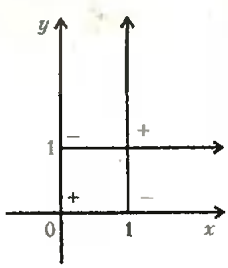


Рис.3

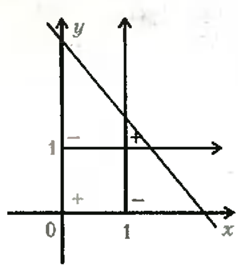


Рис.4

полосой можно записать как $c^2/2ab-(c-a)_+^2/2ab$.

Теперь легко получить выражение для квадрата с помощью четырех положительных квадрантов с вершинами в точках (0; 0), (0;1), (1; 0) и (1; 1), которые отличаются параллельным переносом (рис.3). Для этого надо из квадранта с вершиной (0; 0) «вычесть» квадрант с вершиной (1; 0), «прибавить» квадрант с вершиной (1; 1) и «вычесть» квадрант с вершиной (0; 1). Обратите внимание: знаки расставлены так, что каждая точка внутри квадрата учтена один раз, а каждая точка вне квадрата — ноль раз. Выражение такого типа называется формулой включения-исключения.

Аналогичная формула верна и для пересечения квадрата с полуплоскостью.

Выражая площади соответствующих треугольников (рис.4) в новых системах координат, получаем формулу включения-исключения для площади пересечения полуплоскости с квадратом:

$$\left[c^2-(c-a)_+^2-(c-b)_+^2+(c-a-b)_+^2\right]/2ab.$$

В случае пересечения куба с полупространством надо сначала рассмотреть пересечение полупространства с положительным октантом и найти объем общего тетраэдра. Затем представить куб в виде «суммы» и «разности» восьми положительных октантов с вершинами в вершинах куба. Потом переписать уравнение полупространства в каждой из восьми систем координат $a(x'+p)+b(y'+q)+c(z'+r)\le d$, где $(p;\ q;\ r)$ — вектор параллельного переноса исходного октанта. И наконец, написать формулу включения-исключения для объемов тетраэдров в октантах:

$$\Big[d^3-(d-a)_+^3-(d-b)_+^3-$$
$$-(d-c)_+^3+(d-a-b)_+^3+(d-b-c)_+^3+$$
$$+(d-c-a)_+^3-(d-a-b-c)_+^3\Big]/6abc.$$

А.Канель, А.Ковальджи

М1604. *Внутри выпуклого многоугольника F расположен второй выпуклый многоугольник G. Хорда многоугольника F — отрезок, концы которого лежат на границе F, — называется опорной к многоугольнику G, если она пересекается с G только по границе: содержит либо одну вершину, либо сторону G. Докажите, что а) найдется опорная хорда, середина которой лежит на границе G; б) найдутся по крайней мере две такие хорды.*

Идею решения можно сформулировать одной фразой. Рассмотрим площади сегментов, отрезаемых от F хордами, опорными к G (рис.1), и выберем среди них наибольшую и наименьшую. Соответствующие хорды касаются G своими серединами.

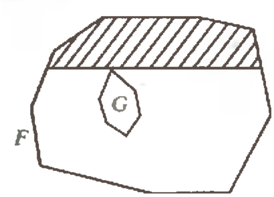


Рис.1

Изложим теперь решение более подробно. Пусть $l(\varphi)$ — опорная к G прямая, составляющая угол φ с некоторым фиксированным направлением l_0. Мы считаем, что $l(\varphi)$ — направленная прямая, G содержится в ее правой полуплоскости; $G(\varphi)=G\cap l(\varphi)$ — одна точка (вершина G) или отрезок (сторона G). Ясно, что для каждого φ, $0\le\varphi<2\pi$, прямая $l(\varphi)$ определена однозначно. Рассмотрим площадь $S=S(\varphi)$ «сегмента», отрезаемого прямой $l(\varphi)$ от F, — пересечения F с левой полуплоскостью этой прямой. Очевидно, что $S=S(\varphi)$ — непрерывная функция от φ на отрезке $0\le\varphi\le2\pi$, где $S(2\pi)=S(0)$.

Пусть AB — хорда, высекаемая многоугольником F на прямой $l(\varphi)$, и K — ее середина. Докажем, что если K не лежит на границе G, то в некоторой окрестности φ функция S монотонна (возрастает или убывает). Рассмотрим близкую к $l(\varphi)$ прямую $l(\varphi+\delta)$ и соответствующую хорду A_1B_1. При достаточно малом δ прямая $l(\varphi+\delta)$ получается из $l(\varphi)$ поворотом вокруг некоторой точки $P\in G(\varphi)$, лежащей на границе G, а разность

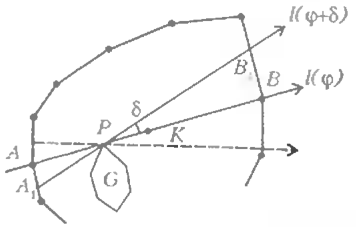


Рис.2

площадей $S(\varphi+\delta)-S(\varphi)$ равна разности площадей треугольников APA_1 и BPB_1 (рис.2). Если $PA < PB$, то (при малом δ) $PA_1 < PB_1$ и площадь треугольника APA_1 меньше площади треугольника BPB_1 (треугольник, симметричный APA_1 относительно P, лежит внутри BPB_1); таким образом, при всех достаточно малых $\delta > 0$ выполнено неравенство $S(\varphi+\delta) < S(\varphi)$. Аналогично, $S(\varphi) < S(\varphi-\varepsilon)$ при достаточно малом ε — прямая $l(\varphi-\varepsilon)$ получается поворотом $l(\varphi)$ вокруг точки $P' \in G(\varphi)$, либо совпадающей с P, либо, во всяком случае, лежащей по ту же сторону от середины K, так что $AP' < BP'$. Итак, если $G(\varphi)$ лежит по одну (на рисунке 2 — левую) сторону от K, то в окрестности φ функция S убывает. Если $G(\varphi)$ расположена по другую сторону от K, то в окрестности φ функция S возрастает.

Однако непрерывная функция $S = S(\varphi)$ (принимающая равные значения на концах отрезка $[0, 2\pi]$) должна достигать максимума и минимума. По доказанному выше, в этих точках середина хорды K должна лежать в $G(\varphi)$, т.е. принадлежать границе G.

Н.Васильев

М1605. *Имеются N карточек, на которых написаны различные (неизвестные) числа. Они разложены на столе по кругу числами вниз. Надо найти три какие-нибудь лежащие рядом карточки такие, что число, написанное на средней карточке, больше, чем на каждой из двух соседних. При этом разрешается перевернуть последовательно не более k карточек. Докажите, что это возможно, если а) $N = 5$, $k = 4$; б) $N = 76$, $k = 10$; в) $N = 199$, $k = 12$.*

Решим сначала задачу а). «Откроем» среди 5 чисел, расположенных по окружности, два числа $a < b$, стоящих на расстоянии 2 друг от друга, и еще одно, соседнее с большим из них — c. Из соображений симметрии, можно считать, что $c < b$. Осталось посмотреть d, стоящее между a и b: одна из троек a, d, b и d, b, c — искомая.

Хороший алгоритм отыскания нужной тройки среди n чисел, который можно придумать, рассмотрев несколько следующих значений $n = 6, 7, \ldots$, связан с последовательностью чисел Фибоначчи: $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_3 = 3$, $f_4 = 5$, $f_5 = 8$, ..., $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$. Мы докажем, что найти нужную тройку среди f_k чисел можно за k попыток. Поскольку $f_{10} = 89 > 79$, $f_{12} = 223 > 199$, это даст решения задач б) и в) даже с некоторым запасом. Для этого докажем сначала индукцией по k, что в ряду

$$\underbrace{a,\ldots,b}_{f_k},\underbrace{\ldots,c}_{f_{k-1}} \qquad (*)$$

из $f_k + f_{k-1} + 1 = f_{k+1} + 1$ чисел, где известны числа a, b, c, причем b — наибольшее и находится от a и c на расстояниях f_{k-1} и f_{k-2}, можно найти нужную тройку за $k-1$ попытку. Для $k = 2$ (для ряда из четырех чисел a, b, .., c) это очевидно. Пусть вплоть до некоторого значения $k-1$ это доказано. Рассмотрим ряд $(*)$ и «откроем» число d, находящееся на расстояниях f_{k-1} от a и f_{k-2} от b:

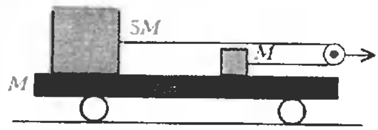
$$\underbrace{a,\ldots,d}_{f_{k-1}},\underbrace{\ldots,b}_{f_{k-2}},\underbrace{\ldots,c}_{f_{k-1}}.$$

Если $d > b$, то мы можем применить предположение индукции к $f_k + 1$ числам $a,\ldots, d, \ldots, b$, а если $d < b$ — то к числам $d, \ldots, b, \ldots, c$: за $k-2$ попытки среди них найдется нужная тройка.

Теперь среди $f_k = f_{k-1} + f_{k-2} = 2f_{k-2} + f_{k-3}$ чисел по окружности достаточно «открыть» два числа $a < b$ на расстоянии f_{k-2} и число c, находящееся на расстояниях f_{k-2} от a и f_{k-3} от b. По соображениям симметрии, можно считать, что $b > c$. По доказанному выше, среди идущих подряд $f_{k-2} + f_{k-3} + 1 = f_{k-1} + 1$ чисел $a, \ldots, b, \ldots, c$ за $k-3$ попытки можно найти нужную тройку.

В.Протасов, А.Заславский

Ф1613. *На гладком горизонтальном столе находится тележка массой M, на ней два кубика массами $5M$ и M, связанных легкой нерастяжимой нитью, переброшенной через блок (см. рисунок). Блок тянут постоянной силой в горизонтальном направлении, куски нити при этом горизонтальны. Коэффициент трения между поверхностью тележки и кубиками $\mu = 0,1$. При какой величине силы ускорение тележки составит $a = 0,2g$? Какими при этом будут ускорения кубиков и блока?*



В решении этой задачи нужен анализ возможности проскальзывания грузов по тележке. Вариант проскальзывания обоих грузов не подходит — ускорение тележки окажется при этом больше указанной в условии величины $0,2g$:

$$a_т = \frac{6Mg\mu}{M} = 6g\mu = 0,6g.$$

Для того чтобы оба груза не проскальзывали, нужен слишком большой коэффициент трения — не менее 0,5. Несложные рассуждения показывают, что малый груз должен по тележке проскальзывать, а большой — ехать вместе с ней.

Обозначим необходимую силу F, тогда натяжения нити, переброшенной через блок, составят $F/2$ — именно эти силы будут действовать на грузы со стороны нити. Пусть ускорение большого груза a_1, малого a_2 и тележки a. Запишем уравнения движения тел:

$$\frac{F}{2} - \mu Mg = Ma_2,$$

$$\frac{F}{2} + \mu Mg = 6Ma,$$

$$a_1 = a.$$

Решая систему уравнений, получим

$$a_2 = g,\ a_{\text{бл}} = \frac{(a_1 + a_2)}{2} = 0{,}6g,\ F = 2{,}3Mg\ .$$

З.Рафаилов

Ф1614. *На гладком горизонтальном столе находится тележка массой M, на которой вертикально стоит велосипедное колесо массой $3M$ (рис.1). Коэффициент трения между колесом и тележкой μ. К тележке прикладывают постоянную по величине горизонтальную силу, направленную параллельно плоскости колеса. При какой максимальной величине этой силы колесо сможет двигаться без проскальзывания относительно тележки? Считайте, что вся масса колеса сосредоточена на максимальном расстоянии от его центра — на внешней окружности.*

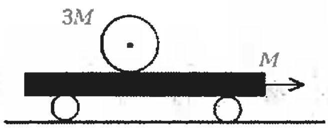


Рис.1

Колесо движется под действием силы трения f (рис.2). Ускорение его центра масс при этом составляет $a_ц = f/(3M)$. Кроме поступательного движения с этим ускорением, колесо будет закручиваться с постоянным угловым ускорением ε против часовой стрелки. Определим это угловое ускорение. Можно воспользоваться уравнением моментов сил (если знаете, что такое момент инерции и как с ним обращаться), но можно применить и закон сохранения энергии. Для этого достаточно знать, что энергия обруча складывается из энергии, связанной с поступательным движением центра масс, и энергии, связанной с вращением вокруг центра масс (центра «обруча»). Первое слагаемое равно $3Mv^2/2$, второе составляет $3M\omega^2R^2/2$ — все точки обода колеса имеют одинаковые по величине ($v = \omega R$) скорости относительно центра. Работа силы f за время τ равна приращению энергии обруча:

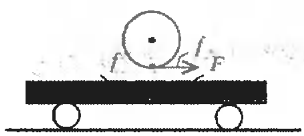


Рис.2

$$f\left(\frac{a_ц\tau^2}{2} + \frac{\varepsilon R\tau^2}{2}\right) = \frac{3Ma_ц^2\tau^2}{2} + \frac{3M\varepsilon^2R^2\tau^2}{2},$$

откуда (подставив значение $a_ц$) получим

$$\varepsilon R = \frac{f}{3M} = a_ц.$$

Условие отсутствия проскальзывания обруча относительно тележки можно записать в виде

$$a_т = a_ц + \varepsilon R,\ \text{или}\ \frac{F - f}{M} = \frac{2f}{3M}.$$

Отсюда находим искомое значение силы F:

$$F = \frac{5f}{3} \le \frac{5}{3}\cdot 3\mu Mg,\ \text{или}\ F_{max} = 5\mu Mg.$$

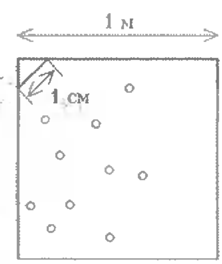
Р.Александров

Ф1615. *В невесомости проводится следующий опыт. Заполненный воздухом большой сосуд содержит множество мельчайших масляных капелек и одну каплю довольно больших размеров. При столкновении маленьких капель между собой они упруго разлетаются, а при столкновении с большой каплей происходит их поглощение. За 1 час диаметр большой капли увеличился в 2 раза. Через какое время он увеличится еще в 2 раза? Большая капля не касается стенок сосуда. Испарения с ее поверхности не происходит.*

Будем считать, что капель в сосуде очень много и что сосуд огромный, так что концентрация капель по мере роста большой капли не меняется. Тогда при хаотическом (броуновском) движении маленьких капель количество прилипающих на данную площадь за небольшой интервал времени капелек все время одинаково. Это означает, что толщина нарастающего за каждый интервал времени слоя жидкости остается неизменной — радиус большой капли линейно растет со временем. Значит, для увеличения ее радиуса от $2R$ до $4R$ понадобится ровно вдвое больше времени, чем для увеличения от R до $2R$, т.е. еще два часа.

З.Каплин

Ф1616. *На компьютере сделана модель бильярда (см. рисунок): на квадратном гладком горизонтальном столе размером 1×1 м могут двигаться одинаковые шайбы диаметром 1 мм каждая, общее число шайб 10000, вначале компьютер располагает шайбы случайным образом. Один из углов квадрата срезан под углом 45°, образуя лузу длиной 1 см. Шайба, попавшая в лузу, вылетает со стола. В начальный момент одна из шайб имеет случайно направленную скорость, равную 1 м/с, остальные шайбы неподвижны. Все удары запрограммированы как абсолютно упругие (удары шайб друг о друга не лобовые!). Через какое время со стола вылетит первая тысяча шайб? Оцените также время, за которое в большинстве экспериментов через лузу вылетят все шайбы.*



Через некоторое время после начала процесса движение шайб «хаотизируется», средняя энергия шайбы составит $Mv_0^2/(2N)$ и это даст возможность найти среднюю квадратичную скорость шайбы:

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{N}} = 0{,}01\ \text{м/с}.$$

Оценив обычным образом длину свободного пробега шайбы, получим среднее время между ударами:

$$\lambda = \frac{a^2}{N\cdot 2d} = 0{,}05\ \text{м},\ \tau = \frac{\lambda}{v} = 5\ \text{с}.$$

Отсюда видно, что время «хаотизации» составляет десятки секунд (в начале процесса удары происходят чаще и основной вклад в «разравнивание» скоростей дают удары после того, как скорости шайб уже существенно меньше v_0). Далее будет видно, что этим временем можно пренебречь — оно составляет небольшую часть искомых интервалов.

Число вылетающих шайб можно считать обычным способом — как при расчете давления молекул на стенку. Нужно только учесть, что движение «двумерное» и оценка скорости вдоль некоторой оси должна содержать не «корень из трех», а «корень из двух» — квадрат полной скорости складывается из суммы квадратов двух составляющих скорости. Для оценки времени τ_1 вылета первой тысячи шайб будем считать «концентрацию» шайб неизменной:

$$\frac{0{,}5l\left(v/\sqrt{2}\right)\tau_1 N}{a^2}=\frac{N}{10},\ \tau_1\approx 3\cdot 10^3\ \text{с}.$$

Для оценки времени вылета остальных шайб заметим, что при уменьшении концентрации уменьшается во столько же раз и число ударов (скорости шайб внутри будем считать не изменяющимися — это не совсем точно, так как у быстрых шайб вероятность вылететь за данный интервал времени побольше, но для оценки мы это учитывать не будем), тогда за следующие 3000 секунд вылетит $1/10$ оставшихся шайб, за следующие 3000 секунд — еще $1/10$ и т.д. Это означает, что число шайб, оставшихся после n таких интервалов, будет $(0{,}9)^n N$ и можно найти такое число интервалов, после которого останется, скажем, только одна шайба:

$$\lg N+n\lg 0{,}9=0,\ n=-\frac{4}{\lg 0{,}9}\approx 100.$$

Тогда

$$\tau_2=n\tau_1\approx 3\cdot 10^5\ \text{с}.$$

Посмотрим, большой ли вклад дают последние шайбы. Вероятность вылета при одном ударе можно оценить как отношение длины лузы к суммарной длине всех стенок — получается $1/400$. Время между ударами около 20 секунд, время вылета оказывается порядка нескольких тысяч секунд, что не изменяет заметно времени τ_2.

А.Зильберман

Ф1617. *В вертикальном теплоизолированном сосуде под массивным подвижным поршнем находится порция идеального одноатомного газа при температуре T_0, поршень при этом находится в равновесии. Температуру газа в сосуде при помощи миниатюрного нагревателя очень быстро увеличивают в 2 раза и оставляют систему в покое. Какая температура установится в сосуде после того, как поршень перестанет двигаться? Трение поршня о стенки пренебрежимо мало. Поршень и стенки практически не получают тепла от газа. Воздуха снаружи нет.*

Газ совершает работу по подъему поршня за счет своей внутренней энергии. Будем считать, что нагрев произошел настолько быстро, что поршень не успел за это время сместиться и набрать заметную скорость. Внутренняя энергия газа после нагрева составляет

$$U_1=1{,}5\nu R\cdot 2T_0.$$

Пусть поршень в конце концов поднялся на высоту h над начальным положением H. Обозначив конечную температуру T_1, запишем условие равновесия до нагрева и после установления равновесия:

$$\frac{Mg}{S}SH=\nu RT_0,\ \frac{Mg}{S}S(H+h)=\nu RT_1,$$

где M — масса и S — площадь поршня. Теперь запишем закон сохранения энергии:

$$Mgh=1{,}5\nu R\cdot 2T_0-1{,}5\nu RT_1.$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$h=0{,}6H,\ T_1=T_0\frac{H+h}{H}=1{,}6T_0.$$

М.Учителев

Ф1618. *Теплопроводность дерева вдоль волокон в 2 раза больше, чем поперек. Два длинных тонких цилиндра одинаковых размеров сделаны из такого дерева; ось одного из них направлена вдоль волокон, ось другого составляет с направлением волокон угол 30°. Боковые поверхности цилиндров теплоизолируют и создают одинаковые разности температур между торцами цилиндров. Во сколько раз отличаются тепловые потоки в этих цилиндрах?*

Тепловой поток (Q) через цилиндр пропорционален разности температур (T_2-T_1), приходящейся на единицу длины (L) вдоль направления распространения тепла, и площади (S) поперечного сечения. Обозначив коэффициент пропорциональности K (коэффициент теплопроводности), получим тепловой поток для первого случая:

$$Q_1=\frac{KS(T_2-T_1)}{L}.$$

Во втором случае все сложнее. Будем считать, что полный тепловой поток складывается из потоков тепла, которые распространяются вдоль волокон (под углом α к оси цилиндра) и перпендикулярно этим волокнам. Мы могли бы выбрать направления и иначе, но именно вдоль этих направлений мы знаем коэффициенты теплопроводности. Для потока вдоль волокон перепад температур на единицу длины получается меньше, чем в первом случае, — он равен $\left((T_2-T_1)\cos\alpha\right)/L$. Учтем и изменение «поперечной» площади — для этого направления получится $S\cos\alpha$. Для потока тепла в поперечном направлении все аналогично, но вместо угла α надо взять ($90°-\alpha$) и считать коэффициент теплопроводности вдвое меньшим. Тогда полный поток тепла во втором случае будет

$$Q_2=\frac{KS\cos^2\alpha\cdot(T_2-T_1)}{L}+\frac{0{,}5KS\sin^2\alpha\cdot(T_2-T_1)}{L}.$$

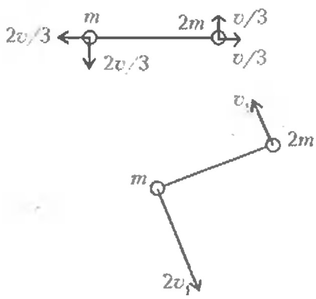
Отношение тепловых потоков составит

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{1}{0{,}75+0{,}5\cdot 0{,}25}=\frac{8}{7}\approx 1{,}14.$$

С.Варламов

Ф1619. *Вдали от всех других тел в космосе двигаются два маленьких заряженных шарика, масса одного из них 1 г, другого 2 г. Заряды шариков равны по величине и противоположны по знаку. В данный момент расстояние между шариками 1 м, скорость более тяжелого шарика равна 1 м/с и направлена вдоль прямой, соединяющей центры шариков, по направлению* *от легкого шарика, скорость легкого шарика такая же по величине, но перпендикулярная указанной прямой. При какой величине зарядов шарики при дальнейшем движении побывают дважды на расстоянии 3 м друг от друга? Гравитационным взаимодействием шариков пренебречь.*

Заряды шариков не должны быть слишком велики — иначе шарики просто не разлетятся на расстояние $3a$ (где $a = 1$ м), заряды не должны быть и слишком малы — иначе шарики вообще разлетелись бы «на бесконечность» и не вернулись друг к другу. Итак, для того чтобы шарики побывали на указанном расстоянии дважды (а в этом случае — и многократно), их заряды должны лежать в определенном интервале. Найдем его «верхнюю» границу — соответствующую случаю, когда максимальное расстояние между шариками составит $3a$. Для этого воспользуемся законом сохранения энергии — кинетическая энергия шариков уменьшается при разлете и на такую же величину возрастает энергия электростатического взаимодействия зарядов. Однако не вся кинетическая энергия системы перейдет в электрическую — центр масс продолжает двигаться с неизменной скоростью, а шарики кроме «разлета» могут вращаться вокруг центра масс.



Перейдем в систему, связанную с центром масс шариков. Ее скорость удобно представить как сумму двух составляющих — вдоль линии шариков (начальный момент!) с величиной $2v/3$ и перпендикулярно ей с величиной $v/3$.

На рисунке показаны скорости шариков в системе центра масс сразу после начала движения и на максимальном удалении $3a$ (масштаб на рисунке не соблюдается — второй отрезок должен быть в 3 раза длиннее). Во втором случае шарики уже не разлетаются и их скорости перпендикулярны соединяющей их линии. Легко видеть, что скорость v_1 тяжелого шарика во столько раз меньше скорости $v/3$, во сколько раз расстояние до центра масс для этого шарика больше начального, т.е. $v_1 = v/9$. Для легкого шарика эта скорость в два раза больше.

Запишем баланс энергий:

$$m\frac{4v^2}{9} + 2m\frac{v^2}{9} - m\frac{2v^2}{81} - 2m\frac{v^2}{2\cdot 81} = \frac{q_1^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{3a}\right).$$

Отсюда получаем

$$q_1 = v\sqrt{\frac{68\pi\varepsilon_0 ma}{18}} \approx 0{,}32 \text{ мкКл}.$$

Аналогично — для величины q_2, гарантирующей шарики от разлета на бесконечное расстояние. Но теперь можно не учитывать в энергии «вращательную» составляющую — при большом расстоянии между шариками она становится пренебрежимо малой, поэтому запишем

$$m\frac{4v^2}{9} + 2m\frac{v^2}{9} = \frac{q_2^2}{4\pi\varepsilon_0 a}, \text{ и } q_2 = v\sqrt{\frac{8\pi\varepsilon_0 ma}{3}} \approx 0{,}27 \text{ мкКл}.$$

Итак, при $q_1 \ge q \ge q_2$ шарики побывают дважды (и еще много раз) на расстоянии 3 м друг от друга.

З.Рафаилов

Ф1620. *Цепь на рисунке 1 содержит огромное количество звеньев, каждое из которых состоит из резистора и двух вольтметров. Все вольтметры в цепи одинаковые, сопротивления всех резисторов равны между собой. Цепь подключают к батарейке, при этом первые два вольтметра показывают напряжения 6 В и 4 В (догадайтесь сами — какой показывает меньше, а какой больше). Найдите показания второй пары вольтметров. Найдите также сумму показаний всех вольтметров.*

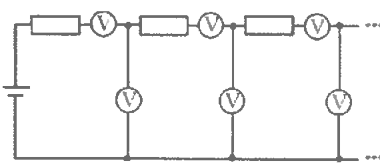


Рис.1

Обозначим сопротивление всей бесконечной цепочки X. Сопротивление такой цепочки не должно измениться при добавлении или отбрасывании одного звена (резистор и два вольтметра). Следовательно, параллельно второму вольтметру включен резистор X (рис.2), и мы можем записать соотношения для упростившейся схемы (вспомним показания вольтметров!):

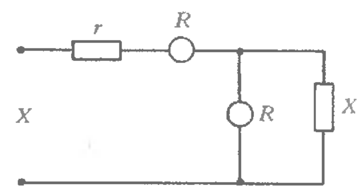


Рис.2

$$\frac{RX}{R+X} = \frac{4R}{6}.$$

Отсюда $X = 2R$. Теперь легко найти величину r:

$$r + R + \frac{2R}{3} = X = 2R, \quad r = \frac{R}{3}.$$

Для первого звена напряжение на резисторе r получается 2 В, а напряжение батарейки составляет 12 В. Второе звено цепи (и бесконечная цепочка начиная со второго звена) подключено к напряжению 4 В, показания вольтметров этого звена в 3 раза меньше, чем первого звена, и т. д. Тогда понятно, что показания вольтметров второго звена составят 2 В и 4/3 В. Легко найти и сумму показаний вольтметров в этой цепи — первое звено дает 10 В, второе в 3 раза меньше и т.д. Пользуясь формулой для нахождения суммы бесконечной геометрической прогрессии, получим $S = 10/(1-1/3)$ В $= 15$ В.

Р.Александров

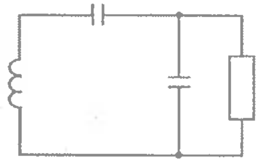
Ф1621. *Катушка индуктивности состоит из нескольких одинаковых витков очень тонкого провода, намотанных вплотную друг к другу. На оси катушки на некотором расстоянии от нее расположили еще один такой же замкнутый виток так, что ось витка совпадает с осью катушки. Катушку подключили к выходу источника переменного тока, при этом амплитуда тока отдельно расположенного витка оказалась в $k = 3$ раза меньше амплитуды тока катушки. Во сколько раз отличаются величины индуктивности катушки, измеренные без дополнительного витка и вместе с ним? Сопротивление провода, из которого сделаны витки, пренебрежимо мало. Считайте, что индуктивность катушки без дополнительного витка в 30 раз больше индуктивности одного витка.*

Обозначим число витков катушки N, тогда при токе I она создаст около одиночного витка поле B, пропорциональное этому току и числу витков катушки: $B = \alpha NI$. Поток, который пронизывает при этом одиночный виток площадью S, равен $\Phi_{21} = \alpha NIS$. Из условия задачи следует, что этот поток в k раз меньше «своего» потока — создаваемого при токе I в каждом из витков самой катушки. Если индуктивность одного витка L_0, то можно записать: $\alpha NIS = L_0 I/k$. Поле одиночного витка с током I/k создаст магнитный поток через все витки катушки, равный $\Phi_{12} = \alpha(I/k)SN$. Этот поток вычитается из собственного потока катушки (правило Ленца) и уменьшает измеренную величину индуктивности катушки. Отсюда

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{L_1 I}{L_1 I - L_0 I/k^2} = \frac{1}{1 - L_0/\left(L_1 k^2\right)} = \frac{1}{1 - 1/\left(30k^2\right)} \approx \frac{270}{269} \approx 1{,}004.$$

А.Зильберман

Ф1622. *Колебательный контур состоит из катушки индуктивности и двух одинаковых конденсаторов, включенных между собой последовательно. Катушка и конденсаторы практически идеальные, но из-за наличия малого сопротивления соединяющих проводов $r = 0{,}1$ Ом колебания медленно затухают: за $n_1 = 10$ периодов колебаний амплитуда тока через катушку уменьшается на $\alpha = 1\%$. Параллельно одному из конденсаторов подключают резистор (см. рисунок), и теперь амплитуда колебаний уменьшается на тот же 1% за $n_2 = 2$ полных периода колебаний. Найдите сопротивление этого резистора.*



Рассмотрим вначале случай, когда подключение резистора изменяет частоту контура незначительно, т.е. когда подключен большой резистор. В этом случае в нем за период должно рассеиваться тепла в 4 раза больше, чем в последовательном резисторе сопротивлением r (общая мощность потерь возросла в 5 раз). Затухание и в этом случае можно считать малым, поэтому действующее (эффективное) значение силы тока (и напряжения) будем брать как для синусоидального. Тогда для случая только последовательного резистора (с учетом того, что 1% по амплитуде это 2% по энергии) получим

$$r\left(I_0^2/2\right)\cdot 10T = \frac{0{,}02 L I_0^2}{2}.$$

Период для нашего контура $T = 2\pi\sqrt{LC/2}$. Для параллельного резистора (напряжение на нем — половина напряжения на катушке) запишем

$$\frac{\left(U_0/2\right)^2}{2R_1} = \frac{4rI_0^2}{2};$$

в нашем контуре с последовательно соединенными конденсаторами —

$$\frac{CU_0^2}{4} = \frac{LI_0^2}{2}.$$

Окончательно получим

$$R_1 = \frac{10^6\pi^2 r}{16} \approx 6\cdot 10^4 \text{ Ом}.$$

Есть и другая возможность удовлетворить формально условию задачи — взять маленький резистор, «закоротив» один из конденсаторов и увеличив этим период колебаний в контуре. При этом

$$r\left(I_0^2/2\right)\cdot 10T = \left(r + R_2\right)\left(I_0^2/2\right)\cdot 2\cdot 1{,}41T,$$

$$R_2 = 2{,}5r = 0{,}25 \text{ Ом}.$$

А.Контуров

УСРЕДНЕНИЕ ПО ОКРУЖНОСТИ

Одиннадцатиклассники на Московской олимпиаде (точнее, на отборочном туре на российскую олимпиаду) решали такую задачу:

М1596. *Про непрерывную функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[0;\ 5]$, известно, что $\int_0^5 f(x)dx = 0$. Докажите, что на этом отрезке найдутся такие числа a и b, что $\int_a^b f(x)dx = 0$ и при этом $b - a = 2$ или 3.*

Решение основано на двух идеях:

• среднее значение функции заключено между максимальным и минимальным значениями (нематематики формулируют это так: «если тебе слишком хорошо, то кому-то плохо»);

• всякая определенная на отрезке непрерывная функция, среди значений которой есть и положительное,

Рис. 1

и отрицательное, обращается в нуль в некоторой точке этого отрезка (теорема о промежуточном значении).

Обе идеи очень важны и часто используются в математическом анализе. Но начнем мы издалека — с задачи, предлагавшейся пятиклассникам на окружном туре Московской олимпиады:

Задача 1. *По кругу лежат 5 монет гербом вниз. Разрешается переворачивать одновременно три монеты, лежащие подряд. Как таким способом положить все монеты гербом вверх?*

Не видите связи? Ничего, скоро все прояснится. А пока переворачивайте монеты. Перевернули? Если не сделали лишних движений, то каждая монета участвовала в трех операциях (рис.1). Продолжим подготовку к решению M1596:

Задача 2. *По кругу записаны 20 чисел. Сумма любых трех последовательно стоящих чисел положительна. Может ли сумма всех 20 чисел быть отрицательной?*

Решение. Сложим все 20 сумм, образованных тройками подряд стоящих чисел. Разделив полученную (положительную!) сумму на 3, получим в точности сумму всех 20 записанных по кругу чисел.

Завершит подготовку задача, в которой уже легче угадать некоторые черты M1596:

Задача 3. *В ряд стоят 30 сапог, 15 из которых левые, 15 – правые. Докажите, что среди некоторых десяти подряд стоящих сапог левых и правых поровну.*

Решение. Рассмотрим первые 10 сапог. Если среди них левых и правых поровну, то больше ничего делать не надо. Если не поровну, пусть, для определенности, правых сапог больше.

Для каждых 10 подряд стоящих сапог рассмотрим разность между числом правых и левых сапог. Мы предположили, что для первых 10 сапог эта разность положительна. Разбив ряд из 30 сапог на три отрезка по

Рис.2

10 сапог в каждом, видим, что все три соответствующие разности не могут быть положительны (иначе всего правых сапог было бы больше, чем левых). Значит, хотя бы одна из разностей неположительна.

Задумаемся, как меняется разность при «сдвиге на один сапог» (рис.2). Поскольку добавляется один сапог и исчезает тоже один, разность или не меняется, или меняется на 2.

Осталось применить нечто вроде теоремы о промежуточном значении.

Упражнение 1. Сделайте это, заметив предварительно, что все рассматриваемые разности четны.

Упражнение 2. Можно ли по кругу расставить 7 целых чисел так, чтобы сумма любых трех соседних равнялась 19?

Упражнение 3. Даны 100 чисел. Известно, что произведение любых 17 из них больше 1. Докажите, что произведение всех 100 чисел больше 1.

Решение задачи M1596

Первый способ. Если бы в олимпиаде участвовали не школьники, а студенты, то они, наверное, рассуждали бы следующим образом. «Согнем» отрезок в окружность длиной 5, склеив его концы. На окружности определим естественным образом функцию f, любым образом выбрав ее значение в «точке склейки» (например, взяв одно из значений функции в склеившихся концах — ведь значение интеграла не меняется при изменении значения функции в одной точке).

Пусть дуга длиной 2 скользит вдоль окружности. Тогда интеграл, вычисленный по этой дуге, непременно зависит от положения дуги. *Если величина интеграла все время одного и того же знака (например, положительна), то того же знака величина $\int_0^5 f(x)dx$, а она по условию равна 0.*

Если же эта величина меняет знак, то, по теореме о промежуточном значении, в какой-то момент она обратится в 0. При этом рассматриваемая дуга может содержать или не содержать «точку склейки». В первом случае перейдем к дополнению — длина дополнения как раз равна 3. Во втором случае и так все ясно.

Это решение не использует того, что 2 и 3 — целые числа. Следовательно, если на отрезке длиной l задана функция, интеграл от которой по всему отрезку равен нулю, то для любого числа a $(0 < a < l)$ на отрезке найдется отрезочек длиной a или $l - a$, интеграл по которому равен нулю.

Есть в этом решении один недостаток: выделенный курсивом факт очевиден для студента, но не вполне очевиден для школьника. Жюри олимпиады надеялось получить другое решение:

Второй способ. Изменим значение функции f в точке $x = 5$, чтобы оно стало равно ее значению в точке $x = 0$. Продолжим функцию на всю прямую, считая ее периодической с периодом 5. Пусть $F(x) = \int_0^t f(x)dx$. Функция F также имеет период 5 (поскольку $F(t+5) - F(t) = \int_t^{t+5} f(x)dx = 0$).

Докажем, что для некоторого t выполняется равенство $F(t) = F(t+2)$. Рассмотрим функцию $g(t) = F(t+2) - F(t)$. Заметим, что $F(10) = 0$ и $F(0) = 0$. Значит, сложив величины $g(8) = F(10) - F(8)$, $g(6)$, $g(4)$, $g(2)$ и $g(0)$, получим 0. Следовательно, эти пять чисел не могут быть все положительны или все отрицательны. Пусть $g(m)$ и $g(n)$ разного знака и $m < n$. По теореме о промежуточном значении, в некоторой точке t_0 отрезка $[m, n]$ функция g обратится в 0. Если $t_0 \le 3$, то $\int_{t_0}^{t_0+2} f(x)\,dx = 0$. Если же $3 < t_0 \le 5$, то $\int_{t_0-3}^{t_0} f(x)\,dx = F(t_0) - F(t_0 - 3) = F(t_0) - F(t_0 + 2) = 0$.

Ни один школьник это решение не придумал. Но многие (видимо, благодаря знакомству с задачами 1–3) решали задачу, разбивая отрезок на 5 единичных отрезочков и обозначая интегралы функции f по отрезкам $[0; 1]$, $[1; 2]$, $[2; 3]$, $[3; 4]$, $[4; 5]$ буквами p, q, r, s, t соответственно (заметьте: $p = F(1) - F(0)$, ..., $t = F(5) - F(4)$).

Третий способ. Если среди сумм $p + q + r$, $q + r + s$ и $r + s + t$, являющихся значениями интеграла по отрезкам длиной 3, есть числа разного знака, то, по теореме о промежуточном значении, найдется отрезок длиной 3, интеграл по которому равен нулю. Значит, можно считать, что суммы $p + q + r$, $q + r + s$ и $r + s + t$ положительны.

Тогда $s + t = -(p + q + r) < 0$. Опять ссылаясь на теорему о промежуточном значении, видим, что суммы $p + q$, $q + r$, $r + s$, равные интегралам по отрезкам длиной 2, можно считать отрицательными.

Упражнение 4. Доведите решение до конца.

Отличие отрезка от окружности, или Почему «2 или 3», а не просто 2?

Может ли так быть:
каждый день все хорошо,
а в целом плохо?

Опять начнем с дискретного варианта. В задаче 2 числа располагались по кругу.

Задача 4. *В ряд записаны 20 чисел. Сумма любых трех последовательно стоящих чисел положительна. Может ли сумма всех 20 чисел быть отрицательна?*

Решение. Может! Рассмотрим последовательность

$$a,\ b,\ c,\ a,\ b,\ c,\ a,\ b,\ c,\ \ldots,\ a,\ b.$$

Сумма любых трех подряд ее членов равна $a + b + c$; сумма всех 20 членов равна $7a + 7b + 6c$.

Упражнение 5. Завершите решение задачи 4, подобрав числа a, b, c так, чтобы выполнялись неравенства $a + b + c > 0$, $7a + 7b + 6c < 0$.

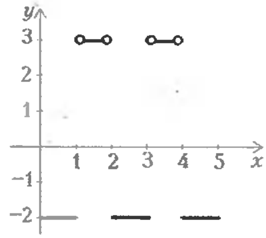


Рис.3

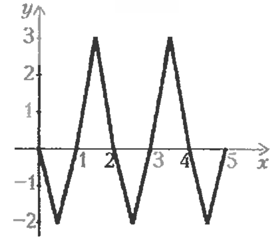


Рис.4

Упражнение 6. Бухгалтер каждый месяц подсчитывал доход и расход предприятия. Мог ли доход за любые 5 подряд идущих месяцев превышать расход, а за весь год, наоборот, оказаться меньше расхода?

Упражнение 7. Пешеход шел 3,5 часа, причем за каждый промежуток времени в один час он проходил ровно 5 км. Следует ли из этого, что его средняя скорость равна 5 км/ч?

От сумм вернемся к интегралам. Мы доказали, что для некоторого t выполняется равенство $F(t + 2) = F(t)$. Нельзя ли в условии М1596 вычеркнуть слова «или 3»?

Оказывается, нельзя. Подражая решению задачи 4, рассмотрим функцию, равную −2 при $x \in [0; 1] \cup [2; 3] \cup [4; 5]$ и равную 3 при $x \in (1; 2) \cup (3; 4)$ (рис.3). Ее интеграл по любому отрезку длиной 2 (содержащемуся в $[0;5]$) равен 1. Впрочем, в М1596 функция должна быть непрерывной.

Задача 5. *Придумайте непрерывную функцию, интеграл от которой по отрезку $[0; 5]$ равен нулю, а интегралы по всем содержащимся в $[0; 5]$ отрезкам длиной 2 положительны.*

Решение. График — на рисунке 4.

В заключение вспомним классическую задачу про функцию на отрезке, о которой рассказывалось в статье И.М.Яглома «О хордах непрерывных кривых» (см. «Квант» №4 за 1977 г.). Мы сформулируем ее так, чтобы была видна тесная связь с задачей М1596:

Пусть непрерывная функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[0; 1]$ и $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Для каких h можно утверждать, что интеграл функции f по некоторому отрезку длиной h равен 0?

В этой задаче замечательный ответ: h должно равняться одному из чисел $1/n$, где n натуральное. Докажите это (и постройте примеры, показывающие, что для других h ответ отрицателен).

В.Произволов, А.Спивак

ПОПРАВКА

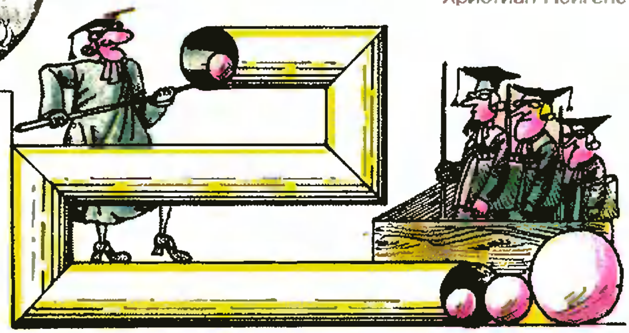
В условии задачи М1612 (см. «Квант» №5 за 1997 г.) допущена ошибка: числа расставляются в клетках таблицы 10×10, а не $m \times n$. Приносим извинения нашим читателям.

Я вывел заключение, что вопрос о силе удара представляется весьма темным, и никому из числа ранее занимавшихся им не удалось проникнуть в сущность этого предмета, полную мрака и далекую от обычных человеческих представлений.

Галилео Галилей

Если с покоящимся телом соударяется одинаковое с ним тело, то ударившееся тело приходит в состояние покоя, а покоящееся тело приходит в движение со скоростью ударившегося о него.

Христиан Гюйгенс



А ТАК ЛИ ХОРОШО ЗНАКОМЫ ВАМ

соударения?

Неудивительно, что изучение удара вызывало такие трудности у Галилея — он был основателем динамики лишь одного тела. Гюйгенс, скромно заявлявший, что только «подтверждал и обобщал» теории Галилея, продвинулся намного дальше, поскольку начал построение динамики уже нескольких тел. Внеся ясность в столь сложное явление (на нем потерпела крушение механика Декарта), Гюйгенс уточняет закон сохранения количества движения (импульса) и фактически устанавливает закон сохранения энергии. Открывается путь для дальнейших исследований удара, и на него впоследствии становятся такие ученые, как Мариотт, Юнг, Пуассон, Герц...

Приступая к исследованию этого даже не явления, а целой их совокупности, вам придется научиться различать удары упругие и неупругие, выявить связь с понятиями деформации и распространения волн, почувствовать различие между механическим соударением тел и взаимодействием атомов или элементарных частиц.

Все это нужно, если вы хотите разобраться, как происходит удар по мячу или гвоздю, как забивают сваи и куют детали, как совершаются соударения «наоборот» (взрывы и стрельба), как движутся молекулы газа и рассеиваются атомы при прохождении через вещество, как осуществляются ионизация атомов и взаимодействие световых квантов с электронами.

Что ж, будем надеяться, что ваше «столкновение» с этой обширнейшей темой не будет «абсолютно упругим» и галилеевская досада сменится гюйгенсовской ясностью.

Вопросы и задачи

1. Почему стальной шарик хорошо отскакивает от мраморной плиты и хуже — от асфальта?

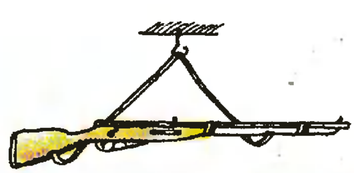
2. Отчего хрупкий предмет разбивается, если его роняют на жесткий пол, и остается целым, если он падает на мягкую подстилку?

3. Несколько человек могут сдвинуть с места автобус, но он не сдвигается при попадании противотанкового снаряда, пробивающего его навылет. Почему, если на автобус во втором случае действует бо́льшая сила, чем в первом?

4. В цирковом аттракционе атлету, лежащему на ковре, устанавливают на грудь наковальню и затем бьют по ней молотком. Опасны ли такие удары для атлета?

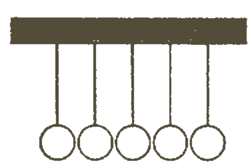
5. Один раз молотком ударили по куску стали — молоток отскочил, второй раз так же ударили по куску свинца — молоток отскочил меньше. Какому металлу было передано больше энергии?

6. В каком из двух случаев ружье стреляет дальше: когда оно неподвижно закреплено или когда оно подвешено?



7. Почему человек, держащий базуку (ручной гранатомет), не испытывает отдачи при стрельбе?

8. Пять одинаковых стальных шаров подвешены на одинаковых нитях так, что соседние шары касаются друг друга. Как будут вести себя шары,



если отвести в сторону и отпустить крайний правый шар? Отклонить одновременно два шара; три шара?

9. На гладкий клин, составляющий угол 45° с горизонтом, вертикально падает шарик. Какова будет траектория шарика после упругого удара о клин, если клин неподвижен?

10. Почему слабо надутый футбольный мяч трудно отбить на большое расстояние?

11. Опытный баскетболист, принимая сильно посланный мяч, расслабляет руки и слегка подается назад вместе с мячом. Зачем?

12. В чем принципиальное отличие реактивной силы тяги от силы тяги обычного двигателя?

13. Снаряд, вылетевший из орудия под некоторым углом к горизонту, в верхней точке траектории разрывается на два осколка равных масс. Первый осколок возвращается к исходной точке по прежней траектории. Где упадет второй осколок?

14. Скорости движения молекул газов при обычных условиях измеряются сотнями метров в секунду. Почему же диффузия газов происходит сравнительно медленно?

15. Отчего броуновское движение заметнее у мелких взвешенных частиц, чем у более крупных?

16. Почему при меньших плотностях воздуха электрический разряд в нем происходит при более низких напряжениях?

17. Каким образом атомы газа можно перевести в возбужденное состояние?

18. Почему быстрые нейтроны легко проходят через блок свинца, но задерживаются в таком же объеме парафина, воды или другого соединения, в состав которого входят атомы водорода?

Микроопыт

Возьмите маленький и большой резиновые мячи. Поставьте маленький мяч сверху на большой и одновременно отпустите их. Как поведут себя мячи после удара о пол. Почему?

Любопытно, что...

...в средние века крепости штурмовали с помощью тарана – бревна массой в несколько сот килограммов. Завоеватели, держа его на плечах, устремлялись к воротам крепости, затем резко останавливались и отпускали таран, который продолжал скользить по наплечным кожаным накладкам.

...еще до Гюйгенса чешский ученый Ян Марци при исследовании соударений подразделял тела на мягкие, хрупкие и твердые, а Декарт, различая тела твердые и мягкие, не проводил границы между телами упругими и неупругими.

...о разнообразии интересов и способностей Гюйгенса говорит не только изобретение им маятниковых часов, изготовление превосходного телескопа, открытие спутника и кольца Сатурна, но и защита им диссертации на степень доктора права. Незадолго до смерти Гюйгенс пишет одну из первых общедоступных книг по астрономии – «Космотеорос», русский перевод которой был издан по указанию Петра I.

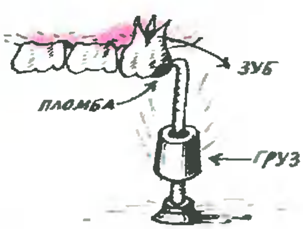
...исследовать проблему столкновений предложило в 1666 году Лондонское Королевское общество. В конкурсе приняли участие три исследователя, среди которых был и Гюйгенс. Гюйгенс дал свое решение в мемуаре «О движении тел под влиянием удара», законченном еще в 1656 году.

...первоначально Ньютон формулировал свой третий закон как рабочую гипотезу, необходимую для построения механики, и подверг ее тщательной проверке, проводя опыты по столкновению маятников.

...при столкновениях развиваются огромные силы, способные причинить большой ущерб. Например, если прыгать на твердую почву даже с высоты чуть более метра, но не сгибая ног, можно серьезно повредить позвоночник, поскольку он испытает слишком большую нагрузку.

...одна из фирм, выпускавшая пулеметы, так писала о них в рекламном проспекте: «Наш пулемет настолько эффективен, что способен держаться в воздухе под действием направленного вниз непрерывного потока выпускаемых пуль».

...молекула кислорода при нормальных условиях пробегает от соударения до соударения всего лишь двадцатитысячную долю миллиметра. Однако по сравнению с ее размерами это не так уж мало – все равно что бильярдный шар проходит расстояние порядка 10 метров.



...для удаления трудноизвлекаемых пломб зубные врачи пользовались остроумным устройством. Стержень закрепляли за пломбу, поднимали вверх груз и отпускали его, пока не происходило сильного удара об упор и резкого рывка.

...время соударения упругого стержня с недеформируемой преградой не зависит от скорости стержня, а определяется прохождением фронта волны упругой деформации по стержню туда и обратно. К случаю соударения упругих стержней разных длин модель абсолютно упругого удара, разработанная для материальных точек, оказывается совершенно не применимой.

...налетающая на неподвижное ядро атома α-частица не входит в непосредственное соприкосновение с ним, однако модель абсолютно упругого удара прекрасно описывает рассеяние таких частиц на ядрах.

...при комнатных температурах большинство столкновений атомов являются упругими; возбуждаться при столкновениях они начинают лишь при температурах в десятки тысяч кельвинов. А вот почти все столкновения между элементарными частицами носят упругий характер (поэтому часто считают, что они не имеют внутренней структуры).

...когда в 1932 году Дж.Чедвик исследовал свойства незаряженных частиц, излучаемых куском бериллия, непосредственно зафиксировать их он не мог. Однако, используя столкновения этих частиц с ядрами других элементов, он сумел определить все их параметры. Так был открыт нейтрон.

...при развале любого движущегося тела, будь то снаряд, ракета или атомное ядро, центр масс его осколков будет двигаться по той же траектории, что и до развала. Вот почему физики-ядерщики предпочитают изучать столкновения частиц в системе отсчета, связанной с их центром масс.

Что читать в «Кванте» о соударениях

(публикации последних лет)

1. *Калейдоскоп «Кванта»* – 1991, №6, с.40;
2. *«Нейтрон и ядерная энергия»* – 1992, №8, с.2;
3. *«Повесть о том, как столкнулись два шара»* – 1993, №9/10, с.13;
4. *«Христиан Гюйгенс»* – 1995, №4, с.2;
5. *«Соударение тел»* – 1995, №4, с.48;
6. *«Ядерная физика в задачах»* – 1995, №5, с.43;
7. *«Бильярд»* – 1995, №6, с.32;
8. *«Вокруг шарика»* – 1996, №2, с.7;
9. *«Задачи на центр масс»* – 1996, №2, с.43;
10. *«Под каким углом отскочит мяч?»* – 1997, №4, с.40;
11. *«Корпускулярные свойства света»* – 1997, №5, с.43;
12. *«Гравитационная машина»* – 1997, №6, с.24.

Материал подготовил А.Леонович

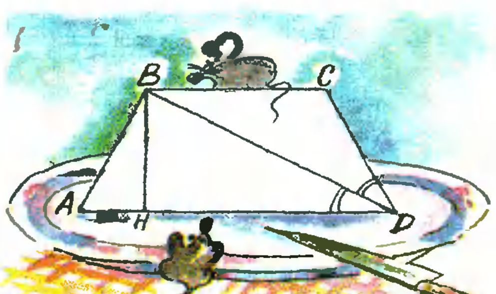
Задачи

1. Пешеход, велосипедист и мотоциклист едут по одной дороге в одинаковом направлении. В некоторый момент мотоциклист оказался в 100 метрах от велосипедиста и 400 метрах от пешехода. Через 6

минут мотоциклист обогнал велосипедиста и еще через 6 минут обогнал пешехода. Когда велосипедист обгонит пешехода, если все они движутся с постоянными скоростями?

А.Савин

2. В равнобочной трапеции $ABCD$ опущена высота BH и проведена диагональ BD. Диагональ оказалась биссектрисой угла CDA. Докажите, что угол HBD равен сумме углов ABH и CBD.



М.Панов

3. Шахматный король обошел по одному разу все поля шахматной доски и последним ходом вернулся в начальное положение. Докажите, что он при этом сделал четное число ходов по диагонали.

В.Произволов

4. Из 15 школ района отобрали 100 учащихся для участия в математической олимпиаде. Покажите, что хотя бы из двух школ было отобрано одинаковое количество участников (может быть ни одного).

Фольклор

5. У одной из фирм имеется несколько филиалов и несколько представительств. В каждом филиале установлено по 5 компьютеров, а в каждом представительстве — лишь по 2 компьютера, но зато имеется 7 сотовых телефонов. Общее количество компьютеров на столько же превосходит общее количество сотовых телефонов, на сколько процентов число филиалов больше числа представительств. Сколько у фирмы представительств?

И.Акулич

Иллюстрации Д.Гришуковой

Конкурс «Математика 6—8»

Этой публикацией заканчивается очередной конкурс «Математика 6—8» для учащихся 6—8 классов. Итоги этого конкурса будут подведены в пятом номере журнала. Победители — математические кружки и отдельные школьники — будут награждены призами журнала, а лучшие кружки будут, кроме того, приглашены в конце августа в летний математический лагерь. Следующий конкурс «Математика 6—8» начнется в четвертом номере журнала.

Решения задач из этого номера высылайте не позже 15 мая 1998 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»).

16. Во время поездки к морю Петя собрал на берегу несколько красивых камней. Однажды он разложил их в 6 коробок так, чтобы количества камней в коробках были попарно взаимно простыми. Потом он взял по одному камню из двух коробок и отложил их в отдельную кучку, дальше он снова взял по одному камню из двух коробок и положил в ту же кучку. Когда он в девятый раз проделал эту процедуру, во всех коробках осталось поровну камней.

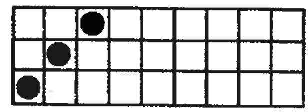
Сколько у Пети было камней и как они были разложены по коробкам?

И.Акулич

17. На окружности расположены 100 точек, являющихся вершинами правильного 100-угольника. Десять из этих точек окрасили в красный цвет, а еще десять — в синий. Докажите, что среди хорд, соединяющих точки красного цвета, найдется хорда, равная по длине одной из хорд, соединяющих точки синего цвета.

В.Произволов

18. На доске 3×9 стоят три шашки так, как показано на рисунке. Двое начинают играть в следующую игру:



каждый по очереди передвигает одну из шашек вправо по горизонтали. Проигрывает тот, кто не сможет сделать хода, т.е. при его ходе все шашки будут стоять у правого края. Докажите, что при правильной игре выигрывает начинающий.

Д.Изаак

19. Найдите какие-нибудь два десятизначных числа, наименьшее общее кратное которых равно квадрату их разности.

С.Токарев

20. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $AB = BC = CD$, а угол AOD равен полусумме углов BAD и CDA. Докажите, что $ABCD$ — ромб.

С.Токарев

Заключительный этап конкурса «Математика 6—8»

В «Кванте» №5 за 1997 год были подведены итоги заочного конкурса «Математика 6—8». 14 математических кружков, победивших в этом конкурсе, были приглашены на заключительный этап конкурса. Однако в силу разных организационных причин место и время проведения этого этапа дважды переносились, поэтому принять участие в заключительном туре смогли лишь 6 команд: из Астрахани, Иванова, Омска, Самары, Харькова и Ярославля.

К ним присоединились еще две команды: команда Рыбинска — хозяева — и команда Долгопрудного — хозяева следующего соревнования по очередному конкурсу «Математика 6—8».

Как следует из уже сказанного, очные соревнования проходили в Рыбинске. Место было выбрано очень удачно — в сосновом бору на берегу Рыбинского водохранилища. За день до заезда команд прекратились дожди, и все семь дней была чудесная погода.

Турнир прошел чрезвычайно успешно, чему во многом способствовала большая и напряженная работа оргкомитета. От имени журнала приносим благодарность Н.А.Брянкиной — зам. начальника Управления по делам образования и молодежи Рыбинска, И.Е.Васильевой — директору Центра дистанционного обучения школьников при Департаменте образования Ярославской области и доцентам ЯрГУ С.Г.Волченкову и А.Н.Морозову.

Традиционно (а это соревнование проводилось уже третий год) вначале была математическая олимпиада, в которой каждый из школьников выступал самостоятельно. Здесь проводилось лишь личное первенство. Приводим список призеров олимпиады.

ДИПЛОМЫ I СТЕПЕНИ ПОЛУЧИЛИ

Гайфуллин Александр (Жуковский, с.ш.10),
Карвонен Максим (Рыбинск, гимназия-лицей 2),
Подаксенов Василий (Омск, гимназия-лицей 2).

ДИПЛОМЫ II СТЕПЕНИ ПОЛУЧИЛИ

Берштейн Михаил (Харьков, ФМЛ 27),
Боровиков Кирилл (Ярославль, с.ш.69),
Бурцев Александр (Омск, ФМШ 64),
Волынин Денис (Рыбинск, с.ш. 30),
Мойкина Татьяна (Ярославль, гимназия 1),
Соколов Сергей (Рыбинск, с.ш.30),
Шмаков Сергей (Омск, ФМШ 64).

ДИПЛОМЫ III СТЕПЕНИ ПОЛУЧИЛИ

Бакшин Алексей (Иваново, с.ш. 30),
Жежерун Андрей (Самара, университет Наяновой),
Касьянов Дмитрий (Долгопрудный, с.ш. 5),
Ляшенко Егор (Омск, ФМШ 64),
Моисеев Игорь (Иваново, школа-лицей «Гармония»),
Овчинников Андрей (Самара, университет Наяновой),
Полякова Людмила (Харьков, ФМЛ 27),
Сербин Дмитрий (Омск, ФМШ 64),
Скрицкий Герман (Самара, университет Наяновой),
Ульянов Федор (Иваново, школа-лицей 33).

Остальные дни соревнований были заняты математическими боями между командами городов. Правда, здесь были некоторые вариации. Команда Харькова приехала в неполном составе, поэтому ее дополнили двумя школьниками из Иванова, команда которого была больше стандартного состава в 6 человек. Объединенная команда получила название ХарькИв, что соответствует украинскому названию Харькова – Харків. В команду Долгопрудного был включен школьник из Жуковского Московской области, победитель заочного конкурса в личном зачете Саша Гайфуллин.

Общий уровень участников оказался очень высоким, в чем несомненная заслуга их наставников, таких как Г.П.Кукин, Н.И.Храмова, А.С.Штерн, В.А.Бормотова, В.Л.Дольников, А.Н.Морозов и др.

Победителями турнира математических боев оказались сразу две команды: Омска и Рыбинска. Финальный бой между этими командами закончился со счетом 48:48, т.е. обе команды решили все предложенные им задачи. С точно таким же результатом закончилась и их встреча в предварительном матбою отборочного турнира. «Бронзу» разделили Иваново и ХарькИв. Не повезло сильной команде Самары, которую жребий поставил в одну группу с обоими победителями — командами Омска и Рыбинска — и тем самым лишил возможности попасть в полуфинал.

Уже стало традиционным, что задачи на соревнованиях этого конкурса глубоки по содержанию и интересны. В этом заслуга жюри, возглавлявшегося доцентом МФТИ А.П.Савиным. Предлагаем читателям несколько задач этих соревнований. Задачи 1–7 были включены в задание олимпиады, а задачи 8–14 — в задания математических боев.

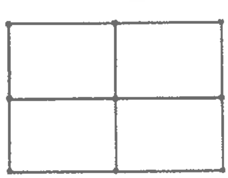
1. На доске в ряд выписаны сто семерок. Можно ли между некоторыми из них поставить знаки «+» или «−» так, чтобы значение полученного выражения равнялось 1997?

2. Можно ли все натуральные числа от 1 до 9 записать в клетки таблицы 3×3 так, чтобы сумма чисел в любых двух соседних (по вертикали или горизонтали) клетках была простым числом?

3. Докажите, что любой выпуклый четырехугольник можно разрезать на четыре четырехугольника, каждый из которых является параллелограммом или трапецией.

4. На первой встрече делегаций Земли и Марса выяснилось, что ноги у марсианина в точности такие же, как и у человека, а вот количества рук и пальцев на руках другие. Хотя марсиан было на шесть больше, чем землян, общее число пальцев (на руках и на ногах) у марсиан оказалось на один меньше. Сколько всего участников было на встрече?

5. Нарисуйте замкнутую ломаную без самопересечений с наименьшим возможным числом звеньев, пересекающую каждый из 12 отрезков (см. рисунок) и не проходящую через их концы.



6. Три гонщика ездят по велотреку в одном направлении с разными постоянными скоростями. Известно, что для любых двух гонщиков на велотреке имеется ровно k точек, в которых один обгоняет другого. Докажите, что число k нечетно.

7. Имеется $n\ge2$ кошельков, по 20 монет в каждом. Все монеты по виду одинаковы, однако в одном из кошельков они фальшивые, весящие на 1 г меньше настоящих, и еще в одном — фальшивые, весящие на 1 г больше настоящих. При каких n за одно взвешивание на двухчашечных весах со стрелкой можно определить, в каких кошельках какие монеты?

8. 10 монет, среди которых есть как настоящие, весящие по 10 г, так и фальшивые, весящие по 9 г, выложены в ряд. Известно, что каждая настоящая монета лежит левее любой фальшивой монеты. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить все настоящие монеты?

9. Придумайте три треугольника, из которых можно (без наложений) составить и треугольник, и выпуклый четырехугольник, и выпуклый пятиугольник. (При составлении каждой из этих фигур должны использоваться все три треугольника.)

10. Последовательность чисел определена следующим образом: $a_1 = 19$, $a_2 = 97$, $a_{n+2} = (a_{n+1}+1)/a_n$ для любого натурального n. Найдите a_{1997}.

11. Точку пересечения графиков функций $y = ax + b$ и $y = bx + a$, где $a \ne b$, отметили красным цветом, а точки пересечения каждого из них с осью ординат – синим. После этого систему координат и сами графики стерли, оставив только три отмеченные точки (числа a и b также неизвестны). Восстановите оси координат.

12. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1, а на отрезках C_1B, A_1C и B_1A – соответственно точки C_2, A_2 и B_2 так, что отрезки C_1A_2, A_1B_2 и B_1C_2 имеют общую точку и параллельны сторонам треугольника ABC. Докажите, что площади треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

13. На доске записали 16 трехзначных чисел, дающих все различные остатки при делении на 16. Какое наименьшее количество различных цифр могло быть использовано?

14. В квадрате площадью 100 закрашен квадратик площадью 1, стороны которого параллельны сторонам большого квадрата. За одну пробу про любой многоугольник можно узнать, какая доля его площади закрашена. Можно ли за две пробы наверняка определить местоположение закрашенного квадратика?

Авторы задач: Р.Женодаров (1, 11), С.Волченков (2, 5, 7), В.Произволов (3, 12), И.Акулич (4), С.Токарев (6, 8, 14), О.Крижановский (9), А.Савин (10), С.Конягин (13).

Публикацию подготовили
А.Савин, С.Токарев

Трудный день

А.САВИН

Корреспондент молодежной газеты «Поросль» Степа Мошкин шел по широкой просеке в лесу, любуясь разноцветьем трав и зеленью деревьев, как вдруг за своей спиной он услышал странный противный звон. Степа оглянулся, и тут яркие лучи чуть не ослепили его. «НЛО», — догадался Степа и бросился бежать, но звон и яркий свет преследовали его. Нога зацепилась за корягу: «Мама-а-а...» — закричал Степа, падая на землю... и проснулся.

На столе дозвякивал будильник, а в глаза били лучи утреннего солнца. Степа вытащил ногу, застрявшую между спинкой кровати и стеной, сделал глубокий вдох и, встав с кровати, начал с приседаний свою утреннюю гимнастику. День обещал быть напряженным: сначала побывать на городских соревнованиях по кроссу, затем подготовить репортаж об объединительном собрании нескольких молодежных организаций, а оттуда — на конкурс бальных танцев. Закончив приседать и прыгать, Степа совершил обряд утреннего умывания, а затем молниеносно приготовил себе яичницу и кофе — нужно было спешить, чтобы успеть к финишу кросса.

Но только он поднес вилку с куском яичницы ко рту, как раздался телефонный звонок. Услышав звонкое «Алло!», Степа тяжело вздохнул: звонила Юленька — ответственный секретарь редакции, миленькая девушка, единственным недостатком которой было многословие. Юля могла часами разговаривать по телефону, причем эти разговоры никогда не давали конструктивных результатов. При этом Степа лишь изредка мог вставить «Да» или «Конечно». Прервать Юлины излияния он не решался. На это было две причины: как-никак она его начальство, а кроме того, Юля ему очень нравилась и он строил относительно нее далеко идущие планы.

Лишь когда Юля перешла к текущим делам, Степа опомнился и крикнув: «Пока, убегаю на кросс!» — положил трубку, поспешно собрался и помчался на автобусную остановку. Автобуса, как всегда, пришлось ждать

довольно долго и, подъезжая к стадиону, Степа увидел уже расходящихся участников кросса и зрителей.

Надеясь на чудо, Степа вбежал на стадион. О радость, около пьедестала почета он увидел группу спортсменов с цветами в руках. Среди них Степа узнал своего школьного друга Бориса Царева. Тот, завидев бегущего к ним Степу, начал о чем-то шептаться с остальными спортсменами.

— Поздравляю победителей! — крикнул Степа. — Кому повезло стать первым?

— Не торопись, — прервал его Борис, — включай свой «Репортер» и записывай. Мы дадим по этому поводу коллективное интервью.

Сознавая, что это его последний шанс, Степа послушно включил свой диктофон.

— Сережа Казаков занял второе место, а Коля Кузичкин — третье, — продиктовал Борис в микрофон.

— Борис Царев занял третье место, а Петя Гусятников — пятое, — отчеканил, нагнувшись к микрофону, высокий Сережа Казаков.

— Первое место занял Петя Гусятников, второе — Борис Царев, — чуть заикаясь выдавил из себя Ваня Романюк.

— Сережа Казаков занял второе место, а Ваня Романюк — четвертое, — сказал Коля Кузичкин.

— Коля Кузичкин занял первое место, а Ваня Романюк — четвертое, — улыбаясь произнес Петя Гусятников.

— Но вы же все врете! — не выдержал Степа.

— Да, — ответил Борис, — за то, что ты опоздал, каждый из нас один раз соврал, но один раз сказал правду. Попробуй-ка разобраться, а не сможешь — позвони мне.

Тут вся компания сорвалась с места и помчалась к выходу, размахивая спортивными сумками и яркими букетами цветов. Степе ничего не оставалось делать, как закрыть свой магнитофон и отправиться на очередное редакционное задание.

Когда Степа добрался до Дома Культуры «Вперед», там уже вовсю шли дебаты. Объединительная конференция молодежных групп «Зеленый фронт», «Эко», «Красный патруль» и «Искатели истины» близилась к завершению. Уже удалось согласовать программу будущей организации, ее структуру, выбрать руководящие органы. Осталось утвердить название.

К моменту прихода Степы было отвергнуто название «Зэки», состоящее из первых букв названий объединяющихся групп. Остались два варианта: «Зеленый мыслитель» и «Мыслящий эколог».

Пока делегаты конференции с трибуны аргументировали свой выбор, Степа выяснил, что все делегаты от «Красного патруля» проголосуют так же, как их вожак Владислав Сальницкий, а в остальных делегациях единства нет. Среди делегатов «Зеленого фронта» столько же хотят голосовать за первое название, сколько делегатов из «Эко» за второе. Среди приверженцев второго названия треть составляют делегаты «Искателей истины». Степа также выяснил, что на конференции присуствует поровну делегатов от всех групп. Поразмыслив, он «вычислил» название, которое будет принято, и помчался на конкурс бальных танцев, который проходил на втором этаже этого же Дома Культуры.

В этот день проходили командные соревнования. Степа успел посмотреть почти половину соревнования, однако, когда объявили победителей — студенческий коллектив «Терпсихора», Степа погрустнел — студенты выступали одними из первых. Степа расстроился еще больше, увидев в команде «Терпсихора» своего друга Бориса Царева, неистощимого на розыгрыши. Он почувствовал, что снова станет мишенью для остроумия Бориса. Так оно и оказалось.

Когда Степа, поздравив студентов с победой, поинтересовался, кто с кем танцевал, то вместо прямого ответа каждый из них, представившись, сказал еще несколько слов. Вот что записал старенький Степин диктофон.

— Я — Светлана. Каждая девушка моложе своего партнера на три года.

— А я — Игорь. Нам всем вместе 115 лет.

— Меня зовут Юля. Мне вместе с Игорем 36 лет.

— Я — Антон. Мне вместе с Юлей 40 лет.

— Я — Борис. Самая молодая среди нас Ира.

— Ира — это я. Приятно познакомиться.

Степа растерянно посмотрел на улыбающегося Бориса и спросил:

— А на этот раз не было вранья?

— Успокойся, — ответил Борис, — на сей раз все говорили истинную правду. Теперь шевели извилиной.

— Ну и денек выдался, — вздохнул Степа.

— Естественно, — хмыкнул Борис, ведь сегодня понедельник и к тому же 13 число. А ты знаешь, сколько таких дней может быть в году?

— Это нужно подсчитать, — ответил Степа.

— Посчитай, посчитай, если еще не разучился в своей редакции, — съязвил Борис.

Вечером Степа начал готовить материалы в очередной номер газеты, и тут пришлось разбираться, кто какое место занял на соревнованиях по кроссу, какое название получила новая молодежная организация, кто с кем танцует в коллективе «Терпсихора», а заодно, сколько раз в году понедельник приходится на 13 число.

Физика 9—11

Публикуемая ниже заметка «Рыцарь над пропастью, или Немного о законах сохранения» предназначена девятиклассникам, заметка «Конденсатор в коробке и потенциальность кулоновского поля» — десятиклассникам, «Интерференция на островах Синего Мыса» — одиннадцатиклассникам.

Рыцарь над пропастью, или Немного о законах сохранения

А.СТАСЕНКО

Жил на свете рыцарь бедный,
Молчаливый и простой,
С виду сумрачный и бледный,
Духом смелый и прямой.

А.С.Пушкин

И ВОТ ОДНАЖДЫ, надев тяжелые боевые доспехи, отправился этот Рыцарь освобождать очередной раз похищенную Принцессу. Вдруг узкая горная тропинка прервалась пропастью, над которой в самой середине висела часть «моста» на нерастяжимых нитях (рис.1). Точнее, это была платформа, до которой ни дотянуться, ни допрыгнуть, да к тому же еще и покрытая тонкой коркой скользкого льда (высокогорье!).

В крайнем огорчении схватил Рыцарь лежавший на тропе камень массой m и швырнул в мост. Горное эхо двадцать пять раз повторило звук абсолютно упругого удара, а камень низринулся в пропасть. Но — о чудо! — мост начал тихонько качаться. И тут Рыцарь сообразил, что же произошло.

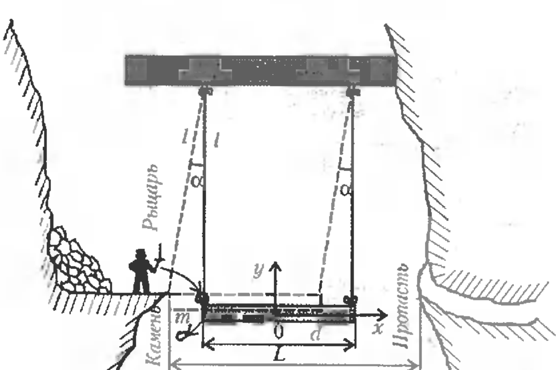


Рис. 1

При упругом ударе камня о торец тяжелой платформы и последующем отскоке горизонтальная составляющая импульса камня изменилась на $\Delta p = -2mv_x$ (рис.2). Значит, такое же приращение импульса, но противоположное по знаку, получил и мост:

$$\Delta P = 2mv_x.$$

При этом Рыцарь учел для простоты рассуждений — ведь он торопился, — что масса платформы много больше массы камня; а у кого есть время, тот может посчитать точнее, учитывая, что камень отражается от уже начавшей двигаться платформы. Итак, после первого броска платформа получила приращение скорости

$$\Delta V = \frac{\Delta P}{M}$$

и стала потихоньку качаться почти без затухания.

Рыцарь решил изобразить на пыльной тропинке этот процесс. Он нарисовал плоскую систему координат скорость — смещение (V, x). (Позднее эту плоскость назвали *фазовой*.) До первого удара платформа находилась в начале этой системы координат, в точке 0 (рис.3). В момент удара она получила приращение скорости ΔV (см. вертикальную стрелку и точку A на рисунке *а*), значит, ей была сообщена начальная кинетическая энергия. И платфор-

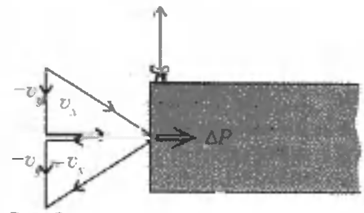


Рис. 2

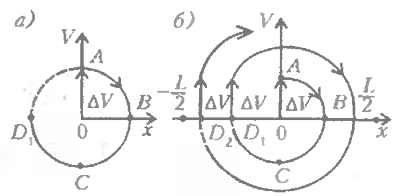


Рис. 3

ма начала двигаться в сторону положительных значений x. Но поскольку тросы, на которых подвешена платформа, нерастяжимы, центр масс платформы движется по окружности и, следовательно, поднимается в поле тяготения. При этом кинетическая энергия переходит в потенциальную, так что в точке B скорость становится равной нулю при максимальном отклонении от положения равновесия. После этого платформа начинает двигаться в сторону Рыцаря, достигая в точке C максимальной скорости, и на мгновение останавливается в точке D_1. Если нет затухания, этот процесс повторяется вечно.

Из рисунка Рыцарю стало ясно, что имеет смысл в точке D_1 бросить еще один камень. При этом, совершив еще одно качание, платформа окажется в точке D_2 (см. рисунок *б*) — и так будет продолжаться, пока точка D_N не совпадет с координатой $x = -L/2$. И Рыцарь без колебаний решил оценить, сколько бросков нужно сделать, чтобы край скользкой платформы подошел вплотную к краю пропасти и можно было бы осторожно ступить на платформу.

Он взял свой пыльный щит и написал на нем закон сохранения энергии:

$$M\frac{V_{\max}^2}{2} = Mgl\left(1-\cos\alpha_{\max}\right),$$

где $V_{\max}$ — максимальная скорость платформы (очевидно, когда она в своем качании проходит нижнюю точку), а $\alpha_{\max}$ — максимальный угол отклонения, который, как легко видеть из рисунка 1, находится из прямоугольного треугольника:

$$\cos\alpha_{\max} = \frac{L-d}{2l}.$$

При этом угле скорость платформы равна нулю: вся кинетическая энергия перешла в потенциальную. Считая, что при каждом ударе камня о платформу (когда она останавливается на мгновение в точке, ближайшей к Рыцарю) последняя получает один и тот же импульс, можно найти требуемое число ударов из условия

$$V_{\max} = N\Delta V = N\frac{\Delta P}{M} = N\frac{2mv_x}{M}.$$

Подставив все это в закон сохранения энергии, Рыцарь получил

$$\frac{1}{2}\left(\frac{N\cdot 2mv_x}{M}\right)^2 = gl\left(1-\frac{L-d}{2l}\right),$$

откуда

$$N = \frac{M}{2mv_x}\sqrt{g\left(2l-L+d\right)}.$$

Теперь нужно сделать численные оценки. Подставив в формулу массу платформы $M = 10^3$ кг, массу камня $m = 1$ кг, горизонтальную составляющую скорости камня в момент удара $v_x = 10$ м/с, ширину пропасти $L = 50$ м, длину платформы $d = 30$ м, длину подвеса $l = 50$ м, он нашел число бросаний камня:

$$N = 1{,}4\cdot 10^3.$$

А сколько времени Рыцарю придется трудиться? Число колебаний платформы известно, осталось узнать их период. Он зависит, конечно, от длины маятника l (м) и от ускорения поля тяготения g $\left(\text{м/с}^2\right)$. Из этих двух величин можно составить единственную формулу, дающую нужную нам размерность периода (с):

$$\sqrt{\frac{l\,(\text{м})}{g\left(\text{м/с}^2\right)}} \sim T\ (\text{с}).$$

И Рыцарь вспомнил также, что еще в XV веке дедушка говорил ему: «Помни, что когда речь идет о колебаниях, то, я не знаю почему, всегда появляется 2π».

Итак, период колебаний платформы равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{50\ \text{м}}{10\ \text{м/с}^2}} = 14\ \text{с}.$$

Поскольку T есть одновременно и время между ударами камней, то стало ясно, что трудиться придется не менее чем

$$t = 14\cdot 1{,}4\cdot 10^3\ \text{с} \approx 2\cdot 10^4\ \text{с} \approx 5{,}5\ \text{ч}.$$

(Хорошо еще, что можно пренебречь затуханием!) Труд не малый, но впереди — Принцесса. И Рыцарь взялся за дело.

Конденсатор в коробке и потенциальность кулоновского поля

Е.РОМИШЕВСКИЙ

— Как вы считаете, кто задает больше всех вопросов?
— Наверное, ребенок?
— Нет, это физик! Да к тому же еще и сам старается на них ответить.

Интервью с прохожим

Рассмотрим некоторые интересные физические примеры и опыты, связанные с постоянным электрическим полем. Возьмем плоский конденсатор, т.е. две параллельные тонкие металлические пластины площадью S, расстояние между которыми d существенно меньше размеров этих пластин. Как можно зарядить такой конденсатор? Какой минимальный заряд для этого потребуется?

Поместим, например, на левую пластину положительный заряд $+Q_0$, а на правую — такой же по величине отрицательный заряд $-Q_0$. Эти заряды почти равномерно распределятся по внутренним сторонам пластин, с поверхностной плотностью $\sigma_0 = Q_0/S$, и создадут между пластинами однородное электрическое поле напряженностью

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 S}.$$

В результате между пластинами возникнет разность потенциалов

$$U_0 = E_0 d = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}d = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 S/d} = \frac{Q_0}{C},$$

где $C = \varepsilon_0 S/d$ — емкость плоского конденсатора.

Конденсатор — это хранитель зарядов. И емкость конденсатора определяет, насколько высока разность потенциалов между его обкладками (пластинами), когда мы храним в нем заряд, обуславливающий эту разность потенциалов. Если емкость велика, то даже при большом заряде разность потенциалов мала, и мы можем «загрузить» еще больший заряд, не боясь, что при больших значениях разности потенциалов, а значит, и напряженности поля возникнет пробой и конденсатор потеряет свой заряд и свою энергию.

Мы можем зарядить конденсатор по-другому, поместив положительный заряд $+Q_0$, например, на левую (положительную) пластину, а правую просто заземлить. При этом отрицательный заряд $-Q_0$ сам придет из земли, и между пластинами возникнет та же разность потенциалов U_0. Можно подключить к незаряженным пластинам батарею с электродвижущей силой $\mathcal{E}_б = U_0$, тогда через батарею пройдет заряд Q_0 и конденсатор зарядится. Мы можем сказать, что для зарядки конденсатора емкостью $C = \varepsilon_0 S/d$ до разности потенциалов U_0 ему достаточно сообщить заряд Q_0.

Разместим теперь слева и справа от нашего заряженного плоского конденсатора — пластины 2 и 3 — еще две протяженные параллельные пластины

1 и *4* тоже на расстояниях d от пластин конденсатора (рис.1) и соединим их проводником. Иными словами, как бы поместим наш конденсатор в металлическую коробку. Спрашивается, какой

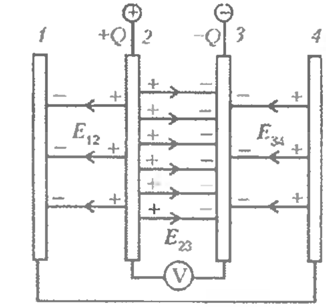


Рис. 1

теперь будет картина распределения зарядов на пластинах и электрических полей между пластинами и изменится ли емкость конденсатора с выводами от пластин *2* и *3*, если раньше она была равна $C = \varepsilon_0 S/d$?

Сначала подсоединим вольтметр, конечно идеальный (это значит, что его омическое сопротивление бесконечно большое, а электроемкость бесконечно малая), к «свободным» пластинам *2* и *3*, т.е. без пластин *1* и *4*. Вольтметр, разумеется, покажет разность потенциалов U_0. Потом, не меняя заряд Q_0, подсоединим вольтметр к пластинам *2* и *3*, находящимся внутри соединенных пластин *1* и *4*. Может показаться удивительным, что, хотя пластины *1* и *4* и не заряжены, показание вольтметра изменится, причем значительно. Вольтметр покажет теперь разность потенциалов $U = 2U_0/3$. Это значит, что емкость такого сложного конденсатора изменилась и стала равной

$$C^* = \frac{Q_0}{2U_0/3} = \frac{3}{2}\frac{Q_0}{U_0} = \frac{3}{2}C,$$

т.е. увеличилась в $3/2$ раза. Итак, сажая на пластины *2* и *3* заряды $+Q_0$ и $-Q_0$, мы в последнем случае (в присутствии пластин *1* и *4*) получили разность потенциалов в $2/3$ раза меньше, чем для свободного конденсатора с теми же пластинами. Это — экспериментальный факт, и мы его теперь должны осмыслить.

Если разность потенциалов между пластинами *2* и *3* равна

$$U = Ed = \frac{2}{3}U_0 = \frac{2}{3}E_0 d = \frac{2}{3}\frac{Q_0 d}{S\varepsilon_0} = \frac{2}{3}\frac{\sigma_0 d}{\varepsilon_0},$$

то это значит, что на правой стороне пластины *2* находится заряд $+2Q_0/3$, а на левой стороне пластины *3* — заряд $-2Q_0/3$. А куда же делся заряд $+Q_0/3$ пластины *2*? Он может быть только на левой стороне пластины *2*! Но тогда на правой стороне пластины *1* должен находиться соответствующий отрицательный заряд $-Q_0/3$. Опять вопрос: а откуда взялся этот заряд на первой пластине? Ответ: только если он перетек с пластины *4*, так что на ее левой стороне появился заряд $+Q_0/3$. В результате между пластинами *1* и *2*, а также *3* и *4* возникли одинаковые электрические поля: $\vec{E}_{12} = \vec{E}_{34}$, которые направлены противоположно полю $\vec{E}_{23}$ и в два раза меньше его по величине.

Анализируя экспериментальный факт (результаты показаний вольтметра в рассмотренных случаях), мы пришли к очень важному заключению, что если с некоторым пробным зарядом q пройти по замкнутому контуру от пластины *1* к пластине *4* внутри «сложного конденсатора» и вернуться к пластине *1* по проводнику, соединяющему эти пластины, то суммарная работа в электрических полях $\vec{E}_{12}$, $\vec{E}_{23}$ и $\vec{E}_{34}$ будет равна нулю:

$$A = qE_{12}d + qE_{34}d - qE_{23}d = 0.$$

Внутри объемов проводников, конечно, не содержится электрических полей. Дело в том, что кулоновское электрическое поле — поле стационарных электрических зарядов, подчиняющееся закону Кулона, — обладает очень важным и замечательным свойством (как и поле тяготения, подчиняющееся похожему закону тяготения Ньютона): оно *потенциально*, т.е. работа по перемещению электрического заряда в этом поле зависит только от положения начальной и конечной точек, но не от формы пути перехода между ними. Естественно, знаки работы при переходе в прямом и обратном направлениях разные, поэтому работа по *любому* замкнутому пути (любой формы) всегда будет равна нулю. Это означает, что любой точке пространства, в котором имеется электрическое кулоновское поле, можно приписать определенное значение потенциала φ, равного работе по перемещению единичного положительного заряда из этой точки пространства, где есть поле, в бесконечность, где поля уже нет, по пути любой формы.

Рассматривая нашу систему из четырех пластин, можно было бы исходить из этого замечательного принципа, свойственного кулоновскому полю. Тогда, вставляя между пластинами *1* и *4* заряженные зарядами $\pm Q_0$ пластины *2* и *3*, мы должны обязательно потребовать переход заряда $-Q_0/3$ с четвертой пластины на первую, иначе мы нарушим наш замечательный принцип, что невозможно!

А каков физический механизм перетекания заряда с пластины на пластину? На этот вопрос ответить несложно. В металле имеется огромное количество свободных электронов, имеющих столь малую массу, что они практически безынерционны, поэтому достаточно чрезвычайно малых электрических полей, чтобы вызвать их перемещение. Вот этими полями и являются «краевые поля» нашего плоского конденсатора в окружающем его пространстве.

Следует иметь в виду, что потенциальность электрического кулоновского

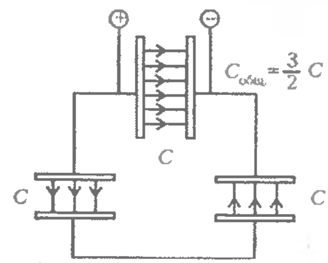


Рис. 2

поля — это не только замечательный принцип, но и способ анализа и решения многих вопросов и задач. К примеру, легко придумать и изобразить эквивалентную схему включения конденсаторов из наших четырех пластин (рис.2), имеющую общую емкость $3C/2$.

Вернемся опять к нашему плоскому конденсатору, имеющему уединенные пластины (*2* и *3*), с зарядом Q_0, емкостью $C = \varepsilon_0 S/d$ и разностью потенциалов U_0, и попробуем графически изобразить распределение потенциала его электрического поля вдоль оси, проходящей через середины пластин. Начало координат выберем в центре конденсатора, а ось X направим вправо (рис.3). Плоскость YZ, перпендикулярная оси X и проходящая через центр конденса-

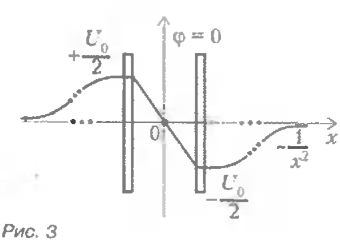


Рис. 3

тора, является эквипотенциальной поверхностью нулевого потенциала. В каждой ее точке силовые линии поля перпендикулярны к ней и работа по перемещению заряда вдоль этой поверхности на бесконечность равна нулю. Внутри конденсатора поле однородное, значит, график потенциала будет линейным, причем в центре потенциал равен нулю, а на поверхностях пластин составляет $+U_0/2$ и $-U_0/2$. Внутри металлических пластин поля нет и потенциал там постоянен $(\pm U_0/2)$. Вне пластин электрическое поле очень мало, но на большом расстоянии от центра слева и справа потенциал стремится к нулю, уменьшаясь пропорционально $1/x^2$ (подумайте самостоятельно — почему).

Интерференция на островах Синего Мыса

Ю.МАНОШКИН, А.СТАСЕНКО

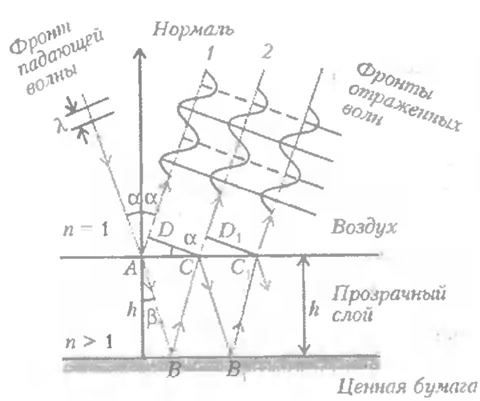
Сребролюбие... это грех чрезвычайной важности — в нем фактическое отвержение веры в Бога, любви к людям и пристрастие к низшим стихиям. Оно порождает злобу, окаменение, многозаботливость.

А.Ельчанинов

В О ВРЕМЯ óно, когда на вулканических островах Синего Мыса (говорят, были такие) началась Перетряска, иные умельцы бросились подделывать туземные купюры, и особенно охотно — достоинством в сто круазейро. И вот тогда-то один островитянин по кличке Отличник вспомнил о *многолучевой интерференции*. Он предложил покрывать достоинство ценной бумаги («сто») прозрачным слоем строго постоянной толщины (см. рисунок). Если купюру поворачивать на 180° (от –90° до +90°) при освещении светом определенной длины волны, то из-за многократного отражения света от границ этого слоя число «сто» вспыхивало определенное число раз, которое мог сосчитать любой островитянин. (Предполагалось, конечно, что фальшивомонетчики не скоро доберутся до этой технологии.) А именно — при освещении ценной бумаги синим светом (любимый цвет на тех островах) купюра «вспыхивала» 21 раз.

Но нашелся на островах Хулиган, который пожелал оценить свойства этого прозрачного покрытия — его толщину и показатель преломления. Зачем ему это понадобилось, неизвестно — возможно, он был просто любознателен. Он поставил проблему так.

Нужно найти условие «вспыхивания» освещаемого слоя при определенном угле падения α света известной длины волны λ. Из рисунка прежде всего нужно найти разность хода между двумя соседними отраженными лучами *1* и *2* (луч *1* отразился в точке A, луч *2* прошел внутрь слоя и отразился от его нижней границы в точке B, а затем, преломившись в точке C, опять вышел в воздух):



$$\Delta_{12} = AD - ABC \cdot n .$$

Заметим, что в этом выражении путь луча внутри пленки умножен на коэффициент ее преломления n. Это связано с тем, что свет внутри пленки движется в n раз медленнее (по определению, n равно отношению скоростей света в вакууме (воздухе) и в веществе пленки), чем на участке AD. (Поэтому и длина волны внутри пленки будет в n раз меньше, чем в воздухе.) Но в точке C часть света вновь отразится вниз, в точке B_1 — снова вверх и т.д., так что в результате из пленки, освещаемой под углом α, выйдет много параллельных лучей (тоже под углом α, так как «угол падения равен углу отражения»). На самом деле, мы должны понимать, что эти лучи не просто тонкие линии — они указывают лишь направление движения волн. Эти лучи перпендикулярны к фронтам волн — например, отрезки DC, D_1C_1, ... изображают куски этих фронтов.

Таким образом, происходит сложение многих волн, образовавшихся в результате последовательных отражений падающего света от нижней границы прозрачной пленки. Это и есть многолучевая интерференция.

При каком условии освещенная цифра «вспыхнет» в отраженном свете? Ясно, что для этого нужно, чтобы «гребни» (или «впадины») всех волн совпадали. А для этого нужно, чтобы разность хода между двумя соседними лучами составляла целое число длин волн:

$$\Delta_{12} = m(\alpha)\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \quad (1)$$

Запись $m(\alpha)$ подчеркивает, что это целое число волн (оно называется *порядком интерференции*) зависит от угла падения света.

Теперь немного математики. Из треугольника ADC найдем $AD = AC \sin\alpha$. Из треугольника ABC найдем $AC = 2h \operatorname{tg}\beta$ (β — угол преломления) и $ABC = 2h/\cos\beta$. Собирая все это, получим

$$\Delta_{12} = 2h \operatorname{tg}\beta \sin\alpha - \frac{2h}{\cos\beta} n ,$$

или, вспомнив закон преломления, —

$$\Delta_{12} = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} . \quad (2)$$

Отличник задумал систему контроля так, что между $\alpha = 0$ и $\alpha = 90°$ расположено 10 максимумов («вспыхиваний»), не считая самих границ этого интервала углов. Тогда, подставляя эти значения углов в равенство (2) и вычитая из первого соотношения второе, Хулиган получил

$$2h\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)=(10-11)\lambda. \quad (3)$$

(Он учел, что при $\alpha = \pi/2$ тоже может быть следующий за десятым максимум, но это было трудно проверить — скользящий свет слепил глаза.)

Однако в уравнении (3) оказалось два неизвестных: h и n (для синего света $\lambda = 0{,}45$ мкм). Поэтому Хулиган схитрил так: он стал освещать купюру светом других длин волн и нашел, что при увеличении длины волны при нормальном падении максимум отраженного света сначала постепенно исчезает, но вновь появляется, когда это изменение достигает $\Delta\lambda = 0{,}0121$ мкм. Это означает, что для света с длиной волны $\lambda + \Delta\lambda$ та же разность хода Δ_{12} в выражении (1) достигается не при m, а при $m - 1$, т.е.

$$m(0)\lambda = (m(0)-1)(\lambda+\Delta\lambda).$$

Отсюда легко найти:

$$m(0)=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}+1=\frac{0{,}45}{0{,}0121}=38,$$

и, записывая (2) при $\alpha = 0$:

$$2hn = m(0)\lambda = \left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda}+1\right)\lambda,$$

получаем второе уравнение для определения h и n.

Итак, имеется система уравнений

$$\begin{cases} 2h\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)=(10-11)\lambda, \\ 2hn = 38\lambda. \end{cases}$$

Для ее решения один здравомыслящий математик посоветовал разделить почленно эти уравнения друг на друга — тогда сократятся h и λ и останется одно уравнение для n. Решив его и подставив это значение n в любое из двух уравнений системы (очевидно, проще во второе), найдем h. В результате получим $n \approx 1{,}4$; $h \approx 6$ мкм (с точностью до нескольких процентов).

Надо ли решать точнее, учитывая «ошибку эксперимента», уже включенную в соотношение (3)? А что еще не учтено в приведенных рассуждениях? Вообще говоря, коэффициент преломления вещества зависит от длины волны проходящего света, чем пренебрегалось. Пренебрежено также поглощением света внутри слоя. Кроме того, наш Хулиган где-то слышал, что в выражении (2) надо то ли добавить, то ли вычесть еще «полволны $\lambda/2$», которые, говорят, то ли приобретаются, то ли теряются при отражении света от оптически то ли более плотной среды, то ли... Но он решил с этими тонкостями не возиться, так как в выражении (3) уже содержится возможная ошибка, проистекающая от того, что углы, при которых достигаются интерференционные максимумы, он не измерял точно, а считал, как и все островитяне, только общее число максимумов между углами $-90°$ и $+90°$.

А что же островитяне? Они остались довольны новыми купюрами, помня слова Антона Чехова, один персонаж которого считал, что кислород — «...химиками выдуманный воздух. Говорят, что без него жить невозможно. Пустяки. Только без денег жить невозможно».

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Об измерении энергии магнитного поля

Д. ЦЕЛЫХ

В школьном курсе физики обсуждаются конкретные приемы, позволяющие измерить энергию электрического поля $W_э$. Например, можно разрядить конденсатор емкостью C, первоначально заряженный до напряжения U, через резистор сопротивлением R и микроамперметр. Построив график зависимости мощности тока P от времени, можно найти количество теплоты Q, выделившееся при разрядке конденсатора через резистор, которое равно площади фигуры под графиком. В соответствии с законом сохранения энергии, это количество теплоты будет определяться энергией электрического поля конденсатора:

$$W_э = \frac{CU^2}{2}.$$

Но школьникам ничего не рассказывается о способе измерения энергии магнитного поля. Попытаемся восполнить этот пробел.

Как известно, вокруг проводника с током существует магнитное поле, энергия которого определяется силой тока I и индуктивностью проводника L:

$$W_м = \frac{LI^2}{2}.$$

Получить это выражение проще всего на основании аналогии между явлениями инерции и самоиндукции. Так, инерция приводит к тому, что под действием силы тело не мгновенно приобретает определенную скорость, а постепенно. Точно так же за счет самоиндукции при замыкании цепи сила тока не сразу приобретает определенное значение, а нарастает постепенно. Аналогом механической скорости v в электродинамике является сила тока I как величина, характеризующая движение электрических зарядов. А аналог массы m — это индуктивность L, так как именно она определяет быстроту изменения силы тока. Поэтому энергию магнитного поля можно считать величиной, подобной кинетической энергии поступательно движущегося тела $mv^2/2$, т.е. равной $LI^2/2$. (Для более строгого обоснования этой формулы надо вычислить работу ЭДС самоиндукции при изменении силы тока в контуре. Проделайте это сами.)

Этот теоретический результат допускает экспериментальную проверку. Энергию магнитного поля можно опре-

Дмитрий Целых прислал эту статью в редакцию в марте прошлого года, будучи учеником 11 класса общеобразовательного лицея №1 г. Петропавловска.

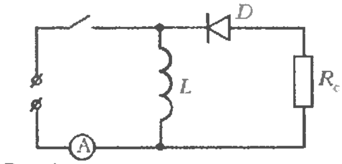


Рис. 1

делить по количеству выделившейся теплоты. Суть опыта такова: при прохождении тока самоиндукции в электрической цепи, изображенной на рисунке 1, на активном сопротивлении R_c выделяется количество теплоты, равное убыли энергии магнитного поля. При замыкании цепи ток проходит только по катушке с индуктивностью L, так как диод D включен в обратном направлении по отношению к полярности источника тока. А при размыкании цепи ток самоиндукции проходит через резистор, на котором и выделяется тепло.

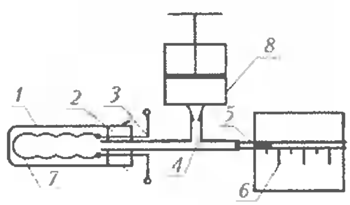


Рис. 2

Для измерения количества теплоты используем термоскоп (рис. 2). Он изготовлен из пробирки, в которой находится нагревательная спираль — наш резистор сопротивлением R_c, и капилляра со столбиком жидкости. При прохождении тока через спираль воздух в пробирке, нагреваясь, расширяется, и столбик жидкости смещается на некоторое расстояние Δx. Количество теплоты, которое получает воздух при нагревании, определяется по формуле

$$Q = cm\Delta T ,$$

где c — удельная теплоемкость воздуха, m — его масса, ΔT — изменение температуры, которое найдем из уравнения Менделеева — Клапейрона. Так как нагревание происходит при постоянном давлении p, изменение температуры связано с изменением объема ΔV:

$$p\Delta V = \frac{m}{M} R\Delta T ,$$

где

$$\Delta V = S\Delta x = \frac{\pi d^2}{4}\Delta x$$

(d — диаметр капилляра). Выразив отсюда разность температур и подставив ее в уравнение для Q, получим

$$Q = \frac{p\pi d^2 \Delta x c M}{4R} .$$

Таким образом, количество теплоты, выделившееся в термоскопе, прямо пропорционально смещению столбика жидкости Δx.

Так как катушка индуктивности тоже имеет активное сопротивление $R_к$, количество теплоты, выделившееся на резисторе, а значит и полученное воздухом, определяется по формуле

$$Q = \frac{WR_c}{R_c + R_к} ,$$

которая показывает, что и энергия магнитного поля W также прямо пропорциональна смещению столбика жидкости Δx в капилляре термоскопа.

Непосредственно в нашем опыте был использован диод типа Д226Б, дроссельная катушка с числом витков 3600 и с сердечником (входит в перечень оборудования школьного кабинета физики), а в качестве резистора — константановая проволока диаметром 0,05 мм и длиной 35—40 см. Термоскоп (см. рис.2), используемый для определения количества теплоты, состоит из пробирки *1*, резиновой пробки *2*, медных проводников *3*, тройника *4*, капиллярной трубки от спиртового термометра со столбиком жидкости *5*, шкалы *6*, константановой спирали *7*, шприца *8* (для регулирования положения столбика жидкости в капилляре).

Проделав опыт несколько раз, с разными значениями силы тока I в цепи катушки индуктивности, т.е. с разными начальными запасами энергии магнитного поля, зафиксируем соответствующие смещения столбика жидкости Δx и занесем данные в таблицу:

I, мА	50	70	90	110	140
Δx, мм	1	2	3	4	7
I, мА	180	230	290	350	
Δx, мм	11	16	28	41	

Построив график зависимости смещения столбика жидкости Δx от квадрата силы тока I^2 (рис.3), определяющего энергию магнитного поля, видим, что смещение столбика жидкости практически прямо пропорционально энергии магнитного поля, что соответствует теоретическим утверждениям.

Проведя измерения с различными катушками, вы сможете убедиться, что смещение столбика Δx пропорционально индуктивности катушки L (при одинаковых I). Остается только, используя катушку с известной индуктивностью, проградуировать прибор — и измеритель энергии магнитного поля у вас в руках.

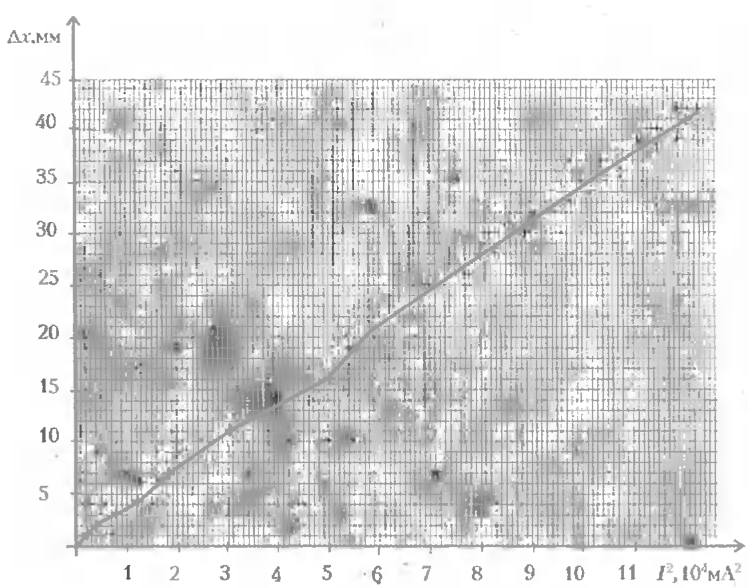


Рис. 3

Распределение заряда на тонком диске

А.ЧЕРНОУЦАН

Если спросить у школьника (даже весьма подготовленного), что произойдет, если на тонкую металлическую пластину площадью S поместить заряд q, то почти наверняка можно услышать такой ответ: «Заряд распределится по пластине почти равномерно, кроме самых краев; непосредственно у поверхности напряженность поля будет направлена перпендикулярно пластине и равна $E = q/(2\varepsilon_0 S)$». Откуда берется такой ответ, понятно. Школьник воспринимает изолированную пластину как половину хорошо известного ему плоского конденсатора. Но такое представление ошибочно. Равномерное распределение заряда по пластинам плоского конденсатора возникает в результате взаимного влияния этих заряженных пластин, и для изолированной пластины распределение заряда по поверхности может заметно отличаться от равномерного. Это распределение сильно зависит от формы пластины и в общем случае может быть получено только на компьютере. Однако для пластины круглой формы — металлического диска — результат можно получить точно. Сделаем это, но прежде вспомним основные свойства электростатического поля в присутствии проводников.

Теорема единственности. Основные свойства проводников сводятся к следующим:

1) Напряженность поля внутри проводника равна нулю.

2) Все точки проводника (любого!) обладают одним и тем же потенциалом — его называют *потенциалом проводника*. В случае изолированного проводника этот потенциал пропорционален заряду: $q = C\varphi$ (C — емкость изолированного проводника).

3) Заряд проводника расположен только на его поверхности (в объеме проводника заряд отсутствует).

4) Вблизи проводника напряженность поля направлена перпендикулярно его поверхности.

Если распределение заряда по поверхности проводника заранее неизвестно, то угадать его (кроме самых простых случаев) довольно сложно. Существенную помощь при решении задач оказывает *теорема единственности*: существует единственное распределение зарядов, удовлетворяющее перечисленным свойствам. Значит, если удалось угадать какое-нибудь распределение заряда, при котором поле внутри проводника отсутствует, то это распределение и будет правильным. На этом принципе основан, в частности, известный *метод электростатических изображений* (см., например, «Квант» № 1 за 1996 г.). Единственность окажет помощь и в нашем случае.

Тонкий диск. Рассмотрим тонкий проводящий диск радиусом R, на котором находится заряд q. Так как объем диска близок к нулю, надо следить за полем не в объеме диска, а возле его поверхности. А именно, нужно найти такое распределение заряда по поверхности, при котором напряженность поля возле любой точки диска направлена перпендикулярно его поверхности. Чтобы сделать это, поступим следующим образом.

Возьмем проводящую сферу радиусом R и поместим на нее заряд q. Ясно, что этот заряд распределится по поверхности равномерно с поверхностной плотностью $\sigma_0 = q/(4\pi R^2)$. Напряженность поля внутри сферы будет при этом равна нулю. Хотя это утверждение можно считать очевидным (скажем, из соображений единственности), полезно вспомнить, как оно доказывается с помощью принципа суперпозиции. Рассмотрим внутри сферы произвольную точку A, и построим тонкий конус с вершиной в этой точке (рис. 1,*а*). Этот конус отсекает от сферы две маленькие площадки. Из подобия следует, что отношение их площадей равно отношению квадратов расстояний: $S_1/S_2 = r_1^2/r_2^2$. Следовательно, напряженности полей, создаваемые в точке A этими площадками, равны по величине ($k\sigma_0 S_1/r_1^2 = k\sigma_0 S_2/r_2^2$) и, поскольку направления слагаемых напряженностей противоположны, результирующая напряженность равна нулю.

Начнем деформировать сферу, сжимая ее вдоль одного из направлений (рис.1,*б*). Но не позволим зарядам растекаться по поверхности получившейся «лепешки» (по научному — эллипсоида), выбирая известное им единственно правильное распределение, а будем считать их как бы приклеенными к поверхности. Это значит, что заряд, находившийся на некоторой площадке, после ее деформации останется таким же. При этом для каждой степени сжатия мы можем рассчитать распределение заряда по поверхности получившегося эллипсоида. Рецепт следующий: вычислим, во сколько раз уменьшится площадь маленького кусочка поверхности — во столько же раз увеличится поверхностная плотность заряда. Например, при линейном сжатии в 2 раза поверхностная плотность заряда на полюсах остается равной σ_0, а на экваторе увеличится до $2\sigma_0$.

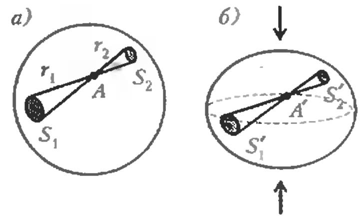


Рис. 1

Самое замечательное, что принудительно построенное нами распределение заряда как раз и является правильным! Действительно, в результате сжатия деформированные конусы останутся подобными, и создаваемая площадками S_1' и S_2' в точке A' напряженность останется равной нулю. Значит, угаданное нами распределение заряда дает внутри эллипсоида нулевую напряженность, а снаружи вблизи эллипсоида напряженность перпендикулярна его поверхности.

Наверное, вы уже догадались, как теперь перейти к бесконечно тонкому проводящему диску — надо просто устремить к бесконечности степень сжатия! При этом круглая полоска шириной Δr на поверхности сферы перейдет в полоску шириной $\Delta r' = \Delta r\cos\alpha$ на диске, т.е. площадь полоски уменьшится в $1/\cos\alpha$ раз (рис.2). Значит, на расстоянии r от центра диска поверхностная плотность заряда (с одной стороны диска) будет равна

$$\sigma(r) = \frac{\sigma_0}{\cos\alpha} = \frac{\sigma_0 R}{\sqrt{R^2 - r^2}}. \qquad (*)$$

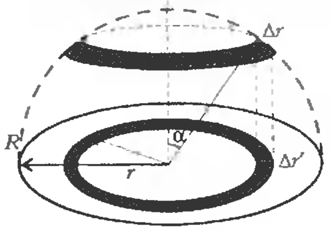


Рис. 2

Видно, что распределение заряда совсем не похоже на равномерное. Поверхностная плотность заряда при удалении от центра возрастает, а при приближении к краю диска стремится к бесконечности. Отметим, что поверхностная плотность заряда в центре диска $\sigma_0 = q/\left(4\pi R^2\right)$ в два раза меньше, чем была бы при равномерном распределении заряда ($\sigma = q/\left(2\pi R^2\right)$). В два раза меньше будет и напряженность поля возле центра диска.

Емкость тонкого диска радиусом R. Используя полученное нами распределение заряда по поверхности диска, мы можем найти его емкость. Для чего это нужно? Ну например, зная емкость, можно определить энергию электрического поля, создаваемого заряженным диском, что часто бывает полезно для решения задач.

Чтобы вычислить электроемкость, надо найти потенциал диска. Проще всего это сделать для центра диска. Разбивая диск на тонкие круглые полоски, получим

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{2\sigma(r)dS}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{2\sigma_0 R\cdot 2\pi r dr}{r\sqrt{R^2-r^2}} = \frac{\pi\sigma_0 R}{2\varepsilon_0}$$

(такой интеграл можно найти в таблице или взять самостоятельно, сделав замену $r = R\sin\alpha$). Учитывая, что $q = \sigma_0\cdot 4\pi R^2$, найдем емкость диска по формуле $C = q/\varphi$:

$$C = 8\varepsilon_0 R.$$

Упражнение

Какую работу надо совершить, чтобы две круглые обкладки плоского конденсатора разнести на очень большое расстояние друг от друга? Начальное расстояние d между пластинами много меньше их радиуса R, заряд конденсатора q.

Две одинаково заряженные плоские пластины. Рассмотрим плоский конденсатор с круглыми пластинами, расстояние между которыми d много меньше их радиуса R. Что произойдет, если зарядить эти пластины одинаковыми по величине и знаку зарядами? Ответ следующий: практически весь заряд каждой пластины окажется распределен по ее внешней стороне по закону, определяемому формулой (∗). Заряд на внутренней стороне и поле между пластинами будут ничтожно малыми. Объяснить такой результат проще всего с помощью теоремы единственности. Возьмем сначала пластину радиусом R с малой толщиной d и нанесем на нее двойной заряд. Он распределится по ее поверхностям по закону, близкому к случаю бесконечно тонкой пластины. Теперь вырежем внутреннюю часть. Так как она почти не заряжена, распределение заряда почти не изменится. Значит, в этом случае взаимодействие между пластинами сводится к выталкиванию зарядов на внешние стороны пластин.

Плоский конденсатор. Теперь зарядим эти же пластины «как положено» — зарядами, одинаковыми по величине, но противоположными по знаку. Ситуация кардинально изменится. Почти весь заряд окажется на внутренней стороне пластин, причем распределится практически равномерно. Все дело в том, что в этом случае в пространстве между пластинами существует электрическое поле. Напряженность поля $\vec{E}$ направлена перпендикулярно пластинам, и разность потенциалов U между пластинами постоянна и в любом месте равна $U = Ed$. А поскольку расстояние между пластинами всюду одно и то же, то и напряженность поля, и поверхностная плотность заряда также почти всюду одинаковы (кроме краев). Перпендикулярность поля поверхности пластин теперь обеспечивается автоматически — за счет суперпозиции напряженностей от положительной и отрицательной пластин (рис.3) — и не требует специального распределения по поверхности, как в случае изолированной пластины. Таким образом взаимодействие между пластинами привело к кардинальному перераспределению заряда.

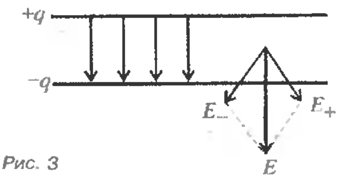


Рис. 3

Как видно из приведенных рассуждений, равномерное распределение заряда по поверхности обеспечивается постоянным расстоянием между пластинами. Если бы расстояние между пластинами медленно менялось, то в более узком месте и напряженность поля, и поверхностная плотность заряда были бы больше.

Произвольно заряженные пластины. К разобранным нами двум случаям — пластины, заряженные одноименными или разноименными зарядами — можно свести и общий случай произвольно заряженных пластин. Действительно, пусть на одну пластину нанесли заряд q_1, а на другую — заряд q_2. Тогда общий заряд пластин равен $Q = q_1 + q_2$. Будем считать, что пластины заряжали в два этапа: сначала на них поместили одноименные заряды $Q/2$, а потом на первую пластину поместили заряд $q = (q_1 - q_2)/2$, а на вторую — заряд $-q$. Тогда поле в пространстве между пластинами и разность потенциалов между ними будут определяться зарядом q, равномерно распределенным по внутренней поверхности, а поле вне пластин — зарядом Q, неравномерно распределенным по внешней поверхности (в случае круглых пластин это распределение описывается формулой (∗)).

ДОПОЛНЕНИЕ К СТАТЬЕ «ЗАОЧНАЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКАЯ ШКОЛА ПРИ МФТИ»

(см. «Квант» № 6 за 1997 г.)

Для учащихся Украины работает Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Желающим поступить следует выслать вступительные работы по адресу:

252680 г.Киев, пр.Вернадского, д.36, Институт металлофизики, Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ.

Телефон для справок: 444-95-24.

Теорема об изменении кинетической энергии в задачах механики

А.ОВЧИННИКОВ, В.ПЛИС

Целый ряд задач механики можно решить, опираясь на важное следствие второго закона Ньютона — теорему об изменении кинетической энергии. Эта теорема утверждает, что изменение (приращение) кинетической энергии материальной точки равно работе всех сил, приложенных к этой точке:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=A.$$

Здесь m — масса материальной точки, v и v_0 — величины ее конечной и начальной скоростей, A — работа всех сил.

Рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 1. *Чтобы затащить на горку санки массой $m = 5$ кг, прикладывая постоянную силу вдоль наклонной плоской поверхности горки, необходимо совершить работу не менее $A = 480$ Дж. С какой скоростью достигнет основания горки девочка на этих санках, если она съедет с горки с нулевой начальной скоростью по кратчайшему пути? Угол наклона плоскости горки к горизонту $\alpha = \operatorname{arctg} 0{,}2$. Коэффициент трения скольжения между санками и горкой $\mu = 0{,}1$.*

На санки, движущиеся по горке вверх, действуют четыре силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции $\vec{N}_1$, сила трения $\vec{F}_{тр1}$ и сила тяги $\vec{F}$. В соответствии со вторым законом Ньютона, записанным в проекциях на перпендикуляр к наклонной плоскости горки, находим $N_1 = mg\cos\alpha$. Тогда для величины силы трения скольжения имеем

$$F_{тр1}=\mu N_1=\mu mg\cos\alpha.$$

По теореме об изменении кинетической энергии для санок, очень медленно движущихся вверх, получим

$$0-0=A+A_{тяж1}+A_{тр1}.$$

В левой части равенства стоит разность кинетических энергий санок в конце и в начале движения, а в правой части записаны следующие величины: A — работа силы тяги, $A_{тяж1} = mgl\cos(\pi/2+\alpha) = -mgl\sin\alpha = -mgH$ — работа силы тяжести (здесь l — длина горки, H — ее высота), $A_{тр1} = (\mu mg\cos\alpha)l\cos\pi = -\mu mgs$ — работа силы трения (здесь s — длина основания горки). Работа силы реакции, перпендикулярной перемещению, равна нулю. Таким образом, описание подъема санок приводит к равенству

$$\frac{A}{m}=g(H+\mu s).$$

На спускающиеся с горки санки с девочкой действуют три силы: сила тяжести $M\vec{g}$ (M — сумма масс девочки и санок), сила нормальной реакции величиной $Mg\cos\alpha$ и сила трения, равная $\mu Mg\cos\alpha$. По теореме об изменении кинетической энергии теперь имеем

$$\frac{Mv^2}{2}-0=A_{тяж2}+A_{тр2},$$

где в левой части равенства стоит разность кинетических энергий девочки с санками у основания горки и на старте (в верхней части горки), в правой части — сумма работ всех сил: $A_{тяж2} = Mgl\cos(\pi/2-\alpha) = Mgl\sin\alpha = MgH$, $A_{тр2} = (\mu Mg\cos\alpha)l\cos\pi = -\mu Mgl\cos\alpha = -\mu Mgs$, а работа силы реакции, как и на этапе подъема равна нулю. После простых преобразований находим

$$\frac{v^2}{2}=g(H-\mu s).$$

Наконец, деление этой формулы на полученную ранее аналогичную формулу приводит окончательно к ответу на вопрос задачи:

$$v=\sqrt{\frac{2A}{m}\frac{\operatorname{tg}\alpha-\mu}{\operatorname{tg}\alpha+\mu}}=8\ \text{м/с}.$$

Задача 2. *В водоеме укреплена вертикальная труба с гладкой внутренней поверхностью, вдоль которой герметично может скользить легкий поршень. Нижний конец трубы погружен*

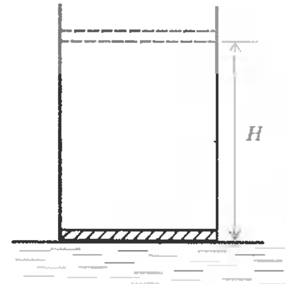


Рис. 1

в воду (рис.1). Поршень, лежавший вначале на поверхности воды, медленно поднимают на высоту $H = 15$ м. Найдите работу, которую необходимо при этом совершить. Площадь поршня $S = 1$ дм^2, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Давлением насыщенных паров воды пренебречь.

Если поднять поршень на небольшую высоту h, приложив к нему направленную вертикально вверх силу величиной F, давление поршня на воду уменьшится. Таким образом, на одной и той же горизонтальной плоскости давление в воде под поршнем будет меньше, чем под открытой поверхностью в водоеме. Под действием этой разности давлений вода втягивается в трубу и поднимается на высоту h, в результате чего давление у основания водяного столба, равное сумме давления поршня на воду ($p_0 - F/S$) и гидростатического давления ρgh, станет равным атмосферному p_0:

$$p_0-\frac{F}{S}+\rho gh=p_0.$$

Отсюда находим

$$F=\rho ghS.$$

Заметим, что при высоте подъема воды $h^* = p_0/(\rho g) = 10$ м давление поршня на воду станет равным нулю, гидростатическое давление станет равным атмосферному давлению и поршень оторвется от воды. Между водой и нижней поверхностью поршня возникнет увеличивающееся пустое пространство (считается, что водяного пара или другого газа в этом пространстве нет). Минимальная сила, которую следует прикладывать к поршню при дальнейшем его подъеме, постоянна и равна p_0S.

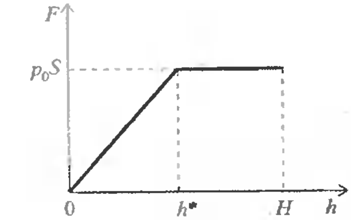


Рис. 2

Зависимость величины F от h представлена в виде графика на рисунке 2. Площадь под графиком и равна искомой работе:

$$A=\frac{1}{2}p_0Sh^*+p_0S\left(H-h^*\right)=$$

$$=p_0S\left(H-\frac{h^*}{2}\right)=$$

$$=p_0S\left(H-\frac{p_0}{2\rho g}\right)=10^4 \text{ Дж}.$$

Задача 3. *Лыжник съезжает с нулевой начальной скоростью, не отталкиваясь палками, со склона холма по прямой, составляющей некоторый угол с горизонтальной плоскостью, и, проехав по склону расстояние $s_0 = 60$ м, останавливается, увязнув в снегу. Условия движения таковы, что сила сопротивления, действующая на лыжника со стороны снега, пропорциональна пройденному пути; коэффициент пропорциональности $k = 6{,}4$ Н/м. Найдите величину максимальной скорости лыжника при спуске, если его масса с инвентарем $m = 90$ кг. Сопротивлением воздуха пренебречь.*

На съезжающего по склону холма лыжника действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции, перпендикулярная траектории, и сила сопротивления, равная $F_c = ks$, где s — длина пройденного пути, и направленная по касательной к траектории лыжника противоположно вектору его скорости.

По теореме об изменении кинетической энергии, для отрезка пути $s \le s_0$ имеем

$$\frac{mv^2}{2}-0=A_{\text{тяж}}+A_c.$$

Здесь v — величина скорости лыжника в момент, когда он прошел путь s. Работа постоянной силы тяжести находится по формуле

$$A_{\text{тяж}}=mgs\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=mgs\sin\alpha,$$

где α — угол наклона прямолинейной траектории лыжника к горизонту. Работа силы сопротивления, во-первых, отрицательна (так как сила и перемещение противонаправлены), а во-вторых, — это работа переменной силы. График зависимости F_c от s представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат. Как и в задаче 1, площадь под графиком имеет смысл величины соответствующей работы:

$$A_c=-\frac{1}{2}sks=-\frac{ks^2}{2}.$$

Возвращаясь к теореме об изменении кинетической энергии, получаем

$$\frac{mv^2}{2}=mgs\sin\alpha-\frac{ks^2}{2}.$$

Искомая в задаче максимальная скорость соответствует максимальному значению правой части этого равенства. Поскольку правая часть равенства — квадратичная функция пути, ее максимальное значение находится при значении s, равном полусумме путей s_1 и s_2, обращающих ее в ноль. Ясно, что $s_1 = 0$ и $s_2 = (2mg\sin\alpha)/k = s_0$. Таким образом, при $s = s_0/2 = (mg\sin\alpha)/k$ кинетическая энергия лыжника максимальна:

$$\frac{mv_{\max}^2}{2}=mg\frac{s_0}{2}\sin\alpha-\frac{k(s_0/2)^2}{2}=\frac{ks_0^2}{8}.$$

Отсюда находим искомую скорость:

$$v_{\max}=\frac{s_0}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}=8 \text{ м/с}.$$

При расчете работы силы сопротивления принят во внимание линейный рост силы сопротивления с увеличением смещения s. Более того, суммарная сила $(mg\sin\alpha - ks)$ имеет характер квазиупругой возвращающей силы с положением равновесия при $s = s_0/2$. Следовательно, от старта до остановки лыжник движется по гармоническому закону, достигая максимальной скорости в положении $s = s_0/2$, причем $s_0/2$ — максимальное смещение от положения равновесия (амплитуда колебаний). Из кинематики гармонических колебаний известна связь амплитуд скорости и смещения:

$$v_{\max}=\frac{s_0}{2}\omega,$$

где $\omega=\sqrt{k/m}$ — циклическая частота колебаний. Таким образом, результат для $v_{\max}$ можно получить и в терминах амплитуд колеблющихся величин.

* * *

Особый интерес представляет теорема об изменении кинетической энергии для системы нескольких взаимодействующих тел, движущихся относительно друг друга. Рассмотрим случай двух взаимодействующих тел.

Пусть $\vec{F}_{12}$ — сила, действующая на тело *1* массой m_1 со стороны тела *2* массой m_2, а $\vec{F}_{21}$ — сила, действующая на тело *2* со стороны тела *1*. В соответствии с третьим законом Ньютона,

$$\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}.$$

Пусть также $\vec{F}_1$ — сумма всех сил, действующих на тело *1* со стороны всех тел, кроме тела *2*, т.е. это есть сумма всех внешних сил, приложенных к телу *1*. Аналогичный смысл имеет сила $\vec{F}_2$ в отношении тела *2*. Для каждого из двух тел запишем теорему об элементарном приращении его кинетической энергии:

$$\Delta\left(\frac{m_1\vec{v}_1^{\,2}}{2}\right)=\vec{F}_{12}\vec{v}_1\Delta t+\vec{F}_1\vec{v}_1\Delta t,$$

$$\Delta\left(\frac{m_2\vec{v}_2^{\,2}}{2}\right)=\vec{F}_{21}\vec{v}_2\Delta t+\vec{F}_2\vec{v}_2\Delta t.$$

Складывая почленно эти равенства, с учетом третьего закона Ньютона, находим

$$\Delta\left(\frac{m_1\vec{v}_1^{\,2}}{2}+\frac{m_2\vec{v}_2^{\,2}}{2}\right)=$$

$$=\vec{F}_{12}\left(\vec{v}_1-\vec{v}_2\right)\Delta t+\vec{F}_1\vec{v}_1\Delta t+\vec{F}_2\vec{v}_2\Delta t.$$

В левой части этого равенства записано элементарное приращение кинетической энергии системы двух тел. Первое слагаемое в правой части — это вычисленная в системе отсчета, связанной с телом *2*, элементарная работа силы, действующей на тело *1* со стороны тела *2*. Второе и третье слагаемые — это элементарные работы внешних сил.

Теперь — задача.

Задача 4. *На гладкой горизонтальной плоскости покоится доска массой m_1. На доску со скоростью v въезжает шайба массой m_2 (рис.3). Какой должна быть минимальная длина доски l, чтобы шайба не соскользнула с нее? Коэффициент трения скольжения между шайбой и доской μ, размер шайбы мал по сравнению с длиной доски.*

Запишем теорему об изменении кинетической энергии системы тел m_1

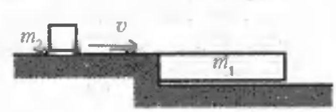


Рис. 3

и m_2:

$$\frac{(m_1+m_2)u^2}{2}-\frac{m_2v^2}{2}=-\mu m_2 gl.$$

Величину u конечной скорости шайбы и доски можно найти из закона сохранения импульса

$$m_2v=(m_1+m_2)u.$$

Решая эти два уравнения, находим окончательно

$$l=\frac{v^2}{2\mu g}\frac{m_1}{m_1+m_2}.$$

Конечно, можно было бы решить задачу, опираясь на теорему об изменении кинетической энергии для каждого тела. В таком случае соответствующая система уравнений имеет вид

$$\frac{m_1u^2}{2}=F_{тр}s_1,$$

$$\frac{m_2u^2}{2}-\frac{m_2v^2}{2}=-F_{тр}s_2,$$

$$m_2v=(m_1+m_2)u,$$

$$s_2-s_1=l,$$

$$F_{тр}=\mu m_2 g,$$

где s_1 и s_2 — величины перемещений тел *1* и *2* соответственно относительно неподвижной системы отсчета. Решая эту систему уравнений, приходим к тому же ответу на вопрос задачи, что и в первом варианте ее решения.

* * *

В заключение рассмотрим задачу, в которой теорема об изменении кинетической энергии используется наоборот: по известному приращению кинетической энергии находится работа.

Задача 5. *Найдите коэффициент полезного действия водометного двигателя реактивного катера, движущегося с постоянной скоростью. Площадь входного отверстия двигателя S_1, выходного S_2.*

Выберем систему отсчета, связанную с катером. Пусть через двигатель ежесекундно проходит масса μ воды, причем попадает она в двигатель со скоростью v_1 (это скорость движения катера), а выходит со скоростью v_2. Импульс этой массы воды за секунду увеличивается на $\mu(v_2-v_1)$, следовательно, сила тяги двигателя равна $F=\mu(v_2-v_1)$, а его полезная мощность — $N_1=Fv_1=\mu(v_2-v_1)v_1$. Полная мощность двигателя равна приращению кинетической энергии воды, прошедшей через двигатель в единицу времени:

$$N_2=\frac{\mu}{2}\left(v_2^2-v_1^2\right).$$

Коэффициент полезного действия η двигателя равен отношению полезной мощности к полной:

$$\eta=\frac{N_1}{N_2}=\frac{2v_1}{v_1+v_2}.$$

Из условия неразрывности струи воды и несжимаемости воды $\rho S_1v_1=\rho S_2v_2$ следует, что

$$\eta=2\frac{S_2}{S_1+S_2}.$$

Заметим, что при решении задачи в системе отсчета, связанной с берегом, полезная мощность двигателя по-прежнему будет равна $N_1=\mu(v_2-v_1)v_1$. Полная же мощность N_2' будет расходоваться на преодоление силы сопротивления, которая по величине равна силе тяги, и на ежесекундное увеличение кинетической энергии воды, скорость которой при прохождении через двигатель увеличивается от 0 до v_2-v_1, т.е.

$$N_2'=\mu(v_2-v_1)v_1+$$

$$+\frac{\mu(v_2-v_1)^2}{2}=\frac{\mu\left(v_2^2-v_1^2\right)}{2}=N_2.$$

Таким образом, величина коэффициента полезного действия водометного двигателя в обеих системах отсчета определяется одним и тем же соотношением.

Упражнения

1. Когда тело двигалось вниз по наклонной плоскости, на высоте H от ее основания оно имело скорость v_1, а когда оно двигалось вверх после упругого удара о стенку у основания плоскости, его скорость на той же высоте H была равна v_2 (рис.4). Определите скорость тела при ударе о стенку.

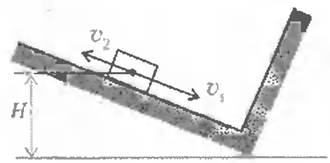


Рис. 4

2. Однородный брусок, скользящий по гладкой горизонтальной поверхности, попадает на шероховатый участок этой поверхности шириной l, коэффициент трения о который μ. При какой минимальной начальной скорости брусок преодолеет шероховатый участок поверхности?

3. Кабина лифта массой $m=3\cdot10^3$ кг опускается с постоянной скоростью $v=10$ м/с. Внезапно происходит полная остановка барабана, с которого сматывается трос. Найдите максимальное удлинение троса, если коэффициент упругости для той его длины, при которой произошла остановка барабана, равен $k=10^6$ Н/м.

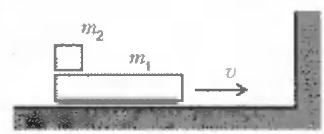


Рис. 5

4. По гладкой горизонтальной плоскости стола равномерно со скоростью v скользит доска массой m_1 вместе с расположенной на ней небольшой шайбой массой m_2 (рис.5). После абсолютно упругого столкновения доски с вертикальной неподвижной стеной шайба перемещается по доске на l. Определите коэффициент трения скольжения между шайбой и доской.

5. Оцените мощность двигателя, необходимую для поддержания в воздухе вертолета массой $M=500$ кг с лопастями длиной $l=3$ м. Считайте, что весь воздух под вращающимися лопастями движется однородным потоком вниз. Давление и температура воздуха равны, соответственно, $p=10^5$ Па и $T=300$ К, молярная масса воздуха М = 29 г/моль, универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль · К).

ПОПРАВКА

В статье «Решим относительно параметра» («Квант» №4 за 1997 г.) в решении задачи 4 допущена ошибка. Начиная со второго абзаца на с.44 должен быть следующий текст:

«Второе из полученных уравнений при $a>0$ противоречит ограничениям, так как для его положительных корней $a>x^2$, а при $a=0$ всем условиям удовлетворяет $x=0$.

Первое уравнение не имеет корней при $a<3/4$, имеет отрицательные корни при $3/4\le a<1$ и имеет один неотрицательный корень $x=\left(-1+\sqrt{4a-3}\right)/2$ при $a\ge1$, удовлетворяющий условию $a>x^2$.

Ответ. $x=0$ при $a=0$, $x=\left(-1+\sqrt{4a-3}\right)/2$ при $a\ge1$, при остальных a корней нет.»

В ответе к задаче 12 — опечатка. Следует читать:

«**Ответ.** $(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(2;+\infty)$».

XXXVIII Международная математическая олимпиада школьников

Тридцать восьмая международная олимпиада по математике состоялась в конце июля 1997 года в Аргентине в известном курортном городе Мар-дель-Плата, расположенном на живописном побережье Атлантического океана приблизительно в трехстах километрах к югу от Буэнос-Айреса. Олимпиада оказалась рекордной по количеству стран-участниц: 82 государства прислали в Аргентину свои делегации.

По традиции в команду России вошли победители национальной олимпиады, показавшие наилучшие результаты на отборочных соревнованиях. Участниками сборной стали выпускники средней школы Михаил Лепчинский (Челябинск), Михаил Митрофанов (Санкт-Петербург), Сергей Уздин (Санкт-Петербург), а также окончившие десятый класс Ирина Анно (Москва), Николай Дуров (Санкт-Петербург) и Евгений Черепанов (Рыбинск).

Следует отметить, что появлению окончательного аарианта олимпиадных заданий предшестает длительная подготовительная работа. Каждая страна-участник не позднее чем за два с половиной месяца до начала олимпиады имеат право прислать в оргкомитет страны-организатора не более пяти задач. Присланные задачи обсуждаются специальным Комитетом по отбору задач. Итогом его работы является сборник, содержащий около 30 задач (в этом году их было 26), который представляется на суд Международного жюри. Жюри за 3—4 дня до олимпиады, ознакомиашись с задачами, выбирает и утверждает окончательный вариант из шести задач.

В этом году впервые Комитет по отбору задач был сформирован не из представителей страны-организатора, а из известных деятелей олимпиадного движения других стран. В Комитет вошли Анджело Бароне (Бразилия), Николай Константинов (Россия), Мартин Кучма (Польша), Светослав Сачев (Болгария) и Аркадий Слинько (Новая Зеландия). Высокий профессиональный уровень членов Комитета обусловил великолепный набор задач. Можно только пожалеть, что многие красивые задачи так и не попали в окончательный список. Все задачи олимпиады включены в «Задачник «Кванта» этого номера журнала.

Очень высоким оказался и уровень группы координации работ участников олимпиады. Аргентина пригласила в эту группу многих бывших победителей олимпиады, а также ведущих олимпиадных тренеров из многих стран мира. Россию представляли Евгения Малинникова (трехкратная золотая медалистка Международной олимпиады), Сергей Рукшин и Николай Константинов.

Каждая задача олимпиады оценивалась из 7 очков. Золотая медаль присуждалась участникам, набравшим 35 и более очков из 42 возможных, серебряная — набравшим от 25 до 34 очков, бронзовая — набравшим от 15 до 24 очков. В команде России золотые медали завоевали Николай Дуров (39 очков), Михаил Лепчинский и Евгений Черепанов (обв — по 37 очков), серебрянные медали получили Михаил Митрофанов и Сергей Уздин, а Ирина Анно — бронзовую. Поздравляем всех участников нашей команды с успешным выступлением. Хочется отметить также успехи школьников из ближнего зарубежья. Золотыми медалями были награждены Павел Гиря, Богдан Гречук и Захар Каблучко (все — Украина), серебряными — Павел Пилявский (Украина), Марис Валдатс (Латвия), Иван Лосев (Белоруссия), Ираклий Манелидзе (Грузия), Вайдас Газиунас (Литва), Алексей Руденко (Укрвина), Алексей Коренев (Белоруссия) и Андрей Болтенков (Украина).

В неофициальном командном зачете места распределились так:

	Страна	*Очки*	*Медали (з.+с.+б.)*
1	Китай	233	6+0+0
2	Венгрия	219	4+2+0
3	Иран	217	4+2+0
4-5	Россия	202	3+2+1
4-5	США	202	2+4+0
6	Украина	195	3+3+0
7-8	Болгария	191	2+3+1
7-8	Румыния	191	2+3+1
9	Австралия	187	2+3+1
10	Вьетнам	183	1+5+0
11	Южная Корея	164	1+4+1
12	Япония	163	1+3+1
13	Германия	161	1+3+2
14	Тайвань	148	0+4+2
15	Индия	146	0+3+3
16	Великобритания	144	1+2+2
17	Белоруссия	140	0+2+4
18	Чехия	139	1+2+2
19	Швеция	128	1+0+3
20-21	Югославия	125	0+2+3
20-21	Польша	125	0+2+2
22-23	Израиль	124	0+1+5
22-23	Латвия	124	0+1+4

Следующвя, XXXIX Международная математическая олимпиада состоится в июле 1998 года на Тайване.

Н.Агаханов, Д.Терешин

XXVIII Международная физическая олимпиада

С 13 по 21 июля 1997 года в городе Садбюри (Канада) состоялась очередная международная олимпиада школьников по физике. В ней приняли участие 266 учащихся из 56 стран мира.

Команду России представляли пять школьников из различных регионов Российской Федерации:

Воронов Артем — г.Челябинск, физико-математический лицей 31;

Кожемяк Алексей — г.Санкт-Петербург, физико-математический лицей 239;

Макаров Алексей — г.Сергиев Посад, физико-математическая школа 2;

Пестун Василий — г.Санкт-Петербург, физико-математический лицей 239;

Чувиков Алексей — г.Ноябрьск, средняя школа 10.

Участникам олимпиады были предложены три теоретические задачи, каждая из которых оценивалась в 10 баллов, и одна экспериментальная, оцениваемая в 20 баллов. Таким образом, максимальное число баллов, которое мог набрать участник олимпиады, равно 50.

Команда России выступила успешно, заняв (в неофициальном командном зачете) первое командное место и по сумме баллов, и по количеству медалей, опередив как традиционно сильные команды Китая, США, Великобритании, Германии, Румынии, так и команды, быстро прогрессирующие в последние годы, — Ирана, Сингапура, Южной Кореи, Австралии, Украины. Российские школьники получили 4 золотые медали (Кожемяк А. — 44,5 б.; Чувиков А. — 44,2 б.; Пестун В. — 43,5 б.; Воронов А. — 41,2 б.) и 1 серебряную медаль (Макаров А. — 37,0 б.). Кроме того, Чувиков А. получил специальный приз, учрежденный Европейским физическим обществом, за лучший баланс при выполнении заданий теоретического и экспериментального туров. Общая сумма баллов нашей команды — 211. Далее следуют команды Китая — 210,5 баллов (3 золотые и 2 серебряные медали), Ирана — 194 балла (1 золотая, 3 серебряные и 1 бронзовая медали), Австралии — 185,25 баллов (2 золотые, 1 серебряная и 1 бронзовая медали), Германии — 185 баллов (1 золотая, 2 серебряные и 2 бронзовые медали), Великобритании — 180,75 баллов (2 серебряные и 3 бронзовые медали). США — 180 баллов (1 золотая, 1 серебряная и 3 бронзовые медали), Сингапура — 170,75 баллов (1 золотая, 1 серебряная и 3 бронзовые медали).

Следует отметить, что вся команда России выступила сбалансированно, набрав 137 баллов в теоретическом туре (91,3% от максимального числа) и 74 балла (74% от максимального числа) в экспериментальном. Это — отличный результат, если учесть, что уровень заданий был очень высок и требовал от участников блестящей физической и хорошей математической подготовки. Успех команды в определенной степени можно объяснить новой системой отбора и подготовки школьников, принятой в 1996 году. Кандидаты сборной для участия в международной олимпиаде, после отбора по результатам Всероссийской физической олимпиады 1996 года, занимались на двухнедельном летнем сборе на базе Московского физико-технического института экспериментом, затем — традиционный десятидневный зимний отборочный сбор, участие во Всероссийской олимпиаде 1997 года, учебно-тренировочный месячный летний сбор и серия домашних заданий как теоретических, так и экспериментальных. Кандидаты в сборную писали тесты — большое количество небольших заданий, выполняемых за ограниченное время.

Ниже приводятся условия задач теоретического тура олимпиады.

Задача 1 (пять частей этой задачи не связаны друг с другом)

a) Небольшое тело подвешено на конце невесомой идеальной пружины и колеблется вверх и вниз с частотой собственных колебаний f. Какой станет новая частота колебаний, если пружину укоротить в два раза и подвесить к ней то же тело? (1,5 балла)

b) В соответствии с моделью атома Бора, радиус атома водорода в основном состоянии равен $a_0 = 0{,}0529$ нм. Чему равен радиус атома «мюонного водорода», в котором электрон заменен на мюон? Заряд мюона равен заряду электрона, а его масса в 207 раз больше массы электрона. Считайте, что масса протона значительно больше массы мюона. (2 балла)

c) Средняя температура Земли составляет $T = 287$ К. Какой стала бы новая температура Земли, если бы среднее расстояние между Землей и Солнцем уменьшилось на 1%? (2 балла)

d) В один из дней воздух был абсолютно сухим и имел плотность $\rho = 1{,}2500$ кг/м^3. На следующий день влажность воздуха увеличилась, и воздух стал содержать 2% (по массе) водяного пара. Давление и температура в этот день остались теми же самыми, что и в предыдущий. Чему стала равна плотность воздуха в этот день? Средняя молярная масса сухого воздуха $28{,}8 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, молярная масса воды $18{,}0 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Считайте воздух идеальным газом. (2 балла)

e) Вертолет может зависнуть в воздухе, если механическая мощность двигателя равна P. Какой должна быть механическая мощность двигателя у уменьшенной модели этого вертолета, все линейные размеры которой в два раза меньше оригинала, чтобы он тоже мог зависнуть в воздухе? (2,5 балла)

Задача 2. Стабильность атомных ядер

Все энергии в этой задаче выражены в МэВ (1 МэВ = $1{,}6 \cdot 10^{-13}$ Дж, хотя это не обязательно знать для решения данной задачи).

Масса M атомного ядра, состоящего из Z протонов и N нейтронов (т.е. ядра с атомной массой (массовым числом) $A = N + Z$), равна сумме масс отдельных нуклонов, составляющих ядро (протонов и нейтронов), минус энергия связи, деленная на c^2, т.е. B/c^2:

$$Mc^2 = Zm_pc^2 + Nm_nc^2 - B.$$

Энергия связи, приходящаяся на один нуклон, т.е. B/A, называется удельной энергией связи. Чем больше удельная энергия связи, тем стабильнее ядро. На

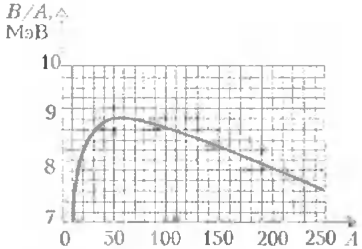


Рис.1. Удельная энергия связи нуклонов в ядре

рисунке 1 изображена зависимость максимальной энергии связи при заданном массовом числе от величины этого числа A.

a) Если атомная масса ядра превышает определенное значение A_α, энергия связи оказывается достаточно малой и становится возможной эмиссия альфа-частиц ($A = 4$), т.е. альфа-распад. Используя линейную аппроксимацию изображенной на рисунке кривой для значений A больше 100, оцените A_α. (3 балла)

Для решения задачи используйте следующие предположения: значения удельной энергии связи для атомных ядер до и после распада располагаются на приведенном графике; полная энергия связи альфа-частицы в ядре составляет $B_4 = 25{,}0$ МэВ (эта величина не может быть получена из графика!).

b) Энергия связи атомного ядра, состоящего из Z протонов и N нейтронов ($A = N + Z$), описывается следующей полуэмпирической формулой:

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2 A^{-1/3} - a_a \frac{(N-Z)^2}{A} - \delta .$$

Значение параметра δ составляет

$+a_p A^{-3/4}$ для ядер с нечетным N и нечетным Z;

0 для ядер с четным N и нечетным Z или с нечетным N и четным Z;

$-a_p A^{-3/4}$ для ядер с четным N и четным Z.

Значения различных коэффициентов равны соответственно

$a_v = 15{,}8$ МэВ, $a_s = 16{,}8$ МэВ,

$a_c = 0{,}72$ МэВ,

$a_a = 23{,}5$ МэВ, $a_p = 33{,}5$ МэВ.

1. Выведите выражение для числа протонов $Z_{\max}$ в ядре с наибольшей энергией связи при заданном атомном числе A. Для ответа на этот вопрос пренебрегите влиянием δ параметра. (2 балла)

2. Чему равняется число протонов Z в ядре с наибольшим значением B/A при $A = 200$? Учтите в этом случае влияние δ-параметра. (2 балла)

3. Рассмотрите три ядра с массовым числом $A = 128$: ${}^{128}_{53}\mathrm{I}$, ${}^{128}_{54}\mathrm{Xe}$, ${}^{128}_{55}\mathrm{Cs}$. Определите, какие из этих ядер энергетически стабильны, а какие могут распадаться по одному из следующих процессов: эмиссия электрона из ядра; эмиссия позитрона из ядра; одновременная эмиссия двух электронов из ядра; захват *атомного* электрона ядром. Найдите $Z_{\max}$ согласно определению, данному в пункте 1. (3 балла)

Энергия покоя электрона (и позитрона) $m_e c^2 = 0{,}51$ МэВ, протона $m_p c^2 = 938{,}27$ МэВ, нейтрона $m_n c^2 = 939{,}57$ МэВ.

Задача 3. Самолет на солнечных элементах

Мы хотим разработать самолет, который смог бы удержаться в воздухе, используя исключительно энергию Солнца. Наиболее эффективная конструкция такого самолета должна иметь длинные тонкие крылья, верхняя поверхность которых полностью покрыта солнечными элементами. Эти элементы вырабатывают электроэнергию, питающую электромотор, который, в свою очередь, вращает пропеллер.

Рассмотрим длинное тонкое крыло прямоугольной формы с размахом l и шириной a, движущееся в воздухе со скоростью v относительно окружающего воздуха (рис.2). Мы можем получить приближенное представление об эффективности действия этого крыла, если рассмотрим поток воздуха, налетающий на это крыло и отклоняемый под небольшим углом ε. Изменением абсолютной величины скорости воздуха при этом можно пренебречь. Управляющие поверхности крыльев могут быть использованы для того, чтобы подобрать оптимальное значение ε, необходимое для полета. Эта простая модель достаточно близко соответствует действительности, если $x = \pi l/4$, и мы будем считать, что вы решаете данную задачу в рамках этой модели. Общая масса самолета M, площадь поверхности крыльев $S = al$, постоянная крыла $A = l/a$. В своих вычислениях учитывайте только воздух, обтекающий крыло. Игнорируйте изменение воздушного потока, вносимое пропеллером.

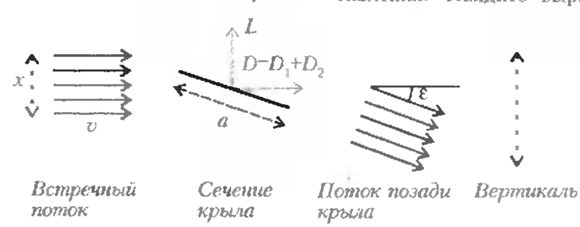


Рис.2. Вид на крыло сбоку (в системе отсчета, движущейся вместе с самолетом)

a) Рассматривая изменение импульса потока воздуха, обтекающего крыло (пренебрегая изменением абсолютной величины скорости), выведите выражения для величины подъемной силы L и горизонтальной силы сопротивления D_1, действующей на крыло, в зависимости от размеров крыла, параметров v, ε и плотности воздуха ρ. Считайте, что направление воздушного потока везде параллельно плоскости чертежа. (3 балла)

b) Существует еще дополнительная горизонтальная сила D_2, обусловленная трением воздуха, обтекающего поверхность крыла. Воздух немного замедляется, так что изменение горизонтальной скорости потока воздуха составляет Δv ($\ll 1\%$ от v). Относительное изменение скорости определяется как $\Delta v/v = f/A$. Величина f не зависит от ε. Найдите выражение (как функцию M, f, A, S, ρ и g — ускорения свободного падения) для скорости полета, соответствующей минимальной мощности, которая необходима для того, чтобы удерживать этот самолет на неизменной высоте и с неизменной скоростью. Членами порядка $\varepsilon^2 f$ и выше следует пренебречь. (3 балла)

c) Изобразите схематически график зависимости мощности P от скорости v. Изобразите также отдельно вклады в мощность от двух источников сопротивления. Найдите выражение (как функцию M, f, A, S, ρ и g) для минимальной мощности. (2 балла)

d) Солнечные элементы могут вырабатывать такое количество энергии, что моторы и пропеллеры развивают механическую мощность $N = 10$ Вт с каждого квадратного метра крыла. Вычислите максимальную подъемную силу крыла, приходящуюся на один квадратный метр, и скорость полета при данной мощности. Считайте $\rho = 1{,}25$ кг/м^3, $f = 0{,}004$, $A = 10$, $g = 9{,}81$ м/с^2. (2 балла)

Публикацию подготовили
С.Козел, В.Коровин

Материалы вступительных экзаменов 1997 года

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет, май)

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{21-2^x-2^{6-x}}-|3-2^x|}{5-|3-2^x|}\geq 1.$$

2. Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. Сумма их первых членов равна (-3), сумма третьих членов равна 1, а сумма пятых членов равна 5. Найдите разность арифметической прогрессии.

3. Найдите ближайший к числу $\frac{13\pi}{4}$ корень уравнения

$$\sin x\cos 2x+\sin x+\frac{10}{11}\sin 2x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{30}{44}.$$

4. Диагонали вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, причем $\angle ADB=\frac{\pi}{8}$, $BD=6$ и $AD\cdot CE=DC\cdot AE$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

5. В шаре радиусом 7 через точку S проведены три равные хорды AA', BB' и CC' так, что

$$AS=8,\ A'S=3,\ BS>B'S,\ CS>C'S.$$

Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $SABC$.

6. Найдите все значения a, при каждом из которых среди решений неравенства

$$\sqrt{(a-x)^2\left(x^2+a\right)}+a>x$$

есть ровно два различных целочисленных решения.

Вариант 2

(механико-математический факультет, июль)

1. Решите уравнение

$$\left(2\sin^2 x-3\sin x+1\right)\cdot\sqrt{\operatorname{tg} x}=0.$$

2. Решите неравенство

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)\log_{13-3\cdot 2^x}4\leq 1.$$

3. Из пункта A в пункт B со скоростью 80 км/ч выехал автомобиль, а через некоторое время с постоянной скоростью выехал второй. После остановки на 20 мин в пункте B второй автомобиль поехал с той же скоростью назад, через 48 км встретил первый автомобиль, шедший навстречу, и был на расстоянии 120 км от B в момент прибытия в B первого автомобиля. Найдите расстояние от A до места первой встречи автомобилей, если $AB=480$ км.

4. В треугольнике ABC длина AB равна 3, $\angle ACB=\arcsin\frac{3}{5}$. Хорда KN окружности, описанной около треугольника ABC, пересекает отрезки AC и BC в точках M и L соответственно. Известно, что $\angle ABC=\angle CML$, площадь четырехугольника $ABLM$ равна 2, а длина LM равна 1. Найдите высоту треугольника KNC, опущенную из вершины C, и его площадь.

5. Для всех значений параметра a решите уравнение

$$\left|x^4+\frac{2a-1}{3}x^2+\frac{2a^2+a+2}{12}\right|=\frac{a}{2}\cdot\left|x^2+\frac{a}{3}-\frac{1}{6}\right|+\frac{a+1}{6}.$$

6. Вокруг пирамиды $ABCD$ описана сфера. Вторая сфера с радиусом 1 касается первой внутренним образом в точке D, а также касается плоскости ABC. Известно, что

$$AD=3,\ \cos\angle BAC=\frac{4}{5},$$

$$\cos\angle BAD=\cos\angle CAD=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Найдите объем пирамиды $ABCD$.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Пункты A, B и C расположены на реке в указанном порядке вниз по течению. Расстояние между A и B равно 4 км, а между B и C — 14 км. В 12^{00} из пункта B отплыла лодка и направилась в пункт A. Достигнув пункта A, она сразу же повернула назад и в 14^{00} прибыла в пункт C. Скорость течения реки равна 5 км/ч. Найдите скорость лодки в стоячей воде.

2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{1-x^2}}2<\log_{2x^2}\frac{1}{2}.$$

3. Решите уравнение

$$3+|\sin x-3\ \cos x|=3\cdot\sin x+\cos x.$$

4. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases}4^x+5\cdot 2^x-2\cdot 3^y=2,\\ 2\cdot 9^y+2^x+2\cdot 3^y=1.\end{cases}$$

5. Внутри треугольника ABC выбрана точка O так, что радиусы описанных около треугольников AOC и AOB окружностей равны соответственно 5 и 4. Известно, что расстояние между центрами этих окружностей равно 6, $AB=6$, $AC=7$. Найдите длину отрезка OC.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{x^3-24x^2+118x+7}=5\cdot\sqrt{7x-x^2}+\sqrt{a^2-11a+18}$$

имеет единственное решение.

Вариант 4

(физический факультет, март)

1. Решите уравнение

$$\sin x+\sin 3x=4\cos^3 x.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{2x}{x^2-4}\leq\frac{1}{x+1}.$$

3. Решите уравнение

$$\log_9\left(x^2/4\right)+\log_3(x+5)=1.$$

4. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 20, а диаметр описанной окружности равен 25. Найдите радиус вписанной окружности.

5. Решите неравенство

$$2^{x-3}<\frac{2}{8^{1/x}}.$$

6. На стороне PQ треугольника PQR взята точка N, а на стороне PR — точка L, причем $NQ=LR$. Точка пересечения отрезков QL и NR делит отрезок QL в отношении $m : n$, считая от точки Q. Найдите отношение $PN : PR$.

7. Найдите все значения a, при которых неравенство

$$\log_a\left(x^2+4\right)>1$$

выполняется для всех значений x.

8. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ основание $ABCD$ — прямоугольник, $SA = 2$, $SB = 3$, $SC = 4$. Найдите SD.

Вариант 5

(физический факультет, июль)

1. Решите уравнение

$$\cos 6x + 4\cos 2x = 0.$$

2. Решите уравнение

$$7\cdot\frac{4^{x-2}}{4^x-3\cdot 5^x}=1+3\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^x.$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\log_5(x+2)}>\log_{\frac{1}{5}}\frac{5}{x+2}.$$

4. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке M, а сторону AC — в точке N. Площадь треугольника MCN в два раза больше площади трапеции $ABMN$. Найдите $CM : MB$.

5. Решите систему уравнений

$$y+|x+1|=1,\ |y-x|=5.$$

6. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 7, 8, 9. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите высоту пирамиды.

7. Для любых значений a решите неравенство

$$a-2<(a-1)\sqrt{x+1}.$$

8. В трапеции $ABCD$ $BC \parallel AD$, $\angle ABC = 90°$. Прямая, перпендикулярная стороне CD, пересекает сторону AB в точке M, а сторону CD — в точке N. Известно, что $MC = a$, $BN = b$, а расстояние от точки D до прямой MC равно c. Найдите расстояние от точки A до прямой BN.

Вариант 6

(химический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-25x+51}=7-2x.$$

2. Решите неравенство

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^x+1<2\left(\sqrt{2}-1\right)^x.$$

3. Решите уравнение

$$8\cos 2x+16\cos x+7=0.$$

4. n насосов различной мощности наполняют бассейн водой. Первый насос, работая автономно, может наполнить весь бассейн за 2 часа, второй — за 4 часа, ..., n-й — за 2^n часов. Каким должно быть наименьшее число насосов n, чтобы все n насосов, работая одновременно, наполнили бассейн быстрее, чем за 1 час и 1 минуту? Можно ли наполнить бассейн быстрее, чем за 1 час?

5. Середины высот треугольника ABC лежат на одной прямой. Наибольшая сторона треугольника $AB = 10$. Какое максимальное значение может принимать площадь треугольника ABC?

6. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения x^2+2y^2, если

$$x^2-xy+2y^2=1.$$

Вариант 7

(биологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\log_3 x+\log_3(x+1)=1.$$

2. Решите уравнение

$$\sin 2x-\sin 4x=(\cos 2x+1)\cos 3x.$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{|1-8x|-2}\le x+1.$$

4. В двух коробках лежат карандаши: в первой красные, во второй — синие. Известно, что красных карандашей меньше, чем синих. Сорок процентов карандашей из первой коробки переложили во вторую. Затем 20% карандашей, оказавшихся во второй коробке, переложили в первую, причем половину из них составляли синие. После этого красных карандашей в первой коробке оказалось на 26 больше, чем во второй, а общее количество карандашей во второй коробке увеличилось по сравнению с первоначальным более чем на 5%. Найдите общее количество синих карандашей.

5. В треугольнике ABC проведена средняя линия MN, соединяющая стороны AB и BC. Окружность, проведенная через точки M, N и C, касается стороны AB, а ее радиус равен $\sqrt{2}$. Длина стороны AC равна 2. Найдите синус угла $\angle ACB$.

6. Найдите решения системы

$$\begin{cases}\dfrac{1}{20}\left(\dfrac{x^2}{\sin x}\right)^2-\dfrac{x^{3/2}}{\sqrt{\sin x}}+1<0,\\ \left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2\ge\dfrac{\pi}{24}\left(\dfrac{5\pi}{6}-x\right),\\ x^2-\dfrac{x^{3/2}}{\sqrt{\cos x}}+\dfrac{5}{4}<0.\end{cases}$$

Вариант 8

(факультет почвоведения)

1. Решите уравнение

$$x=\sqrt{8x+9}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{7}}\left(x^2+3x\right)<\log_{\frac{1}{7}}(5x-1).$$

3. Решите уравнение

$$2\sin^2 x-\frac{|\sin x|}{\cos x}=0.$$

4. В сосуде находится 10%-й раствор спирта. Из сосуда отлили 1/3 содержимого, а оставшуюся часть долили водой так, что сосуд оказался заполненным на 5/6 первоначального объема. Какое процентное содержание спирта оказалось в сосуде?

5. В треугольнике ABC угол C равен 60°, а биссектриса угла C равна $5\sqrt{3}$. Длины сторон AC и BC относятся как $5 : 2$ соответственно. Найдите тангенс угла A и сторону BC.

6. Для каждого значения параметра a решите неравенство

$$\sqrt{a^2-x^2}\ge a+1.$$

Вариант 9

(геологический факультет)

1. Сколько решений имеет уравнение

$$\sqrt{6}\left(x^2+2\right)+2x\sqrt{5}=\sqrt[4]{35}\left(x^2-2\right)+2x\sqrt{7}\,?$$

2. Решите уравнение

$$3\cos 8x=14(\sin 2x-\cos 2x)^2-3.$$

3. Решите неравенство

$$30>\frac{x}{60-\sqrt{x}}.$$

4. В треугольнике ABC угол B прямой, $AB = 5$, $BC = 4$. Точка D лежит на стороне AC, M и N — точки пересечения медиан, соответственно, в треугольниках ABD и DBC. Найдите площадь треугольника BMN.

5. Решите неравенство

$$17^{\log_{\frac{1}{17}}\log_3 x}<3^{\log_{\frac{1}{3}}\log_{17}x}$$

6. В момент, когда два бассейна были пустыми, 5 труб одинаковой производительности были подключены для заполнения первого бассейна. Когда первый бассейн был заполнен на $\frac{1}{3}$ его объема, 2 трубы переключили для заполнения второго бассейна. Когда пер-

вый бассейн был заполнен на $\frac{1}{2}$ его объема, еще одну трубу переключили для заполнения второго бассейна. После этого оба бассейна наполнились доверху одновременно. Найдите отношение объемов бассейнов. (Временем на переключения пренебречь.)

7. Найдите все решения уравнения

$$|x+y-3xy+13|+\left|x^2y+xy^2-30\right|=0.$$

8. При каких значениях α уравнения

$$(2x-1)\alpha^2-\left(x^2-x+1\right)\alpha-\left(x^3-4x^2+3\right)=0,$$

$$(5-3x)\alpha^2+\left(5x^2-5x-2\right)\alpha-2\left(2x^3-8x^2+6\right)=0$$

не имеют общего решения?

Вариант 10
(географический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{|x-1|+10}{4|x-1|+3}>2.$$

2. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения

$$\cos\left(\pi\left(x^2-x+1\right)\right)=\cos(\pi(x-1)).$$

3. Решите уравнение

$$\log_{\left|\sin\frac{\pi x}{4}\right|}\left(9^x-3^{x+3}+30\right)=\log_{\left|\sin\frac{\pi x}{4}\right|}\left(3^x+3\right).$$

4. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых единственное решение имеет система неравенств

$$\begin{cases} by^2+4by-2x+7b+4\le 0,\\ bx^2-2y-2bx+4b-2\le 0.\end{cases}$$

5. В некоторый угол B вписаны две непересекающиеся окружности. Окружность большего радиуса касается сторон этого угла в точках A и C, меньшего — в точках A_1 и C_1. (Точки A, A_1 и C, C_1 лежат на разных сторонах угла B). Прямая AC_1 пересекает окружности большего и меньшего радиусов в точках E и F, соответственно. Найдите отношение площадей треугольников ABC_1 и A_1BC_1, если $A_1B=2$, $EF=1$, а длина AE равна среднему арифметическому длин BC_1 и EF.

6. На координатной плоскости постройте Г.М.Т. (геометрическое место точек), координаты $(x;\ y)$ которых соответствуют существованию остроугольного треугольника с длинами сторон 1; $|x|$; $\sqrt{-y}$. Построение обоснуйте, уравнения границ Г.М.Т. выпишите в ответ.

Вариант 11
(экономический факультет)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left|\sin\frac{\pi(x+y)}{4}\right|+\left|1-\sin\frac{\pi(x-y)}{4}\right|=0,\\ \sqrt{4-|x|-|y+2|}=\sqrt{4-|x|-|y+2|}.\end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{\left(x^2-2x-15\right)^3}}\cdot 7^{(x+3)^2(x-5)}\le 1.$$

3. Касательная, проведенная через вершину C вписанного в окружность треугольника ABC, пересекает продолжение стороны AB за вершину B в точке D. Известно, что радиус окружности равен 2, $AC=\sqrt{12}$ и $\angle CDA+\angle ACB=2\angle BAC$. Найдите секущую AD.

4. Имеются три пакета акций. Общее суммарное количество акций первых двух пакетов совпадает с общим количеством акций в третьем пакете. Первый пакет в 4 раза дешевле второго, а суммарная стоимость первого и второго пакетов совпадает со стоимостью третьего пакета. Одна акция из второго пакета дороже одной акции из первого пакета на величину, заключенную в пределах от 16 тыс.р. до 20 тыс.р., а цена одной акции из третьего пакета не меньше 42 тыс.р. и не больше 60 тыс.р. Определите, какой наименьший и наибольший процент от общего количества акций может содержаться в первом пакете.

5. Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, является нечетной, периодической с периодом 4 и на промежутке $-2\le x\le 0$ ее значения вычисляются по правилу $f(x)=2x(x+2)$. Решите уравнение

$$\frac{2\cdot f(-3-x)-3}{\sqrt{f\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)}-\sqrt{2}}=0.$$

6. Множество точек, расположенных внутри фигуры F, задано на координатной плоскости условием

$$\log_{\left(\frac{x^2+1039}{1147}\right)}\left(\frac{10y-24-y^2}{850}\right)>0.$$

Множество $F(t)$ получают из F поворотом вокруг начала координат против часовой стрелки на угол t. Найдите площадь фигуры, образованной точками, каждая из которых при некотором $t\in[0;\pi]$ принадлежит множеству $F(t)$.

Вариант 12
(факультет психологии)

1. Решите уравнение

$$3\cos^2x+4\sin x=0.$$

2. Решите неравенство:

$$\sqrt{t+3}>5-2t.$$

3. В возрастающей геометрической прогрессии сумма первого и последнего ее членов равна 164, а произведение второго и предпоследнего членов равно 324. Найдите последний член прогрессии.

4. При каких действительных p уравнение

$$4^x+2^{x+2}+7=p-4^{-x}-2\cdot 2^{1-x}$$

имеет решение?

5. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Через точку B на их общей касательной AB проведены две прямые, одна из которых пересекает первую окружность в точках M и N, а другая вторую окружность в точках P и Q. Известно, что $AB=6$, $BM=9$, $BP=5$. Найдите отношение площадей треугольников MNO и PQO, где O — точка пересечения прямых MP и NQ.

6. Найдите все значения параметров a и b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+5=b^2+2x-4y\\ x^2+(12-2a)x+y^2=2ay+12a-2a^2-27\end{cases}$$

имеет два решения (x_1,y_1) и (x_2,y_2), удовлетворяющие условию:

$$\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}.$$

Вариант 13
(социологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2+1}{x}<\frac{1}{x}-1.$$

2. В треугольнике ABC длина AB равна 4, длина BC равна 5. Из вершины B проведен отрезок BM ($M\in AC$), причем

$$\angle ABM=45^\circ \text{ и } \angle MBC=30^\circ.$$

а) В каком отношении точка M делит сторону AC? б) Вычислите длины отрезков AM и MC.

3. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{-3x+3}=x-1.$$

4. В дошкольном учреждении провели опрос. На вопрос: «Что Вы предпочитаете, кашу или компот?» — большая часть ответила: «Кашу», меньшая: «Компот», а один респондент: «Затрудняюсь ответить».

Далее выяснили, что среди любителей компота 30% предпочитают абрикосовый, а 70% — грушевый.

У любителей каши уточнили, какую именно кашу они предпочитают. Оказалось, что 56.25% выбрали манную, а 37.5% — рисовую, и лишь один ответил: «Затрудняюсь ответить».

Сколько детей было опрошено?

5. Решите систему

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt[2]{32}}\cdot 8^{3x^2} > 2^{x+3},\\ \left|\sqrt{2}x-1\right| = \sqrt{2}x-1.\end{cases}$$

6. Укажите все неотрицательные значения параметра a, при которых уравнение

$$\sin(2a)\cdot\sin^2(ax)+1=\left(1+\sin(2a)\right)\sin(ax)$$

имеет ровно 4 решения на отрезке $[-\pi;\pi]$.

Вариант 14

(Институт стран Азии и Африки)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{9-2x}+\sqrt{3}(x-2)=0.$$

2. Решите уравнение

$$2|x-5|-1=3|2x-5|-4|x-1|.$$

3. Решите уравнение

$$1-3\sin x\cos x-5\cos^2 x=0.$$

4. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}|1-x|-\log_{x-1}2\le 2.$$

5. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условиями

$$\begin{cases}y\le\sqrt{4-x^2},\\ y\ge|x-1|-3.\end{cases}$$

6. В прямоугольнике $ABCD$ на сторонах AB и AD выбраны соответственно точки E и F так, что

$$AE:EB=3:1,\ AF:FD=1:2.$$

Найдите отношение $EO:OD$, где O — точка пересечения отрезков DE и CF.

7. Найдите все пары целых x и y, удовлетворяющих уравнению

$$3xy-14x-17y+71=0.$$

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. На легкой нерастяжимой нити длиной L висит небольшой шарик массой m. По шарику нанесли удар в горизонтальном направлении. Известно, что пока шарик после удара двигался по дуге окружности, он поднялся на высоту h. Найдите среднюю силу, действовавшую на шарик во время удара, если длительность удара τ много меньше периода малых колебаний шарика. Трением пренебречь.

2. На невесомый гладкий стержень, согнутый под углом $\alpha=60°$ в горизонтальной плоскости, надеты две небольшие одинаковые муфты M. Муфты соединены между собой и с вершиной угла тремя легкими одинаковыми пружинами, как показано на рисунке 1.

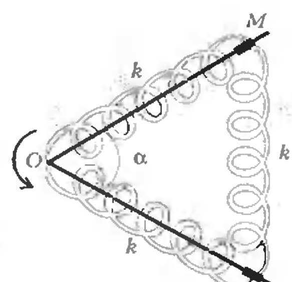


Рис. 1

Длина недеформированной пружины L, жесткость k. Какую работу нужно совершить, чтобы раскрутить эту систему вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O, до такой скорости, при которой длина пружин увеличится в n раз?

3. К грузу массой M, висящему на легкой пружине жесткостью k, на нити подвешен второй груз так, что центры масс грузов лежат на одной вертикали, совпадающей с осью пружины. После пережигания нити первый груз совершает гармонические колебания, при которых амплитуда его скорости равна v_m. Найдите массу второго груза.

4. В закрытом теплоизолированном сосуде при температуре $t_1=527$ °C находился озон (O_3), который через некоторое время превратился в кислород (O_2). Во сколько раз в результате этого изменилось давление в сосуде, если на образование одного моля озона из кислорода нужно затратить $q=142$ кДж тепла, а изохорическая молярная теплоемкость кислорода составляет $C_V=21$ Дж/(моль · К)?

5. Закрытый с двух торцов цилиндр, ось которого горизонтальна, разделен на две части тонким гладким подвижным поршнем. В первой части находится $m=1$ г азота, а во второй — $M=2$ г воды. Температура в цилиндре $t=100$ °С, объем цилиндра $V=2$ л. Какую часть объема занимает азот?

6. К концу тонкого вертикального вала на легкой нерастяжимой изолирующей нити длиной L подвешен небольшой шарик массой m, имеющий заряд q. Под шариком на расстоянии h находится равномерно заряженная с поверхностной плотностью σ горизонтальная плоскость. Вал начинают медленно раскручивать. При каких угловых скоростях вращения вала нить будет устойчиво отклонена от вертикали?

7. Найдите изменение энергии конденсатора C_2 после замыкания ключа в

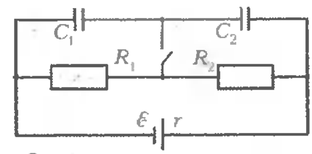


Рис. 2

схеме, изображенной на рисунке 2. Сопротивления резисторов, емкости конденсаторов, внутреннее сопротивление и ЭДС батареи указаны на рисунке.

8. Три одинаковые металлические параллельные шины, лежащие в одной плоскости, находятся в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной этой плоскости. Направление поля, расстояния между шинами, ЭДС батареи и сопротивления

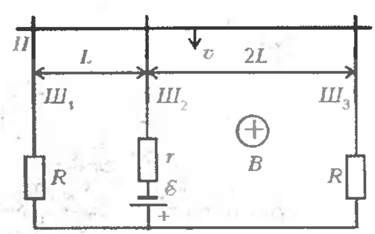


Рис. 3

резисторов указаны на рисунке 3. По шинам, перпендикулярно им, равномерно перемещают металлическую перемычку $П$. Пренебрегая сопротивлением шин, перемычки и контактов, найдите скорость v движения перемычки, при которой ток в средней шине будет равен нулю.

9. Какова оптическая сила линзы, с помощью которой можно получить увеличенное или уменьшенное изображение предмета на экране, находящемся от него на расстоянии $L=0{,}9$ м, если отношение размеров получаемых изображений $\alpha = 4$?

10. На дифракционную решетку с периодом $d = 64$ мкм нормально падает параллельный пучок света, энергия каждого фотона которого равна $W = 4 \cdot 10^{-19}$ Дж. За решеткой, параллельно ее плоскости, расположена тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 5$ см, а за ней в фокальной плоскости — экран. Найдите расстояние между главными максимумами первого порядка на экране.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Известно, что сила тяжести, действующая на тело на высоте h над поверхностью планеты на полюсе, равна весу этого же тела на поверхности планеты на экваторе. Найдите период вращения планеты вокруг оси, если радиус планеты R, а ускорение свободного падения у поверхности на полюсе g. Планету считать однородным шаром.

2. Тонкая однородная палочка, подвешенная за один из концов на шарнире, опирается другим концом о горизонтальную поверхность тележки, образуя с вертикалью угол $\alpha = 45°$ (рис.4).

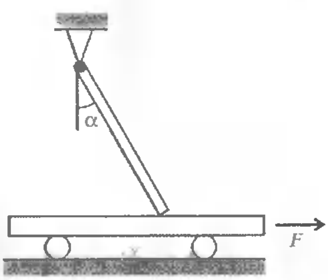


Рис. 4

Какую силу нужно приложить к тележке, чтобы она двигалась вправо по горизонтальному столу с постоянной скоростью? Масса палочки $m = 100$ г, коэффициент трения между нею и поверхностью тележки $\mu = 0{,}2$. Трением между тележкой и столом пренебречь, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

3. На покоящийся на гладком горизонтальном столе клин массой $M = 1$ кг с высоты $h = 50$ см падает шарик массой $m = 10$ г и отскакивает под углом $\alpha = 30°$ к горизонту (рис.5). Найдите скорость клина после удара. Соударение между шариком и клином считать абсолютно упругим, трение между клином и столом не учитывать, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

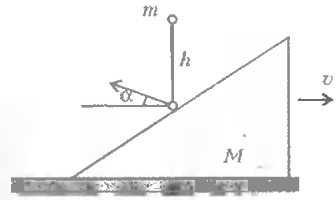


Рис. 5

4. Тело, состоящее из куска льда и вмерзшего в него алюминиевого бруска, плавает в воде так, что под водой находится $\alpha = 95\%$ объема тела. Какой процент льда должен растаять, чтобы тело полностью погрузилось в воду? Плотность воды $\rho_в = 10^3$ кг/м^3, льда $\rho_л = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, алюминия $\rho_а = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3.

5. На гладкой наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, покоится брусок массой $m = 200$ г, удерживаемый пружиной жесткостью $k = 5$ Н/м, как показано на рисунке 6.

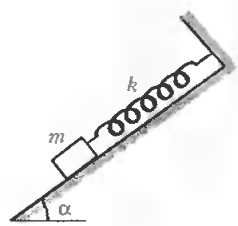


Рис. 6

Бруску сообщают начальную скорость $v_0 = 0{,}1$ м/с, направленную вдоль наклонной плоскости вверх. На какую максимальную высоту относительно исходного уровня поднимется брусок? Трение не учитывать.

6. Вертикально расположенный замкнутый цилиндрический сосуд разделен на две части подвижным поршнем. В обеих частях сосуда находится один и тот же идеальный газ. Расстояние между поршнем и дном сосуда $H_1 = 30$ см. Сосуд переворачивают так, что дном становится его верхняя плоскость, при этом расстояние между дном сосуда и поршнем составляет $H_2 = 20$ см. Найдите отношение массы газа, содержавшегося в той части сосуда, которая первоначально находилась вверху, к массе газа в другой части сосуда. Высота сосуда $L = 60$ см. Температуру считать постоянной, толщиной поршня пренебречь.

7. Идеальный газ переводится из состояния с параметрами $p_1 = 200$ кПа и $T_1 = 500$ К в состояние с параметрами $p_2 = 138$ кПа и $T_2 = 300$ К так, что объем газа меняется по закону $V = a + bT$, где a и b — постоянные, $T_1 \geq T \geq T_2$. Определите максимальную концентрацию молекул газа в этом процессе. Постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

8. В вертикально расположенном цилиндре под тяжелым поршнем находится моль идеального газа при температуре $T = 300$ К. Какова потенциальная энергия поршня? Универсальная газовая постоянная равна $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К). Атмосферным давлением пренебречь. Потенциальную энергию поршня на уровне дна сосуда принять равной нулю.

9. При включении приборов по схеме, изображенной на рисунке 7,*а*, амперметр показывает ток $I_1 = 1{,}06$ А, а

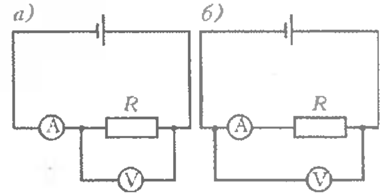


Рис. 7

вольтметр — напряжение $U_1 = 59{,}6$ В. При включении тех же приборов по схеме на рисунке 7,*б* амперметр показывает ток $I_2 = 0{,}94$ А, а вольтметр — напряжение $U_2 = 60$ В. Определите сопротивление резистора R, считая напряжение на зажимах батареи неизменным.

10. С помощью линзы с фокусным расстоянием $F = 20$ см на экране получено изображение предмета с увеличением $\Gamma = 2$. Чему равно расстояние между предметом и экраном?

Химический факультет

1. На гладкой горизонтальной поверхности лежит прямоугольный клин с углом $\alpha = 15°$ при основании, упираясь торцом в неподвижную вертикальную стенку (рис.8). По наклонной грани клина соскальзывает без трения брусок массой $m = 0{,}2$ кг. Найдите силу нормального давления клина на стенку.

2. К нижнему концу поплавка прикреплена леска с грузом. Определите силу натяжения лески, если плавающий поплавок погружен в воду на $k = 2/3$ своей длины. Масса поплавка $m = 10$ г. Принять $g = 10$ м/с^2.

3. На легкой нерастяжимой нити подвешен маленький шарик. Период малых колебаний такого маятника $T =$

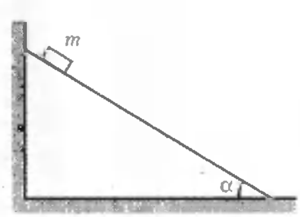


Рис. 8

$= 1{,}3$ с. На какой максимальный угол будет отклоняться нить от вертикали, если при колебаниях шарик, проходя положение равновесия, движется со скоростью $v = 2{,}1$ м/с? Принять $g = 10$ м/с^2.

4. В закрытом помещении объемом $V = 83$ м^3 стоит сосуд с водой. Какая масса воды испарится из сосуда после установления равновесия, если температуру в помещении повысить от $t_1 = 7$ °С до $t_2 = 17$ °С? Давление насыщенного водяного пара при t_1 равно $p_1 = 1120$ Па, при t_2 — $p_2 = 2200$ Па.

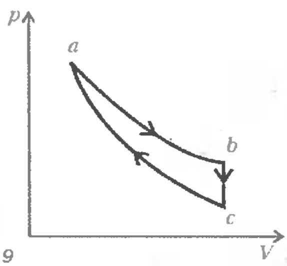


Рис. 9

Молярная масса воды $M = 0{,}018$ кг/моль. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).

5. Идеальный газ участвует в циклическом процессе, график которого приведен на рисунке 9 (ab — изотерма, bc — изохора, ca — адиабата). При изотермическом расширении газ совершает работу $A = 1$ Дж. В изохорной стадии процесса газ охлаждается на $\Delta T = 2$ К. Найдите термодинамический КПД цикла, принимая изохорную теплоемкость газа равной $C_V = 0{,}49$ Дж/К.

6. Два конденсатора с электроемкостями $C_1 = 5$ мкФ и $C_2 = 10$ мкФ соединены параллельно и через резистор R присоединены к источнику постоянного напряжения с ЭДС $\mathcal{E} = 60$ В (ключ K в положении *1* на рисунке 10). Какое количество теплоты выделится на резисторе при полном разряде конденсаторов, если ключ K перевести в положение *2*?

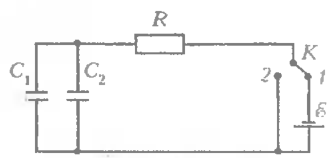


Рис. 10

7. Электрон движется в однородном магнитном поле по окружности с периодом обращения $T_e = 1{,}1 \cdot 10^{-8}$ с. Каков будет период обращения по окружности протона в том же магнитном поле? Масса электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, масса протона $m_p = 1{,}7 \cdot 10^{-27}$ кг.

8. При равномерном изменении силы тока через проволочную катушку за время $\Delta t = 0{,}05$ с в ней возникает ЭДС самоиндукции $\mathcal{E} = 10$ В. Катушка содержит $N = 1000$ витков. Какой заряд протечет за это время через замкнутый проволочный виток, надетый на катушку? Сопротивление витка $R = 0{,}2$ Ом.

9. Расстояние между предметом и его изображением, полученным при помощи линзы, равно $L = 25$ см. Найдите оптическую силу линзы, если изображение прямое и увеличенное в $k = 2$ раза.

10. Лазер излучает свет с длиной волны $\lambda = 495$ нм, потребляя мощность $P = 40$ Вт. Сколько фотонов ежесекундно излучает лазер, если в энергию света переходит $\eta = 10\%$ потребляемой энергии? Постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Публикацию подготовили В.Алексеев, И.Иновенков, Г.Медведев, В.Панферов, В.Погожев, М.Потапов, И.Сергеев, В.Серов, А.Склянкин, А.Соколихин, В.Ушаков, А.Часовских, С.Чесноков

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

ТРУДНЫЙ ДЕНЬ

Результаты кросса сведем в следующую таблицу:
Сергей — 2 место или Коля — 3 место;
Борис — 3 место или Петя — 5 место;
Петя — 1 место или Борис — 2 место;
Сергей — 2 место или Ваня — 4 место;
Коля — 1 место или Ваня — 4 место.

Предположим, что Сергей действительно занял 2 место, тогда Коля занял не 3 место, а Ваня не 4 место. Раз Ваня занял не 4 место, то Коля занял 1 место, а Борис занял 2 место. Значит, наше предположение отпадает, т.е. Сергей занял не 2 место, но тогда Коля занял 3 место, а Ваня — 4, поэтому Борис занял не 3 место, а Петя занял не 1 место, значит, Борис занял 2 место. Попробуем расставить всех по местам. На втором месте — Борис, на третьем — Коля, на четвертом — Ваня, на пятом — Петя. Кто же на первом месте? Остается Сергей. Если он вошел в пятерку победителей, то он — первый. А если нет, то это мог быть кто-то еще.

Выясним, как назвали новую молодежную организацию. Если в каждой делегации по n человек и если за первое название хотят голосовать x делегатов «Зеленого фронта», то за второе название будут головать $(n - x)$ делегатов этой группы и x делегатов от «Эко». Это уже n человек. Если, кроме того, за второе название голосуют y делегатов от «Искателей истины» и все делегаты «Красного патруля», то тогда их общее число равно $2n + y$. Но Степа выяснил, что $y = (2n + y)/3$, откуда $y = n$, т.е. все делегаты от «Искателей истины» голосуют за второе название. Но это не так. Значит, делегаты «Красного патруля» голосуют за первое название, и в этом случае за первое название голосуют $3n - y$ делегатов, а за второе $n + y$ делегатов. Но первое число больше $2n$, а второе — меньше $2n$. Ясно, что проходит первое название — «Зеленый мыслитель».

Осталось разобраться с танцевальными парами. Используем то, что в каждой паре разность возрастов равна трем. А три — нечетное число. Значит, сумма этих возрастов — тоже нечетное число. Поэтому Юля не может танцевать ни с Игорем, ни с Антоном. Получаем, что Юля танцует с Борисом. Если обозначить возраст Юли через x, то возраст Игоря равен $36 - x$, а возраст Антона равен $40 - x$. Значит, Игорь моложе Антона и он танцует с той из двух оставшихся девушек, которая моложе. А самая молодая — это Ира. Итак, Юля танцует с Борисом, Ира — с Игорем, а Светлана — с Антоном. Еще известно, что им всем вместе 115 лет. Поэтому можно узнать, сколько лет каждому. Итак, Юле — x лет, Игорю — $(36 - x)$ лет, Антону — $(40 - x)$ лет, Борису — $(x + 3)$ года, Ире — $(36 - x - 3)$ года и Светлане — $(40 - x - 3)$ года. Складывая все возрасты, получаем $(149 - 2x)$ лет, а приравняв это число к 115, получаем, что $x = 17$. Поэтому Юле — 17 лет, Игорю — 19 лет, Антону — 23 года, Борису — 20 лет, Ире — 16 лет и Светлане — 20 лет.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6—8»

(см. «Квант» №4 за 1997 г.)

1. Ясно, что меньшее из искомых чисел должно оканчиваться на несколько девяток, а следующее — на столько же нулей. При этом сумма девяток должна при делении на n иметь тот же остаток, что и 1, т.е. равна единице, так как при переходе от числа с k девятками на конце к числу на единицу большему сумма цифр числа уменьшается на $9k - 1$.

Покажем, что для любого n, не делящегося на 3, существует число k, при котором $9k - 1$ делится на n. Предположим противное и рассмотрим n чисел: $9-1$, $18-1$, $27-1$, ..., $9n-1$. По предположению, ни одно из них не делится на n, следовательно, среди n остатков этих чисел от деления на n есть равные: $9p-1$ и $9q-1$. Их разность, равная $9(p-q)$, должна делится на n, но n не делится на 3, поэтому $p-q$ должно делиться на n, а эта разность меньше, чем n. Противоречие.

Теперь, чтобы построить искомые числа, возьмем для данного числа n указанное нами число k и составим число M, которое оканчивается ровно на k девяток, а предыдущие цифры возьмем так, чтобы их сумма была на единицу меньше числа, делящегося на n. Нетрудно видеть, что числа M и $M+1$ удовлетворяют условию задачи.

2. Да, можно. $1993^2 + 1994^2 + 1996^2 + 1999^2 = 1992^2 + 1995^2 + 1997^2 + 1998^2$. Любопытно, что если каждое из чисел, стоящих под знаком квадрата, увеличить или уменьшить на одно и то же число, то равенство сохранится.

3. Из условий задачи следует, что $CQ = AP$, а $CM = AN$ (рис.1), поэтому треугольник ANP может быть получен из треугольника CMQ с помощью параллельного переноса и последующего поворота на 120°. Отсюда следует, что один из углов между отрезками NP и QM равен 60°, а другой — 120°.

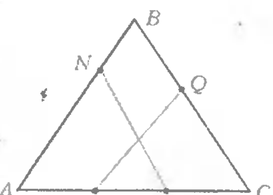


Рис. 1

4. Выберем человека, говорившего с наибольшим количеством соучеников (для удобства назовем его Вася). Это количество обозначим через n. Одноклассники, с которыми он говорил, очевидно, не говорили между собой, иначе были бы тройки одноклассников, говоривших между собой.

Остальные $25-n$ человек говорили не более чем с n соучениками. В это число вошли и все разговоры Васиных собеседников, поскольку они не разговаривали между собой. Таким образом, всего было не более $n(25-n)$ разговоров. Найдем число n, при котором эта величина будет наибольшей.

$$n(25-n) = -\left(n^2 - 25n + \left(\frac{25}{2}\right)^2\right) + \left(\frac{25}{2}\right)^2 = \frac{625}{2} - \left(n - \frac{25}{2}\right)^2;$$

выражение в скобках минимально при $n = 12$ или 13 и равно $1/4$. Значит, число разговоров не превосходит $625/4 - 1/4 = 156$.

Ровно 156 разговоров будет в том случае, когда 12 Васиных собеседников позвонят остальным 13 одноклассникам. Ясно, что при этом никакие трое не будут говорить друг с другом.

5. При публикации этой задачи выпало еще одно условие: «Для любых трех попугаев можно указать четвертого, который травмировал одного из них».

Без этого условия задача некорректна. Например, если перессорились 12 троек попугаев и еще двое, то в каждой тройке всех попугаев следует посадить в разные клетки, что невозможно, так как в одну из клеток следует посадить только 6 попугаев.

УСРЕДНЕНИЕ ПО ОКРУЖНОСТИ

1. Если сумма двух целых чисел четна (равна 10), то разность их тоже четна.

3. Расположите числа по окружности и рассмотрите 100 произведений, в каждом из которых участвуют 17 подряд идущих чисел. Все эти произведения больше 1. Корень 17-й степени из произведения этих произведений равен произведению 100 данных чисел.

4. Заметив, что $0 < (p+q+r) + (r+s+t) = r$, сразу получаем желанное противоречие: $0 > (q+r) + (r+s) = (q+r+s) + r > 0$.

6. Например, $a + b = -7$, $c = 8$.

7. Нет, пешеход мог пройти от 15 до 20 км.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Свойства стали и мрамора обусловливают упругость соударения, а стали и асфальта — неупругость.

2. Во втором случае импульс тела «гасится» за большее время, поэтому на тело действует меньшая сила.

3. Снаряд действует на автобус слишком краткое время, чтобы передать ему импульс, сравнимый с тем, что могут сообщить люди.

4. Нет, не опасны. Ускорение, приобретаемое массивной наковальней при упругом ударе молотком, практически равно нулю. Следовательно, и сила, действующая на атлета, также очень мала.

5. Свинцу.

6. Если ружье подвешено, то, вследствие его отдачи при выстреле, начальная скорость, а значит и дальность полета пули, будет меньше, чем в случае закрепленного ружья.

7. Импульс, приобретаемый снарядом при выстреле из базуки, «принимает» на себя не ствол орудия, а вылетающие в противоположном направлении газы.

8. После удара одного правого шара отскочит крайний левый шар, при этом его нить отклонится на угол, равный углу отклонения нити правого шара. После удара двух правых шаров отскочат два крайних левых шара; после удара трех правых шаров отскочат три крайних левых шара, а два останутся неподвижными.

9. Шарик отразится от клина в горизонтальном направлении и полетит по параболе.

10. Чем сильнее накачан мяч, тем более он упругий. При ударе по неупругому мячу приобретаемая им скорость, а следовательно, и дальность полета будут меньше, чем при упругом ударе.

11. Расслабляя руки и подаваясь назад, игрок увеличивает время торможения мяча и ослабляет удар.

12. Реактивная сила тяги, например, не зависит от скорости тела, на котором установлен реактивный двигатель.

13. Центр масс снаряда до и после взрыва (точка C на рисунке 2) имеет одну и ту же скорость, поэтому будет продолжать двигаться по параболе, которую описывал бы неразорвавшийся снаряд. Поскольку у осколков равные массы, они в своем движении будут располагаться симметрично относительно параболы центра масс. Значит, второй осколок упадет в точке D такой, что $BD = AB$.

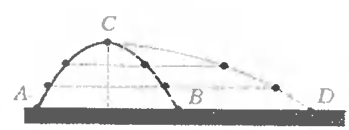


Рис. 2

14. Перемещения молекул затрудняются из-за многочисленных столкновений друг с другом.

15. Чем меньше поверхность частицы, тем более нескомпенсированы удары по ней молекул.

16. При меньших плотностях газа длина свободного пробега электронов, ионизирующих атомы газа, увеличивается, поэтому необходимую для ионизации энергию они «набирают» при более низком напряжении.

17. Сообщив им дополнительную энергию, например в результате соударений с летящими ионами или электронами.

18. Масса нейтрона близка к массе протона. Поэтому при столкновении с атомом водорода нейтрон теряет больше энергии, чем при столкновении с ядром свинца.

Микроопыт

Отскочив от пола, большой мяч сталкивается с маленьким и передает ему часть своей кинетической энергии и импульса. В результате маленький мяч подпрыгнет на большую высоту, чем та, с которой он упал.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАРЯДА НА ТОНКОМ ДИСКЕ

$$A = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(1 - \frac{4d}{\pi R}\right).$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

1. $v = \sqrt{2gH + \left(v_1^2 + v_2^2\right)/2}$.

2. $v_{\min} = \sqrt{2\mu g l}$.

3. $\Delta l_{\max} = \frac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{k}{m}\left(\frac{v}{g}\right)^2}\right) \approx 0{,}58$ м.

4. $\mu = \frac{2m_1 v^2}{lg(m_1 + m_2)}$.

5. $N = \frac{(Mg)^{3/2}}{2l}\left(\frac{RT}{\pi p M}\right)^{1/2} = 29{,}5$ кВт.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ.М.В.ЛОМОНОСОВА

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $(3;+\infty)$. **2.** 2. **3.** $3\pi + \arccos\frac{10}{11}$.

4. $9\sqrt{2}$. *Указание.* Из условия задачи имеем $AD\cdot CE = DC\cdot AE$, т.е.

$$\frac{AE}{CE} = \frac{AD}{DC},$$

поэтому E — точка пересечения биссектрисы угла ADC со стороной AC треугольника ACD. Следовательно,

$$\angle CDB = \angle ADB = \frac{\pi}{8} \text{ и } AB = BC.$$

На луче DC отложим отрезок $CM = AD$. Треугольник BCM равен треугольнику ABD. Потому искомая площадь равна площади равнобедренного треугольника DBM.

5. 8. *Указание.* Пусть O — центр данного шара, а K, L, M — середины хорд AA', BB', CC' соответственно. Из условия следует, что

$$AS = BS = CS = 8, \quad A'S = B'S = C'S = 3.$$

Точки K, L, M лежат на сфере с диаметром OS, служащей описанной сферой тетраэдра $SKLM$, подобного тетраэдру $SABC$ с коэффициентом

$$\frac{SA}{SK} = \frac{16}{5}.$$

Наконец из очевидного равенства $OS^2 - KS^2 = OA^2 - AK^2$ получаем, что $OS = 5$.

6. $[-15;-5)\cup\{1\}$. *Указание.* Изобразите множество решений неравенства на плоскости xOa (рис.3). Горизонтальное сечение этого множества содержит ровно две точки с целочисленной координатой x тогда и только тогда, когда либо $a = 1$, либо $f(-3) \le a < f(-2)$ (где $f(x) = \frac{x^3+x}{2}$), т.е.

$$-15 \le a < -5.$$

Вариант 2

1. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, πn, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** $\left[\log_2\frac{1}{3};2\right)\cup\left(2;\log_2\frac{13}{3}\right)$. **3.** 160 км.

4. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$. *Указание.* Докажите, что треугольники ABC и LMC подобны по двум углам с коэффициентом $k = 3$, а $KC = NC$.

5. Нет корней при $a < -1$; $\pm\sqrt{\frac{2-a}{6}}$, $\pm\sqrt{\frac{a}{2}}$ при $-1 \le a \le 0$; $\pm\sqrt{\frac{2-a}{6}}$ при $0 < a < \frac{1}{2}$; $\pm\sqrt{\frac{2-a}{6}}$, 0 при $\frac{1}{2} \le a \le 2$; 0 при $a > 2$.

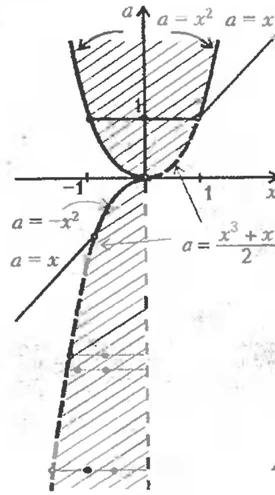


Рис. 3

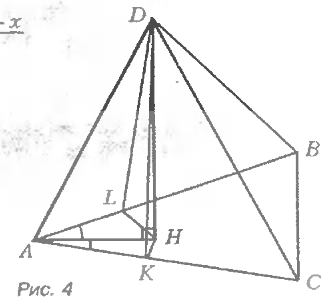


Рис. 4

Указание. Уравнение приводится к виду

$$\left|y^2 + \frac{(a+1)\left(a+\frac{5}{2}\right)}{18}\right| = \frac{a}{2}y + \frac{a+1}{6},$$

где

$$y = \left|x^2 + \frac{2a-1}{6}\right|.$$

6. $\frac{18}{5}$. *Указание.* Высота DH пирамиды $ABCD$ совпадает с диаметром внутренней сферы. Действительно (рис.4), если $DK \perp AC$ и $DL \perp AB$, то

$$AL = AK = AD\cdot\cos\angle CAD = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

$$\cos\angle HAL = \cos\angle HAK = \sqrt{\frac{1+\cos\angle BAC}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

$$AH = \frac{AK}{\cos\angle HAK} = \sqrt{5}, \quad DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = 2.$$

Отсюда следует, что центр внешней сферы лежит на прямой DH.

Вариант 3

1. 10 км/ч.

2. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

3. $\pi - \left(\arcsin\frac{3}{\sqrt{20}} + \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

$\arcsin\frac{3}{\sqrt{20}} + \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} + 2\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

4. $\left(\log_2\left(\sqrt{6}-2\right);\log_3\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)$. *Указание.* Выполните замену $u = 2^x$, $v = 3^y$.

5. $\frac{21-\sqrt{357}}{4}$. *Указание.* Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников AOC и AOB соответственно, $\angle AOC = \alpha$, $\angle AOB = \beta$. По теореме синусов $\sin\alpha = \frac{AC}{2\cdot 5}$, $\sin\beta = \frac{AB}{2\cdot 4}$, т.е. $\sin\alpha = \frac{7}{10}$, $\sin\beta = \frac{3}{4}$. По формуле Герона площадь S треугольника O_1O_2O равна

$$S = \frac{15}{4}\sqrt{7} = \frac{1}{2}\cdot\frac{OA}{2}\cdot O_1O_2,$$

откуда находится $OA = \frac{5}{2}\sqrt{7}$, а так как $AC = 7 > \frac{5}{2}\sqrt{7}$, $AB = 6 < \frac{5}{2}\sqrt{7}$, угол β — острый и угол α — тупой. Теперь можно найти OC по теореме косинусов из треугольника AOC.

6. $a \in \left[\frac{11-\sqrt{77}}{2}, 2\right) \cup \left(9, \frac{11+\sqrt{77}}{2}\right]$. Функция

$$f(x) = 5\sqrt{x(7-x)} - \sqrt{(7-x)(-x^2+17x+1)}$$

определена при $0 \le x \le 7$ и равна

$$f(x) = \frac{\sqrt{7-x}}{5\sqrt{x} + \sqrt{-x^2+17x+1}} \cdot (x^2+8x-1).$$

Далее воспользуйтесь свойствами монотонности функции f: она монотонно возрастает и неположительна при $x \in \left[0, \sqrt{17}-4\right]$ и положительна при $x \in \left(\sqrt{17}-4, 7\right]$.

Вариант 4

1. $\pi(2k+1)/2$, $\pi(4k+1)/4$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **2.** $(-\infty; -2) \cup (-1; 2)$. **3.** -3; -2; 1. **4.** 6. **5.** $(-\infty; 0) \cup (1; 3)$. **6.** n/m. **7.** $a \in (1; 3)$. **8.** $\sqrt{11}$. *Указание.* Пусть S' — точка, симметричная точке S отосительно центра четырехугольника $ABCD$. Рассмотрите два параллелограмма $SBS'D$ и $SCS'A$ с одинаковыми диагоналями.

Вариант 5

1. $\pi(2n+1)/4$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** $1/(1-\log_4 5)$. **3.** $\left[-1; 5^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} - 2\right]$.
4. $2+\sqrt{6}$. **5.** $\left(\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}\right)$.
6. $21\sqrt{13}/10$. *Указание.* Основание высоты пирамиды — центр окружности, вписанной в основание пирамиды.
7. $\left[-1; \left(\frac{a-2}{a-1}\right)^2 - 1\right)$ при $a < 1$; $[-1; +\infty)$ при $1 \le a < 2$; $x > \left(\frac{a-2}{a-1}\right)^2 - 1$ при $a \ge 2$.
8. $\frac{bc}{a}$. *Указание.* Докажите подобие треугольников ANB и DMC, для чего воспользуйтесь тем, что около каждого из четырехугольников $MBCN$ и $AMND$ можно описать окружность.

Вариант 6

1. $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$. **2.** $(-\infty; 0)$. **3.** $\pm\arccos\frac{\sqrt{2}-4}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
4. 6; нет.
5. 25. *Указание.* Докажите, что угол ACB — прямой.
6. $(8+2\sqrt{2})/7$, $(8-2\sqrt{2})/7$. *Указание.* Из неравенства

$$x^2 + 2y^2 \ge 2x(\sqrt{2}y),$$

справедливого для всех x, y, и равенства

$$x^2 - xy + 2y^2 = 1$$

получаем, что

$$x^2 + 2y^2 \ge 2\sqrt{2}xy = 2\sqrt{2}\left(x^2 + 2y^2 - 1\right),$$

т.е.

$$x^2 + 2y^2 \le \left(8 + 2\sqrt{2}\right)/7,$$

и аналогично

$$x^2 + 2y^2 \ge -2\sqrt{2}xy = -2\sqrt{2}\left(x^2 + 2y^2 - 1\right),$$

или

$$x^2 + 2y^2 \ge \left(8 - 2\sqrt{2}\right)/7,$$

которые обращаются в равенства при $x = \sqrt{2}y$ и $-\sqrt{2}y$ соответственно.

Вариант 7

1. $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$.
2. $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$, $(-1)^k \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \pi k$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$.
3. $\left[-5+\sqrt{23}; -\frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{3}{8}; 3-\sqrt{5}\right] \cup \left[3+\sqrt{5}; +\infty\right)$.
4. 60. *Указание.* Пусть x и y — количества красных и синих карандашей соответственно. Тогда $x < y$. После первого перекладывания в 1-й и 2-й коробках оказалось соответственно $0{,}6x$ и $y + 0{,}4x$ карандашей. Поэтому x делится на 5. Далее получаем, что $y = 130 - \frac{7}{5}x$. Из неравенства $y > x$ получаем, что $x < 55$. Также справедливо неравенство $0{,}8y + 0{,}32x > 1{,}05y$, откуда $x > 48$. Так как x делится на 5, то $x = 50$ и $y = 130 - \frac{7}{5}x = 60$.
5. $\frac{1}{2}$. *Указание.* Треугольники AMC и CNM подобны, поэтому $\frac{AC}{MC} = \frac{MC}{MN}$ и $MC = \sqrt{2}$. Осталось применить теорему синусов к ΔMNC.
6. $\left[\frac{11\pi}{24}; \frac{\pi}{2}\right)$. *Указание.* Рассматривая первое и третье неравенства как квадратичные относительно x^2 и x соответственно и выписывая их дискриминанты (зависящие от x) вместе с естественными ограничениями, вытекающими из условия, получаем систему-следствие:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \sin x > 0, \\ \cos x > 0, \\ \sin x > \frac{x}{5}, \\ \cos x < \frac{x}{5}, \\ \left(x - \frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{11\pi}{24}\right) \ge 0, \end{cases}$$

решения которой — промежуток $\left[\frac{11\pi}{24}; \frac{\pi}{2}\right)$. Для доказательства того, что любое число $x \in \left[\frac{11\pi}{24}; \frac{\pi}{2}\right)$ является решением, необходимо проделать довольно длинную цепочку вычислений и оценок. Например, третье неравенство выполняется, поскольку

$$x^2 - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\cos x}} + \frac{5}{4} \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{11\pi}{24}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} + \frac{5}{4} < 0$$

$$\left(\sin\frac{11\pi}{24} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{11\pi}{12}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}}\right).$$

Аналогично следует поступить и с первым неравенством.

Вариант 8

1. 9. **2.** $(1/5; 1) \cup (1; +\infty)$. **3.** πk, $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
4. 8. **5.** $\sqrt{3}/4$; 7.
6. $a \le x \le -a$ при $a < -1$; $-\sqrt{-2a-1} \le x \le \sqrt{-2a-1}$ при $-1 \le a \le -1/2$, нет решений при $a > -1/2$.

Вариант 9

1. Одно решение. **2.** $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
3. $[0; 900) \cup (3600, +\infty)$. **4.** $\frac{20}{9}$. **5.** $(1; +\infty)$. **6.** $31 : 36$.
7. $(x; y) = (2; 3)$ или $(x; y) = \left(-9 + \sqrt{\frac{248}{3}}; -9 - \sqrt{\frac{248}{3}}\right)$.

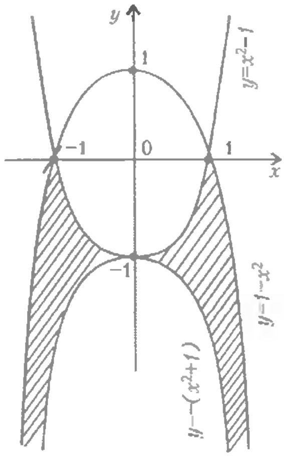


Рис. 5

8. $\alpha\ne0$; $\alpha\ne1$; $\alpha\ne-3/4$.

Вариант 10

1. $\left(\frac{3}{7};\frac{11}{7}\right)$. 2. $1-\sqrt3$. 3. 3.

4. $1/3$. 5. $1+\sqrt{\frac52}$.

6. $y=-(x^2+1)$, $y=\pm(x^2-1)$ (рис. 5).

Вариант 11

1. $(-1;-3)$; $(1;-1)$.

2. $(-\infty;-3]\cup\{5\}$.

3. $3/\sin15^\circ$ или $3/\sin75^\circ$.

4. 12,5% и 15%.

5. $-\frac12+8k$.

6. $112\pi-12\sqrt3$.

Вариант 12

1. $(-1)^n\arcsin\frac{2-\sqrt{13}}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. 2. $\left(\frac{21-\sqrt{89}}{8};+\infty\right)$.

3. 162. 4. $[17;+\infty)$. 5. $\frac{625}{121}$.

6. $a=4$, $b\in\left(-3-\sqrt{45};3-\sqrt{45}\right)\cup\left(-3+\sqrt{45};3+\sqrt{45}\right)$.

Вариант 13

1. $(-\infty;-1)$. 2. а) $\frac{4\sqrt2}{5}$; б) $\frac{4\sqrt2}{5+4\sqrt2}\sqrt{41-10\sqrt2\left(\sqrt3-1\right)}$; $\frac{5}{5+4\sqrt2}\sqrt{41-10\sqrt2\left(\sqrt3-1\right)}$.

3. 1. 4. 27. 5. $(7/9;+\infty)$. 6. $\left\{\frac{3\pi}{4}\right\}\cup\left[\frac72;\frac92\right)$.

Вариант 14

1. $1/3$. 2. $\left\{\frac54\right\}\cup[5;+\infty)$. 3. $\frac{\pi}{4}+k\pi$, $\operatorname{arctg}4+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

4. $\left\{\frac32\right\}\cup(2;+\infty)$. 5. $2\pi+7$. 6. $5:4$.

7. $(4;3)$; $(6;13)$; $(14;5)$.

ФИЗИКА

Физический факультет

1. Поскольку длительность удара по шарику много меньше периода его малых колебаний, можно считать, что за время удара шарик не смещается от своего положения равновесия. Тогда на основании закона сохранения импульса можно утверждать, что после удара шарик будет иметь скорость $v=f\tau/m$, где f — искомая величина средней силы удара. После удара шарик начнет двигаться по дуге окружности радиусом L.

Если $h<L$, шарик все время будет двигаться по дуге окружности, поэтому в соответствии законом сохранения механической энергии можно записать

$$\frac{mv^2}{2}=mgh.$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом случае

$$f=\frac{m\sqrt{2gh}}{\tau}.$$

Если $L<h<2L$, шарик оторвется от дуги окружности, когда его скорость (за счет увеличения потенциальной энергии системы шарик – нить – Земля) станет равной v_0, удовлетворяющей условиям

$$\frac{mv_0^2}{L}=\frac{mg(h-L)}{L}\ \text{и}\ \frac{mv^2}{2}=\frac{mv_0^2}{2}+mgh.$$

Поэтому

$$f=\frac{m\sqrt{(3h-L)g}}{\tau}.$$

Если же, наконец, $h=2L$, шарик все время после удара будет двигаться по окружности и можно определить лишь минимальное значение силы удара. Если обозначить скорость шарика в верхней точке траектории $v_в$, то из условий

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mv_в^2}{2}+2mgL\ \text{и}\ \frac{mv_в^2}{2}\ge mg$$

следует, что

$$f\ge\frac{m\sqrt{5gL}}{\tau}.$$

2. На рисунке 6 показаны силы, действующие в горизонтальной плоскости на одну из муфт со стороны прикрепленных к ней пружин, когда стержень вращается с такой угловой скоростью ω, при которой длина пружин увеличилась в n раз. (При этом учтено, что оси пружин образуют правильный треугольник.) Из рисунка с учетом второго закона Ньютона и закона Гука следует, что

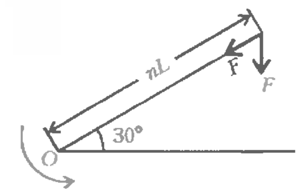


Рис. 6

$$m\omega^2nL=1{,}5F=1{,}5kL(n-1).$$

Пренебрегая силами трения и учитывая, что при раскручивании системы за счет совершенной работы увеличилась энергия упругой деформации пружин и кинетическая энергия муфт, на основании закона изменения механической энергии получим

$$A=3\frac{k(n-1)^2L^2}{2}+2\frac{m\omega^2n^2L^2}{2}=1{,}5k(n-1)(2n-1)L^2.$$

3. После пережигания нити груз массой M начнет подниматься вертикально вверх, а положение равновесия этого груза будет находиться на высоте H относительно его исходного положения, причем $kH=mg$, где m — масса второго груза. Следовательно, пренебрегая смещением груза во время пережигания нити (т.е. полагая, что период колебаний много больше времени пережигания нити), можно утверждать, что этот груз будет совершать гармонические колебания с амплитудой $H=mg/k$ и угловой частотой $\omega=\sqrt{k/M}$. Поскольку амплитуда скорости при гармонических колебаниях в ω раз больше амплитуды смещения, получим, что искомая масса второго груза равна

$$m=\frac{v_m\sqrt{kM}}{g}.$$

4. Если абсолютную температуру озона в сосуде обозначить T_1, а его давление p_1, то можно утверждать, что после превращения озона в кислород давление в сосуде будет равно

$$p_2=\frac{3p_1T_2}{2T_1}$$

(где T_2 — абсолютная температура кислорода), поскольку из каждых двух молекул озона образуется три молекулы кислорода.

Изменение температуры в сосуде обусловлено выделением тепла при превращении озона в кислород. Пренебрегая теплоемкостью сосуда и учитывая, что сосуд теплоизолированный, на основании уравнения теплового баланса можно утверждать, что температура кислорода должна удовлетворять условию

$$q=\frac{3C_V(T_2-T_1)}{2}.$$

Отсюда следует, что давление в сосуде после превращения озона в кислород должно увеличиться в

$$n = \frac{p_2}{p_1} = \frac{3}{2} + \frac{q}{T_1 C_V} \approx 10 \text{ раз.}$$

5. Поршень будет находится в равновесии, когда давления азота и воды на его поверхности равны. Возможны три случая: вся вода находится в конденсированном состоянии, испарилась часть воды и, наконец, вся вода пребывает в газообразном состоянии.

Если вся вода находится в конденсированном состоянии, то она занимает объем $V_в = M/\rho = 2$ см^3 (здесь $\rho = 1$ г/см^3 — плотность воды), много меньший объема цилиндра. В этом случае давление азота равно

$$p_1 = \frac{mRT}{MV} \approx 0{,}55 \cdot 10^5 \text{ Па},$$

где $M = 28$ г/моль — молярная масса азота. Давление насыщенных паров воды при $t = 100$ °С равно $p_н = 1$ атм $= 1{,}01 \cdot 10^5$ Па. Следовательно, при заданных условиях вода в цилиндре не может находиться полностью в конденсированном состоянии.

Если предположить, что вся вода (с молярной массой $M_в = 18$ г/моль) превратилась в пар и заняла объем всего цилиндра, то давление пара должно быть равно

$$p_2 = \frac{M}{M_в} \frac{RT}{V} \approx 1{,}73 \cdot 10^5 \text{ Па},$$

что превышает давление насыщенных паров воды при заданной температуре. Следовательно, эта ситуация тоже невозможна.

Таким образом, часть воды в цилиндре находится в конденсированном состоянии, а часть представляет собой насыщенный пар. Поэтому давление в цилиндре равно давлению насыщенных паров воды, а искомая часть объема цилиндра, занятая азотом, составляет

$$x = \frac{mRT}{MVp_н} \approx 0{,}55.$$

6. На шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила $\vec{F}$ со стороны заряженной плоскости и сила натяжения нити $\vec{T}$. По условию задачи заряд на плоскости распределен равномерно, поэтому, пренебрегая, как обычно, перераспределением зарядов на плоскости, которое могло бы быть обусловлено влиянием заряженного шарика, можно утверждать, что электрическая сила направлена вертикально вверх и равна

$$F = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0},$$

где $\sigma/(2\varepsilon_0)$ — напряженность электростатического поля, создаваемого равномерно заряженной плоскостью. Согласно второму закону Ньютона равнодействующая указанных сил должна быть равна произведению массы шарика на его ускорение.

Пусть при угловой скорости вращения вала ω нить образует с вертикалью угол α. При постоянной скорости вращения вала ускорение шарика равно $\omega^2 L \sin\alpha$ и направлено горизонтально к оси вращения. Следовательно, сумма вертикальных составляющих действующих на шарик сил должна быть равна нулю, а необходимое ускорение шарику обеспечивает горизонтальная составляющая силы натяжения нити:

$$T \operatorname{tg}\alpha = \left(mg - \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\operatorname{tg}\alpha = m\omega^2 L \sin\alpha.$$

Отсюда получаем, что угловая скорость вращения, при которой нить устойчиво отклонена от вертикали, должна удовлетворять соотношению

$$\omega > \sqrt{\frac{g}{L} - \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 mL}}.$$

7. Согласно закону Ома для замкнутой цепи установившаяся разность потенциалов между клеммами батареи как при разомкнутом, так и при замкнутом ключе должна быть равна

$$\Delta\varphi = \frac{\mathcal{E}(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + r}.$$

При разомкнутом ключе заряды обоих конденсаторов (считая, как обычно, что перед подключением батареи оба конденсатора были полностью разряжены) одинаковы и равны

$$q_н = \Delta\varphi\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \frac{\mathcal{E}C_1C_2(R_1 + R_2)}{(C_1 + C_2)(R_1 + R_2 + r)}.$$

После замыкания ключа начинается перезарядка конденсаторов, в результате чего разности потенциалов между пластинами конденсаторов в установившемся режиме должны стать равными падениям напряжения на сопротивлениях, параллельно которым оказываются подключенными конденсаторы. Отсюда следует, что между пластинами второго конденсатора должна установиться разность потенциалов

$$\Delta\varphi_2 = \frac{\mathcal{E}R_2}{R_1 + R_2 + r}.$$

Теперь вычислим искомое изменение энергии этого конденсатора:

$$\Delta W = \frac{C_2\Delta\varphi_2^2}{2} - \frac{q_н^2}{2C_2} = \frac{\mathcal{E}^2(R_1 + R_2)^2 C_2}{2(R_1 + R_2 + r)^2}\left(\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)^2 - \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right)^2\right).$$

8. При движении перемычки на находящиеся в ней электроны со стороны магнитного поля действует сила Лоренца. Действие этой силы, с точки зрения расчета токов, эквивалентно действию источника с ЭДС, равной скорости изменения магнитного потока, сцепленного с рассматриваемым контуром. Для того чтобы ток в средней шине отсутствовал, по шинам *1* и *3* должны протекать равные, но противоположно направленные токи. Поскольку расстояние между шинами *1* и *2* в 2 раза меньше, чем между шинами *3* и *2*, ЭДС индукции в первом контуре, равная $\mathcal{E}_1 = vBL$, в два раза меньше, чем ЭДС $\mathcal{E}_2$ во втором контуре. Вместе с тем, согласно закону Ома для полной цепи ток в цепи равен отношению алгебраической суммы ЭДС к сопротивлению этой цепи. Отсюда получаем токи в обоих контурах:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}}{R} = I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}}{R}$$

и искомую скорость перемычки:

$$v = \frac{2\mathcal{E}}{BL},$$

причем перемычка движется вниз.

9. Пусть расстояние между предметом и линзой d, а между линзой и изображением предмета f. Согласно формуле тонкой линзы указанные расстояния и оптическая сила линзы D должны удовлетворять соотношению

$$D = \frac{1}{d} + \frac{1}{f},$$

причем

$$d + f = L.$$

Из этих соотношений следует, что на экране четкое изображение предмета будет и в том случае, если его поместить на расстоянии f перед линзой (а расстояние между линзой и экраном сделать, естественно, равным d). С другой стороны, отношение размера изображения, даваемого линзой, к реальному размеру предмета (поперечный коэффициент увеличения) в указанных случаях будет равно

$$k_1 = \frac{f}{d} \text{ или } k_2 = \frac{d}{f}.$$

По условию задачи $\alpha = k_1/k_2$. Поэтому окончательно получаем

$$D = \frac{\left(1+\sqrt{\alpha}\right)^2}{L\sqrt{\alpha}} = 5 \text{ дптр}.$$

10. Согласно теории Максвелла свет можно рассматривать, как электромагнитные волны. Наблюдаемые на экране за линзой чередующиеся светлые и темные полосы — результат интерференции световых пучков, образующихся в результате дифракции света на решетке. На рисунке 7 показаны две со-

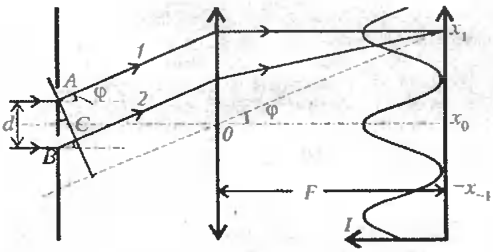


Рис. 7

седние щели дифракционной решетки, линза и распределение интенсивности света в фокальной плоскости линзы, которое наблюдалось бы, если бы решетка состояла всего из двух достаточно узких щелей. В побочном фокусе x_1 будет наблюдаться максимум первого порядка, если разность хода BC между лучами *1* и *2*, идущими от участков соседних щелей, находящихся на расстоянии d, равна длине падающей волны λ, т.е.

$$\lambda = d\sin\varphi,$$

где φ — угол между главной и побочной оптическими осями линзы.

С другой стороны, согласно Планку монохроматический свет можно представить как поток фотонов, каждый из которых несет энергию $W = h\nu = hc/\lambda$, где h — постоянная Планка, ν — частота колебаний в световом пучке, c — скорость света.

Таким образом, можно найти направление на первый дифракционный максимум:

$$\sin\varphi = \frac{\lambda}{d} = \frac{hc}{Wd} \approx 7{,}8\cdot10^{-3},$$

а затем и искомое расстояние между максимумами первого порядка:

$$\Delta x = 2F\operatorname{tg}\varphi \approx \frac{2Fhc}{Wd} \approx 0{,}78 \text{ мм}.$$

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $T = 2\pi\left(1+\frac{h}{R}\right)\sqrt{\frac{R}{g\left(\left(1+h/R\right)^2-1\right)}}$. **2.** $F = \frac{mg\mu}{2(\mu+1)} = 0{,}083$ Н.

3. $v = m\cos\alpha\cdot\sqrt{\frac{2gh}{M\left(M+m\cos^2\alpha\right)}} = 2{,}7$ см/с.

4. $\beta = \frac{(1-\alpha)\rho_в\left(\rho_a-\rho_в\right)}{\left(\rho_a-\alpha\rho_в\right)\left(\rho_в-\rho_з\right)}\cdot100\% = 51\%$.

5. $h = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0\sin\alpha = 1$ см. **6.** $\alpha = \frac{(L-H_2+H_1)(L-H_1)H_2}{(L-H_1+H_2)(L-H_2)H_1} = 0{,}7$.

7. $n_{max} = \frac{p_2}{kT_2} = 3{,}33\cdot10^{19}$ см$^{-3}$. **8.** $E_p = RT = 2{,}49$ кДж.

9. $R = \frac{U_2}{I_2} - \frac{U_2-U_1}{I_1} = 63{,}4$ Ом. **10.** $L = F\frac{(\Gamma+1)^2}{\Gamma} = 90$ см.

Химический факультет

1. $F = (mg\sin 2\alpha)/2 = 0{,}5$ Н. **2.** $F_н = mg(1-k)/k = 5\cdot10^{-2}$ Н.

3. $\alpha_m = \arccos\left(1-\frac{2\pi^2v^2}{g^2T^2}\right) = 60°$. **4.** $m = \frac{MV}{R}\left(\frac{p_2}{T_2}-\frac{p_1}{T_1}\right) = 0{,}65$ кг.

5. $\eta = (A - C_V\Delta T)/A = 2\%$. **6.** $Q = (C_1+C_2)\mathcal{E}^2/2 = 2{,}7\cdot10^{-2}$ Дж.

7. $T_p = T_e m_p/m_e \approx 2\cdot10^{-3}$ с. **8.** $q = \mathcal{E}\Delta t/(NR) = 2{,}5\cdot10^{-3}$ Кл.

9. $D = (k-1)^2/(kL) = 2$ дптр. **10.** $N = \eta P\lambda/(hc) = 10^{19}$ с$^{-1}$.

ВНИМАНИЕ!

Информацию о «Кванте» (и других образовательных и научно-популярных журналах) можно найти в ИНТЕРНЕТЕ, а именно в интернет-журнале «Курьер образования».

Адреса:
http://io.iph.ras.ru
http://ss1000.infoart.ru/misc/edu_cour
http://www.ripn.net/infomag
ftp://io.iph.ras.ru

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

А.Н.Балдин, Д.Н.Гришукова, В.А.Иванюк, М.М.Константинова, А.Е.Пацхверия, П.И.Чернуский, С.Б.Шехов

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Осипова

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати 142300 г.Чехов Московской области

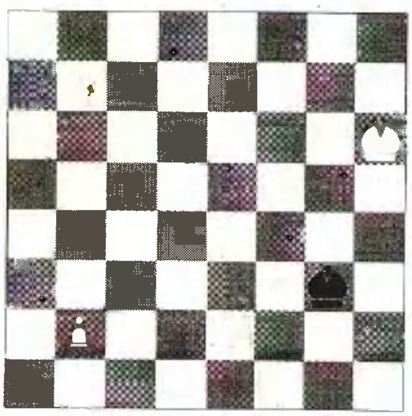
Заказ №2223.

ТВОРЧЕСТВО ЧИТАТЕЛЕЙ

Сегодняшняя «шахматная страничка» целиком посвящена необычным задачам и позициям, придуманным читателями «Кванта».

Этюд-трио

Мы часто печатаем в журнале этюды-квартеты с четырьмя персонажами на доске. Этюд-трио — большая редкость. Если у белых ферзь или ладья против одинокого неприятельского короля, то это просто учебная позиция. То же самое касается и пешки, но бывают исключения. Вот какую интересную позицию прислал в редакцию В.Кузьмичев.



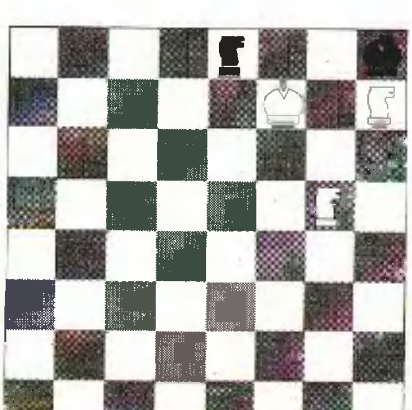
Выигрыш

Хочется побыстрее провести пешки в ферзи. Однако после 1. b4? Крf4! черный король попадает в ее квадрат и благополучно забирает. И вообще он первым достигает белой пешки, но...

1. Крg5! Крf3 2. Крf5! Кре3 3. Кре5! Крd3 4. Крd5! Белые проявили максимум терпения, и выясняется, что их пешку можно атаковать только снизу: **4...Крс2,** и после **5. b4!** она неудержима.

Два парадокса

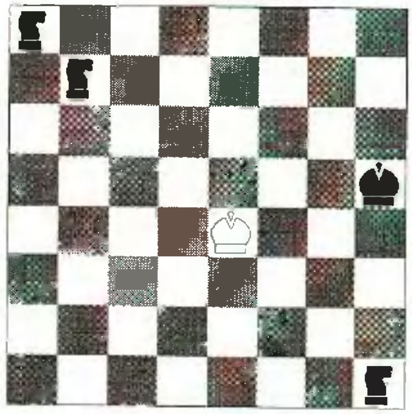
Еще две необычные позиции принадлежат В.Кузьмичеву.



Два коня, как известно, не матуют, но присутствие черного коня удивительным образом помогает белым.

Выигрыш

1. Крg6!! Выпуская неприятельского короля на прогулку. **1...Крg8 2. Кf7! Кf6 3. Кh6+! Крh8 4. Кg5!** и **5. Кgf7×; 1...Кd6 2. Кf6!** и **3. Кf7×.**



Ничья

Три-то коня уж точно матуют одинокого короля. Поэтому необходимо одного из них уничтожить. Не годится 1. Крf3? Крh4 2. Крg2 Кg3! Зато **1. Крd5!** спасает положение. **1...Кd8** (1...Кb6 или 1...Кс7 2. Крс6!) **2. Крd6! Кg3** (2...Кb6 3. Крс7!) **3. Крd7! Кf7 4. Крс6! Кd8+ 5. Крd7! Кb7 6. Крс6! Ка5+ 7. Крb5! Кb3 8. Крс6!** Позиционная ничья. В случае 1...Ка5 2. Крс5! и далее все по симметрии.

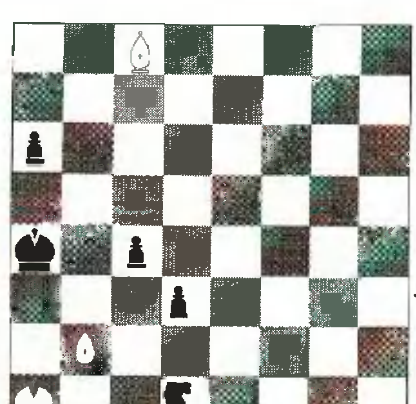
При помощи компьютера

Рассказывая однажды об анализе компьютером окончания «ферзь против двух слонов» («Квант» №2 за 1987 г.), мы привели позицию, в которой робот доказал, что выигрыша у сильнейшей стороны нет. Этим воспользовался наш читатель Д.Паничкин.

Ничья

Хотя на доске материальное равенство, три пешки явно сильнее слона, и вот-вот одна из них проскочит в ферзи. Не годится 1. Сg4? К:b2 2. Кр:b2 Крb4 3. Сd1 с3+ и т.д. Плохо и 1. Сf6? 2. С:а6 d2 3. Се2 с2 или 1. Крb1? Крb3! 2. С:а6 К:b2. Но оказывается, что если одна из черных пешек и проскочит в ферзи, то это не так опасно.

1. С:а6! d2! (1...К:b2? 2. Кр:b2 Крb4 3. Крс1!) **2. С:с4 Кс3! 3. С:с3! d1Ф+ 4. Крb2!** и возникает ничейная позиция, найденная компьютером.

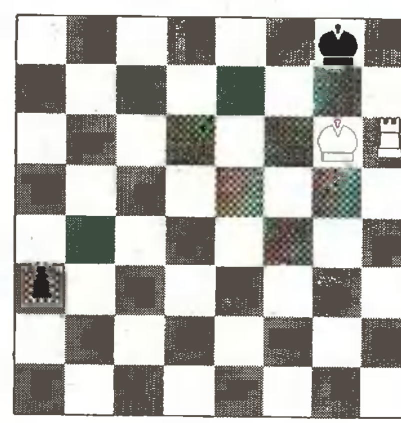


Еще один рекорд

В «Кванте» №7 за 1991 г. был предложен рекордный мат в 6 ходов, которые дают белые в начальной позиции при условии, что все ходы обеих сторон наидлиннейшие. Читатель А. Ханян побил этот рекорд на полхода: **1. Кс3 Кf6 2. Кb5 Кg4 3. Кd6+!! ed 4. Кf3 Фh4 5. Кg5!** Отрезая черному ферзю путь назад. По теореме Пифагора ход на два поля по диагонали равен $2\sqrt{2}$, что длиннее хода коня, равного $\sqrt{5}$. Так что черные матуют — **5...Ф:f2×**, что и требовалось доказать!

Ладью — в угол!

Еще одну необычную задачу придумал А.Ханян.



Мат в 5 ходов

1. Крf6! Не проходит 1. Лh2(h1)? Крf8! 2. Ле2(е1) а2, и, жертвуя пешку, черный король вырывается на свободу. **1...а2.** Теперь же ладья отправляется в путешествие по всем четырем углам доски: **2. Лh1 а1Ф 3. Л:а1 Крh7 4. Ла8 Крh6 5. Лh8×.** В случае 3...Крh8 белая ладья сама выбирает угол: 4. Крf7 Крh7 5. Лh1×, 4. Крg6 Крg8 5. Ла8×.

Е.Гик