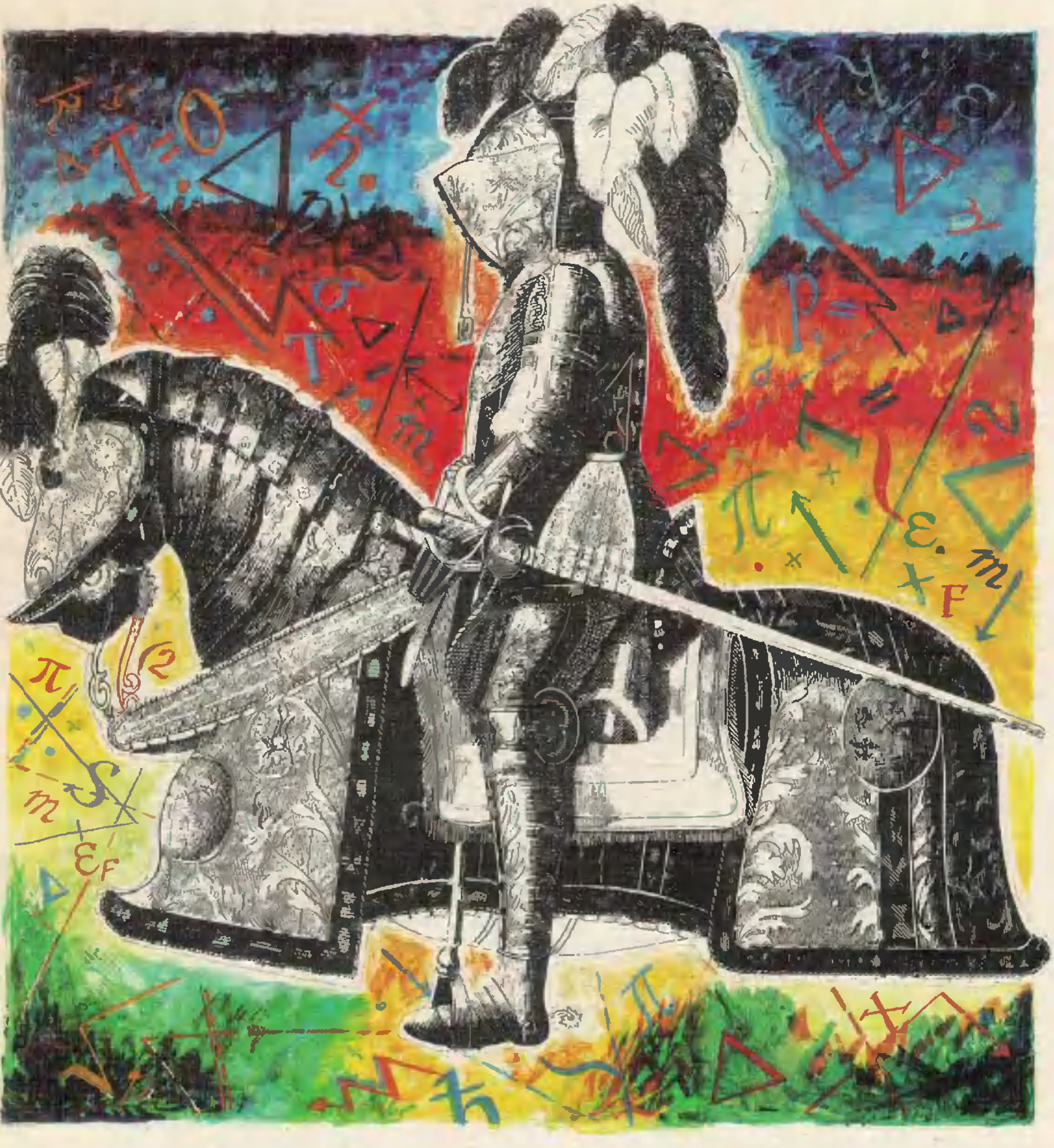
ISSN 0130-2221
МАРТ/АПРЕЛЬ
1997 · №2

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

МАРТ/АПРЕЛЬ · 1997 · №2

В номере:

Как устроены металлы?

М.КАГАНОВ

Посвящается Илье Михайловичу Лифшицу

В ЯНВАРЕ 1997 года Илье Михайловичу Лифшицу исполнилось бы 80 лет. Он не дожил до этого возраста, уйдя из жизни в 1982 году. Причина – болезнь сердца. Помнят Илью Михайловича не только близкие ему люди: родственники, друзья, ученики. Он оставил заметный след в науке, которой активно занимался с 18-летнего возраста буквально до последних дней своей жизни.

Академик И.М.Лифшиц был выдающимся ученым – физиком-теоретиком с мировым именем. Его заслуги признавали не только в нашей стране: ему присуждали престижные международные премии и избрали в Национальную академию наук США.

Когда умер Л.Д.Ландау (1968 г.), П.Л.Капица пригласил И.М.Лифшица возглавить отдел Института физических проблем (теперь он носит имя П.Л.Капицы). До этого он работал в Харькове, руководил одним из теоретических отделов УФТИ (Украинского физико-технического института) и кафедрой статистической физики и термодинамики Харьковского университета. Теоретическим отделом Института физических проблем И.М.Лифшиц руководил 14 лет, и все эти годы он не только вел научную работу,но и преподавал, был профессором физического факультета Московского университета. Многие активно работающие специалисты по теории твердого тела получили свою специальность под руководством Ильи Михайловича. Все они хорошо помнят своего учителя – замечательного ученого и очень хорошего человека, гордятся своей принадлежностью к Школе Ильи Михайловича Лифшица.

Нетрудно написать биографию ученого. Родился.., учился.., защитил кандидатскую, потом докторскую диссертации, работал в таких-то научных учреждениях, был избран в такие-то академии наук... Но ведь ученого характеризует его научная деятельность – то, что он сделал. Сделал первым. На что-то открыл глаза людям, что-то объяснил, что-то предсказал. Эти «что-то» раскрыть очень трудно. Ведь ученый (особенно в наши дни) не начинает на пустом месте. Для того чтобы понять сделанное им, надо знать, что было сделано до него. Кроме того, надо уметь понять, как было сделано «что-то», иначе невозможно оценить сделанную работу. А для этого в данном случае надо владеть аппаратом теоретической физики, которым, стоит подчеркнуть, Илья Михайлович владел мастерски.

Похоже, ознакомить с научными достижениями И.М.Лифшица не физика невозможно. По-настоящему действительно невозможно. Очень это меня огорчает. Всю свою научную жизнь (до 1982 г., конечно) я работал под непосредственным руководством Ильи Михайловича, много с ним разговаривал, учился у него – в самом непосредственном смысле этого слова. Неужели, рассказывая о своем учителе, я должен ограничиться лишь утверждением, что И.М.Лифшиц – замечательный ученый, утверждением, которому читатель должен верить на слово?! Мне хочется хоть чуть-чуть приоткрыть, чем занимался Илья Михайлович и к чему привели эти занятия. Сразу оговорюсь: я выбрал одну из тем его творчества. Тем было много. Так много, что его могли бы обвинить в том, что он разбрасывался. Но в каждой из тем он получил столь существенные результаты, что говорят другое: работы И.М.Лифшица и работы его учеников оказали существенное воздействие на формирование всей теории конденсированного состояния вещества – огромной области современной физики – и перечисляют различные направления, в которых вклад особенно важен. В перечислении заметное место занимает *электронная теория металлов*, т.е. наука,

призванная объяснить свойства металлов. Вот о ней и пойдет речь.[1]

Электроны в металле: квазиимпульс и поверхность Ферми

В начале века было понято, что способность металлов проводить ток связана с существованием в них свободных электронов. Откуда они берутся, понять не сложно. При конденсации атомов металла в твердое тело атомы ионизуются: валентные электроны покидают своих «хозяев» и движутся в электрическом поле, создаваемом положительно заряженными ионами. Конечно, если бы не было электронов, ионы не могли бы удержаться на своих местах и разлетелись бы, ведь они отталкиваются друг от друга. Электроны их удерживают от этого — в целом металл нейтрален. Неплохой образ: ионная кристаллическая решетка, погруженная в электронный газ, состоящий из бывших валентных электронов.

«С точки зрения» ионов, газ не плотен: на каждый ион приходится столько электронов, сколько было у атома металла валентных электронов (пусть их z; $z = 1, 2, 3 \ldots$). Но с нашей (человеческой) точки зрения, газ очень плотен. Размер ячейки кристалла

$$v = a^3 \simeq \left(3 \cdot 10^{-10}\right)^3 \text{ м}^3 \simeq 27 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3. \quad (1)$$

Для простоты мы считаем ячейку кристалла кубиком со стороной $a = 3$ Å. Таков правильный, известный из экспериментов и подтверждаемый теорией, размер ячейки кристаллов многих металлов. Приближенно, конечно. В действительности размеры кристаллических ячеек большинства металлов известны с большой точностью. Плотность электронного газа (число электронов в единице объема) равна

$$n = \frac{z}{a^3} \simeq \frac{z}{27} 10^{30} \text{ м}^{-3}. \quad (2)$$

Для сравнения: плотность воздуха $n_{возд} \sim 2 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$. Отличие от реального газа (того же воздуха) еще в том, что электрон в 3600 раз легче молекулы самого легкого газа из состава воздуха — водорода. Масса электрона $m \simeq 10^{-30}$ кг.

Итак, свободные электроны в металле — очень плотный газ очень легких частиц. К чему я веду? Сейчас станет ясным. Появится несколько странное словосочетание — ***квантовый газ***. Появится, но через несколько строк.

Электронную теорию металлов на основе представления о свободных электронах, как уже упоминалось, пытались создать еще в начале века. Основы этой теории заложил великий голландский физик Хендрик Антон Лоренц (1853—1928). Вы, думаю, знаете это имя. (Преобразования, используемые в теории относительности Эйнштейна, называют преобразованиями Лоренца. Но здесь речь идет не о них.) Лоренцу удалось многие свойства металлов неплохо объяснить, исходя из предположения, что в металлах есть *газ электронов*. Свойства газов в те годы были хорошо известны. Эти знания использовал Лоренц для объяснения свойств металлов. И в каком-то смысле это ему удалось. Правда, оставались странные недоразумения: свободные электроны (мы в дальнейшем их будем называть электронами проводимости — по их главной функции), объяснившие электропроводность и даже такое непростое свойство как термоэлектричество, не обнаруживали себя в тепловых свойствах металла. Классическая физика утверждает, что существует закон равнораспределения: в среднем на каждую степень свободы приходится $1/2kT$ энергии ($k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана, T — температура в абсолютных градусах). Если в 1 м^3 металла содержится n электронов проводимости (см. формулу (2)), то плотность внутренней энергии металла должна быть на $3/2\,nkT$ больше плотности энергии диэлектрика (изолятора), в котором нет свободных электронов. Есть надежные методы измерения внутренней энергии, но почему-то электроны проводимости себя не обнаруживают — внутренние энергии диэлектриков и металлов практически не отличаются. Правда, измерения производились при обычных (комнатных) температурах.[2] С этой трудностью сравнительно легко справились, когда было понято, что не только электроны в атоме, но и свободные электроны — газ электронов проводимости — надо описывать, используя квантовые представления. «Всегда?» — может спросить нетерпеливый читатель. Конечно, нет! Тогда, когда условия жизни электрона, как члена коллектива (в классическом газе), вступают в противоречие с положениями квантовой физики.

Наверное, все знают, что одна из фундаментальных черт квантово-механического описания движения частиц — соотношение неопределенностей

$$\Delta p \Delta x \gtrsim \hbar, \quad (3)$$

где Δp — неопределенность импульса, Δx — неопределенность координаты, а $\hbar \sim 10^{-34}$ Дж·с — знаменитая постоянная Планка (без нее не обходится ни одна квантово-механическая формула). В газе, где в 1 м^3 содержится n частиц, на каждую частицу приходится объем $\sim 1/n$, т.е. $\Delta x \sim n^{-1/3}$. Следовательно, $\Delta p \gtrsim \hbar n^{1/3}$. Для применимости *классического* описания необходимо, чтобы импульс электрона p был велик по сравнению с его неопределенностью Δp ($p \gg \Delta p$). Согласно закону равнораспределения, в газе средний импульс $p \sim \sqrt{mkT}$. Следовательно, газ можно считать классическим, если

$$T > \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{km} \equiv T_{кв}. \quad (4)$$

Множители типа 1/2 опущены, при оценках это допустимо. Подставив в последнюю формулу числа, с удивлением обнаружим, что комнатная температура значительно ниже квантовой: $T_{кв} \sim 10^5$ К. Иначе говоря, практически всегда любой металлический образец содержит ***квантовый газ***. Как проявляются квантовые свойства электронов в свойствах газа электронов проводимости? Посмотрите на рисунок 1. На нем схематически показано распределение по энергиям электронов классического (*а*) и квантового (*б*) газов. Можно сказать и иначе: на рисунке *а* приведено распределение частиц по энергиям при $T \gg T_{кв}$, а на рисунке *б* — при $T = 0$ и при $T \ll T_{кв}$. (Причина различия — в принципе запрета Паули, запрещающем более чем одному электрону находиться в одном и том же состоянии. Мы ограничиваемся толь-

---

[1] *Интересный и живой рассказ о работе семинара по физике полимеров, которым руководил И.М.Лифшиц, об особенностях творческого метода Ильи Михайловича можно найти в статье А.Гросберга и М.Каганова «Вокруг шарика» в «Кванте» №2 за 1996 год.* (Прим.ред.)

[2] *О внутренней энергии судят по измерению теплоемкости. При комнатных температурах ($T \sim 300$ К) все твердые тела имеют молярную теплоемкость, равную 3R, где R — универсальная газовая постоянная (закон Дюлонга и Пти). Если бы электроны проводимости проявляли себя как свободные, то теплоемкость металла (например, Na) должна была бы превысить теплоемкость диэлектриков в 1,5 раза. Не заметить такое отличие невозможно.*

Иллюстрация А.Панцхверия

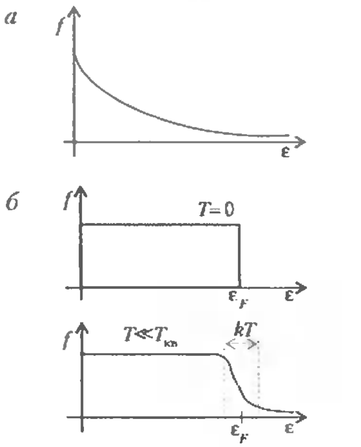


Рис.1. Классическая и квантовая функции распределения электронов по энергиям: а) функция распределения Максвелла—Больцмана, б) функция распределения Ферми—Дирака (при $T = 0$ и $T \ll T_{кв}$)

ко упоминанием: невозможно все объяснить в одной статье.)

Квантовое распределение частиц по энергиям при $T = 0$ получило название *фермиевской ступеньки*, а энергию ε_F, ниже которой все состояния заняты, а выше которой свободны, называют энергией Ферми. Точный расчет показывает, что

$$\varepsilon_F = \left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{2/3} \frac{(2\pi\hbar)^2}{2m}. \qquad (5)$$

Видно, что по порядку величины $\varepsilon_F \simeq kT$. Можно использовать более наглядное геометрическое представление — при $T = 0$ заняты все состояния внутри Ферми-сферы (рис.2) с радиусом

$$p_F = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = \sqrt{2m\varepsilon_F}. \qquad (6)$$

В тепловом движении при $T \neq 0$ принимают участие только те электроны, у которых энергия порядка ε_F. Их мало: $\sim n \cdot \frac{T}{T_{кв}}$ — значительно

Рис.2. При $T = 0$ заполнена электронами сфера радиусом $p_F = \sqrt{2m\varepsilon_F}$

меньше, чем всех свободных электронов. Поэтому-то они и не обнаруживают себя в тепловых свойствах. И в проводимости металла, как оказывается, принимают участие только те электроны, энергия которых равна ε_F (говорят, что они «расположены» на Ферми-сфере). Можно вывести формулу для удельной электропроводности металла

$$\sigma = \frac{S_F e^2 l}{12\pi^3\hbar^3}, \qquad (7)$$

где $S_F = 4\pi p_F^2$, т.е. площадь Ферми-сферы, а l — длина свободного пробега электрона проводимости, т.е. среднее расстояние между двумя столкновениями электрона. В длине пробега l «спрятаны» все механизмы, ограничивающие свободу электрона и объясняющие природу сопротивления (удельное сопротивление $\rho = 1/\sigma$).

Используя представление о квантовом газе электронов проводимости, строилась электронная теория металлов. Конечно, при этом невозможно было ограничиться квантовым описанием лишь электронов. Например, необходимо было пересмотреть описание колебаний ионов кристаллической решетки. В результате в теории твердого тела и, в частности, в электронной теории металлов появились *фононы*. На этом этапе развития электронной теории металлов, естественно, оставались белые пятна, постепенно заполнявшиеся. Очень большую уверенность в правильности представлений о природе металлического состояния принесло понимание природы сверхпроводимости (Дж.Бардин, Л.Купер, Дж.Шриффер, 1957 г.).

Если просмотреть старые учебники и монографии по электронной теории металлов, то видно, что, выделяя металлы из других твердых тел, авторы объясняли свойства металла *вообще*, а не конкретно меди, свинца или лития. Действительно, у *всех* металлов много общих свойств. Похожи тепловые свойства, похоже ведет себя сопротивление с изменением температуры. Примеров можно привести много. Но постепенно накапливались экспериментальные данные, которые с очевидностью показывали: разные металлы ведут себя по-разному в одинаковых условиях. Особенно резко свойства металлов отличаются при низких температурах, близких к абсолютному нулю, и в сравнительно сильном магнитном поле. На рисунке 3 приведены примеры, демонстрирующие эти отличия.

В чем причина различия свойств разных металлов? Конечно, причин много, но несомненно среди них есть главная. И главная — в виде *поверхности Ферми*. Электрон, оторвавшийся от «своего» атома в кристалле, движется в *периодическом* поле сил ионов. Как было показано (Ф.Блох, Л.Бриллюэн, 1928 г.), квантовое движение электрона в периодическом поле сил очень напоминает движение электрона в пустом пространстве. Состояние движения электрона можно характеризовать вектором, очень похожим на импульс, его называют *квазиимпульсом*[3]. Он «превращается» в импульс, если периодическую силу устремить к нулю. Мы его по-прежнему будем обозначать буквой $\vec{p}$ (как импульс). Энергия электрона — функция квазиимпульса $\vec{p}$. И можно говорить о *пространстве квазиимпульсов* (как мы уже говорили об импульсном пространстве, см. рисунок 2 и формулу (6)). Важный факт: пространство квазиимпульсов периодично, причем если кристаллическая ячейка — кубик с ребрами, равными a, то ячейка пространства квазиимпульсов — кубик с ребрами, равными $\frac{2\pi\hbar}{a}$. Как бы опуская постоянную Планка $\hbar$, пространство квазиимпульсов часто называют *обратным пространством*.

Зависимость энергии от квазиимпульсов можно изображать в виде изоэнергетических поверхностей (поверхностей равной энергии). Энергия — периодическая функция квазиимпульса. Поэтому для изображения изоэнергетической поверхности можно ограничиться одной ячейкой обратного пространства, а можно рисовать ее во всем пространстве (его тогда называют расширенным, ведь одной ячейки *достаточно*).

Среди изоэнергетических поверхностей есть одна — выделенная. Это — поверхность Ферми. Она соответствует энергии Ферми $\varepsilon = \varepsilon_F$:

$$\varepsilon(\vec{p}) = \varepsilon_F. \qquad (8)$$

---

[3] *Когда частица движется под действием периодической силы, то, хотя обычный импульс не сохраняется, существует сохраняющийся вектор квазиимпульс. Именно потому, что он сохраняется (как энергия), он может служить для характеристики движения.*

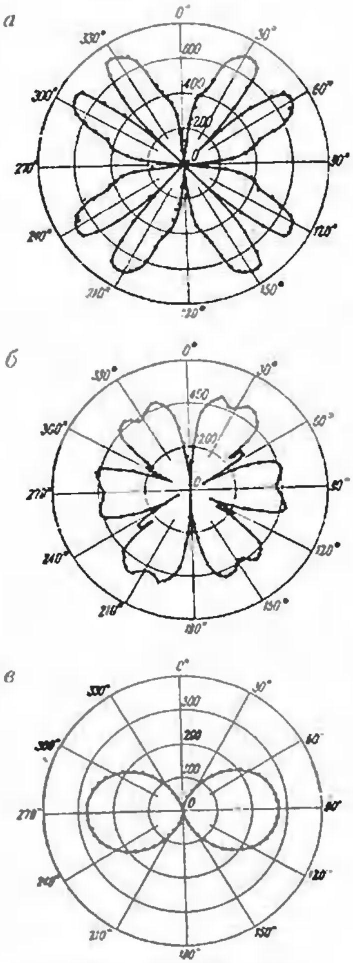


Рис.3. Изменение сопротивления металла — олова, свинца и таллия соответственно — при помещении его в магнитное поле, (в зависимости от угла между кристаллическими осями и магнитным полем)

Именно на ней и вокруг этой поверхности находятся электроны, играющие важную роль в свойствах металлов.

Металлы отличаются друг от друга тем, что у них разные поверхности Ферми

Прежде чем познакомиться с тем, как узнали, каковы поверхности Ферми разных металлов, и какую роль в процессе понимания устройства металлов сыграли работы Ильи Михайловича Лифшица и его учеников, посмотрите на таблицу. В ней собраны сведения о том, чем похожи и чем отличаются электроны в свободном от сил пространстве и в периодическом поле сил ионов кристаллической решетки.

Проблема «устройства» макроскопических, в частности твердых, тел интересовала И.М.Лифшица с самого начала его научной деятельности. Интересы его в большой мере сосредотачивались на решении «обратных» задач. Он неоднократно задумывался, нельзя ли по экспериментальным данным выяснить, как движутся атомы и электроны в твердом теле. У него есть небольшая заметка «О колебаниях релятивистских частиц в сильных полях». Она опубликована в Докладах Академии наук СССР в 1948 году. (Заметки в Докладах содержат не более четырех страниц.) В заметке выясняется, как по зависимости периода колебаний частицы от энергии определить профиль потенциальной ямы, в которой частица совершает периодическое движение. Похоже, это — предтеча работ с решением «обратных» задач. А в 1954 году Илья Михайлович сформулировал алгоритм, позволяющий по тепловым свойствам твердых тел получить сравнительно подробную характеристику колебательного энергетического спектра твердых тел. Его метод существенно дополняет широко применяемый метод определения колебательного спектра по неупругому рассеянию нейтронов кристаллами.[4] Однако этот метод принципиально не применим для исследования характера движения электронов металла. К счастью, в случае электронов есть важное облегчающее обстоятельство: нас интересуют не все электроны, а лишь те, энергия которых равна энергии Ферми или близка ей. А это значит, что мы должны уметь определять форму поверхности Ферми (см. (8)) и скорости электронов, имеющих фермиевскую энергию. Как обратил внимание Илья Михайлович, на помощь приходят свойства металлов в магнитном поле при низких температурах.

После первых работ (одну из них я постараюсь схематически изложить) возникло направление в исследованиях металлов, ориентированное на изучение поверхностей Ферми. Все они построены по такому принципу: если поверхность Ферми обладает таким-то свойством, то наблюдается такое-то явление. По идее, должны использоваться подобные работы «в обратном порядке»: наблюдается такое-то явление, значит, поверхность

Электрон	
в свободном пространстве	в кристалле
состояние характеризуется	
импульсом ($\vec{p}$)	квазиимпульсом ($\vec{p}$)
энергия (ε)	
$\varepsilon = p^2/(2m)$	$\varepsilon = \varepsilon(\vec{p})$ — периодическая функция квазиимпульса
скорость ($\vec{v}$)	
$\vec{v} = \dfrac{\vec{p}}{m}$	$\vec{v} = \dfrac{d\varepsilon(\vec{p})}{d\vec{p}} \neq \dfrac{\vec{p}}{m}$
уравнения движения	
изменение импульса в единицу времени равно силе $\vec{F}$ (закон Ньютона) $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dfrac{1}{m}\vec{F}$	изменение квазиимпульса в единицу времени равно внешней силе $\vec{F}^{\text{вн}}$ (в $\vec{F}^{\text{вн}}$ не входит приодическая сила ионов кристалла) $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{вн}}$, $\dfrac{d^2x_i}{dt^2} = \sum_{k=1}^{3}\left(\dfrac{1}{m^*}\right)_{ik} F_k^{\text{вн}}$, где $\left(\dfrac{1}{m^*}\right)_{ik} = \dfrac{\partial^2\varepsilon(\vec{p})}{\partial p_i \partial p_k}$
законы сохранения энергии и импульса (квазиимпульса) двух электронов	
$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_1' + \varepsilon_2'$	
$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$	$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' + \vec{K}$, где $\vec{K}$ — один из периодов пространства квазиимпульсов

[4] *Пролетая через кристалл, нейтрон может «качнуть» атомы кристалла. При этом теряет немного энергии и изменяет направление движения. По этим данным определяют, как «качаются» — колеблются атомы кристалла.*

а

б

в

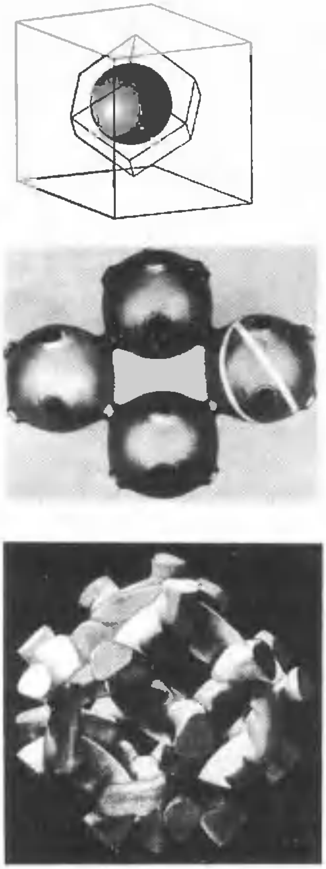


Рис.4. Поверхности Ферми: а) щелочных металлов (близки к сферам), б) золота, в) свинца

Ферми обладает таким-то свойством. На научном сленге этот подход именовался *спектроскопическими возможностями метода*. Многолетние исследования многих физиков в разных странах привели к тому, что поверхности Ферми практически всех металлов известны. На рисунке 4 приведены примеры поверхностей Ферми. Обратите внимание, сколь они непросты. Только металлы первой группы таблицы Менделеева (ее левой половины) имеют поверхности Ферми, близкие к сферам — поверхностям Ферми свободных электронов. Да и у них не все так просто: масса электрона m^* (ее вычисляют по отношению p_F/v_F, где p_F — радиус Ферми-сферы, а v_F — скорость фермиевских электронов) отличается от массы электрона в пустом пространстве (например, у лития $m^* = 2{,}3m_e$).

Определение поверхностей Ферми не всегда, естественно, шло по такой прямолинейной схеме: экспериментальное свойство → форма поверхности. Привлекались появившиеся во второй половине XX века расчетные методы — вычисление зависимости энергии электрона от квазиимпульса с использованием более или менее адекватной модели взаимодействия электронов с ионами и друг с другом. Усовершенствование расчетных методов в результате появления все более «умных» ЭВМ позволяло (и позволяет) использовать все более адекватные модели.

Как построить поверхность Ферми?[5]

Теперь (почти в заключение) — обещанный рассказ о том, как свойства металла в магнитном поле помогают «построить» поверхность Ферми. Очень важно для дальнейшего понять следующее: сходство между электроном в кристалле и электроном в пустом пространстве столь велико (см. таблицу), что позволяет *квазиимпульс считать настоящим импульсом*. Это очень четко понимал И.М.Лифшиц и обращался с электроном в кристалле, как с «обычным» электроном. Только энергия такого электрона — периодическая функция импульса. И все. Это дает возможность строить механику такой частицы по хорошо известным правилам. Например, в магнитном поле $\vec B$ на электрон, движущийся со скоростью $\vec v$, действует сила Лоренца

$$\vec F_{\text{Л}} = e\left[\vec v\,\vec B\right].$$

Знак [ ] означает *векторное произведение*: $\left[\vec a\,\vec b\right]$ — вектор, ортогональный векторам $\vec a$ и $\vec b$ и равный по величине $ab\sin\theta_{ab}$, где θ_{ab} — угол между векторами $\vec a$ и $\vec b$. Так вот, отличие силы Лоренца в случае электрона в кристалле от силы Лоренца в пустом пространстве только в том, что $\vec v \neq \vec p/m$, а $\vec v = \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\vec p}$ (см. таблицу). Следовательно, движение электрона в металле, помещенном в магнитное поле, описывается следующими уравнениями:

$$\frac{d\vec p}{dt} = e\left[\vec v\,\vec B\right],\quad \vec v = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\vec p},\qquad (9а)$$

$$\frac{d\vec r}{dt} = \vec v.\qquad (9б)$$

Из этих уравнений следует ряд фактов.

При движении электрона в магнитном поле сохраняются его энергия ε и проекция импульса на магнитное поле p_B. Следовательно, траектория электрона в пространстве импульсов есть плоская кривая, получаемая пересечением поверхности $\varepsilon\left(\vec p\right) = \text{const}$ плоскостью $p_B = \text{const}$. В координатном пространстве проекция траектории на плоскость, перпендикулярную магнитному полю $\vec B$, получается из траектории в пространстве импульсов поворотом на 90° и изменением масштаба с помощью множителя $\dfrac{1}{|e|B}$ (рис.5).[6]

Рассказывая о движении электрона проводимости в магнитном поле и дойдя до этого места, я понял, что придется часть вычислений пропустить: они требуют более серьезной математической подготовки от читателя, чем та, которой, как принято считать, читатель «Кванта» обладает. Приведу результат. Период обращения электрона проводимости по замкнутой траектории в магнитном поле равен

$$T_B = \frac{2\pi m^*}{|e|B},\quad m^* = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial S(\varepsilon, p_B)}{\partial\varepsilon}.\qquad (10)$$

Здесь $S = S(\varepsilon, p_B)$ — площадь, описанная траекторией в пространстве импульсов. Величина m^* имеет размерность массы и называется *эффективной массой в магнитном поле*. Думаю, выражение для m^* может удивить. Но посмотрим, как выглядит эта формула для электрона вне кристалла, у которого $\varepsilon = p^2/(2m)$ и, следовательно, $p_\perp^2 = 2m\varepsilon - p_B^2$, $S(\varepsilon, p_B) = \pi\left(2m\varepsilon - p_B^2\right)$. Отсюда и из

---

[5] *В этой части статьи рассказывается о некоторых оригинальных результатах И.М.Лифшица. Она более трудна для восприятия, но если вы затратите необходимые усилия и разберетесь в основных идеях, то будете вознаграждены: идеи очень глубокие и красивые!*

[6] *Для доказательства того, что ε и p_B — постоянные, достаточно умножить уравнение движения (9а) на $\vec v$ (получим $\varepsilon = \text{const}$) и взять его проекцию на $\vec B$ (получим $p_B = \text{const}$). Подобие траекторий — следствие ортогональности $\vec v = \dfrac{d\vec r}{dt}$ и $\dfrac{d\vec p}{dt}$. Такая ортогональность в каждый момент времени возможна, если траектории подобны и повернуты на 90° друг относительно друга (скорости направлены по касательным к траекториям).*

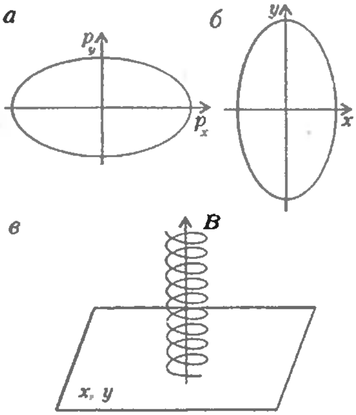


Рис.5. Траектория электрона: а) в пространстве импульсов, б) в координатном пространстве (точнее — проекция траектории на плоскость, перпендикулярную магнитному полю). На самом деле электрон движется по спирали (в)

определения m^* имеем $m^* = m$ (1) — выражение для эффективной массы прошло проверку предельным переходом.

Может (и должен) возникнуть естественный вопрос: почему мы не учитываем квантования движения электрона по замкнутой орбите? Должны учитывать. Но если длина траектории значительно превышает длину волны де Бройля электрона $\hbar/p_F$, то расстояния между дискретными квантованными уровнями энергии малы и пренебрежение квантованием с большой точностью оправдано.

Многие свойства металлов исследованы на основании классического приближения, т.е. по существу на основании тех формул, которые мы здесь выписали. Законность такого подхода подтверждается оценкой. Для простоты проведем ее, считая, что траектория — окружность. Ее радиус равен $\frac{p_F}{eB}$, и условие, разрешающее использовать классическую (а не квантовую) механику, можно записать так:

$$\frac{p_F}{eB} \gg \frac{\hbar}{p_F}. \qquad (11)$$

Но $p_F^2/m \sim \varepsilon_F$, а $e\hbar/m = \mu$ — магнитный момент электрона. Электрон имеет не только заряд, но и обладает магнитным моментом, т.е. создает вокруг себя не только электрическое, но и магнитное поле. (Величина магнитного момента электрона $\mu \sim 10^{-23}$ Дж/Тл. Это — очень маленький магнитный момент (магнитный момент 1 см^3 обычного магнита приблизительно в 10^{21} раз больше), но это ведь магнитный момент *одного* электрона.) Тогда условие (11) переписывается в виде

$$\mu B \ll \varepsilon_F. \qquad (12)$$

А так как $\varepsilon_F \sim 10^{-19}$ Дж, то это означает, что $B \ll 10^4$ Тл. При всех применяемых в физических экспериментах магнитных полях условия (11), (12) выполнены.

Но для того, о чем речь пойдет ниже, необходимо учесть именно квантование движения электрона в магнитном поле. Для этого мы воспользуемся формулой, постулированной Нильсом Бором, когда он пытался объяснить структуру спектра атомов:

$$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = \hbar\omega,$$

$$n \text{ — целые числа} \gg 1. \qquad (13)$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T_B}$ — круговая частота *классического* движения. Когда была создана логически непротиворечивая квантовая механика (Э.Шрёдингер, В.Гейзенберг), условие (13) было строго получено в той главе квантовой механики, которая была названа ***квазиклассическое приближение***.

Итак, из (13) и (10) следует ($\Delta\varepsilon = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$):

$$\Delta\varepsilon\frac{\partial S}{\partial\varepsilon} = \frac{|e|B\hbar}{m^*}\cdot 2\pi m^* = 2\pi\hbar|e|B,$$

$$\text{или } \Delta S = 2\pi\hbar|e|B,$$

а

$$S(\varepsilon, p_B) = 2\pi\hbar|e|B\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

$$n \text{ — целые числа} \gg 1. \qquad (14)$$

Мы воспользовались тем, что $\Delta\varepsilon$ при $n \gg 1$ значительно меньше ε, а $1/2$ *приписали*, чтобы результат точнее согласовался с более строгой теорией (ее мы упомянули). Условие *квантования площадей* (14) впервые было выведено Ильей Михайловичем Лифшицем в 1950 году и носит его имя.[7] Формуле (14) можно придать другой вид, если от траектории в импульсном пространстве перейти к проекции траектории в координатном пространстве на плоскость, перпендикулярную магнитному полю. Площадь S_r, которую окружает проекция траектории, есть $\left(\frac{1}{eB}\right)^2 S$, и

$$BS_r = \frac{2\pi\hbar}{|e|}\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

$$n \text{ — целые числа} \gg 1. \qquad (15)$$

Но произведение «магнитное поле × ×площадь» есть поток магнитного поля. Условие (15) означает: электрон движется по траектории, охватывающей полуцелое число квантов потока магнитного поля $\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{|e|}$. Подчеркнем: не поток магнитного поля квантуется, а траектория подстраивается под величину потока так, что

$$\Phi = \Phi_0\left(n + \frac{1}{2}\right). \qquad (16)$$

На рисунке 6 изображены квантованные траектории на поверхности Ферми (поверхность просто придумана). Еще одно утверждение, которое придется принять на веру (кажется последнее). Среди квантованных значений площади существенны для дальнейшего те, которым на поверхности Ферми соответствует экстремум по p_B (максимум или минимум — не так важно; лишь бы $\frac{\partial S}{\partial p_B} = 0$).

Теперь обратимся к рисунку 7, взятому из экспериментальных работ. На нем изображена зависимость магнитной восприимчивости монокристаллов рения (а) и серебра (б) от магнитного поля. Обратить внимание надо на то, что кривая, изображающая эту зависимость, *осциллирует*. Зависимость снята при температуре, близкой к абсолютному нулю. Осциллирующая зависимость магнитного момента и/или магнитной восприимчивости от магнитного поля носит название эффекта де Гааза — ван Альфена. Осцилляционные эффекты характерны практически для всех металлов. Для их наблюдения нужны хорошие, чистые монокристаллы металла, низкая температура и достаточно сильное магнитное поле, чтобы величина μB превышала kT, оставаясь малой по сравнению с ε_F.

В чем причина осцилляции, т.е. периодической зависимости от магнитного поля B? В повторяемости ситуации при изменении значения $\frac{1}{B}$ на величину $\frac{2\pi|e|\hbar}{S^F_{extr}}$, где S^F_{extr} — значение экстремальной по p_B пло-

[7] *Часто говорят «условие Лифшица — Онсагера». Л.Онсагер (1903—1976, Нобелевская премия по химии 1968 г.) вывел ее независимо и чуть позже (1952 г.).*

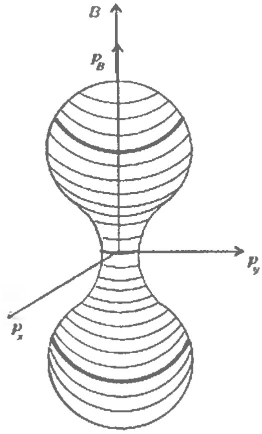


Рис.6. Кантованные траектории на поверхности Ферми. Выделены траектории, которые окружают экстремальные (по p_B) площади

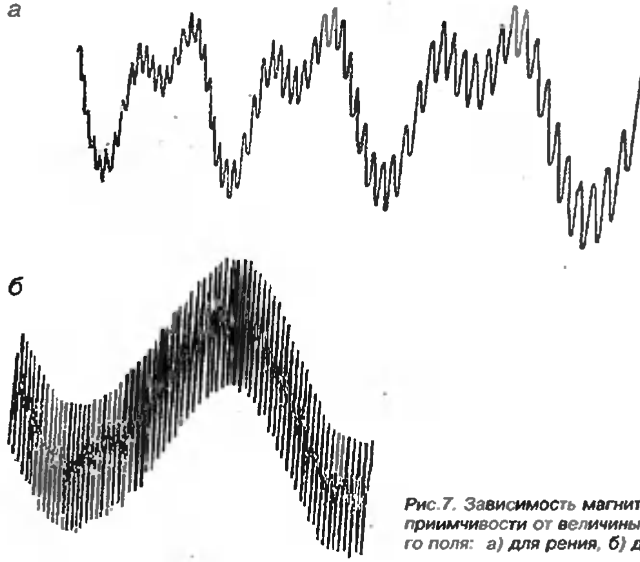


Рис.7. Зависимость магнитной восприимчивости от величины магнитного поля: а) для рения, б) для серебра

щади сечения поверхности Ферми. Перепишем условие (14) так:

$$\frac{1}{B_1}=\frac{2\pi\hbar|e|}{S^F_{extr}}\left(n+\frac{1}{2}\right), \qquad (а)$$

$$\frac{1}{B_2}=\frac{2\pi\hbar|e|}{S^F_{extr}}\left(n+1+\frac{1}{2}\right). \qquad (б)$$

Ситуация (а) отличается от ситуации (б) только тем, что в первом случае с энергией Ферми совпадает n-й уровень, а во втором — $(n+1)$-й. Но n — все равно очень большое число, изменение на единицу номера уровня мало что меняет. В результате — повторение, осцилляции. Вычтя из уравнения (б) уравнение (а), получаем *период осцилляционной зависимости*

$$\Delta\frac{1}{B}=\frac{2\pi\hbar|e|}{S^F_{extr}}. \qquad (17)$$

Полная теория эффекта де Гааза — ван Альфена на основе этой формулы была построена И.М.Лифшицем и его учеником А.М.Косевичем (тогда аспирантом) в 1953 году. Основное достоинство формулы (17) в том, что она была получена *без* предположения о характере зависимости энергии электрона от импульса. Следовательно, она годится для любого металла с поверхностью Ферми любой формы. Более того, она дает возможность решать обратную задачу — по экспериментальным данным, по осцилляционным кривым определять форму поверхности Ферми (об этом чуть ниже).

Теорию эффекта де Гааза — ван Альфена для свободных электронов, т.е. электронов в свободном от сил пространстве, построил Л.Д.Ландау в 30-х годах. Но его работа не могла быть опубликована, так как Ландау в это время был репрессирован (незаконно, как потом выяснилось). В экспериментальной работе, посвященной эффекту де Гааза — ван Альфена в висмуте (Д.Шенберг), вышедшей в Англии, результаты Ландау изложил его друг — физик-теоретик Р.Пайерлс, к этому времени бежавший из фашисткой Германии и живший в Англии. Так в историю науки вплетается история стран и народов, часто, к сожалению, трагическая.

Для свободных электронов формула (17) содержит плотность электронов n_e, поскольку $S^F_{extr}=\pi p_F^2$, а $p_F=2\pi\hbar\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{1/3}$:

$$\Delta\frac{1}{B}=\frac{|e|}{\pi(2\pi\hbar)}\left(\frac{8\pi}{3n}\right)^{2/3}=\frac{2|e|}{\hbar}\frac{1}{\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}}. \qquad (18)$$

Когда существовала только эта формула для объяснения осцилляционных эффектов, то казалось, что осцилляционные эффекты можно наблюдать лишь в таких экзотических металлах, как висмут. Дело в том, что у висмута аномально мало электронов проводимости и поэтому период $\Delta\frac{1}{B}$ достаточно велик, т.е. наблюдаем. Работа И.М.Лифшица и А.М.Косевича все «поставила на место»: поверхности Ферми металлов сложны, практически все поверхности Ферми обладают малыми сечениями с экстремальными (по p_B) площадями. Взгляните еще раз на рисунок 4!

Как же использовать формулу (17) для определения формы поверхности Ферми? Вспомним, что период определяется площадью сечения, *проведенного перпендикулярно магнитному полю*. Поворачивая кристалл и измеряя периоды, а значит площади сечений поверхности Ферми, имеющие экстремум по p_B, мы можем «прощупать» всю поверхность. И.М.Лифшиц вместе с известным геометром А.В.Погореловым даже вывели специальную формулу, дающую возможность по угловой зависимости периода осцилляций построить поверхность Ферми (1954 г.).

Уже говорилось, что в настоящее время известны поверхности Ферми большинства металлов. Наибольшую информацию о поверхностях Ферми получили из сравнения экспериментальных данных по осцилляционным эффектам с формулой, которую вывели Илья Михайлович Лифшиц и Арнольд Маркович Косевич.

ПОПЛАВОК В БУТЫЛКЕ

(Начало см. на 4-й странице обложки)

Проделав эксперименты, вы, будем надеяться, убедились, что поплавок всякий раз отклоняется *по ускорению*, а не против, как это наблюдается в случае грузика на нити. (Теперь вам понятно, почему слова «наводящий» и «наводящая» были взяты в кавычки?) Попробуем разобраться, в чем тут дело.

Начнем с грузика на нити. На ускоряющийся грузик действуют две силы — сила тяжести и сила натяжения нити (рис.1). Горизонтальное ускорение грузику сообщает горизонтальная состав-

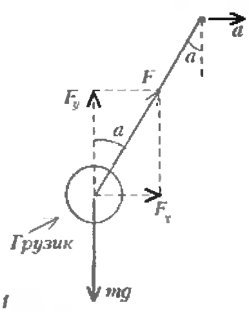


Рис. 1

ляющая силы натяжения, из чего ясно, что нить отклоняется против ускорения (чтобы эта составляющая была направлена по ускорению). Запишем второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления:

$$F_x = ma,\quad F_y - mg = 0,$$

откуда найдем угол отклонения нити:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{F_x}{F_y} = \frac{a}{g}.$$

Вернемся к поплавку. На него, кроме силы тяжести и силы натяжения нитки, действует еще со стороны воды сила Архимеда. Читателю, который раньше не сталкивался с подобными ситуациями, может показаться, что эта сила не должна влиять на направление отклонения поплавка. «Действительно, — рассуждает он, — ведь известно, что выталкивающая сила *выталкивает*, т.е. действует вверх, и горизонтальное ускорение опять создается только натяжением нити; значит, поплавок тоже должен отклоняться против ускорения». Ошибка заключается в том, что читатель привык применять закон Архимеда к телам, находящимся в *покоящейся* жидкости. Если же жидкость (газ) с погруженным в нее телом сама движется с ускорением, то закон Архимеда видоизменяется. Чтобы выяснить, как именно, воспользуемся известным методом «подмены».

Мысленно заменим погруженное тело жидкостью. На выделенный элемент жидкости (в объеме тела) действуют только две силы — сила тяжести и сила Архимеда (рис.2,*а*). Под действием этих сил он вместе со всей жидкостью дви-

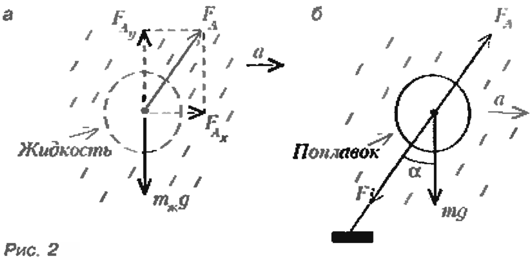


Рис. 2

жется с ускорением *a*; следовательно, сила Архимеда, кроме вертикальной составляющей $F_{Ay} = m_ж g$, должна иметь и горизонтальную составляющую $F_{Ax} = m_ж a$. Но сила Архимеда, действующая на выделенный объем, не зависит от того, что находится в этом объеме — жидкость или погруженное тело. Значит, в жидкости, движущейся с ускорением, изменяется как величина, так и направление силы Архимеда. И происходит это потому, что распределение давлений в объеме жидкости устанавливается таким, чтобы обеспечить ускоренное движение всех элементов жидкости.

Теперь мы можем записать второй закон Ньютона для поплавка (рис.2,*б*) в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления:

$$m_ж a - F_x = ma,\quad m_ж g - F_y - mg = 0.$$

Отсюда получаем

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{F_x}{F_y} = \frac{(m_ж - m)a}{(m_ж - m)g} = \frac{a}{g},$$

т.е. угол отклонения нити оказался таким же, как в случае грузика на нити.

Чтобы сделать этот результат более наглядным, запишем закон Ньютона для грузика, жидкости и поплавка в векторном виде:

$$m\vec g + \vec F = m\vec a,\ \text{или}\ \vec F = -m(\vec g - \vec a),$$

$$\vec F_A + m_ж \vec g = m_ж \vec a,\ \text{или}\ \vec F_A = -m_ж(\vec g - \vec a),$$

$$m\vec g + \vec F + \vec F_A = m\vec a,\ \text{или}\ \vec F = (m_ж - m)(\vec g - \vec a).$$

Видно, что все формулы выглядят так, как будто мы поместили покоящийся сосуд с жидкостью в поле тяжести с ускорением свободного падения, равным (рис.3)

$$\vec g^* = \vec g - \vec a.$$

Оказывается, это свойство является общим: переход в неинерциальную систему отсчета, движущуюся поступательно с ускорением $\vec a$, сводится к переопределению силы тяжести.

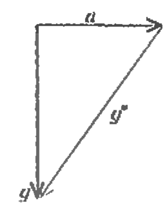


Рис. 3

Отметим, что такой же результат верен и для вращающейся системы отсчета, но только для тел, которые в этой системе покоятся. В этом случае под ускорением $\vec a$ надо понимать центростремительное ускорение той точки, где находится тело (т.е. ускорение самого тела относительно неподвижного наблюдателя).

В заключение (чтобы проверить, все ли вы поняли и насколько хорошо) попробуйте ответить на следующие вопросы:

1. Куда отклонится воздушный шарик над вашей головой, если вы, не выпуская из руки нить, начнете двигаться с ускорением?
2. Куда отклонится воздушный шарик, если вы находитесь в салоне самолета, быстро набирающего скорость перед взлетом?
3. Куда отклонится пламя свечи, если вы закроете ее колпаком и начнете перемещаться с ускорением? А если просто пойдете со свечой в руке, не накрывая ее?
4. Под каким углом наклонена поверхность жидкости в сосуде, движущемся горизонтально с ускорением *a*?
5. Поплавок плавает на поверхности воды. Изменится ли глубина его погружения, если сосуд перемещать вверх или вниз с ускорением?
6. Чему равен период колебаний математического маятника, подвешенного к потолку лифта, поднимающегося с ускорением *a*; к потолку вагона, ускорение которого равно *a*? Длина нити маятника *l*.

С.Кротов, А.Черноуцан

Теорема о четырех вершинах для многоугольника

О.МУСИН

В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ геометрии широко известна теорема о четырех вершинах. Суть ее состоит в том, что у достаточно гладкой замкнутой выпуклой кривой (овала) функция кривизны имеет по крайней мере четыре экстремума (вершины), т.е. у нее не менее двух локальных максимумов и, соответственно, минимумов. Мы не будем здесь давать строгого определения понятия кривизны; если оно вам неизвестно, то вы без особого ущерба можете пропустить приведенную выше формулировку теоремы и дальнейшие ссылки на непрерывный случай. Дело в том, что, как оказалось, имеется «дискретный» аналог этой теоремы для многоугольника, который вполне понятен школьнику старших классов. Эта теорема полностью согласуется с ее непрерывным аналогом и при незначительных усилиях из теоремы о многоугольнике выводится теорема о кривой. В одном из докладов на заседании Московского математического общества академик В.И.Арнольд назвал теорему о четырех вершинах фундаментальным свойством размерности два.

Теорема о четырех экстремальных вершинах

Рассмотрим выпуклый многоугольник M с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_n$. У любой вершины A_i есть два соседа — A_{i-1} и A_{i+1}, если $1 < i < n$, A_2 и A_n для A_1 и, наконец, A_{n-1} и A_1 для A_n. Сопоставим каждой вершине A_i радиус окружности, описанной вокруг треугольника с вершинами A_i и двумя ее соседями. Обозначим радиус этой окружности через R_i. Мы имеем теперь набор чисел $R_1, R_2, \ldots, R_n$.

Будем называть вершину A_i многоугольника M *локально-минимальной*, если значение соответствующего ей радиуса R_i не превосходит значений радиусов двух ее соседей (можно считать, что эти числа выписаны по окружности). Если величина R_i не меньше величин радиусов соседних вершин, то будем называть вершину A_i *локально-максимальной*. Вершины, являющиеся либо локально-минимальными, либо локально-максимальными, назовем *экстремальными*. Заметим, что неравенства здесь нестрогие и поэтому, согласно определению, все вершины описанного многоугольника являются экстремальными, так как у них одинаковые радиусы.

В любом наборе чисел имеется наименьшее и наибольшее число, и поэтому для любого многоугольника мы заведомо имеем две экстремальные вершины. Теорема о четырех вершинах говорит о том, что найдутся по крайней мере еще две. В непрерывном случае необходимым является условие выпуклости кривой. А что для многоугольника?

Задача 1. *Постройте пример невыпуклого многоугольника, имеющего ровно две экстремальные вершины.*

Казалось бы, что условия выпуклости достаточно для существования четырех экстремальных вершин. Однако и это не так.

Задача 2. *Постройте пример выпуклого многоугольника, у которого ровно две экстремальные вершины.*

Надеемся, что эти задачи не вызовут у вас особенных затруднений. В качестве подсказки заметим, что достаточно рассмотреть четырехугольник. Если у вас никак не выходит решение этой задачи, то посмотрите на рисунки 3 и 4, где приведены примеры для этих задач.

Возможно, у вас возник вопрос, какое отношение имеет радиус описанной окружности к кривизне? Дело в том, что кривизной вершины A_i называют величину $1/R_i$. С этой величиной связано одно из определений кривизны для гладких кривых. Если рассмотреть точку A на кривой и на маленьком расстоянии h по обе стороны от A отложить на кривой точки B и C, то *кривизной* в точке A называется предел при h стремящемся к 0 величины $1/R(h)$, где $R(h)$ — радиус описанной окружности треугольника ABC.

Заметим, что при маленьких h угол BAC близок к 180°. В частности, если кривая выпукла, то из этого следует, что центр описанной окружности лежит внутри угла BAC. Это свойство может не выполняться для многоугольника. Легко построить пример, когда центр описанной окружности треугольника ABC лежит вне угла BAC. В связи с этим дадим следующее определение вершины положительной кривизны.

Определение. *Назовем вершину A_i многоугольника M вершиной положительной кривизны, если центр описанной вокруг треугольника $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ окружности лежит внутри угла $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ (рис.1). Будем говорить, что многоугольник положительной кривизны, если все его вершины положительной кривизны.*

Нетрудно понять, что это определение согласуется с определением знака кривизны для непрерывного

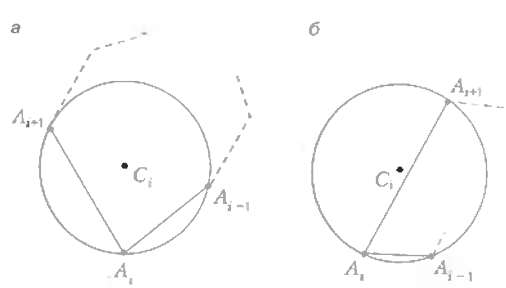


Рис. 1. а) A_i — *вершина положительной кривизны;* б) A_i *не является вершиной положительной кривизны*

Иллюстрация В.Бухарева

случая. Теперь у нас все готово, чтобы сформулировать основную теорему.

Теорема. *У всякого выпуклого n-угольника положительной кривизны по крайней мере четыре вершины являются экстремальными.* (Здесь, естественно, $n > 3$.)

Прежде чем заглянуть в доказательство основной теоремы, вы можете поразмышлять над следующими задачами, являющимися ее вариациями.

Задача 3. *Докажите, что у выпуклого равностороннего многоугольника найдется по крайней мере два угла, величина каждого из которых не превосходит величин двух его соседних углов.*

Эта задача является прямым следствием теоремы (почему?).

Следующая задача предлагалась на заключительном этапе XXI Российской математической олимпиады в1995 году. Она не выводится прямо из теоремы, но наше доказательство теоремы дословно переносится на решение задачи. Интересно, что из двух десятков школьников, решивших эту задачу (она предлагалась сразу в двух классах, в 10 и 11), только один использовал идею доказательства теоремы.

Задача 4 (А.Берзиньш, О.Мусин). *Докажите, что если у выпуклого многоугольника все углы равны, то по крайней мере у двух его сторон длины не превосходят длин соседних с ними сторон.*

Доказательство теоремы

Будем доказывать теорему от противного. Предположим, что у многоугольника M ровно две экстремальные вершины. Без ограничения общности можно считать, что это вершины A_1 и A_k. Пусть у вершины A_1 радиус минимальный, а у вершины A_k — максимальный. Тогда имеют место следующие неравенства:

$$R_1 < R_2 < \ldots < R_k; \qquad (1)$$

$$R_1 < R_2 < R_{n-1} < \ldots < R_{k+1} < R_k. \qquad (2)$$

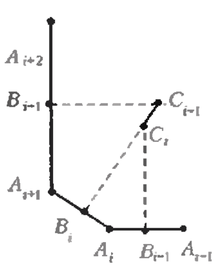


Рис. 2

Проведем к каждой из сторон многоугольника срединные перпендикуляры. Два соседних перпендикуляра, проведенные к сторонам a_{i-1} и a_i, пересекаются в точке C_i — центре описанной окружности треугольника $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ (рис.2). Из определения R_i следует, что $A_iC_i = R_i$.

Пусть B_i — середина стороны a_i, тогда $\angle B_{i-1}C_iB_i = 180°-\angle A_i$. Обозначим этот угол через β_i. Докажем, что если $R_i < R_{i+1}$, то $\angle B_{i-1}C_{i+1}B_{i+1}$ меньше $\beta_i + \beta_{i+1}$. Заметим, что $B_iC_i < B_iC_{i+1}$. (Это неравенство вытекает из того, что у прямоугольных треугольников $B_iC_iA_i$ и $B_iC_{i+1}A_{i+1}$ катеты B_iA_i и B_iA_{i+1} равны.) Поэтому угол $B_iC_iB_{i-1}$ внешний для треугольника $B_{i-1}C_iC_{i+1}$. Отсюда следует, что $\angle B_{i-1}C_{i+1}B_i < \angle B_{i-1}C_iB_i = \beta_i$ и справедливо неравенство $\angle B_{i-1}C_{i+1}B_{i+1} < \beta_i + \beta_{i+1}$.

Применим последнее неравенство к (1), т.е. последовательно рассмотрим углы $B_1C_3B_3$, $B_1C_4B_4$ и т.д.; получим, что $\angle B_1C_kB_k < \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_k$. Аналогично, используя (2), получаем, что $360° - \angle B_1C_kB_k < \beta_1 + \beta_n + {}$ $+ \beta_{n-1} \ldots + \beta_{k-1}$. Сложив эти неравенства, получаем: $360° < \beta_1 + \beta_2 + \ldots$ $\ldots + \beta_n = 180° - \angle A_1 + 180° - \angle A_2 + \ldots$ $\ldots + 180° - \angle A_n = 180°n - (\angle A_1 +$ $+ \angle A_2 + \ldots + \angle A_n) = 180°n - 180°(n-2) =$ $= 360°$. Здесь мы воспользовались тем, что сумма углов n-угольника равна $180°(n-2)$. Следовательно, $360° < 360°$. Противоречие. Теорема доказана.

Каустика многоугольника

Доказательство теоремы позволяет рассмотреть для многоугольников один очень интересный объект, возникающий в математической теории особенностей. Для гладкой кривой *каустикой* называют множество центров кривизны. Чтобы ее построить, нужно отложить вдоль каждой нормали соответствующие радиусы кривизны. Это определение легко переносится на случай многоугольника. Будем называть каустикой n-угольника M с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_n$ замкнутую ломаную $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C_n, C_1$, где C_i, как и выше, центр описанной окружности треугольника $A_{i-1}A_iA_{i+1}$.

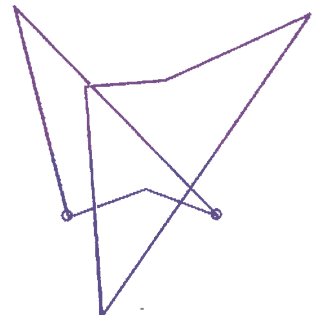


Рис. 3. Невыпуклый многоугольник с двумя экстремальными вершинами

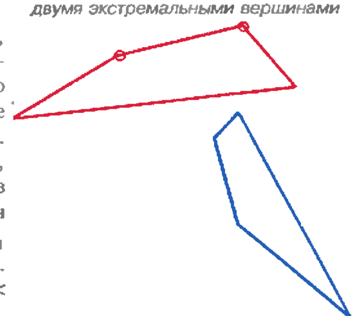


Рис. 4. Выпуклый четырехугольник с двумя экстремальными вершинами

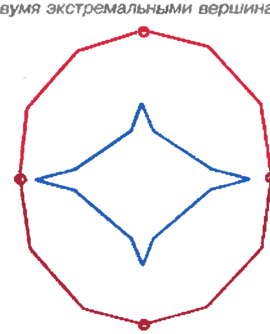


Рис. 5. 12-угольник и его каустика с 4 вершинами

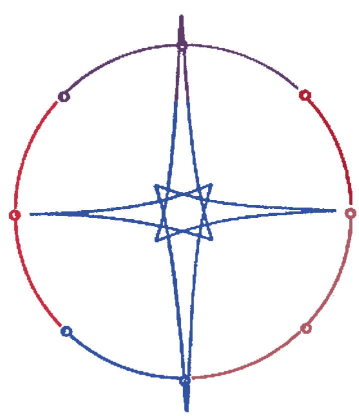


Рис. 6. 100-угольник с 8 экстремальными вершинами

На рисунках 3, 4, 5 и 6 изображены каустики многоугольников, где многоугольник показан красным цветом, а его каустика синим. (Все эти примеры построены с помощью компьютера.) Многоугольники на рисунках 3 и 4 не удовлетворяют условию теоремы, и потому у них только по две экстремальные вершины.

Рисунки 5 и 6 показывают явную связь между числом экстремальных вершин. Так, на рисунке 5 число экстремальных вершин равно 4, а каустика при обходе оборачивается один раз, а на рисунке 6 их 8, а оборотов, соответственно, 3. Конечно, эта связь не случайна. Поясним сначала, что значит «число оборотов» кривой. Это понятие, которое обычно называют *индексом*, можно определить для любой замкнутой кривой. Для замкнутой ломаной это сделать достаточно легко. Пусть $\angle C_1$, $\angle C_2$, ..., $\angle C_n$ — правые углы при обходе ломаной. (Можно рассматривать и левые, главное, чтобы все углы были одного типа: либо правые, либо левые). Рассмотрим сумму $(180° - \angle C_1) + (180° - \angle C_2) + \ldots + (180° - \angle C_n)$. Эта сумма равна величине $\pm 360° d$, где d — натуральное число (почему?). Число d и называют индексом замкнутой ломаной. Эта характеристика представляет самостоятельный интерес; если вы с ней незнакомы, то рекомендуем вам поэкспериментировать с ней, чтобы убедиться, что она действительно отвечает за число вращений замкнутой кривой.

Вернемся к каустике.

Задача 5. *Докажите, что индекс каустики выпуклого многоугольника положительной кривизны равен d тогда и только тогда, когда у многоугольника ровно $2d + 2$ экстремальных вершин.*

Указание. Из рисунка 2 можно углядеть, что $\angle C_i$ равен $\angle A_i$, если A_i не экстремальная вершина. Дополнительный вклад $2d + 2$ экстремальных вершин составляет $360° (d - 1)$.

Обобщения теоремы о четырех вершинах

В замечательной книге известного российского математика академика А.Д.Александрова «Выпуклые многогранники», (М.: ГИТТЛ, 1950) имеется одна лемма, которая весьма близка к рассматриваемой нами теме. Мы приведем ее в несколько меньшей общности, чем в книге.

Теорема Александрова. *Пусть на плоскости даны два выпуклых многоугольника M_1 и M_2 с параллельными сторонами, которые никакими параллельными переносами не могут быть расположены так, чтобы один содержался внутри другого. Тогда при обходе M_1 или M_2 разность длин соответствующих параллельных сторон должна изменять знак по крайней мере четыре раза.*

На первый взгляд, здесь нет явной связи с теоремой о четырех вершинах для многоугольника и число 4 выглядит как совпадение. Однако посмотрите на задачу 4. Эта задача — прямое следствие теоремы Александрова. Действительно, пусть M_1 — n-угольник ($n > 3$), у которого все углы равны, а M_2 — он же, но повернутый вокруг какой-нибудь вершины M_1 на угол α, равный $180°(n-2)/n$ — внутреннему углу P_1. Тогда стороны M_1 и M_2 будут параллельны, при этом соответствующие параллельные стороны являются соседними. Поскольку при сравнении длин этих сторон знак меняется по крайней мере 4 раза, то и у нашего многоугольника имеется не менее четырех экстремальных сторон.

Заметим, что результат А.Д.Александрова сильнее, чем результат задачи 4. Если повернуть M_1 вокруг вершины на угол $k\alpha$, где $1 < k < n$, то стороны M_2 также будут параллельны P_1, но уже не будут соседними. Номера параллельных сторон отличаются на k, и для них вновь выполнено условие, что разность длин этих сторон при обходе меняется не менее четырех раз. Попробуйте доказать этот результат, не используя теорему Александрова!

Имеется обобщение теоремы о четырех вершинах овала (гладкий случай), принадлежащее, видимо, известному немецкому геометру Вильгельму Бляшке (1885–1962). Мы приведем здесь формулировку этого результата, оставляя без дальнейших пояснений, что означают соответствующие математические понятия.

Пусть C_1 и C_2 — две (положительно направленные) выпуклые замкнутые кривые, $d\sigma_1$ и $d\sigma_2$ — элементы дуги в точках с параллельными (и одинаково направленными) опорными прямыми; тогда отношение $d\sigma_1/d\sigma_2$ имеет минимум четыре экстремума.

Эта теорема переходит в теорему о четырех вершинах овала, если C_2 — окружность.

Нетрудно заметить сходство этого утверждения с теоремой Александрова. С одной стороны, это позволяет считать теорему Александрова вариантом теоремы о четырех вершинах для многоугольника (обобщением задачи 4), а с другой, позволяет надеется, что имеются и другие обобщения для многоугольников, более близкие к нашей основной теореме. Может быть, кому-то из читателей удастся их найти?

В заключение остановимся еще на одном обобщении теоремы о четырех вершинах овала, которое упоминается в книге В.Бляшке «Круг и шар» (М.: Наука, 1967, с.193–194): *«Если овал пересекается с кругом в $2n$ точках, то он имеет по крайней мере $2n$ вершин»*. Поскольку для любого овала найдется круг, пересекающий овал не менее чем в четырех точках, то у овала имеется не менее 4 вершин. Таким образом, теорема о четырех вершинах является частным случаем этого утверждения. Интересно, как выглядит аналогичное утверждение для многоугольника? Автор с трудом удержался от искушения попытаться найти его. Предоставим это нашим читателям!

И Эдисон похвалил бы вас ...

Р. ВИНОКУР

Гражданская война между демократическим Севером и рабовладельческим Югом была довольно кровопролитной: погибли три четверти миллиона человек, совсем немало для того времени. После Гражданской войны начался стремительный промышленный подъем страны, прежде в основном аграрной, и талантливый самоучка-изобретатель Томас Альва Эдисон оказался, в соответствии с американской поговоркой, нужным человеком в нужном месте и в нужное время. Он работал много и упорно и стал автором 1093(!) изобретений, среди которых наиболее известны фонограф (первое устройство, записывающее и воспроизводящее звук) и электрическая лампочка. Однажды в Америку приехал талантливый сербский инженер Никола Тесла и был принят на работу в лабораторию Эдисона... Впрочем, основная цель нашего рассказа не вспомнить биографию «Великого Американца» (как часто называют Эдисона), а показать практическую эффективность даже совсем простых физико-математических моделей.

Инженерные науки считались важными еще в библейские времена (вспомните египетские пирамиды и финикийские корабли дальнего плавания), но получили основное развитие в последние полтора столетия. Что же касается инженерных инструментов, то здесь наблюдается еще более быстрый прогресс. Так, в начале своей карьеры (в 70-х годах) автор активно использовал для расчетов традиционную логарифмическую линейку и громоздкую (в целую комнату) вычислительную машину с ее бумажными перфолентами и перфокартами. Теперь инженеры применяют карманные калькуляторы и настольные компьютеры. Тем не менее, роль простых физико-математических моделей в инженерной практике столь же велика, как и во времена Эйлера и Ньютона. Такие модели помогают быстро получить необходимые для инженерного анализа результаты с достаточной для начального приближения точностью. Далее можно использовать компьютеры — для детальных численных расчетов и приборы — для уточняющих измерений.

Рассмотрим в качестве примера тепловое равновесие электрической цепи. Практическая важность этой проблемы не вызывает сомнений: для прибора или устройства опасен даже перегрев, а ведь может возникнуть и пожар. Как известно, равновесие бывает устойчивым, неустойчивым и безразличным (нейтральным). Так, в механике устойчивое равновесие существует, если после прекращения действия внешних сил система неизменно возвращается в исходное положение равновесия (рис.1,*а*). Безразличное равновесие имеет место, если система, будучи выведенной из равновесия, остается в новом состоянии (рис.1,*б*). Наконец, даже слабый и короткий толчок уводит систему из неустойчивого положения равновесия (рис.1,*в*).

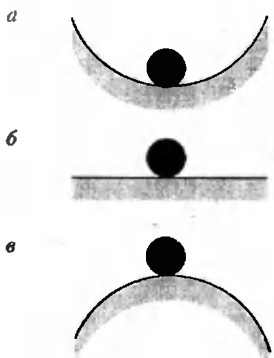


Рис.1

Возьмем простейшую электрическую цепь постоянного тока (рис.2): источник напряжением U и резистор сопротивлением

$$R = R_0(1+\alpha t), \qquad (1)$$

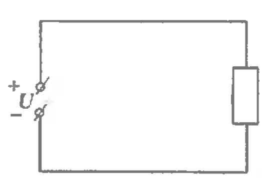


Рис.2

где R_0 — электрическое сопротивление при температуре 0 °С, t — температура по шкале Цельсия и, наконец, α — температурный коэффициент сопротивления. Для большинства проводников электрическое сопротивление растет с температурой ($\alpha > 0$). Например, температурные коэффициенты сопротивления чистых металлов (алюминия, меди, свинца, вольфрама и т.п.) положительны и равны примерно 0,004 1/°С. В случае таких сплавов, как манганин или константан, температурный коэффициент почти равен нулю. Для углерода и полупроводниковых материалов электрическое сопротивление уменьшается с ростом температуры ($\alpha < 0$). (Как химический элемент, углерод встречается в природе в виде кристаллических веществ: графита и алмаза. Аморфный углерод (разновидность графита, состоящего из микроскопических кристаллов) получается путем нагревания дерева, угля и других содержащих углерод материалов при ограниченном доступе кислорода, так что полного сгорания не происходит. Первые нити накала в электрических лампочках были целиком углеродными или с большим содержанием углерода.)

Линейное уравнение (1) не является фундаментальным физическим законом. Это лишь удобная приближенная зависимость, работающая в диапазоне практически важных температур. Например, если $\alpha > 0$ и $t < t_{\min} = -1/\alpha$, то, в соответствии с уравнением (1), электрическое сопротивление вообще является математически отрицательной величиной. Следовательно, при положительном коэффициенте сопротивления уравнение (1) не отражает реальных физических процессов, если температура меньше или близка к $t_{\min}$. Однако для металлов эта «пограничная» температура равна примерно $-1/0{,}004$ °С ≈ -250 °С, т.е. почти совпадает с абсолютным нулем

Иллюстрация А.Болдина

($\approx -273\,°\mathrm{C}$). Если $\alpha < 0$ и $t > t_{\max} = 1/|\alpha|$, то уравнение (1) опять приводит к отрицательным значениям. Но для углерода, например, $\alpha \approx -0{,}0005\ 1/°\mathrm{C}$, значит, $t_{\max} \approx 2000\,°\mathrm{C}$ — скажем прямо, очень высокая температура. Таким образом, линейное соотношение (1) является вполне практичным.

Тепловое равновесие наступает, если тепловая энергия, выделяемая в единицу времени в электрической цепи, равна тепловой мощности, уходящей из резистора в окружающую среду. Для простоты полагаем, что уходящая мощность равна

$$P_{\text{ух}} = A\left(t - t_{\text{окр}}\right), \qquad (2)$$

где $t_{\text{окр}}$ — температура окружающего воздуха, а коэффициент A — положительная постоянная величина, называемая коэффициентом теплоотдачи. Уравнение (2) является точным, если тепло отдается в среду путем конвекции (перемешивания нагретых и прохладных слоев воздуха). Такой механизм теплообмена преобладает, когда температура не очень высокая. В противном случае на первое место выходит тепловое излучение. Это совсем не плохо, а даже очень хорошо, иначе тепловая энергия Солнца не смогла бы достичь нашей планеты (из-за космического вакуума). Тем не менее, в данном случае простота математических выкладок важнее их абсолютной точности. Нам надо получить лишь качественные соотношения, поэтому не будем усложнять уравнение теплоотдачи, а наоборот еще более упростим его, предположив, что температура окружающего воздуха равна 0 °С. Тогда

$$P_{\text{ух}} = At. \qquad (2')$$

С другой стороны, тепловая мощность электрического тока, как известно, равна

$$P_{\text{т}} = \frac{U^2}{R}. \qquad (3)$$

Используя выражения (1), (2′) и (3), запишем уравнение теплового равновесия:

$$\frac{U^2}{R_0(1+\alpha t)} = At, \qquad (4)$$

которое легко преобразуется в эквивалентное квадратное уравнение

$$\alpha t^2 + t - \frac{U^2}{R_0 A} = 0 \qquad (5)$$

с двумя действительными решениями при условии $\alpha > 0$ (т.е. для металлов):

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\alpha U^2/(R_0 A)}}{2\alpha}.$$

Решение t_2 (со знаком минус перед радикалом) является отрицательным (ниже условленной температуры окружающего воздуха), и здравый смысл подсказывает, что этим решением лучше пренебречь. Однако проведем более основательный анализ.

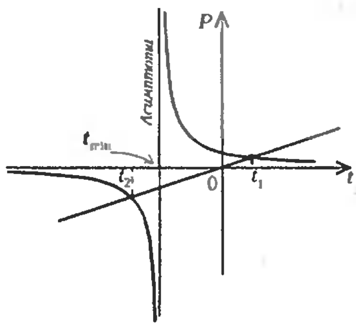


Рис. 3

Для этого решим уравнение (4) графически — в плоскости с прямоугольной системой координат t и P (рис.3, температура отложена по оси абсцисс, тепловая мощность — по оси ординат). Левая часть уравнения (4) — это гипербола (две ее ветви разделены асимптотой (в данном случае вертикальной прямой линией). Правая часть уравнения (4) — прямая линия, проходящая через начало координат (0, 0). Решениями являются две точки пересечения прямой с гиперболой. Их абсциссы соответствуют корням квадратного уравнения (5). Поскольку асимптота имеет абсциссу $t_{\min} = -\dfrac{1}{\alpha}$, то отрицательный корень (расположенный левее асимптоты) лишен физического смысла (исходное уравнение (1) в этом случае неверно).

Если $\alpha < 0$, то ситуация становится вполне экзотической. Так, уравнение (5) вообще не имеет действительных решений, если

$$D = \frac{4|\alpha| U^2}{R_0 A} > 1 \qquad (6)$$

($|\alpha|$ — абсолютное значение величины α). С физической точки зрения это означает, что тепловое равновесие невозможно, так как электрически производимая тепловая мощность больше мощности, отдаваемой в окружающую среду. В результате температура резистора будет повышаться, пока он не расплавится. Чтобы избежать катастрофы (сделать безразмерный параметр D меньше 1), можно увеличить коэффициент теплоотдачи A. На практике это достигается с помощью принудительной вентиляции. Вот почему во многих электронных устройствах (например, компьютерах), где много полупроводниковых элементов, установлены внутренние вентиляторы. (Перед второй мировой войной полупроводники были курьезом, представляющим лишь исследовательский интерес. В начале 50-х годов, с открытием транзистора, они получили необычайно широкое применение.)

Перейдем теперь от «плохого» условия (6) к «хорошему» условию

$$D = \frac{4|\alpha| U^2}{R_0 A} < 1. \qquad (7)$$

В этом случае уравнение (5) имеет два действительных положительных корня:

$$t_{2,1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - D}}{2|\alpha|}. \qquad (8)$$

Интуиция подсказывает, что один из них не имеет практического значения. Опять — проблема выбора!

Заметим, что в этом и состоит основное отличие физика от «чистого» (не прикладного) математика. Первый знает, чем и когда пренебречь, чтобы быстро получить полезный результат. Второй «вынужден» долго искать точные решения.

Наш следующий шаг — проверить оба решения на устойчивость. Только устойчивое тепловое равновесие имеет практическое значение. На рисунке 4 кривая линия (гипербола) характеризует левую часть уравнения (4). Правая часть этого уравнения представлена тремя возможными прямыми, которые соответствуют случаям «сильной» (когда верно условие (7)) «средней» и «слабой» (условие (6)) теплоотдачи. Заметим, что асимптота здесь имеет абсциссу $t_{\max} = \dfrac{1}{|\alpha|}$, т.е. та часть координатной плоскос-

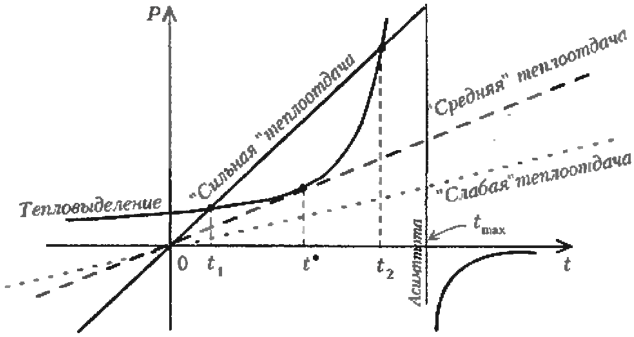


Рис. 4

ти, что находится справа от асимптоты, не имеет физического смысла.

Прямая «слабой» теплоотдачи всегда расположена ниже кривой тепловыделения, и поэтому пересечений в этом случае нет, что соответствует отсутствию решений уравнения (5) при «плохом» условии (6). Прямая «сильной» теплоотдачи пересекает кривую тепловыделения дважды: два решения существуют при «хорошем» условии (7). Давайте сначала рассмотрим устойчивость меньшего из них (t_1). Слева от него кривая тепловыделения расположена выше прямой, характеризующей теплоотдачу (см. рис.4), поэтому, если из-за какого-то кратковременного внешнего воздействия температура t вдруг понизится ($t < t_1$), резистор вновь начнет нагреваться до прежней температуры. Справа от точки t_1, но левее точки t_2 кривая тепловыделения лежит ниже прямой, определяющей теплоотдачу, поэтому здесь преобладает охлаждающий фактор, «возвращающий» температуру к равновесному значению t_1. Таким образом, это равновесие устойчивое. Справа от точки t_2 тепловыделение всегда выше теплоотдачи, и, попав в эту область, температура резистора будет продолжать увеличиваться. Значит, решение t_2 соответствует неустойчивому равновесию и поэтому не является практически возможным.

Прямая «средней» теплоотдачи здесь определена как касательная к кривой тепловыделения и соответствует «вырожденному» случаю $D = 1$, при котором существует лишь одно решение уравнения (5), а именно

$$t^* = \frac{1}{2|\alpha|}. \qquad (9)$$

Понятно, что температура любого устойчивого равновесия ниже t^*. Если резистор сделан из углерода ($\alpha = -0{,}0005$ 1/°C), то $t^* = 1000$ °C. Конечно, при столь высокой температуре эффект излучения намного превышает конвекционную теплоотдачу, поэтому реальные температуры устойчивого равновесия могут быть выше в полтора-два раза. Однако даже 2000 °C еще не вполне достаточно, чтобы имитировать дневной свет, ведь температура поверхности Солнца гораздо выше (6000 °C). Температура вольфрамовой нити накала современной лампочки равна примерно 2700 °C, но даже ее свет — желтее дневного. Что же касается чисто углеродных или покрытых углеродом нитей накала, то (в силу проведенного выше анализа) они светят хуже и к тому же легче перегорают (из-за наличия области неустойчивого равновесия).

Теперь пора вернуться к Эдисону и Тесла.

Пытаясь изобрести электрический свет, Эдисон перепробовал нити накала из многих материалов, но тепло, создаваемое электрическим током, превращало большинство этих нитей в золу. Только нити накала из платины оказались более устойчивыми, но... дорого стоили. В конце концов были выбраны нити на основе аморфного углерода, полученные путем специальной термической обработки палочек из бамбука. Такие лампочки появились в 1879 году, были не очень надежными и давали желтоватый свет. Лишь в 1910 году, с изобретением вольфрама, эти недостатки были в основном преодолены.

Простая физико-математическая модель, рассмотренная выше, немало помогла бы Эдисону в подборе материала для нити накала. Но, к сожалению, «Великий Маг» (как часто и во многом справедливо называют Эдисона) честно признавал себя «нулем» в математике и теоретических дисциплинах. Вместо предварительных теоретических оценок он применял свой знаменитый «метод проб и ошибок», отнимающий много времени и денег. «Лучший способ что-то изобрести, — говорил он, — это перепробовать все, что только взбредет в голову.» Дипломированный электрический инженер Никола Тесла рассказывал как-то, что он неоднократно был «скорбным свидетелем» этой длительной эдисоновской процедуры, зная наверняка, что лишь немного теории и расчета избавило бы Эдисона от 90% трудоемкой работы.

Вскоре споры между двумя гениями развились до разногласий, и Тесла был уволен из лаборатории Эдисона. Прошло время. Однажды Эдисон и Тесла были выбраны кандидатами на то, чтобы разделить Нобелевскую премию по физике. Однако Тесла, по слухам, отверг это предложение по той причине, что он не считает Эдисона ни физиком, ни вообще ученым. В результате оба не получили Нобелевской премии...

Представьте теперь себя современником Эдисона. Похвалил бы он вас за теоретические оценки? Не спешите с ответом. Оказывается, даже упрямые люди меняют свои взгляды со временем (хотя бы частично). Однажды во время первой мировой войны, когда Эдисон работал в исследовательском секторе военного флота, он лично обратился к руководству с просьбой:»...нам здесь нужен математик на случай, если мы захотим что-то вычислить», и соответствующий специалист был принят на работу. Таким образом, на склоне лет Эдисон почти признал, что и теория нужна, а от признания до похвалы — один шаг.

А вы как считаете?

Планетарная модель атома и теория Бора: история, гипотезы, эксперимент

А.КОРЖУЕВ

Заканчивается XX век. Как он будет назван: веком электроники, авиации, компьютеров? Трудно сказать, но наверняка физики XXI века, оглядываясь в прошлое, назовут его веком квантовой механики, возникновению которой и предшествовали открытия, связанные с «устройством» атома и его закономерностях. О них мы и поговорим.

Немного истории

Начнем со спектроскопии. В 1859 году Г.Кирхгоф и Р.Бунзен разработали метод спектрального анализа и объяснили, в частности, происхождение четырех темных линий поглощения в спектре Солнца. Их обнаружил еще в 1814 году Й.Фраунгофер, а теперь, 45 лет спустя, было показано, что эти линии хорошо совпадают с яркими линиями в спектрах, испускаемых накаленными газами и парами различных веществ в обычных земных условиях. В 1885 году И.Бальмер опубликовал статью, в которой установил, что длины волн этих линий с хорошей точностью подчиняются формуле

$$\lambda = k\frac{m^2}{m^2-2^2},$$

где m = 3,4,5 и 6, а k — некоторая постоянная, и могут быть приписаны водороду. Вскоре были обнаружены еще пять линий водорода, но уже в ультрафиолетовой области солнечного спектра поглощения, и их длины волн также с хорошей точностью укладывались в формулу Бальмера. Кстати, эта формула в 1890 году была переписана Ю.Ридбергом для волновых чисел:

$$\nu^* = \frac{1}{\lambda} - \frac{\nu}{c} = \frac{4}{k}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{m^2}\right).$$

Коэффициент $4/k$ получил название постоянной Ридберга R (по современным данным R = 10973731,77 $м^{-1}$). Затем обнаружили целых три серии линий в инфракрасной области спектра атома водорода, которые тоже охватывались упомянутой формулой. И вообще, как оказалось, все пять серий линий можно описать одной формулой — формулой Бальмера — Ридберга

$$\nu^* = R\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right),$$

где для каждой серии число n свое: n = 1, 2, 3, 4, 5, а внутри серии число m принимает ряд значений, начиная с n + 1. Однако, фундаментального физического обоснования закономерностей линейчатых спектров в то время не было. В частности, существовавшая «пудинговая» модель атома Дж.Дж.Томсона, согласно которой отрицательно заряженные электроны, как изюминки в пудинге, были распределены в неком жидком положительно заряженном веществе, к указанным результатам не приводила.

Теперь следует вспомнить о том, что в 1900 году М.Планку для объяснения закономерностей теплового излучения пришлось выдвинуть идею о квантовой, дискретной структуре излучения и распространения света (уже имевшую, кстати сказать, к моменту рождения «экспериментальное подтверждение» — еще в 1887 году Г.Герц наблюдал внешний фотоэффект), и не забыть о явлениях, также подтверждавших сложное строение атома, — открытии Дж.Дж.Томсоном электрона, обнаружении радиоактивности и термоэлектронной эмиссии.

Что же было общим для всех этих явлений? Очевидно, то, что они не могли быть удовлетворительно объяснены, исходя из существовавших в то время представлений о строении атома. Однако (и история физики это подтверждает) накопление такого рода фактов может происходить достаточно долго, пока не произойдет «скачок» — такое событие в истории науки, которое вынесет окончательный приговор либо в пользу накопившихся фактов, либо в пользу опровергаемой ими теории. Таким «скачком» в истории атома стали опыты Резерфорда, которые легли в основу создания новой теории строения атома.

Опыты Резерфорда

Еще с 1906 года Э.Резерфорд изучал прохождение α-частиц через различные по своим свойствам вещества, а в декабре 1910 года им была выведена формула, описывающая рассеяние α-частиц. Из формулы следовало, что для конкретного источника (с заданными плотностью потока и кинетической энергией частиц) число частиц ΔN, рассеивающихся в телесном угле $\Delta\Omega$, связано с углом рассеяния θ соотношением

$$\frac{\Delta N}{\Delta\Omega} \sim \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}.$$

Соответствующий график изображен на рисунке 1 (коэффициент пропорциональности условно принят за 1).

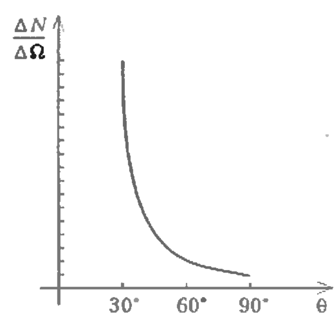


Рис. 1

Помощники Резерфорда (Гейгер и Марсден) провели многие недели в полной темноте, регистрируя вспышки рассеянных фольгой α-частиц на люминесцирующих экранах (они насчитали около двух миллионов различных актов рассеяния). И что же? Оказалось, что некоторые частицы (хотя их относительно мало) отклоняются на очень большие углы — иногда больше 90°, а согласно Томсону такого быть не должно. Полученные данные неопровержимо свидетельствовали о том, что о «пудинге» не может быть и речи. В мае 1911 года Резерфорд впервые опубликовал свои результаты в статье «Рассеяние α-частиц веществом и строение атома», в которой увидела свет ядерная модель атома и обсуждалось ее резкое противоречие модели атома Томсона. Атом по Резерфорду подобен планетарной системе: тяжелое положительно заряженное ядро (Солнце) и вращающиеся по орбитам вокруг него электроны (планеты).

Зададимся, однако, вопросом: был ли Резерфорд одинок в своем отрицании «пудинговой» модели? Неужели никто больше не видел всей сложности противоречий в вопросе о строении атома и не пытался как-то изменить эту модель? История физики свидетельствует: такие попытки были, и были задолго до 1911 года. Например, французский физик Ж.Перрен еще в 1901 году упоминал в своих лекциях о возможности существования ядерно-планетарной структуры атома. А в 1904 году модель сатурноподобного атома предложил японец Х.Нагаока: центральную положительную частицу окружало в его атоме кольцо электронов, двигавшихся с одной и той же угловой скоростью (чем не Сатурн с кольцами?). Неизвестно точно, встречался ли Резерфорд с Нагаокой (который путешествовал примерно в это время по Европе и был даже в Манчестере), но в указанной статье ссылки на эту модель есть. Еще одна, интересная на наш взгляд, аналогичная модель была предложена английским астрофизиком Дж.Никольсоном примерно в 1911 — 1912 годах — он построил ее для объяснения ряда линий непонятного происхождения в спектрах туманностей.

Список можно было бы и продолжить. Однако вернемся к опытам Резерфорда и его статье. Ряд фраз из нее свидетельствовали о том, что сам исследователь не мог не понимать, что его модель противоречит классической электродинамике Максвелла — поскольку ускоренно движущийся заряд должен непрерывно излучать, электрон (в планетарной модели) должен очень быстро упасть на ядро, всего за 10^{-8} с. Как же тогда может идти речь об устойчивости атома? Да и спектр излучения по классическим представлениям должен быть непрерывным (а не линейчатым), так как частота обращения должна непрерывно меняться. Ядерно-планетарная модель, таким образом, до предела обостряла противоречие теории с наблюдаемой устойчивостью атома. Ситуация возникла драматическая, и самому Резерфорду не было суждено выпутаться из всех противоречий. А выход, тем не менее, был найден.

Гипотеза Бора

Незаурядность Нильса Бора как ученого проявилась довольно рано. В 1905 году, будучи еще студентом Копенгагенского университета, он исследовал колебания струй жидкости с целью измерения коэффициента поверхностного натяжения и был удостоен за работу золотой медали. Магистерскую диссертацию Бор посвятил электронной теории металлов (1909 г.), а затем приступил к докторской диссертации и доказал принципиальную невозможность создания теории магнитных свойств вещества на основе только классических представлений (1911 г.). После защиты диссертации ученый отправляется в Кембридж на годичную стажировку к Дж.Дж.Томсону, где в октябре 1911 года на Кавендишском обеде знакомится с Резерфордом и получает право поработать у него в Манчестерской лаборатории. В это время (весна-осень 1912 г.) Бор и приходит к мысли о том, что из противоречия ядерно-планетарной модели и классической электродинамики придется выбираться с помощью квантовых представлений Планка.

Нильс Бор (1885—1962)

Вернувшись после стажировки в Копенгаген, Бор интенсивно работает и к марту 1913 года готовит три статьи, в которых содержатся основы всей его теории. В сентябре 1913 года Бор выступает с докладом о своих новых результатах в Бирмингеме на заседании Британской ассоциации развития науки. Аудитория — самая авторитетная и взыскательная: корифеи классической физики Рэлей, Джинс, Лоренц, Томсон. Доклад был принят патриархами науки весьма прохладно и иронично (лорд Рэлей ограничился лишь замечанием, что людям, которым за 60, уже нет смысла высказывать суждения о новых идеях). Положение изменилось в благоприятную сторону лишь после публикации ряда статей в научных журналах. Первым поддержал Бора Дж.Джинс: «Доктор Бор дал в высшей степени остроумное, плодотворное и — я думаю ... — убедительное объяснение закономерностей в спектральных линиях».

Как уже было сказано, к середине второго десятилетия XX века в физике утвердилась идея Планка о дискретном характере энергии атомов, а также идея Эйнштейна о квантовой структуре атома. Что же сделал Бор? Прежде всего он добавил положение о том, что следует отказаться от важнейшего вывода классической электродинамики о непрерывном характере излучения энергии электроном, движущимся вокруг ядра. Взамен были предложены стационарные состояния атома, в которых излучения нет, и возможность перехода между ними либо с излучением, либо с поглощением энергии. Естественно, чтобы решиться на такой шаг, требовалось большое научное мужество. Бор им обладал.

Впоследствии из принятых Бором допущений остались два известных его постулата и правило квантования орбит. Из выражения для энергии электрона, движущегося по орбите,

$$W = \frac{mv^2}{2} - \frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

и уравнения второго закона Ньютона

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

а также используя идею квантования момента импульса в стационарном состоянии

$$mvr = \frac{h}{2\pi} n,$$

легко получить знаменитую боровскую формулу для энергии электрона в атоме:

$$W_n = -\frac{mz^2e^4}{4\varepsilon_0^2 h^2 n^2}.$$

Эта энергия, как видно, представляет собой квантованную величину (принимает дискретный ряд значений, соответствующих целочисленным $n = 1, 2, \ldots$). Сам Бор писал об этом так: «Разным n соответствуют ряд значений W_n, соответствующих различным конфигурациям системы, в которых нет излучения, а потому они будут стационарными, пока система не будет возмущена извне».

Интересно, что еще в начале февраля 1913 года по совету одного из коллег Бор сопоставил свой результат с формулой Бальмера – Ридберга для спектра атома водорода (до этого он о ней ничего не знал) и предположил, что так называемые спектральные термы – величины R/n^2 и R/m^2 – пропорциональны энергии электрона в атоме в разных стационарных состояниях. Следующий шаг – предположение о том, что при переходе атома из одного стационарного состояния в другое излучается один квант энергии, откуда и получается знаменитое правило частот (фактически второй постулат Бора)

$$h\nu_{n_1 \to n_2} = W_{n_1} - W_{n_2},$$

$$\nu = \frac{mz^2e^4}{4\varepsilon_0^2 h^3}\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right).$$

Совпадение с формулой Бальмера – Ридберга абсолютное, что говорит о хорошем согласии теории с экспериментом. Сохранилось свидетельство известного физика Д.Хевеши о том, что когда об этом блестящем подтверждении теории Бора узнал Эйнштейн, он был потрясен тем фактом, что частота излучения, оказывается, не зависит от частоты вращения электрона в атоме: «Большие глаза Эйнштейна стали еще больше, и он сказал мне: «Тогда это одно из величайших открытий».

Сам же Бор в введении к статье «Связывание электрона положительным ядром» пишет о той большой роли, которую играет в его теории постоянная Планка: «Только существование кванта действия h препятствует слиянию электронов с ядрами в нейтральную частицу практически бесконечно малого размера… Только оно одно дало полное объяснение замечательным зависимостям между физическими и химическими свойствами элементов – зависимостям, выраженым в периодической таблице Менделеева».

Принцип соответствия

Отрицая классическую электродинамику, Бор тем не менее все время пытается найти связь между новой и старой теориями и в 1912 году формулирует свой знаменитый принцип соответствия. Согласно этому принципу, физическая теория, явившаяся обобщением и развитием некоторой классической теории, в ряде предельных случаев должна давать результаты, совпадающие с классическими.

В боровской теории атома это следует понимать так: при больших квантовых числах n выводы теории должны соответствовать классическим представлениям. Для атома водорода, например, при больших квантовых числах «расстояния» между соседними энергетическими уровнями оказываются очень малыми (рис.2), т.е. уровни становятся квазинепрерывными – это и есть отброшенные классические представления. В работе «О спектре водорода» Бор с помощью этого принципа вычисляет постоянную Ридберга. Попробуйте самостоятельно воспроизвести ход его мыслей.

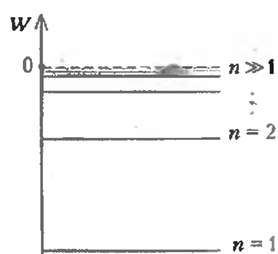


Рис. 2

Теория и эксперимент

Может ли какой-нибудь эксперимент подтвердить результаты теории? Слово А.Эйнштейну: «Опыт никогда не скажет теории «да», но говорит в лучшем случае «может быть», большей частью – просто «нет». Когда опыт согласуется с теорией, для нее это означает «может быть», когда же противоречит ей, объявляется приговор «нет». Таким образом, суждение о том, сколько и каких экспериментов необходимо, чтобы подтвердить истинность теории, не может быть абсолютно безупречным – чем их больше, тем больше у исследователя степень увереиности, что теория достоверна. Но абсолютной уверенности нет никогда – на определенном этапе разработки проблемы может «подвернуться» факт, экспериментальный результат, противоречащий ей, и, если это не случайность, следует серьезно задуматься: всегда ли верна теория (а иногда и о том, верна ли она вообще).

Несмотря на большое число экспериментов, свидетельствовавших в пользу теории Бора, ряд фактов она объяснить не смогла (например, интенсивность спектральных линий, количественный расчет атома гелия, дублетные линии в спектрах и многое другое). В чем же причина? Очевидно, во внутренней противоречивости теории и в попытках соединить несоединимое – классику и квантовые постулаты, и не только в предельных случаях, а во всей области действия.

В 1926 – 1927 годах Э.Шрёдингер и В.Гейзенберг, опираясь на теорию Бора и многочисленные экспериментальные и теоретические посылки, заложили фундамент последовательной теории строения атома – квантовой механики. А что же теория Бора? Ряд ее результатов, например правила квантования Бора – Зоммерфельда, стали тем предельным случаем, в котором квантовая механика пересеклась с теорией Бора. Некоторые результаты представляют огромный исторический интерес, а идея дискретности микромира – важнейший отправной пункт дальнейших исследований ученых. Теория Бора, по словам Эйнштейна, была «наивысшей музыкальностью в области мысли». Высокую оценку трудов ученого дал и Резерфорд: «Я рассматриваю труды Бора как величайший триумф человеческой мысли».

В 1922 году Бор получил Нобелевскую премию по физике «За заслуги в изучении строения атома».

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июля 1997 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2— 97» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1586» или «Ф1593». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задача М1590 предлагалась на осеннем туре Турнира городов, частный случай задачи М1587 (при a = 2, b = 3) — на заочном туре Соросовской олимпиады по математике, а задачи Ф1594 и Ф1597 предлагались на Соросовской олимпиаде по физике.

Задачи М1586 — М1590, Ф1593 —Ф1597

М1586. Из некоторого прямоугольника вырезан равносторонний треугольник так, что одна из его вершин находится в вершине прямоугольника, а две другие лежат на сторонах прямоугольника (не содержащих эту вершину). Докажите, что площадь одного из оставшихся прямоугольных треугольников равна сумме площадей двух других.

А.Егоров

М1587. Решите систему уравнений

$$\frac{x+y}{1+xy}=\frac{1-ay}{a-y},\quad \frac{x-y}{1-xy}=\frac{1-bx}{b-x},$$

где a, b — данные положительные числа.

М.Волчкевич

М1588. Два чеканщика играют в следующую игру. Они по очереди чеканят новые монеты достоинством в целое число рублей каждая. При очередном ходе не разрешается чеканить монету в один рубль, а также монету, которая уже имеется или которую можно разменять любым количеством (не обязательно разных) монет уже имеющегося достоинства. Проигрывает тот, кто не может отчеканить новую монету.

а) Докажите, что игра обязательно закончится через конечное число ходов.

б) Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его партнер — и какой должна быть его стратегия?

Д. Шляйхер

М1589. Докажите, что как бы ни раскрасить плоскость в 5 цветов, найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми отличается от 1 не более чем на 0,001.

А.Канель

М1590. На окружности круглого острова расположено по часовой стрелке четыре порта: 1, 2, 3, 4. На этом острове имеется плоская сеть дорог с односторонним движением, не имеющая кольцевых маршрутов: выехав из какого-либо порта или с развилки дорог, нельзя вернуться в этот же пункт снова. Для любых двух портов i и j обозначим через f_{ij} число различных путей из i в j.

а) Докажите неравенство $f_{14}f_{23} \ge f_{13}f_{24}$.

б) Предположим, что на окружности острова шесть портов: 1, 2, 3, 4, 5, 6, перечисленных по часовой стрелке. Докажите неравенство

$$f_{16}f_{25}f_{34}+f_{15}f_{24}f_{36}+f_{14}f_{26}f_{35} \ge f_{16}f_{24}f_{35}+f_{15}f_{26}f_{34}+f_{14}f_{25}f_{36}.$$

(«Плоская сеть» означает, что дороги не проходят одна над другой.)

С.Фомин

Ф1593. На горизонтальном столе стоит тонкостенный цилиндрический стакан. Диаметр стакана D = 10 см, высота его H = 8 см. В стакан помещают тонкую спицу, как показано на рисунке 1. При какой длине спицы она может оставаться неподвижной? Масса спицы m = 60 г, масса стакана M = 65 г. Трения нет.

А.Коршиков

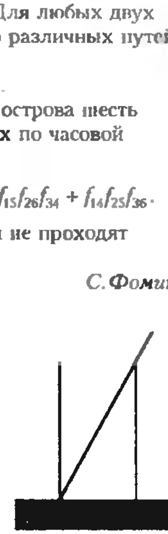


Рис.1

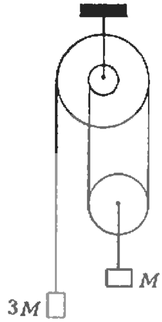


Рис.2

Ф1594. На оси может вращаться блок, состоящий из двух склеенных дисков радиусов R и $2R$ (рис.2). Длинная нить закреплена одним концом на окружности малого диска и на этот диск намотано несколько витков, а другой конец нити образует петлю, удерживающую нижний блок, диаметр которого подобран так, что все свешивающиеся концы нити вертикальны. К подвижному блоку привязан груз массой M, к свободному концу длинной нити прикреплен груз массой $3M$. Найдите ускорения грузов. Блоки и нити невесомые, трение в осях отсутствует, движение считать происходящим в плоскости, перпендикулярной осям блоков.

А.Блоков

Ф1595. В вертикальном сосуде под тяжелым поршнем находится небольшое количество гелия. Атмосферное давление отсутствует, поршень «висит» над дном сосуда на высоте H. Поршень очень быстро поднимают на высоту $10H$ относительно дна сосуда и отпускают. На какой высоте над дном сосуда он установится после того, как его колебания затухнут? Сосуд теплонепроницаемый, теплоемкостью стенок и поршня можно пренебречь. Трение поршня о стенки пренебрежимо мало. Несколько лишних для этой задачи данных: масса поршня M, ускорение свободного падения g, площадь дна сосуда S. Что понимать в условии под выражением «очень быстро поднимают»? Как изменится ответ, если поднимать поршень очень медленно?

Р.Александров

Ф1596. Нелинейный двухполюсник имеет «квадратичную» вольт-амперную характеристику — напряжение между его выводами пропорционально квадрату текущего через него тока. Двухполюсник подключают к батарейке напряжением $\mathcal{E}$ последовательно с вольтметром, при этом вольтметр показывает половину напряжения батарейки. Параллельно двухполюснику подключают еще один такой же вольтметр. Найдите показания обоих вольтметров. Внутреннее сопротивление батарейки считать малым.

З.Рафаилов

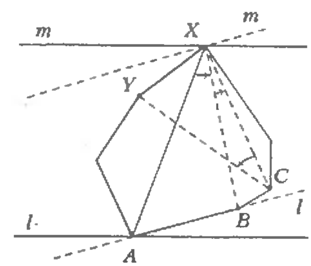
Ф1597. На цилиндрический железный сердечник намотана катушка, ее выводы подключены к источнику переменного напряжения. На оси катушки расположен виток в форме квадрата размером $d \times d$, сделанный из тонкого провода с очень высоким сопротивлением; плоскость квадрата перпендикулярна оси. Точно такой же квадрат расположен параллельно первому, но чуть дальше от катушки — расстояние между квадратами составляет $d/8$. Сила тока через «ближний» виток составляет I_0, через «дальний» чуть поменьше, а именно $0{,}98I_0$. Витки раздвигают параллельно так, что расстояние между ними составляет теперь d — получаются как бы две противоположные грани куба. Полученный «куб» поворачивают на 90°, и теперь витки образуют боковые грани куба, параллельные оси катушки, при этом центр системы все время остается на месте. Какие токи текут по виткам в этом случае?

А.Зильберман

Решения задач М1561 — М1570, Ф1578 — Ф1582

М1561. *Дан выпуклый многоугольник, никакие две стороны которого не параллельны. Для каждой из его сторон рассмотрим угол, под которым она видна из вершины, наиболее удаленной от прямой, содержащей эту сторону. Докажите, что сумма всех таких углов равна 180°.*

Проведем горизонтальные *опорные* прямые для нашего многоугольника l и m — т.е. прямые, проходящие через некоторые его вершины, но не содержащие его внутренних точек. Будем считать, что среди сторон многоугольника нет горизонтальных; тогда l и m со-



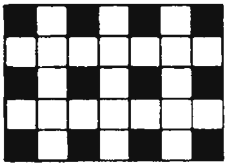
держат по одной вершине — на нашем рисунке A и X. Назовем диагональ (или сторону) AX *ведущим отрезком* для опорных прямых l и m. Будем поворачивать прямые l и m против часовой стрелки так, чтобы они оставались параллельными и опорными, и следить за тем, как меняется ведущий отрезок. Впервые такое «переключение» произойдет, когда одна из прямых l или m попадет на сторону многоугольника — на нашем рисунке l попадает на сторону AB, после чего ведущим станет отрезок XB. Заметим, что ведущий отрезок повернулся против часовой стрелки на угол AXB — как раз на тот угол, под которым сторона AB видна из самой далекой от нее вершины X (расстояние от других вершин до прямой AB меньше, чем расстояние между параллельными прямыми $l = AB$ и m в момент этого первого переключения). За то время, пока прямые l и m повернутся на 180° и поменяются местами, произойдет ровно столько переключений, сколько сторон у многоугольника — каждая из них однажды побывает в роли AB, — а ведущий отрезок займет положение XA, т.е. повернется на 180°. (При этом концы отрезка побывают ровно по одному разу в каждой вершине, один из них — по одну сторону от AX, другой — по другую.) Отсюда следует утверждение задачи: сумма углов поворота равна 180°.

Замечание. Если у многоугольника есть пары параллельных сторон, то утверждение останется верным, если под углом, соответствующим стороне $AB \parallel CD$, понимать полусумму углов ACB и ADB.

Н.Васильев, М.Смуров

М1562. *Можно ли прямоугольник 5×7 покрыть уголками из трех клеток (т.е. фигурками, которые получатся из квадрата 2×2 удалением одной клетки), не выходящими за его пределы, в несколько слоев так, чтобы каждая клетка прямоугольника была покрыта одинаковым числом клеток, принадлежащих уголкам?*

Первое решение. Предположим, что удалось покрыть прямоугольник 5×7 уголками так, что каждая клетка



покрыта k клетками уголков. Покрасим 12 клеток в черный цвет, как показано на рисунке. Любой уголок покрывает не более одной черной клетки. Каждая отмеченная клетка покрыта k уголками, так что уголков не меньше чем $12k$. С другой стороны, количество клеток во всех уголках равно $35k < 3\cdot12k$. Полученное противоречие показывает, что требуемого покрытия не существует.

Второе решение. Здесь используется та же раскраска. В черные клетки запишем число -2, а в белые — число 1. Заметим, что сумма чисел в клетках, покрываемых любым уголком, неотрицательна; следовательно, если нам удалось покрыть прямоугольник в k слоев, удовлетворяющих условию, то сумма чисел S по всем клеткам, покрытым уголками, неотрицательна. Но если сумма всех чисел в прямоугольнике равна s, то

$$S=ks=k(-2\cdot12+23\cdot1)=-k<0.$$

Получим противоречие.

Замечание. Аналогично доказывается, что покрытия, удовлетворяющего условию задачи, не существует, если прямоугольник имеет размеры $3\times(2q+1)$ и 5×5. Прямоугольник 2×3 можно покрыть в один слой двумя уголками, прямоугольник 5×9 — в один слой пятнадцатью уголками, квадрат 2×2 — в три слоя четырьмя уголками. Комбинируя эти три покрытия, нетрудно доказать, что все остальные прямоугольники $m\times n$ (m, $n\ge2$) можно покрыть уголками, удовлетворяя условию.

М.Евдокимов

М1563. *Докажите, что если числа a_1, a_2, …, a_m отличны от нуля и для любого целого $k=0$, 1, …, n ($n<m-1$)*

$$a_1+a_2\cdot2^k+a_3\cdot3^k+\ldots+a_m\cdot m^k=0,$$

то в последовательности a_1, a_2, …, a_m есть по крайней мере $n+1$ пара соседних чисел, имеющих разные знаки.

Пусть $P(x)=p_0+p_1x+\ldots+p_nx^n$ — произвольный многочлен степени не выше n (числа p_k могут быть и нулями). Умножив k-е равенство в условии на p_k и сложив эти равенства (по всем $k=0$, 1, …, n), получим

$$a_1P(1)+a_2P(2)+\ldots+a_mP(m)=0. \qquad (*)$$

Подберем теперь многочлен $P(x)$ так, чтобы его знак менялся там же, где и знак последовательности a_x ($x=1$, 2, …, m). Для этого, предположив, что пар (a_j, a_{j+1}), в которых происходит перемена знака, не больше n, возьмем $P(x)$ равным произведению

$$P(x)=a_1\prod(j+1/2-x)$$

по всем таким j, что $a_ja_{j+1}<0$. Тогда при $x=1$ знак $P(1)$ совпадает со знаком a_1, а дальше перемены знака $P(x)$ происходят в точках $j+1/2$ между j и $j+1$. Таким образом, слева в равенстве $(*)$ стоит сумма m положительных чисел. Получили противоречие.

О.Мусин

М1564. *Существует ли такое конечное множество M ненулевых вещественных чисел, что для любого натурального n найдется многочлен степени не меньше n с коэффициентами из множества M, все корни которого вещественны и также принадлежат M?*

Ответ: не существует.

Допустим противное: пусть множество $M=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ удовлетворяет условию задачи. Пусть $a=\min\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$, $A=\max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$; из условия следует, что $A\ge a>0$.

Рассмотрим многочлен $P(x)=b_kx^k+b_{k-1}x^{k-1}+\ldots+b_1x+b_0$, все коэффициенты b_0, b_1, …, b_k и корни x_1, x_2, …, x_k которого принадлежат множеству M. По теореме Виета $x_1+x_2+\ldots+x_k=-b_{k-1}/b_k$ и

$$x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_k+x_2x_3+\ldots+x_{k-1}x_k=b_{k-2}/b_k,$$

поэтому

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2=\left(-\frac{b_{k-1}}{b_k}\right)^2-2\frac{b_{k-2}}{b_k}.$$

Отсюда следует, что

$$ka^2\le x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2=\frac{b_{k-1}^2}{b_k^2}\le\frac{A^2}{a^2}+2\frac{A}{a},$$

т.е.

$$k\le\frac{A^2}{a^4}+2\frac{A}{a^3}=C.$$

Получили противоречие: степень многочлена не может быть больше C.

Е.Малинникова

М1565. *В строку в неизвестном порядке записаны все целые числа от 1 до 100. За один вопрос про любые 50 чисел можно узнать, в каком порядке относительно друг друга записаны эти 50 чисел. За какое наименьшее число вопросов наверняка можно узнать, в каком порядке записаны все 100 чисел?*

Ответ: за пять вопросов.

Покажем сначала, как наверняка определить порядок чисел в перестановке $X=(x_1, x_2, \ldots, x_{100})$ за 5 вопросов. Первый вопрос зададим про какие-то 50 чисел — скажем, про $M_1=\{1, 2, \ldots, 50\}$, второй — про остальные 50 чисел $M_2=\{51, 52, \ldots, 100\}$. Множество M_3 для третьего вопроса составим из 25 самых левых элементов из M_1 и 25 самых левых элементов из M_2, множество M_4 для четвертого — из остальных, т.е. 25 самых правых из M_1 и M_2. Заметим, что для каждого элемента в M_4 имеется не менее 25 стоящих левее него в X, поэтому 25 самых левых элементов X находятся в M_3; точно так же, 25 самых правых находятся в M_4. Таким образом, мы за 4 вопроса найдем $(x_1, x_2, \ldots, x_{25})$ и $(x_{76}, \ldots, x_{99}, x_{100})$, а порядок остальных 50 элементов определим, задав пятый вопрос.

Очень трудная часть задачи — доказать, что за четыре вопроса определить перестановки X, вообще говоря, нельзя.

Вот самое короткое из известных нам доказательств. Заметим, что для определения перестановки $X = (x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{100})$ необходимо, чтобы каждая пара (x_i, x_{i+1}) встретилась (в качестве пары соседей) в одном из заданных вопросов — иначе мы не сможем отличить X от перестановки, в которой x_i и x_{i+1} поменяются местами.

Предположим, что первые два вопроса $A = (a_1, a_2, \ldots, a_{50})$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_{50})$ содержали k общих элементов, $k \ge 0$. Пусть оказалось, что эти k элементов занимают в A и B одинаковые места — ниже мы обозначаем их c_i (т.е. $c_i = a_i = b_i$ для $i \in K \subset \{1, 2, \ldots, 50\}$; множество K состоит из k номеров). Докажем, что тогда еще двух вопросов может оказаться недостаточно для определения X. Тем k элементам, которые не встречались ни в A, ни в B, мы произвольно присвоим номера i из множества K и будем обозначать их d_i. Будем рассматривать ниже лишь перестановки X, в которых k пар $\{c_i, d_i\}$, для $i \in K$ и $50 - k$ пар $\{a_i, b_i\}$ для остальных i (в них $a_i \ne b_i$) — соседи, причем эти 50 пар идут в порядке номеров (а порядок в каждой паре неизвестен, рис.1; разумеется, если $k = 0$, то K

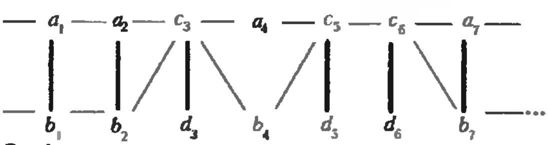


Рис.1

пусто и пар $\{c_i, d_i\}$ нет). Поскольку ни одна из этих 50 пар не встречалась ни в A, ни в B, они должны встретиться в следующих вопросах. Если этих вопросов только два, то 25 пар будут в третьем вопросе, другие 25 — в четвертом, и найдется такое i, что i-я и $(i+1)$-я пара входят в разные вопросы. Но порядок в этих парах может оказаться таким, что «связывающая» их

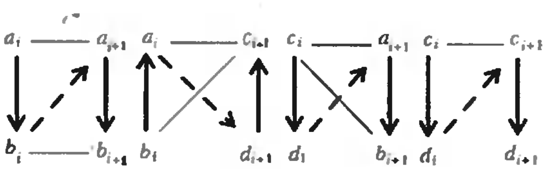


Рис.2

пара — правый элемент i-й и левый — $(i+1)$-й не встречается ни в одном из четырех вопросов (см. рис.2, где новые пары соседей показаны пунктиром). Таким образом, четырех вопросов может оказаться мало.

Замечание. Это доказательство (с небольшими изменениями) годится и для общей задачи, когда требуется найти перестановку $2n$ элементов, задавая вопросы про расположение любых n из них ($n \ge 2$): здесь также требуется не менее 5 вопросов. Но указанный вначале алгоритм годится лишь для случая, когда n четно, т.е. $2n$ кратно четырем. Интересно выяснить, существует ли алгоритм из 5 вопросов для других (нечетных) n, т.е. для $2n = 6, 10, \ldots$

Н.Васильев, С.Токарев

М1566. *В Думе 1600 депутатов, которые образовали 16 000 комитетов по 80 человек в каждом. Докажите, что найдутся два комитета, имеющие не менее четырех общих членов.*

Пусть n депутатов образовали K комиссий по m человек в каждой, никакие две из которых не имеют более 3 общих членов.

Следующая значительно более сильная, чем в условии задачи, оценка проходит в том случае, если $m^2/n > 3$ (у нас $80^2/1600 = 4$). Пусть k_i — число комиссий, в которые входит i-й депутат ($i = 1, 2, \ldots, n$). Выпишем для каждого из них все пары комиссий, в которые он входит. Всего будет выписано $S = \sum_{i=1}^{n} k_i(k_i - 1)/2$ пар.

Поскольку у каждой пары комиссий имеется не более 3 общих членов,

$$S \le 3K(K-1)/2. \qquad (1)$$

С другой стороны, S можно оценить, используя неравенство между средним квадратическим и средним арифметическим, которое можно записать так:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i^2 \ge \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)^2 \Big/ n$$

(оно следует из очевидного $\sum_{i<j}(k_i - k_j)^2 \le 0$). Поскольку $\sum_{i=1}^{n} k_i = Km$, получаем

$$S = \left(\Sigma k_i^2 - \Sigma k_i\right)/2 = \frac{1}{2}\left(\frac{K^2m^2}{n} - Km\right). \qquad (2)$$

Из (1) и (2) вытекает оценка

$$K \le \frac{m-3}{m^2/n - 3}.$$

При $n = 1600$, $m = 80$ это дает $K \le 77$.

Разумеется, если бы мы потребовали, чтобы любые две комиссии имели не более r общих членов, то (при условии $m^2 > nr$) получили бы для числа комиссий оценку

$$K \le \frac{m-r}{m^2/n - r}.$$

Однако было бы очень интересно получить оценку для K, годящуюся и для той ситуации, когда условие $m^2 > 3n$ (в общем случае, $m^2 > nr$) не выполнено. Вот серия примеров, показывающая, что при этом K может быть существенно, «на порядок», больше. Пусть p — простое число, и $n = pr^2$ депутатов сидят по r человек в p^2 комнатах $(x; y)$, $0 \le x < p$, $0 \le y < p$ (клетках квадрата $p \times p$). Пусть $(a; b; c)$ — тройка чисел от 0 до $p-1$; составим комиссию из pr депутатов, сидящих в комнатах $(x; y)$, расположенных «на прямой» $ax + by + c \equiv 0$ (здесь и ниже знак $\equiv$ означает «сравнение по модулю p»); разумеется, пропорциональные (по модулю p) тройки $(a; b; c)$, $(ka; kb; kc)$ задают одну прямую. Так получится $p^2 + p$ разных комиссий, причем каждые две имеют не более r общих членов. (Например, при $r = 3$, $p = 23$ получаем $n = 1587$ депутатов и 552 комиссии по 69 человек.)

Н. Васильев, А.Скопенков

М1567. *Центры A, B и C трех непересекающихся окружностей с одинаковыми радиусами расположены в вершинах треугольника. Из точек A, B, C проведены касательные к данным окружностям так, как показано на рисунке 1. Известно, что эти касательные, пересекаясь, образовали выпуклый шестиугольник, стороны которого через одну покрашены в красный и синий цвета. Докажите, что сумма длин красных отрезков равна сумме длин синих отрезков.*

Введем обозначения так, как показано на рисунке 1. Так как данные окружности имеют одинаковые

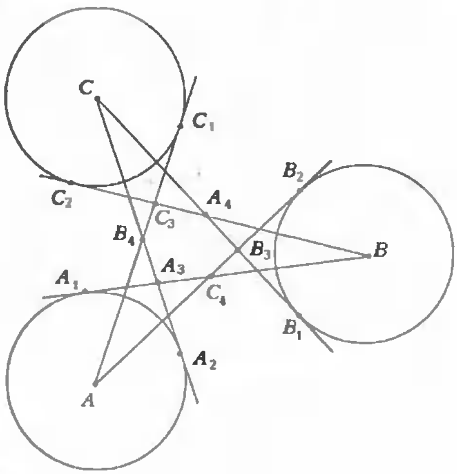


Рис.1

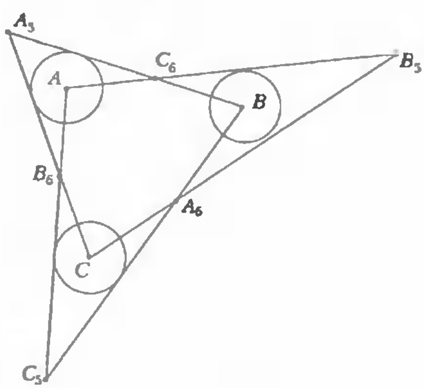


Рис.2

радиусы, то

$$AC_1 = CA_2,\ BA_1 = AB_2,\ CB_1 = BC_2,$$

или

$$AB_4 + B_4C_5 + C_5C_1 = CB_4 + B_4A_3 + A_3A_2,$$

$$BC_4 + C_4A_3 + A_3A_1 = AC_4 + C_4B_3 + B_3B_2,$$

$$CA_4 + A_4B_3 + B_3B_1 = BA_4 + A_4C_2 + C_5C_2.$$

Сложив полученные равенства и заметив, что

$$A_3A_1 = A_3A_2,\ B_3B_1 = B_3B_2,\ C_3C_1 = C_3C_2$$

(как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки) и

$$AC_4 = C_4B,\ BA_4 = A_4C,\ CB_4 = B_4A$$

(так как радиусы данных окружностей равны), получим

$$B_4C_3 + C_4A_3 + A_4B_3 = B_4A_3 + C_4B_3 + A_4C_3,$$

что и требовалось доказать.

Замечания. 1. Аналогичное утверждение справедливо и в случае, изображенном на рисунке 2.

2. Можно доказать, что прямые A_3A_4, B_3B_4 и C_3C_4, равно как и A_5A_6, B_5B_6 и C_5C_6, пересекаются в одной точке.

Д.Терешин

М1568. *Докажите, что при $n \geq 5$ сечение пирамиды, в основании которой лежит правильный n-угольник, не может являться правильным $(n+1)$-угольником.*

Пусть правильный $(n+1)$-угольник $B_1...B_{n+1}$ является сечением пирамиды $SA_1...A_n$, где $A_1...A_n$ – правильный n-угольник. Мы рассмотрим три случая: $n = 5$, $n = 2k - 1$ $(k > 3)$ и $n = 2k$ $(k > 2)$.

Так как n-угольная пирамида имеет $(n+1)$ грань, то стороны сечения находятся по одной в каждой грани пирамиды. Поэтому без ограничения общности рассуждений можно считать, что точки $B_1, ..., B_{n+1}$ расположены на ребрах пирамиды так, как показано на рисунках 1 и 2 (в соответствии с указанными случаями).

1) $n = 5$. Так как в правильном шестиугольнике $B_1...B_6$ прямые B_2B_3, B_5B_6 и B_1B_4 параллельны, а плоскости A_2SA_3 и A_1SA_5 проходят через B_2B_3 и B_5B_6, то их линия пересечения ST $(T = A_1A_5 \cap A_2A_3)$ параллельна этим прямым, т.е. $ST \parallel B_1B_4$. Проведем через прямые ST и B_1B_4 плоскость. Эта плоскость пересечет плоскость основания пирамиды по прямой B_1A_4, которая должна проходить через точку пересечения прямой ST с плоскостью основания, т.е. через точку T. Итак, прямые A_1A_5, A_4B_1 и A_2A_3 пересекаются в одной точке.

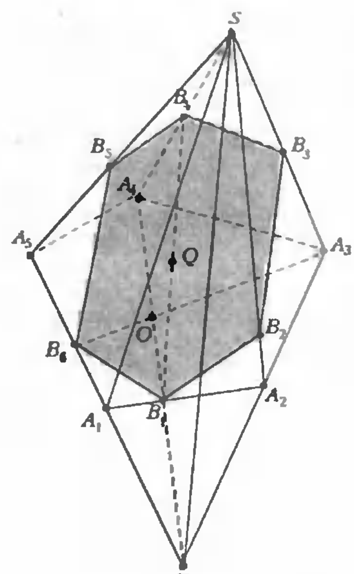


Рис.1

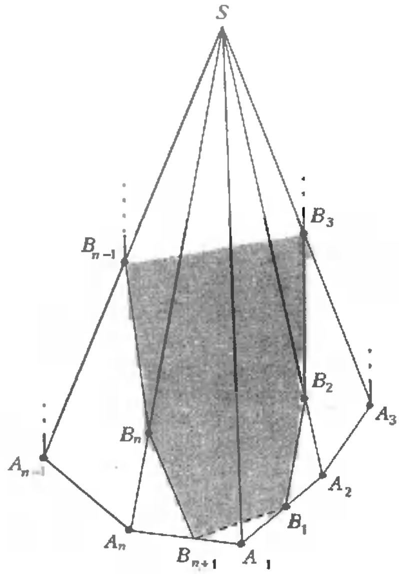


Рис.2

Аналогично доказывается, что прямые A_1A_2, A_3B_6 и A_4A_5 пересекаются в одной точке. Из этого следует, что A_4B_1 и A_3B_6 — оси симметрии правильного пятиугольника $A_1...A_5$, значит, точка O их пересечения — центр этого пятиугольника. Заметим теперь, что если Q — центр правильного шестиугольника $B_1...B_6$, то плоскости SA_3B_6, SA_4B_1 и SB_2B_5 пересекаются по прямой SQ. Следовательно, прямые A_3B_6, A_4B_1 и A_2A_5 должны пересекаться в одной точке — точке пересечения прямой SQ с плоскостью основания пирамиды. Значит, диагональ A_2A_5 правильного пятиугольника $A_1...A_5$ должна проходить через его центр O, что невозможно.

2) $n = 2k - 1$ ($k > 3$). Аналогично первому случаю показывается, что так как в правильном $2k$-угольнике $B_1...B_{2k}$ прямые B_1B_2, $B_{k+1}B_{k+2}$ и B_kB_{k+3} параллельны, то прямые A_1A_2, $A_{k+1}A_{k+2}$ и A_kA_{k+3} должны пересекаться в одной точке, что невозможно, так как в правильном $(2k-1)$-угольнике $A_1...A_{2k-1}$ имеем $A_{k+1}A_{k+2} \parallel A_kA_{k+3}$, а прямые A_1A_2 и $A_{k+1}A_{k+2}$ не параллельны.

3) $n = 2k$ ($k > 2$). Аналогично предыдущему случаю, прямые A_1A_2, $A_{k+1}A_{k+2}$ и A_kA_{k+3} параллельны, следовательно, прямые B_1B_2, $B_{k+1}B_{k+2}$ и B_kB_{k+3} должны пересекаться в одной точке, что невозможно, так как $B_{k+1}B_{k+2} \parallel B_kB_{k+3}$, а прямые B_1B_2 и $B_{k+1}B_{k+2}$ не параллельны.

Замечания. 1. При $n = 3, 4$ утверждение задачи неверно. Примерами могут служить правильный тетраэдр, имеющий сечением квадрат, и правильная четырехугольная пирамида, все боковые грани которой являются правильными треугольниками, которая имеет сечением правильный пятиугольник.

2. Приведенное решение можно было бы изложить короче, если воспользоваться центральным проектированием и его свойством, утверждающим, что при центральном проектировании образами прямых, проходящих через одну точку (или параллельных), являются прямые, проходящие через одну точку (или параллельные). Достаточно спроектировать сечение пирамиды на плоскость основания из вершины пирамиды.

Д.Терешин

М1569. *Придумайте многочлен с рациональными коэффициентами, минимальное значение которого равно а) $-\sqrt{2}$, б) $\sqrt{2}$. в) Докажите, что многочлена 4-й степени, удовлетворяющего условиям задачи б), не существует. г) Существуют ли многочлены с целыми коэффициентами, удовлетворяющие условиям а), б)?*

а, б) Минимальное значение принимается в точке, где производная равна 0. Поскольку значение многочлена с рациональными коэффициентами в рациональной точке рационально, многочлен $f'(x)$ должен иметь хотя бы один иррациональный корень. Попробуем в этой роли число $\sqrt{2}$. Тогда и $-\sqrt{2}$ будет корнем многочлена $f'(x)$. (Поскольку мы сейчас строим пример, последнее соображение можно было бы и не пояснять. Тем не менее, представим себе, что вместо x в многочлен с рациональными коэффициентами подставили сначала $\sqrt{2}$, а потом $-\sqrt{2}$. Тогда в четных степенях x^{2n} разницы не будет, а нечетные степени x^{2n-1} будут отличаться знаком. Представив значение $f'(\sqrt{2})$ в виде $a + b\sqrt{2}$, где рациональное слагаемое a получается из сложения четных степеней, а слагаемое $b\sqrt{2}$ — из сложения нечетных, видим, что $f'(-\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$.)

Поскольку многочлен нечетной степени принимает все вещественные значения, степень $f(x)$ должна быть четной. Значит, естественно искать $f'(x)$ в виде $(x^2-2)(ax+b)$, где $a > 0$. Тогда

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int\left(ax^3 + bx^2 - 2ax - 2b\right)dx =$$

$$= \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 - ax^2 - 2bx + c.$$

Подставляя $x = -\sqrt{2}$, видим:

$$f\left(-\sqrt{2}\right) = a - \frac{2}{3}b\sqrt{2} - 2a + 2b\sqrt{2} + c.$$

Равенство $f\left(-\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2}$ выполнено, если $a = c$ и $\frac{2}{3}b - 2b = 1$, т.е. $b = -\frac{3}{4}$.

Итак, многочлен

$$f(x) = \frac{a}{4}x^4 - \frac{x^3}{4} - ax^2 + \frac{3}{2}x + a \qquad (1)$$

имеет точки экстремума $-\sqrt{2}$, $-\frac{b}{a}$ и $\sqrt{2}$. Если взять положительное число a так, что $-\sqrt{2} < \frac{3}{4a} < \sqrt{2}$, то точки $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$ будут точками локального минимума, а точка $\frac{3}{4a}$ — точкой локального максимума. (Это следует из того, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Можно рассуждать и по-другому: заметить, что в точках $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$ производная меняет знак с «–» на «+», а в точке $\frac{3}{4a}$ — с «+» на «–».) В частности, вместо a можно взять любое натуральное число. Осталось вспомнить, что $f\left(\sqrt{2}\right) - \sqrt{2}$.

Пункт а) можно решить и по-другому. Будем искать многочлен $g(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ с рациональными коэффициентами, у которого $x_0 = -\sqrt{2}$ — точка локального экстремума и при этом $g(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$. Поскольку

$$g'(-\sqrt{2}) = 4(-\sqrt{2})^3 + 3A(-\sqrt{2})^2 + 2B(-\sqrt{2}) + C = 0,$$

имеем: $8 + 2B = 0$, $6A + C = 0$.

Поскольку $g(-\sqrt{2}) = 4 - 2A\sqrt{2} - 8 + 6A\sqrt{2} + D$, должно быть $D = 4$, $A = -\frac{1}{4}$. Таким образом,

$$g(x) = x^4 - \frac{1}{4}x^3 - 4x^2 + \frac{3}{2}x + 4$$

— это многочлен (1) при $a = 4$.

А вот еще один способ построения. Рассмотрим многочлен $h(x)$ третьей степени с целыми коэффициентами, у которого точка локального максимума лежит на отрицательной полуоси, точка локального минимума — на положительной и $h(x_{\min}) = -\sqrt{2}$. (Этими свойствами обладает, например, функция $h(x) = 2x^3 - 3x$.) Имеем:

$$\min h(x^2) = -\sqrt{2}.$$

г) Заметим: последний способ дал многочлен $2x^6 - 3x^2$ с *целыми* коэффициентами.

Впрочем, сделав в (1) замену $x = 2y$, получим

$$\min(4Ay^4 - 2y^3 - 4Ay^2 + 3y + A) = -\sqrt{2}, \qquad (2)$$

где A — натуральное число.

Для окончания решения пункта г) достаточно теперь построить многочлен $P(x)$ такой, что $\min\limits_{x\ge0} P(x) = \sqrt{2}$: многочлен $P(x^2)$ будет искомым.

Рассмотрим многочлен из (2). Так как его значение в точке 0 равно A, при $A > \sqrt{2}$ имеем

$$\min_{y\ge0}(4Ay^4 - 2y^3 - 4Ay^2 + 3y + A) = \sqrt{2}.$$

Окончательно получим

$$\min(4Ax^8 - 2x^6 - 4Ax^4 + 3x^2 + A) = \sqrt{2}$$

при любом целом $A \ge 2$ (минимальное значение достигается при $x = \sqrt[4]{2}$).

в) Пусть $f(\alpha) = \sqrt{2}$, $f'(\alpha) = 0$, где $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ — многочлен четвертой степени с рациональными коэффициентами. Докажем, что в некоторой точке этот многочлен принимает значение $-\sqrt{2}$. А для этого сначала покажем, что α — число вида $u + v\sqrt{2}$, где u и v — рациональные числа. Разделив $f(x)$ на $f'(x)$ с остатком, получим

$$f(x) = f'(x)q(x) + r(x), \qquad (3)$$

где $r(x)$ — многочлен не более чем второй степени с рациональными коэффициентами. Подставив $x = \alpha$, находим $\sqrt{2} = r(\alpha)$.

Пусть $r(x)$ — многочлен второй степени. Перепишем равенство $\sqrt{2} = r(\alpha)$:

$$\alpha^2 = A\alpha + B + C\sqrt{2}, \qquad (4)$$

где A, B, C — рациональные числа, $C \ne 0$. Перепишем также равенство $f'(\alpha) = 0$:

$$4a\alpha^3 + 3b\alpha^2 + 2c\alpha + d = 0. \qquad (5)$$

Подставим α^2 из (4) в (5):

$$(A\alpha + B + C\sqrt{2})(4a\alpha + 3b) + \ldots =$$

$$= 4Aa(A\alpha + B + C\sqrt{2}) + 4aC\sqrt{2}\alpha + \ldots = 0.$$

Так как $4aC \ne 0$, то из последнего равенства можно выразить α в виде $u + v\sqrt{2}$ с рациональными u и v. Отсюда следует, что $f(u - v\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$.

(Значения многочлена с рациональными коэффициентами в сопряженных точках сопряжены, сказал бы математик. Тот, кто сталкивается с этим соображением впервые, хорошо сделает, если еще раз посмотрит на начало решения пункта а).)

Было бы интересно выяснить, любое ли вещественное алгебраическое число (корень уравнения с целыми коэффициентами) служит наименьшим значением некоторого многочлена с рациональными коэффициентами.

А. Спивак, В. Сендеров

М1570. *Три пары диаметрально противоположных точек сферы — вершины выпуклого многогранника с шестью вершинами. Один из его двугранных углов прямой. Докажите, что у него ровно 6 прямых двугранных углов.*

Противоположные грани нашего многогранника симметричны относительно центра сферы O и потому параллельны. Все эти грани — треугольники (поскольку многогранник — выпуклая оболочка трех пар диаметрально противоположных точек сферы). Пусть AB — ребро прямого двугранного угла, образуемого плоскостями граней ABC и ABC'. Эти две плоскости, а также параллельные им плоскости $A'B'C'$ и $A'B'C$, пересекают сферу по окружностям. Эти четыре окружности пе-

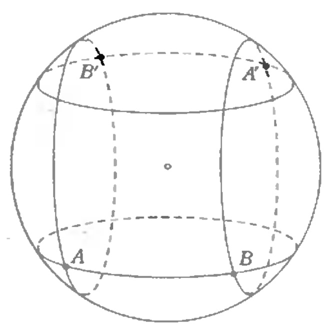


Рис. 1

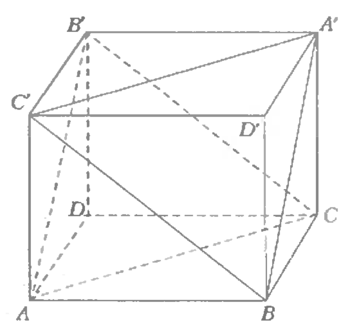


Рис. 2

ресекаются в восьми точках — вершинах прямоугольного параллелепипеда (рис.1). Точки C и C' должны (так же как A и A', B и B') лежать в некоторых двух противоположных вершинах этого параллелепипеда. Соответственно (быть может, поменяв обозначения точек A и B), мы получаем единственный возможный пример — октаэдр $ABCA'B'C'$, вершины которого — это шесть вершин прямоугольного параллелепипеда $ABCDD'C'A'B'$ (рис.2). У этого октаэдра, очевидно, ровно шесть прямых двугранных углов — при ребрах AB, BC, CA', $A'B'$, $B'C'$, $C'A$ (и шесть — тупых).

Н.Васильев

По следам наших публикаций

В третьем номере «Кванта» за 1996 год опубликовано решение задачи М1526. Наш читатель В.Данилов из Иркутска прислал в редакцию короткое изящное решение, отличное от приведенного нами. Вот оно.

Неравенство задачи эквивалентно следующему:

$$s_2 = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{3}{2}$$

при положительных x, y, z таких, что $xyz = 1$.

Как известно,

$$s_1 = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \ge \frac{3}{2} \qquad (*)$$

при любых положительных x, y, z (некоторые простые доказательства $(*)$ приведены нами при решении М1526).

С помощью $(*)$ получаем:

$$s_2 = (x+y+z-y-z)x/(y+z) +$$
$$+(x+y+z-z-x)y/(z+x)+(x+y+z-x-y)z/(x+y) =$$
$$= (x+y+z)s_1 - (x+y+z) \ge (x+y+z)/2 \ge 3/2.$$

Ф1578. *Колесо состоит из тонкого обода массой M, очень легких спиц и оси массой m. Колесо ставят на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом, и отпускают, при этом оно катится по наклонной плоскости без проскальзывания. Какую скорость будет иметь колесо к тому моменту, когда оно проедет расстояние L? При каком минимальном значении коэффициента трения возможно движение колеса без проскальзывания?*

Проще всего решать эту задачу из энергетических соображений. Запишем выражение для энергии колеса, которое катится без проскальзывания со скоростью v:

$$W = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2}.$$

Последние два слагаемых — это кинетическая энергия поступательно движущегося обруча массой M и энергия его вращения вокруг центра.

Если колесо проехало расстояние L вдоль наклонной плоскости, то центр его опустился на $h = L\sin\alpha$ и уменьшение потенциальной энергии равно приращению кинетической (считаем от начала движения):

$$(M+m)gL\sin\alpha = \frac{mv^2}{2} + Mv^2.$$

Отсюда найдем искомую скорость колеса:

$$v = \sqrt{\frac{2(M+m)gL\sin\alpha}{2M+m}}.$$

Для равноускоренного движения колеса справедливы кинематические соотношения $L = at^2/2$ и $v = at$, откуда для ускорения получаем

$$a = \frac{(M+m)g\sin\alpha}{2M+m}.$$

Это — ускорение центра масс, оно определяется суммарной силой, приложенной к колесу. Вдоль наклонной плоскости на колесо действуют соответствующая составляющая силы тяжести и сила трения. Для минимального коэффициента трения сила трения просто выражается через величину силы нормальной реакции и коэффициент трения. Тогда имеем

$$(M+m)g\sin\alpha - \mu(M+m)g\cos\alpha = (M+m)a,$$

и

$$\mu = \frac{M\operatorname{tg}\alpha}{2M+m}.$$

А.Зильберман

Ф1579. *В вертикальном сосуде под тяжелым поршнем находится некоторое количество двухатомного газа. Сосуд обладает хорошей теплопроводностью, температура окружающей среды T_0 постоянна. При этой температуре происходит необратимая диссоциация молекул газа, причем энергия взаимодействия атомов в молекуле составляет ε в расчете на один моль. Какое количество теплоты получит газ от окружающей среды за большой интервал времени? Начальные значения давления и объема составляют p_0 и V_0 соответственно.*

Для начального состояния газа можно записать

$$p_0V_0 = \nu RT_0.$$

После диссоциации число молей удвоилось. Это означает, что при постоянном давлении и неизменной температуре увеличится в два раза объем газа. Тогда газ совершит работу $A = p_0V_0$, а внутренняя энергия газа увеличится от $U_1 = 2{,}5\nu RT_0$ до $U_2 = 1{,}5\cdot 2\nu RT_0$. Для диссоциации всей порции газа потребуется приток энергии $\nu\varepsilon$. Таким образом, всего газ получит количество теплоты

$$Q = A + U_2 - U_1 + \nu\varepsilon = p_0V_0\left(\frac{3}{2} + \frac{\varepsilon}{RT_0}\right).$$

Тут есть небольшая тонкость — энергия диссоциации может учитывать приращение внутренней энергии, подобно тому как, скажем, удельная теплота испарения воды включает работу по расширению водяного пара при атмосферном давлении. Тогда одно из слагаемых нужно исключить.

З.Рафаилов

Ф1580. *Четыре одинаковых шарика массой M каждый связаны жесткими невесомыми стержнями одной и той же длины и образуют квадрат со стороной d. Шарики заряжают, причем два из них имеют заряды Q, два других — заряды противоположного знака, т.е. $-Q$. Всю конструкцию помещают в однородное электрическое поле напряженностью E и отпускают. Какую максимальную скорость может иметь один из шариков в процессе движения?*

Ясно, что система может только вращаться вокруг своего центра. Максимальная энергия вращения получится в том случае, когда одноименные заряды расположены «по соседству» и движение начинается из положения неустойчивого равновесия — напряженность поля направлена вдоль получившихся диполей от «плюса» к «минусу». Тогда смещение каждого заряда вдоль поля составит d, изменение энергии в электрическом поле будет равно $4QEd$. Из закона сохранения энергии

$$4QEd = \frac{4Mv^2}{2}$$

находим искомую скорость:

$$v = \sqrt{\frac{2QEd}{M}}.$$

Р.Александров

Ф1581. ***Заряженный конденсатор большой емкости подключают к резистору. За вторую секунду разряда в резисторе выделилось 10 Дж тепла, столько же тепла выделилось в сумме за третью и четвертую секунды. Найдите начальную энергию конденсатора.***

Из условия понятно, что заряд конденсатора уменьшается в одно и то же число раз за каждый фиксированный интервал времени. Пусть этот интервал составляет 1 секунду, тогда запишем

$$q_{n+1} = kq_n,$$

а коэффициент k мы сейчас найдем. Для этого разберемся с энергиями.

Ясно, что, если заряд изменился в k раз, выделившееся за секунду количество теплоты изменилось в k^2 раз. Приравнивая количества теплоты, выделившиеся за вторую секунду и за последующие две, получим

$$10 = 10k^2 + 10k^4.$$

Отсюда находим

$$k^2 = 0{,}5\left(\sqrt{5} - 1\right).$$

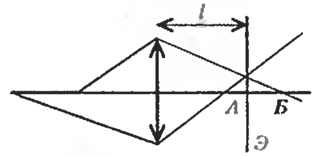
За первую секунду в резисторе выделилось $Q_1 = 10/k^2$ Дж тепла. Для нахождения начальной энергии конденсатора нужно найти полное количество выделившегося тепла:

$$Q = Q_1\left(1 + k^2 + k^4 + \ldots\right) = \frac{Q_1}{1-k^2} = 40 \text{ Дж}.$$

А.Зильберман

Ф1582. ***Источник света представляет собой тонкую нить длиной L = 10 см, расположенную на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием F = 5 см. Ближний конец нити находится на расстоянии a = 10 см от линзы, диаметр линзы D = = 1 м. Найдите минимальный размер освещенного пятна на экране, помещенном с другой стороны линзы перпендикулярно ее главной оптической оси.***

Простое построение в линзе (см. рисунок) подсказывает оптимальное расположение экрана Э для получения



пятна минимальных размеров. Положение точек $А$ и $Б$ находим по формуле линзы, а размеры пятна на экране — из подобия треугольников. Расстояние от линзы до точки $А$ равно 20/3 см, до точки $Б$ — 10 см. Тогда $(10 - l)/10 = (l - 20/3)/(20/3)$. Отсюда $l = 8$ см, а диаметр пятна d составляет 0,2 от диаметра линзы, т.е. d = = 2 мм.

А.Зильберман

НАМ ПИШУТ

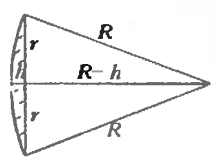
ГЕОМЕТРИЯ ТОНКОЙ ЛИНЗЫ

Тонкой линзой называется линза, толщина которой h значительно меньше радиусов кривизны R_1 и R_2 ее сферических поверхностей. Именно для такой линзы выводится формула для определения ее фокусного расстояния F (попробуйте сделать это самостоятельно):

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где n — показатель преломления стекла линзы. Однако, держа линзу в руках, трудно оценить на глаз радиусы кривизны R_1 и R_2, но легко определить толщину линзы h и ее диаметр d. Интересно сопоставить величины h и d в тонкой (по определению) линзе.

Для простоты вычислений рассмотрим плосковыпуклую линзу с радиусом кривизны сферической поверхности R.



Геометрически такая линза представляет собой шаровой сегмент, изображенный на рисунке. Безразмерное отношение h/R обозначим λ и учтем, что $\lambda \ll 1$. Согласно теореме Пифагора, запишем $R^2 = (R-h)^2 + r^2$, откуда имеем $r^2 = 2Rh - h^2 \approx 2R^2\lambda$. Теперь найдем диаметр линзы: $d = 2r$ и отношение h/d:

$$\frac{h}{d} = \sqrt{\frac{\lambda}{8}}.$$

Видим, что при $\lambda \ll 1$ справедливо неравенство $h/d \ll 1$. (Так, при $\lambda = 0{,}02$ получим $h/d = 0{,}05$.) Значит, линза, тонкая по определению, будет тонкой и по зрительному восприятию.

Теперь займемся вычислением фокусного расстояния нашей линзы. С одной стороны, фокусное расстояние линзы, у которой $R_1 = R$ и $R_2 = \infty$, равно $F = \dfrac{R}{n-1}$. С другой стороны, как легко показать, справедливо равенство $R = \dfrac{d^2 + 4h^2}{8h}$. Отсюда получаем

$$F = \frac{d^2 + 4h^2}{8(n-1)h}.$$

Следовательно, если знать показатель преломления n стекла, из которого изготовлена линза, то можно определить величину F, просто обмерив линзу.

В.Дроздов

Задачи

1. Из десяти карточек с цифрами 0, 1, 2, ..., 9 сложили десятизначное число 1980237456, а

потом нашли сумму всех двузначных чисел, образованных цифрами, стоящими рядом. Получилось 19 + 98 + 80 + 02 + 23 + ... + 56 = 434. Для какого расположения цифр такая сумма будет наибольшей, а для какого наименьшей?

В.Замков

2. В кукольном театре Карабаса-Барабаса состоялась премьера спектакля «Девочка с голубыми волосами, или Тридцать три подзатыльника». Большинство из этих подзатыльников досталось несчастному Пьеро от Панталоне, большин-

ство из остальных — от Арлекина, большинство из остальных — от Артемона, большинство из остальных — от Мальвины, а оставшимися подзатыльниками Пьеро со слезами угостил себя сам. В результате один из актеров отбил себе руку, и в дальнейшем пришлось изъять у него все подзатыльники, распределив их поровну между остальными названными артистами. Сколько подзатыльников получил Пьеро от Панталоне на следующем представлении?

И.Акулич

3. Значком $n!$ обозначается произведение $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$. Так, $2! = 2$, $5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$. Для каких значений n число $n!$ оканчивается ровно на пять нулей?

А.Савин

4. Царь Горох, побывавший однажды на острове Буяне, обратил внимание, что семь крепостей, защищающих остров, связаны прямолинейными дорогами, причем по ним можно посетить все крепости, проезжая по каждой из дорог ровно один раз. А самое удивительное — каждая из

дорог пересекается со всеми остальными дорогами. Вернувшись домой, он повелел своему воеводе построить вокруг столицы восемь крепостей и точно так же связать их дорогами. Думал-думал воевода, но ничего не придумал. Попробуйте это сделать вы.

В.Произволов

5. Никита утверждает, что у квадратного уравнения $x^2 - x - 1 = 0$ корни $\frac{1+\sqrt5}{2}$ и $\frac{1-\sqrt5}{2}$, а Антон настаивает на том, что это $\sqrt[3]{2+\sqrt5}$ и $\sqrt[3]{2-\sqrt5}$. Кто прав?

Л.Курляндчик

Иллюстрации И.Тарабановой

Как один младший школьник всю семью озадачил

В.РАДЧЕНКО

Однажды Ваня, младший брат Пети, листал его журналы «Квант» и неожиданно обнаружил интересные задачи в разделе «Квант» для младших школьников». Особенно ему понравилась задача про пиратов.

Задача 1 («Квант» №8 за 1991 г.).

За десять дней пират Ерема
Способен выпить бочку рома.
А у пирата у Емели
Ушло б на это две недели.
За сколько дней прикончат ром
Пираты, действуя вдвоем?

Как ни пытался Ваня ее решить, ничего у него не получалось. Особенно обидно было, что задача-то для младших школьников, значит, как раз для него. Пришлось обратиться за помощью к Пете. Петя стал писать какие-то x и y, исчеркал целую страницу, но так ничего и не решил. Сказал, что ему некогда заниматься всякой ерундой, и ушел на баскетбольную секцию. В скором времени вернулся домой самый старший брат Николай, студент и Ваня попросил помощи у него. Вот какое решение предложил Николай.

I способ (метод наименьшего общего кратного). Запишем кратко условие задачи (рис.1) и выясним, сколько рома смогли бы выпить пираты за 70 дней. Получается 12 бочек. Если за 70 дней они могут выпить 12 бочек, то с 1 бочкой справятся в 12 раз быстрее: $70 : 12 = 5\frac{5}{6}$.

Ответ: 6 дней.

Ване очень понравилось это решение, только он никак не мог понять, как это брат догадался рассмотреть именно 70 дней. Но тот объяснил, что это очень просто, нужно только подобрать такое число, которое делится и

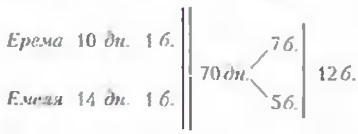


Рис. 1

на 10, и на 14 (если это наименьшее из таких чисел, то оно называется *наименьшим общим кратным* и записывается так: НОК (10,14) = 70). Если вы, как и Ваня, поняли это решение, то попробуйте решить этим способом еще несколько задач.

Упражнения

1 (индусский математик XII века Бхаскара Ачарья). Из пучка цветов чистых лотосов взяты одна третья, пятая и шестая части, соответственно принесенные в жертву: Шиве, Вишну и Солнцу. Одна четверть досталась Бавани. Оставшиеся 6 лотосов даны глубокоуважаемому учителю. Сосчитай мне быстро число всех цветов.

2 (немецкий математик XVI века Адам Ризе). Трое выиграли некоторую сумму денег. На долю первого пришлась 1/4 этой суммы, на долю второго 1/7, а на долю третьего — 17 флоринов. Как велик весь выигрыш?

3 (из «Греческой антологии»).

— Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы?

— Вот сколько, — ответил философ. — Половина изучает математику, четверть — музыку, седьмая часть пребывает в молчании, и, кроме того, есть еще три женщины.

Сколько учеников было в школе Пифагора?

4. В 5 классе на контрольную работу 1/7 учеников получили пятерки, 1/3 — четверки, 1/2 — тройки. Остальные работы оказались неудовлетворительными. Сколько было таких работ?

Указание. Если НОК чисел не удовлетворяет условию задачи, попытайтесь рассмотреть другие общие кратные, для чего умножьте НОК на 2, 3, 4 и т.д.

Когда вечером вернулся с работы отец, Ваня решил и ему показать эту задачу, надеясь, что тому ни за что с ней не справиться. Отец призадумался, вспоминая школьные уроки арифметики, и предложил такой способ.

II способ (арифметический). Обозначим величину бочки за 1, получим, что Ерема выпивает за день 1/10 бочки, а Емеля — 1/14 бочки. Вместе за 1 день они способны выпить 1/10 + 1/14 = 6/35 бочки — это их общая «производительность». Тогда на всю бочку им потребуется

$$1 : 6/35 = 5\frac{5}{6},$$

т.е. 6 дней. Ване это решение тоже понравилось, хотя он очень не любил возиться с дробями.

В этот момент в комнату заглянула мама, ей было интересно, чем это так увлеклись мужчины. Мама никогда не любила всякие вычисления, поэтому ей совсем не понравились оба решения, и она предложила свое.

(Окончание см. на с.34)

Иллюстрация П.Чернского

Симметрия

Симметрия является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство.

Герман Вейль

Слово «симметрия» происходит от древнегреческого συμμετρία — пропорциональность, соразмерность, гармония, одинаковость в расположении частей. Известный американский физик лауреат Нобелевской премии Ричард Фейнман (1918—1988) отмечал: «Нам нравится смотреть на проявление симметрии в природе, на идеально симметричные сферы планет или Солнца, на симметричные кристаллы, наконец, на цветы, которые почти симметричны». Идея симметрии находит отражение в искусстве, архитектуре и технике.

Соображения симметрии часто помогают находить решения различных задач, придавая самим решениям элемент изящества и совершенства.

Предположим, двое по очереди выкладывают на стол прямоугольной формы монетки одного и того же достоинства, причем монетку разрешается класть только на свободное место. Проигрывает тот, кому некуда поместить свою монетку. Оказывается, что в такой игре начинающий всегда может выиграть. Действительно, если он своим первым ходом положит монетку в центр стола, а затем будет класть монетки симметрично монеткам второго игрока относительно этого центра, то он всегда сможет сделать очередной ход, если это удастся сделать его противнику.

Шахматисты любят рассказывать легенду об одном джентльмене, который заключил контракт с экс-чемпионом мира Эмануилом Ласкером на игру в шахматы по переписке (под предлогом конфиденциальности) со своим десятилетним сыном. Условия контракта заключались в следующем.

1. Эмануил Ласкер играет белыми фигурами.
2. В случае проигрыша своего десятилетнего сына джентльмен платит экс-чемпиону мира 500 долларов.
3. В случае ничейного результата Эмануил Ласкер выплачивает джентльмену 500 долларов, а в случае собственного проигрыша — 1500 долларов.

Аналогичный контракт предприимчивый джентльмен заключил и с другим шахматным корифеем — Хосе Раулем Капабланкой, но с одним-единственным отличием: Капабланка играет черными фигурами. Таким образом, соображения симметрии помогли джентльмену заработать 1000 долларов.

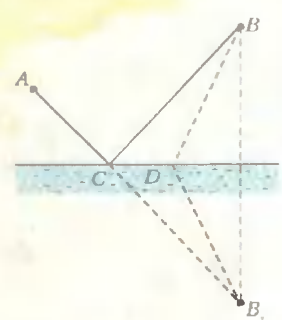
Пусть в шахматной партии черные симметрично относительно горизонтальной оси шахматной доски повторяют ходы белых. Казалось бы, игра должна закончиться вничью, однако при такой стратегии белые очень быстро могут поставить черным мат — всего за четыре хода. Найдите их.

Соображения симметрии весьма элегантно помогают решать так называемые экстремальные задачи — задачи, в которых требуется найти геометрический объект с наилучшими в каком-то смысле характеристиками. Следующая задача вошла в «золотой фонд» математики.

Лесовичок, живущий в точке A на прямолинейном берегу реки, однажды обнаружил, что в точке B, расположенной на том же берегу, вспыхнул пожар.

Каким кратчайшим путем может попасть Лесовичок в точку B, если предварительно ему нужно забежать к реке и зачерпнуть воды для тушения пожара?

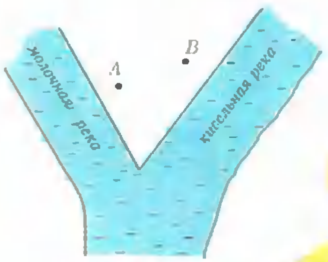
Для ответа на этот вопрос отразим точку B симметрично относительно берега реки — получим точку B_1. Прямая AB_1 пересекает берег реки в точке



C. Путь ACB — искомый (это следует из соотношений $AD + DB_1 > AB_1$, $BD = B_1D$, где D — произвольная точка на берегу реки, отличная от точки C).

Подобным же образом, с привлечением идеи симметрии, решается и следующая задача. Она была опубликована в восьмом номере журнала «Квант» в первый год его выпуска (1970 г.).

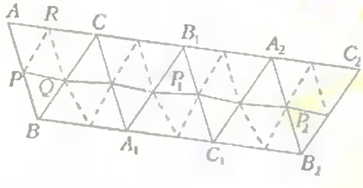
Братец Иванушка и сестрица Аленушка живут на полуострове — соответственно в домике A и домике B.



Иванушка собрался в гости к Аленушке и взял с собой два ведра, чтобы зачерпнуть одним киселя из кисельной реки, другим — молока из молочной. Какой маршрут должен выбрать Иванушка, чтобы кратчайшим путем попасть к Аленушке?

Ортоцентрическим называют треугольник, вершинами которого являются основания высот данного треугольника. Оказывается, из всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник, наименьший периметр имеет ортоцентрический (теорема Фаньяно (1682 – 1766)). Изумительное по красоте доказательство этой теоремы предложил немецкий математик Герман Шварц (1843 – 1921).

Рассмотрим остроугольный треугольник ABC. Попытаемся осуществить ряд таких последовательных симметрий этого треугольника относительно своих сторон, чтобы в результате получился треугольник, который можно также получить из исходного треугольника ABC параллельным переносом. Для этого достаточно 6 раз отразить треугольник ABC относительно сторон BC, CA_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1A_2, A_2B_2. Действительно, композиция этих симметрий является композицией поворотов относительно точек C, B_1 и A_2 на углы $2\angle C$, $2\angle B$ и $2\angle A$ соответственно. Так как в сумме эти углы дают 360°, то композиция данных поворотов есть не что иное, как параллельный перенос. Возьмем на сторонах исходного треугольника AB, BC, CA соответственно точки P, Q, R. Длина выделенной на рисунке ломаной равна удвоенному периметру ΔPQR, следовательно,



$$PQ + QR + RP \geq \frac{1}{2} \cdot PP_2. \qquad (1)$$

Заметим, что длина отрезка PP_2 не зависит от положения точки P на стороне AB, поскольку A_2B_2 получается из AB параллельным переносом. Точное равенство в соотношении (1) возможно лишь тогда, когда ломаная превращается в отрезок, а это возможно лишь при условии равенства углов $\angle APR = \angle BPQ$; $\angle PQB = \angle RQC$; $\angle ARP = \angle CRQ$. Следовательно, наименьший периметр имеет вписанный треугольник PQR, вершины которого совпадают с основаниями высот треугольника ABC, характеризующихся, как нетрудно заметить, приведенными угловыми равенствами.

Элементарными симметрическими многочленами от двух переменных x, y, называются многочлены $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$. Симметрия здесь проявляется в неизменности (или, как любят выражаться математики, инвариантности) многочленов при перестановке переменных: $\sigma_1 = x + y = y + x$; $\sigma_2 = xy = yx$. Оказывается, произвольный симметрический многочлен от переменных x, y всегда можно выразить в виде некоторого многочлена от σ_1 и σ_2.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x^4 + y^4 = 7. \end{cases} \qquad (2)$$

Стандартный метод исключения переменных здесь явно «пробуксовывает». Но если записать эту систему с помощью элементарных симметрических многочленов σ_1 и σ_2:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 7, \end{cases}$$

то вновь полученная система уже легко решается: σ_1, конечно, равно 1, а два возможных значения переменной σ_2: -1 и 3. Следовательно, искомые неизвестные x и y являются корнями двух квадратных уравнений $z^2 - z - 1 = 0$ и $z^2 - z + 3 = 0$. Второе из этих уравнений вещественных корней не имеет, а среди корней первого уравнения содержатся числа $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Учитывая симметрию задачи, запишем окончательный ответ:

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right); \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

К симметрическому виду иногда удается привести и задачу, симметрия в которой искусно маскируется. Пусть, например, нужно решить уравнение $\sqrt[4]{7-z} + \sqrt[4]{z} = 1$. Осуществив замену $\sqrt[4]{z} = y$, $\sqrt[4]{7-z} = x$, придем к системе уравнений (2), решать которую мы уже научились. Дальнейший поиск неизвестного значения z уже не составляет особого труда.

Элементарные симметрические многочлены зачастую помогают и тогда, когда приходится иметь дело с многочленами не только от двух, но и от большего числа переменных. Увеличение числа переменных приводит к большому разнообразию симметрических многочленов.

Соображения симметрии стали источником многих важных идей и открытий в математике и физике. В частности, изучение перестановок переменных x_1, x_2, ..., x_n, которые не меняют вида некоторого рационального выражения $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, помогло Жозефу Луи Лагранжу (1736—1813) обнаружить глубокую связь между решением уравнений в радикалах и перестановками корней, а развитие этих идей привело впоследствии к появлению теории Галуа — одного из замечательнейших математиков всех времен.

Симметрические многочлены и устанавливаемые с их помощью свойства алгебраических чисел неожиданным образом пригодились при решении одной из знаменитых проблем древности — квадратуры круга.

Соображения симметрии позволили Жану Виктору Понселе (1788 – 1867) сформулировать замечательный принцип двойственности в проективной геометрии: «из каждого проективного предложения относительно точек и прямых на плоскости может быть получено второе предложение путем замены слова «точка» словом «прямая» и наоборот». Оказалось, что этот принцип позволяет автоматически получать утверждения многих теорем.

Один из крупнейших математиков XX века Герман Вейль (1885 – 1955) соображения симметрии связал с общими понятиями инвариантности (неизменности) и алгебраической теорией групп. Исследование взаимосвязи столь широко трактуемых принципов симметрии с законами сохранения энергии, импульса, момента импульса стало одним из магистральных направлений развития современной физики.

А. Жуков

(Начало см. на с.31)

III способ (графический). Изобразим условие задачи на рисунке (рис.2). Для этого разделим бочку

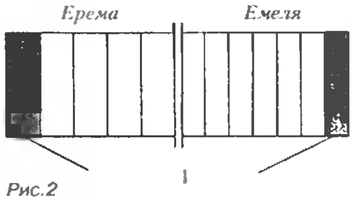


Рис.2

пополам между Еремой и Емелей, а каждую половину на дневные порции Еремы и Емели. После пяти дней половина Еремы кончится, останутся лишь две дневные порции Емели, с которыми они благополучно справятся на 6-й день.

На следующий день Ваня отыскал еще одну задачу. Как это ни странно, она оказалась почти в точности про их семью, потому всем было интересно ее решить, и каждый предлагал свой способ.

Задача 2 (**«Квант» №5 за 1986 г.**). *У Пети три брата. Первый старше его на три года, второй моложе его на три года, третий моложе Пети втрое. Зато отец старше Пети втрое. Всем вместе 95 лет. Сколько лет каждому?*

Петя, как всегда, не мог обойтись без уравнений.

I способ (алгебраический). Если Пете x лет, то всем вместе

$$x + (x + 3) + (x - 3) + x/3 + 3x = 95 \text{ лет}.$$

Решая это уравнение, получаем, что Пете 15 лет, братьям 18, 12 и 5 лет, а отцу 45 лет.

Николай предложил такое решение.

II способ (перебор). Из условия задачи следует, что возраст отца выражается числом, которое делится на 9. Составим таблицу (начнем ее с 27 из соображений здравого смысла).

Отец	Петя	Братья I	Братья II	Братья III	Сумма возрастов
27	9	12	6	3	57<95
36					
45	15	18	12	5	95
54					
63					

Будем заполнять таблицу не в каждой строчке, а, например, через одну. Тогда возможны два варианта: или в какой-то момент сумма превысит число 95, значит, ответом является предыдущая строка, или же мы в точности попадем на нужную строчку. В любом случае нам потребуется меньше вычислений. В нашей задаче ответ получился со второй попытки.

Отец в этот день задержался на работе, а мама, конечно, нарисовала схему.

III способ (графический). Петин возраст — это выделенный прямоугольник на схеме (рис.3), I, II и III — возрасты его братьев. Всего получилось $6 \cdot 3 + 1 = 19$ возрастов младшего брата; значит, ему $95 : 19 = 5$ лет.

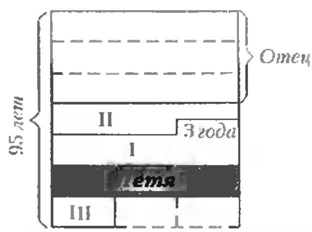


Рис.3

Дальше легко посчитать, сколько лет всем остальным.

Следующую задачу выбрал отец из своего старого учебника арифметики.

Задача 3. *У двух братьев 48 орехов, 2/3 числа орехов, имеющихся у одного из братьев, равны 2/5 числа орехов, имеющихся у другого брата. Сколько орехов у каждого брата?*

I способ (алгебраический). Петя, конечно, подошел к делу с точки зрения алгебры. Он предложил или решить уравнение

$$2/3x = 2/5 \cdot (48 - x),$$

или систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 48, \\ 2/3x = 2/5y. \end{cases}$$

Выясните, какие величины Петя принял за x и y в уравнении и в системе, а затем решите их.

Ваня ничего не понял в Петином решении, но его успокоили, что через два года и он научится так решать.

II способ (перебор). Николай по-прежнему предпочитал перебор. Вот его решение.

Число орехов у братьев неравное, у второго орехов больше (2/5 его орехов равны 2/3 количества орехов первого), т.е. у второго орехов больше чем 24. Кроме того, это число должно делиться на 5 (2/5 этого числа должны быть целым числом). Таким образом, достаточно проверить соответствие условию задачи чисел 25, 30, 35, 40, 45. Но уже на втором шаге мы получим искомое число 30, которое удовлетворяет всем условиям задачи.

III способ (графический). Однако решение, предложенное мамой, понравилось Ване больше других. Мама изобразила условие задачи графически (рис.4). Из рисунка следует, что все орехи можно представить в виде 8 равных частей, 5 из которых

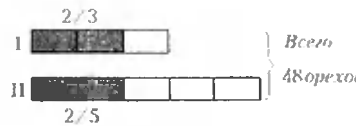


Рис.4

принадлежит второму брату, а 3 части первому. Значит, второй брат имеет $48 : 8 \cdot 5 = 30$ орехов, а первый $48 - 30 = 18$ орехов.

IV способ (арифметический). Отец предложил такое решение. Если у первого брата было a орехов, а у второго брата b орехов, то из условия задачи можно составить следующее равенство: $2/3a = 2/5b$. Из этого равенства получаем пропорцию: $b : a = 2/3 : 2/5 = 10/6 = 5 : 3$. Таким образом, требуется разделить число 48 на две части в отношении $5 : 3$. Но эта задача уже решена (способ III).

Упражнение 5. Пусть в задаче 3 общее число орехов будет 57, а 3/5 орехов первого брата равны 2/3 орехов второго. Решите видоизмененную задачу каждым из способов. Появились ли какие-то отличия в решении задачи?

Можно ли считать какой-либо из приведенных способов решения задач наилучшим? Ну, это кому что больше нравится. Но Ваня решил, что мамины картинки гораздо понятнее, чем Петина алгебра. Уж это точно!

Как доказать неравенство

А.ЯРСКИЙ

ПРИМЕНЯЕМЫЕ для доказательства неравенств идеи почти столь же разнообразны, как и сами неравенства. По этой причине доказательство неравенств нередко относят к области искусства. Однако уверенное владение «школьными» методами исследования функций позволяет находить доказательства весьма обширного класса неравенств.

Начнем с неравенства, содержащего только одну переменную.

Пример 1. *Докажите, что при* $|x| \le 1$ *и* $n \in \mathbf{N}$ *выполнено неравенство*

$$1+\frac{x}{n}-x^2 \le (1+x)^{1/n}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x)=(1+x)^{1/n}+x^2-\frac{x}{n}-1.$$

При таком выборе $f(x)$ неравенство можно записать в виде

$$f(x) \ge 0.$$

Для исследования $f(x)$ вычислим производные

$$f'(x)=\frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1}+2x-\frac{1}{n},$$

$$f''(x)=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)(1+x)^{\frac{1}{n}-2}+2.$$

Несложно исследовать знак второй производной $f''(x)$:

$$f''(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge x_0=\left(\frac{n-1}{2n^2}\right)^{\frac{n}{2n-1}}-1.$$

Итак, $f''(x)$ отрицательна при $x<x_0$ и положительна при $x>x_0$. Из этого следует, что $f'(x)$ убывает при $x \le x_0$ и возрастает при $x \ge x_0$.

Займемся исследованием знака первой производной $f'(x)$. Для точки x_0 имеет место неравенство $-1<x_0<0$ (проверьте самостоятельно). И так как $f'(x)$ возрастает при $x>x_0$, то $f'(x)>f'(0)=0$ при $x>0$ и $f'(x)<f'(0)=0$ при $x_0<x<0$. При $-1<x<x_0$ же $f'(x)$ убывает и, следовательно, может иметь еще одну точку смены знака $x_1 \in (-1;\, x_0)$ (нарисуйте эскиз графика $f'(x)$ в соответствии с полученными результатами). Теперь мы готовы рассмотреть знак исходной функции $f(x)$. При $x \ge 0$ функция $f(x)$ возрастает. Так как $f(0)=0$, то $f(x)>f(0)=0$ при $x>0$. При $x_1<x \le 0$ функция $f(x)$ убывает. Следовательно, $f(x)>f(0)=0$ при $x_1<x<0$. Если $x_1 \le -1$ (или если такой точки x_1 вообще не существует), то неравенство $f(x) \ge 0$ установлено на всем интересующем нас отрезке $|x| \le 1$. Если же $x_1>-1$ (в действительности именно этот случай имеет место), то на промежуток $-1 \le x<x_1$ функция $f(x)$ возрастает. Следовательно, $f(x)>f(-1)=1/n>0$ при $-1<x<x_1$. Неравенство доказано.

Неравенство с двумя переменными во многих случаях удается свести к неравенству с одной переменной.

Пример 2 (XII Всероссийская олимпиада). *Докажите неравенство*

$$\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2},$$

$$a, b>0, \quad a \ne b.$$

Доказательство. В силу симметрии неравенства можно считать $a>b$. Разделив все части на b ($b>0$), приведем неравенство к виду

$$\sqrt{\frac{a}{b}}<\frac{\frac{a}{b}-1}{\ln\frac{a}{b}}<\frac{\frac{a}{b}+1}{2}.$$

Положив $\sqrt{\frac{a}{b}}=x>1$, получим

$$x<\frac{x^2-1}{\ln x}<\frac{x^2+1}{2}.$$

Докажем сначала первое неравенство. При $x>1$ имеем $\ln x>0$, и можно домножить обе части неравенства на $\ln x$:

$$2x\ln x<x^2-1 \Leftrightarrow f(x)=$$

$$=x^2-2x\ln x-1>0.$$

Исследуем функцию $f(x)$:

$$f'(x)=2(x-\ln x-1);$$

$$f''(x)=2\left(1-\frac{1}{x}\right) \ge 0 \quad (\text{при } x \ge 1).$$

Последнее означает, что $f'(x)$ возрастает при $x \ge 1$. Кроме того, $f'(1)=0$. Следовательно, при $x>1$ выполнено неравенство $f'(x)>f'(1)=0$. Обнаруженная неотрицательность производной означает, в свою очередь, что функция $f(x)$ возрастает на том же промежутке $x \ge 1$. И так как $f(1)=0$, то $f(x)$ положительна при $x>1$, что и требуется.

При $x>1$ второе неравенство можно переписать в виде

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}<\ln x \Leftrightarrow 1-\frac{2}{x^2+1}<\ln x.$$

Рассмотрим функцию $g(x)=\ln x+\frac{2}{x^2+1}$. Ее производную можно привести к виду

$$g'(x)=\frac{\left(x^2-1\right)^2}{x\left(x^2+1\right)^2} \ge 0; \; g(1)=1>0.$$

Рассуждая аналогично первому случаю, завершим доказательство неравенства.

В рассмотренном примере 2 задача легко свелась к исследованию функций одной переменной. В следующем примере нам придется терпеливо уменьшать число неизвестных, сначала до двух, и лишь потом — свести задачу к исследованию функции одной переменной.

Пример 3 (Ленинградская городская олимпиада, 1989 г.). *Докажите неравенство*

$$2\left(x^3+y^3+z^3\right)-\left(x^2y+y^2z+z^2x\right) \le 3,$$

$$x, y, z \in [0;\, 1].$$

Доказательство. Перепишем неравенство в виде

$$f(x)=2x^3-yx^2-$$

$$-z^2x+2\left(y^3+z^3\right)-y^2z \le 3$$

и исследуем функцию $f(x)$. Продифференцируем:

$$f'(x)=6x^2-2yx-z^2.$$

Исследуем знак $f'(x)$. Графиком $f'(x)$ является парабола с направленными вверх ветвями, пересекающая ось абсцисс в точках

$$x_1=\frac{1}{6}\left(y-\sqrt{y^2+6z^2}\right),$$

$$x_2=\frac{1}{6}\left(y+\sqrt{y^2+6z^2}\right).$$

Видно, что $x_1 \le 0$, т.е. x_1 не попадает на интервал $(0;\, 1)$. При проходе через точку x_2 знак $f'(x)$ меняется с «–» на «+», тем самым x_2 — точка минимума.

Если теперь $x_2 \in [0; 1]$, то

$$f(x_2) < f(1),\ f(x_2) < f(0).$$

В противном случае функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[0; 1]$. Следовательно, в обоих случаях максимум исходной функции $f(x)$ достигается на одном из концов отрезка $[0; 1]$, т.е. совпадает с одним из чисел $f(0)$ или $f(1)$. Вычислим значения на концах отрезка:

$$f(0) = 2(y^3 + z^3) - y^2z \le 2(y^3 + z^3) - y^2z + $$
$$+ (2 - y - z^2) = f(1)$$

(так как $y, z \in [0; 1]$, то $2 - y - z^2 \ge 0$). Итак, осталось доказать, что $f(1) \le 3$. Последнее неравенство можно записать в виде

$$g(y) = 2(y^3 + z^3) - y^2z + (2 - y - z^2) \le 3.$$

Точно так же, как при исследовании функции $f(x)$, найдя производную

$$g'(y) = 6y^2 - 2zy - 1$$

и отыскав ее корни

$$y_1 = \frac{1}{6}\left(z - \sqrt{z^2 + 6}\right) < 0,$$

$$y_2 = \frac{1}{6}\left(z + \sqrt{z^2 + 6}\right),$$

получим, что y_2 — точка минимума. Поэтому $g(y_2) < g(0)$, $g(y_2) < g(1)$ и, как и выше, $g(y)$ достигает наибольшего значения на одном из концов отрезка $[0; 1]$:

$$g(0) = 2z^3 + 2 - z^2 \le$$
$$\le 2z^3 + 2 - z^2 + (1 - z) = g(1).$$

Остается показать, что при $z \in [0; 1]$

$$g(1) = 2z^3 - z^2 - z + 3 \le 3.$$

Последнее следует из очевидного при $z \in [0; 1]$ неравенства

$$g(1) - 3 = z(z - 1)(2z + 1) \le 0.$$

Неравенство доказано.

Одним из наиболее интересных классов задач является доказательство геометрических неравенств.

Пример 4. *Пусть a, b, c — стороны треугольника. Докажите, что*

$$a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 + 4abc \ge$$
$$\ge a^3 + b^3 + c^3.$$

Доказательство. Так как a, b, c — стороны треугольника, то $c < a + b$. Заметим, кроме того, что неравенство не меняется при любой перестановке переменных. Это дает возможность считать

$$0 < a \le b \le c < a + b. \qquad (*)$$

Перепишем исходное неравенство в виде

$$f(c) = c^3 - c^2(a + b) - c(a^2 + b^2 - 2ab) +$$
$$+ a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 \le 0.$$

Исследуем поведение функции $f(c)$ на промежутке $b \le c < a + b$. Сначала вычислим значения функции $f(c)$ на концах отрезка:

$$f(a + b) = 0;\ f(b) = a^2(a - 2b).$$

Так как $0 < a \le b$ (неравенство $(*)$), то $a - 2b < 0$ и $f(b) < 0$.

Теперь вычислим производную

$$f'(c) = 3c^2 - 2c(a + b) - (a - b)^2$$

и посмотрим, при каких значениях переменной $f'(c) = 0$:

$$c = \left(a + b \pm \sqrt{(a + b)^2 + 3(a - b)^2}\right)\Big/3.$$

На интересующий нас отрезок $[b; a + b]$ попадает (проверьте!) только больший корень

$$c_0 = \left(a + b + 2\sqrt{a^2 + b^2 - ab}\right)\Big/3.$$

При проходе через точку c_0 знак производной меняется с «−» на «+». Следовательно, функция $f(c)$ сначала убывает на отрезке $[b; c_0]$, а затем возрастает на отрезке $[c_0; a + b]$. (Нарисуйте эскиз графика функции $f(c)$ в соответствии с изученным поведением производной.) Поэтому наибольшее значение этой функции достигается на правом конце $a + b$ отрезка:

$$f(c) \le f(a + b) = 0.$$

Неравенство доказано.

Нередко доказательство геометрических неравенств требует аккуратного рассмотрения тригонометрических соотношений.

Пример 5. *Для углов α, β, γ треугольника докажите неравенство*

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le 3/2.$$

Доказательство. В силу симметрии неравенства будем считать

$$0 < \alpha \le \beta \le \gamma < \pi.$$

С учетом соотношения $\gamma = \pi - \alpha - \beta$, неравенству можно придать вид

$$f(\alpha) = \cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha + \beta) \le 3/2.$$

Вычислим производную

$$f'(\alpha) = -\sin\alpha + \sin(\alpha + \beta) =$$
$$= 2\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2}.$$

Угол $\frac{\beta}{2}$ — острый. Следовательно, знак производной определится множителем $\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)$, имеющим единственный корень $\alpha_0 = (\pi - \beta)/2$ (α, β — острые углы). При проходе через α_0 производная меняет знак с «+» на «−». Тем самым α_0 — точка максимума функции $f(\alpha)$, и достаточно проверить неравенство в точке α_0. При $\alpha = \alpha_0$ получим

$$f(\alpha_0) = \cos\left(\frac{\pi - \beta}{2}\right) + \cos\beta - \cos\left(\frac{\pi + \beta}{2}\right) =$$
$$= 2\sin\frac{\beta}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{\beta}{2}.$$

Осталось исследовать квадратный трехчлен

$$g(y) = 1 + 2y - 2y^2,$$

где $y = \sin\frac{\beta}{2}$.

Графиком $g(y)$ является парабола, вершина которой имеет координату $y = 0{,}5$. Тем самым наибольшее значение $g(y)$ равно $g(0,5) = 3/2$, что и требовалось доказать. (Заодно выяснилось, что максимум левой части неравенства достигается при $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$.)

Существует большое число технических приемов, позволяющих уменьшить число неизвестных в неравенстве или понизить степени входящих в неравенство переменных.

Пример 6. *Докажите, что при a, b, c >0 выполнено неравенство*

$$a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - ab^2 - a^2c -$$
$$- ac^2 - b^2c - bc^2 + 3abc \ge 0.$$

Доказательство. Разделив все члены на $c > 0$ и положив $\frac{a}{c} = u$, $\frac{b}{c} = v$, приведем неравенство к виду

$$u^3 + v^3 + 1 - u^2v - uv^2 -$$
$$- u^2 - u - v^2 - v + 3uv \ge 0.$$

Проделаем стандартные преобразования, использующие симметрию левой части неравенства:

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) + 1 -$$
$$- uv(u + v) - (u + v)^2 +$$
$$+ 2uv - (u + v) + 3uv \ge 0.$$

Введем новые неизвестные $x = u + v$, $y = uv$. Следует заметить, что

$$x > 0,\ y > 0,\ x^2 \ge 4y$$

(проверьте самостоятельно). В новых переменных неравенство примет вид

$$y(5 - 4x) + (x^3 - x^2 - x + 1) \ge 0,$$

$$0 \le y \le x^2/4.$$

Итак, в результате преобразований уменьшилось число неизвестных и, кроме того, степень неизвестной y оказалась равной единице. Перепишем полученное неравенство в виде

$$f(y)=(5-4x)y+\left(x^3-x^2-x+1\right)\ge 0.$$

При любом значении x графиком $f(y)$ является прямая. Следовательно, своего наименьшего на отрезке $\left[0, x^2/4\right]$ значения $f(y)$ достигает на одном из концов этого отрезка. Несложные вычисления

$$f(0)=(x-1)^2(x+1)\ge 0,$$

$$4f\left(x^2/4\right)=(x-2)^2\ge 0$$

завершают доказательство неравенства.

Предлагаемая техника может быть применена и для доказательства неравенств с неопределенным числом переменных.

Пример 7. *При* $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\in[0;1]$ *докажите неравенство*

$$\left(x_1+x_2+\ldots+x_n+1\right)^2\ge$$
$$\ge 4\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right).$$

Доказательство. Сначала сосредоточимся на переменной x_n. Обозначим

$$x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}=a\ge 0,$$

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2=b\ge 0.$$

Исходное неравенство можно теперь переписать в виде

$$f(x_n)=4\left(x_n^2+b^2\right)-\left(x_n+a+1\right)^2\le 0.$$

Графиком $f(x_n)$ является парабола с направленными вверх ветвями. Поэтому для выполнения неравенства при $x_n\in[0;1]$ необходимо и достаточно, чтобы $f(x_n)$ обладала свойством

$$\begin{cases} f(0)\le 0; \\ f(1)\le 0. \end{cases}$$

Иными словами, достаточно установить справедливость двух неравенств, получаемых из исходного при $x_n=0$ и $x_n=1$.

Повторив применительно к каждому из этих двух неравенств те же рассуждения, получим аналогичный результат: достаточно установить справедливость каждого из двух неравенств при $x_{n-1}=0$ и $x_{n-1}=1$. Продолжая аналогично, получим, что достаточно установить справедливость всех 2^n неравенств, получаемых из исходного при части (возможно — пустой) переменных равных нулю и остальных — единице. В силу симметрии исходного неравенства достаточно положить

$$x_1=x_2=\ldots=x_k=1,$$

$$x_{k+1}=x_{k+2}=\ldots=x_n=0,$$

$$0\le k\le n.$$

При таких значениях переменных исходное неравенство примет вид

$$(k+1)^2\ge 4k\Leftrightarrow (k-1)^2\ge 0.$$

Неравенство доказано.

В заключение приведем пример одного курьезного рассуждения.

Пример 8. *Докажите неравенство*

$$a^2-3ab+2b^2+a-2b+3\ge 0.$$

«Доказательство». Перепишем неравенство в виде

$$f(a)=a^2-3ab+b^2+a-2b+3\ge 0$$

и вычислим производную

$$f'(a)=2a-3b+1.$$

Так как графиком $f(a)$ является парабола с направленными вверх ветвями, то достаточно доказать неравенство при условии обращения вычисленной производной в ноль:

$$f'(a)=2a-3b+1=0.$$

Аналогично, исходное неравенство можно записать в виде

$$g(b)=a^2-3ab+2b^2+a-2b+3\ge 0.$$

Вычислив производную

$$g'(b)=-3a+4b-2,$$

получим, как и выше, что достаточно доказать неравенство при условии обращения вычисленной производной в ноль:

$$g'(b)=-3a+4b-2=0.$$

Несложно проверить, что существует единственная точка $a=-2$, $b=-1$, в которой выполнены оба условия $f'(a)=0$ и $g'(b)=0$. При таких a и b исходное неравенство действительно выполнено, что и требовалось доказать... Но столь же легко проверить, что, например, при $a=b=4$ исходное неравенство не выполняется.

Найдите ошибку в проведенном рассуждении и постарайтесь ее не повторять!

Упражнения

1. Докажите, что при $|x|<1$ для натурального $n\ge 2$ выполнено неравенство

$$(1-x)^n+(1+x)^n\le 2^n.$$

2. Докажите, что при $|x|\le 1$ и $n\in N$ выполнено неравенство

$$(1+x)^{1/n}\le 1+\frac{x}{n}.$$

3. Докажите неравенство

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n\le\frac{a^n+b^n}{2};\ a,b>0;\ n\in N.$$

4. Докажите, что

$$8\left(a^4+b^4\right)\ge(a+b)^4.$$

5. Докажите неравенство Гельдера

$$x^{1/p}y^{1/q}\le\frac{x}{p}+\frac{y}{q},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ p>1,\ x,y>0.$$

6. Для неотрицательных значений переменных докажите неравенства

а) $(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 9abc$;

б) $(a+b)(a+c)(b+c)\ge 8abc$;

в) $ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+$
$+ac(a+c-2b)\ge 0$;

г) $3\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge(a+b+c)(ab+ac+bc)$;

д) $3\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)$;

е) $(a+b+c)^3-4(a+b+c)(ab+ac+bc)+$
$+9abc\ge 0$;

ж) $(ab+ac+bc)^2\ge 3abc(a+b+c)$;

з) $a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+$
$+c^2(a+b-c)\le 3abc$.

7. Для $x,y,z\in(0;1)$ докажите неравенство

$$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1.$$

8 (XV Всероссийская олимпиада). При $a,b,c\ge 0$ и $a+b+c\le 3$ докажите неравенство

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}\le\frac{3}{2}\le$$
$$\le\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}.$$

9 (XLVI Московская олимпиада). При $x>\sqrt{2}$ и $y>\sqrt{2}$ докажите неравенство

$$x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4>x^2+y^2.$$

10. Пусть $a,\ b,\ c$ — стороны треугольника. Докажите:

а) $2(ab+ac+bc)>a^2+b^2+c^2$;

б) $\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)>2\left(a^3+b^3+c^3\right)$;

в) $3(ab+ac+bc)\le(a+b+c)^2<$
$<4(ab+ac+bc)$;

г) $a^3+b^3+c^3+3abc\ge 2(a+b)c^2$.

11. Пусть $a,\ b,\ c$ и S — соответственно стороны и площадь произвольного треугольника. Докажите, что для любого $x\ne 0$ выполнено неравенство

$$(2x-1)a^2+\left(\frac{2}{x}-1\right)b^2+c^2\ge 4S\sqrt{3}.$$

12. Для углов $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ треугольника докажите неравенство

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\ge 3/4.$$

13. Для углов $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ нетупоугольного треугольника докажите неравенство

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma<\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma.$$

14. Докажите, что при $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\in[a;b]$ выполнено неравенство

$$\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)\left(x_1^{-1}+x_2^{-1}+\ldots+x_n^{-1}\right)\le$$
$$\le\frac{(a+b)^2}{4ab}n^2,\ 0<a<b.$$

15. Пусть a — наибольшее из неотрицательных чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$. Докажите неравенство

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}-\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^2\le\frac{a^2}{4}.$$

«Стингер» против метеорита

А. СТАСЕНКО

«В СУТКИ на Землю падает около 2000 метеоритов со средней массой 100 кг... Самый большой из найденных метеоритов (Гоба, Юго-Западная Африка) имеет массу 50 т, объем около 9 м^3» (П.Г.Куликовский. «Справочник любителя астрономии».). Можно ли, прочитав такое, спокойно гулять по улицам, купаться на пляже, сажать цветы? Тем более что в наступившую эпоху всеобщего доверия и конверсии просто некуда девать замечательные системы противоракетной обороны, средства поражения земля – воздух, воздух – воздух,.. которые следят за движениями любого тела в атмосфере во всех диапазонах электромагнитного излучения: ультрафиолетовом, видимом, инфракрасном, радио-. А ведь известно, что всякое тело, нагретое до температуры T, излучает в единицу времени с единицы своей поверхности энергию, пропорциональную четвертой степени температуры:

$$\frac{dQ}{dS\,dt} = q = \sigma T^4 .$$

Это так называемый закон Стефана – Больцмана, неоднократно обсуждавшийся на страницах «Кванта» (см., например, статью Я.Смородинского «Рассказ о кванте» в «Кванте» №1 за 1995 г. или статью А.Стасенко «Солнце, лампа и кометы» в «Кванте» №1 за 1996 г. – *Прим. ред.*), а $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Дж$/(\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{К}^4)$ – постоянная Стефана – Больцмана.

Этот закон в точности справедлив только для так называемого абсолютно черного тела, но для оценок его можно применять и к обычным телам. Например, небезызвестные «Стингеры» работают в невидимых для глаза инфракрасных лучах (а иначе они всегда летели бы в сторону Солнца, к излучению которого природа приспособила наш глаз). Их-то и можно было бы употребить на мирные цели. Скажем, для уничтожения лишнего и вредного тела, которое вторглось в атмосферу Земли и собирается упасть на ее поверхность, где – избави Бог – могут играть дети! Это может быть и случайно сошедший с орбиты элемент космического летательного аппарата, и какое-то космическое тело. Тут и пригодится «Стингер» против непрошенного пришельца.

Пусть для простоты это тело имеет форму шара радиусом R, а наблюдает его головка самонаведения «Стингера» диаметром D с расстояния L (рис.1). Нужно определить наибольшее значение этого расстояния, с которого «Стингер» начнет регистрировать тепловое излучение шара, нагретого из-за трения о воздух, если известна минимальная мощность $W_{\min}$, которую «чувствует» «Стингер». Примем еще, что шар летит прямо на головку самонаведения, так что линия $O'O$ является одновременно осью симметрии для распределения температуры $T(\theta)$ по поверхности шара.

Пусть шар входит в атмосферу со скоростью v, много большей тепловых скоростей молекул; тогда все молекулы налетают на шар со скоростями $-v$. Ясно, что вблизи полюса шара (точка $\theta = 0$) молекулы ударяются о его поверхность нормально, а на экваторе $\theta = \pi/2$) скользят вдоль поверхности. Поэтому полюс будет нагрет сильно, а экватор останется холодным (при условии, что теплопроводность шара такова, что он не успевает прогреться за время полета в атмосфере).

Предположим, что угловая зависимость температуры поверхности шара имеет вид $T(\theta) = T_0 \cos^2\theta$. Тогда каждая кольцевая полоска поверхности шара площадью $dS = R d\theta \cdot 2\pi R_\perp = 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta$ будет излучать мощность

$$\sigma T^4(\theta) \cdot 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta = \sigma T^4(\theta) R^2 d\Omega(\theta),$$

где $d\Omega(\theta) = 2\pi \sin\theta\, d\theta$ – телесный угол,

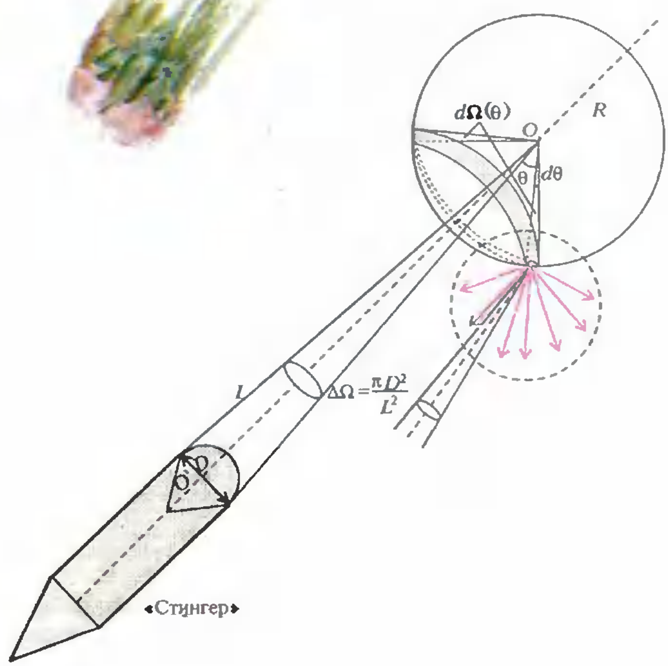


Рис. 1

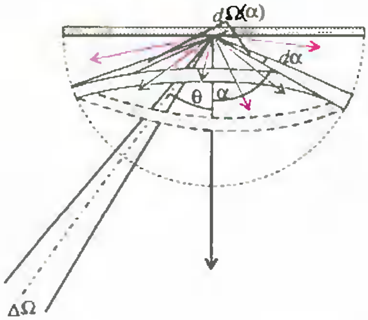


Рис. 2

под которым из центра шара видна выделенная нами полоска. Но эта мощность излучается во всех направлениях, что и показано на рисунке 1 пучком стрелок. А нам нужна только та часть этой мощности, которая попадает в «зрачок» головки «Стингера» диаметром D, т.е. та часть потока излучения, которая идет с любой точки поверхности шара внутри телесного угла $\Delta\Omega = \pi D^2/L^2$ (предполагается, что искомое расстояние L велико и «зрачок» виден с любой точки шара под одним и тем же телесным углом). И тут нам не обойтись еще без одного понятия: яркости. Поясним его при помощи рисунка 2, где выделен плоский элемент поверхности dS. Мощность излучения в направлении, составляющем угол α с нормалью к этому элементу, и идущего внутри телесного угла $d\Omega(\alpha)$, считается пропорциональной телесному углу $d\Omega(\alpha)$, самой площади dS и косинусу угла α. А коэффициент пропорциональности B (от английского слова brightness — яркость) и есть яркость. Запишем это:

$$dW(\theta) = B\,d\Omega(\alpha)\,dS\cos\alpha. \qquad (*)$$

(Эта зависимость имеет даже специальное название — закон Ламберта.) Если температура выделенной площадки dS равна T, то во всех направлениях излучается мощность, равная, согласно закону Стефана–Больцмана, $\sigma T^4 dS$. Проинтегрируем выражение $(*)$ по всем направлениям и приравняем к этой мощности. Используя выражение для телесного угла

$$d\Omega(\alpha) = 2\pi\sin\alpha\,d\alpha,$$

найдем

$$B\,dS\int_0^{\pi/2} 2\pi\sin\alpha\,d\alpha\cos\alpha = \sigma T^4 dS,$$

или, сократив на dS и выполнив интегрирование

$$\int_0^{\pi/2}\sin\alpha\,d\alpha\cos\alpha =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\cos\alpha\,d(-\cos\alpha) = -\frac{\cos^2\alpha}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2},$$

получим

$$B = \frac{\sigma T^4}{\pi}.$$

Таким образом, яркость в π раз меньше σT^4. Но заметим, что у нее и другая размерность: в знаменателе стоит не просто π, а π *стерадиан*! Разумеется, эта размерность — Дж/(м^2·с·ср) — соответствует определению яркости $(*)$.

Теперь соберем в $(*)$ все, что нам нужно: только что полученное выражение для B, угловую зависимость температуры, телесный угол, в который идет излучение, попадающее в зрачок «Стингера», и проинтегрируем по всем полоскам на поверхности шара:

$$W =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2}\frac{\sigma T_0^4}{\pi}\cos^8\theta\,\frac{\pi D^2}{L^2}\,2\pi R^2\sin\theta\,d\theta\cos\theta =$$

$$= \sigma T_0^4\frac{D^2}{L^2}2\pi R^2\int_0^{\pi/2}\cos^9\theta\,d(-\cos\theta) =$$

$$= \frac{\sigma T_0^4 D^2}{L^2}\,\frac{2\pi R^2}{10}.$$

Но $W \ge W_{min}$. Это означает, что расстояние, на котором «Стингер» начнет «чувствовать» излучение шара, должно удовлетворять условию

$$L \le \sqrt{\frac{\sigma T_0^4}{W_{min}}\,\frac{2\pi R^2}{10}\,D^2} =$$

$$= T_0^2 R\sqrt{\frac{\sigma/5}{W_{min}/(\pi D^2)}}.$$

Примем, например,

$$T_0 = 1000\ \text{К},\ R = 1\ \text{м},$$

$$q_{min} = W_{min}/(\pi D^2) = 5\cdot10^{-7}\ \text{Вт/м}^2.$$

Тогда получим

$$L \le 10^6\cdot1\cdot\sqrt{\frac{5{,}67\cdot10^{-8}/5}{5\cdot10^{-7}}}\ \text{м} \approx$$

$$\approx 1{,}5\cdot10^5\ \text{м} = 150\ \text{км}.$$

Конечно, мы получили завышенную оценку. Ну хотя бы потому, что тепловое излучение происходит в широком интервале частот, содержащем, в частности, и видимые (нашим глазом) лучи, и ультрафиолетовые лучи, которых как раз «Стингер» не видит: его светофильтры пропускают только малую часть спектра, соответствующую инфракрасному излучению, которое не видим мы.

Занимательный электролиз

Н.ПАРАВЯН

МНОГОЕ известно об электролизе, этом интереснейшем процессе. Но мы предлагаем вам пройти не совсем обычным путем — по некоторым «лабиринтам» электролиза.

Для опытов вам понадобятся источники постоянного и переменного тока напряжением до 6 В. В качестве первого можно взять любой выпрямитель или плоскую батарейку от карманного фонарика (еще лучше две, соединенные последовательно), а в качестве второго — понижающий трансформатор, преобразующий напряжение городской сети до 5 – 6 В. Еще вам понадобятся лампочка от карманного фонарика с патроном, соединительные изолированные провода, четыре железные пластинки размерами 6×3 см (лучше всего их вырезать из чисто вымытой старой луженой консервной банки), пластинка из алюминия тех же размеров, небольшой стаканчик или чисто вымытая полиэтиленовая баночка из-под зубного порошка. Из химических материалов приготовьте немного поваренной соли и аптечной соды (бикарбоната натрия). В принципе, можно воспользоваться кое-каким оборудованием из конструкторов «25 опытов по электричеству и магнетизму» или «100 занимательных опытов по электричеству и магнетизму».

Опыт 1. Налейте в стаканчик на половину его объема 3%-й раствор аптечной соды, поместите в него электроды — две вертикальные, параллельные друг другу железные пластинки — и подключите к источнику постоянного тока. Сразу начинается электролиз:

$$2H_2O = 2H_2 + O_2.$$

Из уравнения разложения воды видно, что водорода выделяется больше, чем кислорода. Таким образом можно легко отличить катод от анода. Проверьте это с помощью горящей лучинки: у катода она поджигает водород, а у анода — кислород.

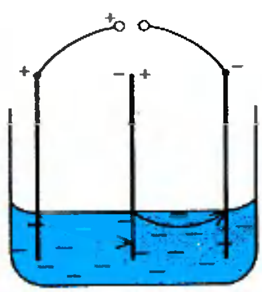
Опыт 2. Не выключая тока в цепи, введите в электролит между катодом и анодом еще один железный электрод так, чтобы он не соприкасался ни с тем, ни с другим, — на нем также начинается выделение газов, причем, что особенно интересно, с обеих сторон электрода. Опять воспользовавшись горящей лучинкой, определите, где выделяется водород, а где — кислород.

Оказывается, кислород образуется у той поверхности третьего электрода, которая обращена к катоду, а водород — у поверхности, обращенной к аноду. Как это понимать? Вспомним, что электролит — такой же проводник электрического тока, как и оба металлических электрода (только с более высоким электрическим сопротивлением), и посмотрим, как протекает электрический ток в нашей установке (см. рисунок).

Ясно, что электрический ток «входит» в третий электрод из электролита, следовательно, левая поверхность электрода, обращенная к аноду, заряжается отрицательно и становится катодом. Затем электрический ток «выходит» из третьего электрода в электролит, правая поверхность электрода становится анодом и заряжается положительно. Вот почему водород выделяется на отрицательно заряженной стороне третьего электрода, а кислород — на положительно заряженной.

А теперь разберемся вот с каким вопросом. Сколько газа в сумме (по объему) выделяется на третьем электроде по сравнению с первыми двумя (конечно, тоже в сумме по объему)?

Опыт 3. Введите в установку еще один, четвертый, железный электрод,



опять-таки, чтобы он не касался первых трех, и ... выделение газа прекращается вообще на всех электродах, т.е. похоже, что прекращается электролиз. Включите в цепь последовательно микроамперметр, и вы увидите, что в цепи течет ничтожно малый ток. В чем же дело? Ведь не может же жестяная металлическая пластинка, имеющая удельное сопротивление в сотни раз меньшее, чем удельное сопротивление электролита, увеличить сопротивление цепи настолько, чтобы прекратился ток?!

Оказывается, дело в том, что, опустив третью пластинку в электролит, мы из одного электролизера образовали два, соединенных последовательно (еще раз взгляните на рисунок). Напряжение разложения, т.е. наименьшее напряжение, при котором в данных условиях опыта начинается электролиз, увеличивается при этом примерно в 2 раза. Если ЭДС источника тока обозначить через $\mathcal{E}$, а напряжение разложения через U, то в первом опыте (с двумя электродами) напряжение на электродах прибора будет $\mathcal{E} - U$, а во втором (с тремя электродами), $\mathcal{E} - 2U$. Поэтому суммарный объем водорода и кислорода, выделившихся до введения в раствор третьего электрода, будет равен суммарному объему тех же газов, выделившихся на трех электродах.

Когда же мы ввели в электролит четвертый электрод, образовалось три электролизера, также соединенные последовательно. В этом случае напряжение разложения увеличивается приблизительно втрое и оказывается, что $\mathcal{E} - 3U < 0$, т.е. ток практически прекращается и газовыделения на всех четырех электродах не происходит, что мы и наблюдали.

Опыт 4. Повторите опыт 2, но вместо железной пластинки в качестве третьего электрода введите алюминиевую. Кроме того, включите в цепь последовательно электрическую лампочку (укрепленную на подставке). Замкните цепь, и вы увидите, что лампочка будет гореть все слабее, а через 10 – 15 минут совсем погаснет. Уберите алюминиевую пластинку из электролита — лампочка снова начинает светиться. Выходит, что алюминиевая пластинка превратилась из отличного проводника в изолятор?! Продолжим эксперимент.

Теперь отсоедините от цепи источник постоянного тока и подключите источник переменного (понижающий трансформатор). Снова введите алюминиевую пластинку в электролит. Лампочка, хотя и немного слабее, но светится. И сколько бы вы ни ожидали, она не погаснет.

Снова включите в цепь источник постоянного тока (вместо переменного). Опять опустите алюминиевую пластинку в электролит между железными электродами. Но так, чтобы та ее сторона, которая раньше была обращена к катоду, теперь оказалась повернутой к аноду. Включив ток, вы заметите, что сначала лампочка загорается, но, как и в первом случае, через 10 – 15 минут гаснет.

Верните в цепь источник переменного тока — лампочка не светит. Уберите алюминиевую пластинку — лампочка все равно не загорается.

Что же произошло? Попробуем разобраться.

Когда алюминиевый электрод включили в цепь постоянного тока (как на рисунке), на нем произошли следующие электродные процессы:

$$(-)\ 2H^+ + 2e \rightarrow H_2;$$
$$(+)\ 4OH^- + 2e \rightarrow O_2 + 2H_2O,$$
$$4[Al] + 3O_2 = 2[Al_2O_3].$$

Иными словами, вся «положительная сторона» электрода превратилась в сплошной диэлектрик, электрическая цепь разорвалась, и лампочка погасла. «Отрицательная сторона» электрода осталась проводником и продолжала пропускать электрический ток, но только в одном направлении! Когда к цепи подключили трансформатор и по ней пошел переменный ток, т.е. ток переменной полярности, то он пошел только в одном направлении. При этом пластинка, окисленная лишь с одной стороны, выполняла роль выпрямителя переменного тока, превращая его в пульсирующий. И лампочка светилась все время, пока переменный ток шел через нее.

После того как алюминиевый электрод во время электролиза повернули и тем самым окислили его и с другой стороны, он, покрывшись пленкой оксида алюминия, и в самом деле превратился в изолятор. Он стал уже не в состоянии не только выпрямить переменный ток, а даже пропустить его через себя. Вот почему лампочка не загоралась, когда в электролит вводили алюминиевую пластинку, окисленную с обеих сторон.

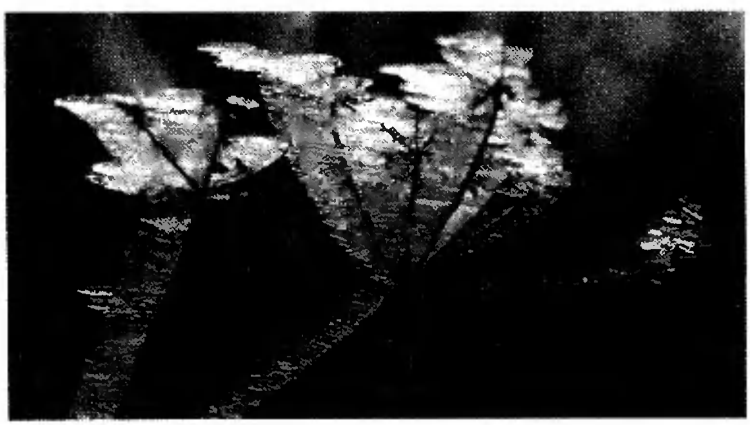
А что будет, если аптечную соду заменить поваренной солью? Оказывается, с железными пластинками будет тот же эффект. А вот из алюминиевой пластинки и электролита выпрямителя не получится, так как при электролизе выделяются и образуются другие продукты и «полупроводящая» пленка Al_2O_3 не образуется.

Способность алюминия образовывать на своей поверхности в условиях электролиза электроизоляционные пленки широко используется в технике для изоляции алюминиевых изделий. А раньше алюминиевые выпрямители электрического тока активно применялись и в лабораторной практике.

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

КУДА ДУЕТ ВЕТЕР?

А. МИТРОФАНОВ



Осенью или зимой в тихую и туманную погоду ветки на деревьях и кустах, провода, мачты антенн покрываются мохнатым инеем или инееобразным ледяным слоем — изморозью. Иней и изморозь состоят из мельчайших частичек льда, слипшихся в виде столбиков, тонких перьев, игл и т.п. Обычно инеем называют снежные кристаллы, которые образуются из водяных паров в насыщенной влагой атмосфере, а изморозью — ледяной осадок, возникший из переохлажденных капелек тумана. Иней и изморозь могут появляться, а могут и исчезать — если вдруг потеплеет или подует сухой ветер (кристаллики льда тают или испаряются соответственно).

Оказывается, даже небольшой ветерок способен сильно изменить картину морозных узоров. Посмотрите на фотографию ветки растения, покрытого изморозью. Ветка была сфотографирована морозным утром, когда был очень сильный туман, гололед и дул слабый ветер. Можно ли по этой фотографии однозначно установить направление ветра? Давайте попробуем.

Так как изморозь образуется из капелек тумана, она появляется на предметах преимущественно с подветренной стороны и может быстро расти при ветре. В нашем случае во время съемки погодные условия были благоприятны росту изморози (а не таянию льда), а слабый ветер способствовал появлению анизотропии формы ледяных наростов. Поэтому, глядя на фотографию, легко определить преимущественное направление ветра — слева направо.

А теперь подумайте, как по виду ледяных кристалликов изморози или инея (не привлекая каких-либо метео данных) узнать, давно или недавно образовался ледяной нарост на ветках.

О применении одного неравенства

Н. СЕДРАКЯН

Часто встречаются задачи на доказательство неравенств. Некоторые из них требуют оригинального подхода, другие можно решить, пользуясь известными методами и неравенствами.

В этой статье мы расскажем об одном неравенстве и его обобщениях. Покажем, как с их помощью можно доказать алгебраические и геометрические неравенства.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. *Докажите двойное неравенство*

$$\frac{12}{a+b+c+d} \le \frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+d}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b+d}+\frac{1}{c+d} \le \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right),$$

где a, b, c, d — положительные числа.

Решение. Легко убедиться в верности неравенства

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}, \text{ где } x>0,\ y>0. \quad (1)$$

Несколько раз применяя неравенство (1), получим:

$$3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \ge 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+d}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b+d}+\frac{1}{c+d}\right);$$

$$\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)+\left(\frac{1}{a+d}+\frac{1}{b+c}\right)+\left(\frac{1}{b+d}+\frac{1}{c+d}\right) \ge \frac{12}{a+b+c+d}.$$

Вторая задача похожа на первую.

Задача 2. *Докажите неравенство*

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c} \ge \frac{9}{2(a+b+c)},$$

где a, b, c — положительные числа.

Решение. Оказывается, что

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y} \ge \frac{9}{x+y}, \text{ где } x>0,\ y>0 \quad (2)$$

(проверьте это самостоятельно). Значит,

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c} \ge \frac{4}{a+b+b+c}+\frac{1}{a+c} \ge \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Решения этих двух задач очень похожи. Появилась идея: а может быть, верно более общее неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2} \ge \frac{(a_1+a_2)^2}{b_1+b_2}, \quad (3)$$

где $b_1>0$, $b_2>0$? Неравенство (3) сразу приводится к виду

$$\frac{a_1^2 b_2}{b_1}+\frac{a_2^2 b_1}{b_2} \ge 2a_1a_2,$$

что очевидно (причем равенство достигается при $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$).

Теперь уже не стоит большого труда методом математической индукции доказать обобщение неравенства (3):

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n} \ge \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n}, \quad (4)$$

где $b_i>0$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Замечание. В неравенстве (4) равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}.$$

Получилось очень красивое неравенство. Но оказывается, что это не что иное, как одна из форм записи неравенства Коши-Буняковского. Действительно, подставляя $x_i=a_i/\sqrt{b_i}$ и $y_i=\sqrt{b_i}$, получим неравенство Коши-Буняковского:

$$\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2\right) \ge \left(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n\right)^2.$$

Но форма записи (4) оказывается более удобной при решении некоторых задач.

Попробуем получить более общее неравенство. Есть идея: вместо a_i^2 напишем произведение двух множителей. Пробуя доказать получившееся неравенство при $n=2$, получаем новое условие. Оказывается, для

$$\frac{a_1}{c_1} \ge \frac{a_2}{c_2} \ge \ldots \ge \frac{a_n}{c_n},\ \frac{b_1}{c_1} \ge \frac{b_2}{c_2} \ge \ldots \ge \frac{b_n}{c_n}$$

(или, можно сказать, $\frac{a_i}{c_i}$ и $\frac{b_i}{c_i}$ одинаково упорядочены) и $c_i>0$, $i=1, 2, \ldots, n$, верно неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i\cdot b_i}{c_i} \ge \frac{\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i}{\sum_{i=1}^{n}c_i}. \quad (5)$$

При $a_i=b_i$ неравенство (5) обращается в (4).

Для доказательства (5) нам понадобится следующий простой факт, который можно доказать методом математической индукции: если

$$\frac{a_1}{c_1} \ge \frac{a_2}{c_2} \ge \ldots \ge \frac{a_n}{c_n}$$

$$(c_i>0,\ i=1, 2, \ldots, n),$$

то

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{c_1+c_2+\ldots+c_k} \ge \frac{a_n}{c_n}$$

для любого $k=1, 2, \ldots, n$.

Неравенство (5) докажем математической индукцией по n. При $n=2$ имеем

$$\frac{a_1b_1}{c_1}+\frac{a_2b_2}{c_2} \ge \frac{(a_1+a_2)(b_1+b_2)}{c_1+c_2},$$

или же

$$(a_1c_2-a_2c_1)(b_1c_2-b_2c_1) \ge 0,$$

что вытекает из условия

$$\frac{a_1}{c_1} \ge \frac{a_2}{c_2} \text{ и } \frac{b_1}{c_1} \ge \frac{b_2}{c_2}.$$

Пусть (5) верно для $n=k$. При $n=k+1$ имеем

$$\frac{a_1b_1}{c_1}+\frac{a_2b_2}{c_2}+\ldots+\frac{a_kb_k}{c_k}+\frac{a_{k+1}b_{k+1}}{c_{k+1}} \ge \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_k)(b_1+b_2+\ldots+b_k)}{c_1+c_2+\ldots+c_k}+\frac{a_{k+1}b_{k+1}}{c_{k+1}}.$$

Из факта, указанного выше, и доказанного неравенства при $n=2$ следует, что

$$\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_k)(b_1+b_2+\ldots+b_k)}{c_1+c_2+\ldots+c_k}+$$

$$+\frac{a_{k+1}b_{k+1}}{c_{k+1}}\geq$$

$$\geq\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_{k+1})(b_1+b_2+\ldots+b_{k+1})}{c_1+c_2+\ldots+c_{k+1}}.$$

Аналогично можно доказать, что если $\frac{a_i}{c_i}$ и $\frac{b_i}{c_i}$ обратно упорядочены, то неравенство (5) меняет знак:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{c_i}\leq\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}b_i}{\sum_{i=1}^{n}c_i}. \qquad (5.1)$$

Замечание. При условиях $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_n\geq 0$, $b_1\geq b_2\geq\ldots\geq b_n\geq 0$ и $0<c_1\leq c_2\leq\ldots\leq c_n$ выполняются условия неравенства (5), и значит, верно это неравенство.

Частными случаями неравенств (4) и (5) являются следующие известные неравенства:

1) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{c_i}\geq\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}c_i}$, при условии $c_i>0$ ($i=1, 2, \ldots, n$);

2) $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geq\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2; \qquad (6)$$

3) $$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\geq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i, \qquad (7)$$

при условиях $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_n$ и $b_1\geq b_2\geq\ldots\geq b_n$ (*неравенство Чебышева*).

Оказывается, (5) тоже является формой записи классического неравенства. Заменой

$$a_i=c_ix_i,\ b_i=c_iy_i,\ p=\frac{c_i}{\sum_{i=1}^{n}c_i}$$

оно приводится к одному из вариантов неравенства Чебышева: если x_i и y_i одинаково упорядочены, $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$ ($p_i>0$), то для средних $Mz=\sum_{i=1}^{n}z_ip_i$ выполнено

$$Mx\cdot My\leq M(xy).$$

Получилось, что неравенство Коши-Буняковского есть частный случай неравенства Чебышева.

С помощью неравенств (4) и (5) можно решить много интересных задач. Рассмотрим, например, такую.

Задача 3. *Для положительных чисел x_1, x_2, x_3 докажите неравенство*

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_1+x_2}\geq\frac{3}{2}.$$

Первое решение. В задачах подобного рода иногда бывает удобно вместо $\frac{a}{b}$ написать $\frac{a^2}{ab}$:

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_1+x_2}=$$

$$=\frac{x_1^2}{x_1(x_2+x_3)}+\frac{x_2^2}{x_2(x_3+x_1)}+\frac{x_3^2}{x_3(x_1+x_2)}\geq$$

$$\geq\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)}\geq\frac{3}{2}$$

(здесь мы воспользовались неравенством $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\leq x_1^2+x_2^2+x_3^2$).

Второе решение. Эту задачу можно свести к задаче 2, если переписать условие в следующем виде:

$$\left(\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2+x_3}{x_2+x_3}\right)+\left(\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3+x_1}{x_3+x_1}\right)+$$

$$+\left(\frac{x_3}{x_1+x_2}+\frac{x_1+x_2}{x_1+x_2}\right)\geq\frac{3}{2}+3,$$

или же

$$\frac{1}{x_1+x_2}+\frac{1}{x_3+x_1}+\frac{1}{x_1+x_2}\geq$$

$$\geq\frac{9}{2(x_1+x_2+x_3)}.$$

Задача 4. *Докажите неравенство*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2,$$

где a, b, c, $d>0$.

Решение. Эта задача решается так же, как и предыдущая:

$$\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+d)}+\frac{c^2}{c(d+a)}+\frac{d^2}{d(a+b)}\geq$$

$$\geq\frac{(a+b+c+d)^2}{ab+2ac+ad+bc+2bd+cd}.$$

Для доказательства последнего неравенства достаточно раскрыть скобки в выражении $(a+b+c+d)^2$ и применить неравенства $a^2+c^2\geq 2ac$, $b^2+d^2\geq 2bd$.

Задача 5. *Для положительных x_1, x_2, …, x_n докажите неравенство*

$$\frac{x_1}{x_2+x_n}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_{n-2}}+\frac{x_n}{x_1+x_{n-1}}\geq 2;$$

где $n\geq 4$.

Решение. Воспользуемся той же идеей:

$$\frac{x_1^2}{x_1(x_2+x_n)}+\frac{x_2^2}{x_2(x_3+x_1)}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{x_n^2}{x_n(x_1+x_{n-1})}\geq$$

$$\geq\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}{2(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_nx_1)}=A_n.$$

Методом математической индукции докажем, что при $n\geq 4$ выражение $A_n\geq 2$. При $n=4$ имеем

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-$$

$$-4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1)=$$

$$=(x_1-x_2+x_3-x_4)^2\geq 0.$$

Пусть неравенство верно для k чисел, докажем, что оно верно для $k+1$ чисел. По предположению, имеем

$$(x_1+x_2+\ldots+(x_{i-2}+x_{i-1})+$$

$$+x_i+\ldots+x_{k+1})^2\geq$$

$$\geq 4(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{i-3}(x_{i-2}+x_{i-1})+$$

$$+(x_{i-2}+x_{i-1})x_i+\ldots+x_kx_{k+1}+x_{k+1}x_1),$$

где $x_i=\max(x_1,\ldots,x_{k+1})$; остается заметить, что $x_{i-1}x_{i-3}+x_{i-2}x_i\geq x_{i-2}x_{i-1}$.

Задача 6. *Докажите неравенство*

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+$$

$$+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3},$$

где a, b, $c>0$.

Решение. Применим неравенство (4):

$$\frac{a^4}{a^3+a^2b+ab^2}+\frac{b^4}{b^3+b^2c+bc^2}+$$

$$+\frac{c^4}{c^3+c^2a+ca^2}\geq$$

$$\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^3+a^2b+ab^2+b^3+b^2c+bc^2+c^3+c^2a+ca^2}=$$

$$=\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}\geq\frac{a+b+c}{3}$$

(здесь мы пользовались неравенством

$$a^2+b^2+c^2>\frac{1}{3}(a+b+c)^2,$$

т.е. неравенством (4) при $n=3$).

Следующие две задачи были предложены на XXII и XXIII Международных математических олимпиадах.

Задача 7. *Из точки M внутри данного треугольника ABC опускаются перпендикуляры MA_1, MB_1, MC_1 на прямые BC, CA, AB. Для каких точек M величина*

$$\frac{BC}{MA_1}+\frac{CA}{MB_1}+\frac{AB}{MC_1}$$

принимает наименьшее значение?

Решение. Преобразуем выражение и применим неравенство (4):

$$\frac{BC^2}{BC\cdot MA_1}+\frac{CA^2}{CA\cdot MB_1}+\frac{AB^2}{AB\cdot MC_1}\geq$$

$$\geq\frac{(BC+CA+AB)^2}{BC\cdot MA_1+CA\cdot MB_1+AB\cdot MC_1}=$$

$$=\frac{4p^2}{2S}=2\frac{p}{r}.$$

Следовательно, наименьшее значение $\frac{BC}{MA_1}+\frac{CA}{MB_1}+\frac{AB}{MC_1}$ будет равно $2\frac{p}{r}$ при

$$\frac{BC}{BC\cdot MA_1}=\frac{CA}{CA\cdot MB_1}=\frac{AB}{AB\cdot MC_1},$$

т.е. при $MA_1=MB_1=MC_1$; следовательно, M — центр вписанной окружности.

Задача 8. *Рассматривается последовательность (x_n) положительных чисел, удовлетворяющих условию $1=$ $=x_0\geq x_1\geq x_2\geq\ldots\geq x_n\geq\ldots$ Докажите, что для любой такой последовательности существует n, при котором*

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geq 3{,}999.$$

Решение. Применяя неравенство (4), получим

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geq$$

$$\geq\frac{(x_0+x_1+\ldots+x_{n-1})^2}{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n}=K_n.$$

Докажем, что существует натуральное n_0, для которого, при $n>n_0$, $K_n\geq$ $\geq 3{,}999$. Действительно,

$$(x_0+x_1+\ldots+x_{n-1})^2-$$

$$-3{,}999(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n)=$$

$$=\left(1-[x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}]\right)^2+$$

$$+0{,}001(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})-3{,}999x_n\geq$$

$$\geq 0{,}001(n-1)x_n-3{,}999x_n\geq 0,$$

когда $n\geq(3{,}999/0{,}001)+1$. Т.е. можно принимать $n_0=4000$.

Задача 9. *Если a_1, a_2, ..., a_n — стороны n-угольника ($n\geq 3$), то*

$$\frac{a_1}{p-2a_1}+\frac{a_2}{p-2a_2}+\ldots+\frac{a_n}{p-2a_n}\geq\frac{n}{n-2},$$

где $p=a_1+a_2+\ldots+a_n$.

Решение. Без ограничения общности можно допустить, что $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_n$, тогда $0<p-2a_1\leq p-2a_2\leq\ldots\leq p-2a_n$.

Имея в виду замечание к неравенству (5), получим:

$$\frac{a_1\cdot 1}{p-2a_1}+\frac{a_2\cdot 1}{p-2a_2}+\ldots+\frac{a_n\cdot 1}{p-2a_n}\geq$$

$$\geq\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)\cdot n}{np-2(a_1+a_2+\ldots+a_n)}=\frac{n}{n-2}.$$

Задача 10. *Пусть G — центр тяжести треугольника $A_1A_2A_3$, а C — описанная около него окружность. GA_1 пересекает C в точке B_1. Точки B_1 и B_2 определяются аналогично. Докажите неравенство*

$$GA_1+GA_2+GA_3\leq GB_1+GB_2+GB_3.$$

Решение. Через A_1', A_2', A_3' и a_1, a_2, a_3 обозначим середины и длины сторон A_2A_2, A_1A_2, A_1A_2 соответственно.

Пусть $a_1\leq a_2\leq a_3$, тогда легко убедиться, что $GA_3\leq GA_2\leq GA_1$.

Имеем: $\frac{3}{2}GA_1\cdot B_1A_1=\frac{1}{4}a_1^2$, отсюда $GB_1=\frac{1}{2}GA_1+\frac{a_1^2}{6GA}$. Итак, достаточно доказать, что

$$\frac{a_1^2}{3GA_1}+\frac{a_2^2}{3GA_2}+\frac{a_3^2}{3GA_2}\geq$$

$$\geq GA_1+GA_2+GA_2.$$

Применяя неравенство (5), получим

$$\frac{a_1^2}{3GA_1}+\frac{a_2^2}{3GA_2}+\frac{a_3^2}{3GA_3}\geq$$

$$\geq\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{GA_1+GA_2+GA_3}=$$

$$=\frac{3\left(GA_1^2+GA_2^2+GA_3^2\right)}{GA_1+GA_2+GA_3}\geq$$

$$\geq GA_1+GA_2+GA_3.$$

Задача 11. *Докажите неравенство*

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}c_i\right)\cdots$$

$$\cdots\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i\right)\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_ib_ic_i\ldots d_i$$

при условии $0\leq a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_n$, $0\leq b_1\leq b_2\leq\ldots\leq b_n, 0\leq c_1\leq c_2\leq\ldots\leq c_n,\ldots$ $\ldots,\ 0\leq d_1\leq d_2\leq\ldots\leq d_n$.

Решение. Применим неравенство Чебышева:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}c_i\right)\cdots$$

$$\cdots\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i\right)\leq$$

$$\leq\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}c_i\right)\cdots\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i\right)\leq$$

$$\leq\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_ib_ic_i\right)\cdots\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i\right)\leq\ldots$$

$$\ldots\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_ic_i\ldots d_i.$$

Теплоемкость идеального газа

А. ШЕРОНОВ

Изменение температуры физического объекта (твердого тела, жидкости, газа и т.п.) в процессе подвода или отвода тепла характеризуется теплоемкостью данного тела. Величина теплоемкости может при этом зависеть от температуры тела, объема, от агрегатного состояния, а в ходе процесса теплопередачи теплоемкость может даже менять знак. Поэтому величина теплоемкости C определяется отношением количества теплоты Q, подведенного к телу (или отведенного от него) при бесконечно малом изменении ΔT его температуры, к этому изменению:

$$Q = C\Delta T.$$

Первое начало термодинамики позволяет записать это соотношение в виде

$$C\Delta T = \Delta U + p\Delta V,$$

где ΔU — изменение внутренней энергии тела, а $p\Delta V$ (p — давление, ΔV — малое изменение объема) — работа, совершенная телом при подводе к нему количества теплоты Q.

В природе и в технических устройствах довольно часто встречаются процессы, в ходе которых теплоемкость остается постоянной величиной (такие процессы называются политропическими). Так например, в изотермическом процессе температура не меняется ($\Delta T = 0$), а тепло подводится ($Q \neq 0$), поэтому теплоемкость бесконечно большая величина. В адиабатическом процессе $Q = 0$, а $\Delta T \neq 0$, поэтому теплоемкость равна нулю. В изохорическом процессе $\Delta V = 0$, т.е. работа не совершается, и теплоемкость при постоянном объеме C_V характеризует изменение внутренней энергии тела. Для одноатомного идеального газа подвод тепла увеличивает кинетическую энергию хаотического движения его атомов. Изменение внутренней энергии при этом составляет $\Delta U = C_V\Delta T$, а соответствующая молярная теплоемкость равна $C_V = 3/2R$, где R — универсальная газовая постоянная. Для двухатомного идеального газа изменяется также энергия вращательного движения молекул, что приводит к увеличению теплоемкости — молярная теплоемкость равна $C_V = 5/2R$. В случае твердых кристаллических тел (металлы, диэлектрики, полупроводники) изменяется энергия колебательного движения (кинетическая и потенциальная) атомов относительно их равновесных положений в кристаллической структуре. Для большинства твердых тел при комнатной температуре ($T \approx 300$ К) молярная теплоемкость близка к $3R$.

Заметим, что теплоемкость, приводимая в справочниках, обычно измерена в изобарическом процессе, т.е. при постоянном внешнем давлении. Подведенное тепло в этом случае идет на изменение внутренней энергии ΔU и совершение работы $p\Delta V$. Для твердых тел и жидкостей изменение внутренней энергии намного больше, чем совершаемая при этом работа, поэтому для твердых тел и жидкостей теплоемкости C_V (теплоемкость при постоянном объеме) и C_p (теплоемкость при постоянном давлении) мало отличаются по величине, в то время как для газов это отличие существенно.

Перейдем теперь к рассмотрению примеров использования понятия теплоемкости при решении конкретных задач.

Задача 1. *В комнате объемом $V = 60$ м^3 находится воздух при давлении $p = 10^5$ Па и температуре $T = 300$ К. На сколько градусов изменится температура воздуха в комнате за час работы в ней нагревателя мощностью 1 кВт? Считать, что воздух прогревается равномерно и из комнаты не выходит, а передача тепла от него окружающим телам мала.*

Воздух можно считать двухатомным идеальным газом с молярной теплоемкостью $C_V = 5/2R = 20{,}7$ Дж/моль. В комнате находится $\nu = pV/(RT)$ молей воздуха. За час работы нагревателя выделяется количество теплоты $Q = 3{,}6\cdot10^6$ Дж. Следовательно, изменение температуры составит

$$\Delta T = \frac{Q}{\nu C_V} = \frac{QRT}{C_V pV} \approx 70 \text{ К}.$$

Полученный результат явно превосходит реальный нагрев воздуха в комнате при данной мощности нагревателя. Это означает, что передачей тепла от воздуха окружающим телам пренебречь нельзя — грубая оценка.

Задача 2. *В установке для измерения теплоемкостей газов исследуемый газ под небольшим избыточным давлением прокачивается через трубку, внутри которой находится нагреватель известной мощности. Измеряется разность температур газа на входе и выходе трубки и количество газа, прошедшего через трубку в единицу времени. Считая, что все тепло, выделяемое нагревателем, передается газу, найдите величину теплоемкости, измеряемой в этом опыте. На сколько измеренная теплоемкость отличается от теплоемкости при постоянном объеме?*

Пусть в стационарном режиме в единицу времени на вход в трубку поступает 1 моль газа. Обозначим давление газа на входе через p_1, а температуру через T_1. Работа, совершенная компрессором над газом, будет равна $p_1V_1 = RT_1$. На выходе эта порция газа совершит работу против внешнего давления, равную $p_2V_2 = RT_2$, где p_2 — внешнее давление, а T_2 — температура газа на выходе. Используя первое начало термодинамики, можно записать

$$Q = C_V(T_2 - T_1) + p_1V_1 - p_2V_2 = C_V\Delta T + R\Delta T = C_p\Delta T,$$

где Q — подведенное к 1 молю газа количество теплоты. Мы получили, что в данном опыте измеряется теплоемкость при постоянном давлении, которая отличается от теплоемкости при постоянном объеме на R.

При решении мы нигде не использовали малость разности давлений на концах трубки. Значит ли это, что полученный результат будет справедлив и при больших перепадах давления? Нет, не значит, поскольку в этом случае при написании энергетического баланса мы не можем пренебрегать кинетической энергией поступательного движения газа.

Задача 3. *Моль гелия сжимают в процессе с постоянным давлением 1–2 (рис.1) так, что $T_1 = 8T_2$. Затем газ расширяется в процессе 2–3 с постоянной теплоемкостью до первоначального объема. Найдите эту теплоемкость, если конечная температура T_3 в 16 раз меньше начальной T_1, а работа по сжатию в 14/3 раза больше работы по расширению.*

Работа по сжатию равна

$$A_{12} = p_1(V_1 - V_2) = R(T_1 - T_2) = 7RT_2.$$

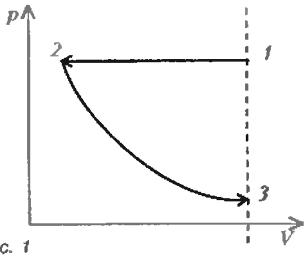


Рис. 1

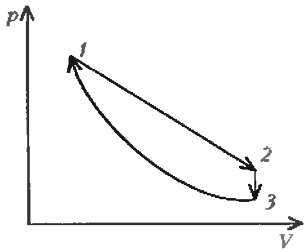


Рис. 2

В соответствии с законом сохранения энергии, работа по расширению равна

$$A_{23} = Q_{23} - \Delta U_{23} =$$

$$= (C - C_V)(T_3 - T_2) = -\frac{(C - C_V)T_2}{2}.$$

По условию задачи

$$A_{12} = \frac{14A_{23}}{3}.$$

Отсюда следует, что

$$C = C_V - 3R = -C_V = -\frac{3}{2}R.$$

Величина теплоемкости получилась отрицательной, так как тепло к газу на участке *2—3* подводится, а его температура уменьшается. Иными словами, газ в этом процессе совершает работу за счет подведенного тепла и уменьшения собственной внутренней энергии.

Задача 4. *Найдите величину теплоемкости и работу, которую совершает моль гелия в процессе расширения* $p^2V = \text{const}$. *Начальная температура газа* T_1, *а конечная* T_2.

Приращения давления Δp, объема ΔV и температуры ΔT связаны уравнением процесса:

$$(p + \Delta p)^2 (V + \Delta V) = p^2 V$$

и уравнением состояния:

$$(p + \Delta p)(V + \Delta V) = R(T + \Delta T).$$

Раскрыв скобки и пренебрегая малыми величинами $2p\Delta p\Delta V$, $\Delta p^2 V$, $\Delta p^2 \Delta V$ и $\Delta p \Delta V$, получим

$$p\Delta V = 2R\Delta T.$$

По определению теплоемкости имеем

$$C\Delta T = C_V \Delta T + p\Delta V = (C_V + 2R)\Delta T,$$

следовательно, теплоемкость в данном процессе равна

$$C = C_V + 2R = 3{,}5R.$$

В соответствии с законом сохранения энергии, работа, совершенная газом, составляет

$$A = Q - \Delta U = (C - C_V)(T_2 - T_1) =$$

$$= 2R(T_2 - T_1).$$

Задача 5. *Моль гелия в замкнутом цикле (рис.2) совершает работу* $A = 2026$ *Дж. Цикл состоит из процесса 1—2, в котором давление является линейной функцией объема, изохоры 2—3 и процесса 3—1, в котором теплоемкость газа остается постоянной. Найдите величину этой теплоемкости, если известно что* $T_1 = T_2 = 2T_3 = 100$ *К, а* $V_2/V_1 = \alpha = 8$.

Работа газа в процессе расширения равна

$$A_{12} = \frac{(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)}{2} = \frac{RT_1(\alpha^2 - 1)}{2\alpha}.$$

В процессе с постоянной теплоемкостью C по закону сохранения энергии работа газа равна

$$A_{31} = (C - C_V)(T_1 - T_3).$$

По условию работа в цикле составляет

$$A = A_{12} + A_{31}.$$

Откуда находим

$$C = C_V + \frac{A - RT_1(\alpha^2 - 1)/(2\alpha)}{T_1 - T_3} =$$

$$= -12{,}4 \text{ Дж/К}.$$

Теплоемкость получилась отрицательной, так как температура газа в этом процессе растет, а тепло отводится. Иными словами, часть работы по сжатию увеличивает внутреннюю энергию газа, а другая часть отводится в виде тепла.

Задача 6. *Замкнутый цилиндрический сосуд делится подвижным невесомым поршнем на две части (рис.3). В нижней части цилиндра находится моль одноатомного идеального газа, а в верхней части вакуум. Поршень связан с дном сосуда упругой пружиной.*

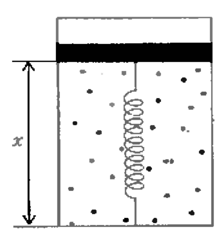


Рис. 3

Найдите теплоемкость газа, находящегося в сосуде. Нерастянутая пружина соответствует положению поршня у дна сосуда.

Пусть в начальном положении поршень находится на расстоянии x от дна сосуда, жесткость пружины k и площадь сечения сосуда S. Тогда объем, занимаемый газом, равен $V = xS$, а давление газа равно $p = (kx)/S$. При подведении к газу количества теплоты $Q = C\Delta T$ газ нагревается на ΔT, а поршень перемещается на Δx. Работа газа при этом идет на увеличение потенциальной энергии растянутой пружины. По закону сохранения энергии,

$$C\Delta T = C_V \Delta T + p\Delta V = C_V \Delta T + kx\Delta x.$$

Из уравнения состояния $pV = kx^2 = RT$ имеем

$$2kx\Delta x = R\Delta T.$$

Таким образом, для теплоемкости C газа получаем

$$C = C_V + \frac{R}{2} = 2R.$$

Упражнения

1. Монохроматическое излучение с длиной волны $\lambda = 5{,}1 \cdot 10^{-7}$ м с большой вероятностью поглощается молекулой хлора, что приводит к ее диссоциации, т.е. распаду на атомы. Определите давление в сосуде с молекулярным хлором сразу после облучения коротким импульсом света с энергией 1 Дж, пренебрегая теплообменом газа со стенками сосуда. Считать, что 90% энергии импульса идет на диссоциацию, а 10% поглощается, приводя к нагреву смеси молекулярного и атомарного хлора. Перед облучением молекулярный хлор занимал объем 22,4 см^3 при температуре 273 К и давлении 10^3 Па.

2. Покажите, что в процессе, имеющим на pV-диаграмме идеального газа вид прямой, проходящей через начало координат, теплоемкость остается постоянной. Найдите величину этой теплоемкости для одного моля газа.

3. Моль гелия расширяется в процессе $pV^2 = \text{const}$. Найдите работу, произведенную газом, если его начальная температура T_1, а конечная T_2.

4. Цилиндрический сосуд делится подвижным и непроводящим тепло поршнем на две части, в которых находится по одному молю гелия. Температура газа в одной части сосуда поддерживается постоянной. Найдите зависимость теплоемкости газа, находящегося в другой части сосуда, от ее объема V. Объем всего сосуда равен V_0.

5. Моль гелия заперт невесомым поршнем и пружиной в сосуде (см. рис.3). Сила упругости пружины F зависит от ее длины x по закону $F = kx^{\alpha}$, где k и α — некоторые константы. Определите величину константы α, если известно, что молярная теплоемкость газа в этих условиях равна $1{,}9R$

Варианты вступительных экзаменов 1996 года

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\frac{5}{\sin^2 x} - \frac{5\sqrt{5}}{\sin x} + 6 = 0.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{17 \cdot 9^x - 4^x} \ge 3^x - 3 \cdot 2^x.$$

3. В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, точка L лежит на отрезке AB и $AL = LB$. Описанная около треугольника ALO окружность пересекает AC в точке K. Найдите площадь треугольника ABC, если

$$\angle LOA = 45°,\ LK = 8,\ AK = 7.$$

4. Решите систему

$$\begin{cases} \log_2 \sin x - \log_2 2y + \\ + \left|\log_2 \cos x - \log_2 2y\right| = -2, \\ \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{2y^2} \le 1. \end{cases}$$

5. В треугольной пирамиде $SABC$ выполнены равенства

$$SA = SB = SC,\ AB = BC = AC,$$
$$\operatorname{tg} \angle SAC = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Сфера с радиусом $\sqrt{3}$ касается луча AS, касается плоскости SBC и касается плоскости ABC в точке, лежащей на луче AC. Найдите наибольшее возможное значение длины отрезка AC.

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$\left(x^2 - x + a^2 + 2\right)^2 = 4a^2\left(2x^2 - x + 2\right)$$

имеет ровно 3 различных решения?

Вариант 2

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Числа a, b, c и d являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что $a + d = 10$, $a \cdot d = 7$. Найдите $b^3 + c^3$.

2. Первый раствор содержит 20% азотной кислоты и 80% воды, второй — 60% азотной кислоты и 40% воды. Первая смесь была получена из 15 литров первого раствора и некоторого количества второго раствора. Смешав то же самое количество второго раствора с 5 литрами первого, получили вторую смесь. Сколько литров второго раствора было использовано для приготовления первой смеси, если известно, что процентное содержание воды во второй смеси в два раза больше процентного содержания кислоты в первой?

3. При всех значениях параметра a решите уравнение

$$25^x - (a-1)5^x + 2a + 3 = 0$$

и укажите, при каких a оно имеет единственное решение.

4. Решите неравенство

$$\arccos(3x) + \arcsin(x+1) \le \frac{7\pi}{6}.$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10y + 58 = 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 16x - 12y + 100} + \\ + \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 20y + 104} = 2\sqrt{29}. \end{cases}$$

6. Две окружности пересекаются в точках A и B. Хорда CD первой окружности имеет с хордой EF второй окружности общую точку M. Длина отрезка AB в три раза больше длины отрезка CM, которая, в свою очередь, в два раза меньше длины отрезка MD и в шесть раз меньше длины отрезка MF. Какие значения может принимать длина отрезка AM, если известно, что длина отрезка BM равна 2, а длина AB в девять раз больше длины отрезка EM?

Вариант 3

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\cos 3x - \sin\left(7x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos 5x.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{x-2}{x\sqrt{6 + x - x^2}} > 0.$$

3. Решите уравнение

$$5^{\frac{x}{2}} - 5^{2 - \frac{3x}{2}} = 24 \cdot 5^{-\frac{x}{2}}.$$

4. Касательная к окружности (K — точка касания) параллельна хорде LM. Известно, что $LM = 6$, $KM = 5$. Найдите радиус окружности.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2\left(2x^2 - y^2\right) = 2, \\ 6\log_x(-x) + \log_2 y^2 = 4. \end{cases}$$

6. Диагональ прямоугольного параллелепипеда, равная m, образует с боковыми гранями углы α и β. Найдите объем параллелепипеда.

7. Биссектриса AD равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) делит сторону BC на отрезки $BD = b$ и $DC = c$. Найдите AD.

8. Для каждого значения a найдите число решений уравнения

$$a \operatorname{tg} x + \cos 2x = 1,$$

принадлежащих промежутку

$$0 \le x \le 2\pi.$$

Вариант 4

(химический факультет)

1. Решите уравнение

$$\cos 4x + \sin x \sin 3x = 0.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{x+5} > 7 - x.$$

3. Решите систему

$$\begin{cases} 5\left(\log_y x + \log_x y\right) = 26, \\ xy = 64, \\ y < x. \end{cases}$$

4. В треугольнике ABC точка D лежит на AC, причем $AD = 2DC$. Точка E лежит на BC. Площадь треугольника ABD равна 3, площадь треугольника AED равна 1. Отрезки AE и BD пересекаются в точке О. Найдите отношение площадей треугольников ABO и OED.

5. Решите уравнение

$$\left|1+\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)\right|+\left|x^2-15x+44\right|= = 15x-x^2-\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)-45.$$

Вариант 5

(факультеты биологический и фундаментальной медицины)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{2}\cdot\sin x+\sin 2x=0.$$

2. Решите уравнение

$$(x-7)^2-|x-7|=30.$$

3. Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$1+\log_{\frac{1}{4}}\left(\log_3(4-x)\right)>0.$$

4. Плоское сечение SAB, проходящее через вершину S прямого кругового конуса, имеет площадь 42 (см^2). Точки A и B, лежащие на окружности основания конуса, делят ее длину в отношении 1 : 5. Найдите объем конуса, если угол SAB равен $\arccos\left(\frac{3}{\sqrt{58}}\right)$.

5. Найдите все пары натуральных чисел (t, u), удовлетворяющие одновременно двум неравенствам

$$\begin{cases}2\cdot t+47<22\cdot u-2\cdot u^2,\\ 4\cdot u\ge 7\cdot t+14.\end{cases}$$

Вариант 6

(факультет почвоведения)

1. Докажите, что число

$$\left(\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27}\right)^2+7\right)\cdot\left(\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{27}\right)^2-7\right)$$

целое и найдите это число.

2. Решите неравенство

$$3x^4+4<13x^2.$$

3. Решите уравнение

$$x^{2\log_4 x}=\frac{8}{x^2}.$$

4. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{x+\sin x}=\sqrt{x-\sin 2x},$$

удовлетворяющие неравенству

$$-2\pi<x<2\pi.$$

5. В треугольнике ABC известно, что $AB = 3$, $AC = 3\sqrt{7}$, $\angle ABC = 60°$. Биссектриса угла ABC продолжена до пересечения в точке D с окружностью, описанной вокруг треугольника. Найдите длину отрезка BD.

6. Определите, при каких значениях a решения неравенства

$$\sqrt{x+a}\ge x$$

образуют на числовой прямой отрезок длиной $2|a|$.

Вариант 7

(геологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{3x-5}=x-11.$$

2. Определите, какие из чисел −4, −1, 1, 4 являются решениями неравенства

$$\left|\frac{1}{2}-\log_{10}5\right|\cdot x\le\frac{1}{2}-\log_{10}5.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$\frac{\cos 10x-\cos 8x}{2x^2+\pi x-\pi^2}=\frac{\cos 6x-\cos 4x}{2x^2+\pi x-\pi^2},$$

принадлежащие интервалу $(0;\ \pi)$.

4. Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_9(-27x)}>\frac{1}{\log_3(-x)}.$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x^2-xy=20y,\\ 5xy-5y^2=4x.\end{cases}$$

6. В двух банках в конце года на каждый счет начисляется прибыль: в первом банке — 60% к текущей сумме на счете, во втором — 40% к текущей сумме на счете. Вкладчик в начале года часть имеющихся у него денег положил в первый банк, а остальные деньги — во второй банк, с таким расчетом, чтобы через два года суммарное количество денег на обоих счетах удвоилось. Какую долю денег вкладчик положил в первый банк?

7. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AD перпендикулярна основаниям и имеет длину 9. Длина основания CD равна 12, а длина отрезка AO, где O — точка пересечения диагоналей трапеции, равна 6. Найдите площадь треугольника BOC.

8. Найдите все действительные значения параметра a, при которых для любого действительного b уравнение

$$\cos(b+ab+bx)+2\cos b^2x=3a^2$$

имеет хотя бы одно решение.

Вариант 8

(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{33-8x}+x=3.$$

2. $f(x)$ — периодическая функция с периодом $T = 1/3$. Найдите значение $f(1)$, если известно, что

$$f^2(2)-5f(10)+\frac{21}{4}=0$$

и

$$4f^2(-1)-4f\left(\frac{10}{3}\right)=35.$$

3. Решите уравнение

$$\log_{(\cos x)}(\sin x+\cos 2x)=0.$$

4. Углы тупоугольного треугольника ABC удовлетворяют равенству $\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$. Найдите периметр этого треугольника, если известен радиус описанной окружности R, а один из углов равен $\frac{\pi}{8}$.

5. Даны два вектора

$$\vec{u}=\{b(a-2);\,(1-2b);\,-b(a-2)\}\ \text{и}\ \vec{v}=\{a-2;\,b-2;\,-a\}.$$

1) Найдите все значения параметров a и b, при которых эти векторы будут коллинеарны, но не равны.

2) В случае $b = a$ найдите все значения параметра a, при которых эти векторы взаимно перпендикулярны.

Вариант 9

(экономический факультет, отделения вечернее и менеджмента)

1. Решите неравенство

$$\log_4(3-3x)^2\ge\log_2\left(x^2-1\right).$$

2. Решите систему

$$\begin{cases}x+3^y=2,\\ x^3+27^y=26.\end{cases}$$

3. В контейнер упакованы изделия двух типов. Стоимость и масса одного изделия составляют 400 тыс. р. и 12 кг для первого типа и 600 тыс. р. и 15 кг для второго типа. Общая масса изделий равна 321 кг. Определите минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере изделий.

4. Решите уравнение

$$\sqrt[4]{12}\cdot\sin x=\sqrt{\sin 2x}.$$

5. Через точку A, находящуюся вне окружности на расстоянии 7 от ее центра, проведена прямая, пересекающая окружность в точках B и C. Найдите радиус окружности, если известно, что $AB = 3$, $BC = 5$.

6. При каких значениях параметра p площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условием

$$|2x+y|+|x-y+3|\le p,$$

будет равна 24?

Вариант 10

(экономический факультет)

1. Решите систему

$$\begin{cases}|-x|-\sqrt[3]{y+3}=1,\\ \left(-x\sqrt{-x}\right)^2-y=10.\end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\log_7(19-16x|x|)-\log_{49}(1-4x)^2}{3-4x-|4x-3|}\le 0.$$

3. Решите уравнение

$$\left(\operatorname{tg}\frac{19\pi}{3}-\operatorname{tg}x\right)\times$$
$$\times\sqrt{6\cdot\cos\frac{15\pi}{4}\cdot\cos\frac{x}{2}-\cos x-3}=0.$$

4. В контейнер упакованы комплектующие изделия трех типов. Стоимость и масса одного изделия составляют 400 тыс. р. и 12 кг для первого типа, 500 тыс. р. и 16 кг для второго типа, 600 тыс. р. и 15 кг для третьего типа. Общая масса комплектующих равна 326 кг. Определите минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере комплектующих изделий.

5. В треугольнике ABC с основанием $AC=8$ проведена биссектриса BL. Известно, что площади треугольников ABL и BLC относятся как $3:1$. Найдите биссектрису BL, при которой высота, опущенная из вершин B на основание AC, будет наибольшей.

6. Найдите все значения параметра a, при которых фигура, заданная на координатной плоскости условием

$$|y|\le\left(\sqrt{a-|x|}\right)^2+\arcsin(\sin(a-|x|)),$$

представляет собой 14-угольник.

Вариант 11

(факультет психологии)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-21x+4}=2-11x.$$

2. Решите неравенство

$$2<\log_3(x-3)^4\le 8.$$

3. Найдите область определения функции

$$f(x)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{-6\sin^2 2x-2\sin 2x\cos 2x+8-\sqrt{3}}}.$$

4. В угол с вершиной A величиной в 60° вписана окружность с центром в точке O. К этой окружности проведена касательная, пересекающая стороны угла в точках B и C. Отрезок BC пересекается с отрезком AO в точке M. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, если $\frac{AM}{MO}=\frac{2}{3}$ и $BC=7$.

5. Пусть t_1 и t_2 — корни квадратного уравнения

$$t^2-(5b-2)^2t-3b^2-7b+1=0.$$

Найдите все значения параметра b, при каждом из которых для любого значения параметра a функция

$$f(x)=\cos(a\pi x)\cdot\cos\left(\left(t_1^3+t_2^3\right)\cdot\pi x\right)$$

является периодической.

Вариант 12

(институт стран Азии и Африки)

1. Решите неравенство

$$3\cdot 4^x-7\cdot 2^{x+1}-5\le 0.$$

2. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условиями

$$\begin{cases}y\ge -|x|-1,\\ y\le -2|x|+3.\end{cases}$$

3. Найдите область определения функции

$$y=\frac{\sqrt{36-x^2}\cdot\log_3\left(x^2+2x-8\right)}{2\sin x-1}.$$

4. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{x+2}-x+4\right)\ge -1+\log_{\frac{1}{2}}3.$$

5. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает сторону AB в точке D, а сторону BC в точке E. Найдите угол BDC, если $BD:EC=1:2$, $BE:AD=2:7$, угол ABC равен 60°.

6. При каких значениях параметра a неравенство

$$\log_{\frac{2a-15}{5}}\left(\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x+a-5}{5}\right)>0$$

выполняется для любых значений x?

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. По наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, втягивают за веревку ящик массой M. Коэффициент трения ящика о плоскость μ. Под каким углом к плоскости следует тянуть веревку, чтобы двигать ящик равномерно с минимальным усилием?

2. Мощность, развиваемая двигателями ракеты, неподвижно зависшей над Землей, равна N. Найдите скорость истечения газов из сопла двигателя, если масса ракеты m, а ускорение свободного падения g.

3. К середине боковой стороны бруска массой M, лежащего на горизонтальной плоскости стола, прикреплена легкая пружина жесткостью k, другой конец которой прикреплен к вертикальной стенке так, что ось пружины горизонтальна (рис. 1). К середине противоположной стороны бруска прикреплена легкая нерастяжимая

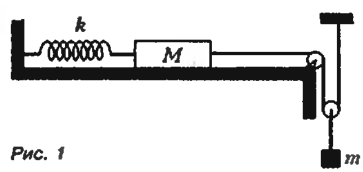


Рис. 1

нить, перекинутая через неподвижный блок. На нити висит другой блок, к оси которого подвешен кубик массой m. Верхний конец нити прикреплен к потолку. Первоначально кубик удерживали в положении, при котором пружина не деформирована, а нить слегка натянута. Отрезки нити, не лежащие на блоках, либо горизонтальны, либо вертикальны. Пренебрегая трением и массой блоков, найдите максимальную скорость бруска после отпускания кубика без начальной скорости.

4. Идеальный газ в исходном состоянии имел температуру T_0. Затем давление газа уменьшили в $n=2$ раза, увеличив его объем во столько же раз, так, что объем изменялся в зависимости от давления по линейному закону. Найдите максимальную температуру газа при этом процессе.

5. Два баллона соединены тонкой трубкой с закрытым краном. Объемы баллонов одинаковы и равны $V=1$ л. В первом баллоне находится сухой воздух под давлением $p=750$ мм рт.ст., а в другой баллон после откачки помещена капелька воды массой $m=0{,}1$ г. Какое давление установится в баллонах после открытия крана, если температура баллонов постоянна и равна $t=22$ °С, а давление насыщенных паров воды при этой температуре равно $p_н=20$ мм рт.ст.?

6. Между двумя параллельными проводящими пластинами, находящимися на расстоянии d друг от друга, параллельно им на расстоянии a от первой пластины помещена заземленная металлическая плоскость. Площади пластин одинаковы и равны S, причем линейные размеры пластин много больше расстояния между ними. Найдите заряд плоскости, если потенциалы первой и второй пластин относительно земли равны $-\varphi$ и $+\varphi$ соответственно.

7. При подключении к батарее резистора на нем выделяется мощность $P_1 = 12$ Вт. При этом КПД системы, состоящей из резистора и батареи, оказался равным $\eta = 0{,}5$. Найдите КПД системы при подключении к батарее другого резистора, на котором выделяется мощность $P_2 = 9$ Вт.

8. К источнику с ЭДС $\mathcal{E}$ подключили последовательно соединенные конденсатор, катушку индуктивности и полупроводниковый диод, имеющий в проводящем направлении бесконечно малое, а в обратном направлении — бесконечно большое сопротивление. Пренебрегая сопротивлением источника и проводов, найдите установившееся напряжение на конденсаторе.

9. Один торец стеклянной однородной палочки представляет собой плоскость, перпендикулярную ее оси, а другой — часть сферы, центр которой лежит на этой оси. Тонкий параллельный пучок света, идущий вдоль оси палочки со стороны плоского торца, фокусируется на расстоянии a_1 от сферического торца, а идущий со стороны сферического торца — на расстоянии a_2 от него внутри палочки. Определите показатель преломления стекла.

10. Щель шириной $b = 1$ мм в плоском экране освещают двумя лазерами, дающими пучки света с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм. Плоскость экрана перпендикулярна оси первого пучка. За щелью находится собирающая линза, главная оптическая ось которой совпадает с направлением первого из освещающих пучков. Найдите наименьший угол между осями освещающих пучков, при котором центральный дифракционный максимум одного пучка совпадает с минимумом другого.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Маленький шарик, подвешенный на нити, движется в поле силы тяжести по окружности так, что нить составляет с вертикалью постоянный угол $\alpha_1 = 30°$. Другой такой же шарик, подвешенный на нити такой же длины, движется так, что его нить составляет с вертикалью постоянный угол $\alpha_2 = 45°$. Определите, во сколько раз кинетическая энергия второго шарика превышает кинетическую энергию первого шарика.

2. Маленький стальной шарик массой $m_1 = 10$ г подвешен на нити длиной $L = 1$ м. Его выводят из положения равновесия, отклоняя нить на угол 90° (рис.2), и отпускают без начальной скорости. В нижней точке траектории этот шарик испытывает упругое центральное соударение с покоящимся на столе шариком массой $m_2 = 30$ г. На какую высоту поднимется первый шарик после удара?

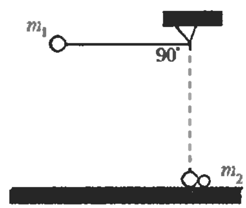


Рис. 2

3. Гранату бросают от поверхности земли под углом $\alpha = 30°$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с. В верхней точке траектории граната разрывается на два одинаковых осколка, скорости которых сразу после взрыва направлены горизонтально. На каком расстоянии друг от друга упадут осколки, если кинетическая энергия, сообщенная им при взрыве, равна $E = 18$ Дж, а масса гранаты $m = 1$ кг? Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

4. Какой массой должно обладать сферическое тело радиусом $r = 1$ м, чтобы оно могло плавать в атмосфере Венеры? Атмосфера Венеры состоит из углекислого газа CO_2, давление у поверхности планеты $p_0 = 9$ МПа, температура $t = 527$ °С. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).

5. Надувной шарик, заполненный гелием, удерживают на нити. Найдите натяжение нити, если масса оболочки шарика $m = 2$ г, объем $V = 3$ л, давление гелия $p = 1{,}04 \cdot 10^5$ Па, температура $t = 27$ °С. Молярная масса гелия $M = 4$ г/моль, плотность воздуха $\rho = 1{,}3$ кг/м^3, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К), ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

6. В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде с площадью сечения $S = 20$ см^2 под поршнем массой $M = 4$ кг содержится идеальный одноатомный газ. Расстояние между поршнем и дном сосуда $h = 1$ м. Газу сообщили количество теплоты $Q = 126$ Дж. Во сколько раз изменится средняя квадратичная скорость молекул газа? Атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

7. Одноатомный идеальный газ переводится из состояния $p_1 = 130$ кПа, $V_1 = 1$ л в состояние $p_2 = 10$ кПа, $V_2 = 2$ л по прямой, соединяющей точки (p_1, V_1) и (p_2, V_2) на pV-диаграмме. Затем газ переводится в состояние $p_3 = 20$ кПа, $V_3 = 3$ л по прямой, соединяющей точки (p_2, V_2) и (p_3, V_3). Какое количество теплоты сообщено газу?

8. В магнитном поле с индукцией, равной $B = 1$ Тл и направленной вертикально вниз, по горизонтальным рельсам равномерно движется проводящий стержень длиной $L = 0{,}4$ м со скоростью $v = 5$ м/с (рис.3). Концы рельсов присоединены к батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 10{,}1$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}1$ Ом. Какое количество теплоты выделится в стержне за время $t = 10$ с, если его сопротивление $R = 10$ Ом? Сопротивлением рельсов и соединительных проводов пренебречь.

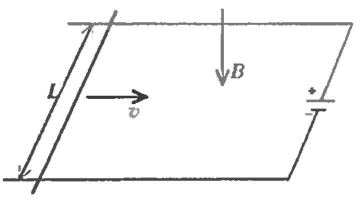


Рис. 3

9. Точечный источник света лежит на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 70$ см. Расстояние от источника до центра линзы равно $2F$. На какое расстояние сместится изображение источника, если линзу повернуть так, чтобы прямая, проведенная от источника к центру линзы, составляла угол $\alpha = 30°$ с главной оптической осью линзы? Центр линзы остается неподвижным.

10. Светящаяся нить лампы имеет форму отрезка длиной $\Delta = 1$ см и расположена вдоль главной оптической оси линзы с фокусным расстоянием $F = 5$ см так, что ближний к линзе конец нити находится в ее фокусе (рис.4). На расстоянии l от линзы перпендикулярно ее главной оптической оси расположен экран. Построив ход лучей в линзе, определите,

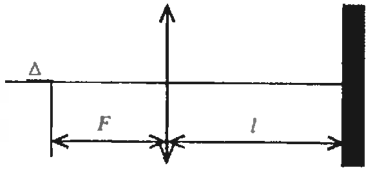


Рис. 4

при каком значении l размер пятна на экране превысит диаметр линзы.

Химический факультет

1. Двигатель ракеты, запущенной с поверхности Земли, сообщает ей постоянное ускорение, равное $a = 10$ м/с^2 и направленное вертикально вверх. Сколько времени должен проработать двигатель, чтобы ракета достигла максимальной высоты $H = 250$ м? Принять $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха не учитывать.

2. Тележка движется горизонтально с постоянной скоростью. Вместе с тележкой движется лежащий на ней брусок, который прикреплен к задней стенке тележки при помощи пружины (рис.5). Расстояние от бруска до передней стенки тележки $l = 0{,}1$ м. При

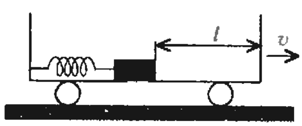


Рис. 5

внезапной остановке тележки брусок продолжает двигаться по инерции. При какой минимальной скорости тележки v брусок достигнет ее передней стенки? Частота свободных колебаний бруска на пружине $\nu = 2$ Гц. Трением пренебречь.

3. По струне слева направо бежит поперечная гармоническая волна со скоростью $v = 40$ м/с. Длина волны $\lambda = 60$ см, амплитуда $A = 2$ мм. Найдите ускорение точки O струны в мо-

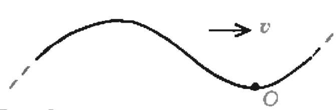


Рис. 6

мент времени, соответствующий рисунку 6.

4. Газовая смесь содержит $m_1 = 32$ г кислорода (молярная масса $M_1 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль) и $m_2 = 22$ г углекислого газа ($M_2 = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль). Найдите плотность смеси при нормальных условиях: $p_0 = 10^5$ Па и $t_0 = 0$ °С. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).

5. В цилиндре под поршнем находится воздух с относительной влажностью $\varphi_1 = 80\%$ при температуре $t_1 = 27$ °С. Объем воздуха $V_1 = 1{,}5$ л. Какой станет влажность, если объем воздуха уменьшить до $V_2 = 0{,}37$ л, а температуру повысить до $t_2 = 100$°С? Давление насыщенного водяного пара при $t_1 = 27$ °С равно $p_1 = 20$ мм рт.ст. Нормальное атмосферное давление $p_a = 760$ мм рт.ст.

6. Параметры схемы, изображенной на рисунке 7, имеют следующие зна-

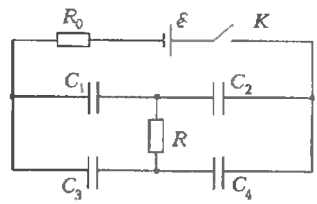


Рис. 7

чения: $\mathcal{E} = 12$ В, $C_1 = 8$ мкФ, $C_2 = 20$ мкФ, $C_3 = 6$ мкФ, $C_4 = 8$ мкФ. Какой заряд протечет через резистор R_0 от момента замыкания ключа K до окончания процесса зарядки конденсаторов? В начальном состоянии конденсаторы не заряжены.

7. В электрической схеме, изображен-

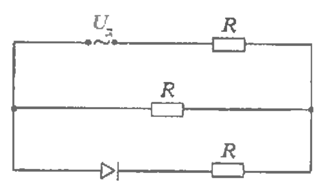


Рис. 8

ной на рисунке 8, сопротивления всех резисторов одинаковы и равны $R = 1$ кОм каждое. Источником тока является синусоидальное напряжение с действующим значением $U_д = 60$ В. Найдите максимальное значение силы тока, протекающего через диод. Сопротивлением источника тока и сопротивлением диода при прямом токе пренебречь.

8. При равномерном изменении силы тока через катушку в ней возникает ЭДС самоиндукции $\mathcal{E} = 5$ В. Катушка имеет $N = 500$ витков. Какая мощность будет выделяться при этом в замкнутом проволочном витке, надетом на катушку? Сопротивление витка $R = 0{,}2$ Ом.

9. Светящаяся точка приближается к собирающей линзе вдоль ее главной оптической оси с постоянной скоростью $v = 2$ см/с. Какова средняя скорость движения изображения точки на участке пути между двумя его положениями, удаленными от линзы на расстояния $f_1 = 2F$ и $f_2 = 4F$? Здесь F — фокусное расстояние линзы.

10. На расстоянии $d = 60$ см от собирающей линзы находится точечный источник света. По другую сторону линзы расположено плоское зеркало, параллельное линзе. На каком расстоянии от линзы находится зеркало, если свет, отразившись от зеркала и пройдя через линзу, выходит параллельным пучком? Фокусное расстояние линзы $F = 50$ см.

Публикацию подготовили
В.Алексеев, В.Власов, С.Волошин, В.Воронин, В.Галкин, И.Иновенков, В.Круглов, Г.Медведев, В.Панферов, М.Потапов, И.Сергеев, А.Склянкин, А.Соколихин, В.Ушаков, А.Часовских, С.Чесноков

ЗИФМШ ОБЪЯВЛЯЕТ ПРИЕМ

Заочная инженерная физико-математическая школа (ЗИФМШ) объявляет прием учащихся в 9, 10 и 11 классы на 1997/98 учебный год. Главная цель школы — помочь учащимся глубже изучить математику и физику, развить инженерный склад мышления и лучше подготовиться к поступлению в группы по подготовке инженеров-исследователей высших учебных заведений, прежде всего Петербургского государственного университета путей сообщения (ПГУПС).

Прием в ЗИФМШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. После номера каждой задачи в скобках указано, для какого класса она предназначена. (Например, 4(9,10 кл.) означает, что задача 4 входит в конкурсное задание для 9 и 10 классов.)

Решение вступительного задания необходимо прислать по адресу:

190031 Санкт-Петербург, Московский проспект, д. 9, ПГУПС, ЗИФМШ, на конкурс.

В письмо вложите два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 9×12 см и заполненной по прилагаемому образцу.

Зачисленным в ЗИФМШ в течение года высылаются учебные пособия и контрольные задания. Решенные задания оцениваются и рецензируются. Успешно закончившие ЗИФМШ получают удостоверение и имеют преимущество при поступлении в ПГУПС, который готовит инженеров-электриков, инженеров-строителей, специалистов по электронно-вычислительной технике и программному обеспечению вычислительной техники, экономистов, специалистов по бухгалтерскому учету, а также инженеров-исследователей для проектирования и строительства высокоскоростных железнодорожных магистралей (со скоростью движения до 500 км/ч).

Вступительное задание

1 (9 кл.). Из Петербурга в сторону Москвы с интервалом в 10 мин вышли два электропоезда со скоростью 54 км/ч. С какой скоростью двигался встречный поезд, если он повстречал эти поезда через 6 мин один после другого?

2 (9 кл.). Покажите, что произведение суммы любых трех положительных чисел и суммы их обратных величин не меньше 9.

3 (9, 10 кл.). Придумайте конструкцию переключателя и нарисуйте схему электрической цепи, которая позволяла бы включать электрическую лампу в одном тамбуре вагона, или включать лампу в другом тамбуре, или включать обе лампы вместе или выключать обе лампы.

4 (9, 10 кл.). До просушки влажность зерна составляла 34%, а после просушки оказалась равной 12%. На сколько процентов уменьшилась масса зерна после просушки?

5 (9, 10, 11 кл.). В кастрюлю налили холодную воду при температуре 10 °С и поставили на плиту. Через 10 мин вода закипела. Через какое время она полностью испарится? Теплоемкостью кастрюли пренебречь.

6 (9, 10, 11 кл.). В треугольнике две медианы взаимно перпендикулярны и равны a и b соответственно. Найдите площадь треугольника.

7 (10, 11 кл.). Определите силу натяжения нити, связывающей два шарика объемом 10 см^3 каждый, если верхний шарик плавает, наполовину погрузившись в воду, а нижний шарик в 3 раза тяжелее верхнего.

8 (10, 11 кл.). Решите неравенство

$$x > 3 - \frac{1}{x-1}.$$

9 (11 кл.). Два резистора, сопротивления которых 4 Ом и 6 Ом соответственно, соединены последовательно. Напряжение на клеммах источника тока поддерживается постоянным и равным 100 В. Параллельно первому резистору включен вольтметр, который показывает 34,8 В. Найдите отношение тока, идущего через вольтметр, к току, идущему через второй резистор.

10 (11 кл.). Известно, что в геометрической $\{b_n\}$ и арифметической $\{a_n\}$ прогрессиях $b_3 - b_1 = 9$, $b_5 - b_3 = 36$, $b_1 = a_1$, $b_2 = a_3$. Найдите суммы $S_5\{b_n\}$ и $S_8\{a_n\}$.

11 (10, 11 кл.). Время отправления электрички 12.00. Когда ваши часы показывали 12.00, с вами поровнялся передний тамбур предпоследнего вагона. Этот вагон двигался мимо вас в течение 10 с, а последний — в течение 8 с. Учитывая, что электричка отправилась вовремя и двигалась равноускоренно, определите, на сколько отстали ваши часы.

12 (10, 11 кл.). Вычислите отрицательный коэффициент b и корни уравнения $x^2 + bx - 1 = 0$, если известно, что при увеличении каждого из этих корней на 1 они становятся корнями уравнения $x^2 - b^2x - b = 1$.

1. Фамилия, имя, отчество	*Сидоров Иван Петрович*
2. Класс (номер класса указывается на 1 сентября 1997 г.)	*десятый*
3. Подробный домашний адрес (с указанием индекса и телефона)	*524806 г. Тверь, ул. Садовая, д. 55, кв. 77, тел. 3-74-76*
4. Номер и адрес школы	*школа 5, г. Тверь, ул. Зеленая, д. 7*

НОВЫЙ ПРИЕМ НА ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ МАЛОГО МЕХМАТА

Малый механико-математический факультет (МММФ) — математическая школа при механико-математическом факультете МГУ — объявляет прием учащихся на заочное отделение. На трехгодичное обучение принимаются учащиеся, оканчивающие восьмые классы одиннадцатилетних общеобразовательных школ. Впервые в этом году производится прием учащихся, заканчивающих седьмые классы, на четырехгодичное обучение. Зачисление на МММФ производится по результатам решения задач вступительной работы, опубликованных ниже.

Основные цели МММФ — приобщение к математике, углубление знаний в рамках школьной программы, расширение математического кругозора учащихся средних школ, а также знакомство с механико-математическим факультетом МГУ. Преподавателями на заочном отделении МММФ работают аспиранты и сотрудники механико-математического факультета МГУ. Разработку тематических брошюр осуществляет методический совет, состоящий из профессоров и преподавателей механико-математического факультета МГУ.

Зачисление на заочное отделение МММФ происходит в октябре. Занятия начинаются в ноябре. Обучение платное. Учащиеся, особо успешно выполнившие все задания, получают удостоверение об окончании МММФ.

Желающие поступить на МММФ должны *не позднее 1 октября 1997 года* выслать в наш адрес решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все задачи). Поступающим в восьмой класс решать задачи 6, 8, 10, 11 не нужно. Возможно обучение коллективных учеников, а также поступление на МММФ учащихся, заканчивающих 9 (10) класс, на основании заявления с приложением итоговых оценок за 8 (9) класс.

Вступительную работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. На обложку тетради наклейте лист бумаги со следующими данными:

1) Республика, край, область.

2) Фамилия, имя учащегося (для коллективных учеников — Ф.И.О. руководителя и полный список учащихся).

3) Школа, класс.

4) Полный домашний адрес с указанием индекса почтового отделения.

5) Фамилия, имя, отчество родителей, место их работы и должность.

В работу вложите листок бумаги размером 10×12 см, на котором напишите полный домашний адрес и индекс.

Наш адрес: *119899 Москва, Воробьевы Горы, МГУ, Малый мехмат.*

Для школьников 6—11 классов Москвы и ближнего Подмосковья работает вечернее отделение МММФ. Справки по телефону 939-39-43.

Вступительная работа

1. Решите уравнение
$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x}+3\right)=\frac{6x+2}{3x}.$$

2. Имеет ли решение система
$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0? \end{cases}$$

3. Ученик перемножил два числа и, обозначив цифры буквами (одинаковые цифры — одинаковыми буквами, разные — разными), получил следующую запись: $ab \cdot cd = effe$. Докажите, что он ошибся.

4. Можно ли так разрезать треугольник со сторонами 13, 13, 10 на части, чтобы составить из них треугольник со сторонами 13, 13, 24?

5. Сколькими нулями оканчивается число $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 125$?

6. Докажите, что для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство
$$ab+1 \le \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}.$$

7. Что больше для чисел 1, 2, 3, ..., 1000: сумма чисел, некратных трем или удвоенная сумма чисел, кратных трем?

8. Докажите, что круги, построенные на сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах, покрывают его полностью.

9. На плоскости проведены три прямые, пересекающиеся в одной точке. Можно ли провести на плоскости четвертую прямую так, чтобы она пересекла ровно одну из заданных прямых?

10. Найдите численное значение суммы
$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

11. Квадратные трехчлены
$$x^2+p_1x+q_1 \quad \text{и} \quad x^2+p_2x+q_2$$
не имеют корней. Имеет ли их квадратный трехчлен
$$x^2+\frac{p_1+p_2}{2}x+\frac{q_1+q_2}{2}?$$

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ В ИЗРАИЛЕ

В систему высшего образования Израиля входят университеты и неуниверситетские вузы. Университеты присваивают выпускникам все академические степени: бакалавра (3 года обучения), магистра (еще 2—3 года) и доктора (еще 2—3 года и защита диссертации). Другие вузы присуждают только степень бакалавра (но за 4 года обучения).

Для поступления на первый курс высшего учебного заведения необходимо: а) предъявить израильское свидетельство о среднем образовании или эквивалентный ему документ (например, российский аттестат о среднем образовании); б) сдать вступительный психометрический экзамен; в) владеть ивритом. (Если свидетельство о среднем образовании, полученное за рубежом, не признается эквивалентным израильскому, надо закончить один курс в иностранном вузе или подготовительные курсы в израильском университете.)

Психометрический экзамен, проводимый Израильским центром экзаменов и оценок, — это тест, который можно сдавать на родном языке (в том числе — на русском) сколько угодно раз, но не чаще одного раза в 10 месяцев. Результаты теста действительны в течение пяти лет со дня сдачи. Тест проверяет способности в трех областях: словесное мышление, количественное (математическое) мышление и английский язык. (Некоторые учебные заведения проводят дополнительные тесты или собеседования.)

Ниже приводятся координаты университетов Израиля и примеры вопросов и задач вступительного психометрического экзамена.

Университеты Израиля

1. Еврейский университет в Иерусалиме — тел.02-882111, 02-883184

2. Технион — Израильский политехнический институт — тел.04-292111, 04-293306

3. Тель-Авивский университет — тел.03-6408111, 03-6408317

4. Университет им.М.Бар-Илана — тел.03-5318111, 03-5318274

5. Хайфский университет — тел. 04-240111

6. Университет им.Д.Бен-Гуриона в Негеве — тел.07-461111, 07-461041, 07-461039

7. Научно-исследовательский институт им.Х.Вейцмана (здесь существует обучение только на вторую (магистра) и третью (доктора) академические степени) — тел.08-342111

8. Открытый университет Израиля — тел.03-6460460

Вступительный психометрический экзамен

Раздел 1: словесное мышление

В разделе даны различные категории вопросов. К каждому вопросу предлагаются четыре ответа. Следует выбрать *наиболее подходящий* ответ к каждому вопросу.

Слова и выражения

В следующих вопросах рассматриваются значения слов и выражений. Внимательно прочтите каждый вопрос и ответьте на него в соответствии с требованиями.

1. Слово, *противоположное* по смыслу слову **робость**, это —

(1) упрямство
(2) злодейство
(3) последовательность
(4) мужество

2. Выражение, *противоположное* по смыслу слову **недоговаривающий**, это —

(1) высказывающийся ясно
(2) говорящий неприятные вещи
(3) говорящий вежливо
(4) пустослов

3. Выражение, *противоположное* по смыслу слову **аскет**, это —
(1) любящий наслаждаться
(2) богатый
(3) счастливый
(4) уступчивый

4. Слово, *противоположное* по смыслу слову **нарочитый**, это —
(1) естественный
(2) доброжелательный
(3) спокойный
(4) заискивающий

5. Слово, *противоположное* по смыслу слову **уничижение**, это —
(1) объединение
(2) расщепление
(3) восхваление
(4) поддержка

6. Слово, *противоположное* по смыслу слову **мизантроп**, это —
(1) тактичный
(2) человеколюбивый
(3) корыстолюбивый
(4) удачливый

Аналогии

В каждом вопросе дана пара выделенных жирным шрифтом слов. Найдите соотношение между значениями этих двух слов и выберите из предлагаемых ответов ту пару слов, соотношение между которыми *наиболее похоже* на найденное Вами соотношение. Обратите внимание: порядок слов в паре имеет значение.

7. **лампа : тепло** —
(1) мотор : шум
(2) дерево : плод
(3) яйцо : курица
(4) машина : затор

8. **горячий : раскаленный** —
(1) планирование : организация
(2) желание : страсть
(3) несчастный : жалкий
(4) подчеркивание : точность

9. **писал : переписывался** —
(1) держал : передал
(2) уволил : уволился
(3) прижал: приблизился
(4) говорил : беседовал

10. **термометр : лекарство** —
(1) манометр : давление
(2) спидометр : тормоза
(3) весы : недоедание
(4) компас : север

11. **слухи : факты** —
(1) разговор : цитата
(2) сплетня : клевета
(3) гипотеза : закон природы
(4) инициатива : действие

12. **компьютер : мозг** —
(1) робот : рабочий
(2) очки : глаз
(3) усилитель : ухо
(4) автомобиль : шофер

Дополнение предложений

В каждом вопросе дано предложение, в котором не хватает нескольких слов. Следует дополнить предложение с помощью *наиболее подходящей* группы слов из четырех, данных после предложения.

13. Поскольку ты ____, ты, конечно, ____ с мнением, что в каждой вещи надо найти и ____ аспекты.
(1) пессимист; согласен; интересные
(2) оптимист; согласен; отрицательные
(3) пессимист; не согласен; положительные
(4) оптимист; не согласен; желательные

14. ____ в учебном материале — ____ условие для успешной сдачи экзамена; однако нужно также и ____ материала.
(1) Прекрасная осведомленность; необходимое; знание
(2) Прекрасная осведомленность; достаточное; понимание
(3) Умение ориентироваться; первое; определенное знание
(4) Умение ориентироваться; необходимое; понимание

15. На первый взгляд ____ различия между разными мифами, ____ если проникнуть под их сюжетное прикрытие, ____ в них ____, что человеку трудно заметить.
(1) существуют; даже; можно найти; много общего
(2) не существуют; однако; можно обнаружить; много общего
(3) редко встречаются; поэтому; можно найти; мало общего
(4) видны; однако; есть; нечто общее

Логика

16. Дано утверждение:
Шансы выиграть приз в лотерее близки к нулю, однако вследствие того, что цена лотерейного билета так низка, а приз так высок — стоит принять участие в розыгрыше.

Какое из следующих утверждений построено по тому же логическому принципу, что и вышеуказанное?
(1) Шансы на то, что дом сгорит, очень малы, поэтому нет смысла платить такие большие деньги страховой компании
(2) Шансы на то, что изобретут лекарство от насморка, очень низки, поэтому нет смысла тратить огромные суммы на исследования в этой области, а лучше выделить средства на лечение более серьезных болезней
(3) Пристегнуть ремень в автомобиле — действие, не требующее особых усилий и к тому же уменьшающее незначительные шансы пострадать в серьезной автокатастрофе. Поэтому необходимо пристегнуть ремень
(4) Несмотря на то, что шансы наших спортсменов на победу на Олимпиаде малы и расходы на их поездку велики, необходимо все же послать их, чтобы наша страна была достойно представлена

17. Даны два утверждения:
Утверждение «а»: головную боль можно вылечить только при помощи физических упражнений.
Утверждение «б»: лень препятствует заниматься любыми физическими упражнениями.

Какое из следующих предложений является выводом, вытекающим из комбинации обоих вышеуказанных утверждений одновременно?
(1) Ленивый человек всегда ощущает головную боль
(2) Для ленивого человека, страдающего головной болью, нельзя подобрать лечение
(3) Человек с головной болью, занявшийся физическими упражнениями, вылечится
(4) Человек, занимающийся физическими упражнениями, никогда не будет страдать головными болями

Раздел 2: количественное мышление

К каждому вопросу предлагаются четыре ответа. Следует выбрать *правильный* ответ.

Общие замечания, касающиеся раздела количественного мышления:

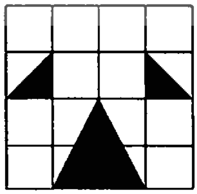
Чертежи, прилагаемые к некоторым вопросам, предназначены для того, чтобы помочь в их решении, но они необязательно начерчены в соответствующих масштабах. Не следует на основании одних только чертежей делать выводы о длине, величине угла и т.д. Выражения, содержащие знак корня, подразумевают только положительное его значение, в противном случае перед знаком корня будет стоять «±».

Вопросы и задачи

1. Число учительниц в некоей школе вдвое больше числа учителей в ней. Какое из приведенных чисел *не может быть* равно общему числу учительниц и учителей в ней?

(1) 18 (2) 21 (3) 25 (4) 27

2. На чертеже дан квадрат с площадью в 16 единиц. Какая часть площади квадрата закрашена черным?



(1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{5}{32}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{3}{16}$

3. 10 студентов сдали экзамен. Средняя оценка девяти из них равна 80. Оценка десятого — 0. Какова средняя оценка всех десяти студентов?

(1) 70 (2) 72 (3) 78 (4) 80

4. Буквы A и B представляют различные цифры. BA представляет число, состоящее из цифр A и B. Дано:

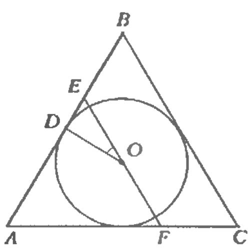
$$A \cdot A = BA$$

$$B + B = A$$

Чему равно A?

(1) 5 (2) 6 (3) 8 (4) 4

5. На чертеже дано: ABC — равносторонний треугольник . В него вписана окружность с центром O. EF



— прямая, параллельная BC и проходящая через центр круга O. DO — радиус круга. D — точка касания AB к кругу. Чему равен угол EOD (выделенный на чертеже дугой)?

(1) 30° (2) 45° (3) 60° (4) невозможно определить

6. В кувшине 3 красных шара, 5 черных и 8 желтых. Какова вероятность случайно вынуть желтый шар, а после него черный (не возвращая желтый в кувшин)?

(1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{5}{32}$ (3) $\frac{5}{6}$ (4) $\frac{13}{16}$

7. y больше x на 10% ($x \neq 0$). Каково соотношение между x и y?

(1) зависит от x (2) 1:10 (3) 9:10 (4) 10:11

8. Даны параллелепипед и конус. Известно, что: ширина параллелепипеда равна его длине; длина параллелепипеда в 2 раза больше, чем радиус конуса; высота параллелепипеда равна высоте конуса. Каково соотношение между объемом параллелепипеда и объемом конуса?

(1) $6:\pi$ (2) 1:12 (3) 1:6 (4) $12:\pi$

9. У какого из следующих чисел самое большое значение?

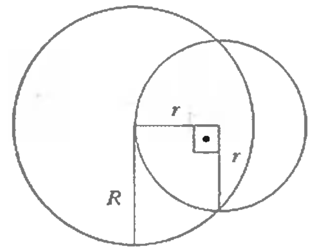
(1) 0,5 (2) $\sqrt{0,5}$ (3) $\sqrt[3]{0,5}$ (4) $(0,5)^3$

10. Дано: $2x^2 = 3y^2$. Во сколько раз увеличится y, если x увеличится в 2 раза?

(1) $\sqrt[3]{2}$ (2) $\sqrt[3]{4}$ (3) 8 (4) $\sqrt[3]{8}$

11. Радиус большого круга на чертеже — R. Радиус маленького круга — r. Каков общий внешний периметр всей фигуры?

(1) $\pi\left(\frac{3}{2}R + r\right)$ (2) $\pi\left(\frac{3}{4}R + \frac{1}{2}r\right)$ (3) $2\pi\left(\frac{3}{2}R + r\right)$ (4) $\frac{2\pi R}{3} + \pi r$



12. Средний возраст n братьев сегодня — x лет. Каков будет средний возраст n братьев через y лет?

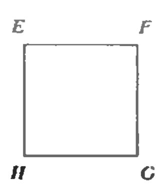
(1) $x + y$ (2) $x + ny$ (3) $x + \frac{y}{n}$ (4) $\frac{x + y}{n}$

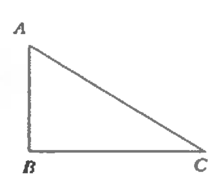
Количественные сравнения

Вопросы 13—18 составлены из пар выражений. В каждом вопросе одно из выражений находится в колонке A, а второе — в колонке $Б$. В третьей колонке иногда содержится дополнительная информация, относящаяся к паре выражений в колонках A и $Б$. Эта информация может оказаться необходимой для решения вопроса. Следует сравнить оба выражения с помощью дополнительной информации (если таковая имеется) и решить:

(1) выражение в колонке A больше .
(2) выражение в колонке $Б$ больше
(3) оба выражения равны между собой
(4) на основании имеющейся информации невозможно определить, каково соотношение между величинами двух выражений

Колонка А	*Колонка Б*	*Дополнительная информация*
13. Площадь круга с радиусом r см	Площадь квадрата со стороной $2r$ см	$\pi = 3{,}14$ (приблизительно)
14. $\frac{a}{b}$	$\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}}$	$b \neq 0$
15. Радиус окружности с площадью 64π см^2	Радиус окружности с периметром 16π см	
16. Вероятность вынуть, не глядя, черный шар из мешка, в котором 5 черных шаров и 4 белых	Вероятность вынуть, не глядя, белый шар из мешка, в котором 6 черных шаров и 5 белых	
17. $y + 2z$	$y - 2z$	$z < 0$ $0 < y$
18. $EH + HG + EF$, если дан следующий квадрат:	$AB + BC$, если дан следующий прямоугольный треугольник:	$AB = EH = X$ см $AC = 2X$ см





КУБОК УФЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

В 1995/96 учебном году в Уфе прошел очередной, третий по счету, розыгрыш Кубка города среди школьников по математике. В зачет этого соревнования вошли результаты Соросовской олимпиады, Турнира городов, городских командных олимпиад. По результатам Кубка подводятся личные итоги, называются лучшие учителя математики города Уфы, однако по духу и по основным результатам — это соревнование между школами, выявление лучшей между ними.

Победителями в этом году названы средняя школа 114, Первая уфимская политологическая гимназия и Республиканский башкирско-турецкий лицей.

Кубок с каждым годом приобретает все большую популярность — если в первый год в нем приняли активное участие около десятка школ, то в этом году соревнование стало по-настоящему массовым — команды почти всех средних учебных заведений Уфы выходили на старт тех или иных олимпиад.

Основа Кубка Уфы — городские командные олимпиады, которые в этом году прошли в параллелях 5–6, 7–8, 9, 10 и 11 классов. Особенность их в том, что задачи решаются не каждым школьником отдельно, а сборной командой школы, составленной из 3 человек. В начале соревнования (после ознакомления с правилами) предлагается задача и дается время (обычно от 5 до 10 минут) на ее решение. По истечении указанного времени листочки с ответами и краткими решениями собираются и рассказывается решение этой задачи. Затем предлагается новая задача, и все повторяется (обычно бывает до 10 задач). Пока участники решают очередную задачу, жюри проверяет решение предыдущей, и результат заносится на табло соревнований, что позволяет следить за ходом борьбы.

Уфимские городские олимпиады носят открытый характер — в них могут принять участие желающие из любого города Башкортостана и России. Так, в этом году наиболее успешно выступили гости — команда Белорецкой компьютерной школы, победившая в трех параллелях из пяти.

Аналогичные соревнования, видимо, можно проводить практически в любом населенном пункте, где есть хотя бы несколько школ. Это могут быть либо одноступенчатые олимпиады для маленьких городков, либо сложные многоступенчатые старты для крупных центров с развитым олимпиадным движением. Так, в Уфе приходится проводить городские олимпиады в два этапа: первый — районный и второй — собственно городской. Все участники Кубка разбиты на высшую и первую лиги, что обеспечивает интересную борьбу как среди лучших команд за места на пьедестале, так и среди тех, кто претендует на выход в высший эшелон.

Ниже приводятся некоторые задачи, предлагавшиеся на городских командных олимпиадах.

Задачи

1 (5 – 6 кл.). У Атоса на 10 ливров больше, чем у Портоса, а если Атос даст 15 ливров Арамису, то у Арамиса будет столько, сколько у Портоса. Смогут ли они втроем, сложившись, купить лошадь для д'Артаньяна за 40 ливров?

2 (5 – 6 кл.). Определите угол между часовой и минутной стрелками в 23 : 45.

3 (5 – 6 кл.). Известно, что доля блондинов среди голубоглазых больше, чем доля блондинов среди всех людей. Что больше — доля голубоглазых среди блондинов или доля голубоглазых среди всех людей?

4 (5 – 6 кл.). В клетках квадрата 3×3 стоят числа 1, ..., 9 так, что суммы по всем вертикалям, горизонталям и диагоналям одинаковы. Какие числа могут стоять в центральном квадрате?

5 (5 – 6 кл.). Автобусы отправляются с конечной остановки с интервалом в 1 минуту. Сколько встречных автобусов можно увидеть из окна, если доехать от одной конечной остановки до другой? Время в пути — 1 час.

6 (9 кл.). Решите уравнение

$$x^2-5x-4\sqrt{x}+13=0.$$

7 (9 кл.). Волк гонится за зайцем вниз по эскалатору (который движется вниз) и бежит в два раза быстрее зайца. Один из них пробежал 60 ступенек, другой — 40. Дежурный остановил эскалатор. Сколько ступенек на неподвижном эскалаторе?

8 (9кл.). Дано число 123456789101112... Какая цифра стоит на 1996-м месте?

9 (9 кл.). Вершина A квадрата $ABCD$ расположена в центре квадрата $MNPQ$, а сторона AB отсекает $1/5$ часть стороны MN. Найдите площадь пересечения квадратов, если $AB = 25$, $QP = 18$.

10 (9 кл.). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}=1, \\ y-\sqrt{z}=1, \\ z-\sqrt{x}=1. \end{cases}$$

11 (9 кл.). Найдите минимальное значение выражения

$$x^6+2x^4+2x^3+x^2+2x-1.$$

12 (10 кл.). Отрезки AB, BC, CD являются хордами одной окружности. Точки M, N, K — их середины соответственно. Известно, что $\angle CKN = 44^\circ$, $\angle KCN = 77^\circ$, $\angle MBN = 66^\circ$. Найдите $\angle NMB$.

13 (10 кл.). Найдите семизначное число, первая цифра которого равна количеству нулей в этом числе, вторая — количеству единиц, и т.д.

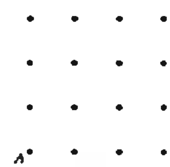
14 (10 кл.). Коля и Вася живут в одном доме. В каждом подъезде по 4 квартиры на этаже. Коля живет на пятом этаже в 83 квартире, Вася — на третьем в 169 квартире. Сколько этажей в доме?

15 (10 кл.). Упростите выражение

$$\sqrt{\sqrt{6}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}+4{,}5}.$$

16 (11 кл.). Переднее колесо велосипеда изнашивается через 2000 км, а заднее — через 3000 км. Какое максимальное расстояние можно проехать на одной паре колес?

17 (11 кл.). Даны точки, расположенные так, как показано на рисунке.



Сколько существует невырожденных треугольников (т.е. треугольников, у которых вершины не лежат на одной прямой) с вершинами в данных точках, одна из которых совпадает с A?

18 (11 кл.). Прямая DA касается окружности в точке A, а хорда BC параллельна DA. Прямые DB и DC вторично пересекают окружность в точках K и L. Докажите, что прямая KL делит отрезок DA пополам.

19 (11 кл.). Найдите остаток от деления $x^{1996}+x+1$ на x^2-1.

20 (11 кл.). Докажите, что $2n$ точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно попарно соединить n непересекающимися отрезками.

21 (11 кл.). Найдите

$$S_n = 1\cdot2+1\cdot3+\ldots+1\cdot n+ \\ +2\cdot3+\ldots+(n-1)\cdot n.$$

Публикацию подготовил
Ш.Цыганов

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

(см. «Квант» № 1)

1. Обозначим количество квартир в подъезде через x. Необходимо отдельно рассматривать случаи: 1) $x<9$; 2) $9 \le x<99$; 3) $99 \le x<999$ и т.д. Будем считать стоимость одной цифры равной одному рублю.

В первом случае стоимость дверных номеров во втором подъезде равна $9 - x$ — стоимости однозначных номеров, плюс $2(x-(9-x)) = 3x - 9$ — стоимости двузначных номеров. А в третьем подъезде в этом случае все номера будут двузначными и их стоимость равна $2x$. По условию $2x = (3x-9)(6/5)$, откуда $4x = 27$, что невозможно, так как x — целое число.

Во втором случае номера квартир во втором подъезде двузначные и трехзначные, а в третьем — трехзначные. Стоимость номеров во втором подъезде будет равна удвоенному количеству двузначных номеров, т.е. $2(99-x)$, плюс утроенное количество трехзначных номеров, т.е. $3(x-(99-x))$, и это должно составлять $6/5$ стоимости номеров в третьем подъезде, которая составляет $3x$. Итак, имеем

$$\frac{6}{5}\left(2(99-x)+3(x-(99-x))\right)=3x.$$

Отсюда получаем, что $x = 66$.

В общем случае, когда во втором подъезде номера n-значные и $(n+1)$-значные, а в третьем — $(n+1)$-значные, аналогично получаем, что

$$x=\frac{6\left(10^{n}-1\right)}{n+7}.$$

При $n=2$ мы получаем $x = 66$, а при $n = 3$ число x — не целое, при $n=4$ имеем $x = 5454$, при $n = 5$ число x вновь не целое, а при n больших пяти не будет выполняться очевидное условие $(6/5)n \le n+1$.

2. Заметим, что число РОЩА не превосходит числа 9876, а число ДУБ не меньше чем 102. Так как $9876:102 = 96{,}82\ldots$, то число ДУБов не больше, чем 96. Но $96\times102=9792$, $96\times103 = 9888$, $96\times104 = 9984$, для чисел больших 104 их произведение на 96 уже пятизначно. Значения 102, 103 и 104 не подходят, так как в полученных произведениях имеются одинаковые цифры. Значит, число ДУБов не больше 95. Это значение возможно: $103\times95 = 9785$.

3. Сумма углов равна 45°. Это хорошо видно из рисунка 1, в котором треугольники, опирающиеся на отрезок MN, передвинуты на другие отрезки основания квадрата (например, ΔMAN переходит в ΔPRQ).

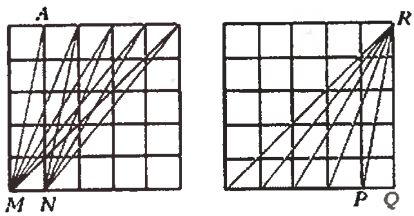


Рис. 1

4. Приказчик не сможет это сделать наверняка, поскольку он должен на чашки весов каждый раз класть поровну монет, и может случиться, что всякий раз весы окажутся в равновесии и поэтому взвешенные монеты будут уже розданы, а в кассе вновь окажется нечетное число монет. Так будет продолжаться до тех пор, пока не останется одна монета. Она и будет фальшивой, но ее не с чем сравнивать.

5. Пусть число лягушек, сваренных дедом Щукарем в понедельник, вторник, среду, четверг и пятницу, соответственно равны x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5. Тогда по условию $(x_1+x_2)=1{,}5(x_4+x_5)$, или $2(x_1+x_2)=3(x_4+x_5)$, откуда следует, что (x_1+x_2) делится на 3. Каждое из чисел x_n может принимать значение 1 или 2, поэтому сумма любых двух из них равняется либо $1+1=2$, либо $1+2=3$, либо $2+2=4$. Как видно, единственное возможное значение, делящееся на 3, — это 3. Поэтому $(x_1+x_2)=3$, и тогда $(x_4+x_5)=2$. Отсюда следует, что $x_4=x_5=1$. Так как по условию $x_1<x_5$, то получается $x_1<1$, но это невозможно, поскольку все x_n должны равняться 1 или 2. Противоречие!

Но оно преодолимо, поскольку в условии не сказано, что Щукарь начал работу именно в понедельник. Говорится лишь, что он работал пять дней подряд, причём в эти дни непременно должны входить упоминаемые в условии понедельник, пятница и вторник. Рассмотрев возможные случаи, получаем еще одну возможность: дед начал работу в пятницу. Тогда первые два дня — это пятница и суббота (и в течение этих двух дней было сварено 3 лягушки), а последние два дня — это понедельник и вторник (в течение которых сварилось две лягушки — по одной каждый день). Теперь противоречия нет: в пятницу сварены две лягушки, а в субботу — одна, т.е. в пятницу действительно больше, чем в понедельник. Сколько же лягушек дед-кулинар приготовил в воскресенье, сказать нельзя, но это и не требуется.

Итак, во вторник в супе оказалась одна лягушка.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» № 5 за 1996 г.)

6. В случае четного n все косточки домино могут быть выложены в одну цепочку. Такую укладку нетрудно осуществить. Если же n нечетно, то каждое из чисел от 0 до n встречается уже нечетное число раз. При составлении цепочки каждое число, кроме двух стоящих на концах цепочки, встречается четное число раз. Значит, останется не меньше чем $n-1$ число (заметим, что чисел от 0 до n ровно $n+1$). Поэтому останется не меньше $(n-1)/2$ косточек. Осталось посчитать общее число косточек и вычесть из него $(n-1)/2$. Общее количество косточек равно $(n+2)(n+1)/2$, поэтому искомое число равно $(n^2+2n+3)/2$. Необходимую расстановку этих косточек нетрудно осуществить.

7. Очевидно, что число 1 нельзя представить в виде суммы нескольких натуральных чисел, а любое другое натуральное нечетное число — можно. Действительно, $2k+1=k+(k+1)$. Перейдем к четным числам. Пусть четное число представимо в виде суммы последовательных чисел от n до m, тогда оно равно $(n+m)(m+1-n)/2$. Каждое из чисел $(n+m)$ и $(m+1-n)$ не меньше двух, и эти числа имеют разную четность, поэтому четное число, чтобы быть представленным в виде суммы последовательных чисел, должно иметь нечетный множитель, больший единицы. Отсюда следует, что степени числа 2 не могут быть представлены в указанном виде.

Покажем, что остальные четные числа представимы в виде суммы последовательных натуральных чисел. Представим четное число в виде $2^k(2p+1)$, где k и p — натуральные числа. Если $2^k > p$, то наше число представляется в виде $2p+1$ натурального числа, начиная с числа 2^k-p. Если же $2^k \le p$, то наше число представляется в виде 2^{k+1} последовательных натуральных чисел, начиная с числа $p-2^k+1$.

Итак, непредставимы лишь 1 и числа вида 2^n.

8. Возьмем круг, который разделен 18-ю диаметрами на 36 равных секторов, притом такой, что один из диаметров параллелен одной из сторон заданного 19-угольника. Но тогда каждая сторона многоугольника будет параллельна одному из диаметров, а так как сторон 19, а диаметров 18, то найдутся две стороны, параллельные одному диаметру и, следовательно, параллельные между собой.

9. «Кто старше: Вы или Белла?» — спросил у Даши журналист. Но опечатка превратила Беллу в Веру, поэтому из ответов Даши в опубликованном варианте задачи нельзя сделать однозначного вывода. Такой ответ для участников конкурса считается правильным.

Ответ на вопрос «Кто старше — Даша или Белла?» таков: Даша старше. Действительно, предположим, что Даша не старше Беллы, тогда из второго ее утверждения следует, что она моложе Гали. В таком случае из ее последнего утверждения следует, что она старше Ани. Теперь из третьего утверждения Даши получаем, что она не моложе Веры, а это противоречит ее первому утверждению.

10. а) Нет. Действительно, если книги стоят первоначально в порядке убывания, т.е. сначала самая большая, затем следующая по величине и т.д., то первая и третья никогда не будут сравнены между собой и поэтому из последовательности сравнений нельзя вывести решение о том, какая книга является самой большой.

б) Нет. Для того, чтобы сравнить все пары книг, следует произвести не менее $8\cdot 7/2=28$ сравнений, но при указанной процедуре после 12 сравнений(или раньше) сравниваемые книги начнут периодически повторяться.

в) Нет. Здесь удается в цепочке $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$, где A_k означает k-ю по величине книгу, осуществить лишь шесть сравнений из семи необходимых. При начальной расстановке $A_7A_8A_4A_3A_6A_2A_5A_1$ происходят сравнения всех A_k с A_{k+1}, кроме A_4 с A_5.

КАК ОДИН МЛАДШИЙ ШКОЛЬНИК ВСЮ СЕМЬЮ ОЗАДАЧИЛ

1. 120 лотосов. **2.** 28 флоринов. **3.** 28 учеников. **4.** 1 работа, если предположить, что в классе не может быть 84, 126,... учеников. **5.** Решение задачи I, II, IV способами ничем не отличается от решения исходной задачи. Для решения задачи III способом целесообразно привести дроби к *общему числителю*: $3/5=6/10$, $2/3=6/9$, тогда решение окажется аналогичным. В результате получим: у первого 30 орехов, у второго — 27 орехов.

КАК ДОКАЗАТЬ НЕРАВЕНСТВО

6. Введите новые переменные

$$\begin{cases}\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}=x,\\[2mm] \dfrac{a}{c}-\dfrac{b}{c}=y.\end{cases}$$

8. Функция $f(c)=\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}$ монотонно убывает при $c>0$; докажите, что $\dfrac{a}{1+a^2}\le\dfrac{1}{2}$.

9. Введите новые переменные

$$\begin{cases}x^2+y^2=a,\\ xy=b.\end{cases}$$

11. Функция

$$f(x)=(2x-1)a^2+\left(\frac{2}{x}-1\right)b^2+c^2$$

достигает минимума при $x=b/a$.

12. Продифференцируйте функцию

$$f(\alpha)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2(\alpha+\beta)-3/4$$

и исследуйте знак ее производной; $f'(\alpha)=0$ при $2\alpha+\beta=\pi$.

14. Введите обозначения

$$A=x_2+\ldots+x_n;\ B=x_2^{-1}+\ldots+x_n^{-1};\ x_1=x$$

и рассмотрите функцию $f(x)=(A+x)(B+1/x)$.

15. Докажите, что максимум левой части достигается при части переменных равных нулю и остальных переменных равных $a=\max(a_1,a_2,\ldots,a_n)$.

ТЕПЛОЕМКОСТЬ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

1. $p=3{,}5\cdot 10^3$ Па. **2.** $C=2R$. **3.** $A=-R(T_2-T_1)$.

4. $C=R\left(\dfrac{5}{2}-\dfrac{V}{V_0}\right)$. **5.** $\alpha=3/2$.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ.М.В.ЛОМОНОСОВА

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $(-1)^n\arcsin\left(\sqrt{5}/3\right)+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

2. $x\ge\log_{2/3}\sqrt{17}$. *Указание.* Выполните замену $t=(2/3)^x$.

3. $56\sqrt{2}$. *Указание.* Треугольник ALO — прямоугольный, поэтому AO — диаметр описанной около него окружности, следовательно, угол AKO — прямой (если точки O и K различны), а точка K — середина AC. Если точки O и K совпадают, то снова $AK=KC$. Итак, KL — средняя линия в треугольнике ABC. Отсюда $AC=14$, $BC=16$. Если $\angle BCA$ — острый, то $\angle BCA=\angle LKA=\angle LOA=45°$, если $\angle BCA$ — тупой, то $\angle LKA=\angle BCA=135°$ (равенство $\angle C=90°$ невозможно, так как точки L и O различны по условию).

4. $(\operatorname{arctg}1/4;\ y)$, где $y\ge\left(2\left(1-\operatorname{arctg}1/4-\pi/4\right)^2\right)^{-1/2}$. *Указание.* Система равносильна следующей:

$$\begin{cases}\log_2\sin x-\log_2\cos x=-2,\\ y>0,\\ (x-\pi/4)^2+1/(2y^2)\le 1.\end{cases}$$

(Если $\log_2\cos x>\log_2 2y$, то $2y<1$ и $1/(2y^2)>1$, что противоречит второму уравнению системы.) Из решений уравнения $\operatorname{tg}x=1/4$ системе удовлетворяет лишь $x=\operatorname{arctg}1/4$.

5. $\dfrac{3}{4}\sqrt{7}+\dfrac{11}{4}\sqrt{3}$. *Решение.* Сечением сферы плоскостью SAC является окружность с центром O', касающаяся лучей AS и

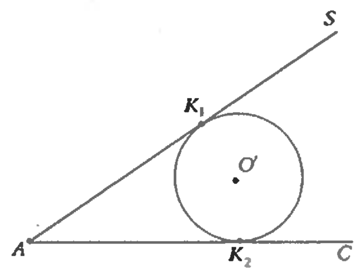


Рис. 2

AC в точках K_1 и K_2 соответственно (рис.2). Обозначим через T основание высоты пирамиды, опущенной из вершины S, а через O и R — центр и радиус сферы. Середину отрезка BC обозначим P. Положим $AC=x$. Из равенства $\angle TSP=\angle O'K_2O$ получаем

$$\sin\angle O'K_2O=\frac{TP}{SP}=\frac{\frac{1}{3}AP}{\frac{1}{2}BC\cdot\operatorname{tg}\angle SBC}=\frac{\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}x}{\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}x}=\frac{1}{2},$$

откуда

$$O'K_2=OK_2\cos\angle O'K_2O=\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}.$$

Положим $\angle SAC=\alpha$. Так как

$$\cos\alpha=1/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\sqrt{3}/\sqrt{7},$$

то из $\Delta AO'K_2$

$$AK_2=\frac{O'K_2}{\operatorname{tg}\alpha/2}=O'K_2\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{3}{4}\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right).$$

Спроектируем пирамиду и сферу на плоскость ASP. Через O_1 обозначим проекцию центра сферы, а через L_1 и L_2 —

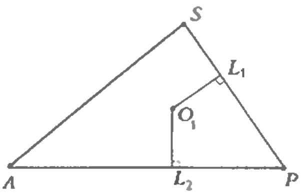


Рис. 3

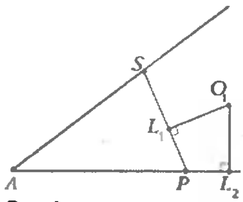


Рис. 4

проекции точек касания сферы с плоскостью SBC и с плоскостью ABC соответственно.

$$AL_2 = AK_2\cos\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{8}\left(\sqrt{21}+3\right).$$

В зависимости от расположения центра сферы относительно плоскости SBC получим два случая (рис.3 и 4). На рисунке 3 $AP > AL_2$, а на рисунке 4 — наоборот, $AP < AL_2$. Поэтому из равенства

$$AC = AP\Big/\cos\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}}AP$$

следует, что в случае, изображеном на рисунке 3, искомый отрезок AC больше.

Имеем: $O_1L_1 \perp SP$, $O_1L_2 \perp AP$, $O_1L_1 = O_1L_2 = R$, $\angle SPA = \frac{\pi}{2} - \angle TSP = \frac{\pi}{3}$.

Поэтому

$$L_2P = O_1L_2\Big/\operatorname{tg}\frac{\angle SPA}{2} = 3,$$

$$AP = AL_2 + L_2P = \frac{3}{8}\left(\sqrt{2}+3\right)+3 = \frac{3}{8}\sqrt{21}+\frac{33}{8},$$

$$AC = \frac{2}{\sqrt{3}}AP - \frac{3}{4}\sqrt{7}+\frac{11}{4}\sqrt{3}.$$

6. $a = \pm\sqrt{2}$; $a = \pm\left(1+\sqrt{15}\right)/4$. *Указание.* Положив $u = x^2 - x + 2$, приводим уравнение к виду $(u-a^2)^2 = 4a^2x^2$, что равносильно совокупности двух уравнений $u - a^2 = 2ax$, $u - a^2 = -2ax$, или совокупности

$$\left[\begin{aligned}&x^2-(2a+1)x+2-a^2=0,\\&x^2+(2a-1)x+2-a^2=0.\end{aligned}\right.$$

Совокупность двух квадратных уравнений может иметь три корня в трех случаях: когда одно из них имеет два корня, а другое — один, не совпадающий ни с одним из корней первого; или когда каждое из них имеет два корня, причем один из них является общим для обоих уравнений.

Вариант 2

1. 70. *Указание.* $b^3+c^3 = ad(a+d) = 70$.
2. 5 литров.
3. $\log_5\frac{(a-1)\pm\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$ при $a > 11$; 1 при $a = 11$; нет решений при $-\frac{3}{2}\le a<11$; $\log_5\frac{a-1+\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$ при $a<-\frac{3}{2}$. Единственное решение при $a<-\frac{3}{2}$ и $a = 11$. *Указание.* Пусть $t = 5^x$. Задача сводится к отысканию положительных корней уравнения

$$t^2-(a-c)t+2a+3=0.$$

4. $\left[-\left(5+2\sqrt{3}\right)/26;0\right]$. *Указание.* Ясно, что $-\frac{1}{3}\le x\le 0$. Поскольку $\arccos(x+1)\le\pi/2$, а $\frac{7\pi}{6}-\arccos 3x\ge\pi/2$ при $-\frac{1}{6}\le x\le 0$, неравенство заведомо справедливо на промежутке $\left[-\frac{1}{6};0\right]$. При $-\frac{1}{3}\le x<-\frac{1}{6}$ получаем неравенство

$$\sin\left(\arcsin(x+1)\right)\le\sin(7\pi/6-\arccos 3x),$$

или

$$5x+2\le\sqrt{3-27x^2}.$$

5. $\left(\left(217-5\sqrt{415}\right)/29;\left(180+2\sqrt{415}\right)/29\right)$. *Указание.* Второе уравнение означает, что точка $(x;y)$ лежит на отрезке AB, где $A = (8;6)$, $B = (-2;10)$, длиной $2\sqrt{29} = \sqrt{10^2+4^2}$. Отсюда следует, что $2x + 5y = 46$. Из двух точек пересечения этой прямой с окружностью, задаваемой первым уравнением, отрезку AB принадлежит только одна.

6. $AM = 1$ или $AM = 2$. *Указание.* Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, R_1 и R_2 — их радиусы, $AB = a$, S — точка пересечения прямых AB и O_1O_2 (ясно, что $AS = a/2$, $BS = a/2$, $AB\perp O_1O_2$). Пусть точка T — проекция точки M на прямую O_1O_2, $MT = c$, $AM = x$, y и z — расстояния от точки O_1 до точек S и T соответственно, взятые со знаком «+», если точки S и T лежат на луче O_1O_2, и со знаком «−» в противном случае. Из теоремы Пифагора получаем

$$\begin{cases}y^2+\dfrac{a^2}{4}=R_1^2,\\(b-y)^2+\dfrac{a^2}{4}=R_2^2,\end{cases}\qquad\begin{cases}z^2+c^2=O_1M^2,\\(b-z)^2+c^2=O_2M^2,\end{cases}$$

откуда

$$y=\frac{R_1^2-R_2^2+b^2}{2b},\quad z=\frac{O_1M^2-O_2M^2+b^2}{2b}.$$

Кроме того,

$$O_1M^2=R_1^2-CM\cdot MD,\quad O_2M^2=R_2^2-EM\cdot MF$$

и, по условию, $CM = a/3$, $MD = 2a/3$, $EM = a/9$, поэтому $CM\cdot MD = EM\cdot MF = 2a^2/9$. Это значит, что $y = z$, т.е. точка M лежит на отрезке AB. Тогда $2x = \frac{2a^2}{9}$, $x + 2 = a$, откуда либо $x = 2$, либо $x = 4$.

Вариант 3

1. $\frac{\pi}{10}(2n+1)$, $\frac{\pi}{6}(6n\pm1)$, $n\in\mathbf{Z}$.
2. $(-2;0)\cup(2;3)$.
3. 2. *Указание.* Выполните замену $t = 5^{x/2}$.
4. $\frac{25}{8}$. *Указание.* Окружность описана около равнобедренного треугольника LMK.
5. $(-2;-2)$, $(-2;2)$.
6. $m^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}$.
7. $c\sqrt{2+\frac{c}{b}}$. *Указание.* Пусть $\angle A = \alpha$, $AD = l$. Из ΔADC получаем $l = 2c\cos\frac{\alpha}{2}$. Далее запишите отношение отрезков, на которые делится сторона BC биссектрисой AD.
8. 3 решения при $a < -1$, $a = 0$ и $a > 1$; 5 решений при $a = \pm1$; 7 решений при $-1 < a < 1$, $a \ne 0$. *Указание.* Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\sin x(\sin 2x-a)=0\\\cos x\ne 0,\ 0\le x\le 2\pi.\end{cases}$$

Вариант 4

1. $\frac{\pi}{6}(2n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$. **2.** $(4;+\infty)$.
3. $(32;\ 2)$. *Указание.* В первом уравнении выполните замену $z = \log_y x$.
4. 9. *Указание.* Докажите, что $EC/BC = DC/AC = 1/3$.
5. 9. *Указание.* Равенство приводится к виду $|u| + u = -(|v| + v)$, где $u = x^2 - 15x + 44$, $v = 1 + \cos(\pi\sqrt{x})$, откуда следует, что $|u| + u = 0$ и $|v| + v = 0$, но в нашей задаче это возможно только при $u = v = 0$.

Вариант 5

1. πn, $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $n,k\in Z$.

2. 1; 13. *Указание.* Выполните замену $t=|x-7|$.
3. $(-77;\ 3)$.
4. $48\pi\sqrt{11}$. *Указание.* Угол $AOC=60°$ (O — центр основания конуса).
5. (1; 6); (1; 7); (2; 7). *Указание.* Требуется найти все точки с целыми координатами, расположенные в криволинейном треугольнике (рис.5).

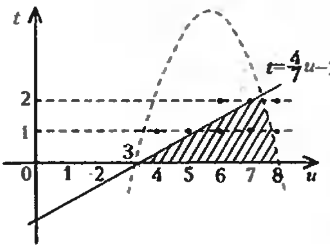


Рис. 5

Вариант 6

1. 47. **2.** $\left(-2;-\sqrt{3}/3\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3};2\right)$.

3. 2; 1/8. *Указание.* Прологарифмируйте уравнение по основанию 4 и выполните замену $t=\log_4 x$.
4. 0; π; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$. *Указание.* Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}x+\sin x=x-\sin^2 x,\\ x+\sin x\ge 0,\\ -2\pi<x<2\pi.\end{cases}$$

Неравенство $x+\sin x\ge 0$ выполняется при $x\ge 0$ и неверно при всех $x<0$, так как функция $\varphi(x)=\sin x+x$ возрастает ($\varphi'(x)=1+\cos x\ge 0$, а $\varphi(0)=0$).
5. $4\sqrt{3}$. *Указание.* Из теоремы синусов находим $\sin\angle BAD=\sin\angle BAC$, затем $\sin\angle BAD$ и, наконец, BD.
6. 2; $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$. *Указание.* Решая неравенство, удобно выполнить замену $y=\sqrt{x+a}$.

Вариант 7

1. 18. **2.** −4 и −1. **3.** $\frac{\pi}{14}$; $\frac{3\pi}{14}$; $\frac{5\pi}{14}$; $\frac{9\pi}{14}$; $\frac{11\pi}{14}$; $\frac{13\pi}{14}$.
4. $(-\infty;-27)\cup\left(-1;-\frac{1}{27}\right)$.
5. (0; 0), (5; 1), $\left(-\frac{10}{3};\frac{2}{3}\right)$. *Указание.* Если $x=0$, то и $y=0$. При $x\ne 0$, $y\ne 0$ поделите одно уравнение на другое и выполните замену $t=\frac{x}{y}$.
6. $\frac{1}{15}$. **7.** 108/5.
8. $a=-1$. *Указание.* При $b=0$ получаем $a^2=1$. При $a=1$ решения существуют не при всех b. Если $a=-1$, при любом b решением будет $x=0$.

Вариант 8

1. −6.
2. 7/2. *Указание.* Пусть $f(1)=f(0)=f(-1)=f(2)=f\left(\frac{10}{3}\right)=x$, тогда

$$\begin{cases}x^2-5x+\frac{21}{4}=0,\\ x^2-x-\frac{35}{4}=0.\end{cases}$$

3. $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$.
4. $R\left(2\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)$. *Указание.* Из условия следует, что либо $\sin(\angle A-\angle B)=0$, либо $\sin(\angle B+\angle A)=1$. Последнее равенство невозможно (треугольник — не прямоугольный). Из первого равенства следует, что $\angle A=\angle B=\frac{\pi}{8}$, $\angle C=\frac{3\pi}{4}$.
5. 1) $a=2$; $b\notin\left\{\frac{1}{2};1;2\right\}$, если $a\ne 2$, $b=-1$.
2) $\frac{3\pm\sqrt{7}}{2}$.
Указание. 1) Условие коллинеарности векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$ при $a=2$ дает систему

$$\begin{cases}1-2b\ne b-2,\\ 1-2b\ne 0,\\ b-2\ne 0,\end{cases}$$

а при $a\ne 2$ условия $b\ne 0$, $1-2b=b(b-2)$, т.е. $b=1$ или $b=-1$. Но при $b=1$ векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ равны, а при $b=-1$ — противоположны.
2) Условие перпендикулярности, $(\vec{u},\vec{v})=0$, приводит к уравнению $(a-2)(2a^2-6a+1)=0$.

Вариант 9

1. $[-4;-1)\cup(1;2]$.
2. $(-1;\ 1)$.
3. 11000 тыс. р. и 12600 тыс. р. *Указание.* Следует выяснить, в каких пределах меняется величина $S=100(4m+6n)$ при условии $12m+15n=321$, где $m,n\in N$ — количества изделий первого и второго типа соответственно.
4. πn, $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $n,k\in Z$.
5. 5. *Указание.* Пусть AO пересекает окружность радиусом R в точках D и E (D — ближе к A, чем E). Тогда $AB\cdot AC=(AO-R)(AO+R)$.
6. $p=6$. *Указание.* Фигура, заданная неравенством, — параллелограмм с центром в точке $(-1;\ 2)$.

Вариант 10

1. $(-2;\ -2)$. **2.** $\left(\frac{3}{4};1\right)$. **3.** $x=\frac{\pi}{3}+4\pi k$, $k\in Z$.
4. 10500 тыс. р. и 12600 тыс. р.
5. $BL=3\sqrt{2}$. *Указание.* Введите прямоугольную систему координат, положив $A=A(0;\ 0)$, $C=C(8;\ 0)$, $B=B(x;\ y)$, где $y>0$.
6. $\frac{5}{2}\pi<a\le\frac{7\pi}{2}$. *Указание.* При любом $a>0$ заданная фигура является многоугольником, симметричным относительно каждой из осей Ox и Oy. Часть границы этого многоугольника, содержащаяся в области $x\ge 0$, $y\ge 0$, является графиком

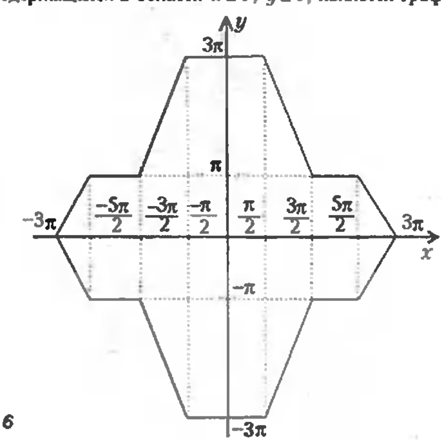


Рис. 6

функции $y = a - x + \arcsin\sin(a-x)$ при $0 \le x \le a$. Проследите, как меняется этот график при увеличении a. На рисунке 6 показана фигура, соответствующая случаю $a = 3\pi$.

Вариант 11

1. 0.

2. $\left[-6;3-\sqrt{3}\right)\cup\left(3+\sqrt{3};12\right]$.

3. $(-\infty;+\infty)$. *Указание.* Подкоренное выражение приводится к виду $3\cos4x - \sin4x + 5 - \sqrt{3}$, а так как $|3\cos4x-\sin4x| \le \sqrt{10}$ и $5-\sqrt{3}-\sqrt{10} > 0$, под корнем при любом x стоит положительное число.

4. $7/3\sqrt{3}$. *Указание.* Периметр треугольника ABC равен сумме отрезков касательных к окружности, проведенных из точки A.

5. $\frac{2}{5}$. *Указание.* Если $a\ne0$, а функция f — периодическая с периодом T, то $f(T) = f(0) = 1$, т.е. $\cos(a\pi T)\cos\left(\left(t_1^3+t_2^3\right)\pi T\right) = 1$, но тогда $|\cos a\pi T| = \left|\cos\left(t_1^3+t_2^3\right)\pi T\right| = 1$, следовательно, $a\pi T = \pi n$, $n\in \mathbf{Z}$, $\left(t_1^3+t_2^3\right)\pi T = \pi k$, $k\in \mathbf{Z}$. Отсюда следует, что $\frac{t_1^3+t_2^3}{a} = \frac{k}{n}$. Таким образом, отношение $\left(t_1^3+t_2^3\right):a$ должно быть рациональным при любом $a\ne0$. Это возможно только, если $t_1^3+t_2^3=0$. С другой стороны, если последнее равенство выполнено, то функция $f(x)$ периодична. Итак, $t_1=-t_2$, при этом $b=\frac{2}{5}$.

Вариант 12

1. $(-\infty;\log_2 5)$.

2. 16. *Указание.* Фигура — треугольник с вершинами $A(4;-5)$, $B(0;-1)$; $C(0;3)$.

3. $\left[-6;-\frac{11}{6}\pi\right)\cup\left(-\frac{11}{6}\pi;-4\right)\cup\left(2;\frac{5\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6};6\right]$.

4. $\{-2\}\cup[-1;7)$.

5. $\arccos\left(-1/\sqrt{13}\right)$. *Указание.* Пусть $BD=x$, $BE=2y$. Тогда $AD=7y$, $EC=2x$ и по теореме об отрезках секущих $x(7y+x)=2y(2x+2y)$, откуда $x=y$. Примените теорему косинусов для треугольника BDC.

6. $(7{,}5;8)\cup(12;+\infty)$. *Указание.* При $\frac{2a-15}{2}>1$, т.е. при $a>10$, должно при всех x выполняться неравенство

$$\frac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+a-5}{5}>1,$$

что возможно тогда и только тогда, когда

$$\frac{-2+a-5}{2}>1,$$

т.е. при $a>12$. При $0<\frac{2a-15}{2}<1$ рассуждение аналогично.

ФИЗИКА

Физический факультет

1. Обозначим действующую на ящик со стороны веревки силу через $\vec{F}$ (рис.7). Поскольку ящик должен двигаться равномерно, сумма всех действующих на ящик сил: силы $\vec{F}$, силы тяжести $M\vec{g}$ и силы реакции опоры, которую, как обычно, разложим на две составляющие — силу нормальной реакции $\vec{N}$ и силу трения $\vec{F}_{тр}$, должна быть равна нулю. Отсюда

$$N = Mg\cos\alpha - F\sin\beta,$$

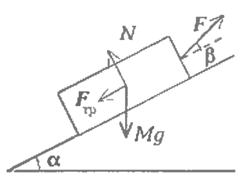


Рис. 7

или, учитывая, что сила сухого трения скольжения равна максимальной силе сухого трения покоя $F_{тр} = \mu N$,

$$Mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha) = F(\mu\sin\beta+\cos\beta)$$

где β — искомый угол между наклонной плоскостью и веревкой. Если ввести вспомогательный угол γ, определяемый соотношением $\operatorname{ctg}\gamma = \mu$, то из предыдущего уравнения следует

$$F = Mg\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\mu\sin\beta+\cos\beta} = Mg\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\sqrt{1+\mu^2}\sin(\beta+\gamma)}.$$

Поскольку минимальной величина F будет при $\sin(\beta+\gamma)=1$, искомый угол

$$\beta = \operatorname{arctg}\mu.$$

2. Двигатели ракеты совершают работу над выбрасываемыми газами, увеличивая их кинетическую энергию. Считая, что в единицу времени из двигателей выбрасывается масса газа μ и все частицы газа имеют одинаковые скорости v, мощность двигателей ракеты $N = \mu v^2/2$. Поскольку сила тяги двигателей (реактивная сила) равна $F = -\mu v$, а условие зависания ракеты имеет вид $mg - F = 0$, получим $N = mgv/2$. Отсюда искомая скорость

$$v = \frac{2N}{mg}.$$

3. Выберем систему координат XY так, как показано на рисунке 8. Поскольку нить нерастяжима, отрезки нитей, не

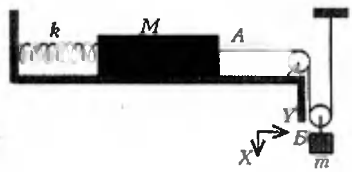


Рис. 8

лежащие на блоках, либо вертикальны, либо горизонтальны, а блоки представляют из себя цилиндры, которые могут вращаться вокруг своих осей, то можно считать, что после начала движения $y = 2x$, где y — координата точки A бруска, а x — координата точки $Б$ кубика. Отсюда следует, что скорости указанных точек связаны соотношением $v_y = -2v_x$. При прохождении положения статического равновесия скорости тел максимальны и, согласно закону сохранения энергии, должны удовлетворять уравнению

$$\frac{ky_p^2}{2}+\frac{Mv_{ym}^2}{2}+\frac{mv_{xm}^2}{2}=mgx_p,$$

где координата y_p точки A равна $mg/(2k)$. Отсюда найдем искомую скорость:

$$v_{ym} = \frac{mg}{\sqrt{k(4M+m)}}.$$

4. Давление p идеального газа, занимаемый им объем V и его абсолютная температура T, согласно уравнению Клапейрона—Менделеева, должны удовлетворять соотношению $pV = BT$, где величина B равна произведению газовой постоянной на число молей газа и при рассматриваемом процессе должна оставаться постоянной. Если давление и объем газа в исходном состоянии обозначить p_0 и V_0 соответственно, то зависимость давления газа от занимаемого им объема можно представить в виде $p = p_0 - a(V-V_0)$, где a — положительная постоянная величина, определяющая скорость изменения давления газа при изменении его объема. Отсюда следует, что температура газа T является квадратичной функцией занимаемого газом объема:

$$BT = (p_0+aV_0)V - aV^2.$$

При построении графика этой зависимости (рис.9) было учтено, что температура газа в исходном и конечном состояниях одна и та же (произведения давления газа на занимаемый им объем в этих состояниях равны). Из полученной зависимости и приведенного графика видно, что при темпера-

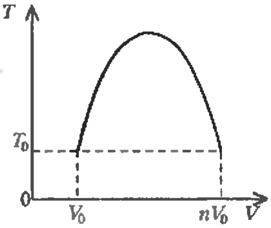


Рис. 9

турах, меньших максимальной T_m, газ может занимать два разных объема

$$V_{1,2}=\frac{p_0+aV_0\pm\sqrt{(p_0+aV_0)^2-4aBT}}{2a},$$

величины которых стремятся друг к другу по мере приближения температуры газа к максимальной. Следовательно, искомая температура равна

$$T_m=\frac{(p_0+aV_0)^2}{4aB}.$$

Учитывая, что в конечном состоянии давление газа в n раз меньше, а его объем во столько же раз больше, чем в исходном состоянии, получим $a=p_0/(nV_0)$. Подставляя это значение в предыдущее выражение и принимая $B=p_0V_0/T_0$, найдем

$$T_m=\frac{(n+1)^2T_0}{4n}=\frac{9T_0}{8}.$$

5. После открытия крана сухой воздух начнет перетекать во второй баллон, а пары воды — в первый. При этом будет происходить и испарение воды. В состоянии термодинамического равновесия парциальные давления паров воды и воздуха в обоих баллонах должны быть одинаковыми. Предположим, что вся вода, находившаяся во втором баллоне, испарилась. Тогда, полагая, как обычно, что к ненасыщенным парам применимо уравнение Клапейрона—Менделеева, можно рассчитать парциальное давление паров воды в баллонах:

$$p_в=\frac{mRT}{2MV}\approx 51 \text{ мм рт.ст.}$$

Поскольку $p_в>p_н$, испариться может лишь часть находящейся в баллоне воды. Отсюда (по-прежнему пренебрегая объемом воды) получим, что в баллонах установится давление

$$p_к=\frac{p}{2}+p_н=395 \text{ мм рт. ст.} \approx 53 \text{ кПа}.$$

6. Между проводящей пластиной и обращенной к ней поверхностью металлической плоскости при наличии разности потенциалов между ними должно существовать электрическое поле и, следовательно, на пластинах и указанных поверхностях плоскости должны находиться электрические заряды. Учитывая, что линии напряженности электростатического поля, создаваемого зарядами одной из пластин, не могут пройти через металлическую плоскость на другую пластину, для расчета величин этих зарядов пластины и плоскость можно рассматривать как два конденсатора, у которых одна обкладка является общей. Поскольку линейные размеры пластин много больше расстояния между ними, эти конденсаторы можно считать плоскими. Будем полагать (поскольку противное не оговорено в условии), что пластины и плоскость находятся в вакууме. Тогда емкость первого конденсатора равна $C_1=\varepsilon_0S/a$, а второго — $C_2=\varepsilon_0S/(d-a)$, где ε_0 — электрическая постоянная. Линии напряженности электрического поля, заканчивающиеся на первой пластине, могут начинаться только на обращенной к ней поверхности плоскости, а начинающиеся на второй пластине — заканчиваться на обращенной к ней поверхности плоскости. Следовательно, заряд плоскости $Q=q_1-q_2$, где q_1 и q_2 — заряды первого и второго конденсаторов. Окончательно

$$Q=q_1-q_2=\varphi(C_1-C_2)=\varphi\varepsilon_0S\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{d-a}\right).$$

7. Коэффициент полезного действия системы по определению равен отношению полезной мощности (мощности, выделяющейся на резисторе) к затрачиваемой (мощности, развиваемой сторонними силами источника):

$$\eta=\frac{I^2R}{I^2(r+R)}=\frac{R}{r+R},$$

где I — ток, текущий в системе, r — внутреннее сопротивление источника, а R — сопротивление резистора. Выделяющаяся на резисторе мощность равна

$$P=\frac{\mathcal{E}^2R}{(r+R)^2}=\frac{\mathcal{E}^2\eta(1-\eta)}{r},$$

где $\mathcal{E}$ — ЭДС батареи. Из полученного выражения следует, что при подключении к данному источнику другого резистора отношения выделяющихся на резисторах мощностей и КПД систем должны удовлетворять соотношению

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{\eta_2(1-\eta_2)}{\eta_1(1-\eta_1)}.$$

Отсюда находим искомый КПД:

$$\eta_2=\frac{1\pm\sqrt{1-4P_2\eta_1(1-\eta_1)/P_1}}{2}.$$

Подставляя в это выражение данные из условия, получим, что задача имеет два решения: КПД равен либо 0,75, либо 0,25. Отметим, что в первом случае сопротивление подключаемого резистора больше, а во втором случае — меньше внутреннего сопротивления источника.

8. Ясно, что решение задачи может зависеть от того, какой заряд имел конденсатор перед подключением источника. Поскольку противное не оговорено в условии, будем считать, что конденсатор первоначально не был заряжен. Тогда, если диод включен в цепь в непроводящем состоянии, ток в цепи будет отсутствовать. Следовательно, заряд конденсатора будет оставаться равным нулю. При противоположной полярности включения диода он будет некоторое время находиться в проводящем состоянии. Поскольку прямое сопротивление диода по условию можно считать равным нулю, законы изменения тока в данной цепи и в такой же цепи, но не содержащей диода, должны быть одинаковыми до тех пор, пока направление тока не начнет изменяться. Учитывая, что вплоть до этого момента заряд конденсатора монотонно увеличивается, а сила тока в цепи изменяется непрерывно и в момент изменения направления ток в цепи должен обратиться в нуль, можно утверждать, что в этот момент энергия магнитного поля станет равной нулю, а источник к этому моменту совершит работу, равную энергии, накопленной конденсатором (поскольку цепь не обладает омическим сопротивлением). При этом, как обычно, мы пренебрегаем и потерями на излучение электромагнитной энергии. Если обозначить величину протекшего к указанному моменту заряда q, а напряжение между обкладками конденсатора U, то получим $\mathcal{E}q=Uq/2$. Таким образом, в указанный момент времени напряжение между обкладками конденсатора должно стать равным $2\mathcal{E}$. Итак, искомое напряжение между обкладками конденсатора равно либо нулю, либо $2\mathcal{E}$.

9. На рисунке 10 показан ход приосевого луча A, падающего на плоский торец стеклянной палочки, и луча B, падающего на

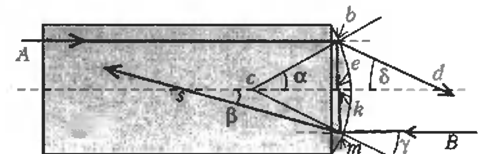


Рис. 10

сферический торец (точка c — центр кривизны сферического торца палочки). Если радиус кривизны сферического торца обозначить R и падающие на палочку световые пучки считать узкими, то все изображенные на рисунке углы следует считать малыми. Тогда из треугольников cbe и dbe, а также smk и cmk получим $R\alpha = a_1\delta$ и $R\gamma = a_2\beta$. Из закона преломления следует, что $\alpha + \delta = n\alpha$ и $\gamma - \beta = \gamma/n$, где n — показатель преломления стекла. Подставляя эти соотношения в предыдущие два уравнения, найдем искомый показатель преломления: $n = a_2/a_1$.

10. Падающий на линзу параллельный пучок после преломления собирается в точке пересечения фокальной плоскости линзы и побочной оптической оси, параллельной оси пучка. С точки зрения волновой теории, это означает, что все приходящие сюда световые лучи имеют одинаковую фазу, и поэтому здесь наблюдается интерференционный максимум. Из сказанного следует, что центральный максимум II_m второго светового пучка будет располагаться на расстоянии $F\mathrm{tg}\alpha$ от главной оптической оси линзы в ее фокальной плоскости (рис.11). Для того чтобы в этой точке находился ближайший к центральному максимуму I_m первого пучка минимум, должно выполняться условие $b\sin\alpha = \lambda$, так как в

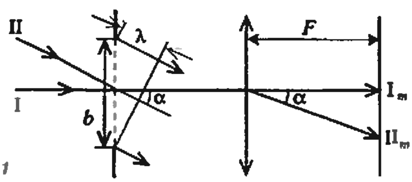


Рис. 11

этом случае одна половина щели будет «гасить» другую, поскольку разность хода для лучей, проходящих через точки щели, находящиеся на расстоянии $b/2$ друг от друга, равна $\lambda/2$. Если считать, что искомый угол α мал, то получим $\alpha = \lambda/b = 5\cdot10^{-4}$ рад. Найденное значение, очевидно, оправдывает сделанное выше предположение.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Пусть T — натяжение нити, l — ее длина (рис.12). Тогда $mv^2/R = T\sin\alpha$, $mg = T\cos\alpha$, $R = l\sin\alpha$, $E_k = \frac{mv^2}{2} = mgl\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$. Отсюда

$$\frac{E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{\sin^2\alpha_2\cos\alpha_1}{\sin^2\alpha_1\cos\alpha_2} = \sqrt{6} \approx 2{,}45.$$

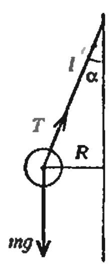


Рис. 12

2. В нижней точке траектории скорость шарика массой m_1 равна $v_0 = \sqrt{2gL}$. При упругом ударе выполняются законы сохранения кинетической энергии:

$$\frac{m_1v_0^2}{2} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}$$

и импульса:

$$m_1v_0 = m_1v_1 + m_2v_2.$$

Отсюда находим

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_0.$$

Для первого шарика после удара $m_1v_1^2/2 = m_1gh$, откуда

$$h = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 L = 25\text{ см}.$$

3. В верхней точке траектории скорость гранаты $v = v_0\cos\alpha$. Пусть v_1 и v_2 — скорости осколков. Из законов сохранения импульса:

$$mv_0\cos\alpha = \frac{m}{2}v_1 + \frac{m}{2}v_2$$

и энергии:

$$\frac{mv_0^2\cos^2\alpha}{2} + E = \frac{m}{4}v_1^2 + \frac{m}{4}v_2^2$$

находим

$$|v_1 - v_2| = 2\sqrt{2E/m}.$$

Расстояние между точками падения осколков равно

$$l = |v_1 - v_2|t = 2\sqrt{\frac{2E}{m}}\frac{v_0\sin\alpha}{g} = 6\text{ м}.$$

4. По закону Архимеда $Mg_{\text{В}} = \rho g_{\text{В}}V_{\text{т}}$, где $g_{\text{В}}$ — ускорение свободного падения, ρ — плотность атмосферы Венеры, $V_{\text{т}} = 4/3\pi r^3$ — объем тела. Из уравнения состояния идеального газа $\rho = p_0\mathrm{M}/(RT)$, где $\mathrm{M} = 44$ г/моль — молярная масса углекислого газа. Окончательно

$$M \le \frac{4}{3}\pi r^3\frac{p_0\mathrm{M}}{RT} = 249\text{ кг}.$$

5. Шарик находится в покое, если натяжение нити равно $T = F_{\text{А}} - (m + m_{\text{г}})g$, где $F_{\text{А}} = \rho Vg$ и $m_{\text{г}} = \mathrm{M}pV/(RT)$. Таким образом,

$$T = \rho Vg - \left(m + \frac{\mathrm{M}pV}{RT}\right)g \approx 0{,}014\text{ Н}.$$

6. Поскольку средняя квадратичная скорость равна $v = \sqrt{3kT/m_0}$, она изменится в $\alpha = \sqrt{T_2/T_1}$ раз, где T_2 и T_1 — конечная и начальная температуры газа. Согласно первому закону термодинамики,

$$Q = \Delta U + A = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) + (Mg + p_0S)\Delta H,$$

где ΔH — перемещение поршня. Из уравнения состояния газа

$$(Mg + p_0S)\Delta H = \nu R(T_2 - T_1).$$

Тогда окончательно

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{2Q}{5(Mg + p_0S)h}} = 1{,}1.$$

7. Работа газа равна (рис.13)

$$A_{12} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1),$$

$$A_{23} = \frac{1}{2}(p_2 + p_3)(V_3 - V_2).$$

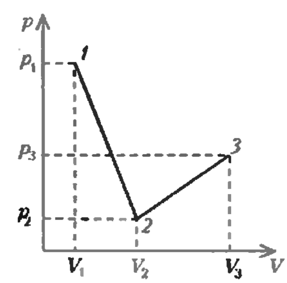


Рис. 13

Изменение внутренней энергии составляет

$$\Delta U = \frac{3}{2}\frac{m}{\mathrm{M}}R(T_3 - T_1) = \frac{3}{2}(p_3V_3 - p_1V_1).$$

Согласно первому закону термодинамики,

$$Q = \Delta U + A_{12} + A_{23} = \frac{p_1(V_2 - 4V_1) + p_2(V_3 - V_1) + p_3(4V_3 - V_2)}{2} = -20\text{ Дж},$$

т.е. выделилось 20 Дж тепла.

8. ЭДС индукции в движущемся проводнике по модулю равна BvL, а ее полярность противоположна полярности батареи. По цепи идет ток

$$I = \frac{\mathcal{E} - BvL}{R + r},$$

а в стержне выделяется количество теплоты

$$Q = I^2Rt = \left(\frac{\mathcal{E} - BvL}{R + r}\right)^2 Rt \approx 64 \text{ Дж}.$$

9. Первоначально изображение находится на расстоянии $2F$ от линзы. Обозначив (рис.14) $AO = a$, $OB = b$, $OD = y$,

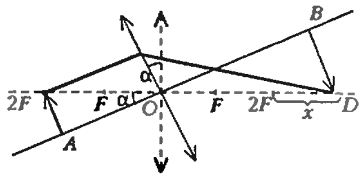


Рис. 14

имеем

$$x = y - 2F,\ y = \frac{2Fb}{a},\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F},\ a = 2F\cos\alpha .$$

Отсюда

$$x = \frac{4F(1-\cos\alpha)}{2\cos\alpha - 1} \approx 51{,}3 \text{ см}.$$

10. Для того чтобы размер пятна на экране превосходил

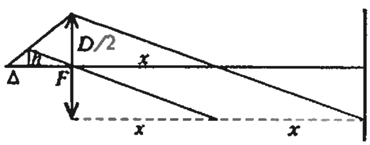


Рис. 15

диаметр линзы, нужно, чтобы выполнялось условие $l > 2x$ (рис.15). Из треугольников имеем

$$x = F\frac{D}{2h},\ h = \frac{D\Delta}{2(F+\Delta)},\ x = \frac{F(F+\Delta)}{\Delta}.$$

Тогда

$$l > 2F\left(1 + \frac{F}{\Delta}\right) = 60 \text{ см}.$$

Химический факультет

1. $t = \sqrt{\dfrac{2gH}{a(a+g)}} = 5$ с. **2.** $v_{min} = 2\pi\nu l = 1{,}26$ м/с.

3. $a = 4\pi^2\nu^2A/\lambda^2 = 350$ м/с^2.

4. $\rho = \dfrac{p_0(m_1 + m_2)}{RT_0(m_1/M_1 + m_2/M_2)} = 1{,}6$ кг/м^3.

5. $\varphi_2 = \varphi_1 \dfrac{p_2V_1T_2}{p_1V_2T_1} = 10{,}6\%$.

6. $q = \dfrac{\mathcal{E}(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} = 1{,}12 \cdot 10^{-4}$ Кл.

7. $I_m = \sqrt{2}U_a/(3R) = 0{,}028$ А. **8.** $P = \mathcal{E}^2/(N^2R) = 5 \cdot 10^{-4}$ Вт.

9. $v_{ср} = v\dfrac{(f_1 - F)(f_2 - F)}{F^2} = 3v = 6$ см/с.

10. $l = \dfrac{F(2d - F)}{2(d - F)} = 1{,}75$ м.

ПОПЛАВОК В БУТЫЛКЕ

(см. с. 9)

1. Против ускорения (воздух неподвижен, сила Архимеда направлена вертикально).
2. По ускорению.
3. Под колпаком — по ускорению, без колпака — против ускорения.
4. Перпендикулярно вектору $\vec{g}^* = \vec{g} - \vec{a}$, т.е. под углом α к горизонту таким, что $\operatorname{tg}\alpha = a/g$.
5. Не изменится.
6. $T_1 = 2\pi\sqrt{l/(g+a)}$, $T_2 = 2\pi\sqrt{l/\sqrt{g^2 + a^2}}$.

КУБОК УФЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

1. Смогут. **2.** $82{,}5°$. **3.** Доля голубоглазых среди блондинов больше. **4.** Только 5. **5.** 12 1. **6.** Корней нет. **7.** 120. **8.** 7. **9.** 81. **10.** $x = y = z = (6 + 2\sqrt{5})/4$. **11.** $-2{,}5$. **12.** $44°$. **13.** 3211000. **14.** 8 этажей. **15.** $1 + \sqrt{3} + \sqrt{2}/2$. **16.** 2400 км. **17.** 96. **19.** $x + 2$. **21.** $n(n+1)(3n^2 - n - 2)/24$.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

А.Н.Балдин, В.П.Бухарев, В.А.Иванюк, М.М.Константинова, А.Е.Пацхверия, И.А.Тарабанова, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Осипова

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №121.

Компьютеры преподносят сюрпризы

Компьютеры на равных сражаются с мастерами и гроссмейстерами, проводят интересные комбинации, глубоко анализируют окончания, решают задачи и этюды. Сквозь сито шахматных роботов просеяны сотни комбинаций, входящих в золотой фонд шахматного искусства. Сегодня все это стало «буднями» для компьютеров. И все же всякий раз, когда электронный шахматист находит неожиданное решение в позиции, долгое время привлекавшей внимание квалифицированных шахматистов, это и удивляет, и восхищает. С рядом таких позиций и познакомится читатель в предлагаемой статье.

На втором компьютерном чемпионате мира в Торонто (1977 г.) в первом же туре случилась сенсация: чемпионка мира «Каисса» потерпела поражение в партии, которая потом еще долго будоражила умы программистов и шахматных специалистов, наблюдавших за игрой.

«Дачесс» — «Каисса»

Белый ферзь только что объявил шах с а4 на а8. Реакция черных была поразительной...

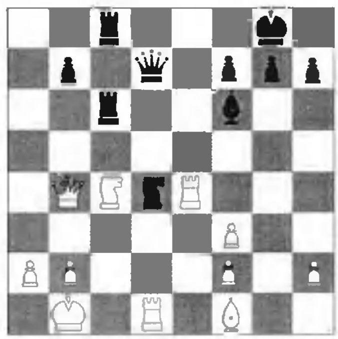
34...Ле8?!

Впечатление такое, будто произошла какая-то нелепость, ведь «Каисса» подставила под удар целую ладью! Комментаторы, присутствовавшие на чемпионате, в том числе весьма квалифицированные, были растеряны и смущенно объясняли зрителям, что, мол, компьютеры пока еще далеки от совершенства и от них можно ожидать чего угодно... Каково же было их изумление, когда после партии «Каисса» объяснила свой зевок — в нее ввели «естественный» ход 34...Крg7 — следующим блестящим вариантом: 35. Фf8+! Кр:f8 36. Сh6+ и 37. Лс8+ с матом.

Нет сомнений, что такой эффектный и неожиданный удар во время игры обнаружит не каждый мастер! Конечно, «Каисса» стоило рискнуть и пойти королем вперед (так бы поступил человек), ведь игра без ладьи не оставляет никаких надежд, тем более что напрашивающееся 35. g5 вело белых к катастрофе: 35...К:е3 36. gf+ Ф:f6 37. fe Фg5+ и 38...Ф:b5. Но мат «старше» ладьи, а психологические нюансы машина оставляет в стороне...

35. Ф:е8+ Крg7 36. g5. Здесь можно поставить точку: играя белыми, компьютер легко справится и с чемпионом мира.

После этого примера из партии роботов уместно будет привести один забавный эпизод из партии гроссмейстеров (дело происходило в Лондоне семь лет спустя).



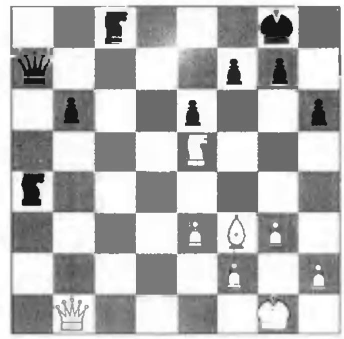
Н.Шорт — Э.Майлс

Белые сыграли здесь 22. а3 и взяли верх только через 25 ходов. Но почему они не пошли **22. Кb6** с выигрышем качества? И во время игры, и позднее оба гроссмейстера были убеждены, что эта «вилка» невозможна из-за изящной реплики **22...Ке2**, и белый король оказывается в матовом кольце: 23. С:е2 Ф:d1+ 24. С:d1 Лс1× или 23. К:d7 Лс1+ 24. Л:с1 Л:с1×. Поскольку у белых к тому же под боем ладья, дела их кажутся безнадежными...

Когда позиция на диаграмме была предложена «Мефисто», компьютер быстро сделал ход **22. Кb6**, а за черных неожиданно отказался от **22...Ке2** и сыграл 22...Л:b6, отдавая качество. Чтобы понять, почему машина отвергла скачок коня на е2, в нее ввели этот ход, после чего предложили снова сыграть белыми... И тут последовало — вот и разгадка позиции — совершенно немыслимое **23. Фf8+!!** Выясняется, что черные беззащитны: 23...Л:f8 24. К:d7 или 23...Кр:f8 24. К:d7+ и 25. С:е2.

Да, такая концовка достойно завершила бы чемпионат Англии, который впервые выиграл Н.Шорт, самый молодой в то время гроссмейстер в мире (будущему претенденту на шахматную корону было 19 лет). Редчайшее совпадение — обе упомянутые партии могла решить эффектная жертва ферзя на одном и том же поле f8, к тому же обе неосуществленные комбинации были найдены позднее, и обе обнаружены машиной!

В последние годы через компьютеры «пропускаются» многие партии, сыгранные гроссмейстерами, с целью обнаружить в них какие-то нюансы, ускользнувшие от внимания комментаторов. Особенно тщательно машины изучают партии матчей на первенство мира и часто обнаруживают в них варианты, не замеченные ни одним человеком. Вот пример из матча Каспаров — Карпов.



Г.Каспаров — А.Карпов

Севилья, 1987

Перед нами позиция из заключительной 24-й партии, в ней решалась судьба шахматной короны. Двумя ходами раньше, в сильнейшем цейтноте, черные ошибочно побили конем белую пешку а4. Теперь же допускают промах и белые. Каспаров сыграл здесь 33. Фd1? и, продолжая 33...Кс5, Карпов мог вернуть себе корону: в случае 34. Фd8+ Крh7 35. Ф:с8 Фа1+ 36. Крg2 Ф:е5 черные оставались с лишней пешкой. Однако Карпов не использовал свой шанс, ответив 33...Ке7?, и после 34. Фd8+ Крh7 35. К:f7 белые в конце концов взяли верх и спасли матч.

Сразу же после партии позиция на диаграмме была показана различным компьютерам. Робот «Плейматик» мгновенно обнаружил спасительную реплику за черных — 33...Кс5!, и тогда его попросили проанализировать 33-й ход белых. После 19-минутного размышления он предложил **33. Сh5!**, доказав, что позиция на диаграмме выиграна для белых. В ответ на 33...g6 (33...f6 34. Сf7+ и 35. С:е6, fg 33...Кd6 34. Фd1 g6 35. С:g6! fg 36. Ф:d6) машина пожертвовала слона — 34. С:g6 fg 35. Ф:g6+, и далее 35...Фg7 36. Ф:е6+ Крh7 37. Фf5+ Крg8 38. Ф:с8+ Крh7 39. f4; 35...Крf8 36. Фf6+ Крg8 37. Ф:е6+ Крg7 38. Ф:с8 и т.д.

Таким образом, компьютер первым доказал, что в том матче Каспаров заслуженно сохранил шахматную корону...

Е.Гик

Индекс 70465

ПОПЛАВОК В БУТЫЛКЕ

Для создания новой игрушки вам понадобятся всего два предмета — поплавок на нитке и бутылка, лучше пластиковая с герметично закручивающейся пробкой. Налейте в бутылку воды, опустите туда поплавок и, оставив снаружи «хвостик» нитки, закрутите пробку. Осталось перевернуть бутылку горлышком вниз — и «прибор» готов. Проверьте, чтобы поплавок находился целиком под водой, натягивая закрепленную внизу нитку, а длина нитки составляла 10—15 см. (Впрочем, все наши советы носят чисто рекомендательный характер — возможно, вы подберете более удобную конструкцию, например возьмете широкую банку и сможете закрепить конец нитки в середине крышки.)

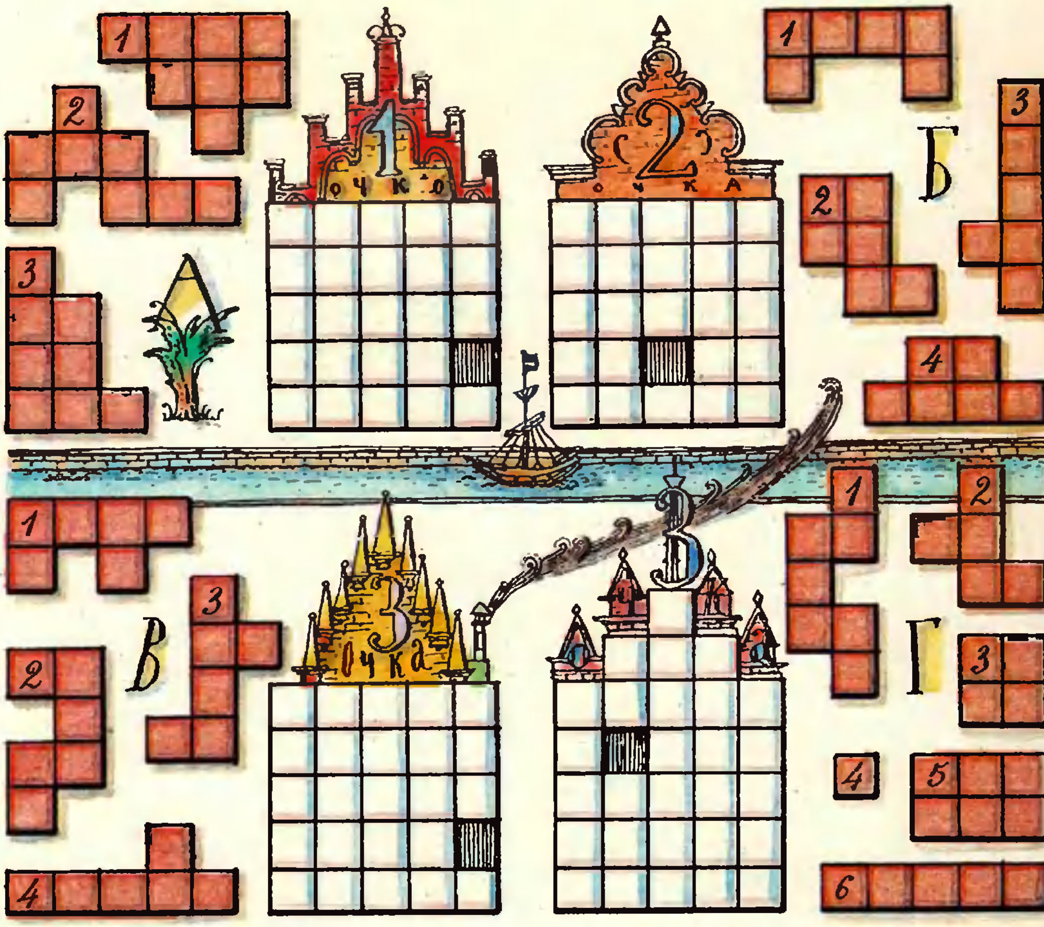
Теперь — за эксперименты.

Удерживая бутылку строго вертикально, начните двигать ее поступательно с горизонтальным ускорением. Что произойдет с поплавком? Куда он отклонится при разгоне и при торможении? Чтобы время разгона (и торможения) было не слишком маленьким, лучше не стоять на месте (работая только руками), а активно передвигаться по комнате. А можно ли угадать заранее, до экспериментов, каким должно быть отклонение поплавка? («Наводящий» вопрос: будет ли оно таким же, как у грузика на нити, если его разгонять, держа за конец нити?)

Проделайте еще один опыт — с вращательным движением. Удерживая бутылку с поплавком на расстоянии вытянутой руки (для увеличения радиуса), начните по возможности быстро поворачиваться вокруг своей оси. А еще лучше — закрепите бутылку в штативе, а штатив поставьте на вращающуюся платформу (но не на оси вращения). Куда отклонится поплавок — внутрь, к оси вращения, или наружу? Опять попробуйте заранее угадать ответ. («Наводящая» подсказка — вспомните аттракцион «чертова карусель».).

(Обсуждение экспериментов см. на с. 9)

ВДОЛЬ КАНАЛОВ АМСТЕРДАМА



В октябре 1996 года в Утрехте (Голландия) состоялся шестой чемпионат мира по головоломкам. В нем участвовала и команда России. Предлагаем вам одно из заданий чемпионата. Точнее — серию заданий. (Один из туров состоял из трех таких серий.) Сами по себе эти головоломки нехитрые — нужно «сложить» фасады нескольких амстердамских домиков, из блоков, помещенных рядом с каждым фасадом. (Блоки можно поворачивать, но нельзя переворачивать на обратную сторону.) Попробуйте, однако, сделать это за время, которое отводилось на решение в Утрехте (приблизительно по минуте за очко)!

В. Дубровский