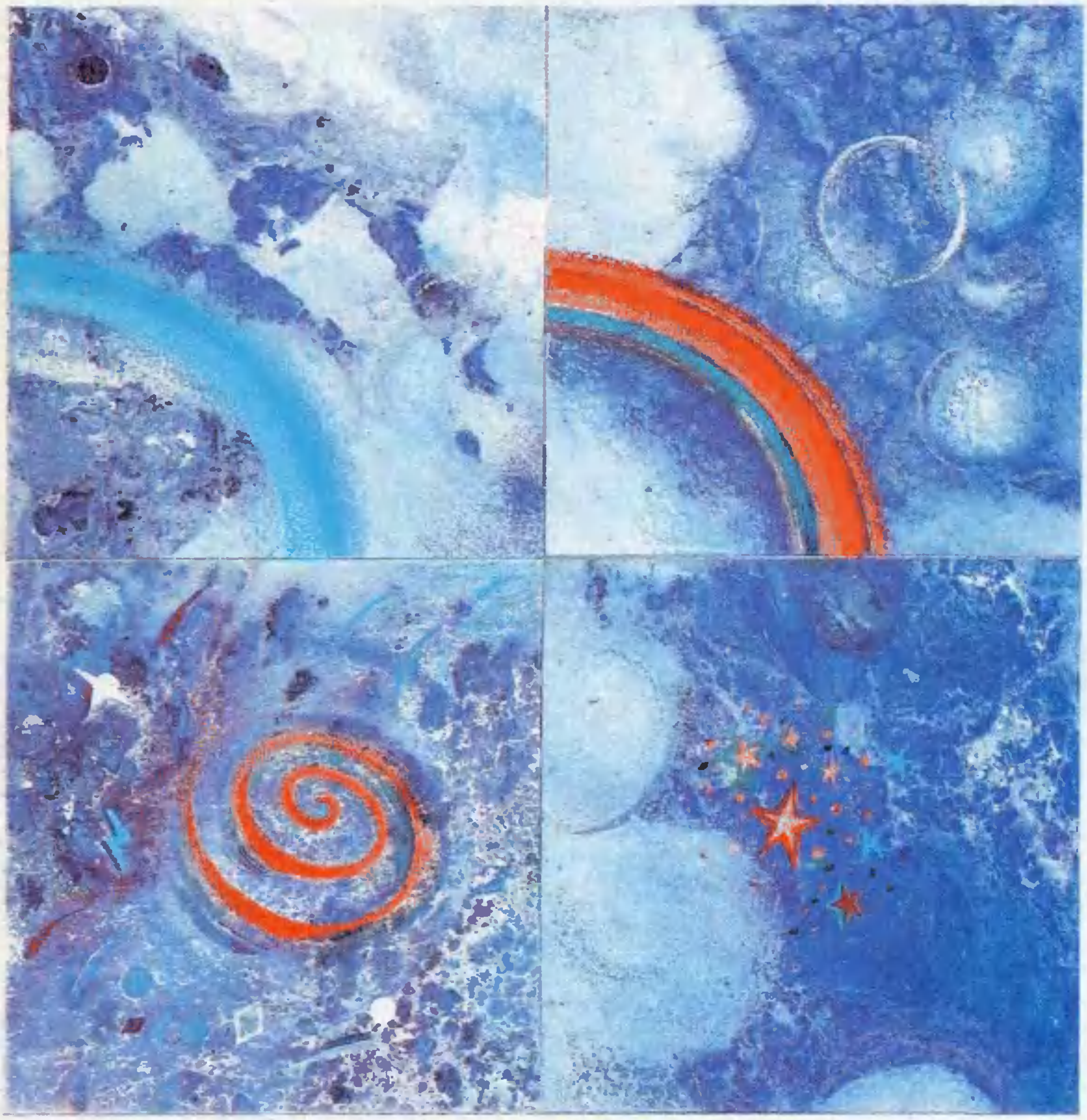
ISSN 0130-2221
НОЯБРЬ/ДЕКАБРЬ
1996 · №6

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



ВЕРЕВОЧНАЯ ГОЛОВОЛОМКА

«Веревочные головоломки» — головоломки, в которых основным элементом является кусок веревки, сопряженный с некоторой жесткой конструкцией. Их часто называют также «топологическими головоломками», так как веревка допускает всевозможные изгибания, а также потому, что часто невозможность предлагаемого «перестроения» можно определить, используя методы теории узлов и зацеплений в топологии.

На страницах журнала не раз публиковались веревочные головоломки, которых в мире насчитывается несколько сот. Предлагаемая здесь головоломка проста в изготовлении. Читатели легко могут сделать ее самостоятельно из деревянного бруска. Вместо деревянной мышки можно использовать, например, шарик с просверленным диаметром (разумеется, шарик не должен проходить ни в одно из отверстий бруска).

Задача состоит в том, чтобы снять с продырявленного бруска веревочную петлю.

А.П.

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

НОЯБРЬ/ДЕКАБРЬ · 1996 · №6

В номере:

В апреле этого года отмечалось столетие со дня рождения выдающегося физико-химика, лауреата Нобелевской премии «Семенова Великого» (Semenov the greatest), как называют его на западе. Принять участие в юбилее в Москву приехали ученые не только из многих городов нашей страны, но и из США, Канады, Англии, Германии и других стран. Их приезд — это не только дань уважения Н.Н.Семенову, но и признание того, что школа Семенова, созданная им за свою длинную и плодотворную жизнь, и сегодня является одним из лидеров мировой науки. Очень часто в науке бывает так, что многие выдающиеся работы со временем устаревают, на смену старым идеям приходят новые, а достижения великих ученых даже недавнего прошлого оказываются важными лишь для историков естествознания. Бывает и наоборот — только через много лет выясняется ценность открытий, приходит понимание непризнаваемых прежде идей. С Семеновым такого не произошло. Достижения Николая Николаевича Семенова были по достоинству оценены и у нас в стране, и во всем мире еще при его жизни. Проходит время, и идеи Семенова не устаревают, они и сегодня активно работают и будут продолжать работать еще многие годы. Можно смело сказать, что Николай Николаевич Семенов, родившись в XIX веке, является полноправным гражданином XXI века, на пороге которого мы стоим.

Слово о Семенове

В. ГОЛЬДАНСКИЙ

ЧЕМ огромнее общечеловеческое значение научного открытия, его роль в истории цивилизации, в познании мира, тем короче и четче можно их охарактеризовать.

В апреле этого года исполняется 100 лет со дня рождения нашего великого соотечественника Николая Николаевича Семенова. Семьдесят лет назад в его лаборатории на примере окисления фосфора были открыты разветвленные цепные реакции, сущность которых он быстро понял и всесторонне истолковал.

Сорок лет назад он первым из советских ученых и до сих пор единственным из наших химиков был удостоен Нобелевской премии. Десять лет назад он ушел от нас в бессмертие.

В довоенные годы словосочетание «цепная реакция» было знакомо узкому кругу специалистов. Сегодня оно стало совершенно обиходным, мы то и дело встречаем его в газетах, в художественной литературе, слышим по радио и с телевизионных экранов — уже не в первоначальном его научном смысле, а как метафорическое обозначение самых разнообразных событий в природе и в обществе.

Научно-техническая революция второй половины уходящего века ознаменовалась пятью важнейшими свершениями — овладением атомной энергией, прорывом человечества в космос, возникновением квантовой электроники, повсеместным вторжением компьютеров в нашу жизнь, рождением и победоносным шествием молекулярной биологии. В основе двух из этих пяти направлений — в использовании энергии деления атомных ядер в военных и мирных целях и в исходных принципах действия всевозможных (несть им числа!) конструкций лазеров — лежат все те же цепные реакции, уточним — разветвленные цепные реакции. Добавим еще, что без открытия разветвленных химических цепных реакций и объяснения их происхождения и сущности было бы невозможно понять на современном уровне процессы горения, детонации, распространения пламени, взрывов, невозможно было бы создание и совершенствование ракетного топлива, позволившего человечеству преодолеть силу земного тяготения и выйти в космос.

Поэтому создателя учения о разветвленных цепных процессах Н.Н.Семенова можно с полным правом назвать и предтечей, и активным творцом нынешней научно-технической революции. Без преувеличения можно сказать, что среди русских ученых, работавших на грани химии и физики, имя Семенова стоит в ряду таких исследователей, как Ломоносов и Менделеев.

Гениальное озарение Семенова, дело всей его жизни — открытие разветвленных цепных реакций — всеобъемлюще и универсально. Оно не только определяет совокуп-

Материалы, посвященные юбилею Н.Н.Семенова, перепечатаны (с некоторыми сокращениями) из специального номера журнала «Природа» (1996, № 3—4), а отрывок из воспоминаний жены академика П.Л.Капицы Анны Алексеевны взят из сборника «Воспоминания об академике Николае Николаевиче Семенове» (М.: Наука, 1993).

Публикацию подготовил А.Аринштейн. Им же написаны вводный и сопроводительный тексты.

Фото Дм. Бальтерманца, 1981 г.

ность явлений созданной Семеновым науки — химической физики, но и служит своего рода символом преемственности в науке. Громадный личный вклад Н.Н.Семенова как ученого неразрывно связан с его ролью учителя, основателя и главы крупнейшей научной школы. Раздумья о смысле самого понятия «научная школа», о роли и месте таких школ в науке были очень характерны для Николая Николаевича. «Школа Семенова» вырастила целую плеяду выдающихся ученых. У каждого из учеников Николая Николаевича — академиков Ю.Б.Харитона, Я.Б.Зельдовича, В.Н.Кондратьева, М.А.Садовского, Н.М.Эмануэля, В.В.Воеводского, Н.С.Ениколопова, А.Е.Шилова и других, чьи имена широко известны в мире, — имеются, в свою очередь, и свои ученики, так сказать «внуки» и «правнуки» семеновской школы.

По принципу «цепных реакций» и ныне в химической кинетике появляются новые открытия, множатся оригинальные исследования. Последние десятилетия принесли открытие разветвленных энергетических цепей в химических реакциях, создание использующих такие цепи химических лазеров, открытие квантового низкотемпературного предела скорости химических реакций, спиновых эффектов в химической кинетике, каталитического окисления азота и насыщенных углеводородов в мягких условиях. Множатся дочерние институты — из корней московского Института химической физики, которому присвоено имя его основателя — Н.Н.Семенова, в последние годы выросли новые стволы: обрели самостоятельность Институт химической физики в Черноголовке, Институт энергетических проблем химической физики, Институт биохимической физики им. Н.М.Эмануэля, Институт структурной макрокинетики. В Новосибирске питомцы семеновской школы возглавляют ныне два прекрасных института — Институт химической кинетики и горения и Институт катализа.

В заключение хотелось бы сказать несколько слов о характерных чертах Николая Николаевича как ученого, которые не переставали поражать и восхищать автора этих строк на протяжении многих десятилетий нашего тесного общения.

Прежде всего это сверкающий, яркий талант, который ощущается во всем — в его поразительной интуиции, остроте мышления, широте подчас совершенно неожиданных для собеседника аналогий. Далее, это необычайное трудолюбие, напряженная, неутомимая работа ума. Кто из близких сотрудников Н.Н.Семенова не помнит многочисленных ночных бдений, когда все мы, молодые, уже буквально засыпали на ходу, а наш учитель оставался полон сил, бодрости, жажды услышать, продумать, обсудить все новости, курил папиросу за папиросой, неустанно ходил из конца в конец кабинета, охваченный мыслями, за которыми мы не могли поспеть, или вдруг бросался среди ночи к телефону, чтобы немедленно получить у кого-то ответ на мучивший его вопрос. И зачастую именно тогда, когда от усталости мы уже не в силах были связать двух слов, раздавался радостный возглас Николая Николаевича: «Ну, теперь я кажется что-то начинаю понимать». А это скромное «что-то» оказывалось ключом к решению сложнейших задач, первым шагом к новым замыслам и свершениям.

Портрет Н.Н.Семенова работы шведской художницы Зои (З.В.Лагеркранц). 1978 г.

Вместе с тем, для Николая Николаевича всегда было характерно и умение мгновенно переключаться на отдых, дать себе передышку перед новой тяжелейшей нагрузкой. Если вдруг возникало свободное «окно» на 10 минут, он умел мгновенно уснуть ровно на эти 10 минут и проснуться освеженным.

На институтских вечерах Николай Николаевич блистал — даже когда ему было далеко за 60 — своим удивительным мастерством и грациозностью в исполнении мазурки, восхищая всех присутствующих чудесно возникающим образом молодого и стройного красавца никогда не виданных нами балов, знакомых лишь по кино и литературе.

Если же выпадала возможность оторваться от дел на несколько дней, Николай Николаевич отправлялся с компаньонами на охоту. Быть может, случались у него какие-то особенно добычливые «экспедиции» — не могу, признаться, их припомнить. Но и с пустыми руками он возвращался с охоты полный впечатлений, бодрости и желания немедленно вернуться к работе. Много лет вспоминали мы с улыбкой его восторженный рассказ об охоте (с весьма скромными итогами): «Утки летали, как комары».

Сочетание редкостных таланта и трудолюбия сродни и третьему качеству — *глубочайшей увлеченности*, до абсолютной сосредоточенности мыслей и чувств на чем-то, что кажется решающим, до самозабвения.

Удивительная научная интуиция Николая Николаевича всякий раз избавляла его от подстерегающей ученых опасности принимать в своей работе желаемое за действительное, всякий раз подсказывала контрольные эксперименты или дополнительные проверочные расчеты, выводила на верный путь в науке. Характерным тому примером служит драматическая история величайшего в жизни Н.Н.Семенова свершения — открытия разветвленных цепных реакций.

Н.Н.Семенов о себе

(Из автобиографий разных лет)

Я РОДИЛСЯ в апреле 1896 г. в г.Саратове. Мой дед – из мещан, был фельдшером в бывшей Царскосельской (ныне Детскосельской) городской больнице, отец в год моего рождения служил делопроизводителем в Саратовском удельном округе. Он закончил службу ревизором Самарского удельного округа, имел чин статского советника и получил за выслугу лет «личного дворянина». Он умер летом 1918 г.

Я окончил в 1913 г. Самарское реальное училище и, проявляя еще реалистом большую склонность к научным занятиям в области физики и химии, поступил в том же 1913 г. на физико-математический факультет Петербургского университета. С 1914 г. я начал заниматься под руководством академика Иоффе (тогда приват-доцента) экспериментальной научной работой и написал за время пребывания в университете несколько научных работ и статей.

В 1917 г. я окончил университет и был оставлен при нем стипендиатом для подготовки к профессорскому званию. До весны 1918 г. я продолжал научно работать в Петрограде.

Будучи увлечен научной работой, я мало интересовался политикой и в событиях разбирался плохо. Весной 1918 г. я поехал на каникулы к родителям в Самару, где меня и застал Чехословацкий переворот. Под влиянием окружившей меня мелкобуржуазной среды и известного доверия, которое питала в то время мелкая буржуазия к меньшевикам и эсерам, я вступил добровольно в середине июля в так называемую «народную армию» самарской «учредилки».

Я был назначен солдатом в артиллерийскую батарею, где в течение всего времени моего пребывания в «армии» (длившемся около месяца) я выполнял обязанности коновода. Из этого месяца около трех недель я провел на фронте. В это время самарские белые войска состояли наполовину из офицеров (выполнявших и солдатские обязанности), настроение которых во многих случаях было явно монархическим и народоненавистническим, что мне было совершенно чуждо. Вскоре я начал отчетливо понимать, что никаких стимулов для борьбы с большевиками у меня нет и что мне надо как-нибудь выбираться из той грязной истории, в которую я попал по собственному недомыслию.

Воспользовавшись известием о тяжелом состоянии отца (он вскоре умер), я в середине августа добился получения отпуска в Самару, устроил себе перевод во вновь формирующуюся Уфимскую батарею и, не заезжая в Уфу, проехал (в сентябре) прямо в Томск, дезертировал таким образом из белой армии. Томск в то время был единственным университетским городом Сибири, и я поехал туда, рассчитывая вновь отдаться научной работе...

За время пребывания в Томске я сделал несколько небольших, но зато совершенно самостоятельных научных работ. Я организовал при Технологическом институте постояннодействующий научный семинар и, наконец, также по собственной инициативе руководил научной работой и научным образованием кружка наиболее талантливой студенческой молодежи... В Томске я продолжал научную и преподавательскую работу до мая 1920 г., когда по приглашению Государственного физико-технического и рентгенологического института я переехал на работу в Петроград.

●

Приехав в Ленинград, развил работу в 3-х направлениях: 1) ионизация атомов и молекул, 2) явления конденсации и адсорбции и 3) вопросы электричества и электротехники.

Первым направлением я занимался совместно с моим учеником В.Н.Кондратьевым, который с 1924 г. продолжал развивать его уже самостоятельно и, как известно, достиг весьма интересных результатов.

Второе направление я развивал совместно с Ю.Б.Харитоном и А.И.Шальниковым. Работа эта привела к установлению основных законов критической температуры конденсации и связи этого явления с адсорбцией, а также дала новый метод получения устойчивых коллоидов щелочных металлов. Этот метод успешно был развит в последующем Шальниковым.

Третье направление, развиваемое совместно с А.Ф.Вальтером, и привело: 1) к созданию новых экспериментальных методов изучения электрических полей, 2) к выяснению механизма пробоев диэлектриков при высоких температурах («Теория теплового пробоя») и 3) к выяснению условий пробоя вакуума и запатентованного нового типа электростатического генератора...

●

За период до 1926 г. сперва не очень ясно, а потом все более и более отчетливо меня начали интересовать вопросы, смежные между физикой и химией.

С 1926 г. появляется серия работ по кинетике газовых реакций (моих и моих учеников), которые привели в 1928 г. к формулировке новой так называемой цепной теории химических реакций и, в частности, газовых взрывов...

●

Учитывая громадное значение современной физики для развития химии, я широко пропагандировал научное объединение физиков и химиков Союза и совместно с академиком А.Н.Фрумкиным наладил систематические физико-химические конференции, которых состоялось уже десять и которые сыграли, как мне кажется, довольно существенную роль в деле создания физической химии в Союзе. В 1932 г. по моему представлению НКТП [Наркомат тяжелой промышленности] организовал специальный Ин-т химической физики со специальной задачей внедрения современной физики в физико-химические вопросы.

●

...Мой главный труд — монография «Цепные реакции» — написана в 1931 – 1934 гг. (она также переведена на английский язык). Развитая мною и моими учениками цепная теория химической реакции сейчас общепризнана.

Главнейшими научными своими достижениями я считаю: 1) теорию теплового пробоя диэлектрика, 2) цепную теорию, 3) теорию взрыва. Последние два направления широко развиваются в Институте химической физики моими бывшими учениками и учениками моих учеников, ставшими теперь самостоятельными крупными учеными.

В области химической кинетики и горения Институт химической физики является главным теоретическим центром Советского Союза.

●

С самого начала войны, еще в Ленинграде, я с группой сотрудников переключился на непосредственную научную [научно-оборонную] работу и имел поручение Горкома ВКП(б) г.Ленинграда совместно с акад. Б.Г.Галеркиным и акад. А.Ф.Иоффе возглавить комиссию по научным оборонным предложениям и их быстрой реализации.

Работа эта была развернута при Горкоме, но в конце августа всем нам было предложено... эвакуироваться из Ленинграда в г.Казань к месту пребывания наших эвакуированных Институтов.

В Казани я работал с IX.1941 по XII.1943 г., ориентируя Институт на выполнение оборонных задач, в основном связанных с вопросами горения и взрывов, по заданиям Министерства обороны и Министерства авиационной промышленности.

С июля 1943 г., в соответствии с решением Правительства, я перенес свою работу в Москву, куда, согласно этому решению, должен был быть переведен Институт химической физики.

Параллельно с научно-оборонной работой, моей и группы Института в Москве, я занимался организацией Ин-та на новом месте.

Осенью 1944 г. в Москву переехали все сотрудники и все оборудование Института, а с января 1945 г. работа Института была полностью развернута в новых помещениях.

В связи с 220-летием Академии наук СССР я был награжден орденом Ленина.

С 1945 г. я получил кафедру химической кинетики <...> в Московском университете, разработал и читал там курс химической кинетики и организовал дипломные работы студентов...

●

Всего имею свыше 200 печатных работ, ряд монографий, из которых важнейшие: «Цепные реакции» — 1934 г. и «О некоторых проблемах химической кинетики и реакционной способности» — 1958 г.

Мне присуждены две Государственные премии — в 1941 г. и в 1949 г. — и Нобелевская премия в 1956 г.

Избран иностранным и почетным членом тринадцати иностранных академий и обществ.

Почетный доктор восьми зарубежных университетов и институтов.

С 1963-го по 1971 г. являлся вице-президентом Академии наук СССР, с 1971 г. — членом Президиума Академии наук СССР.

От составителя

Что еще можно добавить к этим официальным строкам автобиографии? Семенов является основоположником одного из современных направлений науки — химической физики. «Школа Семенова» — это понятие столь многогранное, что никакими формальными признаками ее не определить. Пожалуй, самое главное в «Школе» — дух Николая Николаевича Семенова. Любое дело, за которое брался Семенов, он блестяще доводил до логического успешного конца. Его заслуги были оценены очень высоко и у нас в стране, и за рубежом. Часть наград и почетных званий Н.Н.Семенов упомянул в своей автобиографии. Кроме этого, он — лауреат Ленинской премии, дважды Герой Социалистического Труда, кавалер девяти орденов Ленина и ордена Октябрьской Революции.

Может сложиться впечатление, что жизнь Н.Н.Семенова состояла только из успехов и заслуженных наград. Однако не все и не всегда было гладко. В 1937 году он чудом избежал ареста, в начале 40-х годов была поставлена под сомнение его теория цепных реакций и в течение 13 лет он подвергался откровенной травле. Это был воистину черный период в жизни Семенова: он попал под «кампанию борьбы с космополитизмом», и никакие научные аргументы и доводы доказать ничего не могли. Травля закончилась лишь в 1953 году, вскоре после смерти Сталина. А в 1956 году за ту же самую теорию цепных реакций Н.Н.Семенову (совместно с С.Хиншелвудом) была присуждена Нобелевская премия.

Вклад Н.Н.Семенова в науку можно разделить на две части. Одна часть — это открытия, новые идеи и работы, которые он сделал сам, а другая — то, что сделано его учениками и последователями. Какая из этих частей значительнее и важнее, сказать невозможно. Вряд ли «Школа Семенова» оказалась бы столь плодотворной, не будь у ее истоков столь выдающегося исследователя. Но и не всякий выдающийся ученый способен собрать вокруг себя талантливых учеников, создать свою научную школу. В истории науки ученых, создавших свои научные школы такого масштаба, можно перечислить по пальцам (это, например, Резерфорд, Бор, а в нашей стране — Ландау).

Стиль работы Н.Н.Семенова можно назвать (по классификации Вильгельма Освальда) романтическим. Николай Николаевич увлекался многими темами, иногда одновременно. Работал он всегда со своими учениками, в одиночку работать ему было просто скучно. Это была полная противоположность классическому (по той же классификации) стилю, когда в течение длительного времени исследуется одна тема, результаты накапливаются постепенно, и эти результаты оказываются исчерпывающими. Ученики в процессе такой работы особенно не нужны. Они могут появиться потом, чтобы учиться на результатах готовых работ. Оба подхода к научным исследованиям плодотворны, если ими занимаются талантливые ученые. Нельзя сказать, что какой-то хуже, все зависит от характера и темперамента самого исследователя. Так вот, Семенов был стопроцентный «романтик». Причем свой «выбор» он сделал еще в молодости.

С самого начала своей научной деятельности Николай Николаевич очень много времени уделял своим ученикам и организационной работе для обеспечения их исследований. Свои мысли по этому поводу он очень четко и полно сформулировал в одном из многочисленных писем работавшему тогда в Кембридже у Резерфорда Петру Леонидовичу Капице, с которым Николай Николаевич Семенов был очень дружен еще со студенческой скамьи.

Удивительным образом переплелась судьба этих двух замечательных людей. Можно сказать, что их «дружба» продолжается и сейчас. В Москве, на Воробьевых горах, в самом начале улицы Косыгина соседствуют два института, созданные Семеновым и Капицей: Институт физических проблем им. П.Л.Капицы и Институт химической физики им. Н.Н.Семенова, и это очень символично.

Семенов — Капице

25 марта 1922 г., Петроград

Дорогой мой англичанин, сижу сейчас в лаборатории один. Тихо, все четверо моих мальцов отсутствуют, что случается очень редко. Утром Ольга Конрад[овна] читала мне твое письмо с пессимистическим — практическим настроением. Сейчас вспомнил о тебе и как-то остро почувствовал твое отсутствие. Ты меня прости за тон моих писем: быть может, и они, отчасти конечно, способствовали твоему теперешнему взгляду на людей. Но вспомни, Петька, наши советские условия, вспомни, что мне приходится заботиться о благоустройстве своей семейной жизни, чтобы было тепло, чтобы были сыты 7 человек, вспомни, что у меня сейчас 3 очень талантливых студента работают в одной со мной комнате при моем действительно непосредственном руководстве, почти вместе со мной, что их надо устроить и обеспечить материально, наконец, что я все больше и больше привязываюсь к мечте о нашем Институте, который должен быть, наконец, создан по-настоящему, по-западноевропейскому, и, соответственно, все больше вхожу в административные дела. <...> Вот если ты все это себе отчетливо представишь, ты, быть может, не будешь особенно сурово относиться к несколько небрежному, формальному и даже утилитаристическому тону моих писем, на которые ты даже и отвечать не желаешь. Думая о тебе, я сейчас пришел к мысли, что все-таки тебе надо возвратиться. По двум причинам. Во-первых, тебе самому тяжело, я полагаю, на чужбине. Т.е., видишь ли, ты, может быть, в конце концов и привыкнешь, но это совпадет с началом конца Петра Капицы и с появлением на свет нового человека, не то русского, не то англичанина, без родины, без друзей. Вряд ли тебя могут радовать такие перспективы, а между тем в твоем письме я почувствовал предвестников этого превращения.

Во-вторых, по долгу и по справедливости, твое место здесь. Ты вспомни, что такое сейчас наука в России, в каком она положении и много ли у нее энергичных членов, стойко выдерживающих удары судьбы. Очень мало. С физикой дело особенно плохо, потому что она вообще только-только стала просыпаться в России, освободившись от гнета Боргмана, Хвольсона и других. Где может родиться настоящая русская физика, не какой-нибудь там славянофильский курьез (каковым мне представляется Москва после ближайшего ее рассмотрения), а настоящая западноевропейская физика, русская только потому, что она будет в России и, следовательно, даст возможность применить русские силы на поле единой международной науки?

Конечно, только здесь, в Петрограде. При этом гнездом экспериментальной физики должен быть Физико-Технический Институт. Как мы ни плохи и как ни мало нас, но именно здесь, и только здесь, может развиться экспериментальная физика.

Но ведь для ее развития необходимы внешние благоприятные условия, приборы, оборудование, мастерские, обеспеченность сотрудников. Вот почему хозяйственные дела нашего института мне кажутся столь важными и почему я считаю, что большую часть своей энергии нужно на это тратить.

Ставлю тебе на вид, что ты в этом смысле мало делаешь, сидя в Англии, а ведь нам надо перебираться в новое здание, и оборудование крайне нужно. Именно с указанной мною точки зрения, я не знаю, что важнее — твоя ли работа, как бы великолепна она ни была, или закупка и присылка нам сюда приборов. Может быть, я преувеличиваю, но я считаю, что хозяйственная гибель нашего института на много десятков лет отодвинет развитие физики в России.

Однако, что касается хозяйственных вопросов, то для них ты мог бы, будучи в Англии, сделать больше, чем сидя здесь. Но есть еще другая задача у нас, столь же важная по существу, но к разрешению которой у тебя есть данные, больше чем у всех нас. Я говорю о создании физиков, не говорунов и бездельников, а настоящих ученых, систематических, упорных, знающих приборы и методы, смотрящих на науку не только как на удовольствие, но и как на дело. За исключением двух-трех, у нас таких нет, и, конечно, себя я отношу к категории совсем не настоящих. Но ведь такая ученая корпорация создается очень постепенно, она вырабатывается поколениями. Если сравнить теперешнюю обстановку с той, которая была во времена Петрушевского и Боргмана, то прогресс очевиден. А.Ф. сыграл очень большую роль, что воспитал несколько человек нас, своих учеников, которые в свою очередь должны заботиться о формировании новых работников и в воспитании их не делать тех ошибок, кот[орые] делал А.Ф. и которые для нас очевидны из рассмотрения самих себя. Задача эта выполнима лишь в том случае, если здесь будет нас целая группа, ибо очень сильно воспитывает молодежь организованность научной работы, корпоративность, живость духа. Вот для этих целей ты незаменим, твое отсутствие заметно на каждом собрании. Живой дух, живой интерес к науке, умение поставить вопрос, выдвинуть идею, смелость в эксперименте — всего этого в тебе хоть отбавляй. Кроме того, ты хороший экспериментатор, интересуешься людьми. Ты мог бы набрать себе много народу, под твоим наблюдением развивающихся и работающих.

И вот, я думаю, что гораздо важнее, чтобы ты был здесь, у себя на родине и делал это дело, чем на чужбине сам совершенствовался и развивался.

На это ты можешь возразить:

1 — что там ты определенно сделаешь работы и сам развовьешься в ученого, а здесь будешь учить, сам много не зная;

2 — что, приехав сюда с опытом и именем, ты больше сможешь дать русской науке.

Я думаю, что это неверно.

Я не так много придаю значения нашим работам и считаю, что пусть они будут не так уж хороши, пусть лучше мы послужим только удобрением для другого поколения, которое создаст в России подлинную науку, живую, полную открытий и изобретений. Ибо я считаю все-таки, что наука, да и всякое дело, движется не личностями, но обществом, даже народом. Задача же личности — пробивать пути, помогать быстро совершиться тому, к чему есть в народе основания появиться.

Пиши, жду!

Н.С.

Великолепный Н.Н.

А.КАПИЦА

Высокого роста, стройный, очень подвижный, даже стремительный в своих движениях, с чуть восточными чертами лица, элегантный и во фраке — при вручении ему Нобелевской премии, и в черной косоворотке — на охоте. Веселый в компании, неуемный в восприятии окружающей жизни, благожелательный к людям, посвятивший свою жизнь науке, где он оставил блистательный след. Таким я вспоминаю Николая Николаевича Семенова.

Петр Леонидович и Н.Н. дружили с молодости, когда еще студентами встречались на семинаре Абрама Федоровича Иоффе в Петрограде в 1916 г. Там же бывали и многие молодые физики — будущие ученые. Потом оба они работали у Абрама Федоровича, где опубликовали совместную научную работу. В 1921 г. Петр Леонидович уехал за границу с миссией Академии наук и стал работать у Резерфорда, Н.Н. продолжал свою научную деятельность уже вместе с Абрамом Федоровичем.

Доверие и доброжелательность к людям иногда завлекали Н.Н. в тенеты недобросовестных людей, о чем многократно предостерегал его Петр Леонидович. На этой почве у них бывали разногласия, они часто спорили, главным образом по вопросам тактики в развитии науки и деятельности Академии наук.

Капица был более принципиален, более суров к людям. Семенов же всегда находил возможность как-то скрасить положение, представить его в более оптимистическом виде. Он был добрее и более снисходителен к людям. Эти черты характера делали Н.Н. таким обаятельным в его стремлении понять, помочь человеку. В нем не было ни тени зависти, ни тени скупости, он был щедр во

Портрет П.Л.Капицы и Н.Н.Семенова работы Б.М.Кустодиева. 1921 г.

всем — и в жизни, и в науке. Эта щедрость в науке помогла ему создать выдающуюся школу молодых ученых.

Петра Леонидовича восхищал талант Н.Н., сила творческого воображения и глубина проникновения в науку.

Мы были очень дружны с Н.Н. не только потому, что Петр Леонидович знал его с молодости, но еще и потому, что Н.Н. был женат на Наталии Николаевне. С ней мы подружились со школьной скамьи и пронесли нашу дружбу через всю жизнь. У Семеновых, так же как и у нас, было двое детей — сын и дочь. Вся наша жизнь прошла рядом до того момента, когда в пожилом возрасте Н.Н. разошелся с Натальей Николаевной. Это был большой удар, наши отношения стали натянутыми, и виделись мы редко.

Петр Леонидович пронес свое восхищение талантом Н.Н. через всю свою жизнь.

Мне хочется рассказать о том, как был написан Борисом Михайловичем Кустодиевым двойной портрет Петра Леонидовича и Н.Н.

Они оба были молоды и задиристы и, придя к Борису Михайловичу, тогда уже очень известному художнику, заявили с места в карьер: почему Борис Михайлович пишет портреты только знаменитых людей? Вот они двое, конечно, будут знамениты, и Борис Михайлович должен написать их портрет. Очевидно, такое заявление понравилось Кустодиеву, он не был лишен чувства юмора и согласился. Сначала он начал портрет карандашом, но скоро так подружился с молодыми физиками, что решил написать двойной портрет маслом. В тот год Петр Леонидович работал у какого-то мельника, налаживая ему водяную мельницу, за что и получил два мешка муки и петуха. В те голодные 20-е годы это был царский гонорар! Так вот, один из мешков муки и петух были поднесены Борису Михайловичу!

Двойной портрет долгие годы висел у Ольги Иеронимовны Капицы — матери Петра Леонидовича. Теперь портрет завещан Академии наук, и когда-нибудь будет украшать ее стены.

Межзвездные пузыри

С. СИЛИЧ

Галактика похожа на пену?..

Изучая нашу Галактику, астрономы выяснили, что пространство между звездами не пустое: оно заполнено чрезвычайно разреженным межзвездным газом. В основном это водород и немного гелия с небольшой примесью других химических элементов. Вблизи горячих звезд этот газ нагрет до тысяч кельвинов и поэтому ярко светится — такие области астрономы называют эмиссионными туманностями. На зимнем небе вы легко увидите одну из них: в созвездии Ориона чуть ниже трех ярких звезд его Пояса находится знаменитая Туманность Ориона. На темном загородном небе она видна даже невооруженным глазом, а в городе вы легко увидите ее в бинокль, и у вас исчезнут всякие сомнения в существовании межзвездного вещества.

А если рядом *нет горячих звезд*, то межзвездный газ остывает до нескольких кельвинов и сгущается в холодные непрозрачные облака, сквозь которые не проникает звездный свет. И эти темные облака тоже легко заметить на небе. Летом в той части Млечного Пути, что проходит через созвездие Лебедя, вы увидите темный клин, рассекающий Млечный Путь на два рукава: этот клин и есть темное межзвездное облако — сквозь него не видны лежащие за ним звезды.

Хотя в нашей Галактике межзвездного газа немного — всего 5% по массе, — его роль очень велика: ведь из этого вещества формируются звезды. Где собирается газ, там они и формируются. А газ, как и жидкость, собирается в потенциальных ямах, т.е. в тех местах, куда затягивает его гравитация. На Земле, стремясь к центру тяготения и наталкиваясь на твердую поверхность планеты, газ образует тонкий слой атмосферы. У Галактики нет твердой поверхности, поэтому стремление газа упасть к центру системы может быть остановлено лишь давлением самого газа и центробежной силой инерции, связанной с вращением Галактики. Вот почему слой межзвездного газа ле-

жит в плоскости симметрии Галактики в виде тонкого вращающегося «блина» диаметром около 30 кпк и толщиной всего 150 – 200 пк (напомним, что 1 пк ≈ $3\cdot10^{16}$ м). Именно в этом «блине» рождаются звезды. Но, как теперь выясняется, на этом не заканчиваются взаимоотношения звезд с межзвездным газом. Родившись из газа, звезды сами начинают активно *влиять на него*.

С влиянием звезд на окружающий их межзвездный газ астрономы знакомы давно на примере нашего Солнца. Его излучение и потоки частиц (солнечный ветер) выгнали из окрестности Солнца межзвездный газ и образовали вокруг него своеобразную лакуну, небольшой (в масштабах Галактики) «пузырь». Такая же горячая разреженная область окружает каждую звезду. Межзвездные пузыри вокруг Солнца и подобных ему заурядных звезд невелики по размерам. Однако более массивные звезды гораздо ярче и активнее Солнца. Соответственно и раздутые ими в межзвездной среде пузыри заметно крупнее. Поэтому не удивительно, что межзвездный газ весьма неоднороден и напоминает пену с мелкими и крупными пузырьками вокруг звезд разной массы.

Такой она и представлялась астрономам в недавнем прошлом. Но действительность оказалась сложнее.

... или на кротовую нору?..

Массивные звезды в конце своей эволюции взрываются, сбрасывая наружные слои со скоростью в тысячи километров в секунду. На небе в этот момент *видна яркая вспышка*, которую астрономы называют вспышкой сверхновой. Энергия ее взрыва составляет примерно 10^{44} Дж. Сброшенная оболочка стремительно расширяется, сгребая перед собой, как ножом бульдозера, межзвездный газ. Через несколько тысячелетий, когда движение оболочки замедляется, вокруг места взрыва образуется очень крупная каверна (астрономы называют такие каверны остатками сверхновых). Вы легко смоделируете подобный объект, выдув из соломинки большой *мыльный пузырь и сравнив* его с мелкими пузырьками пены.

Каждый пузырь сохраняется до тех пор, пока газ внутри него горяч и способен сопротивляться давлению окружающего газа. Когда же газ остывает, пузырь схлопывается. В диске нашей Галактики сверхновые взрываются нередко: 1 – 2 раза в столетие. А горячий газ в их пузырях не остывает десятки тысяч лет. Поэтому случается, что не успел схлопнуться один пузырь, а рядом с ним уже образовался другой и, прорвав оболочку первого, впрыснул в него *порцию горячего газа*. Это реанимирует старый пузырь, продлевает ему жизнь. Со временем образуются целые гирлянды оболочек сверхновых, *наполненные горячим* разреженным газом; они, как кротовые ходы или как сеть метрополитена, проходят сквозь диск Галактики, пересекаясь, распадаясь и возникая вновь.

Но и такое представление о межзвездной среде, пронизанной туннелями, существовало недолго.

... или на швейцарский сыр?

Радиоастрономические наблюдения последнего десятилетия показали, что, кроме мелко вспененной структуры и пересекающихся туннелей, межзвездная среда имеет и значительно более крупные каверны размером в сотни парсеков и даже в килопарсеки. На краю одной из таких гигантских пустот диаметром около 300 пк находится и наша *Солнечная* система. Подобная картина наблюдается и в соседних галактиках: их газовые диски напоминают ломти швейцарского сыра, из которых дыры *«торчат наружу»* (рис. 1).

Какая же сила выталкивает межзвездный газ из гигантских объемов галактического диска? Чтобы создать каверну диаметром 1 кпк, нужно затратить энергию порядка 10^{47} Дж. Это значительно превосходит даже столь грандиозную космическую катастрофу, как взрыв сверхновой. Пытаясь объяснить про-

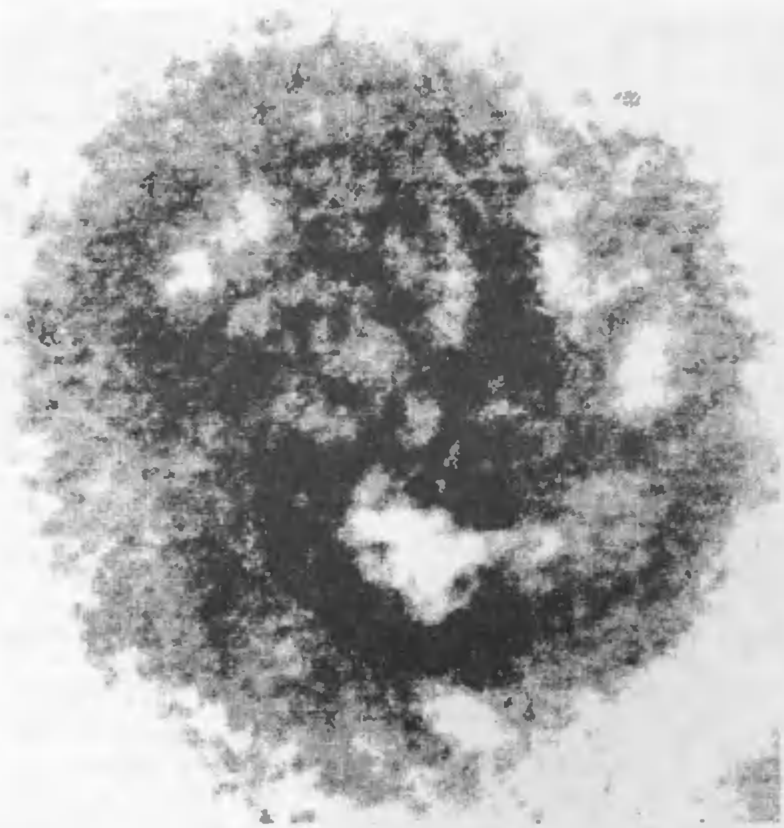


Рис. 1. Радиоизображение галактики Мессье 33 в линии излучения межзвездного водорода. Изображение негативное: темный цвет указывает на повышенную плотность межзвездного газа, в светлые пятна — это и есть гигантские межзвездные пузыри, наполненные горячим и очень разреженным веществом

исхождение гигантских межзвездных пузырей и, прежде всего, найти физический процесс, обеспечивающий необходимую энергию, астрофизики предложили несколько механизмов энерговыделения. Наиболее перспективными оказались два из них. Первый — это падение с большой высоты на галактический диск массивного газового облака. Земной аналог этого явления — падение и взрыв метеорита. Второй механизм — последовательные взрывы множества сверхновых звезд в крупном очаге звездообразования. Его земной аналог — взрыв порохового склада. На наш взгляд, именно этот механизм (имеются в виду сверхновые, а не бочки с порохом) выглядит наиболее естественным и лучше объясняет особенности наблюдаемых явлений.

Звезды расталкивают газ

Чем массивнее звезда, тем выше ее температура и интенсивнее горит ядерное топливо в ее недрах. Поэтому оно быстро сгорает — массивные звезды живут недолго. Продолжительность их жизни t_L зависит от исходной массы M звезды приблизительно так:

$$t_L = 5\cdot 10^7\left(\frac{M}{10M_C}\right)^{-1,6} \text{ лет}, \qquad (1)$$

где $M_C = 2\cdot 10^{30}$ кг — масса Солнца. Звезды с массами $M \geq 7M_C$ в конце эволюции теряют устойчивость и взрываются как сверхновые, теряя большую часть своего вещества. Рассмотрим детальнее, как выброшенное при взрыве вещество звезды взаимодействует с окружающим межзвездным газом.

В целом это напоминает взрыв бомбы в атмосфере. По межзвездному газу со сверхзвуковой скоростью движется ударная волна, вызывая почти мгновенное изменение температуры, давления, плотности и скорости вещества в очень узком слое шириной порядка длины свободного пробега атома. При этом значительная часть кинетической энергии движущегося газа превращается в тепло. Пройдя через фронт ударной волны, межзвездный газ становится значительно горячее. Но постепенно он остывает, теряя энергию на излучение и совершая работу по расширению. Скорость ударной волны снижается, а затем и вовсе прекращается расширение горячего пузыря вокруг взорвавшейся звезды.

Но энергии одной сверхновой, как мы видели, совершенно недостаточно для образования крупной межзвездной каверны. Выйти из «энергетического кризиса» помогает коллективное воздействие массивных звезд на окружающий их газ. Дело в том, что звезды, как правило, рождаются в недрах холодных облаков большими группами. При этом одновременно формируются тысячи «особей» разной массы. А поскольку продолжительность их жизни зависит от массы (см. формулу (1)), то они по очереди достигают конца своей эволюции — сначала наиболее массивные из них, а затем и менее массивные взрываются как сверхновые.

Образование гигантских межзвездных пузырей можно представить следующим образом. На ранних этапах жизни звездного скопления межзвездную среду нагревает мощное излучение горячих массивных звезд. Затем на более поздних стадиях эволюции они начинают активно выбрасывать вещество в виде звездного ветра, раздувающего окружающий межзвездный газ. Сравнительно небольшие каверны, образующиеся вокруг отдельных звезд, взаимодействуют друг с другом и формируют общую, движущуюся с небольшой скоростью оболочку (на этой стадии, по-видимому, находится оболочка, сквозь которую пролетает сейчас наше Солнце). Затем включается наиболее мощный процесс — вспышки сверхновых. Звезды взрываются последовательно, начиная с самых массивных. Первыми, через 4–5 млн лет после рождения звездной группировки, взрываются звезды с массами 30–50 M_C. Затем на протяжении 40–60 млн лет взрываются все менее и менее массивные члены скопления, вплоть до звезд с массой $7-8M_C$. Поскольку один за другим следуют сотни взрывов, весь процесс можно рассматривать как непрерывный с постоянным темпом выделения в газовую полость энергии

$$L_{SN} = 6{,}3\cdot 10^{35} NE_{44} \text{ Дж}/\text{с}, \qquad (2)$$

где N — число массивных звезд в скоплении, E_{44} — энергия вспышки одной сверхновой, выраженная в единицах 10^{44} Дж. Примерно через 50 млн лет источник энергии «отключается». В дальнейшем оболочка еще некоторое время расширяется, благодаря запасенной тепловой и кинетической энергии. Последовательные вспышки сотен массивных звезд, сконцентрированных в небольшой области галактического диска, могут, таким образом, обеспечить энергию, необходимую для рождения крупных межзвездных пузырей. Теперь попробуем разобраться, как эволюционирует межзвездный пузырь.

Простейший пузырь — сферический

Задача о распространении ударной волны, возникающей при точечном взрыве, требует интегрирования общей системы нелинейных уравнений газодинамики и поэтому очень сложна. Ее общего аналитического решения не существует. В конце 40-х годов стимулом для развития приближенных методов решения этой задачи стали работы по ядерному оружию.

Задача о точечном взрыве. Простейший случай — сильный взрыв в однородной среде. Тогда ударная волна и сформированная ею оболочка будут сферически симметричными. Впервые решение этой задачи было получено в работах Л.И.Седова и Дж.Тейлора. Это решение обладает двумя особенностями. Во-первых, почти весь сгребаемый ударной волной газ накапливается в узком слое непосредственно за фронтом волны. Во-вторых, давление внутри полости почти всюду одинаково. Последнее обстоятельство связано с высокой температурой нагретого ударной волной газа и быстрым рассасыванием возникающих в нем неоднородностей. Эти две особенности, позволяющие существенно упростить задачу о сильном взрыве в однородной среде, лежат в основе хорошо известного в физике плазмы и астрофизике приближения тонкого слоя (иногда его называют моделью снегоочистителя — по аналогии со снегоуборочной машиной, которая накапливает весь сгребаемый снег в тонком слое перед ковшом).

Приближение тонкого слоя основано на двух предположениях. Считается, что весь нагребаемый газ сосредоточен в бесконечно тонком слое непосредственно за фронтом ударной волны, а также что давление внутри полости однородно и зависит только от времени. Такой же подход применяется и в тех случаях, когда рассматривается взрыв в неоднородной среде, приводящий к появлению несферической оболочки.

Конечно, в этом приближении при расчетах теряется информация о распределении гидродинамических величин внутри пузыря и используется только среднее значение внутреннего давления. Однако оно позволяет описать такие важные свойства межзвездных оболочек, как их форму, скорость расширения и распределение поверхностной плотности вещества.

Любопытно, что зависимость радиуса сферической оболочки R_s от времени и начальных условий можно получить простейшими методами теории размерностей. Очевидно, что взрыв характеризуется только его энергией E_0, а среда, по которой распространяется ударная волна, — только плотностью вещества ρ_0, поскольку давление и температура в ней относительно малы. Тогда интересующую нас зависимость можно представить так:

$$R_s = AE_0^{\alpha}\rho_0^{\beta}t^{\gamma}, \qquad (3)$$

где A — безразмерная константа. Очевидно, что это же уравнение справедливо и для размерностей входящих в него величин:

$$\text{м} = \text{Дж}^{\alpha}\cdot\left(\text{кг}/\text{м}^3\right)^{\beta}\cdot \text{с}^{\gamma} = \text{м}^{2\alpha-3\beta}\cdot\text{кг}^{\alpha+\beta}\cdot\text{с}^{\gamma-2\alpha}. \qquad (4)$$

Отсюда для показателей степеней получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} 2\alpha - 3\beta &= 1,\\ \alpha+\beta &= 0,\\ \gamma - 2\alpha &= 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

и, решив ее, находим, что $\alpha = 1/5$, $\beta = -1/5$ и $\gamma = 2/5$. Следовательно,

$$R_s \sim \left(\frac{E_0}{\rho_0}\right)^{1/5} t^{2/5}. \qquad (6)$$

Взяв производную по времени от R_s, найдем, что скорость расширения оболочки убывает со временем:

$$v_s \sim \left(\frac{E_0}{\rho_0}\right)^{1/5} t^{-3/5}. \qquad (7)$$

Так эволюционирует межзвездный пузырь при мгновенном выделении энергии в однородной среде, например при взрыве сверхновой.

Звездный ветер. На разных стадиях эволюции, а особенно в конце своей жизни, звезды теряют вещество. У массивных звезд скорость выбрасываемого вещества достигает 1000 км/с, так что полная энергия, уносимая этим звездным ветром в пространство за тысячи лет, сравнима с энергией, выделяющейся при вспышке сверхновой. Но звездный ветер растянут во времени и потому не приводит к таким быстрым и катастрофическим последствиям, как взрыв сверхновой. Тем не менее, эволюция каверн, образованных звездным ветром в межзвездной среде, имеет немало общего с эволюцией остатков сверхновых. Различие же заключается в том, что из-за постоянного притока энергии в полость внутренняя структура выдуваемых звездным ветром пузырей отличается от той, которая характерна для остатков вспышек сверхновых.

У развитой каверны, образованной звездным ветром, имеется четкая четырехзонная структура (рис.2). Внутренняя зона a — это область свободно разлетающегося с постоянной скоростью звездного ветра; она ограничена внутренней ударной волной (УВ). Радиус этой области мал по сравнению с размерами всей каверны. Далее следует зона b, заполненная горячим, почти изобарическим газом, в основном испаряющимся с внутренней кромки холодной плотной оболочки c, отделенной от зоны b контактным разрывом (КР). Сама же плотная оболочка состоит из сжатого внешней ударной волной межзвездного вещества d.

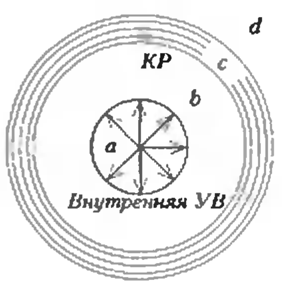


Рис.2. Схема каверны, образованной звездным ветром

Движение такой оболочки, как и при точечном взрыве, описывается законами сохранения массы, импульса и энергии. В случае звездного ветра, однако, полная энергия остатка не сохраняется. Кинетическая энергия оттекающего с поверхности звезды вещества на фронте внутренней ударной волны превращается в тепловую. Это приводит к нагреванию газа в зоне b, который, как упругий буфер, приводит в движение внешнюю плотную оболочку. Изменение тепловой энергии этого буфера определяется мощностью звездного ветра L. Используя метод размерностей, мы легко определим, что зависимость радиуса оболочки от времени, плотности окружающего газа и мощности звездного ветра должна быть такой:

$$R_s \sim \left(\frac{L}{\rho_0}\right)^{1/5} t^{3/5}. \qquad (8)$$

Как видим, постоянный приток энергии в полость делает ее расширение более равномерным.

От сферы к реальной фигуре

Из формул (6)–(8) следует, что скорость расширения оболочки зависит от плотности окружающего газа: при прочих равных условиях она тем больше, чем плотность газа ниже. А что будет, если плотности газа различны с разных сторон оболочки? Такая ситуация может стать вполне реальной, когда оболочка достигнет солидного размера. Полученные нами выше решения справедливы только для небольших каверн в пределах однородных областей межзвездного газа. Крупные оболочки, размеры которых превышают характерные масштабы неоднородностей галактических дисков, уже не могут сохранять сферическую форму. В первом, самом грубом, приближении можно считать различные части оболочки не взаимодействующими друг с другом и применять полученные нами формулы для каждой части в отдельности. Очевидно, что оболочка будет расширяться быстрее в тех направлениях, где плотность окружающего газа меньше. Это приводит к вытягиванию оболочки в направлении наибыстрейшего уменьшения плотности.

В диске Галактики притяжение к ядру почти полностью уравновешено центробежной силой инерции, и нескомпенсированным остается лишь ускорение к галактической плоскости. Поэтому давление и плотность межзвездного газа уменьшаются по мере удаления от плоскости Галактики (как это происходит в земной атмосфере по мере удаления от поверхности планеты). Значит, можно ожидать, что большие оболочки будут вытягиваться в направлении, перпендикулярном галактической плоскости.

Кроме этого, следует помнить, что диски галактик вращаются, причем не так, как карусели: на разных расстояниях от центра диска орбитальные периоды его частей различны (как у планет в Солнечной системе). Поэтому в отличие от *твердотельного* вращения карусели вращение галактического диска называют *дифференциальным*. Когда межзвездный пузырь значительно расширится, он начинает расталкивать газ, который в одних областях отстает от орбитального движения пузыря, а в других — опережает его. Поэтому форма самого пузыря начинает искажаться, и он вытягивается в направлении галактического вращения.

До сих пор, рассуждая об искажении формы межзвездного пузыря, мы основывались на физической интуиции. Но проверить ее может только точный расчет. Корректное описание крупных галактических оболочек требует решения трехмерной газодинамической задачи. Это стало важным стимулом для развития и внедрения в астрофизику новых численных методов. Однако точные методы решения таких задач очень сложны и требуют для своей реализации огромных затрат машинного времени. Например, проведенные в конце 80-х годов американскими астрофизиками Мак-Креем, Мак-Лоу и Норманом вычисления эволюции двумерных оболочек требовали для расчета лишь одного варианта от 6 до 12 часов времени на наиболее мощном тогда суперкомпьютере. Полное же решение трехмерных задач сталкивается с большими вычислительными трудностями даже при использовании современных быстродействующих машин.

Рассмотрим поэтому в общих чертах метод решения многомерных задач, основанный на описанном выше приближении тонкого слоя. Напомним, что для решения газодинамических задач существует два подхода. В *эйлеровом* подходе отслеживается изменение всех физических величин в фиксированных точках пространства. Течение жидкости или газа описывается изменяющимися во времени полями скоростей, плотностей, температур. В отличие от этого, в *лагранжевом* подходе отслеживается движение отдельных элементов среды. Для изучения движения многомерных оболочек в приближении тонкого слоя мы пользуемся лагранжевым подходом. Для вычислений вся оболочка разбивается на N лагранжевых элементов

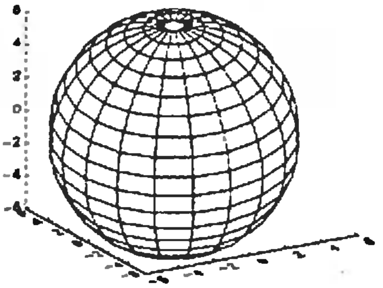


Рис.3. Разбиение сферической оболочки на лагранжевые элементы в начале вычислений

(рис.3). Движение каждого отдельного элемента описывается законами сохранения массы и импульса так же, как это делалось для всей сферически симметричной оболочки в однородной среде. Но теперь вместо одной системы уравнений, описывающей изменение радиуса сферической оболочки, мы получаем множество уравнений движения отдельных элементов оболочки.

Для обеспечения приемлемой точности расчета мы разбиваем оболочку на 1600 лагранжевых элементов. Это приводит к необходимости решать систему 11200 обыкновенных дифференциальных уравнений, поскольку движение каждого элемента поверхности описывается семью уравнениями: одним уравнением сохранения массы, тремя уравнениями для компонентов импульса и тремя уравнениями для компонентов скорости плюс общим уравнением сохранения энергии. Такая задача, однако, легко решается с помощью хорошего персонального компьютера и специальных уравнений, разработанных специалистами в области прикладной математики. Результаты расчетов эволюции оболочек в нашей Галактике приведены на рисунке 4, где показаны оболочки, расположенные на таком же расстоянии от центра Галактики, как наше Солнце. Приток энергии в полость обеспечивается скоплением, содержащим около 100 массивных звезд. На рисунке 4,*а* показана оболочка, образовавшаяся вокруг скопления, расположенного в плоскости Галактики. На рисунке 4,*б* скопление звезд смещено всего на 50 пк над галактической плоскостью. Хорошо видно, как сильно зависит форма оболочек от положения скопления. Нетрудно заметить также искажение формы оболочек вследствие дифференциального вращения галактического диска.

Как видим, крупные межзвездные

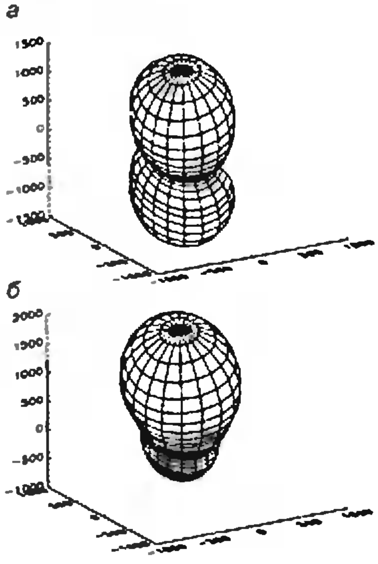
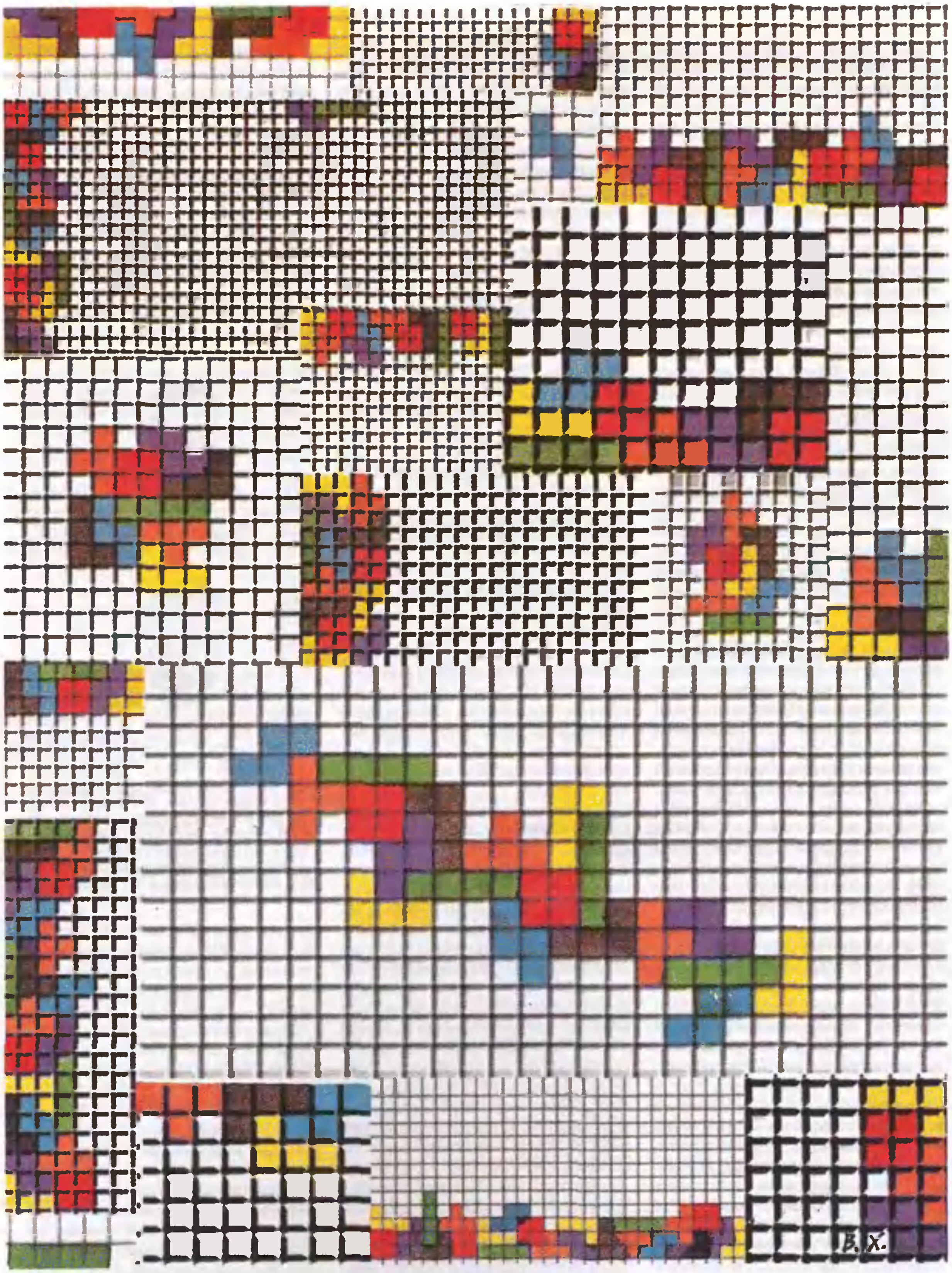


Рис.4. (а) Оболочка, образующаяся при взрыве около 100 сверхновых, расположенных в плоскости Галактики на расстоянии 8,5 кпк от ее центра. (б) Те же начальные условия, что и в предыдущем случае, только сверхновые располагаются в 50 пк от плоскости Галактики

пузыри приобретают форму песочных часов. На поздних стадиях эволюции оболочки у нее вблизи плоскости Галактики образуется перетяжка — узкий слой, в котором сосредоточена основная доля сгребенного межзвездного вещества. Именно здесь возникают условия для образования крупных межзвездных облаков и формирования в их недрах нового поколения звезд.

Итак, рожденный в результате звездной активности гигантский межзвездный пузырь сам становится инициатором формирования звезд следующего поколения. Петля космической эволюции замыкается.

Публикацию подготовил
В.Сурдин


В.Х.

Группы и замощения полимино

Д.ФОМИН

Наверняка многим читателям «Кванта» знакома захватывающая компьютерная игра *тетрис*, созданная в Советском Союзе и распространившаяся по всему миру. В этой игре требуется сложить как можно больше сплошных рядов из «падающих с неба» фигурок. Вы видите все 7 фигурок тетриса на

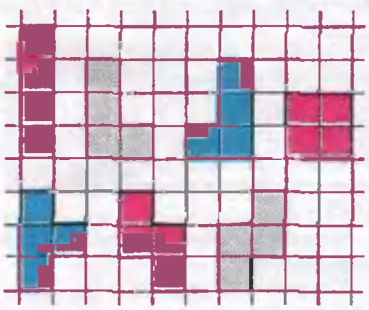


Рис. 1

рисунке 1; по аналогии с домино их называют тетрамино, так как они состоят не из двух, а из четырех одинаковых квадратиков. В тетрисе разрешается сдвигать и поворачивать фигуры, чтобы получить более плотную укладку. (Именно поэтому фигур ровно 7: это все возможные цельные фигуры из 4 квадратов, примыкающих друг к другу по сторонам, с точностью до поворотов и параллельных переносов.) В другой игре-головоломке, *пентамино*, завоевавшей популярность задолго до тетриса, строительным материалом являются пластмассовые фигурки из 5 квадратиков, и их можно не только поворачивать, но и переворачивать другой стороной. С точностью до поворотов и переворачиваний, т.е. зеркальных отражений, имеется 12 различных пентамино, они и входят в набор. Из них можно сложить, например, шахматную доску, из которой вырезан центральный квадрат 4×4 (догадайтесь, как!). Эта задача была опубликована еще в 1907 г. известным автором головоломок Анри Дьюдени. Но настоящую известность задачи о пентамино и других полимино получили благодаря профессору Университета Южной Калифорнии С.У.Голомбу. Впрочем, узнать подробнее об истории этого вида головоломок, о том, какие математические задачи с ними связаны и как их можно решать, лучше прямо из книги профессора Голомба «Полимино» (М.: Мир, 1975).

Эта статья была опубликована в журнале «Квантум» в 1991 году.

Иллюстрация В.Митурич-Хлебниковой

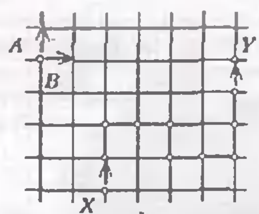
Мы же будем говорить только об одном, но, пожалуй, самом многочисленном классе задач о полимино: о задачах, в которых спрашивается, можно ли данную фигуру на клетчатой плоскости сложить из полимино некоторых фиксированных видов. Чтобы дать *положительный* ответ на такой вопрос, достаточно просто предъявить нужную укладку (обычно ее находят с помощью разумно организованного перебора, зачастую весьма трудоемкого). Но доказать перебором, что требуемая укладка невозможна, бывает гораздо труднее: слишком велико число вариантов, которые нужно рассмотреть. Для доказательства невозможности часто используют специальную раскраску плоскости (см. упомянутую книгу Голомба). Мы продемонстрируем новый подход к подобным задачам, основанный на применении групп. Его идея была сообщена автору в 1987 г. молодым ленинградским математиком Олегом Ижболдиным. Все необходимые сведения о группах можно найти в статье А.Сосинского в этом номере «Кванта».

От полимино к группам

Нарисуем на плоскости решетку из единичных квадратов. Будем рассматривать фигуры, состоящие из конечного числа этих квадратов. Такая фигура называется полимино, если все ее квадраты можно обойти так, что каждый следующий квадрат примыкает к предыдущему по стороне. Для простоты ограничимся случаем, когда граница полимино — это одна замкнутая ломаная, т.е. фигуры с «дырами» рассматривать не будем.

Пусть XY — ориентированная ломаная с началом X и концом Y, образованная линиями нашей решетки. Пройдем по ней от начала к концу. Каждый отрезок между соседними узлами решетки будет проходиться в одном из четырех направлений, так что нашу ломаную можно задать последовательностью направлений движения.

Теперь возьмем произвольную группу G и в ней — два элемента A и B. Сопоставим движению по ломаной вверх элемент A, вправо — B, вниз и влево — обратные элементы A^{-1} и B^{-1}, а всей ломаной в целом сопоставим элемент группы $t(XY)$, равный произведению этих 4-х элементов, взятых в том порядке, в котором встречаются соответствующие направления при

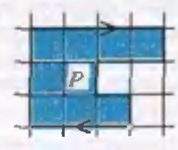


$t(XY) = AABBA^{-1}BBAAA = A^2B^2A^{-1}B^2A^3$

Рис. 2

движении вдоль ломаной (см. пример на рисунке 2).

Такое же произведение можно выписать для граничной линии любого полимино P, если отметить на ней начало (узел решетки O) и выбрать направление обхода, скажем, по часовой стрелке; обозначим его $t_O(P)$ (рис.3).



$t_O(P) = B^{-3}A^3B^4A^{-1}B^{-2}A^{-1}BA^{-1}$

Рис. 3

Упражнения (которые пригодятся нам в дальнейшем)

1. Докажите, что $t(YX) = t(XY)^{-1}$, где YX — та же ломаная XY, но проходимая из конца в начало.

2. Пусть O и O_1 — два узла на границе полимино P. Докажите, что

$$t_{O_1}(P) = t(O_1O)t_O(P)t(OO_1).$$

Из этих упражнений следует, что если произведение $t_O(P)$ — это единичный элемент e группы G, то равенство $t_O(P)=e$ сохранится и при замене направления обхода на противоположное, и при переносе начала обхода в другую точку (ибо в этом случае

$$t_{O_1}(P)=t(O_1O)t(OO_1)=$$
$$=t(O_1O)t(OO_1)^{-1}=e).$$

Поэтому можно писать просто $t(P)=e$, не указывая ни начала, ни направления обхода.

Теперь все готово, чтобы сформулировать и доказать основную теорему.

Теорема. *Пусть полимино P составлено из полимино $P_1, P_2, \dots P_k$ и пусть для элементов A и B некоторой группы G*

$$t(P_1)=t(P_2)=\dots=t(P_k)=e.$$

Тогда и $t(P)=e$.

Докажем это сначала для полимино P, составленного из двух частей P_1 и P_2, примыкающих друг к другу по одной ломаной XY. Движемся из точки X по общему участку границ P_1 и

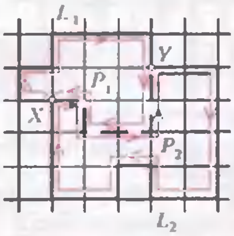


Рис. 4

P, обойдем P_1, а затем P_2 (рис.4), выписывая произведение соответствующих элементов группы G. Ломаную YX мы пройдем туда и обратно, поэтому соответствующие множители в произведении сократятся и результат будет эквивалентен однократному обходу границы P:

$$t_X(P_1)t_X(P_2)=t(L_1)t(YX)t(XY)t(L_2)=$$
$$=t(L_1)t(L_2)=t_X(P),$$

где L_1 — это общий участок границ P_1 и P от X до Y, а L_2 — общий участок границ P_2 и P от Y до X. Следовательно, $t_X(P)=t(P_1)t(P_2)=e$. Аккуратное доказательство в случае произвольного числа k кусков, на которые разрезано полимино P, проводится аналогично, с использованием индукции по k. Достаточно только заметить, что среди полимино $P_1, \dots, P_k$, составляющих P, всегда найдется такое, которое составляет с объединением остальных такую же пару, как P_1 и P_2 в предыдущем рассуждении.

Упражнение 3. Докажите, что если $AB=BA$, то $t(P)=e$ для любого полимино P.

Из этого упражнения видно, что использовать коммутативные группы в задачах об укладке полимино бессмысленно: они не дадут никакой информации. Ясно также, что мы можем ограничиться только группами, все элементы которых являются произведениями каких-то двух элементов и обратных к ним, взятых в любом числе и порядке. Такие группы называют *группами, порожденными двумя элементами*, а сами эти элементы — их *образующими*.

Приведем два примера (они появляются и в статье Сосинского).

Первый — это группа S_3 перестановок чисел 1, 2, 3. Она порождается перестановками

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}.$$

Упражнение 4. Проверьте, что 4 перестановки из S_3, отличные от A и B, совпадают с $A^2=e$, AB, BA и ABA.

Второй пример — это так называемая группа диэдра D_n ($n=2, 3, \dots$), т.е. группа симметрий правильного n-угольника (при $n=2$ n-угольником считается отрезок). Она состоит из всех изометрий плоскости, отображающих этот n-угольник на себя: это n поворотов вокруг центра n-угольника на углы 0, $2\pi/n$, $4\pi/n, \dots$ $\dots, 2(n-1)\pi/n$ и n осевых симметрий

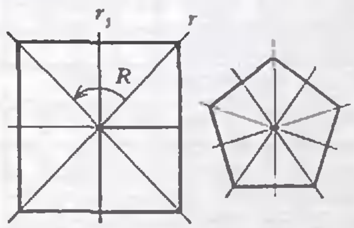


Рис. 5

относительно серединных перпендикуляров к сторонам (рис. 5). За образующие в этой группе можно взять поворот R на угол $2\pi/n$ и любую из симметрий r.

Упражнение 5. Проверьте, что все повороты в группе D_n можно записать в виде R, R^2, $R^3, \dots, R^n=e$, а осевые симметрии — в виде r, rR, $rR^2, \dots, rR^{n-1}$.

Впрочем, в дальнейшем будет использоваться другая пара образующих — r и $r_1=rR$. Это действительно образующие, так как $R=rr_1$. Все группы диэдра, за исключением D_2, некоммутативны: $rr_1=R\neq R^{-1}=r_1r$.

Теперь можно вернуться к задачам об укладке полимино. Обычно в них задается определенный набор стандартных полимино (скажем, 12 пентамино) и требуется составлять из них различные фигуры, причем стандартные полимино можно сдвигать, поворачивать, переворачивать и составлять в любом порядке. Переформулируем основную теорему так, чтобы стало удобнее применять ее к этой задаче.

Сначала — еще одно определение. Некоммутативную группу с двумя образующими A и B назовем *нуль-группой* для полимино P (относительно A и B), если при любом расположении P на клетчатой плоскости $t(P)=e$.

Непосредственно из основной теоремы следует

Условие укладки. *Если G — нуль-группа для каждого из полимино $P_1, \dots, P_k$, то и для любого полимино P, которое можно сложить из полимино типов $P_1, \dots, P_k$, G также будет нуль-группой.*

Примеры

1. *Мономино.* Для одиночного квадратика P при любом его расположении на решетке $t(P)=ABA^{-1}B^{-1}$ (рис.6, *а*). Равенство $t(P)=e$ означало бы, что $AB=BA$, т.е. что G — коммутативная группа. Но такие группы мы условились не рассматривать. Итак, нуль-группы для мономино нет. Это вполне естественно, так как любое полимино, очевидно, можно уложить с помощью мономино.

2. *Домино* можно расположить на решетке двумя способами; им отвечают два произведения (рис.6, *б*)

$$t_1=AB^2A^{-1}B^{-2} \text{ и } t_2=A^2BA^{-2}B^{-1}.$$

Группа S_3 с указанными выше образующими

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$$

является нуль-группой для домино. В самом деле, поскольку $A^2=B^2=e$,

$$t_1=AeA^{-1}e=AA^{-1}=e,\ t_2=BB^{-1}=e.$$

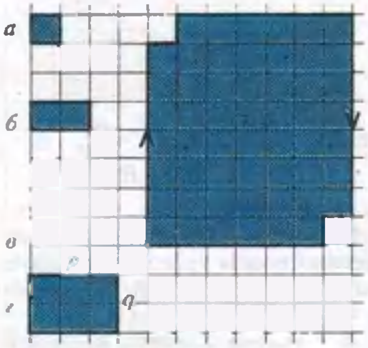


Рис. 6

Теперь можно решить известную задачу о возможности замощения с помощью домино шахматной доски, из которой вырезаны две противоположные угловые клетки, например a8 и h1 (рис.6, *в*). Если обходить такую доску, начав с угла a1, то получим произведение

$$t = A^7BAAB^7A^{-7}B^{-1}A^{-1}B^{-7} = (AB)^4 = AB \ne e,$$

поскольку

$$AB = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Следовательно, желаемое замощение невозможно. С тем же успехом мы могли бы здесь воспользоваться группой D_3 симметрий правильного треугольника, взяв за образующие отражения относительно двух его высот. Возможно, вам будет проще иметь дело с этой группой. Однако на самом деле S_3 и D_3 — это всего лишь два разных обличья одной и той же абстрактной группы (т.е. они *изоморфны*); и вы это увидите сразу, как только занумеруете вершины треугольника и посмотрите, как переставляются номера при симметриях.

3. $p\times q$-мино. Рассмотрим прямоугольник P размером $p\times q$ (рис.6, *г*). В качестве группы G возьмем группу перестановок, порожденную двумя циклическими перестановками длины p, причем эти циклы имеют ровно один общий элемент (рис.7):

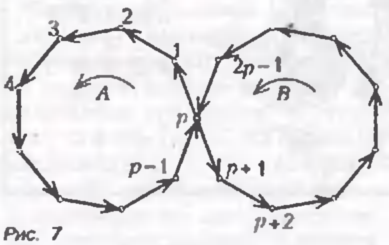


Рис. 7

$$A = \begin{pmatrix}12\ldots p-1 & p & p+1\ldots 2p-1\\ 23\ldots p & 1 & p+1\ldots 2p-1\end{pmatrix}$$

и

$$B = \begin{pmatrix}12\ldots p-1 & p & p+1\ldots 2p-1\\ 12\ldots p-1 & p+1 & p+2\ldots p\end{pmatrix}.$$

Двум возможным расположениям P на клетчатой плоскости отвечают произведения $t_1 = A^pB^qA^{-p}B^{-q}$ и $t_2 = B^pA^qB^{-p}A^{-q}$. Поскольку $A^p = B^p = e$, оба произведения равны e, т.е. G — нуль-группа для прямоугольного полимино P. Другой нуль-группой для P является группа G_1, порожденная двумя циклами A_1 и B_1 длины q, имеющими единственный общий элемент.

Пользуясь этой конструкцией, докажем, что *прямоугольник Q размером $m\times n$ можно разрезать на прямоугольники $p\times q$ только в том случае, когда каждое из чисел p и q является делителем хотя бы одного из чисел m и n.*

В этом случае условие укладки принимает вид $t(Q) = A^nB^mA^{-n}B^{-m} = e$ или $A^nB^m = B^mA^n$. Для указанных выше циклических перестановок A и B это равенство возможно только если $A^n = e$ или $B^m = e$ (проследите за общим элементом циклов при преобразованиях A^nB^m и B^mA^n). Но $A^n = e$, только если n делится на p, а $B^m = e$, если m делится на p. Заменяя циклы A и B на циклы A_1 и B_1 длины q, получим, что или n, или m делится на q.

Очевидно, что рассматриваемая укладка возможна только в том случае, если каждое из чисел m и n имеет вид $xp + yq$, где x и y — некоторые целые неотрицательные числа (сторона большого прямоугольника составляется из сторон меньших прямоугольников). Объединяя все три условия, получаем, что либо одно из чисел m и n должно делиться на p, а другое на q, либо одно из чисел делится и на p, и на q, а другое имеет вид $xp + yq$ $(x,\ y \ge 0)$.

Упражнения

6. Докажите, что последнее условие не только необходимо, но и достаточно, чтобы можно было замостить $m\times n$-мино с помощью $p\times q$-мино.

7. Докажите, что прямоугольник $m\times n$ можно замостить квадратами $p\times p$ и $q\times q$ тогда и только тогда, когда либо оба числа m и n делятся на p, либо оба они делятся на q, либо одно из них делится и на p, и на q, а другое имеет вид $xp + yq$, где x и y — целые неотрицательные числа (*Указание*. Группа перестановок, порожденная двумя циклами длин p и q, имеющими ровно один общий элемент, является нуль-группой для обоих квадратов $p\times p$ и $q\times q$.)

В этих упражнениях удается получить необходимое и достаточное условие замощения. Но надо признаться, что это редкий случай. Наша теорема дает только необходимость и в основном может применяться тогда, когда нужно установить невозможность той или иной укладки.

Несколько задач о нуль-группах

А. Докажите, что группа D_4 симметрий квадрата с образующими r и r_1 (см. рис.5) является нуль-группой для T-тетрамино (рис.8, *а*).

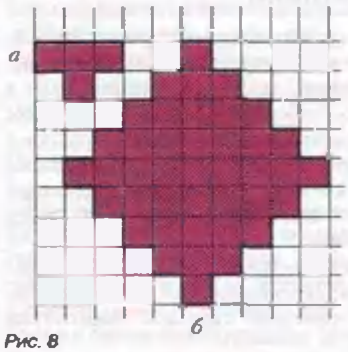


Рис. 8

В. Существует ли $4k$-мино (k = 1, 2, ...), для которого группа D_4 (из задачи А) не является нуль-группой?

С. Докажите, что а) при n = 2, 3, 4, б) для любого $n \ge 2$ существует общая нуль-группа для всех n-мино.

D. Докажите, что D_{18} — это нуль-группа для полимино на рисунке 8,*б*. Как надо выбрать образующие A и B?

Е. Раскрасим клетки полимино P черным и белым цветом в шахматном порядке и обозначим через $c(P)$ абсолютную величину разности между числом черных и белых клеток. Докажите, что при $c(P) > 0$ группа $D_{2c(P)}$ является нуль-группой для P, а для любого $n > 2c(P)$ группа D_n не будет нуль-группой для P (теорема о шахматной раскраске).

А теперь попробуйте сами придумать другие примеры нуль-групп и решить с их помощью какие-нибудь интересные задачи о замощении полимино.

Конечные группы

А. СОСИНСКИЙ

ПОНЯТИЕ группы, в частности конечной группы, — одно из важнейших понятий математики. И вместе с тем *одно из* самых распространенных и наиболее полезных для приложений.

Без конечных групп нельзя, например, указать, какие алгебраические уравнения разрешимы в радикалах, а какие — нет, описать, как устроены кристаллы, создавать коды, *исправляющие ошибки*. Об этом, однако, мы здесь рассказывать не будем, а ограничимся простейшими примерами конечных групп.

Иллюстрации: группы действий

Непустой набор некоторых действий, которые можно последовательно выполнять, называют группой, если в этом наборе для каждого действия обязательно присутствует обратное к нему, а результат последовательного *выполнения любых* двух действий тоже является действием из этого набора.

В качестве *иллюстрации* рассмотрим действия солдата, выполняющего команды строевой подготовки

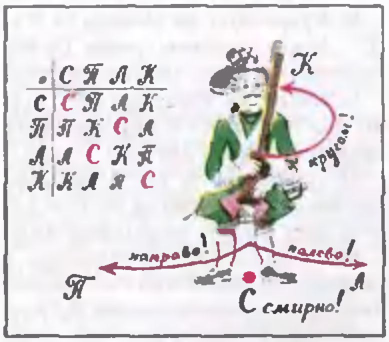


Рис. 1

(рис.1). Эти четыре действия составляют группу $R(\square)=\{С, П, Л, К; \circ\}$. Так, результат последовательного выполнения действий П и К (направо и кругом) будет совпадать с результатом действия Л (налево); это записывается в виде равенства $К \circ П = Л$. Точно так же $Л \circ Л = П \circ П = К$, $Л \circ П = П \circ Л = К \circ К = С$. Остальные соотношения в группе можно извлечь из ее *таблицы умножения*, показанной на рисунке 1. Особую роль играет *здесь действие* С, которое можно назвать «ничегонеделание». (Такое действие обязательно есть в любой группе: мы его получим, *выполнив* произвольное действие, а затем обратное к нему.) У нас действия П и Л обратны друг к другу, действие К — обратно к самому себе, и т.д.

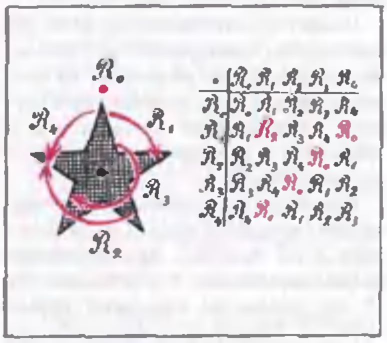


Рис. 2

Рассмотрим *другую группу*, тоже состоящую из поворотов. Именно — группу поворотов пятиконечной звезды $П(\star)$ относительно ее центра (рис.2). «Ничегонеделание» (в этом случае — поворот на 0°) обозначено через R_0, а остальные повороты (на 72°, 144°, 216°, 288°) — через R_1, R_2, R_3, R_4. Здесь $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2 = R_3$, $R_3 \circ R_3 = R_1$, $R_1 \circ R_4 = R_0$ (последнее означает, что R_4 обратно к R_1) и т.д.

Набор

$$П(\star)=\{R_0, R_1, R_2, R_3, R_4; \circ\}$$

образует группу.

Рассмотрим, наконец, «группу надевания носка» (рис.3), состоящую из следующих действий:

О = «Оставь, как есть»,

П = «Сними и надень на другую ногу»,

В = «Сними, выверни и надень на ту же ногу»,

П′ = «Сними, выверни и надень на другую ногу».

Здесь «ничегонеделание» — это О, далее $П \circ В = П'$, $П \circ П = В \circ В = О$, $П' \circ П = В$ и т.д.

Снова получается группа $H = \{О, П, В, П'; \circ\}$, *состоящая, как* и $R(\square)$, из четырех действий. Группы H и $R(\square)$, однако, принципиально разные: у них таблицы умножения отличаются не только обозначением *элементов*, но и своим строением. Так, по диагонали таблицы умножения H стоит одно и то же действие О, в то время *как на этой* диагонали у $R(\square)$ стоят разные элементы.

Подозреваю, что у самых серьезных читателей нарастает возмущение: какая-то там строевая подготовка, надевание носков — что за глупости такие, не научно это все! Спешу возразить: научно, даже очень. Знаете, как на самом деле называется набор действий солдата? *Циклическая группа 4-го порядка* или *группа вычетов по модулю 4*. А наше «надевание носков» — *группа Клейна*. Повороты же звезды — это одна из так называемых *простых конечных групп*.

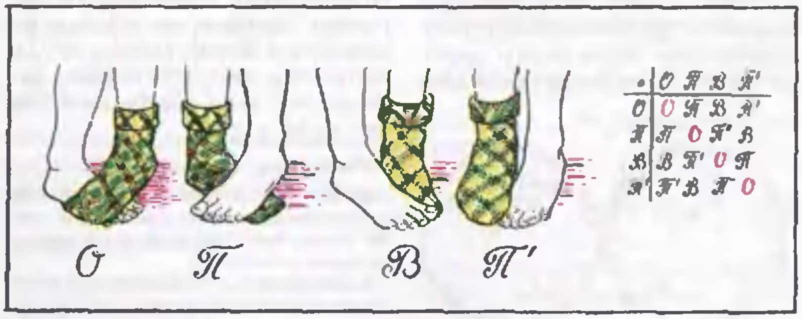


Рис.3

Эта статья была опубликована в журнале «Квант» в №2 за 1987 год.

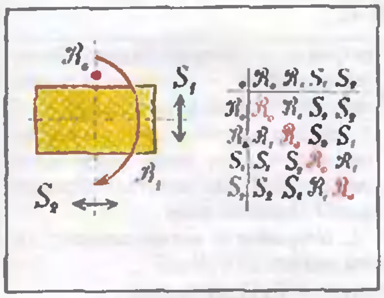


Рис. 4

Группы симметрий геометрических фигур

С каждой геометрической фигурой F можно связать вполне определенную группу $S(F)$, называемую *группой самосовмещений* или *группой симметрий* этой фигуры; по определению, ее набор действий состоит из всех перемещений, совмещающих фигуру F саму с собой. Например, $S(\square)$состоит из 8 действий: четырех поворотов квадрата (относительно его центра, в том числе на 0°) и четырех отражений (относительно двух диагоналей и двух «средних линий» квадрата).

В группе $S(\triangle)$ самосовмещений правильного треугольника — 6 действий, в группе $S(▭)$ прямоугольника — 4. Таблица умножения группы $S(▭)$ изображена на рисунке 4.

Если сравнить таблицу умножения для группы $S(▭)$ с таблицей умножения для группы H, можно заметить, что эти таблицы отличаются только обозначением *действий*. Если переименовать действия так:

$$О \to R_0,\ П \to R_1,\ В \to S_1,\ П' \to S_2,$$

то одна таблица превратится в другую. Группы с совпадающими (при подходящем переименовании действий) таблицами умножения называются *изоморфными*. Мы сейчас установили, что группы $S(▭)$ и H изоморфны (их обычно в честь Ф.Клейна обозначают буквой K), а ранее заметили, что эти группы не изоморфны группе $R(\square)$ действий солдата.

Читатель, возможно, догадался, почему мы обозначили группу действий солдата через $R(\square)$: она изоморфна *группе поворотов квадрата* относительно его центра на углы $2k\pi/4$, $k = 0, 1, 2, 3$. Эта группа — частный случай (при $n = 4$) *группы поворотов правильного n-угольника* (относительно его центра), которая еще называется *циклической группой n-го порядка* и обычно обозначается через Z_n.

В алгебре группы изучают «с точностью до изоморфизма», т.е. не различают изоморфные группы: алгебраисту не интересно, как называется группа и ее действия, ему важно знать структуру таблицы умножения группы.

Группы перестановок и их подгруппы

Рассмотрим конечный набор предметов — скажем, пять. Обозначим предметы цифрами, а весь набор через $N_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. *Перестановкой* $i \in S_5$ этих предметов называется любое взаимно однозначное *отображение* $i: N_5 \to N_5$, т.е., попросту говоря, перенумерация предметов. Новый номер $i(k)$ *k-го предмета мы* будем обозначать через i_k. Для наглядности перестановку i обычно представляют в виде таблицы:

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 \end{pmatrix}.$$

Это позволяет легко находить произведение перестановок i и j. Например, если

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

то $k(3) = (i \circ j)(3) = i(j(3)) = i(5) = 2$, так что

$$i \circ j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(обратите внимание, что при $k = i \circ j$ сначала *выполняется* j, *а потом* i, причем это не все равно: $i \circ j \ne j \circ i$ — проверьте!). Также легко находить *обратные перестановки* («чтением снизу вверх»):

$$i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что S_5 образует группу, состоящую из $5! = 120$ перестановок. Эта группа называется *группой перестановок пяти предметов или симметрической группой пятой степени*. Совершенно аналогично определяется *симметрическая группа* S_n *n-й степени* для любого натурального n.

Группы перестановок интересны в частности тем, что содержат много *подгрупп* (т.е. частей, которые сами являются группами). В группах перестановок содержатся подгруппы, изоморфные всем нашим ранее рассмотренным группам. Заинтересованный читатель может в этом убедиться, проштудировав рисунок 5.

Рассматривая этот рисунок, читатель наверняка обратит внимание на красивые числовые закономерности, которые на нем проявляются. В частности, если назвать *порядком группы* число ее *элементов*, а *порядком элемента* g — наименьшее число k, для которого $g^k = e$, то можно сформулировать следующую теорему.

Теорема Лагранжа. *Порядок любой подгруппы, также как порядок любого элемента группы, является делителем порядка группы.*

Доказательство (не очень сложное) мы здесь не приводим.

Взаимоотношения групп: гомоморфизмы

Группы изучают не каждую саму по себе, а в их взаимодействии. Назовем *гомоморфизмом* $\gamma: G \to H$ группы G в группу H всякое отображение, ставящее в соответствие каждому действию g из G вполне определенное действие $h = \gamma(g)$ из H, если для любых g и g' из G выполняется

$$\gamma(g \circ g') = \gamma(g) \circ \gamma(g').$$

(Коротко говорят так: гомоморфизм — это отображение, сохраняющее операцию $\circ$.)

Бестолковый солдат, который игнорирует команды «кругом» и «смирно», а в ответ на команды «налево» и «направо» поворачивается кругом, тем самым задает гомоморфизм

$$\beta: R(\square) \to Z_2 = \{С,\ К;\ \circ\}$$

по правилу $\beta(С) = \beta(К) = С$, $\beta(П) = \beta(Л) = К$. Задумавшийся солдат, не реагирующий ни на какую команду, определяет *тривиальный гомоморфизм* и *тривиальную группу*:

$$\alpha: R(\square) \to \{e\}.$$

Нетривиальные гомоморфизмы не всегда существуют. Например, лю-

Группа $\mathbb{Z}_{12} = \{ {}^{6}\!R^{2\pi/12} = z, z^2, z^3, \dots z^{10}, z^{11}, z^{12} = e \}$

1 элемент II порядка: $\{z^6, e\} \cong \mathbb{Z}_2$

2 элемента III порядка: $\{z^4, z^8, e\} \cong \mathbb{Z}_3$

2 элемента IV пор.: $\{z^3, z^6, z^9, e\} \cong \mathbb{Z}_4$

2 элемента VI пор.: $\{z^2, z^4, z^6, z^8, z^{10}, e\} \cong \mathbb{Z}_6$

4 элемента XII пор.: z, z^5, z^7, z^{11}

Группа $\mathbb{S}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix} : \text{всего } 4! = 24 \text{ перест.} \right\}$

9 элем. II пор.: $(12), (13), (14), (23), (24), (34), e \cong \mathbb{Z}_2$; $(12)(34), (13)(24), (14)(23), e \cong \mathbb{Z}_2$

$\mathbb{A}_4 = (e,$

8 элем. III пор.: $(123), (124), (134), (234), (132), (142), (143), (243), e \cong \mathbb{Z}_3$

6 элем IV пор.: $(2341), (3412), (4123), e \cong \mathbb{Z}_4$; $(2431), (4312), (3124), e \cong \mathbb{Z}_4$

$\{(12), (34), (12), (34), e\} \cong \mathbb{K}$ (гр. Клейна)

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & 4 \end{pmatrix} : i_n \in \{1, 2, 3\} \right\} \cong \mathbb{S}_3 \cong S(\triangle).$

Группа $\mathbb{S}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 \end{pmatrix} : 5! = 120 \text{ элементов} \right\}$

Есть элементы порядков II, III, IV, V, VI;

пример элемента порядка VI: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Есть подгруппы, изоморфные $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6$

Есть подгруппы, изоморфные $\mathbb{S}_3, \mathbb{S}_4$, и $\mathbb{K}$.

Есть подгруппы, изом. $\mathbb{A}_4$ ($12^{\text{го}}$ порядка).

Есть единственная подгруппа $\mathbb{A}_5$ порядка 60.

Рис. 5. Подгруппы циклической группы Z_{12} и групп перестановок S_4 и S_5. Красным выделены циклические подгруппы Z_k, зеленым — так называемые знакопеременные группы (A_4 и A_5). В описании группы S_4 цифры в круглых скобках обозначают циклы, т.е. перестановки, меняющие цифры по кругу, например $(123) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ (т.е. $1 \to 2 \to 3 \to 1$, $4 \to 4$) или $(24) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $(13)(24) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

бой гомоморфизм $\alpha: \mathbf{Z}_5 \to \mathbf{Z}_2$ или $\beta: \mathbf{Z}_5 \to \mathbf{Z}_6$ — тривиален.

Абстрактные группы и теорема Кэли

До сих пор мы рассматривали вполне конкретные группы, состоящие из действий — поворотов, симметрий и других преобразований. Но к понятию группы можно походить с более формальных, общих позиций; группы тогда считаются состоящими из элементов произвольной природы, а умножение — тоже произвольная операция (не обязательно композиция действий). Получается следующее аксиоматическое определение. Множество G элементов произвольной природы, в котором задана *бинарная операция* $*$ (состоящая в том, что каждой паре элементов $a, b \in G$ ставится в соответствие их *произведение* $c = a*b$, тоже являющееся элементом G), называется *(абстрактной) группой*, если

1. операция $*$ *ассоциативна*, т.е. для любых $a, b, c \in G$

$$a*(b*c) = (a*b)*c;$$

2. в G имеется единственный *нейтральный* элемент $e \in G$, для которого

$$a*e = e*a = a$$

при любом $a \in G$;

3. для каждого $a \in G$ существует единственный *обратный элемент* $a^{-1} \in G$ такой, что

$$a^{-1}*a = a*a^{-1} = e.$$

Это общее определение позволяет сразу получить много новых примеров групп. Так, целые числа $\mathbf{Z}$ образуют группу (в качестве $*$ берем операцию $+$, нейтральный элемент — это 0, а обратным к $a \in G$ служит $(-a)$); ненулевые действительные числа $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ образуют группу относительно умножения и т.д.

Однако по существу абстрактный подход ничего нового не дает: оказывается, что любая абстрактная группа изоморфна некоторой группе действий. Мы докажем это здесь лишь для конечных групп.

Теорема Кэли. *Всякая конечная группа G изоморфна некоторой подгруппе группы перестановок S_n.*

Доказательство. Пусть $G = \{e = g_1, g_2, \dots, g_n\}$. Каждому элементу $g_k \in G$ поставим в соответствие перестановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

где i_1 — номер элемента $g_k * g_1 = g_k * e$ (на самом деле $i_1 = k$), i_2 — номер элемента $g_k * g_2$, …, i_n — номер элемента $g_k * g_n$. Тогда все i_s различны (т.е. действительно получается перестановка) и соответствие

$$g_k \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

задает гомоморфизм $h: G \to S_n$ (это следует из ассоциативности), притом h отображает G взаимно однозначно на подгруппу $h(G) \subset S_n$ (это следует из аксиом 2 и 3).

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта 1997 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6 — 96» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1571» или «Ф1578». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1571, М1572 а), М1573—М1575 предлагались на XXXVII Международной математической олимпиаде.

Задачи М1571 — М1575, Ф1578 — Ф1582

М1571. Дана прямоугольная доска $ABCD$ со сторонами $AB=20$, $BC=12$, разбитая на 20×12 единичных квадратов. Пусть r — данное положительное целое число. За один ход монету можно передвинуть из одного единичного квадрата в другой в том и только том случае, когда расстояние между их центрами равно $\sqrt{r}$. Требуется найти последовательность ходов, переводящую монету из единичного кварата с вершиной A в единичный квадрат с вершиной B.

а) Докажите, что это невозможно, если r делится на 2 или на 3.

б) Докажите, что это можно сделать, если $r=73$.

в) Можно ли это сделать при $r=97$?

(Финляндия)

М1572. Известно, что внутри треугольника ABC нашлась точка P такая, что $\angle APB-\angle ACB=\angle APC-\angle ABC$. Пусть D и E — центры окружностей, вписанных в треугольники APB и APC соответственно. Докажите, что

а) прямые AP, BD и CE пересекаются в одной точке;

б) прямые AP, BE и CD также пересекаются в одной точке.

(Канада)

М1573. Положительные целые числа x и y таковы, что числа $5x+16y$ и $6x-15y$ оба являются квадратами положительных целых чисел. Найдите наименьшее возможное значение, которое может принимать минимум из этих двух квадратов.

(Россия)

М1574. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ $AB\parallel ED$, $BC\parallel FE$ и $CD\parallel AF$. Пусть R_A, R_C и R_E — радиусы окружностей, описанных около треугольников FAB, BCD и DEF соответственно, а p — полупериметр шестиугольника. Докажите, что

$$R_A+R_C+R_E\ge p.$$

(Армения)

М1575. Пусть n, p, q — положительные целые числа такие, что $n>p+q$, а x_0, x_1, ..., x_n — целые числа такие, что

(i) $x_0=x_n=0$;

(ii) для каждого целого i $(1\le i\le n)$ выполняется одно из равенств $x_i-x_{i-1}=p$ или $x_i-x_{i-1}=-q$.

Докажите, что существует пара индексов (i,j) $(i<j$ и $(i,j)\ne(0,n))$ такая, что $x_i=x_j$.

(Франция)

Ф1578. Колесо состоит из тонкого обода массой M, очень легких спиц и оси массой m. Колесо ставят на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом, и отпускают, при этом оно катится по наклонной плоскости без проскальзывания. Какую скорость будет иметь колесо к тому моменту, когда оно проедет расстояние L? При каком минимальном значении коэффициента трения возможно движение колеса без проскальзывания?

Ф1579. В вертикальном сосуде под тяжелым поршнем находится некоторое количество двухатомного газа. Сосуд обладает хорошей теплопроводностью, температура окружающей среды T_0 постоянна. При этой температуре происходит необратимая диссоциация молекул газа, причем энергия взаимодействия атомов в молекуле составляет ε в расчете на один моль. Какое количество теплоты получит газ от окружающей среды за большой интервал времени? Начальные значения давления и объема составляют p_0 и V_0 соответственно.

З.Рафаилов

Ф1580. Четыре одинаковых шарика массой M каждый связаны жесткими невесомыми стержнями одной и той же длины и образуют квадрат со стороной d. Шарики заряжают, причем два из них имеют заряды Q, два других — заряды противоположного знака, т.е. $-Q$. Всю конструкцию помещают в однородное электрическое поле напряженностью E и отпускают. Какую максимальную скорость может иметь один из шариков в процессе движения?

Р.Александров

Ф1581. Заряженный конденсатор большой емкости подключают к резистору. За вторую секунду разряда в резисторе выделилось 10 Дж тепла, столько же тепла выделилось в сумме за третью и четвертую секунды. Найдите начальную энергию конденсатора.

А.Зильберман

Ф1582. *Источник света представляет собой тонкую нить длиной $L = 10$ см, расположенную на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 5$ см. Ближний конец нити находится на расстоянии $a = 10$ см от линзы, диаметр линзы $D = 1$ см. Найдите минимальный размер освещенного пятна на экране, помещенном с другой стороны линзы перпендикулярно ее главной оптической оси.*

Решения задач М1546 — М1550, Ф1563 — Ф1567

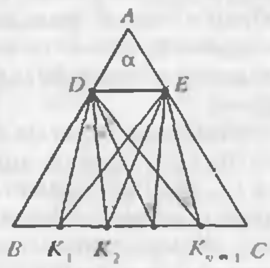
М1546. *На боковой стороне AB равнобедренного треугольника ABC с углом α при вершине A взята точка D так, что $AD=AB/n$. Найдите сумму $n-1$ углов, под которыми виден отрезок AD из точек, делящих основание BC на n равных частей, если а) $n = 3$, б) n — любое натуральное число.*

Вот самое простое решение, основанное на соображени-ях симметрии. Мы рассмотрим сразу общий случай б).

Построим на стороне $AC = AB$ точку E, симметричную D относительно высоты, опущенной из A — оси симметрии треугольника ABC. Сумма s углов, которую требуется найти, очевидно, в два раза меньше суммы углов

$$\angle DK_1E + \angle DK_2E + \ldots + \angle DK_{n-1}E = 2s, \qquad (*)$$

под которыми виден отрезок DE из точек $K_1, \ldots, K_{n-1}$, делящих основание AC на n равных частей. (Ясно, что суммы углов, под которыми из этих точек видны отрезки AD и AE, равны, и $\angle DK_iA + \angle AK_iE$



$= \angle DK_iE$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n-1$.) Но поскольку $BDEK_1$, K_1DEK_2, K_2DEK_3, …, $K_{n-1}DEC$ — параллелограммы, суммы (*) легко «собрать» в один угол BDK_n, равный $\angle A = \alpha$ (см. рисунок):

$$\angle BDK_1 = \angle DK_1E,\ \angle K_1DK_2 = \angle DK_2E, \ldots$$

$$\ldots, \angle K_{n-2}DK_{n-1} = \angle DK_{n-1}E.$$

Поэтому $s = \alpha/2$.

В.Произволов

М1547. *а) 8 школьников решали 8 задач. Оказалось, что каждую задачу решили 5 школьников. Докажите, что найдутся такие два ученика, что каждую задачу решил хотя бы один из них. б) А если каждую задачу решили 4 ученика?*

Из 8 человек каждую задачу не решило трое. Предположим, что не существует двух школьников, которые (вместе) решили все задачи; это означает, что для каждой пары $\{X, Y\}$ школьников найдется задача $P_{\{X,Y\}}$, которую они не решили. Всего существует $8 \cdot 7/2 = 28$ пар $\{X, Y\}$. Но каждая из 8 задач может выступать в роли $P_{\{X,Y\}}$ лишь для трех пар $\{X, Y\}$, а $8 \cdot 3 = 24 < 28$. Получили противоречие.

Основное соображение, которое мы использовали — переход к дополнительным множествам и «отрицаниям». Аналогичные рассуждения позволяют доказать, что если среди n школьников каждую из p задач решило не менее $n-m$ человек и $n(n-1) > pm(m-1)$, то некоторые двое решили (вместе) все задачи, а если $n(n-1)\ldots(n-k+1) > pm(m-1)\ldots(m-k+1)$ для некоторого $k>1$, то найдутся k школьников, которые вместе решили все задачи.

Н.Васильев, С.Токарев

М1548. *Найдите многочлен с целыми коэффициентами*

а) четвертой степени, имеющий корнем число $\sqrt[4]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[4]{2-\sqrt{3}}$,

б) пятой степени, имеющей корнем число $\sqrt[5]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[5]{2-\sqrt{3}}$.

в) Докажите, что существует многочлен степени n с целыми коэффициентами, имеющий корнем число $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[n]{2-\sqrt{3}}$.

Пусть $x=\lambda+1/\lambda$, где λ — произвольное число. (В роли λ ниже будут выступать числа $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}$, тогда $1/\lambda=\sqrt[n]{2-\sqrt{3}}$.) Докажем методом математической индукции, что λ^n+1/λ^n выражается многочленом T_n от x с целыми коэффициентами (и старшим коэффициентом 1) степени n. В самом деле,

$$T_1(x)=x;$$

$$\lambda^2+\lambda^{-2}=\left(\lambda+\lambda^{-1}\right)^2-2=x^2-2=T_2(x);$$

$$\lambda^3+\lambda^{-3}=\left(\lambda+\lambda^{-1}\right)\left(\lambda^2+\lambda^{-2}\right)-\left(\lambda+\lambda^{-1}\right)=xT_2(x)-x=T_3(x).$$

Точно так же для любого n, предположив, что

$$\lambda^{n-1}+\lambda^{-(n-1)}=T_{n-1}(x) \text{ и } \lambda^n+\lambda^{-n}=T_n(x),$$

получим

$$\lambda^{n+1}+\lambda^{-(n+1)}=\left(\lambda+\lambda^{-1}\right)\left(\lambda^n+\lambda^{-n}\right)-\left(\lambda^{n-1}+\lambda^{-(n-1)}\right),$$

т.е.

$$T_{n+1}(x)=xT_n(x)-T_{n-1}(x). \qquad (1)$$

Если T_n и T_{n-1} — многочлены с целыми коэффициентами степеней n и $n-1$, то T_{n+1} — многочлен с целыми коэффициентами степени $n+1$. Наше утверждение доказано.

Из рекуррентной формулы (1) получаем

$$T_3(x)=x^3-3x,$$

$$T_4(x)=x\left(x^3-3x\right)-\left(x^2-2\right)=x^4-4x+2,$$

$$T_5(x)=x\left(x^4-4x+2\right)-\left(x^3-3x\right)=x^5-5x^3+5x, \ldots$$

После этой подготовки легко ответить на все вопросы задачи.

а) Возьмем $\lambda=\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}$. Тогда $\lambda^4+\lambda^{-4}=4$, поэтому $x=\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[4]{2-\sqrt{3}}=\lambda+\lambda^{-1}$ удовлетворяет уравнению $T_4(x)=4$, или

$$x^4-4x-2=0.$$

б) Аналогично, взяв $\lambda=\sqrt[5]{2+\sqrt{3}}$, получим, что $x=\sqrt[5]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[5]{2-\sqrt{3}}$ удовлетворяет уравнению $T_5(x)=4$, или

$$x^5-5x^3+5x-4=0.$$

в) Точно так же, опираясь на доказанное выше свойство многочлена $T_n(x)$ и равенство $\lambda^n+\lambda^{-n}=4$ для $\lambda=\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}$, получим, что $x=\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[n]{2-\sqrt{3}}$ удовлетворяет уравнению

$$T_n(x)-4=0.$$

О многочленах T_n, лишь заменой переменных отличающихся от многочленов, выражающих $\cos nt$ через $\cos t$, рассказывалось в статье Н.Васильева и А.Зелевинского «Многочлены Чебышева и рекуррентные соотношения» (см. «Квант» №1 за 1982 год).

Н.Васильев

M1549. *Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ ненулевой степени с целыми коэффициентами, старший из которых положителен, и любого натурального k найдется целое m такое, что числа $P(m)$, $P(m+1)$, ..., $P(m+k)$ — составные.*

Пусть M — натуральное число такое, что $P(x)>1$ при $x\ge M$. Положим

$$L=P(M)P(M+1)\ldots P(M+k).$$

Докажем, что для $m=M+L$ числа $P(m)$, $P(m+1)$, ..., $P(m+k)$ — составные. Так как

$$y^n-z^n=(y-z)\left(y^{n-1}+y^{n-2}z+\ldots+yz^{n-2}+z^{n-1}\right)$$

при любом натуральном $n>1$, то при различных целых y, z число $P(y)-P(z)$ делится на $y-z$.

Фиксируем целое число t $(0\le t\le k)$. Получим, что

$$P(M+L+t)=(P(M+L+t)-P(M+t))+P(M+t)$$

делится на $P(M+t)>1$. Утверждение задачи доказано.

Замечание. Полагая $P(x)=x$, получаем хорошо известное утверждение: найдется сколь угодно длинный отрезок натурального ряда, состоящий из составных чисел.

В.Сендеров

M1550. *В 2^n строках таблицы $n\times 2^n$ выписаны все возможные различные наборы из n чисел 1 и −1, а затем некоторые числа заменены нулями. Докажите, что можно выбрать некоторое подмножество строк такое, что а) сумма всех чисел в выбранных строках равна 0; б) сумма всех выбранных строк равна нулевой строке (т.е. в каждом столбце сумма чисел, стоящих в выбранных строках, равна 0).*

Докажем сразу утверждение б); из него, конечно, следует а) — его отдельные доказательства существуют, но не слишком просты.

Если среди «испорченных» нулями строк встречается строка из одних нулей, то именно ее и можно взять в качестве искомого подмножества. Если нет — возьмем строку $b_1=f(a_1)$, получившуюся «порчей» строки a_1 из всех единиц. Обозначим через $a_2=e(b_1)$, полученную из b_1 заменой всех 1 на −1 и всех 0 на 1, и пусть $f(a_2)$ — «испорченная» строка a_2. Тогда $b_2=b_1+f(a_2)$ состоит из 0 и 1. Пусть, по индукции, мы получили строку b_k из 0 и 1 ($k=1, 2, \ldots, 2^n-1$). Положим $a_{k+1}=e(b_k)$, т.е. a_{k+1} — строка, полученная из b_k заменой всех 1 на −1 и всех 0 на 1; пусть $f(a_{k+1})$ — «испорченная» строка a_{k+1} и $b_{k+1}=b_k+f(a_{k+1})$ — это снова, как легко убедиться, строка из 0 и 1. Заметим, что

$$f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_m)=b_m.$$

Если при некотором m мы получим, что b_m состоит из одних нулей, то все доказано. Если нет, то (поскольку всего существует 2^n различных возможных наборов из 0 и 1 длины n) $b_i=b_j$ при некоторых $i<j\le n$ и тогда сумма

$$f(a_{i+1})+f(a_{i+2})+\ldots+f(a_j)=b_j-b_i$$

равна нулевой строке.

У этого совершенно формально изложенного решения есть замечательное «геометрическое» объяснение. (Его предложил один из участников 17-го Турнира городов.)

Рассмотрим n-мерный куб с вершинами $(x_1, \ldots, x_n) = x$, где x_i равны 0 и 1. «Большие диагонали» куба — разности векторов x и $x^* = (1-x_1, \ldots, 1-x_n)$ — это векторы с координатами 1 и −1. Назовем d-мерной гранью куба множество вершин, у которых некоторые $n-d$ координат фиксированы, а остальные d принимают все возможные значения (0 и 1); здесь $d = 0, 1, \ldots, n-1$ (0-мерная грань — это просто вершина; 1-мерная — ребро). «Испорченные» нулями строки в нашей задаче — это «диагонали» некоторых d-мерных граней, причем из каждой вершины куба выходит ровно одна такая «отмеченная диагональ» в противоположную вершину этой грани (т.е. в вершину, где значения «переменных» координат x_i грани заменены на противоположные $1 - x_i$). Начав с любой вершины куба, будем двигаться по отмеченным диагоналям граней. Тогда наш путь когда-то вернется в вершину, где мы уже побывали. Сумма векторов по замкнутому пути — нулевая строка!

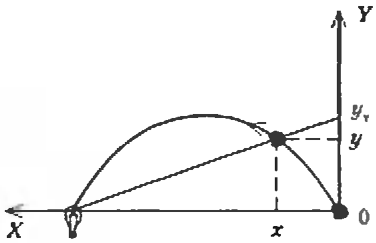
Н.Васильев, Г.Кондаков

Ф1563. *Небольшая лампочка освещает вертикальную стену. Проходящий вдоль стены хулиган швырнул в лампочку камень под углом 45° к горизонту и попал. Найдите максимальное и минимальное значения скорости тени от камня на вертикальной стене. В момент броска камень находится на одной высоте с лампочкой на расстоянии L от нее.*

Координата $y_т$ тени на стене связана с координатами y и x камня соотношением (см. рисунок)

$$y_т = \frac{yL}{L-x}.$$

Учтем, что угол броска $\alpha = 45°$, тогда $v_0^2 = gL$ (v_0 — начальная скорость камня) и выражение для вертикальной координаты упрощается:



$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = x - \frac{x^2}{L}.$$

При этом

$$y_т = x = v_0\cos 45^\circ \cdot t,$$

а скорость тени постоянна и составляет

$$v_т = v_0 \cos 45^\circ = \sqrt{\frac{gL}{2}}.$$

А.Андрианов

Ф1564. *Модель водяного колеса устроена следующим образом. На ободе очень легкого колеса радиусом R = 1 м равномерно расположено N = 201 ячеек. Когда ячейка проходит верхнее положение, в нее без начальной скорости относительно земли сбрасывают груз массой m = 100 г. Выпадает груз из ячейки в момент прохождения самой нижней точки. Трения нет, удары абсолютно неупругие. Найдите установившуюся угловую скорость вращения колеса.*

В момент падения очередного груза заполнены $n = (N-1)/2 = 100$ ячеек и грузы движутся с линейной скоростью $v = \omega R$, где ω — искомая угловая скорость. Часть энергии, во-первых, теряется при неупругом ударе, а во-вторых, еще часть энергии уносит выпавший грузик. Однако потерянная энергия «восстанавливается» за счет изменения потенциальной энергии при повороте колеса. Потери кинетической энергии при ударе можно рассчитать, используя модель абсолютно неупругого удара:

$$mnv = m(n+1)u, \quad \frac{mnv^2}{2} - \frac{m(n+1)u^2}{2} = \frac{mnv^2}{2(n+1)}.$$

Выпавший грузик уносит энергию $mv^2/2$. Изменение потенциальной энергии соответствует смещению верхнего груза на $2R$ вниз и составляет $mg \cdot 2R$. Отсюда получаем

$$mg \cdot 2R = \frac{mnv^2}{2(n+1)} + \frac{mv^2}{2}, \quad v^2 = 4gR\frac{n+1}{2n+1},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4g(n+1)}{R(2n+1)}} = 4{,}48\ \text{с}^{-1}.$$

Это примерно 0,71 оборота в секунду.

А.Андрианов, А.Рахманов

Ф1565. *Один моль идеального одноатомного газа расширяется от начального объема 20 литров до конечного 200 литров. Давления в сосуде при различных значениях объема газа таковы:*

V, л	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
p, кПа	100	35,4	19,2	12,58	9	7,8	6,95	6,3	5,75	5,3

Получает газ тепло или отдает на участке расширения от 40 до 80 литров? Нагревается или охлаждается газ на участке расширения от 140 до 180 литров? Найдите отношение теплоемкостей газа на этих двух участках процесса.

Полезно нарисовать график приведенной зависимости (плавный) и рассчитать работу газа при расширении графически. Для участка 40 — 80 литров эта работа составит примерно 860 Дж, а для участка 140 — 180 литров — примерно 250 Дж. По данным из таблицы легко найти температуру газа в интересующих нас точках и вычислить изменение внутренней энергии — на первом участке внутренняя энергия уменьшается на 635 Дж, а на втором она возрастает на 93 Дж. Все числа получены приближенно, они могут немного отличаться в ту или другую сторону — это связано с графическим вычислением работы газа.

Используя первое начало термодинамики, найдем количество теплоты, полученное газом на первом участке: $Q_1 = A_1 + \Delta U_1 = 225$ Дж — газ на этом участке *получает* тепло, а его температура падает от 171 до 120 К. Аналогично для второго участка получаем $Q_2 = 343$ Дж, температура на этом участке изменяется от 117 до 125 К — газ *нагревается*. Теплоемкость на первом участке отрицательна (газ получает тепло, но его температура падает за счет совершения им работы) и составляет примерно −4,5 Дж/(моль·К), на втором участке теплоемкость равна примерно 45 Дж/(моль·К), т.е. отношение теплоемкостей равно −10 (минус 10!).

Р.Александров

Ф1566. *Гантелька массой M и длиной L заряжена на концах, причем левый конец имеет заряд Q, правый — заряд −4Q. Слева от гантельки на продолжении прямой, проходящей через концы гантельки, очень далеко от нее покоится шарик массой m, заряженный зарядом Q. От малого толчка шарик начинает двигаться в сторону гантельки. Найдите максимальную скорость шарика и минимальное расстояние до гантельки в процессе движения. Гантелька не закреплена, сила тяжести отсутствует. Считайте, что гантелька не вращается и движение происходит вдоль упомянутой прямой.*

Рассмотрим случай, когда вначале гантелька движется по направлению к шарику (на самом деле в противном случае шарик просто не сдвинется с места). Вдали от гантельки на шарик действует сила притяжения, которая на малых расстояниях сменяется силой отталкивания. Максимальная скорость шарика достигается на расстоянии L от гантельки — при этом расстоянии сила взаимодействия обращается в ноль. Теперь запишем законы сохранения импульса и энергии системы:

$$Mv_0 = Mu + mv,$$

$$\frac{Mv_0^2}{2} = \frac{Mu^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + \frac{kQ^2}{L} - \frac{4kQ^2}{2L},$$

откуда для искомого значения v получается два корня — один соответствует сближению, другой — «разбеганию» тел. Максимум скорости оказывается равным

$$v_{max} = \frac{m}{M}\left(v_0 + \sqrt{v_0^2 + \frac{2kQ^2}{ML}}\right).$$

Ускорение максимально в момент наибольшего сближения тел (докажите это!) — при этом скорости гантельки и шарика получаются одинаковыми и их можно найти из закона сохранения импульса:

$$Mv_0 = (M+m)v.$$

Минимальное расстояние x найдем теперь из энергетических соображений:

$$\frac{Mv_0^2}{2} = \frac{(M+m)v^2}{2} + \frac{kQ^2}{x} - \frac{4kQ^2}{L+x}.$$

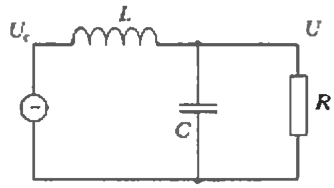
Отсюда можно выразить x и найти силу взаимодействия и ускорение.

З.Рафаилов

Ф1567. *Нагреватель имеет сопротивление R = 100 Ом. В вашем распоряжении есть две одинаковые катушки, индуктивность каждой катушки L = 0,5 Гн, и большое количество разнообразных конденсаторов. Сеть — 36 В, 50 Гц — рассчитана на очень большую мощность, катушки и конденсаторы можно считать идеальными. Какую максимальную мощность можно получить в нагревателе?*

При непосредственном подключении нагревателя к сети получится мощность

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{36^2}{100}\ \text{Вт} = 13\ \text{Вт}$$



(напомним, что 36 В — это действующее значение напряжения). Мощность можно увеличить при включении резистора через цепь LC — при этом напряжение на резисторе может оказаться и больше 36 В. Рассмотрим схему из параллельно соединенных резистора сопротивлением R и конденсатора емкостью C, последовательно с которыми включена катушка индуктивностью L, — вся эта сложная цепь подключается к сети (см. рисунок). Расчет можно сделать, пользуясь методом векторных диаграмм, но мы для разнообразия воспользуемся методом комплексных амплитуд (для этого нужно уметь обращаться с комплексными числами). В этом случае конденсатор обладает емкостным сопротивлением $X_C = 1/(i\omega C)$, катушка — индуктивным сопротивлением $X_L = i\omega L$, а резистор имеет обычное сопротивление R. Расчет проводится обычным способом, но при окончательном выписывании ответа полученные значения токов и напряжений (а это будут комплексные числа) нужно брать по модулю. Аргументы полученных величин определяют сдвиги фаз (напомним, что модуль и аргумент комплексного числа-вектора — это его длина и угол, составляемый вектором с осью). Итак,

$$\frac{U_c - U}{X_L} = \frac{U}{X_C} + \frac{U}{R},$$

или

$$U = \frac{U_c}{\frac{X_L}{X_C} + 1 + \frac{X_L}{R}}.$$

Ясно, что первые два слагаемых в знаменателе — действительные числа, причем первое отрицательное. Максимальное значение модуля напряжения на нагревателе получится при нулевой действительной части:

$$U_{max} = \frac{U_c}{X_L/R}.$$

Видно, что если правильно выбрать емкость конденсатора (кстати, полученное соотношение соответствует резонансу) и взять индуктивность поменьше, то напряжение U окажется больше напряжения U_c сети. Минимальная индуктивность получится при соединении двух катушек параллельно — при этом общая их индуктивность составит $L/2 = 0{,}25$ Гн. Тогда максимальная мощность будет

$$P_{max} = \frac{U_{max}^2}{R} = \frac{U_c^2}{X_L^2} = \frac{4U_c^2 R}{4\pi^2 f^2 L^2} \approx 21\ \text{Вт}.$$

Можно в схеме поменять местами конденсатор и катушку — ответ при этом не изменится.

А.Зильберман

Задачи

1. Путешественник попал на остров, где живут правдивые — говорящие только правду, и лжецы — говорящие только ложь. Зайдя как-

то раз в один дом, он встретил там несколько жителей. Путешественник спросил одного из них: «Сколько здесь лжецов?», на что получил ответ: «По крайней мере один из нас — лжец.» Кем был отвечавший?

А. Назиев

2. Расставьте числа от 1 до 9 в клетки так, чтобы равенство

оказалось верным.

Чемпионат мира по головоломкам, 1995 г.

3. Вова обнаружил, что в 1996 году возраст его мамы равен произведению цифр ее года рождения. И с удивлением заметил, что то же са-

мое верно и для его бабушки. Определите их возрасты.

О. Потяркин

4. Докажите, что для любых целых чисел a, b и c число

$$(a-b)^3(c-b)+(b-c)^3(a-c)+(c-a)^3(b-a)$$

является квадратом целого числа.

В. Произволов

5. Замените буквы цифрами так, чтобы равенство

оказалось верным. (И на самом деле миллиард минут составляет 1901 год!) Одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, разным — разные.

А. Ханян

«Ошибка лежит на поверхности...»

С. ТИХОМИРОВА

В жизни мы нередко встречаемся с ситуациями, когда наши представления о тех или иных физических явлениях не соответствуют их научному объяснению. Однако и из заблуждений можно извлечь некую пользу, ибо, как известно, на ошибках учатся.

Предлагаем вам несколько маленьких историй (шуток?) разных времен и народов, в которых содержатся неверные, с точки зрения физики, высказывания. Попытайтесь их найти и объяснить, почему, на ваш взгляд, они неправильны. Еще И. Гёте писал: «Гораздо легче найти ошибку, нежели истину. Ошибка лежит на поверхности,.. а истина скрыта в глубине».

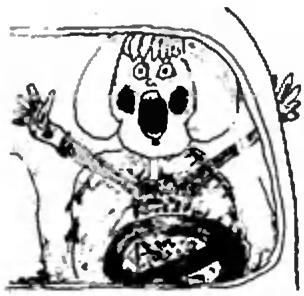
1. На верхней полке спит мужчина. Вдруг поезд резко тормозит и мужчина падает на пол:

— Вот это я шмякнулся! Даже поезд остановился!

Почему упал человек? Может ли при этом измениться скорость поезда?

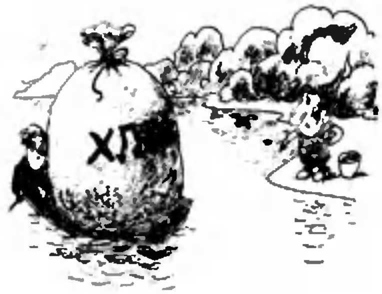
2. Сюзанн учится водить машину под руководством своего мужа. Внезапно бросив руль, она кричит:

— Жерар, нажми там на какую-то педаль. На нас надвигается вот то огромное дерево!



Может ли быть такое?

3. Педант увидел на реке лодку, нагруженную хлебом и глубоко осевшую. «Если воды еще немножко прибудет, — сказал он,



— то лодка пойдет ко дну».

Прав ли педант?

4. Однажды Насреддин упал в яму и никак не мог выбраться.

— Как бы мне тут не остаться, — сказал он себе. — Единственный способ — вытащить самого себя за волосы.

Мог ли Насреддин сделать это?

5. Стюардесса:

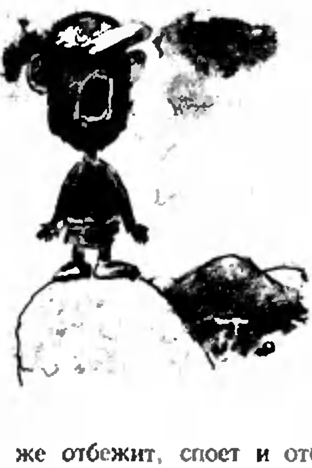
— Наш самолет летит быстрее звука.

Пожилая дама:

— Нельзя ли попросить летчика лететь потише? Я бы хотела поговорить с соседкой.

Действительно ли нельзя разговаривать в самолете, летящем со сверхзвуковой скоростью?

6. Увидели как-то люди такую картину: Джоха споет что-то и



тут же отбежит, споет и отбежит.

7*

Спрашивают:

— Что с тобой?

— Хочу услышать свой голос издалека.

Сможет ли Джоха «услышать свой голос издалека» таким способом?

7. Однажды в кругу приятелей Насреддин хвастал: «На старости лет я такой же сильный, как и

в молодые годы». — «Откуда ты это взял?» — спрашивают его. И Насреддин отвечает: «Дома у меня есть большая каменная ступа. В молодости я пытался сдвинуть ее с места, но не смог. На днях я повторил опять попытку, но ничего не вышло. Так я узнал, что сила у меня сейчас та же, что и раньше».

Прав ли Насреддин?

8. Пожилая женщина впервые летит на вертолете. Вскоре после взлета она говорит пилоту:

— Сынок, здесь так дует. Выключи, пожалуйста, этот вентилятор наверху!

Что произошло бы, если бы пилот выполнил просьбу женщины?

9. Однажды Насреддин сказал друзьям:

— Несколько дневных часов летом равноценны трем зимним дням.

— Почему так? — полюбопытствовали они.

— Я это установил на опыте, — отвечал ходжа. — Когда я постираю свою одежду зимой, требуется три дня, чтобы она высохла. А если я постираю ее летом после обеда, она высыхает до вечера.

На чем основан «опыт» Насреддина?

10. Учитель:

— Почему мы сначала видим молнию, а потом слышим гром?

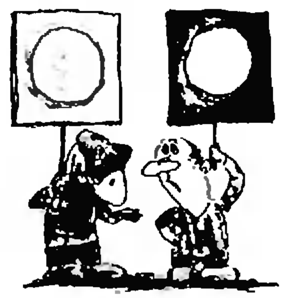
Ученик:

— Потому что глаза находятся впереди.

А как бы Вы ответили на вопрос учителя?

11. Два господина рассуждали о том, какое светило, солнце или луна, заслуживает преимущества.

Один, не колеблясь, назвал солнце, но другой глубокомысленно заметил: а я так думаю, что луне принадлежит эта честь; что



за важность светить, как солнце, днем, когда и без этого светло, а ведь месяц светит ночью, когда темно.

Могла бы светить Луна, если бы не было Солнца?

IX МЕЖДУНАРОДНЫЙ ТУРНИР ЮНЫХ ФИЗИКОВ

IX МТЮФ проходил с 29 июня по 5 июля этого года в грузинском городе Цхалтубо. В нем приняли участие команды Армении, Белоруссии, Венгрии, Германии, Грузии, Польши, России, Узбекистана, Украины, Чехии. Грузия, Россия и Украина были представлены двумя командами. Грузия — двумя сборными; Россия — победителями Российского ТЮФ командами СУНЦ МГУ и Новгорода; Украина — сборной командой и командой Одессы.

Победителем турнира стала команда Чехии. Второе место было присуждено командам Германии и Грузии-2. Третье место дано командам, участвовавшим в полуфинале турнира: это Грузия-1, Новгород, СУНЦ МГУ, Венгрия, Польша, Украина.

Следующий X Международный турнир планируется провести в Праге.

В этом учебном году Московский турнир будет проведен в декабре 1996 года на физическом факультете МГУ, а Российский ТЮФ пройдет в Екатеринбурге в конце марта 1997 года. Заявки принимаются до 15 февраля. Для получения заданий, более полной информации и присылки заявок сообщаем адрес Оргкомитета ТЮФ:

121357 Москва, Кременчугская ул.,11, кафедра физики СУНЦ МГУ.

Факс: 445-46-34.

Эл. почта: lob@school.phys.msu.su

Адрес локального Оргкомитета ТЮФ-97:

620137 Екатеринбург, ул. Д.Зверева, 30, СУНЦ УрГУ.

Факс: (3432) 41-28-48.

Эл. почта: root@lyceum.urgu.e-burg.su

В.Лобышев

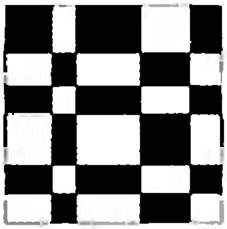
Конкурс «Математика 6–8»

Мы продолжаем конкурс «Математика 6–8». Первые 10 задач были опубликованы в номерах 4, 5 нашего журнала. Решения задач из этого номера высылайте не позже 15 марта 1997 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Победители — отдельные участники и математические кружки — будут награждены призами журнала и приглашены на заключительный тур конкурса в одну из летних математических школ.

11. Числа 17 и 71 — оба простые, числа 117, 171 и 711 — все составные, числа 1117 и 1171 — оба простые, а 1711 и 7111 — составные: $1711 = 29 \cdot 59$, $7111 = 3 \cdot 547$. Докажите, что для любого $n \geq 2$ среди чисел, записываемых с помощью n единиц и одной семерки, найдется хотя бы одно составное число.

В.Замков

12. Квадрат разрезан прямыми, параллельными сторонам квадрата, на прямоугольники, которые раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке.



При этом оказалось, что общая площадь черных прямоугольников равна площади белых прямоугольников. Докажите, что прямоугольники можно так переместить, что все черные прямоугольники составят один прямоугольник.

В.Произволов

ПОПРАВКА

Внимание! В условии задачи 4 «Конкурса «Математика 6–8» («Квант» №4 за 1996 г.) допущена ошибка. Условие задачи следует читать так:

«Целые числа x, y и z удовлетворяют уравнению

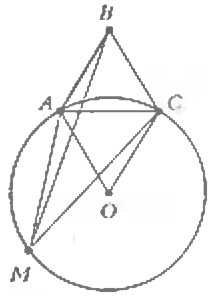
$(x+y+z)(xy+yz+zx)=xyz$.

Докажите, что среди этих чисел найдутся два, в сумме равные нулю.»

Срок присылки решения продлевается до 15 февраля 1997 года.

13. Возьмем натуральное число A_0 и умножим на сумму его цифр, полученное число A_1 умножим на сумму цифр числа A_1 и получим число A_2 и т.д. Укажите все такие числа A_0, для которых сумма цифр некоторого числа A_k (а следовательно, и всех последующих) равна единице.

И.Акулич



14. На плоскости даны два равносторонних треугольника ABC и ACO и проведена окружность с центром в точке O, проходящая через точки A и C. Докажите, что для любой точки M этой окружности

$$MA^2 + MC^2 = MB^2.$$

А.Савин

15. В клетчатом квадрате 19×19 закрашено 95 клеток. Докажите, что найдется прямоугольник 3×5, в котором закрашено не более трех клеток. Покажите, что можно так закрасить 96 клеток, что в каждом прямоугольнике 3×5 будет закрашено не менее четырех клеток.

А.Грибалко

ИНФОРМАЦИЯ

КОНФЕРЕНЦИЯ ЮНЫХ УЧЕНЫХ В ВЕНГРИИ

Ставшая уже традиционной научная конференция школьников, проводимая совместно Будапештским университетом имени Лоранда Этвёша и Минским государственным университетом, прошла в 1996 году в Вышеграде — пригороде Будапешта — с 21 по 27 апреля (предыдущая конференция проходила также в Вышеграде в 1994 году). В конференции приняли участие более 80 докладчиков — школьников из 9 стран: Белоруссии, Венгрии, Греции, Грузии, Нидерландов, России, Румынии, Украины и Югославии.

Особенностью данной конференции было создание секции экологии наряду с традиционными секциями математики, физики, информатики. Состав жюри в каждой секции был интернациональным, что способствовало объективности его решений.

В секции физики победителями стали учащиеся, самостоятельно выполнившие экспериментальные работы. *А.Целобенок* из Минска продемонстрировал им сделанный действующий макет ультразвукового сварочного устройства с двухкоординатным позиционером, управляемым домашним компьютером. Ученик из Румынии *Г.Цош* приспособил механизм компьютерной «мыши» для регистрации динамики различных видов движения (равномерного, ускоренного, колебательного) с последующей обработкой на компьютере.

В секции математики ярко выделялись доклады ребят из Аничкова лицея (Санкт-Петербург). Каждый из этих докладов мог быть вполне приличной курсовой работой студента-математика 3–4 курса университета. Лучшими докладами строгое жюри признало доклады по теории групп *Сергея Добрынина* из Аничкова лицея и о так называемых антимагических квадратах *Юлиана Ванне* из Могилева (Белоруссия).

В секции экологии наибольший интерес вызвала работа *Юлии Вашневской* из Гомеля. Ею, в частности, было показано, что на территориях, зараженных радионуклидами, радиоактивность молока коз втрое меньше, чем у молока коров, и в полтора раза меньше, чем у молока овец. Ввиду актуальности и новизны многих из полученных результатов она была приглашена в университет Будапешта для повторения своего доклада. *В.Саша* из Румынии рядом химических методом проанализировал качество воды в реке выше и ниже своего города, измерил количество осадков в воде, запыленность воздуха в разных точках города и сделал вывод о корреляции запыленности с климатическими условиями.

В секции информатики лучшими были признаны доклады *Милоша Тошича* из Югославии и *Антона Ярлыкина* из украинского города Черновцы, посвященные компьютерной графике.

А.Егоров, В.Лобышев

Вихри над взлетной полосой

А.СТАСЕНКО

Ах, как хочется в небо, разбежавшись, ворваться,
Услышав команду: «Внимание, взлет!».

Из старой физтеховской песни

Однако разбегаться и врываться следует осторожно, особенно если перед вами взлетел тяжелый самолет. Может быть, вам приходилось видеть, как при резком взлете или посадке голубя на пыльной площадке в окружающем воздухе возникают видимые (за счет пыли) вихревые движения? Если нет — понаблюдайте. Точно так же и тяжелый самолет, отбрасывая вниз мощные потоки воздуха, порождает над аэродромом вихри — и горе легкому летательному аппарату, следующему за ним. Крылья легкого самолета могут попасть в вертикальные потоки воздуха с противоположно направленными скоростями, которые просто опрокинут его «на спину», а близость земли не позволит вновь выровняться. Увы, такие случаи были, так что вихри над взлетной полосой представляют интерес и для пилотов, и для авиадиспетчеров, и, конечно, для ученых-аэрогазодинамиков. Попробуем и мы исследовать кинематику вихрей — конечно, в самой упрощенной форме.

Что такое вихрь? Его можно увидеть, например, при сливе воды через отверстие ванны или кухонной раковины. Если в воде содержится несколько чаинок, легко заметить, что линейная (окружная) скорость вихря тем больше, чем он ближе к оси вращения. В гидродинамике есть важное понятие *потенциального вихря*, в котором линейная скорость обратно пропорциональна расстоянию от оси: $V \sim 1/r$ (рис.1). Эту же идею физики выражают еще так: произведение линейной скорости на длину окружности есть величина постоянная, называемая *циркуляцией*, т.е.

$$V \cdot 2\pi r = \Gamma . \qquad (1)$$

(Кстати, таким же свойством обладает еще и магнитное поле.)

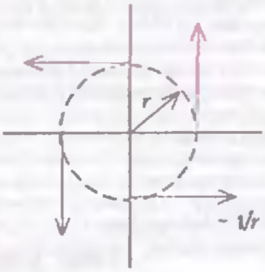


Рис. 1

Легко понять, что за самолетом обычно тянутся два вихря с противоположными направлениями вращения. Действительно, чтобы держаться в воздухе, крыло самолета должно отбрасывать вниз воздух, частицы которого затем расходятся в стороны и возвращаются сверху. В результате перемещения самолета вперед эти частицы описывают спиралевидные траектории (рис.2).

Рис. 2

Эти два вихря можно считать зеркальными изображениями друг друга относительно вертикальной плоскости симметрии самолета — ее проекция на плоскость листа есть ось OY (рис.3). Линии тока воздуха, порожденные правым и левым вихрями, скользят вдоль OY вниз. Таким образом, эта вертикальная плоскость симметрии является как бы непроницаемой перегородкой для вихрей.

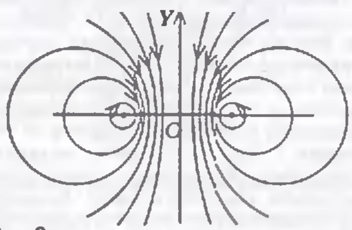


Рис. 3

Пусть теперь самолет летит над аэродромом на небольшой высоте H. Земля-то уж точно непроницаема для движения воздуха, поэтому линии тока, порожденные двумя реальными вихрями, тоже будут скользить параллельно плоскости земли (рис.4). Картина линий тока будет выглядеть так, как будто «под землей» есть еще пара вихрей, являющихся зеркальными отражениями двух реальных вихрей самолета

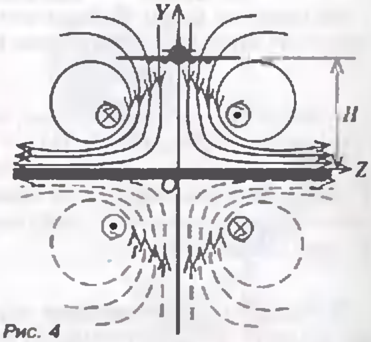


Рис. 4

относительно горизонтальной плоскости. (Из любви к аналогиям, свойственной физикам, напомним, что эта картина линий тока полностью совпадает с картиной линий магнитного поля, порожденной четырьмя параллельными друг другу проводами, в которых текут одинаковые по модулю электрические токи. Их направление показано условно на рисунке 4 точкой (если ток течет к нам) или крестиком (если от нас).)

Таким образом, можно считать, что каждый из четырех вихрей находится в суммарном поле трех других. Изучим движение одного из них, например вихря *1* (рис.5). Положение его оси можно описать либо в обычной декартовой системе координат YZ, либо в так называемой полярной системе, в которой задается расстояние ρ исследуемой точки от полюса O и угол φ (азимут) радиуса-вектора $\vec{\rho}$, например относительно оси OY. В последнем случае вектор скорости $\vec{V}$ будет иметь радиальную проекцию V_ρ и перпендикулярную вектору $\vec{\rho}$ (азимутальную) проекцию V_φ. Сначала рассмотрим скорости, порожденные каждым из трех вихрей в том месте, где проходит ось первого вихря. Согласно формуле (1), левый реальный вихрь (его номер *2*) создает в точке *1* скорость, направленную вертикально вниз и равную

$$V^{(2)} = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2z} = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2\rho \sin\varphi}$$

(здесь учтено, что $z = \rho \sin\varphi$). Из прямоугольных треугольников на рисунке 5,*а* можно получить искомые проекции:

$$V_\rho^{(2)} = -V^{(2)} \cos\varphi = -\frac{\Gamma \cos\varphi}{2\pi \cdot 2\rho \sin\varphi},$$

$$V_\varphi^{(2)} = V^{(2)} \sin\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2\rho}.$$

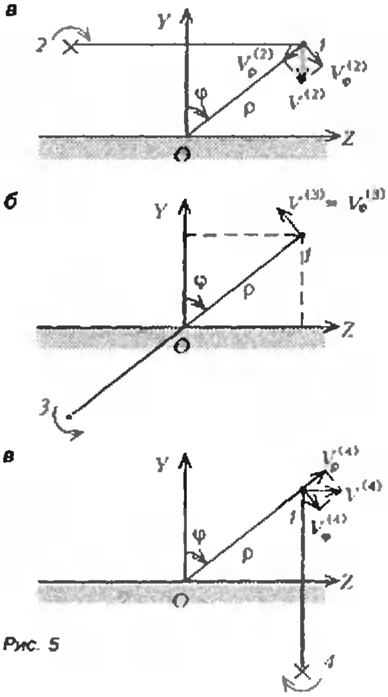


Рис. 5

Здесь знак «минус» указывает на то, что радиальная проекция вектора $\vec{V}^{(2)}$ направлена против радиуса-вектора. Скорость $V^{(3)}$, порожденная левым мнимым вихрем (номер 3, см. рис.5,б), имеет только азимутальную составляющую

$$V_\varphi^{(3)} = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2\rho}.$$

Наконец, скорость, порожденная правым мнимым вихрем (номер 4), имеет составляющие (см. рис.5,в)

$$V_\rho^{(4)} = \frac{\Gamma \sin\varphi}{2\pi \cdot 2\rho\cos\varphi}, \quad V_\varphi^{(4)} = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2\rho}.$$

Учтем теперь, что радиальная составляющая скорости вихря 1 равна быстроте изменения радиуса ρ по времени:

$$V_\rho = \frac{\Delta\rho}{\Delta t},$$

а азимутальная — быстроте изменения дуги $\rho\Delta\varphi$ со временем:

$$V_\varphi = \rho\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Приравняем эти выражения соответственно сумме радиальных и азимутальных составляющих скоростей от всех трех вихрей (сам на себя вихрь 1, конечно, не действует, в отличие от барона Мюнхгаузена):

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta\rho}{\Delta t} = \dfrac{\Gamma}{2\pi\cdot 2\rho}\left(-\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi} + \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) \\ \rho\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \dfrac{\Gamma}{2\pi\cdot 2\rho}. \end{cases} \qquad (2)$$

Таким образом, мы выписали кинематическую систему уравнений — математическую связь между пространственными и временной переменными.

Попробуем найти решение этой системы уравнений (ибо нет ничего недоступного для читателей «Кванта»). Например, если мы разделим почленно уравнения друг на друга, мы исключим время, и тогда останется связь только между радиальной координатой оси вихря и ее азимутом:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho\Delta\varphi} = \frac{\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = -\frac{\cos 2\varphi}{\frac{1}{2}\sin 2\varphi}$$

(мы привели правую часть к общему знаменателю и использовали тригонометрические соотношения для синуса и косинуса двойного угла). Умножив обе части полученного равенства на $\Delta\varphi$, мы, как говорят математики, разделим переменные: слева все будет зависеть только от ρ, справа — только от φ:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\frac{\cos 2\varphi \cdot \Delta(2\varphi)}{\sin 2\varphi} = -\frac{\Delta(\sin 2\varphi)}{\sin 2\varphi}$$

(тут мы учли, что производная от синуса есть косинус). Ну а теперь простое интегрирование дает (соответствующий интеграл можно найти в таблицах)

$$\ln\frac{\rho}{\rho_*} = \ln\frac{\sin 2\varphi_*}{\sin 2\varphi}, \text{ или } \frac{\rho}{\rho_*} = \frac{\sin 2\varphi_*}{\sin 2\varphi},$$

где ρ_* — значение радиуса при некотором конкретном угле φ_*. Видно, что радиус достигает минимального значения ρ_m при $\sin 2\varphi = 1$, т.е. при $\varphi = \pi/4$. Поэтому запишем

$$\frac{\rho}{\rho_m} = \frac{1}{\sin 2\varphi}. \qquad (3)$$

Совсем изящная зависимость!

Теперь мы знаем, как выглядит проекция оси вихря на вертикальную плоскость. Так, ось симметрична относительно биссектрисы прямого угла YOZ. Далее, при $\varphi \to 0$ и $\varphi \to \pi/2$ модуль радиуса-вектора ρ стремится к бесконечности. Например, рассмотрим случай $\varphi \to 0$, $\rho \to \infty$ (самолет летит высоко над землей). Тогда из второго уравнения системы (2) следует, что азимутальная скорость стремится к нулю, а из первого уравнения видно, что имеется только вертикальная скорость $v_{y\infty}$, с которой оба реальных вихря опускаются за самолетом:

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta t} = -\frac{\Gamma\cos 2\varphi}{2\pi\cdot 2\rho\sin\varphi\cos\varphi},$$

$$\text{или} \quad -\frac{\Gamma}{2\pi l} = v_{y\infty}$$

(так как $\rho\sin\varphi = l$, где l — расстояние между двумя вихрями).

Подставив равенство (3) во второе уравнение системы (2), получим

$$\frac{\Delta(2\varphi)}{\sin^2 2\varphi} = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\Delta t}{\rho_m^2}.$$

Мы записали уравнение с разделенными переменными — слева азимут оси вихря, справа — время. Интегрируя (опять же, например, при помощи таблицы интегралов), получим

$$\frac{\Gamma}{2\pi\rho_m^2}t = \frac{1}{\operatorname{tg}2\varphi_0} - \frac{1}{\operatorname{tg}2\varphi}, \qquad (4)$$

где угол φ_0 соответствует начальному моменту времени $t = 0$ (в который уже образовались вихри за самолетом). Как легко видеть из рисунка 5,а, $\operatorname{tg}\varphi_0 = l/(2H)$, где H — высота полета. Таким образом, соотношения (3) и (4) полностью определяют положение осей вихрей в зависимости от времени. Например, при $t \to \infty$ имеем $\operatorname{tg}2\varphi \to 0$, значит, $\varphi \to \pi/2$ и $\rho \to \infty$. Следовательно, оси вихрей расходятся в стороны и «стелются» параллельно земле. При этом $\Delta\rho/\Delta t$ превращается в горизонтальную скорость движения оси вихря:

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta t} \to \frac{\Gamma}{2\pi\rho_m} = v_{z\infty} \quad \text{при } \varphi \to \frac{\pi}{2}.$$

Оценим эту скорость. Согласно теореме, сформулированной Николаем Егоровичем Жуковским, подъемная сила — при горизонтальном полете, естественно, равная весу самолета P — определяется простым соотношением

$$P = \Gamma\rho_a u l,$$

где ρ_a — плотность атмосферы, u — скорость полета. Возьмем в качестве примера случай полета на высоте, равной половине расстояния между вихрями: $H = l/2$. Тогда $\varphi_0 = \pi/4$, $\rho_0 = \rho_m = \sqrt{H^2 + H^2} = H\sqrt{2} = l/\sqrt{2}$, откуда

$$v_{z\infty} = \frac{P\sqrt{2}}{2\pi\rho_a u l^2}.$$

Примем для оценок следующие значения параметров тяжелого взлетающего самолета: $m = 300$ т, $P = mg = 3\cdot 10^6$ Н, $l = 50$ м, $u = 100$ м/с, $\rho_a = 1$ кг/м^3. Получим, что вихри перемещаются вправо и влево со скоростью

$$v_{z\infty} \approx 2{,}6 \text{ м/с}.$$

Все наши рассуждения приведены для спокойной атмосферы. А теперь представим, что справа дует поперечный ветер с такой же по величине скоростью. Тогда правый вихрь тяжелого самолета остановится над взлетной полосой и будет долго мешать взлету следующих, пока, наконец, не «растворится» в воздухе. Счастливого полета!

Число π

Число $\pi = 3{,}141592653589793238462643$ $3832975028841971\ldots$, равное отношению длины окружности к ее диаметру, привлекало к себе внимание математиков на протяжении сотен, если не тысяч лет. Дело в том, что долгое время люди оперировали лишь целыми и дробными числами — числами, представимыми в виде отношения двух целых чисел; они называются рациональными. Попытки представить число π в таком виде все время оканчивались неудачей. Число π входит и в формулу площади круга: $S = \pi R^2$, и масса математиков, как профессиональных, так и любителей, ломала голову над задачей: как с помощью циркуля и линейки построить квадрат, равновеликий данному кругу. Эта задача была настолько популярна, что всякая трудноразрешимая задача сравнивалась с задачей квадратуры круга. Термин «квадратура круга» стал синонимом неразрешимой проблемы.

Обозначение π возникло от греческого слова «периметр» — περιμετρ.

Древнегреческие математики умели строить квадрат, площадь которого вдвое больше площади заданного квадрата, — достаточно было построить квадрат со стороной, равной диагонали данного квадрата (рис.1). Однако попытки выразить сторону этого квадрата через сторону исходного с помощью рациональных чисел оказались обреченными на провал. И это поняли уже ученики Пифагора. Этот факт подорвал уверенность математиков в том, что число π можно выразить в виде отношения целых чисел, и с этого момента началась гонка за достижение все более высокой точности вычисления числа π.

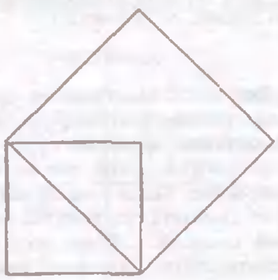


Рис. 1

В Древнем Египте часто принимали число π равным 3, тем самым считая, что длина окружности равна периметру вписанного в нее правильного шестиугольника. В то же время египтяне для вычисления площади круга использовали формулу $S = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$. Тем самым, они использовали в качестве числа π число $\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}16049\ldots$

Приближенные значения для числа π мы находим в памятниках многих древних цивилизаций. В индийских священных книгах джайнизма (одной из древних религий) встречается приближение числа π числом $\sqrt{10} = 3{,}1622777\ldots$, а в древних китайских рукописях встречается приближение числа π дробью $355/113 = 3{,}1415929\ldots$ — поразительно высокая точность! Но это можем оценить мы, знающие сотни знаков этого числа, а тогда было непонятно, какое из чисел лучше приближает число π: число 355/113 или более простое число 22/7, которое использовали древние греки. Заметим, что $22/7 = 3{,}1428571\ldots$

В V–IV веках до н.э. древнегреческие ученые Антифон и Бризон предложили для нахождения приближенного значения числа π использовать как вписанные в окружность многоугольники, так и многоугольники, описанные вокруг нее (рис.2). Они отметили, что периметр описанного многоугольника больше длины окружности, вокруг которой он описан, а периметр вписанного многоугольника меньше ее длины. Эту идею претворил в жизнь знаменитый Архимед. Он последовательно определил периметры вписанных и описанных 6-, 12-, 24-, 48- и 96-угольников, используя формулы удвоения числа сторон. Можно только удивляться искусству Архимеда, сумевшего в то время произвести столь точные вычисления, многократно проводя извлечение квадратных корней с огромной точностью. Результатом этих расчетов стало утверждение, что число π заключено между числами $3\frac{1137}{8069}$ и $3\frac{2669}{18693}$, т.е. между 3,140995 и 3,142826.

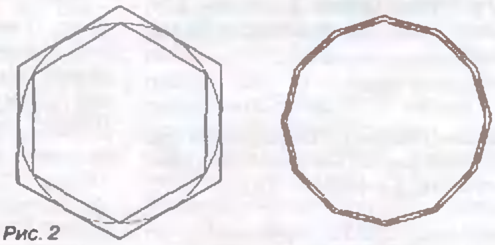


Рис. 2

Клавдий Птолемей, знаменитый не только как создатель геоцентрической планетарной системы, но и как математик, вычислил периметр правильного вписанного 720-угольника и получил для π значение $377/120 = 3{,}14166\ldots$ Отметим, что ему принадлежит введение понятий градуса, минуты и секунды (угловых).

Следующее достижение было получено через полторы тысячи лет французским математиком Франсуа Виетом. Он нашел периметры правильных вписанного и описанного 393216-угольников и получил оценку

$$3{,}1415926535 < \pi < 3{,}1415926537.$$

Эта оценка дает 10 верных знаков числа π. Для получения 17 верных знаков голландец Адриан ван Роомен использует $2^{30} = 1073741824$-угольники. Последним математиком, который шел по этому пути, был голландский математик Лудольф ван Цейлен. Он потратил 10 лет, вычисляя по методу Архимеда периметры многоугольников, последовательно удваивая число их сторон. Лудольф дошел до 32512254720-угольника и получил 20 верных знаков числа π. Свой труд он заканчивает словами: «У кого есть охота, пусть пойдет дальше». А дальше пошел он сам, доведя число верных знаков π до 35.

На этом история вычислений числа π не кончается. Конец XVII и начало XVIII веков ознаменованы расцветом математического анализа, использующего понятие предельного перехода, что позволяет рассматривать, в частности, суммы бесконечного числа слагаемых. Яков Грегори в 1671 году установил, что функция arctg x может быть представлена бесконечным рядом:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

При $x = 1$ этот ряд (он носит название «ряд Лейбница», в честь одного из создателей математического анализа) будет иметь вид

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Сгруппируем члены этого ряда двумя способами:

$$\frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) + \ldots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) - \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13}\right) - \ldots$$

Члены в скобках очевидно положительны, поэтому, исходя из первого равенства, можно заключить, что, взяв четное количество первых членов ряда Лейбница, мы получим число $\pi/4$ с недостатком, а взяв нечетное их количество, — с избытком.

Теперь стало гораздо проще вычислять число π, хотя для получения, скажем, трех верных знаков требуется сложить не меньше 50 членов ряда, а для четырех знаков — около 300 членов.

Авраам Шарп заметил, что, взяв $x = \sqrt{3}/3$, получаем

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \frac{1}{729} - \frac{1}{2673} + \ldots\right),$$

и первые шесть членов этого ряда дают число π с ошибкой, меньшей чем 0,0005.

Леонард Эйлер также вычислял число π. Он использовал соотношение

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$$

и обнаружил, что Ланьи, незадолго до этого получивший 128 знаков числа π, ошибся уже в 113-знаке.

Еще удобнее оказалось вычислять знаки числа π с помощью формулы

$$\pi = 24\operatorname{arctg}\frac{1}{8} + 8\operatorname{arctg}\frac{1}{57} + 4\operatorname{arctg}\frac{1}{239},$$

поскольку уменьшение аргумента арктингенса ведет к резкому увеличению скорости, с которой уменьшаются члены ряда.

Середина прошлого века ознаменовалась погоней за знаками числа π:

1844 г. — 200 знаков (З.Дазе),
1847 г. — 248 знаков (Т.Клаузен),
1853 г. — 330 знаков (Рихтер),
1853 г. — 440 знаков (З.Дазе),
1853 г. — 519 знаков (У.Шенкс).

Через сто лет с появлением компьютеров погоня за знаками числа продолжалась:

1949 г. — 2037 знаков (Джон фон Нейман, ENIAC),
1958 г. — 10000 знаков (Ф.Женюи, IBM-704),
1961 г. — 100000 знаков (Д.Шенкс, IBM-7090),
1973 г. — 1000000 знаков (Ж.Гийу, М.Буйе, CDC-7600),
1986 г. — 29360000 знаков (Д.Бейли, Cray-2),
1987 г. — 134217000 знаков (Я.Канада, NEC SX-2),
1989 г. — 1011196691 знак (Д. и Г.Чудновски, Cray-2 + IBM-3040).

Но все это уже ближе к спорту, чем к математике. Кстати, последний результат занесен в книгу рекордов Гиннесса. Математики изучили последовательность цифр числа π и выяснили, что все цифры в этом числе встречаются с одинаковой частотой.

А вот то, что число π не представляется в виде отношения двух целых чисел, т.е. не является рациональным числом, доказал в 1767 году видный французский математик Иоганн Генрих Ламберт. А в 1882 году немецкий математик Карл Линдеман доказал, что число π даже не может быть корнем многочлена с целыми коэффициентами. Числа, обладающие этим свойством, называются трансцендентными.

О числе π с улыбкой

— Папа, — спрашивает сын отца, — почему цыплята пищат «пи-пи-пи», а когда вырастут, то «ко-ко-ко» или «ку-ка-ре-ку»?

— Наверное, потому, что пока они сидели в круглом яйце, они могли рассуждать только о нем и открыли для себя число π, а потом у них появились и другие интересы.

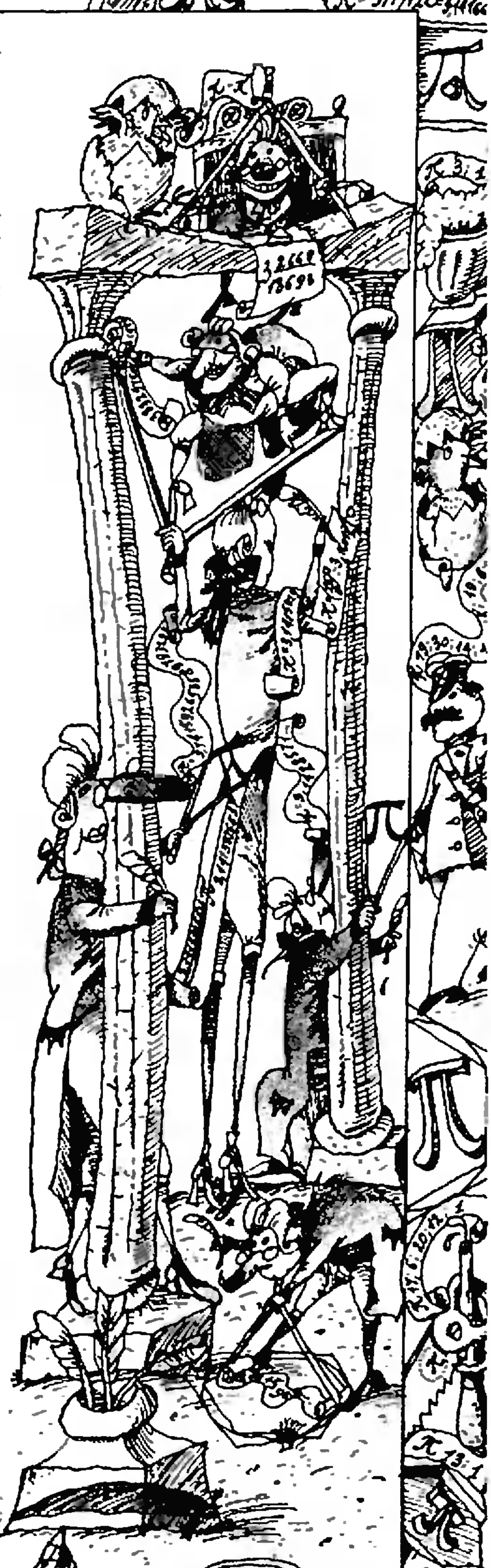
Пистолет — промежуток времени в 314 лет.

Питон — разновидность тритона.

Пирог — не очень ветвистый олений рог.

Пижон — мужчина, у которого несколько больше трех жен.

А.Савин



Теорема Менелая для тетраэдра

И.Габович

В НЕКОТОРЫХ пособиях по геометрии приводится планиметрическая теорема, называемая теоремой Менелая[1]. Приведем ее формулировку.

Теорема 1. *Если P, Q и R — соответственно точки пересечения каждой из сторон BC, CA и AB (или их продолжений) треугольника ABC с некоторой прямой, то*

$$\frac{BR}{RA}\cdot\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CP}{PB}=1.$$

Эта теорема редко используется в решении планиметрических задач (в частности, таких, которые обычно предлагаются на вступительных экзаменах в вузы) и потому она мало известна даже учащимся, проявляющим повышенный интерес к изучению математики. Предлагаем читателям самостоятельно доказать эту теорему.

Еще менее известна стереометрическая теорема Менелая для произвольного тетраэдра, которая, как будет показано ниже, весьма эффективно используется при решении некоторых задач.

Доказательству этой теоремы и ее применению в решении задач посвящена данная статья. Начнем с формулировки.

Теорема 2. *В произвольном тетраэдре KLMN точки A, B, C и D принадлежат ребрам KN, NL, LM и MK соответственно (рис.1). Для того чтобы точки A, B, C и D принадлежали одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее равенство:*

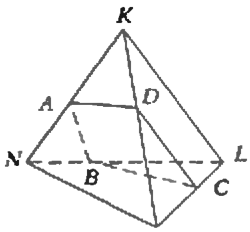


Рис. 1

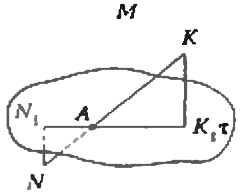


Рис. 2

$$\frac{KA}{AN}\cdot\frac{NB}{BL}\cdot\frac{LC}{CM}\cdot\frac{MD}{DK}=1. \qquad (1)$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть четырехугольник $ABCD$ — сечение данного тетраэдра некоторой плоскостью τ (на рисунке не показанной). Проведем KK_1, NN_1, MM_1 и LL_1 — перпендикуляры к плоскости τ. Рассмотрим «фрагмент» — пересечение ребра KN с плоскостью τ (рис.2). Очевидно, что $\Delta KK_1A \sim \Delta NN_1A$. Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{KA}{AN}=\frac{KK_1}{NN_1}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{NB}{BL}=\frac{NN_1}{LL_1},\quad \frac{LC}{CM}=\frac{LL_1}{MM_1},$$

$$\frac{MD}{DK}=\frac{MM_1}{KK_1}.$$

Перемножив по частям выписанные выше равенства, получаем равенство(1).

Достаточность. Предположим, что выполняется равенство (1), но точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Проведем через точки B, C и D плоскость (назовем ее σ), которая пересечет ребро KN в некоторой точке A_1, отличной от точки A (в силу сделанного выше предположения). Поэтому $KA_1 : A_1N \neq KA : AN$, вследствие чего равенство (1) для точек A_1, B, C и D выполняться не будет. Поскольку мы пришли к противоречию с исходным условием (не выполняется равенство (1)), то наше предположение ложно и, следовательно, плоскость σ пройдет через точку A.

Покажем теперь применение теоремы 2 к решению стереометрических задач.

Задача 1. *В тетраэдре ZABC точки M, N и P принадлежат ребрам ZA, AB и BC соответственно (рис.3), причем ZM : MA = 5 : 4, AN : NB = 2 : 5 и BP : PC = 1 : 2. Через точки M, N и P проведена плоскость τ. В каком отношении эта плоскость делит объем тетраэдра?*

Решение. Пусть плоскость τ (на рисунке не показанная) пересечет ребро ZC в точке Q. Четырехугольник $MNPQ$ — сечение данного тетраэдра плоскостью τ. Определим, в каком отношении точка Q делит ребро ZC. На основании равенства (1) и данных

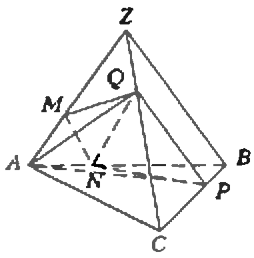


Рис. 3

условия имеем

$$\frac{ZM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QZ}= .$$

или

$$\frac{5}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{CQ}{QZ}=1,$$

откуда

$$CQ:QZ=4:1.$$

В многограннике $MANPCQ$ проведем сечение через ребро AN и вершину Q. Это сечение разбивает рассматриваемый многогранник на треугольную пирамиду $QAMN$ и четырехугольную пирамиду $QANPC$, которая диагональным сечением AQP разбивается на две треугольные пирамиды: $QAPC$ и $QAPN$.

Пусть S — площадь грани ABC, H — длина высоты тетраэдра, проведенной из вершины Z (сама высота на рисунке не показана), V — объем данного тетраэдра.

Определим объемы трех полученных выше треугольных пирамид. Для пирамиды $QAPC$

$$V_{QAPC}=\frac{1}{3}S_{\Delta APC}\cdot H_Q,$$

где H_Q — длина высоты треугольной пирамиды $QAPC$, проведенной из вершины Q на плоскость грани APC (на рисунке также не показанной). Легко сообразить, что $H_Q=\frac{4}{5}H$. Тогда

$$V_{QAPC}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}S\right)\cdot\frac{4}{5}H=$$

$$=\frac{8}{15}\left(\frac{1}{3}SH\right)=\frac{8}{15}V.$$

Аналогично,

$$V_{QAPN}=\frac{1}{3}S_{\Delta APN}\cdot H_Q=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{7}S_{\Delta ABP}\right)\cdot\frac{4}{5}H=$$

$$=\frac{8}{105}\cdot\left(\frac{1}{3}S\cdot H\right)=\frac{8}{105}V.$$

Пусть далее S_1 — площадь грани ZAB, H_1 — длина высоты данного тет-

[1] *Менелай Александрийский (1—2 в. н.э.) — греческий математик и астроном.*

раэдра, проведенной из вершины C на плоскость грани ZAB. Тогда

$$V_{QAMN} = \frac{1}{3} S_{\Delta AMN} \cdot H'_Q,$$

где H'_Q — длина перпендикуляра (на рисунке не показанного), проведенного из вершины Q на плоскость грани ZAB. Легко сообразить, что $H'_Q = \frac{1}{5} H_1$, и

$$V_{QAMN} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{7} S_1\right) \cdot \frac{1}{5} H_1 =$$

$$= \frac{8}{315}\left(\frac{1}{3} S_1 \cdot H_1\right) = \frac{8}{315} V.$$

Найдем теперь объем многогранника $MANPCQ$:

$$V_{MANPCQ} = V_{QAPC} + V_{QAPN} + V_{QAMN} =$$

$$= \frac{8}{15} V + \frac{8}{105} V + \frac{8}{315} V = \frac{40}{63} V.$$

Следовательно,

$$V_{ZQMNPB} = \frac{23}{63} V.$$

Таким образом, искомое отношение равно 23 : 40.

Задача 2. *Объем тетраэдра $ZABC$ равен 5. Через середины ребер ZA и BC проведена плоскость, пересекающая ребро ZC в точке M. При этом отношение длины отрезка ZM к длине отрезка MC равно 2/3. Найдите площадь сечения тетраэдра указанной плоскостью, если расстояние до нее от вершины A равно 1.*

Решение. Пусть K и P — середины ребер ZA и BC соответственно и $ZM : MC = 2:3$ (рис.4). Четырехугольник $KLPM$ — данное в условии сечение. На основании теоремы 2 имеем

$$\frac{AK}{KZ} \cdot \frac{ZM}{MC} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BL}{LA} = 1,$$

или

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{BL}{LA} = 1,$$

откуда $BL : LA = 3 : 2$.

Соединим точки M и A, M и L, A и P.

Пусть $S_{\Delta ABC} = S$ и длина высоты тетраэдра, проведенной из вершины Z

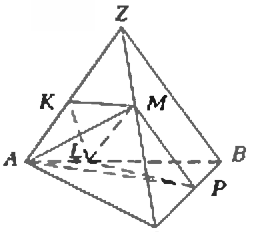


Рис. 4

(на рисунке не показанной), равна H. Согласно условию, $\frac{1}{3} S \cdot H = 5$. Очевидно, что высота пирамиды $MALP$, проведенная из вершины M, равна $\frac{3}{5} H$. Найдем теперь V_{MALP}:

$$V_{MALP} = \frac{1}{3} S_{\Delta ALP} \cdot \frac{3}{5} H =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} S_{\Delta ABP} \cdot H =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{25} \cdot \frac{1}{2} S \cdot H = \frac{3}{25}\left(\frac{1}{3} S \cdot H\right) =$$

$$= \frac{3}{25} \cdot 5 = \frac{3}{5}.$$

Положим далее $S_{\Delta ZAB} = S_1$ и длину высоты тетраэдра, проведенной из вершины C на грань ZAB, равной H_1. Тогда

$$V_{MAKL} = \frac{1}{3} S_{\Delta AKL} \cdot \frac{2}{5} H_1 =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} S_1\right) \cdot H_1 =$$

$$= \frac{2}{25}\left(\frac{1}{3} S_1 \cdot H_1\right) = \frac{2}{5},$$

$$V_{AKMPL} = V_{MALP} + V_{MAKL} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1. \tag{2}$$

С другой стороны (учитывая, что расстояние от вершины A до плоскости сечения по условию равно 1), имеем

$$V_{AKMPL} = \frac{1}{3} S_{KMPL} \cdot 1 = \frac{1}{3} S_{KMPL}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что $S_{KMPL} = 3$.

Задача 3. *В пирамиде $KLMN$ проведено сечение $ABCD$ так, что точка A лежит на ребре KN, точка B — на ребре LN, точка C — на ребре LM, точка D — на ребре MK (рис.5). Известно, что*

$$NB = \frac{4}{3} BL,\ CM = \frac{2}{3} LC$$

и

$$3DK \cdot AK - 2AN \cdot DM = DM \cdot AK.$$

Найдите отношение объемов частей, на которые плоскость $ABCD$ делит пирамиду.

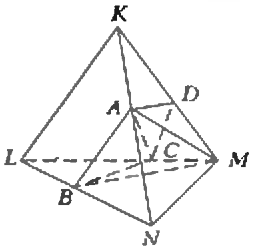


Рис. 5

Решение. Из условия задачи непосредственно следует, что

$$\frac{NB}{BL} = \frac{4}{3} \tag{4}$$

и

$$\frac{LC}{CM} = \frac{3}{2}. \tag{5}$$

Положим $AK : AN = p$ и $DM : DK = q$. На основании теоремы 2 имеем

$$\frac{NB}{BL} \cdot \frac{LC}{CM} \cdot \frac{MD}{DK} \cdot \frac{KA}{AN} = 1.$$

Учитывая (4) и (5) и принятые выше обозначения, получаем

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot q \cdot p = 1,$$

откуда

$$pq = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Разделив обе части последнего из данных в условии равенств на $AN \cdot DK$, получаем

$$3\frac{AK}{AN} - 2\frac{DM}{DK} = \frac{DM}{DK} \cdot \frac{AK}{AN},$$

или

$$3p - 2q = pq. \tag{7}$$

Из (6) и (7) составляем систему

$$\begin{cases} pq = \frac{1}{2}, \\ 3p - 2q = pq. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем, что $p = 2/3$ и $q = 3/4$, или

$$\frac{AK}{AN} = \frac{2}{3} \text{ и } \frac{DM}{DK} = \frac{3}{4}.$$

Разобьем многогранник $ABNMCD$ (аналогично тому, как это было сделано в задаче 1) на три треугольные пирамиды: $ABMN$, $ABMC$ и $ACDM$.

Пусть S — площадь треугольника LMN, H — длина высоты данной пирамиды, проведенной из вершины K, V — объем данной пирамиды, H_A — длина высоты пирамиды $ABMN$, проведенной из вершины A. Тогда имеем

$$V_{ABMN} = \frac{1}{3} S_{\Delta BMN} \cdot H_A = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} S \cdot \frac{3}{5} H =$$

$$= \frac{12}{35}\left(\frac{1}{3} S \cdot H\right) = \frac{12}{35} V;$$

$$V_{ABMC} = \frac{1}{3} S_{\Delta BMC} \cdot H_A =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} S_{\Delta BLM} \cdot \frac{3}{5} H =$$

$$= \frac{6}{25} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} S \cdot H = \frac{18}{175} V.$$

Пусть далее S_1 — площадь грани KLM, H_1 — длина высоты данной пирамиды, проведенной из вершины N на плоскость грани KLM, H'_A — длина перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость грани KLM. Тогда

$$V_{ACDM}=\frac{1}{3}S_{\Delta CDM}\cdot H'_A=$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{5}S_1\right)\cdot\frac{2}{5}H_1=\frac{12}{175}V.$$

Найдем теперь объем многогранника $ABNMCD$:

$$V_{ABNMCD}=V_{ABMN}+V_{ABMC}+V_{ACDM}=$$
$$=\frac{12}{35}V+\frac{18}{175}V+\frac{12}{175}V=\frac{18}{35}V.$$

Следовательно,

$$V_{KDABCL}=\frac{17}{35}V.$$

Таким образом, искомое отношение равно 17 : 18.

Задача 4. *Дана пирамида $SABCD$, основание которой имеет форму выпуклого четырехугольника $ABCD$ со взаимно перпендикулярными диагоналями AC и BD (рис.6). Основание перпендикуляра, опущенного из вершины S на основание пирамиды, совпадает с точкой O пересечения диагоналей AC и BD.*

Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки O на боковые грани пирамиды, лежат на одной окружности.

Решение. Пусть OK — перпендикуляр к плоскости SAB, OL — к плоскости SBC, OM — к плоскости SCD и ON — к плоскости SAD. Покажем, например, что точка M — ортоцентр грани SCD. В плоскости грани SCD проведем луч CM до пересечения с ребром SD в точке P. Согласно условию, $OC\perp SO$ и $OC\perp OD$. Поэтому $OC\perp SD$. По теореме о трех перпендикулярах ($OM\perp SCD$, OC — наклонная и CM — ее проекция на SCD) имеем, что $SD\perp CM$. Аналогично доказывается, что $DM\perp SC$ (на рисунке луч DM не показан). Значит, M — ортоцентр грани SCD.

Аналогично доказывается, что точки K, L и N тоже являются ортоцентрами соответствующих граней.

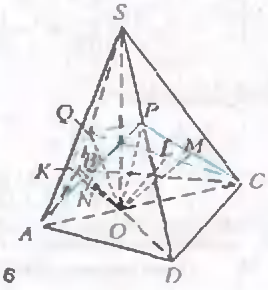


Рис. 6

Соединим точки P и O. По теореме о трех перпендикулярах $OP\perp SD$. Соединим теперь точки A и P. По той же теореме получаем, что $AP\perp SD$. Так как из точки A в грани ASD на SD можно провести только один перпендикуляр, то отрезок AP пройдет через точку N. Итак, высоты, проведенные в гранях ASD и CSD из вершин A и C на ребро SD, проходят через точки N и M соответственно и пересекают ребро SD в точке P.

Аналогично доказывается, что высоты граней ASB и CSB, проведенные из вершин A и C на ребро SB, проходят через точки K и L соответственно и попадают в одну и ту же точку Q на ребре SB.

Рассмотрим треугольник APC, в котором $PO\perp AC$, $ON\perp AP$ и $OM\perp PC$

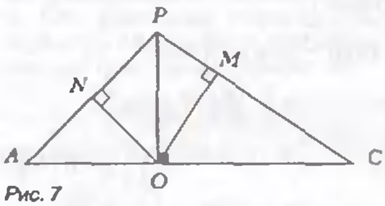


Рис. 7

(рис.7). Положим $OA=a$, $OC=b$ и $OP=c$. Тогда

$$AP=\sqrt{a^2+c^2}\ \text{ и }\ CP=\sqrt{b^2+c^2}.$$

Из ΔAOP:

$$NA=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+c^2}};\ PN=\frac{c^2}{\sqrt{a^2+c^2}}\ \text{ и }\ \frac{PN}{NA}=\frac{c^2}{a^2}.$$

Из ΔCOP:

$$CM=\frac{b^2}{\sqrt{b^2+c^2}};\ MP=\frac{c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}\ \text{ и }\ \frac{CM}{MP}=\frac{b^2}{c^2}.$$

Аналогично рассмотрим ΔAQC, положив $OQ=d$ (рис.8).

Из ΔAOQ:

$$AK=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+d^2}};\ KQ=\frac{d^2}{\sqrt{a^2+d^2}}\ \text{ и }\ \frac{AK}{KQ}=\frac{a^2}{d^2}.$$

Из ΔQOC:

$$LC=\frac{b^2}{\sqrt{b^2+d^2}};\ QL=\frac{d^2}{\sqrt{b^2+d^2}}\ \text{ и }\ \frac{QL}{LC}=\frac{d^2}{b^2}.$$

Точки K, L, M и N принадлежат, соответственно, ребрам AQ, QC, CP и PA тетраэдра $AQCP$. Рассмотрим произведение

$$\frac{AK}{KQ}\cdot\frac{QL}{LC}\cdot\frac{CM}{MP}\cdot\frac{PN}{NA}=\frac{a^2}{d^2}\cdot\frac{d^2}{b^2}\cdot\frac{b^2}{c^2}\cdot\frac{c^2}{a^2}=1$$

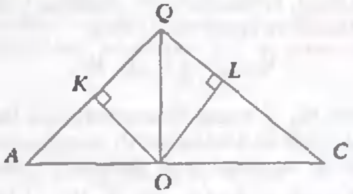


Рис. 8

Из того, что рассматриваемое произведение равно 1, следует, что точки K, L, M и N принадлежат одной плоскости (назовем ее σ).

Построим на SO, как на диаметре, сферу (на рисунке не показанную). Поскольку $\angle SKO=\angle SLO=\angle SMO=\angle SNO=90°$, то вершины этих углов лежат на построенной сфере. А так как точки K, L, M и N принадлежат также плоскости σ, то эти точки лежат на пересечении плоскости σ со сферой, т.е. на окружности.

Приведенные решения свидетельствуют о том, как эффективно используется теорема 2 для некоторых стереометрических задач, существенно упрощая их решения. Еще более убедит читателей в правильности сделанного выше утверждения решение упражнений.

Упражнения

1. Докажите, что любая плоскость, проходящая через середины двух скрещивающихся ребер тетраэдра, делит его объем пополам.

2. В тетраэдре $ABCD$ через середины K и N ребер AD и BC проведена плоскость, пересекающая ребра AB и CD, соответственно, в точках M и L. Площадь четырехугольника $KLNM$ равна 16, а отношение длины отрезка AM к длине отрезка MB равно 0,5. Вычислите расстояние от вершины A до плоскости $KLNM$, если объем многогранника $NACLK$ равен 8.

3. В тетраэдре $ABCD$ проведено сечение $KMLN$ так, что точка K лежит на ребре AD, точка M — на ребре DC, точка L — на ребре BC, точка N — на ребре AB. Сечение $KMLN$ делит пирамиду на две части. Найдите отношение объемов этих частей, если известны следующие соотношения между длинами отрезков: $2KD=AK$, $2BN=3NA$ и $3CL\cdot MC-4BL\cdot DM=3BL\cdot MC$.

4. Сфера касается ребер AS, BS, BC и AC треугольной пирамиды $SABC$ в точках K, L, M и N соответственно. Найдите длину отрезка KL, если $MN=7$, $NK=5$, $LN=2\sqrt{29}$ и $KL=LM$.

5. Дан тетраэдр $ABCD$. На его ребрах AB и CD взяты точки K и M так, что $AK:KB=DM:MC\neq1$. Через точки K и M проведена плоскость, делящая тетраэдр на два многогранника равных объемов. В каком отношении эта плоскость делит ребро BC?

Можно ли увидеть магнитное поле?

А.МИТРОФАНОВ

Это не ложь, это закон физики.

О.Бендер

Давайте вместе проведем несложный, но очень красивый и забавный опыт. Для опыта нам потребуется только небольшой магнит, например от старой игрушки или электроизмерительного прибора, и ... цветной телевизор. Достаточно включить настроенный на какой-либо канал телевизор и поднести к его экрану магнит, и произойдет чудесное превращение: на экране вблизи магнита цвета изменятся поразительным образом. Особенно красивые картинки получаются, если исходное изображение имеет крупные по площади участки одного цвета, например как в заставке с часами-секундомером на голубом фоне, появляющейся на телеэкране перед информационной программой.

В присутствии магнита на экране во всей красе виден яркий и насыщенный разными цветами рисунок, чем-то напоминающий чередование цветов в радужных масляных разводах на мокром асфальте или картинки полярного сияния (рис. 1). Цветные полосы сгущаются вблизи контуров магнита и как бы делают видимым (визуализируют) магнитное поле. Такая мысль невольно приходит в голову, если проделывать несложные манипуляции с магнитом: вращать его, отодвигать или приближать к экрану, наблюдая при этом изменения цветов на экране. При этом «картинка» магнитного поля на экране получается более впечатляющей и выразительной, чем если бы мы захотели наблюдать поле магнита с помощью железных опилок, иголок, гвоздей (рис. 2) или же с помощью несколько менее известного индикатора магнитного поля, изготовленного на основе тонкой пленки жидкого масла со взвешенными в нем мелкими ферромагнитными частицами, находящейся на подложке и прикрытой сверху прозрачной полимерной пленкой. (Такой индикатор хорошо знаком, например, американским школьникам под названием «Magnetic viewing paper» — бумага для наблюдения магнитного поля.) К тому же экран телевизора чувствует довольно слабые магнитные поля, на которые железные опилки или масляный индикатор почти не реагируют.

Если вы захотите сфотографировать цветные изображения с экрана телевизора, возмущенные полем небольшого магнита, находящегося вблизи экрана, это сделать нетрудно. Для фотосъемки вам не нужен даже штатив. Яркость свечения обычного телевизионного экрана такова, что при фотографировании на фотопленке с чувствительностью 100 – 200 ед. при полностью открытой диафрагме требуется выдержка, приблизительно равная 1/15 или даже 1/30 секунды, т.е. такая, которая есть у многих фотоаппаратов. Более короткие выдержки ни к чему хорошему не приведут (подумайте, почему), а при более длительных выдержках снимать с руки без штатива трудно, даже если картинка на экране на глаз кажется неподвижной. Конечно, лучше использовать цветную негативную фотопленку, чтобы получить потом цветные фотографии. В наших экспериментах использовался отечественный цветной телевизор марки «Рубин-ТЦ 51» и фотоаппарат «Зенит» с зеркальным видоискателем.

Рис. 2. Гвозди на одном из полюсов магнита

Рис. 1. Фотография с экрана цветного телевизора, сделанная в присутствии маленького магнита

Теперь приступим к объяснению опыта. Кое-кто из читателей, наверное, уже догадался, как это сделать. Действительно, все очень просто. Когда мы подносим магнит к экрану телевизора, в вакуумном объеме кинескопа вблизи экрана возникает магнитное поле. Возмущающее действие магнита — сила Лоренца — вызывает дополнительное отклонение луча, что приводит к изменению цвета в тех местах экрана, где смещение луча достаточно велико. Само отклонение электронного пучка магнитным полем — явление хорошо известное. Но каким образом в цветном телевизоре изменяется цвет экрана при его подмагничивании? Этот вопрос требует отдельного рассмотрения.

Разберем задачу, не вдаваясь подробно в технические детали. Мы обычно не задумываемся над тем, сколь замечательны свойства нашего зрения, позволяющие различать цвета во всем их многообразии, наслаждаться яркими и сочными красками окружающего мира, улавливать тончайшие световые оттенки и полутона. Волшебный мир световых ощущений — обыденное явление в жизни многих людей. И надо быть благодарным Природе, «предложившей» именно такой вариант зрения.

Но что мы понимаем под словами «цвет» и «цветовое зрение»? Световое излучение многих источников, например таких, как Солнце, лампа накаливания, освещенный лист белой бумаги или участок дневного неба, состоит из непрерывного ряда лучей с разными длинами волны. По определению, видимый свет — это та область электромагнитного излучения, на которую обычно реагируют глаза большинства людей (вопрос о цветовой слепоте людей мы здесь не рассматриваем). В длинах волн это диапазон примерно от 380 до 760 нм, т.е. от фиолетового до темно-красного. Более или менее однородную смесь лучей любого источника с помощью стеклянной призмы, дифракционной решетки или набора светофильтров можно разложить по длинам волн на узкие полосы, про которые мы говорим, что они имеют различные цвета, и которые наш глаз выделяет как красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, синий, фиолетовый и их многочисленные оттенки. Результат разложения светового пучка на составляющие с разными длинами волн или разными частотами называют спектром (от латинского слова spectrum — представление, образ). Цветовое зрение возможно потому, что в сетчатке нашего глаза есть детекторы трех типов — это колбочки, способные по-разному поглощать свет с разной длиной волны. Пигменты колбочек имеют широкие полосы поглощения, но максимумы поглощения находятся в разных участках и соответствуют длинам волн 430, 530 и 560 нм. Три типа колбочек — не

Рис. 3. Иллюстрация к опыту по смешению цветов

единственные светочувствительные рецепторы глаза. Когда света мало, темно или полумрак, колбочки не реагируют активно на видимое излучение, и в действие включается другой механизм зрения — с помощью палочек. Палочки содержат высокочувствительный к свету пигмент родопсин, ответственный за сумеречное зрение — когда мы еще видим, но уже не различаем цвета.

С помощью оптических приборов можно не только получить спектр источника излучения, но и выполнить обратную операцию — собрать воедино лучи разного цвета. Вообще, смешение разных цветов приводит к поразительным результатам, далеко не очевидным и предсказуемым, как могло бы показаться на первый взгляд.

Обратимся к известной демонстрации, которая восходит еще к опытам Ньютона и Максвелла по смешению цветов. С помощью трех проекторов осветим экран тремя частично перекрывающимися пучками света, на пути которых находятся три разных светофильтра: красный, зеленый и синий. Подобрав подходящую интенсивность каждого из любых двух пучков по отношению к третьему, получим, что в области перекрытия всех трех пучков экран выглядит белым (рис. 3). Красный и зеленый пучки, перекрываясь, дают в результате желтый цвет, а синий и зеленый — голубой. Можно сказать также, что освещение белого экрана голубым и красным пучками дает белый цвет.

Предположим теперь, что красное, зеленое и синее световые пятна находятся на экране рядом друг с другом, не перекрываясь, но имеют настолько малые угловые размеры, что не разрешаются глазом каждое по отдельности. Тогда на экране такой объект будет выглядеть как белая точка. Это происходит потому, что каждая световая точка в нашем глазу (при фокусировке хрусталиком на сетчатку) получается слегка расплывшейся и пятна различного цвета действуют на цветовые пигменты соседних колбочек. Мозг, обрабатывая информацию от чувствительных центров разных колбочек, сигнализирует нам, что мы видим белую точку. Изменив соотношение интенсивностей цветов в пучках, а также возможно изменив окружающий фон, мы можем наблюдать цветную точку любого цвета и оттенка. Подобным образом с помощью сочетания разных не смешанных красок, нанесенных отдельными точками на холст, художники-пуантилисты добивались создания любого цветового образа у зрителя, рассматривавшего картину с некоторого расстояния.

Отмеченные особенности цветового

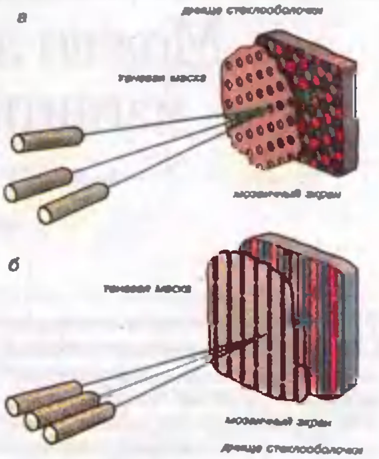


Рис. 4. Экран кинескопа с мозаичной и штриховой структурой

восприятия лежат и в основе действия кинескопа цветного телевизора. Экран кинескопа состоит из множества мелких одинаковых по форме люминофорных элементов в виде кругов или полосок, собранных в группы по три (рис. 4). Ячейки элементов имеют разный химический состав (соединения элементов и добавки Zn, S, Se, P и т.д.) и под действием трех электронных лучей светятся красным, зеленым и синим цветом. Эти три цвета, заданные в определенной пропорции по интенсивности, позволяют воспроизвести широкую гамму цветов и оттенков в изображении с высоким пространственным разрешением, так как люминофорные ячейки достаточно малы. Впрочем, люминофорные полоски можно увидеть непосредственно глазом, если приблизиться к освещенному экрану, или через увеличительное стекло. А еще лучше сфотографировать их в увеличенном виде (рис. 5).

Вернемся к рисунку 4. На нем кроме трехцветных люминофорных ячеек экранов с мозаичной или штриховой структурой показаны соответствующие им так называемые теневые маски — металлические тонкостенные экраны с множеством регулярно расположенных отверстий — и электронные прожекторы — по три на каждый экран кинескопа. Теневая маска устанавливается вблизи экрана на расстоянии около сантиметра от него. Во время телевизионной передачи в цветном изображении телевизионная развертка лучей выполняется общей для кинескопа магнитной отклоняющей системой, но каждый из трех лучей модулируется своим видеосигналом, соответствующим изображению в красном, зеленом или синем цвете. Взаимное расположение прожекторов, люминофорных ячеек и отверстий в теневой маске подобрано так, что ячейки люминофора какого-либо цвета остаются открытыми только для облучения электронами от своего прожектора, т.е. прожектора, луч которого модулируется видеосигналом, отвечающим за цвет в изображении, совпадающий с цветом свечения выбранного нами люминофора. Другие два прожектора засвечивают свои, соответствующие им люминофорные ячейки. В этом и состоит суть устройства и принцип действия цветного кинескопа, вернее, одной из его разновидностей — с цветоделительным элементом в виде теневой маски.

Даже такого краткого описания принципа работы кинескопа цветного телевизора вполне достаточно, чтобы разобраться, почему магнитное поле маленького внешнего магнита разрушает цветное изображение на экране телевизора, почти не изменяя геометрические очертания предметов. Действительно, если горизонтальная составляющая силы Лоренца, действующая на электроны пучков в кинескопе из-за возмущающего действия внешнего магнита, помещенного у экрана, вызывает отклонение лучей на расстояния, соизмеримые с горизонтальным периодом отверстий в маске или расстоянием между люминофорными полосками, то цветовой баланс в изображении будет нарушен и окраска предметов изменится. При развертке лучей в области магнитного поля электроны «сбиваются» со своего пути, проникают через «чужие» отверстия в теневой маске и засвечивают люминофорные ячейки другого цвета. Когда убирают магнит, цвета на экране восстанавливаются.

Внимательный читатель, особенно если он находил на свалке теневую маску от кинескопа цветного телевизора, мог бы добавить к нашему объяснению, что не только электроны сбиваются со своего пути из-за внешнего магнитного поля, но и теневая маска, сделанная из мягкой стали, притягивается к магниту, деформируется и пропускает «чужие» электроны.

Итак, в целях безопасности рекомендуем вам проводить опыты только с маленькими, пробными магнитами объемом 1–2 см^3. В экспериментах с массивным магнитом никто не застрахован от возможности разбить экран, необратимым образом деформировать теневую маску, нарушить работу прожектора электронов и других устройств телевизора.

В заключение вспомним одну забавную историю, которую как-то раз поведал своим студентам академик П.Л.Капица.

Однажды с Дальнего Востока в командировку в Москву в Академию наук прилетел капитан второго ранга N, командир боевого корабля. Капитан прибыл с необычным грузом: он привез свое изобретение — магнит, который, по его словам, имел только один полюс, северный. И еще привез капитан письмо от адмирала, своего прямого начальника, с просьбой к ученым Академии разобраться с изобретением капитана, которое больше напоминало открытие, и дать авторитетное заключение.

Магнит выглядел просто: брусок металла массой около килограмма, покрытый свинцовым суриком, и оба полюса магнита — северные. П.Л.Капица, к которому направили капитана, сразу «раскусил» загадку: магнит был составлен из двух одинаковых намагниченных стальных половинок, аккуратно приклеенных друг к другу южными полюсами и закрашенных в один цвет. Капица спросил капитана, зачем тот проделал такую шутку. Оказалось, что капитан никогда раньше не был в Москве, хотя об этом мечтал давно, а начальство, т.е. адмирал, не отпускало со службы, даже в увольнение. Другой подходящий способ попасть в столицу капитану не пришел на ум.

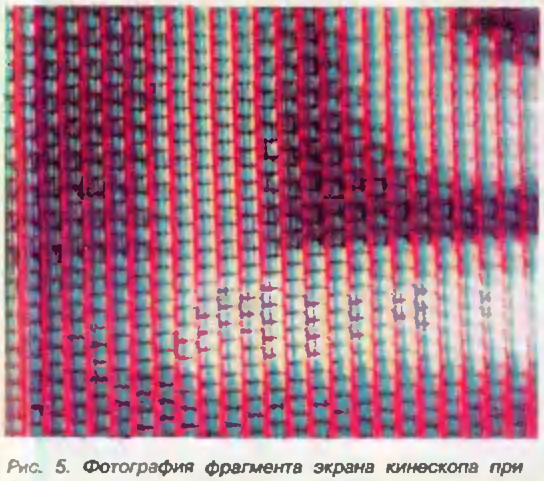


Рис. 5. Фотография фрагмента экрана кинескопа при большом съемочном увеличении

А будь у адмирала цветной телевизор и номер журнала «Квант» с этой статьей, вряд ли он отправил бы капитана в командировку в Москву. Догадайтесь, каким образом телевизор мог бы помочь адмиралу разгадать загадку капитанского магнита. И заодно попробуйте ответить еще на несколько вопросов.

1. Сияние радуги занимает по спектру всю видимую область. Почему же в радуге нет коричневого цвета?

2. При смешивании желтой краски с синей получается краска зеленого цвета. Если же на экране смешивать лучи желтого и синего цвета от проекторов со светофильтрами, то в области пересечения лучей на белом экране получается белый цвет. Объясните, почему наблюдается такое различие в результатах, казалось бы, одного и того же опыта по смешению цветов.

3. Каким образом возникает черный цвет в изображении на экране цветного телевизора? Почему он часто кажется более черным (или более темным), чем просто экран выключенного телевизора?

4. Ночью в полнолуние на улице довольно светло, и видны многие предметы. Однако по цвету они сильно отличаются от того, как выглядят днем. Подобная картина наблюдается и в опыте с цветным телевизором: если сбалансированное цветное изображение ослабить плотным нейтральным (по спектру) светофильтром, то исчезнут красные и зеленые тона и изображение станет серо-синим. Объясните это.

5. Как отличить, смещаются ли электронные лучи при приближении магнита к экрану цветного телевизора или же деформируется (изгибается) теневая маска, притягиваясь к магниту?

6. В правую или левую часть экрана кинескопа отклоняются электроны под влиянием магнитного поля Земли? Телевизор находится а) в Московской области, б) в Одессе, в) на экваторе, г) на юге Австралии.

7. Оцените смещение электронного луча на экране кинескопа телевизора из-за влияния магнитного поля Земли. Энергия пучка 25 кэВ, длина трубки кинескопа 0,2 м.

8. Изображение предметов на экране цветного телевизора под действием переменного внешнего магнитного поля легко изменяет свой цвет, но не форму, которая довольна устойчива к магнитным возмущениям. Почему?

9. Можно ли, пользуясь цветным телевизором как индикатором, обнаружить магнитные материалы, находящиеся в непрозрачной упаковке?

10. Как измерить отношение заряда электрона к его массе с помощью телевизора?

Метод эквивалентных тел

Б. ОРАЧ

Во многих геометрических задачах замена данной в условии фигуры на другую, равновеликую ей, часто приводит к значительному упрощению и сокращению решения.

Покажем это на примере тел вращения. Речь идет о фигурах, которые образуются вращением многоугольника около оси, которая лежит в плоскости многоугольника и не пересекает его. В результате вращения образуется тело, ограниченное боковой поверхностью цилиндра (если сторона многоугольника параллельна оси), боковой поверхностью конуса (если только один конец стороны многоугольника лежит на оси и сторона не перпендикулярна оси), боковой поверхностью усеченного конуса (если сторона многоугольника не параллельна оси и ни один конец не лежит на оси), кругом или круговым кольцом (если сторона многоугольника перпендикулярна оси). Площадь поверхности фигуры вращения равна сумме площадей поверхностей вышеназванных простейших фигур вращения. Поэтому решение часто оказывается довольно громоздким. Покажем это на ряде задач.

Задача 1. *Два треугольника, равнобедренный с углом α при вершине и равносторонний, имеют общее основание a и лежат по разные стороны их общего основания. Эти треугольники вращаются около оси, проходящей через одну из общих вершин этих треугольников параллельно высоте равнобедренного треугольника. Найдите площадь поверхности фигуры вращения.*

Традиционное решение. В результате вращения образуется тело (рис.1), ограниченное боковой поверхностью конуса, образуемой вращением стороны BC, боковой поверхностью конуса, образуемой вращением стороны CD, боковой поверхностью усеченного конуса, образуемой вращением AB, и боковой поверхностью усеченного конуса, образуемой вращением AD. Это четыре различные поверхности, и для нахождения площади поверхности фигуры вращения надо найти сумму их площадей.

Поскольку $AC = a$ и $\angle ABC = \alpha$, то $AB = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$, $BO = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; тогда площади нужных нам поверхностей равны

$$S_{вр.BC} = \frac{\pi a}{2}\cdot\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi a^2}{4\sin\frac{\alpha}{2}};$$

$$S_{вр.CD} = \frac{\pi a}{2}\cdot a = \frac{\pi a^2}{2};$$

$$S_{вр.AB} = \pi\left(a+\frac{a}{2}\right)\cdot\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{3a^2\pi}{4\sin\frac{\alpha}{2}};$$

$$S_{вр.AD} = \pi\left(a+\frac{a}{2}\right)a = \frac{3a^2\pi}{2}.$$

Искомая площадь равна

$$S_{ф.вр} = \frac{\pi a^2}{4\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\pi a^2}{2} + \frac{3a^2\pi}{2} =$$

$$= \frac{4\pi a^2}{4\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{4\pi a^2}{2} = \frac{2\pi a^2}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{1}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Решение путем замены. Продолжим AB до пересечения с осью в точке C_1 и AD до пересечения с осью в точке C_2 (рис.2). Поверхность, образуемая вращением BC_1, равна площади поверхности, образуемой BC, площадь поверхности, образуемой вращением DC_2, равна поверхности, образуемой вращением CD и т.д. Таким образом, площадь поверхности фигуры вращения равна сумме площадей боковых поверхностей двух конусов AC_1 и AC_2 (нет необходимости находить площади поверхностей двух усеченных конусов):

$$S_{ф.вр} = 2\pi a^2 + \frac{\pi a^2}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\pi a^2}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{1}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Задача 2 (эта задача классическая и опубликована в разных сборниках). *Плоская ломаная линия состоит из n равных отрезков, имеющих длину a и соединенных в виде зигзага под углом α друг к другу. Найдите площадь поверхности, образуемой вращением этой линии около оси, которая проходит через один из концов ее параллельно биссектрисе угла α.*

Традиционное решение. Искомая площадь равна сумме площадей боковых поверхностей конуса, образованного вращением отрезка HL, и усеченных конусов, образованных вращением отрезков AB, BC, CD и т.д. (рис.3). Они равны

$$S_{вр.HL} = \pi\cdot HK\cdot HL = \pi a^2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

$$S_{вр.LN} = \pi(LM+HN)\cdot LH =$$

$$= \pi\left(a\sin\frac{\alpha}{2}+2a\sin\frac{\alpha}{2}\right)a = 3\pi a^2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

$$S_{вр.NE} = \pi\left(a\sin\frac{\alpha}{2}+3a\sin\frac{\alpha}{2}\right)\cdot a = 5\pi a^2\sin\frac{\alpha}{2}$$

и т.д. Суммируя, получаем

$$S_{ф.вр.} = \pi a^2\sin\frac{\alpha}{2}\left(1+3+\ldots+(2n-1)\right) =$$

$$= \pi a^2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1+2n-1}{2}\cdot n = \pi n^2a^2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Решение путем замены. Продолжим AB до пересечения с осью в точке H'.

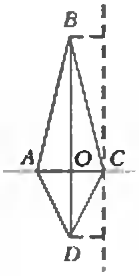


Рис. 1

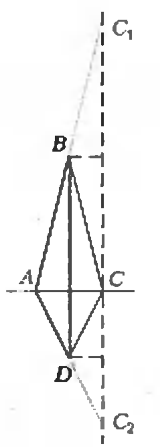


Рис. 2

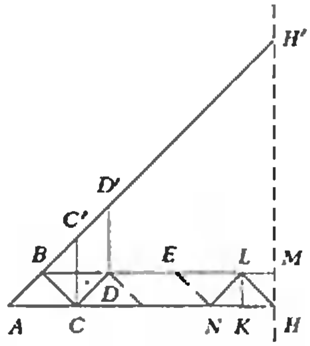


Рис. 3

Ясно, что

$$S_{\text{вр}BC} = S_{\text{вр}BC'},\ S_{\text{вр}CD} = S_{\text{вр}C'D'} \text{ и т.д.}$$

Площадь поверхности фигуры вращения равна площади боковой поверхности конуса с образующей AH' и радиусом основания AH:

$$AH' = n\cdot a,\quad AH = \pi n a \sin\frac{\alpha}{2};$$

$$S_{\text{ф вр}} = \pi n^2 a^2 \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Остальные задачи мы сразу будем решать методом замены.

Задача 3. *Прямоугольник вращается около оси, проходящей через его вершину параллельно диагонали. Угол между диагоналями равен α, площадь прямоугольника равна S. Найдите площадь поверхности фигуры вращения.*

Решение. Из рисунка 4 видно, какую

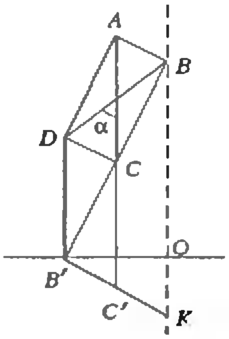


Рис. 4

поверхность удобно рассмотреть вместо заданной в условии:

$$AD \to CB',\quad DC \to B'C',$$

$$AB \to C_1K.$$

Площадь поверхности фигуры вращения равна сумме площадей боковых поверхностей двух конусов, образуемых вращением BB' и $B'K$.

Обозначим $BC = l$, $BB' = 2l$; тогда

$$OB' = 2l\sin\frac{\alpha}{2},\ B'K = 2l\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};$$

$$S_{\text{ф вр}} = \pi\cdot 2l\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\left(2l + 2l\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 4\pi l^2 \sin\frac{\alpha}{2}\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right). \quad (1)$$

Из

$$S = l^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

находим

$$l^2 = S\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Подставляя в (1), имеем

$$S_{\text{ф вр}} = 4\pi S\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 4\pi\sqrt{2}S\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Задача 4. *В ромбе из вершины тупого угла опущены перпендикуляры на его*

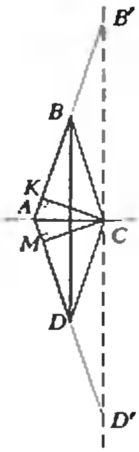


Рис. 5

стороны. Расстояние между основаниями этих перпендикуляров равно a, а угол между перпендикулярами равен α. Ромб вращается около прямой, параллельной большей диагонали ромба и проходящей через вершину ромба. Найдите площадь полной поверхности фигуры вращения.

Решение. Пусть $ABCD$ — заданный ромб (рис. 5). Продолжим AB до пересечения с осью в точке B', AD — до пересечения с осью в точке D'. Видно, что

$$S_{\text{вр}BC} = S_{\text{вр}BB'},\ S_{\text{вр}DC} = S_{\text{вр}DD'}.$$

Таким образом, площадь поверхности фигуры вращения равна сумме площадей боковых поверхностей двух конусов, образованных вращением около оси AB' и AD'. Искомая площадь равна $S = \pi\cdot AC\cdot 2\cdot AB'$. Поскольку AC — диаметр окружности, описанной около четырехугольника $AKCM$, то

$$AC = \frac{a}{\sin\alpha},$$

$$BC = \frac{AC}{2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$AB' = 2\cdot BC = \frac{a}{\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Отсюда

$$S = \pi\cdot\frac{a}{\sin\alpha}\cdot\frac{2a}{\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\pi a^2}{\sin^2\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

В заключение предлагаем вам самостоятельно решить, применяя изложенный метод, следующие задачи.

1. Правильный треугольник со стороной a вращается вокруг прямой, лежащей в плоскости треугольника вне его, проходящей через вершину треугольника и составляющей со стороной угол, равный 30°. Найдите площадь поверхности фигуры вращения.

2. Равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α вращается около оси, проходящей через конец основания перпендикулярно к нему. Найдите площадь поверхности фигуры вращения.

3. Сторона ромба равна a, острый угол α. Ромб вращается вокруг прямой, проходящей через его вершину параллельно большей диагонали. Найдите площадь поверхности фигуры вращения.

4. В параллелограмме диагональ l является его высотой, острый угол параллелограмма α. Параллелограмм вращается вокруг большей его стороны. Найдите объем фигуры вращения.

5. Равнобедренная трапеция с боковой стороной и меньшим основанием a и острым углом α вращается около большей стороны. Найдите площадь поверхности фигуры вращения.

6. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна a, угол при основании α. Этот треугольник вращается вокруг прямой, проходящей через вершину, противоположную основанию, параллельно биссектрисе угла α. Найдите площадь поверхности фигуры вращения.

7. Параллелограмм вращается около оси, которая проходит через его вершину параллельно диагонали. Эта диагональ длиною l образует со сторонами параллелограмма углы α и β. Найдите площадь поверхности фигуры вращения.

8. Два равнобедренных треугольника имеют общее основание a и лежат по разные стороны их общего основания. В первом треугольнике угол при основании равен α, высота первого треугольника относится к высоте второго, как 1:2. Фигура вращается около оси, проходящей через вершину их общего основания перпендикулярно к нему. Найдите площадь поверхности фигуры вращения.

Физические аналогии

В. МОЖАЕВ

Все физические явления подчиняются неким общим законам, среди которых особое место занимают законы сохранения, например закон сохранения полной энергии или закон сохранения импульса замкнутой системой. Любая такая система, предоставленная самой себе, будет стремиться к устойчивому положению равновесия, т.е. к минимуму полной энергии. В любой такой системе будут идти необратимые процессы, и система будет стремиться к полному беспорядку.

Эти и другие общие закономерности в поведении различных физических объектов приводят к тому, что процессы различной физической природы описываются одинаковыми уравнениями. Ниже мы рассмотрим некоторые простейшие физические аналогии такого типа.

В ряде случаев между различными объектами материального мира (и процессами, в которых они участвуют) существует глубокая внутренняя взаимосвязь. Пример тому — гипотеза французского физика Л. де Бройля о том, что установленный ранее для фотонов корпускулярно-волновой дуализм (заключающийся в том, что фотоны обладают и волновыми свойствами, и свойствами частиц) присущ всем частицам – электронам, протонам, атомам и т.д. Эта гипотеза составляет основу квантовой механики.

Перейдем теперь к рассмотрению конкретных задач.

Задача 1. *Маленький стальной шарик массой M падает в воду под углом φ к нормали со скоростью v_0 (рис. 1). На шарик в воде действует сила сопротивления, пропорциональная скорости ($\vec{F} = -\alpha \vec{v}$). Найдите зависимость горизонтальной и вертикальной составляющих скорости шарика от времени. Определите также установившуюся скорость шарика.*

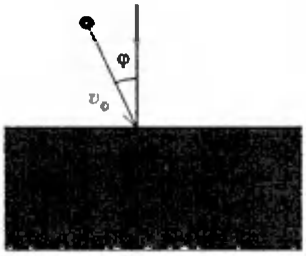


Рис. 1

Будем рассматривать движение шарика в системе координат, изображенной на рисунке 2. Уравнение движения шарика вдоль оси X запишем в виде

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -\frac{\alpha}{M} v_x.$$

Характерной особенностью является то, что скорость изменения величины v_x пропорциональна самой величине, а знак «минус» означает, что v_x убывает. Решение такого уравнения ищется в виде $v_x(t) = Ae^{\lambda t}$, где A и λ — некоторые константы. После подстановки $v_x(t)$ в исходное уравнение найдем, что $\lambda = -\alpha/M$. Константу A находим из начальных условий: при $t = 0$ $v_{x0} = v_0 \sin\varphi = A$. Зависимость горизонтальной составляющей скорости шарика от времени будет иметь вид

$$v_x(t) = v_0 \sin\varphi \cdot e^{-\frac{\alpha}{M}t}.$$

Это означает, что составляющая скорости шарика вдоль оси X экспоненциально убывает и при $t \to \infty$ стремится к нулю. Формально горизонтальная скорость станет нулевой через бесконечное время, однако реально это произойдет через конечное время. Такие процессы принято характеризовать так называемой постоянной времени (временем релаксации) τ. В данном случае это время, за которое скорость упадет в e раз, оно равно $\tau = M/\alpha$.

Теперь запишем уравнение движения шарика вдоль оси Y:

$$\frac{\Delta v_y}{\Delta t} = -\frac{\alpha}{M}\left(v_y - \frac{M}{\alpha}g\right).$$

Введем новую переменную $u = v_y - \frac{M}{\alpha}g$. Тогда уравнение движения будет иметь вид

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = -\frac{\alpha}{M}u,$$

Рис. 2

а его решение —

$$u(t) = Be^{-\frac{\alpha}{M}t}.$$

Константу B найдем из начальных условий: при $t = 0$ $u = v_0\cos\varphi - \frac{M}{\alpha}g = B$, и, следовательно,

$$v_y - \frac{M}{\alpha}g = \left(v_0\cos\varphi - \frac{M}{\alpha}g\right)e^{-\frac{\alpha}{M}t}.$$

Отсюда

$$v_y(t) = v_0\cos\varphi \cdot e^{-\frac{\alpha}{M}t} + \frac{M}{\alpha}g\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{M}t}\right).$$

При $t \to \infty$ вертикальная составляющая скорости шарика стремится к постоянному значению $v_y(\infty) = Mg/\alpha$ с той же самой постоянной времени $\tau = M/\alpha$.

Итак, установившаяся скорость шарика будет направлена вертикально вниз и равна Mg/α, а произойдет это примерно через время, равное τ.

Графики зависимости $v_x(t)$ и $v_y(t)$ показаны на рисунке 3.

Задача 2. *Параллельно соединенные катушка индуктивностью L и резистор сопротивлением R подключены через ключ K к батарее с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r (рис. 4). В начальный момент времени ключ разомкнут и тока в цепи нет. Найдите зависимость от времени токов через резистор и катушку после замыкания ключа. Омическим сопротивлением катушки пренебречь.*

Пусть в произвольный момент времени после замыкания ключа K через резистор течет ток $I_R(t)$, а через катушку — ток $I_L(t)$ (см. рис. 4). Очевидно, что ток батареи равен суммарному току $I_R(t) + I_L(t)$.

Выберем два замкнутых контура и запишем для каждого из них закон Ома (точнее, второе правило Кирхгофа).

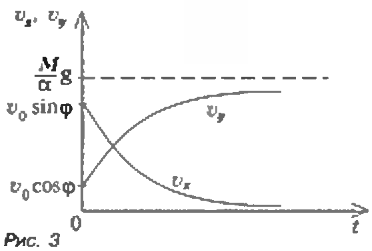


Рис. 3

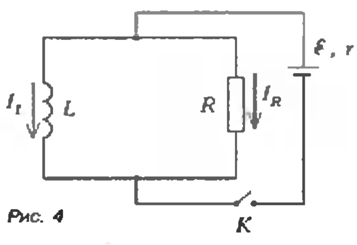


Рис. 4

Для контура, охватывающего батарею и резистор, имеем

$$\mathcal{E} = I_R(t)R + \left(I_R(t) + I_L(t)\right)r.$$

Аналогично для контура, содержащего катушку и резистор:

$$L\frac{\Delta I_L(t)}{\Delta t} = I_R(t)R.$$

Подставляя сюда выражение для тока I_R из предыдущего уравнения, найдем

$$\frac{\Delta I_L}{\Delta t} = -\frac{rR}{L(R+r)}I_L + \frac{\mathcal{E}R}{L(R+r)} = -\frac{rR}{L(R+r)}\left(I_L - \frac{\mathcal{E}}{r}\right).$$

Введем новую переменную $x = I_L - \mathcal{E}/r$ и получим

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{rR}{L(R+r)}x.$$

Это уже знакомое нам уравнение, его решение имеет вид

$$x(t) = x_0 e^{-\alpha t},$$

где $\alpha = \dfrac{rR}{L(R+r)}$, а x_0 — константа, которую найдем из начальных условий: при $t = 0$ (сразу после замыкания ключа) $I_L = 0$, следовательно, $x_0 = -\mathcal{E}/r$. Поэтому зависимость тока I_L от времени будет такой:

$$I_L = \frac{\mathcal{E}}{r}\left(1 - e^{-\frac{rRt}{L(R+r)}}\right),$$

т.е. ток через катушку нарастает по экспоненциальному закону с постоянной времени $\tau = L(R+r)/(Rr)$. А для тока I_R из самого первого уравнения найдем

$$I_R = \frac{\mathcal{E}}{R+r}e^{-\frac{rRt}{L(R+r)}}.$$

Обе зависимости токов от времени показаны на рисунке 5.

Задача 3. *В некоторый момент времени счетчик радиоактивного излучения, расположенный вблизи препарата ^{18}F, зафиксировал 100 отсчетов в секунду. Через время $\Delta t = 20$ мин показание уменьшилось до 87 отсчетов в секунду. Определите период полураспада ^{18}F.*

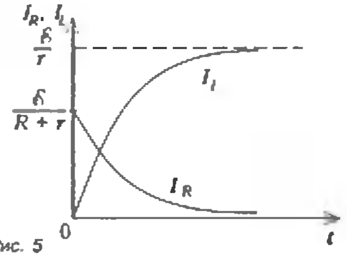


Рис. 5

Прежде всего найдем закон радиоактивного распада, т.е. зависимость числа нераспавшихся атомов N радиоактивного изотопа ^{18}F от времени t. Радиоактивный распад — это свойство самого атомного ядра и зависит только от его внутреннего состояния, поэтому для каждого атомного ядра вероятность радиоактивного распада в единицу времени является некоторой постоянной величиной.

Обозначим вероятность радиоактивного распада ядра атома ^{18}F в единицу времени через λ. Число актов радиоактивного распада dN за время dt определяется количеством радиоактивных ядер $N(t)$ в данный момент времени t:

$$dN = -\lambda N dt, \text{ или } \frac{dN}{dt} = -\lambda N.$$

Опять мы имеем уравнение, описывающее процесс, в котором скорость изменения со временем некоторой величины (числа радиоактивных ядер) пропорциональна этой величине в данный момент времени. Решение этого уравнения имеет вид

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где N_0 — число радиоактивных ядер в начальный момент времени ($t = 0$). Это и есть закон радиоактивного распада. Постоянная времени данного процесса (или средняя продолжительность жизни) равна $\tau = 1/\lambda$.

На практике принято характеризовать продолжительность жизни радиоактивного изотопа периодом полураспада T, т.е. временем, в течение которого распадается половина начального количества атомов. Используя закон радиоактивного распада, можно записать

$$\frac{N(T)}{N_0} = \frac{1}{2} = e^{-\lambda T},$$

откуда

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Перейдем теперь к решению нашей задачи. Первое показание счетчика примем за начало отсчета ($t = 0$). Тогда первое показание есть

$$\left|\frac{dN}{dt}\right|_{t=0} = \alpha\lambda N_0,$$

где коэффициент α учитывает долю распадов, которую регистрирует счетчик (геометрический фактор). Второе показание счетчика есть

$$\left|\frac{dN}{dt}\right|_{t=\Delta t} = \alpha\lambda N_0 e^{-\lambda\Delta t}.$$

Отношение первого показания ко второму (т.е. 100/87) равно

$$\beta = e^{\lambda\Delta t}.$$

Прологарифмировав обе части этого равенства, получим

$$\lambda = \frac{\ln\beta}{\Delta t}.$$

Следовательно, период полураспада

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{\ln\beta}\Delta t \approx 1{,}55 \text{ ч}.$$

• • •

Разобранные нами физические процессы, несмотря на их существенные различия по своей природе, описываются временными уравнениями одного вида. Все эти процессы имеют экспоненциальную временную зависимость со своей постоянной времени.

Рассмотрим теперь колебательные процессы, которые описываются совершенно другим видом временных уравнений, но так же, как и предыдущие, широко представлены в природе.

Задача 4. *Два маленьких шарика массами m_1 и m_2 жестко связаны между собой легким стержнем и насажены на неподвижную горизонтальную ось O, относительно которой они могут свободно вращаться (рис. 6). Расстояния от шариков до оси вращения равны r_1 и r_2. Систему отклонили от вертикали на малый угол φ_0 и отпустили. Пренебрегая потерями энергии, найдите зависимость угла отклонения φ от времени при условии, что $m_2r_2 > m_1r_1$.*

Рассмотрим движение связанных шариков в некоторый произвольный момент времени (рис. 7). Пусть система вращается по часовой стрелке, угол отклонения от вертикали равен φ, а угловая скорость вращения шариков равна $\omega = \Delta\varphi/\Delta t = \dot{\varphi}$. Запишем полную энергию системы в этот момент времени. Каждый из шариков обладает кине-

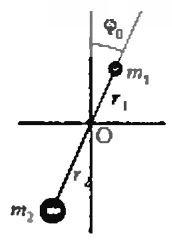


Рис. 6

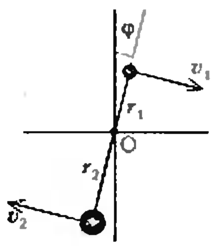


Рис. 7

тической и потенциальной энергиями, причем потенциальную энергию будем отсчитывать от горизонтального уровня, проходящего через ось вращения O. Кинетическая энергия верхнего шарика $E_{k1} = m_1v_1^2/2 = m_1(\dot\varphi r_1)^2/2$, а потенциальная $E_{p1} = m_1gr_1\cos\varphi$. Аналогично для второго шарика: $E_{k2} = m_2(\dot\varphi r_2)^2/2$, $E_{p2} = -m_2gr_2\cos\varphi$. Полная энергия шариков во время движения остается неизменной, поэтому

$$\frac{m_1(\dot\varphi r_1)^2}{2} + \frac{m_2(\dot\varphi r_2)^2}{2} + m_1gr_1\cos\varphi - m_2gr_2\cos\varphi = \text{const}.$$

Продифференцировав по времени, получим уравнение движения:

$$\left(m_1r_1^2 + m_2r_2^2\right)\dot\varphi\ddot\varphi + \left(m_2r_2 - m_1r_1\right)g\sin\varphi\cdot\dot\varphi = 0.$$

Заменяя $\sin\varphi \approx \varphi$ и вынося за скобки $\dot\varphi$, запишем два уравнения:

$$\dot\varphi = 0,\quad \ddot\varphi + \frac{(m_2r_2 - m_1r_1)g}{m_1r_1^2 + m_2r_2^2}\varphi = 0.$$

Первое уравнение соответствует тривиальному решению φ = const. Очевидно, что это случай, когда система находится в состоянии устойчивого равновесия $\varphi = 0$. Второе уравнение, при условии, что коэффициент при φ больше нуля, описывает гармонические колебания. Решение такого уравнения будем искать в виде $\varphi(t) = A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t$, где A, B и ω_0 — некоторые константы. После подстановки $\varphi(t)$ в исходное уравнение найдем собственную частоту колебаний системы:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(m_2r_2 - m_1r_1)g}{m_1r_1^2 + m_2r_2^2}}.$$

Для нахождения констант A и B необходимо использовать начальные условия. При $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, а $\dot\varphi = 0$. Из первого условия следует, что $B = \varphi_0$, а из второго — $A = 0$. Окончательное решение уравнения движения имеет вид

$$\varphi(t) = \varphi_0\cos\omega_0 t.$$

Итак, наша система шариков будет совершать гармонические колебания с круговой частотой ω_0 и амплитудой φ_0. Заметим, что если в выражении для ω_0 положить $m_1 = 0$, то мы получим знакомое выражение для собственной частоты колебаний математического маятника: $\omega_0 = \sqrt{g/r_2}$.

Задача 5. *Колебательный контур, состоящий из конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L, подключен через ключ K к источнику с постоянной ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r (рис. 8). Ключ замыкают, а после того как в цепи установится стационарный режим, размыкают его. Найдите зависимость напряжения на конденсаторе от времени после размыкания ключа. Омическим сопротивлением катушки пренебречь.*

При замкнутом ключе в стационарном режиме через катушку течет постоянный ток $I = \mathcal{E}/r$, а напряжение на конденсаторе равно нулю.

После размыкания ключа в контуре начнутся свободные колебания. Пусть в некоторый момент времени напряжение на конденсаторе равно u, а заряд $q = Cu$. Будем считать напряжение на конденсаторе положительным, когда верхняя пластина заряжена положительно, а за положительное направление тока i выберем направление, указанное стрелкой на рисунке 8. При

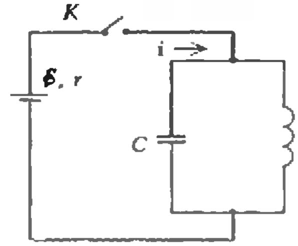


Рис. 8

таком выборе знаков связь между зарядом q, напряжением u и током i будет такой:

$$i = -\frac{dq}{dt},\quad u = L\frac{di}{dt}.$$

Отсюда

$$i = -C\frac{du}{dt},\quad u = -LC\frac{d^2u}{dt^2},$$

или

$$\ddot u + \frac{1}{LC}u = 0.$$

Мы опять получили уравнение, которое описывает гармонические колебания. В данном случае по гармоническому закону изменяется со временем напряжение на конденсаторе. Легко показать, что и ток в цепи, и заряд на конденсаторе изменяются по аналогичному закону. Используя начальные условия (при $t = 0$ $u = 0$, а $i = \mathcal{E}/r$), получим

$$u(t) = \frac{\mathcal{E}}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}\sin\sqrt{\frac{1}{LC}}\,t.$$

* * *

Разобранные задачи на колебания еще раз показали, что совершенно различные по своей природе явления описываются одними и теми же математическими уравнениями, т.е. подчиняются единым законам.

Теперь обсудим простейшую физическую аналогию, демонстрирующую внутреннее единство физической природы различных, на первый взгляд, процессов.

Задача 6. *В вакуумном пространстве на две плоскопараллельные металлические сетки, между которыми поддерживается постоянная разность потенциалов U, падает со скоростью v_0 под углом падения φ положительно заряженная частица с зарядом q (рис. 9). Чему будет равен угол «преломления» частицы после пролета сеток? При каком угле падения частицы и при какой полярности разности потенциалов наступит «полное внутреннее отражение» частицы?*

Мы будем решать эту задачу, проводя аналогию с прохождением света через границу раздела двух сред с различными значениями показателя преломления. «Границей раздела» наших сред является тонкий слой однородного электрического поля, который создает скачок потенциала U. При полярности разности потенциалов, изображенной на рисунке 9, нижняя среда будет более

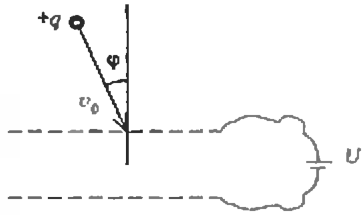


Рис. 9

«плотной» по отношению к верхней среде. Покажем это и найдем угол преломления.

Между сетками частица будет двигаться по параболе, оси которой направлены вниз. После прохождения сеток скорость частицы v находится по закону сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = -qU + \frac{mv^2}{2},$$

откуда

$$v = v_0\sqrt{1 + \frac{qU}{(mv_0^2/2)}}.$$

Очевидно, что горизонтальная составляющая скорости частицы будет сохраняться: $v_x = v\sin\varphi$, поэтому синус угла преломления (рис. 10) будет таким:

$$\sin\psi = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1 + \dfrac{qU}{mv_0^2/2}}}.$$

Следовательно, закон преломления будет иметь вид

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sqrt{1 + \dfrac{qU}{mv_0^2/2}}}{1}.$$

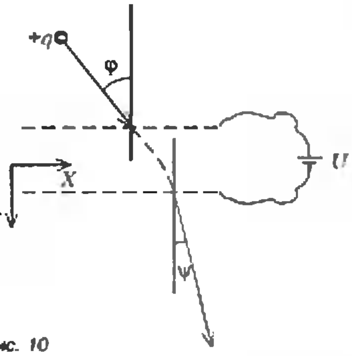


Рис. 10

Проведя аналогию с законом преломления для светового луча и положив показатель преломления верхней среды $n_1 = 1$, мы получим, что показатель преломления нижней среды равен

$$n_2 = \sqrt{1 + \frac{qU}{mv_0^2/2}}.$$

Как видно, $n_2 > n_1$, т.е. нижняя среда более «плотная» и угол преломления меньше угла падения.

Рассмотрим теперь случай, когда нижняя среда менее «плотная». Для этого достаточно поменять полярность приложенного к сеткам напряжения. Показатель преломления нижней среды будет теперь

$$n_2 = \sqrt{1 - \frac{qU}{mv_0^2/2}}.$$

В этом случае угол преломления будет больше угла падения ($\psi > \varphi$), а при некотором предельном угле падения $\varphi_{пр}$ наступит полное внутреннее отражение ($\psi = 90°$). Именно это и изображено на рисунке 11 – внутри границы раздела частица движется по параболе, оси которой обращены вверх, а ее вершина касается нижней сетки. При дальнейшем увеличении угла падения вершина параболы приподнимается вверх, и частица уже не проникает в нижнюю

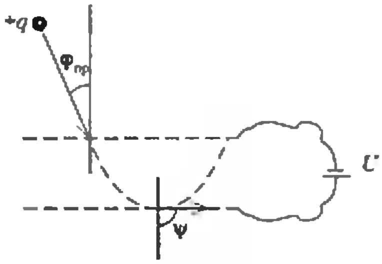


Рис. 11

среду, а снова возвращается в верхнюю – происходит зеркальное отражение. Самое интересное в процессе такого отражения то, что электромагнитная волна (свет) в случае полного внутреннего отражения на границе раздела двух сред именно так себя и ведет: она «заходит» во вторую среду, а затем, «почувствовав», что ей не пройти, снова уходит в первую среду. Глубина проникновения световой волны при этом порядка длины волны.

ИНФОРМАЦИЯ

ШЕСТЫЕ САХАРОВСКИЕ ЧТЕНИЯ

20 – 21 мая 1996 года в Санкт-Петербургском лицее «Физико-техническая школа» (ФТШ) состоялись Шестые Сахаровские чтения – научная конференция школьников, приуроченная к семидесятипятилетию Андрея Дмитриевича Сахарова.

На секциях физики, математики, программирования, биологии, литературоведения и истории были представлены 147 устных и стендовых докладов школьников из Санкт-Петербурга, Москвы, Долгопрудного, Калининграда, Нижнего Новгорода, Кемерова, Ангарска, Саратова, Набережных Челнов, украинских городов Луганска, Запорожья, Черновцов, а также шести городов США и Югославии. Доклады для участия в конференции были отобраны оргкомитетом. Заявлено же их было в два раза больше.

Жюри, в состав которого входили ученые из Физико-технического института им. А.Ф.Иоффе, Московского и Санкт-Петербургского университетов, Санкт-Петербургского технического университета, Институтов эволюционной физиологии и биохимии им. И.М.Сеченова, зоологии, русской литературы, русской истории (все в составе РАН), представители московской школы 520, Государственного Дворца творчества юных (Санкт-Петербург) и редколлегии журнала «Квант», отметило высокий уровень многих работ школьников. Вместе с этим были высказаны критические замечания как в адрес учащихся, так и в адрес их научных руководителей.

Наиболее высоко были оценены доклады будущих, как мы надеемся,

физиков *Д.Тиснека* и *А.Суркова* (лицей ФТШ, Санкт-Петербург), *А.Азина*, *И.Сорокиной*, *С.Бодрова* (все из лицея 40, Нижний Новгород), *С.Герке* (США) и одного из самых юных участников *Ш.Богдашкина* (с.ш. 597, Санкт-Петербург);

математиков *П.Вуджич* (Субботица, Югославия), *М.Принцевой* (гимназия 11, Санкт-Петербург) и *Р.Низкого* (Академическая гимназия, Санкт-Петербург);

биологов *Р.Виллет*, *К.Хайнес* и *К.Трена*, *Д.Кульпеппера*, *Э.Крупитского*, *Л.Аллен*, *Н.Цеммараджи*, *Б.Оранжа* и *А.Ловгрена* (все из США), *Д.Юдиной* (гимназия 35, Черновцы), *А.Галинского* и *В.Матросова* (с.ш. 32, Калининград), *Г.Генриховича* (Аничков лицей, Санкт-Петербург), *Н.Смирновой* (с.ш. 95, Санкт-Петербург), *А.Фадеевой* (лицей ФТШ, Санкт-Петербург), *Д.Станкеевой* (с.ш. 214, Санкт-Петербург) и *О.Денисовой* (с.ш. 520, Москва);

литературоведов *М.Дамбис* (лицей 1502, Москва), *О.Флегентовой* (Классический лицей, Кемерово), *А.Сайфиевой* (гимназия 11, Санкт-Петербург) и *И.Кудрявцева* (лицей ФТШ, Санкт-Петербург);

историков *Н.Чекунова* (Академическая гимназия, Санкт-Петербург), *М.Кукурузы* и *Ю.Суманеевой* (лицей 2, Ангарск), *А.Чалого* (лицей 49, Калининград) и *Е.Харваш* (Классический лицей, Кемерово);

программистов *С.Кругликова* (Морской лицей, Калининград), *Н.Корнета* (гимназия 470, Санкт-Петербург), *М.Бабенко* (лицей 1, Саратов) и семиклассника *А.Иванова* (физико-математическая гимназия 30, Санкт-Петербург).

В этом году впервые оргкомитет отметил специальным дипломом работу учителя – В.А.Галинского, преподавателя программирования Санкт-Петербургской физико-математической гимназии 30, на протяжении многих лет с любовью воспитывающего первоклассных программистов, способных коллективно решать очень сложные задачи.

Мы лишены возможности даже перечислить названия всех докладов. Отметим лишь, что традиционная конференция «Сахаровские чтения» с каждым годом повышает свой научный уровень и расширяет географию.

Желающие принять участие в следующей конференции (она состоится в 1997 году) могут прислать свои заявки по адресу:

194021 Санкт-Петербург, ул.Хлопина, 5, Физико-техническая школа.

Телефоны для справок:

(812) 247-15-15, 247-93-74.

А.Егоров, В.Лобышев

XXXVII Международная математическая олимпиада

С 5 по 17 июля в Бомбее (Индия) состоялась XXXVII Международная математическая олимпиада, ставшая рекордной по числу участников: 426 школьников из 75 стран мира. Еще 3 страны прислали своих официальных обозревателей, а это значит, что в следующем году команды этих стран станут полноправными участниками состязаний.

В команду России в этом году вошли

Николай Дуров — девятиклассник ФМЛ 239 из Санкт-Петербурга,

Вероника Есаулова — выпускница ФМЛ 239 из Санкт-Петербурга,

Юрий Макарычев — выпускник с.ш. 57 из Москвы,

Сергей Норин — выпускник ФМЛ 239 из Санкт-Петербурга,

Елена Рудо — выпускница ФМЛ 239 из Санкт-Петербурга,

Константин Салихов — выпускник СУНЦ МГУ из Казани.

Запасным участником был выпускник ФМЛ 239 *Дмитрий Запорожец*. Все участники команды получили право поступления в избранные ими вузы без вступительных экзаменов.

Команда была сформирована по итогам заключительного этапа Российской олимпиады, а с целью проверки ее боеготовности в Санкт-Петербурге с 14 по 28 июня были проведены учебно-тренировочные сборы.

Олимпиада проводилась, как обычно, в два дня, в течение которых участникам предлагалось решить по три задачи (на это отводилось 4,5 часа в каждый из этих дней), полное решение каждой задачи оценивалось семью баллами. Задачи олимпиады включены в «Задачник «Кванта» этого номера, за исключением задачи 3 первого дня:

Пусть S — множество неотрицательных целых чисел. Найдите все функции f, определенные на S и принимающие свои значения в S, такие, что

$$f(m+f(n))=f(f(m))+f(n)$$

для всех m,n из S.

(Румыния)

Олимпиада этого года оказалась одной из самых трудных за последние несколько лет. Золотая медаль присуждалась участникам, набравшим 28 и более очков из 42 возможных, серебряная — набравшим от 20 до 27 очков, бронзовая — набравшим от 12 до 19 очков. Не слишком высокие результаты объясняются еще и тяжелыми климатическими условиями, в которых проходила олимпиада (сильная жара и почти 100-процентная влажность).

Результаты команды России приведены в таблице 1, а таблица 2 содержит результаты выступления стран в неофициальном командном зачете (напомним, что, согласно положению, олимпиада представляет собой личное первенство).

Хочется отметить успешное выступление Сергея Норина, получившего золотую медаль в третий раз подряд, а также результат самого молодого участника нашей команды Николая Дурова.

В третий раз получил золотую медаль *Юлий Санников* (Украина). Золотыми медалями были также награждены *Сергей Чих* (Белоруссия), *Давид Чхаидзе* (Грузия) и *Лев Буховский* (Израиль) — воспитанник ФМЛ 239 Санкт-Петербурга.

Следующая международная математическая олимпиада состоится в июне 1997 года в городе Мар-дель-Плата (Аргентина).

Таблица 1

Участник	Задача 1	2	3	4	5	6	Σ
Николай Дуров	7	7	7	7	2	7	37
Вероника Есаулова	4	7	3	7	1	3	25
Юрий Макарычев	6	7	5	1	0	0	19
Сергей Норин	7	7	7	7	1	7	36
Елена Рудо	2	1	6	7	0	7	23
Константин Салихов	2	7	5	7	1	0	22

Таблица 2

Страна	*Очки*	*Медали (з + с + б)*
1. Румыния	187	4 + 2 + 0
2. США	185	4 + 2 + 0
3. Венгрия	167	3 + 2 + 1
4. Россия	162	2 + 3 + 1
5. Великобритания	161	2 + 4 + 0
6. Китай	160	3 + 3 + 0
7. Вьетнам	155	3 + 1 + 1
8. Корея	151	2 + 3 + 0
9. Иран	143	1 + 4 + 1
10. Германия	137	3 + 1 + 1
11 – 12. Япония	136	1 + 3 + 1
11 – 12. Болгария	136	1 + 4 + 1
13. Польша	122	0 + 3 + 3
14. Индия	118	1 + 3 + 1
15. Израиль	114	1 + 2 + 2
...18. Украина	105	1 + 0 + 5
...21. Белоруссия	99	1 + 1 + 2
...30. Грузия	78	1 + 0 + 2
...32. Литва	68	0 + 1 + 2
33. Латвия	66	0 + 0 + 3
34 – 35. Армения	63	0 + 0 + 1
...41. Молдавия	55	0 + 0 + 2

Эстония, Азербайджан, Казахстан, Киргизия и Туркмения медалей не получили, набрав в сумме 33, 27, 20, 15 и 9 очков соответственно.

Публикацию подготовили руководители команды России
И. Агаханов, С. Рукшин, Д. Терёшин

III Российская олимпиада школьников по астрономии и космической физике

В этому году участников очередной астрономической олимпиады школьников принимала Калуга. Заключительный этап прошел с 11 по 15 мая на базе Калужского государственного педагогического университета им. К.Э.Циолковского. (К сожалению, по независящим от организаторов причинам предварительно намеченные сроки и место проведения олимпиады были изменены, и немалая работа ведущих астрономических учреждений по ее проведению в Москве оказалась напрасной.)

В целом общие принципы проведения олимпиады 1996 года не изменились по сравнению с предыдущими. Главное отличие состояло в том, что участники были разделены не на две, а на три группы: 8–9, 10 и 11 классы. Каждая область, край, республика, города Москва и Санкт-Петербург могли направить на олимпиаду двух одиннадцатиклассников, двух десятиклассников и четырех учащихся 8–9 классов. Но из-за непомерно раздутого оргвзноса в Калугу смогли приехать далеко не все желающие. Многие области ограничились посылкой двух-трех школьников, а некоторые были вынуждены вообще отказаться от участия в олимпиаде.

Как обычно, заключительный этап включал в себя теоретический и практический туры. На теоретическом туре школьникам было предложено по шесть задач, а задание практического тура из-за нехватки времени было сокращено до одной задачи.

Работы участников оценивало жюри, в состав которого вошли представители Калуги, Москвы, Подмосковья, Рязани, Кабардино-Балкарии и Новосибирска. По мнению жюри, уровень подготовки школьников явно вырос — на олимпиаде практически не было школьников, которые почти ничего не решили, хотя задачи, в общем, были сложнее. Было отмечено, что в этом году задачи олимпиады стали более «астрономическими» (в отличие от прошлых лет, где много внимания уделялось чисто физическим аспектам).

Каждая задача первого тура оценивалась исходя из 10 баллов, второго — из 20. После расшифровки работ участники олимпиады могли ознакомиться с оценкой своих работ первого тура и побеседовать с членами жюри. В целом претензий к жюри почти не было.

В рамках олимпиады прошла вторая конференция Ассоциации учителей астрономии, был принят Устав Ассоциации и намечены приоритеты деятельности на ближайшее время.

К сожалению, несмотря на регулярные просьбы реальных организаторов олимпиады, составители программы не учли горький опыт прошлых лет и не только не расширили сроки проведения олимпиады, а сжали их еще больше. В результате эта сжатость не позволила сделать самое главное, ради чего должна проводиться олимпиада, — провести нормальные беседы жюри со школьниками, ответить на их многочисленные вопросы, познакомить с астрономическими новостями. В то же время все участники и руководители команд отметили очень хорошую работу местного оргкомитета и жюри, которые в такой сложной ситуации смогли провести олимпиаду четко и квалифицированно.

На закрытии олимпиады каждому победителю был вручен диплом, ценный подарок и главный приз олимпиады — приглашение на III Осеннюю астрономическую школу в Специальную астрофизическую обсерваторию РАН (близ станицы Зеленчукская Ставропольского края).

Задачи теоретического тура

8—9 классы

1. Вам дана информация о комете Hyakutake 1996 B2 (файл из сети Internet):

Информация о эфемеридах и параметрах орбиты для кометы 1996 B2 Hyakutake

Don Yeomans — JPL, 22.02.1996
Объект: Комета 1996 B2 Hyakutake
Число наблюдений: 219
Период наблюдений: 01.01.1996 – 18.02.1996
Элементы орбиты, эпоха 2450206.50000=1996, Май, 3.00000
Эксцентриситет: e 1.000019546
Время прохождения перигелия Tp 1996, Май, 1.42385
Период обращения вокруг Солнца (лет, очень приблизительно) 18400

Эфемериды для кометы 1996 B2 Hyakutake

1996 Date (0 hrs UT)		R.A.J2000 Dec.						Delta	r	Theta	Beta	Moon	TMag
Mar	18	14	54	41	-07	40	28	0.263	1.192	133.6	37.2	114	3.4
Mar	20	14	53	22	-00	27	09	0.204	1.152	136.4	36.6	142	2.7
Mar	22	14	50	35	+12	18	24	0.150	1.111	137.2	37.5	154	1.8
Mar	24	14	43	40	+36	11	54	0.111	1.070	128.7	46.7	125	1.0
Mar	26	14	11	52	+71	34	19	0.104	1.028	104.0	70.3	84	0.7
Mar	28	04	06	54	+78	57	39	0.135	0.985	80.6	91.6	66	1.1
Mar	30	03	22	12	+63	37	12	0.185	0.942	67.0	102.6	75	1.6
Apr	1	03	13	42	+54	59	43	0.242	0.898	58.8	107.8	95	2.0
Apr	3	03	09	48	+49	41	12	0.303	0.854	53.2	110.3	118	2.2
Apr	5	03	07	18	+46	06	10	0.366	0.808	48.8	111.3	140	2.4
Apr	7	03	05	18	+43	29	34	0.429	0.762	45.2	111.3	152	2.5
Apr	9	03	03	28	+41	28	03	0.493	0.715	41.9	110.7	141	2.5
Apr	11	03	01	37	+39	48	17	0.558	0.667	38.9	109.5	118	2.5
Apr	13	02	59	39	+38	21	59	0.622	0.619	36.0	107.8	92	2.4
Apr	15	02	57	30	+37	03	25	0.688	0.569	33.1	105.6	65	2.2
Apr	17	02	55	05	+35	48	14	0.753	0.519	30.3	102.6	40	2.0
Apr	19	02	52	21	+34	32	39	0.819	0.469	27.4	98.9	21	1.8
Apr	21	02	49	14	+33	12	53	0.886	0.418	24.5	94.0	27	1.4
Apr	23	02	45	40	+31	44	40	0.952	0.368	21.4	87.5	47	1.1
Apr	25	02	41	37	+30	02	46	1.017	0.320	18.2	78.9	70	0.6
Apr	27	02	37	08	+28	00	42	1.081	0.278	14.8	67.3	95	0.1
Apr	29	02	32	23	+25	31	45	1.139	0.246	11.1	52.1	120	−0.3
May	1	02	27	54	+22	33	11	1.187	0.231	7.6	35.2	147	−0.5
May	3	02	24	23	+19	12	23	1.220	0.237	5.4	23.7	173	−0.3
May	5	02	22	21	+15	44	31	1.238	0.263	6.5	26.0	153	0.2
May	7	02	21	46	+12	21	36	1.244	0.301	9.7	34.3	124	0.8
May	9	02	22	22	+09	08	10	1.242	0.347	13.2	41.8	94	1.4
May	11	02	23	52	+06	04	09	1.235	0.396	16.8	47.5	66	1.9
May	13	02	26	03	+03	08	01	1.225	0.447	20.3	51.7	39	2.4

R.A. J2000 Dec. — прямое восхождение и склонение (эпоха 2000 г.)
Delta — геоцентрическое расстояние до объекта в а.е.
r — гелиоцентрическое расстояние до объекта в а.е.
Theta — угол Солнце – Земля – Объект в градусах
Beta — угол Солнце – Объект – Земля в градусах
Moon — угол Объект – Земля – Луна в градусах
TMag — ожидаемая звездная величина

Используя нужные данные, объясните, почему ожидаемая звездная величина кометы имеет два минимума, т.е. сначала уменьшается, потом возрастает, затем опять уменьшается и опять возрастает.

2. Как объяснить имеющееся в таблице (см. условие предыдущей задачи) противоречие: с одной стороны, согласно вычисленному эксцентриситету, орбита кометы является гиперболической; с другой стороны, вычислен период ее обращения вокруг Солнца, что говорит об эллиптической орбите?

3. 19 июня 2004 года при аварийной посадке космического корабля Вы катапультировались и весьма удачно приземлились. Оказалось, что в местности Вашего приземления полдень наступил в 8 часов 42 минуты Московского летнего времени, а высота Солнца при этом $h = 72°$. Каким языком Вам следует воспользоваться для выяснения местонахождения ближайшего посольства России? Оцените расстояние до него. В Вашем распоряжении имеется весьма грубая карта полушарий.

4. Найдите минимально возможный период обращения несгораемого космического корабля вокруг Солнца (в сутках), зная, что видимый с Земли угловой размер Солнца $\alpha = 9{,}3 \cdot 10^{-3}$ рад.

5. Наблюдая со своей планеты за ночной Калугой, марсиане заметили, что во времена Великих противостояний Земли и Марса этот город выглядит звездой 17-й величины. Оцените, какое примерно число фонарей горит ночью в Калуге, если в среднем один фонарь с расстояния 250 метров светит как полная Луна (звездная величина полной Луны около −13). Расстояние от Земли до Марса во времена Великих противостояний равно 0,38 а.е.

6. Как отличаются между собой линейные скорости космонавтов, находящихся на Луне, если один из них видит Землю в зените, а второй находится в диаметрально противоположной точке лунного шара? Радиус Луны равен 1740 км.

10 класс

1. На какой широте проходит южная граница территории, в пределах которой хотя бы одну ночь в году не прекращаются навигационные сумерки (центр Солнца не опускается под горизонт ниже чем на 12 градусов)? Плоскость небесного экватора наклонена к эклиптике на $\varepsilon = 23°27'$.

2. См. задачу 2 для 8 – 9 классов.

3. Вычислите по известным данным скорость кометы Hyakutake 1996 B2 в перигелии (см. условие задачи 1 для 8 – 9 классов).

4. См. задачу 4 для 8 – 9 классов.

5. Как известно, солнечные сутки удлиняются на 0,0017 секунды в столетие. Оцените, какую ошибку мы сделаем при вычислении места наблюдения солнечного затмения в 2004 году до нашей эры, если будем считать сутки неизменными (равными по продолжительности сегодняшним).

6. Пульсар, излучающий радиоимпульсы с постоянной частотой в собственной системе отсчета, равномерно движется в пространстве относительно Земли. Как будет изменяться наблюдаемая на Земле частота импульсов со временем (из-за эффекта Доплера)? Направление движения пульсара произвольно.

11 класс

1. См. задачу 1 для 10 класса.

2. См. задачу 3 для 10 класса.

3. В известном романе Г. Уэллса «Машина времени» первый в истории литературы путешественник во времени рассказывает: «Наконец, больше чем через 30 миллионов лет, огромный красный купол Солнца заслонил собой десятую часть неба... Местами виднелись пятна снега, ужасный холод окружал меня». Какие ошибки (с астрономической и физической точек зрения) допустил автор?

4. Спутник наблюдается низко над горизонтом. Куда (выше, ниже, точно) надо нацелить оптический лазер, чтобы его луч «попал» в спутник? Учесть рефракцию.

5. См. задачу 6 для 10 класса.

6. Пульсар, находящийся вблизи полюса эклиптики и имеющий массу $4\cdot10^{30}$ кг (две массы Солнца), излучает импульсы с периодом 1 с. Точные измерения получаемых сигналов, показали, что их период не строго постоянен и меняется с периодичностью 1 год с амплитудой 10^{-6} с. Спутник какой массы, обращающийся вокруг пульсара по круговой орбите, может вызвать эти изменения?

Задачи практического тура

8—9 классы

У Вас на руках фотография околополярной области неба с кометой Hyakutake 1996 B2 (рис. 1, автор фото — Даниил Чичмарь) и звездная карта. Фотография представляет собой полное увеличение с негатива 24×36 мм, полученного при фотографировании неподвижной камерой. Используя эти материалы, а также линейку, бумагу (кальку), транспортир и карандаш, попробуйте выполнить следующие задания:

1) Оцените, с какой экспозицией был сделан снимок.

2) Отметьте на звездной карте две самые яркие звезды, получившиеся на фотографии, а также положение кометы.

3) Определите угловой размер снимка (в градусах) и размер видимого хвоста кометы.

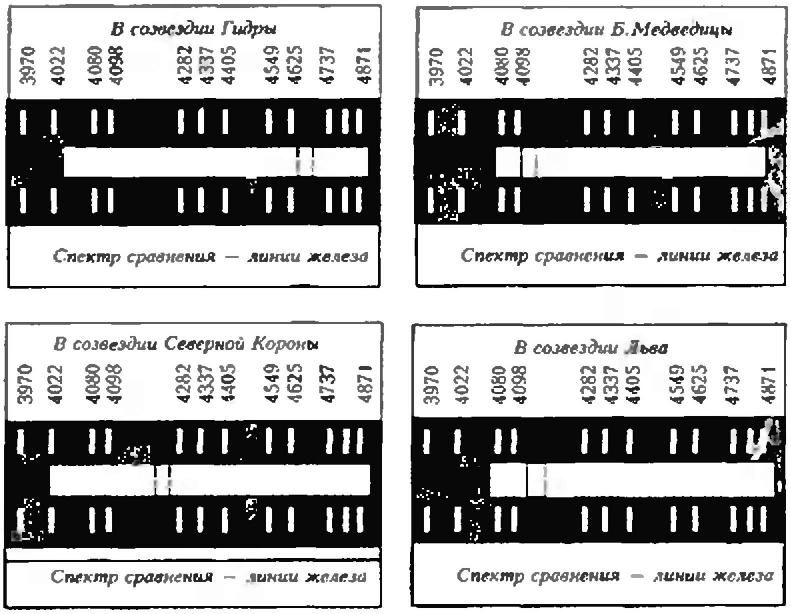


Рис. 2

4) Определите фокусное расстояние камеры, с помощью которой сделан снимок.

10—11 классы

В Ваше распоряжение представлены фотографии (ксерокопии) спектров далеких звездных систем (галактик), на которых показаны линии поглощения H и K ионизированного кальция по отношению к ярким линиям паров железа в спектре земного источника (рис.2). Известно, что спектры получены на разных телескопах с использованием дифракционных спектрографов. Технические характеристики инструментов (телескопов и спектрографов) отправлены почтой в Калугу, но по причине праздников информация к данному моменту отсутствует. Какую информацию об этих звездных системах (галактиках) Вы могли бы получить по положению линий в спектрах?

Указание: длины волн (в ангстремах) линий в спектре сравнения написаны около самих линий; длины волн линий H и K в земных условиях соответственно равны 3968 и 3964 Å.

М.Гаврилов

Межобластная заочная математическая олимпиада школьников

Всероссийская школа математики и физики «АВАНГАРД» (информацию об этой школе см. в предыдущем номере журнала) совместно с Министерством образования РФ и при участии журнала «КВАНТ» проводит Межобластную заочную математическую олимпиаду для школьников 6–10 классов. Срок проведения олимпиады октябрь–декабрь 1996 года.

Чтобы принять участие в олимпиаде, нужно в течение недели после получения этого номера журнала решить предлагаемые ниже задачи, аккуратно оформить решения (каждую задачу — на отдельном листочке) и отослать их по почте в обычном почтовом конверте в Оргкомитет олимпиады по адресу: 115551 Москва, Ореховый б-р, д. 11, корп. 3, ВШМФ «АВАНГАРД», Оргкомитет олимпиады. В письмо вложите пустой конверт с заполненным домашним адресом для сообщения результатов олимпиады. Не забудьте сделать пометку, что информацию об олимпиаде Вы узнали из журнала «КВАНТ».

Заметим, что для участия в олимпиаде необязательно решить все задачи — достаточно хотя бы одной. Победители олимпиады получат призы, среди которых несколько бесплатных подписок на журнал «КВАНТ». (Оргкомитет приложит все усилия к тому, чтобы поощрения и дипломы получили все приславшие хотя бы одно правильное решение.)

Победители, приславшие наиболее интересные решения, будут приглашены к участию в традиционной 6-й Всероссийской конференции одаренных школьников, которая состоится в Москве в январе 1997 года, и, возможно, войдут в команду для участия в международных встречах.

Все учащиеся, приславшие свои работы в Оргкомитет олимпиады, независимо от результатов их проверки, получат приглашение учиться на заочном отделении Всероссийской школы математики и физики «АВАНГАРД» в 1996/97 учебном году на льготных условиях.

ВНИМАНИЕ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ 6-10 КЛАССОВ! ПРИГЛАСИТЕ К УЧАСТИЮ В ОЛИМПИАДЕ СВОИХ УЧЕНИКОВ!

Задачи олимпиады

6 класс

1. Выразите числа 5, 26, 30 и 55, используя четыре цифры 5, знаки арифметических действий и скобки. Например: $3 = (5+5+5):5$.

2. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 5 дает остаток 4, при делении на 7 — остаток 6, при делении на 9 — остаток 8.

3. В сказочном озере плавает сказочная лилия. Эта лилия за сутки вдвое увеличивает свои размеры и полностью заполняет озеро за 137 суток. За какое время заполнят озеро две сказочные лилии?

4. Вова, Петя и Коля сварили уху и съели ее поровну. Для ухи Вова дал 5 рыб, Петя — 3 рыбы. Коля рыбу не поймал и отдал за уху 2400 рублей. Как Вова и Петя должны разделить между собой эти деньги, чтобы дележ оказался справедливым?

5. Лист бумаги разрезали на 4 части. Затем некоторые или все из этих частей опять разрезали на 4 части и т.д. Можно ли в результате получить 50 листочков бумаги любого размера?

6. Найдите сумму 100 дробей:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{98\cdot 99}+\frac{1}{99\cdot 100}+\frac{1}{100\cdot 101}.$$

7 класс

1. В комнате стоят стулья и табуретки. У каждой табуретки 3 ножки, у каждого стула — 4 ножки. Когда на всех стульях сидят люди, в комнате 39 «ног». Сколько стульев и табуреток в комнате?

2. Постройте график функции

$$\frac{x+3y}{x+2y+1}=1.$$

3. Разложите на множители выражение x^4+x^2+1.

4. У Пети есть 44 монеты и 10 карманов. Сможет ли он разложить свои монеты по карманам так, чтобы количество монет в карманах было различным? Ответ объясните.

5. Найдите натуральные x, которые являются решениями уравнения

$$(x+3)(x+4)(x+5)=4735.$$

6. Докажите, что сумма длин медиан треугольника больше 3/4 его периметра.

8 класс

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{4}{x+y-1}-\dfrac{5}{2x-y+3}+\dfrac{5}{2}=0,\\[2mm] \dfrac{3}{x+y-1}+\dfrac{1}{2x-y+3}+\dfrac{7}{5}=0.\end{cases}$$

2. Постройте график функции

$$y=-2x+\frac{1}{\sqrt{x+3}}+3-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{x+3}}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{\sqrt{4-x}}+$$
$$+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\sqrt{4-x}}.$$

3. Является ли число

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$$

рациональным?

4. Есть только два двузначных числа, каждое из которых равно неполному квадрату разности своих цифр. Найдите эти числа, если одно число на 11 больше другого числа.

5. Найдите сумму 99 дробей:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{98}}+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}.$$

6. Даны отрезки длиной a и b. Постройте с помощью циркуля и линейки отрезок длиной

$$\sqrt{a^2-2ab+2b^2}.$$

9 класс

1. Найдите все целые числа m и n, удовлетворяющие равенству

$$m(m-2n)=4n^2,$$

и докажите, что других таких целых чисел не существует.

2. Докажите, что при любых действительных числах x и y имеет место неравенство

$$x^2+2xy+3y^2+2x+6y+4\geq 1.$$

3. Постройте график уравнения

$$|y|+\frac{1}{|y|}=|x|+\frac{1}{|x|}.$$

4. Докажите, что число

$$\underbrace{11\ldots1}_{2n\text{ цифр}}-\underbrace{222\ldots2}_{n\text{ цифр}}$$

является квадратом натурального числа (например: $11-2=9=3^2$, $1111-22=1089=33^2$ и т.д.).

5. Решите уравнение

$$x\frac{50-x}{x+1}\left(x+\frac{50-x}{x+1}\right)=576.$$

6. Периметр треугольника ABC равен a. Прямая A_1C_1, параллельная основанию AC, отсекает от треугольника ABC треугольник A_1BC_1, периметр которого равен b. Найдите длину основания AC, если известно, что в трапецию AA_1C_1C можно вписать окружность.

10 класс

1. Докажите, что из равенства $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$, где a, b, c – действительные числа, следует, что $a=b=c$.

2. Пусть $a<b<c$. Докажите, что уравнение

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$$

имеет ровно два корня x_1 и x_2, удовлетворяющие неравенствам

$$a<x_1<b<x_2<c.$$

3. Решите уравнение

$$x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}.$$

4. В треугольнике взята произвольная точка, через которую проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Площади трех полученных при этом треугольников равны S_1, S_2, S_3. Найдите площадь исходного треугольника.

5. Упростите выражение

$$\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{tg}4\alpha+$$

$$+8\operatorname{tg}8\alpha+16\operatorname{tg}16\alpha+32\operatorname{tg}32\alpha.$$

6. Постройте график функции

$$y=\log_{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\log_2\sqrt{4x^2-4x+1}+0{,}5^{1-2x}.$$

Призеры III Российской олимпиады школьников по астрономии и космической физике

Дипломы I степени получили

Бакланов П. – Москва, 11 кл.,
Евдокимов Н. – Москва, 9 кл.,
Егоров И. – Москва, 11 кл.,
Зайцев М. – Калуга, 11 кл.,
Прокудин А. – Самара, 11 кл.,
Тунцов А. – Москва, 10 кл.,
Чилингарян И. – Москва, 10 кл.

Дипломы II степени получили

Асанов Ж. – Нальчик, 9 кл.,
Богомолов Ю. – Ярославль, 10 кл.,
Глебов А. – Северодвинск, 11 кл.,
Журавлев В. – Москва, 9 кл.,
Игнатьев В. – Ульяновск, 11 кл.,
Лемешев В. – Тихвин, 9 кл.,
Марковчин А. – Курск, 9 кл.,
Мошегов С. – Новосибирск, 11 кл.,
Павлюченко С. – Ухта, 9 кл.,
Поручиков М. – Самара, 11 кл.,
Пудеев А. – Нижний Новгород, 10 кл.,
Решетник В. – Краснодар, 11 кл.

Дипломы III степени получили

Бондарь В. – п.Восточный Кировской обл., 9 кл.,
Жучков Р. – Казань, 10 кл.,
Захаров Р. – Сыктывкар, 9 кл.,
Кошелев М. – Калуга, 9 кл.,
Куликов Ю. – Нижний Новгород, 9 кл.,
Лысков Н. – п.Восточный Кировской обл., 10 кл.,
Мазунин С. – Санкт-Петербург, 10 кл.,
Панченко Д. – Нижний Новгород, 9 кл.,
Приходько Н. – Новгород, 11 кл.,
Хаткутов Э. – п.Терек Кабардино-Балкарии, 9 кл.,
Шахворостова Н. – Краснодар, 10 кл.,
Шевчун А. – Оренбург, 11 кл.

ПОСТУПАЙТЕ В ОЛ ВЗМШ

Это название (особенно сочетание букв «ЗМШ») известно уже нескольким десяткам поколений школьников. Сначала, в 1964 году, возникла Заочная математическая школа (та самая «ЗМШ»), а сейчас она превратилась в Открытый лицей «Всероссийская заочная многопредметная школа (ВЗМШ)» Российской Академии образования, работающий при Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова. Это государственное учреждение дополнительного образования, причем не только для школьников, а и для всех, кто хочет пополнить свои знания в области одной или нескольких из шести наук: математики, физики, химии, биологии, филологии и экономики. На Северо-Западе России работает Заочная школа Ленинградского областного Министерства образования, созданная при Санкт-Петербургском государственном университете, которая имеет отделения математики, биологии и химии (подробности – ниже).

Мы уже расшифровали две последние буквы аббревиатуры «ЗМШ», теперь время расшифровать и первую. Обучение в нашей школе ЗАОЧНОЕ. Это значит, что, начиная с сентября 1997 года, поступившие к нам будут систематически (примерно раз в месяц) получать от нас специально разработанные для заочного обучения материалы, содержащие изложение теоретических вопросов, разнообразные задачи для самостоятельного решения и контрольные задания, по которым мы будем судить о Ваших успехах и проблемах в освоении программы.

Ваши контрольные работы будут тщательно проверяться и рецензироваться преподавателями ВЗМШ – студентами, аспирантами, преподавателями и научными сотрудниками МГУ, других вузов и учреждений, где имеются наши филиалы. Некоторые из наших преподавателей сами закончили ВЗМШ и особенно хорошо понимают, как важно, помимо конкретных недочетов, указать пути исправления старых пробелов в Ваших знаниях, порекомендовать дополнительную литературу, поругать за невнимательность и похвалить за заметное расширение кругозора и повышение уровня культуры.

За время обучения Вы сможете узнать об увлекательных вещах, часто остающихся за страницами школьных учебников, познакомиться с массой интересных задач и попробовать свои силы в их решении. Для многих из Вас станет открытием, что задачи бывают не только в математике, физике и химии, а и в биологии, и в лингвистике, и в экономике; эти задачи прояснят Вам многие казавшиеся скучными и неинтересными разделы науки.

Особенностью программ и учебных пособий, по которым учатся в ВЗМШ, является то, что их авторы – коллективы, в которых действующие на переднем крае науки ученые сотрудничают с опытными педагогами (часто эти два качества совмещаются в одном и том же человеке).

В настоящее время ВЗМШ совместно с другими научно-педагогическими учреждениями начинает работу по переводу части своих заданий на язык современных телекоммуникаций и разработке новых технологий в образовании. Поступившие к нам имеют уникальную возможность принять участие в этом эксперименте в самом разном качестве.

В нашей школе Вы научитесь самостоятельно и продуктивно работать с книгой; грамотно, четко и ясно излагать свои мысли на бумаге, а это, как известно, умеют далеко не все. Возможно, нам удастся помочь Вам выбрать профессию, найти свое место в окружающем мире.

Все окончившие ОЛ ВЗМШ получают соответствующие удостоверения. Формальных преимуществ такое удостоверение не дает, но приемные комиссии многих вузов учитывают, что обладатели этих удостоверений – люди, в течение продолжительного времени стремившиеся получить дополнительные знания, преодолевшие для этого немало трудностей и, значит, хорошие кандидаты в студенты.

Для поступления к нам надо успешно выполнить вступительную контрольную работу. Успешно – это не значит обязательно решить все задачи. Нас интересует, в первую очередь, Ваше умение рассуждать, попытки (пусть поначалу не всегда удачные) самостоятельно мыслить и делать выводы. Преимуществом при поступлении пользуются проживающие в сельской местности, поселках и небольших городах – там нет крупных научных центров и учебных заведений, и поэтому дополнительное образование можно получить лишь заочно.

Решения задач надо написать на русском языке в ученической тетради в клетку (на отделение экономики – на открытке, см. ниже) и выслать простой бандеролью, не сворачивая в трубку. Если Вы хотите поступить сразу на несколько отделений, каждую работу пришлите в отдельной тетради, указав на обложке следующие сведения о себе:

фамилию, имя, отчество, год рождения, род занятий (класс, школа с указанием ее адреса и учителя по данному предмету – для школьников; профессию, должность и т.п. в другом случае), полный почтовый адрес (с индексом), откуда узнали о нашей школе (из «Кванта», от друзей, из нашей афиши, от учителя и т.п.).

Вступительные работы обратно не высылаются.

Срок отправки работ – *не позднее 25 апреля 1997 года* (по почтовому штемпелю).

Без вступительной работы, только по заявлению, принимаются на индивидуальное обучение победители областных (краевых) туров Всероссийских олимпиад и первого (заочного) и второго туров Соросовской олимпиады для школьнико и учащихся СПТУ по соответствующим предметам, а также участники заключительных (республиканских и соответственно третьего) туров этих олимпиад.

Учащиеся ОЛ ВЗМШ частично возмещают расходы на свое обучение. Плата невелика, на каждом отделении своя. Если учащийся (его семья) не в состоянии внести эту плату, ВЗМШ может, получив мотивированное заявление и справки, частично или полностью освободить от оплаты, а также обратиться в любое указанное заявителем учреждение (школа, орган народного образования, другой спонсор) с ходатайством об оплате этой организацией расходов по обучению.

Не успевшие или не сумевшие поступить на индивидуальное обучение могут заниматься в группах «Коллективный ученик ВЗМШ» (кроме отделения экономики). Каждая такая группа – кружок, работающий под руководством школьного учителя или другого преподавателя, в основном по той же программе и пособиям, что на индивидуальном обучении. Прием в эти группы проводится до 15 октября 1997 года. Для зачисления группы требуется заявление ее руководителя (с описанием его профессии и должности, со списком учащихся и четким указанием, в каком классе они будут учиться с сентября 1997 года); заявление должно быть подписано руководителем группы, а также главой учреждения, при котором будет работать группа, и заверено печатью. Работа групп «Коллективный ученик ВЗМШ» может оплачиваться школами по представлению ОЛ ВЗМШ как факультативные занятия. На разных отделениях ВЗМШ свои правила приема групп (см. ниже).

Проживающие на Северо-Западе России (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках), желающие поступить на отделения математики, биологии и химии, высылают вступительные работы по адресу:
198097 Санкт-Петербург, ул. Трефолева, д.32, С-З ЗМШ (на прием).

Проживающие в остальных регионах России, дальнем и ближнем зарубежье, высылают свои работы в адрес ОЛ ВЗМШ или (по математике) в адрес соответствующего филиала.

Адрес ОЛ ВЗМШ:

119823 Москва В-234, ГСП, МГУ, ВЗМШ, на прием (с указанием отделения).

Филиалы математического отделения ОЛ ВЗМШ при университетах работают в городах: Воронеж, Донецк, Екатеринбург, Иваново, Ижевск, Магадан, Ростов-на-Дону, Самара, Ульяновск, Челябинск, Ярославль; при педагогических институтах — в городах: Киров, Петрозаводск, Тернополь; имеются также филиалы при Брянском Дворце творчества молодежи, Калужском Центре научно-технического творчества молодежи и Могилевском областном Дворце пионеров.

Вступительная работа на отделение математики

На этом отделении, с которого начиналась история ВЗМШ, Вы сможете глубже понять основные разделы школьного курса элементарной математики: метод координат на прямой, на плоскости и в пространстве (даже в четырехмерном); функции, их свойства, основные методы исследования и построения их графиков; целые числа и многочлены; тригонометрия; основные геометрические идеи школьного курса; начала математического анализа. Для хорошо усвоивших основной курс по их желанию будут предложены специальные главы: комплексные числа и простейшие функции комплексного переменного; начала теории игр; введение в комбинаторику и теорию вероятностей. По желанию можно дополнительно заняться и решением задач олимпиадного типа. На выпускном, третьем, курсе большое внимание будет уделено подготовке к вступительным экзаменам в вузы. Обучающиеся на этом отделении получают подготовку, необходимую не только для выбора математики в качестве профессии, но и для успешного освоения других специальностей (а математика сейчас служит одним из основных инструментов исследований во многих отраслях знания).

На основании выполнения помещенной ниже контрольной работы (одной для всех) проводится прием учащихся, освоивших к сентябрю 1997 года знания по математике в следующем объеме:

на 1 курс — 8 классов средней школы;

на 2 курс — 9 классов (им будет предложена часть заданий за первый курс);

на 3 курс — 10 классов; обучение либо по специальной интенсивной программе с выполнением части заданий за 1 и 2 курсы, либо только по подготовке в вуз (на обложке тетради должно быть указано, какой из этих вариантов выбран поступающим).

Кроме того, проводится набор в экспериментальную группу учащихся на базе 7 классов по специальной программе, рассчитанной на 4 года обучения. Эти учащиеся выполняют лишь те задачи, для решения которых достаточно знаний за 7 классов.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы, только по заявлению руководителя.

1. От пристани A к пристани B одновременно отправляются плот (плывущий со скоростью течения) и катер. Катер, прибыв в B, мгновенно поворачивает назад и встречает плот через 2 часа после начала движения. Затем, доплыв до A, он опять мгновенно поворачивает назад и догоняет плот через 3 часа после встречи. Сколько времени понадобится плоту, чтобы приплыть из A в B?

2. Пусть окружность пересекает каждую сторону квадрата в двух точках и делит ее на три отрезка. Обходя квадрат от какой-нибудь вершины по часовой стрелке, закрасим три отрезка каждой стороны последовательно в красный, белый, синий цвета. Докажите, что сумма длин красных отрезков равна сумме длин синих.

3. а) Может ли в компании из 6 девочек и 5 мальчиков случиться так, что все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики — с одним и тем же числом девочек?

б) Тот же вопрос про компанию из 7 девочек и 6 мальчиков.

4. Три окружности с центрами в точках A, B и C радиусов 1, 2 и 3 соответственно касаются друг друга внешним образом. Найдите $\angle BAC$.

5. В каждой клетке шахматной доски написано число, равное среднему арифметическому своих соседей (соседними считаются клетки, имеющие общую сторону). Сумма четырех чисел, стоящих в угловых клетках, равна 10. Чему равна сумма всех 64 написанных чисел?

6. Рассмотрим пятизначные числа, цифры которых идут в убывающем порядке (т.е. первая цифра больше второй, вторая — больше третьей, и так далее). Каких чисел среди них больше: а) тех, у которых сумма цифр равна 30, или тех, у которых сумма цифр равна 31; б) тех, у которых сумма цифр равна 15, или тех, у которых сумма цифр равна 30?

7. На базаре продаются рыбки, большие и маленькие. Сегодня три больших и одна маленькая стоят вместе столько же, сколько пять больших, но вчера, а две большие и одна маленькая, но сегодня — столько же, сколько три больших и одна маленькая, но вчера. Можно ли по этим данным выяснить, что дороже: одна большая и две маленькие, но сегодня, или пять маленьких, но вчера?

8. Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляры AP и AQ на биссектрисы углов B и C треугольника (или на их продолжения).

а) Докажите, что отрезки PQ и BC параллельны.

б) Найдите PQ, если известны длины сторон $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

9. а) При каких целых значениях n правильный треугольник со стороной n можно замостить плитками, имеющими форму равнобокой трапеции со сторонами 1, 1, 1, 2? б) Докажите, что правильный шестиугольник со стороной n можно замостить такими плитками при любом n, равном 1, 2, 3 ...

10. Найдите все решения $(x; y)$ следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} 9x^2 - 7xy = 15; \\ y^2 + xy = 1. \end{cases}$$

11. Можно ли найти такой треугольник ABC, у которого высота AH и длины сторон AB, BC и CA — четыре последовательных целых числа, причем длины отрезков BH и HC — тоже целые числа?

12. У лифта на первом этаже 18-этажного Белого Дома собрались 17 министров, которым надо подняться наверх, причем на разные этажи. Лифтер может сделать лишь один рейс на любой этаж, а дальше они должны идти пешком. Лифт способен вместить всех министров. Известно, что все министры с одинаковым неудовольствием спускаются вниз на один этаж и с двойным неудовольствием поднимаются пешком вверх на один этаж. Какой этаж должен выбрать лифтер, чтобы суммарное неудовольствие всех министров было наименьшим?

Вступительная работа на отделение биологии

Отделение успешно работает более 20 лет. Особое внимание при обучении уделяется областям биологической науки, наименее раскрытым в школьной программе: молекулярной биологии, биохимии, иммунологии, генетике, биофизике, физиологии и т.д.

Коллективом отделения создан комплекс уникальных учебных пособий и задачников (часть из них издана массовым тиражом издательством «МИРОС»), работа по написанию и изданию новых книг не прекращается.

Проводится набор на два потока:

— трехгодичное обучение на базе 8 классов;

— двухгодичное обучение на базе 9 классов.

Группы «Коллективный ученик» также выполняют вступительную работу, но коллективную и высылают ее на проверку.

Внимание! В помещенной ниже работе поступающие на трехгодичное обучение решают задачи 1 – 5, а на двухгодичное – задачи 3 – 7.

В ответах можно использовать и факты, найденные в литературе (тогда необходимо привести ссылки на эти источники), и Ваши собственные идеи.

Вместе с работой пришлите стандартный конверт с маркой и с заполненным адресом (для отправки Вам решения Приемной комиссии).

1. Перед Вами – список животных: *барсук, каракатица, карась, креветка, мидия, ланцетник, лось, пиявка, скорпион, стрекоза, суслик, трепанг, тритон, уж, филин, человек*. Предложите как можно больше разных критериев, по которым их можно разделить на две группы. Для каждого критерия укажите, какие животные в какую группу попадают.

2. *Ареалом вида* называют географическую область его распространения. У многих организмов за последние 2000 лет ареалы значительно изменились. С какими конкретными причинами это связано в разных случаях? Каждую из причин проиллюстрируйте одним-двумя примерами.

3. Наземные позвоночные могут иметь шерсть, перья или чешую. Каковы сравнительные преимущества и недостатки каждого из этих типов покровов?

4. В сельскохозяйственной практике часто используют выдерживание семян перед посадкой при низкой температуре (1 – 5 °C) – стратификацию. Для каких видов растений стратификация будет полезной, а для каких – нет? Ответы аргументируйте.

5. Отставной поручик Чебурков на протяжении года подкармливал рыб в своем пруду сушеными дафниями (корм, традиционно используемый аквариумистами). Но это мероприятие, как ни странно, не повысило, а понизило уловы рыбы. Предложите как можно больше гипотез о том, почему так могло произойти.

6. Группа исследователей из разных городов собирается провести на животных разных видов один и тот же эксперимент «по сравнению умственных способностей». Животное должно научиться по предъявлению изображения A отвечать действием C (например, нажимать левую кнопку), а на предъявление изображения B – действием D (нажимать правую кнопку). Напишите инструкцию: как должен быть подготовлен и проведен такой эксперимент, чтобы на основании полученных данных можно было корректно сравнить скорости обучения у разных видов.

7. Раньше медики часто прописывали больным кровопускание и пиявки. При каких заболеваниях каждая из этих процедур приносит пользу? А при каких – вред? Ответы аргументируйте.

Вступительная работа на отделение физики

Отделение работает 5 лет. За это время создана программа двухгодичного курса, для которого написано несколько учебных пособий. Ведется работа по улучшению этих пособий и по написанию новых (посвященных новым темам).

Основное внимание уделяется изучению физики с помощью решения задач, излагаются методы, пригодные как для стандартных, так и для более сложных ситуаций. В программе – все основные разделы школьного курса физики, а также темы, недостаточно полно изучаемые в школе.

Поступающие на двухгодичный поток (на базе 9 классов школы) решают задачи 1 – 5 приведенной ниже вступительной работы; поступающие на одногодичный поток (на базе 10 классов) – задачи 4 – 8; желающие за один год пройти всю двухгодичную программу (на базе 10 классов) решают все задачи и пишут «10 + 11» на обложке тетради.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы, только по заявлению руководителя.

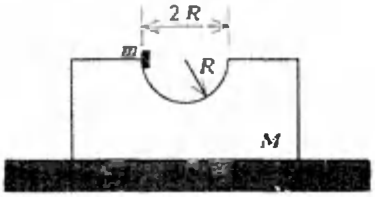
1. Пушка выстреливает ядро под углом 60° к горизонту со скоростью 100 м/с. Когда ядро достигает наивысшей точки траектории, пушка стреляет второй раз. Через какое время после первого выстрела ядра окажутся на минимальном расстоянии друг от друга (пока оба ядра в полете)? Чему равно это расстояние? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Диск катится с постоянной скоростью без проскальзывания по внутренней стороне неподвижного обруча. Известно, что, прокатившись один раз по обручу, диск делает ровно пять оборотов вокруг своей оси. Найдите отношение радиуса обруча к радиусу диска.

3. Космический корабль движется в безвоздушном пространстве с выключенным двигателем. Внутри корабля поддерживается нормальное атмосферное давление. Будут ли работать на корабле следующие устройства: 1) пылесос; 2) барометр-анероид; 3) уровень; 4) сифон; 5) ареометр; 6) гидравлический пресс? Ответы поясните.

4. Через неподвижный блок переброшена длинная веревка, к концам которой привязаны грузы массами 1,46 кг и 1,10 кг. Вначале грузы удерживают так, что тяжелый груз находится на 90 см выше легкого, затем их отпускают. Когда грузы оказываются на одной высоте, от тяжелого груза отваливается часть массой 0,46 кг. Через какое время после этого момента расстояние между грузами снова станет 90 см? Веревка и блок идеальные.

5. Подставка массой M с выемкой в виде полусферы радиусом R стоит на гладком столе (см. рисунок). Тело массой m кладут на край подставки и отпускают. Найдите максимальное смещение тела по горизонтали относительно земли при последующем движении. Трения нет.



6. Два газа находятся при нормальных условиях в сосуде, объем которого делится перегородкой в отношении 2:3. Давления газов одинаковы. Если перегородка станет проницаемой только для газа, занимающего больший объем, то в конце концов она установится в середине сосуда. В каком отношении поделит перегородка объем сосуда, если она станет проницаемой только для газа, изначально занимающего меньший объем?

7. Имеются четыре параллельно расположенные проводящие пластины. Любые две соседние пластины образуют конденсатор емкостью C. Пластины можно соединять при помощи соединительных проводов. Какую максимальную емкость можно получить, соединяя пластины?

8. Почему некоторые лампы дневного света при включении долго мигают?

Вступительная работа на отделение химии

Это самое молодое отделение ОЛ ВЗМШ, ему пошел всего второй год. На двухгодичное обучение принимаются имеющие к сентябрю 1997 года знания в объеме 9 классов средней школы, они решают задачи 1 – 8 помещенной ниже работы; на одногодичный поток требуется база 10 классов средней школы, надо попытаться решить все задачи контрольной работы.

1. 9,9 г сплава Mg и Al растворили в избытке соляной кислоты. Выделилось 10,08 л H_2 (н.у.). Рассчитайте состав сплава.

2. Предложите способ разделения смеси следующих солей:

$$NaCl,\ CaCl_2,\ FeCl_3,\ CuCl_2\ и\ AlCl_3.$$

3. Осуществите следующие превращения:

$$KMnO_4 \to MnCl_2 \to NaCl \to NaOH \to$$
$$\to Fe(OH)_2 \to Fe(OH)_3 \to$$
$$\to Fe_3O_4 \to CO_2 \to$$
$$\to NaHCO_3 \to Cu(OH)_2CO_3.$$

Напишите уравнения химических реакций и условия их проведения.

4. Рассчитайте:

а) массу одной молекулы NH_3 в граммах (н.у.);

б) сколько молекул H_2O содержится в 1 л воды.

5. В четырех неподписанных пробирках находятся растворы $AgNO_3$, NaI, $PbCl_2$, K_2CO_3. Не пользуясь другими реактивами, определите содержимое каждой пробирки. Аргументируйте свой ответ.

6. В водный раствор 16,6 г бесцветной соли A пропустили 1,12 л газа B (н.у.). В результате реакции выделился черный осадок C массой 25,4 г и 1,12 л газа D (н.у.). Осадок C плохо растворим в воде и хорошо растворим в исходном растворе соли A. При добавлении спиртового раствора вещества C к раствору крахмала появляется интенсивное синее окрашивание. Газ D поддерживает горение. Определите вещества A, B, C и D и напишите уравнения всех упомянутых реакций.

7. К какому классу относится каждое из следующих веществ:

$$H_8N_2SO_4,\ H_6NPO_4,\ H_2Fe_2CO_5,\ H_{10}CuSO_9,\ H_{24}K_2Cr_2S_4O_{20}?$$

8. Кратко (1 – 2 стр.) напишите, почему Вы хотите обучаться на нашем отделении.

9. Предложите схему синтеза бензойной кислоты, фенилметилкетона и метилового эфира пропионовой кислоты из угля и любых неорганических соединений. Опишите условия протекания химических реакций.

10. Напишите и назовите по номенклатуре IUPAC все структурные изомеры вещества, имеющего брутто-формулу C_5H_9Br.

Вступительная работа на отделение филологии

Это отделение работает 7 лет. На нем может учиться любой человек, освоивший программу 7 классов средней школы, независимо от возраста.

Освоившим программу 8 классов предлагаются три независимых цикла обучения (можно выбрать из них любое количество).

Цикл «Русский язык». В программе: тренировка практической грамотности, разборы; сведения об истории языка и его современном устройстве; знакомство с современной проблематикой науки о языке и смежными с ней областями знания.

Цикл «Сочинение». Вы научитесь анализировать художественное произведение, узнаете, что такое сочинение и какие они бывают, познакомитесь с основными литературоведческими понятиями и научитесь их применять; Вам будет предложен (и совместно с Вами проведен) анализ литературных произведений школьной и абитуриентской программ; Вы поймете, что такое хорошее знание текста произведения и как его добиться.

Цикл «Общая филология». Вам предстоит познакомиться с основами литературоведения и лингвистики: узнать, как разнообразно устройство языков мира и что такое язык вообще; научиться решать уникальный тип задач, разработанный лингвистами-теоретиками Московского университета и не имеющий аналогов в мире, — так называемые лингвистические задачи, составленные на материале самых разных языков; Вас ожидают занятия логикой, древними языками и литературой.

Внимание! Каждый из этих циклов Вы можете пройти по стандартной (2 года) или интенсивной (1 год) программе.

Для освоивших программу 7 классов мы предлагаем экспериментальную четырехгодичную программу, включающую в себя все три цикла.

На обложке тетради с вступительной контрольной работой обязательно укажите цикл и срок обучения, который Вы выбрали.

На отделении нет групп «Коллективный ученик», но возможна работа в «командах» по 2 – 3 человека.

Обязательно объясните свои выводы и решения задач. Не расстраивайтесь, если какие-то вопросы оказались Вам не по силам. Иногда для зачисления бывает достаточно хорошего, вдумчивого ответа на 2 — 3 вопроса.

1. Какое слово от какого произошло: название цвета «голубой» от названия птицы «голубь» — или наоборот? Аргументируйте свое решение. *Подсказка*: вспомните персонажей итальянской «комедии масок».

2. Чем отличаются по смыслу предложения:

Обиженный, мальчик отвернулся и насупился.

Обиженный мальчик отвернулся и насупился.

А теперь попробуйте объяснить, почему определительный оборот всегда выделяется запятой перед личным местоимением, например:

Приглашенная на вечеринку, она долго крутилась перед зеркалом.

Внимание: чтобы ответить на этот вопрос, не нужна никакая дополнительная литература. Используйте свою собственную языковую интуицию.

3. Определите и как можно более точно сформулируйте значения следующих слов:

синенький, тетя, прохвост, должен.

Внимание: слово может иметь больше одного значения.

Внимание: стремитесь к тому, чтобы под Ваше определение подходило данное слово, но не подходили его синонимы.

4. Как известно, глаголы бывают переходные и непереходные. Что такое — переходность глагола? Отличаются ли одни от других по смыслу? Какие «грамматические последствия» есть у этой глагольной категории: как она влияет на возможность образования от глагола его форм?

5. Перечислите «любимые» лирические жанры поэтов эпохи романтизма. Сочините небольшое стихотворение, стилизовав его под один из этих жанров, по собственному выбору. Не забудьте указать, какой именно жанр Вы выбрали.

6. Представьте себе, что «Мертвые души» были названы не поэмой, а комической повестью. Что бы изменилось?

7. Попробуйте представить себе главного героя одного из произведений, перечисленных ниже, в Вашем возрасте. Сочините 2 – 3 страницы из его дневника этих лет (писать можно, так и быть, в современной русской орфографии).

Произведения: А.Грибоедов, «Горе от ума»; А.Пушкин, «Евгений Онегин»; М.Лермонтов, «Герой нашего времени»; И.Тургенев, «Отцы и дети».

Вступительная работа на отделение экономики

Отделение успешно работает четвертый год. Преподаются основы прикладной экономики, бизнеса и предпринимательства. В программу обучения входит знакомство с основными экономическими теориями, международной экономикой, изучение опыта ведущих фирм, применение математических методов в экономике. Учащиеся осваивают практику бизнеса в деловой игре по переписке, получая практические навыки рекламы и маркетинга, принятия стратегических решений.

Основной курс обучения — 1 год, далее для желающих возможна специализация по менеджменту, финансовому анализу, бухгалтерскому учету и др.

Принимаются все желающие, имеющие образование не ниже 7 классов средней школы. Обучение ведется либо индивидуально, либо по небольшим группам (2 – 5 человек). Формы обучения «Коллективный ученик» пока нет.

Вступительная работа — тест — включает вопросы по экономике, математике, истории, литературе, общей культуре.

Решения присылайте *только на открытках* с указанием *полного почтового адреса и индекса, фамилии, имени и отчества* (все — печатными буквами); обязательно укажите источник информации об ОЛ ВЗМШ и напишите «Экономика, 1997 г.». На открытке достаточно записать в строчку номера вопросов и под каждым написать букву, соответствующую ответу, который Вы считаете правильным. Верно ответившие на все вопросы получат из букв своих ответов осмысленную фразу (пробелы между словами и знаки препинания расставьте по собственному желанию).

1. Альфред Нобель был:

К) нефтяным королем; П) сталелитейным магнатом; Х) динамитным королем; Я) знаменитым норвежским физиком; А) изобретателем вечного двигателя.

2. Сколько существует целых чисел от 23 до 81, делящихся на 2, но не делящихся на 6:

Н) 26; Х) 23; О) 19; Я) 18; И) 15?

3. В каком из районов Франции производят вино, получившее свое название по имени этой области, известное в России также как «игристое», «шипучее»:

Б) Эльзас; Р) Гасконь; А) Нормандия; К) Бордо; Ч) Шампань?

4. Если 1 доллар США стоит 5080 рублей, а немецкая марка стоит 3460 рублей, то каков курс доллара по отношению к марке, рассчитанный через рубль (с точностью до десятых долей):

М) 1,4; У) 1,5; О) 0,7; С) 2,8; Т) 0,6?

5. Шрифт «курсив» был разработан в подражание почерку:

А) Данте; О) Шекспира; С) Петрарки; В) Ленина; К) Пушкина.

6. Какое произведение НЕ относится к циклу Н.В.Гоголя «Вечера на хуторе близ Диканьки»:

К) «Сорочинская ярмарка»; С) «Ночь перед Рождеством»; О) «Страшная месть»; М) «Вечер накануне Ивана Купалы»; Т) «Вий»?

7. Дилер — это:

А) посредник, заключающий сделки; Е) продавец; Ф) главный герой романа Э.Золя «Деньги»; В) брокер; Ъ) работник деревообрабатывающего предприятия.

8. Какие страны имеют в виду, когда говорят о «четырех драконах экономического развития»:

Т) Южная Корея, Тайвань, Гонконг, Сингапур; П) Индонезия, Малайзия, Таиланд, Китай; Р) Китай, Япония, Южная Корея, Гонконг; Ы) Сирия, Саудовская Аравия, Ирак, Иран; Ж) Чили, Боливия, Аргентина, Перу?

9. Население России составляет примерно (укажите наиболее точное число):

А) 205 млн человек; Р) 87 млн человек; Ь) 147 млн человек; О) 1 млрд человек; И) 123 млн человек.

10. Каждая облигация компании «Серый Гусь» приносит 10% годовых, компании «Белый гусь» — 15%, а компании «Гусь лапчатый» — 20%. На начало года цена всех облигаций одинакова. Какой набор из 10 облигаций лучше купить (в каждом наборе компании идут в указанном порядке):

В) 2, 4, 4; Ш) 3, 2, 5; Э) 2, 2, 6; А) 4, 1, 5; Н) 6, 2, 2?

11. Укажите город, НЕ входящий в «Золотое кольцо России»:

Л) Сергиев Посад; Н) Суздаль; С) Владимир; К) Новгород; М) Ростов Великий.

12. Массовое распространение картофеля в России относится к:

Т) 11 в.; А) 13 в.; С) 15 в.; Д) 17 в.; О) 19 в.

13. Кто сопровождал Данте в аду («Божественная комедия»):

П) Дьявол; У) Согрешивший Друг; К) Овидий; Н) Вергилий; Э) Гораций?

14. Сколько стран являются членами Европейского Сообщества:

А) 12; О) 15; И) 17; Е) 18; Ю) 25?

15. Какие товары являются основной статьей российского экспорта:

Г) лес и пушнина; М) нефть и газ; Н) зерновые культуры; В) оружие и оборудование; Ц) драгоценные металлы?

16. Фирма «Заячий Хвост» занимается дрессировкой и продажей зайцев. 85% зайцев умеют бить по барабану, а 20% — печатать на пишущей машинке. Сколько процентов зайцев обладают обоими из указанных навыков, если каждый дрессированный заяц обязательно умеет делать хоть что-то из перечисленного:

И) 5%; У) 20%; Е) 105%; Ш) 65%; А) 10%?

17. Учителем Александра Македонского был философ:

Л) Платон; С) Аристотель; Ц) Сократ; Р) Демокрит; Д) Пифагор.

18. Какой композитор был автором оперы «Волшебная флейта»:

Ю) Верди; У) Россини; И) Пуччини; Т) Моцарт; Я) Гайдн?

19. Средняя зарплата трех прорабов строительной компании «Дом на песке» составляет 6 млн руб, а средняя зарплата 21 строителя составляет 3,5 млн руб. Глава компании получает в среднем 8,5 млн руб. Какова средняя зарплата в компании (кроме перечисленных лиц, в ней никто не работает):

О) 5 млн руб; Т) 4,8 млн руб; М) 5,1 млн руб; А) 5,4 млн руб; Р) 7 млн руб?

20. В 987 году Русь исповедовала:

Ь) ислам; М) язычество; П) иудаизм; К) католичество; А) православие.

ЗАОЧНАЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКАЯ ШКОЛА ПРИ МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) Министерства образования Российской Федерации при Московском физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т.п.), расположенных на территории Российской Федерации, на 1997/98 учебный год.

ЗФТШ при МФТИ как федеральное государственное учреждение дополнительного образования работает с 1966 года (уже 30 лет!). За это время школу окончили свыше 52000 учащихся; практически все ее выпускники поступают в ведущие вузы страны, и каждый второй студент МФТИ — выпускник ЗФТШ. Финансирует ЗФТШ Министерство образования Российской Федерации. Обучение в ЗФТШ бесплатное.

Научно-методическое руководство школой осуществляет Московский физико-технический институт, который готовит инженеров-физиков и инженеров-математиков по существующей только в МФТИ единой специальности «Прикладные математика и физика». В подготовке специалистов принимают участие ведущие отраслевые и академические научно-исследовательские и научно-производственные объединения страны (базовые организации МФТИ). Преподаватели МФТИ — крупнейшие ученые, среди которых около ста членов Российской академии наук. Физтеховское образование позволяет не только успешно работать в науке, но и хорошо ориентироваться в жизни.

Цель ЗФТШ при МФТИ — помочь учащимся, интересующимся физикой и математикой, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам.

Набор в 8, 9, 10 и 11 классы ЗФТШ на 1997/98 учебный год проводится на следующие отделения:

— *Индивидуальное заочное обучение (тел. 408-51-45)*

Прием на заочное отделение проводится на конкурсной основе по результатам выполнения вступительного задания по физике и математике, приведенного ниже. Полная программа обучения рассчитана на 4 года (8–11 кл.), но поступать можно в любой из этих классов.

В течение учебного года, в соответствии с программой ЗФТШ, ученик будет получать по каждой теме задания по физике и математике (по 3 задания по каждому предмету для 8 класса, 6–7 заданий по каждому предмету для 9, 10 и 11 кл.), а затем рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий вместе с проверенной работой учащегося.

Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и 8 – 12 контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Задания в ЗФТШ составляют опытные преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ. Работы учащихся-заочников проверяют студенты, аспиранты и выпускники МФТИ (часто – выпускники ЗФТШ).

– Очно-заочное обучение в физико-технических кружках и факультативах (тел. 485-17-66)

Заочные физико-технические кружки и факультативы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении двумя преподавателями – физики и математики. Руководители кружка или факультатива принимают в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Группа (не менее 8 – 10 человек) принимается в ЗФТШ, если директор общеобразовательного учреждения сообщит в ЗФТШ фамилии, имена, отчества ее руководителей и поименный список обучающихся (с указанием класса и итоговых оценок за вступительное задание по физике и математике). Все эти материалы и конверт для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом на имя одного из руководителей следует выслать до 25 мая 1997 года по адресу: *141700 г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, ЗФТШ (с указанием «Кружок» или «Факультатив»)*. Тетради с работами учащихся не высылаются. Работа руководителей кружков и факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением по представлению ЗФТШ при МФТИ как факультативные занятия.

Руководители кружков и факультативов будут получать в течение учебного года учебно-методические материалы ЗФТШ (программы по физике и математике, задания по темам программы, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся) и информационно-рекламные материалы (газеты МФТИ «За науку», проспекты МФТИ и его факультетов с правилами приема и т.п.). Работы учащихся проверяют и оценивают руководители кружков и факультативов, а в ЗФТШ ими высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию.

– Очное обучение в вечерних консультационных пунктах (ВКП) (тел. 485-17-66)

Для учащихся Москвы и Московской области по программе ЗФТШ работают вечерние консультационные пункты, набор в которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам собеседования по физике и математике, которое проводится в мае и сентябре.

Программы ЗФТШ при МФТИ являются дополнительными образовательными программами и едины для всех видов обучения.

Кроме занятий по этим программам, ученикам ЗФТШ предлагается участвовать в пробных вступительных экзаменах в МФТИ, которые проводятся в марте и июне, в очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультетов.

По окончании учебного года успешно выполнившие программу ЗФТШ по выбранной форме обучения переводятся в следующий класс, а выпускники (11 кл.) получают Свидетельство об окончании с итоговыми оценками по физике и математике, которое учитывается на собеседовании при поступлении в МФТИ.

Вне конкурса в ЗФТШ принимаются участники областных, краевых, республиканских, зональных и всероссийских олимпиад по физике и математике.

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу сделайте на русском языке и аккуратно перепишите в одну школьную тетрадь. Порядок задач сохраняйте тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. На лицевую сторону обложки наклейте лист бумаги, четко заполненный по приведенному здесь образцу. Внизу под заполненной анкетой начертите таблицу для оценок за вступительное задание.

Внимание! Для получения ответа на вступительное задание обязательно вложите в тетрадь обычный конверт с наклеенной маркой по почтовому тарифу. На конверте напишите свой домашний адрес.

Срок отправления решения – *не позднее 1 марта 1997 года*. Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1997 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (по физике и математике) высылайте по адресу:

141700 г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, ЗФТШ.

Для учащихся Украины работает Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Желающим поступить следует выслать работы по адресу:

252680 г. Киев, пр. Вернадского, д. 36, Институт металлофизики, Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Телефон: 44–95–24.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике. В задании по физике задачи 1 – 5 предназначены для 7 класса, 6 – 11 – для 8 класса, 9 – 14 – для 9 класса, 13 – 18 – для десятого класса. В задании по математике задачи 1 – 5 предназначены для 7 класса, 3 – 8 – для 8 класса, 5 – 11 – для 9 класса, 8 – 14 – для 10 класса. Номера классов указаны на текущий 1996/97 учебный год.

1. Область (край или республика)	*Владимирская обл.*
2. Фамилия, имя, отчество	*Пасхин Андрей Николаевич*
3. Класс, в котором учитесь	*девятый*
4. Номер школы	*23*
5. Вид школы (обычная, лицей, гимназия, с углубленным изучением предмета и т.п.)	*с углубленным изучением физики и математики*
6. Подробный домашний адрес (с указанием индекса и телефона)	*600035 г.Владимир, Суздальский пр., д.8, кв.385, тел.4-45-12*
7. Место работы и должность родителей отец мать	 *директор школы* *учитель музыки*
8. Адрес школы и телефон	*600015 г.Владимир, ул. Парижской Коммуны, д. 456, тел. 4-11-10*
9. Фамилия, имя, отчество преподавателей по физике по математике	 *Кузнецова Ирина Петровна* *Иванов Дмитрий Сергеевич*
10. Каким образом к Вам попало это объявление?	

№ п/п								Σ
Ф.								
М.								
Л. №								

Вступительное задание ЗФТШ по физике

1. Тело прошло первую треть пути со скоростью v = 40 км/ч. Вторую треть пути оно прошло со скоростью на 30% больше скорости на начальном отрезке, последнюю треть — со скоростью на 30% больше средней скорости на предшествующих отрезках. Какова средняя скорость тела на всем пути?

2. Два поезда движутся навстречу друг другу со скоростями 72 км/ч и 54 км/ч. Пассажир, находящийся в первом поезде, замечает, что второй поезд проходит мимо него в течение 14 секунд. Какова длина второго поезда?

3. Два велогонщика едут рядом в одном направлении со скоростью 35 км/ч. Один из них увеличивает скорость до 45 км/ч, проходит с этой скоростью 10 км, поворачивает и, не сбавляя скорости, возвращается к другому велосипедисту, который движется с прежней скоростью. Сколько времени прошло с того момента, когда первый велосипедист ушел вперед, до момента его возвращения к партнеру?

4. Взвешивание тела в воздухе дало значение P. Взвешивание того же тела в жидкости плотностью ρ_0 дало значение P_1. Чему равна плотность вещества, из которого изготовлено тело? При взвешивании в жидкости тело полностью погружено в нее. Плотностью воздуха пренебречь.

5. Деревянный кубик плавает в воде так, что в воду погружено 90% его объема. Какая часть объема будет погружена в воду, если поверх воды налить слой масла плотностью $\rho_м$ = 0,8 г/см^3, полностью закрывающий кубик?

6. В стакане с водой плавает цилиндрическая деревянная шайба с цилиндрической дыркой, причем оси дырки и шайбы совпадают (рис. 1). Площадь дна стакана S, площадь сечения дырки S_1. Шайба плавает так, что выступает из воды на высоту H. Удерживая шайбу на месте, дырку осторожно заполняют маслом так, что получается столбик масла высотой H, после чего шайбу отпускают. На какую высоту поднимется шайба? Плотность масла $\rho_м$, плотность воды $\rho_в$.

Рис. 1

7. В цилиндрический сосуд с площадью дна 200 см^2 и высотой 30 см налито 4 литра воды. В сосуд опускают стержень сечением 100 см^2, высота которого равна высоте сосуда. Какой минимальный вес должен иметь стержень, чтобы он опустился до дна сосуда?

8. На горизонтальном столе находятся два одинаковых стакана, соединенных внизу тонкой резиновой трубкой. Сечение каждого стакана 18,2 см^2, высота 20 см. Стаканы заполняются до половины жидкостью плотностью ,63 г/см^3. Затем в один стакан кладут диск из льда массой 62,3 г, диаметр которого практически совпадает с внутренним диаметром стакана. На какой высоте установятся уровни жидкости в стаканах? Как изменятся уровни в стаканах после таяния льда? Считать, что вода и жидкость в стаканах не смешиваются и не растворяются друг в друге.

9. В калориметр теплоемкостью 1254 Дж/К бросили 30 г мокрого снега, т.е. смеси снега с водой. Сколько было там собственно снега, если температура в калориметре понизилась от 24 °С до 16 °С?

10. В сосуде находится лед. Для нагревания сосуда вместе со льдом от 270 К до 272 К требуется количество теплоты Q. Для дальнейшего нагревания от 272 К до 274 К требуется количество теплоты в 20 раз больше, чем Q. Определите массу льда в сосуде до нагревания. Потерями тепла пренебречь. Теплоемкость сосуда C = 600 Дж/К, удельная теплоемкость льда $c_л$ = 2100 Дж/(кг·К), удельная теплоемкость воды $c_в$ = 4200 Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда λ = 340 кДж/кг.

11. Участок цепи включает резистор сопротивлением R = 1 Ом, который соединен последовательно с параллельным соединением двух резисторов сопротивлениями R и $2R$ соответственно. Сопротивление одного из параллельно соединенных резисторов возросло в два раза, а сопротивление другого резистора упало в два раза. Как следует изменить напряжение на участке цепи, чтобы выделяемая на этом участке мощность не изменилась?

12. Два кирпича движутся навстречу друг другу. Скорость одного кирпича равна $v_1 = v$, другого — $v_2 = 2v$. Когда расстояние между кирпичами становится равным L, с одного из кирпичей взлетает муха и летит к другому кирпичу. Достигнув его, она резко поворачивает и летит обратно, и так далее. Муха летает между кирпичами практически с постоянным по модулю ускорением a. Какой путь она пролетит до момента встречи кирпичей?

13. На гладком горизонтальном столе расположена система грузов, изображенная на рисунке 2. Коэффициент трения между грузами, массы которых M и m, равен μ. Правый нижний груз тянут вдоль стола с силой

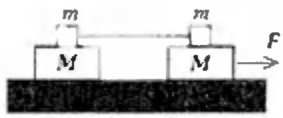


Рис. 2

$\vec{F}$. Найдите ускорения всех грузов в зависимости от величины F силы. Верхние грузы связаны друг с другом нерастяжимой нитью.

14. Пуля массой m попадает в деревянный брусок массой M, подвешенный на нити длиной L, и застревает в нем. На какой угол отклонится маятник, если скорость пули равна v? Траектория полета пули проходит через центр масс бруска.

15. Тонкостенный заполненный газом цилиндр массой m, высотой h и площадью S плавает в воде (рис. 3). В результате потери герметичности в нижней части цилиндра его глубина погружения увеличилась на Δh. Определите начальное давление газа в цилиндре. Атмосферное давление равно p_0, температура не меняется.

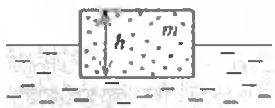


Рис. 3

16. Какая масса водорода находится в цилиндре под поршнем, если при нагревании от температуры T_1 = 250 К до температуры T_2 = 680 К газ произвел работу A = 400 Дж?

17. Сосуд объемом V = 20 дм^3 разделен тонкой подвижной перегородкой на две части. В левую часть помещена вода ($\nu_в$ = 1 моль), в правую — азот ($\nu_а$ = 0,5 моль). Температура поддерживается постоянной и равной t = 100 °С. Определите объем правой части сосуда.

18. Два конденсатора емкостями C_1 = 1 мкФ и C_2 = 2 мкФ заряжены до напряжений U_1 = 100 В и U_2 = 300 В соответственно. Конденсаторы соединяют между собой. Какое количество теплоты выделится при этом? Считать, что один из конденсаторов соединяется с другим через резистор с большим сопротивлением.

Вступительное задание ЗФТШ по математике

1. Коля и Максим отправились в турпоход из пункта A в пункт B. Максим проходил в день по 24 км и пришел в пункт B на два дня раньше Коли. Известно, что, если бы Коля проходил в день на 2 км больше, чем Максим, то он пришел бы в пункт B на день раньше, чем Максим. Сколько дней был в пути Максим? Сколько км в день на самом деле проходил Коля?

2. Найдите минимальное натуральное число, о котором известно, что: 1) если его умножить на 17, то результат разделится на 24; 2) если его разделить на 11, то результат разделится на 5; 3) если его разделить на 2, то получится квадрат некоторого натурального числа.

3. Имеются 4 пакета с сахаром и весы с двумя чашками без гирь. С помощью пяти взвешиваний расположите пакеты по весу.

4. В треугольнике ABC проведите прямую, пересекающую стороны AB и BC в точках M и N соответственно, так, чтобы $AM = MN = BN$. В каком случае отрезок MN будет параллелен AC?

5. Найдите все натуральные числа, которые при делении на 2 дают остаток 1, при делении на 3 дают остаток 2 и при делении на 5 дают в остатке 3.

6. Пассажир шел пешком на поезд и опоздал на 1 минуту. Если бы он последние полтора километра пути шел со скоростью на 1 км/ч больше, то он пришел бы раньше отправления поезда на 2 минуты. С какой скоростью шел пассажир?

7. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{4x+3}{x}} - 2\sqrt[3]{\frac{x}{4x+3}} = 1.$$

8. В 12 кг раствора соли два раза добавляли по 6 кг раствора той же соли, но другой концентрации: концентрация добавляемого в первый раз раствора была в два раза меньше концентрации раствора, взятого первоначально; концентрация добавляемого во второй раз раствора была в три раза меньше концентрации раствора, полученного после первого добавления. В результате получился раствор 25% концентрации. Какова была концентрация первоначального раствора?

9. При каких $b \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$ парабола $y = x^2 + bx + c$ и прямая $y = 2$ пересекаются в двух разных точках A и B, причем площадь треугольника AOB (где O — начало координат) не превосходит $\sqrt{2}$?

10. Решите неравенство

$$\frac{|x+1|-|x-2|}{\sqrt{9-x^2}} \ge 1.$$

11. Около равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) описана окружность. Биссектриса угла BAC пересекает окружность в точке D. Касательная к окружности, проходящая через точку D, пересекает прямую AC в точке E. Найдите длины отрезков CD и DE, если $AB = 8$, а

$$\sin\left(\frac{1}{2}\widehat{BAC}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

12. Найдите точки, в которых касательная к гиперболе $y = \frac{x+3}{x-1}$ перпендикулярна прямой $y = \frac{1}{4}x + 5$; напишите уравнение касательных; нарисуйте графики гиперболы и найденных касательных.

13. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |\sin 3x| = -\sqrt{2}\sin y, \\ \cos 2y + 2\cos 2x \cdot \sin^2 2x = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

14. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. На продолжении стороны AB откладываем отрезок BM, $BM = AB$; на продолжении стороны BC откладываем отрезок CN, $CN = BC$; на продолжении стороны CD откладываем отрезок DP, $DP = CD$; на продолжении стороны DA откладываем отрезок AQ, $AQ = DA$. Найдите отношение площадей четырехугольников $ABCD$ и $MNPQ$.

НОВЫЙ ПРИЕМ В ШКОЛЫ-ИНТЕРНАТЫ ПРИ УНИВЕРСИТЕТАХ

Специализированный учебно-научный центр (сокращенно — СУНЦ) при МГУ (школа им. академика А.Н.Колмогорова), СУНЦ НГУ, СУНЦ УрГУ и Академическая гимназия при СПГУ объявляют набор школьников в 10 (двухгодичное обучение) и 11 (одногодичное обучение) классы.

Обучение ведется на двух отделениях: физико-математическом и химико-биологическом. В составе физико-математического отделения кроме основного профиля предлагаются компьютерно-информационный, биофизический (СУНЦ МГУ) и экономический. Химико-биологическое отделение представлено специализациями по химии и биологии.

Зачисление в школу производится на конкурсной основе по итогам нескольких туров. Первый тур — заочный письменный экзамен по математике, физике, химии. Успешно выдержавшие письменный экзамен по решению приемной комиссии в апреле — мае приглашаются в областные центры Российской Федерации на устные экзамены.

Ниже приведены условия заочного вступительного экзамена.

Работа должна быть выполнена в обычной ученической тетради (на титульном листе укажите желаемый профиль обучения).

На первой странице укажите свои анкетные данные:

1. Фамилия, имя, отчество (полностью).
2. Домашний адрес (подробный), индекс.
3. Подробное название школы, класс.

Работу отправляйте простой бандеролью (обязательно вложите в работу конверт с маркой, заполненный на свой домашний адрес).

Высылайте Вашу работу по одному из следующих адресов:

121357 Москва, Кременчугская ул., 11, СУНЦ МГУ, Приемная комиссия, заочный экзамен. (*внимание*: жители Москвы принимаются в учебный центр без предоставления общежития телефон для справок 445-11-08.);

199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/96, Академическая гимназия;

620137 Екатеринбург, ул. Голощекина, 30, СУНЦ УрГУ;

630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, Учебно-научный центр НГУ, Олимпиадный комитет.

Срок отправки работ — не позднее 20 марта 1997 года (по почтовому штемпелю). Работы, высланные позже этого срока, рассматриваться не будут.

Если Вы не сможете решить все задачи, не отчаивайтесь — комиссия рассмотрит работы с любым числом решенных задач.

Желаем успеха!

Основное задание

9 класс

Математика

1. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4z - 2, \\ x^2 + z^2 = 4y - 2, \\ y^2 + z^2 = 4x - 2. \end{cases}$$

2. На стороне AB треугольника ABC отложен отрезок AM, равный радиусу окружности, описанной около треугольника ABC. Найдите угол CMB, если известно, что $\angle CAB = 36^\circ$, а $\angle ABC = 42^\circ$.

3. Найдите два двузначных числа, если известно, что сумма остальных двузначных чисел в 50 раз больше одного из этих двух чисел.

4. Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 - xy - 2x + 3y = 11.$$

5. Найдите углы трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если известно, что

$$AB = BC,\ AC = CD \text{ и } BC + CD = AD.$$

Физика

1. Лодочник переправляется через реку шириной H и, борясь с течением, направляет лодку под углом α к берегу. Какова скорость лодки v относительно воды, если скорость течения реки u, а лодку сносит на расстояние l?

2. Шарик массой M, движущийся горизонтально со скоростью v, падает в прямоугольную яму глубиной H и шириной l. На какой высоте шарик, испытав упругое соударение с дном, столкнется со стенкой? Проанализируйте возможные случаи.

3. В свинцовый брусок массой M, лежащий на горизонтальной поверхности, попадает тело массой m, летящее со скоростью v под углом α к вертикали, и практически мгновенно в нем застревает. Через какое время после начала движения брусок остановится? При каких значениях угла α он вообще не стронется с места? Коэффициент трения между бруском и поверхностью μ.

4. Куб со стороной $a = 10$ см стоит на дне сосуда с водой. Высота уровня воды в сосуде $2a$, площадь дна $2a^2$. Плотность материала куба вдвое больше плотности воды. Найдите минимальную работу, необходимую для того, чтобы вытащить куб из воды.

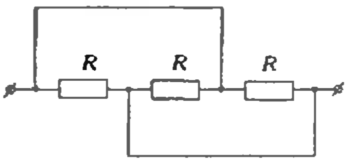


Рис. 1

5. Найдите сопротивление цепи (рис. 1), если $R = 300$ Ом.

10 класс

Математика

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5t + x - 3, \\ x^2 + y^2 + t^2 = 5z + y - 3, \\ x^2 + z^2 + t^2 = 5y + t - 3, \\ y^2 + z^2 + t^2 = 5x + z - 3. \end{cases}$$

2. Точки X и Y — проекции вершины A треугольника ABC на биссектрисы внешних углов при вершинах B и C. Найдите сторону AB, если $XY = l$, $BC = a$, $AC = b$.

3. Для каких значений a существует b такое, что

$$|7a - 3b| \le 1 \text{ и } |5a + 7b| \le 1?$$

4. На сторонах BC и CD прямоугольника $ABCD$ взяты точки E и F соответственно так, что треугольник AEF — правильный. Найдите площадь треугольника CEF, если $S_{ABE} = S_1$, $S_{ABF} = S_2$.

5. Числа a, b, c попарно различны и удовлетворяют равенству

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}.$$

Найдите $a^2b^2c^2$.

Физика

1. Шарик массой m, прикрепленный к пружине, совершает круговое вращательное движение в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω. Найдите радиус окружности, по которой будет двигаться шарик, и величину силы натяжения пружины, считая справедливым закон Гука. Длина нерастянутой пружины L, а пружины со свободно висящим шариком l.

2. Резиновый мяч плавает в воде, погруженный на $1/8$ часть своего объема. Другой мяч, вдвое большего диаметра, погружается на $1/10$ часть своего объема. Найдите, во сколько раз толщина стенки второго мяча больше, чем первого.

3. Электрический нагреватель мощностью 5 кВт поддерживает в помещении температуру 27 °С при температуре окружающего воздуха −23 °С. Какая мощность потребовалась бы для поддержания той же температуры в помещении с помощью идеальной тепловой машины?

4. С какой силой воздействует на каждую грань тетраэдра с ребром a заряд Q, помещенный в его центре? Поверхностная плотность заряда граней σ.

5. Конденсаторы емкостями C и $2C$, каждый из которых заряжен от батареи с ЭДС $\mathcal{E}$, и резистор сопротивлением R соединены, как показано на рисунке 2. Каков будет ток в цепи в момент замыкания ключа? Какие величины напряжений установятся на конденсаторах после прохождения тока?

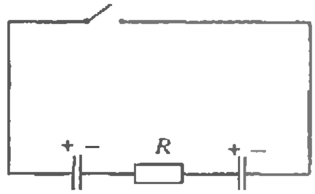


Рис. 2

Дополнительные задачи по химии для поступающих на химико-биологическое отделение

1. При нагревании 150 г смеси бертолетовой соли и двуокиси марганца выделилось 33,6 л газа (н.у.). При растворении продуктов реакции в горячей воде осталось 3 г осадка. Определите состав (в %) твердых продуктов реакции.

2. При растворении 5,38 г кристаллогидрата сульфата цинка в 92 см^3 воды получен раствор с массовой долей сульфата цинка 0,0331. Определите состав кристаллогидрата.

БУДУЩИМ НОБЕЛЕВСКИМ ЛАУРЕАТАМ

Польская Академия наук и Институт физики приглашают школьников старших классов к участию в 5-м Международном конкурсе исследовательских работ «Первый шаг к Нобелевской премии по физике». Работу объемом до 25 печатных страниц надо выслать до 31 марта 1997 года по адресу:

Dr. Waldemar Gorzkowski
Secretary General of the «FIRST STEP»
Institute of Physics, Polish Academy of Sciences
al. Lotnikow 32/46, (PL)02-668 Warszawa

Работа должна быть написана одним автором, содержать дату рождения, домашний адрес и адрес школы.

Лучшие работы будут награждены и опубликованы, а их авторы в ноябре 1997 года будут приглашены в Институт физики на научную стажировку сроком на один месяц.

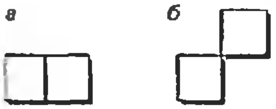
Желаем успехов!

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

ГРУППЫ И ЗАМОЩЕНИЯ ПОЛИМИНО

A. $t(T)=(AB)^2A^{-1}BA^{-1}B^{-3}=(AB)^4=e$.

B. Нет. Каждая фигура из четного числа квадратов может быть разбита на фигурки домино (рис.*а*) и «диагонального домино» (рис.*б*) — составленные из двух квадратов, имеющих единственную общую вершину. Для обеих этих фигурок $t=e$.



C. Искомая группа состоит из всех выражений вида

$$A^{k_1}B^{l_1}\dots A^{k_p}B^{l_p},$$

таких, что соответствующая ломаная (может быть, самопересекающаяся) замкнута и ограничивает фигуру, «ориентированная площадь» которой делится на n. (Ориентированная площадь здесь вычисляется следующим образом. Возьмем единичный квадрат решетки внутри фигуры и найдем число полных оборотов (по часовой стрелке), которые совершает вектор с началом в центре этого квадрата и концом на границе фигуры при движении конца вектора вдоль всей ломаной. Получится какое-то целое число. Затем сложим такие числа для всех входящих в фигуру квадратов.)

D. Для данного полимино P

$$t(P)=(AB)^{18} \text{ или } (BA)^{18}.$$

Если A и B — отражения относительно прямых, пересекающихся под углом $\pi/18$, то AB и BA будут поворотами на углы $\pi/9$ и $-\pi/9$, соответственно. Поэтому $(AB)^{18}=e$.

E. Рассмотрим группу G, образованную двумя элементами A и B, удовлетворяющими только двум условиям $A^2=B^2=e$. Докажите индукцией по числу клеток в полимино P, что $t_O(P)=(AB)^{2k}$, где $|k|=c(P)$, а знак k зависит от выбора точки O и изменяется, когда O перемещается в соседнюю точку границы P.

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

Задачи

1. Говоривший был правдивым, так как в случае, если говоривший — лжец, утверждение было бы правдивым, что невозможно по условию.

2. $\frac{86}{13}+\frac{95}{247}=7$.

3. Маме 45 лет, а бабушке 72 года.

4. Утверждение задачи следует из тождества

$$(a-b)^3(c-b)+(b-c)^3(a-c)+(c-a)^3(b-a)=$$
$$=\left((a-b)(b-c)+(b-c)(c-a)+(c-a)(a-b)\right)^2.$$

5. **Ответ:** $3802\times356=1901\times712$. Решение сводится к небольшому перебору вариантов, если заметить, что 1901 — простое число и поэтому число МЛРД должно делиться на 1901.

Задачи

(см. «Квант» № 5)

1. Записано слово АТОМ.

2. Прибыль в 500% означает увеличение вклада в 6 раз, поэтому у Буратино и папы Карло вначале было $900:6=150$ золотых. Прибыль в 50% означает увеличение вклада в 1,5 раза, следовательно, у папы Карло вначале было $150:1{,}5=100$ золотых, а у Буратино $150-100=50$ золотых. После вклада в банк «Обирон» он получил $150:3=50$ золотых, столько же, сколько положил. Таким образом, банк «Обирон» дает 0% годовых.

3. Число 252 так раскладывается на множители: $252=4\cdot63=7\cdot36=9\cdot28$. Из этих разложений следует, что было роздано $63+36+28=127$ подарков, что больше половины количества солдат этой части. Но 9 человек получили подарки и от первого, и от второго предпринимателей, 7 человек — и от первого, и от третьего предпринимателей, 4 человека — от второго и третьего предпринимателей. Таким образом, $9+7+4=20$ подарков попало тем, кто уже их имел, поэтому количество солдат, получивших подарки, равно $127-20=107$.

4. Известно, что в год выходит 6 номеров журнала и 6 приложений. Что такое «большая часть»? Это означает «больше половины, но не все». Половина от 6 это 3, поэтому Вася получил больше 3, но меньше 6 номеров, т.е. 4 или 5. Наименьшая возможная сумма номеров в этом случае равна $1+2+3+4=10$.
А что такое «меньшая часть»? Это означает «меньше половины, но не ноль», поэтому Вася получил больше 0, но меньше 3 приложений, т.е. 1 или 2.
Из этих результатов вытекает, что наименьшая величина отношения суммы номеров полученных журналов к количеству полученных приложений равна $10:2=5$ и число 5 достигается лишь в этом случае. Поэтому Вася не получил лишь четыре первых номера журнала.

5. Нет, нельзя. При делении указанного числа на 16 остаток равен 12, поэтому это число может быть записано в виде $16k+12=4(4k+3)$. Так как $4=2^2$, то число $4k+3$ также должно быть квадратом целого числа, но квадрат целого числа при делении на 4 дает в остатке только 0 или 1 и, следовательно, не может давать в остатке 3.

«ОШИБКА ЛЕЖИТ НА ПОВЕРХНОСТИ...»

1. При торможении поезда человек по инерции продолжал сохранять прежнюю скорость, потому и упал. При этом скорость поезда измениться не может.
2. В системе отсчета, связанной с движущейся машиной, Сюзанн находится в покое, а дерево действительно движется.
3. Выталкивающая сила, действующая на лодку, не зависит от глубины водоема, поэтому осадка плавающей лодки не изменится.
4. Поскольку внутренние силы не могут изменить положение центра тяжести системы, Насреддин не мог сам себя вытащить из ямы.
5. Нет, можно.
6. Не сможет, так как скорость звука намного больше скорости бегущего человека.
7. Нет, не прав. Чтобы сдвинуть ступу с места, нужно приложить силу не меньшую, чем сила трения, а Насреддин в обоих случаях действовал меньшими силами.
8. Вертолет упал бы на землю, поскольку подъемная сила и тяга для горизонтального полета создаются при помощи работающего винта.
9. Скорость испарения воды зависит от температуры окружающей среды.
10. Скорость света больше скорости звука.
11. Нет, поскольку Луна светит отраженным от Солнца светом.

МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ТЕЛ

1. $3\pi a^2$. 2. $\frac{2\pi a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. 3. $8\pi a^2\sin\frac{\alpha}{2}$. 4. $\pi l^3\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. *Указание.* Объем искомой фигуры равен объему цилиндра. 5. $4\pi a^2\sqrt{3}$. 6. $2\pi a^2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}(1+2\cos\alpha)$. 7. $\frac{2\pi l^2\sin\alpha\sin\beta(\sin\alpha+\sin\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}$. 8. $\frac{\pi a^2}{\cos\alpha}\left(1+\sqrt{1+3\sin^2\alpha}\right)$.

III Российская олимпиада школьников по астрономии и космической физике

Задачи теоретического тура

8 — 9 классы

1. Первый минимум звездной величины (т.е. максимум яркости) соответствует наименьшему расстоянию от кометы до

Земли — чем ближе к нам небесное тело, тем больше света (при прочих одинаковых условиях) от него до нас доходит. Второй минимум объясняется близостью кометы к Солнцу: во-первых, комета отражает тем больше солнечного света, чем больше его на нее попадает, а во-вторых, чем ближе комета к Солнцу, тем больше вещества «испаряется» с ее ядра — голова и хвост становятся более «насыщенными».

2. Противоречия здесь нет: если в районе перигелия орбита кометы гиперболическая, то это не значит, что комета обязательно улетит за пределы Солнечной системы. Возмущения, вызываемые планетами, могут сделать орбиту замкнутой, особенно если ее эксцентриситет очень близок к единице. У нас реализовался как раз такой случай.

3. Прежде всего заметим, что Солнце в полдень на высоте $h = 72°$ может находиться как к Северу от зенита, так и к Югу. Первый случай соответствует более южной местности, второй — более северной, т.е. угловое расстояние от точки Юга, которое определяется формулой $h = 90° - \varphi + \delta$, может быть $h_2 = 180° - 72° = 108°$ и $h_1 = 72°$. Склонение Солнца 19 июня (почти день летнего солнцестояния) составляет $\delta = 23{,}5°$. Получаем два значения широты: $\varphi_1 = 41{,}5°$, $\varphi_2 = 5{,}5°$. Полдень в местности Вашего приземления наступил в 8 часов 42 минуты Московского летнего времени, т.е. в 4 часа 42 минуты по Гринвичу. Это говорит о том, что Вы находитесь к востоку от Гринвича, где наступление среднего астрономического полдня происходит (по Гринвичу) во время $\tau = 12^h - \lambda(1^h/15°)$, где λ — восточная долгота местности. Отсюда $\lambda = (12^h - \tau)\cdot 15°/1^h = 109°30'$ в.д. Поправка, связанная с уравнением времени в середине июня, незначительна, около $+1'$. С этой поправкой уточненная долгота местности $\lambda = 109°45'$ в.д.

Таким образом, возможны две точки Вашего приземления: $41{,}5°$ с.ш., $109°45'$ в.д.; $5{,}5°$ с.ш., $109°45'$ в.д.

Посмотрев на карту, обнаруживаем, что второй вариант отпадает — там просторы Южно-Китайского моря и «приземлиться» невозможно. Первый вариант — территория центральной части автономного района «Внутренняя Монголия» Китая. До посольства в Пекине около 550 км, и дорогу надо спрашивать по-китайски (ну а если Вы им не владеете — попробуйте спросить по-английски, надеемся, им Вы владеть будете).

4. Из третьего закона Кеплера $T_1^2/a_1^3 = T_2^2/a_2^3$ следует, что чем меньше радиус орбиты космического корабля, тем меньше период его обращения вокруг Солнца, и минимальному периоду обращения соответствует минимальный радиус орбиты. А минимальный радиус орбиты корабля, если он несгораем, есть просто радиус Солнца. Сравнивая движения космического корабля и Земли вокруг Солнца, запишем:

$$\frac{T_{\min}^2}{a_{\min}^3} = \frac{T_3^2}{R_3^3},$$

откуда найдем

$$T_{\min} = T_3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{3/2} \approx 0{,}116 \text{ сут} \approx 2 \text{ ч } 47 \text{ мин}.$$

5. Разность упомянутых в условии звездных величин $\Delta m = 17 - (-13) = 30 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$ говорит о том, что поток света от фонаря на расстоянии 250 м в $100\cdot 100\cdot 100\cdot 100\cdot 100\cdot 100 = 10^{12}$ раз больше, чем поток света от всех фонарей Калуги на расстоянии от Земли до Марса в противостоянии. Поток света от одного фонаря при приближении с 0,38 а.е. = 57 000 000 км до 250 м увеличивается в $(57\,000\,000 \text{ км}/250 \text{ м})^2 \approx 52\cdot 10^{15}$ раз. Следовательно, в Калуге ночью горит около $52\cdot 10^{15}/10^{12} = 52\,000$ фонарей.

6. Скорости космонавтов будут разными только потому, что Луна вращается вокруг своей оси. Луна обращена к Земле одной стороной, поэтому период осевого вращения Луны равен периоду ее обращения вокруг Земли (T). Относительная скорость будет равна удвоенной экваториальной скорости осевого вращения: $V = 2\cdot 2\pi R/T$, где R — радиус Луны. Подставляя $T = 27{,}3$ сут и $R = 1740$ км, получаем $V \approx 9{,}3$ м/с.

10 класс

1. Ниже всего Солнце опускается в полночь. В Северном полушарии его «полуночная» высота находится по формуле $h = \varphi - 90° + \delta$, где δ — склонение Солнца. Если h имеет отрицательное значение, это означает, что Солнце находится под горизонтом. Наибольшее склонение Солнце имеет 22 июня: $\delta = \varepsilon = 23°27'$. Граница территории, на которой хотя бы одну ночь в году не прекращаются навигационные сумерки, оказывается такой: $\varphi = -12° + 90° - 23°27' = 54°33'$. Заметим, что эта параллель проходит по северной части Калуги (для центра Калуги $\varphi = 54°31'$). Что же касается Южного полушария, то там существует лишь северная граница подобной территории.

3. Из таблицы видим, что эксцентриситет орбиты кометы очень близок к единице, т.е. орбита является практически параболической. Следовательно, скорость в перигелии в $2^{1/2}$ больше круговой с тем же радиусом. Из таблицы находим, что он равен 0,230 а.е., т.е. $a_1/a_3 = 0{,}230$. Из третьего закона Кеплера, сравнивая с орбитой Земли, получаем $T_1 = (0{,}230)^{3/2}T_3$. Отсюда находим круговую скорость: $V_1 = 2\pi a_1/T_1 = 2\pi a_3/\left((0{,}230)^{1/2}T_3\right)$ и скорость в перигелии: $V_{II} = 2^{1/2}V_1 \approx 87{,}8$ км/с.

5. За 4000 лет длина суток увеличится на 0,068 с. Земля сделает фактически не 1460976,8 оборотов (что получается из расчета по современной продолжительности суток), а на 0,57 оборота больше. Следовательно, если мы пренебрегаем замедлением вращения Земли, то расчеты солнечного затмения дадут, например, точку в Тихом океане вместо Атлантического.

6. При любом направлении движения должно наблюдаться медленное уменьшение частоты импульсов пульсара.

11 класс

3. Видимо, автор романа предполагал, что в результате эволюции Солнце станет остывать. Но 30 миллионов лет это очень малое время даже для того, чтобы почувствовать какую-либо разницу в излучении Солнца по сравнению с нынешней. Это первая и главная ошибка. Далее, в результате эволюции (конечно, гораздо позже, чем через 30 миллионов лет) Солнце должно превратиться в красный гигант с температурой 3–4 тысячи градусов. Удаленные звезды с такой температурой действительно кажутся нам красными, но если такое освещение доминирует, то человеческий глаз будет воспринимать его почти белым (вспомните, что температура спиралей лампочек накаливания еще меньше, а освещение в комнате кажется белым, чуть желтоватым). Наконец, температура Земли, обращающейся вокруг красного гиганта, поднимется более чем в два раза и превысит 300 °С. Ничего себе, «ужасный холод»!

4. Поскольку лазер оптический, можно считать, что он работает в том же спектральном диапазоне, в котором наблюдается спутник. Следовательно, траектория лазерного луча повторит траекторию луча света, соединяющего спутник с наблюдателем. Поэтому нацеливать лазер надо точно на видимое направление на спутник.

6. Обозначим массу пульсара через M, массу спутника — через m (принимаем, что $m \ll M$). Пульсар и его спутник обращаются с периодом $T = 1$ год вокруг общего центра масс, расположенного вблизи центра пульсара. Орбитальная скорость пульсара, определенная по эффекту Доплера, составит $V = 3\cdot 10^8$ м/с $\cdot 10^{-8} = 3$ м/с. В системе отсчета, связанной с центром масс, суммарный вектор импульса спутника и пульсара равен нулю, поэтому для массы спутника получаем $m \approx MV\left(T/(2\pi GM)\right)^{1/3} \approx 3{,}2\cdot 10^{26}$ кг, или 53 массы Земли.

НАПЕЧАТАНО В 1996 ГОДУ

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.А.Иванюк, Т.Н.Кольченко, В.М.Митурич-Хлебникова, С.В.Шутов, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

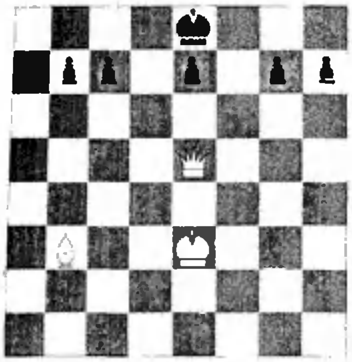
Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64а, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати 142300 г.Чехов Московской области
Заказ № 3093

Симметрия и асимметрия

Эта тема то и дело возникает на «шахматной страничке», поскольку имеет вполне геометрический характер. Она является излюбленной и у многих шахматных композиторов. Познакомимся с несколькими интересными позициями.

В.Мейер, 1925
Мат в 3 хода

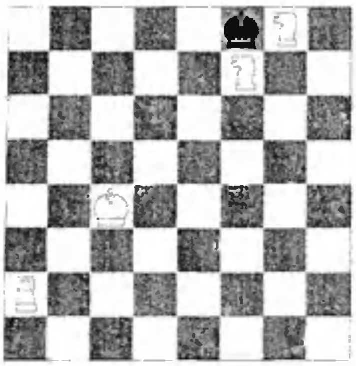


В этой старинной задаче исходное положение несимметрично, а симметрия возникает после вступления **1. Се6!** Но все же вертикаль «а» вносит некоторое нарушение в геометрическую картину... Двигать пешки бесполезно, и у черных есть два равноценных (симметричных) ответа, которые ведут к двум, как ни странно, асимметричным репликам белых.

1...Крf8 2. Фа1! и **3. Фа8×** или (в случае g7 – g6) **3. Фh8×**. А после **1...Крd8** у белых нет симметричного ответа Фi1, поскольку отсутствует вертикаль «i», но зато решает **2. Фа5!** — все на ту же крайнюю линию.

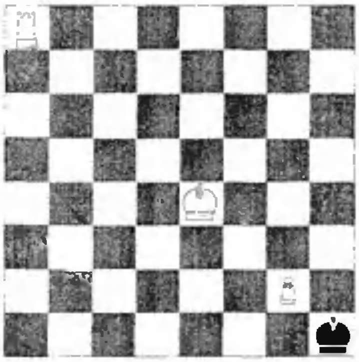
Эта идея называется вариантной асимметрией, и приведенная задача – первая на данную тему. В дальнейшем ее систематически разрабатывал шведский проблемист Я. Кнеппель.

Я.Кнеппель, 1939
Кооперативный мат в 2 хода



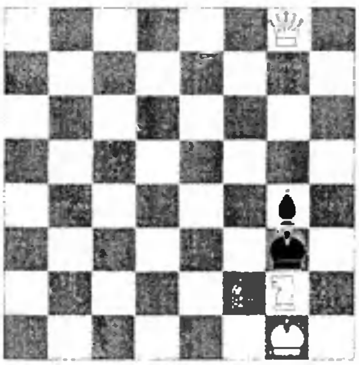
При ходе белых решение такое: 1. Ке5 Кре8 2. Ла8×. Но в задачах на кооперативный мат начинают (и помогают белым) черные, и после **1. Крg7** возникает позиция, симметричная – относительно диагонали а2 – g8 – исходному положению. Но симметричное 1...Кd6 не проходит, поскольку наличие вертикали «h» не позволяет окружить черного короля. А решает **1...Лg2+ 2. Крh7 Кf6×** – королю не удалось скрыться на линии «h».

Я.Кнеппель, 1942
Мат в 3 хода



После вступления **1. Крf3**, сохраняющего симметричное равновесие, решение разветвляется на два несимметричных варианта, различие которых определяет пешка g2: **1...Крg1 2. Лh8 Крf1 3. Лh1×; 1...Крh2 2. Крf2 Крh1 3. Лh8×.**

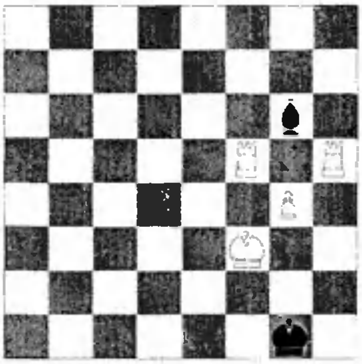
Я.Кнеппель, 1947
Мат в 2 хода



А теперь разделение вариантов вновь обусловлено геометрией доски: **1. Фg5!** Все фигуры остались на одной линии, но наличие свободных вертикалей слева от них влияет на решение: **1...Крh3 2. Фh4×; 1...Крf3 2. Фе3×.**

К.Стокман, 1979
Мат в 3 хода

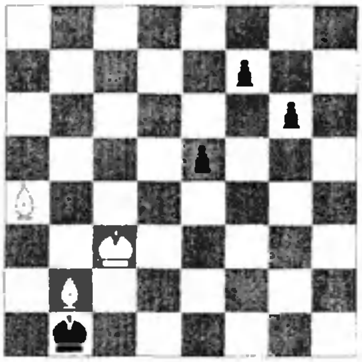
Эта задача имеет дополнительные нюансы с точки зрения композиции. В



исходном положении при взятии слоном одной из ладей дело обстоит так: 1...С:h5 2.Л:h5 и 3. Лh1×, 1...С:f5 2. gf и 3. Лh1×. Однако, как говорят композиторы, эта игра иллюзорная, в действительности все иначе: после **1. Крg3!** положение становится симметричным, а решение меняется. Грозит 2. Лh1+ и 3. Лf1×, и одну из ладей надо брать. Но теперь на **1...С:h5** уже следует **2.gh** и **3.Лf1×**, а на **1...С:f5 — 2. Л:f5** и **3. Лf1×**.

Познакомимся еще с одной темой, называемой логической асимметрией. В этом случае некоторое почти незаметное нарушение симметрии требует поиска более тонких вариантов. Вновь обратимся к творчеству шведского проблемиста.

Я.Кнеппель, 1941
Мат в 4 хода



Напрашивается 1. Крb3 с дальнейшим переводом слона на диагональ b1 – h7. Однако черные пешки мешают осуществить этот замысел за четыре хода. Решает же **1. Сd1!** с угрозой 2. Крb3 и 3. Сc2×. После вынужденного ответа **1...Кра2!** на доске возникает позиция, симметричная исходной (относительно большой черной диагонали). Но теперь пешки не в состоянии помешать белому слону: **2. Крc2 3. Се2** и **4. Сс4×**.

Е.Гик

Индекс 70465