kvant.mccme.ru

ISSN 0130-2221

СЕНТЯБРЬ/ОКТЯБРЬ

1996 · №5

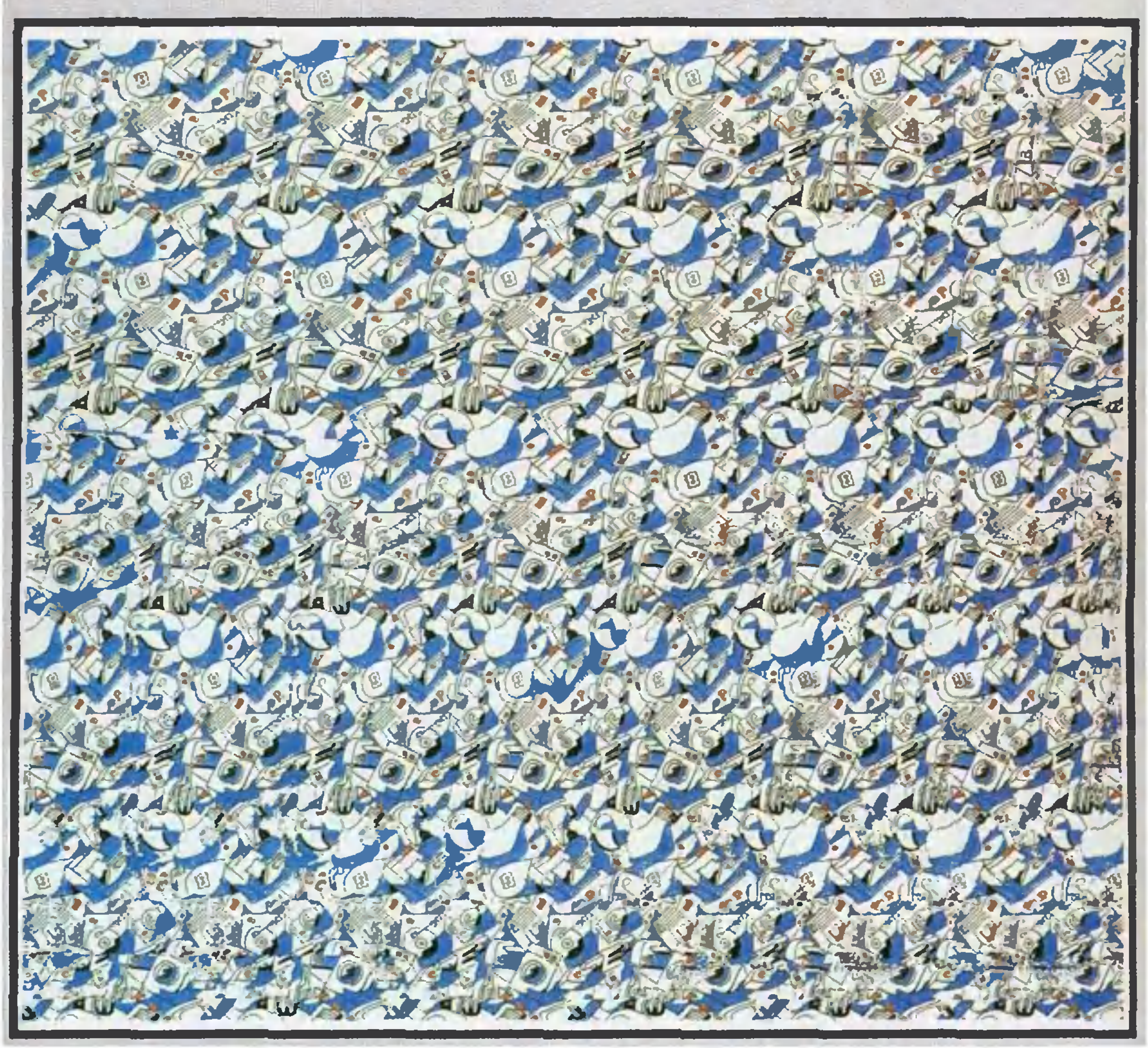
КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

kvant.mccme.ru

В последнее время вошло в моду разглядывание "обьемных картинок". Если в компании друзей или сотрудников появляется альбом с такими кратинкам и (или, на худой конец, одна отдельная картинка), все собираются вокруг и стараются "увидеть".

К радости одних, им это удается без всяких усилий. На беду других, они, как ни бьются, не могут ничего увидеть (и даже начинают подозревать, что их разыгрывают). Хотя, казалось бы, рецепт прост — сфокусируй *глаза не на лист* бумаги с картинкой, а на воображаемый обьект позади листа... А как Вы? Смогли увидеть то, что сделал художник из лампочек, стиральных машин и других "электрических обьектов"? Если да, то немедленно приступайте к чтению статьи о лампах ("113 лет ошибке Эдисона"). А если не смогли, то подумайте, нельзя ли, используя несколько снимков, "сфотографировать" ускользающее от Вас обьемное изображение. В случае удачи пришлите нам фотографию.



КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

СЕНТЯБРЬ/ОКТЯБРЬ · 1996 · №5

В номере:

Учредители — Президиум Российской Академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА
С.П.Новиков

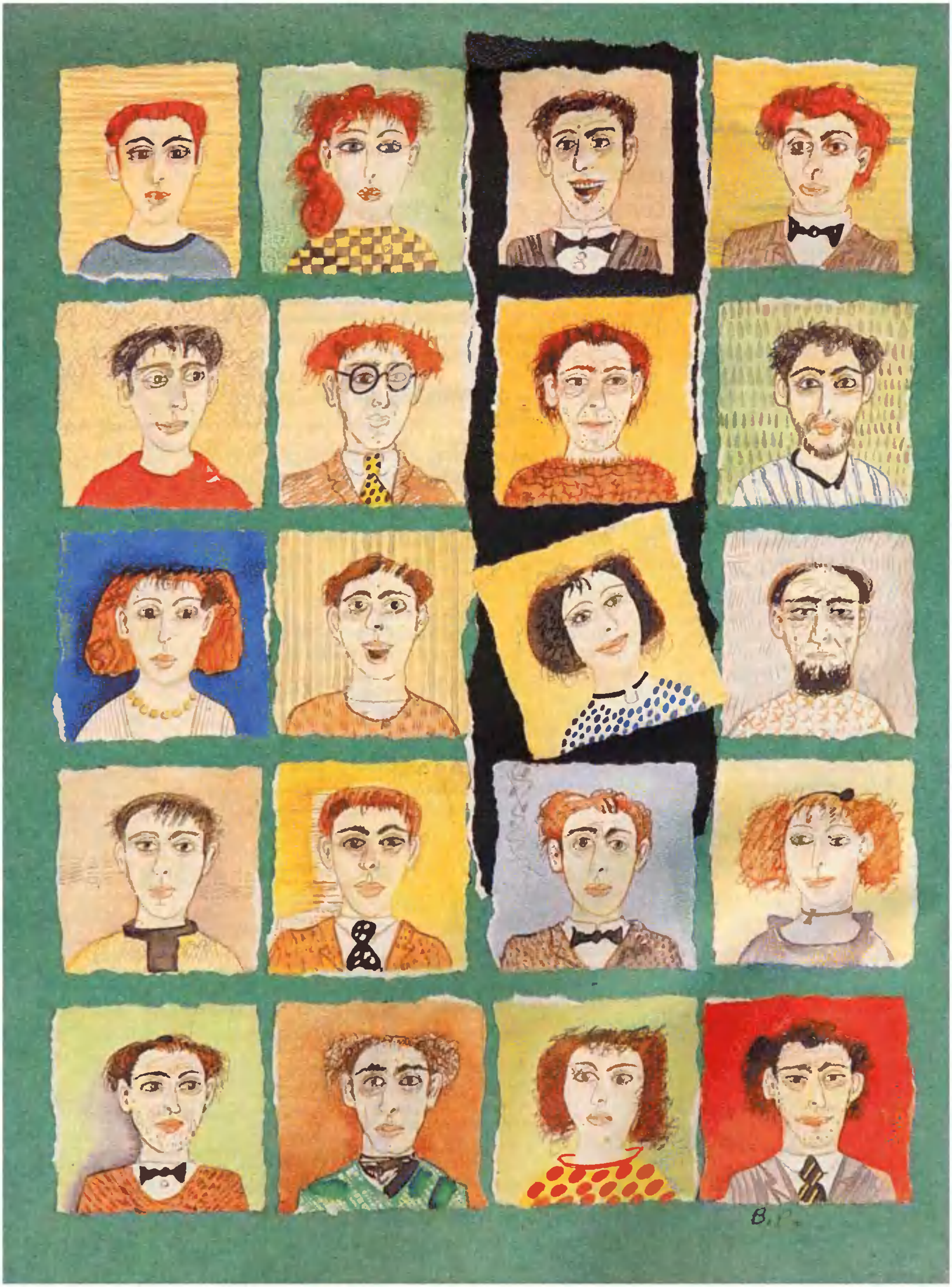
РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
Ю.М.Брук, А.А.Варламов, Н.Б.Васильев, А.Н.Виленкин, С.А.Гордюнин, Н.П.Долбилин, В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, А.Р.Зильберман, С.С.Кротов (*директор «Бюро Квантум»*), А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, В.В.Можаев, Н.Х.Розов, А.П.Савин, Ю.П.Соловьев, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров (*заместитель главного редактора*), В.А.Тихомирова, В.М.Уроев, А.И.Черноуцан (*заместитель главного редактора*), И.Ф.Шарыгин

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ
А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков, В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, Ю.А.Данилов, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев, А.И.Шапиро

Бюро Квантум

©1996, Президиум РАН, Фонд Осипьяна, «Квант»

kvant.mccme.ru



kvant.mccme.ru

7 мая 1996 года исполнилось 100 лет со дня рождения Павла Сергеевича Александрова, замечательного ученого и очень интересного и разностороннего человека. Его выдающиеся научные заслуги были отмечены как в нашей стране, так и во всем мире — одно перечисление наград, полученных им (среди которых Международная премия им. Н.И.Лобачевского, Государственная премия СССР и — ни много ни мало — семь орденов Ленина), и академий, членом которых он был, займет много места. Но — может быть, это даже важнее — он был и выдающимся педагогом. Более 60 лет он преподавал в МГУ, причем видел свою задачу как профессора не только в том, чтобы научить студентов математике, но и привить им интерес и вкус к хорошей музыке, живописи, литературе. Еженедельно, начиная с 1953 года, в одной из гостиных университетского общежития проходили знаменитые александровские музыкальные вторники. Павел Сергеевич читал и публичные лекции в актовом зале МГУ, темы которых говорят сами за себя: «О призвании ученого», «О творчестве Ф.М.Достоевского», «О творчестве И.С.Тургенева», «О поэзии Ф.И.Тютчева»...

Сегодня мы предлагаем вашему вниманию одну из нематематических статей П.С.Александрова, посвященную вопросам воспитания разносторонних, думающих людей.

Несколько слов по поводу речи Лобачевского «О важнейших предметах воспитания»

П.АЛЕКСАНДРОВ

Иллюстрация В.Власова

НЕСОМНЕННО, речь Лобачевского является одним из выдающихся памятников русской педагогической мысли. В то же время ее литературные достоинства, волнующая эмоциональность и совершенство всей ее композиции делают эту речь подлинным художественным произведением, своеобразной «педагогической поэмой» и вместе с тем жемчужиной ораторского искусства.

Лобачевский мало касается конкретных вопросов воспитания — в часовой речи трудно дать решение конкретных задач, возникающих в такой огромной области, как воспитание человека. Но он дал как бы общую канву, общую схему для рассуждений, касающихся воспитания в целом. Эта схема содержит много элементов, не устаревших и сейчас, хотя в наше время содержание понятия воспитания, конечно, бесконечно богаче, чем во времена Лобачевского.

Перед нами две неразрывно связанные между собой стороны одного целого — личность как член общества и личность как микрокосм, как мир индивидуальных мыслей, чувств, стремлений.

«Были люди, — говорит Лобачевский, — каковы Гоббс и Гельвецій, которые не хотели верить, чтобы человек рожден был для общества. По счастию, заблуждение их не опасно: подобные будут являться, может быть, по временам, но последователей себе не найдут».

Красной нитью всей речи Лобачевского — его слова:

«Жить — значит чувствовать, наслаждаться жизнию, чувствовать непрестанно новое, которое бы напоминало, что мы живем».

«Всего обыкновеннее слышать жалобы на страсти, но, как справедливо сказал Мабли: чем страсти сильнее, тем они полезнее в обществе; лишь направление их может быть вредно».

Вот это, по-моему, и есть основная идея речи Лобачевского, и обращена она к молодежи:

Не проходите мимо всего того богатства, которое вас окружает, богатства всех возможностей, представляемых вам жизнью в обществе и среди людей, богатства, созданного человеком, богатства, которое дает вам наука, искусство, природа; вбирайте все это богатство в себя. Это и значит — так я понимаю Лобачевского — наслаждаться жизнью. Относитесь к этому богатству не безразлично, а страстно и давайте страстям вашим именно то направление, которое ведет в человеческое общество, а не от него, в закоулки замкнутого индивидуального существования.

И наука, и искусство — всякое человеческое творчество — есть прежде всего явление социальное. Человек, помещенный в одиночестве на какую-нибудь другую планету, не мог бы быть творческой личностью, он был бы лишен основного стимула творчества — чувства общения с другими людьми.

Извечной потребностью думающего человека является потребность поделиться, рассказать другому то, о чем ты думал и что так дорого тебе; потребность нести свое творчество — велико ли оно, или мало — к людям, в какой-то коллектив.

Но что такое коллектив и какие бывают коллективы?

Я начну с малого. Коллектив, например, — это студенческая группа, в которую студент попадает уже на первом курсе, или студенческие семинары на старших курсах. Есть общее и есть разница между этими двумя примерами малых коллективов. Во все времена звание студента внушало в России уважение у передовой части общества. С этим званием всегда было связано представление о всем передовом в лучшем смысле этого слова, об искреннем, горячем и увлеченном. На младших курсах это еще, так сказать, недифференцированная увлеченность: вдруг раскрылись новые возможности: человек впервые почувствовал себя взрослым, попал в новую среду, с новым чувством ответственности (о котором я еще много буду говорить) завязал новые дружеские связи — много чего возникло у молодого человека в момент перехода из средней школы в высшую. Наконец, просто непосредственная юношеская веселость, радостность стала больше, чем в школьные годы, потому что она отражает уже развившиеся и окрепшие большие возможности выросшего молодого человека.

Кстати, по поводу студенческой веселости в отношения к ней Лобачевского. В Казани существовала студенческая песня, в которой были такие слова:

«А наш ректор Лобачевский
Средь компании студентской
Громко хохотал.»

Вторая идея, содержащаяся в речи Лобачевского, обращена, если так можно выразиться, к учителям, к «наставникам» молодежи; она возлагает на них тоже большую ответственность. Эта идея состоит в том, что «одно образование умственное не довершает еще воспитание». Эта мысль для конкретной педагогической работы — как в высшей, так и в средней школе — прежде всего означает неотделимость процесса обучения от всего процесса воспитания (морального, социально-политического, эстетического).

Воспитание человека должно начинаться с уважения к нему. Если он этого уважения не чувствует, то может произойти самое страшное, что вообще может произойти с молодым человеком, — может начать пропадать его собственное уважение к самому себе, то «чувство чести и внутреннего достоинства», которое постоянно упоминается в речи Лобачевского и которое является основным ее стержнем. Когда человек теряет уважение к себе, тогда начинается психология «пропадай моя телега, все четыре колеса». Наоборот, чувство чести, чувство уважения к себе обязывает, и из него-то и рождается, в частности, настоящая, подлинная дисциплина. Она вытекает из серьезного отношения и к своим обязанностям, и к жизни вообще.

Я говорил о студенческой группе как о «малом» коллективе, в который попадает студент, начиная с первого курса. На старших курсах группа в основном заменяется научным семинаром, в котором студент работает: к «общестуденческим» интересам присоединяются научные интересы; у хороших студентов они скоро выходят на первый план. Возникают впервые новые переживания, принадлежащие к самым сильным, какие только доступны человеку, — творческие переживания. И возникает новый коллектив с новыми формами ответственности.

Мне до сих пор дорог один такой коллектив — коллектив молодых математиков Московского университета в те времена, когда я учился в нем. Это — знаменитая «Лузитания» — сообщество учеников Николая Николаевича Лузина, создателя московской математической школы.

Пожалуй, я не видел с тех пор коллектива молодых людей, более увлеченных наукой, чем мы в те времена. Действительно, мы все, а нас было много, находились в этом состоянии увлеченности. При самых различных обстоятельствах, порою, казалось бы, и вовсе для этого не подходящих, мы говорили о математике, каждый знал, что делает другой, не было никакого стремления отгородиться друг от друга, каждый радовался результатам, полученным его товарищем.

Мы все — члены «Лузитании» — жили в довольно трудных условиях. Это были первые годы революции, когда питались не слишком обильными пайками и одевались во что кто мог. Никому и в голову не приходило интересоваться тем, кто как одет. Признаюсь, меня часто зло берет, когда я слышу рассуждения воспитателей и воспитательниц некоторых наших даже очень хороших школ о необходимости ученикам быть при таких-то и таких-то обстоятельствах чуть ли не в черном костюме и во всяком случае «при галстуке». А я помню, как однажды в Берлине на квартетном бетховенском концерте непосредственно передо мною сидел уже не молодой человек, и серый пиджак его показался мне несколько мятым. Когда он повернулся ко мне лицом, оказалось, что это — Альберт Эйнштейн. Так вот я думаю, что не нужно воспитателям и воспитательницам слишком культивировать вопросы одежды и всего вообще внешнего. Вспомните, что Маяковский писал об одежде:

«И кроме свежевымытой сорочки,
Скажу по совести, мне ничего
не надо».

Но вернусь к временам «Лузитании». Мы были увлечены тогда наукой; но не только ею: мы вообще жили в атмосфере подъема и волнения.

Почему это было так?

Потому, что все мы чувствовали себя на гребне великой волны, охватившей тогда всю нашу страну, на гребне волны революционного подъема. Это были первые годы революции. Сознание, что строится действительно новый мир, было той внутренней основой подлинного энтузиазма, наполнявшего тогда каждого из нас.

Позвольте мне несколько продолжить мои воспоминания. В 1923 г. П.С.Урысон и я были в числе первых советских молодых ученых, попавших за границу. Мы попали в Гёттинген. Это был тогда (как, впрочем, и во времена Лобачевского и как в наши времена) один из больших мировых научных математических центров, а в 1920-х годах Гёттинген был, возможно, первым математическим центром в мире. Мы, молодые советские математики, были хорошо там приняты, и мы почувствовали себя сразу в совсем новой среде, в новой для нас международной семье ученых. Эта международная семья ведет свое начало, вероятно, со времен примерно Декарта и Спинозы, когда все крупные ученые были в переписке между собой, где бы они ни жили, и письма, пересылавшиеся на лошадях в почтовых дилижансах, шли долго, дольше, чем сейчас. Несмотря на трудности общения, уже в те времена ученые чувствовали свое единство и силу, которую дает им наука. За немногими исключениями, действительно крупные ученые во всем мире и во все времена были и наиболее прогрессивными членами общества; был им в высшей степени и Лобачевский. С какою гордостью он говорит:

«Мы живем уже в такие времена, когда едва тень древней схоластики бродит по университетам. Здесь, в это заведение вступивши, юношество не услышит пустых слов без всякой мысли, одних звуков без всякого значения. Здесь учат тому, что на самом деле существует, а не тому, что изобретено одним праздным умом».

И мне кажется, что чувство принадлежности к сообществу действительно передовых, прогрессивных ученых всего мира тоже является одним из важнейших предметов воспитания. Чем раньше возникает это чувство, тем лучше.

Наука сейчас достигла такого положения, когда, собственно, можно было бы уже устроить рай земной, когда материальных средств, производимых во всем мире на основе современной науки, было бы достаточно, чтобы прокормить все человечество, если бы большая часть этих средств не шла на цели совершенно противоположные, на цели создания не земного рая, а земного ада, ада, превосходящего всякую фантазию, если себе только представить, во что бы превратилась наша планета, наша Земля в случае, если бы разыгралась термоядерная война.

Всякий ученый и всякий молодой человек, который считает науку своим основным делом, должен задуматься над этими вещами.

Но опустимся от этих космических проблем к повседневной студенческой жизни. Я говорил о коллективе как об ее основе. Но диалектика бытия такова, что чувство коллектива имеет и свою антитезу, которой оно подменяется и фальсифицируется. Это — чувство стадности, выражающееся, в частности и в особенности, в погоне за модой (если понимать это слово в широком смысле).

Подлинный коллектив есть объединение свободных, самостоятельно мыслящих и чувствующих личностей, взаимно обогащающих друг друга именно в силу присущей каждой из них самобытности. Именно таким коллективом мы мыслим себе будущее коммунистическое общество. Слепое следование моде есть отказ от индивидуального вкуса, унизительный для мыслящего человека. Это — нивелировка всех под одну гребенку, т.е. нечто прямо противоположное чувству духа свободного и творческого коллектива.

Было бы полбеды, если бы мода распространялась лишь на одежду и прическу. Но, к сожалению, мода распространяется и на мнения, на художественные и литературные вкусы, на самый образ жизни (возьмите, например, такие привычки, как курение, употребление спиртных напитков и т.д.).

Я уже говорил о первых годах революции. Разве можно было себе представить тогда молодого человека, в частности нашего советского студента, который бы что-нибудь делал потому, что «так делают все». Да это казалось бы для всех нас невыносимым унижением, на которое никто бы из нас не пошел. Существенным элементом в психологии молодого человека, вышедшего из школьного возраста, является «чувство взрослости». Оно слагается, по-моему, из двух элементов: из ответственности перед обществом и перед собой и из уменья располагать в определенном порядке различные ценности повседневной жизни и знать, что важнее и что менее важно, чем и ради чего можно пожертвовать.

Чувство взрослости является, мне кажется, одной из основ, формирующих характер. Его отсутствие называют часто «инфантильностью». Но чувство взрослости вовсе не означает, что молодой человек не может себе позволить никакой шалости, никакого ребячества, ничего того, чем отличаются восемнадцать лет от пятидесяти, что в юношеском возрасте свойственно всякому нормальному человеку, не означая вовсе его общей «инфантильности». Было это юношеское озорство, но отнюдь не инфантильность, свойственно и Лобачевскому.

Из его биографии известен, например, правда не вполне достоверный, эпизод, когда Лобачевский-студент оседлал корову и, держась за рога, управляя ею, сделал несколько туров в центре Казани по городскому парку (парк этот называется «Черным озером» и существует до их пор).

Я не собираюсь призывать наших студентов к такого рода выходкам,

kvant.mccme.ru

но и не боюсь их; не страшны они там, где есть подлинная увлеченность своим делом, подлинное чувство ответственности, широта и богатство внутренних интересов. Вот бедности интересов, убожества внутренней жизни — этого я действительно боюсь, и здесь я снова следую Лобачевскому.

Вот что он говорит:

«Но вы, которых существование несправедливый случай обратил в тяжелый налог другим; вы, которых ум отупел и чувство заглохло; вы не наслаждаетесь жизнию. Для вас мертва природа, чужды красоты поэзии, лишена прелести и великолепия архитектура, незанимательна история веков. Я утешаюсь мыслию, что из нашего университета не выйдут подобные произведения растительной природы; даже не войдут сюда, если, к несчастию, уже родились с таким назначением. Не выйдут, повторяю, потому, что здесь продолжается любовь славы, чувство чести и внутреннего достоинства».

«Произведения растительной природы» в переводе на современный русский язык означает — дубины. Обращаясь к вам, я не вполне разделяю оптимизм Лобачевского. В некотором числе вы, конечно, имеетесь и в наших советских университетах, и вообще вузах. Это вы пьянствуете, безобразничаете, картежничаете, крадете книги из библиотек, и я не собираюсь вас защищать. Напротив, как сделать, чтобы из нашего советского студенчества вы сгинули окончательно, чтобы вас не было совсем, чтобы мы в самом деле имели возможность повторить за Лобачевским, что ни один из вас не войдет ни в какое советское высшее учебное заведение, где действительно продолжается «любовь славы, чувство чести и внутреннего достоинства».

Чувство внутреннего достоинства! Как это замечательно сказано, и как это чувство связано с увлеченностью, которую я считаю основной пружиной воспитания и основной пружиной творчества. Увлеченность своей наукой! И не только ею — увлеченность всеми возможными своими занятиями, как ответственного члена студенческого коллектива. Увлеченность искусством, природой, спортом.

Природа и искусство несомненно принадлежат к важнейшим факторам воспитания, в частности эстетического. Но тут есть одно существенное различие.

Никто не спрашивает, что значит понимать природу, человек просто ее любит. Но часто спрашивают, что значит понимать искусство. По-моему, понимать искусство — тоже значит только одно — любить его.

Я постараюсь пояснить это на примере того искусства, которое люблю, пожалуй больше всех других, — музыки.

Многие говорят: вот, мне не понятен Бах, или мне скучны сонаты Бетховена, или я не понимаю современной музыки. Значит ли это, что я вообще не понимаю музыки?

Толстой, действительно понимавший и любивший музыку, считал, что всякому человеку доступна и понятна знаменитая ария Баха из его оркестровой сюиты. Такое утверждение, может быть, слишком категорично. Может быть, кому-нибудь при первой встрече с серьезной музыкой понравится даже не ария Баха, а, скажем, колыбельная песня Чайковского, или экспромт Шуберта, или ноктюрн Шопена, или хор из «Хованщины», и с этого начнется его любовь к музыке, потому что любовь к музыке может начинаться с самых разных сторон.

Я думаю, что способностью понимать музыку обладает всякий, который способен с увлечением слушать хотя бы одно музыкальное произведение, которому не скучно и хочется прослушать это произведение несколько раз, еще и еще. Сначала этих произведений может быть немного, потом их станет больше и они станут центрами притяжения, вокруг которых разовьется настоящий широкий интерес к музыке.

Как известно, существует и всегда существовала и чисто развлекательная музыка. Она и будет всегда существовать, так как отвечает естественной потребности людей развлекаться. В наше время ее часто отождествляют с так называемой эстрадной музыкой, которая, впрочем, в обычном ее осуществлении не кажется мне школой особенно хорошего вкуса. Я думаю, не эту музыку имел в виду Бетховен, когда говорил, что назначение музыки — высекать огонь из человеческого сердца. Слова, почти буквально совпадающие с пушкинским

«Глаголом жги сердца людей».

Чайковский и Мусоргский, Бетховен и Шопен считали музыку особым видом общения людей, неповторимым и не заменимым никакими другими средствами общения.

Всякое искусство эмоционально. Существует мажорное и минорное трезвучие, и они эмоционально поразному окрашены; никому не захочется плясать под финал Шестой симфонии Чайковского, и едва ли мы будем плакать под марш из «Трех апельсинов» Прокофьева.

Но значит ли это, что все человеческие эмоции при восприятии музыки и вообще искусства исчерпываются радостью или огорчением?

Я думаю, что среди эмоций человека есть одна совершенно особая эмоция — эмоция эстетическая, эмоция красоты:

«Как мимолетное виденье, как гений чистой красоты», — писал Пушкин (и с какой гениальной адекватностью его слова положены на музыку Глинкой!).

Красота разлита повсюду. Она есть в каждой достаточно правильной геометрической фигуре — взгляните просто, например, на шар, сделанный из полированного гранита, или вспомните поверхность снега, застывшие волны его, когда успокоилась метель и наступил мороз.

Но красота не только разлита в мире, ее способен создавать человек; эта его деятельность и называется искусством.

Как решить, является ли настоящим искусством данное, только что созданное произведение, есть ли в нем эта красота или нет? В каждом случае, в каждый данный момент это — вопрос индивидуального вкуса. Доказать, что что-нибудь прекрасно, — невозможно, для этого нет логических средств. Но индивидуальный вкус подтверждается или опровергается дальнейшим течением истории человечества. Вот греческие статуи сохранили свою эстетическую ценность: видя в них неповторимую красоту, мы и сейчас восхищаемся ими, они выдержали испытание временем, длящимся уже две с половиной тысячи лет. Однако мы знаем другие произведения, на которые была большая мода, но которые не сохранили своей эстетической ценности не только в течение двух с половиной тысячелетий, но даже в течение стольких же десятилетий.

Сторонники «чистого искусства» только эту чистую красоту желают признавать в качестве искусства, объ-

kvant.mccme.ru

являя все остальное сентиментальностью, «литературщиной». Так поступают некоторые бездарные искусствоведы, с высоты своего критического величия объявляющие Шестую симфонию Чайковского «симфонией, наполненной одной сентиментальностью».

Но, с другой стороны, некоторые узкие сторонники вульгарно понимаемой «идейности» в искусстве красоту как таковую вовсе не желают признавать, охотно рассуждая, впрочем, о ней по образцу бессмертного профессора Серебрякова из чеховского «Дяди Вани».

Между тем фактом, по-моему, является, что чувство красоты может быть как самостоятельно существующим (элементарные примеры этого я уже приводил), так и органически связанным и объединенным с другими большими чувствами, всегда вызывавшимися в человеке идеями, волнующими человечество, — эмоциями мужества и героического подвига, а также всем людям присущими чувствами любви, радости и страдания.

Достаточно вспомнить величайшие произведения Баха, например его «Страсти», Девятую симфонию Бетховена (которую Рахманинов считал высшим достижением музыки вообще), бетховенскую же Третью симфонию, симфонии Чайковского, некоторые симфонии Шостаковича и многое другое: все эти вещи связаны с большими человеческими идеями и с большими «страстями» (как бы сказал Лобачевский), не вмещающимися в эмоцию чистой красоты.

Едва ли может быть спор о том, что именно эти произведения наиболее человечны и связывают эстетическое чувство со всей совокупностью наиболее глубоких устремлений и переживаний человека и что они являются наиболее значительными и вечными произведениями искусства.

Я уже несколько раз упоминал, что воспитание вкуса — одна из первейших задач воспитания вообще. Ведь вкус — это критерий того, что мне нравится, а что не нравится, черта, отделяющая это «мне нравится» от того, что «мне скучно», чего «я не хочу». Ясно, что — так или иначе проведенная — эта черта определяет и мои склонности, а следовательно, в значительной степени и мое отношение к жизни и самое мою жизнь, то, что я делаю каждый день, хочу и буду делать.

Первейшая задача воспитания — помочь молодому, еще складывающемуся в личность человеку правильно найти эту черту. Вот что говорил Лобачевский:

«Человек, обогащая свой ум познаниями, еще должен учиться уметь наслаждаться жизнью».

Эта тема — наслаждаться жизнью, чувствовать красоту ее, чувствовать все богатство окружающего нас мира — наполняет всю речь Лобачевского, в которой мы читаем дальше: «Я хочу говорить об образованности вкуса».

И далее Лобачевский приводит эти замечательные слова: «Жить — значит чувствовать, наслаждаться жизнью — чувствовать непрестанно новое, которое бы напоминало, что мы живем».

Воспитание вкуса должно, конечно, начинаться с раннего возраста, с самого начала какого бы то ни было воспитания.

Вся ежедневная жизнь, но также и искусство, и литература, и музыка вырабатывают тот или иной вкус — хороший или плохой. Вот именно, к сожалению, — хороший или плохой.

Николай Николаевич Лузин говорил:

«Всякая плохая прочитанная книга есть выпитый яд».

Важно не только читать хорошие книги, важно, кроме того, не читать плохих. В такой же степени относится это, разумеется, и к плохим фильмам, и к плохой музыке, и ко всему вообще плохому, что желает называть себя искусством, не будучи им в действительности, а просто являясь на самом деле лишь пошлым ремесленничеством. Всякая пошлость страшна. Потоки ее приходят к нам, к сожалению, «в порядке» следования моде. Вот с этим, я считаю, нужно вести самую решительную борьбу.

Если прочитанная плохая книга есть принятый яд, то такие произведения искусства, как «Евгений Онегин» Пушкина или Чайковского, как сонаты Бетховена, как романы Толстого или Достоевского, как многое, многое другое, будучи восприняты нами по-настоящему, делаются нашими «вечными спутниками», без которых мы уже не мыслим своей жизни. Одна из задач воспитания — дать молодому человеку этих «вечных спутников», этих неумирающих и неизменяющих друзей, на которых он мог бы опираться в трудные моменты своей последующей жизни.

«Человек знает наслаждения, — говорит Лобачевский, — ищет их с выбором, утончает их; но [...] он знает [также то], чего бы лучше не знать, знает, что он должен умереть [...]. Смерть как бездна, которая все поглощает, которую ничем наполнить нельзя; как зло, которое ни в какой договор включить не можно, потому что оно ни с чем нейдет в сравнение. Но почему же смерть должна быть злом? Мы живем одно настоящее мгновение; прошедшее все равно как бы не существовало; с будущим — последует то же. Когда смерть придет, тогда все равно сколько мы ни прожили... Будем же дорожить жизнию, покуда она не теряет своего достоинства».

Строки, принадлежащие к самым сильным из написанных Гоголем, посвящены, в конце концов, этой же теме:

«Все может статься с человеком. Нынешний же пламенный юноша отскочил бы с ужасом, если бы показали ему его же портрет в старости. Забирайте же с собою в путь, выходя из мягких юношеских лет в суровое ожесточающее мужество, забирайте с собою все человеческие движения, не оставляйте их на дороге, не подымете потом! Грозна, страшна грядущая впереди старость, и ничего не отдает назад и обратно!»

И великий ученый, и гениальный художник говорят, по существу, об одном: о таком устройстве жизни молодого человека, которое помогло бы в свое время преодолеть страх смерти, страх старости. Это устройство жизни есть творческое устройство ее.

Вероятно, всякое человеческое творчество несет в себе и какое-то познание, и какую-то красоту. В самой неповторимости эмоционального содержания каждого художественного произведения есть элемент познания. Мы узнаем что-то новое и о человеке, и о мире, что-то такое, что никакими другими средствами, кроме как именно данным художественным произведением, не может быть рассказано и познано. Поэтому-то, как говорил Пушкин, и невозможно «рассказать» Мадонну Рафаэля так же, как и невозможно рассказать словами никакое значительное музыкальное произведение.

С другой стороны, всякое научное творчество неотделимо от эстетической эмоции. Естественно, я говорю об этом как математик, но, думаю, это касается и любой другой науки.

Всякое серьезное творчество требует в какой-то момент того полного напряжения всех интеллектуальных, волевых и эмоциональных сил человека, которое поэты называют вдохновением и которое, по словам Пушкина, в геометрии так же нужно, как и в поэзии.

Так понимаемое вдохновение неотделимо от самого акта познания научной истины, когда вдруг после долгих и часто бесплодных усилий спадает какая-то завеса и горизонт внезапно расширяется. Это переживание, самое сильное переживание ученого, всегда является субъективным отражением объективно ценного результата.

Познавательный критерий, вероятно, во всякой науке неотделим от эстетического, от восторга перед вдруг открывшейся красотой познанных наконец закономерностей.

Но вернемся к словам Гоголя из «Мертвых душ» о юности и старости. Существенно подчеркнуть, по-моему, что творческое восприятие мира и собственной жизни не только доступно, оно в юношеском возрасте свойственно каждому человеку. Все человеческие движения у вас есть, как бы говорит Гоголь, не теряйте их только, «не оставляйте их на дороге».

По существу, эту же идею высказывал недавно умерший выдающийся представитель медицинской психологии Эрнст Кречмер: всякий человек в юношеском возрасте имеет психологию потенциально одаренного человека. Из этой потенциальной одаренности, если она по своей природе имеет длительный характер, может развиться настоящий талант, проявляющийся в объективном творчестве. Тогда дело воспитания — помочь развитию этих творческих элементов. Если же их нет, если одаренность именно только возрастная (а такая, по мнению Кречмера, присуща всем), тогда задача воспитания заключается в том, чтобы переключить ее в культуру, следовательно, снова придать ей объективную ценность для человеческого общества.

Культура есть то, чему можно научиться и чему можно учить, но что невозможно выучить. Ее так же невозможно выучить, как невозможно выучить очарование «Евгения Онегина». Но переключить в высокую культуру юношескую яркость и свежесть восприятия, вдохновенность, присущую юношеской психологии, можно и должно.

Лобачевский говорит: «Гением быть нельзя, кто [им] не родился. В этом-то искусство воспитателей — открыть гений, обогатить его познаниями и дать свободу следовать его внушениям».

Надо иметь, конечно, в виду, что то, что во времена Лобачевского называлось гением, мы сейчас называем просто одаренностью.

Приближаясь к концу, я не могу не привести одной — и, быть может, самой патетической — цитаты из речи Лобачевского, обращенной к студентам и, по существу, завершающей его речь:

«Теперь вступаете вы в свет; новизна и многоразличность впечатлений не даст места размышлениям. Но придет время, когда на блеске настоящего вдруг явится прошедшее с обворожительною прелестию своего туска, подобно нежной затуманенной резьбе на ярком золоте, подобно отраженным предметам в слабом зеркале вод, тогда лета беззаботной юности со всеми невинными удовольствиями предстанут в вашем воспоминании как образ совершенного счастия, невозвратимо потерянного. Тогда вашего товарища учения встретите вы как родного; тогда в разговоре о вашей юности с благодарностью будете произносить имена ваших наставников, признаетесь, сколь много они желали вам добра; и с торжеством друг другу дадите обещание следовать примерам...»

Однако для того, чтобы обращаться с такими словами к студентам, надо иметь на это право, которое Лобачевский воистину имел, право и уверенность в том, что наши теперешние студенты действительно будут вспоминать нас, «своих наставников», так, как об этом говорит Лобачевский.

Для этого нам, этим «наставникам», надо выполнить свою обязанность перед нашими учениками, а эта обязанность заключается не только в том, чтобы учить их, но и в том, чтобы воспитать в них все то, о чем говорил Лобачевский, а также, чтобы внести и какую-то свою долю в радостный период цветения всех этих молодых людей, в тот период их жизни, в котором мы с ними общаемся.

Наша педагогическая профессия — счастливая профессия. В общении с молодежью заключен секрет вечной молодости.

Одни поколения сменяются другими, но вокруг нас — все те же молодые и радостные лица, нужды нет, что они сменяются! И так же они увлекаются своей наукой, и так же радуют своей юностью, и так же они играют в футбол перед всеми входами в университет независимо от того, позволяют ли им это или нет университетские власти, силы и начальства. И все так же цветет и так же плывет над миром эта вечная весна.

Но раз нам, представителям педагогической профессии, дано такое счастье, то наша обязанность не только в том, чтобы готовить специалистов «подкованных», из которых потом получаются — как это у нас говорят — «кадры». Но это не только кадры, а живые молодые люди с человеческой душой, и мы их здесь куем (чтобы продолжить взятую из кузнечной профессии аналогию), выковываем, а не только подковываем — вот о них мы, их руководители, должны заботиться всем разумением, а также и всем сердцем нашим, воспитывать их так, чтобы человеческих движений, о которых говорил Гоголь, было как можно больше у них и чтобы эти движения возможно глубже проникали во все их существо, так глубоко, чтобы по возможности ни одно из них не было небрежно обронено на жизненной дороге.

Если мы эту обязанность свою будем выполнять так же честно и увлеченно, как выполнял ее Лобачевский все десятилетия своего преподавания в Казанском университете, тогда мы сможем обратиться к нашим студентам приведенными выше словами Лобачевского, а также и словами Тютчева:

«Когда осьмнадцать лет твои
И для тебя уж будут сновиденьем,
С любовью, с тихим умиленьем
И их, и нас ты помяни».

Публикацию подготовили
Е.Морозова, Н.Розов

kvant.mccme.ru

113 лет ошибке Эдисона

Л. АШКИНАЗИ

Как от лампы электрической произошла лампа электронная

Электронная лампа возникла из электрической. Создал первую электронную лампу Т. Эдисон, причем по ошибке. Произошло это так.

Свет в электрических лампах излучался в те времена накаленной угольной нитью. Однако от нити летели во все стороны не только фотоны, но и нечто, оседавшее на баллоне и вызывавшее его потемнение. Эдисон предположил, что летят отрицательно заряженные угольные пылинки, и если ввести в лампу дополнительный электрод и подать на него положительный относительно нити потенциал, то пылинки будут притягиваться к этому электроду и не будут попадать на баллон. Сказано — сделано (рис. 1).

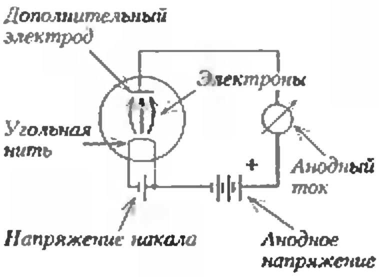


Рис. 1. Эффект Эдисона

Но баллоны все равно темнели. Жалко, конечно, зато Эдисон обнаружил, что в цепи дополнительного электрода протекает ток. Так в 1883 году он открыл два новых явления — протекание тока через вакуум и термоэлектронную эмиссию — испускание электронов нагретыми веществами. Позже эти два явления вместе были названы «эффектом Эдисона».

Как человек, мыслящий практически (автор более 1000 патентов), он тут же и придумал прибор на основе этих эффектов. Поскольку ток, текущий в цепи дополнительного электрода, сильно зависел от напряжения, приложенного к нити (называемого напряжением накала), Эдисон предложил использовать этот эффект для обнаружения малых изменений напряжения.

Через четыре года Дж. Дж. Томсон установил, что ток в лампе Эдисона переносят электроны. Но, быть может, это свойство именно угля? Нет, если нить была металлической, тоже возникал электронный ток в вакууме. Он становился особенно велик, если нить покрывали порошком окиси кальция. Так в 1904 году А. Венельт открыл оксидный катод, которому предстояло через полвека завоевать мир электронных ламп.

В 1908 году Ф. Содди обнаружил, что при улучшении вакуума ток уменьшается. Возникло естественное — хотя и к счастью неверное — предположение, что в абсолютном вакууме тока не будет совсем. Вакуумная электроника была готова умереть, не родившись. Однако эффект был объяснен: уменьшение тока при улучшении вакуума вызвано образованием в лампе отрицательного заряда. Действительно, уже летящие через зазор катод-анод электроны имеют отрицательный заряд, отталкивают электроны, только вылетевшие из катода, и уменьшают этим ток, текущий через зазор. А при наличии газа электроны ионизуют его, новые электроны начинают двигаться вместе со старыми к аноду, а положительные ионы, имеющие в среднем в 60 000 раз большую массу, уходят из зазора медленно и поэтому создают в нем большой положительный заряд, компенсирующий заряд электронов. Но и без ионов движение электронов в вакууме вполне возможно.

Первый настоящий вакуумный диод был создан в 1913 году. Для получения в вакуумных лампах того же тока, что и в лампах с частичной компенсацией пространственного заряда, требовались несколько большие напряжения катод-анод, но зато эти лампы работали стабильнее. Ибо хотя хороший вакуум и труднее получить, чем плохой, но для работы лампы с компенсацией нужен не просто плохой вакуум, а стабильно плохой. А его обеспечить сложнее, чем хороший вакуум.

«Закон 3/2» и характеристики лампы

Основная формула, описывающая работу электронных ламп, была получена И. Ленгмюром в 1915 году. Называют ее почему-то не формулой Ленгмюра, а «законом 3/2». Впрочем, человек, сделавший для физики и химии столько, сколько сделал

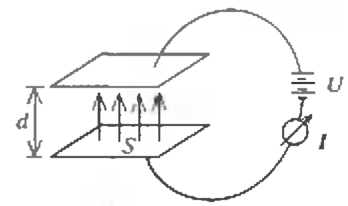


Рис. 2. Ток в вакуумном зазоре

Ленгмюр, не стал бы тратить время на приоритетные споры. Итак,

$$I \sim U^{3/2} S d^{-2}$$

— ток, который может протекать через вакуумный зазор, пропорционален площади электродов S, напряжению на зазоре U в степени $3/2$ и обратно пропорционален квадрату ширины зазора d (рис. 2).

«Черный ящик», его параметры и начинка

Вернемся к диоду Эдисона и посмотрим на него снаружи. Вот «черный ящик» с клеммами для подключения внешних цепей (рис. 3). «Черный

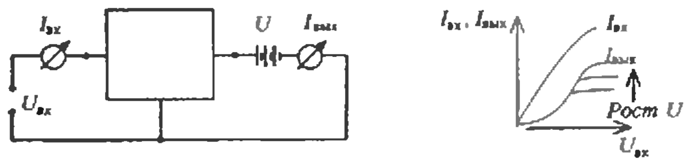


Рис. 3. «Черный ящик» (слева) и его характеристики (справа)

kvant.mccme.ru

ящик» характеризуется входной характеристикой $I_{вх}(U_{вх})$ и передаточной характеристикой $I_{вых}(U_{вх})$. Качество «ящика» тем выше, чем меньше $I_{вх}$ и больше $I_{вых}$ при некотором значении $U_{вх}$. Малое значение $I_{вх}$, или, как говорят, высокое входное сопротивление $R_{вх}=U_{вх}/I_{вх}$, означает, что «ящик» потребляет мало энергии из цепи управления, большое $I_{вых}$ означает, что «ящик» имеет большое усиление по току $I_{вых}/I_{вх}$ или крутизну $s=I_{вых}/U_{вх}$, т.е. хорошо усиливает сигнал. Переходя на радиотехнический язык, можно сказать, что низкое входное сопротивление не дает возможности подключать ко входу высокоомный источник сигнала, например пьезоэлектрический микрофон, а малое усиление требует наличия большого количества таких элементов, чтобы слабенький сигнал от микрофона прозвучал на всю площадь.

Заглянем внутрь «черного ящика» (рис.4). Входное напряжение и ток

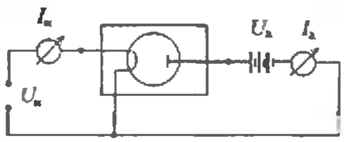


Рис.4. Содержимое «черного ящика» — диод Эдисона

теперь будут называться напряжением и током накала, выходной ток станет анодным током, напряжение, включенное в выходной цепи, — анодным напряжением. Крутизна характеристики зависит от соотношения тока, определяемого «законом 3/2», и тока эмиссии — тока электронов, покидающих катод. Если ток эмиссии меньше, то весь он и приходит на анод, если ток эмиссии больше, то часть электронов возвращается на катод, а доля, определяемая «законом 3/2», приходит на анод. Ток эмиссии очень сильно зависит от температуры катода, а температура катода определяется напряжением накала. Так и получаются зависимости, показанные на рисунке 5 слева. Крутизна накальной характеристики диода весьма велика, а вот по части входного сопротивления в схеме рисунка 4 диод подкачал. Сопротивление нити накала даже для очень тонких нитей не более десятков Ом.

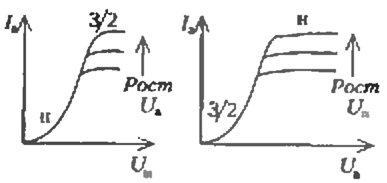


Рис.5. Накальная (слева) и вольт-амперная (справа) характеристики диода («н» — область насыщения, когда ток анода равен току эмиссии, «3/2» — закон изменения анодного тока, когда он меньше тока эмиссии)

Заметим, что если на анод подать отрицательное напряжение, то, как вы уже знаете, ток через лампу течь не будет. Поэтому диод можно применять как выпрямитель для преобразования переменного (например, синусоидального) напряжения в пульсирующее (нижние половинки синусоиды «срезаются»). Но как «усилитель» применить диод при подаче напряжения на анод нельзя — ведь зависящий от напряжения ток будет протекать в той же входной цепи.

Существуют ли иные, кроме изменения температуры катода и напряжения на аноде, способы управления движением электронов? Конечно. Совсем не обязательно изменять напряжение на аноде — ведь движение электронов зависит от электрических полей, созданных наличием зарядов и потенциалов на *любых* электродах, стоящих на пути электронного потока или рядом с ним.

Авоська для электронов

Ли де Форест поставил на пути электронов сетку. Теперь управляющий сигнал надо было подавать на нее (рис.6), а выходным сигналом по-прежнему был анодный ток $I_а$.

Посмотрим, что произошло с недостатком диода — низким входным сопротивлением. Недостаток устранен, причем радикально. Входное сопротивление увеличено на много поряд-

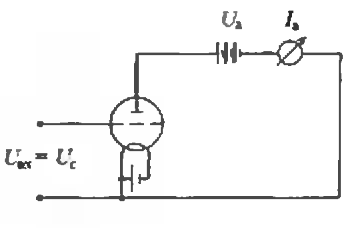


Рис.6. Триод: входной сигнал подается на сетку

ков. При отрицательном потенциале сетки относительно катода электроны, эмитированные катодом, вообще не попадают на сетку (она их отталкивает) и входной ток может протекать только по стеклу, а оно — очень хороший изолятор. Но будет ли работать лампа при отрицательном напряжении $U_с$ на сетке? Может быть, отрицательное напряжение на сетке вообще прекратит движение электронов к аноду? Зависимость тока анода от напряжений на сетке и аноде ($U_а$) триода показана на рисунке 7.

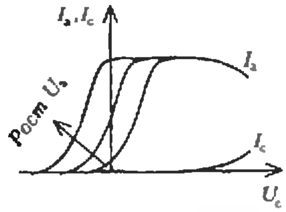


Рис.7. Анодно-сеточные характеристики триода

Влияние сеточного и анодного напряжений на анодный ток аддитивно, причем анодное напряжение влияет слабее, ибо поле, созданное им в районе катода, ослабляется сеткой.

Итак,

$$I_а \sim \left(U_с + \left(U_а/k\right)\right)^{3/2}.$$

Величину k называют усилением (смысл такого странного названия станет ясен из дальнейшего) и говорит она о том, во сколько раз изменение напряжения на сетке влияет на ток сильнее, чем изменение напряжения на аноде:

$$k=\frac{\Delta I_а/\Delta U_с}{\Delta I_а/\Delta U_а}.$$

Крутизна зависимости $I_а$ от $U_с$ равна $\Delta I_а/\Delta U_с$, где $\Delta I_а$ — изменение анодного тока, вызванное изменением сеточного напряжения $\Delta U_с$, так, естественно, и называется — крутизной. При положительных напряжениях на сетке появляется сеточный ток $I_с$, а при его росте начинает уменьшаться анодный ток (см. рис. 7). Но этот режим для работы триодов нехарактерен.

Работа триода характеризуется двумя основными независимыми параметрами — крутизной и усилением. Иногда вводят еще и третий — отношение усиления к крутизне. Оно равно $\Delta U_а/\Delta I_а$ и называется, естественно, внутренним сопротивлением. Крутизна определяет способность лампы усиливать радиосигналы, а коэффициент усиления — способность лампы усиливать низкочастотное (звуковое) напряжение. Поэтому в зависимости от предназначения лампы надо бороться (как и следовало ожидать) за разные параметры.

Вторая сетка помогает первой

Для работы первых триодов нужно было анодное напряжение около 100 В. Питались тогда радиосхемы от батарей, а соединять последовательно многие десятки элементов не хотелось. Позже, когда радиоаппаратура стала питаться в основном от сетей переменного напряжения, допускающих легкое его повышение путем трансформации, острота проблемы уменьшилась. Но проблема, во-первых, не исчезла совсем, а, во-вторых, на путях уменьшения анодного напряжения было найдено и решение проблемы большого усиления.

Итак, почему триоду нужно иметь большое анодное напряжение? Потому, что при этом получается большой анодный ток. Если анодное напряжение уменьшить, то уменьшится ток и, следовательно, крутизна. Как разорвать эту цепочку? Как получить большой анодный ток при малом напряжении? Казалось бы, ответ прямо следует из формулы Ленгмюра — приблизив анод к катоду. Да, но при этом анодное напряжение начинает сильнее действовать на ток и, следовательно (действие-то сетки остается таким же!), уменьшается усиление. А это тоже не здорово. Таким образом, надо и приблизить анод к катоду и не приблизить его... Наверное, примерно так рассуждал и Ленгмюр, предложивший в 1913 году ввести в триод дополнительную сетку, находящуюся ближе всего к катоду, и подать на нее положительное напряжение. Эти лампы были названы «двухсетками», и они действительно работали при меньших анодных напряжениях — порядка 10 – 20 В против 100 В. Но с годами получать высокие напряжения становилось все легче и легче, и, казалось, век двухсеток кончился, не начавшись.

Второе рождение второй сетки произошло в 1926 году. В.Шоттки и А.Холл предложили расположить вторую сетку не ближе к катоду, а наоборот — ближе к аноду. Прианодная сетка экранировала катод от анода и, следовательно, увеличивала усиление. Эта лампа была названа тетродом. Так была решена проблема малого усиления триода.

Впрочем, и крутизну хочется увеличить. Из формулы Ленгмюра видно, как ее увеличить — приблизить сетку к катоду. На этом пути за двадцать лет (с начала сороковых до конца пятидесятых годов) зазор сетка-катод был уменьшен в 10 раз: с 200 до 20 мкм. Но это потребовало создания технологии изготовления проволоки диаметром 7 мкм (в 7 раз тоньше волоса) и радикального изменения технологии и конструкции ламп. Ведь мало изготовить эту проволоку, надо еще сделать из нее сетку, на что-то намотать, как-то закрепить. Все это было сделано, и крутизна была увеличена, но все же лампы с такими сетками были сложными в производстве и дорогими. Другой путь — это был опять путь двух сеток. Положительная прикатодная сетка увеличивала ток и увеличивала крутизну.

Что позволено триоду, то не позволено тетроду

При больших напряжениях на сетке в триоде начинал уменьшаться анодный ток (см. рис.7). Ну что ж, ничего странного — электроны перехватывались сеткой и не доходили до анода. Стало быть, этот эффект должен быть у любого триода. Однако нет! В некоторых случаях при увеличении сеточного напряжения ток сетки начинал уменьшаться, а ток анода, соответственно, расти. Заметим, что сумма токов анода, сетки и катода должна быть равна нулю, ибо в лампе электроны не возникают и не пропадают. Впечатление такое, что либо с сетки начинают уходить какие-то дополнительные электроны и приходить на анод, либо с анода уходят положительные ионы и приходят на сетку. Ионам в лампе взяться неоткуда — вакуум хороший, электроды не разрушаются. Но почему из сетки вылетают электроны? По очень простой причине — потому, что на нее попадают электроны. Входя в материал, они передают свою энергию и электронам материала, и атомам. Передача энергии атомам — это нагрев материала, а получившие энергию электроны либо опять же отдают ее атомам, либо за счет этой энергии вылетают из материала сетки и летят к аноду. Явление это называется вторичной электронной эмиссией, а то, что изображено на рисунке 8, называется динатронным эффектом сетки.

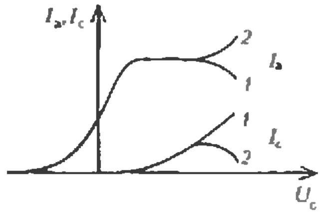


Рис.8. Динатронный эффект в триоде (1 — нормальный токоперехват, 2 — динатронный эффект сетки)

Разумеется, вторичная эмиссия имеет место и на аноде. Но покуда анодное напряжение больше сеточного, вторичные электроны с анода не попадают на сетку (энергия основной массы вторичных электронов мала), а возвращаются на анод и на ток в цепи не влияют. Если же сеточное напряжение становится больше анодного, то вторичные электроны с анода достигают сетки и ток анода все-таки начинает уменьшаться, а ток сетки опять растет.

Впрочем, для триода все это не столь важно, так как обычно триоды работают при малых сеточных напряжениях, а чаще всего — при отрицательных. Иная ситуация в тетроде. На вторую сетку (сетки принято нумеровать от катода) при работе лампы подается обычно довольно большое напряжение — сто и более вольт. В этом случае на зависимости анодного тока от анодного напряжения возникает падающий участок. При напряжении на аноде, меньшем напряжения на второй сетке, с увеличением напряжения на аноде вторичные электроны, вылетевшие с него, начинают на него возвращаться.

Вторичную эмиссию можно уменьшить выбором материала электродов. Можно бороться со вторичной эмиссией конструктивными мерами, например сделав «камерный анод» в виде полости, в которой вторичные электроны будут «запутываться», попадать со стенки на стенку, и не будут вылетать в объем лампы. Если сделать электрод шероховатым, то он будет вести себя как «камерный анод» — электроны будут запутываться во впадинах. Так смыкаются конструирование и технология.

Но есть и третий путь борьбы с динатронным эффектом. В 1926 году фирмой «Филипс» был выпущен пентод — лампа с пятью электродами или тремя сетками. Третья сетка находилась между второй и анодом. На нее подавалось напряжение, более низкое и чем на второй сетке и чем на аноде, чаще всего ее просто соединяли с катодом. В этом случае все вторичные электроны возвращались на тот электрод, с которого вылетели. Проблема была решена.

Аппетит (на сетки) приходит во время еды

Вторая сетка была введена для получения большего усиления, третья — для избавления от динатронного эффекта. Но ниоткуда не следует, что их нельзя применять и для чего-нибудь другого. Например, если на одну сетку подать переменное напряжение с частотой f_1, а на другую — с частотой f_2, то в цепи анода лампы будут протекать токи с частотами $f = nf_1 \pm mf_2$, где $n = 0, 1, 2, \ldots, m = 0, 1, 2\ldots$ (конечно, n и m могут быть только такие, чтобы f было больше нуля). Частоты $nf_1 + mf_2$ называются суммарными, частоты $nf_1 - mf_2$ — разностными. Фильтрами, настроенными на соответствующие частоты, эти токи можно выделить. На «смешивании» частот f_1 и f_2 и выделении разностной частоты $f_1 - f_2$, где f_1 — частота принимаемого сигнала, а f_2 — частота сигнала, генерируемого в приемнике специальным генератором (гетеродином), основана вся современная радиотехника. Лампа, в которой смешиваются сигналы, называется «смесителем».

Существуют лампы с четырьмя сетками (гексод), пятью (гептод) и шестью (октод). В некоторых случаях часть лампы выполняет роль «лампы гетеродина», а часть — «лампы смесителя». В этом случае передача сигнала из гетеродина в смеситель происходит не по проводам, а путем попадания электронов из одной части лампы в другую.

Как работает обычный триод при подаче на него высокочастотного переменного напряжения? Пока напряжение на сетке больше среднего, на электроны, летящие от катода, действует большое ускоряющее поле. Если напряжение меньше среднего, ускоряющее поле тоже меньше. Если, пока электрон летел, прошел период переменного напряжения, то итоговое воздействие на электрон отсутствует — полпериода его толкали, полпериода тормозили. Итак, на частоте, на которой период переменного напряжения равен времени пролета электрона, лампа работать уже совсем не может. Сделаем оценки. Время пролета равно $t = \sqrt{2d/a}$, где d — ширина зазора, a — ускорение. Далее, $a = F/m$, где F — сила, m — масса электрона; $F = eE$, где e — заряд электрона, E — поле; наконец, $E = (U_c + U_a/k)/d$. Подставляя, получаем

$$t = \frac{\sqrt{2}d}{\sqrt{(U_c + U_a/k)e/m}} = \frac{5\cdot10^{-6}d}{\sqrt{U_c + U_a/k}}.$$

Обычное значение знаменателя около 2, тогда $t = 2\cdot10^{-6}d$ и для d = = 100 — 10 мкм получаем $t = 2\cdot10^{-10}$ — $2\cdot10^{-11}$ с. Следовательно, лампы с зазором сетка-катод в 100 – 10 мкм полностью прекратят работу на частотах 5 – 50 ГГц. Практически ситуация, как всегда, сложнее и хуже, чем на бумаге, и лучшие СВЧ-лампы работают на частотах до 10 ГГц. Достигается это уменьшением d до 10 мкм с соответствующим ростом сложности изготовления и стоимости и уменьшением надежности и мощности. Кстати — мы пока нигде ни слова не сказали о мощности, а это весьма важный параметр.

Магия мегаваттов

То, что большая мощность нужна, сомнений не вызывает. Дальность действия радиолокатора и радиопередатчика и способность работать в условиях помех зависят именно от мощности. Ее можно увеличить либо путем увеличения тока лампы, либо путем увеличения напряжения. Поскольку максимальная плотность тока, отбираемого с катода, ограничена, надо либо увеличивать площадь катода, либо напряжение. И то и другое означает увеличение размеров лампы, поскольку при увеличении напряжения приходится увеличивать зазоры между электродами во избежание возникновения электрического пробоя.

Иногда — и это самое интересное — решение бывает промежуточным, когда новая лампа не является «просто увеличенной» старой, а состоит как бы из нескольких ламп в общей вакуумной оболочке. Иногда эти лампы имеют и еще какие-то общие детали. Например, стандартным решением является наличие в лампе нескольких катодов при одной сетке и одном аноде (рис.9).

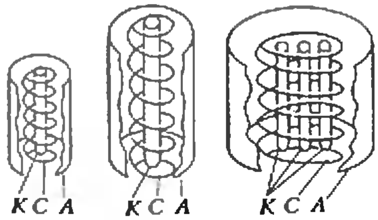


Рис.9. Лампа-прототип, мощная лампа с большим катодом и мощная лампа с несколькими катодами соответственно (К — катод, С — сетка, А — анод)

Иногда граница между «общим» и «частным» проходит так хитро, что и не сразу разберешься. Например, в многолучевой лампе (идея многолучевой лампы была высказана В.Ф.Коваленко в 1940 г.), показанной на рисунке 10 слева, катод нагрет весь, но покрытие, эмитирующее электроны, заполняет не всю его поверхность, а только участки между стержнями сетки. Дополнительный прок

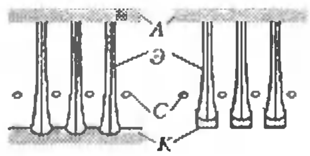


Рис. 10. Варианты многолучевой лампы (разрез, Э — электронные потоки)

от вариантов, показанных на рисунке 10, — уменьшение тока сетки (электроны пролетают в основном мимо даже при положительном напряжении на ней).

«Прибор нового вида»

Основные современные области применения ламп, в которых полупроводниковые приборы их не заменят и не составят им конкуренции, это приборы а) мощные, б) высокочастотные, в) термо- и радиационностойкие. Однако совершенствованию способствует конкуренция, и поэтому посмотрим, чем ответили лампы на транзисторный вызов. Но прежде всего — в чем он состоял?

kvant.mccme.ru

Транзисторы можно сделать маленькими и их можно делать механизированными и групповыми методами. Групповые методы — изготовление сразу нескольких приборов; когда нужны миллионы приборов, технологичность может стать определяющим фактором. Заметим, что говорить про транзистор «маленький» — нельзя. Его можно сделать таким, но если нужен транзистор мощный, то малым его не сделать — выделяющееся при работе тепло выведет его из строя. Казалось бы, в этом смысле у лампы есть преимущество: будучи сделана из высокотемпературных материалов, она могла бы быть меньше транзистора той же мощности. Да, но уж очень много в лампе деталей и очень уж сложную форму они имеют. Нельзя ли сделать лампу из небольшого количества простых деталей?

В 1934 году Ю.А.Кацман и А.А.Шапошников предложили конструкцию «штабельной лампы». На керамических рамках закреплялись отдельные электроды, потом рамки складывались штабелем, стопкой (рис.11). Такая лампа могла быть маленькой, ее сборку можно было механизировать. Она, кстати, была термостойкой (рамки из керамики) и высокочастотной (малые зазоры).

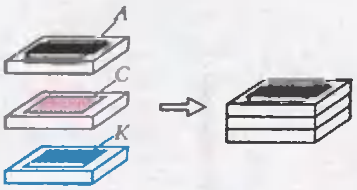


Рис. 11. Штабельная лампа (А — анод, С — сетка, К — катод)

Дальнейшее развитие этой идеи привело к созданию фирмой «General Electric» ламп диаметром и высотой около 1 мм. Электроды в этих лампах делались из титана, который хорошо спаивается с керамикой. Лампа состояла из чередующихся керамических и титановых дисков, керамические служили изоляторами и определяли зазор между электродами, а *титановые диски выполняли* одновременно роль выводов и несли в своей средней части электроды лампы.

Другой путь, впрочем тоже основанный на пайке металлов с керамикой, позволил фирме «RCA» выпустить в 1959 году прибор, названный «нувистором» (от nuevo vista — новый вид). В этих лампах, успешно применяющихся по сей день, все электроды крепились пайкой к керамической пластине, которая впаивалась в металлический стаканчик, служивший оболочкой лампы. Их сборка была механизирована, они успешно работали до температуры 550 °С. Электронным лампам оставался последний шаг на пути уменьшения количества деталей, и они его сделали.

Лампа без деталей

А что в этом странного? В самом деле, сколько деталей в транзисторе? А это смотря в каком. Если транзистор *является частью микросхемы*, то деталей в нем нет ни одной, так же как нет отдельных деталей во всей микросхеме. Роль проводников выполняют напыленные пленки металлов, роль изоляторов — пленки окислов.

Первая попытка сделать лампу с уменьшенным количеством деталей посредством напыления проводящих пленок основывалась на конструкции штабельной лампы. Пленки, выполнявшие роль электродов, напылялись

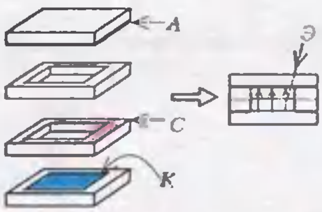


Рис. 12. Штабельная пленочная лампа (Э — электронный поток)

на керамические пластины (рис.12). Однако в этой лампе еще были отдельные детали, хотя серьезный шаг по пути избавления от них был сделан. Следующий вариант был уже чисто пленочный (рис.13). Электроны летели с катода на анод над сеткой. Но наиболее эффективной оказалась некая «смесь» штабельной лампы и планарной (рис.14). Анодная пленка нанесена на одну керамическую пластину, а катодная и сеточная на другую. Такие лампы были созданы в 1977 году в Лос-Аламосской лаборатории. Они способны работать свыше 10000 часов при температуре

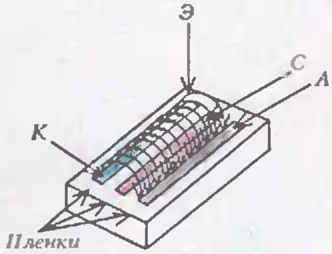


Рис. 13. Пленочный триод

500 °С и могут размещаться на подложках с плотностью 3000 1/см². Наиболее острой проблемой этих ламп является выбор материалов — при таких температурах керамика начинает понемногу взаимодействовать с металлами, да и сопротивление у керамики уже несколько уменьшается. Словом, рекордные параметры даром не даются.

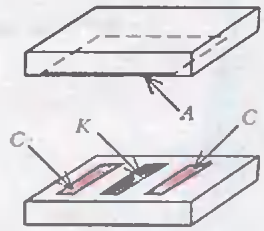
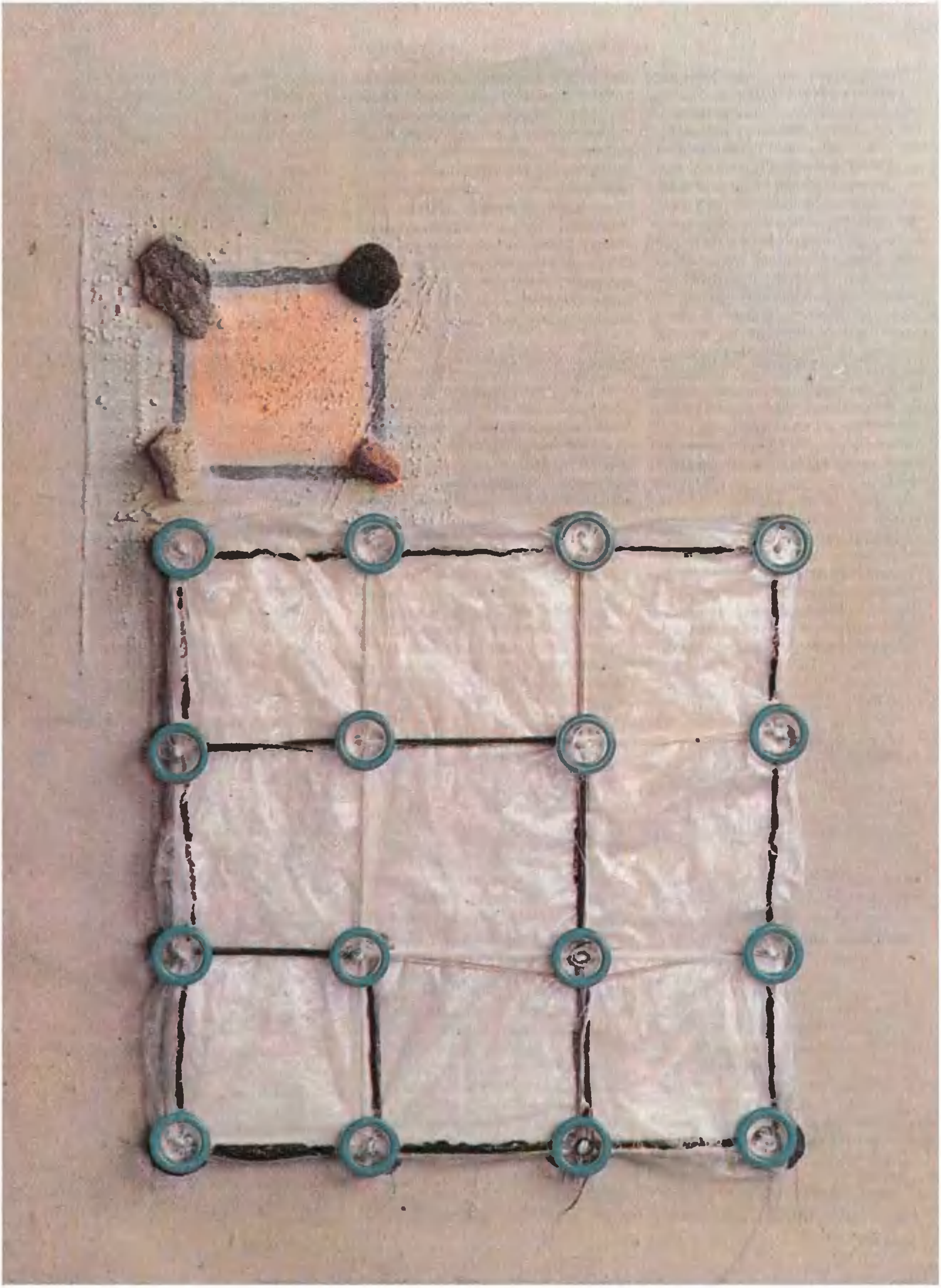


Рис. 14. Пленочный триод на двух подложках

Пленочная технология была успешно применена и в мощных лампах. А именно, оказалось возможным не делать сетку отдельно, а наносить на катод изолирующие полосочки, а на них — проводящие полоски, выполняющие роль сетки. Зазор катод-сетка в этом случае получается малым (что увеличивает крутизну лампы) и стабильным. Так пленочная технология, получившая широкое распространение благодаря развитию полупроводниковой техники, способствовала улучшению параметров электронных ламп.

Мы изучили один тип электронных приборов — так называемые лампы с электростатическим управлением. Существует множество других электронных приборов. Но пугаться не надо! В самом деле — маленькая мышь съедает, как известно, большой кусок сыра. Делает она это очень просто — отъедая один маленький кусок за другим.



kvant.mccme.ru

Об одной гипотезе Ферма

А. САВИН

Замечательный французский математик Пьер Ферма знаменит не только доказанными теоремами, но и своими гипотезами. Некоторые из них оказывались ложными, как гипотеза о том, что все числа вида

$$2^{2^n}+1$$

являются простыми. О другой его гипотезе, получившей название «Великая теорема Ферма», среди математиков пока нет установившегося мнения: доказана она или еще нет.

Больше повезло гипотезе, о которой пойдет речь в этой статье:

Всякое натуральное число есть сумма не более трех треугольных чисел, также сумма не более четырех квадратных чисел, также сумма не более пяти пятиугольных чисел и т.д.

Это утверждение было доказано лишь через 300 лет Огюстеном Луи Коши. Перед этим утверждение о треугольных числах доказал Карл Фридрих Гаусс, а о квадратных числах — Жозеф Луи Лагранж. Кстати, квадратные числа пользовались особым вниманием математиков. В 1738 году Леонард Эйлер установил все случаи, в которых число может быть представлено в виде суммы двух квадратов:

Натуральное число может быть представлено в виде суммы двух квадратов в том и только том случае, если каждый из его простых делителей вида $4k+3$ входит в это число в четной степени.

А в 1798 году Адриен Мари Лежандр установил, что числа вида $4^k(8n-1)$ не могут быть представлены в виде суммы менее четырех квадратов.

Казалось бы, что здесь все уже точно установлено и гипотеза имеет лишь историческое значение. Но стоит в формулировку Пьера Ферма добавить одно слово «различных», как все становится вновь проблематичным. Итак, рассмотрим следующую проблему:

Какие натуральные числа являются суммой не более трех различных треугольных чисел, какие — суммой не более четырех различных квадратных чисел и т.д.?

То, что не любое число представляется в таком виде, видно на примере числа 2.

Прежде чем перейти к рассмотрению этой проблемы, напомним, что такое фигурные числа. Если в свободную минуту перед нами на столе оказывается кучка однородных предметов: монет, камешков или пуговиц, то, как правило, возникает желание расположить их в некотором порядке — в виде треугольника, прямоугольника или другой фигуры.

Древнегреческие вычислители — абацисты — работали на досках абаках, размещая на них камешки. Нынешние программисты в свободную минуту запускают на экран дисплея какую-нибудь игру, а тогда единственным профессиональным развлечением было складывание фигурных чисел, что приводило и к серьезным результатам. Так, складывание камешков в виде прямоугольников наводило на мысль о делителях числа, о простых и составных числах.

При расположении камешков в виде треугольника (рис.1) получаются

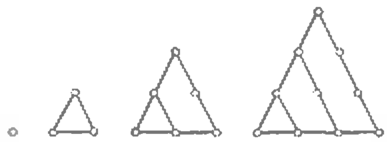


Рис. 1

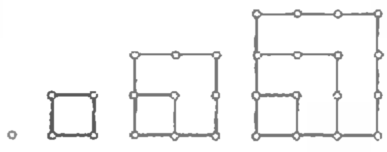


Рис. 2

числа 1, 3, 6, 10, ... Общая формула для n-го треугольного числа получается из формулы суммы арифметической прогрессии:

$$\mathcal{F}_n^3 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Для квадратных чисел (рис.2) 1, 4, 9, 16, ... формула проста:

$$\mathcal{F}_n^4 = n^2.$$

Формула для пятиугольных чисел (рис.3) 1, 5, 12, 22, ... получается из

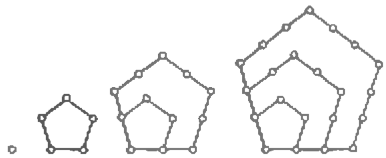


Рис. 3

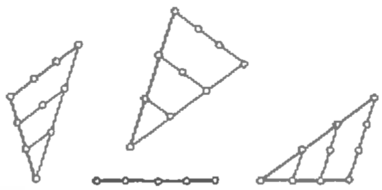


Рис. 4

рассмотрения рисунка 4. Нужно сложить три $(n-1)$-х треугольных числа и еще прибавить n. Получаем

$$\mathcal{F}_n^5 = n + 3\cdot\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Аналогично нетрудно получить формулу для n-го k-угольного числа:

$$\mathcal{F}_n^k = n + (k-2)\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(nk-2n-k+3)}{2}.$$

Исследование поставленной проблемы начнем с разложения в сумму квадратов. Очевидно, что числа 2, 3, 6, 7, 8 не представляются в виде суммы квадратов различных натуральных чисел. Нетрудно составить программу для компьютера, позволяющую находить последовательно такие числа. Эта программа была написана, и расчет по ней показал, что среди чисел до 1000 не раскладываются в сумму различных квадратов следующие:

2, 3, 6, 7, 8, 11, 12, 15, 18, 19, 22, 23, 24, 27, 28, 31, 32, 33, 43, 44, 47, 48, 60, 67, 72, 76, 92, 96, 108, 112, 128.

Остальные числа, не превосходящие 1000, раскладываются в сумму нескольких различных квадратов. А дальше? Вычисления до 10 000 не дали ни одного нового числа, не

Иллюстрация Ю.Ващенко

раскладывающегося в сумму нескольких различных квадратов. Возможно, что их больше нет? Так оно и оказалось. Достаточно было доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Если для некоторого числа k все натуральные числа от k до $f(k)$ представимы в виде суммы квадратов различных натуральных чисел, то тогда все натуральные числа, начиная с числа k, представимы в таком виде.*

Функцию $f(k)$ мы определим в процессе доказательства этой теоремы.

Доказательство. Пусть k — заданное число и $p^2 > k$. Потребуем, чтобы все целые числа от k до $(p+1)^2$ представлялись в виде суммы квадратов нескольких различных натуральных чисел. Тогда числа $p^k + k$, $p^2 + k + 1, \ldots, 2p^2 - 1$ также представимы в таком виде, поскольку в разложение чисел $k, k+1, \ldots, p^2 - 1$ не входит число p^2. Точно так же получаем, что числа $(p+1)^2 + 1$, $(p+1)^2 + 2, \ldots, 2(p+1)^2 - 1$ также представляются в виде суммы квадратов различных натуральных чисел.

Рассмотрим расположение этих чисел на прямой (рис.5). Нам известно, что в виде суммы квадратов различных натуральных чисел представляются числа на отрезках от k до $(p+1)^2$, от (p^2+k) до $(2p^2-1)$ и от $(p+1)^2+k$ до $2(p+1)^2 - 1$. Потребуем теперь, чтобы в пропущенных интервалах не содержалось целых чисел. Для этого должны выполняться следующие неравенства:

$$(p+1)^2 \ge p^2 + k - 1, \qquad (1)$$

$$2p^2 - 1 \ge (p+1)^2 + k - 1. \qquad (2)$$

Первое из них равносильно неравенству

$$p \ge k/2 - 1, \qquad (1')$$

а второе — неравенству (при $p > 0$)

$$p \ge 1 + \sqrt{k+3}. \qquad (2')$$

При $k \ge 13$ из выполнения неравенства (1′) следует и выполнение неравенства (2′), так как в этом случае $k/2 - 1 \ge 1 + \sqrt{k+3}$.

Полученный результат сформулируем в виде леммы.

Лемма. *Пусть заданы целое число $k > 0$ и целое число p, удовлетворяющее неравенству (1′), тогда если все целые числа от k до $(p+1)^2$ представимы в виде суммы квадратов натуральных чисел, то все целые числа от k до $2(p+1)^2 - 1$ представимы в таком виде.*

Теперь мы можем закончить доказательство теоремы, указав явно функцию $f(k)$. Так как мы предполагали, что представимы в виде суммы квадратов различных натуральных чисел все целые числа от k до $(p+1)^2$ и что выполнено неравенство (1′), которое можно переписать в виде $p + 1 \ge k/2$, то получаем, что

$$(p+1)^2 \ge k^2/4,$$

а следовательно, в качестве функции $f(k)$ можно взять функцию $k^2/4$.

Окончание доказательства теоремы проведем по индукции. Однако не с помощью метода полной математической индукции, а лишь с помощью индуктивного перехода.

Пусть k — четное положительное число и все числа от k до $k^2/4$ представимы в виде суммы квадратов различных натуральных чисел. Возьмем число $p = k/2 - 1$, тогда по лемме все числа от k до $2(p+1)^2 - 1$ также представимы в таком виде. Увеличим число p на единицу. Так как

$$(p+2)^2 > 2(p+1)^2 - 1$$

для всех $p > \sqrt{3}$, то целые числа от k до $(p+2)^2$ представимы в виде суммы квадратов различных натуральных чисел, а для числа $p_1 = p + 1$ очевидно выполнены неравенства (1′) и (2′). Следовательно, по лемме, в виде суммы квадратов различных натуральных чисел представляются все целые числа от k до

$$2(p_1+1)^2 - 1 = 2(p+2)^2 - 1 = 2(p+1)^2 - 1 + 4(p+1).$$

Таким образом, отрезок, содержащий целые числа, представимые в виде суммы квадратов различных натуральных чисел, увеличился на $4(p+1) = 2k$. Те же соображения позволяют перейти от числа p_1 к числу $p_2 = p_1 + 1 = p + 2$ и вновь увеличить отрезок, на котором все целые числа представимы в виде суммы квадратов различных натуральных чисел. При этом величина добавочного отрезка увеличивается на 4 числа, поскольку равна

$$4(p_1+1) = 4(p+2) = 4(p+1) + 4.$$

Теперь ясно, что, переходя далее к числу $p_3 = p_2 + 1$, затем к p_4, p_5 и т.д., мы покажем, что любое целое число, большее k, представимо в виде суммы квадратов различных натуральных чисел.

Осталось показать, что такое число k действительно существует. Эту работу выполнил компьютер, который указал, что все числа от 130 до $130^2/2 = 4225$ представимы в виде сумм квадратов различных натуральных чисел.

Лица, не доверяющие компьютерам (а такие существуют), могут проделать соответствующие вычисления вручную.

Итак, показано, что все целые числа, начиная с 129, могут быть представлены в виде суммы квадратов различных натуральных чисел.

Однако мы еще не знаем, каково наименьшее количество квадратов в разложении каждого из чисел. Чтобы получить представление об этом, была составлена следующая программа на языке «Бейсик».

Программа

```
N=0
INPUT «INPUT N» N
R=INT (SQR (N) )
DIM S(N),T(N)
FOR A=1 TO N
S(A)=100
NEXT A
K=1
B0:
  P=K*K
  Q=P
B1:
  M=Q-P
  T(Q)=S(M)+1
  Q=Q+1
  IF Q<=N GOTO B1
  M=P
B2:
  IF T(M)>S(M) GOTO B3
  S(M)=T(M)
B3:
  M=M+1
```

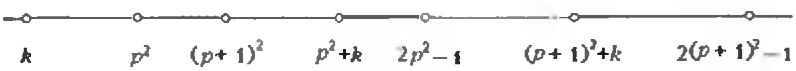


Рис. 5

kvant.mccme.ru


```
IF M<=N GOTO B2
K=K+1
IF K<=R GOTO B0
  FOR L=100 TO 6 STEP -1
  FOR A=1 TO N
  IF S(A)=L THEN PRINT «L=»L;
                              «m=»A;
  NEXT A
 NEXT L
END
```

Для расчетов по этой программе следует задать число N — последнее число, до которого ведется счет. Результаты счета выдаются в следующем виде: для каждого значения $L \le 100$ указываются те значения чисел, для которых наименьшее количество квадратов в разложении равно L. Числа, не представимые в виде суммы квадратов различных натуральных чисел, программа печатает для $L = 100$. Эти числа были уже приведены выше.

Только числа 124 и 188 раскладываются в сумму 6 различных квадратов и не раскладываются в сумму меньшего числа различных квадратов. В сумму 5 различных квадратов раскладываются числа

55, 88, 103, 132, 172, 176, 192, 240, 268, 288, 304, 368, 384, 432, 448, 496, 512, 752,

а также все числа, получающиеся из них умножением на натуральную степень числа 4:

220, 352, 412, 528, 688, 704, 768, 880 и т.д.

Среди чисел до 100 000 не обнаружено других чисел, раскладывающихся в сумму не менее 5 квадратов различных натуральных чисел.

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Если четное число не раскладывается в сумму не более чем четырех квадратов натуральных чисел, то и учетверенное такое число также не может быть разложено в сумму не более четырех квадратов различных натуральных чисел.*

Доказательство. Заметим, что остаток от деления квадрата четного числа на 4 равен нулю, а нечетного — равен 1. Пусть a — четное число, которое не раскладывается в сумму не более четырех квадратов различных натуральных чисел, а число $4a$ раскладывается в суму двух, трех или четырех квадратов различных натуральных чисел. Заметим, что число $4a$ не может быть квадратом, поскольку тогда само число a является квадратом.

Если $4a = b^2 + c^2$, то в случае, когда b и c четны: $b = 2p$, $c = 2q$, имеем

$$4a = 4p^2 + 4q^2,$$

и следовательно, $a = p^2 + q^2$, вопреки предположению. В случае, если b и c оба нечетны, то число справа при делении на 4 имеет остаток 2, а число слева делится на 4. Если же одно из чисел b и c четно, а другое нечетно, то справа будет стоять нечетное число, а слева — четное. Вновь противоречие.

Случай $4a = b^2 + c^2 + d^2$ рассматривается аналогично. Если все три числа b, c и d четны, то число a представляется в виде суммы трех различных квадратов, а в остальных случаях остаток при делении числа в правой части на 4 равен либо 1, либо 2, либо 3, а левая часть делится на 4.

Случай $4a = b^2 + c^2 + d^2 + e^2$ полностью аналогичен рассмотренным, за исключением случая, когда все четыре числа b, c, d и e являются нечетными. В этом случае $b = 2p + 1$, $c = 2q + 1$, $d = 2r + 1$ и $e = 2s + 1$. Подставим эти выражения в наше соотношение:

$$4a = 4p^2 + 4p + 1 + 4q^2 + 4q + \\ +1 + 4r^2 + 4r + 1 + 4s^2 + 4s + 1.$$

Сокращая на 4, получаем

$$a = p(p+1) + q(q+1) + \\ + r(r+1) + s(s+1) + 1.$$

Каждое из первых четырех слагаемых в правой части равенства четно, поэтому правая часть — нечетное число, а по предположению a — четно. Доказательство завершено.

Среди указанных выше 18 чисел, не представимых в виде суммы не более четырех квадратов различных натуральных чисел, 15 чисел четны и, следовательно, по теореме 2 числа, получающиеся из них умножением на натуральную степень числа 4, также непредставимы в виде суммы не более четырех квадратов различных натуральных чисел.

Чтобы доказать тот же факт для оставшихся двух нечетных чисел, 55 и 103, достаточно доказать, что четные числа $220 = 4 \cdot 55$ и $412 = 4 \cdot 103$ не представляются в виде суммы не более четырех квадратов различных натуральных чисел, что проверяется непосредственно.

Изучение совокупности натуральных чисел до 100 000 дало интересные результаты. Оказалось, что наименьшее количество различных квадратов в представлении чисел вида $8n - 2$ при n больших 13 равно 3, для всех чисел вида $8n - 5$ при n больших 80 оно также равно 3, а для всех чисел вида $4^m(8n-1)$ при $m \ge 0$ и $n \ge 14$ это число равно 4.

Любопытно было бы доказать эти утверждения для чисел больших 100 000, как и доказать, что, кроме указанной последовательности чисел, раскладывающихся в сумму не менее пяти квадратов различных чисел, больше нет чисел с этим свойством.

Обратимся теперь к другим многоугольным числам. Довольно ясно, что теорему 1 можно доказать для любого многоугольного числа, выбрав соответствующим образом функцию $f(k)$. Несложно модифицировать и приведенную программу так, чтобы она годилась для произвольного k-угольного числа. Однако результаты оказались пока менее интересными.

Для треугольных чисел непредставимыми в виде суммы нескольких различных треугольных чисел оказались лишь шесть чисел: 2, 5, 8, 12, 23, 33. А в сумму не менее четырех различных треугольных чисел раскладывается лишь одно число

$$20 = 1 + 3 + 6 + 10.$$

Было найдено 61 число, не представимое в виде суммы различных пятиугольных чисел. Это

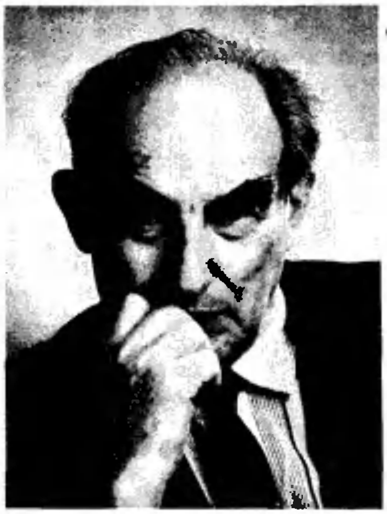
2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 29, 30, 31, 32, 33, 37, 38, 42, 43, 44, 45, 46, 49, 50, 54, 55, 59, 60, 61, 65, 66, 67, 72, 77, 80, 81, 84, 89, 94, 95, 96, 100, 101, 102, 107, 112, 116, 124, 136, 137, 141, 142, 147 и 159.

Остальные числа до 10 000 раскладываются в такую сумму. Только два числа 241 и 206 раскладываются в сумму шести различных пятиугольных чисел и не раскладываются в сумму меньшего их количества.

Желающие могут продолжить исследования для шести-, семи- и более -угольных чисел.

Хочу выразить благодарность студентам МФТИ Михаилу Ивановскому, Марии Куркиной и Арчилу Майсурадзе за помощь при программировании и проведении расчетов.

kvant.mccme.ru



Четвертого октября 1996 года исполняется 80 лет Виталию Лазаревичу Гинзбургу. Редакционная коллегия и редакция журнала «Кванта» поздравляют Виталия Лазаревича с днем рождения и желают ему здоровья, творческих сил и энтузиазма для продолжения научной и педагогической деятельности, получения новых результатов и воспитания новых учеников.

Академик Виталий Лазаревич Гинзбург — выдающийся физик-теоретик, чьи научные интересы касаются практически всех областей современной теоретической физики и теоретической астрономии. В.Л.Гинзбургом опубликовано свыше 400 научных статей, более десятка научных монографий и учебных пособий. Они посвящены квантовой электродинамике и физике элементарных частиц, теории излучения и оптике, физике плазмы и теории конденсированных сред, радиофизике и радиоастрономии, астрофизике и специальной и общей теориям относительности. Теория Гинзбурга—Ландау и уравнение Гинзбурга—Ландау — едва ли не самые цитируемые результаты в работах по теории сверхпроводимости и в более широком плане — по теории фазовых переходов.

Работает В.Л.Гинзбург в Отделении теоретической физики Физического института им. П.Н.Лебедева Российской академии наук. Он лауреат многих самых престижных научных премий и иностранный член множества академий и научных обществ, в том числе — Лондонского Королевского общества, Национальной академии наук США, Европейской академии и т.п.

Уже не один десяток лет в Физическом институте еженедельно проводится общемосковский семинар по теоретической физике, на котором рассказываются все самые новые работы физиков (и не только московских). Руководит семинаром и неизменно выступает на каждом семинаре Виталий Лазаревич Гинзбург.

Кроме активной научной работы, Виталий Лазаревич ведет большую общественную работу по пропаганде современных достижений физики и астрофизики.

Недавно вышло новое издание его книги «О физике и астрофизике» (М.: Бюро Квантум, 1995), отрывок из которой (с некоторыми сокращениями) мы и предлагаем вниманию наших читателей.

Заметки по поводу юбилея

В.ГИНЗБУРГ

В СЕРЕДИНЕ 1986 года пришлось услышать такое замечание: «Вам скоро исполняется 70 лет. Это считается юбилеем, и его отмечают по-разному. Одна из возможностей — юбиляр сам пишет статью для какого-либо журнала или сборника. Почему бы и Вам так не поступить?». В ответ на это я спросил: «Хотите выяснить, удержусь ли я на дереве?». Поскольку такой ответ озадачил собеседника, пришлось рассказать такую историйку, вполне возможно, выдуманную. На некоих островах в Тихом океане, когда вождь племени старел, он должен был залезть на самую высокую пальму, а все племя ее раскачивало; если вождь удерживался, он оставался на своем посту, если же срывался, вопрос о выборе нового вождя возникал «естественным» образом.

Такова была моя реакция на рекомендацию написать что-либо в связи с юбилеем. Подумав же, я понял ее неправомерность. В самом деле, что значит для физика доказать, что он еще «держится на дереве», или (используя более привычный образ) еще «сидит в седле»? Это значит выполнить «работу» по физике типа тех, которые делались в более молодые годы. Но то, что я называю работой, не сделаешь по заказу, во всяком случае я такого никогда не умел и не умею. Главное, такая статья была бы довольно специальной и не имела бы никакого отношения к юбилею.

Вместе с тем накопились отдельные замечания, быть может, представляющие интерес. Вот и решил попытаться их изложить, можно сказать, написать заметки «по-поводу» (a propos) юбилея.

Итак, эти заметки — не воспоминания, но в них затрагиваются вопросы, которые меня волновали и волнуют. Поэтому они преломляются сквозь призму собственной жизни. Отсюда и невозможность изгнать автобиографические элементы и личные местоимения (что нередко вызывает неудовольствие читателей).

О чем пойдет речь

В жизни мы сталкиваемся с рядом трудных, иногда мучительных проблем. Естественно, их характер зависит от многого: возраста, ситуации в семье, окружения, здоровья, специальности, способностей, общественного положения — всего не перечислишь. Ниже я собираюсь коснуться лишь трех важных этапов на жизненном пути, причем в применении к сравнительно узкой прослойке — тем, кто хочет посвятить, а затем и посвящает свою жизнь естественным наукам, в первую очередь физике[1]. Для определенности только физику и буду обычно упоминать.

Первый этап — выбор профессии. Даже тот, кто решил окончить полную среднюю школу и затем сразу пойти учиться в высшее учебное заведение, нередко еще не имеет четких устремлений и не знает, стать ли ему инженером, физиком, врачом или историком. Мы сталкиваемся и с худшей ситуацией — желанием в вуз поступить такой, где конкурс поменьше. В результате немало оканчивающих вузы не обладают высокой квалификацией, а то и вообще не работают по специальности. Врезалась в память корреспонденция, в которой восхвалялась некая бабушка, получившая «на хранение» уже десятка два дипломов от своих потомков. В контексте можно было понять, что эти дипломы и нужны-то были только для престижа или в качестве приданого. В последние годы положение меняется: все лучше понимают, что квалифицированный рабочий ценнее и, вероятно, счастливее плохого инженера. Но это уже другая тема. Думаю же я сейчас о тех, кто имеет и необходимые способности, и желание окончить высшую школу, но плохо представляет себе будущее. Им нужно помочь выбрать правильный путь.

Второй важный этап в жизни такого молодого человека — выбор более узкой специальности в вузе. Нередко такой выбор труден и объективно, и субъективно. Заняться ли теоретической физикой, экспериментальной оптикой или биофизикой? Разница большая, а на третьем курсе физического факультета университета или некоторых других вызов (например, Московского физико-технического института) уже необходимо «определиться», пойти на какую-то специальную кафедру.

Оба эти поворотных пункта — выбор профессии физика и более узкая специализация — для меня оказались тяжелыми. Я почувствовал себя «на месте» и по-настоящему начал работать только после того, как в 1938 году окончил физфак МГУ и почти случайно занялся теоретической физикой. Потом тоже было немало проблем, трудностей и радостей (когда что-то получалось). Но в общем научная жизнь лет сорок катилась по установившейся колее: делал работы и доклады, писал статьи и книги. Но начиная с 60 — 65 лет характер деятельности все больше изменялся. Недаром в 60 лет можно уйти на пенсию, а возраст с 60 до 75 лет по наиболее распространенной у нас классификации возраста называется пожилым. Это весьма гуманное название отодвигает начало старости до 75 лет, но не снимает специфических проблем, встающих, вероятно, перед любым научным работником, достигшим пожилого возраста.

Школа

Положительные отзывы о школе слышишь редко. Как родители, так и школьники почти всегда чем-либо недовольны: тут и перегрузка занятиями, и плохие учебники или их нехватка, и плохие учителя и т.д. У меня, должен признаться, критика школы обычно вызывает некоторое раздражение. Объясню это «житейским принципом относительности», в данном случае сопоставлением школы сегодня (точнее, за последние 50 — 60 лет) со школой, в которой учился сам. Очень уж мне не повезло: как раз на мои школьные годы пришлись ломка школы, различные «эксперименты». Кажется, не было обязательным и само посещение школы; во всяком случае, я поступил в 1927 году в 4-й класс, а до этого учился дома. Не помню причин, приведших к такому почти немыслимому в наше время решению. Несомненно, родители хотели сделать «как лучше», возможно, их отпугивало тогдашнее состояние школы. Фактически, однако, в той московской школе, в которую я поступил (бывшая «французская гимназия»), сохранились вполне квалифицированные учителя. Они могли научить грамотно писать и освоить школьную математику. (Правда, преподавание литературы и истории носило по современным меркам анекдотический характер.) Была в нашей школе и физика, и некоторые другие предметы, что-то лучше, что-то хуже, но главная беда заключалась в том, что в 1931 году, когда я окончил семь классов, на этом все и оборвалось — «было признано», что полная средняя школа не нужна. Через несколько лет одумались — появились школы-десятилетки, но я так и проучился в школе только четыре года.

И вот в 15 лет нужно было выбрать жизненный путь. Помню, как это было трудно, даже мучительно. В семье особой помощи не было. Отец, высококвалифицированный инженер, на 53 года старше меня, наукой не интересовался. Братьев и сестер не было, т.е. отсутствовала среда, состоящая как из старших, так и из сверстников, которая столь важна при формировании вкусов, интересов в науке. К счастью, еще в школе появилось влечение к физике. Поскольку совсем не помню подробностей, придется сообщить, что у меня своеобразная память с высоким порогом — запоминается только то, что произвело сильное впечатление. Так, о физике первое четкое воспоминание — книга О.Д. Хвольсона «Физика наших дней», первое издание которой вышло в 1928 году. Это была популярная книга о достижениях физики, о лице физики того периода. Сейчас научно-популярных книг много, а тогда было мало. Для меня же вообще была одна — книга Хвольсона, о которой вспоминаю с большой благодарностью. Быть может, именно она решила судьбу. Так или иначе, я не пошел в фабрично-заводское училище, а после полугода неопределенности поступил лаборантом в рентгеновскую лабораторию одного вуза. Там общался в основном с двумя другими лаборантами, бывшими на три года старше, они увлекались физикой и изобретательством

[1] *Проще было бы сказать, что речь пойдет об ученых-естественниках. Я, однако, испытываю буквально идиосинкразию к слову «ученый» и всячески стараюсь его не употреблять. В этом я далеко не одинок. Помню, как Л.Д. Ландау язвил: «Кот ученый — приятно, ученый муж — смешно».*

kvant.mccme.ru

(оба, кстати, стали известными физиками). Формально я в лаборатории немногому научился, но проникся чем-то более важным — интересом к работе, увлеченностью.

В 1933 году поступление в университеты впервые за ряд лет стали проводить по открытому конкурсу. Я решил поступать и месяца за три подготовился. Вступительные экзамены на физфак МГУ сдал, но без блеска, и принят не был. Чувство обиды отсутствовало (досада — другое дело), ведь я понимал, что плохо подготовлен. Подождать год и вновь поступать не хотелось — я уже «разогрелся» учением. Поэтому поступил на заочный факультет МГУ, но не работал (как-то на это смотрели сквозь пальцы). Так в третий раз пришлось учиться самому, и только в 1934 году удалось перевестись на очное отделение. Формально времени я не потерял, окончил физфак в 1938 году в возрасте 22 лет, как и «полагается» даже сейчас преуспевающему молодому человеку. Но отсутствие нормального школьного образования мне даже через столько лет представляется сугубо отрицательным обстоятельством. Провести 10 лет в школе кажется счастьем, кажется, что успел бы так много... Быть может, это иллюзия, но именно отсюда проистекает желание сделать несколько замечаний о школе.

Речь идет именно о замечаниях (пусть это будет выступление «в порядке обсуждения»). Не буду повторять общеизвестных истин, касающихся роли и задач школы в общем развитии, духовном и физическом воспитании. Перечислю лишь четыре требования к школе, которые представляются мне особенно важными, скажем, для будущего физика.

Во-первых, должна быть обеспечена грамотность, т.е. умение писать без ошибок и литературным языком, ясно излагать свои мысли. Какой-то опыт будет приобретен и в вузе, например в процессе писания курсовых работ, научных статей и диплома. Но главное должно быть заложено в школе. Та подготовка, которую получил я в школьные годы, не обеспечила грамотности. В 1934 году на втором курсе университета у нас был диктант, и около половины студентов, в том числе и я, получили неудовлетворительную оценку. Потом у нас проводились занятия по русскому языку, но они мало что дали. Нужны тренировка, тренировка плюс требовательность. Все это может и должна обеспечить школа. Мне же приходится смотреть в словарь, думать над построением даже простых фраз, проверять написанное. Стараюсь побольше печатать на машинке. Но разве обязана машинистка исправлять ошибки, и можно ли уповать на это?

Как видите, я себя не щажу, делаю это с единственной целью — подчеркнуть, сколь недопустимо либеральничать в вопросе грамотности. Между тем, сплошь и рядом приходится сталкиваться с «успешно» окончившими десятилетку и вуз, но не умеющими как следует писать. В подавляющей части случаев это не результат отсутствия способностей к языку (бывает и такое), а следствие плохого обучения. Вспоминаю разговор с одним физиком, который очень хорошо писал (он был автором учебника и ряда статей). На вопрос, как он научился так писать, последовал контрвопрос: «Как часто Вы писали в школе сочинения?». Я ответил, что примерно раз в две недели. «А я писал сочинения шесть раз в неделю», — мой собеседник до революции учился во французской гимназии или лицее в Швейцарии, где его семья находилась в эмиграции. Знания, которые полагается вынести из школы в области литературы и истории, нужны. Нельзя, однако, допускать, чтобы они приобретались за счет грамотности. В конце концов, с историей и литературой можно знакомиться в любом возрасте, а недостаток грамотности после школы обычно не устранишь.

Во-вторых, школа должна обеспечить автоматизм в области элементарной математики. Имею в виду быстрый счет, навыки в арифметике, алгебре, тригонометрии, использование простых ЭВМ. Это достигается опять тренировкой плюс требовательностью. Школьнику скучно склонять и спрягать, учить грамматические правила, много раз решать почти одинаковые задачи и делать преобразования, которые уже в принципе ясны. Поэтому-то я, когда овладевал программой трех классов за три месяца, решил, скажем, 100 задач вместо 1000, которые решил бы в школе. Результат — отсутствие автоматизма — ощущаю всю жизнь. Поэтому-то я советую не экономить время на сокращении числа задач, примеров, упражнений. Это — лжеэкономия. Лучше, рациональнее сокращать программу, не вводя в нее многое из того, что будет изучаться в вузе.

Третье, пусть не требование, а пожелание — еще в школе овладеть английским языком. До второй мировой войны в физике доминировал немецкий язык, сейчас физические журналы печатают статьи в основном по-английски. Именно английский язык стал международным языком науки, и его необходимо знать. Тратить в вузе на изучение языка много времени нерационально, нужно лишь совершенствоваться (например, научиться писать по-английски научные статьи).

Четвертое, и последнее, замечание — предоставить ученикам возможность выйти за рамки школьной программы, прикоснуться к современному состоянию науки. Этой цели служит журнал «Квант», многочисленные выпуски его библиотечки, ряд научно-популярных журналов. Но на совет ознакомиться с этим факультативным материалом школьники отвечают: «А где взять время, так много задают на дом». Это и верно, и неверно. На то, что действительно интересно, время найдется. Но трудно увлечься, не преодолев какого-то барьера. Нельзя научиться плавать, не входя в воду, а туда не очень-то тянет тех, кто не умеет плавать. Здесь очевидна роль учителя-энтузиаста. Помогут и лекции или беседы квалифицированных людей, не предусмотренные никакой программой. Когда моя внучка училась в школе, я предлагал прочесть у них лекцию по физике или астрофизике. Уверен в том, что части школьников это было бы интересно, могло бы дать какой-то толчок, пусть лишь побудило бы прочесть какие-либо статьи или книжки. Но в школе так и «не нашлось времени» организовать такую лекцию.

Когда я все это писал, то до какой-то степени потерял чувство реальности и начал фантазировать на тему: что было бы, если бы мог все начать сначала. Гипотетическому В.Л. Гинзбургу следовало бы реализовать ту программу, которую я пытался набросать выше. Но боюсь, предоставленный самому себе, я всячески увиливал бы от всего, что не люблю: изучения грамматики и правил орфографии русского и английского

kvant.mccme.ru

языков, от всего, что нудно заучивать. Но в нормальной школе все это преодолел бы и поступил на физический факультет (другой выбор кажется немыслимым) несравненно лучше подготовленным.

Конечно, далеко не все в судьбе зависит от подготовки. Однако весьма вероятно, что «при прочих равных условиях» гипотетический В.Л. Гинзбург избежал бы многих трудностей, больше успел бы сделать, был бы счастливее...

Физический факультет

Заочное обучение на первом курсе физфака в целом было аналогично самостоятельному овладению программой старших классов школы. Ограничусь одним примером. Каким-то образом мне удалось перевестись на второй курс очного отделения, не сдав астрономию. Возможно, на заочном отделении об этом предмете забыли, на очном же небольшой курс астрономии читали, и мои товарищи вспоминали о нем с удовольствием. Я как-то даже не заметил, что совсем не знаком с астрономией. Но в 1946 году сначала увлекся радиоастрономией, а потом и другими новыми областями: астрофизикой космических лучей, гамма-астрономией. Сделал на астрофизические темы много работ. За границей вообще многие считают меня астрономом, поскольку знают по астрономическим работам, видели и слышали на международных конференциях. Но я так и не удосужился как следует познакомиться с картой звездного неба. И когда знакомые спрашивают, что это за звезда или созвездие, мне остается только сообщить о своей неграмотности в элементарной астрономии. Это, скорее, смешно, но недаром сказано, что от великого до смешного один шаг. Тот факт, например, что о существовании сверхновых звезд и их оболочек я узнал с большим опозданием, существенно помешал самой работе.

Все эти жалобы, возможно уже раздражающие читателей, продиктованы одним чувством — сожалением об упущенных возможностях. Придумать (вернее, предсказать) какой-либо эффект или неизвестное явление, объяснить природу уже наблюдавшихся — вот самое большое счастье, которое пришлось испытывать в науке. А как это происходит? Многое зависит от склада ума. В общем нужно пусть поверхностно, но знать побольше о разном, иметь время думать и фантазировать, а значит, быть подготовленным так, чтобы зря не тратить драгоценное время, уметь его эффективно использовать.

На физфаке МГУ, когда я там учился с 1934 по 1938 годы, «эксперименты» типа бригадного метода и приема не по конкурсу были уже в прошлом. Обучение происходило привычным путем. Главное же, имелись хорошие лекторы, работали (причем не по совместительству) видные физики. Сам я без колебаний отдал свои симпатии Л.И. Мандельштаму и его окружению (И.Е. Тамму, Г.С. Ландсбергу, С.Э. Хайкину, М.А. Леонтовичу), хотя на физфаке имелись и другие квалифицированные специалисты. Неплохо преподавалась и математика, существовала связь с механико-математическим факультетом (мехматом).

Специализация. Теоретики и экспериментаторы

Учился я хорошо и с удовольствием; некоторый кризис наступил при выборе кафедры для специализации. Это очень ответственный момент, причем мне трудно предложить какие-то принципы выбора. Если физика увлекает, то чем же оптика хуже или лучше кристаллофизики, радиофизики или физики полупроводников? Пожалуй, можно выделить физику высоких энергий как посвященную наиболее таинственным проблемам, «переднему краю» физики. И еще имеется существенное различие между экспериментальными и теоретическими специальностями.

Физика — наука о свойствах и строении материи, об общих закономерностях явлений природы. Ясно, что она просто немыслима без экспериментов или наблюдений природных явлений. Однако одного накопления фактов недостаточно для понимания явлений, нужен их анализ, в том числе количественный, математический. Последним и занимается теоретическая физика, выявляющая единство ряда внешне различных явлений, дающая математическую формулировку физических представлений и законов, анализ следствий из них. Нет физики без экспериментов и наблюдений, нет ее и без теории. Всем известными разделами теоретической физики являются классическая (ньютоновская) механика, квантовая механика, теория электромагнитного поля, общая теория относительности, статистическая физика.

Встречающееся недоразумение № 1 связано с отождествлением теоретической физики с ее высшим эшелоном. Например, считается, что на физических факультетах теоретическая физика преподается лишь начиная с третьего курса или даже позже и отражена в таких предметах, как, скажем, квантовая механика. Фактически же теоретические представления и законы физики излагаются уже в школе. Курс общей физики доминирует на первых курсах физфаков, но теоретическая физика в нем представлена широко и глубоко. В общем, теоретическая физики — органическая часть физики, которую должен знать и использовать всякий физик — иначе он вообще не физик.

Недоразумение № 2 состоит в каком-то противопоставлении физиков-экспериментаторов и физиков-теоретиков, причем работа теоретиков иногда представляется более важной, определяющей. На самом деле теоретики и экспериментаторы просто не могут существовать друг без друга, да и подобное деление достаточно условно. Существует и терминологическая путаница: теоретиками иногда называют не всех, кто специализируется в теоретической физике, а лишь занимающихся ее наиболее математизированными разделами: квантовой теорией поля, общей теорией относительности и т.д. Физиками-теоретиками сейчас нередко называют и специализирующихся в области так называемой математической физики.

В XIX веке физиков было в тысячи раз меньше, чем сегодня, гораздо меньше было материала (областей физики, фактов, теоретических представлений), несравненно проще была техника эксперимента. Не существовало и сколько-нибудь четкого деления на экспериментаторов и теоретиков, хотя в зависимости от склонностей и способностей одни физики больше экспериментировали или наблюдали, другие теоретизировали. В наш век положение изменилось, и все чаще и шире происходит разделение труда.

kvant.mccme.ru

Вместе с тем, современный физик-экспериментатор может концентрировать свое внимание на обдумывании аппаратуры, ее расчете, обработке наблюдений, но сам уже не работать «руками», предоставляя это более молодым сотрудникам. В некоторых областях физики-теоретики тесно связаны с экспериментом, обрабатывают результаты измерений и т.п. В целом, тем не менее, орудие их труда — математика, включая использование ЭВМ. Какая нужна математика, зависит от задачи и ... удачи: понимание физической сущности вопроса нередко позволяет использовать простую модель или работать в разумном приближении, допускающем применение несложного математического аппарата.

Способности к математике, музыке, шахматам выявляются довольно рано. Способности к физике как-то скрыты, по-настоящему проявляются только на деле. Даже такие гиганты, как А. Эйнштейн и Н. Бор, вовсе не блистали в школьные и студенческие годы. Бывает, правда, что уже в юности видны выдающиеся способности к теоретической физике (вспомним В. Паули и Л.Д. Ландау). Но будем ориентироваться не на исключительных людей, а просто на профессионально пригодных. Тот, кто, добравшись до третьего курса физфака, хорошо и без чрезмерного напряжения усваивает материал, утвердился в желании заниматься именно физикой, имеет все шансы стать квалифицированным физиком. Если есть вкус к эксперименту, целесообразность выбора экспериментальной специальности очевидна. Кстати, и на кафедрах, экспериментальных по названию, иногда предлагают теоретические задачи, пусть и тесно связанные с экспериментом. Но даже если начать с экспериментальной работы, это не значит, что закрываешь себе возможность заниматься теорией, а в будущем стать «чистым» теоретиком.

К последней категории принадлежу я сам. В университете выбрал оптическую специальность, но, окончив физфак, стал теоретиком. Мой пример свидетельствует, что в теоретической физике можно работать, так сказать, с физическим уклоном, без больших математических способностей и знаний. Однако вступить на такой путь непросто — должна найтись подходящая задача, нужна моральная поддержка. Такое нельзя запрограммировать.

Напротив, если студент-физик имеет математические способности, вычисляет с удовольствием да еще не любит «работать руками», у него имеются все основания сразу пойти в теоретики. Правда, в случае «фронтовых» направлений (квантовая теория поля и др.) риск представляется мне довольно большим. Но речь ведь идет о 20-летних: в случае неудачи есть еще время перестроиться. Многое при выборе специальности зависит, очевидно, от конкретной обстановки. Я знаю ее сейчас лишь на физтехе (МФТИ), где с 1968 года заведую созданной тогда на факультете общей физики кафедрой «Проблемы физики и астрофизики». Система физтеха довольно хорошо известна, поэтому ограничусь замечанием, что базой упомянутой кафедры служит Отделение теоретической физики им. И.Е. Тамма Физического института им. П.Н. Лебедева Российской академии наук (ФИАН). В конце третьего курса мы проводим вступительный экзамен для всех желающих. В основу экзамена положена некоторая программа по классической электродинамике (теории поля), сообщаемая заранее (она просто вывешивается за один-два месяца до экзамена). На экзамене предлагаются задачи в рамках программы, задаются и различные вопросы. Приходит на экзамен человек двадцать-тридцать, из них мы отбираем пять-десять (некоторые отбираются условно, считаются кандидатами — им дают дополнительные задания для проверки). В результате с четвертого курса у нас каждый год имеется обычно пять-десять человек, которых мы и готовим. Каждый из студентов имеет руководителя, ему предлагается тема для исследования. Помимо общих для всего факультета лекций нашей группе (формально — это половина группы) читаются и специальные курсы.

Большое значение в подготовке я придаю участию в еженедельном общемосковском семинаре по теоретической физике. Не скрою, что это мое любимое детище, проводится семинар уже почти 40 лет (1985 год был закончен 1108-м заседанием, а 1994 — 1453-м). На семинар приходит в среднем 100—200 человек со всей Москвы, посещают и докладывают на семинаре и «гости столицы», как иногда называют приезжих. Целей у семинара несколько, одна из них — информация о последних достижениях в физике и астрофизике.

Что касается тем для научной работы студентов, то они в значительной мере определяются интересами, а следовательно, и возможностями преподавателей кафедры. Фактически темы концентрируются в области физики плазмы, космологии, общей теории относительности, астрофизики космических лучей, физики Солнца, взаимодействия излучения с веществом. Начиная с 1988 года, на кафедре начали (частично за счет астрофизического направления) готовить специалистов в области теории сверхпроводимости и вообще физики конденсированных сред. Иногда давались и даются темы других областей. К руководству привлекаются и не сотрудники кафедры: диктуется это интересом, проявленным тем или иным студентом, и, конечно, согласием соответствующего руководителя. За первые 25 лет работы кафедру окончили (и практически все успешно) 166 человек. Из них около 90 человек защитили кандидатские диссертации, а около 30 уже стали докторами физико-математических наук. В общем, мы готовим квалифицированных людей, производящих доброкачественную «продукцию».

Однако для достижения этой цели нужно затрачивать, как ясно уже из сказанного, много усилий, нужны условия, имеющиеся далеко не везде. Между тем, наблюдается некоторое насыщение физиками, а ускорение научно-технического прогресса требует в первую очередь повышения качества. Таким образом, проблема отбора и подготовки высококвалифицированных физиков, и в частности физиков-теоретиков, остается актуальной и все время должна анализироваться с учетом обстановки.

С.И. Вавилов, помню, не раз повторял: «Теоретик — курица, которая несет золотые яйца». Верно, мощь и возможности теоретической физики огромны, причем не нужна дорогостоящая аппаратура (иногда, правда, необходимы ЭВМ). Но верно и то, что могущих нести золотые яйца нужно найти и еще немало потрудиться, чтобы такие яйца действительно появились.

kvant.mccme.ru

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 1997 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64а, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5 — 96» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1561» или «Ф1568». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1561 — М1568 предлагались на Всероссийской математической олимпиаде, а задача М1570 — на Соросовской олимпиаде по математике.

Задачи М1561 — М1570, Ф1568 — Ф1577

М1561. Дан выпуклый многоугольник, никакие две стороны которого не параллельны. Для каждой из его сторон рассмотрим угол, под которым она видна из вершины, наиболее удаленной от прямой, содержащей эту сторону. Докажите, что сумма всех таких углов равна 180°.

М.Смуров

М1562. Можно ли прямоугольник 5×7 покрыть уголками из трех клеток (т.е. фигурками, которые получаются из квадрата 2×2 удалением одной клетки), не выходящими за его пределы, в несколько слоев так, чтобы каждая клетка прямоугольника была покрыта одинаковым числом клеток, принадлежащих уголкам?

М.Евдокимов

М1563*. Докажите, что если числа $a_1, a_2, \ldots, a_m$ отличны от нуля и для любого целого $k = 0, 1, \ldots, n$ $(n < m - 1)$

$$a_1 + a_2\cdot 2^k + a_3\cdot 3^k + \ldots + a_m\cdot m^k = 0,$$

то в последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_m$ есть по крайней мере $n+1$ пара соседних чисел, имеющих разные знаки.

О.Мусин

М1564*. Существует ли такое конечное множество M ненулевых вещественных чисел, что для любого натурального n найдется многочлен степени не меньше n с коэффициентами из множества M, все корни которого вещественны и также принадлежат M?

Е.Малинникова

М1565*. В строку в неизвестном порядке записаны все целые числа от 1 до 100. За один вопрос про любые 50 чисел можно узнать, в каком порядке относительно друг друга записаны эти 50 чисел. За какое наименьшее число вопросов наверняка можно узнать, в каком порядке записаны все 100 чисел?

С.Токарев

М1566. В Думе 1600 депутатов, которые образовали 16000 комитетов по 80 человек в каждом. Докажите, что найдутся два комитета, имеющие не менее четырех общих членов.

А.Скопенков

М1567*. Центры O_1, O_2 и O_3 трех непересекающихся окружностей с одинаковыми радиусами расположены в вершинах треугольника. Из точек O_1, O_2, O_3 проведены касательные к данным окружностям так, как показано на рисунке 1. Известно, что эти касательные, пересекаясь, образовали выпуклый шестиугольник,

kvant.mccme.ru

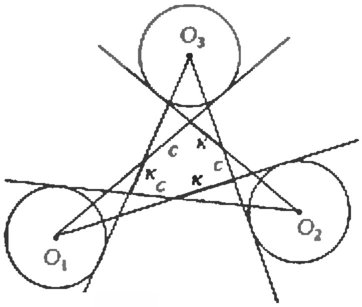


Рис.1

стороны которого через одну покрашены в красный и синий цвета. Докажите, что сумма длин красных отрезков равна сумме длин синих отрезков.

Д.Терешин

М1568. Докажите, что при $n \geq 5$ сечение пирамиды, в основании которой лежит правильный n-угольник, не может являться правильным $(n+1)$-угольником.

Н.Агаханов, Д.Терешин

М1569*. Придумайте многочлен с рациональными коэффициентами, минимальное значение которого равно а) $-\sqrt{2}$, б) $\sqrt{2}$. в) Докажите, что многочлена 4-й степени, удовлетворяющего условиям задачи б), не существует. г) Существуют ли многочлены с целыми коэффициентами, удовлетворяющие условиям а), б)?

А.Спивак

М1570. Три пары диаметрально противоположных точек сферы — вершины выпуклого многогранника с шестью вершинами. Один из его двугранных углов — прямой. Докажите, что у него ровно 6 прямых двугранных углов.

И.Шарыгин

Ф1568. Граненый карандаш массой $M = 20$ г лежит на горизонтальной шероховатой поверхности с коэффициентом трения $\mu = 0{,}05$. К одному из концов прикладывают горизонтальную силу в направлении, перпендикулярном карандашу, и увеличивают эту силу, пока карандаш не начинает проскальзывать. При каком значении силы это произойдет? Какая из точек карандаша при этом не проскальзывает?

М.Ермилов

Ф1569. Из однородного квадратного листа со стороной d вырезали круг максимального диаметра, при этом остались четыре «уголка». Где находится центр масс одного такого уголка? Центр масс полукруга радиусом R находится на расстоянии $a = 4R/(3\pi)$ от своего диаметра.

З.Рафаилов

Ф1570. На неподвижное тонкое кольцо надета небольшая бусинка. Коэффициент трения между бусинкой и кольцом $\mu = 0{,}1$, сила тяжести отсутствует. Во сколько раз уменьшится из-за трения скорость движения бусинки за $n = 3$ оборота? Если у вас не получится точное решение, постарайтесь посчитать приближенно.

М.Ермилов

Ф1571. Микропроцессор при работе выделяет значительное количество тепла. На практике удается ускорить работу микропроцессора за счет увеличения так называемой тактовой частоты — но при этом возрастает выделяемая мощность (очень грубо можно считать, что она пропорциональна рабочей частоте микропроцессора). Для уменьшения перегрева на корпус микропроцессора надевают металлический радиатор, имеющий большую поверхность, улучшающую теплообмен с окружающим воздухом. Температура корпуса микропроцессора, работающего в самодельной ЭВМ в обычном режиме, составляет +95 °С, температура радиатора при этом +50 °С, а температура воздуха в корпусе ЭВМ +30 °С. При помощи специальной пасты с высокой теплопроводностью удалось улучшить тепловой контакт корпуса микропроцессора с радиатором — температура микропроцессора снизилась при этом до +65 °С. Во сколько раз можно теперь повысить быстродействие микропроцессора, если предельно допустимая температура его корпуса составляет +95 °С? Температуру внутри корпуса можно считать неизменной, для оценки можно также считать, что условия теплообмена остаются прежними.

Р.Александров

Ф1572. Порцию кислорода нагревают при постоянном давлении до тех пор, пока объем газа не возрастет в 2 раза, а затем охлаждают при получившемся объеме, пока газ не отдаст все тепло, полученное при расширении. Найдите отношение начальной и конечной температур в этом процессе.

Ф1573. В схеме на рисунке 2 миллиамперметры одинаковые, батарейки идеальные. Что может показывать вольтметр в этой схеме? Какими могут быть сопротив-

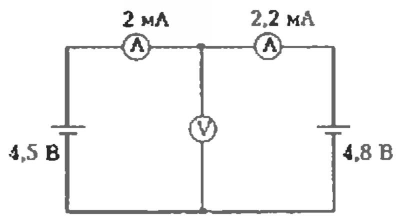


Рис.2

ления миллиамперметров и вольтметра? Учтите — приборы бывают и не очень идеальными!

А.Зильберман

Ф1574. К проводящему уединенному заряженному шару подносят небольшой незаряженный проводящий предмет. Потенциал точки, в которую помещают предмет, до его внесения составлял $\varphi = 10000$ В. После внесения потенциал шара изменился на величину $\Delta\varphi = 1$ В. Найдите силу, действующую в этот момент на шар. Размеры вносимого предмета во много раз меньше расстояния между ним и шаром.

З.Рафаилов

Ф1575. Из куска тонкой проволоки, сопротивление которого R, сделано замкнутое кольцо диаметром d. Магнитное поле с индукцией B параллельно плоскости кольца. Выводы источника напряжением U_0 присоединены к двум точкам кольца. Какой может быть максимальная сила, действующая на кольцо со стороны магнитного поля?

Р.Александров

kvant.mccme.ru

Ф1576. Схема, изображенная на рисунке 3, подключена к сети (220 В, 50 Гц). Емкость конденсатора $C = 0{,}01$ мкФ, диоды можно считать идеальными.

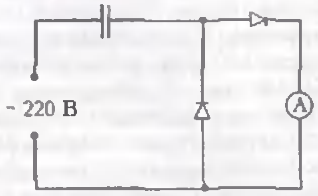


Рис.3

Какой ток покажет миллиамперметр магнитоэлектрической системы, предназначенный для постоянного тока? До какого напряжения зарядился бы еще один конденсатор емкостью C, если бы его включили вместо миллиамперметра?

А.Повторов

Ф1577. Цепь состоит из 1000 одинаковых звеньев — каждое звено включает катушку индуктивностью $L = 1$ мГн и конденсатор емкостью $C = 0{,}1$ мкФ (рис.4).

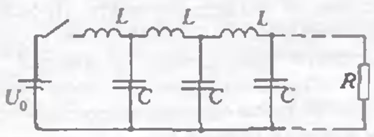


Рис.4

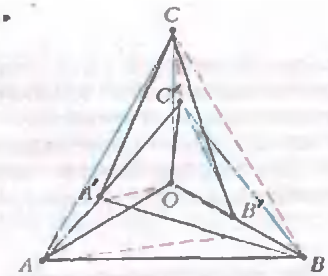
К последнему звену подключен резистор сопротивлением $R = 100$ Ом (числа подобраны специально!). Батарейку напряжением $U_0 = 10$ В подключают к первому звену, после чего через некоторое время ток через резистор начинает возрастать, а потом принимает установившееся значение. Через какую из катушек быстрее всего меняется ток, если с момента подключения батарейки прошло $\tau = 0{,}001$ с? Оцените также скорость нарастания тока через резистор в тот момент, когда ток через него станет равным половине установившегося значения. Элементы цепи считайте идеальными.

А.Зильберман

Решения задач М1536 — М1545, Ф1553 — Ф1562

М1536. *а) Существуют ли два равных семиугольника, все вершины которых совпадают, но никакие стороны не совпадают? б) А три таких семиугольника? (Напомним, что многоугольник на плоскости ограничен несамопересекающейся замкнутой ломаной.)*

Ответ в обоих пунктах положительный. Искомые семиугольники строим так (см. рисунок). Возьмем правильный треугольник ABC с центром O. Применим к треугольнику ABC гомотетию с центром в точке O и коэффициентом
$k < 1$, повернем полученный треугольник на очень малый угол по часовой стрелке; полученный треугольник обозначим $A'B'C'$. Первый семиугольник — замкнутая ломаная $AOC'A'CB'BA$. (Имеется всего семь вариантов длин отрезков, соединяющих пары из выбранных семи



точек, причем каждый вариант повторяется трижды. В названном многоугольнике каждый вариант встречается один раз.) Второй и третий семиугольники получаются из первого поворотом вокруг точки O на углы соответственно 120° и 240°. Эти три семиугольника удовлетворяют условиям задачи.

В.Произволов

М1537. *Про n чисел, произведение которых равно p, известно, что разность между p и каждым из этих чисел — нечетное целое число. Докажите, что все эти n чисел иррациональны.*

Пусть x — одно из этих n чисел, $x + b_1$, $x + b_2$, ..., $x + b_{n-1}$ — остальные и

$$p = x(x+b_1)(x+b_2)\ldots(x+b_{n-1}) = x + c, \qquad (1)$$

где, по условию, c нечетно, а b_1, b_2, ..., b_{n-1} должны быть четными (целыми) числами. Равенство (1) можно записать, раскрыв скобки, в виде

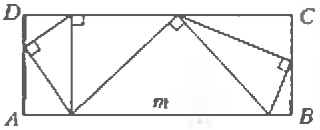
$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x = c, \qquad (2)$$

где a_1, ..., a_{n-2} — четные, а $a_{n-1} = b_1b_2\ldots b_{n-1} - 1$ и c — нечетные числа. Предположив, что x — рациональное число, мы сразу же убедимся, что x должно быть целым: если $x = k/d$ — несократимая дробь, $d > 1$, то, подставив x в (2) и умножив обе части на d^{n-1}, мы придем к противоречию. Но и целым x тоже быть не может: и при четном, и при нечетном x левая часть — четная (в последнем случае два крайние числа нечетны, а остальные четны), а c — нечетно. Полученное противоречие доказывает, что x (и любой из остальных корней уравнения (1) с четными b_i и нечетным c) может быть только иррациональным.

Н.Васильев, Г.Гальперин

М1538. *Прямоугольник $a \times b$ $(a > b)$ разбит на прямоугольные треугольники, граничащие друг с другом только по целым сторонам, так что общая сторона двух треугольников всегда служит катетом одного и гипотенузой другого. Докажите, что $a/b \ge 2$.*

Пусть наш прямоугольник — $ABCD$. Докажем, что вершина треугольника разбиения не может лежать внутри прямоугольника. Действительно, допустим противное, пусть хотя бы одна вершина внутри прямоугольника существует. Значит, существуют и стороны треугольников разбиения, которые обладают таким свойством: хотя бы один конец этой стороны лежит внутри прямоугольника. Рассмотрим множество M сторон, обладающих этим свойством. По условию задачи, эта сторона для одного из примыкающих к ней треугольников разбиения служит гипотенузой. Тогда катет этого треугольника, выходящий из этой же точки, а следовательно, тоже принадлежащий множеству M, будет короче гипотенузы, т.е. короче кратчайшего отрезка множества M. Противоречие. Итак, все вершины треугольников разбиения лежат на границе прямоугольника.



Теперь рассмотрим самую длинную из сторон треугольников разбиения; пусть это сторона m. Она принадлежит одной из сторон прямоугольника. Действительно, иначе m служила бы катетом для некоторого треугольника, а его гипотенуза была бы еще длиннее. Пусть m лежит на стороне AB прямоугольника (см. рисунок). Рассмотрим треугольник разбиения, гипотенузой которого служит m. Вершина его прямого угла может лежать только на стороне CD. Высота этого треугольника равна стороне BC. Но высота h прямоугольного треугольника не превышает половины гипотенузы, следовательно, $m \geq 2h$, откуда $AB \geq 2BC$, что и требуется.

А.Шаповалов, Н.Константинов

М1539. *Капитан нашел Остров Сокровищ, имеющий форму круга. На его берегу растут шесть пальм. Капитан знает, что клад закопан в середине отрезка, соединяющего точки пересечения высот треугольников ABC и DEF, где A, B, C, D, E, F — эти шесть пальм, но он не знает, какой буквой обозначена каждая пальма. Докажите, что тем не менее он найдет клад с первой же попытки.*

Допустим, что мы нашли нужные треугольники ABC и DEF. Обозначим через O центр острова. Через каждую вершину треугольника ABC проведем прямую, параллельную противолежащей стороне. Получится треугольник $A'B'C'$, гомотетичный треугольнику ABC с коэффициентом гомотетии -2; центром гомотетии будет центр тяжести T_1 треугольника ABC. Точка O_1 пересечения высот треугольника ABC есть центр окружности, описанной вокруг треугольника $A'B'C'$. Следовательно, O_1 получается из точки O той же гомотетией с коэффициентом -2 относительно точки T_1. Аналогичные построения проводим для треугольника DEF: строим треугольник $D'E'F'$, гомотетичный DEF с коэффициентом -2 относительно центра тяжести T_2 треугольника DEF; точка O_2 пересечения высот треугольника DEF получается из точки O гомотетией с коэффициентом -2 относительно точки T_2.
Нас интересует середина G отрезка O_1O_2. Ясно, что она получается из точки O гомотетией с коэффициентом -2 относительно середины K отрезка T_1T_2. Ясно, что K — общий центр тяжести шести точек A, B, C, D, E, F, он не зависит от того, как эти шесть точек разбиты на два треугольника. Отсюда следует, что искомая точка — единственная, не зависящая от разбиения шести точек на треугольники, так что клад будет найден с первой попытки.

С.Маркелов, Н.Васильев

М1540. *В компанию из N человек пришел журналист. Ему известно, что в этой компании есть человек Z, который знает всех остальных членов компании, но которого не знает никто. Журналист может к каждому члену компании обратиться с вопросом: «Знаете ли вы такого-то?» а) Может ли журналист установить, кто в компании — Z, задав меньше N таких вопросов? б) Найдите наименьшее количество вопросов, достаточное для того, чтобы наверняка найти Z; докажите, что меньшим числом вопросов обойтись нельзя. (Все отвечают на вопросы правдиво. Одному человеку можно задавать несколько вопросов.)*

а) Ответ: может. Вот пример стратегии, приводящей к цели. Сначала журналист выбирает произвольных членов компании A и $Б$. Человеку A он задает вопрос: «Знаете ли вы $Б$?» Из ответа «да» следует, что $Б$ — не Z (так как Z не знает никто). Из ответа «нет» следует, что A — не Z (так как Z знает всех). Итак, один вопрос задан, и один человек отброшен — в дальнейшем не нужно задавать вопросы ни ему, ни о нем. Мы пришли к первоначальной задаче, но теперь в компании из $N-1$ человека есть человек Z, который знает всех в этой компании, но его не знает никто. Продолжая в том же духе, мы отбросим $N-1$ человека, задав $N-1$ вопрос. Остается один человек. Он и есть Z.
б) Ответ: $N-1$ и есть наименьшее число вопросов. Докажем, что никакая система вопросов не приводит к цели, если вопросов меньше $N-1$.
Пусть на некотором шаге опроса человека A спросили, знает ли он $Б$. В случае ответа «да» будем считать $Б$ отмеченным, в случае ответа «нет» будем считать A отмеченным. Про отмеченного мы уже знаем, что он — не Z, так как либо он кого-то не знает, либо его кто-то знает. После того как заданы все вопросы (т.е. $N-2$ или меньше), неотмеченных людей будет не меньше двух, так как при каждом вопросе лишь один человек становится отмеченным. Только среди них может быть Z. Пусть X — один из тех, кто после всех вопросов остался неотмеченным.
В результате заданных вопросов мы уже обладаем некоторыми сведениями о том, кто кого знает. Изменим систему знакомств так, чтобы все имеющиеся сведения сохранились, и при этом X стал Z. Для этого сделаем так, что X знает всех, а в остальных случаях (кроме тех, которые выяснились в результате заданных вопросов) установим, что никто никого не знает.
Итак, для любого из неотмеченных (X был взят среди них произвольно) можно изменить систему знакомств так, что именно он будет Z. А это и означает, что заданных вопросов недостаточно для выяснения того, кто есть Z.

И.Рубанов, Г.Гальперин

М1541. *Вдоль лыжной трассы расставлено в ряд бесконечное число кресел, занумерованных по порядку: 1, 2, 3, ... Кассирша продала билеты на первые m мест, но на некоторые места она продала не один билет, и общее число проданных билетов $n > m$. Зрители входят на трассу по одному. Каждый, подходя к месту, указанному на его билете, занимает его, если оно свободно, а если оно занято, говорит «Ох!» и идет к следующему по номеру месту. Если оно свободно, то занимает его, если же занято, снова говорит*

kvant.mccme.ru

«Ox!» и двигается дальше — до первого свободного места. Докажите, что общее количество «охов» не зависит от того, в каком порядке зрители выходят на трассу.

Пусть $k > 0$ — наименьший номер места, на которое продан билет, и $K > k$ — наибольший номер, для которого выполняется следующее свойство: для любого i от k до K количество $f(i)$ билетов, проданных на места от k-го до i-го, не меньше количества $g(i) = i - k + 1$ этих мест. Тогда ясно, что для каждого $i = k, k+1, \ldots, K$ после того, как все рассядутся, i-е место будет занято и при переходе от i-го места к $(i+1)$-му раздастся ровно $f(i) - g(i)$ «охов»: ведь именно такого количества мест не хватит обладателям билетов с номерами от k до i.

Если кроме зрителей, составляющих эту серию — занявших места с k-го по K-е, — имеются и другие, то рассмотрим наименьший номер $k' > K$ и повторим это рассуждение для следующей серии, которая займет места с k' до некоторого K', $K' > k'$, и так далее. (Условие, что $n \ge m$, несущественно.)

Таким образом, от порядка, в котором обладатели билетов выходят на трассу, не зависит не только общее число произнесенных «охов», но даже их количество, произнесенное при переходе от i-го места к $(i+1)$-му для каждого i.

А.Шень, Н.Васильев

М1542. *а) К любому ли 6-значному числу, начинающемуся с цифры 5, можно приписать еще 6 цифр так, чтобы полученное 12-значное число было полным квадратом? б) Тот же вопрос про число, начинающееся с 1. в) Найдите для каждого n такое наименьшее $k = k(n)$, что к любому n-значному числу можно приписать еще k цифр так, чтобы полученное $(n+k)$-значное число было полным квадратом.*

а) Ответ: нет. Возьмем произвольное число, оканчивающееся нулями, квадрат которого — 12-значное число, начинающееся с 5, например $A = 750\,000$ (тогда $A^2 = 5625 \cdot 10^8$). Поскольку

$$(A-1)^2 = A^2 - 2A + 1, \qquad (*)$$

предшествующий A^2 квадрат равен

$$562500000000 - 2 \cdot 750000 + 1 = 562498500001.$$

Значит, 12-значного квадрата, начинающегося цифрами 562499, не существует.

б) Ответ: да. И это легко объяснить с помощью той же формулы $(*)$. Если A^2 — 12-значное число, начинающееся с 1, т.е.

$$10^{11} \le A^2 < 2 \cdot 10^{11},$$

то соседние квадраты отличаются от A^2 на $2A - 1$ и $2A + 1$, а

$$2A < 2\sqrt{20} \cdot 10^5 < 2 \cdot 4{,}5 \cdot 10^5 = 900000.$$

Поэтому разница между соседними квадратами меньше миллиона, так что в ряду последовательных квадратов между 10^{11} и $2 \cdot 10^{11}$ встретятся числа, начинающиеся с любого набора из 6 цифр.

в) Ответ: $k(n) = n + 1$. Докажем это.

Ясно, что к любым n цифрам можно приписать еще $n+1$ цифру так, что полученное число из $2n+1$ цифр будет полным квадратом: ведь на участке $10^{2n} \le A^2 < 10^{2n+1}$ разница между соседними квадратами не превосходит $2\sqrt{10} \cdot 10^n + 1 < 10^{n+1}$. Докажем, что $k(n) \ge n+1$. Рассмотрим квадрат, предшествующий 10^{2n}:

$$\left(10^n - 1\right)^2 = 10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1 = \underbrace{99\ldots98}_{n}\underbrace{00\ldots01}_{n}.$$

Таким образом, к числу $\underbrace{999\ldots9}_{n}$ нельзя приписать n цифр так, чтобы получился квадрат. Ясно также, что к нему нельзя приписать $n-2$, $n-4$, ... цифры: соответствующее число слишком близко к $\left(10^{n-1}\right)^2$, $\left(10^{n-2}\right)^2$, ... Поэтому $k(n) \ne n$ (а также $n-2$, $n-4$, ...). Рассмотрим еще квадрат, предшествующий $\underbrace{40\ldots0}_{2n-1} = \left(2 \cdot 10^{n-1}\right)^2$:

$$\left(2 \cdot 10^{n-1} - 1\right)^2 = \underbrace{399\ldots96}_{n}\underbrace{00\ldots01}_{n-1}.$$

Таким образом, к числу $\underbrace{399\ldots97}_{n}$ нельзя приписать $n-1$ (а также $n-3$, $n-5$, ...) цифр, чтобы получился квадрат, поэтому $k(n) \ne n-1$ $(n-3, n-5, \ldots)$.

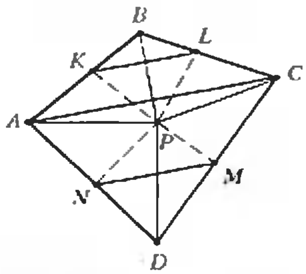
М.Бронштейн, Н.Васильев

М1543. *В плоскости выпуклого четырехугольника ABCD расположена точка P. Построены биссектрисы PK, PL, PM, PN треугольников APB, BPC, CPD и DPA. а) Найдите хотя бы одну такую точку P, для которой точки K, L, M, N (лежащие на сторонах AB, BC, CD, DA) служат вершинами параллелограмма. б) Найдите все такие точки P.*

Пользуясь свойством биссектрисы треугольника, заметим, что если $AP = CP$, то (см. рисунок)

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AP}{PB} = \frac{CP}{PB} = \frac{CL}{LB}$$

и, значит, $KL \parallel AC$; аналогично доказывается, что $MN \parallel AC$.



Таким образом, если P выбрана в точке пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям AC и BD, т.е. так, что $AP = CP$ и $BP = DP$, то $KL \parallel AC \parallel MN$ и $LM \parallel BD \parallel KN$, так что $KLMN$ — параллелограмм. Других таких точек P в плоскости четырехугольника нет. В самом деле, пусть $AP > CP$. Тогда

$$\frac{AK}{KB}=\frac{AP}{PB}>\frac{CP}{PB}=\frac{CL}{LB},$$

так что точка K отрезка AB расположена от прямой AC дальше, чем L; аналогично, N расположена от прямой AC дальше, чем M. Таким образом, если провести из точек K и N прямые, параллельные AC, то отрезки KL и NM будут идти между этими прямыми, приближаясь к AC, и не могут быть параллельны друг другу.

С.Токарев, Н.Васильев

М1544. *Существует ли возрастающая арифметическая прогрессия а) из 11, б) из 1000, в) из бесконечного числа натуральных чисел такая, что суммы цифр ее членов (в десятичной записи) также составляют возрастающую арифметическую прогрессию?*

Ответ в пунктах а) и б) — существует. Пример прогрессии, дающий ответ в пункте б), показывает, что и в пункте а) ответ «да» (хотя этот пример и не самый простой для пункта а)).

Разность прогрессии d — число из 4000 − 3 = 3997 знаков, в котором на первом, пятом, девятом и т.д. местах стоят единицы, остальные — нули:

$$d = 1\,0001\,0001\,000\ldots 1\,0001.$$

Начальный член a_0 прогрессии содержит 3993 знака, но нам удобнее записывать это число начиная с девяти нулей (таким образом получается 4000 знаков, считая с этими нулями). Напишем последовательные 1000 целых чисел, начиная с нуля (причем к каждому из первых 100 чисел припишем слева один или два нуля, чтобы все числа были трехзначными), и запишем эти числа одно за другим, разделяя соседей одним нулем:

$$a_0 = 0000\,0001\,0002\ldots 0998\,0999.$$

Сумму цифр n-го члена прогрессии обозначим через S_n. Вычислим $S_n - S_0$. При прибавлении d к a_0 первая слева четверка превращается во вторую, вторая — в третью и т.д., 999-я — в 1000-ю, а последняя четверка — она равна 0999 — превращается в 1000:

$$0001\,0002\,0003\ldots 0999\,1000.$$

Итак, произошел циклический сдвиг последовательности четверок с единственным исключением — левая четверка не просто переместилась на самое правое место, но в ее левом разряде добавилась единица. Отсюда ясно, что сумма цифр увеличилась на 1. Аналогично, при добавлении d к a_n, если $n < 999$, происходит циклический сдвиг последовательности четверок, аналогичный описанному. (В последних четверках в левых разрядах стоит единичка, при этом она продвигается каждый раз на одну четверку влево; a_{1001} выглядит похоже на a_0, только в каждой четверке на левом месте стоит 1 вместо 0.)

в) Ответ: не существует. Докажем это. Допустим противное. Пусть $a_0 + n\cdot d$ — возрастающая арифметическая прогрессия такая, что a_0 и d — натуральные числа, и сумма цифр членов этой прогрессии также есть возрастающая арифметическая прогрессия. Пусть m — число знаков в десятичной записи a_0. Рассмотрим член нашей прогрессии $a_0 + 10^m\cdot d$. При сложении чисел a_0 и $10^m\cdot d$ все цифры чисел a_0 и d сохраняются, так как цифры a_0 при сложении в столбик приходятся на нули числа $10^m\cdot d$. Поэтому сумма цифр этого члена прогрессии равна сумме цифр a_0, сложенной с суммой цифр d. Но то же верно и для члена прогрессии $a_0 + 10^{m+p}\cdot d$, где p — любое натуральное число. Таким образом, члены прогрессии $a_0 + 10^m\cdot d$ и $a_0 + 10^{m+p}\cdot d$ имеют одинаковые суммы цифр, так что не могут быть парой членов возрастающей прогрессии.

К решению задачи можно прийти и из общих соображений, использующих, впрочем, некоторые сведения из математического анализа.

Идея такова. Скорость роста возрастающей последовательности — арифметической прогрессии — линейная, а скорость роста числа цифр членов арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, логарифмическая, а значит, и скорость роста суммы цифр — не более чем логарифмическая, т.е. заведомо не может быть арифметической прогрессией.

С.Дориченко, А.Шаповалов

М1545. *Имеется доска 1×1000 полей, вначале пустая, и куча из n фишек. Двое ходят по очереди. Первый своим ходом выставляет на доску не более 17 фишек, по одной на любое свободное поле (можно все 17 взять из кучи, а можно — только часть, скажем k < 17 — из кучи, а остальные, не более 17 − k, переставить на доске). Второй снимает с доски любую серию фишек, т.е. несколько фишек, стоящих подряд (без пробелов между ними), и кладет их обратно в кучу. Первый выигрывает, если ему удастся выставить все n фишек в одну серию. Докажите, что а) при n = 98 первый может выиграть, б) а при n > 98 — нет.*

а) Приведем стратегию первого игрока. Он вначале за несколько ходов выстраивает 12 серий по 8 фишек, разделяя соседние серии одним пробелом, последовательно восстанавливая снятую серию и ставя еще одну. Затем, восстановив конфигурацию после хода второго, он вставляет две фишки в крайние пробелы, получая конфигурацию 17, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 17.

При любом ответе второго следующим ходом он строит непрерывный ряд. А именно, если второй снимает крайнюю серию, первый вставляет 8 фишек в пробелы между сериями и пристраивает с краю остальные 9 фишек.

б) Пусть имеется n фишек, и первый всегда выигрывает. Рассмотрим конфигурацию после предпоследнего хода первого. В ней k серий, разделенных одним или несколькими пробелами, и p фишек в куче. В каждой серии не более 17 фишек — иначе второй снимет такую серию, и не удастся выставить все фишки.

В ответ на снятие любой серии первый может только: (а) восстановить снятую серию, затем заполнить все пробелы фишками из кучи и крайней серии или (б) переставить все фишки с одной стороны от снятой серии в пробелы между рядами другой стороны, пристроив оставшиеся с краю. Назовем серию средней, если на ее снятие отвечают (а), левой — если (б) и фишки переставляются направо; правой — если (б) и налево. Ясно, что если на снятие крайней серии можно ответить (а), то можно и (б); будем считать, что первый отвечает (б), поэтому если серий больше одной, то левая и правая серии всегда есть.

Заметим, что в левых сериях и в куче в сумме не более 17 фишек — все фишки левых серий и фишки кучи нужно выставить или переставить при снятии самой правой из левых серий (аналогично — для правых серий). Пусть есть еще k средних серий. Если в такой серии m фишек, то $m + k + 1 \le 17$, поскольку при ее снятии надо восстановить m фишек и еще заполнить по крайней мере $k + 1$ пробел между сериями, отсюда $m \le 16 - k$. Итак,

$$n \le p + 2(17 - p) + k(16 - k).$$

Максимум этого выражения достигается при $p = 0$ и $k = 8$, что дает $n \le 98$.

А.Шаповалов

Ф1553. *По горизонтальной плоскости катится без проскальзывания тонкий обруч радиусом $R = 1$ м. Скорость центра обруча $v_0 = 2$ м/с. Найдите мгновенную скорость точки обруча, которая окажется внизу через время $\tau = 0{,}01$ с.*

Интересующая нас точка находится на конце радиуса, составляющего с вертикалью угол

$$\alpha = \frac{v_0}{R}\tau = 0{,}02 \text{ рад}.$$

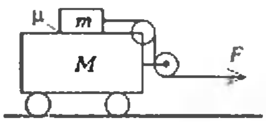
Заметим, что угол очень маленький, — мы этим дальше воспользуемся. Скорость любой точки обруча определяется суммой скорости поступательного движения центра обруча и линейной скорости вращательного — вокруг центра. В отсутствие проскальзывания в нижней точке скорости эти равны по модулю. При сложении скоростей нашей точки их горизонтальные составляющие практически компенсируются (угол мал, и его косинус почти равен 1), а вертикальная составляющая скорости составляет

$$v_в = v_0 \sin\alpha \approx v_0\alpha \approx 0{,}04 \text{ м/с}.$$

Это и есть мгновенная скорость интересующей нас точки.

Д.Александров

Ф1554. *В системе, изображенной на рисунке, коэффициент трения между тележкой массой $M = 3$ кг и грузом массой $m = 1$ кг составляет $\mu = 0{,}4$. Трение между столом и тележкой пренебрежимо мало. С какой*



силой нужно тянуть нить в горизонтальном направлении, чтобы тележка и груз могли ехать вместе, без проскальзывания? Какими будут ускорения тел, если тянуть за нить силой $F = 20$ Н?

Когда тележка и груз едут вместе, на груз действуют сила натяжения нити, равная $F_н$ и направленная вправо, и сила трения, равная $F_{тр} = \mu mg$ и направленная влево. На тележку при этом действует одна-единственная горизонтальная сила — сила трения, направленная вправо. Таким образом,

$$F_н - \mu mg = ma, \quad \mu mg = Ma,$$

откуда

$$a = \mu g, \quad F_н = (M + m)a = \mu g(M + m) = 16 \text{ Н}.$$

Если тянуть за нить силой $F = 20$ Н > 16 Н, то тележка будет двигаться с ускорением

$$a_M = \frac{\mu mg}{M} = \frac{4}{3} \text{ м/с}^2 \approx 1{,}3 \text{ м/с}^2,$$

а ускорение груза будет равно

$$a_m = \frac{F - \mu mg}{m} = 16 \text{ м/с}^2.$$

З.Рафаилов

Ф1555. *Тонкая стеклянная трубка, изогнутая в виде буквы V с углом $\alpha = 60°$ (рис.1), закреплена неподвижно. Одно колено трубки отделено от другого закрытым краном. В вертикальное колено наливают воду до*

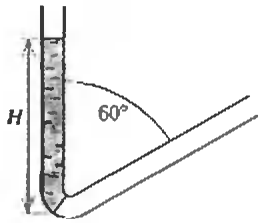


Рис. 1

высоты H, затем кран открывают, и вода начинает перетекать в другое колено трубки. Считая, что вода не перемешивается и выделения тепла не происходит, найдите период происходящего в системе процесса.

После открывания крана вода начинает перетекать из вертикального колена в наклонное, причем по мере перетекания ускорение жидкости уменьшается. Обозначим высоту столба жидкости в вертикальном колене в некоторый момент времени через x, тогда в наклонном колене длина столбика жидкости будет $(H - x)$. Ускорение определяется уравнением движения жидкости:

$$\rho Sgx - \rho Sg(H - x)\cos\alpha = -\rho SHx''.$$

Это уравнение можно получить, записав уравнение движения каждого участка жидкости в проекции на направление, совпадающее с «осью» трубки, а затем сложив все уравнения. (А можно и воспользоваться законом сохранения энергии.) Полученное уравнение очень напоминает уравнение гармонических колебаний, причем положение равновесия ($x'' = 0$) соответствует координате $x_0 = H\cos\alpha/(1 + \cos\alpha)$. Для смещения $x_* = x - x_0$ от положения равновесия уравнение можно записать в виде

$$x_*'' + \frac{g(1 + \cos\alpha)}{H}x_* = 0.$$

Решением этого хорошо известного вам уравнения

kvant.mccme.ru

гармонических колебаний является функция

$$x_* = \frac{H}{1+\cos\alpha}\cos\omega t,$$

где $\omega = \sqrt{g(1+\cos\alpha)/H}$ — частота колебаний. Однако после того как весь столбик жидкости попадает в наклонный канал (рис.2), «гармоничность» пропадает — движение жидкости становится равноускоренным (как у груза на наклонной плоскости). Так продолжается до тех пор, пока центр тяжести столбика не окажется на начальной высоте $H/2$ (рис.3), после чего жидкость едет вниз и входит обратно в вертикальное колено.

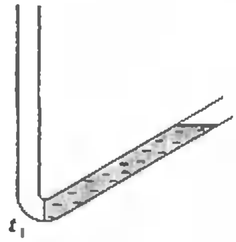


Рис.2

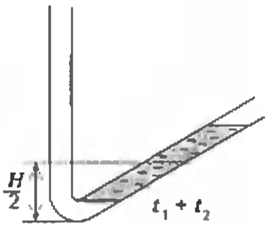


Рис.3

Период происходящего в системе процесса равен удвоенной сумме времен «гармонического» уменьшения координаты x до нуля и времени подъема в наклонном канале. Первое из времен обращает координату x в ноль:

$$\cos\omega t_1 + \cos\alpha = 0,\ t_1 = \frac{\pi-\alpha}{\omega}.$$

В тот момент, когда весь столбик попадает в наклонное колено, высота центра тяжести составляет $0{,}5H\cos\alpha$, а вертикальная составляющая ускорения равна $a = g\cos^2\alpha$. Время движения до верхней точки определяется из соотношения

$$\frac{at_2^2}{2} = \frac{1}{2}H(1-\cos\alpha).$$

Таким образом, период всего процесса равен

$$T = 2(t_1+t_2).$$

Для угла $\alpha = 60° = \pi/3$ это составляет

$$T = 2\sqrt{\frac{2H}{g}}\left(\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}+1\right).$$

А. Черноуцан

Ф1556. *В хорошо откачанный сосуд под поршень ввели некоторое количество воды и начали медленно уменьшать объем сосуда, поддерживая постоянную температуру. В таблице приведены давления для нескольких значений объема:*

V, л	18	16	14	12	10
p, кПа	20	23	24	24	24

Какая температура поддерживалась в этом опыте? При каком значении объема давление внутри сосуда начнет резко возрастать?

Ясно, что горизонтальный участок на графике зависимости давления от объема соответствует насыщенному водяному пару. По таблицам определим температуру, которая отвечает давлению насыщенного пара 24 кПа, — это +65 °С = 338 К.

Давление в сосуде начнет резко возрастать тогда, когда весь пар превратится в жидкость. Массу вещества в сосуде можно найти по любой из точек, соответствующих газовой части графика. По уравнению состояния идеального газа (кстати, из условия задачи видно, что данные в таблице округлены до «целых» градусов, следовательно, полученные ответы немного различаются для разных точек) получаем

$$m = \frac{pVM}{RT} =$$

$$= \frac{20\cdot10^3\ \text{Па}\cdot18\cdot10^{-3}\ \text{м}^3\cdot18\cdot10^{-3}\ \text{кг/моль}}{8{,}3\ \text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}\cdot338\ \text{К}} =$$

$$= 2{,}3\cdot10^{-3}\ \text{кг} = 2{,}3\ \text{г}.$$

Значит, давление начнет резко возрастать при уменьшении объема примерно до 2,3 см^3 — объема, занимаемого этим количеством воды.

М. Учителев

Ф1557. *Идеальная тепловая машина работает с нагревателем с температурой T_1 = 500 К и холодильником с температурой T_2 = 300 К. Механическая работа, получаемая от этой машины, используется для того, чтобы перекачивать тепло от замороженной курицы с температурой T_3 = −18 °С к телу с температурой T_4 = −15 °С. Какое максимальное количество теплоты можно отнять от курицы за счет энергии W = 1 Дж, полученной от нагревателя в первой тепловой машине?*

Для первой тепловой машины легко найти коэффициент полезного действия и вычислить механическую работу, соответствующую полученной от нагревателя энергии W:

$$A = \frac{T_1-T_2}{T_1}Q_1 = \frac{T_1-T_2}{T_1}W.$$

Для передачи тепла от холодного тела к «горячему» необходимо совершать работу. Соотношение между работой и количеством теплоты, переданным «горячему» телу, дается той же формулой, что и для обычного теплового двигателя:

$$A = \frac{T_4-T_3}{T_4}Q_4.$$

Нас же интересует не эта величина, а количество теплоты, отобранное от холодного тела, т.е. от замороженной курицы. Воспользуемся первым началом термодинамики и получим

$$Q_3 = Q_4 - A = W\frac{T_1-T_2}{T_1}\frac{T_3}{T_4-T_3} = 34\ \text{Дж}.$$

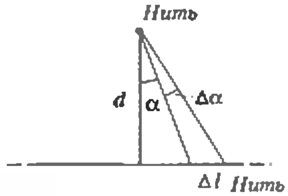
К. Урицын

Ф1558. *Две тонкие длинные нити скрещиваются под прямым углом. Расстояние между ближайшими точками нитей d. Нити заряжены с линейной плотностью* *ρ каждая. Найдите силу, с которой одна нить действует на другую.*

Воспользуемся формулой для напряженности поля от бесконечной заряженной нити в точке на расстоянии R от нее:

$$E = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 R}.$$

Нарисуем эту нить в виде точки (см. рисунок, вид «сбоку») и найдем силы, действующие на кусочки второй нити. Ясно, что составляющие сил вдоль этой нити



будут скомпенсированы, поэтому мы будем искать только перпендикулярную к нити составляющую. На маленький кусочек нити длиной $\Delta l = d\Delta\alpha/\cos^2\alpha$ действует перпендикулярно нити сила

$$\Delta F = E\rho\Delta l\cos\alpha = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 d/\cos\alpha}\rho\frac{d\Delta\alpha}{\cos^2\alpha}\cos\alpha = \frac{\rho^2}{2\pi\varepsilon_0}\Delta\alpha.$$

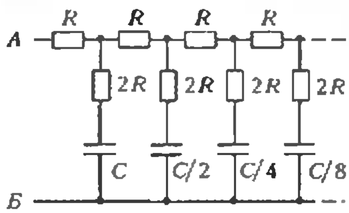
После суммирования сил, действующих на все кусочки нити, найдем сумму всех углов $\Delta\alpha$ — а эта сумма даст π. Окончательно получим

$$F = \frac{\rho^2}{2\varepsilon_0}.$$

Интересно, что расстояние между нитями в ответ не вошло.

Д.Александров

Ф1559. *На рисунке приведена схема, составленная из очень большого числа звеньев. Каждое звено состоит из двух резисторов сопротивлениями R и $2R$ и конденсатора, причем емкости конденсаторов в звеньях различны — в каждом последующем звене емкость в два раза меньше, чем в предыдущем. К точкам А и Б подключают идеальную батарейку напряжением U. Какое количество теплоты выделится в схеме за очень большой отрезок времени? Какое количество теплоты выделится в резисторе сопротивлением R, подключенном к точке А?*



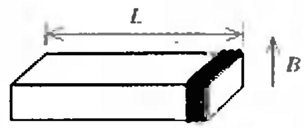
Если посмотреть на схему, составленную только из резисторов (замкнем на время конденсаторы), назовем ее $R - 2R$, то видно, что токи через резисторы сопротивлением $2R$ последовательно уменьшаются от звена к звену ровно в 2 раза. Емкости конденсаторов подобраны, и при таких токах они будут заряжаться строго синхронно — напряжения конденсаторов в любой момент одинаковы, а это значит, что условия «правильной» работы цепи $R - 2R$ не нарушаются. Остальное уже просто. После того как все конденсаторы зарядятся до напряжения батарейки, а суммарная емкость конденсаторов будет равна $2C$, их полный заряд составит $2CU$. При этом батарейка совершит работу $2CU^2$, и общее количество теплоты, которое выделится в схеме, будет равно разности этой работы и энергии конденсаторов:

$$Q = 2CU^2 - \frac{2CU^2}{2} = CU^2.$$

Напряжение батарейки в любой момент делится между первым резистором сопротивлением R, оставшейся сложной цепью из резисторов и конденсаторами. Если опять на время замкнуть конденсаторы, то легко увидеть, что напряжение на первом резисторе равно половине приложенного напряжения — сопротивление всей бесконечной цепи равно $2R$. Добавление конденсаторов ничего не меняет — в любой момент напряжение первого резистора составляет ровно половину напряжения, приложенного к резисторной части схемы. Следовательно, в первом резисторе выделяется ровно половина всего количества теплоты.

Д.Александров

Ф1560. *На горизонтальной поверхности стола лежит длинный тонкий брусок прямоугольного сечения (см. рисунок). На один его конец у самого торца намотаны вплотную друг к другу $N = 20$ витков очень тонкого провода. Магнитное поле с индукцией $B = 0{,}5$ Тл направлено вверх, перпендикулярно поверхности стола. Какой величины ток нужно пропустить по проводу, чтобы брусок начал приподниматься? Плотность материала бруска $\rho = 200$ кг/м³, длина бруска $L = 0{,}1$ м.*



Суммарная сила, действующая на витки со стороны магнитного поля, равна нулю. Магнитные силы создают только вращающий момент, поэтому приподнимется лишь один из концов стержня, причем это может быть любой — в зависимости от направления тока. Момент магнитных сил получается одинаковым относительно любой точки (это свойство сил, сумма которых дает ноль), момент силы тяжести найдем относительно точки, на которую опирается приподнимающийся стержень, а других моментов сил при этом нет. Поэтому уравнение моментов запишется так:

$$IBSN = \frac{mgL}{2}, \text{ или } IBSN = \frac{\rho L^2 Sg}{2},$$

откуда находим

$$I = \frac{\rho L^2 g}{2BN} = 1 \text{ А}.$$

А.Черноуцан

(Продолжение см. на с. 34)

kvant.mccme.ru

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

...часто бывает необходимо определить, каков количество света отражает тело, поверхность которого полирована,.. сравнительно со светом, который на него падает...

Пьер Бугер. Оптический трактат о градации света

Было установлено три известных положения.
1. Две (или более) свечи светят сильнее, чем одна.
2. Объект освещен ярче, если он находится ближе к источнику света.
3. Свет освещает плоскость слабее, если он падает на нее наклонно.

Иоганн Ламберт. Фотометрия, или об измерениях и сравнениях света, цветов и теней

А ТАК ЛИ ХОРОШО ЗНАКОМА ВАМ

фотометрия?

Возможно, это понятие незнакомо вам вовсе — его теперь не найти в школьном учебнике (и не только его, увы!). А жаль, ведь фотометрия — интереснейший раздел оптики, в котором можно было получить ответы на такие вопросы, как «Во сколько раз солнечный свет на земле ярче лунного?» или «Какой источник дает больше света?». Подобные вопросы давно занимали астрономов и архитекторов, строителей и художников. Но лишь к началу XVIII века, когда поутихли споры вокруг волновой и корпускулярной теорий света, взоры ученых обратились непосредственно к проблемам измерения силы света различных источников и освещенности поверхностей. Фотометрия была необходима для нужд науки и практики — и она появилась «на свет». Прежде всего — благодаря работам французского ученого Бугера и немецкого ученого Ламберта, попытавшихся найти общие принципы измерения света и сделать сам этот процесс более объективным.

Фотометрия оперирует такими понятиями, как яркость, телесный угол, световой поток, освещенность, сила света. Однако для поиска ответов на предлагаемые сегодня задачи в большинстве случаев вам понадобятся не столько эти величины и законы, их связывающие (хотя они не так уж и трудны — см. эпиграф), сколько интуиция и сообразительность. Подскажем лишь, что яркость характеризует источник света, а освещенность — поверхность, на которую падает свет.

Итак, включайте свет...

Вопросы и задачи

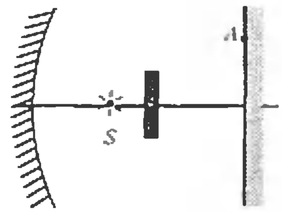
1. Почему лампа дневного света, в отличие от лампы накаливания, не «режет» глаза?

2. Отчего днем окна домов кажутся темными даже на фоне темных наружных стен?

3. Часто снег на покатых крышах начинает таять раньше, чем на земле. Почему?

4. Почему сквозь папиросную бумагу можно прочесть текст, только плотно прижав бумагу к странице книги?

5. Точечный источник света S расположен в фокусе вогнутого зеркала и закрыт непрозрачным диском. Влияет ли на освещенность в точке A экрана его удаление от зеркала? (Поглощение света средой не учитывать.)



kvant.mccme.ru

6. Со временем нить электрической лампы накаливания распыляется и становится тоньше. Сказывается ли это на световом потоке, испускаемом лампой?

7. Почему при увеличении изображения, полученного на экране с помощью слайдоскопа, освещенность изображения уменьшается?

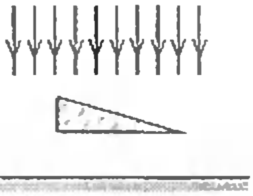
8. На линзу фотообъектива села муха. Как это отразится на качестве снимка?

9. Что произойдет с изображением, даваемым линзой, если верхнюю ее половину закрасить черной краской?

10. Между лазером и фотодетектором поставили толстую стеклянную пластинку — показания детектора уменьшились. Лазер заменили лампой накаливания и повторили опыт с пластинкой — показания фотодетектора увеличились. Почему?

11. Отчего близорукий человек может различать более мелкие детали предмета, чем человек с нормальным зрением?

12. Как изменится освещенность экрана, если на пути падающих на него параллельных лучей света поставить стеклянную призму? (Отражением лучей от призмы пренебречь.)



13. В каком случае — при дальнозоркости или близорукости — очки увеличивают освещенность зрачка?

14. К каким последствиям приводит диафрагмирование объектива фотоаппарата?

15. Почему цепочка фонарей в ясную ночь кажется одинаково яркой вдоль всей ее длины?

16. Отчего на горизонте звезды кажутся менее яркими?

17. Сразу после захода Солнца, когда на горизонте узким серпом поднимается молодой месяц, можно увидеть и «темную» часть лунного диска. Почему?

18. Как зависит сила давления, оказываемого солнечным светом на какое-либо тело, от расстояния между этим телом и Солнцем?

Микроопыт

Поставьте перпендикулярно падающим солнечным лучам белый экран, скажем лист бумаги для рисования. Можно ли увеличить освещенность экрана, расположив перед ним рассеивающую линзу?

Любопытно, что...

...изучением вопросов фотометрии занимался еще Леонардо да Винчи. По оценкам современных ученых, он был бесспорным зачинателем фотометрии как точной измерительной науки и предвосхитил более поздние экспериментальные установки.

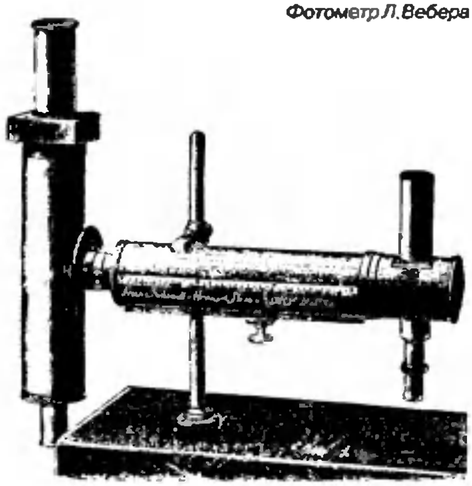
...заложившие основы фотометрии ученые были необыкновенными людьми. Так, Бугер в четырнадцать лет занял кафедру своего отца, профессора гидрографии, девять лет провел в экспедиции по измерению дуги меридиана вблизи экватора, опубликовал фундаментальные труды по теории корабля, навигации и астрономии. Ламберт, помимо занятий физикой, космологией, математикой (доказал иррациональность числа π), увлекался философией, пытался построить алгебру логики, ввел много прижившихся научных терминов, в частности — «семиотику» для обозначения универсального языка символов. В его работах впервые упоминаются двойные звезды.

...Ламберту долго приписывали открытый Бугером закон экспоненциального убывания интенсивности света в прозрачных телах, а один из вариантов фотометра, идею которого впервые высказал Ламберт, назвали именем английского физика Румфорда, лишь усовершенствовавшего этот прибор.

...при использовании обычных источников света справедлив закон сложения освещенностей. Однако при интерференции света возникает ситуация, когда он не действует, хотя закон сохранения энергии, разумеется, не нарушается, так как энергия света просто перераспределяется по освещаемой поверхности.

...каким бы совершенным оптическим «прибором» ни считался человеческий глаз, чувствительный к минимальным световым интенсивностям, он не способен распознать предметы, видимые под углом, меньшим одной минуты дуги — даже при условии хорошего освещения.

...ни один оптический прибор нельзя сконструировать без фотометрических расчетов. Так, в больших астрономических телескопах благодаря этим расчетам удалось увеличить контрастность изображения звезд до миллиона раз, что позволяет увидеть весьма слабые звезды.



Фотометр Л.Вебера

...даже самый мощный свет, созданный традиционными источниками, рассеивается и теряет свою энергию на довольно малых расстояниях. И лишь пучки лазерного света «размываются» в ничтожной степени, концентрируя огромную энергию. Например, энергетическая яркость гелий-неонового лазера превосходит яркость Солнца в миллионы раз!

...с помощью лазера оказалось возможным не только осуществить передачу информации по световодам (волоконная оптика), но и приступить к решению вопросов эффективной передачи световой энергии по лучу света при его распространении в атмосфере или в воде (фотоэнергетика).

Что читать в «Кванте» о фотометрии

(публикации последних лет)

1. *«Сожжем что-нибудь?»* — 1991, №12, с.8;

2. *«Видны ли звезды днем из глубокого колодца?»* — 1994, №1, с.11;

3. *«Пепельный свет Луны»* — 1994, №1, с.38;

4. *«Корпускулярные свойства света»* — 1994, №4, с.44;

5. *«Парадокс Вавилова»* — 1995, №1, с.39;

6. *«Глаз и небо»* — 1995, №3, с.2;

7. *«Волоконно-оптическая связь»* — 1995, №5, с.8;

8. *«Солнце, лампа и кометы»* — 1996, №1, с.40;

9. *«Аномальные атмосферные явления»* — 1996, №4, с.7.

Материал подготовил
А.Леонович

(Начало см. на с. 23)

Ф1561. *Небольшая катушка, намотанная из длинного куска провода с большим сопротивлением R, замкнута накоротко — ее выводы соединены между собой. Вдали от катушки движется вдоль ее оси со скоростью v_0 постоянный магнит. С какой силой нужно удерживать на месте катушку при величине протекающего по ней тока I? Силы тяжести отсутствуют, ток протекает по катушке только из-за изменения магнитного потока, сила тока меняется медленно.*

Проще всего решить эту задачу энергетически. Поскольку энергия магнитного поля катушки при фиксированном токе неизменна, работа удерживающей катушку силы F полностью переходит в тепло:

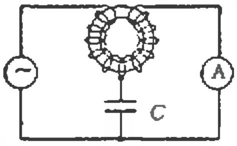
$$Fv_0\Delta t = I^2R\Delta t,$$

откуда

$$F = \frac{I^2R}{v_0}.$$

З.Рафаилов

Ф1562. *На тороидальный сердечник из ферромагнитного материала с очень большой магнитной проницаемостью намотана катушка, состоящая из большого числа витков и имеющая индуктивность L. От середины катушки сделан отвод. Схема подключения этой*



катушки и конденсатора емкостью C к источнику переменного напряжения с амплитудой U_0 и частотой ω приведена на рисунке. Что показывает амперметр, имеющий пренебрежимо малое сопротивление?

Через половинки катушки текут различные токи I_1 и I_2, в таком случае магнитная индукция в сердечнике равна

$$B = kI_1\frac{N}{2} + kI_2\frac{N}{2},$$

где k — постоянный коэффициент, N — число витков катушки. Магнитный поток, пронизывающий катушку, равен сумме магнитных потоков витков (площадью S каждый):

$$\Phi = BSN = \frac{kSN^2(I_1+I_2)}{2}.$$

Но $kSN^2I = LI$, и мы можем выразить через заданные параметры катушки неизвестный коэффициент:

$$kSN^2 = L.$$

Магнитные потоки половинок катушки одинаковы, поэтому напряжение конденсатора равно ровно половине напряжения источника $u = U_0\cos\omega t$. Тогда ток участка цепи с конденсатором равен

$$I_C = -0{,}5U_0\omega C\sin\omega t.$$

Обозначим интересующий нас ток через амперметр I, тогда ток дальней от источника половинки катушки равен I, а ближней — сумме токов $I_C + I$. В этом случае магнитный поток через катушку составляет

$$\Phi = LI + 0{,}5LI_C.$$

Приравнивая величины ЭДС индукции и приложенного напряжения, получаем

$$U_0\cos\omega t = \Phi' = LI' + 0{,}5LI_C' =$$
$$= LI' + 0{,}5L(-0{,}5U_0\omega C\sin\omega t)' =$$
$$= LI' + 0{,}5L(-0{,}5U_0\omega^2C\cos\omega t).$$

Отсюда найдем ток I:

$$LI' = U_0(1+0{,}25\omega^2CL)\cos\omega t,$$

$$I = \frac{U_0}{\omega L}(1+0{,}25\omega^2CL)\sin\omega t.$$

Видно, что этот ток отстает по фазе от приложенного напряжения на $\pi/2$.

А.Зильберман

ИНФОРМАЦИЯ

КОНФЕРЕНЦИЯ В АНИЧКОВОМ ЛИЦЕЕ

С 7 по 11 февраля 1996 года в Аничковом дворце в Санкт-Петербурге проходила Открытая научная конференция молодых ученых в области математики, физики и информатики, посвященная памяти академика Сергея Натановича Бернштейна. Один из крупнейших математиков XX столетия, разносторонне образованный ученый, он работал во многих областях математики, таких как конструктивная теория функций, теория вероятностей, дифференциальные уравнения и математическая физика. Им решены XIX и VI проблемы Гильберта. Многие его ученики стали известными математиками.

Необходимость в проведении конференции для одаренной молодежи в Санкт-Петербурге возникла давно. И это не случайно. В городе, известном своими традициями в области элитарного математического образования, всегда существовали научные семинары для талантливой молодежи. В основе этой конференции лежит работа многих научных семинаров, проводимых преподавателями Санкт-Петербургского государственного университета. Высокий научный уровень конференции уже во многом предопределен участием в ней выпускников и учащихся этих семинаров.

При организации конференции мы считали необходимым избежать соревновательности, которая часто сопутствует проведению конференций для школьников. Поэтому мы отказались от присуждения дипломов различных степеней. Каждый участник получил сертификат, подтверждающий его участие и дающий ему право опубликовать работу в сборнике научных трудов конференции. Отметим, что уже сам факт приглашения на конференцию означает, что работа отмечена специалистами. В отборе работ эксперты руководствовались принципами актуальности и новизны научных исследований, самостоятельностью выполнения работы, соответствием работы тематике секции, отдавая предпочтение тем работам, выполнение которых потребовало у начинающего ученого изучения многих областей математики или физики. Последнее, с нашей точки зрения, чрезвычайно важно, так как одна из целей конференции — привлечение учащихся к изучению фундаментальных наук и, в частности, математики и физики.

На конференции было заслушано 42 доклада на 5 секциях — математики, прикладной математики, информатики, теоретической физики, истории и методологии научных исследований. По представлению экспертов секции и по согласованию с участниками, доклады были разделены на пленарные (до 40 мин.), секционные (до 20 мин.) и краткие сообщения (до 5 мин.).

В работе конференции и в составе экспертов приняли участие многие известные ученые — математики и физики, профессора и доценты СПбГУ, РГПУ им.А.И.Герцена, РАН.

Открытие конференции состоялось 7 февраля в концертном зале Аничкова дворца. С приветственным словом к участникам обратился руководитель аппарата представительства Президента в Санкт-Петербурге А.В.Гнетов и председатель Комитета по образованию мэрии О.Е.Лебедев. После непродолжительной официальной части и представления гостей и экспертов секций началась собственно научная часть программы. На совместном пленарном заседании секций математики и физики были заслушаны два доклада. Профессор В.С.Виденский рассказал о жизни и научном творчестве своего учителя академика С.Н.Бернштейна, а учащийся Аничкова лицея Андрей Маслов выступил с докладом «Исторический аспект перспектив компьютерного моделирования». Затем работа конференции проходила на заседаниях секций.

Эксперты дали высокую оценку уровня работ, представляемых по секции математики. Ряд из них, таких как работы учащихся Аничкова лицея Виктора Куницына «Оценка констант в неравенствах для максимальной функции в пространствах мер», Александра Хаустова «Суммирование степенных рядов на границе круга сходимости» и Михаила Генделева «Продолжение линейных функционалов с сохранением свойства инвариантности», можно считать очень хорошими даже для студентов-математиков старших курсов университета. Свободное изложение докладов и исчерпывающие профессиональные ответы на вопросы не оставили и тени сомнения в том, что эти ребята основательно разобрались в поставленных задачах и даже получили результаты, намного превосходящие ожидания их научных руководителей. Эксперты отметили также работы петербуржцев Е.Ахматовой, Ф.Шабашева, С.Добрынина, А.Козлова, М. и А.Горбульских. На секции прикладной математики среди всех работ эксперты выделили работы Ильи Барского и Дмитрия Нурулина (Аничков лицей, Санкт-Петербург), посвященные исследованию нелинейных краевых задач с вырождением, на секции информатики — доклад еще одного ученика Аничкова лицея Сергея Кочугуева «Объектно-ориентированный язык программирования с расширенными полиморфическими возможностями», на секции физики — доклады Андрея Школьникова (лицей при МИФИ, Москва) «Аномальная зависимость времени замерзания воды от начальной температуры», Артема Евдокименко (СУНЦ МГУ) «О положениях равновесия маятника на подвижном основании», Леонида Антоненкова (ФТШ, Санкт-Петербург) «Компьютерное моделирование образования космической пыли в межзвездном пространстве» и Алексея Цырюльникова (Аничков лицей, Санкт-Петербург) «Рассеяние электромагнитных волн на электронном газе». Секция истории и методологии научных исследований отметила доклад А.Маслова, вынесенный на пленарное заседание.

По решению Оргкомитета на конференции учреждены премии по каждой секции, присуждаемые за научные результаты в области математики, физики и информатики. В будущем году Оргкомитет объявляет о присуждении специальных премий по тематике исследований академика С.Н.Бернштейна, именных премий, присуждаемых за научные работы в области алгебры, математического анализа, геометрии, прикладной математики, прикладного и системного программирования, теоретической и экспериментальной физики.

Существенную поддержку в проведении конференции оказали фирмы «Моррисон Контракшн» (Шотландия) и «Коэмар-Эст», предоставившие в распоряжение Оргкомитета ценные подарки и премии.

В 1997 и в последующие годы Аничков лицей при Санкт-Петербургском городском дворце творчества юных при поддержке Санкт-Петербургского государственного университета планирует проводить также конференции в рамках Международной программы. Сроки проведения II Открытой конференции молодых ученых в области математики, физики и информатики установлены: 1 – 10 февраля 1997 года. Участниками конференции могут быть молодые люди, возраст которых не превышает 19 лет. Для участия в конференции необходимо выслать текст доклада или статью *не позднее 20 декабря 1996 года.*

Наш адрес: 191011 Санкт-Петербург, Невский проспект, д. 39, Дворец творчества юных, Оргкомитет II Международной конференции молодых ученых.

Тел.: (095) 310-13-13.

Факс: (095) 310-14-14.

Работы принимаются по тематикам следующих секций: математика, прикладная математика, системное и прикладное программирование, теоретическая и экспериментальная физика, история и методология научных исследований. По решению экспертной группы Оргкомитет рассылает официальные приглашения для участия в конференции в сроки с 5 по 15 января 1997 года. Просим участников сообщить в письме-заявке свой адрес, телефон, адрес и название учебного заведения, его номер телефона и (при наличии) номер факса и электронной почты. Приглашение высылается также в учреждение, где обучается участник конференции.

Надеемся, что идея проведения такой конференции найдет отклик среди научной молодежи, профессоров и преподавателей, учащихся и учителей.

И.Чистяков,
сопредседатель Оргкомитета конференции

kvant.mccme.ru

Задачи

1. Азбукой Морзе записано слово:

Однако не сделаны пробелы между буквами. Попробуйте прочесть это слово. Напомним значения некоторых букв: • — А, • — — В, • Е, — — М, — — — О, — Т.

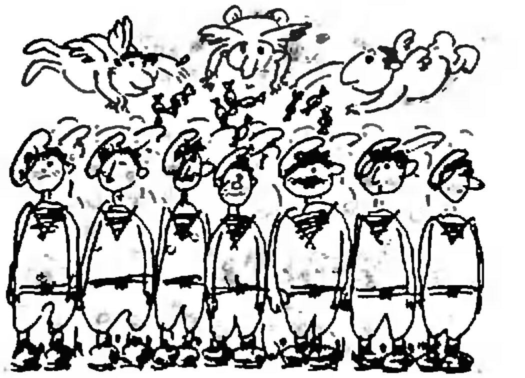
Н.Антонович

2. Буратино и Папа Карло планировали положить свои капиталы на общий счет в банк «Навроде» под 500% годовых, рассчитывая через год забрать вклад величиной 900 золотых. Крах банка изменил их

планы. Папа Карло положил свои деньги в банк «Вампириал» под 50% годовых, а Буратино — в банк «Обирон», даже не поинтересовавшись процентной ставкой. Ровно через год они забрали свои вклады. Оказалось, что папа Карло получил 150 золотых, а Буратино в три раза меньше. Какой процент годовых дает банк «Обирон»?

А.Бальбот

3. Три предпринимателя приехали в воинскую часть, в которой они когда-то служили, и привезли с собой подарки, рассчитывая одарить ими половину солдат этой части. Когда все 252 солдата были построены в одну шеренгу, первый предприниматель вручил подарки каждому четвертому солдату, второй — каждому седьмому, а третий — каждому де-



вятому солдату. Сколько солдат получили подарки, а сколько не получили?

А.Пидора

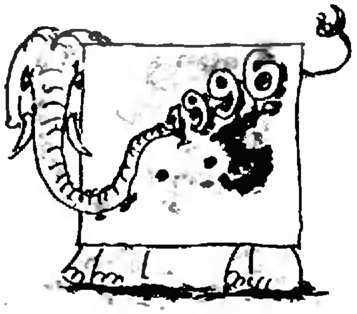
4. Вася подписался на целый год на журнал «Квант». Однако почта работала плоховато, и он

получил не все, что полагалось, а только лишь большую часть причитающихся номеров журнала и меньшую часть причитающихся приложений. Оказалось, что сумма номеров полученных журналов в 5 раз превосходит количество полученных приложений. Без каких номеров журнала остался Вася?

И.Акулич

5. Может ли квадрат целого числа оканчиваться цифрами 1996?

С.Токарев



Иллюстрации П.Чернусского

kvant.mccme.ru

Новые приключения капитана Врунгеля

А.КОТОВА

Номер яхты «Беда»

...И знаете, батенька, так обидно мне стало. Я-то назвал свою яхта «Победа». Хорошее имя, красивое. Известно ведь — как назовешь корабль, так он и плавать будет. Назовешь «Корыто» — он и плавать будет, как корыто...

Да-с, так о чем я... Я говорил, как моя красавица яхта лишилась двух букв в своем названии. Была «Победа» — стала «Беда». Ну, ничего не поделаешь. Раз уж в газеты попало — «Капитан Врунгель и его яхта «Беда», — шуми, не шуми, так на «Беде» и пойдешь...

И тут вспомнил я, что под названием у меня на корме регистрационный номер написан. Побежал на корму, посмотрел — так и есть, одной цифры не хватает. Зову помощника моего — Лома.

— Лом! Какая у нас первая цифра в номере была? Не помнишь?

— Так точно, — отвечает, — не помню. Но я в вахтенном журнале записал.

Повеселел я, говорю:

— Тащи сюда вахтенный журнал!

— Есть! — отвечает.

Смотрю, несет журнал, открывает — и физиономия у него вытягивается. Поглядел я в журнал — а там запись: «Нам выдали номер из четырех цифр, и адмирал Сусликов сказал, что это квадрат целого числа.» А номера самого нет.

— Забавно, — говорю. — Был квадрат целого числа, а теперь стал куб целого числа. Лом! Записать в журнал хотя бы то, что осталось от номера!

— Есть записать! — щелкнул он каблуками.

Плавание наше было, как я уже рассказывал, разнообразным и полным событий, и мне все недосуг было проверить, что там Лом в журнал занес. А после того шторма, когда я принял сигнал «SOS» на большой зуб и мы сняли норвежских моряков с тонущей шхуны, вспомнил я про наш регистрационный номер. Пошел на корму — поглядеть на него... Смотрю — еще одну цифру смыло!

— Лом! — кричу. — Где запись в вахтенном журнале про наш номер?

Бежит мой помощник, несет журнал. Гляжу — чуть плохо мне не стало. «Сегодня мы потеряли первую цифру нашего номера, и он стал кубом целого числа.» А номера нет!

— Лом! Что я приказал тебе записать в вахтенный журнал? — говорю.

— То, что осталось от номера! — отвечает. — А остался куб!

— Теперь от него осталась четвертая степень целого числа, — простонал я. — Но какие цифры мы потеряли, Лом?

— Не могу знать, — бодро отвечает Лом. — Но я запишу в журнал то, что осталось теперь.

— Пиши, что хочешь, — устало ответил я.

И даже смотреть не стал, что он там пишет — так мне было тошно.

Время шло, забот хватало, и вскоре я забыл эту неприятную историю. Прибыли мы в Англию, наняв перед тем в Гамбургском порту матроса Фукса, который, как вы помните, здорово разбирался в картах. Только не в морских, а в игральных.

И надо вам сказать, что в это самое время объявил лондонский яхт-клуб парусную гонку. Предложили и мне заявить «Беду» на соревнования. А что, думаю, яхта у меня — игрушка, красавица, легкая, ходкая — может и выиграть. Буду участвовать!

— Только сообщите, капитан, — говорят мне лорды Адмиралтейства, — номер вашей яхты — и соревнуйтесь на здоровье!

Смотрю я на номер — что за черт! И последних двух цифр не осталось!

— Лом! — кричу. — Какой у нас остаток номера записан?

— «Четвертая степень целого числа», — рапортует Лом.

Ну все, думаю, не участвовать мне в гонках, не выиграть приз Адмиралтейства. Жалко чуть не до слез. Сижу я печально в каюте, насвистываю тоскливую песню, трубкой дымлю...

Заходит ко мне Фукс.

— Что, капитан, грустите? — спрашивает.

Объяснил я ему: так, мол, и так, был у «Беды» регистрационный номер, да сплыл, понимаете, в буквальном смысле этого слова.

— Фу, какая ерунда, — говорит Фукс. — Вы же знаете, что две последние цифры составляли четвертую степень целого числа, три — куб, а целиком оно было квадратом! Неужели вычислить нельзя?

Хлопнул я себя по лбу: позор! Сам ведь всегда говорю, что без науки моряк не моряк, а так, крыса сухопутная. А теперь сижу, как та самая крыса, и думать вовсе перестал!

— Молодец, Фукс! — говорю. — Ну-ка, давай считать!

— Есть считать! — отвечает он и погружается в размышления. Вижу — пальцы загибает, бормочет, сразу ясно — мозги заработали.

Ну и я, конечно, зря времени тратить не стал. И знаете, задачка-то оказалась пустяковая. Мы с ней минут за двадцать справились.

Вы спрашиваете, как? Ну, молодой человек, чему же вас в школе учили? Прикиньте, сколько есть двузначных чисел, которые к тому же являются четвертой степенью какого-нибудь целого числа? 16 — это раз, 81 — это два, а еще? То-то. А сколько среди трехзначных кубов? Всего пять: 125, 216, 343, 512 и 729. Значит, номер наш кончался на 216, верно?

Ну вы тут посидите, посчитайте, а я вам уж так и быть скажу ответ: четырехзначный квадрат, такой, чтоб на 216 кончался, всего один: это 9216, или 96 в квадрате.

Так что зря я на Лома сердился — он, оказывается, самое главное в вахтенный журнал занес. Я ему благодарность вынес и руку пожал.

— Молодец! — говорю. — Так держать!

— Рад стараться! — ответил он.

Египетский фараон

Дело было в Египте. Мы, если помните, отправились на экскурсию к пирамидам. Лом с Фуксом вслед за

kvant.mccme.ru

тощим арабом-проводником пошли внутрь пирамиды — на фараона смотреть, а я снаружи остался. Стою на солнышке, по сторонам поглядываю. Хотя смотреть там особо не на что — песок и песок, никакого разнообразия. Вдруг вижу — бегут мои помощник с матросом, вслед за ними араб, и вопят: спасите, фараон! Я от неожиданности сорвался с места и тоже побежал. Спрашиваю на бегу:

— Что там вас напугало?

— Да фараон же! За нами гонится! — говорит Фукс.

— Что ты мелешь? Он уже тыщу лет как помер, — говорю.

Оборачиваюсь — батюшки! А за нами и вправду фараон бежит! Только не тот, что в пирамиде похоронен, а полицейский: в каске, в мундире, в кожаных ремнях и с пистолетом.

— Стоп, — говорю. — Прекратить отступление!

— Есть прекратить! — отвечает Лом и останавливается. Фукс тоже остановился, а араба пришлось за этот его балахон поймать.

Подождали мы полицейского, спрашиваю я: в чем дело, мол? Только он с нами разговаривать не стал, арестовал всех четверых и в участок. У них там за пирамидой Хеопса и участок оказался, и даже судья.

Только тут я узнал, из-за чего весь сыр-бор. Кто-то от саркофага кусочек отколупнул, фараон только не понял, кто, поэтому всех подозрительных и притащил на суд. У них это дело обычное — каждый день кто-нибудь норовит из пирамиды сувенир вынести. Был случай даже — чуть саркофаг не унесли, хорошо — на выходе из пирамиды караульный заметил.

Ну, судья, конечно, спросил у нас, как дело было. Первым выступил фараон.

— Это, конечно, он, — сказал фараон и показал на араба.

— Нет, ваша честь! — закричал араб. — Это сделал он! — и указал на Лома.

— Врешь ты все! — сказал Лом.

А Фукс проскулил:

— Это не я!

Я объяснил судье, что оказался в участке по ошибке.

— Вы свободны, — сказал мне судья, два полицейских подхватили меня под руки и выставили на улицу. Что делать? Стал я ждать, чем суд кончится. Спрашиваю у часового:

— Что там происходит?

— Судья говорит, что только один из свидетелей сказал правду, — отвечает мне часовой.

— А кто виноват?

— Разбираются, — говорит часовой. — Хотите — ждите, только лучше бы вы пошли куда-нибудь в тень, а то недолго и солнечный удар схватить.

Огляделся я — вижу, метрах в двухстах от участка пальма растет. Сел я под пальмой, жду, а сам от нечего делать размышляю: кто же виноват? И только забрезжила какая-то идея, смотрю — вытаскивают араба в наручниках. Тут у меня в голове что-то щелкнуло, вскочил я и побежал к участку.

— Стойте! — кричу. — Араб не виноват!

Пришлось повоевать, чтоб меня пустили к судье.

— Ошиблись вы, ваша честь, говорю. — Араб тут ни при чем.

— А кто при чем? — строго спрашивает судья и смотрит на меня с неодобрением.

— Вы установили ведь, что только один свидетель сказал правду?

— Установил, — подтвердил судья.

— Но Лом и араб одновременно врать не могут, так?

— Так.

— Значит, Фукс со своей постной физиономией тоже врет? Что он сказал, господин судья?

Тут все посмотрели на Фукса. Он сильно покраснел, опустил глаза и признался:

— Я только на память... Кусочек... — и этот кусочек из кармана вытащил.

Штраф за него я, конечно, заплатил. Но на камбузе он у меня потом целую неделю кастрюли драил — чтоб неповадно было.

Конкурс «Математика 6–8»

Мы продолжаем конкурс «Математика 6–8». Первые 5 задач были опубликованы в четвертом номере журнала. Решения задач из этого номера высылайте не позже 15 января 1997 г. по адресу 117296 Москва, Ленинский проспект, 64а, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Победители — отдельные участники и математические кружки — будут награждены призами журнала и приглашены на заключительный тур конкурса в одну из летних математических школ.

6. Рассмотрим полный набор косточек домино, в котором числа на половинках косточек могут принимать значения от 0 до n. Какое наибольшее число косточек может быть выложено в соответствии с правилами?

А.Жуков

7. Найдите все натуральные числа, которые нельзя представить в виде суммы нескольких (не менее двух) последовательных натуральных чисел.

И.Акулич

8. Все углы некоторого девятнадцатиугольника кратны 10°. Докажите, что у этого девятнадцатиугольника есть пара параллельных сторон.

В.Произволов

9. Пять очаровательных девушек Аня, Белла, Вера, Галя и Даша вышли в финал конкурса «Мисс «Квант»-96». Один из журналистов спросил Дашу: «Кто старше: Вы или Вера?». На что получил следующий ответ:

«Если я старше Ани, то я либо старше Беллы, либо моложе Веры. Если же я не старше Беллы, то я моложе Гали. Если я моложе Гали и старше Ани, то я не моложе Веры. Если я моложе Гали и не старше Беллы, то я старше Ани».

Каков правильный ответ на вопрос журналиста?

Л.Курляндчик

10. На полке стоят 8 книг разного размера. Некто берет две первые книги слева, сравнивает их размеры и ставит большую на третье место слева, а меньшую — на последнее. Затем он вновь берет две первые книги слева и проделывает ту же операцию, и т.д.

а) Всегда ли, анализируя результаты этих процедур, можно выяснить, какая из книг является самой большой?

б) Существует ли такая первоначальная расстановка книг, что во время этого процесса каждая книга будет сравнена с каждой?

в) Существует ли такая первоначальная расстановка книг, что, анализируя результаты указанных процедур, можно указать последовательность книг в порядке их возрастания?

А.Савин

Победители конкурса «Математика 6–8»

Лучших результатов в личном конкурсе добились

Гуляев Михаил — Нижний Новгород, с.ш. 139, 8 кл.,
Бойко Константин — Харьков, физико-математический лицей 27, 8 кл.,
Пилявский Павел — Винница, с.ш. 7, 8 кл.,
Берштейн Михаил — Харьков, физико-математический лицей 27, 6 кл.,
Незлобин Александр — Санкт-Петербург, с.ш. 470, 7 кл.,
Травкин Роман — Липецк, с.ш. 5, 6 кл.,
Филатов Евгений — Иваново, с.ш. 22, 8 кл.,
Плиев Майрам — Владикавказ, школа-лицей 39, 8 кл.,
Машаров Григорий — Екатеринбург, с.ш. 173, 7 кл.,
Имельбаева Назия — Москва, с.ш. 779, 7 кл.,
Середавин Павел — с. Аксеновка Курской обл., 8 кл.,
Мануйлович Иван — Жуковский, с.ш. 7, 6 кл.,
Николаенко Сергей — Харьков, физико-математический лицей 27, 6 кл.,
Изюмов Александр — Санкт-Петербург, 406 гимназия г. Пушкина, 8 кл.,
Петрова Анна — Ижевск, с.ш. 30, 7 кл.

Среди математических кружков победителями стали кружки

при центре дополнительного образования одаренных школьников, Киров — руководитель *Рубанов И.С.*,

при Ивановском энергетическом университете, Иваново — руководитель *Токарев С.И.*,

«Эврика», физико-математический лицей 27, Харьков — руководители *Аринкина Е.Л.*, *Берштейн А.Л.*,

школы-гимназии 44, Пенза — руководитель *Пендюрина А.И.*,

лицея-интерната, Чебоксары, — руководитель *Иванов С.А.*,

политехнической гимназии, Нижний Тагил — руководитель *Закарлюк Л.И.*,

«Военмех» школы 367, Санкт-Петербург — руководители *Вавилов Д.О.*, *Попова Г.И.*,

«Ракета» — воскресный математический кружок, Омск — руководитель *Ланин Д.А.*,

школы 4, Апатиты — руководитель *Иванов Г.А.*,

школы-лицея 67, Иваново — руководитель *Шеронова А.В.*,

при доме творчества п. Кильмезь Кировской обл. — руководитель *Глушков П.М.*,

при ФМШ 64, Омск — руководитель *Топчий В.А.*,

школы-лицея 2, Ангарск — руководитель *Зинченко Р.А.*

при музыкально-математической гимназии, Самара — руководитель *Филатова Н.Е.*,

школы-лицея 90, Краснодар — руководитель *Дегтярева З.А.*

kvant.mccme.ru

ФИЗИКА 9 — 11

Сегодня у нас в гостях один из разделов родственного нам американского журнала «Quantum». Этот раздел называется «Конкурс физиков», ведут его Артур Айзенкрафт и Ларри Кирпатрик, и устроен он следующим образом. Сначала в небольшом объеме обсуждается какая-нибудь проблема, закон или круг явлений (по стилю и уровню изложения эта часть напоминает «Школу в «Кванте»), после чего формулируется условие конкретной задачи. Предлагаемые задачи напоминают задачи Международных физических олимпиад (а иногда и берутся оттуда) тем, что ставится не один вопрос, а целая серия вопросов разного уровня сложности. Иными словами, читателю предстоит провести небольшое исследование на том уровне знаний, которым он обладает. Решение задачи, иногда одного из «конкурсантов», публикуется в журнале через четыре месяца.

Предлагаем вашему вниманию две заметки из раздела «Конкурс физиков», причем сразу с решениями соответствующих задач. Заметка «Откуда берутся облака?» была опубликована в январско-февральском номере 1995 года, а «Восходящая звезда» — в сентябрьско-октябрьском номере 1994 года.

Перевод с английского А. Андрианова.

Откуда берутся облака?

О вечные Тучи, о дочери Моря!
Поднимемся ввысь от бушующих хлябей
И к горным вершинам полет наш направим,
Омоем дождями цветущие склоны...

Аристофан

Как проще всего подвесить в воздухе сто тысяч литров воды? Сделайте облако! То, что влажный воздух легче сухого и должен подниматься вверх, звучит очень странно. Тем не менее так и есть — и каждое кучевое или перистое облако подтверждает это лишний раз всем разнообразием своих форм. «Разобравшись» с облаками, мы многое узнаем и о свойствах газов, и об атмосферных явлениях. Например, прочитав, что на западных склонах Скалистых Гор обилие влаги, а на восточных — засушливо, мы сразу сможем сделать вывод, что ветра в тех краях дуют с запада, т.е. с Тихого Океана.

Как-то в прошлом году я зашел в магазинчик, чтобы купить надувной шарик из блестящей пленки. (Такие шарики, в отличие от привычных нам резиновых, — нерастяжимы, как будто сделаны из тонкой бумаги. — *Прим. перев.*) Меня спросили, что написать на шарике. Я вывел на листе бумаги:

$$pV = \nu RT .$$

Продавщица недоуменно спросила, что это означает. Выяснилось, что в школе она все же изучала химию, и я решил, что она способна понять, как формула идеального газа связана с ее нынешней работой. Я спросил, не бывало ли зимой такого, чтобы покупатели шариков через несколько минут возвращались с жалобой на то, что шарик «спускает». Продавщица ответила, что такое действительно случалось, и ей приходилось каждый раз объяснять, что шарик снова раздуется, когда его внесут в дом. Обычно за время объяснения шарик как раз успевал раздуться до прежних размеров. Загадочное уравнение на моем шарике прекрасно объясняет, что же при этом происходило.

Закон идеального газа $pV = \nu RT$ описывает поведение такого газа в закрытом сосуде. Здесь p — давление, V — объем, T — температура газа (обязательно в кельвинах), ν — количество газа (в молях) и R — газовая постоянная. Например, в моем шарике давление постоянно и равно атмосферному. (В отличие от резинового шарика! — *Прим. перев.*) Внутри магазина шарик полностью надут, а температура газа такая же, как в магазине. Когда покупатель выходит с шариком на холодную улицу, газ начинает остывать. Поскольку давление остается тем же, снижение температуры приводит к уменьшению объема, и шарик съеживается. Когда покупатель возвращается в магазин, газ начинает согреваться, и шарик чудесным образом надувается опять.

Другой пример действия нашего закона — накачивание велосипедной шины. В этом случае объем шины почти не меняется. При накачивании растет давление — и соответственно растет температура воздуха в шине. Если потрогать шину, она окажется теплой. (Реально это можно почувствовать только у гоночного велосипеда — у дорожного шины слишком толстые. — *Прим. перев.*) Зимой автомобильные шины могут быть слегка недокачаны в начале поездки, но при езде они согреются, и давление станет нормальным.

Закон идеального газа может также объяснить, как работает скороварка, почему при движении мышцы диафрагмы наши легкие делают вдох и почему шар, заполненный нагретым воздухом, может летать.

Иллюстрация П. Чернусского

kvant.mccme.ru

Физики и инженеры часто изображают процессы, происходящие с газами, линиями на $p-V$-диаграмме, т.е. на графике, где по вертикали отложено давление, а по горизонтали — объем. Например, процесс, идущий при постоянной температуре, изображается гиперболой — поскольку $pV = \nu RT$, а νRT — постоянная величина.

Особый интерес представляют четыре типа процессов. Первые три происходят, соответственно, при постоянной температуре, постоянном объеме и постоянном давлении. В четвертом же нет никакой передачи тепла — ни газу, ни от газа. Такой процесс называется адиабатическим и происходит, в частности, при очень быстрых изменениях — например, когда в воздухе распространяется звуковая волна. Если данная система теплоизолирована — процессы в ней также адиабатические. Так, газ в теплоизолирующем цилиндре с поршнем будет расширяться адиабатически, если медленно выдвигать поршень.

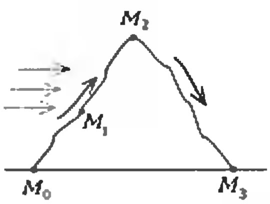
При адиабатическом расширении, очевидно, изменяются и температура, и объем, и давление газа. К счастью, между давлением и объемом в таком процессе есть простая связь:

$$pV^{\gamma} = \text{const},$$

где γ — отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме. Так, для двухатомных газов $\gamma = 7/5 = 1{,}4$.

Сказанного здесь вполне достаточно для участия в конкурсе этого месяца. Задача, в которой рассматривается образование облака на склоне горы, предлагалась на XVIII Международной физической олимпиаде (1987 г.).

Задача. Поток влажного воздуха адиабатически переваливает через горный



хребет (см. рисунок). На метеостанциях M_0 и M_3 атмосферное давление одно и то же и равно 100 кПа, а на M_2 оно 70 кПа. Температура воздуха на станции M_0 составляет 20 °С. Когда воздух поднимается по склону до уровня станции M_1, где давление 84,5 кПа, возникают облака и начинает идти дождь. Влажный воздух, масса которого равна 2000 кг/м², поднимается по склону горы до гребня за 1500 с. За это время из каждого килограмма воздуха выпадает 2,45 г дождя.

1. Найдите температуру воздуха на станции M_1, где появляются облака.

2. Считая, что плотность воздуха линейно падает с высотой, найдите высоту станции M_1.

3. Какова температура на гребне горы?

4. Сколько миллиметров осадков выпадет на склоне за три часа дождя, если между пунктами M_1 и M_2 дождь идет с одинаковой интенсивностью?

5. Какова температура воздуха на метеостанции M_3? Сравните свойства воздуха в точках M_0 и M_3.

Замечания. Воздух можно считать идеальным газом. Влиянием водяного пара на плотность воздуха можно пренебречь. Плотность воздуха на станции M_0 равна $\rho_0 = 1{,}189$ кг/м³. Удельная теплота испарения воды в туче $r = 2500$ кДж/кг.

Алекс Ли, ученик Хот Розмари Холл, хорошо разобрался с облаками. Мы приводим его решение задачи нашего конкурса.

Решение. 1. Поскольку воздух поднимается адиабатически,

$$pV^{\gamma} = \text{const}.$$

Кроме того,

$$\frac{pV}{T} = \text{const}.$$

Отсюда

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1-1/\gamma}, \text{ и } T_1 = 279{,}4 \text{ К} = 6{,}4 \text{ °С}.$$

2. Найдем разность давлений в пунктах M_1 и M_0. Ясно, что она создается весом «дополнительного» воздуха. Рассмотрим воображаемый цилиндр площадью S и высотой h_1. Тогда

$$-p_1S + p_0S = mg,$$

где m — масса воздуха в цилиндре. Поскольку по условию плотность воздуха меняется линейно, можно записать

$$m = h_1S\frac{\rho_0 + \rho_1}{2},$$

где ρ — плотность воздуха. Значение плотности ρ_1 найдем из уравнения

$$\frac{p_0}{\rho_0T_0} = \frac{p_1}{\rho_1T_1},$$

откуда

$$\rho_1 = 1{,}054 \text{ кг/м}^3.$$

Таким образом,

$$h_1 = \frac{p_0 - p_1}{g(\rho_0 + \rho_1)/2} = 1400 \text{ м}.$$

3. Для расчета температуры на гребне горы заменим реальный процесс двумя последовательными и будем считать, что сначала воздух адиабатически поднимается до гребня горы, а затем, на вершине, сразу выпадает весь дождь — при постоянном давлении. Тогда

$$T_2 = T_x + \Delta T.$$

Температура воздуха у вершины до выпадения дождя будет

$$T_x = T_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-1/\gamma} = 264{,}8 \text{ К}.$$

После выпадения дождя в каждом килограмме воздуха выделится количество теплоты $Q = rm$ (здесь $m = 2{,}45$ г/кг). Процесс нагрева воздуха этим теплом — изобарический, и удельная теплоемкость воздуха составляет $c_p = 3{,}5R/\text{M} = 1000$ Дж/(кг·К), где $\text{M} = 29$ г/моль — молярная масса воздуха. Отсюда

$$\Delta T = \frac{Q}{c_p} = \frac{rm}{c_p} = 6{,}1 \text{ К}.$$

В итоге получаем

$$T_2 = T_x + \Delta T = 270{,}9 \text{ К}.$$

4. Из поднимающегося по склону столба воздуха каждую секунду выделяется

$$\frac{(2000 \text{ кг/м}^2)\cdot(2{,}45 \text{ г/кг})}{1500 \text{ с}} = 3{,}3\cdot10^{-3} \text{ кг/(м}^2\cdot\text{с)}$$

осадков, или, поскольку плотность воды составляет 1000 кг/м³,

$$\frac{3{,}3\cdot10^{-3} \text{ кг/(м}^2\cdot\text{с)}}{10^3 \text{ кг/м}^3} = 3{,}3\cdot10^{-6} \text{ м/с}.$$

За три часа, или за $3\cdot3600$ с, выпадает осадков соответственно

$$35{,}3\cdot10^{-3} \text{ м} = 35{,}3 \text{ мм}.$$

5. Перевалившнй через гребень воздух будет опускаться адиабатически. Поэтому

$$T_3 = T_2\left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{1-1/\gamma} = 300 \text{ К} = 27 \text{ °С}.$$

Если бы не было дождя, T_3 было бы равно T_0, т.е. 20 °С. Из-за дождя на склоне воздух приходит на станцию M_3 теплее и суше, чем он был на станции M_0.

Примечание редакции

В условии задачи было задано то количество воды, которое выпадает из облака в виде дождя. Однако его можно легко оценить, зная относительную влажность воздуха у подножия горы. При этом можно также оценить, при какой температуре и на какой высоте начнется выпадение дождя. Попробуйте проделать такие расчеты самостоятельно (приняв, например, что относительная влажность у подножия горы составляет 80%) и сравните с данными в условии задачи.

kvant.mccme.ru

Восходящая звезда

Хлопните в ладоши. Как звучит хлопок одной ладони?

Учебник дзен-буддизма

Может ли из двух звуков получиться тишина?

Учебник физики

Хороший пример возникновения волны можно увидеть при трансляции спортивного матча. Начинается с того, что какая-то группа болельщиков на трибуне встает. Их пример поднимает с мест зрителей в соседнем секторе, затем в следующем и так далее. Когда такая волна вставаний движется по трибунам, сами болельщики не движутся никуда — каждый отдельный зритель остается там, где и был.

Это — хорошая иллюстрация самого неочевидного свойства волн: при распространении волны не происходит никакого перемещения среды, в которой эта волна распространяется. Еще Леонардо да Винчи, изучая круги на воде, обнаружил, что хотя эти круги — они же волны — расходятся от центра, сама вода остается на месте.

А вот эффект интерференции, возникающий при взаимодействии волн, вряд ли можно увидеть на стадионе. Что же происходит, когда встречаются две волны?

Рассмотрим для начала струну, по которой навстречу друг другу движутся два импульса. Возможно, что при их встрече на мгновение образуется один «сверхпик» (рис.1,*а*), что неудивительно. Или, если эти импульсы направлены противоположно, в какой-то момент мы неожиданно увидим совершенно прямую струну (рис.1,*б*), словно никаких импульсов не было.

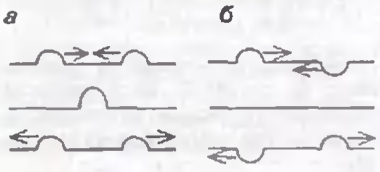


Рис. 1

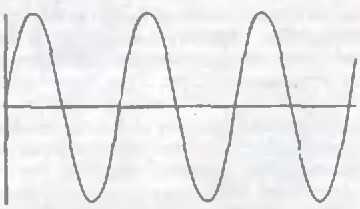


Рис. 2

Периодическая волна — это непрерывная последовательность импульсов. Например, звуковая волна состоит из последовательных сжатий и разрежений воздуха. Если отложить по вертикали давление воздуха в некоторой точке, а по горизонтали — время, мы как раз и получим график типа изображенного на рисунке 2. На рисунке 3 показаны разные варианты взаимодействия двух волн (красная и синяя линии). Видно, что в некоторых точках суммарное смещение (черная линия) велико, а в некоторых вообще равно нулю. Точки наибольшего смещения называются пучностями, нулевого — узлами.

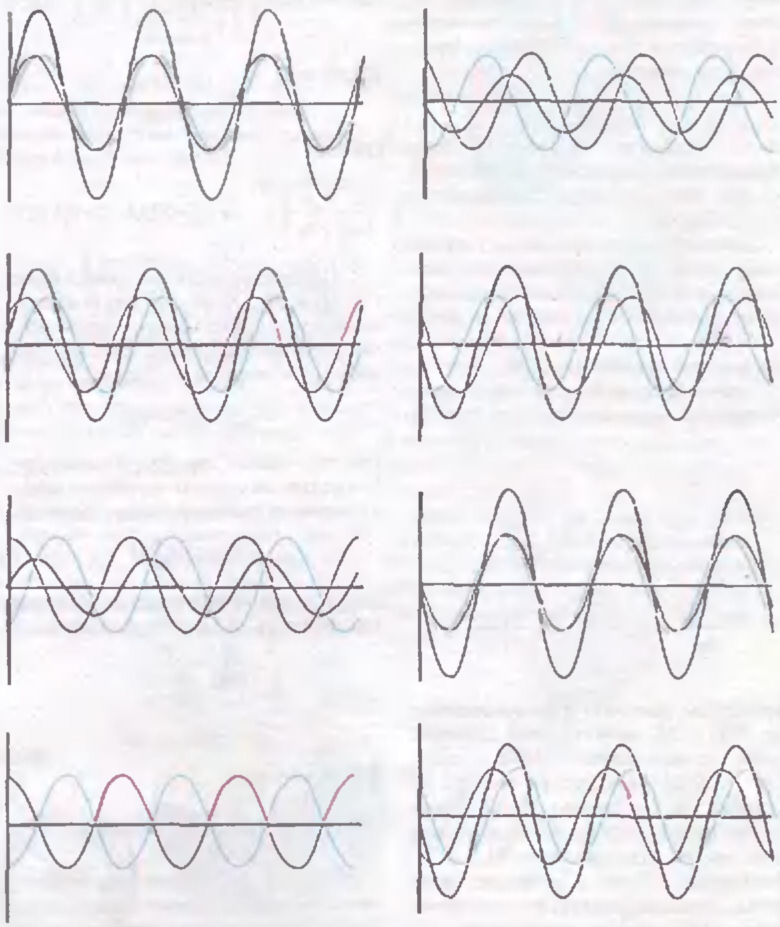


Рис. 3

Интерференция звуковых волн может приводить к тому, что в каком-то месте концертного зала некоторые звуки не будут слышны вообще, т.е. в этом месте окажется узел. Работа инженера-акустика, требующая и знаний, и интуиции, заключается в том, чтобы такого не случалось. Великолепная акустика театра Ла Скала или Карнеги-холла — частично везение, частично чудо.

Возвращаясь к эпиграфу, можно утверждать, что из двух звуков действительно может получиться тишина. Два источника света могут дать темноту, как, скажем, в эксперименте Юнга с двумя щелями или в интерферометре Майкельсона. При взаимодействии двух пучков электронов может случиться, что в некоторые точки электроны не попадают — видимо, это одно из самых важных

Иллюстрация П. Чернуского

открытий двадцатого века. А вот при попытке ответить на вопрос о хлопке одной ладони физическая интуиция вряд ли сможет помочь.

Теперь — очередное конкурсное задание. Задача, в которой обсуждается интерференция радиоволн, предлагалась на XII Международной олимпиаде по физике (1981 г.).

Задача. Приемник радиотелескопа расположен на берегу моря на высоте 2 м от воды. Он принимает радиоволны только с горизонтальной поляризацией электрического поля. Над горизонтом восходит звезда, излучающая на длине волны 21 см. Во время восхода приемник регистрирует чередующиеся максимумы и минимумы мощности сигнала.

1. Определите, при каких высотах звезды над горизонтом регистрируются *максимумы и минимумы*.

2. Растет или падает интенсивность принимаемого сигнала сразу после появления звезды над горизонтом?

3. Найдите отношение максимального и минимального уровней мощности сигналов, следующих друг за другом.

Замечание. Отношение амплитуды отраженной и падающей волн равно $(n-\sin\theta)/(n+\sin\theta)$, где θ — угол, образованный волной с горизонтом, n — показатель преломления. Для воды на данной длине волны $n=9$.

Решение. Принимаемый сигнал определяется интерференцией двух радиоволн — отраженной от поверхности моря и приходящей прямо от звезды (рис.4). Путь отраженной волны длиннее, и, следовательно, между двумя волнами возникает разность хода. Кроме того, при отражении фаза волны меняется на π, что соответствует дополнительному пути $\lambda/2$, т.е. половине длины волны. Полная разность хода должна быть целым числом длин волн при максимальном сигнале приемника и полуцелым — при минимальном.

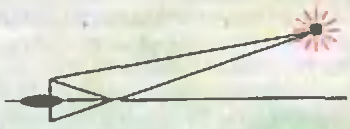


Рис. 4

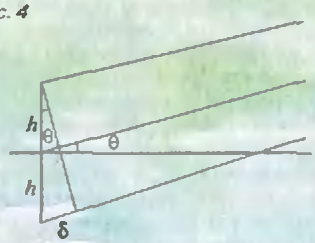


Рис. 5

Рассмотрим отражение нашего приемника в море (рис.5). Ясно, что путь отраженной волны до приемника равен прямому пути до отражения приемника. В таком случае разность хода находится легко и оказывается равной

$$\delta = 2h\sin\theta,$$

где θ — высота звезды над горизонтом, h — высота приемника над уровнем моря.

Условия для максимумов и минимумов соответственно запишутся в виде (не забудьте об изменении фазы при отражении от воды)

$$\delta_{max} = \left(k+\frac{1}{2}\right)\lambda,\ \delta_{min} = k\lambda,$$

где k — целое число.

1. Максимумы и минимумы наблюдаются при высотах звезды над горизонтом, которые легко определяются из следующих равенств:

$$\sin\theta_{max} = \frac{\delta_{max}}{2h} = \frac{(k+1/2)\lambda}{2h},$$

$$\sin\theta_{min} = \frac{\delta_{min}}{2h} = \frac{k\lambda}{2h}.$$

2. При появлении звезды над горизонтом $\theta = 0$. Из-за сдвига фаз при отражении это соответствует минимуму сигнала: волны приходят в противофазе. Затем интенсивность сигнала начнет расти.

3. Амплитуда в максимуме сигнала равна сумме электрических полей исходной и отраженной волн. Пусть поле исходной волны E, тогда

$$E_{max} = E + E\frac{n-\sin\theta}{n+\sin\theta} = E\frac{4nh}{2nh+(k+1/2)\lambda}.$$

Аналогично

$$E_{min} = E - E\frac{n-\sin\theta}{n+\sin\theta} = E\frac{2k\lambda}{2nh+k\lambda}.$$

Поскольку искомая мощность сигнала пропорциональна квадрату амплитуды поля, легко рассчитать относительные мощности I всех последовательных минимумов и максимумов. Некоторые значения приведены в таблице:

k	θ_{max}	θ_{min}	I_{max}	I_{min}
0	1,50°	0	3,9768	0
1	4,52°	3,01°	3,9309	0,000135
2	7,54°	6,03°	3,8858	0,000532
3	10,59°	9,06°	3,8415	0.00118

Электризация капель жидкости — от истории до практического использования

Г.ЕФАШКИН, В.КОЗЛОВСКИЙ

Представьте себе сосуд с водой, из которого через небольшое отверстие вытекает вода — каплями или струйкой, дробящейся на капли. Так вот оказывается, что в присутствии электрического поля вытекающие капли становятся заряженными. При этом в сосуде накапливается заряд противоположного знака, который препятствует уносу индуцированного на каплях заряда. Начиная с некоторого момента, капли становятся нейтральными, а заряд сосуда перестает расти.

Впервые это явление обнаружил и исследовал знаменитый физик девятнадцатого века У.Томсон (лорд Кельвин). Он заметил также, что если воду заземлить, т.е. дать возможность накапливающимся зарядам уходить из сосуда, то зарядка капель не прекращается и устройство становится генератором заряженных капель.

Попробуем сделать некоторые расчеты и обсудим возможности использования устройства Томсона. Но прежде поговорим немного о воде и ее электрических свойствах.

Совершенно чистая вода при комнатной температуре обладает проводимостью порядка 10^{-6} Ом$^{-1}\cdot$м$^{-1}$ (по ГОСТу проводимость не должна превышать $5\cdot10^{-6}$ Ом$^{-1}\cdot$м$^{-1}$). Но вода даже при комнатной температуре растворяет многие соли, которые диссоциируют на ионы, отчего проводимость воды во много раз возрастает. Например, в воде Онежского озера содержание ионов (в мг/л) следующее:

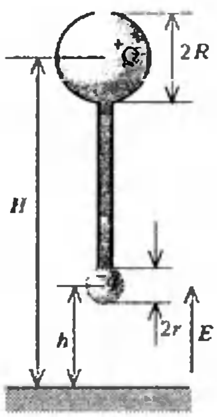
$$Ca^{2+} - 5{,}4;\ Mg^{2+} - 1{,}6;\ Na^{+} + K^{+} - 1{,}5;$$
$$HCO_3^{-} - 20{,}4;\ SO_4^{2-} - 1{,}3;\ Cl^{-} - 14{,}9.$$

Содержание этих же ионов в воде Волги в несколько раз больше. Согласно данным измерений, электропроводность растворов различных солей (в Ом$^{-1}\cdot$м$^{-1}$) при содержании 1 мг/л имеет такие значения:

$$NaCl - 1{,}35\cdot10^{-4};\ KCl - 1{,}38\cdot10^{-4};$$
$$KHCO_3 - 0{,}74\cdot10^{-4};\ CaCl_2 - 1{,}28\cdot10^{-4};$$
$$Na_2SO_4 - 0{,}82\cdot10^{-4};\ MgCl_2 - 1{,}36\cdot10^{-4}.$$

Вода морей и океанов содержит в сотни раз больше примесей солей, что пропорционально увеличивает и ее проводимость.

Можно указать еще одну особенность воды — пространственную разделенность зарядов противоположных знаков ее молекул, что приводит к появлению у них значительного дипольного момента. Поворот диполей во внешнем электрическом поле, т.е. перемещение положительного заряда в направлении поля, а отрицательного в противоположном направлении, приводит к появлению встречного поля, существенно ослабляющего внешнее. Другими словами, это означает, что диэлектрическая проницаемость воды велика: $\varepsilon \approx 80$ при комнатной температуре. Ослабление поля вызывает пропорциональное ослабление токов, выравнивающих потенциал проводника, что равнозначно кажущемуся увеличению удельного электрического сопротивления ρ. Таким образом, можно сказать, что время установления электрического равновесия в проводнике определяется произведением его диэлектрической проницаемости и удельного сопротивления, точнее — величиной $\varepsilon_0\varepsilon\rho$, имеющей размерность времени (здесь ε_0 — электрическая постоянная). Для чистой воды это время приблизительно равно $2\cdot10^{-4}$ с. Неприменимость к воде понятий электростатики проводников может иметь место, например, при скорости течения $v > L/(\varepsilon_0\varepsilon\rho)$, где L — линейный размер находящейся в поле области воды, но эта скорость слишком велика по сравнению с реальной скоростью вытекания воды из отверстия в сосуде.



Теперь займемся расчетами. Посмотрите на рисунок устройства Томсона, состоящего из стеклянного сферического сосуда, снабженного длинной (сравнительно с размером сосуда) и тонкой трубкой, на конце которой образуется сферическая капля радиусом чуть больше толщины трубки. Заряд и радиус сосуда обозначим Q и R, капли — соответственно q и r. Напряженность поля Земли $\vec{E}$ направим вверх (реально она направлена вниз), отсчет потенциала поля будем производить от поверхности Земли. Высоту сосуда над Землей обозначим H, высоту капли — h, так что длина трубки будет $l = H - h$. Пренебрегая взаимодействием зарядов сосуда и капли, а также наличием зарядов в трубке (поскольку она тонкая), запишем условие равенства потенциалов на поверхностях сосуда и капли:

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R} - EH = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r} - Eh.$$

Если система изолирована, то суммарный заряд сосуда и капли можно считать постоянным и равным Z. Тогда

$$q = \frac{Z - 4\pi\varepsilon_0\varepsilon RlE}{1 + R/r}.$$

В начале заряд устройства, очевидно, был равен нулю: $Z_0 = 0$. Первая капля, отрываясь, уносит свой заряд, так что

$$Z_1 = -q_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon RlE}{1 + R/r}.$$

Заряд второй капли по абсолютной величине меньше заряда первой, третьей меньше второй и т.д., так что заряд устройства Z_n нарастает до тех пор, пока при $n \to \infty$ не достигнет величины $Z_\infty = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon RlE$. После этого капли будут падать уже незаряженными ($q_\infty = 0$).

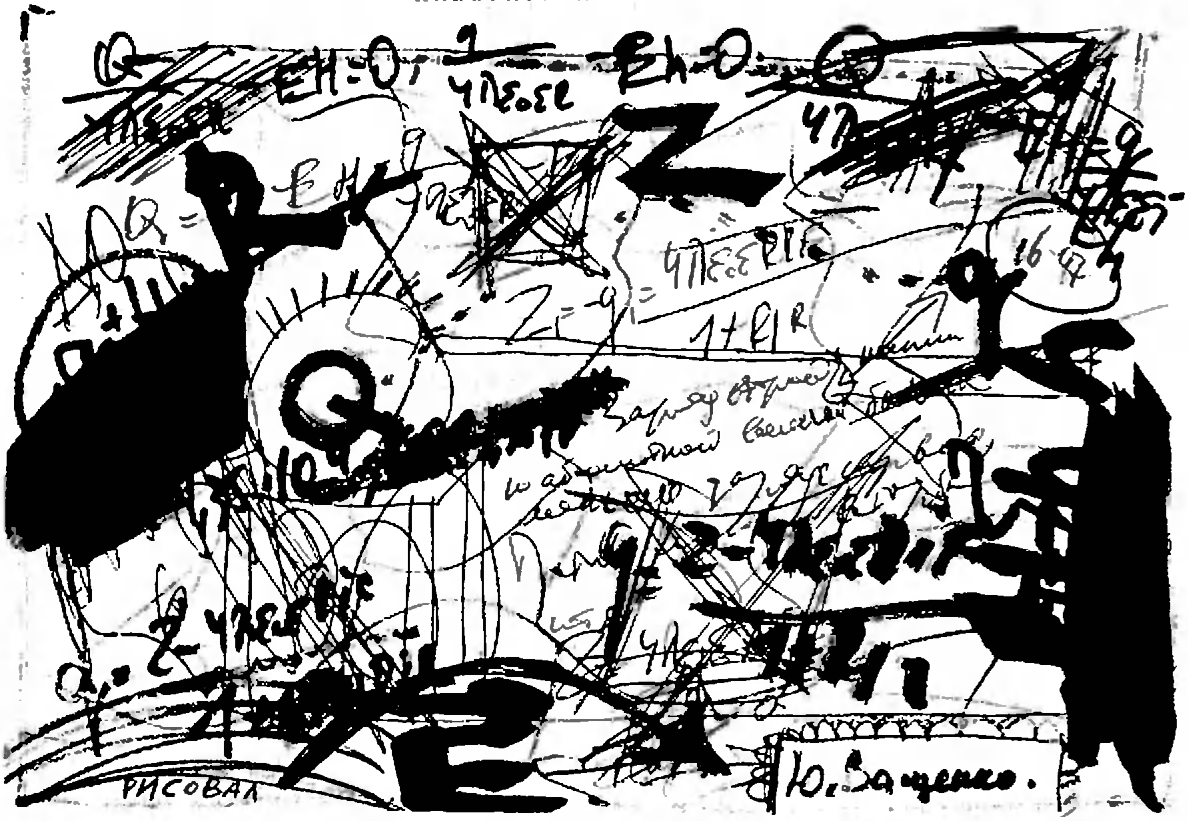
Если воду заземлить, то потенциалы сосуда и капли будут нулевыми:

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R} - EH = 0,\quad \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r} - Eh = 0,$$

откуда следует, что заряды всех капель одинаковы, а заряд сосуда не меняется. При напряженности поля $E = 10^2$ В/м (соответствующей безоблачной погоде) и значениях $r = 10^{-3}$ м и $h = 1$ м получается $q = 10^{-11}$ Кл. При расходе 1 м^3 воды, из которого образуется $2{,}5\cdot10^8$ капель, уносимый ими заряд составляет $2{,}5\cdot10^{-3}$ Кл.

Как же можно использовать устройство Томсона? Например, проведя опыт и

kvant.mccme.ru



измерив потенциал сосуда с водой, можно было бы определить напряженность электрического поля Земли в данном конкретном месте. Правда, для этих целей описанное устройство давно не используется. А вот индукционная электризация водяных капель нашла свое применение в технике.

Висящая в воздухе заряженная капля притягивает пылинки, которые после осаждения капли удаляются из атмосферы, чем достигается очищение воздуха от пыли. Большое количество пыли образуется, например, в угольных шахтах, где и может быть использовано устройство Томсона. Но для повышения эффективности его действия необходимо существенно увеличить число создаваемых капель. Для этого жидкость под давлением пропускают через небольшое отверстие, по выходе из которого она распыляется — такое устройство называется форсункой. Чтобы увеличить заряд капли (и тем самым увеличить число притягиваемых пылинок), необходимо создать более сильное поле, чем естественное. В условиях угольной шахты нельзя применять обычные источники напряжения — батареи или динамомашины (из-за опасности возникновения искры), поэтому следует вернуться к использованию статического поля заряженного диэлектрика. Однако при высокой влажности воздуха заряд быстро «стекает» с диэлектрика. Как же быть?

На помощь пришел электрет — специально изготовленная пластинка диэлектрика, способная создавать внешнее электрическое поле и «держать» его в течение длительного времени даже в условиях высокой влажности. На двух поверхностях электрет несет заряды противоположных знаков, имея, как магнит, «северный» (плюсовой) и «южный» (минусовой) полюсы. Поднося к струе воды положительно заряженную сторону электрета, можно получить отрицательно заряженные капли, и наоборот. Иначе говоря, электризация капель характеризуется свойством инверсии знака заряда при переворачивании электрета, и это свойство можно использовать для практических целей. (Подробнее об этом можно прочитать в статье Г.Ефашкина «Электреты — диэлектрические аналоги магнитов» в «Кванте» №6 и 7 за 1991 год. — *Прим. ред.*)

Затронем еще вопрос о влиянии на человека вдыхаемых вместе с каплями электрических зарядов. Этот вопрос в свое время подробно изучался сподвижником К.Э.Циолковского и неутомимым исследователем солнечно-земных связей А.Л.Чижевским. Оказывается, отрицательные заряды благотворно влияют на жизнедеятельность организмов, а положительные заряды ее угнетают. Сегодня и медики, и физики полностью подтверждают эти выводы и подчеркивают важность для жизнедеятельности избытка в организме отрицательных зарядов. (Это связано с тем, что Земля, как космическое тело, не нейтральна, а несет избыточный отрицательный заряд, хотя существуют и участки земной поверхности с положительным зарядом.)

Так, при опрыскивании водой из электретных форсунок растений (огурцы, редис, морковь, помидоры и т.д.) наблюдается повышение урожайности в 1,5–3 раза и рост сопротивляемости растений болезням и вредителям. В настоящее время проводятся испытания электретного электростатического душа в целях улучшения самочувствия человека и, возможно, физиотерапевтического лечения. Подтверждается, что послеоперационное орошение открытых ран, а также наложенных швов, ускоряет их заживление. К сожалению, в нашем сегодняшнем экологически изуродованном мире часто наблюдается дефицит отрицательных зарядов, что немедленно сказывается на жизнедеятельности человека, животного, растения.

Таким образом, почти забытое устройство Томсона сегодня все больше напоминает о себе в некоторых областях науки и техники.

kvant.mccme.ru

Разрежем на треугольники

О.ИЖБОЛДИН, Л.КУРЛЯНДЧИК

В ЭТОЙ заметке мы разберем несколько задач, связанных с разрезанием многоугольников на треугольники. Например, квадрат на треугольники можно разрезать многими способами (рис. 1 – 4).

Посмотрим внимательно на приведенные картинки. Так, например, на рисунках 1 и 4 все треугольники прямо-

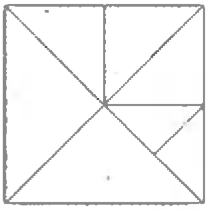


Рис. 1

угольные, а на рисунке 2 — все тупоугольные. Сразу же возникает вопрос:

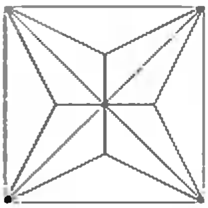


Рис. 2

могут ли все треугольники разбиения быть остроугольными?

Кроме того, на всех приведенных рисунках обязательно есть два треугольника с общей стороной. А всегда ли это верно?

На рисунках 2 и 3 все треугольники имеют одинаковую площадь. Но в обоих случаях количество треугольников четно. А можно ли разрезать квадрат на нечетное число равновеликих треугольников?

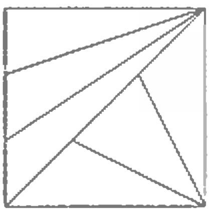


Рис. 3

Нас будет интересовать, можно ли разрезать многоугольник на треугольники с соблюдением некоторого свойства. Причем это могут быть свойства,

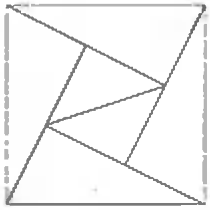


Рис. 4

касающиеся и углов треугольников, и количества треугольников, и их взаимного расположения, и многие другие.

Остроугольные треугольники

Задача 1. *Можно ли разбить квадрат на остроугольные треугольники?*

Решение этой задачи естественно начать с попыток разрезать квадрат требуемым образом. Первое, что приходит в голову, — это или разрезать на два треугольника диагональю (рис.5), или разрезать на четыре треугольника двумя диагоналями (рис.6).

В любом случае теперь уже нам придется разрезать на остроугольные треугольники прямоугольный треугольник.

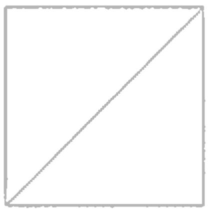


Рис. 5

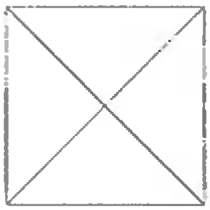


Рис. 6

А как вообще можно разрезать треугольник на треугольники? Возникают три простейшие картинки (рис.7 – 9).

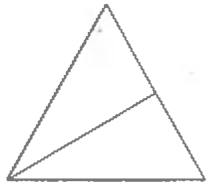


Рис. 7

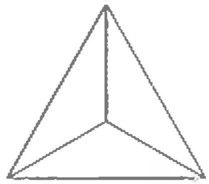


Рис. 8

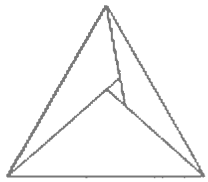


Рис. 9

На всех трех рисунках хотя бы один из треугольников разбиения не остроугольный! Теперь попытайтесь самостоятельно порисовать какие-нибудь картинки, и у вас, вероятно, возникнет гипотеза, что такого разбиения вообще не существует. Возникла такая знакомая каждому математику ситуация. Надо сделать принципиальный выбор — либо продолжить попытки найти нужное разбиение, либо искать доказательство того, что такого разбиения вообще нет. Нам хочется, чтобы вы еще подумали над этой задачей, и поэтому ответ мы скажем немного позже. А сейчас перейдем к другому вопросу.

Треугольники с чистой границей

На всех рисунках, которые уже были приведены, всегда можно найти треугольник, ни на одной из сторон которого нет вершин других треугольников. Такие треугольники будем называть «треугольниками с чистой границей».

Задача 2. *Можно ли разбить выпуклый n-угольник на треугольники так, чтобы не было ни одного треугольника с чистой границей?*

Мы докажем, что требуемого в задаче разбиения не существует. Предположим противное. Пусть T — количество треугольников разбиения, $B_{внст}$ — количество внутристоронних вершин, т.е. тех, что лежат на сторонах треугольников разбиения. Ясно, что $B_{внст} \geq T$, так как для каждого треугольника можно указать внутристороннюю вершину, лежащую на его границе. При этом разным треугольникам сопоставляются разные вершины, ибо никакая вершина не может быть внутристоронней сразу для двух треугольников.

Теперь посчитаем сумму всех углов во всех треугольниках. С одной стороны, она равна $180° \cdot T$. С другой стороны, сумма всех углов, примыкающих к внутристоронним вершинам, равна $180° B_{внст}$, а сумма углов, примыкающих к вершинам многоугольника, равна $180°(n-2)$. Поэтому сумма всех углов треугольников разбиения не меньше чем $180° B_{внст} + 180°(n-2)$. Отсюда

$$180° \cdot T \geq 180° B_{внст} + 180°(n-2) > 180° B_{внст},$$

что противоречит ранее полученному неравенству $B_{внст} \geq T$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любого разбиения выпуклого многоугольника на треугольники найдется хотя бы один треугольник разбиения с чистой границей.*

Упражнение 1. В формулировке теоремы было требование выпуклости многоугольника. Верна ли эта теорема для невыпуклых многоугольников?

Без общих сторон

Задача 3. *Можно ли разбить выпуклый n-угольник на треугольники таким образом, чтобы никакой отрезок не являлся общей стороной для двух треугольников?*

Начнем с простейшего случая, когда $n = 3$. На рисунке 9 приведено искомое разбиение.

Попытайтесь теперь разбить выпуклый четырехугольник требуемым образом. Первые попытки естественно начать с разрезания квадрата. Для начала посмотрите внимательно на рисунки 1–4. На каждом из них легко найти пару треугольников с общей стороной.

И теперь мы снова перед дилеммой: еще раз пытаться искать нужное разбиение или заняться доказательством его отсутствия.

Так вот оказывается, что требуемого разбиения действительно не существует, т.е. при любом разбиении выпуклого n-угольника ($n \geq 4$) найдутся два треугольника с общей стороной.

Доказать это утверждение не просто. Начнем с доказательства одного важного вспомогательного утверждения.

Неравенство $B \leq T+2$

Теорема 2. *Пусть выпуклый n-угольник разбит на T треугольников, B — число всех вершин этих треугольников. Тогда* $B \leq T+2$.

Доказательство. Сумма всех углов во всех треугольниках разбиения равна $180° \cdot T$. Теперь посчитаем эту сумму другим способом. Для этого разобьем множество вершин всех треугольников на две группы.

К первой отнесем все вершины n-угольника (на рисунке 10 они изображены красным цветом).

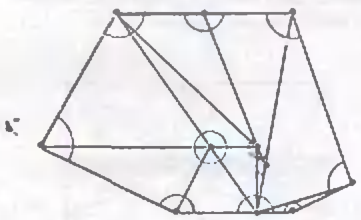


Рис. 10

Ко второй — все остальные (на рисунке 10 эти точки синие).

Очевидно, что сумма всех углов треугольников при красных вершинах совпадает с суммой углов n-угольника, значит,

сумма «красных углов» $= 180°(n-2)$.

Рассмотрим теперь любую из синих вершин. Очевидно, что сумма углов при этой вершине равна 180° или 360° (см. рис.10), т.е. в любом случае не меньше чем 180°. Так как у нас всего $B-n$ синих вершин, то

сумма «синих углов» $\geq 180°(B-n)$.

Таким образом,

$180° \cdot T =$

= сумма углов всех треугольников =

= сумма «красных углов» +

+ сумма «синих углов» $\geq$

$$\geq 180°(n-2) + 180°(B-n) = 180°(B-2).$$

Отсюда и следует искомое неравенство

$$B \leq T+2.$$

Теорема доказана.

Решение задачи 3

Предположим, что мы разбили выпуклый n-угольник на треугольники так, что ни у каких двух треугольников нет общей стороны.

Посчитаем двумя разными способами число отрезков, которые являются сторонами треугольников разбиения. Будем называть эти отрезки «сторонами» и обозначим их количество через C. Очевидно, что это число равно $3T$, так как у любого треугольника три стороны и никакие стороны двух разных треугольников не совпадают. Итак,

$$C = 3T.$$

Разобьем теперь множества вершин и сторон на два класса:

а) Граничные вершины и стороны — это те, которые лежат на границе нашего n-угольника. Обозначим число граничных вершин через $B_{гр}$, а число граничных сторон через $C_{гр}$.

б) Внутренние вершины и стороны — это те, которые не являются граничными. Обозначим число внутренних вершин и сторон через $B_{вн}$ и $C_{вн}$ соответственно.

Ясно, что

$$B = B_{гр} + B_{вн}, \quad C = C_{гр} + C_{вн}.$$

Установим теперь взаимосвязь между числом граничных сторон $C_{гр}$ и числом граничных вершин $B_{гр}$. Для этого «пропутешествуем» вдоль границы n-угольника. При путешествии у нас будут чередоваться «вершины» и «стороны», а значит, их количества совпадают! Итак,

$$B_{гр} = C_{гр}.$$

Взаимосвязь между числом внутренних сторон $C_{вн}$ и числом внутренних вершин $B_{вн}$ также существует, но она более сложная:

$$3B_{вн} \geq C_{вн}.$$

Для доказательства этого неравенства мы среди внутренних вершин выделим те, которые лежат внутри некоторой стороны. Мы назовем такие вершины внутристоронними, а их количество обозначим через $B_{внст}$. Конечно же, $B_{вн} \geq B_{внст}$, и поэтому для доказательства неравенства $B_{вн} \geq C_{вн}$ нам достаточно доказать, что

$$3B_{внст} \geq C_{вн}.$$

Это утверждение будет доказано, если мы сумеем каждой внутристоронней вершине сопоставить три внутренних стороны так, что каждая внутренняя сторона окажется сопоставленной хотя бы один раз. Такое сопоставление действительно существует (рис.11)!

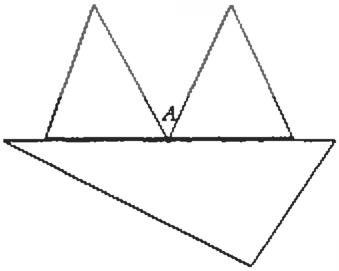


Рис. 11. Вершине A соответствует одна красная сторона, для которой эта вершина является внутренней, и две синих стороны

Нам необходимо лишь проверить, что каждая внутренняя сторона окажется сопоставленной хотя бы одной внутристоронней вершине. Это очевидно в случае, если на стороне лежит вершина: этой вершине и сопоставляется рассматриваемая сторона. Если же на внутренней стороне не лежит никаких вершин, то она будет частью некоторой стороны другого треугольника. Поэтому хотя бы один из ее концов является внутристоронней вершиной, которой и будет сопоставлена эта сторона.

Итак, $3B_{\text{вист}} \ge C_{\text{вн}}$ и, значит, $3B_{\text{вн}} \ge C_{\text{вн}}$. Поэтому

$$3T = C = C_{\text{вн}} + C_{\text{гр}} \le 3B_{\text{вн}} + B_{\text{гр}} =$$

$$= 3(B_{\text{вн}} + B_{\text{гр}}) - 2B_{\text{гр}} =$$

$$= 3B - 2B_{\text{гр}} \le 3B - 2n.$$

Следовательно,

$$B \ge T + \frac{2}{3}n.$$

А так как $n \ge 4$, то

$$B \ge T + \frac{8}{3} > T + 2,$$

что противоречит теореме 1.

Таким образом доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *Для любого разбиения выпуклого n-угольника ($n \ge 4$) на треугольники найдутся два треугольника с общей стороной.*

Проанализировав приведенное доказательство, решите следующие упражнения.

Упражнения

2. Пусть треугольник разбит на T треугольников так, что никакой отрезок не является общей стороной двух треугольников разбиения. Пусть B — число всех вершин треугольников разбиения. Докажите, что

$$B = T + 2.$$

3. Пусть n-угольник ($n \ge 4$) разбит на треугольники. Докажите, что найдутся по крайней мере $n - 3$ отрезка, каждый из которых является общей стороной двух треугольников разбиения.

4. В формулировках теорем 2 и 3 было требование выпуклости многоугольника. Верны ли эти теоремы для невыпуклых многоугольников?

Снова остроугольные треугольники

В двух уже разобранных задачах было доказано, что искомых разбиений не существует. В связи с этим возникает ощущение, что если искомую картинку сразу не удается нарисовать, то ее попросту нет. Однако это не так! Действительно, вернемся к задаче 1 о разбиении квадрата на остроугольные треугольники. Несмотря на то, что сразу нам не удалось построить нужное разбиение, оно на самом деле существует (рис.12)!

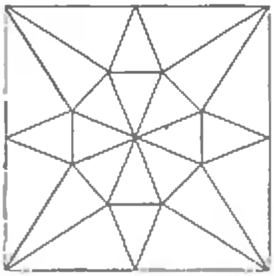


Рис. 12

Упражнения

5. В приведенном примере (см. рис. 12) 24 треугольника. А есть ли разбиение с меньшим числом треугольников?

6. Докажите, что любой выпуклый многоугольник можно разрезать на остроугольные треугольники.

Равновеликие треугольники

Задача 4. *Можно ли разрезать квадрат на нечетное число треугольников равной площади?*

Эта задача по формулировке весьма похожа на уже разобранные нами задачи. Тем не менее, она значительно сложнее. Ответ в этой задаче отрицательный. Однако доказывать это элементарными средствами мы не умеем. Мы были бы очень рады, если бы это удалось кому-нибудь из читателей. Для тех, кто не пожалеет времени и усилий и захочет ознакомиться с ее весьма непростым решением, мы рекомендуем статью «2-адические числа» («Квант» №2 за 1979 г.). Эта статья и посвящена решению задачи 4.

Мозаика разбиений

Мы чуть-чуть коснулись темы разбиения многоугольников на треугольники. В рамках этой тематики можно сформулировать много интересных задач, каждая из которых может стать предметом небольшого самостоятельного исследования. Ясно, что вариаций здесь довольно много. Мы еще далеко не исчерпали даже тему разрезания квадрата. Вот вам еще несколько задач для самостоятельных исследований.

1. На рисунке 2 квадрат разбит на 12 тупоугольных треугольников, на рисунке 13 — на 10. А можно ли разрезать квадрат

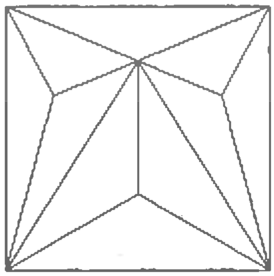


Рис. 13

на меньшее число тупоугольных треугольников? На какое?

2. Можно ли квадрат разрезать на попарно различные треугольники так, чтобы эти треугольники были

а) прямоугольными,
б) равнобедренными,
в) прямоугольными и равнобедренными,
г) подобными между собой,
д) равных периметров,
е) равновеликими?

3. Можно ли квадрат разбить на

а) «очень тупоугольные» треугольники, т.е. такие, что один из углов каждого треугольника разбиения больше 120° (или больше 179°),
б) «почти равносторонние» треугольники, т.е. такие, что все углы меньше 70°,
в) треугольники с заданными углами α, β, γ (например, с углами 30°, 60°, 90°)?
г) Для каких α квадрат можно разбить на треугольники так, чтобы все углы были меньше α?

4. Можно ли квадрат разбить на треугольники так, чтобы каждый треугольник имел ровно

а) два соседа,
б) три соседа,
в) n соседей (где n — заданное число)?

При этом соседями мы можем назвать треугольники, имеющие хотя бы одну общую точку — это один вариант для исследования, или же имеющие общий отрезок — это другой вариант.

Законы отражения и преломления света

Ю.ЧЕШЕВ

Известно, что при падении плоской световой волны на границу раздела двух сред волна претерпевает отражение и преломление. При этом

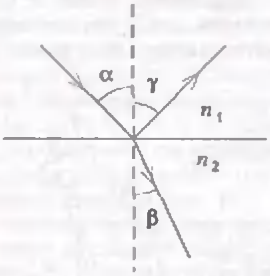


Рис. 1

справедливы соответствующие законы отражения и преломления (рис.1):

$$\alpha = \gamma,$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2},$$

где α — угол падения, γ — угол отражения, β — угол преломления, n_1 и n_2 — показатели преломления двух сред, а v_1 и v_2 — скорости распространения волны в этих средах; кроме того, луч падающий, луч отраженный, луч преломленный и перпендикуляр, восставленный в точке падения, лежат в одной плоскости.

Приведенные соотношения имеют смысл в случае постоянства показателей преломления n_1 и n_2. В действительности показатель преломления может зависеть от длины волны света (цвета волны), проходящей через среду, а также от координаты волны в пространстве. В этом случае говорят о частотной или пространственной дисперсии показателя преломления.

Рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 1. *Поверхность озера глубиной H = 1,3 м покрыта тонким слоем льда со снегом, практически не пропускающим свет. Найдите площадь светлого пятна на дне озера от полыньи в форме круга радиусом R = 2 м. Озеро освещается рассеянным светом. Показатель преломления воды $n = 4/3$.*

Лучи света, падающие на поверхность полыньи под произвольным углом α (рис.2), который может изменяться от 0 до $\pi/2$, преломляются жидкостью и попадают на дно водоема под углом β к линии OO_1 так, что

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n.$$

В результате освещается дополнительная часть дна водоема на расстоянии BC

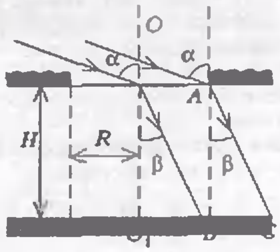


Рис. 2

от края полыньи. При этом BC максимально, когда $\alpha = \pi/2$, следовательно, $\sin\beta = 1/n$. Отсюда для радиуса светлого пятна получаем

$$r = O_1C = O_1B + BC = R + H\,\mathrm{tg}\,\beta =$$

$$= R + \frac{H}{\sqrt{n^2 - 1}} = 3{,}5 \text{ м}.$$

Задача 2. *Где видит наблюдатель рыбку, находящуюся в диаметрально противоположной от него точке шарообразного аквариума? Радиус аквариума R, показатель преломления воды $n = 4/3$.*

Если рыбка находится в точке S (рис.3), то наблюдатель видит рыбку в точке S' на продолжении диаметра. В самом деле, проведем луч SP от рыбки под небольшим углом α к оси O_1OO_2. Считая толщину стеклянного аквариума малой по сравнению с его радиусом и пренебрегая искажением луча на стенке аквариума, для проведенного луча

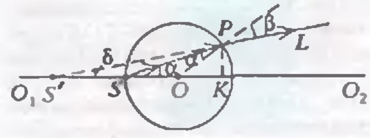


Рис. 3

имеем

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{n}.$$

Продолжив луч PL влево до пересечения с осью O_1OO_2, получим изображение рыбки S'. Пусть $S'S = x$. В треугольнике $S'SP$ угол $\delta = 2\alpha - \beta$. Проведем PK перпендикулярно к оси. Тогда из треугольников SPK и $S'PK$ имеем

$$SK\,\mathrm{tg}\,\alpha = (x + SK)\,\mathrm{tg}\,\delta.$$

Считая углы малыми, так что $\mathrm{tg}\,\alpha = \alpha$ и $\mathrm{tg}\,\beta = \beta$, можно положить $SK = 2R$. Тогда

$$2R\alpha = (x + 2R)\delta,$$

или

$$2R\alpha = (x + 2R)(2\alpha - \beta).$$

Учитывая, что $\beta = \alpha n$, получим

$$2R\alpha = (x + 2R)\alpha(2 - n),$$

откуда находим

$$x = 2R\frac{n-1}{2-n} = R.$$

Задача 3. *Цилиндрический стакан с жидкостью поставлен на монету, рассматриваемую сквозь боковую стенку стакана. Укажите наименьшую возможную величину показателя преломления жидкости n, при которой монета не видна.*

Пусть стакан находится чуть выше монеты так, что расстояние между монетой и дном стакана равно x (рис.4).

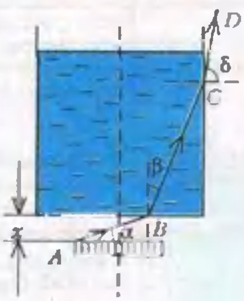


Рис. 4

Рассмотрим ход луча от монеты, прошедшего через жидкость в стакане и вышедшего через его боковую стенку. Согласно закону преломления света на границе жидкость — воздух,

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{\sin\delta} = \frac{1}{n}.$$

Условие полного отражения света от

kvant.mccme.ru

боковой стенки стакана имеет вид

$$\cos\beta \ge \frac{1}{n}.$$

Для луча, падающего от монеты на дно стакана и преломленного на границе воздух — жидкость, имеем

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n,$$

или

$$\sin\beta = \frac{1}{n}\sin\alpha.$$

При приближении монеты к дну стакана ($x \to 0$) $\sin\alpha \to 1$ ($\alpha \to \pi/2$). Отсюда в пределе получаем

$$\sin\beta = \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \cos\beta = \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}.$$

В случае полного отражения луча от боковой стенки

$$\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} \ge \frac{1}{n},$$

откуда следует, что

$$n^2 \ge 2, \text{ или } n_{\min} = \sqrt{2}.$$

Заметим, что если монета лежит в стакане на дне, то всегда найдется такой угол, под которым ее можно будет видеть через боковую стенку.

Задача 4. *На стеклянную плоскопараллельную пластинку толщиной H = 3 мм падает узкий пучок монохроматического света* (рис.5). *Пучок параллелен оптической оси OO_1, которая перпендикулярна пластинке и проходит*

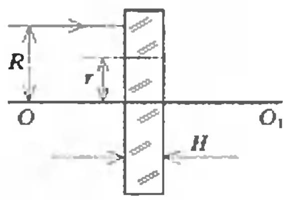


Рис. 5

через ее центр. Расстояние между пучком и осью R = 3 см. Показатель преломления стекла для падающего на пластинку света имеет радиальную зависимость: $n(r) = n_0\left(1-(r/r_0)^2\right)$, где n_0 и r_0 — константы (n_0 = 1,5, r_0 = 9 см). *Определите угол между выходящим пучком и осью.*

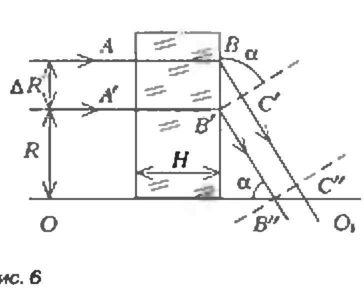


Рис. 6

Пусть ширина пучка света, падающего на пластинку, равна ΔR, причем $R \gg \Delta R$ (рис.6). Так как показатель преломления n является функцией радиуса r (т.е. среда обладает пространственной дисперсией), времена распространения крайних лучей, расположенных на расстояниях R и $R + \Delta R$ от оси OO_1, различны из-за разницы скоростей, равных

$$v_1 = \frac{c}{n(R)} \text{ и } v_2 = \frac{c}{n(R+\Delta R)}.$$

В результате по мере прохождения через пластинку волновой фронт светового пучка искривляется и на выходе из пластинки поворачивается на некоторый угол α. При этом длина оптического пути ABC' равна $A'B'$ (линия $B'C'$ есть линия пересечения волнового фронта пучка, прошедшего через пластинку, и плоскости рисунка). Угол α равен искомому углу между выходящим пучком и осью.

Время прохождения нижнего края пучка через пластинку равно

$$t_1 = \frac{H}{v_1} = \frac{H}{c}n(R).$$

Для верхнего края —

$$t_2 = \frac{H}{v_2} = \frac{H}{c}n(R+\Delta R).$$

Кроме того, существует дополнительная задержка для верхнего края пучка

$$t_3 = \frac{BC'}{c} = \frac{\Delta R\sin\alpha}{c}.$$

Приравнивая длины оптических путей нижнего и верхнего краев пучка, получим

$$ct_1 = ct_2 + ct_3,$$

или

$$Hn(R) = Hn(R+\Delta R) + \Delta R\sin\alpha,$$

откуда

$$\alpha = \arcsin\frac{H\left(n(R)-n(R+\Delta R)\right)}{\Delta R} = Hn_0\frac{2R}{r_0^2} \approx 2^\circ.$$

Задача 5. *На плоскопараллельную стеклянную пластинку под углом α падает пучок света шириной a, содержащий две спектральные составляющие с длинами волн λ_1 и λ_2* (рис.7). *Показатели преломления стекла для этих длин волн различны и равны соответственно n_1 и n_2. Определите минимальную толщину пластинки, при которой свет, пройдя через нее, будет распространяться*

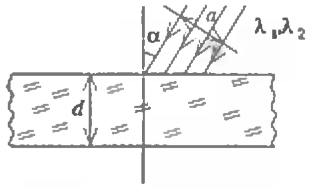


Рис. 7

в виде двух отдельных пучков, каждый из которых содержит только одну спектральную составляющую.

При прохождении пластинки пучки света для разных длин волн преломляются под разными углами — β_1 для длины волны λ_1 и β_2 для длины волны λ_2 соответственно. На рисунке 8 эти

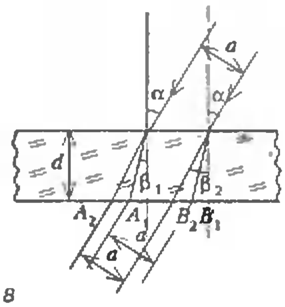


Рис. 8

пучки перекрываются. Чтобы пучки не перекрывались, необходимо выполнение следующего условия:

$$d\,\mathrm{tg}\beta_2 - d\,\mathrm{tg}\beta_1 \ge \frac{a}{\cos\alpha}.$$

Закон преломления лучей на границе двух сред дает

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta_1} = n_1 \text{ и } \frac{\sin\alpha}{\sin\beta_2} = n_2.$$

Тогда, используя известные тригонометрические соотношения, окончательно получаем

$$d_{\min} = \frac{a}{\cos\alpha(\mathrm{tg}\beta_2 - \mathrm{tg}\beta_1)} =$$

$$= \frac{2a}{\sin 2\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{n_2^2-\sin^2\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{n_1^2-\sin^2\alpha}}\right)^{-1}.$$

Задача 6. *С помощью оптической схемы, состоящей из плоского зеркала З положительной линзы Л и экрана Э, наблюдают за падением маленьких шариков в сосуде с прозрачной жидкостью, показатель преломления которой n = 1,5* (рис.9). *В начальный момент на экране наблюдается изображение поверхности жидкости и неподвижного шарика. Затем линзу перемещают направо вдоль главной оптической оси на расстояние*

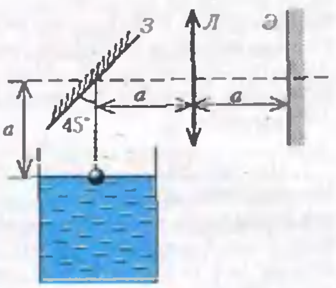


Рис. 9

Δ = 2 см и отпускают шарик. Через время τ = 5 с на экране появляется резкое изображение шарика. Полагая, что шарик падает с постоянной скоростью, определите ее величину. Расстояние a = 30 см.

Сначала обсудим, как создается изображение шарика, находящегося на поверхности жидкости (рис.10,*а*). Изображение шарика, даваемое зеркалом, находится на главной оптической оси линзы на расстоянии $2a$ от нее и является для линзы «предметом». Изображение этого «предмета» в линзе наблюдается на экране. Используя формулу линзы, находим ее фокусное расстояние F:

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{a}=\frac{1}{F}, \text{ и } F=\frac{2}{3}a.$$

При падении шарика в жидкости с постоянной скоростью v за время τ он пройдет путь $l = v\tau$. Видимое «изображение» шарика в жидкости определяется из условия (рис.10,*б*)

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{1}{n}.$$

Принимая углы α и β малыми, получаем

$$\alpha=\frac{\beta}{n},$$

$$AD=l\,\mathrm{tg}\,\alpha=l\alpha=\frac{l\beta}{n}=x\,\mathrm{tg}\,\beta=x\beta,$$

$$x=\frac{l}{n}=\frac{v\tau}{n}.$$

На рисунке A_1 — положение шарика в момент времени τ, A_2 — его «изображение» в жидкости, изображение «предмета» A_2, даваемое зеркалом, находится в точке B_1 на главной оптической оси линзы на расстоянии $x = v\tau/n$ от точки B. Если Δ — смещение линзы вправо от ее первоначального положения, то на экране получается четкое изображение шарика. Используя формулу линзы для этого случая, имеем

$$\frac{1}{a+x+a+\Delta}+\frac{1}{a-\Delta}=\frac{1}{F},$$

или

$$\frac{1}{2a+\Delta+x}+\frac{1}{a-\Delta}=\frac{3}{2a}.$$

Отсюда для скорости движения шарика в жидкости получаем

$$v=\frac{xn}{\tau}=\frac{3n\Delta(a+\Delta)}{\tau(a-3\Delta)}=2{,}4\ \text{см/с}.$$

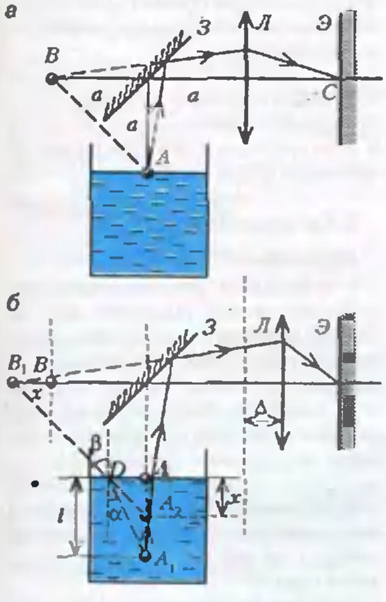


Рис. 10

Упражнения

1. На горизонтальном дне водоема лежит монета радиусом r = 2 см. На каком максимальном расстоянии от монеты надо поместить в воде плоский экран радиусом R = 5 см, чтобы монету нельзя было обнаружить из воздуха при спокойной поверхности воды? Показатель преломления воды n = 4/3.

2. На тонкую сферическую колбу, наполненную жидкостью, падает узкий параллельный пучок света так, что ось пучка проходит через центр колбы. На противоположной стороне колбы пучок света имеет диаметр в два раза меньше начального. Каков показатель преломления жидкости в колбе?

3. Тонкая рассеивающая линза *Л* (рис.11) с фокусным расстоянием F = 15 см прикреплена к стенке аквариума, заполненного водой (n = 4/3). На линзу под углом α падает параллельный пучок света. Известно, что луч, прошедший сквозь линзу на расстоянии h от ее оптического центра, не изменяет своего направления. Найдите h, если $\mathrm{tg}\,\alpha$ = 0,08.

Рис. 11

4. На стеклянную плоскопараллельную пластинку толщиной H = 4 мм падает узкий пучок монохроматического света (см. рис.5). Пучок параллелен оптической оси OO_1, которая перпендикулярна пластинке и проходит через ее центр. Расстояние между пучком и осью R = 5 см. Показатель преломления стекла для падающего на пластинку света имеет радиальную зависимость: $n(r)=n_0\left(1+(r/r_0)^2\right)$, где n_0 и r_0 — константы (n_0 = 1,4, r_0 = 10 см). Определите угол между выходящим пучком и осью.

5. Две одинаковые прямоугольные призмы с углом при вершине φ имеют несколько отличающиеся показатели преломления. Призмы приложены друг к другу своими гипотенузными гранями (рис.12).

Рис. 12

При освещении системы пучком света, падающим нормально на переднюю грань, оказалось, что выходящий пучок отклоняется от первоначального направления на угол α. Найдите разность показателей преломления призм. Углы φ и α считать достаточно малыми, так что синусы и тангенсы этих углов приближенно можно заменить самими углами.

6. По вертикальной стенке *С* (рис.13) ползет муха со скоростью v = 2 см/с. С помощью собирающей линзы *Л* с фокусным расстоянием F = 24 см изображение мухи получают на задней стенке *Э* прямоугольного сосуда, заполненного прозрачной жидкостью с показателем преломления n = 1,4. Определите скорость перемещения изображения мухи в момент пересечения главной оптической оси линзы. Линейные размеры: l = 28 см, L = 10 см.

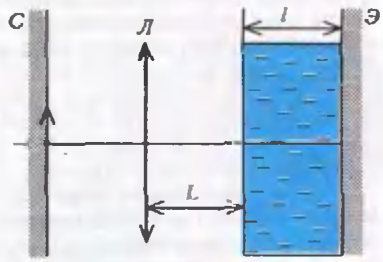


Рис. 13

kvant.mccme.ru

XXII Всероссийская олимпиада школьников по математике

В этом году олимпиаду принимала древняя Рязань, полгода назад отметившая свое 900-летие. Приятно было ходить по чистым, ухоженным улицам мимо сверкающих еще свежей краской домов, любоваться помолодевшим Кремлем.

Школьники смотрели и великолепные экспозиции музеев Кремля, Художественного музея и уникального Музея воздушно-десантных войск. Конечно же, была организована экскурсия в село Константиново — на родину замечательного русского поэта Сергея Есенина.

Но главное событие — олимпиада. Традиционно она проходила в два дня, 19 и 20 апреля. В каждый из дней для решения предлагалось по 4 задачи. Кроме 150 победителей зональных туров олимпиады, в заключительном туре участвовали команды Рязани — хозяева олимпиады — и Китая — гости олимпиады. Команда Китая участвует во Всероссийской олимпиаде уже в третий раз, и это становится традицией. (А во Всекитайской олимпиаде принимает участие и команда России.)

Была проведена традиционная встреча участников олимпиады с редакцией журнала «Квант», где было рассказано о планах журнала и были даны ответы на многочисленные вопросы участников. В заключение встречи был проведен математический блиц-турнир (который второй год проводится вместо математического боя между командами школьников и жюри).

24 апреля на церемонии закрытия олимпиады были оглашены фамилии победителей. Победители получили призы и дипломы.

Были вручены «Призы надежды» журнала «Квант». Их получили Тетьяна Фирсова, ученица 9 класса школы № 2 из Сарова Нижегородской области и Алексей Хрешков, ученик 9 класса школы № 52 из Рязани.

Представляем задачи, предлагавшиеся на заключительном туре олимпиады. Отметим, что, согласно результатам опроса, проведенного среди школьников, лучшими задачами были признаны: по 9-му классу — задача 8, по 10-му классу — задача 7, по 11-му классу — задача 8.

9 класс

Первый день

1. Каких чисел больше среди натуральных чисел от 1 до 1000000 включительно: представимых в виде суммы точного квадрата и точного куба или не представимых в таком виде?

А.Голованов

2. См. задачу М1567.

3. Пусть натуральные числа x, y, p, n и k таковы, что

$$x^n + y^n = p^k.$$

Докажите, что если число n ($n > 1$) нечетное, а число p нечетное простое, то n является степенью числа p (с натуральным показателем).

А.Ковальджи, В.Сендеров

4. См. задачу М1566.

Второй день

5. Докажите, что в арифметической прогрессии с первым членом, равным 1, и разностью, равной 729, найдется бесконечно много членов, являющихся степенью числа 10.

Л.Купцов

6. В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) точка O — центр описанной окружности, точка I — центр вписанной окружности, а точка D на стороне BC такова, что прямые OD и BI перпендикулярны. Докажите, что прямые ID и AC параллельны.

М.Сонкин

7. На столе лежат две кучки монет. Известно, что сумма весов монет из первой кучки равна сумме весов монет из второй кучки, а для каждого натурального числа k, не превосходящего числа монет как в первой, так и во второй кучке, сумма весов k самых тяжелых монет из первой кучки не больше суммы весов k самых тяжелых монет их второй кучки. Докажите, что если заменить каждую монету, вес которой не меньше x, на монету весом x (в обеих кучках), то первая кучка монет окажется не легче второй, каково бы ни было положительное число x.

Д.Фон-дер-Флаас

8. См. задачу М1562.

10 класс

Первый день

1. На стороне BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки E и F (точка E ближе к точке B, чем точка F). Известно, что $\angle BAE = \angle CDF$ и $\angle EAF = \angle FDE$. Докажите, что $\angle FAC = \angle EDB$.

М.Смуров

2. На координатной плоскости расположены четыре фишки, центры которых имеют целочисленные координаты. Разрешается сдвинуть любую фишку на вектор, соединяющий центры любых двух из остальных фишек. Докажите, что несколькими такими перемещениями можно совместить любые две наперед заданные фишки.

Р.Садыков

3. Найдите все натуральные n такие, что при некоторых взаимно простых x и y и натуральном k, $k > 1$, выполняется равенство $3^n = x^k + y^k$.

А.Ковальджи, В.Сендеров

4. См. задачу М1563.

Второй день

5. В вершинах куба записали восемь различных натуральных чисел, а на каждом его ребре — наибольший общий делитель двух чисел, записанных на концах этого ребра. Могла ли сумма всех чисел, записанных в вершинах, оказаться равной сумме всех чисел, стоящих на ребрах?

А.Шаповалов

6. Во взводе служат три сержанта и несколько солдат. Сержанты по очереди дежурят по взводу. Командир издал такой приказ:

1) За каждое дежурство должен быть дан хотя бы один наряд вне очереди.

2) Никакой солдат не должен иметь более двух нарядов и получать более одного наряда за одно дежурство.

3) Списки получивших наряды ни за какие два дежурства не должны совпадать.

4) Сержант, первым нарушивший одно из изложенных выше правил, наказывается гауптвахтой.

Сможет ли хотя бы один из сержантов, не сговариваясь с другими, давать наряды так, чтобы не попасть на гауптвахту?

М.Куликов

7. См. задачу М1561.

8. Знайка пишет на доске 10 чисел, потом Незнайка дописывает еще 10 чисел, причем все 20 чисел должны быть положительными и различными. Мог ли Знайка составить 10 квадратных трехчленов вида $x^2 + px + q$, среди коэффициентов p и q которых встречались бы все записанные числа и действительные корни этих трехчленов принимали ровно 11 различных значений?

И.Рубанов

11 класс

Первый день

1. Может ли число, получаемое выписыванием в строку друг за другом целых чисел от 1 до n ($n > 1$), одинаково читаться слева направо и справа налево?

Н.Агаханов

2. Несколько путников движутся с постоянными скоростями по прямолинейной дороге. Известно, что в течение некоторого периода времени сумма попарных расстояний между ними монотонно уменьшалась. Докажите, что в течение того же периода сумма расстояний от некоторого путника до всех остальных тоже монотонно уменьшалась.

А.Шаповалов

3. См. задачу М1568.

4. См. задачу 4 для 10 класса.

Второй день

5. Существуют ли три натуральных числа, больших 1 и таких, что квадрат каждого из них, уменьшенный на единицу, делится на каждое из остальных?

А.Голованов

6. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса CD. Прямая, перпендикулярная CD и проходящая через центр описанной около треугольника ABC окружности, пересекает BC в точке E. Прямая, проходящая через точку E параллельно CD, пересекает AB в точке F. Докажите, что $BE = FD$.

М.Сонкин

7. См. задачу М1564.

8. См. задачу М1565.

Публикацию подготовили Н.Агаханов, А.Савин

Призеры XXII Всероссийской олимпиады школьников по математике

Первые премии

по девятым классам получили

Бахарев Федор — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Дуров Николай — Санкт-Петербург, с.ш. 239;

по десятым классам —

Сун Шйаочин — Китай;

по одиннадцатым классам —

Рудо Елена — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Норин Сергей — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Салихов Константин — Москва, СУНЦ МГУ,
Егоров Александр — Санкт-Петербург, с.ш. 239.

Вторые премии

по девятым классам получили

Ли Цинхин — Китай,
Лебедев Алексей — Нижегородская обл., Семеновская с.ш., 8 кл.,
Антонов Михаил — Омск, с.ш. 88,
Сальь Александр — Санкт-Петербург, академическая гимн.,
Беленький Алексей — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Цзо Цин — Китай,
Чернышенко Дмитрий — Москва, с.ш. 57,
Дремов Владимир — Волгодонск, с.ш. 24, 7 кл.,
Ладонкин Дмитрий — Кропоткин, с.ш. 3,
Растатурин Алексей — Краснодар, с.ш. 48,
Етеревский Олег — Санкт-Петербург, с.ш. 239;

по десятым классам —

Ванюшина Ольга — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Самойлов Борис — Ростов-на-Дону, с.ш. 33,
Карпенков Олег — Москва, с.ш. 50,
Плахов Андрей — Сургут, гимназия 1,
Симановский Андрей — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Лепчинский Михаил — Челябинск, с.ш. 31,
Малистов Алексей — Рязань, школа-лицей 52,
Лившиц Евгений — Ижевск, с.ш. 30,
Шенг Йонгдай — Китай,
Старков Константин — Санкт-Петербург, Аничков лицей,
Спиридонов Антон — Киров, с.ш. 35,
Тухнебер Сергей — Брянск, лицей 1;

по одиннадцатым классам —

Потапов Владимир — п.Черноголовка Московской обл.,с.ш.2,
Макарычев Константин — Москва, с.ш. 57,
Угловой Андрей — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Есаулова Вероника — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Макарычев Юрий — Москва, с.ш. 57,
Герко Александр — Москва, с.ш. 57,
Ляховицкий Григорий — Челябинск, с.ш. 31,
Запорожец Дмитрий — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Эстеров Александр — Москва, с.ш. 57,
Якимова Оксана — Москва, с.ш. 57.

Третьи премии

по девятым классам получили

Любимов Андрей — Москва, с.ш. 57,
Дильман Степан — Челябинск, с.ш. 31,
Петров Виктор — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Плахов Андрей — Волгодонск, с.ш. 19/20,
Розенберг Антон — Санкт-Петербург, с.ш. 419,
Сопкина Екатерина — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Водомеров Александр — Вологда, ЕМЛ,

Шаповалов Данил — Иваново, с.ш. 33,
Фахрутдинов Валентин — Челябинск, с.ш. 31,
Анно Ирина — Москва, с.ш. 57,
Маликов Олег — Ижевск, с.ш. 41;

по десятым классам —
Чернышов Сергей — Ярославль, с.ш. 33,
Хин Зонг — Китай,
Рафиков Евгений — Пермь, с.ш. 146,
Алишев Равиль — Нижнекамск, лицей,
Уздин Сергей — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Шатохин Евгений — Армавир, с.ш. 1,
Клепцын Виктор — Москва, с.ш. 57,
Федотовская Екатерина — Киров, с.ш. 35,
Прудников Андрей — Москва, с.ш. 57,
Юнов Аркадий — Краснодар, с.ш. 90,
Тимошенко Егор — Томск, с.ш. 7,
Гинзбург Павел — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Мищенко Андрей — Москва, СУНЦ МГУ,
Рыбин Михаил — Санкт-Петербург, с.ш. 239;

по одиннадцатым классам —
Никитин Павел — Мурманск, гимназия 1,
Беляев Александр — Саратов, ФТЛ 1,
Буденков Александр — Нижний Новгород, с.ш. 40,
Слободяник Николай — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Рогожников Евгений — Калуга, с.ш. 36,
Кузнецов Евгений — Ульяновск, с.ш. 40,
Козлов Марат — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Сергеева Татьяна — Ижевск, лицей 41,
Еттянова Дарья — Новосибирск, с.ш. 25.

Специальными призами жюри награждены также

Салихов Константин — за оригинальное решение задачи 4 (11 кл.),
Есаулова Вероника — за оригинальное решение задачи 8 (11 кл.),
Беляев Александр — за оригинальное решение задачи 4 (11 кл.),
Рогожников Евгений — за оригинальное и полное решение задачи 8 (11 кл.),
Громова Ольга (Краснодар, лицей 4, 11 кл.) — за волю к победе,
Мальцев Дмитрий (Кропоткин, гимназия 3, 11 кл.) — как лучший геометр,
Попов Сергей (Таганрог, с.ш. 37, 11 кл.) — за оригинальное решение задачи 1,
Сун Шйаомин — за оригинальное решение задачи 4 (10 кл.),
Лившиц Евгений — за существенное продвижение в задаче 8 (10 кл.),
Старков Константин — за оригинальное решение задачи 7 (10 кл.),
Спиридонов Антон — за оригинальное решение задачи 4 (10 кл.),
Малистов Алексей — как достойно представивший Рязань на олимпиаде,
Чернышенко Дмитрий — за красивое решение задачи 7 (9 кл.),
Лебедев Алексей — как лучший восьмиклассник,
Губин Ярослав (Белорецк, компьютерная школа, 9 кл.) — за оригинальное решение задачи 6,
Дремов Владимир — как лучший семиклассник,
Шапченко Кирилл (Рязань, с.ш. 24, 6 кл.) — как самый юный участник олимпиады,
Антонов Михаил — приз надежды и симпатий жюри.

XXX Всероссийская олимпиада школьников по физике

С 18 по 25 апреля 1996 года в городе Орле состоялся заключительный тур юбилейной XXX Всероссийской физической олимпиады. На олимпиаду приехали 149 школьников (44 девятиклассника, 50 десятиклассников и 55 одиннадцатиклассников).

Работой жюри руководили профессор Орловского политехнического университета Э.Ф.Кондрашин и профессор Московского физико-технического института С.М.Козел.

Задачи теоретического тура были составлены членами методической комиссии по проведению физических олимпиад при Министерстве образования России, задачи экспериментального тура — представителями Орловского педагогического университета под руководством И.В.Сысоева и Н.М.Ростовцева.

Ниже приводятся условия теоретических и практических задач олимпиады.

Теоретический тур

9 класс

1. Минимальное время, за которое человек в лодке может переплыть реку шириной H, равно t_0. Скорость течения реки постоянна в любом месте русла и в β раз больше скорости лодки ($\beta > 1$), плывущей в стоящей воде. 1) Найдите скорость лодки в стоящей воде. 2) На какое расстояние снесет лодку по течению при минимальном времени переправы? 3) Определите минимально возможное расстояние, на которое снесет лодку вниз по течению реки за время переправы. 4) За какое время в этом случае лодка переправится на другой берег?

2. На тележке, движущейся по горизонтальной поверхности с ускорением $g/2$, установлены равноплечные весы, длина плеч которых равна l (рис.1).

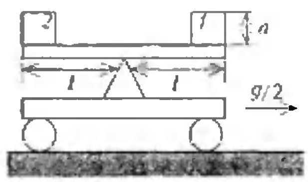


Рис. 1

На весах лежат два одинаковых по величине однородных кубика с длиной ребра каждого a. Кубики сделаны из разных материалов. Найдите отношение плотностей этих материалов, если известно, что весы при движении тележки находятся в равновесии, а кубики относительно весов неподвижны.

kvant.mccme.ru

3. В кастрюле, закрытой крышкой, находятся вода и лед при температуре $T = 0$ °С. Массы воды и льда одинаковы. Известно, что через $t = 2$ ч 40 мин весь лед растаял. 1) Через какое время температура воды повысится на 1 °С? 2) Какое время потребуется, чтобы вода нагрелась от 20 до 21 °С? Температура воздуха в комнате $T_к = 25$ °С. Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·К). Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}2 \cdot 10^5$ Дж/кг.

4. Постоянное сопротивление r и реостат (переменное сопротивление) R подсоединены к источнику постоянного напряжения, как показано на рисунке 2.

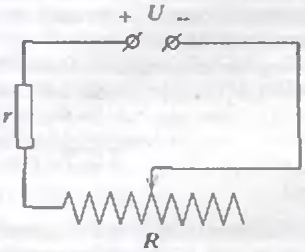


Рис. 2

При силе тока в цепи $I_1 = 2$ А на переменном сопротивлении выделяется мощность $P_1 = 48$ Вт, а при силе тока $I_2 = 5$ А выделяется мощность $P_2 = 30$ Вт. 1) Определите напряжение источника и величину сопротивления r. 2) Определите силу тока в цепи, когда переменное сопротивление равно нулю. 3) Определите максимальную мощность, которая может выделиться на переменном сопротивлении. Чему равно сопротивление R в этом случае?

10 класс

1. Русло реки разделено цепочкой узких песчаных отмелей на два рукава с разными скоростями течения. Через реку с одного берега на другой переправляется лодка. На рисунке 3 показана траектория движения лодки, при которой снос по течению оказался минимально возможным. Известно, что для переправы потребовалось время $t = 25$ мин. Принимая, что 1 см на рисунке соответствует 0,1 км, определите скорость лодки в стоячей воде и скорости течения воды u_1 и u_2 в обоих рукавах.

Рис. 3

2. Тело брошено под углом к горизонту с высокого обрыва (рис.4). Из-за

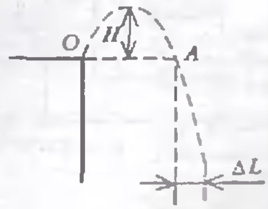


Рис. 4

сопротивления воздуха времена подъема тела до максимальной высоты и обратного падения до точки A на линии горизонта, проходящей через точку старта O, отличаются на τ. В точке A горизонтальная составляющая скорости тела оказалась равной v_{Ar}, а вертикальная составляющая на Δv меньше вертикальной составляющей скорости в точке O. На какую высоту H от линии горизонта поднялось тело, если в течение дальнейшего полета максимальное удаление его по горизонтали от точки A составило ΔL? Сила сопротивления движению тела в воздухе прямо пропорциональна его скорости.

3. Рабочее вещество тепловой машины совершает цикл Карно между изотермами T и T_1 ($T_1 > T$) (рис.5). Теп-

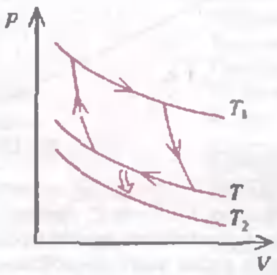


Рис. 5

ловой обмен между рабочим веществом и холодильником осуществляется посредством теплопроводности. Холодильником является резервуар, температура которого постоянна и равна $T_2 = 200$ К ($T_2 < T$). Количество теплоты, сбрасываемое в единицу времени холодильнику, составляет $q = a(T - T_2)$, где $a = 1$ кВт/К. Теплообмен рабочего вещества с нагревателем осуществляется непосредственно при $T_1 = 800$ К. Полагая, что длительности изотермических процессов одинаковы, а адиабатических весьма малы, найдите температуру «холодной» изотермы T, при которой мощность тепловой машины максимальна. Определите эту максимальную мощность.

4. На трех металлических сферах радиусами $r_1 < r_2 < r_3$ размещены заряды соответственно q_1, q_2, q_3 (рис.6). В

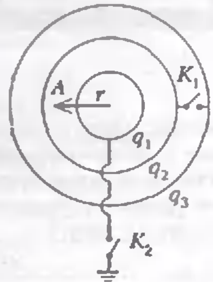


Рис. 6

некоторой точке A, расположенной между первой и второй сферами на расстоянии r от центра, измеряется потенциал. Чему равен этот потенциал в следующих трех случаях: 1) ключи K_1 и K_2 разомкнуты; 2) после замыкания ключа K_1; 3) после замыкания ключа K_2 при замкнутом ключе K_1?

5. В U-образную стеклянную трубку наливают ртуть, после чего один из концов трубки запаивают (рис.7). Полная масса налитой ртути $m = 367$ г, а

Рис. 7

плотность $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3. После выведения ртути из равновесия в этой системе возникают колебания. Найдите период таких малых колебаний, если известно, что площадь поперечного сечения трубки $S = 1$ см^2, а высота столба воздуха в запаянном конце трубки при равновесии $l = 1$ м. Внешнее атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Процесс считать изотермическим.

11 класс

1. Груз массой m, соединенный пружиной жесткостью k с вертикальной стенкой, совершает колебания, двигаясь по горизонтальной поверхности (рис.8). Коэффициент трения между грузом и поверхностью μ. В моменты времени, когда пружина максимально

kvant.mccme.ru

растянута, грузу щелчком сообщают некоторую энергию, так что он приобре-

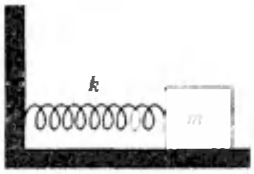


Рис. 8

тает скорость v_0 в направлении к стенке. Найдите v_0, если колебания оказываются установившимися, причем максимальное удлинение пружины равно l. Считать, что $l > \mu mg/k$.

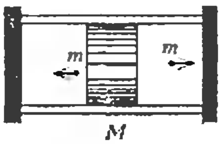


Рис. 9

2. В горизонтально расположенном неподвижном цилиндре находится поршень массой M, который может двигаться без трения. Между поршнем и боковыми стенками цилиндра вдоль горизонтальной оси (в плоскости рисунка 9) летают маленькие шарики с одинаковыми массами $m \ll M$. В равновесном положении поршня (посередине цилиндра) частота столкновений каждого шарика с поршнем равна f. Если поршень медленно сместить из положения равновесия на малое расстояние и отпустить, то он будет совершать гармонические колебания. Считая удары шариков абсолютно упругими, определите период этих колебаний. Указание: при $x \ll 1$ выражение $(1+x)^n \approx 1+nx$.

3. Оцените максимально возможную полезную мощность, которую можно получить от периодически действующей установки, использующей тепловую энергию океана в той его части, где скорость течения воды $u = 0{,}1$ м/с. Считать, что поверхностный слой воды глубиной $h = 1$ км имеет температуру $T_1 = 300$ К, а температура приповерхностного воздуха $T_2 = 280$ К. Ширина установки в направлении, перпендикулярном течению, составляет $L = 1$ км. Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·К), плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3.

4. Электромагнитное реле подключено к батарее с ЭДС $\mathcal{E}$ через контакт K_1, который нормально замкнут и размыкается при срабатывании реле (рис.10). Сразу после замыкания клю-

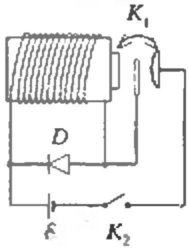


Рис. 10

ча K_2 ток в цепи реле изменяется со временем по закону $I(t) = \mathcal{E}\left(1-e^{-Rt/L}\right)/R$, где R — омическое сопротивление обмотки реле ($R = 50$ Ом), L — индуктивность обмотки ($L = 0{,}5$ Гн). При токе $I_2 = 2\mathcal{E}/(3R)$ реле срабатывает, и контакт K_1 размыкается. Через некоторое время при токе $I_1 = \mathcal{E}/(3R)$ контакт K_1 снова нормально замкнут. Определите период срабатывания реле в установившемся режиме. Считать индуктивность катушки постоянной, диод D — идеальным. Внутренним сопротивлением батареи можно пренебречь.

5. В архиве Снеллиуса нашли оптическую схему (рис.11). От времени чернила выцвели, и на рисунке остались

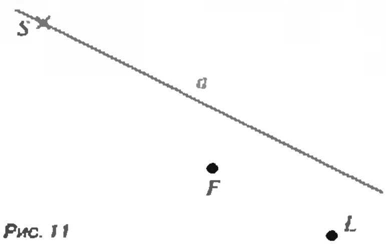


Рис. 11

видны только три точки: фокус линзы F, источник света S и точка L, принадлежащая плоскости тонкой линзы. Кроме того, была видна часть прямой линии a, соединяющей источник S и его изображение S'. Из текста также следовало, что точка S' отстоит от плоскости линзы дальше, чем S. Возможно ли по этим данным восстановить исходную схему? Если да, то покажите, как это сделать. Чему равно фокусное расстояние линзы, которая была изображена на схеме?

Экспериментальный тур

9 класс

1. Определите коэффициент трения металлического цилиндра с известной массой о стол.

Оборудование: два металлических цилиндра приблизительно одинаковой массы; масса одного из них известна (0,4 – 0,6 кг); линейка (40 – 50 см); динамометр школьный.

2. Определите силу разрыва нити ($mg < T$).

Оборудование: планка (длиной 50 см); нить или тонкая проволока; линейка; груз известной массы; штатив.

10 класс

1. 1) Используя низковольтовый источник тока 4 – 9 В, определите напряжение зажигания неоновой лампы. 2) Оцените минимальную абсолютную погрешность определения напряжения зажигания неоновой лампы.

Оборудование: неоновая лампа (МН-4, МН-3, МН-6 и др.); соединительные провода; источник постоянного тока 4 – 9 В (Крона, Корунд, Радуга и др.); конденсаторы 0,2 – 1,0 мкФ (15 – 20 штук).

2. Найдите модуль вектора магнитной индукции поля магнита на расстоянии $l = 30$ см от центральной (средней) линии магнита, если известно что в г. Орле модуль вектора магнитной индукции магнитного поля Земли $B \approx 4{,}1 \cdot 10^{-5}$ Тл, а линии вектора $\vec{B}$ направлены под углом $\varphi = 65°$ к горизонту. При расчетах можно считать $\varphi \approx 60°$.

Оборудование: полосовой магнит; линейка (40 – 50 см); компас.

11 класс

1. 1) Определите тип проводимости транзистора ($n-p-n$ или $p-n-p$) и вывод «базы». 2) Определите выводы «эмиттера» и «коллектора».

Оборудование: гальванометр; микроамперметр (50 – 100 мА); медная и цинковая пластинки; соединительные провода; биполярный транзистор без маркировки; лимон.

2. Определите ЭДС источника тока, сопротивления вольтметра резистора и сумму сопротивлений миллиамперметра и внутреннего сопротивления источника.

Оборудование: миллиамперметр (5, 50, 200 мА); источник постоянного тока 4,5 – 9 В (Крона, Корунд, Радуга и др.); вольтметр (5 – 10 В); резистор с неизвестным сопротивлением; соединительные провода.

Публикацию подготовили С.Козел, В.Коровин, В.Орлов

Призеры XXX Всероссийской олимпиады школьников по физике

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Мавренков Андрей — Сергиев Посад, ФМШ 2 (учитель Сухов В.Г.),
Мартьянов Кирилл — Нижний Новгород, лицей 40 (учитель Ковалев В.Ю.);

по 10 классам —

Чувиков Алексей — Ноябрьск, Тюменской обл., школа 10 (учитель Ткачук В.И.),
Гуляев Леонид — Нижний Новгород (самообразование),
Качура Борис — Владивосток, техническая школа-лицей (учитель Фефелова К.Ф.),
Кожемяк Алексей — Санкт-Петербург, ФМЛ 239 (учитель Слуцкий Ю.Л.),
Пестун Василий — Санкт-Петербург, ФМЛ 239 (учитель Слуцкий Ю.Л.);

по 11 классам —

Васильев Дмитрий — Киров, Вятская гуманитарная гимназия (учитель Гамова Г.Т.),
Милицин Владимир — Москва, школа 2 (учитель Бега Р.К.),
Аничкин Илья — Санкт-Петербург, ФМЛ 239 (учитель Водопьян Г.М.),
Горев Александр — Киров, ФМЛ (учитель Канин Н.Е.),
Уланов Михаил — Санкт-Петербург, ФМЛ 239 (учитель Водопьян Г.М.).

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Мальцев Дмитрий — Северодвинск, лицей 1,
Мараков Вячеслав — Березники, школа 3,
Занкин Андрей — Якутск, школа 26,
Барыгин Илья — Санкт-Петербург, школа 528,
Абанин Дмитрий — Ростов-на-Дону, школа 56,
Громов Николай — Санкт-Петербург, ФТШ при ФТИ;

по 10 классам —

Буканин Михаил — Санкт-Петербург, школа 30,
Морозов Сергей — Санкт-Петербург, гимназия 45,
Бодров Сергей — Нижний Новгород, школа 40,
Воронов Артем — Челябинск, школа 31,
Зазуля Вячеслав — Таганрог, лицей при ТРГУ,
Ильдуганов Николай — Новосибирск, СУНЦ НГУ,
Тиснек Дмитрий — Санкт-Петербург, ФТШ при ФТИ,
Сибирев Николай — Санкт-Петербург, школа 419,
Макаров Алексей — Сергиев Посад, ФМШ 2;

по 11 классам —

Пантелеев Михаил — Мытищи, школа 15,
Мухлисуллин Рамиль — Альметьевск, школа 16,
Саблин Илья — Оренбург, школа 1,
Скобеев Артем — Арзамас-16, гимназия 15,
Фомичев Михаил — Санкт-Петербург, ФМЛ 239.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Клочков Роман — Сургут, школа 1,
Коломеец Евгений — Брянск, лицей 1,
Дурашкин Александр — Челябинск, лицей 31,
Луценко Евгений — Владимир, школа 33,
Кондратенко Ростислав — Москва, школа 444,
Барышев Владимир — Нижний Новгород, лицей 40,
Кунягин Андрей — Урай, гимназия 1;

по 10 классам —

Тваладзе Александр — Ростов-на-Дону, лицей 1,
Дьяченко Анатолий — Ноябрьск Тюменской обл., школа 3,
Компанеец Роман — Москва, школа 1523,
Кукушкин Михаил — Москва, школа 57,
Лизунов Антон — Москва, школа 2;

по 11 классам —

Пайденов Алексей — Тула, лицей 1,
Иванов Павел — Нижний Новгород, лицей 40,
Тарасов Евгений — Санкт-Петербург, ФТШ при ФТИ,
Прохоренко Дмитрий — Москва, химический лицей,
Марков Артем — Хабаровск, лицей информационных технологий.

Специальные призы получили

Кантор Елена — Санкт-Петербург, ФМШ 566, 9 кл.,
Буканин Михаил — Санкт-Петербург, школа 30, 10 кл.,
Крипиневицкая Алла — Ставрополь, школа 9, 10 кл.,
Васильев Дмитрий — Киров, Вятская гуманитарная гимн., 11 кл.,
Тарасов Евгений — Санкт-Петербург, лицей ФТШ, 11 кл.,
Чернышева Мария — Санкт-Петербург, гимназия 30, 11 кл.,
Захаров Дмитрий — Орел, школа 19, 11 кл.

ВНИМАНИЕ!

ВШМФ «АВАНГАРД» совместно с Министерством образования РФ проводит ежегодные заочные математические олимпиады. В последней олимпиаде, например, приняли участие более пяти тысяч школьников, а победители олимпиады были приглашены на V Межгосударственную научно-практическую конференцию школьников (январь 1996 г.). В октябре-ноябре этого года состоится очередной тур олимпиады — следите за информацией!

kvant.mccme.ru

ШКОЛА «АВАНГАРД» — ШКОЛА ДЛЯ ВСЕХ

Как подготовиться в вуз, в физико-математическую школу или лицей, если ограничен в средствах или живешь в небольшом городке или деревне? Конечно же, поступить во Всероссийскую школу математики и физики (ВШМФ) «АВАНГАРД». Эта школа, учрежденная Министерством образования РФ и существующая уже почти 10 лет, имеет большой практический опыт ЗАОЧНОГО обучения школьников:

по физике — с 9 по 11 класс (включая двухлетний углубленный курс);

по математике — с 7 по 11 класс.

В школе «АВАНГАРД», в зависимости от знаний, Вы можете выбрать программу обучения, доступную Вам. Всего программ три: «*А*», «*В*» и «*С*». Освоил программу «*А*» — открыта дорога в большинство областных вузов, а прошел полный курс по программе «*С*» — и можешь смело идти в МИФИ, МГТУ и т.п. Плата за обучение — самая доступная. Существует возможность пробных занятий, перехода с одной программы на другую и занятия сразу по двум программам «*А*»+«*В*» или «*В*»+«*С*».

За последние пять лет 90% наших выпускников поступили в вузы! И это закономерно, так как методики и задачи разработаны лучшими преподавателями МИФИ и МФТИ.

Учебный год в школе — с 1 сентября по 30 июня. Прием в школу ведется круглогодично. Достаточно прислать личное заявление на адрес школы и оплатить обучение. Стоимость обучения зависит не от сложности программы («*А*», «*В*» и «*С*»), а только от класса и не превышает 2—3 минимальных месячных зарплат за полный годичный курс обучения по данному предмету.

Ниже приводятся тестовые вступительные задания по математике и физике по программе «*С*».

Вам нужно:

— выбрать предмет, класс, программу и написать заявление о приеме в школу (в произвольной форме);

— решить выбранный вариант задания (не обязательно весь!);

— выслать нам заявление и решенный вариант (с пометкой «Квант»), а получив наш ответ, заполнить учетную карточку и прислать ее нам вместе с копией чека об оплате.

Наш адрес: 115551 Москва, Ореховый бульвар, д.11, кор.3, ВШМФ «АВАНГАРД».

Тестовое вступительное задание по математике

Программа «С»

7 класс

1. Вычислите

$$4{,}07-5{,}49+8{,}93-1{,}51+\frac{4{,}2:6-3\frac{1}{3}\cdot 0{,}3}{7{,}5:0{,}5}.$$

2. Докажите, что число 123456789 является составным.

3. Запишите число 1000 с помощью восьми одинаковых цифр и знаков арифметических действий.

4. Число содержит 4 сотни, b десятков и c единиц. При каких значениях b и c данное число кратно 30?

5. Три класса школьников сажали деревья. Первый класс посадил a деревьев, второй — 70% того, что посадил первый, а третий класс — на 5 деревьев больше второго. Сколько деревьев посадили три класса?

8 класс

1. Упростите выражение

$$(x+1)(x+2)+(x+3)(x+4)$$

и вычислите его значение при $x=-0{,}4$.

2. Решите уравнение

$$\frac{8(x+10)}{15}-24\frac{1}{2}=7\frac{x}{10}-\frac{2(11x-5)}{5}.$$

3. Известно, что $x+\frac{1}{x}=3$. Найдите значение выражения $x^2+\frac{1}{x^2}$.

4. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, на 54 больше данного числа. Найдите это число.

5. Постройте график функции

$$\frac{y-x}{x-1}=-2.$$

9 класс

1. Натуральное пятизначное число A имеет в разряде десятков цифру 8. Если эту цифру десятков переставить в начало числа A, сохранив порядок остальных цифр, то вновь полученное пятизначное число будет больше A на 69570. Определите число A, если известно, что оно кратно 6.

2. Решите неравенство $ax+1>0$.

3. Постройте график функции

$$|x|+|y|=2.$$

4. Произведение двух целых чисел равно 216, а их наименьшее общее кратное равно 36. Найдите эти числа.

5. Смешали P%-й и 10%-й растворы соляной кислоты и получили 600 г 15%-го раствора. Сколько грамм каждого раствора было взято?

10 класс

1. Решите уравнение

$$\frac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6.$$

2. Определите, при каких значениях параметра a оба корня уравнения $x^2+2(a-4)x+a^2+6a=0$ положительны?

3. Длины сторон треугольника равны 4, 5 и 7 см. Найдите радиус вписанной в этот треугольник окружности.

4. Решите уравнение

$$\left|x^2-9\right|+\left|x^2-4\right|=5.$$

5. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{1-ax}{-2x^2+6x-7}}.$$

11 класс

1. Решите неравенство

$$x(x+1)(x+2)(x+3)<48.$$

2. Найдите площадь наибольшего прямоугольника, который можно вписать в правильный треугольник со стороной a.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2-4x+4}=a-\sqrt{x^2+6x+9}.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2\sin x+\left(0{,}04c^2+1{,}2c\right)\cos\frac{y}{5}=c+8,\\ \sin x+20\cos\frac{y}{5}=-21\end{cases}$$

5. Сторона равностороннего треугольника равна a. На высоте этого треугольника построен новый равносторонний треугольник. На высоте нового треугольника построен еще равносторонний треугольник и т.д. до бесконечности. Найдите сумму периметров и сумму площадей всех этих треугольников.

Тестовое вступительное задание по физике

Программа «С»

9 класс

1. Человек бежит по эскалатору. В первый раз он насчитал $n_1=50$ ступеней, во второй раз, двигаясь в том же направлении со скоростью втрое больше,

kvant.mccme.ru

он насчитал $n_2 = 75$ ступеней. Сколько ступеней он насчитал бы на неподвижном эскалаторе?

2. Первую половину пути поезд шел со скоростью в $n = 1,5$ раза большей, чем вторую половину пути. Средняя скорость поезда на всем пути $v_{ср} = 43,2$ км/ч. Какова скорость поезда на первой и второй половинах пути?

3. В железном калориметре массой $m = 0,1$ кг находится $m_1 = 0,5$ кг воды при температуре $t_1 = 15$ °С. В калориметр бросают свинец и алюминий общей массой $m_2 = 0,15$ г и температурой $t_2 = 100$ °С. В результате температура воды поднимается до $t = 17$ °С. Определите массы свинца и алюминия. Удельная теплоемкость свинца $c_с = 125,7$ Дж/(кг·К), алюминия $c_а = 836$ Дж/(кг·К), железа $c_ж = 460$ Дж/(кг·К).

4. Вычислите сопротивление проволочного куба, к противоположным вершинам которого подано напряжение. Сопротивления всех ребер одинаковы и равны $R = 1$ Ом.

10 класс

1. Пушка массой $m_1 = 2$ кг стреляет под углом к горизонту снарядом массой $m_2 = 0,1$ кг, начальная скорость которого $v_0 = 37$ м/с, а дальность полета $L = 120$ м. Пушка находится на гладкой горизонтальной поверхности. Какую скорость приобретает пушка после выстрела?

2. Ледяная гора составляет с горизонтом угол $\alpha = 45°$. По ней пускают вверх шайбу, которая, поднявшись на некоторую высоту, затем соскальзывает по тому же пути вниз. Найдите коэффициент трения, если время спуска шайбы в $n = 2$ раза больше времени подъема.

3. Найдите среднюю плотность планеты сферической формы, период обращения которой вокруг собственной оси составляет $T = 10^5$ с, если пружинные весы показывают на ее полюсах на $\eta = 0,5$ % больший вес, чем на экваторе.

4. Пуля массой $m_1 = 9$ г, летевшая вертикально вверх со скоростью $v_0 = 200$ м/с, пробила лежавшую на двух столах доску массой $m_2 = 0,27$ кг, при этом доска подпрыгнула на высоту $h = 0,2$ м над уровнем столов. Какое количество теплоты выделилось при прохождении пули через доску?

11 класс

1. На гладкой горизонтальной поверхности лежит доска длиной $l = 1,2$ м и массой $M = 16$ кг (см. рисунок). На край

доски положили небольшое тело массой $m = 0,4$ кг. Коэффициент трения между телом и доской $\mu = 0,3$. С какой минимальной скоростью v_0 следует резко толкнуть доску вправо, чтобы тело соскользнуло с нее?

2. Цилиндрический сосуд расположен горизонтально и разделен на две части поршнем площадью $S = 10$ см², прикрепленным к левому торцу сосуда пружиной жесткостью $k = 2 \cdot 10^3$ Н/м. Вначале в обеих частях сосуда находится воздух при атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па, при этом пружина не деформирована и имеет длину $l_0 = 20$ см. Затем весь воздух правой части сосуда откачивают. Найдите энергию, запасенную в пружине после откачки, если температура газа в левой части не изменилась.

3. Шар массой $m = 1$ кг и зарядом $q = 2 \cdot 10^{-4}$ Кл подвешен на изолирующей нити в однородном электрическом поле напряженностью $E = 3 \cdot 10^4$ В/м, причем вектор $\vec{E}$ перпендикулярен силе тяжести и направлен влево. Шарик отвели вправо так, что нить отклонилась на угол $\alpha = 30°$ от вертикали. Найдите натяжение нити при прохождении вертикального положения.

4. К батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 200$ В подключили воздушный конденсатор, площадь пластин которого $S = 12,6$ см², а расстояние между пластинами $d = 1$ мм. Какую работу совершит батарея при заполнении пространства между обкладками конденсатора диэлектриком, проницаемость которого $\varepsilon = 5,5$? Как при этом изменится запасенная в конденсаторе энергия?

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

Задачи

(см. «Квант» № 4)

1. Да, существуют. Это 2 и 5, других пар простых чисел, сумма и разность которых вновь простые числа, нет.

2. Заметим, что расстояния от точки O — центра вписанной окружности — до точек B, M и N равны $R\sqrt{2}$, где R — радиус этой окружности, и следовательно, эти точки лежат на окружности, концентричной вписанной окружности. Кроме того, угол MON равен 90°, поэтому угол MBN равен 45° (рис.1).

3. Алеша шел 3 ч 12 мин, т.е. 16/5 часа, а Борис шел 2 ч 40 мин, т.е. 8/3 часа. Обозначив расстояние между поселками

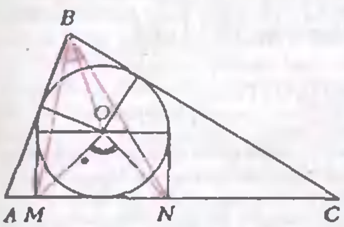


Рис. 1

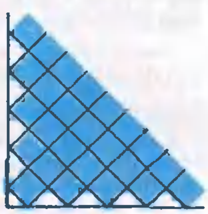


Рис. 2

через L, получим, что скорости Алеши и Бориса равны $5L/16$ и $3L/8$ соответственно. Найдем l — длину моста, исходя из того, что Борис прошел его на одну минуту быстрее, чем Алеша: $16l/5L - 8l/3L = 1/60$. Получаем, что $l = L/32$.

Пусть t — момент времени, когда путники подошли к мосту. В этот момент путь, пройденный обоими путниками, равнялся $L - L/32 = 31L/32$. С другой стороны, он равнялся сумме путей, пройденных каждым из них, т.е.

$$\frac{5L}{16}\left(t-\left(10+\frac{3}{10}\right)\right)+\frac{3L}{8}(t-9)=\frac{L}{16}\left(11t-\frac{211}{2}\right).$$

Приравняв эти выражения для пути, получаем

$$\frac{L}{16}\left(11t-\frac{211}{2}\right)=\frac{31L}{32}.$$

Отсюда $t = 11$ часов.

4. Утверждение задачи вытекает из следующего тождества:

$$\left(n^2-n+1\right)^2=(n-1)^2+(n-1)^2n^2+n^2.$$

5. Будем располагать пластинки так, чтобы их диагонали были параллельны сторонам квадрата (рис.2). В этом случае вдоль стороны квадрата длиной 99 см можно расположить $99/10\sqrt{2} = 7,000356...$ пластинок, т.е. 7 пластинок уместится. Таких рядов будет 7, что даст 49 пластинок, а между ними поместятся еще $6^2 = 36$ пластинок. Всего 49 + 36 = 85 пластинок.

kvant.mccme.ru

Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» № 2)

16. Обозначим длину дорожки на катке через l, а скорости отца и сына через x и y. Из условий задачи следует, что

$$\frac{l}{x-y}=\frac{5l}{x+y}.$$

Отсюда $x + y = 5x - 5y$ и $x = 3y/2$, т.е. отец бегает на коньках в полтора раза быстрее своего сына.

17. Из соображений симметрии достаточно рассмотреть фигуру, изображенную на рисунке 3, и центр окружности с радиусом 4, лежащий на оси симметрии. Обозначим расстояние OK от центра окружности с радиусом 4 до стороны квадрата AB через x. Так как $AO \le 4$, то, учитывая, что $AK = 5/\sqrt{2}$, получаем $x^2 + 25/2 \le 16$. Отсюда $x = \sqrt{7/2} = 1{,}87082\ldots$. Так как высота квадрата равна $5\sqrt{2} = 7{,}0710675\ldots$, то расстояние OP от точки O до противоположной стороны квадрата равно $5\sqrt{2} - x = 5{,}20023\ldots$, что больше 4. Таким образом, чтобы оставшаяся часть квадрата поместилась в круг радиусом 4, необходимо, чтобы после удаления двух квадратиков не осталось ни одной точки на верхней стороне большого квадрата.

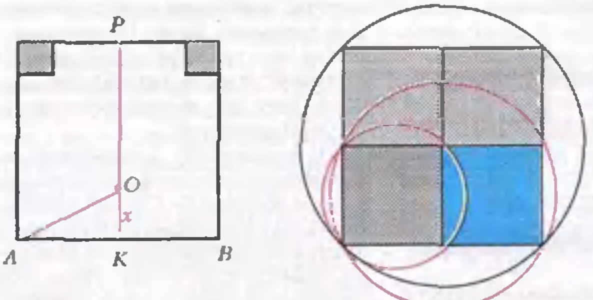


Рис. 3

Это возможно, только если квадрат был разбит на 4 квадратика. В этом случае после последовательного удаления сначала двух, а потом еще одного квадратика остается один квадратик со стороной вдвое меньшей первоначального. Следовательно, он вписан в круг с радиусом $5/2$ и помещается в круге с радиусом 3.

18. Обозначим массы золотых скульптур через $M_1, M_2, \ldots, M_{10}$. Массы серебряных шаров равны $|M_1 - M_2|$, $|M_2 - M_3|, \ldots, |M_{10} - M_1|$.

Рассмотрим тождество $(M_1 - M_2) + (M_2 - M_3) + \ldots + (M_{10} - M_1) = 0$. Из десяти чисел, заключенных в скобки, некоторые положительны, а остальные отрицательны. Осталось заметить, что сумма модулей положительных скобок равняется сумме модулей отрицательных скобок. Поэтому если те шары, для которых соответствующая скобка положительна, положить на одну чашку весов, а остальные — на другую, то весы окажутся в равновесии.

19. Да, возможно, например, так. Игроки с номерами k, большими 28, играют с игроками с номерами $2025 - k$. Заметим, что $2025 = 45^2$. Игроки с номерами k, большими 20, но меньшими 29, играют с игроками, имеющими номера $49 - k$. Игроки с номерами k от 16 до 20 играют с шахматистами, имеющими номера $36 - k$. И наконец, игроки с номерами от 1 до 15 играют с шахматистами, имеющими номера $16 - k$.

20. Из условий задачи следует, что x и y — натуральные числа, большие 1 и такие, что $3x = ky + 1$, $3y = lx + 1$, $xy = 3p + 1$ при некоторых натуральных k, l и p. Очевидно, что если $x = a$, $y = b$ является решением задачи, то и $x = b$, $y = a$ также является решением задачи. Поэтому будем пока считать, что $x \le y$. Тогда $3x < 3y + 1$, и из первого уравнения получаем, что $k \le 2$, и нам нужно исследовать лишь два случая: $k = 1$ и $k = 2$.

Пусть $k = 1$. Подставим $y = 3x - 1$ во второе уравнение и преобразуем это уравнение к виду $x = \frac{4}{9-l}$. У числа 4 всего два натуральных делителя, больших 1: 2 и 4, поэтому x может принимать лишь значения 2 или 4. При этом y равняется 5 и 11. Третьему уравнению удовлетворяет только пара $x = 2$, $y = 5$.

Пусть теперь $k = 2$. Тогда $y = (3x - 1)/2$. Подставляя это выражение во второе уравнение, получим, что $x = \frac{5}{9-2l}$. Отсюда, аналогично предыдущему случаю, получаем, что $x = 5$, $y = 7$. Но эти значения не удовлетворяют третьему уравнению.

Учитывая замечание в начале решения, получаем два решения: $x = 2$, $y = 5$ и $x = 5$, $y = 2$.

(см. «Квант» № 6 за 1995 г.)

9. Используя условие задачи, перепишем выражение $\frac{a}{c} + \frac{b}{d}$ в виде $\frac{a}{c} + \frac{1000-a}{1000-c}$. Сравним это выражение с аналогичным выражением, в котором число c то же самое, а число a увеличено на единицу (число b, соответственно, уменьшено на единицу), т.е. с выражением $\frac{a+1}{c} + \frac{999-a}{1000-c}$.

Первое выражение преобразуется к виду

$$\frac{1000a+1000c-2ac}{c(1000-c)},$$

а второе к виду

$$\frac{1000a+1000c-2ac+(1000-2c)}{c(1000-c)}.$$

Теперь осталось заметить, что если $c < 500$, то второе выражение больше первого; если $c = 500$, то они равны; а если $c > 500$, то первое выражение больше второго. Пусть $c < 500$, тогда, увеличивая число a, мы будем увеличивать все выражение. Это возможно делать до тех пор, пока число a не станет равным 999, при этом число $b = 1$.

Посмотрим, как изменяется наше выражение при изменении числа c. Число c будем продолжать считать меньшим 500, число a возьмем, исходя из предыдущего, равным 999, а число b равным 1. Итак, сравним два выражения:

$$\frac{999}{c}+\frac{1}{1000-c} \quad \text{и} \quad \frac{999}{c-1}+\frac{1}{1001-c}.$$

Первое слагаемое увеличилось, так как уменьшился знаменатель, а второе уменьшилось, поскольку увеличился знаменатель. Посмотрим, каково увеличение и каково уменьшение.

Первое слагаемое увеличилось на

$$\frac{999}{c-1}-\frac{999}{c}=\frac{999}{c(c-1)},$$

а второе уменьшилось на

$$\frac{1}{1000-c}-\frac{1}{1001-c}=\frac{1}{(1000-c)(1001-c)}.$$

Увеличение оказалось существенно больше уменьшения. Действительно, у первой дроби числитель равен 999, а у второй 1. Знаменатель первой дроби меньше знаменателя второй, так как при $c < 500$ будет $c < 1001 - c$ и $c - 1 < 1000 - c$. Таким образом, число c следует взять возможно меньшим натуральным числом, т.е. $c = 1$, а $d = 999$.

Итак, в случае, если $c < 500$, наше выражение принимает наибольшее значение при $a = 999$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 999$. Это значение равно $999 + 1/999$. Если $c = 500$, то при произвольных a и b наше выражение равно 2, если $c > 500$, то те же рассуждения приведут к значениям $a = 1$, $b = 999$, $d = 1$ с тем же значением рассматриваемого выражения: $999 + 1/999$.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. В лампе дневного света излучение света происходит с поверхности, площадь которой многократно превышает площадь нити лампы накаливания. 2. Прозрачные окна отражают меньше света, чем непрозрачные стены домов. 3. Солнце в конце зимы или в начале весны поднимается над горизонтом еще невысоко,

поэтому освещенность крыш может превышать освещенность земли. 4. Если папиросная бумага находится на некотором расстоянии от текста книги, то расходящиеся пучки света, отраженного от белых участков страницы между буквами, перекрываются (рис.4). Бумага освещается почти равномерно, и из-за рассеяния ею света прочитать текст будет нельзя.

5. Световой пучок после отражения от зеркала становится параллельным, и освещенность экрана не должна зависеть от расстояния до зеркала. 6. Световой поток уменьшается, так как увеличивается сопротивление нити, что приводит к понижению потребляемой электрической мощности, а значит, и температуры нити. 7. Потому что тот же световой поток распределяется по большей площади. 8. Уменьшится яркость изображения.

9. Освещенность изображения уменьшится (рис.5), причем для верхней части стрелки-предмета уменьшится несколько больше чем в два раза, а для нижней — несколько меньше чем в два раза. 10. В первом случае показания фотодетектора уменьшаются из-за отражения света от пластинки. Во втором случае изображение лампы, образованное преломленными пластинкой лучами, оказывается ближе к фотодиоду, что приводит к увеличению попадающего на него светового потока. 11. Близорукий человек подносит рассматриваемый предмет ближе к глазу и видит его под большим углом, чем человек с нормальным зрением. В результате в зрачок его глаза попадает больший световой поток от любого элемента рассматриваемого предмета. 12. На участке AB (рис.6) освещенность увеличится, на участке BC останется примерно прежней, на CD станет равной нулю. 13. При дальнозоркости, так как освещенность зрачка может увеличить лишь собирающая линза. 14. Уменьшается яркость, но увеличивается четкость изображения. 15. При увеличении расстояния до источника света уменьшается световой поток, попадающий в глаз, но одновременно уменьшается и площадь изображения на сетчатке, так что отношение этих величин остается постоянным. Поэтому освещенность изображения, по которому судят о яркости источника света, не зависит от расстояния до фонаря.

16. Свет от этих звезд проходит в атмосфере больший путь, чем свет от звезд, близких к зениту, и поэтому больше рассеивается. 17. Освещенность «темной» части Луны создается светом, отраженным от земной атмосферы и поверхности Земли.

18. Световая энергия, приходящаяся на какую-либо площадку, а значит, и сила светового давления убывают пропорционально квадрату расстояния.

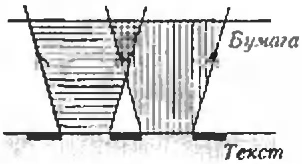


Рис. 4

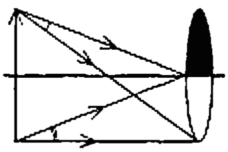


Рис. 5

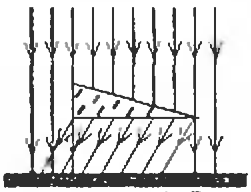


Рис. 6

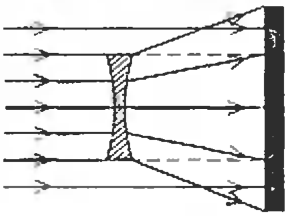


Рис. 7

Микроопыт

Можно (см. рис.7, а также решение задачи 12). На экране будет ясно виден светлый круг, опоясанный еще более светлой каймой, в пределах которой освещенность и будет максимальной.

Разрежем на треугольники

1, 4. Теоремы 1, 2 и 3 для невыпуклых многоугольников неверны. На рисунке 8 приведен опровергающий пример.

2. В теореме 2 доказано, что $B \le T+2$. В решении задачи 3 было доказано, что $B \ge T+\frac{2}{3}n$. Остается заметить, что $n = 3$.

3. Обозначим через $C_{общ}$ количество отрезков, каждый из которых является общей стороной двух треугольников разбиения. Количество «сторон» во всех треугольниках разбиения равно $3T - C_{общ}$. И поэтому

$$C = 3T - C_{общ}.$$

Далее, справедливо неравенство $3B_{вн} \ge C_{вн} - C_{общ}$ (это неравенство доказывается точно так же, как неравенство $3B_{вн} \ge C_{вн}$ в решении задачи 3). Тем самым имеем

$$3T = C + C_{общ} = C_{вн} + C_{гр} + C_{общ} \le \left(3B_{вн} + C_{общ}\right) + B_{гр} + C_{общ} =$$

$$= 3\left(B_{вн} + B_{гр}\right) - 2B_{гр} + 2C_{общ} = 3B - 2B_{гр} + 2C_{общ} \le 3B - 2n + 2C_{общ}.$$

Используя теперь теорему 1, согласно которой $B \le T+2$, мы получаем требуемое неравенство $C_{общ} \ge n-3$.

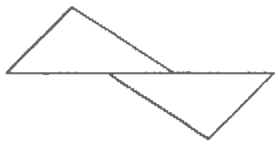


Рис. 8

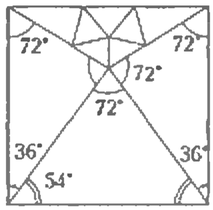


Рис. 9

5. На рисунке 9 приведено разбиение квадрата на 10 треугольников.

6. Для доказательства достаточно доказать следующие три утверждения: а) любой многоугольник можно разрезать на треугольники, б) любой треугольник можно разрезать на два прямоугольных треугольника, в) любой прямоугольный треугольник можно разрезать на остроугольные треугольники.

Законы отражения и преломления света

1. $L_{max} = (R-r)\sqrt{n^2-1} = 2{,}6$ см. 2. $n = 4/3$.

3. $h = (n-1)F\,\mathrm{tg}\,\alpha = 4$ мм. 4. $\alpha = \arcsin\dfrac{2HRn_0}{r_0^2} \approx 3^\circ$.

5. $\Delta n = n_1 - n_2 = \alpha/\varphi$. 6. $u = v\dfrac{L-F+l/n}{F} = 0{,}5$ см/с.

XXII Всероссийская олимпиада школьников по математике

9 класс

1. Чисел, не представимых в таком виде, больше.

Решение. Пусть $n = k^2 + m^3$, где $k, m, n \in \mathbf{N}$, а $n \le 1000000$. Ясно, что тогда $k \le 1000$, а $m \le 100$. Поэтому интересующее нас представление могут давать не более чем 100000 пар (k, m). Но чисел n, удовлетворяющих условию, заведомо меньше, чем таких пар, так как некоторые пары дают числа n, большие 1000000, а некоторые различные пары дают одно и то же число n.

3. Без ограничения общности будем считать, что числа x и y не делятся на p. Поскольку n нечетно, то

$$\frac{x^n + y^n}{x+y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots - xy^{n-2} + y^{n-1}.$$

Обозначим число, стоящее в правой части этого равенства, через A. По условию $p > 2$, следовательно, хотя бы одно из чисел x, y больше 1, а так как $n > 1$, то и $A > 1$. Значит, поскольку $A(x + y) = p^k$, то A делится на p. Это записывают так: $A \equiv 0 \pmod{p}$. Число $x + y$ тоже делится на p, иначе говоря, x и $(-y)$ при делении на p дают одинаковые остатки:
$x \equiv -y \pmod{p}$.
Получили

$$A \equiv x^{n-1} - x^{n-2}(-x) + x^{n-3}(-x)^2 - \ldots - x(-x)^{n-2} + (-x)^{n-1} \pmod{p},$$

или $A \equiv nx^{n-1} \pmod{p}$.
Так как $nx^{n-1} \equiv 0 \pmod{p}$, а x не делится на простое число p, то n делится на p.
Отсюда уже следует утверждение задачи. Действительно, предположим противное: $n = rs$, где r — простое число, отличное от p. Имеем $(x^s)^r + (y^s)^r = p^k$ — в противоречии с доказанным.
5. Докажем более общий, нежели в условии задачи, факт.
Если целые числа a и m взаимно просты, то существует бесконечно много натуральных k таких, что $a^k - 1$ делится на m (при $a = 10$, $m = 729$ получим утверждение задачи).
Доказательство. Существование хотя бы одного такого k следует из принципа Дирихле: в последовательности $1, a, a^2, \ldots$ $\ldots, a^m$ из $m + 1$ чисел найдутся два, дающие одинаковые остатки при делении на m; их разность $a^{l+k} - a^l = a^l(a^k - 1)$ делится на m, а поскольку a и m взаимно просты, $a^k - 1$ делится на m. Для получения бесконечной серии достаточно рассмотреть числа вида lk, где $l = 1, 2, 3, \ldots$
6. Если данный треугольник равносторонний (точки O и I совпадают), то утверждение очевидно. Пусть точка O лежит между точками I и C (рис.10). Проведем высоту CE. Заметим, что

$$\angle EIB = 90° - \frac{1}{2}\angle ABC \text{ и } \angle ODB = 90° - \frac{1}{2}\angle ABC,$$

следовательно, $\angle OIB + \angle ODB = 180°$, т.е. точки B, I, O и D лежат на одной окружности. Тогда $\angle IDB = \angle IOB$ (как вписанные, опирающиеся на дугу IB), но

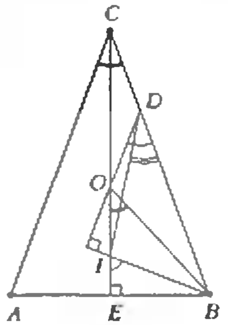


Рис. 10

$$\angle IOB = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle ACB.$$

Итак, $\angle IDB = \angle ACB$, поэтому $ID \parallel AC$.
В случае, когда точка I лежит между точками O и C (рис.11, 12) ход решения остается таким же.

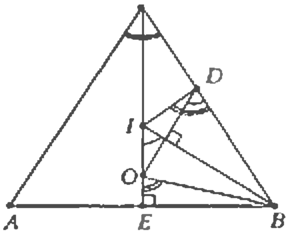


Рис. 11

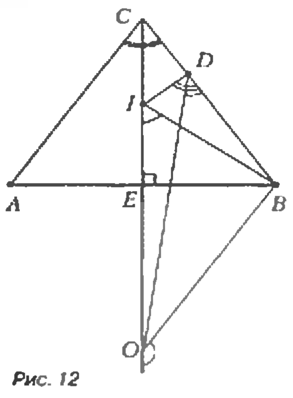


Рис. 12

7. Пусть в первой кучке n монет с весами $x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n$, а во второй кучке m монет с весами $y_1 \ge y_2 \ge \ldots \ge y_m$, причем $x_1 \ge \ldots \ge x_s \ge x \ge x_{s+1} \ge \ldots \ge x_n$ и $y_1 \ge \ldots \ge y_t \ge x \ge y_{t+1} \ge \ldots \ge y_m$ (если монет, вес которых не меньше x, вообще нет, то доказываемое утверждение очевидно). Нужно доказать, что $xs + x_{s+1} + \ldots + x_n \ge xt + y_{t+1} + \ldots + y_m$. Обозначив $A = x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_m$, перепишем:

$$xs + \left(A - (x_1 + \ldots + x_s)\right) \ge xt + \left(A - (y_1 + \ldots + y_t)\right),$$

следовательно, доказываемое неравенство равносильно такому:

$$x_1 + \ldots + x_s + x(t - s) \le y_1 + \ldots + y_t,$$

которое мы и докажем.
Если $t \ge s$, то

$$x_1 + \ldots + x_s + x(t - s) = (x_1 + \ldots + x_s) + \underbrace{(x + \ldots + x)}_{t-s} \le$$
$$\le (y_1 + \ldots + y_s) + (y_{s+1} + \ldots + y_t),$$

так как $x_1 + \ldots + x_s \le y_1 + \ldots + y_s$ (что немедленно вытекает из условия), а $y_{s+1} \ge x, \ldots, y_t \ge x$.
Если $t < s$, то $x_1 + \ldots + x_s + x(t - s) \le y_1 + \ldots + y_t$ равносильно

$$x_1 + \ldots + x_s \le y_1 + \ldots + y_t + \underbrace{(x + \ldots + x)}_{s-t}.$$

Последнее неравенство следует из того, что

$$x_1 + \ldots + x_s \le y_1 + \ldots + y_s = (y_1 + \ldots + y_t) + (y_{t+1} + \ldots + y_s),$$

а $y_{t+1} \le x, \ldots, y_s \le x$.

10 класс

1. В силу равенства углов EAF и FDE четырехугольник $AEFD$ вписанный (рис.13). Поэтому $\angle AEF + \angle FDA = 180°$. В силу равенства углов BAE и CDF имеем

$$\angle ADC + \angle ABC = \angle FDA + \angle CDF + \angle AEF - \angle BAE = 180°.$$

Следовательно, четырехугольник $ABCD$ вписанный. Поэтому $\angle BAC = \angle BDC$. Отсюда и $\angle FAC = \angle EDB$.
2. *Лемма.* Если три фишки лежат на одной прямой и имеют целые координаты, то можно совместить любые две из них.
Доказательство леммы. Пусть наименьшее из трех попарных расстояний будет между фишками A и B, тогда сдвигая третью фишку на вектор AB или ему противоположный, загоним третью фишку C на отрезок AB, после чего наименьшее из трех

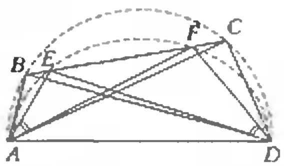


Рис.13

попарных расстояний уменьшится. В силу целочисленности расстояний между точками, лежащими на прямой, после нескольких таких операций наименьшее расстояние станет равно нулю. Если требуемые фишки совместились, то цель достигнута, иначе берем требующую совмещения фишку из этих двух совместившихся и переносим на оставшуюся. Лемма доказана.
Спроектируем фишки на одну из осей. Проекции ведут себя как и фишки, т.е. если фишка сдвигается на некоторый вектор, то ее проекция сдвигается на проекцию этого вектора. Совместим проекции двух заданных фишек, используя одну из двух

оставшихся фишек в качестве третьей. Рассматривая две заданные фишки как одну (требуемое для нее движение повторяется дважды сначала для одной, затем для другой и их проекции по-прежнему совмещены после такой операции) и две оставшиеся, совместим проекции заданных фишек с проекцией одной из оставшихся. Получим три фишки с одинаковой проекцией, т.е. лежащие на одной прямой и имеющие целочисленные координаты. Среди них две фишки, требующие совмещения. Их можно совместить ввиду леммы.

3. $n = 2$. *Решение.* Пусть $3^n = x^k + y^k$, где x, y — взаимно простые числа $k > 1$, n — натуральное. Ясно, что ни одно из чисел x, y не кратно трем. Поэтому, если k четно, то x^k и y^k при делении на 3 дают в остатке 1, а значит, их сумма при делении на 3 дает в остатке 2 и, следовательно, не является степенью 3.

Пусть k нечетно. Поскольку k делится на 3 (см. решение задачи 3 для 9 класса), будем без ограничения общности считать, что $k = 3$. Итак, $x^3 + y^3 = 3^n$, $(x+y)(x^2-xy+y^2) = 3^n$. Значит, $x^2 - xy + y^2 = 3^m$, где $m \geq 0$.

Так как

$$x^2 - xy + y^2 > xy \geq 2, \qquad (*)$$

то $m > 0$. С другой стороны, $x^2 - xy + y^2 = (x+y)^2 - 3xy$, и следовательно, так как $x + y$ делится на 3, а xy не делится на 3, то $m < 2$. Получили: $m = 1$, $x^2 - xy + y^2 = 3$. Из этого и из $(*)$ вытекает, что $xy = 2$.

Окончательно: $x = 2$, $y = 1$ (либо $x = 1$, $y = 2$), $n = 2$.

5. Не могла. *Решение.* Заметим, что если a и b — два натуральных числа и $a > b$, то $\text{НОД}(a,b) \leq b$ и $\text{НОД}(a,b) \leq \frac{a}{2}$. Поэтому при $a \neq b$ $\text{НОД}(a,b) \leq \frac{a+b}{3}$. Складывая 12 таких неравенств, соответствующих 12 ребрам куба, получаем, что требуемое условиями задачи равенство возможно только тогда, когда для каждого ребра $\text{НОД}(a,b) = \frac{a+b}{3}$. Но в этом случае наибольшее из чисел a и b вдвое больше наименьшего. Пусть, скажем, $a = 2b$. Рассмотрим числа c и d, стоящие на концах двух других ребер, выходящих из вершины с числом a. Каждое из них должно быть вдвое больше или вдвое меньше числа a. Если хотя бы одно вдвое меньше, оно равно b, если оба вдвое больше — они равны между собой. Оба варианта противоречат условию, что и завершает доказательство.

6. Сможет тот сержант, который дежурит третьим. *Решение.* Назовем циклом три дежурства, идущие подряд. Чтобы не попасть на гауптвахту, третий сержант будет в последний день каждого цикла давать наряды в точности тем солдатам, которые получили за предыдущие два дня ровно по одному наряду (из третьего пункта приказа следует, что такие солдаты найдутся). При такой стратегии по окончании каждого цикла у каждого солдата будет либо два наряда, либо ни одного, причем количество вторых будет убывать. Стало быть, когда-то окажется, что все солдаты имеют по два наряда и на гауптвахту отправится первый сержант.

8. *Решение.* Да, мог. Например, записав числа 1/4, 1/2, 1, 2, 5, 5^2, 5^4, 5^8, 5^{16}, 5^{32}.

Лемма 1. 1) Если $a > 4$ и $a > b$, то трехчлен $x^2 + ax + b$ имеет два различных действительных корня.

2) Если $a < 4$ и $b > 0$, то хотя бы один из трехчленов $x^2 + ax + b$, $x^2 + bx + a$ не имеет действительных корней.

Доказательство. Первое очевидно, ибо дискриминант $D = a^2 - 4b > 4a - 4b > 0$. Во втором случае также проверяется, что если $b \leq a$, то $b^2 - 4a < 0$, а если $b > a$, то $a^2 - 4b < 0$.

Лемма 2. Пусть $0 < a < b < c < d$ и оба трехчлена $x^2 + dx + a$ и $x^2 + cx + b$ имеют по два различных действительных корня. Тогда все четыре их корня попарно различны.

Доказательство. Допустим противное: эти трехчлены имеют общий корень x_0. Пусть первый трехчлен имеет еще корень x_1, а второй — корень x_2. Очевидно, что числа x_0, x_1, x_2 отрицательны. Поскольку $d = -(x_0 + x_1) > c = -(x_0 + x_2)$, имеем $x_1 < x_2$. Умножая обе части последнего неравенства на отрицательное число x_0, получаем $x_1x_0 > x_2x_0$, т.е. $a > b$. Противоречие.

Покажем, что выбранные Знайкой 10 чисел подходят. Рассмотрим все Незнайкины числа, большие 4. Если их количество нечетно, добавим к ним еще одно (любое) Незнайкино число. Назовем эти числа отмеченными.

Добавим к отмеченным числа из набора 5, 5^2, 5^4, 5^8, 5^{16}, 5^{32} так, чтобы общее количество отмеченных чисел было равно 12, а если степеней 5 не хватит, то добавим еще несколько любых Незнайкиных чисел. Из неиспользованных степеней 5 составим трехчлены $x^2 + px + q$, у которых $p < q$, тогда их дискриминанты отрицательны и, следовательно, они не имеют действительных корней.

Запишем 12 отмеченных чисел в порядке возрастания: n_1, n_2, ..., n_{12}. Теперь составим из них 6 трехчленов: $x^2 + n_{12}x + n_1$, ..., $x^2 + n_7x + n_6$. По построению среди 12 отмеченных чисел не менее шести превосходят 4. Поэтому по лемме 1 у каждого из этих трехчленов два различных действительных корня. По лемме 2 все эти корни попарно различны. Итак, имеем 12 попарно различных корней отмеченных трехчленов.

Составим трехчлен $x^2 + 2x + 1$. Его единственный корень равен -1. Если это число встречается среди корней отмеченных трехчленов, то объявляем соответствующий трехчлен «плохим». Если нет, объявляем «плохим» любой из отмеченных трехчленов. Выбираем плохой трехчлен, а из двух его коэффициентов и чисел 1/2 и 1/4 составляем (по лемме 1) два трехчлена, не имеющие действительных корней. Теперь различных действительных корней у составленных уже трехчленов — ровно 11. Возможно, остались неиспользованными несколько Незнайкиных чисел, из которых все, кроме быть может одного, меньше 4 (одно может равняться 4). По лемме 1 составим из них трехчлены, не имеющие корней. Цель достигнута.

11 класс

1. Нет. *Решение.* Пусть $N = \overline{123...321}$ — m-значное симметричное число, полученное выписыванием чисел от 1 до n (очевидно, $m > 27$), A и B — соответственно числа, составленные из первых и последних k цифр числа N, $k = \left[\frac{m}{2}\right] + 1$. Тогда если 10^p — наибольшая степень десятки, полностью вошедшая в A, то $n < 2 \cdot 10^{p+1}$, т.е. n не более чем $(p+2)$-значно. Кроме того, A содержит фрагмент $\underbrace{99...9}_{p}1\underbrace{00...0}_{p}1$, а значит, B — фрагмент $1\underbrace{00...0}_{p}1\underbrace{99...9}_{p}$, что невозможно.

2. *Первое решение.* Пусть n — число путников, обозначенных буквами P_1, P_2, ..., P_n. Рассмотрим величину V_{ij} — скорость сближения P_i и P_j (для произвольных $1 \leq i, j \leq n$). Эта величина может быть как положительной, так и отрицательной (путники удаляются друг от друга). Заметим, что в течение всего рассматриваемого периода времени V_{ij} не возрастает (а уменьшиться может только один раз — в результате встречи P_i и P_j или обгона одного из них другим).

По условию задачи в конце рассмотренного периода времени сумма всех попарных скоростей положительна:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{ij} > 0,$$

а поскольку $V_{ij} = V_{ji}$ (для любых $1 \leq i < j \leq n$), то

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} V_{ij} > 0.$$

Отсюда следует, что обязательно найдется путник P_j такой, что

$$\sum_{i=1}^{n} V_{ij} > 0. \qquad (*)$$

А так как все V_{ij} не возрастали в течение всего периода времени, то и неравенство (∗) выполнялось в течение всего периода времени, откуда и вытекает утверждение задачи.

Второе решение. Расстояние $r_{ij} = r_{ij}(t)$ между двумя путниками — кусочно-линейная функция времени, график которой состоит из двух лучей: до момента встречи она убывает, потом возрастает. Поэтому сумма $r_i = \sum_{j \neq i} r_{ij}(t)$ расстояний от i-го до остальных $n-1$ ($j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$) — выпуклая вниз кусочно-линейная функция, и сумма n таких функций, а значит, и ее половина — сумма $r = \sum_{i<j} r_{ij}(t) = \frac{1}{2}\sum r_i(t)$ всех попарных расстояний — тоже. Ясно, что если на некотором отрезке $[a,b]$ сумма $r = r(t)$ убывает, то вблизи точки b на этом отрезке одна из функций $r_i = r_i(t)$ тоже убывает, а значит, она убывает на всем отрезке $[a,b]$.

5. Не существуют. *Решение.* Пусть $a \geq b \geq c$ — числа, удовлетворяющие условиям задачи. Так как $a^2 - 1$ делится на b, числа a и b взаимно просты. Поэтому число $c^2 - 1$, которое по условию делится и на a и на b, должно делиться и на их произведение, следовательно, $c^2 - 1 \geq ab$. С другой стороны, $a \geq c$ и $b \geq c$, т.е. $ab \geq c^2$. Противоречие. 6. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, K — точка пересечения прямых BO и CD (рис.14, 15). Из равенства острых углов BOE и DCA с перпендикулярными сторонами следует, что $\angle BOE = \angle KCE$ (CD — биссектриса) и, значит, точки K, O, E,

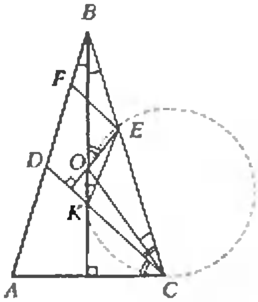


Рис. 14

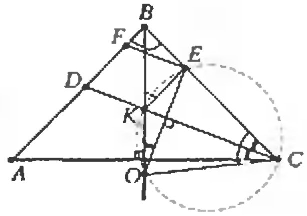


Рис. 15

C лежат на одной окружности (на рисунке 14 $\angle KOE + \angle KCE = 180°$, на рисунке 15 $\angle KOE = \angle KCE$, в случае совпадения точек K и O утверждение очевидно). Отсюда следует, что $\angle OKE = \angle OCE$ (на рисунке 14 углы опираются на одну дугу), либо $\angle OKE + \angle OCE = 180°$ (см.рис.15). Но $\angle OCE = \angle OBE$, так как $OB = OC$, значит, в случае, изображенном на рисунке 14, $\angle BKE = \angle KBE$. В другом случае (рис.15) имеем

$$\angle BKE + \angle EKO = 180°, \quad \angle OCE + \angle OKE = 180°.$$

Таким образом, $\angle BKE = \angle OCE = \angle KBE$. В обоих случаях получаем $BE = KE$.

XXX Всероссийская олимпиада школьников по физике

Теоретический тур

9 класс

1. 1) $v_0 = H/t_0$; 2) $L = \beta H$; 3) $L_{max} = H\sqrt{\beta^2 - 1}$; 4) $t = t_0\beta/\sqrt{\beta^2 - 1}$.

2. $\dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{l - a/4}{l - 3a/4}$.   3. 1) $t_1 = 2c\Delta T t/\lambda = 4{,}2$ мин;

2) $t_2 = t_1(T_к - T)/(T_к - T_1) = 21$ мин.

4. 1) $U = \dfrac{P_1 I_2^2 - P_2 I_1^2}{I_1 I_2 (I_2 - I_1)} = 36$ В, $r = \dfrac{P_1 I_2 - P_2 I_1}{I_1 I_2 (I_2 - I_1)} = 6$ Ом;

2) $I_0 = U/r = 6$ А; 3) $P_{max} = U^2/(4r) = 54$ Вт, $R = r = 6$ Ом.

10 класс

1. $v_0 = 2{,}5$ км/ч, $u_1 = 3{,}13$ км/ч, $u_2 = 4{,}17$ км/ч.

2. $H = \Delta L(g\tau + \Delta v)/(2v_{Ar})$.   3. $T = \sqrt{T_1 T_2} = 400$ К.

$N_{max} = a\left(T_1 - 2\sqrt{T_1 T_2} + T_2\right)/2 = 100$ кВт.

4. $\varphi_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q_1}{r} + \dfrac{q_2}{r_2} + \dfrac{q_3}{r_3}\right)$, $\varphi_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q_1}{r} - \dfrac{q_1}{r_2} + \dfrac{q_1 + q_2 + q_3}{r_3}\right)$.

$$\varphi_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 + q_3}{r_3}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_3}\right)^{-1}.$$

5. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{(2\rho g + p_0/l)S}} = 0{,}63$ с.

11 класс

1. $v_0 = \sqrt{8\mu g(l + \mu mg/k)}$.   2. $T = \dfrac{\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{\dfrac{M}{m}}\dfrac{1}{f}$. 3. При $T_1 - T_2 \ll T_2$ мощность $W = cm(T_1 - T_2)^2/(2T_2) = 3 \cdot 10^8$ кВт.

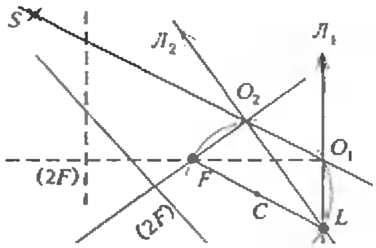


Рис. 16

4. $T = (2L\ln 2)/R = 1{,}4 \cdot 10^{-2}$ с.   5. См. рис.16.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Ю.А.Ващенко, В.С.Власов, Д.А.Крымов, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко, Е.В.Титова

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Е.В.Самойлова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64а, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №2172

kvant.mccme.ru

Исторический матч

Итак, спустя почти полвека после того, как американский кибернетик Клод Шеннон впервые высказал идею создания шахматной программы, состоялось историческое событие: чемпион мира Гарри Каспаров сыграл матч из шести партий с суперкомпьютером, причем не в блиц, не в «быстрые шахматы», а с классическим *контролем времени* — каждая партия длится семь часов.

Соперником чемпиона мира в этом историческом поединке была программа «Deep Blue», созданная в американской корпорации IBM. Игра проходила в Филадельфии, но сама машина, монстр весом 20 тонн, находилась на окраине Нью-Йорка в Исследовательском центре IBM имени Уотсона.

«Deep Blue» представляет собой модификацию другой программы, «Deep Thought» («Глубокая мысль»), которая еще в 89-м году победила в первенстве мира среди суперкомпьютеров, а затем часто обыгрывала гроссмейстеров и мастеров.

Существенно переработав «Deep Thought», ученые решили дать своему детищу новое имя. Узнав как-то, что в казино Лас-Вегаса самая ценная фишка имеет голубой цвет, они сохранили в названии слово deep (глубокий) и добавили новое слово blue (голубой). В результате родилась суперпрограмма «Deep Blue», т.е. «Темно-синяя», хотя для авторов она, наверное, и глубокая, и бесценная...

Действительно, мощный компьютер «Deep Blue», как утверждают разработчики, рассматривает около 200 миллионов позиций в секунду и анализирует на 6 ходов вперед. Но алгоритм, видимо, не столь уж совершенен, потому что, несмотря на фантастическое быстродействие, в компьютерном чемпионате мира 1995 года «Deep Blue» разделила лишь 3 – 5 места, уступив первенство программе «Fritz», написанной для PC («Квант», № 1, 1996).

Чувствуя ответственность перед видом homo sapiens, Каспаров, по его признанию, мобилизовал в этом матче все свои силы и выкладывался за шахматной доской так, словно перед ним сидел Анатолий Карпов... В спортивном отношении матч протекал весьма увлекательно. Робот сразу вышел вперед, затем Каспаров сравнял счет. Далее последовали две боевые ничьи. И пятая схватка могла завершиться мирно, но ЭВМ отказалась от ничьей и проиграла. И лишь шестая партия подвела окончательные итоги матча — Каспаров взял верх со счетом 4:2. Теперь предстоит матч-реванш.

Посмотрим две партии этого уникального матча: первую и третью.

«Deep Blue» — Г.Каспаров
Сицилианская защита

1. e4 c5 2. c3 d5 3. ed Ф:d5 4. d4 Kf6 5. Kf3 Cg4 6. Ce2 e6 7. h3 Ch5 8. 0-0 Kc6 9. Ce3 cd 10. cd Cb4!? Патент Каспарова. Слон как бы стреляет в пустоту, а на самом деле, переместившись на b6, создаст давление на пешку d4. **11. a3 Ca5 12. Kc3 Фd6 13. Kb5 Фe7?** Как ни странно, ведет к трудной позиции для черных. А между тем после 13... Фd5 у белых нет ничего лучшего, чем вернуться конем на c3 (грозит, например, C:f3).

14. Ke5 C:e2 15. Ф:e2 0-0 16. Лac1 Лac8 17. Cg5. Эта связка довольно неприятна: теперь в лагере черных неизбежно образуются пешечные слабости. **17...Cb6 18. C:f6 gf 19. Kc4 Лfd8 20. K:b6 ab 21. Лfd1 f5 22. Фe3 Фf6.** Давление на изолированную пешку d4 — стандартная контригра в подобных позициях. Но... **23. d5!**, и от «изолятора» не остается и следа. **23...Л:d5 24. Л:d5 ed 25. b3! Kph8?** Видимо, решающая ошибка. После 25...Лd8! 26. Ф:b6 Лd7! 27. Фe3 Kpg7 черные еще могли удержать позицию.

26. Ф:b6 Лg8 27. Фc5 d4 28. Kd6 f4. Все пешки черных безнадежно слабы, и их шансы только в контратаке на неприятельского короля. Однако в тактической схватке робот чувствует себя как рыба в воде. **29. K:b7 Ke5 30. Фd5 f3 31. g3 Kd3 32. Лc7!** Этот маневр ладьей производит сильное впечатление. Менее мощный компьютер, не говоря уже о человеке, не задумываясь, увел бы ладью на c6, выигрывая темп, но тогда чемпион мира как раз собирался пойти 32... Лg5 с неясными осложнениями.

32...Лe8 33. Kd6 Лe1+ 34. Kph2 K:f2. Со слабой надеждой объявить мат белому королю. **35. K:f7+! Kpg7.** Увы, на 35...Ф:f7 решает 36. Фd8+ Kpg7 (36...Лe8 37. Ф:d4+) 37. Л:f7+ Kp:f7 38. Фd5+ Kpg6 39. Ф:f3 d3 40. Ф:f2 Лe2 41. Kpg2.

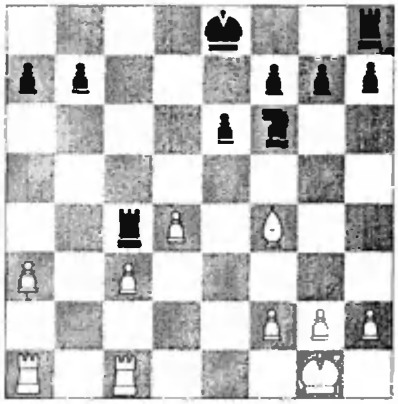
36. Kg5+ Kph6 37. Л:h7+. Черные сдались. На 37...Kpg6 следует 38. Фg8+ Kpf5 и 39. K:f3.

Итак, первая в истории партия между чемпионом мира и роботом в «нормальные» шахматы завершилась победой электронного гроссмейстера! Во второй партии Каспаров в эндшпиле переиграл машину, и вот третья партия...

«Deep Blue» — Г.Каспаров
Сицилианская защита

1. e4 c5 2. c3 d5 3. ed Ф:d5 4. d4 Kf6 5. Kf3 Cg4 6. Ce2 e6 7. 0-0 Kc6 8. Ce3 cd 9. cd Cb4 10. a3 Ca5 11. Kc3 Фd6 12. Ke5. В отличие от первой встречи белые отказываются от промежуточного h3 и Ch5, а сейчас вместо Kb5 отправляют за демаркационную линию другого коня. Надо сказать, что перед очередной партией компьютерщики всегда имеют возможность подкорректировать программу, «подсказать» роботу новый вариант. Хотя стартовая встреча закончилась удачно для машины, они, видимо, сочли, что так рано форсировать ничью не слишком интересно. Впрочем, людей-то Каспарову нетрудно перехитрить...

12...C:e2 13. Ф:e2 C:c3 14. bc K:e5 15. Cf4 Kf3+ 16. Ф:f3 Фd5 17. Фd3 Лc8 18. Лfc1 Фc4 19. Ф:c4 Л:c4.



На первый взгляд, компьютер переигран по всем статьям. Конь явно превосходит слона, белые ладьи пассивны, еще пара ходов — Kpd7 и Лfc8, и борьба, по существу, закончится. Чемпион мира тоже считал, что победа не за горами. Тем удивительнее, что робот не теряется, а находит удивительный маневр, в результате которого чуть ли не перехватывает инициативу.

20. Лcb1! весьма трудный и, с точки зрения человека, совершенно неожиданный ход. Если уж решено занять линию «b», то почему не ладьей a1, не снимая защиты с пешки c3? **20...b6 21. Cb8!** Еще один темп для консолидации сил. **21...Лa4.** Вынужденный ответ. Вот и выясняется, почему ладья a1 должна была остаться на месте. **22. Лb4! Лa5.** Бить на b4 нельзя из-за ab, но теперь следует еще один изящный трюк. **23. Лc4!** Сравните эту позицию с предыдущей. Только что на c4 стояла черная ладья, а сейчас уже белая — с пассивного поля c1 она неожиданно переместилась на активное поле c4! Хотя перестройка белых фигур носила, скорее, позиционный характер, очевидно, найдена она была компьютером в результате перебора вариантов, т.е. как тактическая операция.

23...0-0 24. Cd6 Лa8 25. Лc6 b5 26. Kpf1 Лa4 27. Лb1 a6 28. Kpe2 h5 29. Kpd3 Лd8 30. Ce7 Лd7 31. C:f6 gf 32. Лb3 Kpg7 33. Kpe3 e5 34. g3 ed+ 35. cd Лe7+ 36. Kpf3 Лd7 37. Лd3 Лa:d4 38. Л:d4 Л:d4 39. Л:a6 b4. Ничья.

Е.Гик

kvant.mccme.ru

Индекс 70465

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

ГОЛОВОЛОМКА ИЗ ДОМИНОШЕК

Чтобы изготовить эту головоломку, можно воспользоваться комплектом домино. Дополнительно понадобятся еще один квадратик размером в половину доминошки и коробочка размеров 7×7 (за единицу принята меньшая сторона доминошки).

Начальное расположение фишек изображено на рисунке 1. В левом верхнем углу имеется *свободное поле размером в одну доминошку. Требуется перевести квадратик К в этот левый* верхний угол, передвигая фишки по полю.

Следует заметить, что не для всякого начального расположения фишек такое перемещение возможно. Например, для расположения, изображенного на рисунке 2, передвинуть квадратик в верхний левый угол невозможно. Что касается расположения, указанного на рисунке 1, то автору удалось решить задачу за 111 ходов. Кто сможет улучшить результат?

В.Плесов

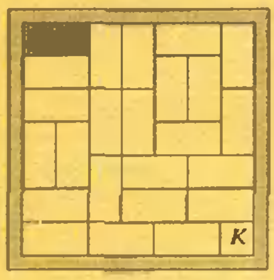


Рис. 1

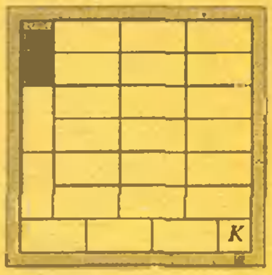


Рис. 2