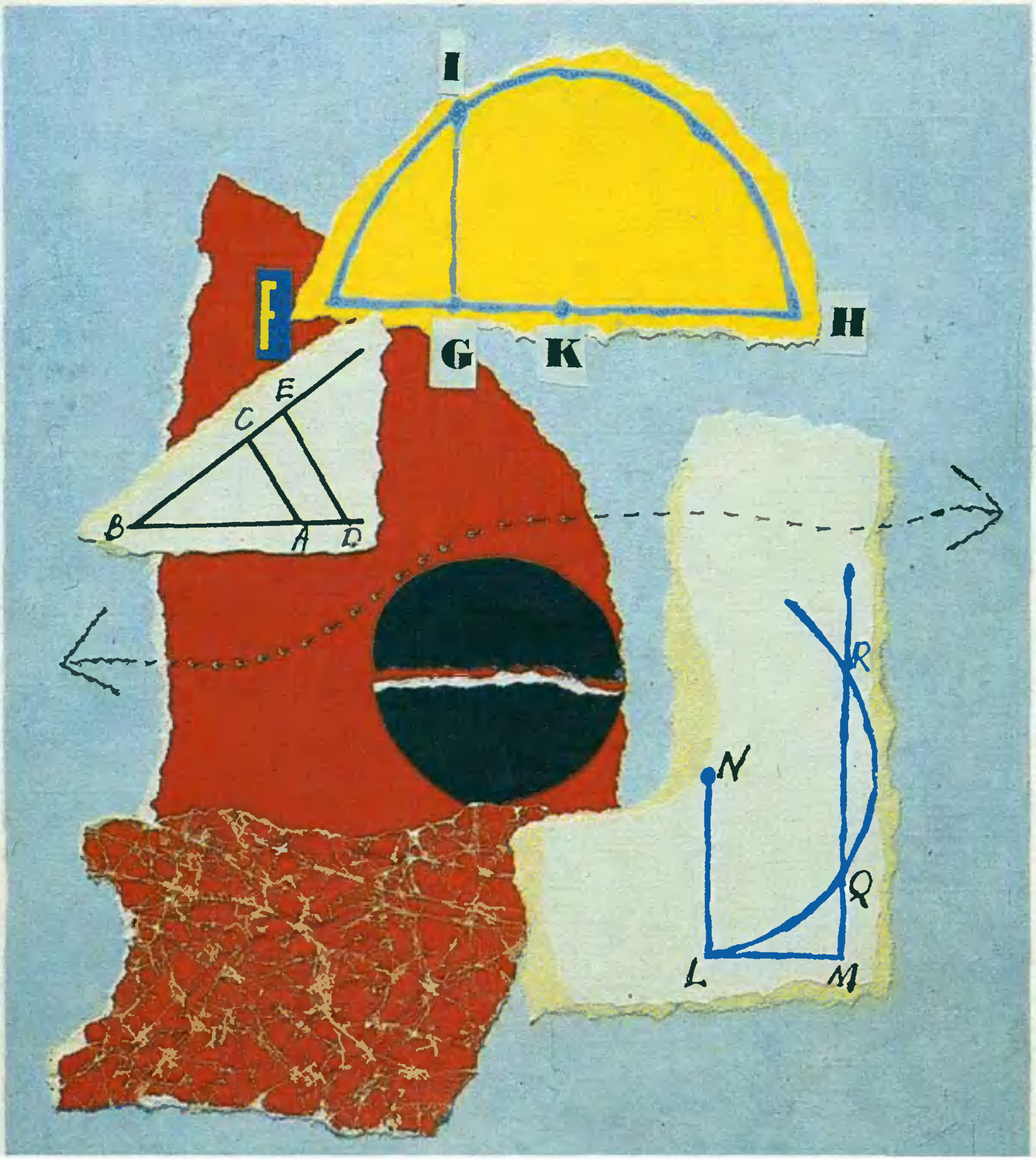
ISSN 0130-2221
МАЙ/ИЮНЬ 1996 · №3

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



РАЗБИТОЕ СЕРДЦЕ

Последняя новость на рынке японских интеллектуальных развлечений — головоломка «Broken Heart» (разбитое сердце). Требуется переместить фишки в коробочке так, чтобы рисунок сердца не был разорван. Фишки нужно передвигать, не вынимая их из коробочки, т.е. действуют правила всем известной игры «15».

Конструктивно все восемь фишек одинаковы, имеют прямоугольную форму и размер 6 × 5. Четыре фишки расположены горизонтально, а четыре — вертикально. Размер коробочки 17 × 17, не[illegible]заполненное фишками пространство коробочки не позволяет поворачивать фишки. Головоломка [illegible]льно трудна в решении, и скорее всего вам потребуется не один час, чтобы найти правильный [illegible]чав решать головоломку, вы сразу же столкнетесь с трудностями, которых нет в игре [illegible]зонтальные фишки не помещаются рядом в одном ряду, а три вертикальные — не по[illegible]й колонке друг над другом. Поэтому совет: не торопитесь сразу выстраивать ри[illegible]ритесь, по каким замкнутым маршрутам можно перемещать группы из несколь[illegible]игурации этих маршрутов и сколько фишек в них могут участвовать; на[illegible]ты. Только после этого стоит приступать к решительному штурму. Луч[illegible]омки состоит из 37 ходов.

А.Калинин

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

МАЙ/ИЮНЬ · 1996 · №3

В номере:

Учредители — Президиум РАН, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

Бюро Квантум

a,b,c
x,y,z
53.
RENATI
DES-CARTES
PRINCIPIA
PHILOSOPHIÆ.
AMSTELODAMI,
D
N
P
L
M

Жизнь Декарта

А.КОТОВА

> *Cogito, ergo sum.*
> Renatus Cartesius
>
> *Мыслю — следовательно, существую.*
> Рене Декарт

ЧЕТЫРЕСТА лет назад, 31 марта 1596 года, родился человек, имя которого известно, пожалуй, каждому. Один из знаменитейших философов, математик, физиолог, Рене Декарт (в латинском написании Ренатус Картезиус) тем не менее — личность таинственная. Его жизнь в науке известна вдоль и поперек: о ней рассказывают его философские труды, научная переписка, отзывы современников и восхищенных потомков. Его же частная жизнь собрана биографами по крупицам, и там, где некому было рассказать о Декарте-человеке, кроме него самого, зияют провалы.

Даже точная дата рождения Декарта впервые была официально опубликована лишь после его смерти во втором издании латинского перевода «Геометрии», в подписи под портретом автора: крайне отрицательно относясь к составителям гороскопов, он не желал давать им повода исчислить его судьбу.

Как некогда семь городов Греции оспаривали честь считаться родиной Гомера, так позже четыре французские провинции (Турень, Пуату, Бретань и графство Блуа) оспаривали честь быть родиной Рене Декарта. В конце концов, биографы сошлись на том, что великий философ родился в Турени, в городке Лаэ, ныне переименованном в Лаэ-Декарт.

В роду Декартов были весьма образованные люди. Среди его предков по мужской линии — доктор медицины Пьер Декарт, искусный (и передовой по тем временам) врач-хирург Жан Ферран. Дед философа был в дружеских отношениях с поэтом Гаспаром д'Овернем, переводчиком Макиавелли. Мать же философа происходила по женской линии из семьи Созэ, хранителей королевской библиотеки университета в Пуатье. Не очень понятно, правда, как эти семейный традиции отразились на Рене Декарте, поскольку отец его не занимался ни наукой, ни литературой — его больше заботило приумножение поместий и чиновничья карьера (он служил в парламенте в Бретани — по тем временам учреждение только судебное); мать же умерла, когда Рене было чуть больше года.

Рене Декарт (1596—1650)

Известно, что в раннем детстве Декарт был слаб здоровьем, и отец стремился прежде всего укрепить его физически, а учебу отложить до лучших времен. Но ребенок был очень любопытен, приставал с расспросами, так что поневоле отцу приходилось отвечать. Когда же мальчик подрос, его отдали в школу — и в школу замечательную.

Ла-Флеш

Это был иезуитский коллеж Ла-Флеш в провинции Анжу. Иезуиты, незадолго до того (в 1594 году) изгнанные из страны Генрихом IV, получили теперь возможность вернуться, и хотя пребывание и деятельность их в Париже были по-прежнему под запретом, им было разрешено открыть в провинции несколько школ. Одной из них и был коллеж Ла-Флеш, открытый в 1604 году. Вскоре (по одним данным — в 1604, по другим — в 1606 году) Декарт-старший отдал сюда учиться своего сына Рене.

Ректор коллежа Этьен Шарле приходился дальним родственником семье Декартов. С тем большей охотой он стал проявлять заботу о здоровье и обучении Рене. В отступление от школьных (довольно суровых) правил мальчику была предоставлена возможность спать не в общем дортуаре, а в отдельной комнате; он также мог не присутствовать на утренних занятиях. В результате на всю жизнь у Декарта осталась привычка по утрам, не вставая с постели, предаваться размышлениям; эти часы навсегда остались для него наиболее плодотворным рабочим временем.

Воспитанники Ла-Флеш изучали латинский язык и литературу, греческий язык, историю, поэзию и риторику; курс философии, включавший логику, физику, математику, этику и метафизику. Математика подразделялась по средневековой традиции на арифметику, геометрию, музыку и астрономию. Среди учебников по математике была «Алгебра» Христофора Клавия, широко известного тогда ученого (1537 — 1612); это был «свежий» учебник — изданный в 1609 году, — обобщавший основные результаты алгебраистов XVI века. Однако о сочинении Ф. Виета (1540 — 1603), совершившего переворот в алгебре и, в частности, в системе обозначений, воспитанники коллежа не знали (видимо, дело в том, что Виет был близок к гугенотам).

Коллеж располагал обширной библиотекой; ни один праздник не обходился без спектакля — комедии или балета; многие, в том числе и Декарт, увлекались поэзией; ученики занимались и спортом — фехтовали и играли в кегли. Словом, выпускники Ла-Флеш имели разностороннее образование. Школе не был чужд и интерес к новейшим научным достижениям. Известно, что открытия Галилея, сделанные при помощи телескопа, произвели неизгладимое впечатление на преподавателей и учеников коллежа (кто мог представить, что через пару десятилетий Галилей вступит в противоречие с церковью?).

Так что школа была поистине замечательной, и не зря Декарт с благодарностью вспоминал своих учителей... Что, впрочем, не мешало ему усомниться в самых основах философии, которую ему преподавали: «Я вижу, как она разрабатывалась в течение многих веков превосходнейшими умами и тем не менее не имеет ни одного пункта, который не вызывал бы споров и, следовательно, не был бы сомнительным.»

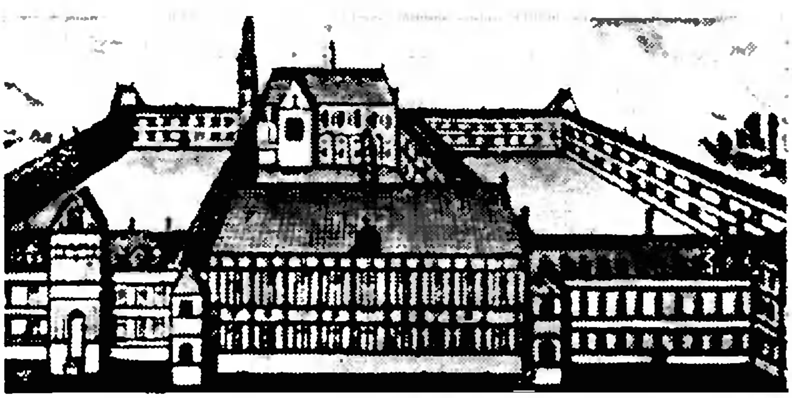
Самостоятельность мышления, проявленная Декартом еще в школьные годы, часто приводила в замешательство его учителей. Он зачастую оказывался непобедимым в школьных диспутах, строя свои рассуждения как геометр: начинал с точного определения всех терминов, используемых в рассуждении, стремился свести доказуемые положения к лежащим в их основе высшим принципам, согласовывая все положения друг с другом. Опровергнуть его доводы было нелегкой задачей. «Признаюсь, — писал он позже в трактате «Правила для руководства ума», — я родился с таким умом, что главное удовольствие при научных занятиях для меня заключалось не в том, что я выслушивал чужие мнения, а в том, что всегда стремился создать свои собственные. Это — единственное, что уже в молодости привлекало меня к наукам, и всякий раз, когда какая-нибудь книга сулила в своем заглавии открытие, я пытался, прежде чем приступить к ее чтению, узнать, не могу ли я достичь чего-либо подобного с помощью своей природной проницательности, и исправно старался не лишать себя этого невинного удовольствия поспешным чтением.»

Словом, неудивительно, что «как только возраст позволил мне выйти из подчинения моим наставникам, я совсем оставил книжные занятия и решился искать только ту науку, которую мог обрести в самом себе или же в великой книге жизни». И он отправился на поиски.

Военная служба

Известно, что после Ла-Флеш Декарт изучал юриспруденцию и медицину; судя по свидетельству о получении степени бакалавра, хранящемуся в университетском архиве в Пуатье, изучал он их именно там. Сам Декарт ничего об этом не сообщал.

После завершения образования перед молодым человеком были открыты две традиционные карьеры: священника и военного. Декарт избрал военную службу, которая сама по себе мало его привлекала. Зато она позволяла «путешествовать, увидеть дворы и армии, встречаться с людьми разных нравов и положений и собрать разнообразный опыт, испытать себя во встречах, которые пошлет судьба, и повсюду поразмыслить над встречающимися предметами так, чтобы извлечь какую-нибудь пользу из таких занятий». В 1618 году Декарт вступил добровольцем в голландскую протестантскую армию, сражавшуюся против общего врага Франции и Голландии — испано-австрийских войск. Военные действия к тому моменту приостановились, и воевать ему не пришлось.



Коллеж Ла-Флеш. С гравюры XVII в.

Зато он оказался в одной из самых просвещенных и самых свободных европейских стран того времени — Голландии, не знавшей религиозной нетерпимости, где оседали наиболее свободомыслящие люди Европы. Здесь, в городе Бреде, где стоял его полк, Декарт познакомился с молодым голландским ученым Исааком Бекманом (1588 — 1637).

Рассказывают, что встретились они на улице возле объявления, написанного на голландском языке. Объявление содержало условие одной трудной математической задачи (в те времена, когда не было научных журналов, подобные афиши на улицах были обычным делом). Декарт был еще слаб в голландском и попросил прохожего — им оказался Бекман — перевести ему текст на латынь или французский. На следующий день, решив задачу, Декарт принес решение Бекману — показать. С этого момента завязалась долгая дружба. Медик, математик и физик, Бекман был старше Декарта на восемь лет и оказал на молодого француза огромное влияние. «Я засыпал, а вы пробудили меня», — признавался Декарт Бекману. Бекман заинтересовал Декарта своими взглядами на отношения между математикой и физикой. Они обсуждали проблему падения тел в пустоте (причем, когда Бекман сформулировал физические условия проблемы, Декарт предложил ее математическое решение), вопросы о давлении жидкостей на дно сосуда и об их тяжести; обоих занимал вопрос о математическом выражении условий, при которых объекты чувств способны доставлять эстетическое удовольствие (из этих размышлений возникло первое научное сочинение Декарта «Compendium Musicae», посвященное Бекману). Позже молодые люди разъехались в разные стороны — Бекман уехал в Миддельбург для получения ученой степени, а Декарт вступил в баварскую армию, — и завязалась переписка, продолжавшаяся многие годы.

До 1621 года Декарт вместе с армией кочевал по Европе, не прекращая тем не менее научных занятий. Именно в армии, размышляя однажды в часы досуга (было это 10 ноября 1619 года), Декарт пришел к мысли о том, что все науки, за исключением математики, базируются не на строгих доказательствах, а скорее на предположениях. Но если найти столь же прочные исходные положения для других наук, то, применяя рассуждения, подобные правилам математики, можно получить результаты не менее точные, чем математические. Основываясь на таком методе, можно рассматривать все науки как единое целое.

Итак, появилась идея, позволяющая построить философскую систему, свободную от недостатков, присущих прежним теориям. Но прежде всего следовало заново пересмотреть основы. «Что касается мнений, приобретенных мною до того времени, я не мог предпринять ничего лучшего, как избавиться от них раз и навсегда, чтобы заменить их потом лучшими или теми же, но после согласования с требованиями разума.» Первой подвергнуться пересмотру должна была философия, ибо из нее должны быть заимствованы начала других наук.

Ясно было, что сходу такую работу не сделать, поэтому Декарт решил, что сначала он накопит опытный материал, странствуя и наблюдая жизнь. Поэтому вплоть до 1628 года он разъезжал по свету, стараясь быть более зрителем, чем действующим лицом, и изучал одновременно астрономию, музыку, оптику, стремясь найти общие характерные черты разных отраслей знания. Все действия Декарта теперь подчинены цели построения единой науки, столь же точной и дающей столь же достоверные результаты, как математика.

Путешествия

В 1622 году, оставив военную службу, Декарт приехал в Рени повидать отца, а затем отправился в Италию. По дороге он посетил Париж, где и познакомился с М.Мерсенном (1588 — 1648), «секретарем ученой Европы», человеком, игравшим роль научного журнала и академии наук, вместе взятых. (Есть предположение, что они были знакомы и раньше — Мерсенн тоже учился в Ла-Флеш, — но из-за разницы в возрасте маловероятно, чтобы Мерсенн тесно общался с младшим по годам учеником.) В те времена сообщить научный результат Мерсенну — значило сообщить его всем заинтересованным ученым. Мерсенн следил, чтобы научные дискуссии между его корреспондентами не затухали, и старался, чтобы в результате был достигнут максимальный эффект. Он нередко «подбрасывал» своим корреспондентам задачи, казавшиеся ему актуальными, и сам провоцировал споры между крупнейшими учеными Европы, — споры, в которых рождались истины. С момента знакомства Мерсенн информировал Декарта о событиях в научном мире, связывал его с другими учеными — Ферма, Робервалем, Гассенди, Этьеном (а затем и Блезом) Паскалем и многими другими, — засыпал его вопросами на самые актуальные темы физики, математики, техники, философии.

По пути в Италию Декарт проехал через Швейцарию; побывав в Венеции, Риме и Тоскане, вернулся во Францию и поселился в парижском предместье Сен-Жермен, намереваясь вести уединенную жизнь. Это ему не удалось: стараниями Мерсенна и старого знакомого, математика Мидоржа, он стал знаменит, и постоянные визиты гостей вынудили его переехать. В Париже Декарт тесно общался с кружком Мерсенна, познакомился со многими тогдашними парижскими учеными, с некоторыми затем поддерживал переписку.

Здесь же, участвуя в философской дискуссии, он впервые публично охарактеризовал свой универсальный метод, базирующийся на математике. Выступление Декарта произвело большое впечатление на тех, кто слышал его; друзья стали уговаривать Декарта опубликовать новый метод. Слава его как создателя новой философской системы быстро распространялась; наконец, Декарт решил, не откладывая далее, заняться совершенствованием метода и описанием его. «... Я, может быть, долго еще не решился бы приступить к нему [к этому труду], если бы до меня не дошли слухи, будто я его успешно завершил. Не знаю, что дало повод к такому утверждению. Если я и содействовал немного этому своими речами, то лишь признаваясь в своем незнании более откровенно, чем это обыкновенно делают люди, чему-нибудь учившиеся, а может быть, и указывая основания, почему сомневался во многих вещах, считавшихся другими достоверными, но уже никак не похвальбой своего учения. Но имея достаточно совести, чтобы не желать быть принятым за большее, чем я есть на самом деле, я считал, что должен приложить все усилия, чтобы сделаться достойным сложившейся репутации.»

Запланированная работа требовала уединения и сосредоточенности. Поразмыслив, Декарт решил поселиться в хорошо знакомой ему Голландии, климат которой — как в географическом, так и в духовном смысле — был благоприятен для работы. В конце 1628 года ученый переехал в Голландию.

Голландия

В Голландии Декарт прожил около двух десятков лет. Здесь были написаны и опубликованы самые знаменитые его труды, в том числе «Рассуждения о методе» (с приложением трактатов «Диоптрика», «Метеоры» и «Геометрия») и «Начала философии».

Чтобы избавиться от мешающих работе посещений, Декарт часто переезжал с места на место, едва заметив, что становится слишком известным там, где обосновался. В письмах во Францию он обычно указывал не тот город, где находился, а Амстердам или Лейден. Корреспонденцию ему адресовали его знакомым в разных городах Голландии, которых он время от времени навещал. Во Франции обычно только Мерсенн точно знал, где находится Декарт, но никому не выдавал этого секрета.

Тем не менее, Декарт находил время и для общения с друзьями, которых в Голландии у него было немало. Он навещал старого друга Бекмана, общался с профессором Лейденского университета ван Скаутеном (1615 — 1660), выдающимся математиком и верным последователем Декарта; ближайшим другом был Якоб Гоол, математик и лингвист, познакомивший Декарта с Константином Гюйгенсом (а Христиан Гюйгенс, сын Константина Гюйгенса и ученик ван Скаутена, таким образом, «научный племянник» Декарта).

Но научная работа — на первом месте; Декарт пишет трактат «Правила для руководства ума» — первый набросок философской теории; много занимается оптикой, как теоретической, так и прикладной (впоследствии включенной в «Диоптрику»), увлекается экспериментальными исследованиями в разных областях науки (химия, анатомия, изучение сравнительных весов металлов, формы и взаимного расположения снежных кристалов, наблюдения за движением комет, исследования в области акустики).

Философский труд «Мироздание, или Трактат о свете» был уже близок к завершению, когда произошло событие, резко изменившее все научные планы Декарта: 23 июня 1633 года инквизиция осудила книгу Галилея «Диалоги о двух величайших системах мира», приговорив автора к наказанию, а книгу — к сожжению. «Это меня так поразило, что я почти решился сжечь все мои бумаги или по крайней мере никому их не показывать. Не могу представить себе, что итальянец, пользовавшийся даже благосклонностью папы, о чем я слышал, мог быть осужден только за то, что хотел обосновать движение Земли... Если это ложно, то ложны также все основания моей философии... Но поскольку я ни за что на свете не хотел бы, чтобы мною было выпущено рассуждение, в котором содержалось хотя бы слово, не одобряемое церковью, я скорее уничтожил бы его, чем позволил ему появиться искалеченным.»

«Трактат о свете» остался неизданным и был впоследствии утерян. Однако вскоре Декарт, поддавшись на настойчивые уговоры Мерсенна, начинает работу над другими сочинениями, где, хотя и в несколько иной форме, излагает идеи, содержавшиеся в «Трактате о свете».

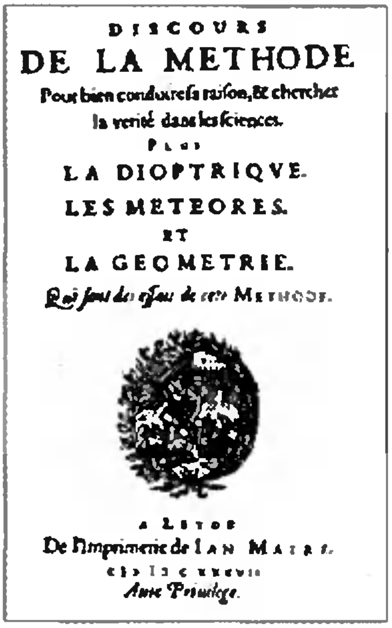
«Рассуждение о методе»

К 1636 году новый труд, получивший заглавие «Рассуждение о методе», был закончен. Начались издательские хлопоты. Наконец, 8 июня 1637 года в Лейдене вышло из печати это сочинение, на французском языке, что достаточно необычно для того времени: языком науки была латынь. Декарт рассчитывал сделать свою теорию доступной широкому кругу читающей публики. Само «Рассуждение о методе» представляло собой скорее вводную часть к трем приложениям — «Диоптрике», «Метеорам» и «Геометрии», самостоятельное значение которых в истории науки переоценить невозможно.

Четыре основных правила, на которых базируется метод Декарта, таковы:

1) «не принимать за истинное что бы то ни было, прежде чем не признал это несомненно истинным»;

2) каждую из рассматриваемых трудностей следует делить на части, что позволяет прийти к лучшему решению;


DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher
la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQUE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIϽ IϽ C XXXVII.
Avec Privilege.

Титульный лист «Рассуждения о методе» Декарта (1637)

3) «руководить ходом своих мыслей, начиная с предметов простейших и легко познаваемых, и восходить мало-помалу, как по ступенькам, до познания наиболее сложных, допуская существование порядка даже среди тех, которые в естественном порядке вещей не предшествуют друг другу»;

4) «делать всюду настолько полные перечни и такие общие обзоры, чтобы быть уверенным, что ничего не пропущено».

Диоптрика, т.е. физико-математическая теория оптических инструментов, была в эпоху Декарта чрезвычайно бурно развивающейся отраслью физики.

Считая, что прежде чем переходить к теоретическим и практическим вопросам изготовления оптических приборов, следует сначала определить, что такое свет и что такое глаз, Декарт излагает учение о природе света и закон преломления луча при переходе из одной оптической среды в другую; затем — физиологическое учение о глазе и зрении, отдельно рассматриваются «внешний» орган зрения — глаз — и «внутренние» органы — нервы и мозг. Затем он переходит к исследованию способов, при помощи которых может быть усовершенствовано естественное зрение и созданы искусственные органы зрения — телескопы. Здесь Декарт внимательно изучает формы, которые следует придавать стеклам. Большинство конструкторов оптических приборов придавали линзам сферическую форму. Декарт пришел к выводу, что наилучшей с оптической точки зрения формой является гиперболическая. Заканчивается трактат обсуждением конструкции машины для изготовления стекол нужной формы.

Однако для Декарта «Диоптрика» имела в первую очередь значение наглядной иллюстрации торжества его метода. Взаимосвязаны оказались математика и физика, физика и физиология, наука и ремесло.

Кстати, закон преломления был открыт Декартом независимо и практически одновременно со Снеллиусом, о рассуждениях которого в момент написания «Диоптрики» Декарт не знал.

«Метеоры» содержат теорию метеорологических явлений. Поводом к созданию такой теории послужило явление «ложных солнц», наблюдавшееся в 1629 году в Риме и во Фраскати. Явление это, редкое и удивительное, представлялось чем-то сверхъестественным. Декарт, убежденный, что все явления природы, как бы они ни были удивительны, объясняются естественными причинами, ищет эти причины и находит их. По мере работы над этой проблемой возникали все новые вопросы, связанные с метеорологией, так что в конце концов в нее оказались включенными вопросы о морских бурях, о причинах ветра и ненастья, о природе соли, о форме снежинок, о венцах небесных светил, и теория радуги, и свойства отдельных цветов. Особенно подробно разработана замечательная теория радуги, проверенная рядом остроумных экспериментов. Впоследствии Ньютон, взявшись за объяснение разложения солнечного света в спектральную последовательность цветов, опирался на установленное Декартом тождество цветов радуги с цветами, на которые разлагается солнечный луч, пропущенный через призму.

Что же касается «Геометрии» — она достойна отдельной главы.

«Геометрия»

Один из современников Декарта утверждал, что это название слишком узко для его книги, ей следовало бы называться «Математика».

С момента появления «Геометрии» заканчивается история отдельного существования геометрии и алгебры.

Декарт в своем труде раз и навсегда объединил эти мало связанные между собой отрасли научного знания в единую науку. Закончилась эпоха «геометрической арифметики», основанная на древнегреческой традиции все действия над величинами представлять как отношение элементов геометрических фигур; началась эпоха «алгебраической геометрии», а вернее — аналитической, сводящей геометрические соотношения к алгебраическим уравнениям.

Закончилась и эпоха «словесной» алгебры, описывавшей алгебраические выражения словами и словесными сокращениями. Декарт не был первым преобразователем алгебраической символики, но можно почти без оговорок назвать его последним из них. Алгебраические формулы декартовой «Геометрии» без пояснений понятны нашим современникам (разве что знак равенства отличается от нынешнего: Декарт писал «$\propto$», а не «=», как мы). Например, там, где один из корреспондентов Декарта записывает уравнение

$$1C - 9Q + 13N \text{eq} \sqrt{288} - 15,$$

Декарт пишет:

$$y^3 - 9yy + 13y - 12\sqrt{2} + 15 \propto 0.$$

С этого момента в алгебре раз и навсегда поселились такие привычные нам x, y и z; с этого момента появилось и само понятие переменной. Декарт же обозначил известные величины первыми буквами латинского алфавита: a, b, c и т.д.

Отрицательные числа Декарт называет «ложными», в отличие от «истинных» — положительных, но это нисколько не мешает ему свободно использовать те и другие.

Знаменитые декартовы координаты еще отличались от привычных нам: Декарт ввел только одну координатную ось (ось абсцисс), вместо оси ординат использовалась система параллельных между собой отрезков, наклонных или перпендикулярных к координатной оси. Нет направления оси и отрицательных абсцисс; ординаты кривой, расположенные по одну сторону от оси, считаются «истинными», расположенные по другую сторону от нее — «ложными». Нынешнее понимание координатной системы сложилось только к концу XVIII века. Но сделанный Декартом шаг вперед тем не менее оказался огромным. Возникла новая математика — аналитическая геометрия.

Кривые оказались связанными с уравнениями; причем уравнения довольно сложных кривых — конических сечений — оказались совсем простыми — всего лишь второй степени. Но к коническим сечениям сводятся довольно трудные задачи на нахождение геометрических мест.

С момента выхода в свет «Геометрии» классическая геометрия, бывшая в большой степени искусством (к каждой задаче приходилось сочинять новое решение), оказалась сведенной к решению уравнений; кривая оказалась графиком функции. (Эта идея заложена в «Геометрии», хотя таких слов у Декарта, конечно, нет.)

Появился алгебраический метод нахождения касательных и нормалей к кривым, а попутно — метод неопределенных коэффициентов (если равны два многочлена, то равны и их коэффициенты при членах одинаковых степеней). Появился прообраз основной теоремы алгебры (о том, что количество корней уравнения не превышает степени уравнения; при этом специально подчеркивается, что нужно учитывать все — «истинные» и «ложные» — корни).

В качестве примеров применения новых методов Декарт решил и две знаменитые задачи древности — об удвоении куба (сведя ее к решению кубического уравнения) и о трисекции угла (сводимой тоже к кубическому уравнению). Оба построения требуют использования параболы, которая не строится обычным циркулем, но с точки зрения алгебры мало отличается от окружности (кривая второй степени).

Таким образом, в «Геометрии» частично воплотилась мечта Декарта о единой универсальной науке — он построил единую универсальную математику.

Но «Геометрия», в отличие от «Диоптрики» и «Метеоров», рассчитана на читателей, которым «уже известно содержание книг по геометрии», т.е. на ученых. Ряд решений и доказательств сокращены настолько, что их трудно понять. То ли Декарт, бывший любителем не читать чужие решения, а находить их самому, хотел оставить читателю удовольствие поломать голову над намеченными, но не проведенными подробно рассуждениями; то ли не хотел перегружать подробностями ясную концепцию своего текста. Поэтому вскоре это сочинение начало обрастать комментариями; вокруг него закипели научные страсти. На критику Декарт отвечал резко, «переходя на личности». Мерсенну удавалось в большинстве случаев не дать противникам дойти «до рукопашной». Спор с Ферма вокруг «Геометрии» и сочинения Ферма «О максимумах и минимумах» не затихал до самой смерти Декарта (Ферма называл этот спор «небольшой войной против Декарта», а Декарт — «маленьким математическим процессом» против Ферма).

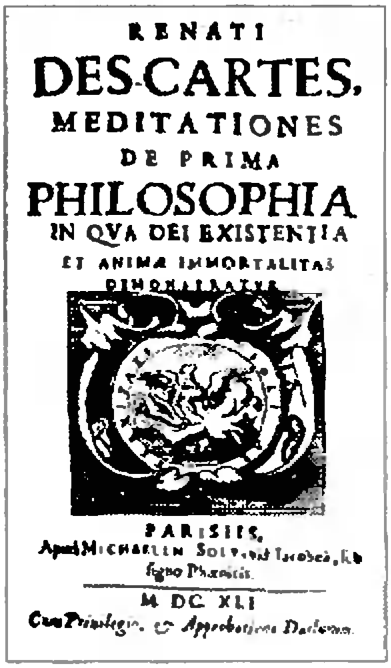
Философские баталии

Математики бушевали вокруг «Геометрии»; философы схватились вокруг метода. Профессор Утрехтского университета Ренери, проникшись идеями картезианства, начал преподавать философию Декарта. Один из самых талантливых учеников Ренери, врач Гендрик Леруа (в латинском написании — Региус) (1598 — 1679), пропагандировал новую теорию в своих лекциях по ботанике и теоретической медицине. В 1640 году Леруа представил на суд научной общественности тезисы, содержавшие обсуждение теории циркуляции крови в организме, а попутно — горячие восторги по поводу учения Декарта.

Противники этой философской концепции не выдержали и напустились на Леруа, а вслед за ним — на Декарта. Принцип «подвергай все сомнению», расширенный на традиционные взгляды, не только научные, но и религиозные, вызывал опасения. Во главе антикартезианского лагеря встал теолог Гисберт Воэций (1589 — 1676), пылкий защитник ортодоксальной философии.

Вначале спор носил академический характер, а Декарт оставался в стороне, призывая Леруа к сдержанности. Но затем цель переместилась, ею стал сам Декарт, а дебаты сменились печатными памфлетами, где обе стороны не стесиялись в выражениях. Декарт подал на Воэция в суд и впоследствии выиграл процесс. Волнения вышли за пределы Утрехта, захватив другие научные центры, в том числе Лейден.

Неприятное положение на научном фронте еще более омрачили несколько тяжелых личных потерь. В это же время Декарт почти одновременно потерял нескольких самых близких людей. Умер отец; умерла от скарлатины маленькая дочь (о ней и ее матери почти ничего неизвестно, но несомненно, что Декарт любил девочку, заботился о ней и ее воспитании и уже собирался отправить ее учиться во Францию, когда случилась беда); вскоре скончалась старшая сестра философа Жанна, к которой он был очень привязан. Как всегда, Декарт считал, что его переживания никого не касаются; и остается только догадываться, насколько тяжело ему было.


RENATI
DES-CARTES,
MEDITATIONES
DE PRIMA
PHILOSOPHIA
IN QVA DEI EXISTENTIA
ET ANIMAE IMMORTALITAS
DEMONSTRATVR.
PARISIIS,
Apud Michaelem Soly, via Iacobea, sub signo Phoenicis.
M. DC. XLI
Cum Privilegio, & Approbatione Doctorum.

Титульный лист «Размышлений о первой философии» Декарта (1641)

В 1641 году Декарт опубликовал «Размышления о первой философии», где пытался разъяснить свои взгляды на основные теологические вопросы — о существовании бога и о различии между душой и телом, надеясь прийти к взаимопониманию с богословами. Надежды не оправдались. Мало того, к возражениям теологов добавились возражения тогдашних материалистов, в первую очередь Пьера Гассенди. Пошла дискуссия вокруг тезиса «Мыслю — следовательно, существую», которому Гассенди противопоставил «Существую — следовательно, мыслю». Как показывает дальнейшее развитие философии, эти тезисы можно либо принимать, либо отвергать, но доказать, какой из них верен, никто не смог до сих пор.

В разгар борьбы с Воэцием, в 1643 году, Декарт приобрел нового, весьма незаурядного приверженца. В переписку с ним вступила принцесса Елизавета Пфальцская, одна из самых образованных и умных женщин того времени, дочь богемского короля Фридриха V, правнучка Марии Стюарт. Отец ее, потеряв трон, оказался в изгнании со всей семьей, а в 1632 году умер, оставив девять малолетних детей. Елизавета, с детства отличавшаяся серьезностью и недюжинными способностями, с большим усердием изучала языки, литературу, философию и математику — к недоумению окружающих. Заинтересовавшись учением Декарта, она вскоре стала верной его последовательницей; их переписка продолжалась до самой смерти философа. Они обменивались мнениями о проблемах философии, психологии, морали, обсуждали математические и религиозные вопросы (чему нисколько не мешала разница в вероисповеданиях протестантки Елизаветы и католика Декарта).

Дискуссии, вызванные сочинениями Декарта, заставили его написать фундаментальный труд «Начала философии» с полным изложением концепции. Книга, посвященная принцессе Елизавете, вышла в 1644 году в Амстердаме; французский перевод издан в 1647 году.

Однако примирения противников не произошло; более того, теперь от Декарта откололся и Леруа, приверженец материализма. Он дал картезианству материалистическое толкование, основав тем самым новое философское направление.

Все это сильно утомляло Декарта, и он начал подумывать о возвращении во Францию. В 1648 году Декарт узнал, что французское правительство в знак признания его научных заслуг назначило ему солидную пенсию. Но когда он добрался до Парижа, во Франции назрел серьезный политический кризис, правительству стало не до философа. В Париже начались волнения, надвигалась Фронда. По сравнению с парижскими событиями околонаучные баталии в Голландии казались мелкими. Денег на обещанную пенсию у правительства не было. Люди, звавшие Декарта возвратиться во Францию, проявили неприятное и обидное равнодушие.

Декарт вернулся в Голландию и тут узнал, что через пять дней после его отъезда из Парижа умер Мерсенн. Теперь ездить во Францию стало, в сущности, не к кому. Но и в Голландии по-прежнему бушевали философские страсти.

И здесь в судьбу Декарта вмешалась шведская королева Христина. Вмешательство оказалось роковым.

Стокгольм

Королева Христина (1626 — 1689) мечтала превратить свою столицу в выдающийся научный центр и приглашала в Стокгольм наиболее знаменитых ученых Европы. Друг Декарта дипломат Пьер Шаню, представлявший при шведском дворе Францию, постарался заинтересовать королеву новой философией — и добился успеха. Христина пригласила Декарта. Декарт не спешил принять приглашение, но между ним и Христиной (через Шаню) завязалась переписка. К маю 1649 года Декарт решился уступить настойчивым приглашениям королевы, а осенью двинулся в путь.

В Стокгольм он прибыл 1 октября 1649 года. Шаню радушно принял его; королева была любезна; но положение при дворе оказалось неопределенным, среди приближенных к Христине ученых большая часть завидовала славе Декарта и его милости у королевы; его привычный режим дня оказался нарушенным, пришлось отказаться от долгих утренних размышлений и погрузиться в светское времяпровождение, всегда чуждое философу.

Декарт пытался работать, тосковал по уединению. Тем временем королева решила, что пора начать занятия философией, и назначила их три раза в неделю, в пять часов утра. От привычного режима Декарта ничего не осталось; была зима, на редкость холодная даже для привычных к ней шведов; вынужденный вставать до рассвета и по морозу добираться до дворца, Декарт, видимо, расшатал свое здоровье. 1 февраля 1650 года он почувствовал недомогание, оказавшееся пневмонией. От лечения он отказался, прописав сам себе табачную настойку и отвергнув кровопускание.

11 февраля 1650 года Декарт умер и был похоронен в Стокгольме. Спустя 16 лет его прах был перевезен во Францию и погребен в Париже.

Литература

1. *Матвиевская Г.П.* Рене Декарт. — М.: Наука, 1976.

2. *Асмус В.Ф.* Декарт. — М.: Гос. изд. политической литературы, 1956.

О задачах, которые можно построить, пользуясь только кругами и прямыми линиями

Р. ДЕКАРТ

Мы приводим отрывок из «Геометрии» Декарта — тот самый поистине революционный кусок текста, связавший накрепко геометрию и алгебру в единую науку. Он взят нами из книги, вышедшей в 1938 году в серии «Классики естествознания» в переводе А.П.Юшкевича.

ВСЕ задачи геометрии можно легко привести к таким терминам, что для их построения нужно будет затем знать лишь длину некоторых прямых линий.

Как исчисление арифметики относится к построениям геометрии?

Подобно тому как вся арифметика состоит только в четырех или пяти действиях, именно в сложении, вычитании, умножении, делении и извлечении корней, которое можно считать некоторого рода делением, подобно этому в геометрии, чтобы подготовить искомые линии к определению, нужно только прибавить к этим линиям или отнять от них другие; или же нужно, имея линию, которую я, дабы удобнее установить более тесную связь с числами, назову единицей и которая обыкновенно может быть выбрана произвольно, и имея еще две другие линии, — найти четвертую линию, так относящуюся к одной из этих двух, как другая к единице, а это то же самое, что умножение; или же найти четвертую линию, так относящуюся к одной из этих двух, как единица к другой, а это то же самое, что деление; или, наконец, найти одну или же две, или несколько средних пропорциональных между единицей и какой-либо другой линией, а это то же самое, что извлечь квадратный или же кубический и т.д. корень. С целью быть более понятным, я без опасений введу эти арифметические термины в геометрию.

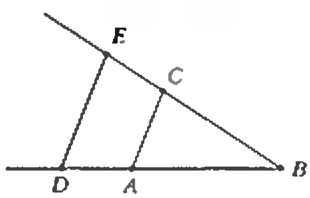


Рис. 1

Умножение

Пусть, например (рис.1), AB является единицей и требуется умножить BD на BC; для этого я должен только соединить точки A и C, затем провести DE параллельно CA, и BE будет результатом этого умножения.

Деление

Или же, если BE нужно разделить на BD, то, соединив точки E и D, я провожу AC параллельно DE, и BC будет результатом этого деления.

Извлечение квадратного корня

Или, если нужно извлечь квадратный корень из GH, то я прибавляю (рис.2) к GH, по продолжению, прямую FG, являющуюся единицей, и,

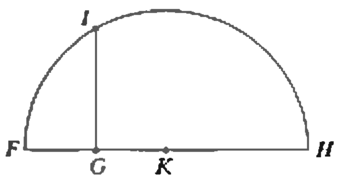


Рис. 2

разделив FH в точке K на две равные части, описываю из центра K окружность FIH; если затем провести от точки G к точке I прямую, перпендикулярную к FH, то GI будет искомым корнем. Я здесь ничего не говорю ни о кубическом, ни о других корнях, так как мне будет удобнее рассмотреть их дальше.

Как можно употреблять буквенные обозначения (les chiffres) в геометрии?

Но часто нет нужды проводить эти линии на бумаге, а достаточно их обозначить какими-нибудь буквами, каждую линию одной буквой. Так, чтобы прибавить линию BD к GH, я называю одну из них a, а другую b и пишу $a + b$; и я пишу $a - b$ при вычитании b из a; и ab при их перемножении; и a/b при делении a на b; и aa или a^2 при умножении a самое на себя; и a^3 при умножении ее еще раз на a и так до бесконечности; и $\sqrt{a^2+b^2}$ при извлечении квадратного корня из a^2+b^2; и $\sqrt{C \cdot a^3 - b^3 + abb}$ при извлечении кубического корня из $a^3 - b^3 + abb$ и так далее.

При этом следует заметить, что под a^2 или b^3, или тому подобным я обыкновенно понимаю лишь сами простые линии, хотя, чтобы пользоваться наименованиями, употребительными в алгебре, я их называю квадратами или кубами и т.д.

Следует также заметить, что если единица в рассматриваемом вопросе не определена, то все части одной и той же линии должны всегда выражаться одним и тем же числом измерений; так, например, здесь a^3 имеет столько же измерений, как и abb или b^3, из которых я составил линию, названную мной $\sqrt{C \cdot a^3 - b^3 + abb}$; но если единица определена, то дело обстоит иначе, ибо тогда повсюду, где имеется слишком много или слишком мало измерений, можно подразумевать единицу; так, если нужно извлечь кубический корень из $aabb - b$, то следует представлять себе, что величина $aabb$ поделена один раз на единицу, а другая величина b два раза умножена на нее.

Между прочим, чтобы легче было вспомнить название этих линий, всегда следует по мере их установления или же изменения составлять их отдельный список, записывая, например, так:

$AB \propto 1$, т.е. AB равна 1,
$CH \propto a$,
$BD \propto b$ и т.д.

Как следует получать уравнения, служащие для решения задач?

Итак, желая решить какую-нибудь задачу, следует сперва ее рассматривать как уже решенную и дать названия всем линиям, которые представляются необходимыми для ее построения, притом неизвестным так же, как и известным. Затем, не проводя никакого различия между этими известными и неизвестными линиями, нужно обозреть трудность, следуя тому порядку, который показывает наиболее естественным образом, как они взаимно зависят друг от друга, до тех пор, пока не будет найдено средство выразить одну и ту же величину двояким образом: это то, что называется уравнением, ибо члены, полученные одним из этих двух способов, равны членам, полученным другим. И следует найти столько подобных уравнений, сколько было предположено неизвестных линий. Либо же, если не удастся найти их столько и если, тем не менее, ничто не опущено из требуемого в вопросе, то это свидетельствует о том, что вопрос не вполне определен; в этом случае для всех неизвестных линий, которым не соответствуют никакие уравнения, можно взять произвольные известные линии. Если после этого их останется еще несколько, то, чтобы выразить каждую из этих неизвестных линий, нужно по порядку воспользоваться каждым из оставшихся также уравнений, либо рассматривая его отдельно, либо же сравнивая его с другими, и поступать так, приводя их до тех пор, пока не останется только одна из них, которая равна какой-нибудь другой известной, либо же у которой квадрат или куб, или квадрат квадрата, или сверхтело, или квадрат куба и так далее не окажется равным тому, что получится при сложении или вычитании двух или нескольких других величин, из которых одна является известной, а другие состоят из каких-либо средних пропорциональных между единицей и этим квадратом или кубом, или квадратом квадрата и т.д., умноженных на другие известные величины. Я это записываю так:

$$z \propto b,$$

или

$$z^2 \propto -az + bb,$$

или

$$z^3 \propto az^2 + bbz - c^3,$$

или

$$z^4 \propto az^3 + c^3z + d^4$$

и т.д.

Т.е.: z, которую я считаю неизвестной величиной, равна b; или же квадрат z равен квадрату b минус a, умноженная на z; или же куб z равен a, умноженной на квадрат z плюс квадрат b, умноженный на z, минус куб c; и так далее.

Если задача может быть построена при помощи кругов и прямых линий, или же конических сечений, или даже с помощью какой-нибудь другой линии, не более чем одной или двумя степенями более сложной, то все неизвестные величины всегда могут быть таким путем сведены только к одной. Я, однако, не стану задерживаться и излагать это подробнее, ибо тогда я лишил бы вас удовольствия разобрать это самостоятельно, а также пользы, которую приобрел бы при этом упражнении ваш ум и которая, на мой взгляд, составляет основную выгоду, извлекаемую из этой науки. Кроме того, я не нахожу в этом вопросе таких затруднений, которых бы не мог преодолеть тот, кто хоть несколько сведущ в обычной геометрии и алгебре и кто внимательно познакомится со всем тем, что есть в этом сочинении.

Поэтому я ограничусь здесь предупреждением, что если только, приводя эти уравнения, вы не упустите случая воспользоваться всеми делениями, которые окажется возможным выполнить, то неизбежно получите наиболее простые выражения, к которым может быть приведен вопрос.

Каковы плоские задачи?

Если вопрос может быть решен средствами обыкновенной геометрии, т.е. при употреблении только прямых линий и окружностей, начерченных на плоской поверхности, то, когда будет вполне приведено последнее уравнение, в нем будет содержаться самое большее один неизвестный квадрат, приравненный к результату сложения или вычитания его корня, умноженного на какую-нибудь известную величину, и какой-нибудь другой также известной величины.

Как они решаются?

И тогда этот корень или неизвестную линию найти легко. Так, например, если я имею

$$z^2 \propto az + bb,$$

то я строю (рис.3) прямоугольный треугольник NLM, одна сторона которого LM равна b, квадратному корню из известной величины bb, а другая

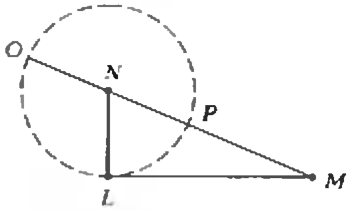


Рис. 3

LN равна $(1/2)a$, половине другой известной величины, которая умножалась на z, линию, принятую мной за неизвестную. Если затем продолжить MN, основание этого треугольника, до O так, чтобы NO было равно NL, то вся линия OM и будет искомой линией z. Выражается эта линия так:

$$z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}.$$

Если же я имею

$$yy \propto -ay + bb$$

и искомой величиной является y, то я строю тот же прямоугольный треугольник NLM и от его основания MN отнимаю NP, равную NL; остаток PM и будет искомым корнем y. Таким образом, я имею

$$y \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}.$$

И точно так же, если бы я имел

$$x^4 \propto -ax^2 + b^2,$$

то PM было бы x^2, и я получил бы

$$x \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$$

и так далее.

Наконец, если я имею

$$z^2 \propto az - bb,$$

то я полагаю, как и раньше, NL равной $(1/2)a$, LM равной b, а затем, вместо того чтобы соединять точки M

Рис. 4

и N, я провожу (рис.4) MQR параллельно LN и из центра N описываю окружность, проходящую через L и пересекающую MQR в точках Q и R. Искомой линией z будет MQ или же MR, так как в этом случае она выражается двояким образом, а именно

$$z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$$

и

$$z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}.$$

Если же окружность, имеющая центр в точке N и проходящая через точку L, не пересекает и не касается прямой MQR, то уравнение не имеет ни одного корня, так что можно утверждать, что построение предложенной задачи невозможно.

Впрочем, те же корни можно найти бесчисленным множеством других способов, и я хотел привести эти способы лишь ради их крайней простоты и с целью показать, что все задачи обыкновенной геометрии можно построить, не прибегая ни к чему сверх того немногого, что содержится в разъясненных мной четырех фигурах. Я полагаю, что древние не заметили этого, ибо в противном случае они не написали бы столько толстых книг, в которых уже одна только последовательность предложений показывает нам, что они не обладали истинным методом, который позволил бы найти их все, а лишь собрали им встретившиеся.

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

СТРАННЫЕ ТЕНИ И ОТРАЖЕНИЯ

А.Митрофанов

Как известно, очень часто тень от предмета или его отражение от зеркальной поверхности напоминает нам сам предмет. Например, на фотографии 1 вы без труда узнаете тень от забора, хотя эта


Фото 1

тень какая-то изломанная, а не ровная, как сам забор. Случается даже, что сфотографированное зеркальное отражение, например в луже, какого-то предмета практически не отличимо от снимка самого предмета, сфотографированного «без услуг» лужи. Но у этого правила много исключений.

Хотите в этом убедиться? Тогда посмотрите внимательно на фотографии 2 и 3. Загадочная тень на стене 1-й Градской больницы в Москве явно не «стыкуется» с головой льва, а отражение коряги, «пойманное» фотографом ранним утром в Окской пойме, уж совсем не похоже на корягу! Попробуйте это объяснить.

Если вам удастся разобраться в этом вопросе, вы поймете, на чем основан театр теней, а также с помощью телескопа сможете определить форму крупных гор и кратеров на Луне или некоторых планетах. А быть может, вы сумеете предложить интересный и простой метод исследования особенностей формы поверхностей (как гладких, так и не очень гладких) и измерить глубину велосипедной колеи на песке (см. фото 1)?

Успехов вам!


Фото 2


Фото 3

Зачем и как 100 лет назад было изобретено радио

П. БЛИОХ

К СЕРЕДИНЕ XIX века электрический телеграф стал привычным средством связи. Провода протянулись между большими и малыми городами, а в 1866 году специальный кабель был проложен по дну Атлантического океана — телеграф связал два континента. Стало возможным быстро и надежно передавать сообщения на огромные (по земным масштабам) расстояния, но при одном непременном условии: прежде чем послать сигнал из одного места в другое, надо было заранее пройти по всему пути и протянуть за собой электрические провода. Не всегда просто это сделать, и совсем уж невозможно соединять проводами движущиеся объекты, например корабли.

Легко представить себе, какое пристальное внимание ученых и изобретателей привлекла к себе в конце XIX века проблема передачи сигналов на большие расстояния без проводов. Может показаться, что задачу было легко решить, используя физические законы, открытые очень давно — свыше 100 лет назад. С этих самых простых способов передачи сигналов мы и начнем наш рассказ.

«Электростатический» беспроволочный телеграф

Его можно было изобрести еще в конце XVIII века.

Известно, что вокруг любого электрически заряженного тела возникает электрическое поле, напряженность которого равна

$$E = \frac{k_e Q}{r^2}, \qquad (1)$$

если тело считать «точечным», т.е. имеющим очень малые размеры по сравнению с расстоянием r до него. Здесь Q — электрический заряд, а k_e — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц измерений. Очень важно, что электрическое поле возникает вокруг заряда без всяких проводов, даже в вакууме. Его можно обнаружить по силовому воздействию, равному

$$F = qE = k_e \frac{Qq}{r^2}, \qquad (2)$$

на другой, пробный, заряд q, который либо притягивается к источнику поля, когда Q и q имеют разные знаки, либо отталкивается от него, когда знаки Q и q совпадают.

Самая простая схема беспроволочного телеграфа, в которой используется сила F, показана на рисунке 1. «Передатчик» представляет собой электрически заряженное тело, заряд которого $Q(t)$ меняется в соответствии с передаваемым сигналом $U(t)$. «Приемник» состоит из двух противоположных зарядов $\pm q$, укрепленных на небольшом стержне, который подвешен на упругой нити. В принципе в «приемнике» достаточно иметь всего лишь один заряд, но при этом чувствительность всего устройства будет ниже. За счет силы F возникает крутящий момент, поворачивающий стержень на некоторый угол $\varphi(t)$, пропорциональный величине заряда $Q(t)$. Фиксируя поворот стержня на ленте самописца, мы воспроизведем исходный сигнал $U(t)$ — беспроволочный телеграф заработал!

Заметим, что описанное приемное устройство — оно называется крутильными весами — было реально использовано свыше 200 лет назад французским физиком Ш.Кулоном. Он измерил с помощью крутильных весов силу взаимодействия F между двумя зарядами Q и q, установив таким образом основной закон электростатики (2), который теперь носит его имя.

Поскольку описанная схема как будто бы вполне работоспособна, возникает вопрос, почему же она не годится для передачи сигналов на большие расстояния. Прежде всего, обратим внимание, что напряженность поля E падает с расстоянием пропорционально $1/r^2$. Забегая вперед, скажем, что в радиоволне (мы рассматриваем передачу сигналов в свободном пространстве) поле спадает намного медленнее, а именно $\sim 1/r$. Разница очень существенная, но на самом деле она еще более усугубляется по следующей причине.

Фактически в схеме рисунка 1 допущена принципиальная ошибка. Дело в том, что электрический заряд сам по себе не может ни возрастать, ни убывать (закон сохранения заряда). Для того чтобы изменить заряд Q, к телу надо подключить источник электрического напряжения, который всегда имеет два полюса, т.е. одновременно создаются заряды разных знаков. Поэтому физически осуществимая схема «электростатического» беспроволочного телеграфа должна выглядеть так, как показано на рисунке 2.

Легко сообразить, что действие «передатчика», состоящего из *двух* пульсирующих зарядов $\pm Q(t)$, будет менее сильным, так как создаваемые ими электрические поля E_+ и E_- ослабляют друг друга (результирующее поле E определяется суммой $E_+ + E_-$). Мы упростим расчет, ограничившись частным случаем, когда

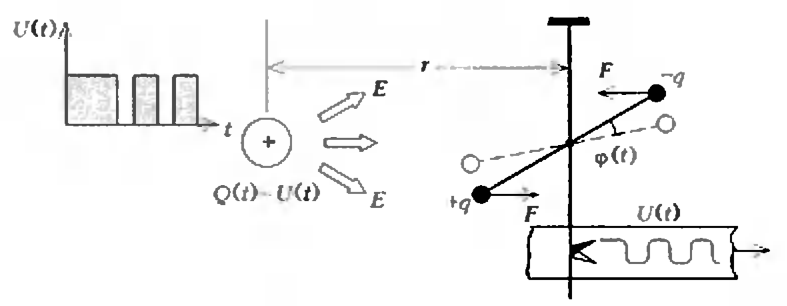


Рис. 1. Упрощенная схема «электростатического» беспроволочного телеграфа

Иллюстрация Л. Тишкова

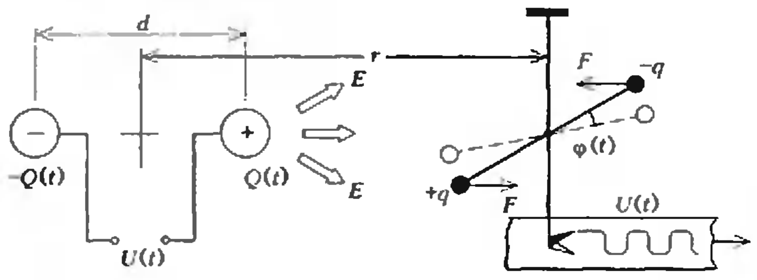


Рис.2. Реальная схема «электростатического» беспроволочного телеграфа

«приемник» расположен вдоль прямой, соединяющей заряды $\pm Q$. Тогда $E_+ = k_eQ/r_+^2$ и $E_- = -k_eQ/r_-^2$, где $r_+ = r - d/2$, $r_- = r + d/2$, а d — расстояние между зарядами. В данном случае векторное сложение заменяется простым алгебраическим суммированием:

$$E = k_eQ\left(\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2}\right) = \frac{2k_eQrd}{\left(r^2 - d^2/4\right)^2}.$$

Естественно считать, что размеры «передатчика» d очень малы по сравнению с расстоянием r ($d \ll r$). Поэтому слагаемым $d^2/4$ в знаменателе можно пренебречь и записать формулу для E в таком виде:

$$E \approx 2k_e\frac{p_e}{r^3}, \qquad (3)$$

где величина $p_e = Qd$ называется электрическим дипольным моментом источника электрического поля. Таким образом, электрические поля, которые можно реально создать с помощью «передатчика»-диполя, убывают с расстоянием очень быстро ($\sim 1/r^3$), что делает их непригодными для передачи сообщений на *большие* дистанции.

Мы рассчитали электрическое поле на оси диполя. В любом другом направлении величина E зависит еще и от угловых координат, однако дистанционная зависимость $1/r^3$ остается прежней. Кроме того, может возникнуть вопрос, нельзя ли придумать более сложный «передатчик», состоящий не из двух, а из большего числа зарядов, расположив их как-нибудь так, чтобы поле убывало с расстоянием по иному закону. Это действительно можно сделать (такие поля называются не дипольными, а *мультипольными*) и реализовать зависимость $1/r^n$. Но всегда окажется, что $n \geq 3$, т.е. мультипольные поля еще менее пригодны для наших целей.

«Магнитостатический» беспроволочный телеграф

Он мог бы появиться в начале XIX века.

Попытка использовать электрическое поле оказалась неудачной, но может быть более пригодным для нашей цели окажется магнитное поле? Основой для такого эксперимента служит закон Био — Савара, открытый французскими физиками Ж.Био и Ф.Саваром в 1820 году. Согласно этому закону, вокруг прямолинейного провода длиной l, по которому протекает электрический ток I, создается магнитное поле, индукция которого равна

$$B = \frac{k_m Il}{r^2}, \qquad (4)$$

где r — расстояние до проводника, а k_m — коэффициент пропорциональности. Предполагается, что точка наблюдения находится достаточно далеко ($r \gg l$) в плоскости, перпендикулярной проводнику и проходящей через его середину. Для всех остальных направлений формула (4) несколько усложняется, но зависимость $B \sim 1/r^2$ сохраняется.

Линии магнитной индукции в указанной плоскости имеют вид окружностей (рис.3), а присутствие магнитного поля в пространстве можно обнаружить с помощью магнитной стрелки, которая стремится расположиться вдоль магнитной линии. Вся схема очень напоминает наш первый электростатический вариант (см. рис.1).

Для передачи сигнала $U(t)$ будем изменять должным образом ток $I(t)$. Соответственно изменится магнитное поле B и создаваемый им вращающий момент, действующий на стрелку. Отклонения стрелки, подвешенной на упругой нити, фиксируются на ленте самописца, где и воспроизводится передаваемый сигнал.

Как будто бы все правильно, и спад магнитной индукции ($B \sim 1/r^2$) происходит значительно медленнее, чем у напряженности дипольного поля ($E \sim 1/r^3$), но, к сожалению, здесь повторяется та же ошибка, которая заставила нас перейти от рисунка 1 к рисунку 2. Дело в том, что ток по проводу потечет только в том случае, если существует *замкнутая* цепь, соединяющая два полюса источника.

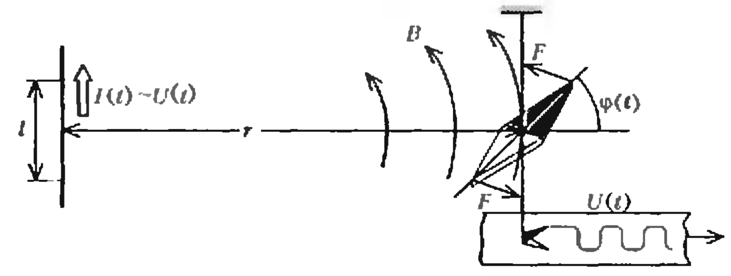


Рис.3. Упрощенная схема «магнитостатического» беспроволочного телеграфа

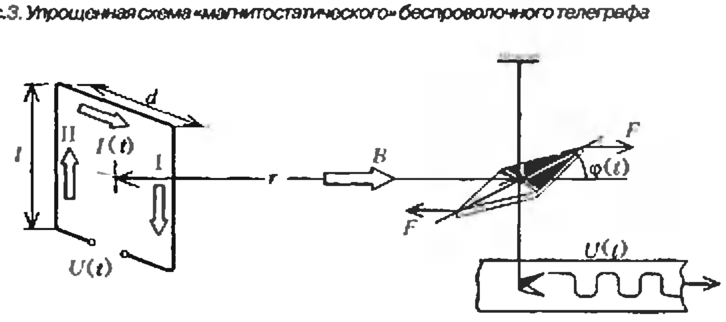


Рис.4. Реальная схема «магнитостатического» беспроволочного телеграфа

Поэтому правильная схема будет выглядеть так, как показано на рисунке 4.

Но в замкнутой цепи каждому элементу тока можно сопоставить другой элемент с током противоположного направления — на рисунке 4 такими элементами являются провода I и II. То обстоятельство, что мы рассматриваем электрическую цепь в виде прямоугольной рамки, не имеет принципиального значения. Суть наших рассуждений остается той же для цепи любой конфигурации.

Противоположно направленные токи ослабляют друг друга, и результирующее магнитное поле теперь определяется по формуле, очень похожей на формулу (3):

$$B \approx 2k_m \frac{p_m}{r^3}, \qquad (5)$$

где $p_m = IS$ — магнитный момент замкнутого токового витка, охватывающего площадь S. В нашем случае $S = ld$ и $p_m = Ild$. Формула (5) справедлива для точки наблюдения, находящейся достаточно далеко ($r \gg l$, $r \gg d$) на оси рамки. Во всех других направлениях B зависит от угловых координат, но закон $B \sim 1/r^3$ не меняется.

Мы снова обнаруживаем в реальной схеме крайне неприятную дистанционную зависимость $\sim 1/r^3$, которая является по сути роковой для реализации нашей идеи.

Можно, конечно, попытаться «обмануть» формулу (5), отодвинув второй провод на такое большое расстояние d, чтобы его магнитное поле не ослабляло существенно поле первого провода. Но для этого нам потребуется «передатчик» (виток провода) такой же примерно длины, что и расстояние до «приемника». Кому нужен такой «беспроволочный» телеграф!

Единое электромагнитное поле

В середине XIX века было установлено, что переменные поля $E(t)$ и $B(t)$ образуют единое электромагнитное поле. Оно и позволило решить проблему беспроволочного телеграфа.

Рассматривая два способа передачи информации, мы воспользовались формулами электростатики (закон Кулона) и магнитостатики (закон Био – Савара). Молчаливо предполагалось, что те же самые законы будут действовать и при изменениях заряда или тока, что необходимо для передачи сигнала. То, что здесь не все так просто, можно сообразить, если подумать, с какой скоростью передается информация от «передатчика» к «приемнику» в рассмотренных выше схемах.

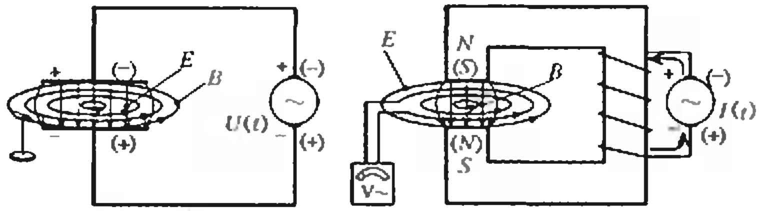


Рис.5. Схема опытов, иллюстрирующих первое и второе уравнения Максвелла

Поскольку поля $E(t)$ и $B(t)$ повторяют законы изменения $Q(t)$ и $I(t)$ на любом расстоянии (с расстоянием меняются только величины E и B, но не их зависимость от времени), мы приходим к выводу, что сигнал передается мгновенно, или, что то же, с *бесконечно большой скоростью*. Но такой вывод противоречит очень важному утверждению теории относительности, согласно которому никакой сигнал не может распространяться со скоростью, превышающей скорость света. Следовательно, в наших рассуждениях мы чего-то не учли, а именно того, что нельзя просто так применить формулы электростатики и магнитостатики к переменным зарядам и токам (недаром мы поставили кавычки в заголовках первого и второго разделов).

Когда речь идет о переменных полях $\vec{E}$ и $\vec{B}$, их нельзя рассматривать изолированно друг от друга. Связь между ними столь тесная, что они образуют единое *электромагнитное поле*. Основные положения современной теории электромагнитного поля были сформулированы в 1860 – 1865 годах английским физиком Дж.Максвеллом, который опирался на воззрения своего предшественника М.Фарадея. С именем Фарадея связано явление электромагнитной индукции, а знаменитые уравнения Максвелла играют в электродинамике такую же основополагающую роль, как уравнения Ньютона в механике.

Поясним суть уравнений Максвелла с помощью двух мысленных экспериментов (без особого труда их можно реально воспроизвести в лаборатории). На рисунке 5 слева показан конденсатор, к пластинам которого подключен источник переменного напряжения $U(t)$. Заряд конденсатора все время меняется, а вместе с ним меняется и электрическое поле между пластинами. Согласно *первому уравнению Максвелла*, одновременно с переменным электрическим полем $\vec{E}(t)$ возникает магнитное поле $\vec{B}(\vec{r},t)$. Два аргумента $\vec{r}$ и t показывают, что магнитное поле является переменным во времени и пространстве. Линии магнитной индукции имеют вид окружностей, охватывающих силовые линии электрического поля.

Обратите внимание: в «пустом» пространстве между пластинами конденсатора никаких проводов с током нет, но магнитное поле все же появилось. Это означает, что переменное электрическое поле является таким же источником магнитного поля, как и обычный ток. Чтобы все-таки их отличать, говорят о *токе проводимости* (движение электрических зарядов в проводниках) и о *токе смещения* (переменное электрическое поле в «пустоте» или в диэлектрике). Представление о токе смещения было впервые введено Максвеллом.

Перейдем к правой части рисунка 5. Здесь изображен электромагнит с «пустым» зазором. Через обмотку пропускается переменный ток, поэтому между полюсами возникает переменное магнитное поле. Его линии располагаются так же, как силовые линии электрического поля на рисунке слева. Согласно *второму уравнению Максвелла*, переменное магнитное поле $\vec{B}(t)$ порождает электрическое поле $\vec{E}(\vec{r},t)$, которое можно обнаружить с помощью витка проволоки и вольтметра. Симметрия взаимосвязи $\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$ хорошо видна на рисунке.

Наше описание мысленных экспериментов является чисто качественным. Мы не касались количественных соотношений, потому что они достаточно сложны, но именно они и содержатся в уравнениях Максвелла.

Электромагнитные волны и рождение радиосвязи

На рисунке 6 показаны радиопередатчик и антенна. В передатчике имеется генератор колебаний высокой частоты, на который с помощью управляющего устройства воздействует передаваемый сигнал. Антенна состоит из двух проводов, присоединенных к выходу передатчика.

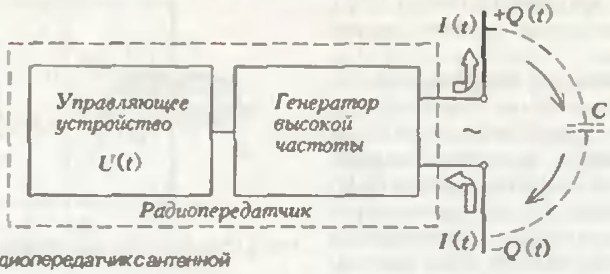


Рис.6. Радиопередатчик с антенной

Рассмотрим, как работает антенна. Стрелками на рисунке 6 показан ток, и, вообще говоря, не очень понятно, как он может протекать в разорванной цепи. Однако все станет ясно, если мы представим два плеча антенны как «пластины» некоторого конденсатора. Постепенный переход от обычного конденсатора к антенне показан в левой части рисунка 7. Переменный ток, который возбуждается передатчиком, это ток заряда и разряда антенного конденсатора, который изображен на рисунке 6 пунктиром. Условный характер схемы состоит в том, что на самом деле конденсатор подключен не к каким-то определенным точкам провода, но множество «конденсаторов» распределены по всей его длине. Поэтому говорят, что антенна имеет распределенную емкость.

Заряд-разряд током $I(t)$ антенного «конденсатора» сопровождается появлением на плечах антенны зарядов противоположных знаков $\pm Q(t)$. Токи порождают переменное магнитное поле $\vec{B}(t)$ вокруг провода, а заряды – переменное электрическое поле $\vec{E}(t)$.

Но, как мы уже знаем, поля $\vec{E}(t)$ и $\vec{B}(t)$ взаимно связаны, и их нельзя рассматривать изолированно. Обратим внимание, например, на точку *1* (см. рис.7). Изменения $\vec{E}(t)$ вызовут появление $\vec{B}(t)$ не только в той же точке *1*, но и в соседней с нею точке *2* (сравните с рис.5 слева). Переменное магнитное поле в точке *2* создает электрическое поле в точке *3* (сравните с рис.5 справа) и т.д. Следовательно, электрическое и магнитное поля не возникают одновременно во всем пространстве вокруг антенны, но распространяются от одной точки к другой с конечной скоростью. Эта совокупность взаимно связанных полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$, уходящих от антенны, называется *электромагнитной волной*, или *радиоволной*.

Скорость распространения волны можно рассчитать с помощью уравнений Максвелла. Результат расчета показывает, что эта скорость совпадает со скоростью света $c = 300000$ км/с. Оказалось, что радиоволна и свет имеют одну и ту же физическую природу, представляя собой электромагнитные волны с разной частотой колебаний. По современной терминологии, к диапазону радиоволн относятся частоты от нескольких герц до нескольких гигагерц ($1 \text{ ГГц} = 10^9$ Гц). Если же иметь в виду бытовую радиосвязь (радиоприемники, телевизоры), то здесь используются в основном высокочастотные колебания в диапазоне $10^5 - 10^9$ Гц.

В этом, собственно говоря, и заключается отличие между «электростатическим» передатчиком и радиопередатчиком. Тот факт, что заряды на рисунке 2 сосредоточены на концах проводов, а на рисунке 6 распределены по всей их длине, не играет существенной роли. Важно то, что в первом случае заряды меняются по *тому же закону*, что и передаваемый сигнал $U(t)$, во втором же случае заряды и токи в антенне осциллируют с *очень высокой частотой*, намного превышающей частоту колебаний передаваемого сигнала. Передаваемое сообщение только управляет теми колебаниями, которые генерируются в передатчике.

Если речь идет о передаче простых телеграфных сигналов по азбуке Морзе, то передатчик просто включается и выключается с помощью телеграфного ключа. При передаче речи, музыки, телевизионного изображения управление генерируемыми колебаниями будет более сложным, но все равно антенна излучает только радиоволны высокой частоты, а не те частоты, которые содержатся в сигнале $U(t)$.

Теоретическое предсказание существования электромагнитных волн нуждалось в экспериментальном подтверждении. Это удалось сделать в 1888 году немецкому физику Г.Герцу. Путь к созданию беспроволочного радиотелеграфа был открыт, но для его реализации потребовалось еще несколько лет. Когда весной 1896 года на заседании Российского фи-

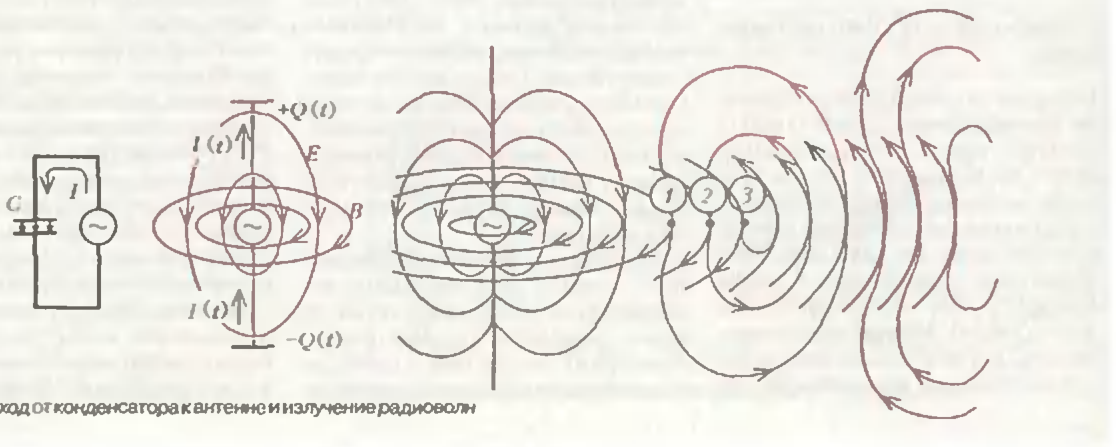


Рис.7. Переход от конденсатора к антенне и излучение радиоволн

зико-химического общества профессор А.С.Попов наглядно продемонстрировал работу радиотелеграфа, первыми словами, переданными на расстояние 250 м, были «Генрихъ Герцъ».

После опытов Герца изобретение радио, можно сказать, «висело в воздухе». Независимо от Попова и примерно в то же время аналогичный прибор был изготовлен итальянским физиком Г.Маркони, работавшим в Англии. Дальность беспроволочной телеграфии быстро возрастала, и в 1901 году Маркони успешно передал радиосигналы через Атлантический океан — радио связало между собой континенты.

Нам остается объяснить, почему передача информации с помощью электромагнитных волн оказалась более эффективной, чем «электростатическая» и «магнитостатическая» схемы.

Пусть в точке О (рис.8) расположен передатчик с антенной, который в момент $t = 0$ включается, а спустя некоторое время Δt выключается. За время работы передатчика радиоволна успеет отойти от антенны на расстояние $\Delta r = c\Delta t$, заполнив сферу (для простоты считается, что интенсивность излучения не зависит от направления) указанного радиуса электромагнитной энергией $W = P\Delta t$, где P — излучаемая мощность. После выключения передатчика радиоволна продолжает распространяться, и спустя время t та же электромагнитная энергия заполнит сферический слой, ограни-

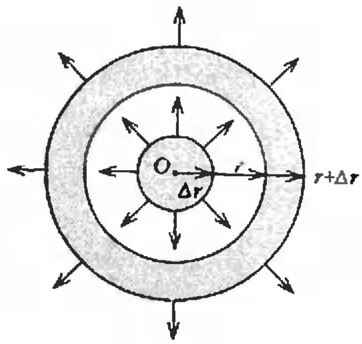


Рис.8. Объем пространства, в котором сосредоточена электромагнитная энергия в моменты времени Δt (сфера) и $t + \Delta t$ (сферический слой)

ченный радиусами $r = ct$ и $r + \Delta r = c(t + \Delta t)$. Объем этого слоя при $t \gg \Delta t$ составляет $V \approx 4\pi r^2 \Delta r$, поэтому на единицу объема на расстоянии r от антенны приходится энергия

$$w = \frac{W}{V} = \frac{W}{4\pi r^2 c\Delta t} = \frac{P}{4\pi r^2 c}.$$

Получается, что объемная плотность энергии убывает с расстоянием пропорционально $1/r^2$.

Остается вспомнить, что объемная плотность энергии электрического поля равна $w_E = \varepsilon_0 E^2/2 = E^2/(8\pi k_e)$ (ее среднее по времени значение в 2 раза меньше), а энергия магнитного поля в электромагнитной волне равна энергии электрического поля. Значит,

$$\frac{E^2}{8\pi k_e} = \frac{P}{4\pi r^2 c},$$

и амплитуда электрических колебаний равна

$$E = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2k_e P}{c}}.$$

Таким образом, напряженность электрического поля убывает пропорционально $1/r$. То же самое можно сказать и про индукцию магнитного поля. Это объясняет, почему передача информации на *большие расстояния* с помощью радиоволн оказывается несравненно эффективней (на самом деле — единственно возможной) по сравнению с «электростатическим» и «магнитостатическим» способами. Действительно, допустим, например, что в 10 м от передатчика напряженности электростатического и высокочастотного полей равны друг другу: $E_0 = E_\sim = E$. Тогда на расстоянии, скажем, 100 км электростатическое поле будет равно $10^{-12}E$, а высокочастотное $10^{-4}E$, что в 10^8 раз больше! С увеличением расстояния (100 км — это очень небольшая дистанция для радиосвязи) превышение $E_\sim$ над E_0 еще больше возрастет.

Другим фактором, на котором мы здесь не останавливаемся, является способность электромагнитной волны распространяться в любой среде, если только ее проводимость не очень велика. Правда, в этом случае $E_\sim$ испытывает некоторое дополнительное затухание, но постоянное поле E_0 через такую среду вообще не сможет проникнуть.

ИНФОРМАЦИЯ

ВНИМАНИЮ НАШИХ ЧИТАТЕЛЕЙ

Если вам нравится «Квант», может быть, вас заинтересуют и книги членов редколлегии и сотрудников редакции нашего журнала.

В московском издательстве АСТ в 1995 году вышли книги:

1. *А.А.Леонович.* Физика. (Серия «Я познаю мир», 480 с.)

Короткими увлекательными рассказами автор знакомит юных читателей с основными физическими понятиями и законами, чудесами природы и техники, с великими учеными и изобретателями. Предназначена для учащихся младших и средних классов школ, лицеев и гимназий.

2. *А.П.Савин, В.В.Станцо, А.Ю.Котова.* Математика. (Серия «Я познаю мир», 480 с.)

Эта книга — об истории развития математики и о великих ученых, о различных логических и компьютерных играх и задачах и даже о том, в каком банке лучше хранить деньги. Предназначена для учащихся младших и средних классов школ, лицеев и гимназий.

3. *А.П.Савин.* Занимательные математические задачи. (176 с.)

В этой книге бессменный ведущий раздела «Квант» для младших школьников» собрал лучшие из задач, когда-либо публиковавшихся под этой рубрикой. Задачи не требуют никаких специальных знаний, для их решения достаточно фантазии и изобретательности. Книга доставит удовольствие не только детям, но и взрослым — всем, кто не забыл, сколько будет дважды два.

По вопросу приобретения этих книг можно обращаться по телефонам 200-35-23, 299-65-84, 209-70-15.

В московском издательстве «Международная программа образования» в 1995-1996 годах вышли справочники:

1. *А.К.Цатурян, А.И.Черноуцан.* Краткий справочник по физике. (160 с.)

Охватывает практически весь курс элементарной физики, изучаемый в школе. Составлен в виде конспектов ответов на вопросы экзаменационных билетов. Предназначен для ускоренного повторения забытого материала непосредственно перед школьными или вступительными экзаменами.

2. *А.Д.Полянин, В.Д.Полянин, В.А.Попов, Б.В.Путятин, В.Н.Сафрай, А.И.Черноуцан.* Краткий справочник: высшая математика, физика, теоретическая механика, сопротивление материалов. (432 с.)

По каждому из четырех предметов излагаются основные определения, формулировки законов и теоремы в объеме, изучаемом в вузах различного профиля. Теоретический материал поясняется примерами. Предназначен инженерам и студентам вузов.

По вопросу приобретения этих справочников можно обращаться по телефону 954-48-90.

Космология XX века в лицах

Г.ГОРЕЛИК

Матвей Петрович Бронштейн (1906—1938)

Журнал «Успехи физических наук» поместил некролог о Фридмане, ни разу до того не упомянув о главной его работе. И в этом можно видеть символ трудной судьбы нестационарной космологии — особенно трудной на родине «расширяющейся Вселенной». А ведь ситуация казалась чуть ли не триумфальной, когда в 1929 году американский астроном Э.Хаббл, обработав обширные наблюдения, обнаружил, что спектры далеких галактик смещены в красную сторону. Обычное для астрономии объяснение спектральных смещений — движение источника света: красному смещению соответствует удаление источника. Скорости галактик и расстояния до них связало соотношение, называемое теперь «законом Хаббла». Поскольку этот закон относился ко всему миру галактик, из него следовало, что мир этот расширяется. А это означало подтверждение фридмановской космологии. Так почему же не триумф? Потому что возраст Вселенной, следующий из хаббловских измерений и вычислений, оказался равен двум миллиардам лет, а этого явно не хватало ни для астро-, ни для геофизики. (Вселенная оказывалась моложе Земли!)

Расширение Вселенной или старение фотонов? Впервые о теории Фридмана рассказал в УФН в 1931 году молодой физик-теоретик М.П.Бронштейн. Обстоятельный и яркий обзор «Современное состояние релятивистской космологии» давал ясное представление о грандиозном шаге в познании мира, сделанном релятивистской космологией и только что качественно подтвержденном открытием Хаббла, и о главной проблеме тогдашней космологии — количественном несоответствии результата Хаббла и данных астро- и геофизики.

Только через три десятилетия, в результате новых и более надежных наблюдений, хаббловская оценка возраста Вселенной увеличилась в десять раз, к всеобщему удовлетворению. Но в 30-е годы не было оснований сомневаться в результатах авторитетного астронома. Из-за трудности внегалактических наблюдений космология долгое время могла опираться на один лишь этот факт. А одна точка опоры — маловато для устойчивого равновесия теории.

До открытия Хаббла в космологии видели в основном демонстрацию могущества теории относительности и смотрели на нее с ласковой снисходительностью, как на многообещающее, но еще слишком юное создание. Когда же появились эмпирические данные, находящиеся в компетенции теории, ссылки на юность утрачивали значение.

Симптомы грядущих отечественных — отнюдь не научных — проблем космологии обнаружились уже в обзоре Бронштейна, точнее в редакционных примечаниях к нему. Там, с «высоты» натурфилософских воззрений классиков, живших в прошлом веке, обличались идеологические пороки космологии, допускающей конечность Вселенной в пространстве и времени. В дальнейшем, по мере усиления идеологического контроля над естествознанием и перемещением этого контроля в руки все более невежественных надзирателей, космология во все более сильных выражениях отлучалась от науки.

В самом хаббловском эффекте красного смещения не сомневались, но искали для него менее грандиозное объяснение. Искали и нашли. Им стало предположение о «старении» фотонов, пойманное в мутной воде тогдашних теоретических поисков.

Если при путешествии света энергия отдельных составляющих его фотонов уменьшается, например из-за спонтанного распада фотонов на несколько других, значит, частота света уменьшается — излучение краснеет. Даже очень малая вероятность такого распада (незаметная в лабораторных условиях), умноженная на огромные расстояния, которые свет проходит от далеких галактик, могла бы дать искомое красное смещение. Некоторым теоретикам милее был такой «понятный», очень маленький эффектик, чем грандиозная и непонятная картина Вселенной, разлетающейся во все стороны. Покраснение фотонов объявлялось идеологически приемлемым объяснением эффекта Хаббла.

В последней статье М.П.Бронштейна, датированной 1937 годом — последним годом его тридцатилетней жизни, это подсказанное новейшей физикой и «идеологически» приемлемое объяснение красного смещения было «закрыто». Как он показал, сам принцип относительности и квантовая теория исключают это объяснение. Тем самым расширение Вселенной получило фундаментальное физическое обоснование, сколь бы трудным ни был этот астрономический факт для тогдашней астрофизики и натурфилософии.

Но в релятивистской космологии была еще одна фундаментальнейшая проблема, к пониманию и решению которой первый шаг сделал М.П.Бронштейн.

Космология и *cGh*-теория. Об этой проблеме лучше всего говорить на языке трех физических констант: c — скорости света, G — гравитационной постоянной и h — постоянной Планка. Каждая из этих величин соответствует фундаментальной физической теории: релятивизму, тяготению и квантам.

Продолжение. Начало см. в предыдущем номере.

Эйнштейновская теория гравитации, или cG-теория, после Фридмана заставляла говорить о точечном начале расширения Вселенной. Но понятие точки уместно лишь в математике, физик хотел бы узнать, что внутри этой точки. Сейчас уже хорошо известно, что внутри должна содержаться квантовая теория гравитации, или cGh-теория. Такой теории пока нет. И, судя по всему, ее построение станет эпохальным событием в истории физики. Первые основания для такого прогноза обнаружил Бронштейн в 1935 году.

Неизбежность h-обобщения cG-теории первым увидел сам Эйнштейн еще в 1916 году. Он обратил внимание, что его теория должна будет измениться, когда «захочет» проникнуть в область квантовых явлений. Но еще первооткрыватель квантов Планк, предлагая на пороге XX века свою h, заметил, что из констант c, G и h, перемножая и деля их надлежащим образом, можно образовать физические величины любой размерности — длину, массу, время и т.д. И получающиеся таким образом величины он предложил считать «естественными» единицами измерения. Так назвать их мог только теоретик незаурядной смелости, не боящийся насмешек коллег, крепко держащихся за землю. И действительно, как можно назвать естественными чудовищно малую длину $\left(hG/c^3\right)^{1/2} = 10^{-33}$ см, немыслимо огромную плотность $c^5/\left(hG^2\right) = 10^{94}$ г/см^3 или несуразную массу $(ch/G)^{1/2} = 10^{-5}$ г — ни очень большую, ни слишком маленькую. Такую массу, как заметил спустя 36 лет Бронштейн, имеет самая обычная пылинка, а что может быть заурядней пылинки, что имеет меньшее отношение к тайнам мироздания и в микро- и в мегамасштабах?!

Насмешки действительно последовали, и Планк через некоторое время перестал напоминать о своем предложении. Ни насмешники, ни он сам не подозревали, что у этих странных планковских величин есть будущее. Оно и сегодня остается будущим, но зато сейчас имеются основания считать это будущее великим — считать планковские cGh-величины рубежами квантово-гравитационной физики, характерными масштабами cGh-теории.

После того как Эйнштейн в начале века указал на необходимость построения квантово-гравитационной теории, на ее долю в течение двух десятилетий доставались лишь немногие и при этом довольно поверхностные замечания. Объяснить это нетрудно. Перед физикой стояли гораздо более насущные задачи: построить подлинную h-теорию — квантовую механику и квантовую теорию электромагнитного поля, входящую, как легко понять, в ch-теорию. Большинство теоретиков считали, что подключать гравитацию к этим трудным задачам — неоправданное излишество. Однако с начала 20-х годов совершенно иначе, можно сказать — противоположно, смотрели на тогдашнюю ситуацию Эйнштейн и сочувствующие ему физики. Они стремились построить так называемую единую теорию поля. Эта теория, обобщая общую теорию относительности (ОТО), должна была на геометрической основе единым образом описать гравитацию и электромагнетизм — все известные тогда фундаментальные силы, а кроме того и сверх того, должна была объяснить квантовые явления!

С точки зрения современной физики истина находится посередине. Константы c, G и h сейчас видятся равно фундаментальными. Если цель Эйнштейна — единая теория — сегодня стала общепризнанной целью фундаментальной физики, то средства, избранные Эйнштейном для достижения этой цели, кажутся сейчас неоправданно скупыми. С другой стороны, многие физики уже уверены, что построить полную последовательную ch-теорию невозможно, игнорируя G-физику.

В 30-е годы ближе других к золотой середине — к пониманию cGh-структуры теоретической физики — был Матвей Петрович Бронштейн. Его научные интересы были широки: астрофизика и полупроводники, космология и ядерная физика. Важнейшим же его научным результатом суждено было стать работе по квантовой теории гравитации. Это было первое глубокое исследование проблем cGh-теории. Бронштейн был прекрасно подготовлен для него. Он глубоко знал и ОТО, и квантовую теорию. Поэтому ясно видел всю неизбежность cGh-теории и видел две главные точки ее приложения — космологию и физику массивных звезд. И именно он первый обнаружил, что путь к этой теории очень непрост, что построение полной cGh-теории требует «отказа от обычных представлений о пространстве и времени и замене их какими-то гораздо более глубокими и лишенными наглядности понятиями. "Wer's nicht glaubt, bezahlt einen Taler"». (Одна из самых неправдоподобных сказок братьев Гримм кончается той же поговоркой: «Кто этому не верит, с того талер». Можно смело предлагать талер тому, кто найдет в физическом журнале еще хоть один подобный абзац.)

Несмотря на то, что прошло уже более полувека с тех пор, как были написаны эти слова, они сохраняют свое значение. До сих пор нет полной cGh-теории и появились дополнительные основания считать, что для ее построения придется радикально изменить фундамент физики.

Почему сам М.П.Бронштейн не принял участия в создании cGh-теории? Лучше других об этом могла бы рассказать его жена Лидия Корнеевна Чуковская. Это она помогла родиться «Солнечному веществу» М.П.Бронштейна — шедевру детской литературы о науке. Это на ее глазах августовской ночью 1937 года люди в сапогах вытаскивали рукописи Матвея Петровича из его письменного стола и рвали, рвали их на клочки. Это она в 1957 году получила справку о посмертной реабилитации М.П.Бронштейна «по вновь открывшимся обстоятельствам» и «за отсутствием состава преступления»...

За прошедшие десятилетия наука узнала очень многое о микрофизике — о физике элементарных частиц (которых за это время стало чуть ли не в 100 раз больше) — и о ее взаимосвязи с космологией. И в наше время физики ожидают, что квантование гравитации будет лишь одним, хотя, быть может, и главным результатом последовательной cGh-теории. Надеются, что эта теория станет единой теорией всех фундаментальных взаимодействий, когда физики изучат пространство-время с точностью до $\left(hG/c^3\right)^{1/2} = 10^{-33}$ см, и, вместе с тем, ответит на главный вопрос космологии — о происхождении Вселенной. Ведь у расширяющейся Вселенной в прошлом плотность должна была быть сколь угодно большой и когда-то, в частности, больше планковской $c^5/\left(hG^2\right) = 10^{94}$ г/см^3.

Многое в нынешних представлениях показалось бы естественным М.П.Бронштейну, который еще в 1930 году написал: «Будущая физика не удержит того странного и неудовлетворительного деления, которое сделало квантовую теорию «микрофизикой» и подчинило ей атомные явления, а релятивистскую теорию тяготения — «макрофизикой», управляющей не отдельными атомами, а лишь макроскопическими телами. Физика не будет делиться на микроскопическую и космическую: она должна стать и станет единой и нераздельной».

Долгое время такой прогноз не находил сочувствия у физиков. А сейчас можно лишь удивляться проницательности его автора.

Джордж Гамов (1904—1968)

Заслуги Фридмана перед космологией не ограничиваются его собственным научным вкладом — «моделью Фридмана». Профессор Петроградского университета значительную часть своего времени отдавал преподаванию. Слушателей у него было совсем немного, и среди них выделялся один юноша. Тогда он отличался прежде всего высотой своего роста и голоса. Но впоследствии этому 20-летнему студенту, которого друзья звали Джонни, суждено было прославить свое имя в истории советской и американской науки. Впрочем, лучше сказать «мировой», тем более что автобиографию свою Георгий Антонович Гамов назвал «Моя мировая линия».

Одно из трех его мировых достижений называется «Большой Взрыв» — «Big Bang», на языке страны, приютившей физика-невозвращенца в 1934 году. Под этим названием известна космологическая модель, родившаяся в 40-е годы, чтобы объяснить химическое разнообразие нашей Вселенной.

Приходится признать, что вряд ли эта модель могла появиться раньше, даже если бы студент Гамов имел возможность учиться у профессора Фридмана гораздо дольше, чем позволила история. И не из-за пристрастного отношения казенной советской идеологии к релятивистской космологии, или мегафизике. А потому что прежде должна была развиться, созреть микрофизика. И в этом созревании деятельное участие принял Гамов. Его первое мировое достижение очень характерно для его научного стиля и тоже было взрывом, хотя и не столь грандиозным. В 1928 году, когда была сделана эта работа, теоретики пребывали в неком оцепенении перед океаном ядерной физики, поскольку были убеждены — и не без оснований, — что для путешествий в этом океане необходимо построить квантово-релятивистский корабль или даже подводную лодку.

Гамов знал все теоретические и экспериментальные основания для оцепенения. Но такое состояние было ему абсолютно не свойственно. И он смог обнаружить, что в океане ядерной физики имеется прекрасная отмель, по которой можно зайти довольно далеко. Эта отмель — альфа-распад ядер. И Гамов не упустил возможности, предоставленной природой. Природой и Наркомпросом. Именно на деньги последнего в июне 1928 года Гамов отправился на стажировку в Германию, всего на несколько месяцев. Но этого ему хватило, чтобы сделать работу, ставшую началом теоретической ядерной физики. Работа принесла Гамову мировую известность и заграничные стипендии, позволившие ему продлить свою стажировку на три года.

Достижение было отмечено и на родине. Первым это сделал главный пролетарский поэт в главной пролетарской газете. Уже через несколько недель Демьян Бедный откликнулся на газетное сообщение о том, что «аспирант ленинградского университета сделал открытие, произведшее огромное впечатление в международной физике. Молодой ученый разрешил проблему атомного ядра».

«СССР зовут страной убийц и хамов.
Недаром. Вот пример:
советский парень Гамов,
— Чего хотите вы от этаких людей?!
— Уже до атомов добрался, лиходей!»

— негодовал Бедный-буржуй. И Бедный-автор подытожил: «В науке пахнет тож кануном Октября».

Не удивительно, что через три года Гамов стал членом-корреспондентом Академии наук СССР, самым молодым в ее истории. Но стать самым молодым академиком ему не довелось, потому что он почувствовал себя на родине очень неуютно. Главным стал холод крепчавшей научной бюрократии. В результате — гололедица, когда свободно двигаться по дороге научной жизни можно лишь в специальной обуви. Гамов мог бы добавить — «или если из пешехода уже сыпется песок», потому что создать Институт теоретической физики ему помешали старшие товарищи по академии.

Только один академик старшего поколения относился к Гамову с полным доверием и старался «дать свободный простор его работе». Это был В.И.Вернадский, директор Радиевого института, считавший, что «одаренная для научной работы молодежь есть величайшая сила и драгоценное достояние человеческого общества, в котором она живет, требующая охраны и облегчения ее проявления». Именно он выдвинул кандидатуру 27-летнего Гамова в Академию наук.

Джордж Гамов в автобиографии не вспомнил российского геохимика и мыслителя. Так может быть, в истории космологии тем более не следовало бы это делать? Наука, однако, устроена так, что ее разделение на области и департаменты довольно условно. Одна из проблем, сильно занимавших геохимика Вернадского, — распространенность и история химических элементов на нашей планете. Но именно распространенность и история химических элементов во Вселенной стала для Гамова — опять! — отмелью в метафизически бездонном и почти безжизненном тогда океане космологии. Именно эта отмель позволила ему задать содержательный физический вопрос по поводу происхождения Вселенной: каковы были условия в начале расширения, во время Большого Взрыва, что его «осколками» стали разные химические элементы в *наблюдаемой* пропорции?

Разумеется, одним жгучим научным интересом его бывшего директора и попечителя не объяснить рождение гамовской идеи о Большом Взрыве. Так же как не свести его теорию альфа-распада к работе Л.И.Мандельштама и М.А.Леонтовича, решивших в начале 1928 года общую квантовую задачу о прохождении частицы через барьер. В обоих случаях самому Гамову надо было проложить туннель под барьером, состоящим не только из математики, но и, главным образом, из физики.

Чтобы пробить туннель под вторым физико-математическим барьером, Гамову пригодилось и мощное развитие ядерной физики, и раскрытие источника звездной энергии, и даже, вполне возможно, вовлеченность в создание термоядерной бомбы. Но творчество — такая хитрая вещь, что здесь разложить все по полочкам невозможно. И вполне справедливо особое внимание уделить тому, кто сумел взять с разных полочек нужные компоненты и создать из них нечто совсем новое. Гамов это смог сделать. Благодаря ему космология из философски-математической и астрономической науки превратилась в физическую.

Осталось только сказать о третьем мировом достижении советского ядерщика и американского космолога — на этот раз в области биологии. Когда Дж.Уотсон и Ф.Крик открыли в 1953 году «двойную спираль» — структуру молекулы ДНК, открылся и новый научный океан — молекулярной генетики. Существование генов, доказанное еще Менделем, стало возможным пощупать молекулярно. И здесь на берегу нового океана оказался Гамов. Он не стал дожидаться, пока построят электронные микроскопы и научатся препарировать нуклеиновые спирали. А обратил внимание, что генетические рецепты 20 нуклеиновых кислот, из которых устроено все живое, написаны алфавитом, в котором всего четыре буквы. Как это можно сделать, например, если слова этого языка все трехбуквенные? Но это уже не биология, а теория кодирования!? Да, конечно, речь идет именно о генетическом коде, важный шаг к разгадке которого сделал Джордж Гамов.

Быть может, именно интерес к генетике и ее трагическая судьба на родине побудили Гамова в автобиографии 1968 года предсказать свое будущее в России — «концлагерь в Сибири за взгляды на мировой эфир и квантовую неопределенность». Если ему и в самом деле удалось прочитать это будущее в социальных генах организма, называемого сталинизмом, то он был воистину выдающийся генетик. Однако в этом его предсказании можно и усомниться. И не только потому, что директорами советских институтов, в которых он работал, были царский генерал А.Н.Крылов и член Временного правительства В.И.Вернадский. А потому что Советской власти, для своей государственной мощи, была нужна физика. Конечно, ни горячей Вселенной, ни молекулярной генетики советскому Гамову было бы не видать. Но одним из отцов советского ядерного оружия и, соответственно, трижды Героем он бы мог стать. Гамов, однако, предпочел менее героическую биографию. Был ли он прав? На такие вопросы история науки не отвечает.

Окончание следует

ИНФОРМАЦИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ ПРИ «КУРЧАТОВСКОМ ИНСТИТУТЕ»

В 1995 году начал свою работу Физико-математический колледж, входящий в состав Института естественных наук и экологии (ИНЕСНЭК) при Российском научном центре (РНЦ) «Курчатовский институт».

Колледж готовит высококвалифицированных специалистов в области физики и прикладной математики и информатики. Занятия проводятся на базе РНЦ. За основу обучения взята схема, успешно опробованная ранее в Московском физико-техническом институте и Новосибирском государственном университете. Эта схема подразумевает интенсивное изучение базовых университетских курсов физики и математики в течение первых лет обучения, чтобы уже со второго — третьего курса студенты могли принимать активное участие в научных исследованиях, проводимых в РНЦ. Количество студентов на курсе сравнительно небольшое (не более 20 человек), что позволяет сделать обучение практически индивидуальным. Как общие, так и специальные курсы читаются ведущими учеными — сотрудниками РНЦ и научно-исследовательских институтов Российской академии наук, — непосредственно работающими в данных областях физики и математики. Спектр исследований, проводимых в РНЦ, достаточно обширен. Это — фундаментальные исследования в области термоядерного синтеза, физики элементарных частиц, слабого взаимодействия, кварк-глюонной плазмы, высокотемпературной сверхпроводимости, физики твердого тела, математического моделирования в экологии, работы по созданию нового поколения безопасных ядерных реакторов и многое другое. По всем этим направлениям РНЦ имеет прочные контакты и ведет совместные работы с ведущими мировыми научными центрами.

Обучение в колледже — 4 года. Окончившие колледж получают диплом бакалавра и продолжают учиться в ИНЕСНЭК еще 1 год и 10 месяцев до получения диплома магистра. Набор на первый курс осуществляется по результатам письменных экзаменов — по физике, математике и русскому языку — и собеседования. Вступительные экзамены проводятся в июле. Уровень требований на экзаменах достаточно высок — аналогичен требованиям вступительных экзаменов в МФТИ, на механико-математический и физический факультеты МГУ и в другие ведущие вузы. Справки по телефону 196-53-11 с 10 до 17 часов по рабочим дням.

Адрес колледжа: *123182 Москва, ул. Максимова, д.4.*

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 1996 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3 — 96» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1546» или «Ф1553». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1546 — М1550 предлагались на LIX Московской математической олимпиаде и на весеннем туре Турнира городов.

Задачи М1546 — М1550, Ф1553 — Ф1562

М1546. На боковой стороне AB равнобедренного треугольника ABC с углом α при вершине A взята точка D так, что $AD=AB/n$. Найдите сумму $n-1$ углов, под которыми виден отрезок AD из точек, делящих основание BC на n равных частей, если а) $n=3$, б) n — любое натуральное число.

В.Произволов

М1547. а) 8 школьников решали 8 задач. Оказалось, что каждую задачу решили 5 школьников. Докажите, что найдутся такие два ученика, что каждую задачу решил хотя бы один из них. б) А если каждую задачу решили 4 ученика?

С.Токарев

М1548. Найдите многочлен с целыми коэффициентами а) четвертой степени, имеющий корнем число

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}},$$

б) пятой степени, имеющий корнем число

$$\sqrt[5]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[5]{2-\sqrt{3}}.$$

в) Докажите, что существует многочлен степени n с целыми коэффициентами, имеющий корнем число

$$\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[n]{2-\sqrt{3}}.$$

Б.Кукушкин

М1549. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ ненулевой степени с целыми коэффициентами, старший из которых положителен, и любого натурального k найдется целое m такое, что числа $P(m)$, $P(m+1)$, ..., $P(m+k)$ — составные.

В.Сендеров

М1550. В 2^n строках таблицы $n\times 2^n$ выписаны все возможные различные наборы из n чисел 1 и -1, а затем некоторые числа заменены нулями. Докажите, что можно выбрать некоторое подмножество строк такое, что
а) сумма всех чисел в выбранных строках равна 0;
б) сумма всех выбранных строк равна нулевой строке (т.е. в каждом столбце сумма чисел, стоящих в выбранных строках, равна 0).

Г.Кондаков

Ф1553. По горизонтальной плоскости катится без проскальзывания тонкий обруч радиусом $R=1$ м. Скорость центра обруча $v_0=2$ м/с. Найдите мгновенную скорость точки обруча, которая окажется внизу через время $\tau=0.01$ с.

Д.Александров

Ф1554. В системе, изображенной на рисунке 1, коэффициент трения между тележкой массой $M=3$ кг и грузом массой $m=1$ кг составляет $\mu=0,4$. Трение между столом и тележкой пренебрежимо мало. С какой силой нужно тянуть нить в горизонтальном направлении, чтобы тележка и груз могли ехать вместе, без проскальзывания? Каким будут ускорения тел, если тянуть за нить силой F = 20 Н?

З.Рафаилов

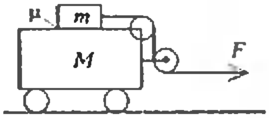


Рис.1

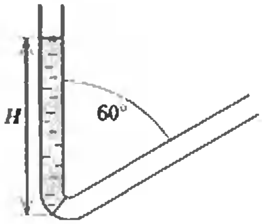


Рис.2

Ф1555. Тонкая стеклянная трубка, изогнутая в виде буквы V с углом α = 60° (рис.2), закреплена неподвижно. Одно колено трубки отделено от другого закрытым краном. В вертикальное колено наливают воду до высоты H, затем краи открывают, и вода начинает перетекать в другое колено трубки. Считая, что вода не перемешивается и выделения тепла не происходит, найдите период происходящего в системе процесса.

А.Черноуцан

Ф1556. В хорошо откачанный сосуд под поршень ввели некоторое количество воды и начали медленно уменьшать объем сосуда, поддерживая постоянную температуру. В таблице приведены давления для нескольких значений объема:

V, л	18	16	14	12	10
p, кПа	20	23	24	24	24

Какая температура поддерживалась в этом опыте? При каком значении объема давление внутри сосуда начнет резко возрастать?

М.Учителев

Ф1557. Идеальная тепловая машина работает с нагревателем с температурой T_1 = 500 К и холодильником с температурой T_2 = 300 К. Механическая работа, получаемая от этой машины, используется для того, чтобы перекачивать тепло от замороженной курицы с температурой T_3 = – 18 °С к телу с температурой T_4 = – 15 °С. Какое максимальное количество теплоты можно отнять от курицы за счет энергии W = 1 Дж, полученной от нагревателя в первой тепловой машине?

К.Урицын

Ф1558. Две тонкие длинные нити скрещиваются под прямым углом. Расстояние между ближайшими точками нитей d. Нити заряжены с линейной плотностью ρ каждая. Найдите силу, с которой одна нить действует на другую.

Д.Александров

Ф1559. На рисунке 3 приведена схема, составленная из очень большого числа звеньев. Каждое звено состоит из двух резисторов сопротивлениями R и $2R$ и конденсатора, причем емкости конденсаторов в звеньях различны — в каждом последующем звене емкость в два раза меньше, чем в предыдущем. К точкам A и $Б$ подключают идеальную батарейку напряжением U. Какое количество теплоты выделится в схеме за очень большой отрезок

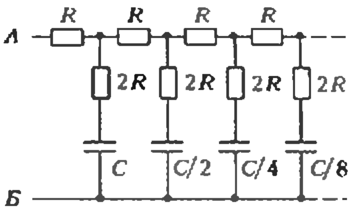


Рис.3

времени? Какое количество теплоты выделится при этом в резисторе сопротивлением R, подключенном к точке A?

Д.Александров

Ф1560. На горизонтальной поверхности стола лежит длинный тонкий брусок прямоугольного сечения (рис.4). На один его конец у самого торца намотаны вплотную друг к другу N = 20 витков очень тонкого провода. Магнитное поле с индукцией B = 0,5 Тл направленно вверх, перпендикулярно поверхности стола. Какой величины ток нужно пропустить по проводу, чтобы брусок начал приподниматься? Плотность материала бруска ρ = 200 кг/м^3, длина бруска L = 0,1 м.

А.Черноуцан

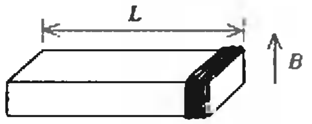


Рис.4

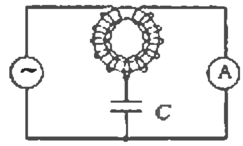


Рис.5

Ф1561. Небольшая катушка, намотанная из длинного куска провода с большим сопротивлением R, замкнута накоротко — ее выводы соединены между собой. Вдали от катушки движется вдоль ее оси со скоростью v_0 постоянный магнит. С какой силой нужно удерживать на месте катушку при величине протекающего по ней тока I? Силы тяжести отсутствуют, ток протекает по катушке только из-за изменения магнитного потока, сила тока меняется медленно.

З.Рафаилов

Ф1562. На тороидальный сердечник из ферромагнитного материала с очень большой магнитной проницаемостью намотана катушка, состоящая из большого числа витков и имеющая индуктивность L. От середины катушки сделан отвод. Схема подключения этой катушки и конденсатора емкостью C к источнику переменного напряжения с амплитудой U_0 и частотой ω приведена на рисунке 5. Что показывает амперметр, имеющий пренебрежимо малое сопротивление?

А.Зильберман

Решения задач М1521 — М1530, Ф1538—Ф1547

М1521. *В парламент выбрано 256 депутатов. Каждый из них ответил на 8 вопросов анкеты (требующих ответов «да» или «нет») и выяснилось, что никакие двое не ответили одинаково на все вопросы. Можно ли их рассадить на 256 стульев, расставленных в квадрате*

16 × 16 так, чтобы ответы каждого отличались от ответа любого его соседа (слева, справа, сзади, спереди): а) только по одному вопросу, б) по 7 вопросам?

Ответ на оба вопроса задачи положителен.

Начнем с задачи а). Заметим, что всего существует $256 = 2^8$ различных «номеров» длиной 8 из 0 и 1, т.е. 256 наборов ответов «да» или «нет» на 8 вопросов. Таким образом, мы должны указать такое взаимно однозначное соответствие между этими номерами (от 00…0 до 11…1) и 256 стульями, что соседние стулья имеют номера, отличающиеся лишь в одном разряде.

Поступим так. Пусть первые четыре цифры номера зависят только от того, в каком столбце, а последние четыре — от того, в какой строке таблицы 16 × 16, изображающей стулья, мы находимся. Как именно — ясно из рисунка (цифры с пятой по восьмую выбираются аналогично по вертикали.)

0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1-я цифра
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	2-я цифра
0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	3-я цифра
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	4-я цифра

Легко проверить, что номера соседей отличаются лишь в одном разряде.

Заметим, что сюжет этой задачи возник вовсе не из политических размышлений, а из одной конкретной проблемы современной молекулярной биологии. Известно, как много сил, времени, да и денег тратят ученые на расшифровку длинных последовательностей ДНК — «слов» из четырех букв A, C, G, T (обозначающих нуклеотиды). И вот несколько лет назад ряд ученых (почти одновременно в США, России и других странах) предложили попробовать автоматизировать процесс расшифровки так. В каждую миниатюрную клеточку матрицы $N \times N$ помещается некоторое «слово» длиной, скажем, 8 из четырех букв (поскольку $4^8 = 2^{16} = 2^8 \times 2^8$, матрица должна содержать 256 × 256 клеточек); при определенных условиях к данной клеточке будет прилипать только такой отрезок ДНК из раствора, который содержит соответствующее (комплиментарное) слово из 8 букв A, C, G, T. Для не слишком длинного (порядка тысячи нуклеотидов) куска ДНК по этим данным — зная, какие слова длиной 8 он содержит, — с некоторой точностью его можно восстановить. (Это — отдельная тема, которую мы надеемся когда-нибудь обсудить. Сейчас весь этот проект при поддержке нескольких ведущих медицинских фирм проходит стадию первых попыток реального воплощения.) Но, как всегда, при «прилипании» и «сканировании» матрицы с целью выявления занятых клеточек возможны ошибки. Поэтому важно, чтобы близкие клеточки занимали очень похожие слова. Отсюда и наша задача а).

Что касается б), то она сводится к а) с помощью шахматной раскраски таблицы 16 × 16. Заметим, что у каждого номера X из 0 и 1 есть его «антипод» $\overline{X}$ — номер, полученный заменой всех 0 на 1 и 1 на 0. Если номер B отличается от номера A в одном разряде, то $\overline{B}$ от A отличается в 7 разрядах. Поэтому для построения примера б) достаточно номера всех белых клеток оставить такими, какими они были в а), а в черных заменить антиподами.

Разумеется, та же конструкция годится и для таблиц $2^k \times 2^k$ при любом натуральном k.

Н.Васильев, Ю.Лысов

М1522. *Докажите, что для любых натуральных m, d, k найдется натуральное n такое, что*

$$\left(\sqrt{m}+\sqrt{m+d}\right)^k = \sqrt{n}+\sqrt{n+d^k}\,.$$

Раскрывая скобки и собирая вместе члены, содержащие одинаковые корни, увидим, что при нечетном k

$$\left(\sqrt{m+d}+\sqrt{m}\right)^k = p_k\sqrt{m+d}+q_k\sqrt{m}\,, \qquad (1)$$

а при четном k

$$\left(\sqrt{m+d}+\sqrt{m}\right)^k = p_k+q_k\sqrt{m(m+d)}\,, \qquad (2)$$

где p_k и q_k — целые числа (они выражаются многочленами от m и d с целыми коэффициентами). Заменим в этих выкладках всюду $\sqrt{m}$ на $-\sqrt{m}$. Получим соответствующие формулы, «сопряженные» (1) и (2):

$$\left(\sqrt{m+d}-\sqrt{m}\right)^k = p_k\sqrt{m+d}-q_k\sqrt{m}\,, \qquad (1')$$

$$\left(\sqrt{m+d}-\sqrt{m}\right)^k = p_k-q_k\sqrt{m(m+d)} \qquad (2')$$

с теми же самыми p_k и q_k (поскольку $\left(\sqrt{m}\right)^2 = \left(-\sqrt{m}\right)^2 = m$). Умножим (1) на (1′):

$$(m+d-m)^k = d^k = p_k^2(m+d)-q_k^2 m\,.$$

Таким образом, достаточно положить (для нечетного k) $n = q_k^2 m$ — при этом $p_k^2(m+d) = n+d^k$ — и из (1) следует нужное равенство.

Аналогично, умножив (2) на (2′), для четного k получим

$$d^k = p_k^2 - q_k^2 m(m+d),\quad n = q_k^2 m(m+d),$$

так что в этом случае $\sqrt{n+d^k} = p_k$ — целое число.

Очень советуем проделать эти выкладки на частном примере, скажем, взяв $m = 5$, $m+d = 7$, k равным 2, 3, 4, — и все станет ясно.

Замечание. Конечно, число n находится однозначно из равенства в условии задачи, поскольку уравнение $a = \sqrt{x+b}+\sqrt{x}$ имеет (при положительных $a = \left(\sqrt{m+d}+\sqrt{m}\right)^k$, $b = d^k$, $b < a^2$) единственное решение, которое легко явно выписать: уравнение сводится к линейному $4a^2x = \left(a^2-b\right)^2$. Трудно только доказать, что это $x = n$ — целое; но и тут помогает рассмотрение «сопряженных» чисел: ведь

$$\frac{d}{\sqrt{m+d}+\sqrt{m}} = \sqrt{m+d}-\sqrt{m}\,.$$

На этом пути можно получить несколько иное доказательство.

В.Сендеров, П.Филевич

М1523. *Рассмотрим последовательность $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 5$, $a_6 = 119$, $a_{n+1} = a_1a_2\ldots a_n - 1$ при*

$n \ge 5$. *Докажите, что*

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{70}^2=a_1a_2\ldots a_{70}.$$

Обозначим

$$b_n=a_1a_2\ldots a_n-a_1^2-a_2^2-\ldots-a_n^2.$$

Докажем, что $b_{n+1}=b_n-1$ (при $n\ge 5$):

$$b_{n+1}=a_1a_2\ldots a_na_{n+1}-a_1^2-a_2^2-\ldots-a_n^2-a_{n+1}^2=$$

$$=a_1a_2\ldots a_n(a_1a_2\ldots a_n-1)-a_1^2-a_2^2-\ldots$$

$$\ldots-a_n^2-(a_1a_2\ldots a_n-1)^2=$$

$$=a_1a_2\ldots a_n-a_1^2-a_2^2-\ldots-a_n^2-1=b_n-1.$$

Далее,

$$b_5=a_1a_2\ldots a_5-a_1^2-a_2^2-\ldots-a_5^2=$$

$$=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5-1^2-2^2-3^2-4^2-5^2=65.$$

Поэтому $b_6=64$, $b_7=63$, …, $b_{70}=0$, т.е.

$$a_1a_2\ldots a_{70}=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{70}^2.$$

Л.Курляндчик

Замечание. Эту задачу полезно сравнить со статьей про обобщенные уравнения Маркова («Квант» № 6 за 1995 год). Оказывается, набор (1, 2, 3, 4, 5, 1, …, 1) из 70 чисел – это «корневое решение» уравнения

$$x_1^2+\ldots+x_{70}^2=x_1x_2\ldots x_{70},$$

из которого за 65 шагов получается решение

$$(1,2,3,4,5,a_6,a_7,\ldots,a_{70})$$

того же уравнения. (Шаг за шагом мы получаем решения

$$(1,2,3,4,5,a_6,a_7,\ldots,a_k,1,\ldots,1),\ k=6,7,\ldots,70;$$

рекуррентная формула в условии – это формула (3) из статьи, позволяющая «вырастить» новое решение уравнения Маркова.)

М1524. *Пусть P – точка пересечения диагоналей описанного четырехугольника $ABCD$. Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники ABP, BCP, CDP, DAP, лежат на одной окружности.*

В решении, разумеется, основную роль играет равенство двух касательных, проведенных из одной точки к окружности. Но кроме того, нам пригодится и нетривиальное равенство

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4} \qquad (1)$$

– основной результат задачи М1495 (см. «Квант» №6 за 1995 год); здесь r_1, r_2, r_3, r_4 – радиусы окружностей с центрами O_1, O_2, O_3, O_4, вписанных в треугольники APB, BPC, CPD и DPA (рис. 1); T_1, T_2, T_3, T_4 – точки касания окружностей со сторонами четырехугольника; T_1', T_1'', T_2', T_2'', T_3', T_3'', T_4', T_4'' – точки их касания с диагоналями четырехугольника.

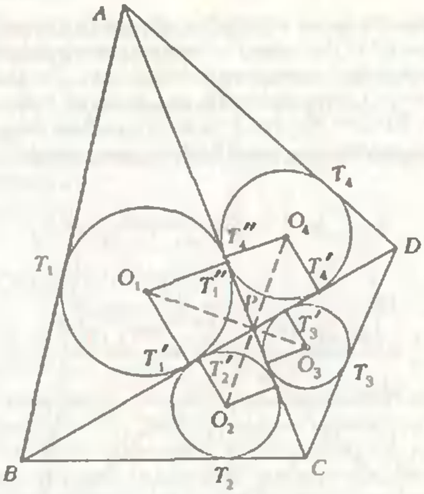


Рис.1

Так как

$$AT_1=AT_1''=AP-PT_1'',\ BT_1=BT_1'=BP-PT_1',$$

то

$$AB=AT_1+BT_1=AP+BP-PT_1''-PT_1',$$

или, учитывая, что $PT_1''=PT_1'$,

$$AB=AP+BP-2PT_1'. \qquad (2)$$

Точно так же

$$CD=CP+DP-2PT_3'. \qquad (3)$$

Складывая почленно (2) и (3), получим

$$AB+CD=AC+BD-2T_1'T_3'. \qquad (4)$$

Аналогично найдем, что

$$AD+BC=AC+BD-2T_2'T_4'. \qquad (5)$$

Так как четырехугольник $ABCD$ описан около окружности, то $AB+CD=AD+BC$, поэтому из (4) и (5) следует

$$T_1'T_3'=T_2'T_4'. \qquad (6)$$

Обозначим $\angle BPO_1=\beta$. Тогда $\angle BPO_2=\frac{\pi}{2}-\beta$, ибо $O_1O_3\perp O_2O_4$ (как биссектрисы смежных углов),

$$T_1'T_3'=PT_1'+PT_3'=(r_1+r_3)\mathrm{ctg}\beta, \qquad (7)$$

$$T_2'T_4'=(r_2+r_4)\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=(r_2+r_4)\mathrm{tg}\beta. \qquad (8)$$

Из (6), (7) и (8) получим $(r_1+r_3)\mathrm{ctg}\beta=(r_2+r_4)\mathrm{tg}\beta$. Теперь из (1) легко вывести, что

$$\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}=\frac{r_1+r_3}{r_2+r_4}=\frac{r_1r_3}{r_2r_4},\ \text{т.е.}\ \frac{r_1r_3}{\sin^2\beta}=\frac{r_2r_4}{\cos^2\beta}.$$

Но $PO_1=r_1/\sin\beta$, $PO_3=r_3/\sin\beta$, $PO_2=r_2/\cos\beta$, $PO_4=r_4/\cos\beta$, значит, $PO_1\cdot PO_3=PO_2\cdot PO_4$.

Используя теорему об отрезках пересекающихся хорд, получаем из этого равенства, что O_1, O_2, O_3, O_4 лежат на одной окружности.

Докажем, что верна и теорема, обратная к утверждению задачи М1524: *если P — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$ и центры O_1, O_2, O_3, O_4 окружностей, вписанных в треугольники APB, BPC, CPD, DPA, лежат на одной окружности, то четырехугольник $ABCD$ — описанный.*

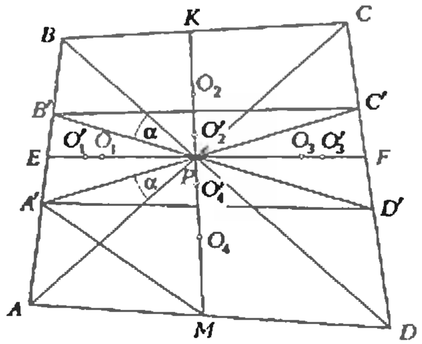


Рис.2

Пусть это не так. Обозначим стороны AB, BC, CD, DA через a, b, c, d соответственно и предположим для определенности, что $a + c > b + d$. Проведем через точку P прямые $A'C'$ и $B'D'$, идущие внутри углов APB и CPD (точки A' и B' лежат на отрезке AB, точки C' и D' — на отрезке CD) так, что угол α между AC и $A'C'$ равен углу между $B'D'$ и BD (рис.2); здесь $0 \le \alpha \le \alpha_0$, где α_0 — половина угла APB. Длины сторон четырехугольника $A'B'C'D'$ — непрерывные функции от α. Рассмотрим функцию

$$f(\alpha) = A'B' + C'D' - (B'C' + D'A');$$

$$f(0) = a + c - (b + d) > 0, \quad f(\alpha_0) < 0,$$

поэтому найдется значение α, при котором $f(\alpha) = 0$. При этом соответствующий четырехугольник $A'B'C'D'$ будет описанным, т.е. центры O'_1, O'_2, O'_3, O'_4 окружностей, вписанных в треугольники $A'PB'$, $B'PC'$, $C'PD'$, $D'PA'$, будут лежать на окружности по доказанной выше теореме. Остается заметить, что биссектрисы углов с вершиной P для четырехугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ совпадают; при этом $O'_1P > O_1P$, $O'_3P > O_3P$, $O'_2P < O_2P$, $O'_4P < O_4P$. (Это следует из такого почти очевидного факта, доказательство которого мы оставляем читателям: если треугольники XPY и UPV расположены так, что биссектрисы углов UPV и XPY совпадают, $\angle UPV > \angle XPY$, причем точки U, V лежат по ту же сторону от прямой XY, что и точка P, или на самой прямой XY, то центр Q вписанной окружности треугольника UPV расположен ближе к P, чем центр O вписанной окружности XPY: $QP < OP$). Но тогда мы получаем противоречие с тем, что обе четверки центров лежат на окружностях, — с равенствами

$$O_1P \cdot O_3P = O_2P \cdot O_4P, \quad O'_1P \cdot O'_3P = O'_2P \cdot O'_4P.$$

Отсюда следует обратная теорема.

И.Вайнштейн

Замечание. Наш читатель А.Заславский заметил еще одно интересное продолжение задачи М1524. Если в точках O_1, O_2, O_3, O_4 провести касательные к проходящей через них окружности, то соседние касательные пересекаются на прямых AC и BD (диагоналях исходного четырехугольника или их продолжениях).

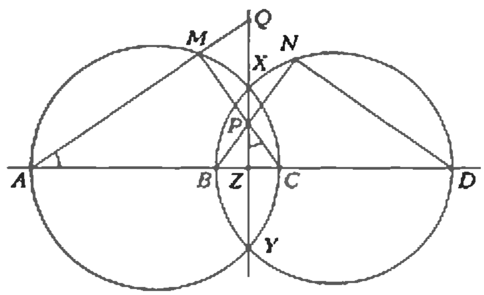
* * *

Следующие пять задач взяты из числа предлагавшихся на XXXVI Международной математической олимпиаде в Канаде. Мы приносим глубокую благодарность нашему коллеге Энди Лю из университета Альберты, возглавившему комиссию по выбору задач для этой олимпиады, за присланные решения и комментарии, которые частично использованы ниже.

М1525. *Пусть A, B, C и D — четыре различные точки на прямой, расположенные в указанном порядке. Окружности с диаметрами AC и BD пересекаются в точках X и Y. Прямые XY и BC пересекаются в точке Z. Пусть P — точка на прямой XY, отличная от Z. Прямая CP пересекает окружность с диаметром AC в точках C и M, а прямая BP пересекает окружность с диаметром BD в точках B и N. Докажите, что прямые AM, DN и XY пересекаются в одной точке.*

Это, конечно, очень простая задача. Вот два коротких решения.

1) Пусть AM пересекает XY в точке Q (см. рисунок). Прямоугольные треугольники AQZ, ACM и PCZ подобны (у первой пары общий угол A, у второй — C). Поэтому $QZ/AZ = CZ/PZ$, т.е. $QZ = AZ \cdot CZ/PZ$. Но прямая DN пересекает XY на том же расстоянии от Z,



поскольку по свойству пересекающихся хорд (мы использовали его в конце решения М1524)

$$AZ \cdot CZ = XZ \cdot YZ = BZ \cdot DZ.$$

2) Здесь также используется последнее равенство. Пусть H — точка пересечения высот треугольника BPC. При гомотетии с центром Z и коэффициентом $AZ/BZ = DZ/CZ$ прямая BH переходит в прямую AM, CH — в DN, а значит, H переходит в точку Q, где встречаются AM, XY и DN.

Н.Васильев

М1526. *Пусть a, b, c — положительные числа такие, что $abc = 1$. Докажите, что*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \ge \frac{3}{2}.$$

Удобно перейти к новым переменным $x = 1/a$, $y = 1/b$, $z = 1/c$, также положительным и связанным условием $xyz = 1$. Данное неравенство эквивалентно следующему:

$$S = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{3}{2}. \qquad (1)$$

Его можно доказывать разными способами, почти все из которых используют неравенство между средними: арифметическим и геометрическим

$$(u+v+w)/3 \ge \sqrt[3]{uvw} \qquad (2)$$

или арифметическим и гармоническим

$$(u+v+w)/3 \ge 3/(1/u + 1/v + 1/w) \qquad (3)$$

трех положительных чисел.

Пожалуй, самое короткое решение, предложенное М.Кламкиным, использует еще неравенство Коши для скалярного произведения:

$$\left(u_1u_2 + v_1v_2 + w_1w_2\right)^2 \le \left(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2\right)\left(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2\right).$$

Применяя его к векторам $\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}, \frac{y}{\sqrt{z+x}}, \frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)$ и $\left(\sqrt{y+z}, \sqrt{z+x}, \sqrt{x+y}\right)$, получаем

$$(x+y+z)^2 \le S \cdot 2(x+y+z),$$

т.е. $S \ge (x+y+z)/2$. Используя теперь (2), получаем

$$S \ge (x+y+z)/3 \cdot 3/2 \ge \sqrt[3]{xyz} \cdot 3/2 = 3/2.$$

Многие из участников международной олимпиады и читателей предлагали решения, опирающиеся на неравенство Чебышева:

если

$$u_1 \ge u_2 \ge u_3 \ldots \ge u_n \ge 0,\ v_1 \ge v_2 \ge v_3 \ldots \ge v_n \ge v_n,$$

то

$$\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \ge \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot \sum_{i=1}^{n} v_i \Big/ n \qquad (4)$$

(вот его простое механическое объяснение: если гирьки с массами u_i расположены на оси в точках с координатами v_i в порядке возрастания масс — чем правее, тем тяжелее, — то их центр масс находится правее, чем центр масс одинаковых гирек, помещенных в те же точки). Это неравенство можно доказать по индукции. Разумеется, нам оно нужно для $n = 3$.

Заметим, что из (4) сразу следует похожее на (1) (но более простое) неравенство для положительных x, y, z:

$$S_1 = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \ge \frac{3}{2}; \qquad (5)$$

ведь без ограничения общности можно считать, что $x \ge y \ge z$ и тогда $\frac{1}{y+z} \ge \frac{1}{z+x} \ge \frac{1}{x+y}$, поэтому

$$S_1 \ge \frac{1}{3}(x+y+z)\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}\right) \ge \frac{3}{2}$$

— дело сводится к (3) для $u = x + y$, $v = y + z$, $w = z + x$. (Впрочем, эта замена приводит, после преобразований, к доказательству (5) и без ссылки на (4).)

Докажем теперь такое обобщение (1): при любом $\alpha \ge 1$ и $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $xyz = 1$

$$S_\alpha = \frac{x^\alpha}{y+z} + \frac{y^\alpha}{z+x} + \frac{z^\alpha}{x+y} \ge \frac{3}{2}. \qquad (6)$$

Мы используем неравенство Чебышева (4) в применении к тройкам

$$\frac{x}{y+z},\ \frac{y}{z+x},\ \frac{z}{x+y} \text{ и } x^{\alpha-1},\ y^{\alpha-1},\ z^{\alpha-1},$$

затем используем (5) и (2):

$$S_\alpha \ge \frac{S_1\left(x^{\alpha-1} + y^{\alpha-1} + z^{\alpha-1}\right)}{3} \ge \frac{3}{2}(xyz)^{\frac{\alpha-1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Легко ответить теперь и на вопрос, при каких вообще α справедливо (6). Точно такая же замена, какую мы проделали в самом начале — при переходе к (1), — показывает, что если (6) верно для некоторого показателя α, то оно верно и для показателя $\alpha' = -1 - \alpha$ (симметричного α относительно точки $\alpha_0 = -1/2$). Таким образом, (6) верно для $\alpha \ge 1$ и $\alpha \le -2$. В том, что для других α (и $xyz = 1$) S_α может быть сколь угодно малым, легко убедиться, взяв $x = 1/n$, $y = 1$, $z = n$ либо $x = 1/n$, $y = 1/n$, $z = n^2$ и устремив n к бесконечности.

Э.Лю, В.Сендеров

М1527. *Найдите все целые $n > 3$, для которых существуют n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ на плоскости, и действительные числа $r_1, r_2, \ldots, r_n$, удовлетворяющие следующим двум условиям:*

(i) никакие три из точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не лежат на одной прямой;

(ii) для любой тройки i, j, k $(1 \le i < j < k \le n)$ площадь треугольника $A_iA_jA_k$ равна $r_i + r_j + r_k$.

Ответ: единственная возможность — $n = 4$.

Квадрат (или параллелограмм) площадью 1 и $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1/6$ — пример для $n = 4$.

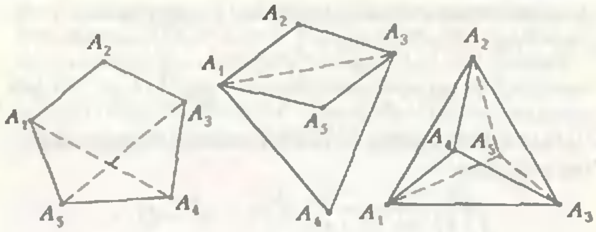
Достаточно доказать, что не может существовать нужного набора точек и чисел для $n = 5$. Предположим противное. Пусть такие 5 точек A_i и 5 чисел r_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ существуют. Будем обозначать площадь треугольника $A_iA_jA_k$ через $[ijk]$; по условию $[ijk] = r_i + r_j + r_k$.

Если четырехугольник $A_iA_jA_kA_l$ выпуклый, то, как следует из равенства $[ijk] = [kli] = [jkl] = [lij]$,

$$r_i + r_k = r_j + r_l.$$

Докажем, что никакие два из чисел r_i не могут совпадать. Предположим, что $r_4 = r_5$. Тогда $[ij4] = [ij5]$ для любых двух чисел $i < j$ от 1 до 3. Это означает, что либо прямая A_4A_5 параллельна A_iA_j, либо A_iA_j проходит через середину K отрезка A_4A_5. Но из трех прямых A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3, согласно условию (i) задачи, не может быть более одной параллельной A_4A_5 и не более одной — проходящей через точку K. Получили противоречие.

Теперь рассмотрим выпуклую оболочку H точек A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 (наименьший выпуклый многоугольник, их содержащий). Возможны три случая (см. рисунок). Если H — пятиугольник, то четырехугольники $A_1A_2A_3A_4$ и $A_1A_2A_3A_5$ — выпуклые, поэтому $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$ и $r_1 + r_3 = r_2 + r_5$, откуда $r_4 = r_5$, что невозможно.



Если H — четырехугольник, то можно считать, что этот четырехугольник — $A_1A_2A_3A_4$ и A_5 лежит в треугольнике $A_1A_3A_4$; тогда $A_1A_2A_3A_5$ — тоже выпуклый, и противоречие получается точно так же, как в первом случае. Если H — треугольник $A_1A_2A_3$, то из равенства

$$[124]+[234]+[314]=[125]+[235]+[315]$$

следует, что $r_4=r_5$ — то же противоречие, что и выше.

Э.Лю

М1528. *Найдите наибольшее значение x_0, для которого существует последовательность положительных чисел $x_0, x_1, \ldots, x_{1995}$, удовлетворяющая следующим двум условиям:*

(i) $x_0 = x_{1995}$;

(ii) $x_{i-1}+\dfrac{2}{x_{i-1}}=2x_i+\dfrac{1}{x_i}$ *для всех* $i=1, 2, \ldots, 1995$.

Условие (ii) означает, что x_i — один из двух корней квадратного уравнения

$$x^2-\left(\frac{x_{i-1}}{2}+\frac{1}{x_{i-1}}\right)x+\frac{1}{2}=0,$$

т.е. $x_i=x_{i-1}/2$ или $x_i=1/x_{i-1}$. Собственно, это и есть основное соображение. Постараемся изложить остальную, техническую, часть решения наглядно.

Путь по табличке из двух рядов (рис.1), состоящий из 1995 шагов, согласно условию (i), должен, начавшись в числе x_0, окончиться на равном ему числе. Поскольку в каждом ряду числа различны, а из-за нечетности 1995 путь не может быть замкнутым, $x_{1995}=x_0$ должно встретиться в нижнем ряду; более того, все числа в черных рамочках в верхнем ряду должны равняться числам в цветных рамочках в нижнем, а поскольку ряды растут в противоположные стороны и $x_0=2^k$ при некотором k, то среди этих чисел должна встречаться единица, так что рисунок 1 превращается в рисунок 2 (здесь также сплошной стрелкой изображен шаг «деление пополам» и пунктиром — «обращение»). Ясно, что выгоднее всего взять $x_0=2^{997}$, сделать 1994 шага вправо и единственным обращением вернуться к x_0; при больших x_0 вернуться назад за 1995 шагов не удастся.

Й.Нотенбоом, Э.Лю

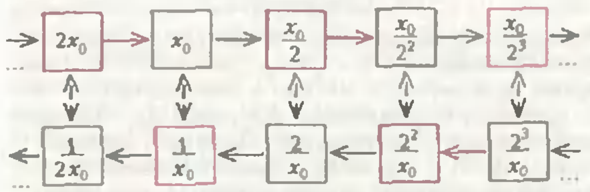


Рис.1

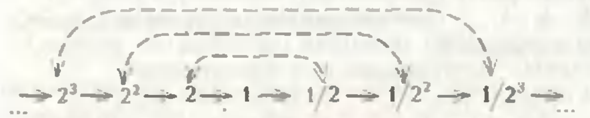


Рис.2

М1529. *Пусть $ABCDEF$ — выпуклый шестиугольник, в котором $AB=BC=CD$, $DE=EF=FA$ и $\angle BCD = \angle EFA = 60°$. Пусть G и H — две точки внутри шестиугольника такие, что*

$$\angle AGB = \angle DHE = 120°. \qquad (*)$$

а) Докажите, что

$$AG+GB+GH+DH+HE \ge CF.$$

б) Докажите, что последнее неравенство будет выполнено, даже если не требовать условия (*).

Эта задача — несколько вычурное упражнение на тему «геометрические преобразования». Основная идея — постараться превратить «паука» из пяти звеньев AG, BG, GH, DH, EH в ломаную, соединяющую C и F. Из условия задачи следует, что треугольники BCD и EFA — равносторонние. Поэтому четырехугольник $ABDE$ симметричен относительно прямой BE (ведь $AB=BD$, $DE=EA$). Отразим относительно BE всего пятизвенного «паука»; пусть при этой симметрии H перешло в H', G — в G' (рис.1). Теперь мы должны оценить снизу сумму длин

$$p = DG'+G'B+G'H'+AH'+H'E.$$

Достаточно доказать неравенства

$$DG'+G'B \ge G'C, \quad AH'+H'E \ge H'F. \qquad (1)$$

Из них, конечно, сразу следует нужное $p \ge CF$. Оказывается, неравенства (1) превращаются в равенства как раз при условиях $\angle DG'B = 120°$, $\angle AH'E = 120°$, соответствующих условиям пункта а). Этот факт вместе с неравенствами (1) вытекает из следующей леммы.

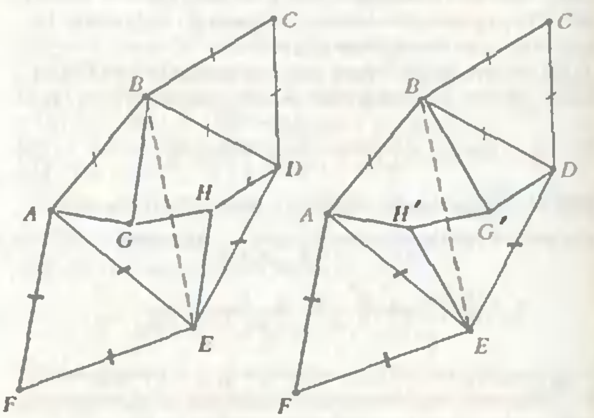


Рис.1

Лемма. *Пусть KLN — правильный треугольник, M — любая точка плоскости. Тогда*

$$MN \le MK + ML \ldots , \qquad (2)$$

причем $MN = MK + ML$ в том и только том случае, если M лежит на дуге описанной окружности, где $\angle KML = 120°$.

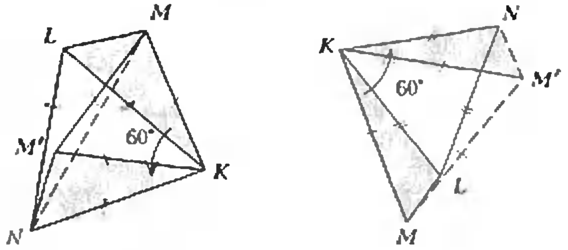


Рис.2

Доказательство (рис.2). Повернем ΔKML вокруг точки K на 60° так, чтобы L совпала с N. Пусть при этом повороте точка M переходит в M'. Треугольник KMM' правильный, поэтому $MM' + M'N = MK + ML$. Точка M' лежит на отрезке MN в том и только том случае, если $\angle KM'N = \angle KML = 120°$ и M лежит вне ΔKNL.

Замечание. Из решения ясно, что существует единственный «паук», для которого достигается равенство: за H' и G' надо взять точки пересечения CF с описанными окружностями треугольников AEF и BCD.

Н.Васильев

М1530. *Пусть p — нечетное простое число. Найдите количество подмножеств A множества $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ таких, что*

(i) A содержит ровно p элементов;

(ii) сумма всех элементов из A делится на p.

Запись $a \equiv b$ всюду ниже означает, что разность $a - b$ делится на p. Мы докажем, что ответ в задаче таков:

$$\left(C_{2p}^{p} - 2\right)/p + 2,$$

где $C_{2p}^{p} = (2p)!/(p!)^2$ — число всех подмножеств из p элементов множества из $2p$ элементов.

Приведем два разных доказательства.

Первое более элементарно.

Разобьем все p-элементные подмножества A множества $\{1, 2, \ldots, p, p+1, \ldots, 2p\}$, отличные от «наименьшего» $B = \{1, 2, \ldots, p\}$ и «наибольшего» $C = \{p+1, \ldots, 2p\}$, на группы по p подмножеств в каждой, следующим образом. Ясно, что если $A \ne B$ и $A \ne C$, то $A \cap B$ и $A \cap C$ непусты. Два подмножества A и A' отнесем к одной группе, если $A \cap C = A' \cap C$ и $A' \cap B$ получается из $A \cap B$ «циклическим сдвигом» по модулю p, т.е. если существует m, $0 < m < p$, такое что $x \in A \cap B \Leftrightarrow y \equiv x + m \in A' \cap B$. Ясно, что кроме A в ту же группу попадут еще $p - 1$ подмножеств. Обозначим через $s(A)$ сумму элементов в A. Пусть $A \cap B$ состоит из q элементов; q одно и то же для всех A' из той же группы, что A, причем $s(A') - s(A) \equiv mq$ не делится на p, если $A' \ne A$. Поэтому в каждой группе найдется ровно одно подмножество A, для которого $s(A) \equiv 0$. Остается заметить, что $s(B) \equiv s(C) \equiv 0$ и что число групп равно $\left(C_{2p}^{p} - 2\right)/p$.

Второе доказательство еще красивее, но требует знания комплексных чисел и нетривиальных теорем о многочленах.

Пусть λ — один из примитивных корней p-й степени из 1, например, $\lambda = \cos(2\pi/p) + i\sin(2\pi/p)$.

Найдем сумму

$$\sigma = \sum \lambda^{i_1 + \ldots + i_p} = \sum_{j=0}^{p-1} n_j \lambda^j \qquad (1)$$

по всем подмножествам $\{i_1, i_2, \ldots, i_p\} \subset \{1, 2, \ldots, 2p\}$; n_j во второй сумме — число подмножеств, для которых $i_1 + i_2 + \ldots + i_p \equiv j \pmod p$. Сумма σ — коэффициент при z^p многочлена

$$\prod_{k=1}^{2p}\left(z - \lambda^k\right) = \left(\prod_{k=0}^{p-1}\left(z - \lambda^k\right)\right)^2 = \left(z^p - 1\right)^2 = z^{2p} - 2z + 1,$$

поэтому $\sigma = 2$. Но тогда из (1) следует, что λ — корень многочлена степени p

$$\left(n_0 - 2\right) + n_1 z + \ldots + n_{p-1} z^{p-1} = 0,$$

тогда как (поскольку p простое) единственные многочлены с рациональными коэффициентами степени меньше p, имеющие корнем λ, — это

$$1 + z + \ldots + z^{p-1} = 0 \qquad (2)$$

и получающиеся из него умножением на число[1]. Поэтому

$$n_0 - 2 = n_1 = n_2 = \ldots = n_{p-1}.$$

Но $n_0 + n_1 + \ldots + n_{p-1} = C_{2p}^{p}$. Отсюда получаем

$$n_0 = p^{-1}\left(C_{2p}^{p} - 2\right) + 2.$$

М.Кучма, Э.Лю

Ф1538. *Воздушный шар начинает подниматься с поверхности Земли. Его ускорение линейно спадает с высотой от начального значения a_0 до нуля на высоте H. Какую скорость приобретет шар, достигнув высоты H? Какая скорость будет у шара на половине этой высоты? За какое время шар поднимется на высоту H?*

Проще всего найти скорость из энергетических соображений — через работу полной силы, действующей на шар, а силу определить через ускорение шара:

$$F_{ср} H = m\frac{a_0}{2} H = \frac{mv^2}{2}, \; v = \sqrt{a_0 H}\,.$$

Аналогично находим и скорость на половине высоты — можно взять «среднее» значение силы или подсчитать работу по площади трапеции:

$$v_1 = \sqrt{0{,}75 a_0 H}\,.$$

Время подъема можно найти из аналогии с гармоническими колебаниями. Посмотрим на «обратное» движение шара с некоторой начальной скоростью из верхней

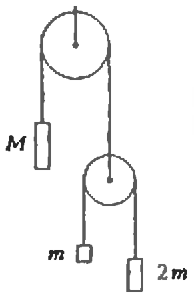
[1] *См. «Алгебру» Ван-дер Вардена или другой учебник, где рассматриваются «многочлены деления круга».*

точки вниз — ускорение получается пропорциональным смещению шара, что характерно именно для гармонических колебаний. Интересующий нас интервал времени получается равным четверти периода таких «колебаний»:

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{H}{a_0}}.$$

З.Рафаилов

Ф1539. ***На рисунке показана система, содержащая два подвижных блока и три груза, массы которых m, 2m и M. Какую массу M нужно взять, чтобы вся система***



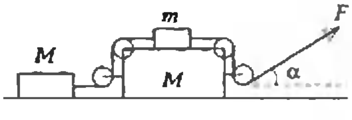
весила 4mg? Блоки и нити считать невесомыми, нити нерастяжимыми. Движение всех грузов происходит в вертикальном направлении.

Если вес всей системы, т.е. натяжение самой верхней нити, за которую мы тянем всю систему вверх, составляет $4mg$, то перекинутая через верхний блок нить имеет натяжение $2mg$, а нить связывающая грузы массой m и $2m$, имеет натяжение mg. При этом груз массой m имеет нулевое ускорение, ускорение груза массой $2m$ направлено при такой силе натяжения вниз и составляет $g/2$, тогда ускорение нижнего блока направлено вниз и равно $g/4$. С таким же ускорением, только направленным вверх, едет и груз массой M. Теперь легко определить его массу:

$$2mg - Mg = M\frac{g}{4},\ M = 1,6\ m.$$

Р.Александров

Ф1540. ***В системе, изображенной на рисунке, трение отсутствует, а внешняя сила равна F и составляет угол α с горизонтальной плоскостью. Найдите ускорения каждого из тел. Массы тел указаны на рисунке.***



Анализ сил, действующих со стороны нитей на прикрепленные к «подставке» блоки, показывает, что суммарная сила по горизонтали направлена не туда, куда мы тянем, а в обратную сторону. Таким образом, «подставка» едет влево, и ее ускорение равно

$$a_1 = \frac{F(1-\cos\alpha)}{M}.$$

Смещение «подставки» не приводит к дополнительному перемещению грузов, поэтому ускорения грузов одинаковы и составляют

$$a_2 = \frac{F}{(M+m)}.$$

А.Зильберман

Ф1541. ***На гладком горизонтальном столе вдоль одной прямой расположены шарики, массы которых m, M и 2M. Шарик массой m налетает на шарик массой M, и между ними происходит абсолютно упругий лобовой удар. При каких отношениях m/M в системе произойдет еще ровно один удар?***

Пусть шарик массой m вначале находится слева от двух других и движется со скоростью v направо. После абсолютно упругого удара он должен лететь влево — иначе будет заведомо не менее двух ударов. Величину его скорости находим из законов сохранения импульса и энергии и получаем

$$v_1 = v\frac{1-m/M}{1+m/M}.$$

Скорость шарика массой M после удара о шарик массой $2M$ также направлена влево и равна

$$v_2 = \frac{2}{3}v\frac{m/M}{1+m/M}.$$

Для выполнения условия задачи нужно, чтобы эта скорость была меньше, чем у маленького шарика, т.е. $v_2 < v_1$. Отсюда находим условие

$$m/M < 3/5.$$

При большем отношении масс ударов будет больше двух.

А.Старов

Ф1542. ***Сосуд с разреженным гелием разделен на две равные части легким подвижным поршнем. Газ в одной половине сосуда начинают нагревать, поддерживая температуру газа в другой части сосуда неизменной. Какое количество теплоты нужно сообщить газу в нагреваемой части сосуда, чтобы его температура возросла на небольшую величину ΔT? Всего в сосуде содержится ν молей газа.***

Нагреем газ в левой части сосуда на ΔT — поршень сдвинется, так как при равновесии давления в левой и правой частях сосуда должны стать равными:

$$\frac{0{,}5\nu R(T+\Delta T)}{0{,}5V+\Delta V} = \frac{0{,}5\nu RT}{0{,}5V-\Delta V}.$$

Отсюда получаем

$$4T\Delta V = V\Delta T.$$

Необходимое количество теплоты определяется изменением внутренней энергии и работой газа при расширении, причем работу газа выражаем с учетом полученного выше соотношения между малыми значениями ΔT и ΔV. Окончательно находим

$$Q = 1{,}5\cdot 0{,}5\nu R\Delta T + p\Delta V = \nu R\Delta T.$$

З.Рафаилов

Ф1543. ***Две большие квадратные пластины площадью S каждая находятся на малом расстоянии d одна от***

другой, образуя плоский конденсатор. Посредине между ними находится еще одна такая же пластина, заряженная зарядом Q. Наружные пластины соединены друг с другом резистором с большим сопротивлением R. Среднюю пластину быстро передвигают по направлению к одной из наружных пластин так, что она оказывается на расстоянии d/3 от нее. Какое количество теплоты выделится после этого на резисторе?

В начальном положении средней пластины суммарная сила, действующая на нее со стороны двух других пластин, равна нулю. По условию задачи мы передвигаем пластину очень быстро, так что заряды внешних пластин практически не успевают измениться — значит, и сила остается равной нулю, т.е. работы мы не совершаем. И еще одна важная вещь: снаружи от нашего конденсатора существует электрическое поле — ведь суммарный заряд пластин не равен нулю. Но напряженность наружного поля не изменяется при передвижении средней пластины, поэтому энергию этого поля можно не учитывать. Таким образом, выделившееся количество теплоты равно разности энергий поля внутри конденсатора для начального и конечного положений средней пластины. Поля с одной и другой стороны средней пластины должны быть такими, чтобы разность потенциалов между крайними пластинами обращалась в ноль. Отсюда можно выразить суммарную энергию:

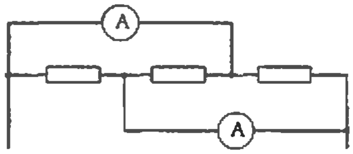
$$W(x)=\frac{Q^2x(1-x/d)}{2\varepsilon_0S},$$

где x — расстояние от средней пластины до одной из крайних. Вычитая друг из друга значения энергии для $x=d/2$ и $x=d/3$, получаем ответ

$$\Delta W=\frac{Q^2d}{72\varepsilon_0S}.$$

Р.Александров

Ф1544. *В схеме на рисунке два из трех резисторов одинаковые, а сопротивления амперметров пренебрежимо малы. Один из амперметров показывает $I_1=1$ А, показания второго $I_2=2$ А. Найдите токи через каждый из резисторов.*



Легко заметить, что каждый из резисторов подключен своими концами к источнику питания (по условию сопротивления амперметров пренебрежимо малы). Два из резисторов одинаковые, причем это не могут быть крайние по схеме — при этом токи амперметров должны были бы оказаться одинаковыми. Тогда получаются два различных набора токов, текущих через резисторы: 0,5 А, 0,5 А и 1,5 А — первый, 1 А, 1 А, 0 — второй. Второй набор можно сразу исключить по формальным признакам — при конечных значениях сопротивлений ток не может быть равным нулю. Значит, останется только первый набор значений.

Однако, можно рассуждать и иначе — учесть, что показания амперметров не могут быть *абсолютно* точными. Тогда второй набор токов будет соответствовать случаю, когда один из резисторов имеет сопротивление во много раз большее, чем два других.

М.Учителев

Ф1545. *Длинный соленоид радиусом r содержит N витков на каждый метр длины. По соленоиду пропускают ток I (известно, что магнитное поле такого соленоида практически однородно внутри и очень мало снаружи). На одной оси с соленоидом находится длинный (но не такой длинный, как соленоид) легкий бумажный цилиндр радиусом R и высотой H, равномерно заряженный по поверхности полным зарядом Q. Ток соленоида уменьшают в 3 раза, при этом цилиндр приходит во вращение вокруг своей оси. В какую сторону и с какой угловой скоростью вращается цилиндр?*

При изменении тока соленоида возникает вихревое электрическое поле, которое и закручивает цилиндр. Заряженный вращающийся цилиндр создает внутри себя такое же магнитное поле, как соленоид с током. Формулы для магнитной индукции такого поля довольно очевидны, но можно обойтись и без них, нужно только сообразить, что магнитная индукция пропорциональна получившемуся току, т.е. произведению величины заряда на угловую скорость вращения цилиндра.

Цилиндр по условию очень легкий, значит, изменение магнитного потока через него, создаваемого соленоидом, должно быть полностью скомпенсировано его собственным магнитным потоком. Отсюда можно получить ответ для двух различных случаев — когда цилиндр целиком помещается внутри соленоида и когда его радиус больше радиуса соленоида:

$$\omega_1=\frac{4\pi NIH}{3Q}\ \text{при}\ R<r,\quad \omega_2=\frac{4\pi NIH(r^2/R^2)}{3Q}\ \text{при}\ R>r.$$

Если заряд Q положительный, то цилиндр вращается в ту же сторону, куда течет ток в соленоиде.

З.Рафаилов

Ф1546. *Заряженный до напряжения $U=100$ В конденсатор подключают к катушке индуктивностью $L=0{,}5$ Гн. При какой емкости конденсатора сила тока в катушке через $\tau=0{,}01$ с окажется не меньше $I=0{,}03$ А?*

Зависимость заряда конденсатора от времени, как и выражение для тока катушки, получается совсем просто. Однако уравнение для определения емкости никак не решается «в лоб» — приходится решать его численно. Обозначим $x=\tau/\sqrt{LC}$, где C — емкость конденсатора, тогда получится уравнение

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{LI}{U\tau}=0{,}015.$$

Для начала полезно построить график этой функции (сделайте это самостоятельно). По графику видно, что получается множество интервалов для x, а значит, и для емкости C. Не будем их тут перечислять — их очень много. Но одну оценку для емкости — оценку сверху — можно сделать сразу из условия, что энергия катушки никак не должна быть больше начальной энергии конденсатора. Получаем, что C должно быть не менее 0,045мкФ.

А.Зильберман

(Продолжение см. на с. 34)

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

А ТАК ЛИ ХОРОШО ЗНАКОМ ВАМ

закон Кулона?

> *...взаимное притяжение электрической жидкости, именуемой положительной, и электрической жидкости, именуемой обычно отрицательной, состоит в обратном отношении квадратов расстояний...*
>
> Шарль Огюстен Кулон

Конечно же, попытки найти закономерности взаимодействия заряженных тел предпринимались и до Кулона. Выдвигались любопытные гипотезы, проводились смелые аналогии, ставились хитроумные опыты. В этом участвовали такие незаурядные ученые, как Даниил Бернулли, Джозеф Пристли, Франц Эпинус, Генри Кавендиш. Однако лишь Кулону удалось довести до конца независимые, тщательные и убедительные исследования, положившие начало количественной электростатике. Разрозненная и во многом только качественная мозаика электрических явлений словно обрела единство. Появилась возможность ввести единицу электрического заряда, объяснить огромное количество накопленных фактов, а главное — «впустить» в электричество превосходно разработанные идеи и методы теоретической механики. До той поры она была практически неспособна помочь в толковании то ли опытов, то ли забав с электричеством. Сформулированный Кулоном закон обеспечил теории электрических явлений дальнейший и быстрый прогресс.

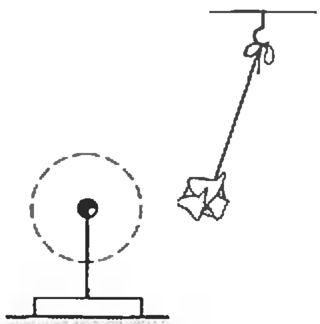
Вопросы и задачи

1. Почему мы не проваливаемся сквозь пол?

2. С какой силой действуют два одноименных и равных по величине заряда на третий заряд, помещенный посредине между ними?

3. Заряженный шарик притягивает бумажку. Как изменится сила притя-

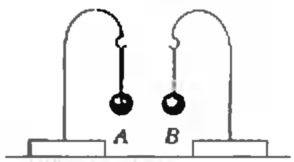
жения между ними, если концентрической металлической сферой окружить а) шарик, б) бумажку?



4. Как изменится сила притяжения между шариком и бумажкой (см. предыдущую задачу), если сферу, окружающую шарик, заземлить?

5. В каком случае сила электрического взаимодействия двух близко расположенных металлических шариков будет больше — при наличии на них одноименных или разноименных зарядов (при прочих равных условиях)?

6. Положительно заряженный шар *A* поместили вблизи металлического шара *B*. Измерения показали, что сила электрического взаимодействия шаров равна нулю. Заряжен ли шар *B*?

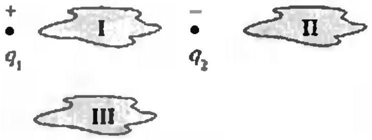


7. Могут ли два одноименно заряженных проводника притягиваться?

8. Два маленьких шарика подвешены на тонких изолирующих нитях одинаковой длины в одной точке. Что произойдет, если шарикам в состоянии невесомости сообщить одноименные заряды?

9. Заряды двух одинаковых маленьких металлических шариков, удаленных друг от друга, отличаются по величине в 4 раза. Изменится ли сила взаимодействия шариков, если их на короткое время соединить проволочкой?

10. Два точечных равных по величине, но разноименных заряда q_1 и q_2 закреплены на некотором расстоянии друг от руга. В какой из очерченных областей I, II и III может быть в равновесии с ними третий



заряд? А если заряды q_1 и q_2 — одноименные?

11. Два разноименных точечных заряда притягиваются друг к другу с некоторой силой. Изменится ли сила, действующая на каждый заряд, если между ними поместить стеклянный шар?

12. Электрон, обладающий на бесконечности скоростью v, начинает двигаться точно в сторону другого неподвижного и свободного электрона. Как в дальнейшем будут вести себя электроны?

13. Тонкое проволочное кольцо несет на себе заряд q. В центре кольца расположен одноименный с q заряд Q. Каков результат взаимодействия этих зарядов?

14. Мыльный пузырь, сообщающийся с атмосферой через вертикальную трубку, стягивается, превращаясь за некоторое время в почти плоскую пленку на конце трубки. Изменится ли это время, если пузырю сообщить а) положительный, б) отрицательный заряд?

15. Почему α-частицы, испускаемые радиоактивными препаратами, не могут вызвать ядерных реакций в тяжелых элементах?

Микроопыт

Постарайтесь опустить в стакан с водой стальную булавку так, чтобы она плавала. Поднесите к ней наэлектризованную пластмассовую расческу. Как будет вести себя булавка? Почему?

Любопытно, что...

...Францу Эпинусу — немецкому ученому, работавшему в конце XVIII века в Петербурге, построить свою теорию электрических явлений помогла аналогия с теорией тяготения Ньютона. Исходя «из экономии и гармонии в природе», Эпинус предположил, что электрические и магнитные силы обратно пропорциональны квадрату расстояния.

...закон взаимодействия электрических зарядов первым экспериментально установил Генри Кавендиш. Однако эту работу, как и многие другие, он сделал «для собственного удовлетворения» и не обнародовал своего открытия. О нем узнали лишь в середине прошлого столетия благодаря Дж.Максвеллу.

...согласно теоретическим представлениям, бытовавшим до Кулона, считалось, что электрическое воздействие проявляется лишь в особой «атмосфере», непосредственно окружающей наэлектризованное тело.

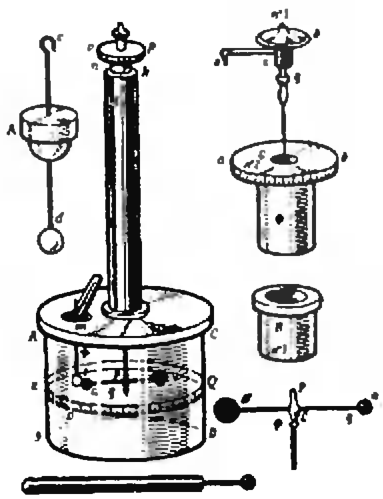
...свой прибор, служащий «для измерения мельчайших степеней силы», сам Кулон назвал крутильными весами и прежде всего использовал для изучения трения. А исследования, обессмертившие его имя, Кулон проводил в качестве побочного занятия, никогда ранее особенно не интересуясь электричеством и магнетизмом.

...повторив опыт Кавендиша, Кулон установил, что электричество распределяется по поверхности проводников. Основываясь же на законе обратных квадратов, он доказал это свойство и теоретически.

...будучи «убежден в том, что все силы природы находятся во взаимной связи», Майкл Фарадей пытался экспериментально обнаружить зависимость между электричеством и тяготением. Он поставил чрезвычайно изящные опыты для обнаружения этой связи, но результаты оказались отрицательными.

...при внешнем сходстве закона Кулона с законом всемирного тяготения Ньютона между этими видами взаимодействия лежит глубокая пропасть. Электрические силы при прочих равных условиях значительно превосходят гравитационные, также не обнаружено пока гравитационного отталкивания. Однако наличие двух видов электрических зарядов приводит к тому, что в любом куске вещества заряды настолько точно сбалансированы, что наблюдать электрические силы довольно трудно. При мало-мальски серьезном нарушении нейтральности тел у зарядов возникает неудержимое стремление ее восстановить.

...происхождение сил упругости и трения нашло свое (и то частичное) объяснение лишь тогда, когда стала понятна природа электрических сил между нейтральными системами — молекулами.



...для «домашнего потребления» в физике и почти всегда в технике принято рассматривать электрические и магнитные силы отдельно друг от друга. Однако вопрос о том, какая из двух составляющих — электрическая или магнитная — проявляется при движении свободных носителей заряда, целиком зависит только от системы отсчета.

...объяснение явления сверхпроводимости заключается в объединении свободных электронов в пары, которые могут двигаться в металле без трения. Несмотря на то, что по закону Кулона электронам положено отталкиваться, их взаимодействие с кристаллической решеткой меняет знак силы.

...недавние эксперименты с проводящими сферами позволяют утверждать, что показатель степени в законе Кулона равен двойке с точностью до 10^{-13}.

Что читать в «Кванте» о законе Кулона

(*публикации последних лет*)

1. «*Заряженная поверхность жидкости*» — 1989, № 12, с. 2;
2. «*Проводящие сферы в электростатике*» — 1990, № 10, с. 52;
3. «*Обманчивая простота*» — 1993, № 1/2, с.56;
4. «*Любовь и ненависть в мире молекул*» — 1994, № 2, с.9;
5. «*Колебания заряда и космическая оранжерея*» — 1994, № 5, с.43;
6. *Калейдоскоп «Кванта»* — 1995, № 3, с.32.

Материал подготовил
А.Леонович

(Начало см. на с. 22)

Ф1547. ***На плоскую поверхность плосковогнутой линзы с фокусным расстоянием −10 см падает вдоль главной оптической оси тонкий однородный пучок света. Диаметр пучка составляет 0,1 см, мощность в пучке 100 Вт. Оцените величину силы, действующей на линзу. Куда направлена эта сила? Поглощением света в линзе пренебречь. Как изменится ответ, если в линзе поглощается 0,1% падающей мощности света?***

Падающие на линзу фотоны после преломления изменяют направление движения — следовательно, изменяется и проекция импульса пучка на направление оси. Это означает, что на линзу действует сила — найдем ее по изменению импульса пучка. Поскольку горизонтальная проекция импульса уменьшается, на фотоны действует сила, направленная против их движения, а на линзу — вдоль. Энергия фотона связана с его импульсом известным соотношением $\varepsilon = pc$, но для нахождения силы нужно найти изменение импульса за секунду — значит, вместо энергии пучка нужно взять его мощность. Если фотон падает на линзу на расстоянии x от главной оптической оси, то после преломления он кажется исходящим из фокуса линзы. Угол отклонения находим из получившегося треугольника:

$$\cos\alpha = \frac{F}{\sqrt{F^2 + x^2}}.$$

Дальше придется интегрировать по всем значениям смещения x от нуля до радиуса пучка. При поглощении части фотонов их импульс целиком получает линза.

Если пучок падает точно по главной оптической оси, то на линзу действует сила

$$f_1 = \frac{P}{c}\left(\frac{d}{2F}\right)^2 = 10^{-11}\ \text{Н}.$$

При наличии поглощения добавится еще сила

$$f_2 = \frac{0{,}001P}{c} = 3\cdot 10^{-10}\ \text{Н}.$$

Если тонкий пучок падает на расстоянии l от оси, то сила запишется так:

$$f_3 = \frac{P}{c}\left(1 - \frac{F}{\sqrt{F^2 + l^2}}\right).$$

Для $l = 1$ см, например, получается $1{,}6\cdot 10^{-9}$ Н. Поглощение в этом случае мало меняет ответ.

А.Зильберман

ИНФОРМАЦИЯ

ЗАОЧНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ШКОЛА ПРИ МГУ

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете МГУ объявляет прием учащихся в 10 и 11 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику, лучше подготовиться к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения, прежде всего — на физический факультет МГУ.

Физический факультет МГУ готовит физиков — теоретиков и экспериментаторов — по всем разделам современной физики и астрономии. Фундаментальное университетское образование позволяет выпускникам физического факультета быстро осваивать специфику любого научного или технического направления, успешно работать на стыке научных направлений — таких, например, как геофизика и биофизика, астрофизика и химическая физика, компьютерная физика и математическое моделирование.

Выпускникам физического факультета присваивается степень магистра.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать *до 1 сентября* по адресу: *119899 Москва, ГСП, Воробьевы горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ.* В письмо вложите два экземпляра анкеты, заполненной на листах плотной бумаги размером 7×12 см по приведенному здесь образцу, и конверт с Вашим адресом.

Решение о зачислении в ЗФШ будет сообщено до 20 октября.

Принятым в ЗФШ в течение года высылаются контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решенные задания оцениваются, рецензируются и отсылаются обратно. Учащиеся 10 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 11 класс. Успешно прошедшие обучение получают удостоверение об окончании ЗФШ (при поступлении на физический факультет МГУ удостоверения об окончании ЗФШ учитываются приемной комиссией).

Для проживающих в Москве и Московской области работает вечерняя физическая школа.

Фамилия, имя, отчество	*Нефедов Николай Николаевич*
Класс ЗФШ	*10*
Профессия родителей	*мать — инженер, отец — врач*
Подробный домашний адрес	*120713 г.Тула, ул.Пушкина, д.24, кв.26*
Номер и адрес школы	*школа № 444, г. Тула, ул. Садовая, д.11*

Справки по телефону (095) 939-38-78 с 16 до 18 часов по рабочим дням.

Вступительное задание

Поступающим в 10 класс ЗФШ нужно решить задачи 1 — 4, поступающим в 11 класс — задачи 3 — 6.

1. Приборы, установленные на берегу, показывают, что ветер дует с юго-запада, а величина скорости ветра равна $v = 5$ м/с. Что покажут аналогичные приборы, установленные на корабле, идущем на запад со скоростью $u = 36$ км/ч?

2. На пути тела массой m, скользящего по гладкой плоскости, находится горка высотой H и массой M. При какой минимальной скорости тела оно сможет преодолеть горку? Горка может скользить без трения по плоскости, не отрываясь от нее.

3. Однородный стержень согнут в виде прямого угла со сторонами a и b и подвешен на гвоздь, вбитый в вертикальную стенку. Какой угол образует сторона a с вертикалью?

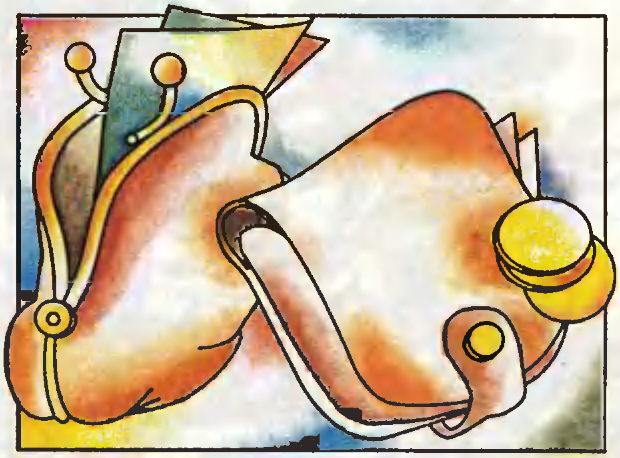
4. Придумайте качественную задачу по любому разделу физики (и приведите ее решение).

5. Смешали объем V_1 воздуха с относительной влажностью φ_1 и объем V_2 воздуха с влажностью φ_2. При этом обе порции взяты при одной и той же температуре. Смесь занимает объем $V_1 + V_2$. Определите ее относительную влажность.

6. Чему равен заряд заземленной металлической сферы радиусом R, если на расстоянии a от ее центра ($a > R$) находится точечный заряд $q > 0$?

Задачи

1. В двух кошельках лежит 20 тысяч рублей, причем в одном из них денег вдвое больше, чем в другом. Может ли такое быть?



2. Замените буквы цифрами так, чтобы все равенства

$$
\begin{array}{ccccccc}
К & - & Л & + & И & = & М \\
- & & \times & & \times & & \times \\
Л & \times & Е & - & В & = & А \\
+ & & - & & - & & : \\
И & \times & В & - & А & = & Н \\
= & & = & & = & & = \\
М & \times & А & : & Н & = & Я
\end{array}
$$

оказались верными. Одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, разным — разные.

Л.Мочалов

3. В нижеследующем тексте восстановите пропущенные числа, обращая внимание на грамматическую правильность получаемого текста.

«Алиса на ... года старше Орленка Эдда и на ... года старше Ореховой Сони. Пичужке сегодня исполнился ... год. Ореховой Соне в позапрошлом году было ... года, а сейчас она на ... года моложе Орленка Эдда. Сколько лет каждому из них, если сумма их возрастов составляет ... года, через год сумма возрастов Алисы и Пичужки составит ... лет, а каждому персонажу не исполнилось еще десяти лет?»

А.Жуков

4. Зигзаг диагоналей разделил правильный девятиугольник на треугольники.

Какая часть площади больше: белая или красная?

В.Произволов

5. Можно ли выбрать из каждого слова фразы, которую вы сейчас читаете, ровно по одной букве так, чтобы все эти буквы были различными буквами русского алфавита, причем заглавные и прописные буквы не различаются между собой?

А.Шаповалов

Исаак Ньютон и яблоко

В.ФАБРИКАНТ

Масса сведений — числа, законы,
$2\pi R$, H_2SO_4,
Лампа, яблоко, Круксы, Ньютоны,
Водород, колебанья в эфире.

Ю.Тувим

Известный рассказ о том, что к открытию закона всемирного тяготения Ньютона привело зрелище падающего с дерева яблока, имеет любопытную историю.

С.И.Вавилов в превосходной биографии Ньютона пишет, что рассказ этот, по-видимому, достоверен и не является легендой. Он ссылается на свидетельство Стаклея, близкого знакомого Ньютона:

«После обеда (в Лондоне, у Ньютона) погода была жаркая; мы перешли в сад и пили чай под тенью нескольких яблонь; были только мы вдвоем. Между прочим, сэр Исаак сказал мне, что точно в такой же обстановке он находился, когда впервые ему пришла в голову мысль о тяготении. Она была вызвана падением яблока, когда он сидел, погрузившись в думы. Почему яблоко всегда падает отвесно, подумал он про себя, почему не в сторону, а всегда к центру земли. Должна существовать притягательная сила в материи, сосредоточенная в центре земли. Если материя так тянет другую материю, то должна существовать пропорциональность ее количеству. Поэтому яблоко притягивает землю так же, как земля яблоко. Должна, следовательно, существовать сила, подобная той, которую мы называем тяжестью, простирающаяся по всей вселенной».

Очевидно, эти размышления о тяготении относятся к 1665 или к 1666 году, когда из-за вспышки чумы в Лондоне Ньютон вынужден был жить в деревне. В бумагах Ньютона была найдена такая запись по поводу «чумных лет»: «... в это время я был в расцвете моих изобретательских сил и думал о математике и философии больше, чем когда-либо после».

Свидетельство Стаклея было мало кому известно (мемуары Стаклея были напечатаны только в 1936 году), но знаменитый французский писатель Вольтер в книге, изданной в 1738 году и посвященной первому популярному изложению идей Ньютона, привел тот же рассказ со ссылкой на племянницу Ньютона. Рассказ быстро стал популярен, однако у многих вызывал сомнения. Считалось, что это очередная выдумка Вольтера, слывшего одним из самых остроумных людей своего времени. Нашлись люди, у которых этот рассказ вызвал даже возмущение. К числу последних принадлежал великий математик Гаусс. Он говорил:

«История с яблоком слишком проста; упало ли яблоко или нет — это все равно; но не понимаю, как можно предполагать, что этот случай мог ускорить или замедлить такое открытие. Вероятно, дело было так: однажды к Ньютону пришел глупый и нахальный человек и спрашивал его, каким образом он мог дойти до такого великого открытия. Ньютон, увидев, какого рода существо стоит перед ним, и желая от него отвязаться, отвечал, что ему упало на нос яблоко, и это совершенно удовлетворило любознательность того господина».

Великий русский педагог К.Д.Ушинский, наоборот, увидел в истории с яблоком глубокий смысл. Противопоставляя Ньютона так называемым светским людям, он писал:

«Нужен был гений Ньютона, чтобы вдруг удивиться тому, что яблоко упало на землю. Таким «пошлостям» не удивляются всезнающие люди света. Они даже считают удивления таким обыденным событиям признаком мелкого, детского, не сформированного еще практического ума, хоть в то же самое время сами часто удивляются уже действительным пошлостям».

Ту же мысль в поэтической форме выразил советский поэт К.Кулиев в мудром стихотворении «Жить удивляясь»:

«Рождаются великие творенья
Не потому ли, что порою где-то
Обычным удивляются явленьям
Ученые, художники, поэты».

Приведем еще несколько примеров того, как история с яблоком отразилась в художественной литературе.

Соотечественник Ньютона великий английский поэт Байрон начинает десятую песнь поэмы «Дон Жуан» следующими двумя строфами (перевод И. Козлова):

«Увидев раз, как яблоко упало,
Смущенный тем явлением Ньютон
Открыл (хоть я ученым верю мало)
Всемирный тяготения закон.
Когда б молва не ложь распространяла,
То со времен Адама первый он
Сумел найти звено соединенья
Меж яблоком и следствием паденья.

От яблок пали мы; но этот плод
Возвысил снова род людской убогий
(Коль верен приведенный эпизод).
Проложенная Ньютоном дорога
Страданий облегчила тяжкий гнет;
С тех пор открытий сделано уж много,
И, верно, мы к луне когда-нибудь,
Благодаря парам, направим путь».

В.Солоухин в стихотворении «Яблоко» несколько неожиданно повернул ту же тему:

«Я убежден, что Исаак Ньютон
То яблоко, которое открыло
Ему закон земного тяготенья,
Что он его,
В конечном счете, — съел».

Наконец, Марк Твен придал всему эпизоду юмористическую окраску. В рассказе «Когда я служил секретарем» он пишет:

«Что есть слава? Порождение случая! Сэр Исаак Ньютон открыл, что яблоки падают на землю, — честное слово, такие пустяковые открытия делали до него миллионы людей. Но у Ньютона были влиятельные родители, и они раздули этот банальный случай в чрезвычайное событие, а простаки подхватили их крик. И вот в одно мгновение Ньютон стал знаменит».

Опубликовано в «Кванте» №1 за 1979 год.

Иллюстрации В.Митурич-Хлобниковой

ФИЗИКА 9 — 11

Публикуемая ниже заметка «Первый велосипед» предназначена девятиклассникам, заметка «Магниты, заряды, планеты...» — десятиклассникам, «Из глубин Вселенной» — одиннадцатиклассникам.

Первый велосипед

А. СТАСЕНКО

В прошлые годы я слышал заявления о том, что русские много делают в науке первыми... С течением времени я осознал, что большинство их соответствует истине.

Х.Р.Кауфман. Тактика успеха и бизнес в науке

СТАРЫЕ люди помнят, как два миллиона лет назад великий инженер Нга-Нга изобрел первый велосипед, еще не зная, что колеса должны быть круглыми. Откуда ему было знать? Но с тех пор возникла потребность в теории велосипеда: нужно было узнать, какая мощность расходуется при его движении, каковы оптимальные режимы езды, как обеспечивается его устойчивость — короче, бездна вопросов. Здесь мы попробуем ответить лишь на их малую часть.

Рассмотрим сначала одно «колесо» от первого велосипеда, изображенное на рисунке 1. При перемещении из состояния *1* в состояние *2* его «ось» опишет четверть окружности O_1O_2 с радиусом $R = a/\sqrt{2}$ и центром в точке O (проскальзывание отсутствует). Будем отсчитывать угол поворота колеса от вертикальной оси *OY* вправо. Тогда положению *1* соответствует угол $\varphi_1 = -\pi/4$, положению *2* — угол $\varphi_2 = +\pi/4$. Если линейную (окружную) скорость обозначить через v_φ, то горизонтальная и вертикальная составляющие скорости центра колеса будут равны

$$v_x = v_\varphi \cos\varphi,\ v_y = -v_\varphi \sin\varphi. \qquad (1)$$

Их зависимости от угла φ изображены на рисунке 2. Видно, что через каждую четверть оборота вертикальная составляющая «рвется»: ее модуль остается прежним, а направление изменяет знак.

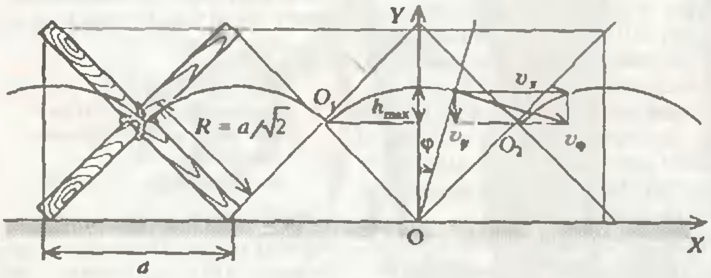


Рис. 1

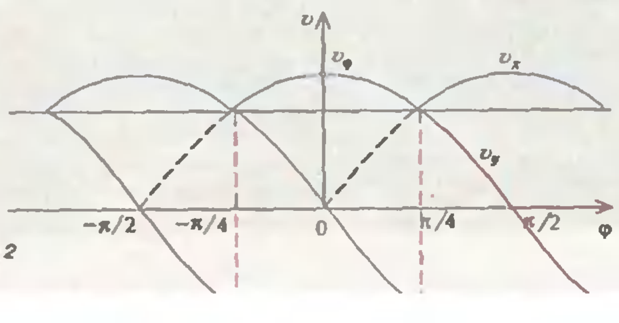


Рис. 2

Если в процессе движения поддерживать постоянную линейную скорость v_φ, то угол φ будет прямо пропорционален времени; в этом случае рисунок 2 описывает колебания проекций скорости во времени. Только, разумеется, эти колебания нельзя назвать гармоническими, хотя они и описываются тригонометрическими функциями (1).

После начала движения из состояния *1* через осьмушку оборота центр колеса окажется в самой высокой точке, на расстоянии *R* от земли. Следовательно, по отношению к точке O_1 он поднимется на высоту

$$h_{max} = R - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

Но одно колесо (тем более квадратное) — еще не велосипед. Взглянув на рисунок 3, великий Нга-Нга сразу сообразил, что возможны по крайней мере два режима езды:

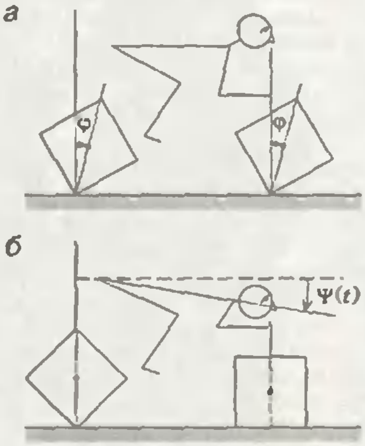
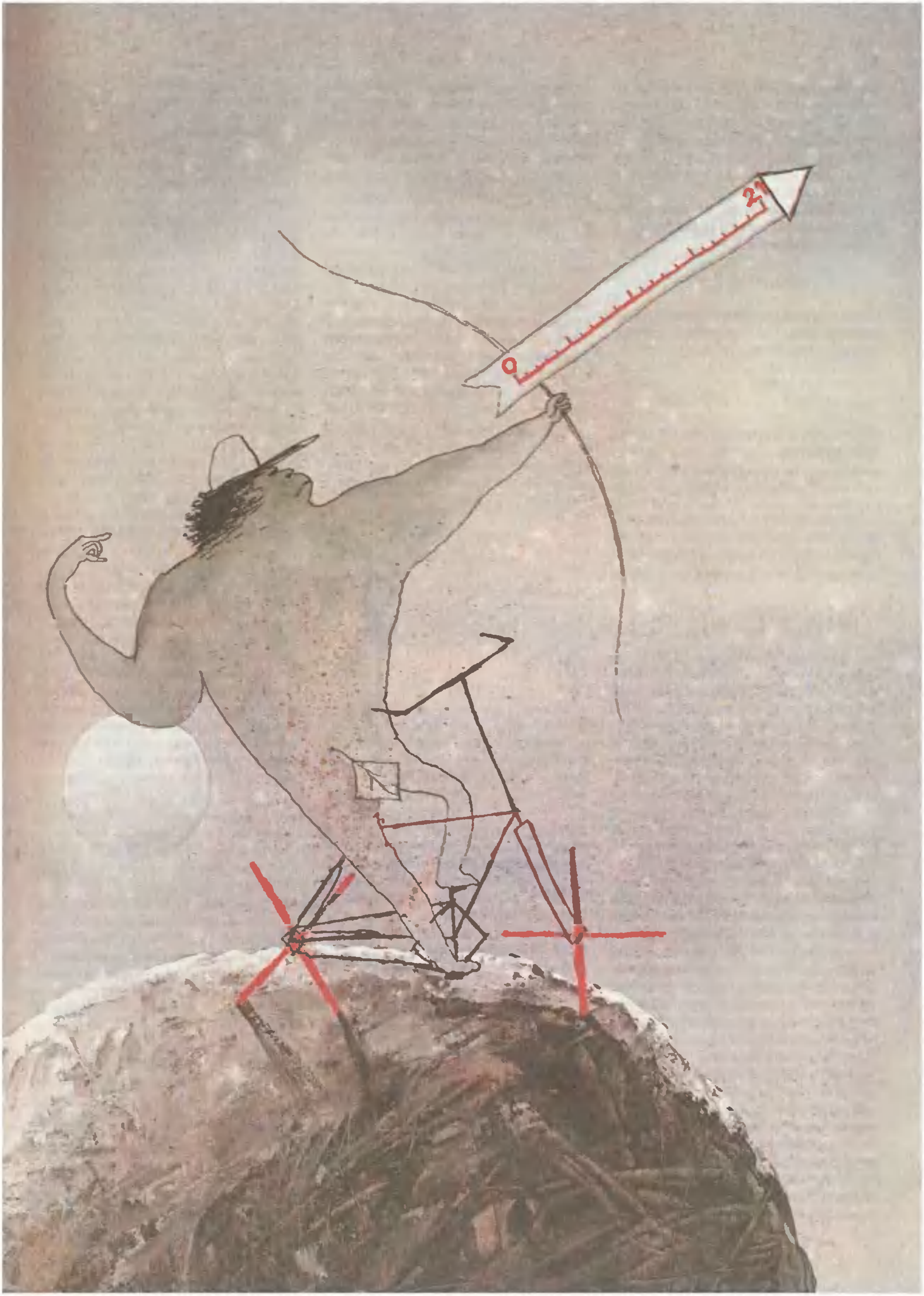


Рис. 3

а) Если оба колеса в начальный момент установлены одинаково, то при отсутствии проскальзывания их «диаметры» будут во все время движения составлять один и тот же угол φ с вертикалью, а их центры будут всегда лежать на одной и той же высоте (зависящей, конечно, от времени). Как любил говаривать Нга-Нга, они будут колебаться *синфазно*. В этом случае и все остальные точки велосипеда, и все точки самого велосипедиста будут совершать так называемые плоско-параллельные перемещения. И центр масс всей системы будет подниматься на высоту h_{max}, найденную выше.

б) Если же в начальный момент времени колеса установлены не одинаково,



а так, как изображено на рисунке 3,*б*, то их центры будут двигаться со сдвигом фаз 45°. Тогда, очевидно, позвоночник Нга-Нга будет совершать вращательное колебательное движение $(\psi(t))$, а вот центр масс при этом может двигаться строго горизонтально.

Рассмотрим режим а). Чтобы поднять центр масс всей системы на высоту h_{max}, нужно совершить работу

$$A = mgh_{max} = mg\frac{a}{2}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Если поддерживать при этом v_φ постоянной, то на этот процесс (осьмушку оборота колеса) уйдет время

$$\tau_1 = \frac{1}{8}\frac{2\pi R}{v_\varphi} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\frac{a}{v_\varphi}.$$

Значит, средняя мощность за это время будет порядка

$$\frac{A}{\tau_1} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\sqrt{2}-1\right)mgv_\varphi. \qquad (2)$$

Какую скорость v_φ может при этом обеспечить велосипедист за счет собственных энергетических ресурсов? Известно, что для человека физического труда (Нга-Нга, понятно, не был белоручкой) требуется в сутки порядка 5000 килокалорий, а коэффициент полезного действия человека приблизительно 25%. Следовательно, мощность человека как машины имеет порядок

$$N_{ср} = 5000 \cdot 10^3\ \frac{\text{кал}}{\text{сутки}} \times$$

$$\times \frac{4{,}2\ \text{Дж/кал}}{3600\frac{\text{с}}{\text{ч}}\cdot 24\frac{\text{ч}}{\text{сутки}}} \cdot 0{,}25 \approx 60\ \text{Вт}.$$

При массе велосипеда и седока $m \sim$ ~ 100 кг из выражения (2) получим для скорости оценку

$$v_{\varphi_1} = \frac{N_{ср}\pi}{mg2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)} \approx 15\ \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Но это только первая осьмушка оборота колеса. А дальше, забравшись на h_{max}, седок может отдыхать. Тогда при отсутствии потерь энергии он «упадет» с высоты h_{max} за время

$$\tau_2 \sim \sqrt{\frac{2h_{max}}{g}}$$

с вертикальной скоростью

$$v_{\varphi_2} \sim \sqrt{2gh_{max}}.$$

А если его не устраивает эта скорость удара, он может сделать «реверс тяги» и опускаться более плавно — но это потребует дополнительной работы, увеличит период колебаний и снизит скорость движения. Не очень-то удобный режим движения.

Режим б) явно предпочтительнее с энергетической точки зрения: тут не нужно периодически приподнимать центр масс, а затем тормозить его падение. Но все равно — эти стуки квадратных колес, это сотрясение мозга... Поэтому уже Иго-Иго, сын Нга-Нга, догадался сделать «колесо» восьмиугольным, а внук Нги-Нги — шестнадцатиугольным, и так далее, пока, наконец, Архимед не доказал, что в пределе получится круг. (Но это уже математика.) А для круглого колеса потребовались дороги. Между тем велосипед Нга-Нга мог «переезжать» через камни и стволы деревьев. Так что, может быть, он был не так прост, этот великий изобретатель?

Магниты, заряды, планеты...

А. СТАСЕНКО

...физика начинает замечать, что мыслить мир — это не только его регистрировать, но и придавать ему форму единства, которой он был бы лишен, если бы не был мыслим.

Пьер Тейяр де Шарден.
Феномен человека

Что может быть проще, чем прямой провод с постоянным током I? Каждый школьник знает, что вокруг него возникает магнитное поле с кольцевыми соосными линиями вектора магнитной индукции $\vec{B}$, которые сравнительно просто можно сделать видимыми (визуализировать) при помощи классических магнитных опилок, насыпанных на лист картона, перпендикулярный к проводу. Тут, казалось бы, не о чем и говорить.

Но представим себе, что в это магнитное поле мы поместили квадратную проводящую рамку площадью $a \times a$, в которой течет ток $I_р$ (рис.1). Пусть две стороны рамки параллельны току, а размеры рамки много меньше расстояния r до провода, т.е. $a \ll r$. Поскольку магнитное поле, согласно выбранной геометрии, перпендикулярно всем сторонам рамки, на каждую сторону будет действовать сила Ампера, пропорциональная индукции B магнитного поля, порожденного током I, длине стороны рамки a и текущему в ней току $I_р$. Рассмотрим эти силы.

На сторону рамки AK, находящуюся на расстоянии r от провода, действует сила, направленная в сторону провода

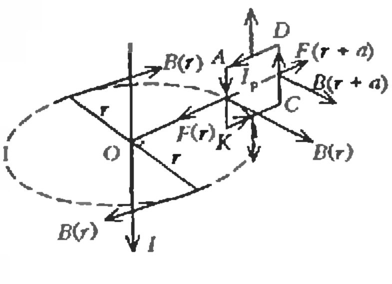


Рис. 1

и равная $F(r) = I_р aB(r)$ (предполагается, что читатель при помощи правил буравчика и правой руки уже сообразил, куда направлены векторы $\vec{B}$, $\vec{I}a$ и $\vec{F}$). На сторону CD, в которой ток, естественно, противоположен по направлению току в AK, действует и противоположно направленная сила, равная $F(r+a) = I_р aB(r+a)$. Эта сила отличается от $F(r)$, поскольку индукция магнитного поля зависит от расстояния до провода с током I. (Причем есть серьезное подозрение, что B уменьшается с ростом r.) А вот силы, действующие на стороны рамки AD и KC, в точности компенсируют друг друга (предполагается, что рамка не деформируется под действием этих «распирающих» сил). Значит, результирующая сила, действующая на рамку с током $I_р$, перпендикулярна проводу с током I и равна алгебраической сумме двух сил, действующих на стороны AK и CD:

$$F = F(r+a) - F(r) = I_р a\left(B(r+a) - B(r)\right) =$$

$$= I_р a^2\frac{\Delta B}{a}. \quad (1)$$

Здесь через ΔB обозначено приращение индукции поля B на расстоянии $a \ll r$.

Что же мы получили? Что маленькая рамка с током $I_р$, лежащая в одной плоскости с прямым проводом с током I, притягивается к этому проводу с силой, пропорциональной току в рамке, ее площади и «скорости» изменения модуля индукции магнитного поля с расстоянием от прямолинейного провода ($\Delta B/a$). Но взрослые физики не говорят так много слов. Потому что они заранее ввели некоторые определения. Так, произведение $I_p a^2$ они назвали магнитным моментом тока $\vec{p}_m$. И не случайно, потому что линии вектора магнитной индукции $\vec{B}$ от маленькой рамки с током очень похожи на линии вектора напряженности $\vec{E}$ электростатического поля, порожденного электрическим диполем $\vec{p}_e$, конечно, на больших расстояниях (в смысле $r \gg a$), что мы уже и предполагали с самого начала. На рисунке 2 качественно изображены картины линий векторов $\vec{B}$ и $\vec{E}$ в меридиональной плоскости. А отношение $\Delta B/a = \Delta B/\Delta r$ физики назвали *градиентом* модуля магнитного поля. Теперь вы можете гораздо короче выразить словами мысль, записанную в соотношении (1), но дело не в словах.

Дело в том, что рамка может быть любой формы (круглая, треугольная...). И вообще это может быть не рамка, а маленький магнитик (например, стрелка компаса для Дюймовочки). И внешнее магнитное поле $\vec{B}$ может быть порождено не прямым током, а каким-то другим способом. Но в любом случае сила, действующая на магнитик, помещенный во внешнее неоднородное магнитное поле, будет пропорциональна магнитному моменту тока и градиенту индукции магнитного поля. Именно эта сила, например, втягивает правильно ориентированный магнитик в соленоид с током и препятствует попыткам вынуть его оттуда.

Однако вернемся к прямому току. Интуитивно ясно, что индукция его магнитного поля как-то убывает с расстоянием. А как именно — об этом говорит один из законов Максвелла: если умножить значение индукции $B(r)$ на длину окружности $2\pi r$, то это произведение будет пропорционально току I, породившему магнитное поле:

$$B(r)\cdot 2\pi r = \mu_0 I .$$

Здесь введен еще коэффициент пропорциональности μ_0, чтобы все было в порядке с размерностями в обеих частях равенства (в единицах СИ). Не будем обращать внимание на этот коэффициент — не в нем сейчас дело, — хотя потом, когда вы станете большими, вы вспомните и поймете, что это одна из фундаментальных констант. Сейчас же важно другое. Можно сказать, что мы записали некий закон сохранения: как бы далеко мы ни удалились от прямого (бесконечного) провода, произведение $2\pi r\cdot B(r)$ остается постоянным (тут можно упомянуть, что физики называют это произведение *циркуляцией* магнитного поля вдоль окружности). Итак, индукция магнитного поля, порожденного прямым бесконечным током, обратно пропорциональна расстоянию от него:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} .$$

Тогда как же записать отношение $\Delta B/\Delta r$? Кто знает, что такое производная, сразу продифференцирует полученную зависимость по радиусу и напишет

$$\frac{\Delta B}{\Delta r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} .$$

А кто не знает производную, может записать приращение обратного радиуса подробнее:

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r+\Delta r} - \frac{1}{r} = \frac{r-r-\Delta r}{(r+\Delta r)r} = -\frac{\Delta r}{r^2}$$

(в последнем выражении справа мы пренебрегли в знаменателе величиной Δr, считая ее малой по сравнению с самим r — ведь с самого начала мы считали, что $a = \Delta r \ll r$).

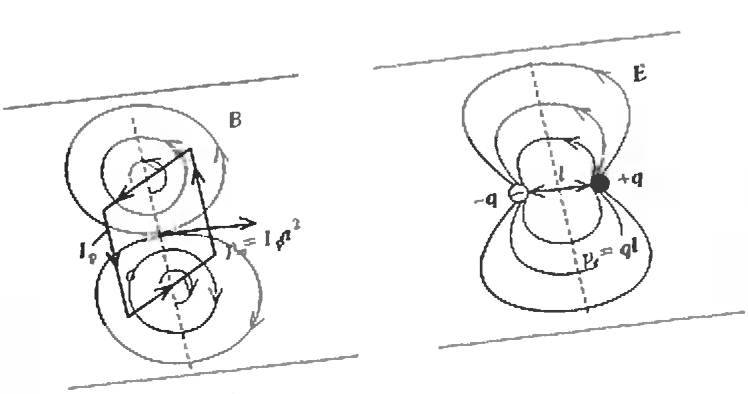


Рис. 2

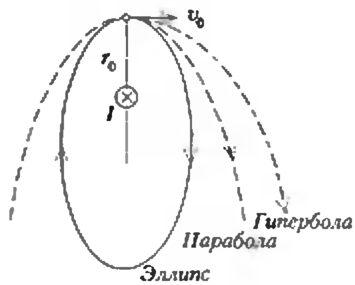


Рис. 3

Пусть теперь наша маленькая рамка с током (или магнитик) имеет массу m и в некоторый момент времени движется со скоростью $\vec{v}_0$ перпендикулярно прямому току I, находясь при этом на расстоянии r_0 от него. А кругом вакуум. Как она будет двигаться далее?

Мы знаем уже, что на нее действует притягивающая сила, обратно пропорциональная квадрату расстояния до провода. Где еще встречаются подобные силы? Да всюду. Согласно закону всемирного тяготения Ньютона, любые две материальные точки притягиваются друг к другу с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$F_{\text{Н}} = -\frac{m_1 m_2}{r^2} G .$$

(Конечно, закон Ньютона описывает силу, действующую между двумя притягивающимися точками, как бы они ни были расположены в пространстве. В случае же тока и магнитика сила взаимодействия всегда лежит в плоскости, перпендикулярной току.) А согласно закону Кулона, два заряда противоположных знаков тоже притягиваются друг к другу с силой, обратно пропорциональной расстоянию между ними:

$$F_{\text{К}} = -\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} .$$

Значит, наша задача уже решена: рамка с током или магнитик будут двигаться вокруг прямого провода с током, как все тела в окрестности Солнца (рис.3) — либо по эллипсам, как планеты (если скорость v_0 не очень велика), либо по параболе или гиперболе, как залетная комета (если v_0 достаточно велика).

Таким образом, обсуждаемый процесс мы можем свести к рассмотрению процесса совсем другой физической природы (в данном случае — к решению задачи Кеплера), основываясь лишь на одинаковости уравнений, описывающих эти процессы. Поиски физических аналогий — очень увлекательное и практически полезное занятие.

Не пора ли воскликнуть: как, однако, мир един!

Но, как всегда, после первых спазмов радости, связанных с интересной находкой, нужно оглядеться — не забыто ли чего? Ну конечно, забыто.

Во-первых, успевает ли плоскость рамки с током в каждой точке своей траектории разворачиваться строго перпендикулярно линиям магнитной индукции? (Почему вообще возникает такой поворот, можно разобраться подробнее с помощью следующей заметки «Из глубин Вселенной».) Ведь рамка обладает массой и размерами (это — не точка!), значит, нужно учитывать свойство инертности при попытке повернуть рамку вокруг оси.

Во-вторых, если со временем изменяется расстояние от центра рамки до провода, изменяется и поток магнитной индукции через плоскость рамки. А это, как известно, должно бы вызвать в самой рамке ЭДС индукции, которая может изменить ток, что приведет к появлению ЭДС самоиндукции, ..., тока самоиндукции, стремящегося противодействовать изменению магнитного потока от провода.

В третьих, это последнее обстоятельство должно также стремиться изменить и ток в проводе (явление взаимной индукции).

В четвертых...

Но лучше остановиться и сказать, что развитая нами теория верна при условии, если всеми этими эффектами можно пренебречь.

Из глубин Вселенной

А. СТАСЕНКО

Медленный шопот раздался в его ушах... Словно тихая молния, пронзил его сердце далекий голос, повторявший печально на неземном языке:

—Где ты, где ты, где ты, Сын Неба?

А.Н.Толстой. Аэлита

КОГДА ученые задумались о возможности радиосвязи с внеземными цивилизациями, среди множества вопросов возник и такой: каким образом представители различных звездных систем могли бы сообщать друг другу информацию, например о своих собственных размерах. Что подумают, скажем, разумные жители систем Альфа Центавра или Тау Кита, если мы выразим свой рост в футах или расстояние между ушами — в локтях? Едва ли им известны эти единицы измерения — тем более что неизвестно, есть ли у них вообще уши, локти или ступни (футы). Не легче обстоит дело и с метрами — ибо это сугубо земная единица длины. И с другими тоже. Следовательно, можно ожидать, что за единицу длины разумные межзвездные корреспонденты должны были бы выбрать некоторую объективную длину, во-первых, одинаковую во всех частях Вселенной и, во-вторых, само понятие о которой должно возникнуть только при определенном уровне развития цивилизации (по крайней мере, когда у последней уже появились радиотелескопы) — а иначе зачем с ней и связываться?

И тут ученые вспомнили о длине волны $\lambda = 21$ см, излучаемой нейтральным атомарным водородом. Но — все по порядку.

Еще в 1933 году были обнаружены радиоволны, идущие от центра Галактики, в широком диапазоне длин волн. Директор Лейденской обсерватории Я.Оорт, высоко оценив это открытие, добавил, однако, что неплохо бы найти особую радиочастоту, которая сыграла бы в радиоастрономии такую же роль, как спектральные линии в оптике. И его молодой студент Ван де Хюлст в 1944 году нашел такую частоту: $\nu = 1420$ МГц, что и соответствует длине волны $\lambda = 21$ см.

Но что значит «нашел»? Не споткнулся же он о нее на тротуаре Лейдена? Прежде всего, он знал, где искать — конечно, в спектре излучения водорода, которого во Вселенной очень много. Далее, она не должна принадлежать к ультрафиолетовому, видимому, инфракрасному диапазонам спектра — иначе какая же это радиочастота? Потом желательно, чтобы она не генерировалась процессами на Земле — чтобы не было помех... Наверное, что-то в этом роде и думал студент.

Как известно, энергия электрона в атоме может принимать только дискретный набор значений $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, т.е. каждый энергетический уровень имеет свой номер, выражаемый натуральным числом. И если электрон переходит из энергетического состояния n в состояние m, то излучается электромагнитная волна, частота которой ν_{nm} или длина волны λ_{nm} определяются соотношением

$$\nu_{nm} = \frac{E_n - E_m}{h} = \frac{c}{\lambda_{nm}}, \qquad (1)$$

где $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме. Понятно, что в случае излучения должно выполняться условие $E_n > E_m$, т.е. электрон должен переходить в состояние с меньшей энергией. Если вы рассмотрите кулоновское (электростатическое) притяжение электрона и протона в атоме водорода и учтете правило квантования Бора, то получите радиусы орбит электрона (в частности, нам пригодится $r_1 = 0{,}5$ Å) и дискретный набор оптических частот согласно формуле (1), например серию Бальмера (при $m = 2$).

Однако электрон и протон взаимодействуют не только электростатически. Оказывается, каждый из них похож еще

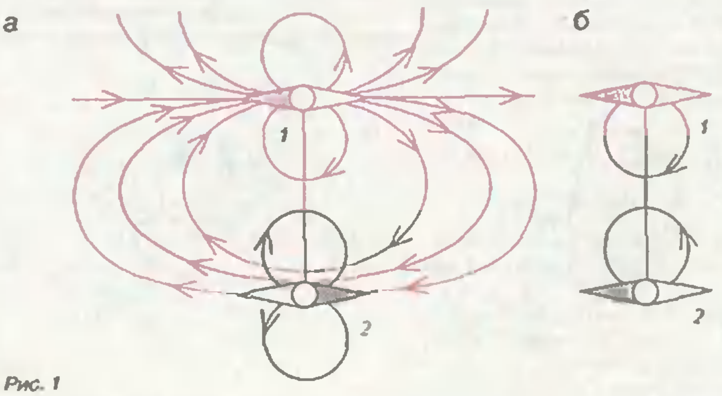


Рис. 1

и на маленький магнитик. Значит, их взаимодействие будет похоже и на взаимодействие двух магнитных стрелок (рис.1). Если стрелки расположить рядом, то (в отсутствие магнитного поля Земли) они развернутся антипараллельно: каждая из них расположится вдоль магнитного поля другой стрелки. На рисунке 1,*а* и изображено это устойчивое положение равновесия (состояние *а*). Если мы, закрепив стрелку *1*, насильно развернем стрелку *2* на 180° (назовем это состояние *б*) и затем предоставим самой себе, то она обязательно примет прежнее положение. Это означает, что в состоянии *а* потенциальная энергия стрелки *2* в магнитном поле стрелки *1* меньше, чем в состоянии *б*: $E_а < E_б$, хотя расстояния между их центрами одинаковы в обоих случаях. И если на месте этой нижней стрелки представить себе электрон-магнитик, то, согласно формуле (1), он должен излучать электромагнитную волну при таком «перевороте» без изменения расстояния до верхней стрелки (т.е. «радиуса орбиты»).

Конечно, эти макроскопические образы дают только грубый намек на принципиально квантово-механическое явление — излучение радиоволны атомом водорода при «опрокидывании» магнитного момента электрона $\vec{\mu}_e$ относительно магнитного момента ядра (протона) $\vec{\mu}_p$. Но продолжим. Прежде всего, что такое магнитный момент? Уже ясно, что это должен быть некий вектор — ведь при повороте магнитной стрелки на какой-то угол вся картина ее магнитного поля поворачивается на тот же угол. А как описать «силу» магнита, как описать численно тот факт, что один магнит «сильнее» другого?

Согласно гипотезе Ампера, магнитное поле стрелки можно объяснить циркулирующими внутренними электрическими токами. Представьте себе для простоты эти токи текущими по квадратной рамке (рис.2). Вектор магнитного момента верхней магнитной стрелки (верхнего контура с током) $\vec{\mu}_1$ направлен так, что с его вершины ток I_1, создающий магнитное поле стрелки, направлен против часовой стрелки. (Такой выбор направлений соответствует так называемой правой системе координат, принятой в настоящее время для описания законов физики.)

Найдем магнитное поле, порождаемое током I_1 на расстоянии r, много большем, чем размер рамки ($r \gg a$). Как известно из электростатики, величина напряженности электрического поля точечного заряда q на расстоянии r равна $E \sim q/r^2$ (закон Кулона). Точно так же в магнитостатике величина магнитного поля, порожденного «точечным» участком тока (ведь $a \ll r$), равна $B \sim Ia/r^2$ (закон Био – Савара – Лапласа). А чтобы записать эти зависимости в виде равенств, ставят еще множители, зависящие от выбранной системы единиц — например $1/(4\pi\varepsilon_0)$ в системе СИ для закона Кулона.

Далее, магнитное поле на расстоянии r порождают все четыре участка с током рамки *1*, поэтому получаем

$$B_1 \sim \frac{I_1 a^2}{r^3}.$$

Вот тут уже видна и величина магнитного момента: $\mu_1 = I_1 a^2$. Если мы выберем систему СИ, то в полученной формуле нужно поставить еще множитель 10^{-7}. Итак, поле магнита с моментом $\vec{\mu}_1$ подобно полю рамки площадью a^2 с током I_1, и его индукция на большом расстоянии равна

$$\vec{B}_1(r) = -\frac{\vec{\mu}_1}{r^3}\cdot 10^{-7}. \qquad (2)$$

Знак «минус» указывает, что поле в рассматриваемой точке противоположно направлению вектора магнитного момента, создающего это поле.

Пусть теперь в этом месте находится вторая рамка с током I_2 («в этом месте» означает, что центр второй рамки расположен на расстоянии r от центра первой рамки, но размер ее конечен — пусть тоже равен a и тоже много меньше r). Легко убедиться, что положением равновесия рамки *2* в поле рамки *1* является такое положение, при котором ток I_2 направлен противоположно I_1, или вектор магнитного момента $\vec{\mu}_2$ направлен вдоль поля $\vec{B}_1$, созданного первой рамкой. Для этого повернем плоскость рамки *2* на некоторый угол α по отношению к вертикали (см. рис.2). Согласно закону Ампера, на верхнюю сторону рамки действует сила $F_\uparrow = B_1 I_2 a$, на нижнюю — сила $F_\downarrow = -B_1 I_2 a$, и они стремятся развернуть рамку в положение $\alpha = 0$, что и требовалось доказать.

А какую работу нужно совершить для поворота рамки *2* на угол α? Из рисунка видно, что нужно работать против сил $F_\uparrow$ и $F_\downarrow$ на двух участках пути длиной $\Delta r = a(1-\cos\alpha)/2$ каждая. Значит, искомая работа равна

$$A = 2B_1 I_2 a \frac{a}{2}(1-\cos\alpha) = I_2 a^2 B_1 (1-\cos\alpha).$$

И снова видим знакомое произведение $I_2 a^2$. Теперь-то мы уже знаем, что это модуль вектора магнитного момента $\vec{\mu}_2$! Поэтому с учетом равенства (2) работу можно записать так:

$$A = \mu_1\mu_2\cdot 10^{-7}\,\frac{1-\cos\alpha}{r^3}.$$

Видно, что совершенная нами работа зависит от угла поворота рамки *2*. Нам особенно интересны случаи $\alpha = \pi$ и $\alpha = 0$, когда векторы магнитных моментов параллельны или антипараллельны. При $\alpha = \pi$ имеем $1 - \cos\alpha = 1 - (-1) = 2$, а при $\alpha = 0$ имеем $1 - \cos\alpha = 1 - 1 = 0$. Следовательно, разность значений потенциальной энергии повернутой рамки *2* в поле рамки *1* для этих двух положений равна

$$\Delta E = \frac{2\mu_1\mu_2}{r^3}\,10^{-7}.$$

А теперь предположим, что эти наши макроскопические образы применимы для описания системы протон-электрон (нейтральный атом водорода). В справочнике по физике можно найти их магнитные моменты:

$$\mu_1 = \mu_p = 1{,}4\cdot 10^{-26}\ \text{А}\cdot\text{м}^2,$$

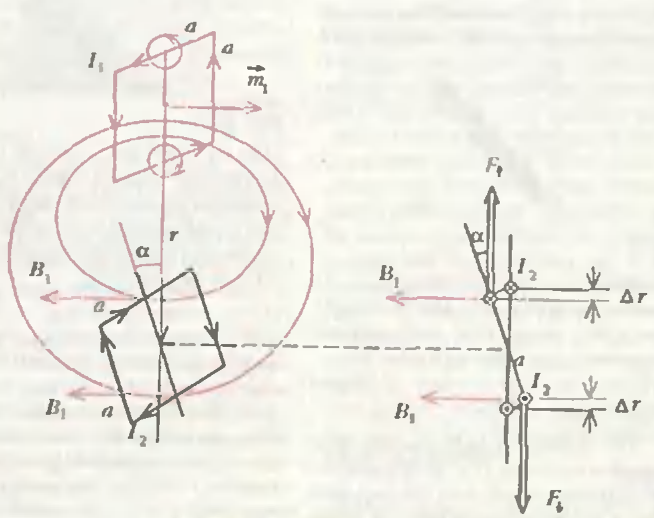


Рис. 2

$$\mu_2 = \mu_e = 9{,}3\cdot 10^{-24}\ \text{А}\cdot\text{м}^2$$

(видно, кстати, что электрон как магнит намного «сильнее» протона). Расстояние между ними — это радиус орбиты основного состояния (мы его уже выписывали) $r_1 = 0{,}5\cdot 10^{-10}$ м. Тогда, согласно формуле (1), получим

$$\lambda = \frac{hcr_1^3}{2\mu_e\mu_p\cdot 10^{-7}} \le 1\ \text{м}.$$

Конечно, это не точно 21 см, но совсем неплохо, учитывая приближенность классического подхода к такому квантово-механическому явлению, как взаимодействие моментов электрона и ядра. Во всяком случае это радиолиния. В лабораторных экспериментах эту линию получить трудно. Во-первых, трудно получить сам атомарный водород, поскольку при столкновениях атомы будут сливаться в молекулы. Можно, конечно, заставить молекулы, наоборот, диссоциировать на атомы, например нагревая газ до нескольких тысяч градусов. Но это будет газ из возбужденных атомов, а нам они нужны в основном, энергетически наинизшем состоянии. Да и ждать спонтанного поворота магнитного момента электрона долговато (это происходит один раз в 11 миллионов лет). Но в масштабах Вселенной на любом луче зрения находятся миллионы миллиардов триллионов... атомов водорода. И поэтому независимо от того, есть ли разумная жизнь еще где-либо, исследования свечения неба на длине волны = 21 см (или частоте ν = 1420 МГц) имеют особое значение, так как водород — наиболее распространенный элемент во Вселенной. Радионаблюдения нейтрального водорода (спектроскописты обозначают его HI) позволили найти распределение плотности, температуру межзвездной среды (она оказалась порядка 100 К), проекцию скорости движения излучающих масс на луч зрения. Удалось проследить расположение спиральных рукавов нашей Галактики и определить скорость вращения в зависимости от расстояния до центра.

В отличие от электромагнитных волн оптического диапазона (т.е. видимого света), длина которых $\lambda \sim 0{,}35 - 0{,}7$ мкм сравнима с размерами частиц межзвездной пыли, радиоизлучение на волне 21 см почти не поглощается пылью, что дает возможность «проникать» далеко в область ядра Галактики и даже по другую сторону от него. (Понятно почему: каждая пылинка под действием электрического поля электромагнитной волны поляризуется и колеблется в «такт» с возбуждающим полем волны. Таким образом, она превращается в микроантенну, переизлучающую энергию волны во все стороны. И если размер этой «антенны» сравним с длиной падающей волны, это рассеяние энергии происходит наиболее жадно. А если пылинка-антенна много меньше длины волны, им просто нет дела друг до друга.)

Итак, если вы ждете сообщений от далекой Аэлиты — ждите его на длине волны 21 сантиметр...

ОЛИМПИАДЫ

Избранные задачи Московской физической олимпиады

9 класс

Первый тур

1. Закрытая трубка длиной l, полностью заполненная жидкостью, составляет угол α с вертикальной осью, проходящей через ее нижний конец (рис.1).

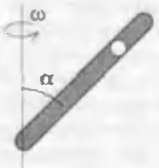


Рис. 1

В жидкости плавает легкая пробка. До какой угловой скорости нужно раскрутить трубку вокруг оси, чтобы пробка погрузилась до середины трубки?

А.Якута

Второй тур

2. На вершине клина массой M с высотой h и углами α и β при основании удерживаются два небольших тела одной и той же массы m (рис.2). Клин стоит на гладкой горизонтальной плоскости. После освобождения тела соскальзывают с клина в разные стороны и застревают внизу в специальных улавливателях, установленных в конце каждой из наклонных плоскостей клина. На какое расстояние сдвинется клин после соскальзывания тел?

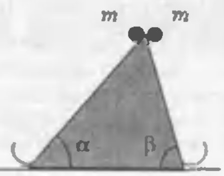


Рис. 2

М.Семенов

3. Через скользкое круглое бревно радиусом R, ось которого горизонтальна, перекинута невесомая веревка. К концам веревки прикреплены груз и тонкий однородный жесткий стержень (рис.3). В положении устойчивого равновесия стержень составляет с горизонтом угол $\alpha = 30°$, расстояние от конца стержня, к которому прикреплена веревка, до точки касания стержня и бревна равно $R/\sqrt{2}$. Найдите отношение масс груза и стержня.

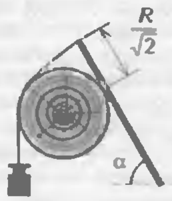


Рис. 3

С.Варламов

10 класс

Первый тур

1. Маленький упругий шарик бросают со скоростью v = 1 м/с под углом α = 45° к горизонту. Коэффициент восстановления вертикальной составляющей скорости шарика после удара о горизонтальную плоскость, с которой производился бросок, составляет R = 0,99. На каком расстоянии от точки бросания шарик перестанет подпрыгивать, если горизонтальная составляющая его скорости не изменяется? (Коэффициентом восстановления называется отношение скорости после удара к скорости до удара.)

М.Виноградов

Второй тур

2. На полубесконечный гладкий стержень нанизано бесконечно много маленьких шариков. Массы шариков с нечетными номерами m, с четными $m + \delta m$, причем $\delta m \ll m$ (рис.4). В начальный момент времени, когда первый шарик запустили по направлению ко второму со скоростью v_0, расстояние между соседними шариками равнялось l_0, а все шарики, кроме первого, покоились. Через какое время скорость самого быстрого из шариков станет меньше $3/4v_0$? Все удары абсолютно упругие.

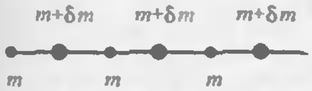


Рис. 4

О.Шведов

3. В вертикальном цилиндре под невесомым поршнем площадью $S = 10$ см^2 находится $m = 1$ г воды в жидком состоянии при температуре $t = 100$ °С. На поршень оказывается нормальное атмосферное давление. Поршень медленно нагружают массой $M = 1$ кг, затем сообщают системе тепло до полного испарения воды, медленно снимают груз и отбирают тепло до полной конденсации пара, возвращаясь, таким образом, в исходное состояние. Найдите разность температур воды при ее испарении и конденсации в этом процессе. Удельная теплота испарения воды при таких условиях $r = 2250$ Дж/г, удельный объем пара $v_п = 1700$ см^3/г. Считать, что нагружение и снятие груза происходят в адиабатических условиях.

М.Семенов

4. На вертикальной стене шарнирно закреплен однородный тонкий стержень массой m и длиной L (рис.5). На высоте L над местом закрепления стержня к стене привязана тонкая невесомая нерастяжимая нить, второй конец которой прикреплен к свободному концу стержня. Между стеной, стержнем и нитью натянута тонкая невесомая пленка жидкости, коэффициент поверхностного натяжения которой σ. Ускорение свободного падения g. Стержень находится в состоянии равновесия и расположен горизонтально. Найдите длину нити, считая, что она меньше $\pi L/2$.

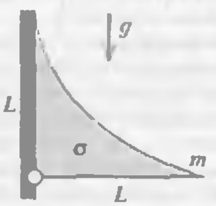


Рис. 5

А.Кулыгин

11 класс

Первый тур

1. Найдите полное сопротивление цепи, изображенной на рисунке 6.

К.Ванаг

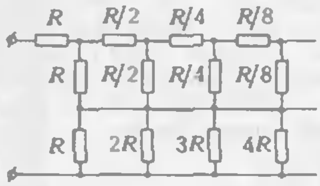


Рис. 6

2. В цилиндре с зеркальным дном и зеркальным поршнем находится один фотон, импульс которого направлен перпендикулярно поверхности поршня, а частота равна ω_0. Поршень начинают медленно передвигать и останавливают, когда объем сосуда уменьшается в k раз. Чему будет равна частота фотона? Считать, что длина волны фотона много меньше размеров сосуда, а импульс фотона много меньше импульса поршня.

О.Шведов

3. Стандартный компакт-диск представляет собой залитую прозрачным пластиком тонкую металлическую пластинку, на которую штамповкой нанесено множество микроскопических углублений, в каждом из которых закодирован один бит информации. Оцените длину волны лазера, используемого для считывания информации в дисководе для компакт-дисков, если известно, что максимальная полезная емкость одного диска $W = 640$ Мбайт, а его диаметр $D = 12$ см. Сколько информации можно было бы записать на такой диск при использовании лазера на нитриде галлия, излучающего свет с длиной волны $\lambda_1 = 0{,}36$ мкм? Компакт-диски имеют только одну рабочую сторону.

Д.Григорьев

Второй тур

4. В океане на расстоянии $L = 3$ км друг от друга находятся два корабля. Глубина под ними $H = 1$ км. На одном из кораблей произведен выстрел из орудия. Через какое время после выстрела гидроакустик второго корабля зафиксирует приход первого, второго и третьего звуковых сигналов? Скорость звука в воде $v_1 = 1{,}5$ км/с. Дно океана ровное и состоит из скальных пород, в которых скорость распространения звука $v_2 = 4{,}5$ км/с. Скорость звука в воздухе $v_3 = 333$ м/с. Волнение на поверхности океана отсутствует.

С.Варламов

5. КПД двигательной установки катера, состоящей из двигателя внутреннего сгорания и водометного движителя, равен η. Оцените нижнюю границу T_1 максимальной температуры в цилиндрах двигателя катера при его движении с постоянной скоростью, зная, что температура выхлопных газов T_2, площадь сечения водозаборной трубы водометного движителя S_1, площадь сечения выбрасываемой из движителя струи воды S_2, а в водозаборную трубу вода поступает со скоростью, равной скорости движения катера относительно воды.

В.Погожев

6. Если в трубку с площадью поперечного сечения S, вставленную через пробку в горлышко бутыли объемом V ($V \gg Sl$, где l — длина трубки), бросить шарик массой m, плотно (с очень маленьким зазором) входящий в трубку, то он начинает колебаться вверх-вниз, сжимая газ в бутыли, как пружину (рис.7). Найдите период этих колебаний, считая, что в бутыли находится идеальный одноатомный газ. Атмосферное давление снаружи p_0, трением и утечкой газа из бутыли при колебаниях шарика можно пренебречь.

М.Семенов

Рис. 7

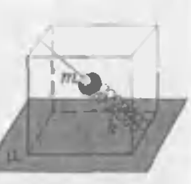


Рис. 8

7. Невесомый кубический ящик стоит на горизонтальному полу. Внутри ящика укреплен направляющий стержень, совпадающий с диагональю вертикального сечения ящика, проходящего через середины его противоположных вертикальных граней (рис.8). По направляющему стержню может без трения скользить маленький груз массой m, прикрепленный к нижнему концу стержня невесомой пружиной жесткостью k. В положении равновесия груз находится посередине стержня. Удерживая ящик на месте, груз смещают от положения равновесия на величину a_0, а затем одновременно отпускают и груз, и ящик. Найдите амплитуду установившихся колебаний груза, если коэффициент трения между ящиком и полом μ не слишком велик, так что ящик может двигаться только поступательно, не отрываясь от пола. Ускорение свободного падения g известно.

А.Якута

Публикацию подготовил М.Семенов

О квазипериодических последовательностях

Л. ЛЕВИТОВ, А. СИДОРОВ, А. СТОЯНОВСКИЙ

Задача, о которой здесь будет рассказано, уже появлялась на страницах «Кванта» (см. заметку «Задача для исследования» в №6 за 1989 г., с. 21). Автор заметки — Саша Сидоров, тогда еще ученик московской школы № 57, — решил задачу и сделал по ней доклад на XIX конференции школьников в Батуми (ноябрь 1988 г.). 1 июля 1990 года Саша трагически погиб. Мы посвящаем эту статью его памяти.

Вступление

Давайте немного поиграем с последовательностями из нулей и единиц. Наши последовательности могут быть как конечными, так и бесконечными (и даже бесконечными в обе стороны). Вот один из примеров такой бесконечной последовательности (она — периодическая): ...0110010110010110010110 ...

Более интересный пример последовательности можно построить вот как. Сначала определим преобразование Π, сопоставляющее каждой последовательности S новую последовательность $S' = \Pi(S)$. Оно состоит в том, что *одновременно* каждая единица в S заменяется на три цифры 100, а каждый нуль в S — на две цифры 10. Так, например, последовательность $S = 11010$ перейдет в последовательность $\Pi(S) = 1001001010010$. Естественно, последовательность $\Pi(S)$ получилась длиннее, чем S.

Возьмем теперь $S_0 = 1$ и положим $S_1 = \Pi(S_0)$, $S_2 = \Pi(S_1)$, $S_3 = \Pi(S_2)$, $S_4 = \Pi(S_3)$ и т.д. (см. таблицу). Видно, что каждая новая последовательность S_n является продолжением предыдущей.

Упражнение 1. а) Докажите это.

б) Каков аналог этого утверждения, если $S_0 = 0$, а не 1?

Таким образом, все последовательности S_n образуют начальные куски одной бесконечной последовательности S_∞. Это и есть наш первый интересный пример последовательности.

Упражнение 2. Докажите, что $\Pi(S_\infty) = S_\infty$.

Посмотрим на последовательность S_∞ повнимательнее. Во-первых, она непериодическая.

Упражнение 3*. Докажите это (или подождите доказательства на следующей странице).

Во-вторых, найдем среднюю плотность единиц в последовательности S_∞. Среднюю плотность c можно вычислить (с большой точностью) как $c \approx$ (число единиц в 1 км последовательности) / (число цифр в 1 км последовательности).

Однако если пользоваться строгим математическим языком, то плотность c есть *предел* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$, где c_n = (число единиц в S_n) / (число цифр в S_n). В таблице приведены несколько первых значений c_n. Видно, что числа c_n быстро стремятся к некоторому числу $c = 0.41421\ldots$ Вы уже догадались, что это за число? Правильно! Конечно, $c = \sqrt{2} - 1$.

Упражнение 4. Докажите это. (*Указание:* $c_{n+1} = \dfrac{1}{2 + c_n}$.)

Итак, мы получили пример последовательности с замечательным свойством: иррациональной плотностью единиц. Заметим, что бесконечные периодические последовательности таким свойством не обладают.

Упражнение 5. Докажите это утверждение (и выведите из него упражнение 3).

Следующие задачи (о дальнейших свойствах последовательности S_∞) могут быть пропущены при первом чтении.

Задача 1. *Докажите, что последовательность S_∞ квазипериодична, т.е. любой ее конечный кусок встречается в ней в бесконечном числе мест.*

Задача 2. *Занумеруем цифры последовательности S_∞ натуральными числами. Пусть m_i — номер i-й единицы в последовательности. Докажите явную формулу для m_i:*

$$m_i = \left[i\left(\sqrt{2}+1\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

($[a]$ — *целая часть числа* a).

Мы познакомились с первым обитателем диковинного мира квазипериодических последовательностей. В дальнейшем мы будем иметь дело с последовательностями, бесконечными в обе стороны.

n	S_n	c_n
0	1	1
1	100	1/3=0.33333...
2	1001010	3/7=0.42857...
3	10010101001010010	7/17=0.41176...
4	10010101001010010100101010010100101010010	17/41=0.41463...
5	...	41/99=0.414141...
6	...	99/239=0.41422...
7	...	239/577=0.41421...
8	...	577/1393=0.41421...

Постановка основной задачи

Пусть S — бесконечная в обе стороны последовательность из нулей и единиц. Существует ли последовательность S', для которой $\Pi(S') = S$? Очевидно, что S' существует тогда и только тогда, когда последовательность S разбивается на отрезки вида «100» и «10». Назовем такую последовательность S *удачной*, и обозначим $S' = \Pi^{-1}(S)$. Предположим теперь, что новая последовательность $\Pi^{-1}(S)$ сама оказалась удачной. Тогда существует последовательность S'' такая, что $\Pi(S'') = S'$, $\Pi(\Pi(S'')) = S$. В этом случае будем называть исходную последовательность S *очень удачной*. Читатель легко догадается, что последовательность S, для которой существует S''' с $\Pi(\Pi(\Pi(S'''))) = S$, мы назовем *очень-очень удачной*, и т.д. Наконец, введем самое важное

Определение. Последовательность S называется *хорошей*, если преобразование, обратное к преобразованию Π, применимо к ней бесконечное число раз. Иначе говоря, S хорошая, если найдутся такие последовательности S', S'', S''', ..., что $S = \Pi(S')$, $S' = \Pi(S'')$, $S'' = \Pi(S''')$ и т.д.

Основная задача, которой мы будем заниматься, состоит в том, чтобы перечислить все хорошие последовательности (*классифицировать* их). Разумеется,

Иллюстрация Л. Тишкова

мы не различаем последовательности, получающиеся друг из друга сдвигом.

Первый вопрос: существует ли хоть одна хорошая последовательность? Ответ на него дает

Упражнение 6. *Докажите, что если к бесконечной вправо последовательности S_∞ из Вступления приставить бесконечную влево последовательность из упражнения 1,б), то получится хорошая последовательность S, причем такая, что $\Pi(S) = S$.*

Следующий вопрос: есть ли другие хорошие последовательности, и сколько их? Попробуем сходу ответить на этот вопрос. Предположим, что S и T — две хорошие последовательности.

Упражнение 7. *Докажите, что любой конечный кусок S встречается в T, и наоборот.*

Представим себе, что последовательности S и T записаны на бумажных лентах, разложенных на бесконечном в обе стороны столе для заседаний. Представим также, что за столом сидит (бесконечная в обе стороны) комиссия, которой поручено выяснить, равны последовательности или нет. Если каждый член комиссии видит лишь конечные куски последовательностей, то, сколько комиссии ни биться над этой проблемой, ей не удастся найти различия между S и T.

Можно ли отсюда сделать вывод, что $S = T$? (Мы-то с вами можем охватить одним взглядом всю последовательность T и убедиться в том, что никаким сдвигом ее невозможно совместить с S.)

Итак, существуют ли различные хорошие последовательности?

Для ответа на этот и все остальные вопросы мы используем неожиданное и мощное средство — *клетчатую бумагу*.

Геометрическая интерпретация

Возьмем большой лист клетчатой бумаги. Введем на нем декартовы координаты (так, чтобы единицей измерения по осям был шаг решетки). Будем изображать наши последовательности в виде ломаных, проходящих по линиям решетки, по следующему правилу: если очередная цифра в последовательности 1, ломаная идет на один узел вправо, а если очередная цифра 0, то на один узел вверх (рис.1). Ломаную, соответствующую хорошей (удачной) последовательности, будем также называть хорошей (удачной).

Первое, что бросается в глаза при взгляде на фрагмент хорошей ломаной (см. рис.1) — хорошая ломаная поразительно напоминает прямую. Точнее, между ломаной и некоторой прямой нет узлов решетки. Ломаная как бы прижимается к прямой. Чтобы сказать кое-что об этой прямой, нужно в первую очередь вычислить ее угловой коэффициент k. Он, очевидно, примерно равен отношению

$k \approx$ (число вертикальных звеньев в 1 км ломаной) / (число горизонтальных звеньев в 1 км ломаной)=

=(число нулей в 1 км последовательности) / (число единиц в 1 км последовательности) $\approx \frac{1-c}{c}$,

где c — средняя плотность единиц. Мы знаем, что $c = \sqrt{2} - 1$ (ср. упр. 4, 6, 7); следовательно, $k = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}$.

Это нестрогое рассуждение-прикидка (в математике такие рассуждения называются *эвристическими*) подсказывает, как построить много примеров хороших последовательностей:

Теорема 1. *Пусть l – прямая с уравнением $y = \sqrt{2}x + b$ (b – любое), $\Lambda_B = \Lambda_B(l)$ и $\Lambda_H = \Lambda_H(l)$ — ломаные, прижимающиеся к l сверху и снизу. Тогда ломаные Λ_B и Λ_H хорошие.*

Идея доказательства. Прежде всего, Λ_B и Λ_H удачны.

Упражнение 8. Докажите это.

Мы покажем, что ломаные $\Pi^{-1}(\Lambda_B)$ и $\Pi^{-1}(\Lambda_H)$ также прижимаются снизу и сверху к некоторой прямой l' с уравнением $y = \sqrt{2}x + b'$ (для некоторого b'). Отсюда будет следовать, что $\Pi^{-1}(\Lambda_B)$ и $\Pi^{-1}(\Lambda_H)$ удачны, и т.д.

Доказательство. Соединим концы участков «100» и «10» наших ломаных отрезками (на рисунке 2 они выделены красным цветом). Получились две новые ломаные, $\bar{\Lambda}_B$ и $\bar{\Lambda}_H$. Их звенья лежат на *новой решетке*, состоящей из прямых с угловым коэффициентом 1 и 2 (узлы у новой решетки те же, что и у старой). Теперь представим себе, что рисунок 2 сделан на прозрачной резиновой пленке. Растянем пленку так, чтобы новая решетка стала обычной, прямоугольной. Теперь еще перевернем пленку (рис.3). После этих преобразований ломаные $\bar{\Lambda}_B$ и $\bar{\Lambda}_H$ перейдут как раз в $\Pi^{-1}(\Lambda_B)$ и $\Pi^{-1}(\Lambda_H)$ (потому что участку «100» старой ломаной Λ_H отвечает горизонтальное звено новой ломаной, а участку «10» — вертикальное звено; аналогично для Λ_B).

Преобразование F координатной плоскости, которое мы совершили (растяжение и переворачивание), переводит точку с координатами (x, y) в точку

$$F(x,y) = (-x + y, 2x - y); \qquad (*)$$

в частности, $F(1,2) = (1,0)$; $F(1,1) = (0,1)$. Преобразование F имеет неподвижной точкой начало координат, переводит прямую линию в прямую и сохраняет отношения длин отрезков на прямой.

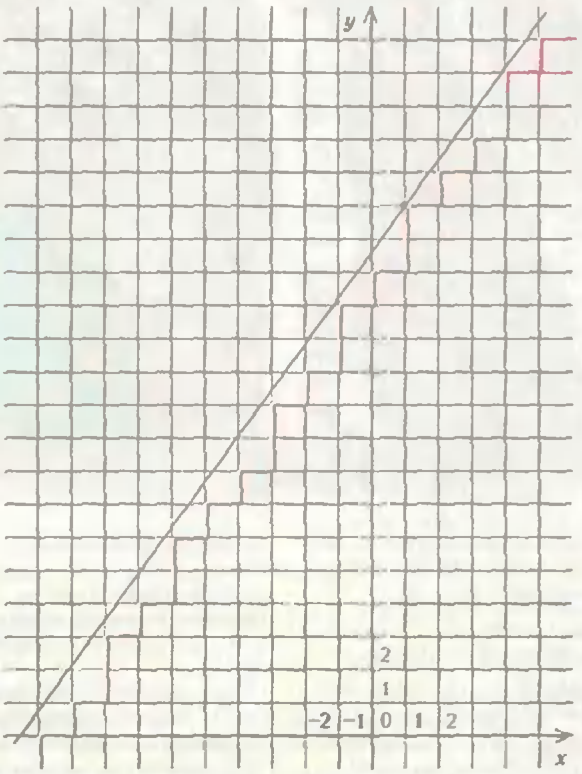
Упражнение 9. Докажите эти свойства преобразования F, исходя из формулы $(*)$.

Такие преобразования плоскости называются *линейными*.

Упражнение 10. Докажите, что при преобразовании F прямая l с уравнением $y = \sqrt{2}x + b$ переходит в прямую l' с уравнением $y = \sqrt{2}x + b'$, и найдите число b'.

Осталось заметить, что между ломаными $\Pi^{-1}(\Lambda_B)$, $\Pi^{-1}(\Lambda_H)$ и прямой l' на рисунке 3 нет узлов решетки (как и между ломаными $\bar{\Lambda}_B$, $\bar{\Lambda}_H$ и прямой l на рисунке 2), т.е. ломаные $\Pi^{-1}(\Lambda_B)$ и $\Pi^{-1}(\Lambda_H)$ прижимаются к прямой l'.

Теорема доказана.



...101001010010101001010010100101010010...

Рис. 1

Решение основной задачи

Оказывается, верна и обратная теорема:

Теорема 2. *Пусть Λ — хорошая ломаная. Тогда найдется прямая l с уравнением $y = \sqrt{2}x + b$, к которой ломаная Λ прижимается сверху или снизу.*

Доказательство теоремы мы отложим до конца этого раздела, а пока посмотрим, что она дает для классификации хороших последовательностей (или ломаных). Нам остается лишь выяснить, какие из ломаных вида $\Lambda_B(l)$ и $\Lambda_H(l)$ дают одинаковые последовательности (т.е. совмещаются параллельным переносом).

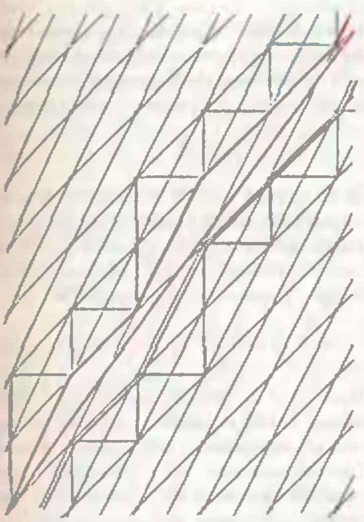


Рис. 2

Упражнение 11. Докажите, что а) прямая l содержит узел решетки тогда и только тогда, когда $b = m + n\sqrt{2}$ для некоторых целых m, n;

б) если прямая l не содержит узлов решетки, то ломаные $\Lambda_B(l)$ и $\Lambda_H(l)$ эквивалентны – верхняя получается из нижней переносом на вектор $(-1,1)$;

в) пусть l_1 и l_2 – две прямые, $y = \sqrt{2}x + b_1$ и $y = \sqrt{2}x + b_2$ – их уравнения. Тогда ломаные $\Lambda_B(l_1)$ и $\Lambda_B(l_2)$ эквивалентны, если и только если $b_1 - b_2 = m + n\sqrt{2}$, где m, n целые;

г)* ломаные $\Lambda_B(l_0)$ и $\Lambda_H(l_0)$ для прямой l_0 с уравнением $y = \sqrt{2}x$ неэквивалентны.

Итак, в результате мы получили: каждому числу b ставится в соответствие хорошая последовательность (кроме чисел вида $b = m + n\sqrt{2}$, которым соответствуют две различные хорошие последовательности), причем две последовательности эквивалентны тогда и только тогда, когда их числа b_1 и b_2 отличаются на величину вида $m + n\sqrt{2}$. Это и есть полное решение задачи классификации.

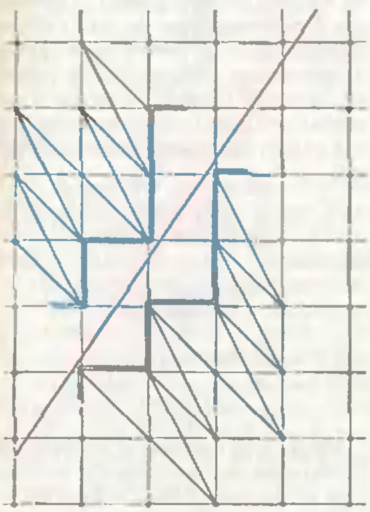


Рис. 3

Упражнение 12. а) Докажите, что множество хороших последовательностей бесконечно.
б) Найдите явную формулу для номера i-й единицы в последовательности с числом b.
в) Найдите число b для последовательности S из упражнения 6.

Наконец, докажем теорему 2.

Лемма. *Хорошая ломаная Λ может быть зажата в полосу между двумя прямыми с угловым коэффициентом $k = \sqrt{2}$, причем верхняя прямая получается из нижней переносом на вектор $(-1,1)$.*

Доказательство. Попробуем зажать ломаную Λ в такую полосу (мы будем называть ее *полосой стандартной ширины*): возьмем прямую l_1 с $k = \sqrt{2}$, проходящую очень высоко (выше ломаной Λ), и начнем двигать ее вниз до тех пор, пока не упремся в ломаную. (При этом может возникнуть парадоксальная ситуация: ломаная нигде не касается прямой, и в то же время прямую нельзя сдвинуть вниз, так как разные зубцы ломаной подходят к прямой сколь угодно близко.) То же самое проделаем снизу: возьмем прямую l_2 с $k = \sqrt{2}$, проходящую ниже ломаной, и придвинем вплотную к ломаной. Мы утверждаем, что полоса, в которую зажата ломаная, имеет не более чем стандартную ширину. Действительно, предположим, что полоса шире стандартной. Придвинем прямые l_1 и l_2 еще чуть-чуть ближе друг к другу. Теперь ломаная пересекает обе границы полосы, которая все еще шире стандартной. Рассмотрим конечный кусок ломаной, содержащий точки ее пересечения с обеими прямыми. Он не зажимается в полосу стандартной ширины. Но конечные куски у нашей ломаной те же, что и у какой-нибудь ломаной вида $\Lambda_H(l)$ (согласно упражнению 7), а ломаная $\Lambda_H(l)$ может быть целиком зажата в полосу стандартной ширины (докажите!). Мы пришли к противоречию. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Итак, возьмем ломаную Λ и зажмем ее между прямыми l_1 и l_2, как в лемме. Мы утверждаем, что тогда либо $\Lambda = \Lambda_H(l_1)$, либо $\Lambda = \Lambda_B(l_2)$, либо и то и другое.

Упражнение 13. Докажите это.

Теорема 2 доказана.

Заключение

Пора подвести итоги. Мы познакомились с квазипериодическими последовательностями специального типа (связанного с преобразованием П). Кроме того, мы разобрались, как устроены ломаные, прижимающиеся к прямой с угловым коэффициентом $\sqrt{2}$.

Можно идти дальше двумя путями. Первый путь – рассматривать другие преобразования вместо П. Например, возьмем преобразование $\bar{\Pi}$, которое переводит 1 в $1\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ нулей}}$, а 0 в $1\underbrace{00\ldots0}_{n-1\text{ нулей}}$.

Задача 3. *Классифицируйте последовательности, хорошие относительно преобразования $\bar{\Pi}$. (Все полностью аналогично случаю преобразования П, только роль числа $\sqrt{2}$ играет число $\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2} - 1$.)*

Задача 4 (для исследования, т.е. авторы не знают, как ее решать). *Рассмотрите более общие преобразования вместо П (например, $1 \to \underbrace{11\ldots1}_{p\text{ единиц}}\underbrace{00\ldots0}_{q\text{ нулей}}$, $0 \to \underbrace{11\ldots1}_{r\text{ единиц}}\underbrace{00\ldots0}_{s\text{ нулей}}$, или другие такого типа) и классифицируйте соответствующие хорошие последовательности.*

Второй путь – рассматривать прямые с другими иррациональными угловыми коэффициентами k и изучать ломаные, прижимающиеся к этим прямым. Оказывается, структура ломаных зависит от того, как число $k + 1$ раскладывается в *цепную дробь*. Пример цепной дроби:

$$\sqrt{2} + 1 = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}.$$

Аналогично, можно представить число $k + 1$ в виде бесконечной дроби

$$n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{\ldots}}},$$

где n_i – натуральные числа. Цепные дроби – отдельная увлекательная тема. Мы не можем их обсуждать здесь (из-за нехватки места), а лучше отошлем заинтересованного читателя к статье Ю. Нестеренко и Е. Никишина «Очерк о цепных дробях» («Квант» №5 за 1983 год).

Итак, последняя

Задача 5. *Исследуйте, как устроены ломаные, прижимающиеся к прямым с иррациональным наклоном k. (Например, ясно, что такие ломаные можно разбить на куски вида $1\underbrace{00\ldots0}_{n_1\text{ нулей}}$ и $1\underbrace{00\ldots0}_{n_1-1\text{ нулей}}$, где $n_1 = [k + 1]$. Что получится, если заменить каждый кусок $1\underbrace{00\ldots0}_{n_1\text{ нулей}}$ на 1, а каждый кусок $1\underbrace{00\ldots0}_{n_1-1\text{ нулей}}$ на 0?)*

Всплывающий воздушный пузырек и закон Архимеда

Г. КОТКИН

ПРЕДСТАВЬТЕ себе, что вы готовитесь к экзамену по физике, расположившись на лесной опушке на берегу озера. Повторяя второй закон Ньютона, вы хотите применить этот закон к движению всплывающих со дна пузырьков газа. И тут начинается что-то странное...

Сила тяжести, действующая на пузырек, раз в тысячу меньше веса вытесняемой им воды (плотности воздуха и воды отличаются примерно в тысячу раз), т.е. архимедовой силы. Сила сопротивления при жидком трении, пропорциональная скорости пузырька, поначалу мала, поэтому ее учитывать не стоит (о роли силы сопротивления будет сказано дальше). Таким образом, ускорение определяется, в основном, архимедовой выталкивающей силой:

$$a = \frac{V\rho g - mg}{m} \approx \frac{V\rho g}{m}. \qquad (1)$$

Здесь m — масса пузырька, V — его объем, ρ — плотность воды. Пусть плотность газа ρ_0. Тогда $m = V\rho_0$ и

$$a \approx \frac{\rho}{\rho_0} g \approx 10^3 g.$$

Итак, ускорение пузырька порядка тысячи g. Это очень большая величина. Вспомним, что ускорение, которое приходится переносить космонавтам и летчикам, достигает нескольких g (скажем, до $10g$). Если снаряд будет двигаться в стволе длиной 1 м с таким ускорением, то он сможет взлететь на высоту $h = 1$ км (проверьте это самостоятельно); если внутрь нашего всплывающего пузырька попадет букашка, она будет раздавлена в таком «лифте»; и т.д. Поистине богатые возможности для изобретателей!

Впрочем, сидя на берегу озера, можно увидеть собственными глазами, что на самом деле ускорение пузырька вовсе не так велико. Вместо того чтобы сразу дать ответ на возникшую загадку, зададим еще одну.

Пусть вы без труда можете поднять пудовую гирю ($m = 16$ кг) на высоту 1 м. А что если приложить силу, равную весу этой гири, к камешку массой 1 г (или к копеечной монете) на пути тоже в 1 м? Нетрудно сообразить, что камешек после этого взлетит на высоту 16 км. (Сопротивление воздуха не учитываем. Ясно, что дело не в нем.) Что это — еще один фантастический проект? Нет, на этот раз разоблачить автора проекта совсем легко: поднимать придется не только камешек, но и собственную руку! К каждому ее грамму нужно приложить силу порядка 160 Н. Вся рука будет весить несколько тонн, и поднять ее не хватит сил. Таким образом, неподвижная или движущаяся с небольшим ускорением рука может приложить к грузу силу гораздо большую, чем рука, которая движется с большим ускорением.

Но ведь при движении воздушного пузырька в воде возникает аналогичная картина. Когда пузырек поднимается, некоторая масса воды устремляется вниз, заполняя освобожденное место. Пузырек взаимодействует с движущейся, а не с неподвижной водой. По-видимому, и сила, действующая со стороны воды на пузырек, зависит от ускорения самой воды. Закон Архимеда, записанный в обычном виде $F_{выт} = V\rho g$, неприменим к пузырьку, движущемуся ускоренно!

Оказывается, задача о пузырьке очень близка к задаче о движении грузиков, связанных переброшенной через неподвижный блок нитью (рис. 1). Нетрудно увидеть аналогию между ними. Действительно, один из грузиков (массой m) как бы играет роль пузырька, другой (массой M) — роль воды, а натяжение нити T — роль выталкивающей силы.

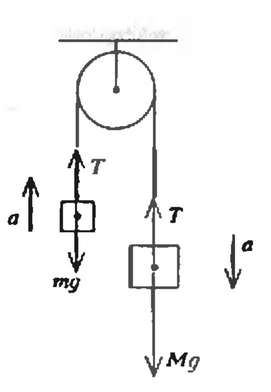


Рис. 1

Второй закон Ньютона в применении к грузику массой m можно записать так:

$$ma = T - mg. \qquad (2)$$

Если грузик массой m удерживать, то натяжение нити T окажется численно равным весу другого грузика Mg (весу «вытесненной» воды). Подставив $T = Mg$ в уравнение (2), получаем

$$a = \frac{M - m}{m} g \text{ (неверно!)}. \qquad (3)$$

При $M \gg m$ оказывается $a \gg g$. Этот вывод своей нелепостью похож на вывод об огромном ускорении пузырька (см. выражение (1)). Причина обеих ошибок одна и та же: необходимо учитывать движение грузика массой M и движение «вытесненной» воды. Напомним, что для правильного решения задачи о грузиках нужно записать еще уравнение второго закона Ньютона для грузика массой M:

$$Ma = Mg - T \qquad (4)$$

и решить систему уравнений (2) и (4). Отсюда

$$a = \frac{M - m}{M + m} g, \qquad (5)$$

$$T = \frac{2mM}{M + m} g.$$

При $M \gg m$ оказывается $a \approx g$, $T \ll Mg$, что вполне соответствует действительности.

Можно решить эту задачу и другим способом — воспользоваться законом сохранения энергии. При смещении грузика массой m вверх (и, соответственно, грузика массой M вниз) на расстояние h потенциальная энергия системы уменьшится на величину $Mgh - mgh$. Кинетическая энергия станет равной $mv^2/2 + Mv^2/2$, где v — скорость грузиков (начальную скорость считаем равной нулю). Приравняв изменения энергии:

$$Mgh - mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2},$$

находим

$$v^2 = 2\frac{M - m}{M + m} gh,$$

или (см. равенство (5))

$$v^2 = 2ah. \qquad (6)$$

Такая связь скорости и перемещения характерна для движения с постоянным ускорением. (В нашем случае $a = (M - m)g/(M + m)$.) Воспользуемся

Опубликовано в «Кванте» № 1 за 1976 год.

этим для решения задачи о движении тела в жидкости. Правда, привести полное решение задачи о воздушном пузырьке мы не сможем. Дело в том, что распределение скоростей жидкости вокруг пузырька слишком сложно (рис.2). Однако мы решим похожую задачу.

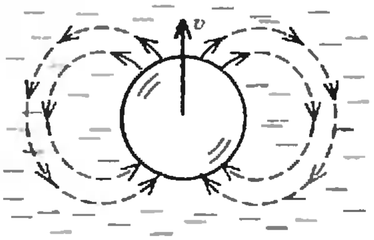


Рис. 2

Рассмотрим движение длинного стержня радиусом r, длиной l и массой m вдоль оси заполненной жидкостью плотностью ρ трубки радиусом $R \ll l$ (рис.3). В этом случае движение жидкости легко рассчитать. Вытесняемая верхней частью стержня жидкость смещается вниз и заполняет место, освобождаемое нижней частью стержня.

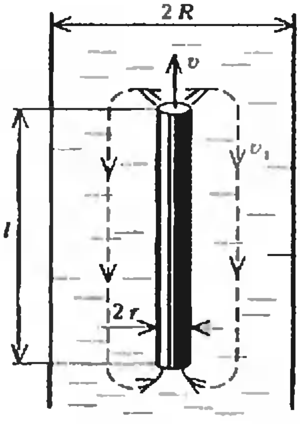


Рис. 3

Если исключить небольшие участки вблизи торцов стержня, то скорость жидкости всюду между стержнем и стенками трубки оказывается одной и той же. Обозначим через v скорость стержня, а через v_1 — скорость воды, движущейся между стержнем и стенками трубки, в тот момент, когда стержень поднялся на высоту h от уровня, на котором его скорость была равна нулю. Приравняв объем $\pi r^2 v\Delta t$ жидкости, вытесненной стержнем за малый промежуток времени Δt, объему $\pi\left(R^2-r^2\right)v_1\Delta t$ жидкости, прошедшей за это же время между стержнем и трубкой, находим

$$v_1 = \frac{r^2}{R^2-r^2}v.$$

За время, пока стержень поднимался на высоту h, масса жидкости, равная $V\rho$ ($V = \pi r^2 l$ — объем стержня), опустится на h, тогда уменьшение потенциальной энергии стержня и жидкости будет равно $V\rho gh - mgh$. Кинетическая же энергия системы равна $mv^2/2 + m_1v_1^2/2$, где m_1 — масса движущейся жидкости. Кинетическую энергию жидкости удобно записать в виде

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{\pi\left(R^2-r^2\right)l\rho}{2}v_1^2 =$$

$$= \frac{V\rho r^2}{2\left(R^2-r^2\right)}v^2 = \frac{\Delta m v^2}{2},$$

$$\text{где } \Delta m = \frac{V\rho r^2}{R^2-r^2}.$$

Воспользовавшись законом сохранения энергии, получим

$$V\rho gh - mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{\Delta m v^2}{2},$$

откуда

$$v^2 = 2\frac{V\rho - m}{m+\Delta m}gh.$$

Такой зависимости скорости от перемещения отвечает движение с ускорением (см. выражение (6)), равным

$$a = \frac{V\rho - m}{m+\Delta m}g. \qquad (7)$$

Следовательно, стержень движется так, будто бы его масса увеличилась на величину Δm, а выталкивающая сила осталась равной гидростатической архимедовой силе ($V\rho g$). Величину Δm называют присоединенной массой. Это чисто формальное, но удобное толкование равенства (7). Формула (7) получается из неправильной формулы (1) добавлением в знаменателе слагаемого Δm. (Отметим, что подобным же образом формула (5) получается из (3) добавлением в знаменателе слагаемого M.)

Силу $F_{выт}$, с которой движущаяся жидкость действует на стержень, теперь легко получить из второго закона Ньютона:

$$ma = F_{выт} - mg,$$

$$F_{выт} = m(g+a) = mg\frac{V\rho + \Delta m}{m+\Delta m}. \qquad (8)$$

В частности, если $m \ll \Delta m$, то $F_{выт} \approx \approx mg\frac{R^2}{r^2}$; при $R \sim r$ выталкивающая сила оказывается порядка веса стержня (и не имеет отношения к весу вытесненной воды). Если же $m \gg \Delta m$, то $F_{выт} \approx V\rho g$, т.е. возвращаемся к закону Архимеда в обычном виде.

Для шарика, в частности для пузырька, расчет дает такой результат. Кинетическая энергия жидкости равна $V\rho v^2/4$, где V — объем шарика, v — его скорость. Тогда присоединенная масса для пузырька составляет $\Delta m = V\rho/2$, т.е. она равна половине массы вытесненной воды. Пузырек всплывает с ускорением

$$a = \frac{V\rho - V\rho_0}{V\rho_0 + V\rho/2}g \approx 2g.$$

Выталкивающая сила приблизительно равна $F_{выт} \approx 3mg$, т.е. тройному весу неподвижного пузырька (и во много раз меньше веса вытесненной воды).

Теперь вспомним о силе сопротивления. Для пузырька газа в жидкости она определяется формулой $F_c = 12\pi\eta rv$, где r — радиус пузырька, v — его скорость, η — коэффициент вязкости среды.[1] С учетом силы сопротивления уравнение движения пузырька запишется так:

$$(m+\Delta m)a = V\rho g - mg - F_c. \qquad (9)$$

Очевидно, что F_c уменьшает ускорение (а значит, и скорость) пузырька по сравнению с тем случаем, когда мы не учитываем сопротивление жидкости. Однако, если $(4/3)\pi r^3\rho g \gg 12\pi\eta rv$, т.е. при $v \ll r^2\rho g/(9\eta)$, силой сопротивления можно пренебречь. Например, если речь идет о пузырьке радиусом r = 3 мм, движущемся в воде (ρ = 1 г/см^3, $\eta = 1{,}0\cdot10^{-2}$ г/(см·с)), то его скорость должна быть много меньше[2] величины $v_0 = r^2\rho g/(9\eta) = 10$ м/с. Прикинем, на каком пути h_0 пузырек достигнет такой скорости. Для грубой оценки воспользуемся равенством $v_0^2 = 2ah_0$, где $a = 3g$:

$$h_0 = \frac{v_0^2}{6g} \approx 1{,}5 \text{ м}.$$

Таким образом, на пути 1,5 м силой сопротивления можно пренебречь. При этом v_0 = 10 м/с — это предельная скорость, которой может достичь всплывающий пузырек газа в воде.

---

[1] *Приведенная формула справедлива при $\rho vr \gg \eta$. Если $\rho vr \ll \eta$, коэффициент 12π следует заменить на 4π. Для твердого шарика при $\rho vr \ll \eta$ коэффициент равен 6π (формула Стокса).*

[2] *Пузырек большего радиуса не может сохранять шарообразную форму (подобно падающей дождевой капле, деформируемой силой давления воздуха).*

Задачи с нефиксированными фигурами

Л.ШТЕРНБЕРГ

Когда в условиях задачи описана фигура, у которой не задано ни одного линейного размера, но форма которой явно определена (например, правильная пирамида), и требуется найти какие-то безразмерные величины (например, отношения), то такие задачи абитуриентов не смущают. То, что описанная в задаче фигура может быть побольше или поменьше, не важно, главное, что фигуру легко представить себе и легко понять ее геометрические свойства: например, куда проектируется высота пирамиды. Но вот мы встречаемся с задачей, где о форме фигуры дается самое смутное представление.

Задача 1. *В треугольной пирамиде OABC площадь основания ABC равна q, площадь грани OBC равна p, высота пирамиды, опущенная из вершины O, попадает в точку пересечения медиан основания. Найдите площадь сечения, проведенного через точку O и середины сторон AB и AC.*

Для того чтобы зафиксировать пирамиду, надо ввести шесть ее элементов, но по условиям задачи мы не можем надеяться больше чем на три уравнения (дано 3 условия). С другой стороны, нам надо найти не все 6 элементов, а некоторую композицию из них; это позволяет надеяться на успешный исход алгебраического подхода, однако на этом пути нам явно предстоит встретиться с «тяжелой» алгеброй с примесью тригонометрии. Поэтому здесь была бы полезна какая-то геометрическая идея.

Если посмотреть на решения подобных задач в различных пособиях, то, как правило, они начинаются фразой типа: «Возьмем точку на середине ребра BC, проведем из нее перпендикуляры к BC в плоскостях основания и грани OBC и отложим на них...». Одна эта фраза может привести читателя в шоковое состояние: «Ну почему, — думает он, — надо взять именно эту точку и провести такое странное построение? Как до этого можно додуматься?» На самом деле все очень просто: это любимый математиками прием, когда результат трехстраничных математических выкладок выносится вперед и предваряется словом «теорема». Попробуем восстановить пропущенные рассуждения.

Форма пирамиды не задана, но вряд ли она может быть любой. А какой она может быть? Попробуем определить те деформации, которые может выдержать фигура без нарушения условий задачи. Пусть нам дана некоторая пирамида (рис.1), удовлетворяющая условиям. Так

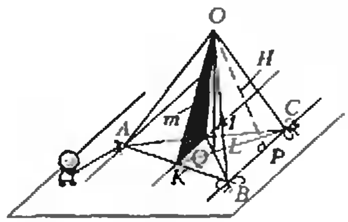


Рис. 1

как даны площади граней, имеющих общее ребро, есть смысл выражать их через длину этого ребра и высоты. Что будет, если изменить длину ребра BC? Изменятся высоты и наклон грани OBC, причем так, чтобы высота пирамиды по-прежнему попадала в точку пересечения медиан основания — это очень сложная деформация. Попробуем по-другому: зафиксируем ребро BC, тем самым фиксируются длины высоты основания h и высоты грани OBC — H. Теперь единственное, что мы можем сделать с основанием ABC — это сдвинуть точку A параллельно ребру BC (см. рис.1). Что при этом происходит с сечением? Отрезок KM, не меняя длину, смещается вдоль прямой, задаваемой отрезком KM. Высота сечения OKM не меняется (докажите!), значит, площадь сечения также не меняется — отлично: это то, что нам нужно! Но точка пересечения медиан «уезжает» из-под высоты; значит, надо соответственно переместить и точку O (нужные площади при этом не меняются — докажите!). Отметим интересный момент: оказывается, в задаче даже слишком много условий — высота не обязательно должна попадать в точку пересечения медиан, достаточно, чтоб она попадала на прямую, параллельную BC и проходящую через точку пересечения медиан.

Итак, мы получили целый класс подходящих фигур: все они обладают нужными свойствами и можно рассматривать *любую* из них. Кстати, мы не утверждаем, что других подходящих фигур нет (хотя в данной задаче это так), так как нам вполне достаточно этого класса. Теперь выберем себе фигуру «получше» и приступим к ее анализу.

Куда же нам надо сдвинуть точку A? Хорошо бы, чтоб треугольник ABC стал каким-нибудь «хорошим» (равнобедренным, прямоугольным). А чего бы нам еще хотелось? У нас присутствуют высоты грани, сечения, основания и пирамиды, точка пересечения медиан. Нельзя ли их «уложить» в одну плоскость — тогда сразу получим планиметрический фрагмент чертежа? Можно: для этого надо «остановить» точку A против середины отрезка BC (вот она, эта пресловутая точка!), соответственно сдвинув точку O. Далее все просто: проведя сечение через высоты, получаем систему уравнений (см. рис.2, где H — высота грани

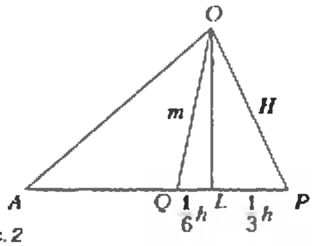


Рис. 2

OBC, h — высота основания, m — высота сечения), решение которой не вызывает трудностей:

$$\begin{cases} \dfrac{aH}{2} = p, \\ \dfrac{ah}{2} = q, \\ H^2 - \left(\dfrac{1}{3}h\right)^2 = m^2 - \left(\dfrac{h}{6}\right)^2. \end{cases}$$

Искомая площадь сечения равна

$$\frac{1}{4}\sqrt{4p^2 - \frac{1}{3}q^2}\,.$$

При записи решения надо в уме провести подобные рассуждения, выбрать подходящую фигуру, а записать достаточно только построение этой фигуры и доказательство того, что ее можно рассматривать вместо исходной, т.е. как раз ту фразу, которая приведена в начале решения.

Рассмотрим еще одну задачу, представляющую собой интересный вариант задания нефиксированной фигуры.

Задача 2. *В треугольной пирамиде OABC известно, что OA = BC, сумма плоских углов при вершине B равна π, сумма плоских углов при вершине C также равна π. Найдите объем пирамиды,* *если площадь основания ABC равна S, а радиус вписанного в пирамиду шара равен r.*

Здесь мы явно имеем дело с нефиксированной фигурой, причем трудно даже определить, каким деформациям ее можно подвергнуть. Что же с ней делать? Школьникам, которые в течение длительного времени безрезультатно (и уже с тоской в глазах) рассматривали чер-

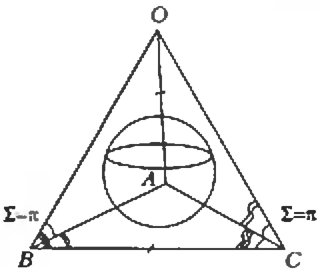


Рис. 3

теж типа показанного на рисунке 3 и никак не могли понять, к чему бы приспособить сумму углов, задавался один вопрос: «Скажите, вы по чертежу хорошо видите, что суммы углов равны π?». «Нет», — звучал ответ. «Тогда сделайте что-нибудь, чтоб это увидеть». (Прежде, чем читать дальше, попробуйте самостоятельно сделать это «что-нибудь».)

Почти сразу раздавалась реплика: «Развертку сделать, что ли?». Вот и произнесено то самое слово, которое, будучи прочитанным в готовом решении в качестве первой фразы, вызывает шоковый эффект. После того, как развертка сделана (рис.4), сразу становится ясно, что BC — средняя линия треугольника $O'O''O'''$, а значит, точка A попадает на линию $O'O''$, откуда следует, что площади всех четырех граней равны и искомый объем равен $(4/3)Sr$.

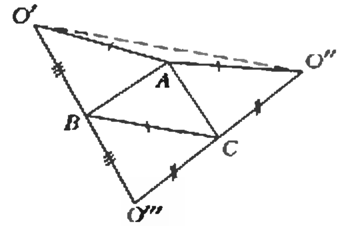


Рис. 4

Подведем итоги: так что же надо делать в общем случае? Нужно увидеть условие, т.е. привести чертеж или фрагмент чертежа к такому виду, чтобы и постороннему человеку без ваших комментариев по чертежу было ясно, что чему равно, что чему перпендикулярно и т.д. С этой целью можно делать все, что угодно: выделяйте на отдельный чертеж связки, делайте разрезы и сечения, проектируйте, деформируйте, поворачивайте и разворачивайте. Как только вы увидели условие, вам сразу станет ясно, что имел в виду автор задачи и что надо делать.

Упражнения

1. Ребро AB треугольной пирамиды $ABCD$ равно a. Сечение, проведенное через ребро AB и середину стороны CD, имеет площадь S и образует с гранями ABC и ABD двугранные углы, равные α и β. Найдите объем пирамиды.

2. В треугольной пирамиде $ABCD$ грани ABC и ABD имеют соответственно площади p и q и образуют между собой угол α. Найдите площадь сечения пирамиды, проходящего через ребро AB и центр вписанного в пирамиду шара.

3. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро CD равно a, а перпендикуляр, опущенный из середины ребра AB на CD, равен b и образует равные углы α с гранями ACD и BCD. Найдите объем пирамиды.

Аэро- и гидростатика

А.ШЕРОНОВ

Решение задач из этого раздела физики основывается на законах Архимеда и Паскаля. По закону Паскаля давление в жидкостях и газах передается во все стороны одинаково. Если при этом газ или жидкость находятся в поле тяжести, то давления в точках с разностью координат по высоте h отличаются на $\rho g h$, где ρ — плотность жидкости или газа, g — ускорение свободного падения. По закону Архимеда выталкивающая сила, действующая на тело, погруженное в жидкость или газ, в поле тяжести, равна весу жидкости или газа, вытесненного этим телом.

Ниже мы рассмотрим несколько характерных примеров использования этих законов при решении задач.

Задача 1. *Температура кипения воды зависит от давления окружающего воздуха. При увеличении или уменьшении давления воздуха на $\Delta p = 27$ мм рт.ст. вблизи атмосферного давления температура кипения вблизи 100 °С увеличивается или уменьшается на $\Delta T_0 = 1$ °С. При какой температуре кипит вода в ресторане «Седьмое небо» на высоте $h = 330$ м от поверхности Земли?*

Разность давлений у поверхности Земли и на высоте h есть $\rho g h$, где ρ — плотность воздуха при давлении $p = 10^5$ Па и температуре $T = 290$ К, которая определяется уравнением состояния:

$$\rho = \frac{pM}{RT}$$

(R — газовая постоянная, M — молярная масса воздуха). Таким образом, температура кипения на высоте h уменьшается на

$$\Delta T = \frac{\rho g h \Delta T_0}{\Delta p} = \frac{pMgh\Delta T_0}{\rho_1 g h_1 RT},$$

где $\rho_1 = 13{,}6\cdot10^3$ кг/м^3 — плотность ртути, $h_1 = 27\cdot10^{-3}$ м, $g = 9{,}8$ м/с^2, $M = 29\cdot10^{-3}$ кг/моль, $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К). Подставив числовые значения, получим $\Delta T \approx 1$ °С, следовательно, температура кипения на высоте 330 м равна приблизительно 99 °С.

Задача 2. *В последние годы приобрело большую популярность катание на воздушных шарах. Подъемная сила создается путем подогрева воздуха в оболочке шара газовой горелкой. Объем шара и давление воздуха в нем остаются при этом практически постоянными. Оцените, каким должен быть объем шара, чтобы при нагреве воздуха в нем на $\Delta t = 30$ °С относительно окружающей атмосферы он смог поднять полезный груз массой $m = 150$ кг (масса оболочки, корзины, человека и т.д.).*

Выталкивающая сила, равная весу вытесненного шаром холодного атмосферного воздуха, уравновешивается силой тяжести полезного груза и теплого воздуха, находящегося в оболочке шара. Пусть $T_1 = 290$ К — температура атмосферы, $T_2 = 320$ К — температура воздуха в шаре. Из уравнения состояния газа и условия плавания шара находим его объем: масса холодного воздуха $m_1 = MpV/(RT_1)$, масса горячего воздуха $m_2 = MpV/(RT_2)$, по условию $m_1 - m_2 = m$.

Окончательно имеем

$$V = \frac{mR}{Mp\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)} \approx 1300 \text{ м}^3,$$

где $M = 29\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса воздуха, $p = 10^5$ Па — атмосферное давление, $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) — газовая постоянная.

Задача 3. *По некоторым оценкам масса озона (O_3), содержащегося в атмосфере Венеры, составляет $\alpha = 10^{-5}$ % массы всей атмосферы. Какой толщины слой образовал бы озон, если бы он* *собрался у поверхности планеты и имел температуру и давление, равные температуре и давлению атмосферы у поверхности Венеры? Ускорение свободного падения на Венере $g = 8{,}2$ м/с^2, температура вблизи поверхности $T = 800$ К.*

Пусть m — масса атмосферы Венеры, $M = 48$ г/моль — молярная масса озона, $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) — газовая постоянная. Озон вблизи поверхности занимает объем $V = 4\pi r^2 h$ при давлении p и температуре T. По условию $p = mg/(4\pi r^2)$, где r — радиус Венеры. С другой стороны, уравнение состояния для озона имеет вид

$$pV = \frac{\alpha m}{M} RT .$$

Подставив сюда выражения для V и p, получим искомую толщину слоя озона

$$h = \frac{\alpha RT}{gM} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ м} .$$

Задача 4. *Колокол для подводных работ представляет собой тонкостенный цилиндрический стакан, который опускается вверх дном с борта катера на дно водоема. Какова должна быть толщина стенок и дна колокола, чтобы он мог покоиться на дне водоема глубиной $H = 3$ м? Внутренний радиус колокола $r = 1$ м, высота $h = 2$ м, плотность стали $\rho_{ст} = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3.*

Предположим, что в момент касания колоколом дна водоема между ними есть тонкая водяная прослойка (рис.1). Для простоты толщину Δ стенок и дна колокола будем считать одинаковой и малой по сравнению с его радиусом и высотой. Вес воды, вытесненной колоколом, определяется объемом воздушной прослойки $\pi r^2 x$ и объемом боковых стенок и дна колокола $2\pi r h \Delta$ и $\pi (r + \Delta)^2 \Delta \approx \pi r^2 \Delta$. Толщина стенок Δ определяется условием, что сила тяжести колокола не меньше выталкивающей силы, т.е.

$$\rho_в \left(\pi r^2 x + 2\pi r h \Delta + \pi r^2 \Delta \right) \ge$$

$$\ge \rho_{ст} \left(\pi r^2 \Delta + 2\pi r h \Delta \right), \quad (*)$$

где $\rho_в = 10^3$ кг/м^3 — плотность воды. Найдем теперь толщину x воздушной прослойки, оставшейся у «потолка» в момент касания колоколом дна водоема. Воздух в колоколе находится под давлением $\rho_в g \left(H + H_0 - (h - x) \right)$, где g — ускорение свободного падения, $\rho_в g H_0$ — наружное атмосферное давление ($H_0 = 10{,}3$ м). По закону Бойля – Мариотта имеем

$$\rho_в g H_0 h \pi r^2 = \rho_в g \left(H_0 + H - (h - x) \right) x \pi r^2 ,$$

откуда получаем

$$x^2 + (H_0 + H - h)x - H_0 h = 0, \quad x \approx 1{,}6 \text{ м} .$$

Окончательно из неравенства (*) для толщины стенок находим

$$\Delta = \frac{\rho_в r^2 x}{(\rho_{ст} - \rho_в)(r^2 + 2rh)} \approx 4{,}6 \cdot 10^{-2} \text{ м} .$$

Приведем еще один расчет величины максимальной выталкивающей силы — с использованием закона Паскаля. Воздух в колоколе действует снизу на внутреннюю поверхность дна площадью πr^2 с силой $\rho_в g \left(H_0 + H - (h - x) \right) \pi r^2$. На поверхность соприкосновения колокола с дном площадью $2\pi r \Delta$ действует снизу сила, равная $\rho_в g (H_0 + H) \cdot 2\pi r \Delta$. Сверху на дно колокола площадью $\pi (r + \Delta)^2 \approx \pi r^2 + 2\pi r \Delta$ действует сила $\rho_в g \left(H_0 + H - h - \Delta \right) \left(\pi r^2 + 2\pi r \Delta \right)$. Выталкивающая сила равна разности сил давления снизу и сверху:

$$\rho_в g \left(H_0 + H - (h - x) \right) \pi r^2 +$$

$$+ \rho_в g (H_0 + H) \cdot 2\pi r \Delta -$$

$$- \rho_в g \left(H_0 + H - h - \Delta \right) \left(\pi r^2 + 2\pi r \Delta \right) \simeq$$

$$\simeq \rho_в g \left(\pi r^2 x + \left(2\pi r h + \pi r^2 \right) \Delta \right),$$

что совпадает с величиной, приведенной в выражении (*).

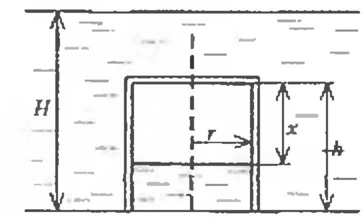


Рис. 1

Задача 5. *Вертикально расположенная U-образная трубка частично заполнена жидкостью так, что расстояния от открытых концов трубки до уровня жидкости в коленах равны h_0. Какой максимальный по толщине слой более легкой жидкости можно налить в одно из колен трубки, чтобы жидкость из трубки не выливалась? Отношение плотностей жидкостей равно k ($k > 1$). Жидкости не смешиваются.*

Пусть в правое колено трубки налита более легкая жидкость плотностью ρ_1 и толщиной слоя h_1 (рис.2). В другом колене ее уравновешивает слой первоначально налитой жидкости плотностью ρ_2 и толщиной h_2, так что $\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$. В колене с тяжелой жидкостью остался незаполненым слой толщиной

$$h = h_1 - h_2 = h_1 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} .$$

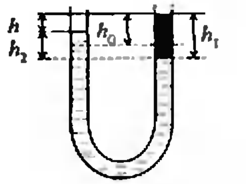


Рис. 2

Заметим, наконец, что имеет место очевидное равенство

$$h_1 + h = 2h_0 .$$

Окончательно для h_1 находим

$$h_1 = \frac{2h_0 \rho_2}{2\rho_2 - \rho_1} = \frac{2h_0 k}{2k - 1} .$$

Задача 6. *Плотность стратифицированной жидкости меняется с глубиной h по закону $\rho(h) = \rho(0)(1 + \alpha h)$, где $\rho(0)$ — известная константа. Для измерения константы α в жидкость опускают тяжелый цилиндр длиной l и сечением S, который висит вертикально на нити, привязанной к динамометру. Разность показаний динамометра равна ΔF в положениях, когда верхняя грань цилиндра совпадает с поверхностью жидкости и когда она же находится на глубине $h = l$ от поверхности. Найдите по этим данным величину α.*

Разность показаний динамометра определяется разностью давлений на верхнюю и нижнюю грани цилиндра, находящегося в жидкости. Так как плотность жидкости меняется с глубиной по линейному закону, давление меняется с глубиной по закону

$$p(h) = p(0) + \rho(0) g \left(h + \frac{\alpha h^2}{2} \right).$$

Если m — масса цилиндра, то в первом случае показание динамометра равно

$$F_1 = mg - \rho(0) g \left(l + \frac{\alpha l^2}{2} \right) S ,$$

а во втором —

$$F_2 = mg - \rho(0) g \left(l + \frac{3\alpha l^2}{2} \right) S .$$

По условию

$$\Delta F = F_1 - F_2 ,$$

откуда находим

$$\alpha = \frac{2\Delta F}{\rho(0) g l^2 S} .$$

Разность показаний динамометра, а следовательно, и константу α можно найти и с помощью закона Архимеда, определив вес жидкости, вытесненной цилиндром в первом и втором случаях. Сделайте это самостоятельно.

Задача 7. *Изогнутая трубка постоянного внутреннего сечения с открыты-*

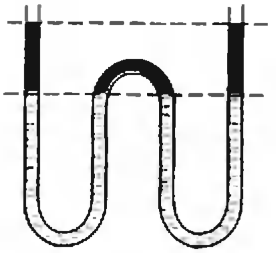


Рис. 3

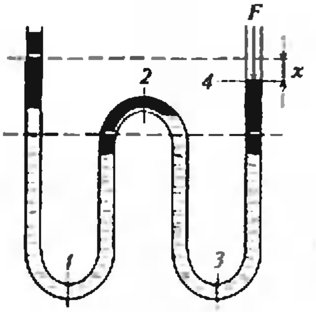


Рис. 4

ми концами расположена так, что ее прямолинейные участки вертикальны (рис.3). Трубка заполнена двумя несмешивающимися жидкостями плотностью ρ_1 снизу и ρ_2 сверху ($\rho_1 > \rho_2$). Все границы раздела между жидкостями расположены на одном уровне горизонта, свободные поверхности жидкости в крайних коленах также находятся на одном горизонтальном уровне. При каких соотношениях между величинами плотностей ρ_1 и ρ_2 такое положение жидкостей устойчиво?

Выведем жидкость из равновесия, сместив уровень в правом колене на x вниз (рис.4). Найдем силу F, которую надо прикладывать к воображаемому невесомому поршню в этом колене для поддержания равновесия. Если получится $F > 0$, то равновесие будет устойчивым.

Изменение давления под поршнем найдем из цепочки уравнений для сечений *1 — 4*:

$$\Delta p_1 = \rho_1 g x,$$

$$\Delta p_2 = \Delta p_1 - \rho_2 g x + \rho_1 g x = 2\rho_1 g x - \rho_2 g x,$$

$$\Delta p_3 = \Delta p_2 + \rho_1 g x - \rho_2 g x = 3\rho_1 g x - 2\rho_2 g x,$$

$$\Delta p_4 = \Delta p_3 + \rho_1 g x = 4\rho_1 g x - 2\rho_2 g x.$$

Так как $F = \Delta p_4 S$, из условия $F > 0$ получим ответ:

$$\rho_1 > \frac{\rho_2}{2}.$$

Условие устойчивости можно найти и через энергию: в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия должна быть минимальной. При смещении уровня на x изменение потенциальной энергии равно $\Delta E_p = 2\rho_1 g x^2 S - \rho_2 g x^2 S$, тогда из условия $\Delta E_p > 0$ получаем $\rho_1 > \rho_2/2$.

Упражнения

1. Атмосфера Венеры состоит в основном из углекислого газа, давление которого у поверхности достигает $p = 20$ атм, а температура составляет $T = 800$ К. Оцените массу углекислого газа на Венере, считая, что толщина атмосферы много меньше радиуса планеты $r = 6300$ км. Какой толщины была бы атмосферы Венеры, если бы давление и температура ее были равны соответствующим значениям вблизи поверхности? Ускорение свободного падения на Венере $g = 8{,}2$ м/с^2, газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К), молярная масса CO_2 равна $M = 44$ г/моль.

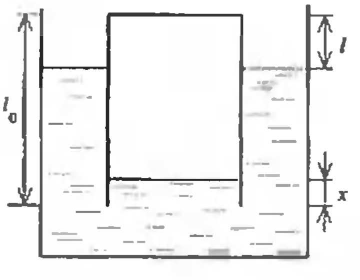


Рис. 5

2. В горизонтальной закрытой с одного конца трубке столбиком ртути длиной $l = 12$ см заперт слой воздуха толщиной $L = 35$ см. Если трубку повернуть один раз открытым концом вниз, а другой раз вверх, то столбик ртути смещается. Разность этих смещений от начального горизонтального положения составляет $\Delta x = 2$ см. Найдите величину наружного атмосферного давления (в см рт. ст.).

3. В мензурку с водой, стоящую вертикально, опустили вверх дном тонкостенную пробирку длиной l_0. В результате уровень воды в мензурке поднялся на ΔH, а пробирка стала плавать в вертикальном положении (рис.5). Найдите толщину слоя воды, зашедшей в пробирку, и длину части пробирки, находящейся над водой. Отношение площади сечения мензурки к площади сечения пробирки равно k ($k > 1$). Атмосферное давление p, плотность воды ρ, ускорение свободного падения g.

ИНФОРМАЦИЯ

МОСКОВСКАЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ШКОЛА № 1189

Несколько лет назад на базе экспериментальной школы № 1189 г. Москвы начали работать классы с углубленным изучением физики и математики. Инициаторами их открытия были Департамент образования Северо-Западного округа г. Москвы, Российский научный центр (РНЦ) «Курчатовский институт» и Московский физико-технический институт. Учащиеся 10 и 11 классов проходят обучение в дневных классах, а 8 и 9 — в вечерних. Программы по физике и математике разработаны таким образом, чтобы заложить основы общей физико-математической культуры и детально изучить эти предметы на уровне требований, необходимых для поступления в МФТИ и другие ведущие вузы. В частности, учащиеся выполняют задания Заочной физико-технической школы при МФТИ. Все выпускники физико-математических классов прошлого года успешно поступили в МФТИ, МИФИ и на механико-математический факультет МГУ.

Занятия по физике и математике в дневных классах проводятся по группам численностью не более 10 человек. Программа по математике включает в каждой группе три часа алгебры, три часа геометрии и два часа математического анализа в неделю, по физике — шесть часов семинарских занятий и два часа лабораторных работ. Занятия ведет коллектив докторов и кандидатов физико-математических наук, активно работающих и в РНЦ, и в МФТИ. Курс «Компьютерное моделирование физических процессов» подразумевает в течение первого полугодия освоение техники программирования на языке СИ, а в дальнейшем — самостоятельную разработку программ, которые позволяют изучать отдельные темы из курсов механики, теории колебаний и физики фракталов. Занятия по этому предмету проводятся по три часа в неделю на базе РНЦ. Большое внимание уделяется также углубленному изучению английского языка, которое происходит во внеурочное время (факультативно) по четыре часа в неделю.

Занятия по физике и математике в вечерних классах проводятся два раза в неделю по четыре часа.

Большой объем занятий и их высокая интенсивность в свою очередь предъявляют достаточно серьезные требования к учащимся физико-математических классов. Прием в дневные классы школы проводится по результатам собеседования, а в вечерние классы прием свободный. Справки о поступлении можно получить по телефону 193-60-23.

Адрес школы: *123182 Москва, ул. Василевского, д.9, кор.1.*

Варианты вступительных экзаменов 1995 года

Санкт-Петербургский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1 (дневное отделение)

(факультет математико-механический, прикладной математики — процессов управления; школа менеджмента; отделение прикладной лингвистики филологического факультета)[1]

1. Нарисуйте график функции

$$f(x)=\frac{1}{|\mathrm{tg}\,x|+\mathrm{ctg}\,x}.$$

1*. Сколько существует четырехзначных чисел, делящихся нацело на 15, у которых сумма квадратов цифр не превосходит 26?

2. Решите неравенство

$$\sqrt{\log_2 x}\le\log_2\frac{x}{64}.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{a\sin x+\cos x}=\sqrt{a\cos x+\sin x}.$$

3*. Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{2-y}{2-x}.$$

4. Две вершины равнобедренного прямоугольного треугольника ABC лежат на окружности S. Найдите радиус окружности, если известно, что длина катета BC равна a, а длина касательной, проведенной из вершины A к окружности, равна $2a$.

4*. Решите уравнение

$$\sin^2 x+\sin x+\sqrt{\sin x}=1-\cos x.$$

5. Плоскость, проходящая через ребро основания правильной четырехугольной пирамиды, делит ее объем пополам. В каком отношении она делит боковые ребра пирамиды?

Вариант 2 (вечернее отделение)

(факультеты психологический, экономический (отделения экономической кибернетики и международной экономики))

1. Из пункта A вниз по реке вышел плот. Через час вслед за ним вышел катер, догнал плот и вернулся обратно, затратив на весь путь 24 минуты. Найдите скорость катера в спокойной воде, если известно, что скорость течения реки равна 3 км/ч.

2. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{2}} x-\log_{4x^2}4\le-2.$$

3. α, β и γ — углы треугольника. Найдите их, если известно, что

$$\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta=\frac{7}{5},\\ \cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma=\frac{24}{25}.\end{cases}$$

4. Квадрат $ABCD$ описан вокруг окружности с радиусом r, а квадрат $A'B'C'D'$ вписан в нее, причем прямая $A'B'$ проходит через точку A. Найдите площадь треугольника, отсекаемого этой прямой от квадрата $ABCD$.

5. Найдите все вещественные значения a, при которых уравнение

$$(x^2-3x+2)(x^2+7x+12)=a$$

имеет решения.

Публикацию подготовили О. Иванов, Н. Нецветаев, А. Орлов

Санкт-Петербургский государственный технический университет «Политехнический институт императора Петра Великого»

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-механический факультет)

1. Последовательность из трех различных чисел $\{x, y, z\}$ является арифметической прогрессией. Последовательности $\{x, 3y, 6z\}$ и $\{x, By, 11z\}$ — также арифметические прогрессии. Найдите коэффициент B.

2. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{13}-\sqrt{3}}(x^2-x-2)>0.$$

3. Найдите отношение $\mathrm{tg}(\alpha+2\beta)/\mathrm{tg}\,\alpha$, если известно, что оно определено и если выполнено равенство

$$\sin 2(\alpha+\beta)=2\sin 2\beta.$$

4. Расстояние между центрами двух окружностей равно 4, радиус одной из них 2, другой — 5. Найдите длину стороны ромба $ABCD$, у которого вершины A и C лежат на одной из окружностей, а вершины B и D — на другой.

5. Уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$ имеет три различных корня: $2a$, b и c. Сколько существует таких уравнений?

Вариант 2

(радиофизический факультет)

1. Решите уравнение

$$\log_{4\cos^2 x}(2-\cos 2x-\sin x)=0.$$

[1] *Задачи, отмеченные звездочкой, предлагались абитуриентам школы менеджмента и отделения прикладной лингвистики.*

2. Найдите все значения a, при которых существуют решения уравнения

$$a\sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0,$$

не входящие в множество $\{\pi n/3; n \in \mathbf{Z}\}$.

3. Каково наименьшее целое значение функции

$$f(x) = \frac{8x-5}{\sqrt{x^2+2x+5} - \sqrt{x^2-6x+10}}$$

и при каких x оно достигается?

4. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение

$$\sqrt{x-p}\left(x^2+px+2p^2-7\right)=0$$

имеет ровно два решения.

5. Площадь каждой боковой грани треугольной пирамиды равна 12, а длина любого бокового ребра равна 5. Найдите площадь основания, если известно, что она больше 16, но меньше 27.

Вариант 3

(факультет экономики и менеджмента)

1. Решите уравнение

$$\log_{[illegible]}(1-x) - \log_{[illegible]}(1+x) = 1.$$

2. Упростите выражение

$$(1+\log_2 3)^3 \sin^8 x + (1+\log_3 2)^3 \cos^8 x,$$

где x — корень уравнения

$$(\log_2 9)\sin^4 x + (\log_3 4)\cos^4 x = \sin^2 2x.$$

3. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна l, α — угол наклона боковых граней, а β — боковых ребер к плоскости основания. Найдите высоту пирамиды, если

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \frac{1}{3}.$$

4. Найдите все $a > 0$, при которых функция $f(x) = 5\cos(2x/a) - 2\cos(5ax)$ является 2π-периодической.

5. Для каких значений параметра p система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 4(x-y) = p^2 - 2/p, \\ 2y^2 + 4y - x = 1/(2p^2) - p \end{cases}$$

имеет решение? Для каких p оно единственно? Какое подмножество плоскости Oxy пробегает это единственное решение при изменении p?

Вариант 4

(факультет технической кибернетики)

1. Решите уравнение

$$\log_2(3-x) = 1 + \log_2\sqrt{x-1}.$$

2. Найдите все целые числа n, для которых $(3n+1)/(n-1)$ является целым числом.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sin x \sin y + 3\cos 2x = 1, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = -1. \end{cases}$$

4. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение

$$\sqrt{x-p}\left(2x^2-(p^2+4)x+2p^2\right)=0$$

имеет ровно два корня.

5. Окружность, вписанная в треугольник ABC, делит медиану AM на отрезки с последовательными длинами 24, 30, 24. Найдите BC.

Вариант 5

(физико-технический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{3}{1-2^x} \le 4 + 2^{-x}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\cos x + \sin 5x + \cos 3x + \sin 7x}{\cos 4x} = 0.$$

3. Что представляет собой пересечение всевозможных кругов вида

$$(x-2a)^2 + (y+3a)^2 < 13(a^2-2a+14),$$

где a может принимать любые действительные значения?

4. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} (y-4x^2)(y-6) = 10x^2 - 9, \\ x^4 + z^2 = z. \end{cases}$$

5. Три окружности с центрами в вершинах треугольника ABC касаются попарно (внешним образом) и каждая касается четвертой с центром D на основании AB. Найдите высоту CE треугольника, зная, что радиус окружности с центром C равен 1.

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. Санки массой m = 10 кг скатились с горы высотой h = 5 м и остановились на горизонтальном участке. Какую минимальную работу совершит мальчик, возвращая санки по линии их скатывания?

2. Коэффициент жесткости резинового жгута, длина которого l и масса m, равен k. Кольцо, изготовленное из этого жгута, вращается с угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца. Определите радиус вращающегося кольца.

3. Детский пружинный пистолет, который можно представить себе в виде пружины конечной массы, прикрепленной к неподвижной стенке, выстреливает шариком со скоростью v. Если выстрелить шариком вдвое большей массы, то скорость его станет $\sqrt{2/3}\,v$. Какова будет скорость, если выстрелить шариком втрое большей массы?

4. Частица массой $2m$, летевшая со скоростью v и имевшая внутреннюю энергию W_0, распалась на два осколка одинаковой массы m с одинаковыми внутренними энергиями W_1. Найдите максимально возможный угол разлета осколков, если известно, что $mv^2 > W_0$.

5. Два математических маятника, длины которых отличаются на $l_1 - l_2$ = 22 см, совершают в одном и том же месте за некоторое время один N_1 = 30 колебаний, другой N_2 = 36 колебаний. Найдите длины маятников.

6. Какая часть количества теплоты, сообщенного одноатомному газу в изобарном процессе, идет на увеличение внутренней энергии и какая часть — на совершение работы?

7. Одноатомный идеальный газ массой $m = 80$ г с молярной массой $M = 40$ г/моль нагревают в цилиндре под поршнем так, что температура газа изменяется пропорционально квадрату давления от начального значения $T_1 = 300$ К до конечного $T_2 = 400$ К. Определите работу, совершаемую газом в этом процессе, и подведенные к нему количество теплоты.

8. Кольцо из сверхпроводника помещено в однородное магнитное поле, индукция которого нарастает от нуля до B_0. Плоскость кольца перпендикулярна линиям индукции магнитного поля. Определите силу индукционного тока, возникающего в кольце. Радиус кольца r, индуктивность L.

9. В боковой стенке сосуда, наполненного жидкостью с показателем преломления n, проделано небольшое отверстие радиусом r, через которое вытекает струя. По оси отверстия горизонтально направлен тонкий луч света. При какой высоте уровня жидкости над отверстием луч света сможет выйти из струи ни разу не испытав полного внутреннего отражения? Считать показатель преломления n достаточно большим, изменением поперечного сечения струи пренебречь.

10. Точка движется по окружности с постоянной по модулю скоростью $v = 0{,}2$ м/с вокруг главной оптической оси собирающей линзы в плоскости, перпендикулярной оси и находящейся от линзы на расстоянии, в 1,5 раза большем фокусного. Центр окружности лежит на главной оптической оси линзы. С какой линейной скоростью движется изображение точки?

Публикацию подготовили М.Погарский, Е.Подсыпанин, В.Полищук, В.Романов, Б.Чихачев

Российский государственный педагогический университет им.А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Для каждого натурального n определена функция

$$f_n(x) = \frac{(x+3)^2(x-n)}{3\sqrt{9+2nx+x^2}}.$$

а) Найдите области определения этих функций.
б) Нарисуйте график функции $f_3(x)$.
в) Решите уравнение

$$3f_4(x) = \frac{x-4}{\sqrt{(x+4)^2-7}}.$$

2. Решите неравенство

$$\lg(x-2)+\lg(27-x)<2.$$

3. Найдите все решения уравнения $\frac{\sin 2\pi x}{1+\cos 2\pi x}=0$, принадлежащие промежутку $\left[-1,\frac{\pi}{2}\right]$.

4. Через вершину D трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD>BC$) проведена прямая, которая пересекает диагональ AC в точке M, а боковую сторону AB в точке N, причем $AN:NB=2:1$ и $AM:MC=3:2$. Найдите основание BC, если $AD=6$.

5. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с острым углом β и гипотенузой c. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. Найдите объем пирамиды.

Вариант 2

1. Найдите значение функции $f(x)=\frac{b\sqrt{x^2+2b^2}+4}{\sqrt{2}+\sqrt{x^2-b^2}}$ в точке $x=b\sqrt{2}$, если $b<-2$.

2. Дана функция $f(x)=\log_2\frac{4x-x^2-3}{x}$.

а) Найдите область определения этой функции.

б) Нарисуйте график функции $g(x)=x\cdot 2^{f(x)}$.

в) Решите уравнение $f(x)=\log_2(4x-7)-\log_2 x$.

3. Найдите все решения уравнения $\frac{1-\cos 8x}{1-\sqrt{2}\cos x}=0$, принадлежащие промежутку $(-1,2)$.

4. В трапеции $ABCD$ основание AD равно a, а основание BC равно b ($a>b$). Найдите высоту трапеции, если известно, что диагонали трапеции являются биссектрисами углов BAD и ADC.

5. В основании прямого параллелепипеда, объем которого равен 36, лежит параллелограмм с острым углом 30° и сторонами 4 и 6. Найдите площадь сечения, проходящего через противолежащие бóльшие стороны оснований параллелепипеда.

Публикацию подготовила О.Корсакова

Государственная академия нефти и газа им. И.М.Губкина

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$\frac{a-0{,}36}{\sqrt{a}-0{,}6}-\frac{a\sqrt{a}-0{,}216}{a+0{,}6\sqrt{a}+0{,}36}.$$

2. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\sqrt{3(9-x)}>3-x.$$

3. Сумма 9-го и 16-го членов арифметической прогрессии равна 12. Найдите сумму первых 24 членов прогрессии.

4. Решите уравнение

$$\left|-x^2-4\right|=-4x.$$

5. Решите уравнение

$$2^{x+1}-2^x=16.$$

6. Вычислите

$$\log_{49}121+\log_7(49/11).$$

7. Вычислите

$$\sin 5°\sin 95°-0{,}5\sin 10°+1.$$

8. Найдите (в градусах) наименьший положительный корень уравнения

$$\operatorname{tg}(62°+x)+\operatorname{tg}(28°-x)=2.$$

9. Из точки $M(-5;0)$ к графику функции $y = 3\sqrt{x+1}$ проведена касательная. Найдите расстояние между точкой M и точкой касания.

10. Сколько целых чисел входит в область решений неравенства

$$\log_{1/x}(4x+77) \geq 2?$$

11. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) средняя линия треугольника, параллельная стороне AC, пересекает вписанную в треугольник окружность в точках M и N. Найдите площадь треугольника ABC, если $MN = 2$, $\cos\angle BAC = 0{,}6$.

12. В правильной шестиугольной пирамиде боковая грань составляет с плоскостью основания угол $\pi/3$. Радиус сферы, вписанной в пирамиду, равен 6. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

Вариант 2

1. Упростите и вычислите при $a = \sqrt{3}$, $y = 1 + \sqrt{3}$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3y+a}} + \frac{2a}{3y^2 - a^2}\right) : \frac{1}{3y^2 - \sqrt{3}ay} - \sqrt{3}y + 3.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{1-4x-x^2} = x+1.$$

3. Произведение 18-го и 27-го членов геометрической прогрессии равно 9,4. Найдите произведение 9-го и 36-го членов этой прогрессии.

4. Найдите наибольшее целое решение уравнения

$$\frac{|2x-15|}{2x-15} = -1.$$

5. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$0{,}2^{x-3{,}5} < 2^{\frac{x-3{,}5}{3}}.$$

6. Вычислите

$$\frac{\log_2 31}{\log 31} - \log_2 3.$$

7. Вычислите

$$\frac{3\cos 50^\circ - 4\sin 140^\circ}{\cos 130^\circ}.$$

8. Найдите (в градусах) наименьший положительный корень уравнения

$$2\sin 17x \sin 2x = \left(\sqrt{2}/2\right) - \cos 19x.$$

9. Найдите кратчайшее расстояние от точки $M(0;1{,}94)$ до точек, лежащих на графике функции $y = x^2$.

10. Сколько целых чисел входит в область решений неравенства

$$\log_{\frac{x}{36}}\left(\log_x \sqrt{56-x}\right) > 0?$$

11. В треугольнике ABC биссектриса угла A продолжена до пересечения в точке D с описанной около треугольника окружностью. Найдите длину стороны BC, если $AB = 27$, $AC = 12$, $AD = 30$.

12. Около правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ описан шар. Центр шара делит высоту пирамиды в отношении 5:1, считая от вершины S. Найдите косинус плоского угла при вершине пирамиды.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. В горизонтальном направлении со скоростью 10 м/с брошено тело, которое падает на землю через 3 с. Найдите тангенс угла, который составит вектор скорости тела с горизонтом при падении. Ускорение силы тяжести 10 м/с^2.

2. Три бруска, массы которых 0,5 кг, 0,3 кг и 0,1 кг, связаны нитями и лежат на столе. К первому бруску приложена горизонтально направленная сила, равная 18 Н. Какова сила (в Н) натяжения нити, связывающей первый и второй бруски? Трение не учитывать.

3. Двигатели электровоза при движении его со скоростью 72 км/ч потребляют мощность 800 кВт. КПД силовой установки электровоза 80%. Определите силу тяги (в кН) двигателей.

4. На какое расстояние (в км) от поверхности Земли нужно удалить тело, чтобы сила тяготения уменьшилась в 100 раз? Радиус Земли 6400 км.

5. Газ охладили при постоянном объеме от 127 °С до 27 °С. На сколько процентов надо после этого уменьшить объем газа в изотермическом процессе, чтобы давление стало равным первоначальному?

6. Во сколько раз увеличится емкость системы, состоящей из двух одинаковых параллельно соединенных воздушных конденсаторов, если один из них заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью, равной 5?

7. Во сколько раз увеличится количество теплоты, выделяющееся в электроплитке, если сопротивление спирали плитки уменьшить в 2 раза, а напряжение в сети увеличить в 2 раза?

8. Две точки совершают гармонические колебания. Максимальная скорость первой точки 3 м/с. Какова максимальная скорость (в м/с) второй точки, если период ее колебаний в 3 раза больше, а амплитуда колебаний в 6 раз больше, чем у первой?

9*. Шарик подбросили вверх, сообщив ему кинетическую энергию 20 Дж. Через некоторое время он вернулся в точку бросания, имея кинетическую энергию 10 Дж. Определите, во сколько раз сила тяжести, действующая на шарик, больше средней силы сопротивления воздуха.

10*. Три однородных шара, массы которых 1 кг, 2 кг и 2 кг соответственно, укреплены на легком стержне. Центр второго шара находится на расстоянии 50 см, а центр третьего — на расстоянии 150 см от центра первого шара. На каком расстоянии (в см) от центра первого шара находится центр тяжести всей системы?

11*. Какого максимального значения может достигать разность потенциалов (в мВ), возникающая между концами крыльев самолета при движении со скоростью 450 км/ч, если размах крыльев 20 м? Горизонтальная составляющая индукции магнитного поля Земли 30 мкТл, вертикальная составляющая 40 мкТл.

12*. Солнечный луч, проходящий через отверстие в ставне, составляет с поверхностью стола угол 48°. Под каким углом (в градусах) к поверхности стола нужно расположить плоское зеркало, чтобы отраженный от него луч распространялся в том же направлении, но горизонтально? (Ответ дать для острого угла.)

Публикацию подготовили
Л.Володина, Б.Писаревский

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

Задачи

(см. «Квант» № 2)

1. Здесь последовательно выписаны числа, названия которых начинаются с буквы Д, поэтому следующими будут числа: 22, 23, ... 2. Дополним треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$ (рис. 1). Продолжим отрезок PK до пересечения со стороной BD в точке L и проведем среднюю линию MN параллелограмма, которая пересекает отрезок BC в точке Q. Очевидно, что $MQ = QN$, поэтому $XK = KL$, значит, $KL = 3$ и $AB = PL = 2 + 3 + 3 = 8$.

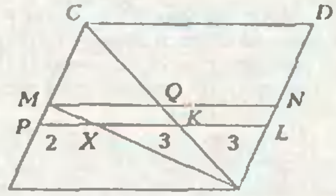


Рис. 1

3. Заметим, что произведение $(2k-1)!\cdot(2k)!$ равно $((2k-1)!)^2\cdot 2k$, поэтому наше произведение равно $1!\cdot 3!\cdot 5!\cdot\ldots\cdot 99!\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 100 = (1!\cdot 3!\cdot 5!\cdot 7!\cdot\ldots\cdot 99!\cdot 2^{25})^2\cdot 50!$. Вычеркнув из первоначального произведения 50!, получим число, являющееся полным квадратом.

4. Если куб оклеен в один слой треугольниками, то его вершина не может покрываться внутренней точкой какого-нибудь из этих треугольников, а только граничными их точками — вершинами и точками на сторонах треугольников. Если через вершину проходит сторона треугольника, то этот треугольник покрывает угол в 180° из суммы плоских углов, примыкающих к этой вершине, которая составляет 270°, а оставшиеся 90° должны быть покрыты углами при вершинах треугольников. Так как у куба 8 вершин, то углами треугольников нужно покрыть не меньше $8\cdot 90° = 720°$, а у треугольника сумма углов равна 180°, значит, треугольников должно быть не меньше $720 : 180 = 4$. Итак, тремя треугольниками невозможно оклеить куб в один слой, а четырьмя, оказывается, возможно. На рисунке 2 изображена развертка куба, составленная из четырех треугольников.

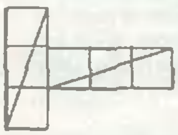


Рис. 2

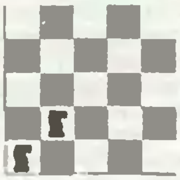


Рис. 3

5. Ответ парадоксальный: наименьшее королевское расстояние равно 1. Соответствующее расположение коней изображено на рисунке 3.

Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» №6 за 1995 г.)

6. Нетрудно получить, что сумма n последовательных натуральных чисел, начиная с числа k, равна

$$k + (k+1) + \ldots + (k+n-1) = \frac{1}{2}(2k+n-1)\cdot n.$$

Изучим соотношение $\frac{1}{2}(2k+n-1)n = 1995$, или $(2k+n-1)n = 3990$. Число 3990 раскладывается на простые сомножители следующим образом: $3990 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 19$. Это число следует представить в виде произведения двух чисел так, чтобы меньший сомножитель был возможно большим. Таким свойством обладает разложение на множители $3990 = 57\cdot 70$. Поэтому $n = 57$, а $k = (70 - 57 + 1) : 2 = 7$.

7. Произведем следующие преобразования записи искомого числа:

$$(\underbrace{999\ldots9}_{n})^3 = (10^n - 1)^3 =$$

$$= 10^{3n} - 3\cdot 10^{2n} + 3\cdot 10 - 1 = \underbrace{999\ldots9}_{n-1}7\underbrace{000\ldots0}_{n-1}2\underbrace{999\ldots9}_{n}.$$

Из последней записи следует, что сумма цифр рассматриваемого числа равна $18n$.

8. После первого вычеркивания остаются лишь четные числа: 2, 4, 6, ... , 1994. После второго вычеркивания получится следующая последовательность: 2, 6, 10, 14, ... , 1994. Это числа, которые при делении на 4 дают в остатке 2. Легко заметить, что число, которое после второго вычеркивания будет стоять на месте с номером k, первоначально стояло на месте с номером $4k-2$. В дальнейшем нам будет удобнее рассматривать сразу пары операций вычеркивания — сначала вычеркиваются числа на нечетных местах, затем на четных. Ясно, что после проведения такой пары вычеркиваний на месте с номером k окажется число, которое до этого стояло на месте с номером $4k-2$.
Кроме того, отметим, что хотя единственное число может оказаться как после четного вычеркивания, так и после нечетного вычеркивания, мы можем считать, что было сделано четное число вычеркиваний. Действительно, если оно возникло после нечетного числа вычеркиваний, то после последующего четного хода оно так и останется единственным, потому что четным ходом оно не может быть стерто.
Теперь воспользуемся полученными знаниями, чтобы найти оставшееся единственное число. Когда оно одно, то, естественно, стоит на первом месте. Значит, перед двумя последними вычеркиваниями оно стояло на месте с номером $4\cdot 1 - 2 = 6$, еще парой вычеркиваний раньше оно стояло на месте с номером $4\cdot 6 - 2 = 22$. Продвигаемся еще на пару вычеркиваний назад и получаем, что это число стояло на месте с номером $4\cdot 22 - 2 = 86$. Следующее продвижение дает место с номером $4\cdot 86 - 2 = 342$. Осталось еще раз продвинуться назад, и мы получаем номер места, равный $4\cdot 342 - 2 = 1366$. Дальнейшее продвижение назад невозможно, так как мы получаем номер места, равный $4\cdot 1366 - 2 = 5462$, что больше 1995.
Итак, остается число 1366.

9. Решение этой задачи будет опубликовано позже.

10. Отметим на стороне AB точку R, делящую отрезок MB пополам, а на стороне CD — точку S, делящую пополам отрезок PD (рис.4). Проведем отрезки RN и QS. Они параллельны диагонали AC нашего четырехугольника и равны ее трети, так что $RNSQ$ — параллелограмм, имеющий общую диагональ NQ с параллелограммом $MNPQ$. Отсюда следует, что отрезки MP, NQ и RS проходят через одну точку и делятся этой точкой пополам. В свою очередь, это значит, что четырехугольник $MRPS$ — тоже параллелограмм. Поэтому противоположные стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ равны и параллельны.

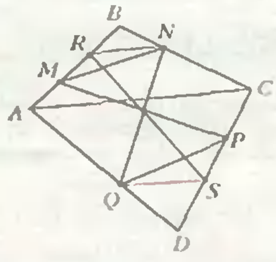


Рис. 4

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Силы, которые не дают нам провалиться сквозь пол или землю, — это силы электрического отталкивания между атомами соприкасающихся поверхностей. 2. Сила равна нулю.
3. а) Сила не изменится. б) Сила обратится в ноль.
4. Шарик и бумажка перестанут взаимодействовать.
5. Сила больше при наличии разноименных зарядов, так как электростатическая индукция приводит к перераспределению зарядов на шариках, при котором одноименные заряды оказываются на большем расстоянии друг от друга, чем разноименные (рис. 5). 6. Заряжен, причем положительно, так как если бы его заряд был равен нулю, он притягивался бы к шару A.

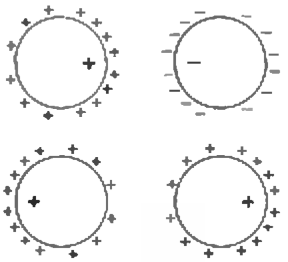


Рис. 5

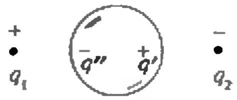


Рис. 6

7. Да. Например, если заряд одного из металлических шариков много больше заряда другого. 8. Шарики разойдутся на расстояние, равное удвоенной длине нити. 9. Если заряды шариков были разноименными, то сила притяжения сменится силой отталкивания и уменьшится по величине. Если шарики были заряжены одноименно, то сила отталкивания после соединения увеличится. 10. В первом случае третий заряд не может быть в равновесии ни в одной из областей. Во втором случае он может быть в неустойчивом равновесии в области I (посередине между q_1 и q_2). 11. Сила увеличится. Рассмотрите поляризацию стеклянного шара (рис. 6) и оцените равнодействующую сил, действующих, например, на заряд q_2. 12. Электростатическое взаимодействие двух электронов тормозит один из них и ускоряет другой. Электроны сойдутся на минимальное расстояние, затем первоначально двигавшийся остановится, а прежде неподвижный станет удаляться от него со скоростью v.
13. Заряженное кольцо будет растянуто, а сила, действующая на заряд Q, равна нулю. 14. В обоих случаях время возрастет, так как силам поверхностного натяжения будут препятствовать силы электрического отталкивания одноименных зарядов на внешней оболочке пузыря. 15. Энергии α-частиц недостаточно, чтобы преодолеть силу электрического отталкивания ядра тяжелого элемента и проникнуть в него.

Микроопыт

Булавка будет удаляться от расчески, так как к расческе притягивается не только булавка, но и вода. Под расческой образуется бугорок, с которого булавка станет «соскальзывать».

О квазипериодических последовательностях

Указания к упражнениям

1. а) Докажем утверждение индукцией по n. *База индукции.* Утверждение верно при $n=1$: последовательность S_1 продолжает S_0.
Шаг индукции. Очевидно, что если последовательность T продолжает последовательность R, то $\Pi(T)$ продолжает $\Pi(R)$. Положим $T = S_n$, $R = S_{n-1}$. Получим: если S_n продолжает S_{n-1}, то S_{n+1} продолжает S_n, что и требовалось.
б) Каждая новая последовательность продолжает предыдущую *влево*. Доказательство такое же, как в п. а).
3. Одно доказательство см. ниже (упр. 4, 5). Вот другое доказательство. Предположим, что S_∞ периодическая, и рассмотрим ее период минимальной длины. Сдвинем период так, чтобы он начинался с единицы, и обозначим его T. Тогда период разбивается на отрезки 100 и 10, т.е. существует последовательность T', для которой $\Pi(T') = T$. Заменим в последовательности S_∞ каждый отрезок 100 на 1, а каждый отрезок 10 на 0 (т.е. применим преобразование, обратное к Π). Новая последовательность периодична с меньшим периодом T'; но она совпадает с S_∞ (по упр. 2)! Противоречие с минимальностью длины периода.
4. Обозначим через a_n число единиц в S_n, через b_n — число нулей в S_n. Тогда $a_{n+1} = a_n + b_n$, $b_{n+1} = 2a_n + b_n$, и

$$c_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} + b_{n+1}} = \frac{a_n + b_n}{3a_n + 2b_n} = \frac{1}{2 + a_n/(a_n + b_n)} = \frac{1}{2 + c_n}.$$

Положим $d_n = c_n - \left(\sqrt{2} - 1\right)$. Имеем

$$d_{n+1} = \frac{1}{2 + c_n} - \left(\sqrt{2} - 1\right) = \left(\sqrt{2} - 1\right)\frac{\sqrt{2} - 1 - c_n}{2 + c_n} = -\frac{\sqrt{2} - 1}{2 + c_n} d_n,$$

так что $|d_{n+1}| < \frac{\sqrt{2} - 1}{2}|d_n|$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \sqrt{2} - 1$, что и требовалось доказать.
5. Пусть S — бесконечная периодическая последовательность с периодом из p единиц и q нулей и с начальным куском из r единиц и s нулей. Рассмотрим участок из первых N цифр в S. Пусть m таково, что $r+s+(p+q)(m-1) \le N < r+s+(p+q)m$, тогда плотность c_N единиц на участке удовлетворяет неравенствам

$$\frac{r + p(m-1)}{r + s + (p+q)m} = u_m \le c_N \le \frac{r + pm}{r + s + (p+q)(m-1)} = v_m.$$

При $N \to \infty$ обе последовательности u_m, v_m стремятся к $\frac{p}{p+q}$, и поэтому последовательность c_N также стремится к $\frac{p}{p+q}$, т.е. средняя плотность единиц в S, равная $\lim\limits_{N\to\infty} c_N$, рациональна, что и требовалось.
6. Пусть S'_∞ — объединение возрастающих влево последовательностей из упражнения 1, б), и $S = S'_\infty S_\infty$. Имеем $\Pi(S_\infty) = S_\infty$, $\Pi(S'_\infty) = S'_\infty$, следовательно, $\Pi(S) = S$ и S хорошая, что и требовалось.
7. Любой конечный кусок в S может быть многократным применением преобразования Π^{-1} «сжат» в кусок из двух цифр 01; то же верно для T. Отсюда все следует.
10. $b' = -b\left(\sqrt{2} + 1\right)$.
11. в) Если $b_1 - b_2 = m + n\sqrt{2}$, то l_1 получается из l_2 переносом на вектор $(-n, m)$, и $\Lambda_B(l_1)$ эквивалентна $\Lambda_B(l_2)$. Обратно, пусть $\Lambda_B(l_1) = \Lambda_1$ получается из $\Lambda_B(l_2) = \Lambda_2$ переносом на вектор $(-n, m)$; положим $b'_1 = b_2 + m + n\sqrt{2}$, рассмотрим прямую l'_1 с уравнением $y = \sqrt{2}x + b'_1$ и докажем, что $l'_1 = l_1$. Предположим, что это не так, скажем, $b'_1 > b_1$. По построению, ломаная Λ_1 прижимается сверху и к l_1, и к l'_1. Но этого не может быть, потому что между прямыми l_1 и l'_1 есть точка с целыми координатами (r, S), как показывает следующая

Лемма. Для любых чисел $b_1 < b'_1$ найдутся такие целые r и s, что $b_1 < s - r\sqrt{2} < b'_1$.

Доказательство. Возьмем такое большое N, что

$$\left(\sqrt{2} - 1\right)^N < b'_1 - b_1.$$

Найдется целое m, для которого $b_1 < m\left(\sqrt{2} - 1\right)^N < b'_1$.
Легко доказать (с помощью бинома Ньютона или индукцией по N), что число $m\left(\sqrt{2} - 1\right)^N$ имеет вид $s - r\sqrt{2}$ с целыми r, s. Лемма доказана.
г) Предположим, как в предыдущем пункте, что ломаная $\Lambda_1 = \Lambda_H$ (l_0) получается из $\Lambda_2 = \Lambda_B$ (l_0) переносом на вектор $(-n, m)$. Тогда ломаная Λ_1 прижимается *сверху* к прямой l_1 с уравнением $y = \sqrt{2}x + b$, $b = m + n\sqrt{2}$, причем в точке с координатами $(-n, m)$ ломаная Λ_1 касается прямой l_1. Рассмотрим прямую l'_1, получающуюся из прямой l_0 переносом на вектор $(1, -1)$. Легко видеть, что вся ломаная Λ_H (l_0) содержится в

полосе между l_0 и l_1' («полоса стандартной ширины»), а также (используя лемму из предыдущего пункта) что сколь угодно близко от прямой l_1' есть вершины ломаной. Отсюда аналогично п. в) заключаем, что $l_1 = l_1'$. Но ломаная $\Lambda_H\ (l_0)$ нигде не касается прямой l_1'. Противоречие.

12. а) Например, последовательности с числами $b_i = i\sqrt{3}$, $i=1$, 2, 3, ... попарно различны. Это следует из того, что $\sqrt{3}$ не представляется в виде $a + b\sqrt{2}$ с рациональными a, b (докажите). б) Пусть m_i — номер i-го горизонтального звена в ломаной $\Lambda = \Lambda_H\ (l)$. Очевидно, что это звено соединяет точки $\left(i, \left[i\sqrt{2}+b\right]\right)$ и $\left(i+1, \left[i\sqrt{2}+b\right]\right)$. Отсюда между 0-м и i-м горизонтальными звеньями имеется $\left[i\sqrt{2}+b\right] - [b]$ вертикальных звеньев, и получаем ответ:

$$m_i = \left[i\left(\sqrt{2}+1\right)+b\right] \text{ при } b \neq p + q\sqrt{2} \ (p, q \text{ целые});$$

$$m_i = \left[i\left(\sqrt{2}+1\right)\right] \text{ при } b = p + q\sqrt{2}, \ \Lambda = \Lambda_H\ (l_0);$$

$$m_i = -\left[-i\left(\sqrt{2}+1\right)\right] \text{ при } b = p + q\sqrt{2}, \ \Lambda = \Lambda_B(l_0).$$

в) воспользуемся свойством $\Pi(S) = S$ и упражнением 10. Получим $b' = -b\left(\sqrt{2}+1\right) = b + m + n\sqrt{2}$, откуда $b = p + q\sqrt{2}$ или $b = \frac{\sqrt{2}}{2} + p + q\sqrt{2}$.

Первая возможность отпадает, потому что $\Pi\left(\Lambda_B(l_0)\right) = \Lambda_H(l_0)$, $\Pi\left(\Lambda_H(l_0)\right) = \Lambda_B(l_0)$ и $\Lambda_B(l_0) \neq \Lambda_H(l_0)$ (упр. 11, г)); следовательно,

$$b = \sqrt{2}/2.$$

13. В полосе между l_1 и l_2 (не считая границы) нет узлов решетки, не лежащих на ломаной.

Указания к задачам

1. Действуйте аналогично упражнению 7.
2. Используйте упражнение 12, б), в).
5. Ответ на вопрос в скобках: получится ломаная, прижимающаяся к прямой с угловым коэффициентом $k_1 = \frac{1}{k+1-n_1} - 1$.

Задачи с нефиксированными фигурами

1. $\frac{8S^2}{3a}\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. 2. $\frac{2pq}{p+q}\cos\frac{\alpha}{2}$. 3. $\frac{ab^2}{3}\operatorname{tg}\alpha$.

Аэро- и гидростатика

1. $m = 4\pi r^2 p/g = 1{,}2\cdot 10^{20}$ кг, $h = RT/(Mg) = 18$ км.

2. $p_a = l\sqrt{1 + 2L/\Delta x} = 72$ см рт. ст.

3. $x = l_0 \frac{k\rho g\Delta H}{p + k\rho g\Delta H}$, $l = l_0 \frac{p}{p + k\rho g\Delta H} - k\Delta H$.

Санкт-Петербургский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. См. рис. 7. *Указание.*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin 2x, x \in \left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x, x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi\right), x \neq k\pi - \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

1.* 27. Чтобы число делилось на 15, оно должно оканчиваться на 5 или на 0, а его сумма цифр должна делится на 3. Учитывая ограничение на сумму квадратов цифр, находим, что, кроме числа 1005, условиям задачи удовлетворяют числа, оканчивающиеся на 0 и состоящие из следующих цифр (в скобках указано

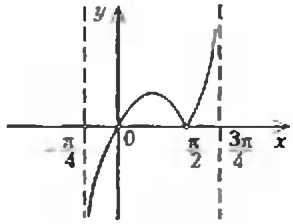


Рис. 7

количеству четырехзначных чисел, получающихся перестановкой первых трех цифр комбинации).

Сумма цифр 3: 3000 (1), 2100 (4), 1110 (1) (всего 6 чисел).

Сумма цифр 6: 5100 (4), 4200 (4), 4110 (3), 3300 (2), 3210 (6), 2220 (1) (всего 20 чисел).

2. $[512, +\infty)$. 3. $x \in \left[2\pi k - \frac{\pi}{4}, 2\pi k + \frac{3\pi}{4}\right]$ при $a = 1$; $x = (\pi/4) + 2\pi k$ при $a \neq 1$, $a \geq -1$; $x = (5\pi/4) + 2\pi k$ при $a \leq -1$.

После возведения в квадрат и простых преобразований получаем уравнение $(a-1)(\sin x - \cos x) = 0$. Если $a \neq 1$, то $\sin x = \cos x$, $x = (\pi/4) + \pi k$. Поскольку должно выполняться неравенство $a\cos x + \sin x \geq 0$, то $(-1)^n(a+1) \geq 0$. Если же $a = 1$, то $\sin x + \cos x \geq 0$.

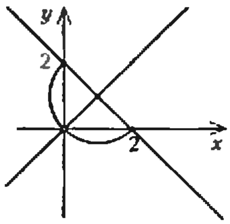


Рис. 8

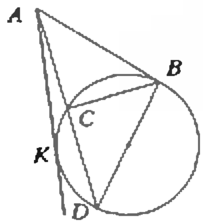


Рис. 9

3.* См. рис. 8. *Решение.* Нужно рассмотреть два случая:
1) x и y одного знака — I и III квадранты:
$(x-y)(x+y) = 2(x-y)$, таким образом, $x = y$ или $x + y = 2$.
2) x, y разных знаков — II и IV квадранты:
$x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0$, получаем уравнение окружности
$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$.
Осталось еще учесть, что $y \neq 0$, $x \neq 2$.

4. $\frac{\sqrt{10}}{2}a$. По известной теореме $AC\cdot AD = AK^2 = 4a^2$ (рис. 9), откуда $AD = 4a$ и $CD = AD - AC = 3a$. Следовательно,

$$4R^2 = BD^2 = BC^2 + CD^2 = 10a^2.$$

4.* $x = 2k\pi; (2k+1)\pi - \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. *Решение.* Преобразуя, получаем (ясно, что $\sin x \geq 0$)

$$\cos x + \sqrt{\sin x} = \cos^2 x - \sin x = \left(\cos x + \sqrt{\sin x}\right)\left(\cos x - \sqrt{\sin x}\right).$$

1) $\cos x - \sqrt{\sin x} = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$.

2) $\cos x + \sqrt{\sin x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x + \sin x - 1 = 0, \\ \cos x \leq 0 \leq \sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \\ \cos x \leq 0. \end{cases}$

5. Верхняя часть ребра составляет $\left(\sqrt{5}-1\right)/2$ его длины. Пусть $k = SP/SC$. Тогда

$$V_{BPQ} = \frac{1}{3}S_{ABPQ}\cdot SR = \frac{1}{3}\frac{k+1}{2}\cdot a\cdot KL\cdot SR =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{k+1}{2}\cdot a\cdot 2S_{KLS} = \frac{1}{3}\frac{k(k+1)}{2}\cdot a\cdot 2S_{SKM} =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{k(k+1)}{2}\cdot a\cdot a\cdot H = \frac{k(k+1)}{2}V_{ABDS}.$$

По условию $k(k+1) = 1$, и поэтому $k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Вариант 2

1. 18 км/ч. Пусть v — скорость катера в спокойной воде. Чтобы догнать плот, ему потребовалось $3/v$ часов, а чтобы вернуться обратно — $\frac{3(v+3)}{v(v-3)}$ часов, таким образом,
$$\frac{3}{v}+\frac{3(v+3)}{v(v-3)}=\frac{2}{5}.$$
2. $\left(0;\frac{1}{4}\right]\cup\left(\frac{1}{\sqrt{8}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.
3. $\alpha=\arcsin\frac{3}{5}$, $\beta=\arcsin\frac{4}{5}$, $\gamma=\frac{\pi}{2}$. Так как $\cos\gamma=\cos(\pi-\alpha-\beta)=-\cos(\alpha+\beta)$, получим систему
$$\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta=\frac{7}{5},\\ \cos\alpha\cos\beta=\frac{12}{5},\end{cases}$$
откуда $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=\frac{3}{5}$ (или наоборот).
4. $2(2-\sqrt{3})r^2$. Пусть $\alpha=\angle BAA'$, K — середина стороны $A'B'$ (рис.10). Поскольку $OK=\frac{r}{\sqrt{2}}$, $OA=r\sqrt{2}$, то $\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{1}{2}$,

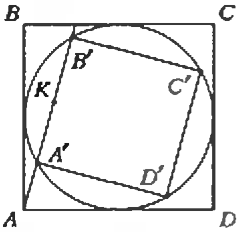


Рис. 10

откуда $\alpha=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$ и $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1-1/\sqrt{3}}{1+1/\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$. Поэтому искомая площадь равна $\frac{1}{2}(2r)^2\operatorname{tg}\alpha=2r^2(2-\sqrt{3})$.
5. $a\ge-\frac{25}{4}$. Замена $t=x+1$ приводит к уравнению $(t^2-5t+6)(t^2+5t+6)=a$, т.е. к биквадратному уравнению $t^4-13t^2+36=a$. Последнее уравнение разрешимо, если $13^2-4(36-a)\ge0$.

Санкт-Петербургский государственный технический университет «Политехнический институт императора Петра Великого»

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 5. 2. $\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};-1\right)\cup\left(2;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$.
3. 3. *Указание*. Искомое отношение равно отношению чисел $\sin(2\alpha+2\beta)+\sin2\beta$ и $\sin(2\alpha+2\beta)-\sin2\beta$.
4. $\sqrt{13}$. *Указание*. Центры O, Q заданных окружностей и произвольная точка P окружности с диаметром OQ, общая заданным кругам, лежат на диагоналях (или продолжениях диагоналей) ромба с центром P.
5. 3. *Указание*. Из теоремы Виета для многочленов третьей степени получаем систему
$$\begin{cases}2a+b+c=-a,\\ 2ab+2ac+bc=b,\\ 2abc=-c.\end{cases}$$
Если $c=0$, то $3a+b=0$ и $2ab=b$, $b\ne0$. Отсюда $a=1/2$, $b=-3/2$. При $c\ne0$ получаем систему
$$\begin{cases}3a+b+c=0,\\ 2ab+2ac+bc=b,\\ 2ab=-1,\end{cases}$$
исключив из которой a и c, получим уравнение $2b^4+2b^3-3b^2+3=0$, или $(b+1)(2b^3-3b+3)=0$. Отсюда либо $b=-1$, $a=1/2$, $c=-1/2$, либо $2b^3-3b+3=0$. Это уравнение имеет единственный корень b_0 (убедитесь в этом). При этом $2a=-1/b_0$, $c=\frac{3-2b_0^2}{3}$. Числа $2a$, b и c различны.

Вариант 2

1. πn; $(-1)^k\pi/6+\pi k$, $n, k\in\mathbf{Z}$.
2. $a\in(-\infty;-1)\cup(1/3;\ 1/2)\cup(1/2;\ +\infty)$. *Указание*. Представьте левую часть уравнения в виде $\sin x(2\cos x+1)(2a\cos x-a+1)$.
3. $f(x)=5$ при $x=5/3$. *Указание*. $f(x)$ — длина ломаной ABC с вершинами $A(-1;\ 2)$, $B(x;\ 0)$, $C(3;\ -1)$ $(x\ne5/8)$.
4. $p\in\{-2\}\cup\left[-\sqrt{7}/2;\ \sqrt{7}/2\right)$. *Указание*. Обозначив $2x+p=t\sqrt{7}$, рассмотрите на плоскости pOt геометрический образ получившегося уравнения. Найдите точки оси Op, в которые проецируются ровно 2 точки этого образа.
5. $8\sqrt{5}$, $3\sqrt{55}$. *Указание*. Условию, поставленному в первой части задачи, удовлетворяют 4 пирамиды.

Вариант 3

1. $\sqrt{2}-1$. 2. 1. 3. $l/\sqrt{6}$. *Указание*. Для правильной треугольной пирамиды $\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{tg}\beta$.
4. 1/5, 2/5, 1, 2. *Указание*. Запишите свойство 2π-периодичности f в виде $f(x-\pi)-f(x+\pi)=0$, затем, преобразовав разности косинусов в произведения синусов, докажите утверждение: если $\lambda\ne\mu$ $(\lambda,\mu>0)$ и при всех x $A\sin\lambda x=B\sin\mu x$, то $A=B=0$.
5. Решение существует при всех $p\ne0$, например, $x=p-2$, $y=1/(2p)-1$, единственно для $p>0$ и пробегает правую ветвь гиперболы $(x+2)(y+1)=1/2$ при изменении p. *Указание*. Геометрически решение — точка пересечения двух парабол (с вертикальной и горизонтальной осями), оно единственно, если параболы лежат по разные стороны от общей касательной.

Вариант 4

1. $5-\sqrt{12}$. 2. ±3; -1; 0; 2; 5.
3. $x_1=\pi l\pm\frac{\pi}{6}$; $y_1=2\pi k-\pi l\mp\frac{\pi}{6}$; $x_2=\pi l\pm\frac{\pi}{4}$, $y_2=2\pi k-\pi l\mp\frac{\pi}{4}$, $k, l\in\mathbf{Z}$.
4. $p\in\{-2\}\cup[0;2)\cup(2;+\infty)$. *Указание*. Представив уравнение в виде
$$\sqrt{x-p}(x-2)(2x-p^2)=0,$$
рассмотрите на плоскости pOx геометрический образ получившегося уравнения. Найдите точки оси Op, в которые проецируются ровно 2 точки этого образа.
5. 97. *Указание*. Заметив, что ΔABM равнобедренный, примените теорему о касательной и секущей, а затем используйте тождество параллелограмма.

Вариант 5

1. $(-\infty;-1]\cup(0;+\infty)$. 2. $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi m}{4}$, $n, m\in\mathbf{Z}$.
3. Хорда $2x-3y=13$ круга $x^2+y^2<182$ или, другими словами, множество внутренних точек отрезка с концами $(2+3\sqrt{13};\ 2\sqrt{13}-3)$ и $(2-3\sqrt{13};\ -2\sqrt{13}-3)$.
4. Четыре решения: (0;3;0), (0;3;1), $(\pm\sqrt{2}/2;\ 4;\ 1/2)$. *Указание*. Из первого равенства следует, что либо $x^2=0$, либо $2x^2\ge1$.
5. 2. *Указание*. Выразив по формуле Герона квадраты площадей ΔACD и ΔDCB через радиусы окружностей, вычтите равенства почленно. Отдельно рассмотрите случай $AC=BC$.

ФИЗИКА

1. $A_{min} = 2mgh = 10^3$ Дж. 2. $R = \dfrac{2\pi kl}{4\pi^2 k - \omega^2 m}$. 3. $t_1 = t\sqrt{l/2}$.

4. $\varphi_{max} = \arccos\dfrac{mv^2 - W_0 + 2W_1}{mv^2 + W_0 - 2W_1}$. 5. $l_1 = 72$ см, $l_2 = 50$ см.

6. $\Delta U = 3/5Q$, $A = 2/5Q$. 7. $A = \dfrac{mR(T_2 - T_1)}{2M} = 830$ Дж;

$Q = \dfrac{2mR(T_2 - T_1)}{M} = 3320$ Дж.

8. $I = \pi r^2 B_0/L$. 9. $h = 2r/(n^2 - 1)$. 10. $v_1 = 2v = 0{,}4$ м/с.

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. а) $x \in \boldsymbol{R}$ для $n = 1, 2$; $x \in \left(-\infty; -n - \sqrt{n^2 - 9}\right) \cup \left(-n + \sqrt{n^2 - 9}; +\infty\right)$ для $n \geq 3$. б) $f_3(x) = (1/3)(x + 3)\cdot(x - 3)$, $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$, см. рис. 11. в) 4. 2. $(2;7) \cup (22;27)$. 3. $-1, 0, 1$. 4. 1.
5. $\dfrac{c^3}{24}\sin 2\beta \operatorname{tg}\alpha$.

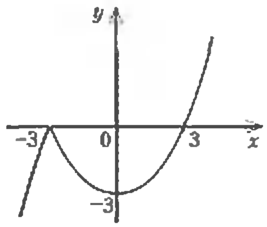


Рис. 11

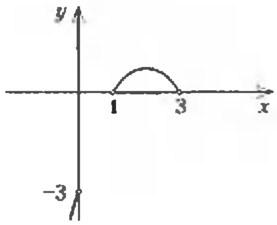


Рис. 12

Вариант 2

1. $f\left(b\sqrt{2}\right) = 2\left(b + \sqrt{2}\right)$. 2. а) $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 3)$.
б) $g(x) = 4x - 3 - x^2$, $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 3)$, см. рис. 12. в) 2.
3. 0; $\dfrac{\pi}{2}$. 4. $(1/2)\sqrt{3b^2 - a^2 + 2ab}$. 5. $6\sqrt{15}$.

Государственная академия нефти и газа им. И.М.Губкина

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 1,2. 2. 9. 3. 144. 4. −2. 5. 4. 6. 2. 7. 1. 8. 163. 9. 10. 10. 16. 11. 6. 12. 13.

Вариант 2

1. 3. 2. 0. 3. 9,4. 4. 7. 5. 4. 6. 1. 7. 1. 8. 3. 9. 1,3. 10. 47. 11. 31,2. 12. 0,6.

ФИЗИКА

1. 3. 2. 8 Н. 3. 32 кН. 4. 57600 км. 5. 25%. 6. 3. 7. 8. 8. 6 м/с. 9*. 3. 10*. 80 см. 11*. 125 мВ. 12*. 24°.

Избранные задачи Московской физической олимпиады

9 класс

1. $\omega = \sqrt{(2g/l)\cos\alpha}/\sin\alpha$. 2. $x = h(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta)m/(M + 2m)$, $x > 0$ при $\alpha < \beta$. 3. $m_л/m_с = 3/2$.

10 класс

1. $s = \left(v_0^2 \sin 2\alpha\right)/\left(g(1 - R)\right) \approx 10$ м. 2. $t = 8m^2 l_0/\left(36m^2 v_0\right)$.

3. $\Delta T \approx T v_м Mg/(rS) \approx 2{,}8$ К. 4. $l = \dfrac{L\left(\pi - 8\operatorname{arctg}\dfrac{mg - 2\sigma L}{mg + 2\sigma L}\right)}{2\sqrt{2}\left(\dfrac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\dfrac{mg - 2\sigma L}{mg + 2\sigma L}\right)}$.

11 класс

1. $R_п = R\sqrt{2}$. 2. $\omega = k\omega_0$. 3. $\lambda = \sqrt{\pi D^2/(40W)} \approx 1{,}3$ мкм; $W_1 = \pi D^2/\left(40\lambda_1^2\right) \approx 9$ Гбайт. 4. $\tau_1 = 1{,}924$ с; $\tau_2 = 2$ с; $\tau_3 = 2{,}4$ с.

5. $T_1 = T_2 \dfrac{2S_2}{2S_2 - \eta(S_1 + S_2)}$. 6. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{3mV}{5(p_0 + mg/S)S^2}}$.

7. $a_{уст} = a = mg\mu\sqrt{2}/\left(k(1 + \mu)\right)$ при $a_0 \geq a$, $a_{уст} = a_0$ при $a_0 < a$.

Кроссворд «Только про механику»

(см. «Квант» №2)

По горизонтали: 1. Бернулли. 3. Аэростат. 8. Стокс. 10. Сифон. 12. Блок. 13. Сила. 16. Пресс. 17. Карат. 18. Грамм. 22. Волчок. 24. Работа. 25. Гук. 26. Период. 27. Осадка. 28. Аршин. 30. Опора. 33. Ролик. 37. Умов. 38. Игла. 39. Эйлер. 40. Сутки. 42. Ареометр. 43. Кориолис. **По вертикали:** 1. Бас. 2. Лаплас. 4. Эхолот. 5. Тон. 6. Ракета. 7. Высота. 9. Тембр. 11. Объем. 14. Ускорение. 15. Протектор. 16. Пружина. 19. Маховик. 20. Покой. 21. Масса. 23. Пуд. 29. Рэлей. 31. Подвес. 32. Радиус. 34. Игрек. 35. Момент. 36. Колесо. 39. Эта. 41. Икс.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
В.Н.Власов, В.М.Митурич-Хлебникова, С.А.Стулов, Л.А.Тишков, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
М.Н.Грицук, Е.А.Митченко, Е.В.Титова

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ
Л.А.Панюшкина

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ
Е.В.Самойлова

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64а, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №2278

Чертова дюжина чемпионатов

Чемпионаты мира среди роботов проводятся, как известно, в двух «весовых категориях». В одни допускаются все компьютеры независимо от быстродействия и мощности. В этом случае его называют суперчемпионатом или просто первенством мира — в нем участвуют и машины-монстры, и микророботы, и программы для любых вычислительных устройств, в том числе для PC. В другом турнире играют только программы для PC или специализированные шахматные машины, и речь идет о чемпионатах мира среди микрокомпьютеров.

Напомним, что суперчемпионаты проводятся раз в три года, начиная с 1974-го, а микрочемпионаты почти ежегодно — с 1980-го. До недавних пор открытые чемпионаты были гораздо престижнее, а чемпионаты мира среди микрокомпьютеров рассматривались больше как развлекательное шоу. Однако последний, восьмой суперчемпионат, который состоялся в прошлом году в Гонконге, неожиданно закончился победой программы «Fritz», написанной для PC с микропроцессором «Пентиум». Такой итог стал настоящей сенсацией. Никогда прежде программы для PC не обгоняли в чемпионатах суперкомпьютеры. И похоже, что гонконгский турнир ознаменовал переход к новой шахматно-компьютерной эпохе. Поскольку усилия всех специалистов в области компьютерных шахмат направлены сейчас на совершенствование программ для PC (прежде всего из-за коммерческих соображений), видимо, эти программы уже не будут уступать электронным монстрам, обладающим гораздо большими памятью и быстродействием.

Итак, к 13-му чемпионату среди микрокомпьютеров — а именно ему и посвящена настоящая статья — у всех, кто интересуется компьютерными шахматами, было совсем иное отношение, чем раньше — как к полноценному чемпионату мира. Он прошел в конце прошлого года в немецком городе Падеборн. Участвовало 36 программ, состязавшихся по швейцарской системе в 11 туров, большинство из них играло на PC с микропроцессором «Пентиум 120». Контроль времени составлял 1 час на первые 30 ходов и 1 час на каждые последующие 40.

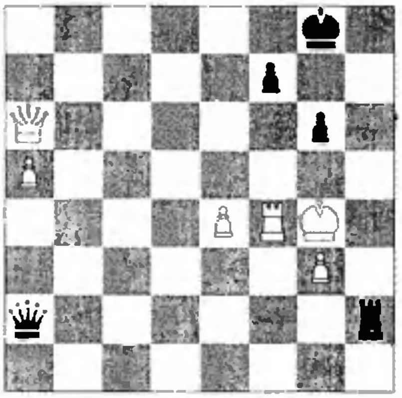
Первые два места в Германии разделили гости — американская «M-Chess» («М-Чесс») и английская «Chess Genius» («Чесс Гениус»). Первая из них уже выигрывала чемпионат мира среди программ для PC (Ванкувер, 1991), вторая известна своей победой в гроссмейстерском турнире по быстрым шахматам над Гарри Каспаровым. Разумеется, в чемпионате играли новейшие модификации этих программ — «M-Chess Pro 5.0» и «Chess Genius 3.0».

Победительницы набрали по 8 очков из 11, и между ними была назначена дополнительная партия с укороченным контролем 1 час на 60 ходов. В напряженной борьбе «M-Chess» одержала победу на 78-м ходу и была объявлена чемпионкой мира (разработчик программы Марти Хирш). «Chess Genius» на втором месте, а 3–5-е разделили программы «Ferret» (США), «Nimzo» (Австрия) и «Virtual Chess» (Франция) — 7,5 очков. Еще на пол-очка отстали сразу четыре программы и среди них предыдущий микрочемпион «англичанка» «Hiarcs».

А где же настоящие микрокомпьютеры, ведь чемпионат проводится среди них (что отражено и в его названии)? В том-то все и дело, что название чемпионата традиционное, а из шахматных автоматов в нем участвовал ныне один «Mephisto» («Мефисто»), да и тот после десятилетнего доминирования в мире шахматных роботов, можно сказать, провалился, не набрав и 50 процентов очков. Если программы для PC превзошли своих суперпротивников, то уж с микротехникой они справляются и подавно.

К сожалению, в первенстве не участвовала программа «Fritz», которая, как уже говорилось, несколькими месяцами раньше выиграла большой чемпионат мира. Возможно, программа готовилась к матчу из двух партий с Гарри Каспаровым, который состоялся спустя месяц. Правда, на сей раз особой борьбы не получилось. Каспаров легко и быстро выиграл первую партию, близок был к цели и во второй, но в эндшпиле решил не рисковать и закончил дело ничьей.

К заключительному туру «Genius» и «M-Chess» пришли с одинаковым результатом — 7,5 очков. Английская программа свою партию завершила вничью, и все зависело от ее соперницы, которая играла эндшпиль без пешки.



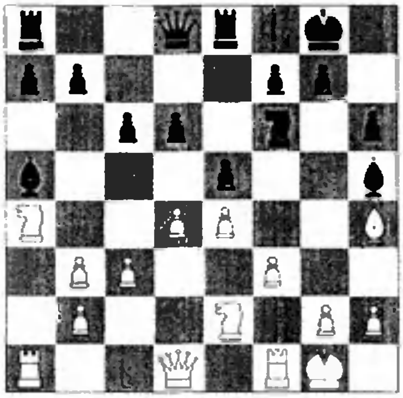
Однако «M-Chess» нашла изящный способ форсировать ничью и, таким образом, догнала конкурентку.

1...Лh4+ 2. Кр:h4 (2. gh?? Фg2 ×) **2...Фh2+ 3. Крg5** (3.Крg4?? Фh5 ×) **3...Ф:g3+ 4. Лg4 Фе5+ 5. Крh4 Фh2+** с вечным шахом.

А вот, пожалуй, лучшая партия новой чемпионки мира.

«M-Chess» — «Quest»
Венская партия

1. е4 е5 2. Сс4 Кс6 3. Кс3 Кf6 4. d3 Сb4 5. Ке2 Ка5 6. Сb3 0-0 7. 0-0 d6 8. Сg5 с6 9. d4 Сg4 10. f3 Сh5 11. Ка4 К:b3 12. ab h6 13. Сh4 Ле8 14. с3 Са5.



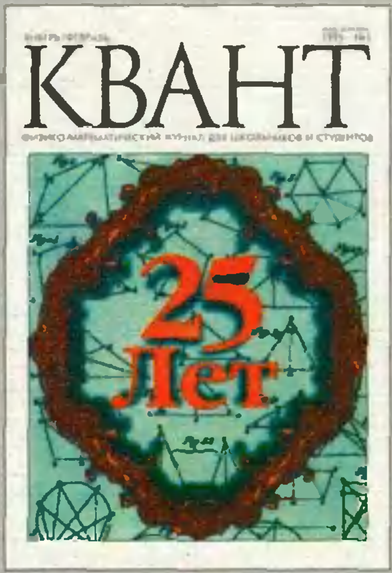
15. Фd3! Если предположить, что компьютер предусмотрел все дальнейшие события, то его игру следует признать просто выдающейся... Сейчас после 15... Сс7 16. b4 у белых сохранялась небольшая инициатива, но ведь черные могут выиграть фигуру... **15...b5?!** Как ни странно, белый конь на а4 будет съеден только через семь ходов, и как раз тогда обнаружится, что погоня за ним была напрасной. **16. b4! Сс7 17. dе Л:е5.** Возможно, надежнее 17...dе, но в этом случае конь просто перемещался на с5. **18. Кg3!**

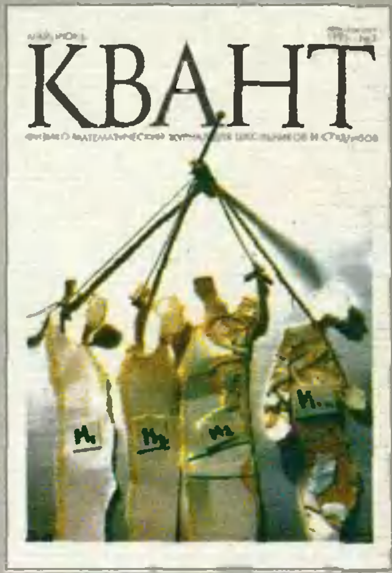
И вновь нет времени для 18...bа — 19. f4 Лb5 20. с4, и ладья не удерживает слона h5, после же 20...g5 21. fg hg 22. сb gh 23. К:h5 К:h5 24. Фf3 белые берут верх. Не помогает и 18...Сg6 19. f4 Ле8 20. f5 Сh7 21. Кh5 d5 22. С:f6 gf 23. Фd2! с разгромом.

18...g5. Теперь у белых под боем сразу две фигуры, но следует решающий встречный удар. **19. f4! gh 20. fе hg 21. Л:f6 gh+ 22. Крh1 bа.** Упорнее 22...dе, правда после 23. Фg3+ Крh7 24. Лаf1 Фе8 25. Кс3 конь выходит на свободу, и у белых заметный перевес. **23. Лаf1!** Казалось бы, у черных два слона за ладью, т.е. явно лучшие перспективы, но, подтягивая вторую ладью, белые достигают решающего перевеса. **23...Фf8.** Или 23...dе 24. Фg3+ Крf8 25. Л:h6. **24. е6! Фg7 25. еf+ Крf8 26. Фа6! Сb6 27. Фb7 Лd8 28. Ле6!** Черные сдались, на 28...Фg5 следует 29. Фd7!!, и все кончено.

Е. Гик

Индекс 70465





Уважаемые читатели журнала «КВАНТ».
Мы надеемся, что вы не забыли о нашем журнале
и своевременно оформили подписку на 1996 год.
Если же по каким-то причинам этого не произошло, не расстраивайтесь —
вы сможете подписаться на журнал и в помещении редакции.
Это избавит вас от возможных недоразумений, связанных с доставкой через почту.
В редакции можно также приобрести журналы «КВАНТ»
и Приложения к ним за прошлые годы.
Наш адрес: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64а, «КВАНТ»
тел. 930-56-48
Мы ждем вас ежедневно с понедельника по пятницу с 11 до 17 часов.
Звоните и приходите!