ISSN 0130-2221
МАРТ/АПРЕЛЬ 1996 · №2

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

КОЛЬЦА И ПЕТЛИ

В конце октября прошлого года в румынском городе Брашов прошло четвертое первенство мира по головоломкам, в котором, впервые в короткой истории этих соревнований, участвовала команда России.

В одном из номеров журнала мы расскажем о нем подробнее, а пока хотим познакомить вас с головоломкой, которую команда США дарила всем участникам в качестве сувенира (выпускается эта игрушка в Дании). Вам, конечно, понятно задание — расцепить веревочные петли. Решить эту задачу в уме непросто. Если она вам понравится и вы захотите изготовить головоломку, возьмите достаточно толстую нерастяжимую веревку. Длину петли нужно взять примерно равной сумме внешнего и внутреннего диаметров жесткого кольца: кольцо не должно проходить через петлю.

Интересно, что аналогичным образом можно сцеплять и расцеплять два, … — и вообще любое (теоретически) число элементов «кольцо + петля».

В.Дубровский

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

МАРТ/АПРЕЛЬ · 1996 · №2

В номере:

Лев Генрихович Шнирельман

В. ТИХОМИРОВ, В. УСПЕНСКИЙ

В январе 1995 года исполнилось 90 лет со дня рождения Л.Г.Шнирельмана — одного из самых замечательных математиков тридцатых годов.

Еще не до конца осмыслено это чудо двадцатого века: феномен Московской математической школы. В 1914 году в Москве работал лишь один математик, *имевший международный* авторитет (причем в достаточно узкой области дифференциальной геометрии). Это был Дмитрий Федорович Егоров. А в это время во Франции творили такие гиганты, как Пуанкаре, Пикар, Адамар, Лебег, Борель, в Германии — Клейн, Гильберт, Вейль — великие математики широчайшего диапазона. Они принадлежали крупнейшим математическим школам, формировавшимся несколько столетий!

И вот прошло всего двадцать лет — ничтожный исторический срок (семь лет из них шли войны, опустошившие нашу страну). Но когда в середине тридцатых годов известного американского тополога С.Лефшеца спросили, кто, по его мнению, является самым замечательным молодым математиком во всем мире, он назвал четверых: Гельфонда, решившего одну из проблем Гильберта, Колмогорова, внесшего выдающийся вклад в теорию тригонометрических рядов, в теорию вероятностей, в топологию и многие другие области математики, Понтрягина, открывшего новые области в топологии и анализе, и Шнирельмана, получившего поразительные результаты в теории чисел, топологии и вариационном исчислении.

А еще надо вспомнить ярчайшую фигуру Урысона, погибшего в 26 лет, Александрова, Бари, П.Новикова, Лаврентьева, Люстерника, Петровского, Хинчина, переживавших золотой век своего творчества, в те же годы делал свои первые шаги в науке Гельфанд...

Но и в этом соцветии замечательных талантов творчество Шнирельмана отличалось какой-то неповторимой яркостью.

Л.Г.Шнирельман родился 2 января 1905 года в Гомеле. Там он прожил до 16 лет. Отец его был учителем русского языка.

Лев Генрихович очень рано обнаружил выдающиеся способности. Он рисовал, писал стихи, в 12 лет самостоятельно прошел курс элементарной математики. В течение нескольких месяцев мальчик посещал физико-математические курсы для окончивших среднюю школу. Там на Шнирельмана обратил внимание преподаватель, *который добился того, чтобы мальчика* направили в Москву для продолжения образования.

В 15 лет он испробовал свои силы в самостоятельной работе. Согласно одной из легенд (которые всегда сопровождают жизненный путь выдающегося человека), он приехал в Москву в шестнадцатилетнем возрасте поступать в Московский университет, привезя с собой записанную в школьной тетради (на ужасной бумаге — другой в ту трудную пору не было) теорему о разбиении сферы (мы обсудим ее чуть дальше), теорему, которая сыграла основополагающую роль при решении (найденном Шнирельманом совместно с Лазарем Ароновичем Люстерником) проблемы Пуанкаре о трех геодезических. Решение проблемы Пуанкаре сделало имя Шнирельмана известным всему миру.

Окончив университет за два с половиной года, Шнирельман поступил в аспирантуру Института математики и механики Первого МГУ. Он, как и все остальные названные нами математики (за исключением Понтрягина — ученика Александрова и Петровского — ученика Егорова), был учеником Николая Николаевича Лузина. Лазарь Аронович вспоминал, что Лузину (по-видимому, склонному в некоторой мере к мистическому восприятию мира) как-то приснился сон, что к нему придет юноша («с теми же анкетными данными», что и Лев Генрихович, как писал Л.А.) и решит проблему континуума. И когда к нему явился юный Шнирельман, он воспринял его как посланца небес. Увы, Шнирельман проблему континуума не решил, решения ее пришлось ждать *чуть больше шестидесяти лет*, когда ее осилил Пол Коэн.

Три своих самых замечательных результата Шнирельман опубликовал в течение двух лет — 1929 и 1930 годов. Вот формулировки этих его результатов.

Теорема 1. *В любую замкнутую кривую на плоскости можно вписать квадрат.*

Возьмем нить, свяжем ее концы и бросим нить на стол. Получилась «замкнутая кривая». Так вот, как бы мы *эту кривую ни бросали, на ней* найдутся четыре точки, которые являются вершинами квадрата.

Теорема 2. *На любой гладкой поверхности типа сферы имеется три замкнутых геодезических.*

Найдите на берегу моря (или мысленно) какой-нибудь гладкий камешек. Возьмите тонкую аптечную резиночку. Попробуйте надеть резиночку на камешек так, чтобы она «не сползала». Если вам это удастся, вы нашли замкнутую геодезическую. На шарообразном мячике замкнутые геодезические — большие круги: если вы чуть-чуть собьетесь с большого круга, резиночка соскочит. А на эллипсоиде — всего три замкнутых геодезических: сечения этого эллипсоида плоскостями, проходящими через его оси. Гипотеза Пуанкаре состояла в том, что «на любом гладеньком камешке» имеется не меньше трех различных замкнутых геодезических. В 1929 году Люстерник и Шнирельман доказали гипотезу Пуанкаре, и это стало всемирной сенсацией.

Теорема 3. *Существует натуральное N такое, что любое натуральное число есть сумма не более чем N простых чисел.*

Проблема. *Всякое ли натуральное число, большее или равное шести, может быть представлено в виде суммы трех простых чисел?*

Такой вопрос поставил перед Эйлером Христиан Гольдбах — немецкий математик, полжизни проживший в России и умерший в Москве. Он задал этот вопрос в письме от 7 июня 1742 года. В ответном письме (от 30 июня 1742 года) Эйлер указывал, что для решения этой проблемы достаточно доказать, что любое четное число, большее или равное 4, есть сумма двух простых.

Первым сдвигом в исследовании этой проблемы (до конца не решенной по сей день) был результат Шнирельмана. (Впрочем, к тому времени были опубликованы исследования Харди и Литтлвуда, в которых гипотеза Гольдбаха доказывалась (для достаточно больших натуральных чисел) в предположении, что верны некоторые другие (не доказанные и по сей день) гипотезы. В 1937 году И.М.Виноградов доказал гипотезу Гольдбаха для достаточно больших натуральных чисел.) Но особое значение имел не сам факт представимости любого числа ограниченным числом простых (тем более, что у самого Шнирельмана число слагаемых оценивалось в несколько сотен тысяч), а своеобразный и очень оригинальный метод, с помощью которого удалось сдвинуть эту и множество других проблем. О нем мы также скажем несколько слов.

В 1931 году Шнирельман был командирован за границу на три месяца и там имел огромный успех. Он работал некоторое время в Геттингене — Мекке математики того времени, где жил и творил в ту пору великий Гильберт. (Шнирельман запомнился многим тогда не только своими феноменальными результатами, но и тем, что «walked barefoot through the streets of Göttingen» — прогуливался босиком по улицам Геттингена, — как писала Констант Рид в книге о Куранте.) Ему было предложено написать монографию для наиболее престижного немецкого издательства, но этому не дано было осуществиться: к власти в Германии пришли фашисты.

В 1933 году Шнирельман был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР.

В 1934 году правление Московского математического общества приняло решение о проведении первой Московской школьной олимпиады по математике. В оргкомитет по проведению олимпиады вошел Л.Г.Шнирельман. Он был одним из инициаторов школьного математического кружка при МГУ (наряду с Люстерником и Гельфандом). Тогда же профессора и преподаватели два раза в месяц по воскресеньям читали в университете лекции для школьников. Шнирельман был одним из организаторов этих лекций. Он прочитал, в частности, лекции по многомерной геометрии, по теории групп.

Одним из первых Шнирельман стал культивировать в Москве выпуклую геометрию. Он написал замечательную работу по приложению выпуклой

Лев Генрихович Шнирельман

геометрии к теории наилучшего приближения (опубликованную посмертно).

Еще об одной работе Шнирельмана надо сказать — о его статье, написанной совместно с Л.С.Понтрягиным, о «метрическом определении размерности». Эта работа оказала влияние на разработку концепции ε-энтропии Колмогорова.

Лев Генрихович очень дружил с Люстерником, Гельфондом, Гельфандом. Многие вспоминали о нем, как о личности большого масштаба, человеке мягком и деликатном, имевшем многогранные интеллектуальные запросы, человеке остроумном, наблюдательном, одухотворенном и очень обаятельном.

Жизнь его оборвалась трагически: 24 сентября 1938 года он покончил с собой. Те люди старшего поколения, с кем нам доводилось говорить на эту тему, связывали этот шаг Льва Генриховича с кровавым безумием того времени: они говорили, что Лев Генрихович попал в поле зрения НКВД и, устрашившись этого, решил покончить с жизнью. Быть может, истина откроется, когда кто-то из людей, пожелающих узнать правду, доберется до архивов КГБ.

А теперь пришло время рассказать чуть подробнее о поразительных теоремах Шнирельмана. Начнем с результата, полученного юным Шнирельманом, о котором мы уже упомянули.

Теорема о раскраске сферы. *Пусть сфера окрашена в три цвета. Тогда найдется пара антиподов (т.е. диаметрально противоположных точек), раскрашенных в один цвет.*

Эта формулировка нуждается в уточнении. Раскрасить сферу S в три цвета — это значит указать три множества F_1, F_2, F_3, объединение которых равно S. При этом не требуется, чтобы эти три множества не пересекались; иными словами, каждая точка может быть одновременно окрашена в несколько цветов.

Если ничего не предполагать о множествах F_i, то приведенное выше утверждение, очевидно, неверно: сферу можно разбить на две непересекающиеся части F_1, F_2 так, что для любой пары антиподов x, y одна из точек x, y принадлежит F_1, а другая F_2. Однако при любом таком разбиении множества F_1 и F_2 оказываются незамкнутыми: одно из них обязательно содержит непустую часть границы другого. (Множество F, расположенное, скажем, на плоскости или в пространстве, называется замкнутым, если оно содержит свою границу; это равносильно тому, что всякая точка, не принадлежащая множеству, удалена от него на положительное расстояние, а не примыкает вплотную.)

Теперь мы можем дать правильную формулировку теоремы о раскраске сферы.

Теорема 4. *Пусть сфера покрыта тремя замкнутыми множествами. Тогда одно из них содержит пару антиподов.*

Под сферой мы понимали до сих пор обычную двумерную сферу S^2, которая расположена в трехмерном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ и задается уравнением $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Аналогично определяется n-мерная сфера S^n для любого натурального n: она расположена в $(n+1)$-мерном пространстве $\boldsymbol{R}^{n+1}$, состоящем из наборов чисел $(x_1, \ldots, x_{n+1})$, и является множеством решений уравнения

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1.$$

Если $(x_1, \ldots, x_n)$ — точка n-мерной сферы, то ее антипод — точка $(-x_1, \ldots, -x_{n+1})$. Шнирельман доказал свою теорему для сфер произвольной размерности: *если n-мерная сфера раскрашена в $n+1$ цветов (т.е. покрыта замкнутыми множествами $F_1, \ldots, F_{n+1}$), то найдется пара одноцветных антиподов.*

Теорема Шнирельмана эквивалентна другой теореме, которую доказали в тридцатые годы польские математики К.Борсук и С.Улам: *всякое непрерывное отображение f сферы S^n в евклидово пространство $\boldsymbol{R}^n$ склеивает некоторую пару антиподов.* Иными словами, найдется такое $x \in S^n$, что $f(x) = f(-x)$. (Все отображения здесь и далее предполагаются непрерывными.) Еще одна эквивалентная формулировка теоремы Борсука – Улама такова: *не существует нечетного отображения $f: S^n \to S^{n-1}$.* При этом отображение f называется нечетным, если $f(-x) = -f(x)$.

Давайте разберемся, почему все три приведенные выше утверждения эквивалентны. Обозначим их: Ш (теорема Шнирельмана о раскраске сферы), БУ$_1$ (теорема о склеивании антиподов) и БУ$_2$ (теорема о несуществовании нечетного отображения). Поскольку $S^{n-1} \subseteq \boldsymbol{R}^n$, то всякое отображение в S^{n-1} можно рассматривать как отображение в $\boldsymbol{R}^n$. Таким образом, импликация БУ$_1 \Rightarrow$ БУ$_2$ очевидна. Обратно, пусть выполняется БУ$_2$. Предположим, что $f: S^n \to \boldsymbol{R}^n$ — контрпример к БУ$_1$, т.е. отображение, не склеивающее антиподов. Тогда отображение $g: S^n \to \boldsymbol{R}^n$, определенное формулой $g(x) = f(x) - f(-x)$, нечетно и не принимает нулевого значения. Существует естественное отображение $r: \boldsymbol{R}^n / \{0\} \to S^{n-1}$, которое каждому ненулевому вектору $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$ ставит в соответствие единичный вектор $r(x)$ того же направления:

$$r(x) = \frac{x}{\|x\|},$$

где $\|x\| = \left(\sum x_i^2\right)^{1/2}$. Композиция $rg: S^n \to S^{n-1}$ нечетна, в противоречии с БУ$_2$. Этим доказана импликация БУ$_2 \Rightarrow$ БУ$_1$.

Теперь установим эквивалентность теоремы Борсука – Улама теореме Шнирельмана. Примем БУ$_1$, и пусть $F_1, \ldots, F_{n+1}$ — замкнутые подмножества сферы S^n, объединение которых равно S^n. Нам надо доказать, что при некотором i, $1 \le i \le n+1$, множество F_i содержит пару антиподов. Если существует точка x, принадлежащая всем множествам F_i, то все ясно: некоторое F_i содержит пару антиподов x, $-x$. Предположим, что $F_1 \cap \ldots \cap F_{n+1}$ пусто. Для каждого $x \in S^n$ пусть $f_i(x)$ — расстояние от точки x до множества F_i. Тогда $f_i: S^n \to \boldsymbol{R}$ — непрерывная неотрицательная функция, и $f_i(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in F_i$ (здесь используется замкнутость множества F_i). Согласно нашему предположению, функции f_i, $1 \le i \le n+1$, нигде не обращаются в нуль одновременно, поэтому функция

$$h = \sum_{i=1}^{n+1} f_i$$

всюду положительна. Положим $g_i = f_i / h$, $1 \le i \le n+1$, и

$$G(x) = (g_1(x), \ldots, g_n(x)).$$

Тогда $G: S^n \to \boldsymbol{R}^n$ — непрерывное отображение. Применяя к нему теорему Борсука – Улама, находим такое $x \in S^n$, что $g_i(x) = g_i(-x)$ при каждом $i = 1, \ldots, n$. Так как

$$g_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^{n} g_i,$$

имеем также $g_{n+1}(x) = g_{n+1}(-x)$. Если i таково, что $x \in F_i$, то $g_i(-x) = g_i(x) = 0$, так что F_i содержит пару антиподов x и $-x$.

Доказательство импликации Ш $\Rightarrow$ БУ$_2$ предварим следующим замечанием: в теореме Шнирельмана число цветов, равное $n+1$ для n-мерной сферы, нельзя заменить на $n+2$. Иными словами, n-мерную сферу можно покрыть замкнутыми множествами $F_1, \ldots, F_{n+2}$, не содержащими антиподов. Пусть, например,

$$F_i = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n : x_i \ge \varepsilon\}, \quad i = 1, \ldots, n+1,$$

а

$$F_{n+2} = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n : \sum_{i=1}^{n+1} x_i \le -\varepsilon\right\}.$$

Множества $F_1, \ldots, F_{n+2}$ не содержат антиподов и при достаточном малом $\varepsilon > 0$ покрывают сферу.

Теперь докажем, что Ш $\Rightarrow$ БУ$_2$. Предположим, что $f: S^n \to S^{n-1}$ — нечетное отображение. Согласно сделанному только что замечанию, существует покрытие $F_1, \ldots, F_{n+1}$ сферы S^{n-1} замкнутыми множествами, не содержащими антиподов. Тогда (через $f^{-1}(A)$ обозначается *прообраз* множества A, т.е. множество тех $x \in S^n$, для которых $f(x) \in A$) $f^{-1}(F_1), \ldots, f^{-1}(F_{n+1})$ — покрытие сферы S^n замкнутыми множествами, не содержащими антиподов. Это невозможно по теореме Шнирельмана.

Наметим доказательство теоремы Борсука – Улама (в форме БУ$_2$) для случая $n = 2$, а именно, покажем, что не существует нечетного отображения $f: S^2 \to S^1$. Из предшествующего обсуждения вытекает, что тем самым будет доказана и теорема Шнирельмана о раскраске двумерной сферы в три цвета.

Заметим, что для $n = 1$ теорема Борсука – Улама (в форме БУ$_2$) очевидна, ибо «нульмерная сфера» S^0 состоит из двух точек ± 1 и непрерывное отображение окружности S^1 в S^0 постоянно: оно не может «разорвать» окружность на две части. Мы сведем доказательство БУ$_2$ при $n = 2$ к случаю $n = 1$.

Пусть точка движется по окружности и через некоторое время возвращается в исходное положение. Интуитивно ясно, что такое *полное число оборотов*, которое точка совершила во время движения (даже если движение не было направлено все время в одну сторону). Формально это число можно определить так. Пусть движение точки по окружности задается непрерывной функцией $f: I \to S^1$, где $I = [a, b]$ — отрезок числовой прямой. Тогда существует непрерывная функция $\varphi: I \to \boldsymbol{R}$ такая, что

$$f(t) = (\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))$$

при всех $t \in I$. Такая функция определена однозначно с точностью до прибавления константы вида $2\pi k$. Тем самым разность $\varphi(b) - \varphi(a)$ определена однозначно. Если $f(b) = f(a)$, то $(\varphi(b) - \varphi(a))/2\pi$ — целое число, которое и называется числом оборотов.

Пусть теперь задано непрерывное отображение $f: S^1 \to S^1$ окружности в себя. Преобразуем его в отображение $g: [0,2\pi] \to S^1$, положив $g(t) = f(\cos t, \sin t)$. Число оборотов, которое точка $g(t)$ совершает при изменении t от нуля до 2π, называют *степенью* отображения f. Например, тождественное отображение имеет степень единица, постоянное отображение — степень нуль, а симметрия относительно какого-нибудь диаметра — степень минус единица. Поскольку степень является целым числом, она не может меняться при непрерывной деформации отображения. (Мы не будем доказывать это утверждение и даже точно определять, что такое непрерывная деформация.)

Пусть D — замкнутый круг, ограниченный окружностью S^1. Имеет место

Предложение 1. *Если отображение $f: S^1 \to S^1$ может быть продолжено до непрерывного отображения $F: D \to S^1$, то f имеет степень нуль.*

Доказательство. Для $r \in [0,1]$ и $x \in S^1$ положим $f_r(x) = F(rx)$. Отображение f_r непрерывно зависит от r, поэтому все отображения f_r имеют одну и ту же степень. Так как f_0 — постоянное отображение, оно имеет степень нуль. Следовательно, такую же степень имеет и $f_1 = f$.

Предложение 2. *Если $f: S^1 \to S^1$ имеет нулевую степень, то f склеивает некоторую пару антиподов (т.е. найдется точка $x \in S^1$ такая, что $f(x) = f(-x)$).*

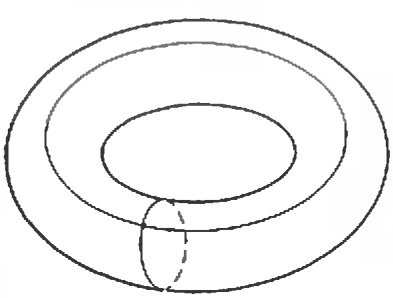
Доказательство. Из определений нетрудно вывести, что существует непрерывная функция $\varphi: I \to \mathbf{R}$, для которой $f(x) = (\cos\varphi(x), \sin\varphi(x))$ при всех $x \in S^1$. Поскольку φ склеивает пару антиподов (случай $n = 1$ теоремы Борсука – Улама), то же верно и для f.

Случай $n = 2$ теоремы Борсука – Улама непосредственно вытекает из предложений 1 и 2. Достаточно установить, что всякое отображение $F: S^2 \to S^1$ склеивает антиподы. Рассмотрим сужение f отображения F на окружность S^1, получающуюся при пересечении сферы с горизонтальной плоскостью. Отождествим эту окружность с S^1, а ограниченный ею круг — с кругом D из предложения 1. Пусть p — проекция верхней полусферы на D, а q — обратное отображение. Тогда отображение $x \mapsto F(q(x))$ из D в S^1 будет продолжением f. Согласно предложению 1, f имеет нулевую степень. Из предложения 2 вытекает, что f склеивает антиподы. Тем самым доказана теорема Борсука – Улама – Шнирельмана для двумерной сферы.

Познакомимся теперь еще с одним замечательным применением топологических методов, принадлежащим Шнирельману. Имеется в виду

Теорема о вписанном квадрате. Мы уже формулировали эту теорему: *в любую замкнутую кривую можно вписать квадрат.* Попробуем объяснить идею доказательства.

В множестве всех четырехугольников на плоскости (каждый элемент этого множества задается восемью числами, оно, как говорят, *восьмимерно*), рассмотрим два «четырехмерных» (т.е. задаваемых четырьмя параметрами) подмножества A и B: A состоит из всех квадратов, а B — из всех четырехугольников, вершины которых расположены на заданной кривой. Теорема утверждает, что эти два множества пересекаются. Предположим сначала, что кривая является эллипсом. В этом случае легко доказать, что существует ровно один вписанный квадрат. Таким образом, множество B, определенное для эллипса, пересекается со множеством A. В общем случае кривую можно



перевести непрерывной деформацией в эллипс. Множество B будет при этом также непрерывно деформироваться. Можно доказать, что в случае эллипса множества A и B пересекаются «существенно»: их пересечение не может быть устранено никакой деформацией. Здесь можно провести аналогию с пересечением параллели и меридиана на торе (поверхности «баранки» — см. рисунок). Следовательно, A и B пересекаются и для произвольной кривой.

При реализации этой идеи возникают некоторые трудности. Чтобы пользоваться результатами соответствующей теории, необходимо предполагать, что в множества A и B включены и «вырожденные» квадраты, у которых совпадают все четыре вершины. Как избежать того, чтобы найденная точка в пересечении $A \cap B$ не оказалась таким вырожденным квадратом? Шнирельман предполагает для этого, что кривая достаточно гладкая (задается дважды дифференцируемой функцией). Часто, когда цитируется теорема Шнирельмана, она формулируется для произвольной непрерывной кривой. Авторам неизвестно, опубликовано ли где-нибудь полное доказательство для этого случая.

Наконец, обсудим

Метод Шнирельмана в аддитивной теории чисел. Пусть A и B — два множества натуральных чисел. *Суммой A и B* обычно называется множество $A+B$ чисел вида $a+b$, где $a \in A$, $b \in B$. Нам будет удобнее называть суммой A и B множество $A \oplus B = (A+B) \cup A \cup B$, полученное добавлением к $A+B$ элементов множеств A и B. Скажем, что множество A является *базисом* натурального ряда, если k-кратная сумма $A \oplus \ldots \oplus A$ при некотором натуральном k совпадает с натуральным рядом. Например, если A — множество всех квадратов, то A — базис, так как по известной теореме Лагранжа о том, что всякое натуральное число представимо в виде суммы не более чем четырех квадратов, $A \oplus A \oplus A \oplus A = \mathbf{N}$. Пусть P — множество, состоящее из всех простых чисел и единицы. Является ли P базисом? Положительный ответ на этот вопрос был впервые получен Шнирельманом: *P является базисом.* Расскажем об основной идее доказательства.

Сначала введем, следуя Шнирельману, понятие *плотности* множества A натуральных чисел. Для каждого $n \in \mathbf{N}$ пусть $A(n)$ — число элементов множества A на отрезке $[1,n]$. Назовем *плотностью* $d(A)$ множества A нижнюю грань чисел вида $A(n)/n$ по всем $n \in \mathbf{N}$ (т.е. наибольшее из чисел a таких, что $A(n)/n > a$ при любом n). Таким образом, плотность — это наибольшее α такое, что при всех n выполнено неравенство $A(n) \geq \alpha n$. Шнирельман доказывает следующий результат:

Теорема 5. *Всякое множество натуральных чисел положительной плотности является базисом.*

Эту теорему нельзя непосредственно применить ко множеству P простых чисел с добавленной единицей, поскольку оно имеет нулевую плотность (Чебышев доказал, что число $\pi(n)$ простых чисел, не превосходящих n, не превосходит числа $Cn/\log n$ при некотором C; см. статью В.Тихомирова «Теорема Чебышева о распределении простых чисел», «Квант», № 6 за 1994 год).

Однако Шнирельман установил, что $P \oplus P$ имеет положительную плотность, откуда вытекает, что P является базисом. Напомним, что вопрос Эйлера о том, содержит ли $P \oplus P$ все четные числа, остается открытым.

Докажем теорему 5. Она вытекает из следующих двух лемм:

Лемма 1. *Если $A, B \subset N$ и $d(A) + d(B) > 1$, то $A \oplus B = N$.*

Доказательство. Зафиксируем $n \in N$. Если $n \in B$, то $n \in A \oplus B$. Если $n \notin B$, то рассмотрим два подмножества отрезка $[1,n]$: $\{a \in A : a \le n\}$ и $\{n-b : b \in B,\ b \le n\}$. Они обязаны пересекаться, поскольку в первом из них не меньше $n \cdot d(A)$ элементов, во втором не меньше $n \cdot d(B)$ элементов и $n \cdot d(A) + n \cdot d(B) > n$. Следовательно, $a = n - b$, $a \in A$, $b \in B$, откуда $n = a + b \in A \oplus B$.

Лемма 2. *Для любых $A, B \subset N$ имеет место неравенство Шнирельмана:*

$$d(A \oplus B) \ge d(A) + d(B) - d(A) \cdot d(B).$$

Доказательство. Положим $C = A \oplus B$, $\alpha = d(A)$, $\beta = d(B)$. Зафиксируем $n \in N$. Нам надо оценить снизу число $C(n)$. Пусть $a_1 < \ldots < a_r$ — все элементы множества A из отрезка $[1,n]$, где $r = A(n)$. Отрезок $[1,n]$ разбивается числами $a_1, \ldots, a_r$ на $r+1$ отрезков (некоторые из них могут быть пустыми) длин $l_1 = a_1 - 1$, $l_2 = a_2 - a_1 - 1, \ldots, l_{r+1} = n - a_r$, при этом k-й отрезок содержит не менее βl_k чисел из C: при $k > 1$ это числа вида $a_{k-1} + b$, где $b \in B$, $b \le l_k$, а при $k = 1$ — это числа из B, которые не превышают l_1. Отсюда получается оценка

$$C(n) \ge r + \beta \cdot \sum l_k = r + \beta(n-r) = (1-\beta)r + \beta n \ge (1-\beta)\alpha n + \beta n,$$

означающая, что $d(C) \ge (1-\beta)\alpha + \beta = \alpha + \beta - \alpha\beta$.

Выведем теорему 5 из лемм 1 и 2. Неравенство леммы 2 можно переписать в виде

$$1 - d(A \oplus B) \le (1 - d(A)) \times (1 - d(B)).$$

В таком виде оно распространяется (по индукции) на любое число слагаемых:

$$1 - d(A_1 \oplus \ldots \oplus A_n) \le \prod_{i=1}^{n} (1 - d(A_i)).$$

Пусть теперь A — множество положительной плотности и

$$A_k = A \oplus \ldots \oplus A$$

— сумма k слагаемых, равных A. Предыдущее неравенство показывает, что $d(A_k)$ стремится к единице при возрастании k. Пусть k таково, что $d(A_k) > 1/2$. Из леммы 1 вытекает, что $A_{2k} = N$. Таким образом, A является базисом. Теорема 5 доказана.

При всяком ли $n \in N$ множество $W_n = \{1^n, 2^n, \ldots\}$ всех n-х степеней является базисом? Это — так называемая *проблема Варинга*. Она была положительно решена Гильбертом в начале века. Решение оказалось весьма сложным. Теорема 5 позволяет получить другое решение: достаточно установить, что k-кратная сумма $W_n \oplus \ldots \oplus W_n$ при больших k имеет положительную плотность. Элементарное (хотя очень непростое) решение проблемы Варинга, основанное на методе Шнирельмана, можно найти в книге Хинчина [1].

В заключение сделаем несколько замечаний.

1. Из предложения 1 вытекает следующий результат:

Теорема Брауэра. *Не существует непрерывного отображения F замкнутого круга D в ограничивающую его окружность S^1, для которого $F(x) = x$ при всех $x \in S^1$.*

Действительно, тождественное отображение окружности имеет степень 1 и потому не может быть продолжено до отображения $F: D \to S^1$. Отсюда легко вывести теорему о неподвижной точке: *для всякого отображения $F: D \to D$ найдется такое $x \in D$, что $F(x) = x$.*

Понятие степени отображения можно определить для отображения n-мерной сферы в себя и на основе этого понятия доказать теорему о неподвижной точке для $(n+1)$-мерного шара. Это сделал Брауэр в десятых годах нашего века, и это было ярким достижением зарождавшегося тогда нового раздела математики — топологии.

2. Известный геометр Борис Николаевич Делоне, комментируя теорему Шнирельмана о квадрате, заметил, что для выпуклой кривой эту теорему можно доказать элементарными методами. Попробуйте найти такое доказательство.

3. Пусть $A = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$ — множество всех квадратов натуральных чисел. Мы отмечали выше, что $A \oplus A \oplus A \oplus A = N$. А знаете ли вы, как описываются множества $A \oplus A$ и $A \oplus A \oplus A$? Первое состоит из всех чисел, в разложение которых на простые множители каждое простое число вида $4k + 3$ входит в четной степени, а второе — это дополнение до множества чисел вида $4^a(8b + 7)$.

4. В связи с леммой 2 процитируем (с сокращениями) книгу [1]: «Осенью 1931 года Л.Г. Шнирельман, рассказывая о своих беседах с Э.Ландау в Геттингене, сообщил, что они установили следующий интересный факт: для всех примеров, какие им удавалось придумать, неравенство

$$d(A \oplus B) \ge d(A) + d(B) - d(A)d(B)$$

можно было заменить более сильным и более простым неравенством:

$$d(A \oplus B) \ge d(A) + d(B)$$

(при условии, что $d(A) + d(B) \le 1$). Но доказательство этой гипотезы при первых попытках не удавалось. Проблема стала модной. Ученые общества предлагали ее на премию. Добрая половина английских математиков, отложив все дела, занялась решением этой задачи. Но она оказалась очень упорной, и целый ряд лет не поддавалась усилиям самых искусных исследователей. Только в 1942 году, наконец, с нею справился молодой американский математик Манн».

Доказательство гипотезы Ландау — Шнирельмана можно найти у Хинчина [1]. Мы очень советуем читателю познакомиться с этой замечательной книгой.

Не менее достойна вашего внимания книга самого Шнирельмана [2]. Из нее вы узнаете и доказательство теоремы Лагранжа о сумме четырех квадратов, и решение великой проблемы Ферма для показателей 3 и 4, и о многом другом.

Литература

1. *Хинчин А.Я.* Три жемчужины теории чисел. – М – Л: ОГИЗ, 1948.

2. *Шнирельман Л.Г.* Простые числа. – М – Л: ГИТТЛ, 1940.

Вокруг шарика

Что нового и интересного можно рассказать об упругом ударе двух шаров, да еще если удар центральный? Любой грамотный школьник умеет определять конечные скорости шаров, а что еще нужно? Но оказывается, внимательный взгляд на сам процесс упругого удара приводит к очень красивой и нетривиальной физике.

Первым такое рассмотрение провел Г.Герц, которому удалось вычислить время соударения. Об этом можно прочитать и на страницах «Кванта» — например, в небольшой, но очень емкой статье Г.Коткина «Столкновение шариков» в № 3 за 1973 год. Статья одного из авторов предлагаемого материала (А.Гросберга) «Повесть о том, как столкнулись два шара, или Что такое малый параметр» была опубликована сравнительно недавно — в № 9/10 за 1993 год. Но с этого момента в «истории шаров» произошли важные события, о которых и рассказывается ниже.

История задачи — древняя и новая

М.КАГАНОВ

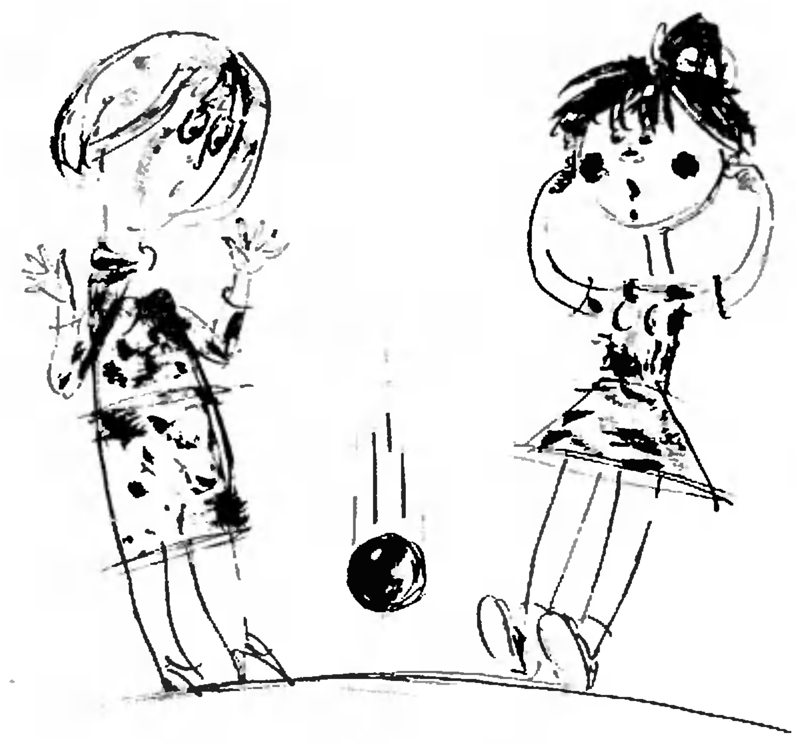
Каждая более или менее интересная задача имеет свою судьбу. Иногда решивший задачу даже плохо знает ее судьбу. Например, вспоминается история решения задачи И.Е.Таммом и И.М.Франком о черенковском излучении. Несомненно, ни они, ни П.А.Черенков не знали, что необходимые формулы уже были выведены — задолго до того, как было открыто излучение зарядом, движущимся со сверхсветовой скоростью. Выведены О.Хевисайдом еще в XIX веке. По Хевисайду, заряд движется со скоростью, большей скорости света в пустоте. Он не знал, что ничто не может двигаться со скоростью, превышающей скорость света в пустоте: теория относительности еще не была создана. В теории Тамма и Франка, как и в экспериментах Черенкова, электрон движется со скоростью, превышающей скорость света в среде, а она меньше скорости света в пустоте. Завершилась судьба задачи об излучении частицы, движущейся со скоростью света в среде, присуждением в 1958 году П.А.Черенкову, И.Е.Тамму и И.М.Франку Нобелевской премии по физике.

Мысль о черенковском излучении, возможно, пришла мне в голову потому, что задача, о которой пойдет речь, выясняет, сколько и как излучает... правда, не частица, а шарик, падающий на поверхность упругого полупространства. И не электромагнитную энергию, а звуковую.

В 1949 году Илья Михайлович Лифшиц — знаменитый уже тогда физик-теоретик — сформулировал задачу: на полупространство, занятое упругой средой, падает шарик и упруго отражается. Слово «упругая» по отношению к среде и слово «упруго» по отношению к отражению имеют разный смысл. Упругая среда — это тело, в котором деформации подчиняются уравнениям линейной теории упругости, т.е. они (деформации) пропорциональны напряжениям — действует закон Гука. Можно сказать иначе: упругая среда — это тело, по которому распространяются упругие волны (в частности, обычные звуковые волны). Отражение называется упругим, если отражающееся тело не теряет при отражении энергии.

Повторю формулировку задачи и продолжу: на упругую среду падает шарик и упруго отражается. Сколько энергии шарик теряет на возбуждение в полупространстве звуковых волн? На первый взгляд, бессмысленный вопрос: если упруго отражается, то ничего не возбуждает, так как на возбуждение звуковых волн надо потратить какую-то энергию. Значит, отражение не упругое. Правильно: формулировка не строга. Она сказана на теорфизическом сленге, который к окончанию университета физик-теоретик понимает. Ставящий задачу предполагает, что на излучение шарик теряет малую часть своей энергии. Поэтому в первом, или, наверное, лучше сказать, в нулевом приближении отражение упруго, а надо, уточнив решение, найти, какую часть своей энергии шарик все-таки теряет. Ведь ясно: столкнувшись с телом, в котором могут распространяться звуковые волны, шарик несомненно их возбудит.

Я вместе со своим коллегой (оба только окончили университет) попытались задачу решить, но не решили. Хотя в общих чертах знали, как ее решать. И.М.Лифшиц в те годы занимался классом задач, для решения которых надо было знать реакцию упругого тела на бесконечно короткий, но бесконечно сильный удар — о такой реакции говорят, что она описывается функцией Грина. Как искать функцию Грина упругого полупространства, мы знали из работ И.М.Лифшица, а, следовательно, не должно было быть принципиальных трудностей (и не было действительно!) при решении поставленной задачи. И все же она не была решена. Задача оказалась сложной. Дело в том, что в упругом теле может распространяться несколько типов звуковых волн: продольные (волны сжатия и разрежения), поперечные (волны сдвига) и поверхностные волны, которые бегут по границе (их амплитуда экспоненциально затухает с удалением от поверхности). Это еще не все. Существуют и комбинированные волны. Они состоят частично из поверхностных волн, а частично из объемных. Все эти волны возбуждаются, когда что-то



ударяет по поверхности тела. Заранее нельзя сказать, волны какого типа уносят больше энергии. Знание метода решения было, конечно, необходимо, но недостаточно. Ответ на поставленный вопрос могло дать только решение. А оно не было получено.

Нерешенная задача мною вроде была забыта: появились другие задачи, совсем в другой области теоретической физики. Но оказалось, задача о шарике не совсем забыта...

Теоретики кафедры физики низких температур МГУ должны изучать теорию упругости. Думая о том, какую задачу взять для курсовой работы по теории упругости Марине Литинской (по секрету: она — моя внучка), я вспомнил нерешенную задачу и посоветовал Марине решить задачу более чем сорокалетней давности. Было это в 1992 году. Еще одна (семейная) деталь. Мать Марины, моя дочь Инна Каганова — научный сотрудник Института физики высоких давлений Российской академии наук — специалист по теории упругости. Естественно, решением задачи о падении шарика на поверхность твердого тела Марина и Инна занялись вместе.

Конечно, со всеми трудностями, о которых я говорил, они столкнулись немедленно. Но, надо отдать им должное, сравнительно легко их преодолели. Хватило терпения, усидчивости, аккуратности — необходимых качеств при решении любой достаточно сложной задачи. Более серьезными оказались осложнения, связанные не с громоздкостью задачи. Нужно кое-что разъяснить, используя по необходимости профессиональные термины. Решать задачу удобно методом Фурье. Это означает воспользоваться тем, что любую функцию времени можно разложить на сумму гармонических функций — на сумму колебаний с определенными частотами. Тогда упрощается математическая сторона задачи. Но, к сожалению, усложняется физическая. Колебание с определенной частотой стационарно, т.е. оно описывает такое движение, которое не только есть, но и всегда было и всегда будет. Только сумма колебаний описывает правильное поведение во времени: колебание в какой-то точке тела начинается в определенный момент времени, когда волна дойдет до этой точки. До того как в данную точку дойдет самая быстрая из волн, в этой точке ничего не колеблется. Показать, что полученное решение удовлетворяет этому свойству, оказалось весьма сложным делом, потребовало прекрасного владения математическим аппаратом, многому научило авторов.

Итак, построена функция Грина. Теперь надо понять, как происходит отражение падающего на поверхность тела шарика. В частности, как деформируются поверхности соприкасающихся тел. Такую задачу (естественно, без учета возбужденного звука — нулевое приближение!) решил Генрих Герц еще в 1882 году (вот какую древнюю историю имеет эта задача). Для решения интересующей нас задачи надо было знать, какая сила действует в каждый момент времени в процессе столкновения — пока тела соприкасаются. Для задачи Герца выражение для силы — промежуточный результат. Он имеется. И для задачи о возбуждении звука выражение для силы — тоже промежуточный результат. Зная силу, можно воспользоваться методом Фурье, и т.д.

Задача была полностью решена.

Как всякая содержательная задача, задача о шарике стала разрастаться, составила материал не только курсовой, но и дипломной работы (высоко оцененной комиссией); в двух статьях в европейском журнале «Physics Letters» уместилось только краткое изложение результатов.

Когда задача была решена, я очень обрадовался. Будто выполнил долг. Пусть не я решил задачу. Но, наверное, я могу считать, что в решении есть и моя заслуга. Обрадовавшись, я, естественно, разным людям (коллегам, конечно) рассказывал, какую интересную задачу решили мои дочь и внучка (как не похвастать?!). Отношение было разное. Некоторые скептически спрашивали: «Неужели эта задача не была решена раньше?». Те, кто представлял, какие трудности были преодолены, поздравляли. К радости авторов, было высказано намерение включить их результат в учебник теории упругости. Совсем неожиданная реакция была у А.Ю.Гросберга. Он думал над похожей задачей, «получил» ее от того же Ильи Михайловича, хотя занимался совсем другой областью физики. Ему — слово.

Иллюстрации П. Чернуского

Стержни-пружинки, полимеры и метеориты

А. ГРОСБЕРГ

Что общего между ударом метеорита о поверхность планеты, столкновением бильярдных шаров и компьютерным расчетом движения длинной полимерной молекулы вроде ДНК? Ничего. Почти ничего.

Но вот году в 1978 на теоретическом семинаре на физфаке МГУ обсуждался такой вопрос: как представить себе движение длинной полимерной цепи? Движение это очень сложное, потому что цепная молекула полимера, подобная микроскопической веревке или червяку, подвержена хаотическим ударам других окружающих молекул, и за счет этих ударов она хитроумно извивается и запутывается. Никто в ту пору толком не представлял себе, как это происходит, и, что еще хуже, не было видно разумного подхода, чтобы подступиться к этой задаче. Хотелось бы увидеть это движение. Наглядная картина могла бы помочь физической интуиции. Но молекулы, даже самые большие, слишком малы, и увидеть их нельзя. А косвенные экспериментальные методы регистрации движения полимерных цепей сложны и очень не наглядны. Что делать?

Примерно в то же время развитие вычислительной техники сделало осуществимой амбициозную идею, называемую теперь «метод молекулярной динамики». Суть идеи очень проста. Молекулы вещества в своих движениях, несомненно, подчиняются законам самой обычной «школьной» классической механики — законам Ньютона. Нельзя ли просто «в лоб» решать для молекул ньютоновские уравнения движения? В конце концов, ведь никто не удивляется (в наше время; раньше еще как удивлялись!) возможности рассчитать движение планет или, скажем, искусственной межпланетной станции, летящей к Юпитеру.

А молекулы чем хуже? Молекулы, правда, взаимодействуют не посредством тяготения, а иначе, но это не вносит больших затруднений. Проблема с молекулами в том, что их безумно много. Но если взять маленький кусок вещества, скажем молекул 30, и очень мощный компьютер, то... можно попробовать.

Отвлекаясь, скажем, что сейчас (в 1994 году) молекулярно-динамические расчеты — одни из самых требовательных потребителей рекордных суперкомпьютеров. Количество частиц в объеме моделируемой ячейки доведено до многих сотен... и все же самые интересные вещи еще недоступны. (Всегда кажется, что самое-самое недоступно.) Но это сейчас. А тогда, почти двадцать лет тому назад, идея молекулярной динамики была внове, а уж затея применить молекулярную динамику к полимерной цепочке — и подавно.

Новизна участников той дискуссии не отпугивала, а привлекала. Главным действующим лицом был Илья Михайлович Лифшиц. Помимо своих научных заслуг и многочисленных званий, Илья Михайлович производил неизгладимое впечатление, даже на людей, не понимавших сути дела, своим неиссякаемым юношеским энтузиазмом ко всему содержательному и новому. Идея сделать движение полимерной цепочки видимым на экране компьютера Илье Михайловичу понравилась, и он загорелся. Что значит «загорелся»? Это не значит — стал раздавать поручения и указания; это значит — стал сам думать над проблемой по существу. И сразу сделался самым желанным собеседником для специалистов, ибо немедленно нашел ту самую точку, где у специалистов понимания не было, а были разные мнения и разногласия. Но наука — не политика; в науке если есть два разных мнения, то одно из них неправильно. Или оба неправильны. Или (самое интересное) оба могут быть правильны, но в разных случаях.

Вопрос, вызывавший разногласия, заключался в следующем. На рисунке изображена простейшая модель полимерной молекулы-цепочки. Что здесь изображают черточки — жесткие стерженьки или упругие пружинки? Какая модель, стерженьковая или пружинная, правильнее, проще и лучше?

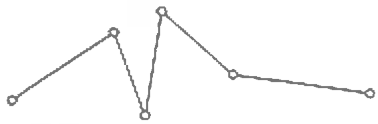
В стерженьковой модели, если одно звено закрепить, то соседнее сможет двигаться только по сфере радиусом l, где l — длина стерженька. Поэтому положение каждого звена задается не тремя координатами x, y, z, а только двумя углами направления связи. Соответственно, у цепи из N звеньев степеней свободы получается не $3N$, а $2N+1$ (подумайте, почему $+1$). Значит, можно взять большее N при тех же возможностях компьютера.

С другой стороны, в пружинной модели скорости звеньев независимы друг от друга, а в стерженьковой они ограничены жесткостью стерженьков. Относительная скорость двух соседних звеньев (т.е. векторная разность их скоростей) должна быть перпендикулярна соединяющему их стерженьку. Такое ограничение приводит к очень сложному и вычурному характеру динамики.

Изучение стерженьковой модели оказалось необычайно интересным с теоретической точки зрения, потребовав красивой математики. Выяснилось, что движение цепи из жестких стерженьков нужно представлять себе как движение точки в многомерном пространстве с неевклидовой искривленной геометрией. Это стало напоминать общую теорию относительности. А все теоретики трепетно любят ОТО.

В увлечении математическими красотами и аналогиями с ОТО всегда есть опасность — забыть исходную задачу; так, путник может увлечься сбором грибов и ягод в придорожном лесу и забыть о цели путешествия. Поэтому — ближе к делу: какая же модель, стерженьковая или пружинная, больше и лучше соответствует реальности? Как ни странно, трудно сказать.

Проблема в том, что каждое звено реального полимера, особенно биологического, это сложное химическое сооружение из десятков атомов. Бессмысленно загружать и без того ограниченные возможности компьютера мелкими относительными движениями и колебаниями этих атомов, тем более что эти движения подчиняются квантовой механике. Аналогично, когда вы завязываете ботиночный шнурок, то просто засовываете кончик в петельку, а не думаете об атомах. При моделировании больших полимерных молекул тоже полезно думать не об атомах, а о чем-то вроде «кончиков» и



«петелек». Поэтому звенья-шарики в нашей простой модели полимерной цепи (см. рисунок) — не атомы, а скорее чисто искусственные воображаемые частицы, служащие как бы представителями сразу нескольких (или многих) атомов. Квазичастицы, если вы знаете это слово. Так что сделать правильную модель связи непросто.

Словом, был организован семинар. Пригласили специалистов. Сначала выступил сторонник стерженьковой модели — физик из Харькова. Потом дали слово представителю «пружинной» точки зрения — «вычислительному математику» из Пущино. В итоге стало ясно, что вопрос упирается в противоречие: если жесткость пружинки k как угодно велика, но конечна, то, согласно теореме о равнораспределении энергии, в тепловом равновесии ее колебания несут в среднем энергию $k_Б T$, где $k_Б$ — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура. И это не зависит от конкретного значения величины жесткости k. Если же пружинка «ожесточается» до стерженька, т.е. величина k становится бесконечной, то энергия колебаний вдруг исчезает: длины стерженьков неизменны, колебаний нет, энергии нет. Или, если идти в другую сторону, от стерженьков к пружинкам, и совсем чуть-чуть «размягчить» стерженьки, т.е. взять очень маленькое, но все же не совсем нулевое значение для $1/k$, то геометрически почти ничего не изменится, а энергетически ситуация изменится абсолютно радикально. Физически это странно и нелепо.[1]

Надо сказать, Илье Михайловичу не понадобилось много времени, чтобы объяснить противоречие. Нужно обратить пристальное внимание на безобидные слова «в тепловом равновесии» в формулировке теоремы о равнораспределении. В самом деле, в равновесии на каждую степень свободы в среднем приходится энергия $1/2 k_Б T$. Например, если речь идет о колебаниях, то удары других атомов и молекул могут как передавать энергию, возбуждая колебания, так и забирать энергию, что ведет к частичному затуханию. (Представьте себе, скажем, маятник и подумайте — как реализуются обе названные возможности.) Если амплитуда колебаний мала, то при ударе наиболее вероятно получить энергию. Если, наоборот, амплитуда велика, то наиболее вероятно энергию отдать. В итоге амплитуда колебаний устанавливается такой, чтобы в среднем отдавать и получать одинаковое количество энергии. Эта амплитуда и отвечает тепловой энергии колебаний, равной $k_Б T$.

Представим себе теперь, что пружинка очень жесткая. При одном ударе передача энергии — в одну сторону или в другую — будет маленькой. Соответственно, обмен энергией между колебанием и остальным тепловым резервуаром будет очень медленным. На установление теплового равновесия потребуется очень много времени. Вот как разрешается противоречие: если коэффициент k очень большой, то пружинная модель в самом деле очень похожа на стерженьковую, так как мы можем и не дождаться установления теплового равновесия.

Это простое замечание, с точки зрения практической молекулярной динамики, разрешило вопрос. Дело в том, что методом молекулярной динамики можно анализировать движение молекул только на очень ограниченном отрезке времени, и связано это не только с ограниченностью возможностей любого компьютера, но и с принципиальной особенностью динамики — неизбежные ошибки (например, округление чисел в компьютере) не компенсируют друг друга, а накапливаются. Мощности компьютеров возросли в 10^5 раз, а доступное время — всего в 5 раз. Поэтому реально в ходе «машинного эксперимента» жесткие пружинки не успевают раскачаться и ведут себя неотличимо от стерженьков. Современные программы используют и стерженьки, и пружинки — в разных сочетаниях, в зависимости от цели исследования.

Мне же хочется вернуться ненадолго к запомнившемуся мне семинару. В какой-то момент речь зашла о возбуждении колебаний при ударе жестких тел. «Давайте, — сказал Илья Михайлович, — рассмотрим простейшую задачу такого рода — столкновение двух упругих шаров».

---

[1] *Квалифицированный физик скажет, что противоречие устраняется квантовой механикой. Это так для реальных физических стерженьков и пружинок. Но речь идет не о них, а о модели, которая «живет» только внутри компьютера и ничего о квантовой механике «не знает».*

Вопрос, когда он прозвучал, показался мне чарующе интересным и красивым: два шара столкнулись и разлетелись, но каждый возбудил и оставил в другом упругие колебания; сколько энергии уносит этот звук?

Придя домой, я посмотрел, что сообщает по этому поводу «Библия» теоретической физики – курс Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица. В томе 7 («Теория упругости») разбирается созданная Г.Герцем в 1882 году теория удара. Теория Герца очень красивая и в своей основе довольно простая. Она позволяет вычислить время соударения, т.е. время, в течение которого столкнувшиеся шары остаются в контакте до разлета, но о звуке — «ни звука». Заглянув впоследствии в несколько других книг, я не нашел упоминаний о возбуждении звука нигде. Никак не мог понять, почему так: неужели никому за сто лет не приходило в голову такой естественный вопрос. И.М.Лифшиц знал об этой задаче и раньше. Но решение ее известно не было.

Кстати, пытаясь найти что-то о возбуждении звука ударом, я рылся в книгах по технической механике. Может быть, казалось мне, инженеры думали, скажем, об ударе частей отбойного молотка. Оказалось, более плодотворны были бы поиски в литературе по астрономии: люди интересовались возбуждением упругих волн (которые в этом случае называются сейсмическими) при ударе метеорита о планету. Для меня это — урок: физик должен мыслить широко.

Правда, метеорит от планеты не отскакивает, т.е. этот удар совсем не упругий. Скорее, это похоже на прилипание. Но все же.

Когда стало ясно, что ответ на вопрос о возбуждении звука в литературе не найти, я попытался сам качественно оценить энергию звуковых волн. И ту оценку, что у меня получилась, я даже включил в свою статью для «Кванта». Но «Квант» — очень хороший журнал: хотя ответ известен не был, в редакции обнаружили ошибку в моих рассуждениях и выбросили оценку из статьи (за что я, конечно, очень благодарен: что сделал ошибку — стыдно, но было бы бесконечно хуже, если бы она была опубликована!).

Итак, моя личная история с шариком началась в 1978 году. Мне посчастливилось за эти годы встречаться и говорить со многими хорошими физиками. В большинстве случаев речь шла, конечно, о совсем других вещах, но и о шарике доводилось упоминать. Все соглашались, что да — задача красивая, но никто ничего не знал. Так прошло много времени без всякого прогресса. Через 15 лет, в 1993 году, вышла моя статья в «Кванте» — без ошибки, но и без ответа. И надо же быть такому совпадению — через считанные месяцы после этого я узнаю из разговора с М.И.Кагановым, что задача — решена! Только что. Результаты к тому моменту еще даже не успели появиться в печати.

Нечего и говорить, я был заинтересованным читателем и «изучателем» работ И.М.Кагановой и М.Л.Литинской, хотя решали они все же не совсем ту задачу: не о столкновении двух одинаковых шаров, а об ударе маленького шарика об очень большой, т.е. фактически об упругое полупространство (как не вспомнить опять про метеорит и планету). Но зато для этой задачи дано корректное количественное решение. Разобравшись в нем, удалось проанализировать и исходную (для меня) задачу о двух шариках — хоть и качественно, но вполне убедительно. Об этом — ниже.

Сколько же энергии уносит звук?

А.ГРОСБЕРГ, М.КАГАНОВ

Одно из интересных занятий физика-теоретика такое: когда решена задача, полезно попробовать понять ответ и/или ход решения «на пальцах», в простых физических терминах. Как говорят теоретики на своем профессиональном жаргоне, «выяснить физику задачи». Мы расскажем вам, как это делается в случае с шариком. Напомним, как она была решена: сначала была «построена» функция Грина (опять сленг: конечно, никто ничего не строит, а выводит необходимую формулу), т.е. выяснено, какие волны с какой амплитудой возбуждаются в упругом теле под воздействием колеблющегося с произвольной частотой ω точечного источника на поверхности тела. Этому посвящена первая из двух работ И.М.Кагановой и М.Л.Литинской. Потом было использовано выражение для силы, рассчитанное Г.Герцем. С ее помощью выяснили, какова сила воздействия «точечного источника» на произвольной частоте. Осталась математика: собрать (просуммировать) результаты действия источников со всеми частотами, т.е. проинтегрировать по всем частотам. Если «точечный источник» на какой-то частоте особенно активен, то, выделив ее, можно, наверное, понять происходящее без сложных расчетов. Оказывается (и это представляется естественным), выделенный источник — это источник с частотой, близкой обратному времени (обозначим его τ) столкновения между шариком и полупространством:

$$\omega_{выд} \sim \frac{1}{\tau}.$$

Теперь напомним основной результат теории Герца: время столкновения двух шаров можно оценить по формуле

$$\tau \sim R v^{-1/5} s^{-4/5} = \frac{R}{s}\left(\frac{s}{v}\right)^{1/5} = \frac{R}{v}\left(\frac{v}{s}\right)^{4/5}, \quad (1)$$

где R — радиус шара, v — его скорость до удара, s — скорость звука в материале. Понятно, что такого же порядка и время соударения шарика с очень большим телом (с полупространством).

Мы намеренно представили формулу Герца (1) в трех математически эквивалентных видах. Дело в том, что эта формула справедлива только при условии, что скорость шарика v значительно меньше скорости звука s. При этом получается, что время соударения гораздо больше, чем R/s, что есть время прохождения звука сквозь шар, и гораздо меньше R/v, т.е. времени, за которое сам шар проходит путь порядка его собственного размера.

Что происходит за время τ? Сначала шарик «вдавливается» с разгона в материал упругого тела, а затем развившиеся в теле упругие силы отбрасывают шарик обратно. Можно сказать, что шарик заставляет частицы тела в месте удара совершить за время τ половину колебательного цикла. Значит, период возбужденного звука должен быть примерно 2τ, его частота $\nu \sim 1/(2\tau)$. Это и есть выделенная частота, которую можно увидеть в настоящем математическом решении задачи. Соответствующая длина волны примерно равна

$$\lambda \sim s\tau \sim R\left(\frac{s}{v}\right)^{1/5}. \qquad (2)$$

Удобно прибегнуть к аналогии с электродинамикой. Если имеется колеблющийся диполь (т.е., например, два заряда $+q$ и $-q$ колеблются друг относительно друга), то, как написано в учебниках, мощность излучаемой электромагнитной волны пропорциональна четвертой степени частоты и по порядку величины дается формулой $\varepsilon s R^3/\lambda^4$, где λ — длина излучаемой волны, s — ее скорость, R — размер излучателя, ε — его характерная энергия. Излучение звука подчиняется тем же волновым закономерностям. Ясно, что в нашем случае s, R и λ сохраняют свой смысл. Что же касается ε, то в электродинамике $\varepsilon \sim q^2/R$ (кулоновская энергия, q — заряд), а в нашем случае $\varepsilon \sim mv^2$, где m — масса шарика. Так как наш излучатель работает всего полпериода, то он успевает излучить энергию $\Delta\varepsilon \sim \left(\varepsilon s R^3/\lambda^4\right)\tau \sim \varepsilon R^3/\lambda^3$. Таким образом, при ударе шара о большое тело в это тело уходит в виде звука энергия

$$\Delta\varepsilon \sim \varepsilon(R/\lambda)^3 \sim mv^2(v/s)^{3/5}.$$

Это и есть основной результат И.М.Кагановой и М.Л.Литинской.

Если результат переписать в виде

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \sim \left(\frac{v}{s}\right)^{3/5},$$

то можно сказать, какую часть своей энергии шарик теряет на возбуждение звука. Эта оценка объясняет, почему все рассмотрение и даже вся теория Герца справедливы только в том случае, если скорость шарика v значительно меньше скорости звука s (например, для стали $s \sim 5000$ м/с). Иначе предположение о том, что неупругость отражения мала, было бы ошибочным.

Точный результат включает еще несколько интересных деталей. Во-первых, численный коэффициент, зависящий от отношения скоростей продольного и поперечного звука. Во-вторых, распределение энергии $\Delta\varepsilon$ между разными сортами звуковых волн: как правило, наибольшая энергия уходит от места столкновения в виде волн поверхностных (похоже, это небезынтересно для изучающих удары падающих метеоритов...). Но изюминка результата — красивый своей необычностью показатель $3/5$.

Под конец вернемся ненадолго к двум одинаковым шарикам. Так как мы рассматриваем медленный удар, при котором $v \ll s$, то, согласно формуле (2), $\lambda \gg R$: длина волны много больше размера шарика, и такая волна внутрь шарика не очень-то и «влезет». Более точно: вынуждающее движение одного шара по отношению к другому очень медленное, так как время соударения гораздо больше периода собственных колебаний шара ($\tau \gg R/s$). Об этой ситуации принято говорить как об адиабатической, и в таком случае

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon \exp\left[-\alpha\frac{\tau}{R/s}\right] \sim mv^2 \exp\left[-\beta\left(\frac{v}{s}\right)^{1/5}\right],$$

где α и β — некоторые числа порядка единицы. Такой ответ.

Мы понимаем, что наш читатель может не знать формулу мощности дипольного излучения или как происходит возбуждение в адиабатических условиях. В принципе, и это можно было бы попробовать объяснить элементарно. Но во-первых, уже не в этой статье. А во-вторых, стоит ли? Мы от души желаем читателям освоить эти и другие вещи всерьез, чтобы получить возможность участвовать в увлекательнейших приключениях — вроде тех, которые были у нас «вокруг шарика».

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июля 1996 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2— 96» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1536» или «Ф1548». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1536 — М1545, Ф1548 — Ф1552

М1536. а) Существуют ли два равных семиугольника, все вершины которых совпадают, но никакие стороны не совпадают?
б) А три таких семиугольника?
(Напомним, что многоугольник на плоскости ограничен несамопересекающейся замкнутой ломаной.)

В.Произволов

М1537. Про n чисел, произведение которых равно p, известно, что разность между p и каждым из этих чисел — нечетное целое число. Докажите, что все эти n чисел иррациональны.

Г.Гальперин

М1538. Прямоугольник $a \times b$ $(a > b)$ разбит на прямоугольные треугольники, граничащие друг с другом только по целым сторонам, так что общая сторона двух треугольников всегда служит катетом одного и гипотенузой другого. Докажите, что $a/b \geq 2$.

А.Шаповалов

М1539. Капитан нашел Остров Сокровищ, имеющий форму круга. На его берегу растут шесть пальм. Капитан знает, что клад закопан в середине отрезка, соединяющего точки пересечения высот треугольников ABC и DEF, где A, B, C, D, E, F — эти шесть пальм, но он не знает, какой буквой обозначена каждая пальма. Докажите, что тем не менее он найдет клад с первой же попытки.

С.Маркелов

М1540. В компанию из N человек пришел журналист. Ему известно, что в этой компании есть человек Z, который знает всех остальных членов компании, но его не знает никто. Журналист может к каждому члену компании обратиться с вопросом: «Знаете ли вы такого-то?»
а) Может ли журналист установить, кто в компании — Z, задав меньше N таких вопросов?
б) Найдите наименьшее количество вопросов, достаточное для того, чтобы наверняка найти Z; докажите, что меньшим числом вопросов обойтись нельзя.
(Все отвечают на вопросы правдиво. Одному человеку можно задавать несколько вопросов.)

Г.Гальперин

М1541. Вдоль лыжной трассы расставлено в ряд бесконечное число кресел, занумерованных по порядку: 1, 2, 3, ... Кассирша продала билеты на первые m мест, но на некоторые места она продала не один билет, и общее число проданных билетов $n > m$. Зрители входят на трассу по одному. Каждый, подойдя к месту, указанному на его билете, занимает его, если оно свободно, а если оно занято, говорит «Ох!» и идет к следующему по номеру месту. Если оно свободно, то занимает его, если же занято, снова говорит «Ох!» и двигается дальше — до первого свободного места. Докажите, что общее количество «охов» не зависит от того, в каком порядке зрители выходят на трассу.

А.Шень

М1542. а) К любому ли 6-значному числу, начинающемуся с цифры 5, можно приписать еще 6 цифр так,

чтобы полученное 12-значное число было полным квадратом? б) Тот же вопрос про число, начинающееся с 1.
в) Найдите для каждого n такое наименьшее $k = k(n)$, что к любому n-значному числу можно приписать еще k цифр так, чтобы полученное $(n + k)$-значное число было полным квадратом.

М.Брокштейн, А.Толпыго

М1543. В плоскости выпуклого четырехугольника $ABCD$ расположена точка P. Построены биссектрисы AK, BL, CM, DN треугольников APB, BPC, CPD и DPA.
а) Найдите хотя бы одну такую точку P, для которой точки K, L, M, N (лежащие на сторонах AB, BC, CD, DA) служат вершинами параллелограмма.
б) Найдите все такие точки P.

С.Токарев

М1544. Существует ли возрастающая арифметическая прогрессия
а) из 11; б) из 1000; в) из бесконечного числа натуральных чисел
такая, что суммы цифр ее членов (в десятичной записи) также составляют возрастающую арифметическую прогрессию?

А.Шаповалов

М1545. Имеется доска 1×1000 полей, вначале пустая, и куча из n фишек. Двое ходят по очереди. Первый своим ходом выставляет на доску не более 17 фишек, по одной на любое свободное поле (можно все 17 взять из кучи, а можно — только часть, скажем $k < 17$ — из кучи, а остальные, не более $17 - k$, переставить на доске). Второй снимает с доски любую серию фишек, т.е. несколько фишек, стоящих подряд (без пробелов между ними), и кладет их обратно в кучу. Первый выигрывает, если ему удастся выставить все n фишек в одну серию. Докажите, что а) при $n = 98$ первый может выиграть, б) а при $n > 98$ — нет.

А.Шаповалов

Ф1548. Через легкий блок перекинута нерастяжимая и невесомая нить, к концам которой прикреплены грузы массой 1 кг и 3 кг. Блок насажен на ось с трением, сила трения пропорциональна нагрузке на ось. Ускорение тяжелого груза в описанной ситуации составило 2 м/с^2. Какой массы грузик следует положить на легкий груз, чтобы предоставленная самой себе система могла оставаться в равновесии?

С.Варламов

Ф1549. Тонкую упругую полоску длиной L согнули в полуокружность и связали концы нитью — натяжение нити составило при этом T. Какую работу нужно совершить, чтобы «догнуть» пластинку, превратив ее в обруч?

З.Рафаилов

Ф1550. Планета З очень похожа на Землю, но на последних выборах во Всемирный парламент там победили антиэкологисты, которые немедленно построили на всей поверхности планеты (включая моря и океаны) атомные электростанции для нагрева атмосферы. На один квадратный метр поверхности приходится мощность 1000 Вт. Через какое время после начала нагрева температура атмосферы увеличится на 1 градус? Считайте, что сама планета не нагревается, а мощность излучения в космос остается неизменной.

С.Варламов

Ф1551. В схеме на рисунке 1 при помощи быстродействующего переключателя к точкам A и $Б$ подключается конденсатор емкостью 1000 мкФ то в одной, то в другой полярности. При этом переключаются выводы конденсатора — в течение 0,001 с конденсатор включен в одной полярности, затем мгновенно переключается и в течение 0,002 с оказывается включенным наоборот, после чего процесс повторяется. Найдите средние значения токов, протекающих через батарейки.

Р.Александров

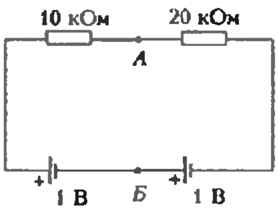


Рис. 1

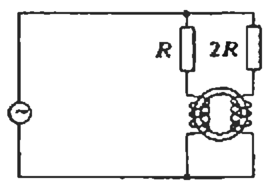


Рис. 2

Ф1552. На ферромагнитный сердечник намотаны две одинаковые катушки, каждая индуктивностью L (рис.2). Последовательно с одной из катушек подключили резистор сопротивлением R, последовательно с другой — резистор сопротивлением $2R$, а получившиеся цепочки соединили параллельно и включили в сеть переменного напряжения, амплитуда которого U_0 и частота f. Найдите токи, протекающие через резисторы. Элементы цепи считать идеальными, рассеянием магнитного потока пренебречь.

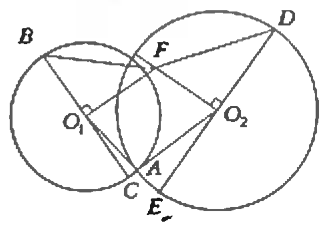
А.Зильберман

Решения задач М1511—М1520, Ф1528—Ф1537

Задаче М1513 посвящена отдельная заметка в конце этого раздела.

М1511. *На плоскости даны две пересекающиеся окружности. Точка A — одна из двух точек пересечения этих окружностей. В каждой окружности проведен диаметр, параллельный касательной в точке A к другой окружности, причем эти диаметры не пересекаются. Докажите, что концы этих диаметров лежат на одной окружности.*

Обозначим диаметры BC и DE, а центры соответствующих окружностей — O_1 и O_2 и проведем из центров окружностей перпендикуляры к соответствующим диаметрам, пусть эти перпендикуляры пересеклись в точке F (см. рисунок). Докажем, что F — центр искомой окружности.



Заметим, что $O_1F \parallel AO_2$, так как O_1F и AO_2 перпендикулярны BC. Аналогично $O_2F \parallel AO_1$. Значит, AO_1FO_2 — параллелограмм. Отсюда $FO_2 = AO_1 = BO_1$, а $FO_1 = AO_2 = DO_2$. Теперь из равенства треугольников BO_1F и FO_2D получаем, что $FB = FD$. Кроме того, точка F, по построению, лежит на серединных перпендикулярах к BC и DE, а значит, $FC = FD = FE$, что и требовалось.

С.Берлов

М1512. а) $f(x)$ — *многочлен четной степени, отличный от 0. Докажите, что существует такое натуральное k, что многочлен*

$$f(x)+f(x+1)+\ldots+f(x+k)$$

не имеет вещественных корней.
б) $f(x)$ — *многочлен нечетной степени. Докажите, что существует такое натуральное k, что многочлен*

$$f(x)+f(x+1)+\ldots+f(x+k)$$

имеет ровно один вещественный корень.

Будем считать старший коэффициент многочлена $f(x)$ положительным.
а) Пусть x_1 и x_2 — наименьший и наибольший корни многочлена $f(x)$, M — наименьшее значение этого многочлена. Поскольку при достаточно большом по модулю x значение $f(x)$ больше M, найдется такое расстояние d, что для всех точек x, удаленных от $[x_1, x_2]$ более чем на d, будет $f(x) > M$. Наименьшим и наибольшим корнями многочлена $f(x+l)$ являются числа $x_1 - l$ и $x_2 - l$. Выберем некоторое l так, чтобы расстояние между отрезками $[x_1 - l, x_2 - l]$ и $[x_1, x_2]$ превышало d. Очевидно, $f(x) + f(x+l) > 0$ для любого x. Значит, и

$$\big(f(x)+f(x+l)\big)+\big(f(x+1)+f(x+l+1)\big)+\ldots+$$
$$+\ldots+\big(f(x+l-1)+f(x+2l-1)\big)=$$
$$=f(x)+f(x+1)+\ldots+f(x+2l-1)>0$$

для любого x, и в роли k можно взять $2l-1$.
б) Рассмотрим многочлен $f'(x)$ и натуральное число k такое, что

$$f'(x)+\ldots+f'(x+k)>0$$

для всех x (оно существует согласно а)). Многочлен $f(x)+\ldots+f(x+k)$ — возрастающая функция. Следовательно, он имеет ровно один вещественный корень.

С.Берлов, К.Кохась, В.Сендеров

М1514*. *Прямоугольник разбит на доминошки (т.е. прямоугольники 1×2). Докажите, что его клетки можно раскрасить в два цвета так, чтобы любая доминошка в данном разбиении содержала клетки разных цветов, но в любом другом разбиении этого прямоугольника на доминошки нашлась бы доминошка, содержащая две клетки одного цвета.*

Первое решение. Покажем, что утверждение задачи верно не только для прямоугольника, но и для любой клетчатой фигуры, которую можно разбить на доминошки. Индукция по числу доминошек разбиения. Пусть для всех меньших фигур это верно. Рассмотрим «угловую» клетку, у которой нет соседа ни слева, ни сверху (такую клетку можно накрыть доминошкой ровно двумя способами), и раскрасим по индукционному предположению всю фигуру без доминошки разбиения, содержащей эту клетку. Покрасим теперь оставшуюся доминошку в два цвета так, чтобы наша клетка была того же цвета, что и ее сосед, не содержащийся в этой доминошке (если такого соседа нет — то доминошку можно раскрасить как угодно). Получившаяся раскраска удовлетворяет условию. Действительно, если в каком-либо другом разбиении доминошка, накрывающая нашу угловую клетку, расположена так же, как в рассмотренном, то, по индукционному предположению, в оставшейся части фигуры найдется «одноцветная» доминошка; если же угловая клетка накрыта доминошкой вторым способом, то уже в этой доминошке обе клетки одного цвета.

Второе решение. Предъявим требуемую раскраску. Для каждой горизонтальной доминошки покрасим в черный цвет левую занимаемую ею клетку, а для каждой вертикальной — нижнюю. Введем систему координат, в которой координаты центров клеток целочисленны, а оси направлены стандартным образом: вверх и вправо. Пусть S — разность суммы координат центров всех белых клеток и суммы координат центров всех черных. В исходной расстановке каждая доминошка вносит в эту сумму вклад, равный $+1$, поэтому S равно количеству доминошек. Допустим, что у нас есть какое-то другое разбиение, в котором каждая доминошка содержит по одной черной и одной белой клетке построенной раскраски. Так как величина S зависит только от раскраски, а вклад каждой доминошки нового разбиения не превосходит единицы, мы заключаем, что все вклады равны единице, т.е. в каждой доминошке нового разбиения черная клетка тоже находится слева или снизу. Но расположение доминошек с таким свойством однозначно восстанавливается по имеющейся раскраске (рассмотрите, например, снизу вверх самый левый столбец клеток, потом следующий и т.д.) и, следовательно, совпадает с исходным.

М1515. *Известно, что $f(x)$, $g(h)$ и $h(x)$ — квадратные трехчлены. Может ли уравнение $f\big(g(h(x))\big)=0$ иметь корни 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8?*

Ответ: не может.
Предположим, что числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 — корни уравнения $f\big(g(h(x))\big)=0$. Если прямая $x=a$ — ось параболы, задаваемой уравнением $y=h(x)$, то $h(x_1)=h(x_2)$ тогда и только тогда, когда $x_1+x_2=2a$. Многочлен $f\big(g(x)\big)$ имеет не более четырех корней, но числа $h(1)$, $h(2)$, …, $h(8)$ являются его корнями, следовательно, $a=4{,}5$ и $h(4)=h(5)$, $h(3)=h(6)$, $h(2)=h(7)$, $h(1)=h(8)$. Кроме того, мы попутно доказали, что числа $h(1)$, $h(2)$, $h(3)$, $h(4)$ образуют монотонную последовательность.
Аналогично, рассматривая трехчлен $f(x)$ и его корни $g(h(1))$, $g(h(2))$, $g(h(3))$ и $g(h(4))$, получаем, что $h(1)+h(4)=2b$, $h(2)+h(3)=2b$, где прямая $x=b$ — ось параболы, задаваемой уравнением $y=g(x)$. Но из уравнения $h(1)+h(4)=h(2)+h(3)$ для $h(x)=Ax^2+Bx+C$ следует, что $A=0$. Противоречие.

С.Токарев

М1516. *Имеется три кучи камней. Сизиф таскает по одному камню из кучи в кучу. За каждое перетаскива-*

ние он получает от Зевса количество монет, равное разности числа камней в куче, в которую он кладет камень, и числа камней в куче, из которой он берет камень (сам перетаскиваемый камень при этом не учитывается). Если указанная разность отрицательна, то Сизиф возвращает Зевсу соответствующую сумму (если Сизиф не может расплатиться, то великодушный Зевс позволяет ему совершить перетаскивание в долг).

В некоторый момент оказалось, что все камни лежат в тех же кучах, в которых они лежали первоначально. Каков наибольший суммарный заработок Сизифа на этот момент?

Первое решение. Будем называть камни из одной кучи — знакомыми, из разных куч — незнакомыми. Тогда доход Сизифа за одно перетаскивание равен изменению количества пар знакомых камней. Так как в конечный момент все камни оказались в исходных кучах, то общее изменение количества знакомств равно нулю, а, значит, и доход Сизифа равен нулю.

Второе решение. Покажем, что величина $A = ab + bc + ca + S$, где a, b и c — количество камней в кучах, S — доход Сизифа, не изменяется при перетаскивании камней. Действительно, без ограничения общности можно считать, что Сизиф перетащил камень из первой кучи во вторую. Тогда $A' = (a-1)(b+1)+(b+1)c+c(a-1)+S' = A$, так как $S' = S + b - (a-1)$. Но величина $ab + bc + ca$ в начальный и конечный момент одна и та же, а следовательно, и конечный доход Сизифа равен начальному, т.е. нулю.

Аналогичным является решение, использующее инвариантность величины $b = a^2 + b^2 + c^2 - 2S$.

Третье решение. Несложно проверить, что если поменять местами очередность двух перетаскиваний камней, то S при этом изменится на одну и ту же величину. Кроме того, за два перетаскивания камня: из кучи A в кучу B, а затем из B в A, доход Сизифа равен нулю. Таким же будет доход за три перетаскивания: $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$.

Из того, что в конце все камни оказались в исходных кучах, следует, что порядок перетаскивания камней можно поменять так, что все перетаскивания разобьются на тройки вида $A \to B \to C \to A$ и двойки вида $A \to B \to A$, дающие Сизифу нулевой доход.

И.Изместьев, Д.Кузнецов, И.Рубанов

М1517. *Существует ли последовательность натуральных чисел, в которой каждое натуральное число встречается ровно один раз и при этом для любого $k = 1, 2, 3, \ldots$ сумма первых k членов последовательности делится на k?*

Определим последовательность a_k индуктивно:

1. $a_1 = 1$.
2. Пусть $a_1, \ldots, a_{n-1}$ заданы, причем все средние

$$p_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i, \quad 1 \le k \le n-1$$

являются натуральными числами. Положим

$$a_n = \begin{cases} p_{n-1}, \text{ если } p_{n-1} \ne a_k, \ 1 \le k \le n-1, \\ p_{n-1} + n, \text{ если } p_{n-1} = a_s \\ \qquad\qquad \text{при некотором } 1 \le s \le n-1. \end{cases}$$

Тогда

$$p_n = p_{n-1}, \text{ если } a_n = p_{n-1},$$
$$p_n = p_{n-1} + 1, \text{ если } a_n = p_{n-1} + n.$$

Поэтому

1) $\sum_{k=1}^{n} a_k \equiv 0 \pmod n$ для всякого n;

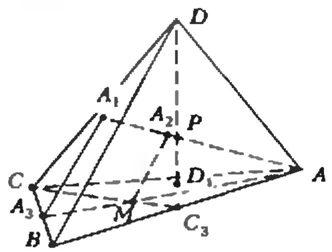
2) для всякого натурального m найдется $a_s = m$, так как последовательность средних $\{p_i\}$ монотонно неубывает, причем $p_{i+1} - p_i \le 1$;

3) в последовательности нет одинаковых чисел, так как $p_{n-1} + n$ — монотонно возрастающая последовательность.

О.Ляшко, А.Шаповалов

М1518. *Высоты тетраэдра пересекаются в одной точке. Докажите, что эта точка, основание одной из высот и три точки, делящие другие высоты в отношении 2 : 1, считая от вершин, лежат на одной сфере.*

Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC, P — точка пересечения высот тетраэдра, AA_1 — высота тетраэдра из вершины A. $MA_2 \| A_3A_1$ и $AA_2/A_2A_1 = 2:1$. Угол MA_2P — прямой, так что точка



A_2 лежит на сфере с диаметром MP. Аналогично рассматриваются остальные случаи.

Д.Терешин

М1519*. *На плоскости отмечены две точки на расстоянии 1. Разрешается, измерив циркулем расстояние между двумя отмеченными точками, провести окружность с центром в любой отмеченной точке с измеренным радиусом. Линейкой разрешается провести прямую через любые две отмеченные точки. При этом отмечаются новые точки — точки пересечения построенных линий. Пусть Ц(n) — наименьшее число линий, проведение которых одним циркулем позволяет получить две отмеченные точки на расстоянии n, где n — натуральное число. ЛЦ(n) — то же, но циркулем и линейкой. Докажите, что последовательность Ц(n)/ЛЦ(n) не ограничена.*

а) Покажем, что Ц$(2^n) \ge n$. Действительно, если d — наибольшее из расстояний между отмеченными точками, то проведение одной линии циркулем позволяет получить отмеченную точку на расстоянии не более $2d$ от уже отмеченных. Отсюда следует, что Ц$\left(2^{2^n}\right) \ge 2^n$.

б) Покажем, что ЛЦ$\left(2^{2^n}\right) \le 5(n+1)$. Пусть A и B — две данные отмеченные точки. Проведение пяти линий позволяет построить угол BAC, где $BA = 1$, $AC = 2$ (рис. 1): окружности радиуса 1 с центрами в точках A, B и T, прямые AT и AB.

Далее, проведение пяти линий позволяет построить отрезок длиной m^2, если уже получен отрезок длиной m (рис. 2): окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 радиусами m с

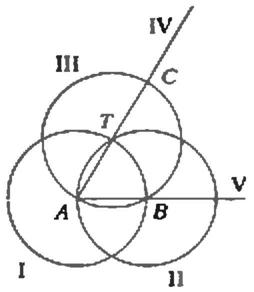


Рис. 1

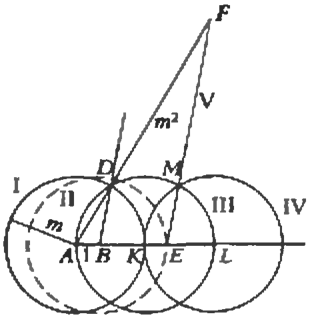


Рис. 2

центрами в точках A, B, K ($K = \omega_1 \cap AB$), L ($L = \omega_4 \cap AB$), и наконец, прямая EM, где $E = \omega_2 \cap AB$, $M = \omega_3 \cap \omega_4$.
Пусть $F = EM \cap AC$, $D = \omega_1 \cap AC$. Тогда $DF = m^2$. Действительно, треугольники ADK и KML равносторонние со сторонами $AD = KM = m$, $\angle DAB = \angle MKE = 60^\circ$, $AB = KE = 1$, поэтому $\angle DAB = \angle MEK$, следовательно, $EM \parallel BD$. По теореме Фалеса $AB : AD = BE : DF$, откуда следует, что $DF = m^2$. Таким образом, $ЛЦ(2) \le 5$, $ЛЦ(4) \le 2\cdot 5$, ..., $ЛЦ\left(2^{2^n}\right) \le 5(n+1)$. Утверждение задачи теперь следует из того, что $\frac{2^{n}}{5(n+1)} \to \infty$ при $n \to \infty$.

А. Белов

М1520. *Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$, у которых старшие коэффициенты равны 1. Докажите, что сумма квадратов коэффициентов многочлена $P(x)\,Q(x)$ не меньше суммы квадратов свободных членов $P(x)$ и $Q(x)$.*

Сумма квадратов коэффициентов многочлена

$$\left(a_kx^k+\ldots+a_1x+a_0\right)\left(b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0\right), \qquad (1)$$

т.е. сумма по всем $h \le m+k$ чисел

$$\left(a_0b_h+a_1b_{h-1}+\ldots+a_hb_0\right)\left(a_0b_h+a_1b_{h-1}+\ldots+a_hb_0\right),$$

равна сумме чисел $a_ia_jb_rb_s$ по всем i, j, r, s таким, что $i - j = r - s$ (мы считаем равными 0 числа a_i с индексами, не лежащими на отрезке $0 \le i \le k$, и числа b_r с индексами, не лежащими на отрезке $0 \le r \le m$). Но точно такой же будет и сумма квадратов коэффициентов многочлена

$$\left(a_kx^k+\ldots+a_1x+a_0\right)\left(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m\right). \qquad (2)$$

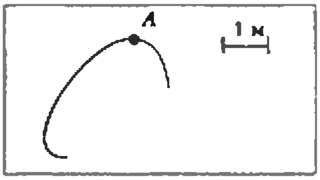
Пусть теперь $a_k = b_m = 1$. Сумма квадратов (2) при этом равна

$$b_0^2+\ldots+a_0^2 \ge a_0^2+b_0^2$$

(слева выписаны квадраты первого и последнего коэффициентов).
Из этого решения нетрудно увидеть, в каких случаях неравенство задачи превращается в равенство: для этого необходимо и достаточно, чтобы многочлен (2) — произведение $P(x)$ на многочлен $x^mQ(1/x)$, полученный «обращением» $Q(x)$ (m — степень Q), — имел вид $cx^{m+k} - d$. Например, это так для $P(x) = x^2 - 2x + 4$ и $Q(x) = x + 1/2$. (Уже отсюда видно, что совсем «грубого» доказательства у этой задачи быть не может.)

Н. Васильев

Ф1528. *На рисунке приведена траектория точки А на плоскости (масштаб указан на рисунке). Скорость точки все время составляет $v = 2$ м/с. Найдите максимальное ускорение точки.*



При неизменной по величине скорости ускорение точки имеет только нормальную (центростремительную) составляющую. Для того чтобы ее найти, нужно определить радиус кривизны траектории в интересующей нас точке. А интересует нас точка, которая находится на самом «кривом» участке траектории — в нашем случае это левый нижний изгиб траектории, именно там ускорение максимально. Найдем на глаз положение этой точки и сделаем необходимые построения: рассмотрим на кривой две вспомогательные точки по обе стороны от выбранной, проведем в каждой касательную к траектории и построим к этим касательным перпендикуляры в точках касания. Пересечение этих перпендикуляров и даст очевидный результат, а для произвольной кривой нужно еще добавить, что выбранные точки должны находиться очень близко к точке, в которой мы определяем радиус кривизны, — в пределе на бесконечно малом расстоянии. Но это — только в теории. Если мы на деле возьмем точки очень близко друг к другу, наши перпендикуляры просто сольются и точность нахождения их пересечения окажется очень плохой. Вывод ясен — нужно брать точки близко, но не слишком близко. Конкретное значение радиуса кривизны, определенное в месте левого нижнего изгиба графика в условии задачи, составляет $R \approx 0{,}5$ м. Тогда максимальное ускорение точки будет равно

$$a = v^2/R \approx 8\ \text{м/с}^2.$$

З. Рафаилов

Ф1529. *Жук-плавунец может находиться в воде без движения. Попав в ручей, жук может двигаться против течения с максимальной скоростью v_1, а по течению — с максимальной скоростью v_2. С какой максимальной скоростью жук может двигаться перпендикулярно течению ручья?*

Из условия ясно, что у жука «нулевая плавучесть» — сила Архимеда в точности компенсирует силу тяжести, и мы можем эти силы не учитывать. Если считать, что механическая мощность N, развиваемая жуком, одинакова во всех случаях, то максимальная «сила тяги» определяется скоростью жука относительно воды:

$$F_т v_{отн} = N.$$

При движении против течения со скоростью v_1 скорость жука относительно воды составит $v_1 + u$, где u — скорость воды. Если считать, что сила сопротивления воды пропорциональна относительной скорости: $F_с = \alpha v_{отн}$, то в этом случае

$$F_т = F_с, \text{ или } N/(v_1+u) = \alpha(v_1+u).$$

При движении по течению со скоростью v_2 аналогично получаем

$$N/(v_2 - u) = \alpha(v_2 - u).$$

Если скорость жука (v) перпендикулярна течению (все равно — вбок или вниз), то $v^2_{отн} = v^2 + u^2$, и тогда

$$N = \alpha(v^2 + u^2).$$

Исключая α и N, найдем искомую скорость:

$$v = \sqrt{v_1 v_2}.$$

В.Михайлов

Ф1530. ***На гладкой плоскости находится тело массой 1 кг, к которому привязана легкая пружинка жесткостью 10 Н/м. Начинаем тянуть вдоль пружинки с постоянной скоростью 1 м/с. Какую работу мы совершаем за первую секунду с момента начала движения?***

Работа силы равна сумме кинетической энергии груза (тела) и потенциальной энергии деформированной пружинки. Для нахождения скорости груза и величины деформации пружинки проще всего пересесть в систему отсчета, в которой свободный конец пружинки — за него мы тянем со скоростью $v_0 = 1$ м/с — оказывается неподвижным. Мы получаем обычную колебательную систему из груза и пружинки, которую вывели из равновесия, придав грузу скорость v_0. Тогда

$$v = v_0 \cos\omega t, \ x = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t, \text{ где } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Для нахождения полной энергии в конце первой секунды движения нужно перейти обратно в неподвижную систему отсчета:

$$A = E_k + E_p = \frac{m(v_0 - v)^2}{2} + \frac{kx^2}{2} =$$

$$= mv_0^2\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \approx 2 \text{ Дж}.$$

Заметим, что выбранный в условии отрезок времени составляет почти точно половину периода колебаний.

А.Зильберман

Ф1531. *С Северного полюса Земли в исследовательских целях производят запуск баллистической ракеты. Требуется попасть в точку на экваторе Земли, сообщив при этом ракете минимально возможную скорость. Найдите величину этой скорости и угол, под которым нужно произвести запуск.*

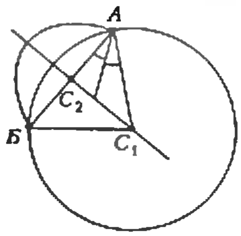
Для решения этой задачи нужно знать некоторые свойства эллиптических орбит:

— сумма расстояний от любой точки эллипса до его фокусов постоянна и равна $2a$ (a — длина половины большой оси эллипса);

— касательная к окружности перпендикулярна радиусу, а для эллипса — биссектрисе угла, образованного отрезками, соединяющими точку эллипса с фокусами;

— полная энергия спутника на круговой орбите радиусом R составляет $E = E_k + E_p = -GMm/(2R)$, для эллиптической орбиты вместо R подставляется a — большая полуось (см., например, статью А.Черноуцана «О законах Кеплера» в этом номере журнала — *Прим. ред.*).

При фиксированных точках старта и финиша минимальная скорость ракеты соответствует минимальному значению полной энергии, т.е. минимальному значению a (вспомним «минус» в выражении для полной энергии). Минимальное значение большой полуоси соответствует траектории, у которой второй фокус C_2 (см. рисунок) лежит на прямой, соединяющей точки старта A и финиша $Б$ — сумма расстояний от точки A до фокусов C_1 и C_2 минимальна именно при таком положении второго фокуса.



Сначала определим стартовый угол: $\angle C_2AC_1 = 45°$, биссектриса этого угла составляет угол 22,5° с радиусом C_1A, значит, и стрелять нужно под углом 22,5° к горизонту. Скорость v найдем из закона сохранения энергии — сравним энергию в точке старта с полной энергией:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2a},$$

но $2a = AC_1 + AC_2 = R + R/\sqrt{2}$, подставляя это значение, получим

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R(\sqrt{2}+1)}} = \sqrt{\frac{2gR}{\sqrt{2}+1}} \approx 7{,}2 \text{ км/с}.$$

С.Башинский

Ф1532. *Тонкостенный сосуд кубической формы помещен в разреженный газ с концентрацией молекул n_0. В сосуде сделали маленькую дырку — срезали вершину угла так, что дырка имеет форму правильного треугольника. Какая концентрация молекул установится в сосуде? Рассмотрите случаи очень хорошей и очень плохой теплопроводности стенок.*

Равновесие соответствует компенсации потоков частиц, влетающих в сосуд и вылетающих из него, а также равенству потоков энергии внутрь и наружу. Ясно, что при этом средние энергии молекул внутри и снаружи должны быть равны — значит, и в случае высокой теплопроводности стенок, и в случае низкой ответы будут одинаковы, просто во втором случае придется дольше ждать установления равновесия. При сравнении поведения влетающих в сосуд через отверстия, расположенные в разных местах, молекул сразу ясно — расположение отверстия роли не играет. Сложнее с вылетающими молекулами — кажется, что к углу подлетает в 4 раза меньше молекул (числа тоже можно придумать разные), чем к середине грани. Аккуратный анализ, в котором учтены отражения молекул от стенок сосуда, показывает, что местоположение дырки также роли не играет. Итак,

$$n_0 vS = n_1 vS, \text{ и } n_1 = n_0.$$

В.Михайлов, А.Зильберман

Ф1533. *Вертикальный сосуд высотой $H = 0{,}1$ м и площадью сечения $S = 1$ см^2 при температуре $T_1 = 273$ К содержит воздух при атмосферном давлении и небольшое количество воды. Сосуд закрывают сверху подвижным поршнем массой $M = 1{,}5$ кг и дают поршню двигаться. После того как поршень остановился, сосуд начинают медленно нагревать и доводят температуру до $T_2 = 373$ К. Какое количество теплоты сообщили при этом системе? Теплоемкостью сосуда и поршня пренебречь.*

Будем считать, для определенности, что к концу нагревания испарилась не вся вода. Тогда пар будет насыщенным, а его давление при $T_2 = 373$ К составит $p_2 = p_a = 10^5$ Па. При медленном нагреве можно считать, что поршень в любой момент находится в равновесии. Обозначим высоту, на которой поршень остановится к концу нагрева, через h и запишем условие равновесия:

$$\left(p_{\text{возд}} + p_{\text{пара}}\right)S = p_a S + Mg\text{, или } p_a\frac{H}{h} + p_a = p_a + \frac{Mg}{S},$$

откуда

$$h = H\frac{p_a S}{Mg} = \frac{2}{3}H.$$

Масса образовавшегося пара в сосуде равна

$$m = \frac{Mp_{\text{пара}}V_{\text{пара}}}{RT_2} = \frac{Mp_a\cdot(2/3)HS}{RT_2}.$$

На испарение такой массы воды нужно количество теплоты

$$Q_1 = rm \approx 9 \text{ Дж}.$$

Воздух в сосуде нагревается при постоянном давлении, т.е. его молярная теплоемкость равна $C_p = C_V + R = 3{,}5R$. На его нагрев нужно количество теплоты

$$Q_2 = C_p\nu\Delta T = \frac{3{,}5Rp_a HS\Delta T}{RT_1} \approx 1 \text{ Дж}.$$

Еще немного тепла нужно для нагрева воды от 273 до 373 К, но это совсем мало. В общем можно необходимое количество теплоты оценить как

$$Q \approx Q_1 + Q_2 \approx 10 \text{ Дж}.$$

А.Ольховец

Ф1534. *Три резистора соединили последовательно и подключили к батарейке. Два амперметра включили в цепь, как показано на рисунке 1. Токи через амперметры составили 1 А и 3 А. Может ли в этой схеме через средний резистор течь ток силой 2 А? В каких пределах могут находиться силы токов, текущие через левый и правый резисторы? Сопротивления амперметров считать пренебрежимо малыми.*

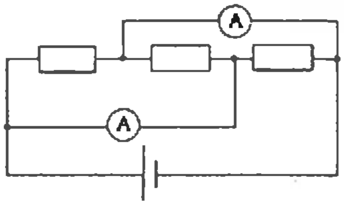


Рис.1

Это совсем простая задача. Если сопротивления амперметров пренебрежимо малы, то резисторы оказываются подключенными к батарейке параллельно и можно записать (см. рис.2)

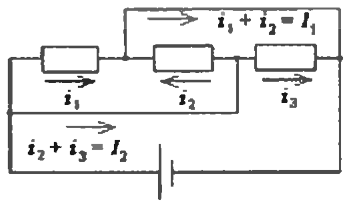


Рис.2

$$i_1 + i_2 = I_1 = 1 \text{ А},\ i_2 + i_3 = I_2 = 3 \text{ А}.$$

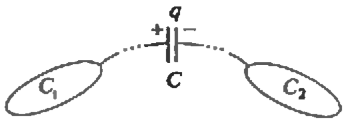
Направления токов определены тут однозначно, поэтому отрицательных значений быть не может. Тогда ясно, что

$$0 < i_1 < 1 \text{ А},\ 0 < i_2 < 1 \text{ А},\ 1 \text{ А} < i_3 < 3 \text{ А}.$$

Ток через средний резистор не может быть равным 2 А.

Р.Александров

Ф1535. *Очень далеко друг от друга находятся два проводника. Заряд одного из них Q_1, его потенциал φ_1. Заряд второго проводника Q_2, его потенциал φ_2. Первоначально незаряженный конденсатор емкостью C подключают очень тонкими проводами к этим проводникам. До какого напряжения зарядится конденсатор?*



Пусть заряды обкладок конденсатора $+q$ и $-q$ (см. рисунок). Тогда заряд первого проводника $Q_1 - q$, а второго $Q_2 + q$. Условие для потенциалов запишем в виде

$$\frac{Q_1 - q}{C_1} - \frac{Q_2 + q}{C_2} = \frac{q}{C}\text{, где } C_1 = \frac{Q_1}{\varphi_1} \text{ и } C_2 = \frac{Q_2}{\varphi_2}.$$

Отсюда получаем заряд конденсатора:

$$q = \frac{Q_1/C_1 - Q_2/C_2}{1/C_1 + 1/C_2 + 1/C} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_1/Q_1 + \varphi_2/Q_2 + 1/C}$$

и напряжение конденсатора:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{C\left(\varphi_1/Q_1 + \varphi_2/Q_2\right) + 1}.$$

Р.Афаилов

Ф1536. *Маятник состоит из длинной, тонкой и легкой нити длиной L и маленького тяжелого шарика. Два таких маятника прикрепили к общей точке подвеса и зарядили одноименно, так что они разошлись на небольшое (по сравнению с длиной нити) расстояние. Найдите период малых колебаний маятников относительно новых положений равновесия.*

Обозначим малое смещение шарика от вертикали под действием электрических сил через x. Тогда для равновесия получим (с учетом малости x и соответствующего угла α)

$$F_{\text{эл}} - mg\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0\text{, или } \frac{kq_1q_2}{4x^2} = mg\frac{x}{L}.$$

Сместим теперь шарик еще на $\Delta x \ll x$, тогда возвращающая сила будет равна

$$F = mg\frac{x+\Delta x}{L} - \frac{kq_1q_2}{4(x+\Delta x)^2} =$$

$$= mg\frac{x}{L} - \frac{kq_1q_2}{4x^2}\frac{1}{(1+\Delta x/x)^2} + mg\frac{\Delta x}{L}.$$

Упрощая это выражение с учетом $\Delta x/x \ll 1$, получим

$$F = mg\frac{\Delta x}{L} + 2\frac{kq_1q_2}{4x^2} = 3mg\frac{\Delta x}{L}.$$

Это обычное уравнение гармонических колебаний (немного необычное обозначение: Δx вместо x). Период таких колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{3g}}.$$

М.Ермилов

Ф1537. *«Черный ящик» с двумя выводами имеет сопротивление R, но если приложенное напряжение увеличить до U_0, то сопротивление возрастет до $2R$ и останется таким при дальнейшем возрастании напряжения. Если же после этого начать снижать напряжение, то к прежнему значению сопротивление вернется только при напряжении $0{,}5U_0$. У нас в распоряжении есть еще регулируемый источник питания (его напряжение можно установить каким угодно), конденсатор, реостат и провода. Придумайте схему генератора колебаний, рассчитайте необходимые параметры входящих в схему элементов и оцените период колебаний при выбранных значениях.*

Вы попробовали придумать схему генератора из описанных элементов и у вас не получилось? Все правильно — и не получится. Для того чтобы генератор с конденсатором мог работать, нужно взять «черный ящик» другого типа — сопротивление должно не *увеличиваться* при достижении определенного напряжения, а *уменьшаться*. А вот с катушкой вместо конденсатора такой генератор сделать можно — достаточно соединить последовательно батарейку, «черный ящик» и катушку, ток в цепи будет периодически изменяться, если правильно выбрать напряжение батарейки. Однако такой «черный ящик» должен иметь заданными не напряжения переключения, а токи. Но это уже совсем другая задача.

А.Зильберман

Про угол $\frac{\pi}{7}$ и $\sqrt{7}$

Эта заметка посвящена задаче М1513 — доказательству равенства

$$\mathrm{tg}\frac{3\pi}{7} - 4\sin\frac{\pi}{7} = \sqrt{7}.$$

Собственно говоря, таких доказательств существует очень много — они используют различные приемы тригонометрии, алгебры и даже геометрии. Но необходимые выкладки приятнее проделать самостоятельно, чем разбираться в их подробном изложении. Поэтому мы приведем лишь одно из решений (именно оно, с некоторыми нюансами, чаще других встречалось в работах участников прошлогодней Соросовской олимпиады, где предлагалась эта задача); а затем сформулируем в виде задач некоторые факты, открывающие подходы к другим доказательствам этого равенства, его интересные вариации, обобщения и следствия.

Основные тождества, которые мы будем использовать:

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta),$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta), \qquad (1)$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta),$$

и их частные случаи (при $\alpha = \beta$).

Обозначим, для экономии места, $\pi/7$ через η («эта» — седьмая буква греческого алфавита). Удобно пользоваться тем, что $\sin 3\eta = \sin 4\eta$, $\sin\eta = \sin 6\eta$, $\cos 2\eta = -\cos 5\eta$, $\cos 6\eta = \cos 8\eta = -\cos\eta$ и т.п. — мы не будем отдельно отмечать эти переходы. А главное свойство этих углов:

$$2\cos 2\eta + 2\cos 4\eta + 2\cos 6\eta = -1, \qquad (2)$$

или, что эквивалентно,

$$2\cos\eta + 2\cos 3\eta + 2\cos 5\eta = 1. \qquad (2')$$

Вот геометрическое доказательство равенства (2). Рассмотрим векторы, идущие из точки (0;0) — центра правильного семиугольника — в его вершины, одна из которых лежит в точке (1;0) (рис. 1). Поскольку сумма этих семи векторов равна $\vec{0}$ (ведь при повороте на угол 2η вокруг центра она не может измениться!), то равна 0 и сумма их проекций на ось Ox.

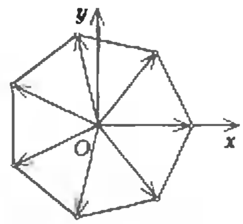


Рис. 1

(Другое доказательство (2) или (2′) можно получить, умножив обе части на $\sin\eta$ и применив преобразование (1) произведений в сумму.)

Итак, мы должны доказать равенство

$$\mathrm{tg}\,3\eta - 4\sin\eta = \sqrt{7}. \qquad (3)$$

Умножив обе части на $\cos 3\eta$, преобразуем левую часть так:

$$L = \sin 3\eta - 2(\sin 4\eta - \sin 2\eta) = 2\sin 2\eta - \sin 4\eta. \qquad (4)$$

Нужно доказать, что квадрат этого (положительного!) числа равен $7\cos^2 3\eta$. И действительно,

$$7\cos^2 3\eta - L^2 = 7(1+\cos 6\eta)/2 - (2 - 2\cos 4\eta) +$$

$$+(2\cos 2\eta - 2\cos 6\eta) - (1-\cos 6\eta)/2 =$$

$$= 2\cos 2\eta + 2\cos 4\eta + 2\cos 6\eta + 1 = 0.$$

А теперь — несколько задач с комментариями. Прежде всего заметим, что преобразование (4) можно продолжить:

$$L = 2\sin 2\eta(1-\cos 2\eta) = 4\sin^2\eta\cdot\sin 2\eta =$$

$$= 4\sin\eta\cdot\sin 6\eta\cdot\sin 2\eta = 8\sin\eta\cdot\sin 2\eta\cdot\sin 3\eta\cdot\cos 3\eta,$$

поэтому (3) можно записать так:

$$8\sin\eta\cdot\sin 2\eta\cdot\sin 3\eta=\sqrt{7} \qquad (5)$$

(что, конечно, гораздо красивее, чем (3)!).

С этим равенством и связаны первые задачи.

1. Докажите равенства

а) $\cos 2\eta\cdot\cos 4\eta+\cos 2\eta\cdot\cos 6\eta+\cos 4\eta\cdot\cos 6\eta=-1/2$,

б) $\cos 2\eta\cdot\cos 4\eta\cdot\cos 6\eta=-\cos\eta\cdot\cos 2\eta\cdot\cos 4\eta=1/8$.

в) Выведите отсюда, что $\cos 2\eta$, $\cos 4\eta$, $\cos 6\eta$ — корни уравнения

$$P_3(t)=8t^3+4t^2-4t-1=0 \qquad (6)$$

(а $\cos\eta$, $\cos 3\eta$, $\cos 5\eta$ — корни уравнения $P_3(-t)=0$).

г)* Существует ли многочлен меньшей степени с целыми коэффициентами, имеющий корнем хотя бы один из шести косинусов пункта в)?

2. Докажите (5), возведя обе части в квадрат.

Дадим геометрическую интерпретацию равенства (5): произведение расстояний от вершины (1;0) правильного семиугольника (см. рис.1) до шести остальных вершин равно 7. Объясним это с помощью комплексных чисел, заменив сразу 7 на n. Пусть 1, α_1, $\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}$ — корни уравнения $z^n=1$; они изображаются векторами, идущими к вершинам правильного n-угольника, причем

$$|1-\alpha_k|=2\sin(\pi k/n),\ 1\le k\le n-1.$$

3. Докажите тождество

$$(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_{n-1})=1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}.$$

4. Докажите равенства

а) $(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\ldots(1-\alpha_{n-1})=n$,

б) $\sin\dfrac{\pi}{n}\cdot\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdot\ldots\cdot\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$

и выведите отсюда (5).

5. Найдите произведение длин всех сторон и диагоналей правильного n-угольника, вписанного в окружность с радиусом 1.

Вернемся к тригонометрии. Левую часть (3) можно преобразовать еще одним способом.

6. а) Докажите равенства

$$2\sin^2 3\eta=1+\cos\eta,\ 2\cos^2 3\eta=1-\cos\eta,$$
$$\operatorname{tg}3\eta=(1+\cos\eta)/\sin\eta.$$

б) Выведите отсюда, что (3) эквивалентно равенству $P_3(-\cos\eta)=0$.

Тем самым, из результата задачи 1 можно получить еще одно доказательство (3). По существу, тот же многочлен P_3 встретится и в следующих геометрических задачах.

7. Пусть ABC — равнобедренный треугольник (рис. 2) с основанием $AC=1$ и углом $\angle B=\eta=\pi/7$ при вершине; D и E — такие точки на BC, что $\angle BAD=\angle DAE=\angle EAC=\eta$. Положим $2\cos\eta=u$. Докажите, что

а) $AB=BC=u^2-1$, $BD=\dfrac{u^2-1}{u}$, $DE=\dfrac{1}{u}$, $EC=\dfrac{1}{u^2-1}$;

б) $u^3-u^2-2u+1=0$. (7)

Это — геометрический способ вывести уравнение задачи 1,в) для $\cos\eta$; а в следующей задаче появится даже $\sqrt{8}$ (рис. 3).

8. Пусть A_0BC — равнобедренный треугольник с основанием $A_0C=2$ и углом $\angle B=\eta$ при вершине; A_0, A_1, $A_2,\ldots$ — вершины правильного 14-угольника с центром C

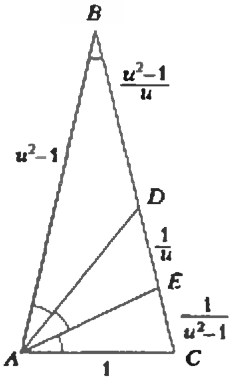


Рис.2

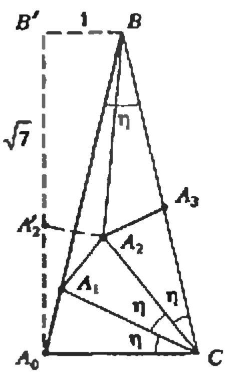


Рис.3

(см. рис.3); A'_2 — точка, симметричная A_2 относительно прямой A_0B.

а) Докажите, что равенство (3) эквивалентно тому, что расстояние A'_2B равно $\sqrt{8}$.

б) Докажите равенство $A_2B=\sqrt{8}$, используя равенство (7) или (2).

9. а) Докажите, что площадь треугольника с углами η, 2η, 4η, вписанного в круг с радиусом 2, равна $\sqrt{7}$.

б) Выведите отсюда равенство

$$2(\sin 2\eta+\sin 4\eta-\sin 6\eta)=\sqrt{7}.$$

в) Выведите (5) и (3) из равенства предыдущего пункта.

Кстати, треугольник, о котором говорится в задаче 9,а), — единственный из треугольников с углами, кратными η, площадь которого выражается в квадратных радикалах через радиус описанного круга! А тот факт, что и стороны таких треугольников — расстояния между вершинами правильного 7-угольника — не выражаются в квадратных радикалах через радиус, следует из одной общей алгебраической теоремы (о том, что неприводимый многочлен с соответствующими корнями должен иметь степень 2^k) и результата следующей задачи. Эта последняя, самая трудная задача про угол $\eta=\pi/7$ и $\sqrt{7}$ отвечает на вопрос: почему мы оперировали с многочленом, корнями которого были косинусы, а не синусы углов, кратных η.

10. а) Докажите, что $v=2\sin\eta$ — корень многочлена $v^3+\sqrt{7}v^2-\sqrt{7}$.

б) Найдите многочлен 6-й степени с целыми коэффициентами, один из корней которого равен $\sin\eta$.

в) Найдите все корни многочленов пунктов а) и б).

г)* Существует ли многочлен меньшей степени с целыми коэффициентами, имеющий корнем одно из этих чисел?

д) Выведите из а) или б) равенство (3) или (5).

Пожалуй, этих задач достаточно, чтобы убедиться, что правильный 7-угольник (и 14-угольник), углы $k\pi/7$ и их связь с $\sqrt{7}$ — сюжет не менее увлекательный, чем правильный 9-угольник и 18-угольник, о котором рассказывалось недавно (см. «Квант», 1995, № 5, с. 40). Конечно, можно двигаться и дальше — вот еще задача из одной старой книги (*Гальперин Г.А., Толпыго А.К.* Московские математические олимпиады. — М.: Просвещение, 1986. — Приложение 2, задача 25).

11. Докажите равенство

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{11}+4\sin\frac{2\pi}{11}=\sqrt{11}.$$

Н. Васильев, В. Сендеров

Космология XX века в лицах

Г.ГОРЕЛИК

Альберт Эйнштейн (1879 — 1955)

Космологию можно было бы назвать древнейшей частью естествознания, поскольку уже первые наблюдения астрономического характера подразумевали некий космологический фон. Однако фон этот был еще слишком гуманитарным, не отделимым от мифа, от религии. И даже мощное развитие физики в XIX веке не сделало космологию естественной наукой. Попытки распространить надежно установленные законы физики на Вселенную как целое натыкались на неразрешимые парадоксы.

Физической теорией космология стала лишь в 1917 году. Это грандиозное по смыслу событие приняло форму десятистраничной статьи в журнале Берлинской академии наук. Автору статьи предстояло еще несколько лет пребывать хотя и видным физиком-теоретиком, но все же лишь «одним из». И мировая слава, и жгучий интерес, и признание гениальности обрушатся на него не за его работу по космологии, а за теорию, одним из приложений (!) которой эта работа стала. Теория пространства-времени-гравитации, построенная Эйнштейном в 1915 году и названная им общей теорией относительности, впервые позволила охватить *Вселенную как целое* последовательной физико-математической картиной.

Эйнштейновская теория гравитации связала всемирное ньютоновское тяготение со свойствами пространства-времени, геометрия которого оказалась евклидовской (а хронометрия — галилеевской) лишь приближенно, когда силы тяготения достаточно малы. И охватить безграничные просторы Вселенной мысленным взором Эйнштейну удалось, только выйдя за пределы этого приближения. В результате появилась геометрическая картина — конечная, но безграничная, как поверхность сферы, — существующей вечно и неизменно, с одним и тем же радиусом, Вселенной.

Эту картину ее создатель вовсе не считал венцом творения, и фактически она была связана со всей его физикой, которая только условно, или в педагогических целях, разделяется на разные области. То, что впоследствии попало в совсем разные учебники, жило когда-то в одной голове: и квантовая физика, за достижения в которой Эйнштейн получил Нобелевскую премию, и теория относительности, автором которой он вошел в общественное сознание XX века.

Эйнштейн принадлежал к поколению, на глазах которого теоретическая физика стала самостоятельной профессией. Но самостоятельность не означает независимости, в данном случае от физики экспериментальной — от наблюдений над Природой. И Эйнштейн оставался естествоиспытателем даже в своих космологических размышлениях. Статичность Вселенной была для Эйнштейна экспериментальным, наблюдательным фактом, а не просто доставшейся в наследство атеистической доктриной. «Самое важное из всего, что нам известно из опыта о распределении материи, заключается в том, что относительные скорости звезд очень малы по сравнению со скоростью света», — Эйнштейн не указал, какой конкретно экспериментальный материал он имел в виду, но роль этого факта видна уже из того, что на десяти страницах статьи он упоминается *семь* раз.

Космологии, скорее, повезло, что ее создатель не очень следил за новейшими достижениями астрономии. Ему, по-видимому, не было известно ни о галактической структуре Вселенной (тогда лишь гипотетической), ни об обнаружении огромных скоростей некоторых галактик (тогда — «спиральных туманностей») — развитие этих исследований приведет в конце 20-х годов к закону Хаббла. Но осилить, освоить теоретически сразу и безграничность Вселенной и ее динамичность было бы гораздо труднее, чем сделать это по очереди.

Почувствовать, насколько условно для великого физика разделение физики на теоретическую и экспериментальную, чистую и прикладную, можно на примере, касающимся сразу и релятивистской космологии и квантовой физики.

Общая теория относительности, решив важнейшую теоретическую задачу — объединить теорию относительности и теорию тяготения, уже при своем рождении была нацелена на астрономическое приложение — объяснить загадку в движении планет. Загадку, малую количественно, но вызывающе не поддающуюся ньютоновской теории. И эта загадка — смещение перигелия Меркурия — была успешно решена.

Следующее приложение новой теории пространства-времени, увиденное Эйнштейном в 1916 году, касалось не старых загадок в астрономических пространствах, а неизвестного нового явления. Эйнштейн обнаружил, что всемирное тяготение способно не только искривлять лучи света, но и само излучаться. В частности, любая планетная система должна рождать гравитационное излучение. Получив из своих общих уравнений соответствующую формулу — закон гравитационных волн, он сразу же подумал о самых многочисленных планетных системах — об атомах, где вокруг звезды-ядра движутся планеты-электроны.

В 1913 году над этими планетными системами ломал голову Нильс Бор, спасая их от гибели, грозившей им в силу классической электродинамики:

вращающийся электрический заряд должен излучать электромагнитные волны и терять свою энергию, т.е. электрон должен был бы врезаться в ядро, и притом всего за миллиардную долю секунды. Бор спас атомы, открыв, что наряду с законами электродинамики действуют еще и новые — квантовые — законы. Теперь же, спустя три года, атомам стала грозить новая опасность — гравитационное высвечивание их энергии. «Поскольку в природе в действительности ничего подобного не должно быть, — писал Эйнштейн, — то, по-видимому, квантовая теория должна модифицировать не только максвелловскую электродинамику, но также и новую теорию гравитации».

Количественных оценок Эйнштейн при этом не привел. И правильно сделал. Потому что если в его общую формулу подставить параметры атомной планетной системы, то время жизни атома окажется равным уже не миллиардной доле секунды, а миллиардам миллиардов лет! Так что с эмпирической точки зрения никакой реальной опасности атомам не угрожало. Но в деятельности теоретика участвуют не только эмпирические и теоретические факторы, но и метатеоретические или, говоря о физике, метафизические факторы, т.е. предубеждения. В зависимости от (и после) результатов, полученных данным теоретиком, его предубеждения называют научным идеалом, исследовательской программой или предрассудком, хотя природа этих понятий едина. Об этом стоит помнить, читая у Эйнштейна, что гравитационного излучения внутриатомных электронов, даже в ничтожном количестве, быть не должно.

Во время, к которому относятся эти слова Эйнштейна, он размышлял над космологической проблемой. Идея космологической эволюции была тогда для него совершенно чуждой, и его первая космологическая теория была статической. А в статической, неизменяющейся, существующей вечно Вселенной эффект гравитационного высвечивания внутриатомной энергии недопустим независимо от величины эффекта. Сам Эйнштейн о такой связи физики атома и физики Вселенной не писал, но, как свидетельствует история науки, в уме физика-мыслителя идеи не могут жить, не замечая одна другую.

Так впервые соприкоснулись квантовая физика и релятивистская космология, и это соприкосновение только еще предвещало грядущее взаимодействие этих двух фундаментальных физических концепций.

Александр Александрович Фридман (1888 — 1925)

Весной 1922 года в главном физическом журнале того времени — «Zeitschrift für Physik» появилось обращение «К немецким физикам!». Правление Германского физического общества извещало о трудном положении коллег в России, которые с начала войны не получали немецких журналов. Поскольку лидирующее положение в тогдашней физике занимали немецкоязычные ученые, речь шла о многолетнем и жестоком информационном голоде. Немецких физиков просили направлять по указанному адресу публикации последних лет, с тем чтобы потом переслать их в Петроград.

Однако в том же самом журнале, всего двадцатью пятью страницами ниже, была помещена статья, полученная из Петрограда и, на первый взгляд, противоречащая призыву о помощи. Имя автора — А.Фридман — физикам было неизвестно. Его статья с названием «О кривизне пространства» касалась общей теории относительности (ОТО). Точнее — ее самого грандиозного приложения: космологии.

Именно в этой статье родилось «расширение Вселенной». До 1922 года такое словосочетание выглядело бы полной нелепостью. О том, что расширение Вселенной началось миллиарды лет назад, астрофизике еще только предстояло узнать; еще предстояло измерять и вычислять, сколько именно миллиардов — 2, 2 или гораздо больше; еще предстояло размышлять над проблемой горизонта Вселенной. Но интеллектуальный горизонт раздвинулся именно в 1922 году. И раздвинул его тридцатичетырехлетний Александр Фридман.

Что открыл Фридман? Перенесемся в 1922 год. Общая теория относительности, или релятивистская теория гравитации, имеет всего 7 лет от роду. Лишь 5 лет назад Эйнштейн обнаружил возможность дать физико-математическое описание свойств Вселенной как целого. И вот неизвестный автор из Советской России — страны, казалось бы, изолированной от мировой науки, — смело утверждает, что эйнштейновский результат совсем не обязателен, а представляет собой весьма частный случай.

Первоначальное эйнштейновское решение космологической проблемы уподобляло Вселенную маятнику, находящемуся в покое. Эйнштейн с помощью ОТО рассчитал напряжение в «стержне подвеса». А Фридман, можно сказать, обнаружил, что груз, подвешенный на стержне, вовсе не обязан пребывать в покое. И — с помощью тех же уравнений ОТО — рассчитал, каким именно должно быть движение.

Пропорция

$$\frac{\text{маятник в покое}}{\text{космология Эйнштейна}} = \frac{\text{маятник в движении}}{\text{космология Фридмана}}$$

может пояснить только математический характер работы Фридмана, но не физический. И уж тем более — не историко-физический. Поэтому возьмем аналогию чуть посложнее, хотя тоже довольно легковесную, — уподобим Вселенную резиновому надувному шарику. Такая аналогия лучше передает смысл ОТО — связь кривизны пространства-времени и состояния вещества (об этом напоминает и название статьи Фридмана). Ведь геометрические свойства шарика (попросту говоря, его радиус) должны быть связаны со свойствами резины, ее плотностью и упругостью.

Эйнштейн обнаружил, что ОТО устанавливает подобную связь не только для каждого отдельного участка «шарика», но и для шарика в целом. Начал он, разумеется, с шарика простейшей — идеально круглой — формы. И — тоже разумеется — предположил, что шарик не меняется со временем, т.е. радиус его постоянен.

Первое «разумеется» вполне обычно для профессии теоретика, хотя и может показаться странным неискушенному человеку. Теоретику часто приходится искать ночью ключ под фонарным столбом не от уверенности, что ключ лежит именно там, а потому что в других местах искать просто невозможно (как ни странно, подобные поиски часто оказываются успешными). Решать сложные уравнения ОТО для произвольно сложной геометрии не под силу даже великому физику. Поэтому Эйнштейн начинал с наиболее простого случая — максимально однородной геометрии, хотя из наблюдений астрономов в 1917 году очень трудно было извлечь свидетельство однородного распределения вещества во Вселенной.

Со вторым предположением — о неподвижности шарика — все обстояло прямо наоборот. Люди издревле убеждались в постоянстве, незыблемости звездной картины. Только на фоне неподвижных звезд астрономам удалось понять движение планет, а физикам — закон всемирного тяготения, развитием которого стала ОТО. И, наконец, незыблемость мироздания — вечность Вселенной — привычно от имени науки противостояли религиозным домыслам о сотворении мира. Гораздо легче было посягнуть на другой привычный атрибут картины мира — бесконечность Вселенной (что и сделал Эйнштейн в 1917 году). Конечную, но безграничную — риманову — геометрию тогда уже обсуждали не только математики; даже астрономы примеряли ее к реальному пространству, но, разумеется, на основе ньютоновской физики.

В обоснование неподвижности Вселенной Эйнштейн положил факт малых скоростей звезд. Но говорить об этом как о наблюдаемом факте можно было только с очень большой натяжкой. Систематических исследований движения звезд еще не было. А в отдельных случаях наблюдались скорости довольно большие. Можно подумать, что Эйнштейну в очередной раз помогла его гениальная интуиция, но вернее будет сказать, что всякое иное предположение, кроме статичности, было тогда просто немыслимо. Поэтому даже само слово «предположение» здесь не очень уместно, скорее, надо сказать — «аксиома». И вот на эту аксиому поднял руку А.А.Фридман.

Но вернемся к резиновому, точнее к риманову шарику Вселенной, который Эйнштейн взял в руки в 1917 году. Сделав свои упрощающие предположения, Эйнштейн с огорчением обнаружил, что никакого шарика в его руках на самом-то деле нет, есть только бесплотные аксиомы. Он обнаружил, что уравнения ОТО, выстраданные им два года назад, не имеют надлежащего решения! Помочь ему мог бы любой трехгодовалый естествоиспытатель, которому прекрасно известно, что настоящая жизнь резинового шарика начинается, только если его надуть. Но Эйнштейн — недаром великий физик — и сам додумался до этого. Он добавил в уравнение ОТО всего одну величину, назвав ее космологической постоянной. Она и стала тем воздухом, упругость которого уравновесила упругость вселенского шарика.

Когда Фридман познакомился с космологией Эйнштейна, то, естественно, оценил грандиозность поставленной физической задачи. Однако математическое ее решение вызвало у него сомнения. Конечно, воздушный шар вполне может пребывать в покое, так же, как и маятник. Но шар может и менять свой размер, оставаясь идеально круглым, может расширяться и сжиматься даже сам по себе, если только достаточно упруг. Так качается маятник, если его толкнуть и затем предоставить самому себе.

В статье Фридмана 1922 года рассказывалось, как именно должна изменяться со временем сфера пространства-времени. При этом эйнштейновское — покоящееся — состояние Вселенной оказалось лишь частным, очень частным случаем. Здесь аналогия, которая до сих пор столь усердно использовалась, помогать отказывается. Резиновый шарик гораздо легче представить себе в неизменном, нежели в меняющемся состоянии. А радиус вселенской сферы, согласно Фридману, меняется в соответствии с упругими свойствами пространства-времени, заложенными в уравнении ОТО.

Нестатическая картина Вселенной оказалась очень странной. Во-первых, она могла существовать даже и без космологической постоянной. Радиус Вселенной вначале возрастал до некоторой максимальной величины, затем, уменьшаясь, доходил до нуля. И опять начиналось расширение, согласно тем же уравнениям, тоже с нулевого значения радиуса. А что такое сфера нулевого радиуса? Ничто! В лучшем случае — точка. Очень трудно было принять эти две точки — в начале и в конце. Даже Эйнштейн не поверил результатам Фридмана. Сочтя его космологическую картину неправдоподобной, он без труда, но, увы, и безо всякого основания нашел мнимую ошибку в вычислениях петроградского космолога. Только получив письмо от Фридмана, отстаивающего свою правоту, и проделав еще раз вычисления, Эйнштейн признал результаты русского коллеги и в специальной заметке назвал их «проливающими новый свет» на космологическую проблему. А для потомков сама ошибка Эйнштейна проливает свет на смысл и масштаб работы Фридмана.

А.Эйнштейн

Замечание к работе А.Фридмана «О кривизне пространства»

Результаты относительно нестационарного мира, содержащиеся в упомянутой работе, представляются мне подозрительными. В действительности оказывается, что указанное в ней решение не удовлетворяет уравнениям поля <...> значение той работы в этом и состоит, что она доказывает это постоянство [радиуса мира во времени].

18 сентября 1922 г.

К работе А.Фридмана «О кривизне пространства»

В предыдущей заметке я подверг критике названную выше работу. Однако моя критика, как я убедился из письма Фридмана, сообщенного мне г-ном Крутковым, основывалась на ошибке в вычислениях. Я считаю результаты Фридмана правильными и проливающими новый свет. Оказывается, что уравнения поля допускают наряду со статическими также и динамические (т.е. переменные относительно времени) решения для структуры пространства.

31 мая 1923 г.

С высоты нынешних знаний работу Фридмана легко недооценить. Сегодняшний студент может проделать его выкладки на двух страницах и скептически подумать: Ну что он, в сущности, сделал?! Решил уравнение в квадратурах, только и всего! Так ведь и школьники решают уравнения ежедневно. Правда, эйнштейновские уравнения помудреней квадратных, но ведь и Фридман — не школьник. Эйнштейн нашел один «корень» своих уравнений, Фридман — остальные.

Так, может быть, возвеличивание работы Фридмана — это пережиток минувших лет, когда радетели славы российской изо всех сил разыскивали отечественных Невтонов? Нет, не пережиток. Хотя бы потому, что те самые радетели, наоборот, изо всех сил старались забыть об отечественном вкладе в космологию, оказавшуюся прислужницей... мракобесия.

Дело в том, что формулы в физических работах живут своей, отдельной жизнью. Это и хорошо, и не очень. Хорошо, потому что облегчает жизнь физика: от формул легче отделяются научные предрассудки и необязательные интерпретации, выразимые только в словах. Но с другой, исторической, стороны, когда на формулы, написанные много лет назад, смотрит человек, вооруженный только учебниками, то он не склонен замечать находящиеся рядом слова и вникать в смысл, который в них вкладывали *тогда*.

Работу Фридмана нельзя называть просто еще одним решением уравнений ОТО, которое поставили на полку рядом с первым эйнштейновским решением. Потому что именно Фридман открыл космологическую *проблему* во всей ее глубине. Во-первых, обнаружилось, что изменение это родовое свойство Вселенной. Тем самым понятие эволюции распространилось на самый всеобъемлющий объект. Во-вторых, возник вопрос, до сих пор не имеющий убедительного ответа: каким образом множественность космологических описаний, даваемых ОТО, можно совместить с принципиальной единственностью самой Вселенной? Ведь слово «Вселенная» пишут с большой буквы не столько из уважения к ее масштабам, сколько из уважения к правилам русского языка, как «название единичного в своем роде предмета». А единичную Вселенную Эйнштейна сменила бесконечная совокупность возможных устройств Вселенной, обнаруженная Фридманом.

Работа, которая столь широко раздвинула горизонт науки, — это, несомненно, работа огромной важности.

Кто открыл расширение Вселенной? Кем был автор этой работы — физиком или математиком? Был ли великий результат случайной находкой или заслуженным вознаграждением? Эти вопросы неизбежно встают перед всяким, кто пытается понять смысл происшедшего в 1922 году.

Первую научную работу Фридман сделал (еще будучи гимназистом) в теории чисел. Окончил Фридман математическое отделение Петербургского университета. Его учителем был крупный математик В.А.Стеклов, имя которого носит сейчас Математический институт Российской академии наук. Основной объем научной работы Фридмана относился к аэрогидродинамике. Он занимался динамической метеорологией и по призванию, и по долгу службы в Главной геофизической обсерватории. Очень много сил он отдал поиску закономерностей самых, быть может, хаотических в подлунном мире процессов — процессов в земной атмосфере, которые делают погоду. Несмотря на физически звучащие слова, занимался он в сущности математикой — уравнениями в частных производных.

На таком же, родном для Фридмана, математическом языке говорит о надлунном мире общая теория относительности. Это облегчило путь к релятивистской космологии. Профессия помогла Фридману и в другом. Математику легче противостоять мировому авторитету великого физика и усомниться в его результатах.

Наконец, только математик, получив решение, в котором плотность вещества обращается в бесконечность, а радиус Вселенной — в ноль, мог назвать это состояние просто точкой, а не знаком вопроса, скажем. Физик должен был бы усомниться в применимости самой физической теории к таким экзотическим состояниям (справедливости ради надо сказать, что подобные сомнения были высказаны впервые лишь спустя многие годы). Но математик, имея перед собой уравнение без каких-либо ограничений на его применимость, доверяет этому уравнению всецело. Конечно, сейчас, много уже чего зная о начальной «точке», легко советовать Фридману побольше бдительности. Хотя бы потому, что точка эта не сплошная — какой бы маленькой сфера ни была, внутри-то ее пусто! Впрочем, «точка» в начале расширения, как сейчас известно, чревата вовсе не пустой, а квантово-гравитационной физикой.

Так что же выходит, Фридман — настоящий чистый математик? «Настоящий» — да, но «чистый» — это не про него. Несмотря на теоретико-числовое начало его научной биографии, в студенческие годы он интересовался и физикой — участвовал в «Кружке новой физики», которым руководил физик П.Эренфест. Эренфеста отличал критический взгляд и прямо-таки жажда ясности, что делало его прекрасным учителем, в особенности для ученика с математическим складом ума. Иметь среди своих наставников физика Эренфеста — это отличный задел для освоения такой физико-математической теории, как ОТО.

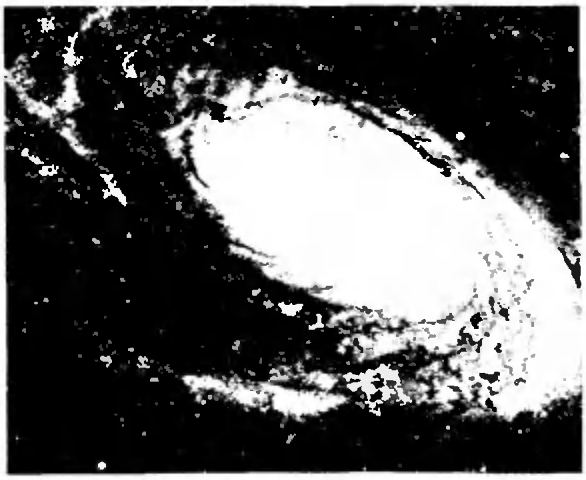
Но это не все. История науки, имея, видимо, особые виды на Фридмана, в содружестве с социальной историей позаботилась и о других благоприятных обстоятельствах.

Во-первых, когда вихрь событий революции и гражданской войны помог Фридману оказаться в Пермском университете, ему пришлось из-за нехватки преподавателей взять на себя дополнительно курсы дифференциальной геометрии (а это — язык ОТО) и физики (а это — область действия ОТО). Такое расширение кругозора, отчасти вынужденное, несомненно, пригодилось ему при освоении ОТО.

Во-вторых, когда Фридман в 1920 году вернулся в Петроград, судьба свела его с В.К.Фредериксом. Этого русского физика мировая война застала в Германии. Его ожидала бы грустная участь подданного вражеской державы, если бы не заступничество Д.Гильберта, «математика номер один» в тогдашней Германии. В результате Фредерикс на несколько лет стал ассистентом Гильберта — как раз тогда, когда завершалось создание ОТО. В 1915 году к Гильберту приезжал Эйнштейн для обсуждения теории, которую вынашивал уже восемь лет. Эти обсуждения сыграли важную роль, и Гильберт одним из первых очень высоко оценил новую теорию гравитации. Свидетелем всего этого был Фредерикс.

Немецкие физики и до 1922 года старались помочь своим коллегам в России. Особенно заботился об этом Эренфест. Летом 1920 года в Петроград пришло его письмо, первое после многолетнего перерыва. Этот момент можно считать прорывом информационной блокады. В августе 1920 года Фридман пишет Эренфесту, кроме прочего: «занимался аксиомой малого [специального] принципа относительности... Очень хочу изучить большой [общий] принцип относительности, но нет времени». Для изучения ему оставалось полтора года. Впрочем, не полтора, а гораздо меньше, поскольку в основном его время было занято работой в Геофизической обсерватории и преподаванием.

Изучать общую теорию относительности в России 1920 года было трудно: ни иностранных публикаций, ни обзоров в отечественных журналах. А в мире уже бушевал настоящий бум вокруг новой теории. Начался он в



1919 году, сразу после подтверждения английскими астрономами предсказанного Эйнштейном отклонения лучей света от далеких звезд. И триумф теории относительности все-таки достиг России.

Начали появляться популярные брошюры о новой теории. Одной из первых была книжка самого Эйнштейна. В предисловии автора к русскому переводу, изданному в Берлине и датированному ноябрем 1920 года, говорилось: «Более, чем когда либо, в настоящее тревожное время следует заботиться обо всем, что способно сблизить людей различных языков и наций. С этой точки зрения особенно важно способствовать живому обмену художественных и научных произведений и при нынешних столь трудных обстоятельствах. Мне поэтому особенно приятно, что моя книжечка появляется на русском языке».

Но невозможно овладеть теорией по ее популярному изложению, даже принадлежащему автору теории. И вряд ли в 1922 году появилась бы фридмановская космология, если бы не физик Фредерикс. Именно ему принадлежит первое в России изложение ОТО. Его обзор 1921 года в «Успехах физических наук», как и еще несколько статей, посвященных ОТО, могли помочь Фридману освоить эту теорию.

Обстоятельства, о которых говорилось до сих пор, лишь извне свидетельствуют о физическом компоненте в открытии Фридмана. Но есть и прямое свидетельство, содержится оно в его статье.

Если говорить очень кратко, математика стремится установить все логически возможные истины, а физика — только одну: как в действительности устроено мироздание, одно-единственное здание мира. Поэтому работа физика приобретает законченный смысл, только когда получена какая-то конкретная величина в граммах-секундах-сантиметрах, чтобы ее можно было сопоставить с (единственной) реальностью. Математику всякие граммы-секунды совершенно ни к чему.

Так вот, в конце статьи Фридмана появилась конкретная физическая величина — 10 миллиардов лет, «период мира», по выражению Фридмана, или время жизни Вселенной между ее точечными состояниями. Эта величина удивительно близка к возрасту Вселенной, фигурирующему в современной космологии. Почему? Как Фридман догадался? Не догадался, а вычислил (оговорившись, что для расчета данных совершенно недостаточно). Из своих уравнений он получил связь между «периодом мира» и массой Вселенной. А величину этой массы взял из работы де Ситтера 1917 года, который исходил из реальных, хотя и не очень определенных, астрономических наблюдений. Голландский астроном, правда, в своих оценках предполагал эйнштейновскую статическую модель Вселенной, но, видимо, желание Фридмана получить какую-то конкретную физическую величину было слишком велико. А раз в основе его выкладок лежали реальные наблюдения, то и близость его «периода мира» к нынешнему возрасту Вселенной не так уж удивительна.

Так кем же все-таки был основоположник нестационарной космологии — математиком или физиком? И каким — великим, выдающимся или просто крупным? Не будем укладывать Фридмана в прокрустово ложе подобных классификаций. Ясно одно: Александр Александрович Фридман сделал великое открытие. А какой титул ему за это присвоить, так ли важно? Лучше других сказал о Фридмане хорошо знавший его человек: «Математик по образованию и таланту, он и в юности и в зрелых годах горел желанием применять математический аппарат к изучению природы».

Конечно, чтобы применять математический аппарат к такому поистине уникальному объему природы, как Вселенная, необходима была большая смелость. Этому качеству не учат ни на математическом, ни на физическом факультетах. Оно или есть, или его нет. Смелость Фридмана видна невооруженным глазом: добровольно пошел на русско-германский фронт — в авиацию, а будучи уже профессором (и автором новой космологии), участвовал в рекордном полете на аэростате.

Итак, одаренность, знания и смелость. Такое сочетание вполне достойно награды, которую иногда называют везением, иногда — благоприятными историческими обстоятельствами. Но Фридману не суждено было дожить до времени, когда стал ясен подлинный масштаб его открытия. Этот талантливый, образованный и смелый человек умер в 37 лет от брюшного тифа.

При этом не забудем, в какой стране и в какое время угораздило родиться «расширяющейся Вселенной». Спустя 7 лет после смерти А.А.Фридмана в дневнике В.И.Вернадского появилась запись: «Разговор с Вериго об А.А.Фридмане. Рано погибший м.б. гениальный ученый, что мне чрезвычайно высоко характеризовал Б.Б.Голицын в 1915, и тогда я обратил на него внимание. А сейчас — в связи с моей теперешней работой и идеей (его) о раздвигающейся пульсирующей Вселенной — я прочел то, что мне доступно. Ясная, глубокая мысль широко образованного Божьим даром охваченного человека. По словам В[ериго] — его товарища и друга — это была обаятельная личность, прекрасный товарищ. Он с ним сошелся на фронте (Вериго в Киеве, Фридман — авиатор в Гатчине). В начале большевистской власти Фридман и Тамаркин, его приятель, но гораздо легковеснее его, были прогнаны из Университета. Одно время Фридман хотел бежать вместе с Т[амаркиным]: м.б. остался бы жив? Но ему дали возможность большой работы: Директор Главной Физической Обсерватории. ...» Добавим, что Я.Д.Тамаркин, товарищ и соавтор Фридмана в нескольких работах, осуществил свое намерение, нелегально покинул Советскую Россию, плодотворно работал в математике и преподавал в Кембридже.

Имени Лобачевского

С.ДЕМИДОВ, М.МОНАСТЫРСКИЙ,
В.ТИХОМИРОВ, М.ЧИРИКОВ

В пятом номере нашего журнала за прошлый год статьей А.Сосинского «Как учатся математике во Франции» мы открыли новую рубрику: «Математический мир».

Математический мир — как он устроен? Как учат математике в разных странах; как зарождались и развивались университеты, академии, математические институты; когда и как появились первые печатные периодические математические издания и что с ними стало потом; когда возникли математические конгрессы и как они проходили; как и когда родились математические общества и ассоциации; что такое Международный математический союз — эти и многие другие вопросы будут освещаться в новом разделе.

Сегодня нашей темой будут премии имени Н.И.Лобачевского.

НЕОДНОКРАТНО высказывалась мысль, что научное открытие само по себе является величайшим счастьем, и общественное признание мало что может добавить к этому. Открыв законы движения планет, Кеплер писал: «Я предаюсь радости и не стесняюсь похвалиться перед смертными: я похитил золотые сосуды египтян, чтобы создать из них храм моему божеству вдали от пределов Египта. [...]. Прочтется ли эта книга моими современниками или потомством — не столь уж важно: она найдет своего читателя. Разве господь Бог не ждал шесть тысяч лет созерцателя своего творения?»

Так-то оно так, но опыты жизни свидетельствуют о том, что человек, ищущий истину, нуждается в моральной (а довольно часто и в материальной) поддержке. Похвала и признание окрыляют, вливают новые силы для развития науки и культуры, и потому как государственные структуры, так и отдельные личности оказывают содействие творческим людям. Одной из форм такой поддержки являются медали и премии за выдающиеся научные результаты.

Одной из самых больших почестей, которых удостаивались русские математики в прошлом веке, была премия Парижской Академии наук, которую вручили Софье Васильевне Ковалевской. Вот как она сама описывает это событие: «Всех работ было представлено около 15, но достойною премии была признана моя. Но этого мало. Ввиду того, что та же тема [«О движении твердого тела»] задавалась уже три раза подряд и каждый раз оставалась без ответа, а также вследствие важности достигнутых мною результатов, Академия постановила назначенную первоначально премию в размере 3000 франков увеличить до 5000 франков. После этого был вскрыт конверт [работа Ковалевской шла под девизом: «Говори, что знаешь; делай, что обязан; будь, чему быть»], и все узнали, что я автор этого труда. Меня сейчас же уведомили, и я поехала в Париж, чтобы присутствовать на назначенном по этому поводу заседании Академии наук. Меня приняли чрезвычайно торжественно, посадили рядом с президентом, который сказал лестную речь, и вообще, я была осыпана почестями».

В настоящее время Российская академия наук присуждает три медали и девять премий Академии. Медали были учреждены в честь Леонарда Эйлера, Пафнутия Львовича Чебышева и Мстислава Всеволодовича Келдыша. Ныне присуждаются премии имени И.М.Виноградова, С.В.Ковалевской, А.Н.Колмогорова, М.А.Лаврентьева, Н.И.Лобачевского, А.М.Ляпунова, А.И.Мальцева, А.А.Маркова (старшего) и И.Г.Петровского.

Исключительно интересна история премии Лобачевского. Вот как пишет об этом А.В.Васильев в своей замечательной книге «Николай Иванович Лобачевский», лишь недавно изданной — через 65 лет (!) после написания (М.: Наука, 1992): «Убежденное, что лучшим средством чтить память людей науки является создание учреждений, способствующих развитию науки в направлении ими данном, Физико-математическое общество поставило себе целью создать капитал для выдачи международных премий имени Лобачевского. Премии и медали, выдаваемые за научные труды, важны, конечно, не по их материальной стоимости, но как почетное признание научных заслуг. [...] Разрешение на получение международной подписки для образования международного капитала было получено с трудом: министерство народного просвещения потребовало разъяснения, в чем состоят исключительные научные заслуги Лобачевского. Тем более явилось необходимым поставить дело увековечения памяти Лобачевского под покровительство выдающихся деятелей русской и иностранной науки».

На приглашение Общества войти почетными членами организационного комитета по организации столетнего юбилея со дня рождения великого русского геометра откликнулись Гельмгольц, Эрмит, Чебышев, Сильвестр, Кэли, Пуанкаре, Бельтрами, Клейн, Дарбу, Софус Ли... Величайшие ученые того времени! В пожертвованиях и сборе денег приняли участие и Лондонское Королевское общество, и многие научные сообщества Европы, и средние учебные заведения уездных городов России от Изюма до Ахтырки, и персональные жертвователи (813 — в России и 183 за рубежом, их список был обнародован). Было собрано 9071 р. 86 к. На эти средства были устроены юбилейные торжества, поставлен памятник Лобачевскому в Казани, а 6000 рублей были сочтены неприкосновенным капиталом международной премии им. Н.И.Лобачевского. Невозможно удержаться и не привести следующие строки из «Положения о премии»: «Основной капитал премии остается неприкосновенным на вечные времена...» Именно так — *на вечные времена!*

Первое присуждение состоялось в 1897 году. Премию (по представлению Клейна) получил Софус Ли. Клейн получил золотую медаль. Следующая премия (1900) была присуждена Киллингу (на премию были представлены две работы: Киллинга и Уайтхеда, и обе они были признаны достойными премии; на основании §7 Устава вопрос о присуждении премии был решен жребием!)

Затем премию получил Гильберт (1903). Отзыв на его работу писал Пуанкаре. За этот отзыв и он был удостоен золотой медали!

В 1912 году премию получил И.Шур, и «вечные времена» закончились.

Но самое удивительное, что они возобновились! Премия была восстановлена в 1917 году, и ее получил Г.Вейль, а в 1937 году — Э.Картан и советский геометр В.В.Вагнер. И снова все прервалось. Но в 1950 году премия имени Лобачевского была учреждена Академией наук СССР. В разные годы ее были удостоены А.Д.Александров, Н.В.Ефимов, А.В.Погорелов, Л.С.Понтрягин, Х.Хопф, П.С.Александров, А.Н.Колмогоров и В.И.Арнольд.

Как хочется верить, что этот список не иссякнет и будет продолжен столь же славными именами на вечные времена!

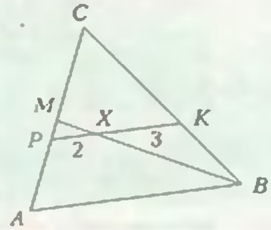
Задачи

1. Продолжите последовательность:

2, 9, 10, 12, 19, 20, 21, ...

А.Савин

2. В треугольнике ABC проведены медиана BM и отрезок PK, параллельный стороне AB. Отрезки BM и



PK пересекаются в точке X, которая делит отрезок PK на части PX длиной 2 и XK длиной 3. Найдите длину стороны AB.

В.Куусk

3. Докажите, что в произведении $1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 99!\cdot 100!$ можно вычеркнуть один из ста сомножителей так, чтобы произведение стало точным квадратом. (Запись $k!$ означает произведение всех натуральных чисел от 1 до k, т.е. $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k$.)

С.Токарев

4. Можно ли какими-нибудь тремя треугольниками оклеить куб в один слой? А четырьмя?

И.Акулич

5. Назовем коневым расстоянием между двумя полями шахматной доски наименьшее количество ходов коня, необходимое, чтобы попасть с одного из этих полей на другое, а королевским расстоянием — наименьшее количество ходов короля для перехода с одного поля на другое.

Среди пар полей шахматной доски, коневое расстояние между которыми равно 4, найдите те, королевское расстояние между которыми наименьшее. Чему равно это расстояние?

В.Произволов

Конкурс «Математика 6—8»

В этом номере журнала мы публикуем последние 5 задач конкурса «Математика 6—8» 1995—1996 учебного года. Победители будут награждены премиями журнала «Квант»; победители конкурса и лучшие математические кружки из принявших участие в этом конкурсе будут приглашены в летнюю математическую школу.

Следующий конкурс мы начнем в пятом номере нашего журнала за 1996 год.

Решение задач из этого номера высылайте не позже 15 июня 1996 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский пр., 64а, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6 — 8»).

Не забудьте указать фамилию, имя и класс.

16. Отец и сын катаются по кругу на катке. Время от времени отец обгоняет сына. Когда сын стал двигаться по кругу в противоположном направлении, они стали встречаться в 5 раз чаще. Во сколько раз отец бегает на коньках быстрее своего сына?

С.Дворянинов

17. Квадрат, вписанный в круг с радиусом 5, разделен на несколько одинаковых квадратиков. После того как из квадрата удалили два маленьких квадратика, оставшуюся часть удалось поместить в круг радиусом 4. Можно ли убрать еще один квадратик, чтобы остаток помещался в круге радиусом 3?

И.Акулич

18. Во дворце императора по кругу было установлено 10 золотых скульптур. Император, страстный любитель искусства и математики, повелел между каждыми двумя соседними скульптурами установить шар, масса которого равняется разности масс этих скульптур. Придворный математик заметил, что в таком случае можно часть этих шаров положить на одну чашку весов, а остальные на другую чашку так, что весы окажутся в равновесии. Прав ли он?

В.Произволов

19. В шахматном матче между городами Васюки и Арбатов с каждой стороны участвовало по 1996 шахматистов. Организаторы матча решили, что система, при ко-

торой первый играет с первым, второй со вторым и т.д., слишком скучна и решили разбить игроков на пары так, чтобы сумма номеров игроков в каждой паре была квадратом целого числа. Возможно ли такое разбиение?

П.Филевич

20. Найдите все пары натуральных чисел x и y, для которых справедливы следующие три условия:

1. $3x$ при делении на y дает в остатке 1,
2. $3y$ при делении на x дает в остатке 1,
3. xy при делении на 3 дает в остатке 1.

Л.Курляндчик

ВНИМАНИЕ! В задаче 9 конкурса «Математика 6 — 8» («Квант» №6 за 1995 г.) допущена опечатка. Вопрос задачи следует читать так: «Какое максимальное значение может принять выражение $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$?» Срок присылки решения продлевается до 15 июня 1996 г.

Дом с привидениями

А.САВИН

(по мотивам задачи У.Росс Эшби из его книги «Введение в кибернетику»)

«ЗАМОГИЛЬЕ – ну и название! Кому такое пришло в голову?» — размышлял оксфордский студент Джон Херси, сидя в почтовом дилижансе, который катил из Бристоля в дальний угол графства Эссекс. Джон направлялся в недавно унаследованный от тетушки Доринды замок, расположенный близ деревушки Замогилье.

Джон никогда не бывал в этом замке. Тетушку Доринду он видел всего несколько раз в детстве. Невысокого роста, темноволосая, немного старомодно одетая, с чуть печальным взглядом Доринда производила впечатление человека из другой эпохи. С Джоном она всегда была приветлива и ласкова, рассказывала ему старые волшебные сказки о бесстрашных рыцарях, прекрасных дамах и таинственных привидениях.

Эти детские воспоминания навеяли было грусть, но среди прекрасных зеленых полей, освещенные ярким июньским солнцем, невозможно предаваться меланхолии, и Джон снова повеселел.

Постепенно картина за окном менялась. Поля начали чередоваться с небольшими рощами, и вот дилижанс въехал под сень темного елового леса. Солнце еле пробивалось сквозь густые мохнатые лапы. Запахи луговых цветов сменились запахами хвои, еловой смолы, напоминающим запах ладана, потянуло сырым духом болот. Джона охватило смутное предчувствие чего-то необычного.

Наконец дилижанс выехал на открытое место. На опушке леса стоял небольшой старинный замок, увитый плющом, а поодаль расположилась небольшая деревушка, состоявшая из десятка деревянных домов, крытых соломой. Это и было Замогилье. Как позже узнал Джон, свое название деревня получила от кургана, воздвигнутого некогда на месте большой битвы, бывшей в тех местах полторы тысячи лет назад.

Дилижанс остановился. Взяв саквояж и поклонившись оставшимся пассажирам, Джон направился к замку. Около тяжелых дверей замка стоял

Иллюстрации В.Митурич-Хлебниковой

мистер Салливан, управляющий поместьем, заранее извещенный о приезде нового хозяина.

Замок был построен как крепость, способная укрыть и защитить от врагов жителей деревни. Немногочисленные узкие окна были затянуты плющом и почти не пропускали дневного света. Шаги Херси и Салливана гулким эхом отдавались в сводчатых коридорах и мрачных залах.

Вдруг Джон ощутил тревожный запах, преследовавший его в лесу. В этот момент они с Салливаном вошли в главный зал. Джон окинул взглядом старинное оружие, развешенное на стенах, и заметил возле камина небольшой орган. В одном из углов зала мерцал огонек. Подойдя к нему поближе, Джон разглядел сосуд, из которого струился дымок сгорающего ладана — причина запаха.

«Должен вам сказать, — проговорил, подходя к нему, Салливан, — госпожа Доринда очень заботилась, чтобы здесь постоянно курился ладан». «А часто она играла на органе?» — спросил Джон, вспомнив чудесные мелодии, которые некогда извлекала из клавесина его тетушка. «Я не помню, чтобы она играла на органе, хотя живу здесь уже больше двадцати лет», — ответил Салливан.

Салливан провел Джона в приготовленную для него комнату.

Из окна открывался вид на деревушку, не слишком живописный. В алькове стояла старинная широкая кровать, у окна был установлен небольшой письменный стол, вдоль стен стояли книжные шкафы. Книги выглядели очень древними, и Джону не терпелось полистать их. Пришлось, однако, повременить — позвонили к обеду.

Не буду описывать этот обед и разговоры за столом, поскольку они не имеют прямого отношения к последующим событиям. После обеда Джон поднялся в свою комнату, достал с полки тяжелый том и принялся перелистывать ломкие пожелтевшие страницы.

Он узнавал сказки, которые в детстве рассказывала ему тетушка Доринда. Вновь его окружали бесстрашные рыцари, прекрасные дамы и таинственные привидения. Когда он оторвался от книги, уже наступали сумерки. Джон решил пройтись по замку. Он направился в уже знакомый ему большой зал. Там было почти совсем темно, лишь в углу теплился огонек. Этот мерцающий свет чуть высвечивал каминные часы. В конце каждой минуты бронзовый шут, замерший слева от циферблата, оживал и ударял молоточком по маленькому колокольчику, и тогда по залу разносился легкий звон.

Джон обошел зал, разглядывая мечи, пики и алебарды, развешенные по стенам, и остановился около органа. В числе друзей его отца был органист местной церкви. Он иногда разрешал Джону поиграть на органе. Теперь, когда Джон стал владельцем собственного органа, ему не терпелось опробовать инструмент.

Он сел на стул, открыл клавиатуру и включил механизм, управляющий мехами. Послышалось тихое жужжание механизма — орган ожил. Шут ударил молоточком по колокольчику, как бы приглашая Джона к музицированию. Джон коснулся клавиш и заиграл хорал Баха. «Дзинь» — звякнул колокольчик, и вдруг из угла послышалось хриплое пение одной из непристойных песен, которые можно услышать разве что от пьяных матросов в портовом кабачке.

Джон прекратил игру и бросился на звук — песня грянула из противоположного угла. Он туда — песня зазвучала из камина. Несколько минут Джон метался из угла в угол, пока не понял, что имеет дело с обыкновенным привидением. Джон вновь сел за орган и заиграл, сделав вид, что не замечает Пения, но Пение не смолкло, напротив, к нему присоединился резкий сардонический Смех. Джон перестал играть, надеясь, что Смех или Пение прекратится, но они оба продолжали и продолжали звучать.

Нервы у Джона не выдержали, и он вновь начал метаться по залу. Случайно он загасил огонек в сосуде, и через минуту Смех прекратился.

Этот успех окрылил Джона, он вновь почувствовал себя экспериментатором, как это бывало в университетской лаборатории. Он начал проводить нормальное исследование, как и подобает квалифицированному физику. Джон зажигал и тушил ладан, играл на органе при зажженом и потушенном ладане, пытался сам петь и хохотать. Наконец, ему все стало ясно. Он зажег ладан и пошел в свою комнату обдумывать результаты своих экспериментов. В зале продолжали бесноваться Смех и Пение.

Зайдя в свою комнату, Джон сел за стол, достал из саквояжа карандаш и бумагу и начал писать. У него получилось следующее. «В течение каждой минуты каждый из этих звуков либо звучит, либо молчит; никаких переходов они не обнаруживают. Поведение их в последующую минуту зависит только от событий предыдущей минуты, и эта зависимость такова:

Пение в последующую минуту ведет себя так же, как и в предыдущую (звучит или молчит), если только в эту минуту не было игры на органе при молчащем Смехе. В последнем случае оно меняет свое поведение на противоположное (звучание на молчание и наоборот).

Что касается Смеха, то если в предыдущую минуту горел ладан, Смех будет звучать или молчать в зависимости от того, звучало или молчало Пение (так что Смех копирует Пение минутой позже). Если же, однако, ладан не горел, то Смех будет делать противоположное тому, что перед этим делало Пение.»

Закончив писать, Джон задумался, затем снова взял карандаш, и на бумаге появилось несколько кружков и стрелок. Снова раздумье. Наконец, в его глазах появился радостный блеск — задача решена! Джон встал и пошел в зал, где по-прежнему бесновались Смех и Пение. И через несколько минут в замке наконец воцарилась тишина.

Уважаемые читатели!

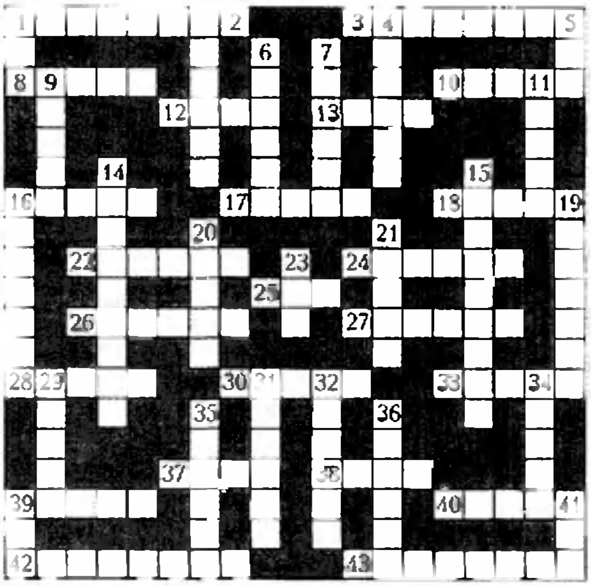
Попробуйте ответить, какие действия с ладаном и органом провел Джон Херси, чтобы установить и поддерживать тишину в замке.

*

Один из возможных путей к тишине таков: на одну минуту потушить ладан, потом не зажигая ладана минуту поиграть на органе, после чего прекратить игру и зажечь ладан. Пока ладан будет гореть, в замке сохранится тишина.

КРОССВОРД

ТОЛЬКО ПРО МЕХАНИКУ



По горизонтали: **1.** Швейцарский физик, почетный член Петербургской АН, сформулировал уравнение стационарного движения идеальной жидкости. **3.** Летательный аппарат, легче воздуха. **8.** Английский физик, вывел формулу для силы сопротивления, действующей на твердый шар при его движении в вязкой жидкости. **10.** Изогнутая трубка с коленами разной длины для переливания жидкости из одного сосуда в другой. **12.** Простейший механизм для подъема тяжестей. **13.** Мера механического взаимодействия двух тел. **16.** Машина неударного действия для обработки материалов давлением. **17.** Единица массы, применяемая в ювелирном деле. **18.** Дольная единица массы в СИ. **22.** Простейший гироскоп. **24.** Механическая величина, служащая мерой действия силы. **25.** Английский физик, открыл закон упругости для твердых тел. **26.** Промежуток времени, через который движение тела повторяется. **27.** Глубина погружения судна в воду. **28.** Старинная русская мера длины. **30.** Неподвижное тело, которое под действием другого тела испытывает деформацию сжатия. **33.** Деталь подшипника качения. **37.** Русский физик, ввел понятие потока энергии. **38.** Устройство, способное создавать значительные давления при малой силе. **39.** Замечательный математик, механик и физик, установил закон сохранения момента импульса, один из создателей механики идеальной жидкости. **40.** Единица времени. **42.** Прибор для измерения плотности жидкости. **43.** Французский физик, его именем названа одна из сил инерции.

По вертикали: **1.** Самый низкий мужской голос. **2.** Французский астроном и физик, основные работы в области небесной механики. **4.** Гидроакустический прибор для определения глубины водоема. **5.** Физическая характеристика звука. **6.** Летательный аппарат, движущийся под действием реактивной силы. **7.** Величина, входящая в формулу потенциальной энергии тяготения. **9.** Характерная окраска звука. **11.** Одна из величин, входящих в формулу архимедовой силы. **14.** Величина, характеризующая быстроту изменения скорости. **15.** Толстый слой резины на наружной части шины для увеличения сцепления с поверхностью дороги. **16.** Механизм, способный накапливать и отдавать механическую энергию. **19.** Инерционный аккумулятор механической энергии. **20.** Состояние, в котором тело не обладает кинетической энергией. **21.** Мера инертных и гравитационных свойств тела. **23.** Русская мера массы и веса. **29.** Английский физик, один из основоположников теории колебаний. **31.** Тело, которое под действием другого тела испытывает деформацию растяжения. **32.** Величина, входящая в формулу для расчета ускорения силы тяжести на поверхности планеты. **34.** Буква латинского алфавита, которую используют для обозначения одной из осей координат. **35.** Первое слово в названиях ряда величин, характеризующих вращательное движение. **36.** Выдающееся изобретение древности, позволившее заменить скольжение качением. **39.** Буква греческого алфавита, применяемая для обозначения коэффициента полезного действия механизма. **41.** Буква латинского алфавита, наиболее часто используюшаяся для обозначения координаты тела при движении.

М. Красин

Геометрические неожиданности

При изучении геометрии в школе часто приходится доказывать утверждения, которые нам совершенно очевидны. Например, что при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой накрест лежащие углы равны. В то же время утверждение, что высоты треугольника пересекаются в одной точке, уже не столь очевидно. Более того, древние греки — великолепные геометры — не знали этого факта, хотя знали и умели доказывать, что биссектрисы, как и медианы, пересекаются в одной точке.

Неожиданность математического факта придает ему некое очарование, создавая то, что называется красотой математики, наряду с неожиданными и притом короткими путями доказательств теорем.

Мы хотим вас познакомить с несколькими геометрическими результатами, которые носят оттенок неожиданности при первом знакомстве с ними.

Для начала нарисуем две окружности и проведем из центра каждой из них касательные к другой окружности (рис.1). Соединим теперь точки пересечения касательных с окружностями. Полученный четырехугольник оказывается прямоугольником! Факт действительно неожиданный. Неизвестно, кто первым его обнаружил. Вы можете попробовать доказать его — это не слишком трудно.

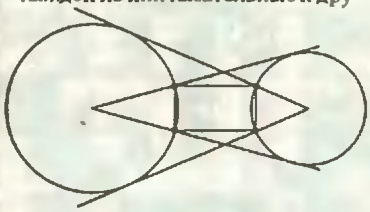


Рис. 1

А вот автором второй геометрической неожиданности является всем известный Архимед. Исследуя луночки, образованные окружностями, он заметил, что две окружности, вписанные в криволинейные треугольники на рисунке 2, равны. Фигура, которая получается из полукруга удалением еще двух полукругов, напоминает мне средневековую секиру, а Архимед, живший гораздо раньше, считал, что эта фигура напоминает нож, которым пользовались скорняки для выделки кож. Этот нож назывался «арбелос», поэтому эта теорема вошла в историю, как «теорема об арбелосе».

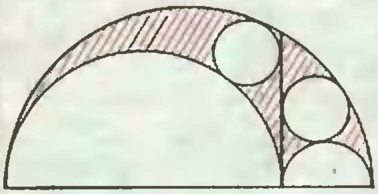


Рис. 2

Любопытно, что на стенах японских пагод изображено множество подобных неожиданных фактов, открытых японскими математиками несколько веков назад.

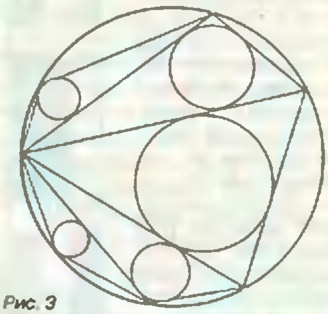


Рис. 3

Например, в 1800 году на стенах одного из храмов появилась дощечка, сообщавшая о следующем наблюдении.

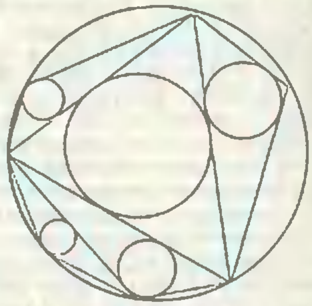


Рис. 4

Разобьем многоугольник, вписанный в окружность, на треугольники, проводя из какой-нибудь одной его вершины все диагонали (рис.3). Впишем в каждый из получившихся треугольников окружность. Сумма радиусов этих окружностей — величина постоянная, не зависящая от выбора вершины многоугольника.

В дальнейшем удалось доказать и более сильное утверждение: та же сумма получается и для любого другого способа разбиения вписанного многоугольника на треугольники (рис.4).

Вам, без сомнения, часто приходилось иметь дело на уроках геометрии с четырехугольниками, вписанными в окружность и описанными вокруг нее. Однако мало кто знает об интересных свойствах таких четырехугольников. Открытие одного из них принадлежит Клавдию Птолемею, жившему во II веке. Он известен как выдающийся астроном, но был не чужд и математике. Птолемей обнаружил, что сумма произведений длин противоположных сторон вписанного четырехугольника (рис.5) равна произведению длин его диагоналей. Частные случаи этой теоремы, которая теперь называется «теоремой Птолемея», оказались очень полезными самому Птолемею при астрономических расчетах.

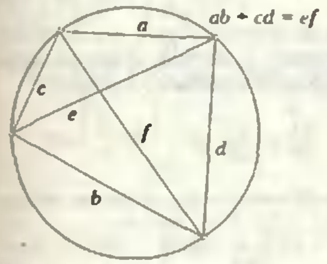


Рис. 5

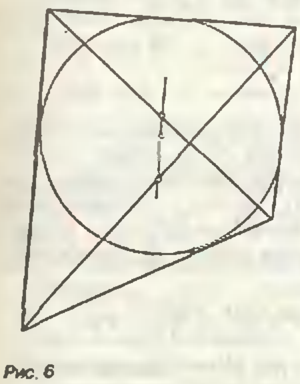


Рис. 6

Интересный результат об описанном четырехугольнике принадлежит Исааку Ньютону. Он обратил внимание на то, что центр окружности, вписанной в четырехугольник, лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей (рис.6).

Если продолжить ряд знаменитых людей, открывших неожиданные свойства геометрических фигур, то следует назвать Наполеона Бонапарта, который всерьез занимался геометрией и даже сделал доклад в Парижской Академии наук. Теорема, которую приписывают Наполеону, состоит в следующем. Построим на сторонах произвольного треугольника ABC равносторонние треугольники (рис.7)

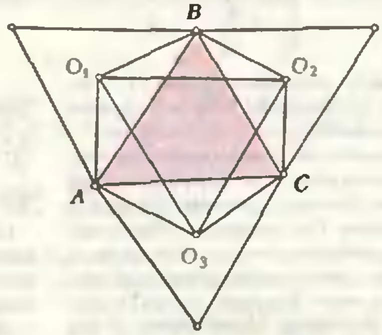


Рис. 7

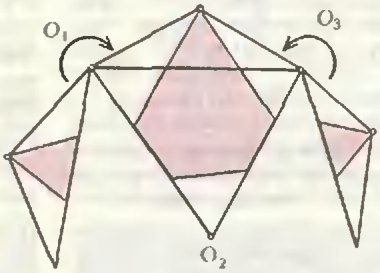


Рис. 8

и отметим их центры O_1, O_2 и O_3. Оказывается, что треугольник $O_1O_2O_3$ всегда равносторонний.

Доказательство этого факта также отличается простотой и изяществом. Соединим точки O_1, O_2 и O_3 с ближайшими к ним вершинами треугольника ABC. Затем повернем два из трех получившихся треугольников вокруг точек O_1 и O_2, как показано на рисунке 8. Треугольник, составленный из этих трех треугольников, имеет те же стороны, что и треугольник $O_1O_2O_3$, а его углы, как нетрудно подсчитать, равны по 60°. Значит, верхний треугольник на рисунке 9 — равносторонний, а следовательно, и треугольник $O_1O_2O_3$ — равносторонний.

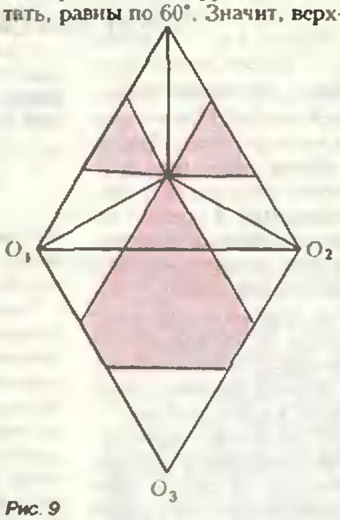


Рис. 9

Закончу эту коллекцию геометрических неожиданностей изящной миниатюрой, принадлежащей московскому математику В.В.Произволову. Рассмотрим полоску, образованную двумя параллельными прямыми. Положим на эту полоску квадрат со стороной, равной ширине полоски. Если соединить «накрест» (рис.10) точки пересечения границы квадрата с первоначальными прямыми, то образованный угол равен 45°. Неправда ли, удивительно?

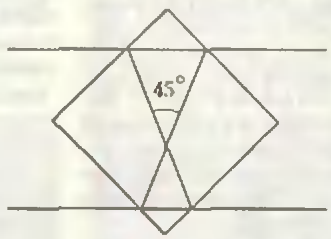


Рис. 10

А.Савин

О законах Кеплера

А. ЧЕРНОУЦАН

Законы Кеплера не входят в программу курса школьной физики, их проходят в курсе астрономии. Тем не менее законы Кеплера часто используются при решении физических задач, особенно олимпиадных, и поэтому их содержание нередко знакомо школьникам «с физическим уклоном» задолго до изучения астрономии. Точнее — они обычно знают их формулировку, а вот откуда они берутся, остается покрытым мраком. А ведь известно: если сам можешь вывести формулу или закон, то он «и сердцу дороже, и рукам удобнее» — т.е. и применять его будешь увереннее. В этой заметке мы постараемся частично исправить положение. Частично — потому что поясним «происхождение» второго и третьего законов Кеплера, а вот первый примем без доказательства, он нам пока не по зубам.

Начнем с того, что повторим формулировку законов Кеплера, причем в более современном виде:

1) Любое тело (у Кеплера — планета) в центральном поле тяготения движется по замкнутой орбите, представляющей собой эллипс, в одном из фокусов которого находится центр поля (у Кеплера — Солнце). Заметим: речь идет только о телах, совершающих финитное движение, т.е. не уходящих на бесконечность.

2) Радиус-вектор, соединяющий центр поля с движущимся телом, за одинаковые промежутки времени заметает одинаковые площади. Для количественной формулировки вводят так называемую секторную скорость тела, равную площади, заметаемой за единицу времени (рис.1):

$$s' = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{2} vr\sin\alpha . \qquad (1)$$

Другими словами, второй закон Кеплера утверждает, что секторная скорость при движении не меняется.

3) Отношение квадратов периодов обращения двух тел вокруг центра поля равно отношению кубов больших полуосей их орбит:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} .$$

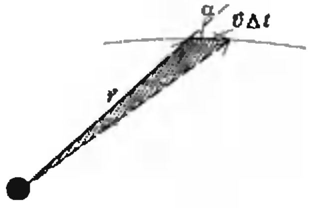


Рис. 1

Этот закон легко вывести для круговых орбит, где большая полуось эллипса вырождается в радиус окружности.

Теперь перечислим те факты и законы, которые нужны нам для обсуждения законов Кеплера. Сначала — немного математики. По определению эллипс есть геометрическое место точек на плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек (фокусов эллипса) постоянна. Эта сумма равна большой оси эллипса $AB = 2a$, где точка A — самая близкая к фокусу O_1, точка B — самая от него удаленная (рис.2.). Площадь эллипса равна $s = \pi ab$, где a и b — большая и малая полуоси эллипса.

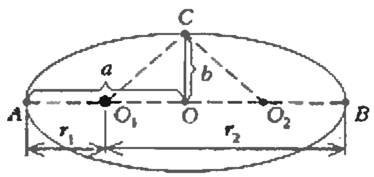


Рис. 2

Теперь — физика. Потенциальная энергия материальной точки массой m в центральном поле тяготения равна

$$E_p = -G\frac{mM}{r} ,$$

где G — гравитационная постоянная, M — масса тела, создающего поле, r — расстояние до центра поля. (Сравните эту формулу с потенциальной энергией взаимодействия двух разноименных зарядов. Аналогия — очевидна.) Полная механическая энергия E (кинетическая плюс потенциальная) материальной точки сохраняется. Условие финитности движения имеет простой вид: $E < 0$ (если точка уйдет на бесконечность, ее кинетическая энергия будет больше нуля или равна нулю).

Нам понадобится еще один фундаментальный закон сохранения — закон сохранения момента импульса. О моменте импульса можно прочитать, например, в статье В.Сурдина «Тайна «утренней звезды» (Квант № 6 за 1995 год), но мы напомним его определение. Момент импульса равен векторному произведению радиуса-вектора движущейся точки, проведенного из центра поля, на ее импульс:

$$\vec{L} = [\vec{r}\cdot\vec{p}],\ L = rmv\sin\alpha , \qquad (2)$$

а направление вектора $\vec{L}$ определяется по правилу буравчика. В центральном поле момент импульса сохраняется:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{p}\right] + \left[\vec{r}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt}\right] = 0$$

(первый член равен нулю всегда, так как $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}\parallel\vec{p}$, а второй — потому что в центральном поле $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\parallel\vec{r}$).

Незаметно мы подошли к объяснению второго закона Кеплера. Оказывается, этот закон — просто закон сохранения момента импульса, и выполняется он (в отличие от первого и третьего) для *любого* центрального поля, не только для поля тяготения. Секторная скорость (1) выражается через момент импульса таким образом: $s' = \frac{L}{2m}$.

Перейдем к третьему закону Кеплера. Период движения по эллипсу равен отношению площади эллипса к секторной скорости:

$$T = \frac{\pi ab}{s'} = \frac{2\pi ab}{L/m} .$$

Чтобы выразить a и b, напишем выражения для энергии и момента импульса для точек A и B (см. рис.2):

$$\begin{cases} \dfrac{mv^2}{2} - G\dfrac{mM}{r} = E, \\ mvr = L. \end{cases}$$

Почему эти уравнения написаны именно для точек A и B? Да потому, что скорость и радиус-вектор перпендикулярны друг другу (т.е. $\sin\alpha = 1$) только в самой близкой и самой далекой точках. Исключая скорость, получим квадратное уравнение

$$r^2 + \frac{GM}{E/m}r - \frac{(L/m)^2}{2E/m} = 0 .$$

Запишем для этого уравнения теорему Виета:

$$r_1 + r_2 = -\frac{GM}{E/m},\quad r_1r_2 = -\frac{(L/m)^2}{2E/m} .$$

Получаем, что большая полуось $a = \frac{r_1 + r_2}{2}$ выражается только через энергию тела, точнее через удельную энергию E/m:

$$a = -\frac{GM}{2E/m} .$$

Напомним, что $E < 0$. Обратите внимание: если $E \to 0$, то $a \to \infty$, т.е. движение становится инфинитным. Теперь найдем малую полуось b из треугольника O_1CO, где гипотенузу определим из условия $O_1C + CO_2 = r_1 + r_2$:

$$b^2 = \left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{r_2-r_1}{2}\right)^2 =$$

$$= r_1 r_2 = -\frac{(L/m)^2}{2E/m}, \quad b = \frac{L/m}{\sqrt{-2E/m}}.$$

Для периода движения получаем

$$T = 2\pi\frac{ab}{L/m} = \frac{2\pi GM}{(-2E/m)^{3/2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}a^{3/2}.$$

Итак, мы вывели третий закон Кеплера. Но попутно мы получили еще одно полезное утверждение. Оказывается, и период движения, и большая полуось эллипса однозначно связаны с удельной энергией тела E/m. Как это можно понять? Ну например, представьте себе, что из некоторой точки одновременно, но в разные стороны запущены несколько спутников с одной и той же начальной скоростью. Теперь мы знаем, что они вернутся в исходную точку одновременно.

Красиво, не правда ли?

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Точка Кюри

Н.ПАРАВЯН

Для каждого ферромагнетика существует некоторая вполне определенная температура, выше которой исчезают его ферромагнитные свойства и он превращается в парамагнетик. Одновременно скачкообразно изменяются и другие характеристики ферромагнитного материала, например удельная электропроводность и теплоемкость. Это явление открыл и исследовал (для железа) в 1895 году выдающийся французский физик Пьер Кюри, в честь которого «переходную» температуру назвали точкой (температурой) Кюри.

Значения точки Кюри для разных ферромагнетиков различны: для железа это примерно 770 °С, никеля ≈ 360 °С, кобальта ≈ 1130 °С. Все это, конечно, величины большие и, главное, очень трудно достижимые в школьном эксперименте. Однако есть некоторые сплавы, для которых температура Кюри значительно ниже. Так, у сплава, состоящего из 30% никеля и 70% железа (по массе), она около 80 — 85 °С, т.е. немного ниже температуры кипения воды. А у платинита — сплава, состоящего из 44 — 45% никеля и 56 — 55% железа, она немного выше — порядка 110 — 120 °С. Но где взять этот самый платинит?

Оказывается, можно воспользоваться перегоревшей лампочкой накаливания: два блестящих стерженька внутри лампочки, на которых держится вольфрамовая спираль, как раз и сделаны из платинита. (Этот сплав имеет такой же температурный коэффициент расширения, как у платины и стекла, и в лампочке заменяет платину в качестве материала для токовводов, впаиваемых в стекло.) Извлечь стерженьки из перегоревшей лампочки можно так. Осторожно нанесите напильником или стеклорезом (алмазным надфилем) в нижней части лампочки, возле цоколя, небольшую царапину (только царапину, не надо пилить лампочку напильником!). Затем коснитесь царапины жалом сильно накаленного паяльника и держите его до тех пор, пока царапина не превратится в трещину. Теперь ведите паяльником по окружности вслед за трещиной так, чтобы она опоясала лампочку, — верхняя часть лампочки бесшумно отвалится сама собой. Отломите один платинитовый стерженек — он-то нам и нужен — и готовьтесь ставить сам опыт.

С помощью прочной веревки подвесьте подковообразный постоянный магнит к лапке лабораторного металлического штатива и снизу замкните его полюса платинитовым стерженьком (рис.1).

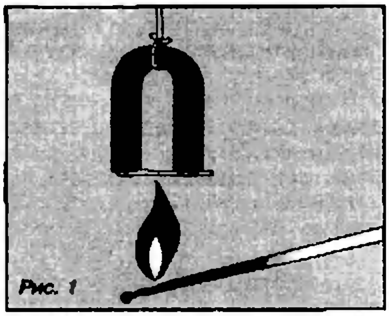


Рис. 1

Поднесите к стерженьку горящую лучину — через несколько секунд, когда он прогреется до соответствующей температуры, стерженек отпадет от магнита. При этом магнитные свойства самого магнита не изменились, так как точка Кюри для его материала значительно выше. Посмотрите — магнит как ни в чем не бывало притягивает любые ферромагнитные предметы. Когда наш стерженек охладится до комнатной температуры, его ферромагнетизм восстановится и он снова может притягиваться к тому же магниту. Убедитесь в этом сами.

Недостаток этого опыта заключается в том, что мы не можем здесь определить (даже приблизительно) величину температуры Кюри (впрочем, в принципе это, наверное, можно было бы сделать). Но если у вас есть хотя бы очень небольшой стерженек из железоникелевого сплава, содержащего 30% никеля, вы сможете определить порядок этой самой точки Кюри для данного сплава. И вот как.

С помощью все той же прочной веревки подвесьте подковообразный постоянный магнит к лапке металлического лабораторного штатива, предварительно замкнув полюса магнита железоникелевым стерженьком (рис.2). Опустите эту систему в сосуд с кипящей водой, стоящий, например, на электроплитке. Очень скоро стерженек отпадет от полюсов магнита и упадет на дно сосуда. Уберите магнит из сосуда и убедитесь (как и в

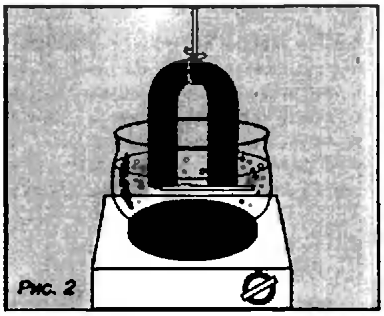


Рис. 2

первом опыте), что его магнитные свойства не изменились. Когда же сосуд с водой остынет и железоникелевый сплав примет комнатную температуру, его ферромагнетизм восстановится и стерженек снова может притягиваться к магниту. Этот опыт можно повторить несколько раз.

Желаем успехов.

Метод вспомогательных точек

И. КУШНИР

ПРИ дополнительных построениях мы часто пользуемся точками, о которых в условии задачи ничего не сказано. Назовем их вспомогательными. Изучение свойств таких точек и возможность их применения обогащает опыт решения задач, помогает правильно и рационально наметить схему поиска решения, сделать некоторые дополнительные построения осознанными и закономерными.

Центр окружности

Рассмотрим вначале применение наиболее часто встречающейся точки — центра O окружности. Его введение в рисунок может стать «входом» в задачу. Соединяя центр с заданными точками, мы находим равные отрезки, углы, треугольники, тем самым увеличивая возможность применения различных теорем и формул.

Начнем с задач, где построение центра O как вспомогательной точки целесообразно из-за наличия в условии окружности (или ее элементов).

Задача 1. *Докажите, что в треугольнике ABC*

1) $S = rp,$

2) $S = \dfrac{abc}{4R},$

3) $S = R\cdot p_н,$

4) $S = r_a(p-a),$

где S — площадь треугольника ABC, a, b, c — стороны BC, AC, AB; R, r — радиусы описанной и вписанной окружностей, p — полупериметр, $p_н$ — полупериметр треугольника, вершины которого совпадают с основаниями высот остроугольного треугольника ABC, r_a — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны BC.

Доказательство. Равенство 1) общеизвестно. Докажем равенство 2).

Опустим перпендикуляры из точек A и O на стороны BC и AC: AH_a (рис.1) и OD. Треугольники ABH_a и AOD подобны: $\frac{R}{c} = \frac{b}{2h_a}$ (h_a — высота треугольника ABC). Значит, $h_a = \frac{bc}{2R}$, откуда $S = \frac{abc}{4R}$.

3) Докажем вначале, что отрезок OA перпендикулярен отрезку H_bH_c (рис.2).

Действительно, $\angle ADH_c = \angle AH_bH_c + \angle H_bAO$. Но $\angle AH_bH_c = \angle ABC$ (докажите!), $\angle H_bAO = 90^\circ - \angle ABC$, значит, $\angle ADH_c = 90^\circ$.

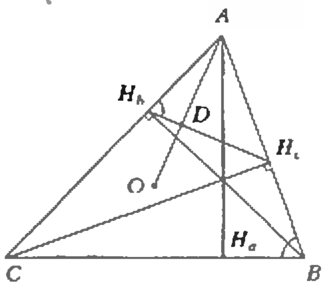


Рис. 2

Обозначим площади четырехугольников AH_bOH_c, BH_aOH_c, CH_aOH_b как S_1, S_2, S_3. Тогда $S = S_1 + S_2 + S_3$, или

$$S = \frac{1}{2}R(H_bH_c + H_aH_c + H_aH_b) = R\cdot p_н.$$

4) Обозначим через I_a центр вневписанной окружности, K и L — точки касания ее с продолжениями сторон AC и AB (рис.3).

Учитывая, что $AK = AL$, имеем, что $S_{AKI_aL} = r_a\cdot p$ и $S_{AKI_aL} = S + r_a(p-b) + r_a(p-c)$, откуда $r_ap = S + r_a(p - b + p - c)$, значит, $S = r_ap - r_a\cdot a = r_a(p-a)$.

Задача 2. *Две окружности с радиусами R_1 и R_2 пересекаются в точке K. Прямая касается этих окружностей в точках M и N. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KMN.*

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей с радиусами R_1 и R_2 соответственно, O — центр окружности MNK (рис.4), R — ее радиус.

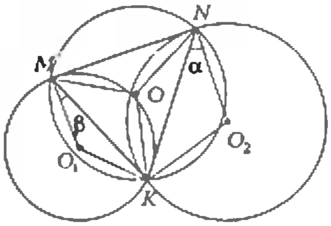


Рис. 4

Докажем, что треугольники MOK и NO_2K подобны. Они равнобедренные. Обозначим $\angle KNO_2 = \alpha$, $\angle KMO = \beta$. Но $\alpha = 90^\circ - \angle MNK = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle MOK = 90^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 2\beta) = 90^\circ - 90^\circ + \beta = \beta$. Итак, $\alpha = \beta$, т.е. треугольники MOK и NO_2K подобны. Тогда

$$\frac{R}{R_2} = \frac{KM}{KN}.$$

Треугольники KON и KO_1M подобны:

$$\frac{R}{R_1} = \frac{KN}{KM};$$

перемножив последние равенства, получаем:

$$R^2 = R_1R_2,\quad R = \sqrt{R_1\cdot R_2}.$$

Задача 3. *Четырехугольник вписан в окружность и описан около окружности. Докажите, что прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон, перпендикулярны.*

Доказательство. Обозначим через I центр вписанной окружности (рис.5)

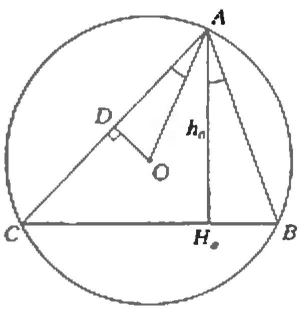


Рис. 1

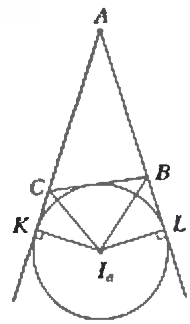


Рис. 3

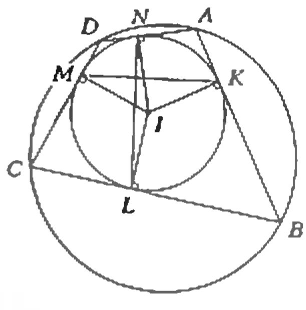


Рис. 5

$$\angle LMK = \frac{1}{2}\angle LIK = 90° - \frac{B}{2},$$

$$\angle MLN = \frac{1}{2}\angle MIN = 90° - \frac{D}{2}$$

(B, D — углы ABC и ADC).

$$\angle LMK + \angle MLN = 90°+90° - \frac{B-D}{2} = 90°+90°-90° = 90°,$$

значит, $\angle MEL = 90°$ и $MK \perp LN$.

Задача 4. *Полуокружность, диаметр которой принадлежит стороне BC треугольника ABC, касается сторон AC и AB в точках F_1 и F_2. Докажите, что биссектриса угла $F_1H_aF_2$ принадлежит высоте AH_a треугольника ABC.*

Доказательство. Обозначим через O центр полуокружности (рис.6). Так как $\angle OF_1A = \angle OF_2A = 90°$, то точки O, F_1, A, F_2 принадлежат окружности с диаметром OA. Поскольку $\angle AH_aO = 90°$, то этой же окружности принадлежит и точка H_a, а треугольник $F_1H_aF_2$ будет вписанным в нее. Но AO — биссектриса угла F_1OF_2, а углы AOF_2 и AH_aF_2, AOF_1 и AH_aF_1 равны как вписанные, опирающиеся на равные дуги. Следовательно, биссектриса треугольника $F_1H_aF_2$, проведенная из точки H_a, принадлежит высоте AH_a.

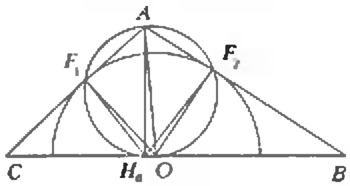


Рис. 6

Если окружность не задана

Чтобы воспользоваться свойствами центра окружности, часто приходится сначала выбрать и построить удобную окружность.

Задача 5. *Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку с концами в основаниях высот треугольника делит противоположную сторону пополам.*

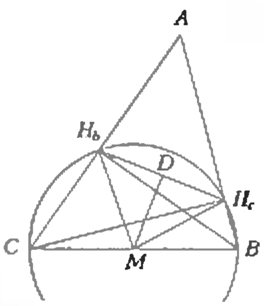


Рис. 7

Доказательство. Опишем вокруг четырехугольника H_bH_cBC окружность, диаметр которой совпадает с отрезком BC, а ее центр с серединой этого отрезка — точкой M (рис.7). Тогда (как радиусы) $H_bM = H_cM$, т.е. треугольник H_bH_cM — равнобедренный. Поскольку точка D — середина отрезка H_bH_c, то отрезки H_bH_c и DM перпендикулярны.

Задача 6. *На стороне квадрата построен прямоугольный треугольник, гипотенуза которого совпадает со стороной квадрата. Докажите, что биссектриса прямого угла делит площадь квадрата пополам.*

Доказательство. Вокруг прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) опишем окружность с центром в точке O — середине стороны AB (рис.8). Биссектриса угла ACB пересечет окружность в точке K, а поскольку $AO = OK$, то точка K совпадает с центром квадрата. Значит, утверждение задачи доказано (K — центр симметрии квадрата).

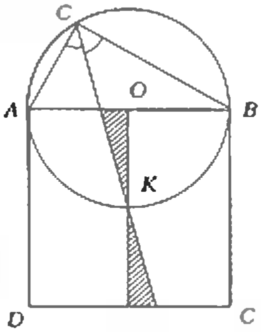


Рис. 8

Задача 7. *На стороне BC треугольника ABC найдите такую точку X, чтобы $AX = \sqrt{BX \cdot XC}$. Для каких треугольников задача имеет решение?*

Решение. Вокруг треугольника ABC опишем окружность с центром O (рис.9). Соединим точку O с точкой A и как на диаметре построим на OA окружность, которая пересечет отрезок BC в точке X. Действительно, поскольку $\angle AXO = 90°$, то $AX = XE$ и $AX \cdot XE = BX \cdot XC$, откуда следует утверждение задачи. Докажите самостоятельно, что треугольник ABC — неостроугольный.

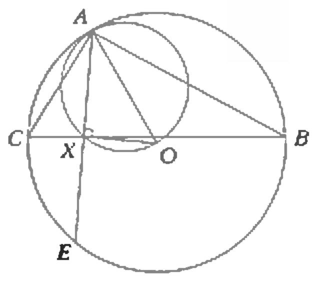


Рис. 9

Единственное ли решение имеет эта задача?

Задача 8. *В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) $\angle ABC = 80°$. Точка X лежит внутри треугольника, причем $\angle XAC = 10°$, $\angle XCA = 30°$. Найдите $\angle BXC$.*

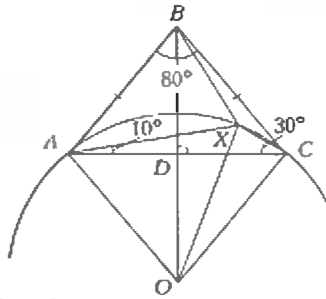


Рис. 10

Решение. Около ΔAXC опишем окружность с центром O и соединим его с точками X, A, C (рис.10).

$$\angle BXC = 360° - (\angle AXC + \angle BXA),$$

$$\angle AXC = 180° - (10° + 30°) = 140°.$$

Найдем $\angle BXA$. Для этого докажем, что треугольник BXA равнобедренный. Вначале заметим, что треугольник AXO равносторонний: $AO = OX$ и $\angle AOX = 2\angle XCO = 60°$. Значит, $AX = AO$. Теперь докажем, что $AO = AB$. Поскольку OB — серединный перпендикуляр к отрезку AC ($AD = DC$), то $\angle ABD = \frac{1}{2}\angle ABC = 40°$ и $\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOC = 40°$. Значит, $AO = AB$ и треугольник ABX равнобедренный. В нем $\angle BAX = \angle BAD - \angle XAD = 50° - 10° = 40°$. Значит, $\angle BXA = (180° - 40°) : 2 = 70°$ и $\angle BXC = 360° - (140° + 70°) = 150°$.

Другие замечательные точки треугольника

Задача 9. *В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведена высота CH. В образовавшиеся треугольники вписаны окружности с центрами I_1 и I_2. Докажите, что биссектриса угла ACB перпендикулярна отрезку I_1I_2.*

Доказательство. Докажем, что биссектриса угла CBA перпендикулярна отрезку I_2C (рис.11). Обозначим $\angle I_1CI_2 = \alpha$, $\angle CI_1D = \beta$ (D — точка

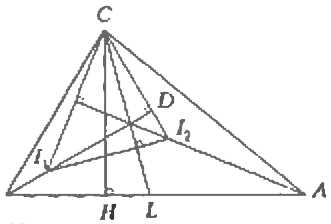


Рис. 11

пересечения биссектрисы угла CBA с отрезком CI_2).

$$\angle I_1DC = 180° - (\alpha+\beta),$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\angle BCH + \frac{1}{2}\angle HCA = \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC = 45°,$$

$$\beta = \angle CBI_1 + \angle I_1CB = \frac{1}{2}BAC + \frac{1}{2}ABC = 45°.$$

Таким образом,

$$\alpha + \beta = 45° + 45° = 90°.$$

Значит, $\angle I_1DC = 180° - 90° = 90°$.

Аналогично доказываем, что биссектриса угла CAB пересекает отрезок CI_1 под углом 90°. Значит, точка пересечения биссектрис AI_2 и BI_1 — центр тяжести треугольника CI_1I_2, а значит, биссектриса угла ACB перпендикулярна отрезку I_1I_2.

Задача 10. *Окружность касается двух сторон треугольника и двух его медиан. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.*

Доказательство. Обозначим через M точку пересечения медиан треугольника ABC, M_a, M_b — середины сторон BC и AC (рис. 12).

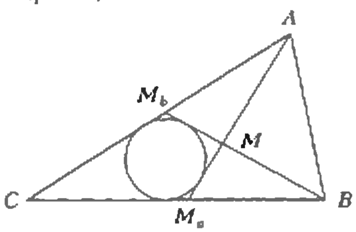


Рис. 12

Обозначим: $AM_a = m_a$, $BM_b = m_b$, $BC = a$, $AC = b$. Поскольку четырехугольник MM_aCM_b описан около окружности, то

$$\frac{m_a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{m_b}{3} + \frac{a}{2},$$

или

$$m_a + \frac{3}{2}b = m_b + \frac{3}{2}a. \quad (1)$$

Рассмотрим треугольники AM_aC и BM_bC. Они равновелики, и окружность, вписанная в каждый из них, одна и та же. Значит, равны их периметры:

$$m_a + \frac{a}{2} + b = m_b + \frac{b}{2} + a,$$

$$m_a + \frac{b}{2} = m_b + \frac{a}{2}. \quad (2)$$

Вычитая равенства (1) и (2), получим $a = b$.

Задача 11. *Докажите, что в треугольнике ABC*

$$\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2},$$

где A, B, C — углы треугольника.

Доказательство. Пусть I — центр вписанной в треугольник ABC окружности, K_1, K_2, K_3 — точки касания ее со сторонами BC, AC, AB. Ясно, что

$$\left(\vec{IK_1} + \vec{IK_2} + \vec{IK_3}\right)^2 \ge 0. \quad (3)$$

Положим $|\vec{IK_1}| = |\vec{IK_2}| = |\vec{IK_3}| = 1$. Так как $\vec{IK_1}\cdot\vec{IK_2} = -\cos C$, $\vec{IK_1}\cdot\vec{IC_1} = -\cos B$, $\vec{IK_2}\cdot\vec{IK_3} = -\cos A$, то после после раскрытия скобок в левой части неравенства (3) получим утверждение задачи.

Середина отрезка

Задача 12. *Одна из диагоналей вписанного в окружность четырехугольника является диаметром окружности. Докажите, что проекции противоположных сторон четырехугольника на вторую диагональ равны между собой.*

Доказательство. Обозначим через M и L проекции точек A и C на диагональ BD четырехугольника $ABCD$ (рис. 13).

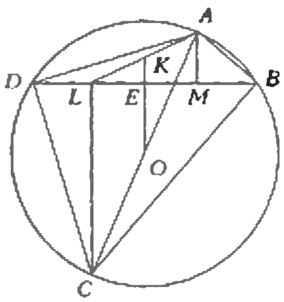


Рис. 13

Из середины отрезка AC, точки O, проведем прямую, параллельную отрезку LC. Эта прямая по теореме Фалеса пересечет отрезок AL в его середине — точке K. А поскольку KO параллелен отрезку AM, то этот же отрезок пересечет сторону LM треугольника ALM тоже в его середине, точке E. Значит, $LE = EM$, следовательно $DL = BM$.

Задача 13. *Вычислите углы равнобедренного треугольника, высота которого вдвое меньше биссектрисы угла при основании.*

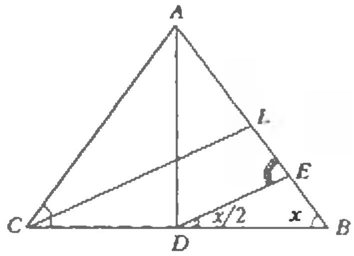


Рис. 14

Решение. В треугольнике ABC: $AB = AC$, AD — высота, CL — биссектриса (рис. 14). Пусть E — середина отрезка LB. Тогда $DE = \frac{1}{2}CL = AD$, значит, $\angle DAE = \angle AED$. Обозначим $\angle ACB = x$. Следовательно, $\angle EDB = \frac{1}{2}x$, $\angle EBC = x$, $\angle AED = \frac{3x}{2}$, $\angle BAC = 3x$. Составим уравнение:

$$x + x + 3x = 180°, \quad x = 36°.$$

Симметричные точки

Задача 14. *Высота и медиана треугольника, выходящие из одной вершины, делят угол при этой вершине на три равные части. Докажите, что данный треугольник прямоугольный.*

Доказательство. Пусть $\angle ACD = \angle DCM = \angle MCB$ (рис. 15). Отразим вершину C относительно AB в точку C_1. Докажем, что треугольник BCC_1 — равносторонний. Учитывая построение точки C_1, утверждаем, что $BC = BC_1$. Вместе с тем, $2DM = BM$, т.е. точка M является в треугольнике BCC_1 точкой

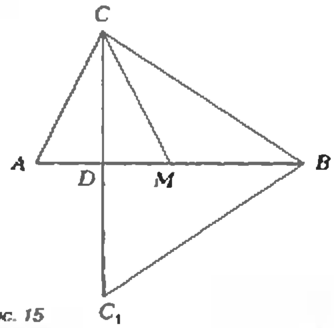


Рис. 15

пересечения медиан и биссектрис. Значит, этот треугольник равносторонний и $\angle ACB = 90°$.

Задача 15. *В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle ACB = 90°$) проекции точки M пересечения медиан на стороны BC, AC, AB обозначим M_a, M_b, M_c. Докажите, что*

$$S_1 = S_2 + S_3,$$

где S_1, S_2, S_3 соответственно площади треугольников MM_aM_b, MM_bM_c, MM_aM_c.

Доказательство. Отразим точки M_a и M_b относительно точки M. Получим точки E и D (рис.16). Поскольку M — центр тяжести треугольника ABC, то эти точки принадлежат гипотенузе AB, а точке M_c будет соответствовать точка K и $MM_c = MK$. Значит, M_aM

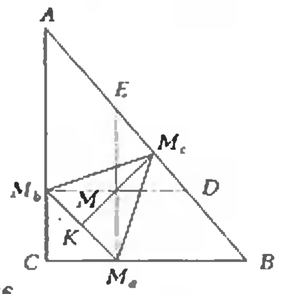


Рис. 16

— медиана в треугольнике M_aKM_c, а M_bM — медиана в треугольнике M_bKM_c, M_cM — медиана в треугольнике M_aKM_c, следовательно, $S_{M_aMK} = S_{MM_aM_c}$, $S_{M_cKM} = S_{M_bMM_c}$, а это доказывает утверждение задачи.

Точка W

Так мы обозначим точку пересечения биссектрисы внутреннего угла треугольника с осью симметрии соответственной стороны. Использование этой точки как вспомогательной эффективно, потому что она обладает двумя замечательными свойствами:

1) точка W принадлежит окружности, описанной около треугольника ABC;

2) расстояния от точки W до двух ближайших вершин треугольника равно расстоянию до центра вписанной окружности. Например (рис.17),

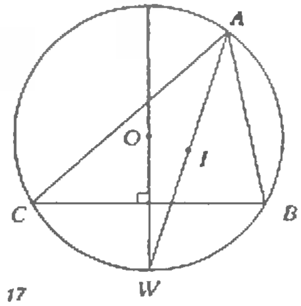


Рис. 17

$$WB = WC = WI.$$

Докажите это самостоятельно.

Задача 16. *В неравнобедренном треугольнике ABC точки N, K, M — середины сторон BC, AC и AB соответственно. Найдите величину угла C, если известно, что центр окружности, описанной около треугольника MNK, лежит на биссектрисе угла C.*

Решение. Пусть Q — центр окружности, описанной около треугольника KMN (рис.18). Поскольку точка Q как центр окружности принадлежит серединному перпендикуляру, проведенному к отрезку KN и по условию биссектрисе угла ACB, то точка Q, как точка W, принадлежит окружности, описанной около треугольника CKN, значит, четырехугольник $CKQN$ вписан в окружность. Обозначив $\angle KCN = x$, имеем: $2x + x = 180°$, $x = 60°$.

Задача 17. *В треугольнике ABC: M — точка пересечения медиан, I — центр вписанной окружности. Докажите, что если отрезок MI перпендикулярен BC, то $a = \frac{b+c}{3}$ (a, b, c — длины сторон BC, AC, AB).*

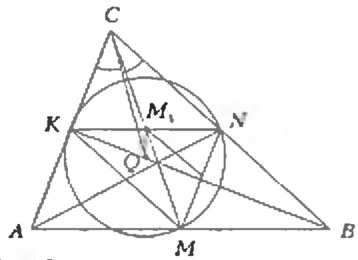


Рис. 18

Доказательство. Около треугольника ABC опишем окружность и построим

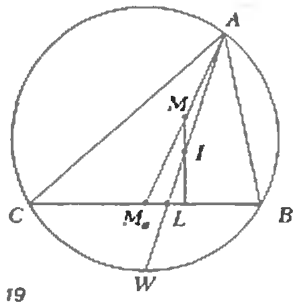


Рис. 19

точку W (рис.19). Треугольники ABW и ALC подобны:

$$\frac{BW}{AW} = \frac{CL}{AC},$$

но $BW = IW$ и $\frac{IW}{AW} = \frac{CL}{b}$. (4)

Поскольку M — центр тяжести и $MI \| M_aW$ (M_a — середина отрезка BC), то $\frac{IW}{AW} = \frac{M_aM}{AM_a} = \frac{1}{3}$ и, учитывая (4), имеем, что $CL = \frac{b}{3}$. Аналогично, из подобия треугольников BLA и AWC, имеем: $BL = \frac{c}{3}$, значит, $a = \frac{b+c}{3}$.

НАМ ПИШУТ

Квадратные уравнения с «квадратным» дискриминантом

Если при решении задачи приходится находить корни квадратного уравнения с целыми коэффициентами, очень хочется, чтобы его дискриминант был квадратом целого числа. Насколько легче стали бы вычисления! Покажем, как «изготавливать» уравнения с «квадратным» дискриминантом.

Очевидно, что для того чтобы дискриминант уравнения

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (1)$$

с рациональными коэффициентами был квадратом рационального числа, необходимо и достаточно, чтобы его корни были рациональными (докажите это самостоятельно).

По теореме Виета имеем: $p = -\left(\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}\right) = \frac{m_1n_2 + m_2n_1}{n_1n_2}$ и $q = \frac{m_1m_2}{n_1n_2}$, где m_1/n_1 и m_2/n_2 — рациональные корни уравнения (1), (m_1, n_1, m_2, n_2 — любые целые числа, причем $n_1n_2 \neq 0$). Следовательно, дискриминант уравнения

$$x^2 - \frac{m_1n_2 + m_2n_1}{n_1n_2}x + \frac{m_1m_2}{n_1n_2} = 0$$

есть квадрат рационального числа.

Соответственно, дискриминант равносильного ему уравнения

$$n_1n_2x^2 - (m_1n_2 + m_2n_1)x + m_1m_2 = 0$$

с целыми коэффициентами есть квадрат целого числа.

Таким образом, для того чтобы дискриминант уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами был квадратом целого числа, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} a = n_1n_2, \\ b = -(m_1n_2 + m_2n_1), \\ c = m_1m_2. \end{cases} \qquad (2)$$

При этом дискриминант

$$D = b^2 - 4ac = (m_1n_2 - m_2n_1)^2.$$

Формулы (2) исчерпывают все множество коэффициентов квадратных уравнений с «квадратным» дискриминантом, так как различные перестановки чисел m_1, n_1, m_2, n_2 несущественны.

Пусть, например, $m_1 = -1$, $n_1 = 3$, $m_2 = 2$, $n_2 = 5$. Тогда имеем уравнение $15x^2 - x - 2 = 0$ с дискриминантом $D = 121$ и корнями $x_1 = -1/3$ и $x_2 = 2/5$.

В.Дроздов

Попробуем решить проблему...

Л. КУРЛЯНДЧИК

Кто из нас не хотел бы внести свой вклад, пусть небольшой, в решение какой-нибудь математической проблемы? Абсолютное большинство, конечно, считает, что это практически невозможно. Ведь современные проблемы очень сложны, и для их решения надо очень много знать.

В этой заметке мы расскажем о проблеме, чуть-чуть продвинуть которую смогут многие из вас.

Формулировка задачи

В 1992 году известный австрийский математик Вальтер Яноус (Walther Janous) на страницах канадского математического журнала «Crux Mathematicorum» предложил следующую задачу.

Натуральные числа n, k таковы, что $2 \le k < n$. Пусть сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна 1. Требуется доказать, что

$$x_1x_2\ldots x_k + x_2x_3\ldots x_{k+1} + \ldots$$
$$\ldots + x_nx_1\ldots x_{k-1} \le \max\left(\frac{1}{k^k}, \frac{1}{n^{k-1}}\right).$$

Сейчас мы сделаем несколько первых шагов на пути решения этой задачи, а затем вы сможете самостоятельно попробовать продвинуться несколько вперед по этому пути.

Начнем с наиболее простого случая $k = 2$.

$k = 2$

В этом случае неравенство выглядит так:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1 \le \max\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{n}\right).$$

Пусть $n = 3$.

Задача 1. *Сумма неотрицательных чисел x_1, x_2, x_3 равна 1. Докажите, что*

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \le \frac{1}{3}.$$

Это совсем просто:

$$1 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 +$$
$$+ 2x_2x_3 + 2x_3x_1 = (1/2)(x_1 - x_2)^2 +$$
$$+ (1/2)(x_2 - x_3)^2 + (1/2)(x_3 - x_1)^2 + 3x_1x_2 +$$
$$+ 3x_2x_3 + 3x_3x_1 \ge 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1).$$

Равенство достигается в случае $x_1 = x_2 = x_3 = 1/3$.

Идем дальше. Следующее значение $n = 4$.

Задача 2. *Сумма неотрицательных чисел x_1, x_2, x_3, x_4 равна 1. Докажите, что*

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 \le \frac{1}{4}.$$

Это также легко доказать:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 =$$
$$= (x_1 + x_3)(x_2 + x_4) \le$$
$$\le \left(\frac{x_1 + x_3 + x_2 + x_4}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Равенство достигается при $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1/4$.

Пока, по-видимому, рано переходить к общему случаю. Будем накапливать опыт. Итак, $n = 5$.

Задача 3. *Сумма неотрицательных чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 равна 1. Докажите, что*

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1 \le \frac{1}{4}.$$

Сейчас мы сделаем некоторый принципиальный шаг. Следите внимательно. Без ограничения общности мы можем считать, что x_1 — наименьшее из чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Тогда

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1 \le$$
$$\le x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_2 \le$$
$$\le (x_1 + x_3 + x_5)(x_2 + x_4) \le$$
$$\le \left(\frac{x_1 + x_3 + x_5 + x_2 + x_4}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Равенство достигается при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = x_5 = 1/2$.

А теперь мы сделаем шаг чуть пошире: $n = 2m$ ($m \ge 3$).

Задача 4. *Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2m}$ ($m \ge 3$) равна 1. Докажите, что*

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{2m}x_1 \le \frac{1}{4}.$$

Имеем

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{2m}x_1 \le$$
$$\le (x_1 + x_3 + \ldots + x_{2m-1})(x_2 + x_4 + \ldots + x_{2m}) \le$$
$$\le \left(\frac{x_1 + x_3 + \ldots + x_{2m-1} + x_2 + x_4 + \ldots + x_{2m}}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{4}.$$

Равенство в этом, как и в любом другом случае $k = 2$, $n \ge 4$ достигается при $x_1 = x_2 = 1/2$, $x_3 = \ldots = x_n = 0$.

Итак, при $k = 2$ остается рассмотреть последний случай $n = 2m + 1$ ($m \ge 3$). Я думаю, что это вы теперь успешно сможете сделать самостоятельно.

Упражнение 1. Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2m+1}$ ($m \ge 3$) равна 1. Докажите, что

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{2m+1}x_1 \le \frac{1}{4}.$$

$k = 3$

Начнем с самого простого случая $n = 4$.

Задача 5. *Сумма неотрицательных чисел x_1, x_2, x_3, x_4 равна 1. Докажите, что*

$$x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2 \le \frac{1}{16}.$$

Имеем

$$x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2 =$$
$$= x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) \le$$
$$\le \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2(x_3 + x_4) +$$
$$+ \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)^2(x_1 + x_2) =$$
$$= \frac{(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}{4} \le$$
$$\le \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2}{16} = \frac{1}{16}.$$

Равенство достигается при $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1/4$.

Следующий случай $n = 5$.

Задача 6. *Сумма неотрицательных чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 равна 1. Докажите, что*

$$x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 +$$
$$+ x_3x_4x_5 + x_4x_5x_1 + x_5x_1x_2 \le \frac{1}{25}.$$

Мы можем считать, что x_1 — минимальное из чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Тогда

$$x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + x_4x_5x_1 +$$
$$+ x_5x_1x_2 = x_1(x_2 + x_4)(x_3 + x_5) +$$
$$+ x_3x_4(x_2 + x_5 - x_1) \le$$
$$\le x_1\left(\frac{x_2 + x_4 + x_3 + x_5}{2}\right)^2 +$$
$$+ \left(\frac{x_3 + x_4 + x_2 + x_5 - x_1}{2}\right)^3 = \frac{x_1(1 - x_1)^2}{4} +$$
$$+ \frac{(1 - 2x_1)^3}{27} = \frac{4 + 3x_1 - 6x_1^2 - 5x_1^3}{108} =$$
$$= \frac{1}{25} - \frac{125x_1^3 + 150x_1^2 - 75x_1 + 8}{25 \cdot 108} =$$
$$= \frac{1}{25} - \frac{(5x_1 - 1)^2(5x_1 + 8)}{25 \cdot 108} \le \frac{1}{25}.$$

Равенство достигается при $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1/5$.

Следующий случай $n = 3m$ ($m \ge 2$).

Задача 7. *Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{3m}$ ($m \ge 2$) равна 1. Докажите, что*

$$x_1x_2x_3 + \ldots + x_{3m-2}x_{3m-1}x_{3m} + x_{3m-1}x_{3m}x_1 + x_{3m}x_1x_2 \le \frac{1}{27}.$$

Вы уже, по-видимому, догадались, как можно просто доказать это неравенство. Действительно,

$$x_1x_2x_3 + \ldots + x_{3m}x_1x_2 \le (x_1 + x_4 + \ldots + x_{3m-2}) \times (x_2 + x_5 + \ldots + x_{3m-1})(x_3 + x_6 + \ldots + x_{3m}) \le \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{3m}}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

Равенство (в случае $n \ge 6$) достигается при $x_1 = x_2 = x_3 = 1/3$, $x_4 = \ldots = x_n = 0$.

Следующий случай $n = 3m + 1$ ($m \ge 2$).

Задача 8. *Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{3m+1}$ ($m \ge 2$) равна 1. Докажите, что*

$$x_1x_2x_3 + \ldots + x_{3m+1}x_1x_2 \le \frac{1}{27}.$$

Теперь и здесь найти нужный ход не составит для нас труда.

Будем считать, что x_1 — наименьшее из чисел. Тогда

$$x_1x_2x_3 + \ldots + x_{3m}x_{3m+1}x_1 + x_{3m+1}x_1x_2 \le$$
$$\le x_1x_2x_3 + \ldots + x_{3m}x_{3m+1}x_2 + x_{3m+1}x_3x_2 \le$$
$$\le (x_1 + x_4 + \ldots + x_{3m+1})(x_2 + x_5 + \ldots + x_{3m-1}) \times (x_3 + x_6 + \ldots + x_{3m}) \le 1/27.$$

Остается последний случай $n = 3m + 2$ ($m \ge 2$). Я думаю, что вы справитесь с ним без труда.

Упражнение 2. Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{3m+2}$ ($m \ge 2$) равна 1. Докажите, что

$$x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + \ldots + x_{3m+1}x_{3m+2}x_1 + x_{3m+2}x_1x_2 \le \frac{1}{27}.$$

Ну и прежде чем отправлять вас в самостоятельное дальнейшее плавание, разберем случай $k = 4$.

$k = 4$

Как обычно, начинаем с простейшего случая $n = 5$.

Задача 9. *Сумма неотрицательных чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 равна 1. Докажите, что*

$$x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + x_3x_4x_5x_1 + x_4x_5x_1x_2 + x_5x_1x_2x_3 \le 1/125.$$

Имеем

$$x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + x_3x_4x_5x_1 + x_4x_5x_1x_2 + x_5x_1x_2x_3 = x_1x_2x_3(x_4 + x_5) + x_4x_5(x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2) \le$$
$$\le \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^3}{27}(x_4 + x_5) + \frac{(x_4 + x_5)^2}{4} \cdot \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2}{3} =$$
$$= \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2 (x_4 + x_5)}{108} \times (4(x_1 + x_2 + x_3) + 9(x_4 + x_5)) =$$
$$= \frac{x^2(1-x)(4x + 9(1-x))}{108} = \frac{x^2(1-x)(9-5x)}{108},$$

где $x = x_1 + x_2 + x_3$. Ясно, что $0 \le x \le 1$.

Далее

$$\frac{1}{125} - \frac{x^2(1-x)(9-5x)}{108} = \frac{(3-5x)^2(12 + 15x + 25x(1-x))}{125 \cdot 108} \ge 0.$$

Равенство в неравенстве достигается при

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1/5.$$

Следующий случай $n = 6$ мы предлагаем вам разобрать самостоятельно.

Упражнение 3. Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ равна 1. Докажите, что

$$x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + x_3x_4x_5x_6 + x_4x_5x_6x_1 + x_5x_6x_1x_2 + x_6x_1x_2x_3 \le 1/216.$$

А теперь — внимание — следующий случай $n = 7$ — это первая проблема, которая предлагается вашему вниманию.

Проблема 1. *Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_7$ равна 1. Докажите, что*

$$x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + \ldots + x_7x_1x_2x_3 \le 1/256.$$

В уже упоминавшемся нами журнале «Crux Mathematicorum» было приведено решение этой задачи, предложенное польским математиком Вольдемаром Помпа, но оно содержит ошибку.

Следующий случай $n = 4m$ ($m \ge 2$).

Упражнение 4. Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{4m}$ ($m \ge 2$) равна 1. Докажите, что

$$x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + \ldots + x_{4m}x_1x_2x_3 \le 1/256.$$

Следующий случай $n = 4m + 1$ ($m \ge 2$) потруднее, и мы его разберем.

Задача 10. *Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{4m+1}$ ($m \ge 2$) равна 1. Докажите, что*

$$x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + \ldots + x_{4m}x_1x_2x_3 \le 1/256.$$

Будем считать, что x_1 — наименьшее из чисел. Тогда

$$(x_1x_2x_3x_4 + \ldots + x_{4m-2}x_{4m-1}x_{4m}x_{4m+1}) + x_{4m-1}x_{4m}x_{4m+1}x_1 + x_{4m}x_{4m+1}x_1x_2 + x_{4m+1}x_1x_2x_3 \le$$
$$\le (x_1x_2x_3x_4 + \ldots + x_{4m-2}x_{4m-1}x_{4m}x_{4m+1}) + x_{4m-1}x_{4m}x_{4m+1}x_2 + x_{4m}x_{4m+1}x_3x_2 + x_{4m+1}x_4x_2x_3 \le (x_1 + x_5 + \ldots + x_{4m+1}) \times (x_2 + x_6 + \ldots + x_{4m-2}) \times (x_3 + x_7 + \ldots + x_{4m-1}) \times (x_4 + x_8 + \ldots + x_{4m}) \le 1/256.$$

Более труден случай $n = 4m + 2$ ($m \ge 2$).

Упражнение 5. Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{4m+2}$ ($m \ge 2$) равна 1. Докажите, что

$$x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + \ldots + x_{4m+2}x_1x_2x_3 \le 1/256.$$

Последний случай $n = 4m + 3$ ($m \ge 2$).

Задача 11. *Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{4m+3}$ ($m \ge 2$) равна 1. Докажите, что*

$$x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + \ldots + x_{4m+3}x_1x_2x_3 \le 1/256.$$

Мы будем считать, что x_4 — наибольшее из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{4m+3}$. Имеем

$$(x_1x_2x_3x_4 + \ldots + x_{4m}x_{4m+1}x_{4m+2}x_{4m+3}) + x_{4m+1}x_{4m+2}x_{4m+3}x_1 + x_{4m+2}x_{4m+3}x_1x_2 + x_{4m+3}x_1x_2x_3 \le$$
$$\le (x_1x_2x_3x_4 + \ldots + x_{4m}x_{4m+1}x_{4m+2}x_{4m+3}) + x_{4m+1}x_{4m+2}x_{4m+3}x_4 + x_{4m+2}x_{4m+3}x_3x_4 + x_{4m+3}x_1x_2x_4 \le (x_1 + x_5 + \ldots + x_{4m+1}) \times (x_2 + x_6 + \ldots + x_{4m+2})(x_3 + x_7 + \ldots + x_{4m+3}) \times (x_4 + x_8 + \ldots + x_{4m}) \le 1/256.$$

$k \ge 5$

Здесь мы разберем единственный случай $n = k + 1$.

Задача 12. *Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ ($k \ge 5$) равна 1. Докажите, что*

$$x_1x_2 \ldots x_k + x_2x_3 \ldots x_{k+1} + \ldots + x_{k+1}x_1 \ldots x_{k-1} \le \frac{1}{(k+1)^{k-1}}.$$

Если одно из чисел, скажем x_1, равно 0, то неравенство очевидно:

$$x_2x_3\ldots x_{k+1} \le \left(\frac{x_2+x_3+\ldots+x_{k+1}}{k}\right)^k = \frac{1}{k^k} < \frac{1}{(k+1)^{k-1}}.$$

Итак, пусть все числа $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ положительны.

Обозначим через P произведение $x_1x_2\ldots x_{k+1}$. Если все числа равны, то неравенство обращается в равенство. Пусть не все числа равны. Тогда наименьшее из них меньше чем $1/(k+1)$, а наибольшее — больше чем $1/(k+1)$. Без ограничения общности можно считать, что $x_1 < 1/(k+1) < x_2$. Перепишем выражение, стоящее в левой части неравенства, в виде

$$P\left(\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\ldots+\frac{1}{x_{k+1}}\right)+\frac{P}{x_1x_2}(x_1+x_2).$$

Если теперь мы пару чисел x_1, x_2 заменим на

$$1/(k+1),\ x_1+x_2-1/(k+1),$$

то сумма этих чисел не изменится, а произведение увеличится, и поэтому левая часть неравенства увеличится. Если при этом не все числа окажутся равными, то повторим эту операцию. Через конечное число ходов все числа станут равными, и при этом левая часть неравенства сравняется с правой. Так как каждый раз левая часть увеличивалась, то исходно левая часть была меньше правой.

В заключение предлагаем еще одно упражнение.

Упражнение 6. Пусть натуральные числа $k \ge 5$, $m \ge 2$. Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна 1. Докажите, что

$$x_1x_2\ldots x_k+\ldots+x_nx_1\ldots x_{k-1} \le \frac{1}{k^k},$$

если а) $n = km$, б) $n = km+1$.

Все остальные случаи — это проблемы. Дерзайте!

НАМ ПИШУТ

МАЛ, ДА СИЛЕН

Как-то, разбираясь в лаборантской школьного физического кабинета, я обнаружил паспорт кольцеобразного электромагнита, питаемого постоянным током напряжением 4–6 В. В нем указывалось, что при напряжении 4 В подъемная сила электромагнита такова, что он может удерживать груз массой 50 кг. Самого электромагнита, выпущенного более тридцати лет назад, к сожалению, уже не было.

Давайте проведем несложный теоретический расчет и покажем, что небольшой электромагнит действительно может удержать груз массой, равной массе учащегося. Мысленно сконструируем простейший электромагнит. Представим себе, что цилиндрический сердечник электромагнита изготовлен из трансформаторной стали с магнитной проницаемостью $\mu = 8000$. Пусть его длина $l = 20$ см, а диаметр $d = 2$ см. Навьем на сердечник однослойную обмотку из медного провода, покрытого весьма тонким слоем изоляции (удельное электрическое сопротивление меди $\rho = 1{,}7\cdot10^{-8}$ Ом·м). При диаметре провода $d_1 = 1$ мм число витков равно $N = 200$.

Сначала естественно вычислить энергию W магнитного поля электромагнита. Для этого воспользуемся известной формулой $W = LI^2/2$, где I — ток в обмотке, L — индуктивность катушки. Из физических соображений ясно, что индуктивность катушки зависит от ее геометрии и магнитных свойств сердечника. Строгий расчет дает $L = \mu_0\mu N^2S/l$, где $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная, $S = \pi d^2/4$ — площадь поперечного сечения сердечника. Вывод этой формулы можно найти, например, в учебном пособии для 10 класса школ и классов с углубленным изучением физики под редакцией А.А.Пинского (М.: Просвещение, 1993, с. 305.). Итак, энергия поля равна

$$W = \frac{\mu_0\mu N^2SI^2}{2l},$$

а плотность энергии —

$$w = \frac{W}{Sl} = \frac{\mu_0\mu N^2I^2}{2l^2}.$$

Плотность энергии любого вида измеряется в джоулях, деленных на кубический метр. Заметим, что Дж/м³ = Н/м² = Па — единица давления. Интуиция подсказывает: именно величина w и есть давление торца сердечника на якорь, изготовленного из того же материала и плотно прижатого к сердечнику (считаем соприкасающиеся плоские поверхности достаточно хорошо обработанными). Значит, подъемную силу электромагнита можно определить так:

$$F = wS = \frac{1}{2}\mu_0\mu\left(\frac{NI}{l}\right)^2S.$$

Осталось связать силу тока I с напряжением U. По закону Ома $I = U/R$, где $R = \rho l_1/S_1$ — сопротивление обмотки, $S_1 = \pi d_1^2/4$ — площадь сечения провода, $l_1 = \pi dN$ — его длина. Учитывая очевидное равенство $N = l/d_1$, найдем $I = Ud_1^3/(4\rho dl)$. Тогда формула для подъемной силы преобразуется к виду

$$F = \left(\frac{\pi\mu_0}{128}\right)\cdot\left(\frac{\mu}{\rho^2}\right)\cdot\left(\frac{d_1^2}{l}\right)^2\cdot U^2.$$

Величины, входящие в формулу, для удобства анализа разбиты на четыре сомножителя. Первый — константа, второй характеризует вещества сердечника и провода, третий определяется их размерами, четвертый — внешнее напряжение (оно не должно быть чрезмерным, а то обмотка катушки нагреется, задымится и перегорит).

Положив в формуле $U = 4$ В, получим $F = 341$ Н, что соответствует поднимаемой массе $m \approx 35$ кг. При этом по обмотке течет ток $I = 14{,}7$ А. Если $U = 6$ В, то $F = 767$ Н, $m \approx 78$ кг, $I = 22$ А. Оба тока вполне допустимы, так как медный провод диаметром 1 мм плавится при токе 80 А. А чтобы катушка слишком не нагрелась, ее не надо чрезмерно долго держать включенной.

Видим, что даже малый электромагнит, питаемый от низковольтного напряжения, может поднять весьма немалый груз.

В.Дроздов

Задачи на центр масс

А.ЧЕРНОУЦАН

При решении механических задач неоценимую помощь может оказать использование понятия центра масс системы материальных точек. Одни задачи просто невозможно решить, не прибегая к этому понятию, решение других с его помощью может стать гораздо проще и нагляднее. Перед тем как обсуждать конкретные задачи, напомним основные свойства центра масс и проиллюстрируем их примерами.

Центром масс (центром инерции) системы материальных точек назовем точку, характеризующую распределение масс в системе, координаты которой определяются формулами

$$x_ц = \frac{m_1x_1+\ldots+m_Nx_N}{m_1+\ldots+m_N},$$

$$y_ц = \frac{m_1y_1+\ldots+m_Ny_N}{m_1+\ldots+m_N},$$

$$z_ц = \frac{m_1z_1+\ldots+m_Nz_N}{m_1+\ldots+m_N}.$$

Здесь m_i — массы материальных точек, образующих систему, x_i, y_i, z_i — координаты этих точек. Читатели, знакомые с понятием радиуса-вектора, предпочтут векторную запись:

$$\vec{r}_ц = \frac{m_1\vec{r}_1+\ldots+m_N\vec{r}_N}{m_1+\ldots+m_N}. \qquad (1)$$

Пример 1. Найдем положение центра масс простейшей системы, состоящей из двух точек, массы которых m_1 и m_2 и расстояние между ними l (рис.1). Направив ось X от первой точки ко второй, получим, что расстояние от первой точки до центра масс (т.е. координата центра масс) равно $m_2l/(m_1+m_2)$, а расстояние от центра масс до второй точки равно $m_1l/(m_1+m_2)$, т.е. отношение расстояний обратно отношению масс. Значит, в этом случае положение центра масс совпадает с центром тяжести.

Обсудим некоторые свойства центра масс, что, как нам кажется, наполнит физическим содержанием приведенное выше несколько формальное определение этого понятия.

1) Положение центра масс не изменится, если какую-то часть системы заменить одной точкой с массой, равной массе этой подсистемы, и находящейся в ее центре масс.

Пример 2. Рассмотрим плоский однородный треугольник и найдем положение его центра масс. Разделим треугольник на тонкие полоски, параллельные одной из сторон, и заменим каждую полоску точкой, расположенной в ее середине. Так как все такие точки лежат на медиане треугольника, центр масс тоже должен лежать на медиане. Повторяя рассуждения для каждой из сторон, получаем, что центр масс находится на пересечении медиан.

2) Скорость центра масс можно найти, взяв производную по времени от обеих частей равенства (1):

$$\vec{v}_ц = \frac{m_1\vec{v}_1+\ldots+m_N\vec{v}_N}{m_1+\ldots+m_N} = \frac{\vec{p}}{m}, \qquad (2)$$

где $\vec{p}$ — импульс системы, а m — полная масса системы. Видно, что скорость центра масс замкнутой системы постоянна. Значит, если связать с центром масс поступательно движущуюся систему отсчета, то она будет инерциальной.

Пример 3. Поставим однородный стержень длиной l вертикально на гладкую плоскость (рис.2) и отпустим. В процессе падения как горизонтальная составляющая его импульса, так и горизонтальная составляющая скорости центра масс будут оставаться равными нулю. Поэтому в момент падения центр стержня окажется в том месте, где первоначально стоял стержень, а концы стержня сместятся по горизонтали на $l/2$.

3) Ускорение центра масс равно производной от его скорости по времени:

$$\vec{a}_ц = \frac{m_1\vec{a}_1+\ldots+m_N\vec{a}_N}{m_1+\ldots+m_N} = \frac{\sum\vec{F}}{m}, \qquad (3)$$

где в правой части равенства стоят только внешние силы, так как все внутренние силы сокращаются по третьему закону Ньютона. Получаем, что центр масс движется так, как двигалась бы воображаемая точка с массой, равной массе системы, под действием результирующей внешней силы. Наверное, это самое физическое свойство центра масс.

Пример 4. Если бросить палку, приведя ее при этом во вращение, то центр масс палки (ее середина) будет двигаться с постоянным ускорением $\vec{g}$ по параболе (рис.3).

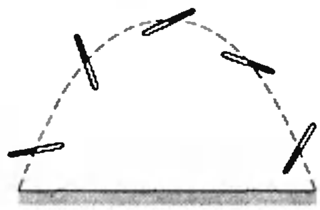


Рис. 3

4) Пусть система точек находится в однородном поле тяжести. Тогда суммарный момент сил тяжести относительно любой оси, проходящей через центр масс, равен нулю. Это значит, что равнодействующая сил тяжести проходит через центр масс, т.е. центр масс является также центром тяжести.

5) Потенциальная энергия системы точек в однородном поле тяжести вычисляется по формуле

$$E = m_1gh_1+\ldots+m_Ngh_N =$$

$$=(m_1+\ldots+m_N)g\frac{m_1h_1+\ldots+m_Nh_N}{m_1+\ldots+m_N} = mgh_ц,$$

где $h_ц$ — высота центра масс системы.

Пример 5. При выкапывании в однородном грунте ямы глубиной h и разбрасывании грунта по поверхности его потенциальная энергия возрастает на $mg\frac{h}{2}$, где m — масса извлеченного грунта.

6) И еще одно полезное свойство центра масс. Кинетическая энергия системы точек может быть представлена в виде суммы двух слагаемых: кинетической энергии общего поступательного движения системы, равной $mv_ц^2/2$, и кинетической энергии $E_{отн}$ движения относительно системы отсчета, связанной с центром масс:

$$E = \frac{mv_ц^2}{2} + E_{отн}.$$

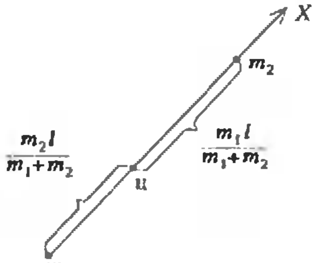


Рис. 1

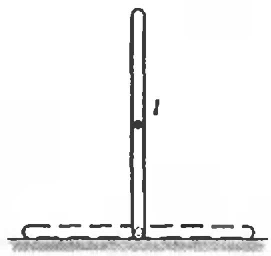


Рис. 2

Пример 6. Кинетическая энергия обруча, катящегося без проскальзывания по горизонтальной поверхности со скоростью v, равна $mv^2/2 + mv^2/2 = mv^2$, так как относительное движение в этом случае представляет собой чистое вращение, для которого линейная скорость точек обруча равна v (полная скорость нижней точки должна быть равна нулю).

Теперь приступим к разбору задач на использование центра масс.

Задача 1. *Однородный стержень лежит на гладкой горизонтальной поверхности. К стержню прикладывают две одинаковые по величине, но противоположные по направлению горизонтальные силы: одна сила приложена к середине стержня, другая — к его концу (рис.4). Относительно какой точки начнет поворачиваться стержень?*

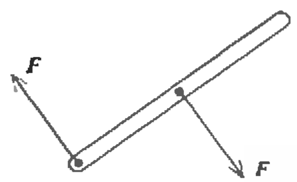


Рис. 4

На первый взгляд может показаться, что осью вращения будет точка, лежащая посередине между точками приложения сил. Однако уравнение (3) показывает, что поскольку сумма внешних сил равна нулю, то равно нулю и ускорение центра масс. Значит, центр стержня будет оставаться в покое, т.е. служить осью вращения.

Задача 2. *Тонкий однородный стержень длиной l и массой m привели в движение вдоль гладкой горизонтальной поверхности так, что он движется поступательно и одновременно вращается с угловой скоростью ω. Найдите натяжение стержня в зависимости от расстояния x до его центра.*

Перейдем в инерциальную систему отсчета, связанную с центром стержня. Рассмотрим движение куска стержня, заключенного между рассматриваемой точкой стержня (расположенной на расстоянии x от центра) и его концом (рис.5).

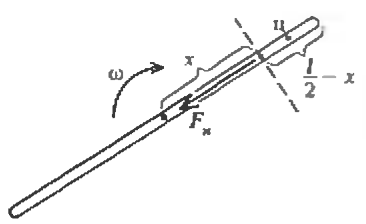


Рис. 5

Единственной внешней силой для этого куска является искомая сила натяжения $F_н$, масса равна $\Delta m = m(l/2 - x)/l$, а его центр масс движется по окружности радиусом $x + (l/2 - x)/2 = (l + 2x)/4$ с ускорением $a_ц = \omega^2(l + 2x)/4$. Записывая уравнение движения центра масс выделенного куска, получим

$$F_н = \Delta m a_ц = \frac{m\omega^2\left(l^2 - 4x^2\right)}{8l}.$$

Задача 3. *Двойная звезда состоит из двух звезд-компонентов массами m_1 и m_2, расстояние между которыми не меняется и остается равным L. Найдите период вращения двойной звезды.*

Рассмотрим движение звезд-компонентов в инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс двойной звезды. В этой системе отсчета звезды движутся с одной и той же угловой скоростью по окружностям разных радиусов (рис.6). Радиус вращения звезды

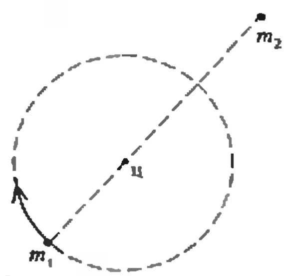


Рис. 6

массой m_1 равен $m_2L/(m_1 + m_2)$ (см. Пример 1), а ее центростремительное ускорение создается силой притяжения к другой звезде:

$$G\frac{m_1m_2}{L^2} = m_1\omega^2\frac{m_2L}{m_1 + m_2}.$$

Видим, что период вращения двойной звезды равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L^3}{G(m_1 + m_2)}}$$

и определяется полной массой двойной звезды, независимо от того, как она распределена между звездами-компонентами.

Задача 4. *Две точечные массы m и $2m$ связаны невесомой нитью длиной l и движутся по гладкой горизонтальной плоскости. В некоторый момент времени скорость массы $2m$ равна нулю, а скорость массы m равна v и направлена перпендикулярно нити (рис.7). Найдите натяжение нити и период вращения системы.*

Центр масс системы находится на расстоянии $l/3$ от массы $2m$ и движется со

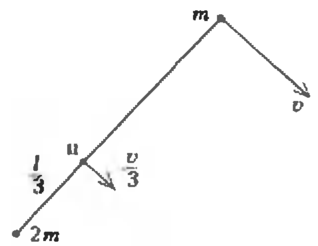


Рис. 7

скоростью $v/3$. В системе отсчета, связанной с центром масс, точка массой $2m$ движется по окружности радиусом $l/3$ со скоростью $v/3$. Значит, период вращения равен $T = 2\pi l/v$ (проверьте, что такой же ответ получается, если рассмотреть точку массой m). Натяжение нити найдем из уравнения движения любой из двух точек:

$$F_н = 2m\frac{(v/3)^2}{l/3} = \frac{2}{3}\frac{mv^2}{l}.$$

Задача 5. *На гладкой горизонтальной плоскости лежат два одинаковых бруска массой m каждый, связанных легкой пружиной жесткостью k (рис.8). Первому бруску сообщают скорость v_0 в направлении от второго бруска. Опишите движение системы. Через какое время деформация пружины впервые достигнет максимального значения?*

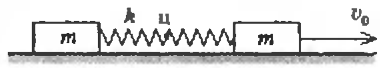


Рис. 8

Центр масс системы будет перемещаться с постоянной скоростью $v_0/2$. В системе отсчета центра масс начальная скорость каждого бруска равна $v_0/2$, а жесткость половинной пружины, которая соединяет его с неподвижным центром масс, составляет $2k$ (жесткость пружины обратно пропорциональна ее длине). Период таких колебаний равен $T = 2\pi\sqrt{m/(2k)}$, а амплитуда колебаний каждого бруска, которую можно найти из закона сохранения энергии, составляет $x_м = v_0\sqrt{m/(8k)}$. В первый раз деформация станет максимальной через четверть периода, т.е. через время $\tau = \sqrt{m/(8k)}$.

Задача 6. *Шар массой m налетает со скоростью v на покоящийся шар массой $2m$. Найдите скорости обоих шаров после упругого центрального удара.*

В системе отсчета, связанной с центром масс, полный импульс двух шаров равен нулю как до, так и после соударения. Легко догадаться, какой ответ для конечных скоростей удовлетворяет одновременно и этому условию, и закону сохранения энергии: скорости останутся такими же, как до удара, по величине, но изменят свои направления на противоположные. Скорость центра масс системы равна $v/3$. В системе центра масс первый шар движется со скоростью $2v/3$, а второй шар движется навстречу первому со скоростью $v/3$. После удара шары будут разлетаться с такими же скоростями. Осталось вернуться в первоначальную систему отсчета. Применяя закон сложения скоростей, находим, что конечная скорость шара массой m равна $v/3$ и направлена назад, а скорость покоившегося раньше шара массой $2m$ равна $2v/3$ и направлена вперед.

Отметим, что в системе центра масс очевидным является утверждение, что при ударе относительная скорость шаров не меняется по величине, но меняется по направлению. А так как разность скоростей при переходе в другую инерциальную систему отсчета не изменяется, можно считать, что мы вывели это важное соотношение и для первоначальной системы отсчета:

$$v_1 - v_2 = u_2 - u_1,$$

где буква v используется для обозначения начальных скоростей, а u — для конечных. Это уравнение можно решать совместно с законом сохранения импульса вместо закона сохранения энергии (куда скорости входят во второй степени).

Задача 7. *Известно, что при упругом нецентральном ударе двух одинаковых шаров, один из которых до удара покоился, угол разлета равен 90°. Докажите это утверждение.*

В системе центра масс нецентральный удар можно описать следующим образом. До удара шары сближаются с одинаковыми импульсами, после удара они разлетаются с такими же по величине, но противоположно направленными импульсами, а прямая разлета поворачивается на некоторый угол относительно прямой сближения. Чтобы перейти обратно в начальную систему отсчета, надо каждую конечную скорость сложить (векторно!) со скоростью центра масс. В случае одинаковых шаров скорость центра масс равна $v/2$, где v — скорость налетающего шара, и в системе отсчета центра масс шары сближаются и разлетаются с одинаковыми скоростями $v/2$. В том, что после сложения каждой конечной скорости со скоростью центра масс получаются взаимно перпендикулярные векторы, можно убедиться из рисунка 9. А можно и просто проверить, что скалярное произведение векторов $\left(\vec{u}+\vec{v}_ц\right)$ и $\left(-\vec{u}+\vec{v}_ц\right)$ обращается в ноль

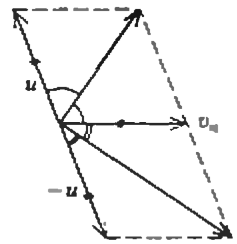


Рис. 9

в силу того, что модули векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}_ц$ равны друг другу.

Упражнения

1. Стержень массой m и длиной l шарнирно закреплен за один из концов. Стержень отклонили на некоторый угол от вертикального положения и отпустили. В момент прохождения вертикального положения скорость нижней точки равна v. Найдите натяжение в средней точке стержня в этот момент времени.

2. Стержень массой m и длиной l вращают в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω вокруг одного из его концов. Найдите зависимость натяжения стержня от расстояния x до оси вращения, если на другом конце закреплен маленький грузик массой M.

3. Найдите период колебаний для системы, описанной в задаче 5 статьи, но для брусков различных масс m_1 и m_2.

4. Выведите известные общие формулы для упругого центрального удара двух шаров, используя переход в систему отсчета центра масс.

5. Шар массой m_1 налетает на покоящийся шар меньшей массы m_2. Найдите максимально возможный угол отклонения налетающего шара при упругом нецентральном ударе.

ИНФОРМАЦИЯ

ЗИФМШ объявляет прием

Заочная инженерная физико-математическая школа (ЗИФМШ) объявляет прием учащихся в 9, 10 и 11 классы на 1996/97 учебный год. Главная цель школы — помочь учащимся глубже изучить математику и физику, развить инженерный склад мышления и лучше подготовиться к поступлению в группы по подготовке инженеров-исследователей высших учебных заведений, прежде всего Петербургского государственного университета путей сообщения (ПГУПС).

Прием в ЗИФМШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Задание для каждого класса состоит из шести задач. После номера каждой задачи в скобках указано, для какого класса она предназначена. (Например, 4(9, 10 кл.) означает, что задача 4 входит в конкурсное задание для 9 и 10 классов.)

Решение вступительного задания необходимо прислать по адресу: *190031 Санкт-Петербург, Московский проспект, д. 9, ПГУПС, ЗИФМШ, на конкурс.*

В письмо вложите два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 9 × 12 см и заполненной по прилагаемому образцу.

1. Фамилия, имя, отчество	*Сидоров Иван Петрович*
2. Класс, (номер класса указывается на 1 сентября 1996 г.)	*десятый*
3. Подробный домашний адрес (с указанием индекса и телефона)	*524806 г. Тверь, ул. Садовая, д.55, кв.77*
4. Номер и адрес школы	*школа № 5, г. Тверь, ул. Зеленая, д. 7*

Зачисленным в ЗИФМШ в течение года высылаются учебные пособия и контрольные задания. Решенные задания оцениваются и рецензируются. Успешно закончившие ЗИФМШ получают удостоверение и имеют преимущество при поступлении в ПГУПС, который готовит инженеров-электриков, инженеров-строителей, специалистов по электронно-вычислительной технике, программному обеспечению вычислительной техники, экономистов, специалистов по бухгалтерскому учету, а также инженеров-исследователей для проектирования и строительства высокоскоростных железнодорожных магистралей (со скоростью движения до 500 км/ч).

Обучение в школе бесплатное.

Вступительное задание

1(9 кл.). Два пассажира, имея секундомеры, решили определить скорость поезда: один по стуку колес на стыках рельсов (известно, что длина рельса

10 м), а другой по числу телеграфных столбов, мелькавших в окне, зная, что расстояние между столбами равно 50 м. Первый пассажир при первом стуке колес пустил в ход секундомер и на 156-м стуке его остановил. Оказалось, что прошло 3 мин. Второй пассажир пустил в ход свой секундомер при появлении в окне первого столба и остановил секундомер при появлении 32-го столба. Его опыт тоже длился 3 мин. Первый пассажир рассчитал, что скорость поезда равна 31,2 км/ч, второй — 32 км/ч. Кто из них ошибся и почему? Какова скорость поезда в действительности?

2(9 кл.). Разложите на множители многочлен

$$x^5 + x + 1.$$

3(9, 10 кл.). Как определить знаки полюсов автомобильной аккумуляторной батареи, пользуясь переносной лампой из шоферского набора, куском проволоки и компасом?

4(9, 10 кл.). Выработка продукции за первый год работы предприятия возросла на p%, а за следующий год по сравнению с первоначальной она возросла на 10% больше, чем за первый год. Определите, на сколько процентов увеличилась выработка за первый год, если известно, что за два года она увеличилась в общей сложности на 48,59%.

5(9, 10, 11 кл.). Вода из водяной рубашки охлаждения двигателя выходит нагретой до 85 °С, затем поступает в радиатор, где охлаждается до 80° С, и вновь следует в водяную рубашку. Какое количество теплоты уносится водой от двигателя ежесекундно, если производительность насоса, перекачивающего воду, составляет 0,0001 м^3/с?

6(9, 10, 11 кл.). При каких значениях параметра a два корня квадратного уравнения $4x^2 - 2x + a = 0$ принадлежат промежутку $(-1; 1)$?

7(10, 11 кл.). Два велосипедиста выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми 54 км, и через 2 ч встречаются. Не останавливаясь, они продолжают движение с той же скоростью, и второй прибывает в A на 54 мин раньше, чем первый в B. Определите скорости велосипедистов.

8(10, 11 кл.). Встречаются две команды шашистов A и B. По условиям соревнований каждый участник одной команды играет по одной партии с каждым участником другой команды. Общее число предстоящих партий в 4 раза больше числа всех игроков в обеих командах. Однако из-за болезни два игрока не смогли явиться на матч, в связи с чем число всех сыгранных партий оказалось на 17 меньше предполагавшегося. Сколько игроков выступило в матче за команду A, если известно, что в ней было меньше игроков, чем в команде B?

9(11 кл.). Аккумулятор, разряженный до 12 В, подключен для зарядки к сети с напряжением 15 В. Какое дополнительное сопротивление нужно включить в цепь, чтобы сила зарядного тока не превышала 1 А? Внутреннее сопротивление аккумулятора 0,01 Ом.

10(11 кл.). Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2.$$

Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Малый механико-математический факультет (МММФ) — математическая школа при механико-математическом факультете МГУ — объявляет прием учащихся, оканчивающих восьмые классы одиннадцатилетних общеобразовательных школ, на заочное отделение. Зачисление на МММФ производится по результатам решения задач вступительной работы, опубликованных ниже.

Основные задачи МММФ — приобщение к математике, углубление знаний в рамках школьной программы, расширение математического кругозора учащихся средних школ, а также знакомство с механико-математическим факультетом МГУ.

Зачисление на заочное отделение МММФ происходит в октябре. Занятия начинаются в ноябре. Обучение платное. Срок обучения — три года. Учащиеся, особо успешно выполнившие все задания, получают удостоверение об окончании МММФ.

Преподавателями на заочном отделении МММФ работают аспиранты и сотрудники механико-математического факультета МГУ.

Желающие поступить на МММФ должны *не позднее 1 октября 1996 года* выслать в наш адрес решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все задачи). Возможно обучение коллективных учеников, а также поступление на МММФ учащихся, заканчивающих 9(10) класс, на основании заявления с приложением итоговых оценок за 8(9) класс.

Вступительную работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. На обложку тетради наклейте лист бумаги со следующими данными:

1) Республика, край, область.

2) Фамилия, имя учащегося (для коллективных учеников — Ф.И.О. руководителя и полный список учащихся).

3) Школа, класс.

4) Полный домашний адрес с указанием индекса почтового отделения.

5) Фамилия, имя, отчество родителей, место их работы и должность.

В работу вложите листок бумаги размером 10 × 12 см, на котором напишите полный домашний адрес и индекс. Наш адрес: *119899 Москва, Воробьевы Горы, МГУ, Малый мехмат.*

Для школьников 6 – 11 классов Москвы и ближнего Подмосковья работает вечернее отделение МММФ. Справки по телефону 939-39-43.

Вступительная работа

1. Докажите, что число $16^{10} + 2^{30}$ делится на 25.

2. В треугольнике ABC медиана AM является одновременно и биссектрисой. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

3. Сколько существует троек натуральных чисел, для которых сумма обратных им чисел равна 1?

4. Докажите, что если $(a + b + c)(a - b + c) < 0$, то $b^2 > 4ac$.

5. От каких четырехугольников можно отрезать два треугольника, чтобы остался параллелограмм?

6. В примере $(aa)^2 = abba$ одинаковые цифры зашифрованы одинаковыми буквами. Расшифруйте пример.

7. Яйцо варится 7 минут. Каким образом, используя песочные часы на 3 мин и 5 мин, можно сварить яйцо за наименьшее время?

8. Зачеркните 16 цифр в 23-значном числе 123...141516 так, чтобы получилось наибольшее 7-значное число.

9. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 1996 и дающее остаток 1 при делении на 1997.

10. Из чисел x и y хотя бы одно иррационально. Докажите, что хотя бы одно из чисел $x^2 - y$, $y^2 - x$, $x + y$ иррационально.

Варианты вступительных экзаменов 1995 года

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет, март[1]*)*

1. Найдите первый член геометрической прогрессии, если известно, что ее третий член равен (-10), а его квадрат в сумме с седьмым членом дает утроенный пятый член.

2. Решите уравнение $\dfrac{\left|x^3\right|-\left|5x\right|}{\sqrt{2x^2-4x-1}-\left|x\right|+2}=0$.

3. Найдите все значения a, при каждом из которых любое решение системы

$$\begin{cases} x-a^2\log_3 y=1, \\ x+3a\log_3 y=1 \end{cases}$$

удовлетворяет неравенству $y>1-x$.

4. Найдите все значения $x\in[0;\pi]$, при которых выражения $\operatorname{tg}x$ и $\dfrac{1}{\cos 2x}-2\cos 2x$ имеют разные знаки.

5. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты точки D, E и F соответственно. Отрезки AE и DF проходят через центр вписанной в треугольник окружности, а прямые DF и BC параллельны. Найдите длину отрезка BE и периметр треугольника ABC, если $BC=15$, $BD=6$, $CF=4$.

6. В пирамиде $SABC$ двугранные углы при ребрах AB, BC и AC равны 90°, 30° и 90° соответственно. Плоскость пересекает ребра SB, SC, AC и AB в точках K, L, M и N соответственно, причем четырехугольник $KLMN$ — трапеция, основание KL которой втрое меньше основания MN. Найдите площадь этой трапеции, если ее высота равна 13 и $AS=BC=13$.

Вариант 2

(механико-математический факультет, май)

1. Решите неравенство $\dfrac{4x+15-4x^2}{\sqrt{4x+15}+2x}\ge 0$.

2. Сколько корней имеет уравнение

$$\log_2\left(40-5x^2+x^2\cdot 2^x\right)=x+3?$$

3. Найдите все числа k, для которых функция

$$y(x)=k\left(2\sin x+\cos^2 x+1\right)$$

не принимает значений, больших 3.

4. На боковой стороне AB трапеции $ABCD$ взята такая точка M, что $AM:BM=2:3$. На противоположной стороне CD взята такая точка N, что отрезок MN делит трапецию на части, одна из которых по площади втрое больше другой. Найдите отношение $CN:DN$, если $BC:AD=1:2$.

5. Высота пирамиды равна 5, а основанием служит треугольник со сторонами 7, 8 и 9. Некоторая сфера касается плоскостей всех боковых граней пирамиды в точках, лежащих на сторонах основания. Найдите радиус сферы.

6. Пусть x_1 — наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sqrt3\sin x-3\cos x=2a-1,$$

а x_2 — наименьший положительный корень уравнения

$$2\cos^2 x-2\sin^2 x=a.$$

Найдите все значения a, при каждом из которых

$$\left|x_1\right|\le x_2.$$

Вариант 3

(механико-математический факультет)

1. Найдите наибольшее целое число k, удовлетворяющее неравенству

$$4\cdot 3^{2k+1}+3^k<1.$$

2. Решите неравенство $\dfrac{2}{\dfrac{2}{\log_2 x}-1}>-3$.

3. Решите уравнение $\sqrt{\sin 3x}\cdot\operatorname{tg}\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.

4. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, P — точка пересечения его диагоналей, $AB=CD=5$, $AD>BC$. Высота, опущенная из точки B на сторону AD, равна 3, а площадь треугольника ADP равна $\dfrac{25}{2}$. Найдите длины сторон AD, BC и радиус окружности.

5. Три параллельные прямые касаются в точках A, B и C сферы радиусом 4 с центром в точке O. Найдите угол BAC, если известно, что площадь треугольника OBC равна 4, а площадь треугольника ABC больше 16.

6. Найдите все значения параметра α из отрезка $[0;2\pi]$, при которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2+2z(x+y+z)-\sin\alpha=0, \\ (x+1)\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+y^2\sqrt{x}+\alpha^2\sqrt{z}+\sin\dfrac{3}{2}\alpha=0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Вариант 4

(факультет вычислительной математики и кибернетики, апрель)

1. В арифметической прогрессии с отличной от нуля разностью сумма членов с нечетными номерами, не превосходящими 26, равна 169. Найдите номер того члена прогрессии, который равен 13.

2. Решите уравнение

$$\left|\log_{3x}\left(x^2-6x+8\right)-1\right|=1-\log_{3x}\left(x^2-6x+8\right).$$

3. Найдите все корни уравнения $9\cdot 3^{\sin x}+2\cdot 3^{-\sin x}=6\sqrt3$, удовлетворяющие неравенствам $-\dfrac{13\pi}{6}<x<-\dfrac{\pi}{6}$.

---

[1] *Для досрочных вступительных экзаменов указан месяц 1995 года, в котором они проходили. Основные экзамены на все факультеты проходили в июле, как обычно.*

4. Для каждого значения параметра a решите неравенство

$$\left|\frac{1}{x}+2a\right|>x.$$

5. На отрезке AB длиной $2R$ как на диаметре построена окружность с центром в точке O. Вторая окружность радиусом r касается первой внутренним образом в точке B. В точке M второй окружности проведена касательная, пересекающая первую в точках N и K. Известно, что касательная пересекает либо радиус AO, либо его продолжение за точку A и $MN : MK = p$. Определите:
1) при каких условиях на r, R и p возможна такая геометрическая конфигурация;
2) длину отрезка MN.

6. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ длина ребра равна 9. Через точки M, N и K, расположенные на ребрах BC, CD и CC' соответственно, проведена плоскость. Известно, что радиус окружности, вписанной в треугольник MCK, равен 1, площадь треугольника MNC равна $\frac{21}{2}$, разность длин отрезков CN и CK равна 3 и объем пирамиды $MNKC$ меньше 15. Найдите радиус сферы, касающейся плоскости треугольника MNK и трех граней куба с общей точкой A'.

Вариант 5

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Найдите все целые числа n и m, для которых

$$2nm+n=14 \text{ и } nm\ge 9.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x+3xy+y=3+10\sqrt{2},\\ x^2+y^2=11.\end{cases}$$

3. В треугольнике ABC медианы AM и CL перпендикулярны, $BC=a$, $AC=b$. Найдите площадь треугольника ABM.

4. Решите неравенство

$$\log_{\cos x}\cos^2 x\ge\log_{\cos x-\frac{1}{2}}\left(\cos^2 x-\cos x-x^2-14x-\frac{51}{4}\right).$$

5. Строительной организации необходимо построить некоторое количество одинаковых домов общей площадью 2500 квадратных метров. Стоимость одного дома площадью a квадратных метров складывается из стоимости материалов $p_1a^{3/2}$ тыс. р., стоимости строительных работ p_2a тыс. р. и стоимости отделочных работ $p_3a^{1/2}$ тыс. р. Числа p_1, p_2, p_3 являются последовательными членами геометрической прогрессии, их сумма равна 21, а их произведение равно 64. Если построить 63 дома, то затраты на материалы будут меньше, чем затраты на строительные и отделочные работы. Сколько следует построить домов, чтобы общие затраты были минимальными?

6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длина ребра равна 1. Точки K и N являются серединами ребер DC и BC соответственно. Точка M лежит на ребре CC_1 и $MC=3/4$. Найдите максимальное значение радиусов сфер, проходящих через точки M, N, K и касающихся плоскости BB_1D_1D.

Вариант 6

(физический факультет, март)

1. Решите уравнение $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1-\cos x$.

2. Решите уравнение $\left(\frac{1}{2}\log_3 x-6\right)\log_9 x=4(2-\log_9 x)$.

3. Решите уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}\cdot 3^{2x+5}=27^{-1}$.

4. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c, а острый угол равен α. Найдите биссектрису прямого угла.

5. Решите неравенство $5^{\log_{\frac{1}{5}}(x^2+2x)}\ge 0{,}2$.

6. В правильной треугольной пирамиде угол при вершине между двумя боковыми ребрами равен β. Найдите двугранный угол при основании пирамиды.

7. Найдите минимальное значение произведения xy, где x и y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases}x+y=3a-1,\\ x^2+y^2=4a^2-2a+2.\end{cases}$$

8. Трапеция $ABCD$ ($BC\parallel AD$) вписана в окружность. Известно, что $BC=a$, $AD=b$, $\angle CAD=\alpha$. Найдите радиус окружности.

Вариант 7

(физический факультет, май)

1. Решите уравнение $2^{x-1}\cdot 3^x=0{,}5\cdot 6^{2-x}$.

2. Решите уравнение $2+6\log_x 2=\log_2(6x+18)$.

3. Решите неравенство $\frac{x}{x-1}\le\frac{x-2}{x}$.

4. В остроугольном треугольнике ABC: $BC=1$, $AC=b$, $\angle ACB=\alpha$. Найдите высоту CD и угол $\angle ABC$.

5. Решите неравенство $|\log_7(x+2)|>1$.

6. В трапеции $ABCD$ ($BC\parallel AD$) диагонали пересекаются в точке M, $BC=b$, $AD=a$. Найдите отношение площади треугольника ABM к площади трапеции $ABCD$.

7. При каких значениях x числа $a_1=\sin x$, $a_2=\frac{1}{2}\sin 2x$, $a_3=\sin 3x$ образуют арифметическую прогрессию, разность которой больше нуля?

8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) проведено сечение плоскостью, проходящей через точки B и C и делящей ребро SA в отношении $m:n$, считая от вершины S. Известно, что объем пирамиды $SABC$ равен V, а расстояние от центра основания ABC до плоскости сечения равно d. Найдите площадь сечения.

Вариант 8

(физический факультет)

1. Решите уравнение $\sin 7x-\sin x=\cos 4x$.

2. Решите уравнение $9^{x+1}+3^{x+2}-18=0$.

3. Решите уравнение $2|x+1|=2-x$.

4. В треугольнике даны два угла α и β и радиус R описанной окружности. Найдите высоту, опущенную из вершины третьего угла треугольника.

5. Решите неравенство $4^{\log_2 x}+x^2<8$.

6. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна H, а двугранный угол при боковом ребре равен α. Найдите объем пирамиды.

7. Для всех значений a решите неравенство $3^{\sqrt{x+1}}>2^{a-1}$.

8. В окружности проведены диаметр MN и хорда AB, параллельная диаметру MN. Касательная к окружности в точке M пересекает прямые NA и NB соответственно в точках P и Q. Известно, что $MP=p$, $MQ=q$. Найдите MN.

Вариант 9

(химический факультет)

1. Решите неравенство $\frac{3x}{x^2+2}\ge 1$.

2. Решите уравнение $\log_2 x + \log_2(x+1) = 1$.

3. Решите уравнение $\cos 2x = 2(\cos x + \sin x)$.

4. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если ее средняя линия равна 5.

5. Найдите множество пар действительных чисел (x, y), удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 2^{-x}y^4 - 2y^2 + 2^x \le 0, \\ 8^x - y^4 + 2^x - 1 = 0. \end{cases}$$

Вариант 10

(факультеты биологический и фундаментальной медицины)

1. Решите уравнение $4(\log_4 x)^2 = \log_2 \dfrac{x^5}{16}$.

2. Решите уравнение $|x-1| + |2x-3| = 2$.

3. Найдите все корни уравнения $\sin 2x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, удовлетворяющие условию $0 \le x \le \dfrac{3\pi}{2}$.

4. Саша и Сережа дважды обменивались марками, причем каждый раз 1/7 количества марок, имевшихся (на момент обмена) у Саши, обменивалась на половину количества марок, имевшихся у Сережи. Сколько марок было у Саши и сколько у Сережи до первого обмена, если после первого обмена у Саши стало 945 марок, а после второго обмена у Сережи — 220?

5. Вершины B, C, D четырехугольника $ABCD$ расположены на окружности с центром O, которая пересекает сторону AB в точке F, а сторону AD — в точке E. Известно, что угол BAD прямой, $EF = FB$ и $BC = CD = ED$. Найдите угол ABO.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(x^2 - 6|x| - a\right)^2 + 12\left(x^2 - 6|x| - a\right) + 37 = \cos\frac{18\pi}{a}$$

имеет ровно два корня.

Вариант 11

(факультет почвоведения)

1. Первый член арифметической прогрессии в два раза больше первого члена геометрической прогрессии и в пять раз больше второго члена геометрической прогрессии. Четвертый член арифметической прогрессии составляет 50% от второго члена арифметической прогрессии. Найдите первый член арифметической прогрессии, если известно, что второй ее член больше третьего члена геометрической прогрессии на 36.

2. Решите уравнение $5^{2x} = 115 \cdot 5^{x-1} + 50$.

3. Решите неравенство $4x + 7 \le 2/x$.

4. Две окружности, отношение радиусов которых равно $9 - 4\sqrt{3}$, касаются друг друга внутренним образом. Проведены две хорды большей окружности, равные по длине и касающиеся меньшей окружности. Одна из этих хорд перпендикулярна отрезку, соединяющему центры окружностей, а другая нет. Найдите угол между этими хордами.

5. Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 4y = 4b + 3 - x^2 + 2x, \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$$

имеет два действительных решения.

Вариант 12

(геологический факультет)

1. Решите уравнение $\sqrt{4x-8} + x = 5$.

2. Решите неравенство $x^2 - 8 \ge 2|x|$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} y^2 \cdot \sqrt{y-x} = 0, \\ 3x^2 = 14 - x + 3xy. \end{cases}$

4. Решите неравенство $\dfrac{6^x - 5}{x^2 - 5x + 4} \le 0$.

5. Решите уравнение

$$\left(2\cos\left(\pi x - \frac{3\pi}{2}\right) + 3\operatorname{ctg}(\pi x + 3\pi)\right)\log_3\left(4 - x^2\right) = 0.$$

6. Имеется два сосуда с растворами соли, причем во втором сосуде раствора на 2 литра больше, чем в первом сосуде. Процентное содержание соли в растворе в первом сосуде — 20%, во втором — 50%. При сливании растворов из обоих сосудов вместе получился раствор, процентное содержание соли в котором равно 40%. Определите количество раствора, которое было во втором сосуде.

7. Около треугольника ABC описана окружность. Продолжение биссектрисы AD треугольника ABC пересекает эту окружность в точке E, причем AE — диаметр данной окружности. Найдите отношение длин отрезков EC и AB, если косинус угла ABC равен $1/3$.

8. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$16^x < 30 \cdot 4^x - a$$

не имеет ни одного целочисленного решения.

Вариант 13

(географический факультет)

1. Решите уравнение $2\cos(\pi(x-1)) = \sqrt{3}$.

2. Теплоход затратил 5 часов на путь вниз по течению реки от пункта A до пункта B. На обратный путь против течения он затратил 8 часов 20 минут. Найдите скорость теплохода, если путь от A до B равен 100 км.

3. Решите уравнение $\sqrt{2 - x^2} = |x| - 1$.

4. Вокруг четырехугольника $ABCD$ с взаимно перпендикулярными диагоналями AC и BD описана окружность радиусом 2. Найдите длину стороны CD, если $AB = 3$.

5. Сколько корней на отрезке $[-\pi; \pi]$ имеет уравнение

$$x^2 + a = 3b\cos x,$$

где число b есть наименьшее возможное значение суммы квадратов корней квадратного трехчлена

$$x^2 - x\sqrt{5 - 3c^2} + \frac{3}{2} - c^2?$$

Вариант 14

(экономический факультет)

1. Решите неравенство $2x - 5 < 2\sqrt{x^2 - x - 6}$.

2. Решите уравнение $2|\sin x| + \log_{\operatorname{tg} x}\left(-\dfrac{|\cos x|}{\sin x}\right) = 0$.

3. В трапеции $KLMN$ известны боковые стороны $KL = 36$, $MN = 34$, верхнее основание $LM = 10$ и $\cos(\angle KLM) = -1/3$. Найдите диагональ LN.

4. В банк помещен вклад в размере 3900 тыс. р. под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хране-

ния после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял ко вкладу?

5. Найдите все $x \in [-3;1]$, для которых неравенство

$$x \cdot \left(\pi(x+1) - 4\operatorname{arctg}\left(3m^2 + 12m + 11\right)\right) > 0$$

выполняется при любых целых m.

6. Найдите наименьшее значение выражения $a^2 + (b-1)^2$ на множестве таких чисел a и b, для которых уравнение

$$\left||x-4|-2\right| - ax + 4a - b = 0$$

имеет ровно три различных корня. При каких a и b достигается это наименьшее значение?

Вариант 15

(факультет психологии)

1. Решите уравнение $|2x-15| = 22 - |2x+7|$.

2. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{(x-5)(x+5)}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1} \ge 0$.

3. Решите уравнение $\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2+\cos x} = 0$.

4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BL и AE углов ABC и BAC соответственно, которые пересекаются в точке O. Известно, что $AB = BL$, периметр треугольника равен 28, $BO = 2 \cdot OL$. Найдите AB.

5. Найдите все значения периметра a, при которых неравенство

$$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \le -\frac{x^2+9}{a+\cos x} - a$$

имеет единственное решение.

Вариант 16

(институт стран Азии и Африки)

1. Найдите x, если известно, что числа

$$-1,\ x+2,\ \sin(\arcsin x),$$

взятые в указанном порядке, образуют геометрическую прогрессию.

2. Решите уравнение

$$\log_2\left(x^2-4x+3\right) - \log_2(x-1)\cdot\log_2(x-3) = 1.$$

3. На счет, который вкладчик имел в начале первого квартала, начисляется в конце этого квартала r_1 процентов, а на тот счет, который вкладчик имел в начале второго квартала, начисляется в конце этого квартала r_2 процентов, причем $r_1 + r_2 = 150$. Вкладчик положил на счет в начале первого квартала некоторую сумму и снял в конце того же квартала половину этой суммы. При каком значении r_1 счет вкладчика в конце второго квартала окажется максимально возможным?

4. Сторона AB треугольника ABC равна 3, $BC = 2 \cdot AC$, E – точка пересечения продолжения биссектрисы CD данного треугольника с описанной около него окружностью, $DE = 1$. Найдите AC.

5. Решите неравенство

$$\sqrt{4x-x^2-3}\left(\sqrt{2}\cdot\cos x - \sqrt{1+\cos 2x}\right) \ge 0.$$

6. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$x^2 + 4x + 6a\cdot|x+2| + 9a^2 \le 0$$

имеет не более одного решения.

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Движущийся поступательно по гладкой горизонтальной плоскости кубик массой M абсолютно неупруго ударяется гранью о грань другого кубика тех же размеров, но массой m, лежавшего на той же плоскости. Кубик массой m прикреплен к вертикальной стене легкой пружиной жесткостью k так, что ось пружины совпадает с прямой, проходящей через центры масс кубиков. Найдите первоначальную скорость кубика массой M, если максимальное сжатие пружины равно ΔL.

2. На гладкой горизонтальной плоскости лежат две одинаковые шайбы, скрепленные невесомой пружиной, ось которой совпадает с прямой, проходящей через центры масс шайб. Удерживая первую шайбу, вторую немного смещают вдоль оси пружины и отпускают. При этом максимальная скорость второй шайбы в возникшем колебательном процессе равна v. Какую максимальную скорость будет иметь вторая шайба, если в момент, когда ее скорость равна нулю, отпустить первую шайбу?

3. Один конец жесткой невесомой штанги длиной L шарнирно закреплен в точке O, а к ее другому концу прикреплена пружина жесткостью k (рис.1). На расстоянии b от точки O на штанге закреплен небольшой по размерам груз массой m. В положении равновесия штанга горизонтальна, а ось пружины вертикальна. Найдите период малых колебаний груза в вертикальной плоскости.

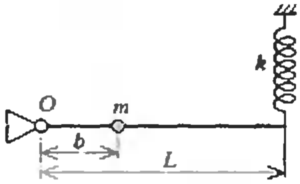


Рис. 1

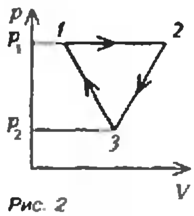


Рис. 2

4. Давление идеального одноатомного газа меняют от величины p_1 до величины p_2 в соответствии с pV-диаграммой, имеющей вид треугольника, показанного на рисунке 2. Найдите КПД цикла, если температура газа в состоянии *3* больше его температуры в состоянии *1*.

5. Сосуд, содержащий воздух при температуре T_1, закрывают и начинают медленно охлаждать. При температуре T_2 на стенках сосуда появляется роса. Найдите относительную влажность атмосферного воздуха, если давления насыщенных паров при температурах T_1 и T_2 равны $p_{н1}$ и $p_{н2}$ соответственно.

6. К источнику с ЭДС $\mathcal{E}$ подключен плоский конденсатор емкостью C. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы увеличить расстояние между обкладками в 2 раза?

7. Напряжение между точками A и B в схеме, показанной на рисунке 3, равно U = 10 В. Если к этим точкам подключить амперметр с малым внутренним сопротивлением, то он покажет ток I = 0,1 А. Найдите напряжение между этими точками при подключении к ним резистора сопротивлением R_1 = 100 Ом.

8. Тонкий проводящий стержень длиной L и массой m подвесили в однородном магнитном поле с индукцией B горизонтально за концы на одинаковых легких пружинах жесткостью k каждая. Линии магнитной индукции направлены горизонтально и перпендикулярно оси стержня. Затем через стержень пропустили прямоугольный им-

пульс тока с амплитудой I столь малой длительности τ, что за время его действия стержень не успел заметно сместиться от положения равновесия. Найдите амплитуду возникших колебаний стержня, пренебрегая влиянием воздуха.

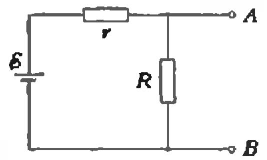


Рис. 3

9. Параллельный пучок света с длиной волны λ нормально падает на основание бипризмы с малыми преломляющими углами α (рис.4). Показатель преломления стекла призмы равен n. За призмой параллельно ее основанию расположен экран, на котором видна интерференционная картина. Найдите ширину интерференционных полос.

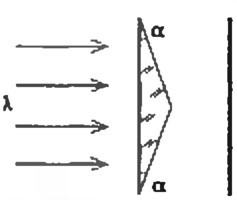


Рис. 4

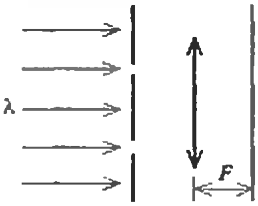


Рис. 5

10. На экран с двумя узкими щелями, находящимися на расстоянии d друг от друга (рис.5), нормально падает параллельный пучок света с длиной волны λ, причем $\lambda \ll d$. За экраном со щелями находится собирающая линза, а за ней в ее фокальной плоскости — сплошной экран, на котором видны светлые и темные полосы. Плоскости обоих экранов параллельны, фокусное расстояние линзы равно F. Найдите расстояние между соседними светлыми полосами.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. На гладком горизонтальном столе находится подвижный клин массой $M = 1$ кг с углом $\alpha = 30°$ при основании (рис.6). На клин кладут брусок массой $m = 2$ кг, после чего оба тела начинают движение из состояния покоя. Найдите угол, который будет составлять с горизонтом скорость бруска до тех пор, пока он не покинет поверхности клина. Трение не учитывать.

2. На гладком столе помещен брусок массой $M = 1$ кг, на котором лежит коробок массой $m = 50$ г (рис.7). Брусок прикреплен к одному из концов невесомой пружины, другой конец которой заделан в неподвижную стенку. Брусок отводят от положения равновесия перпендикулярно стенке на расстояние Δl и отпускают без начальной скорости. При каком значении Δl коробок начнет скользить по бруску? Коэффициент трения коробка о брусок $\mu = 0{,}2$, жесткость пружины $k = 500$ Н/м. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Трением бруска о стол пренебречь.

3. Под каким углом к горизонту нужно бросить камень, чтобы в верхней точке траектории кинетическая энергия камня была в $n = 3$ раза больше его потенциальной энергии? Сопротивление воздуха не учитывать.

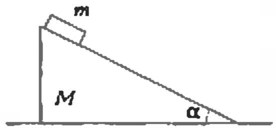


Рис. 6

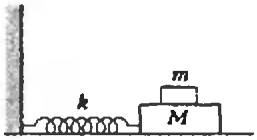


Рис. 7

4. В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде под поршнем находится идеальный газ. Сосуд помещают в лифт. Когда лифт неподвижен, расстояние между поршнем и дном сосуда $h = 12$ см. При движении лифта с постоянным ускорением расстояние между поршнем и дном цилиндра составляет $x = 10$ см. Найдите ускорение лифта. Температуру считать постоянной, атмосферное давление не учитывать. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

5. С одним молем идеального одноатомного газа проводят цикл, показанный на рисунке 8. На участке $1-2$ объем газа увеличивается в $m = 2$ раза. Процесс $2-3$ — адиабатическое расширение, процесс $3-1$ — изотермическое сжатие при температуре $T_0 = 300$ К. Найдите работу, совершаемую газом на участке $2-3$. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).

6. В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде под поршнем весом $P = 20$ Н содержится идеальный одноатомный газ (рис.9). Между поршнем и неподвижной опорой располагается пружина, жесткость которой $k = 200$ Н/м. Расстояние между поршнем и дном сосуда $H = 30$ см, при этом пружина не деформирована. Какое количество теплоты нужно сообщить газу, чтобы поршень переместился на расстояние $\Delta h = 10$ см? Атмосферное давление не учитывать.

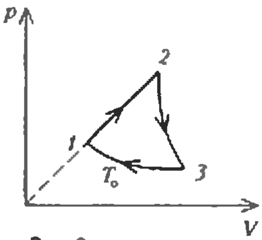


Рис. 8

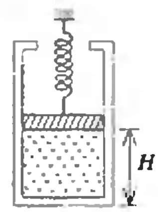


Рис. 9

7. Нагревательные элементы, сопротивления которых отличаются в α раз, соединены, как показано на рисунке 10. Найдите α, если известно, что при замыкании ключа общая мощность, выделяющаяся в цепи, увеличивается в $k = 2$ раза. Изменением сопротивлений элементов при нагревании пренебречь.

8. Вдоль наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол $\alpha = 30°$, проложены рельсы, по которым может скользить проводящий стержень массой $m = 1$ кг. Какой минимальной величины ток нужно пропустить по стержню, чтобы он оставался в покое, если вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией, равной $B = 0{,}2$ Тл и направленной вертикально? Коэффициент трения стержня о рельсы $\mu = 0{,}2$, расстояние между рельсами $l = 0{,}5$ м.

9. На собирающую линзу с фокусным расстоянием $F_1 = 40$ см падает пучок параллельных лучей света радиусом $R = 2$ см. За этой линзой расположена рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F_2 = 15$ см, причем глав-

ные оптические оси линз и ось симметрии пучка совпадают. Чему равен радиус пучка, вышедшего из второй линзы, если известно, что лучи в нем параллельны?

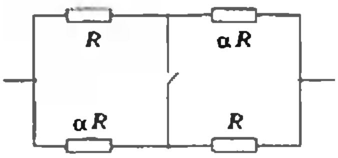


Рис. 10

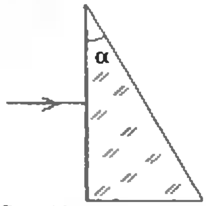


Рис. 11

10. Луч света падает нормально на переднюю грань призмы, как показано на рисунке 11. Преломляющий угол призмы $\alpha = 30°$. Каким должен быть показатель преломления материала призмы, для того чтобы угол отклонения луча призмой был равен α?

Публикацию подготовили В.Алексеев, В.Воронин, В.Галкин, В.Говоров, И.Иновенков, Г.Медведев, В.Панферов, М.Потапов, И.Сергеев, Д.Сычугов, В.Ушаков, А.Часовских, С.Чесноков

Новосибирский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты механико-математический и экономический)

1. Решите уравнение

$$\log_{2x+1}\left(5+8x-4x^2\right)+\log_{5-2x}\left(4x^2+4x+1\right)=4.$$

2. Решите уравнение $2\cos 3x+\cos\left(\frac{9\pi}{2}-x\right)=\sqrt{3}\cos x$.

3. Найдите все значения параметра t, при которых интервал $(7t,\ 3t-4)$ содержит хотя бы одно целое число.

4. В пирамиде $ABCD$ ребра AC, BC, DC попарно перпендикулярны и $AC = BC = DC = 4$. Точка N — середина ребра AB, а точка M расположена на ребре AD так, что $AM : MD = 3$. Шар с центром на прямой CN касается ребра AD в точке M. Найдите радиус шара.

Вариант 2

(факультеты геолого-геофизический, естественных наук, экономический (социология))

1. Решите уравнение $\sqrt[3]{10-x}-\sqrt[3]{3-x}=1$.

2. В резервуар, содержащий 100 кг водного раствора соли, в котором соль составляет 15%, по одной трубе со скоростью 20 кг/мин поступает раствор, содержащий 5% соли, а по другой трубе со скоростью 10 кг/мин поступает раствор, содержащий 15% соли. Через какое время в резервуаре окажется раствор, содержащий 10% соли?

3. Решите уравнение $\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg}x=\cos x-\sin x$.

4. В остроугольном равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC высоты AH и BK пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABC, если $AO = 3$, $OH = 1$.

Вариант 3

(физический факультет)

1. Решите неравенство $\log_{1+x}\left(\sqrt{x+4}+2\right)\le 1$.

2. Найдите координаты точки, симметричной вершине параболы $y = x^2 + 2x + 2$ относительно касательной к этой параболе, которая параллельна прямой $2y - 2x = 1$.

3. Решите уравнение $2\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x=2$.

4. В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 1. Точка M лежит на ребре AB, причем $BM = 1/4\,AB$. Точка N лежит на луче CD, причем $CN = 3CD$. Найдите длину бокового ребра пирамиды, если известно, что $MN = 5$.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка по порядку величины) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой необходимо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь надо понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

Вариант 1

1. Вертолет массой M вместе с грузом массой m, висящим на тросе, взлетает вертикально вверх с ускорением a. В процессе взлета трос обрывается. Определите ускорение вертолета сразу после обрыва троса. Ускорение свободного падения равно g.

2. В прямоугольной банке с дном в виде квадрата со стороной a находится газ при температуре T_0 и давлении p_0. Крышка, шарнирно соединенная с боковой стороной банки, герметично прижимается к ней под действием собственного веса mg. До какой температуры надо нагреть газ в банке, чтобы он начал выходить, приоткрыв крышку? Атмосферное давление также равно p_0.

3. На тонкой спице находится бусинка массой m и зарядом Q (рис.1). Найдите минимальный коэффициент трения между бусинкой и спицей, при котором бусинка не сдвинется, если заряд $-q$ передвигать по полуокружности радиусом R из точки A в точку B. Размерами заряженных тел пренебречь.

4. Оцените, во сколько раз масса океана превосходит массу воздушной оболочки Земли.

5. При стрельбе из рогатки вертикально вверх для растягивания резины используется подвешивание одного и того

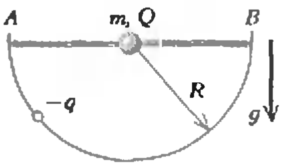


Рис. 1

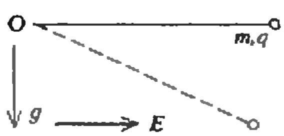


Рис. 2

же груза. Если толщину резины уменьшить вдвое, то высота взлета тела, запускаемого из рогатки, существенно увеличивается. Объясните явление.

Вариант 2

1. После выпуска части газа из баллона давление в нем уменьшилось в α раз, а температура понизилась в β раз. Найдите оставшуюся в баллоне долю массы газа. Газ считайте идеальным.

2. Протон массой m_p налетает со скоростью v_0 по прямой с большого расстояния на покоящееся ядро некоторого химического элемента и упруго рассеивается на нем. Оказалось, что после такого взаимодействия разлетевшиеся частицы имеют равные по величине и противоположные по направлению скорости. Найдите эти скорости и массу ядра. Какому химическому элементу принадлежит это ядро?

3. Маятник, имеющий на конце нити шарик массой m и зарядом q, находится в поле тяжести и однородном электрическом поле, напряженность $\vec{E}$ которого перпендикулярна ускорению свободного падения $\vec{g}$. Маятник отклоняют до горизонтального положения в плоскости векторов $\vec{E}$ и $\vec{g}$ (рис.2) и отпускают. Найдите натяжение нити, когда маятник будет проходить положение равновесия в данных полях.

4. Оцените, во сколько раз освещенность на дне пустого колодца в пасмурный день меньше, чем на поверхности Земли.

5. К одному из концов длинной тонкой нити прикреплен грузик, а другой конец присоединен к жесткой опоре через небольшой отрезок упругой резинки. В свободном состоянии грузик висит на нити в поле тяжести на достаточно большой высоте от пола. Если грузик поднять вертикально вверх на полную длину нити и затем отпустить, то при падении он растягивает резинку (не касаясь пола), но нитка остается целой. Если же конец нити привязать непосредственно к опоре, убрав резинку, то при падении грузика с прежней высоты нить обрывается. Объясните причину различия в результатах.

Вариант 3

1. К источнику ЭДС $\mathcal{E}$ присоединены цепочка сопротивлений и конденсатор емкостью C согласно схеме, представленной на рисунке 3. Найдите энергию, которая выделится на сопротивлении $2R$, присоединенном к точке B, после отключения источника размыканием ключа K.

2. Из баллона через вентиль вытекает газ так, что давление медленно убывает с неизменной скоростью $\Delta p/\Delta t = A$. Температура газа при этом поддерживается постоянной. Объем баллона V, площадь отверстия в вентиле S. Найдите скорость истечения газа в момент времени, когда давление газа приняло значение p.

3. Две пружины с одинаковой жесткостью k закреплены в вершине O угла, образованного горизонтальным полом и вертикальной стенкой (рис.4). Противоположные концы пружин прикреплены к центрам двух малых тел, массой m каждое, соединенных невесомым стержнем. Вначале пружины не деформированы и имеют длину l. С какой горизонтальной силой необходимо удерживать нижнее тело, чтобы расстояние от него до точки O было в два раза меньше, чем у верхнего? Стержень с массами может двигаться только в вертикальной плоскости. Трения нет.

4. Дети стреляют горошинами, выдувая их ртом через трубочку. Оцените максимальное расстояние, на которое могут улететь эти горошины.

5. См. задачу 5 варианта 1.

Публикацию подготовили Г.Меледин, С.Сорокин, Г.Шустов

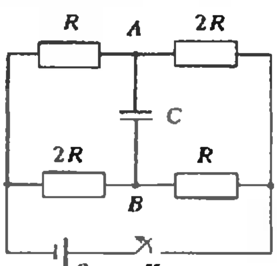


Рис. 3

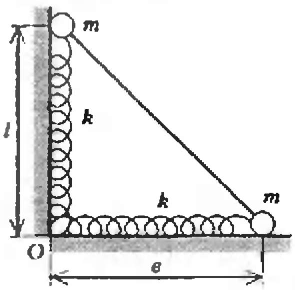


Рис. 4

Московский государственный институт электронной техники (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение $(x^2-3x+2)\sqrt{2x-3}=0$.
2. Решите уравнение $\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$.
3. Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если известно, что $a_2 = 5$ и $a_4 = 9$.
4. Вычислите $\log_{\sqrt{3}} \log_2 8$.
5. Площадь прямоугольного треугольника равна 24, а длина одного из катетов равна 8. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.
6. О положительных числах A, B и C известно, что A больше B на 10%, а B меньше C на 20%. Найдите A, если C=25.
7. Определите знак выражения $\sin 3+\cos 2$.
8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+xy+xz+yz=12, \\ y^2+xy+xz+yz=15, \\ z^2+xy+xz+yz=20. \end{cases}$
9. Решите неравенство $x^{3\lg x} \ge 10x^2$.
10. Из города M в город N выехал велосипедист со скоростью 14 км/ч. Одновременно с ним из поселка K, находящегося между городами M и N, в город N вышел пешеход. Спустя час из города M в том же направлении выехал мотоциклист со скоростью 52 км/ч. Пешеход заметил, что мотоциклист обогнал его на 30 мин раньше, чем велосипедист. Найдите скорость пешехода, если расстояние между городом M и поселком K равно 20 км.
11. Постройте график функции $y=\log_2\left||x|-2\right|$.
12. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции $y=x^3-ax^2+2$ на отрезке $[0;2]$ достигается на правом конце этого отрезка.

Вариант 2

1. Решите неравенство $3/(x-2) \le 4/(x+1)$.
2. Решите уравнение $\sqrt{2}\operatorname{tg} x = 2/\sqrt{6}$.
3. Найдите область определения функции
$$f(x)=1/\log_2(x+3).$$
4. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна a, а острый угол 60°. Найдите гипотенузу.
5. Первую четверть пути поезд двигался со скоростью 80 км/ч, а оставшуюся часть — со скоростью 60 км/ч. С какой средней скоростью двигался поезд?
6. При каких значениях α числа $2\cos\frac{\pi}{6}$, $4\sin\alpha$, $6\sin(\pi-\alpha)$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+2y+3z=6,\\ 2x+3y+z=6,\\ 3x+y+2z=6. \end{cases}$

8. Решите уравнение $3\sqrt{x^2+x-2}+5\log_3^2(x^2-x-5)=0$.

9. За год работы предприятия объем дневной выработки продукции вырос на $p\%$, а за следующий год еще на $(p+50)\%$. Определите, на сколько процентов увеличилась выработка за первый год, если известно, что за два года она возросла в общей сложности втрое.

10. При каких значениях параметра a сумма корней квадратного уравнения $4x^2-4(a-1)x+1=0$ отрицательна?

11. Найдите $f(x)$, если для всех $x\neq 0$ имеет место соотношение

$$(x+1)\cdot(f(x))+2f(1/x)=x+3.$$

12. Постройте график функции

$$y=\left(2/(1-x^2)+(1/(x^2-3x+2))(x-(2x+6))/(x+3)\right)\sqrt{x^2+2x+1}.$$

Вариант 3

1. Вычислите $\sin 2x$, если $\operatorname{tg} x=-1/2$.

2. Решите неравенство $(1/2)^{x-6}\geq 4^x$.

3. Решите неравенство $x\leq 2/(x-1)$.

4. Последовательность $\{a_n\}$ определена формулой $a_n=\cos(\pi n)$. Найдите $a_{1995}-a_{1994}$.

5. Около куба описан шар, площадь поверхности которого равна 12π. Найдите объем куба.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} 1/x+2\sqrt{y}=5,\\ 3/x-\sqrt{y}=1. \end{cases}$

7. Решите уравнение $\left|\cos^2 x/2-2/5\right|=5\cos x+1$.

8. Постройте график функции $y=\sin(-\pi x)-\sin(\pi|x|)$.

9. На сторонах AB, BC треугольника ABC соответственно взяты точки M, N так, что $BM=2/3\,AB$, $BN=3/5\,BC$. Найдите отношение площадей треугольников BMN и ABC.

10. Решите уравнение $\left(x^{1+\lg x}-100x^2\right)\sqrt{\lg x}=0$.

11. Вклад, находящийся в банке в течение года, возрастает на определенный процент, свой для каждого банка. В начале первого года 3/5 некоторой суммы положили в первый банк, а 2/5 — во второй банк. К концу первого года сумма вкладов составила 1140 единиц, а к концу второго года — 1302 единицы. Если бы в начале первого года в первый банк положили 2/5, а во второй банк — 3/5 исходной суммы, то в конце первого года сумма вкладов составила бы 1160 единиц. Какой стала бы в этом случае сумма вкладов к концу второго года?

12. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left(x^2-2\right)^2-3\left|x^2-2\right|+a=0$ имеет ровно 7 вещественных корней. Найдите эти корни.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. На последнем километре пути скорость поезда уменьшилась на $\Delta v_1=10$ м/с. Определите изменение скорости на предпоследнем километре пути. Движение по прямой равнозамедленное.

2. Груз, висящий на легкой пружине жесткостью $k=400$ Н/м, растягивает ее на некоторую величину ΔL. Прикладывая к грузу вертикальную силу, медленно увеличивают удлинение пружины в $n=3$ раза. При этом внешняя сила совершает работу $A=0{,}32$ Дж. Найдите начальное удлинение пружины.

3. При изготовлении льда в холодильнике потребовалось время $\tau_1=300$ с, чтобы охладить воду от $t_1=4$ °С до $t_2=0$ °С, и еще $\tau_2=6\cdot 10^3$ с, чтобы превратить ее в лед. Вычислите по этим данным удельную теплоту плавления льда. Удельная теплоемкость воды $c=4190$ Дж/(кг·К).

4. Два одинаковых шарика, имеющих одинаковые заряды $q=1{,}6\cdot 10^{-6}$ Кл, подвешены на одной высоте на нитях одной и той же длины. Расстояние между точками подвеса $r=0{,}2$ м. Какой по величине и знаку заряд следует поместить на расстоянии $d=0{,}5$ м от каждого из шариков, чтобы нити были параллельны?

5. Вольтметр, подключенный к клеммам источника с ЭДС $\mathcal{E}=12$ В, показывает $U=9$ В. К клеммам источника подключают еще один такой же вольтметр. Определите показания вольтметров.

6. Предмет и его прямое изображение, создаваемое тонкой собирающей линзой, расположены симметрично относительно фокуса линзы. Расстояние от предмета до фокуса линзы $b=4$ см. Постройте ход лучей и вычислите фокусное расстояние линзы.

Вариант 2

1. Определите время равноускоренного движения снаряда в стволе вертикально установленного орудия, если после выстрела снаряд достигает высоты $H=4{,}5\cdot 10^3$ м. Длина ствола $L=3$ м. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с². Сопротивление воздуха пренебречь.

2. Санки массой $m=18{,}3$ кг расположены на горизонтальной плоскости. К санкам приложили силу, составляющую с горизонтом угол $\alpha=30°$. Вычислите минимальную величину этой силы, достаточную для начала движения санок. Коэффициент трения $\mu=0{,}1$. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с².

3. Сосуд с идеальным газом при температуре $t_1=27$ °С снабжен клапаном, открывающимся при перепаде давлений $\Delta p=4\cdot 10^5$ Па. Газ нагревают до $t_2=127$ °С, при этом часть газа выходит из сосуда через клапан. Какое давление установится в сосуде после охлаждения газа до начальной температуры t_1? Атмосферное давление $p_0=10^5$ Па.

4. В серединах сторон равностороннего треугольника расположены одинаковые точечные заряды $q_1=10^{-9}$ Кл. В двух вершинах этого треугольника помещены точечные заряды $q_2=-4\cdot 10^{-9}$ каждый. Длина стороны треугольника $L=2$ м. Вычислите величину вектора напряженности электрического поля в третьей вершине треугольника. Постоянная в законе Кулона $k=9\cdot 10^9$ Н·м²/Кл².

5. Жесткий замкнутый квадратный контур, изготовленный из проволоки площадью поперечного сечения S и удельным сопротивлением ρ, помещен в однородное магнитное поле так, что вектор магнитной индукции B перпендикулярен плоскости контура. Двумя вершинами, расположенными на одной из сторон квадрата, контур подключен к источнику постоянного напряжения величиной U. 1) Найдите величины токов, текущих по каждой стороне квадрата, если длина стороны L. 2) Найдите величину и направление силы, действующей со стороны магнитного поля на контур с током.

6. Предмет расположен на расстоянии $(A+2F)$ от собирающей линзы, а его изображение — на расстоянии $(2F-B)$ от нее. Постройте ход лучей, формирующих изображение, и, опираясь на рисунок, докажите, что фокусное расстояние F линзы связано с величинами A и B формулой $F=AB/(A-B)$.

Публикацию подготовили А.Берестов, С.Куклин, В.Лесин, А.Овчинников, В.Плис, А.Ревякин

V Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

С 9 по 16 октября Варна (Болгария) принимала очередную тест-рейтинговую олимпиаду «Интеллектуальный марафон-95». Организатором и учредителем олимпиады является Московский Интеллект-клуб «Глюон», основная задача которого — поиск, поддержка и социальная защита интеллектуально и творчески одаренных детей.

22 команды школьников участвовали в трех турах олимпиады.

Первый тур олимпиады — устное командное соревнование «История научных идей и открытий» — гуманитарная часть олимпиады. Победа в этом туре досталась дружной команде Классического лицея №1 при Ростовском государственном университете.

Второй тур включал в себя индивидуальные и командные соревнования по математике, а третий тур — аналогичные соревнования по физике.

11 октября ребята с утра писали индивидуальную работу по физике, им предлагалось 7 задач на 4 астрономических часа, а вечером был устный командный математический бой, который выиграла команда ФМЛ №31 из Челябинска.

Следующий день целиком был посвящен культурной программе. Все участники поехали в Несебр, город Сорока Церквей — памятник древней культуры человечества.

В последний день марафона в первой половине дня участники писали письменную работу по математике, а во второй половине дня проходило командное соревнование по физике, в котором победил ФМЛ из Кирова.

Затем был день отдыха и подведения итогов олимпиады. А 15 октября — закрытие олимпиады и награждение всех его участников.

Главный приз олимпиады был вручен Александру Гореву, ученику 11 класса ФМЛ из Кирова, показавшему лучший результат в общем индивидуальном зачете. Второе место занял Михаил Лепчинский, ученик 10 класса ФМЛ №31 из Челябинска. Третье место — за Дмитрием Саньковым, учеником 11 класса из Аничкова Лицея, Санкт-Петербург.

Победителем по физике в индивидуальном зачете стал Александр Горев, а по математике — Михаил Лепчинский.

Командные соревнования в общем зачете выиграла делегация из Аничкова лицея, Санкт-Петербург. Второе место — за ФМЛ из Кирова, а третье — за ФМЛ №31 из Челябинска.

Традиционно на олимпиаде были вручены специальные призы участникам олимпиады. Мисс «Олимпиада-95» стала ученица 11 класса из г. Кириши Ленинградской области Юлия Ахметьева. Приз самому юному участнику олимпиады достался Александру Горбульскому из Аничкова лицея (Санкт-Петербург).

Шестая традиционная олимпиада «Интеллектуальный марафон» состоится в октябре 1996 года. Московский Интеллект-клуб «Глюон» приглашает все школы, лицеи, гимназии, занимающиеся с одаренными детьми, принять в ней участие.

Заявки присылайте не позднее 15 мая 1996 года по адресу: Россия, Москва, 115580, а/я №62, МИК «Глюон».

Факс: (095) 325-49-11.

E-mail: olga@mics.msu.su.

Задачи индивидуальных соревнований

Математика

1. Найдите сумму цифр числа $\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ девяток}}{}^3$.

2. Найдите углы треугольника, подобного треугольнику, образованному основаниями его высот. Рассмотрите все возможные случаи.

3. Числа 1, 2, 3, ... 50 каким-то образом разбили на 10 пятерок и в каждой пятерке взяли среднее по величине число. Каковы а) наибольшая, б) наименьшая суммы этих чисел?

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3, \\ y - \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0. \end{cases}$$

5. Сколько существует квадратных уравнений $x^2 - px - q = 0$ (p и q — натуральные), имеющих положительный корень, который не превышает а) 5, б) любого натурального n?

6. Вершины параллелограмма K, L, M, N площадью 30 лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD, DA четырехугольника $ABCD$ и делят его стороны в одном и том же отношении $1/3$, считая по часовой стрелке. Известно, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Найдите ее радиус, если $AB = 6$.

7. При каких m и n прямоугольный лист клетчатой бумаги из $m \times n$ клеток можно разрезать на фигурки, состоящие из 4 клеток и имеющие форму буквы Г?

Физика

1. Объем пузырька воздуха по мере его всплытия со дна озера на поверхность увеличивается в n раз. Какова глубина озера? Изменением температуры и плотности с глубиной пренебречь.

2. Небольшой шар находится на вершине полусферы радиусом R, лежащей на горизонтальной поверхности. Определите точку, в которой произойдет отрыв шара от полусферы, если движение из верхней точки началось с нулевой начальной скоростью. Коэффициент трения скольжения шара о поверхность полусферы $\mu \gg 1$.

3. Вокруг сферической планеты радиусом R, обладающей разреженной атмосферой, летает спутник массой m по круговой орбите на высоте H от поверхности планеты. Оцените число оборотов, которое совершит спутник до падения на поверхность планеты в результате торможения в атмосфере. Считать, что сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости и не зависит от высоты над поверхностью планеты.

4. Разреженный газ находится в сосуде размером $L \times L \times L$ с квадратным отверстием размером $a \times a$ (длина свободного пробега молекул много меньше размеров сосуда). Оцените, как меняется по времени средняя энергия молекул в сосуде. В начальный момент молекулы с равной вероятностью имеют одинаковые значения энергии из интервала $0 - \varepsilon_{max}$ и распределены по всем направлениям изотропно.

5. Брусок массой m лежит на наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Как (с какой по величине и направлению силой) надо тянуть брусок, чтобы он перемещался параллельно основанию наклонной плоскости с постоянной скоростью? Коэффициент трения скольжения бруска о плоскость μ.

6. В однородно заряженном диэлектрическом шаре радиусом R имеется сферическая полость радиусом $r = R/2$ с центром, удаленным на $R/2$ от центра шара. Полный заряд шара Q. Вдоль прямой, соединяющей центры шара и полости, проделано узкое отверстие, в которое помещен точечный заряд q с массой m. Определите период его малых колебаний вблизи положения равновесия.

7. Электромагнитное излучение может быть рассмотрено как поток частиц (фотонов) массой $m = h\nu/c^2$ и потому взаимодействует с гравитационным полем. Оцените размер фокусного расстояния гравитационной линзы, образованной массивным сферическим телом радиусом R и массой M, для узкого пучка электромагнитного излучения видимого диапазона частот, распространяющегося вдоль прямой, проходящей через центр гравитирующего тела. Проведите численную оценку для $M = 10^{33}$ г, $R = 10$ км. Гравитационная постоянная $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н$\cdot$м^2/кг^2.

В. Альминдеров, А. Егоров, А. Попов

Про угол $\frac{\pi}{7}$ и $\sqrt{7}$

1. а) Можно воспользоваться тождеством $xy + yz + zx = \frac{1}{2}\left((x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)\right)$ и равенством (2) статьи.
в) Воспользуйтесь формулами Виета.
г) Докажите, что $P_3(t)$ нельзя представить в виде произведения многочленов степени больше 0 с рациональными коэффициентами. Выведите отсюда, что для любого многочлена $Q(t)$ степени меньше 3 с рациональными коэффициентами существуют многочлены $f(t)$ и $g(t)$ такие, что $f(t)P_3(t) + g(t)Q(t) = 1$.
3. При $z \neq 1$ обе части тождества равны $\frac{z^n - 1}{z - 1}$. 5. $n^{\sqrt{3}}$.
7. а) Воспользуйтесь теоремой синусов.
б) $BC = BD + DE + EC$.
8. а) Заметив, что $\angle A_2'A_0C = \frac{\pi}{2}$, спроектируйте B на $A_2'A_0$. Пользуясь равенствами $A_0B' = \operatorname{tg}3\eta$, $A_0A_2' = 4\sin\eta$, запишите теорему Пифагора для $A_2'B'B$. б) Найдите A_2B по теореме косинусов из A_2BC.
9. б) Соедините вершины треугольника с центром круга и воспользуйтесь аддитивностью площади.
в) $2(\sin\eta + \sin 2\eta + \sin 4\eta) = \operatorname{tg}3\eta$.
10. а) См. 6. а). Другой способ: решить вначале 10.б).
б) Один способ: преобразовать (6). Другой способ: домножить многочлен 10.а) на «сопряженный». Третий способ: вспомнить, что η является корнем уравнения $\sin 3x = \sin 4x$. Еще один способ: вспомнить о треугольнике задачи 7. (Выпишите для начала соотношение между сторонами треугольника, не обязательно равнобедренного, в котором один угол втрое больше другого.) Наконец, самый мудрый способ: раскрыть скобки в левой части равенства $(\cos x + i\sin x)^7 = \cos 7x + i\sin 7x$ и приравнять $\sin 7x$ к коэффициенту при i слева. Этот коэффициент — многочлен седьмой степени от $t = \sin x$ с одним нулевым корнем. в) Положительный корень а) — единственный; $(-v)$ — не корень. г) Не существует. Многочлен $P_6(t) = 64t^6 - 112t^4 + 56t^2 - 7$ нельзя представить в виде произведения двух многочленов ненулевой степени с целыми коэффициентами. Это следует из известного критерия Эйзенштейна, его формулировка — равно как и доказательство более общего критерия — приведена в решении задачи М1419 («Квант» №4 за 1994 г., с.23). Значит, многочлен не разлагается и в произведение многочленов с рациональными коэффициентами — докажите эту лемму Гаусса. Завершить доказательство можно по схеме 1,г).
11. Постройте многочлен с целыми коэффициентами $P_{10}(t)$ с корнем $\sin\frac{\pi}{11}$. Для этого посмотрите на последнее указание к 10. б): 11 тоже нечетное число, поэтому все получится так же. А теперь преобразуйте равенство задачи к виду $P_{10}(\sin\pi/11) = 0$. Можно ли решить проще?

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

Задачи

(см. «Квант» №1)

1. Пусть коза за месяц съедает x часть стога, корова — y часть и кобыла — z часть. Тогда из вычислений сына следует, что $x + z = 1$, $\frac{3}{4}(x+y) = 1$ и $\frac{1}{3}(y+z) = 1$, или $x + z = 1$, $x + y = 4/3$, $y + z = 3$. Сложив эти уравнения и разделив обе части полученного равенства на 2, получаем, что $x + y + z = 8/3$. Вычитая отсюда последнее уравнение, получим, что $x = -1/3$, т.е. коза съедает в месяц отрицательное количество сена.
2. Радиус равен a. 3. Заметим, что по условию задачи было отправлено четное число писем, а если каждый из 19 студентов получил бы по 3 письма, то было бы получено нечетное число писем. Противоречие. Следовательно, такое не может случиться.
4. Требуемая расстановка точек изображена на рисунке 1. Четыре точки лежат в вершинах квадрата со стороной 1, еще одна — пятая — чуть правее его центра и шестая — чуть ниже центра. 5. Разобьем прямоугольник 10 × 10 на 25 квадратов 2 × 2. Очевидно, что в каждом таком квадрате может быть не более двух чиновников, считающих себя высокооплачиваемыми, поэтому общее число таких чиновников не более 50. На рисунке 2 указаны зарплаты чиновников и их расположение, при котором 50 чиновников могут считать себя высокооплачиваемыми.

Рис. 1

2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
3	1	3	1	3	1	3	1	3	1
4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
5	1	5	1	5	1	5	1	5	1
6	1	6	1	6	1	6	1	6	1
7	1	7	1	7	1	7	1	7	1
8	1	8	1	8	1	8	1	8	1
9	1	9	1	9	1	9	1	9	1
10	1	10	1	10	1	10	1	10	1
11	1	11	1	11	1	11	1	11	1

Рис. 2

Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» №5 за 1995 г.)

1. Для решения этой задачи следует заметить, что для любой пары положительных чисел a и b их среднее арифметическое $\frac{a+b}{2}$ и среднее геометрическое $\sqrt{ab}$ не меньше меньшего из этих чисел a и b. В тройке чисел $2 - \sqrt{2}$, 1, $2\sqrt{2} + 3$ наименьшее число есть $2 - \sqrt{2}$, но оно больше числа $\sqrt{2} - 1$, следовательно, тройку чисел $\sqrt{2} - 1$, 2, $3\sqrt{2} - 1$ нельзя получить указанными операциями из первоначальной тройки чисел.
2. Отразим симметрично треугольники BCM и BKA относительно сторон BM и BK соответственно (рис.3). Так как $BC = BA$, а сумма углов KBA и MBC равна 45°, точки A и C отразятся в одну и ту же точку X. В треугольнике MKX угол $MXK = 45° + 45° = 90°$, поэтому $MX^2 + KX^2 = MK^2$. Осталось заметить, что $MX = MC$, а $KX = KA$.

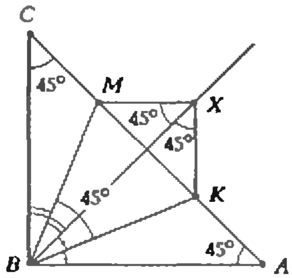


Рис. 3

3. Найти одно из таких чисел нетрудно. Достаточно взять число на единицу меньше произведения всех чисел от 2 до 10, т.е. 10! — 1. Найти наименьшее такое число — дело более кропотливое. Нетрудно показать, что при делении на 2 остаток равен 1, при делении на 3 остаток равен 2, при делении на 4 остаток равен 3, при делении на 8 остаток равен 7, при делении на 6 остаток равен 5, при делении на 10 остаток равен 9, из последнего утверждения следует, что при делении на 5 остаток равен 4. Отсюда следует, что всякое число, удовлетворяющее условию, при делении на 120 дает в остатке 119, т.е. оно имеет вид $120k - 1$, где k — некоторое натуральное число.
Можно получить еще некоторые результаты, связанные с остатками при делении на 9, а можно посмотреть остатки от деления на 9 чисел вида $120k - 1$ при $k = 1, 2, 3$ и т.д. до тех пор, пока этот остаток не станет не меньше 5. Это произойдет

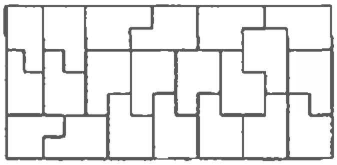


Рис. 4

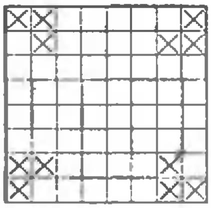


Рис. 5

при $k = 5$, поэтому наименьшее из указанных чисел есть число 599. **4.** Да, можно. Одно из возможных замощений изображено на рисунке 4. **5.** Рассмотрим 12 полей шахматной доски, отмеченные на рисунке 5. Каждый из 11 коней, стоящих на доске, может либо стоять на одном из этих полей, либо бить одно из этих полей, но не может делать то и другое одновременно, а также бить более одного поля. Поэтому среди этих 12 полей найдется поле, на котором нет коня и которое не бьется ни одним из поставленных 11 коней.

Попробуем решить проблему...

1. Будем считать, что x_1 минимально.

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{2m}x_{2m+1} + x_{2m+1}x_1 \le$$
$$\le x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{2m}x_{2m+1} + x_{2m+1}x_2 \le$$
$$\le (x_1 + x_3 + \ldots + x_{2m+1})(x_2 + x_4 + \ldots + x_{2m}) \le 1/4.$$

2. Будем считать, что x_3 максимально.

$$(x_1x_2x_3 + \ldots + x_{3m}x_{3m+1}x_{3m+2}) + x_{3m+1}x_{3m+2}x_1 + x_{3m+2}x_1x_2 \le$$
$$\le (x_1x_2x_3 + \ldots + x_{3m}x_{3m+1}x_{3m+2}) + x_{3m+1}x_{3m+2}x_3 + x_{3m+2}x_1x_3 \le$$
$$\le (x_1 + x_4 + \ldots + x_{3m+1})(x_2 + x_5 + \ldots + x_{3m+2})(x_3 + x_6 + \ldots + x_{3m}) \le 1/27.$$

3. Если $x_1 = 0$, то

$$s_6 = x_1x_2x_3x_4 + \ldots + x_6x_1x_2x_3 =$$
$$= x_2x_3x_4x_5 + x_3x_4x_5x_6 = x_3x_4x_5(x_2 + x_6) \le$$
$$\le \left(\frac{x_3 + x_4 + x_5 + x_2 + x_6}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}.$$

Далее будем считать, что все переменные положительны. Рассмотрим функцию

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_6) = s_6 + \lambda(x_1 + x_2 + \ldots + x_6).$$

Наибольшее значение функции f достигается в точке, где $f'_{x_i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$. Записав соответствующую систему уравнений и обозначив

$$x_1x_2 = a,\ x_1x_4 = b,\ x_1x_6 = c,\ x_2x_3 = d,\ x_2x_5 = e,$$
$$x_3x_4 = f,\ x_3x_6 = g,\ x_4x_5 = h,\ x_5x_6 = k,$$

имеем

$$a + b = g + k,\ a + e = f + g,\ a + f = c + h,\ a + k = d + h,$$
$$b + c = d + e,\ b + f = e + k,\ b + h = d + g,$$
$$c + d = f + k,\ c + g = e + h.$$

Отсюда получаем

$$a = h,\ c = f,\ d = k.$$

Далее находим, что

$$x_1 = x_3 = x_5,\ x_2 = x_4 = x_6.$$

Тогда

$$s_6 = x_1x_2x_3x_4 + \ldots + x_6x_1x_2x_3 = 6x_1^2x_2^2 \le 6\cdot\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^4 = 6\cdot\frac{1}{6^4} = \frac{1}{216}.$$

4. $x_1x_2x_3x_4 + \ldots + x_{4m}x_1x_2x_3 \le (x_1 + x_5 + \ldots + x_{4m-3})(x_2 + x_6 + \ldots + x_{4m-2}) \times$

$$\times (x_3 + x_7 + \ldots + x_{4m-1})(x_4 + x_8 + \ldots + x_{4m}) \le$$
$$\le \left(\frac{x_1 + x_5 + \ldots + x_4 + x_8 + \ldots + x_{4m}}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}.$$

5. Будем считать, что x_1 — наименьшее из чисел. Разберем два случая.

1) $x_2 \le x_{4m+2}$. Тогда

$$x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + x_{4m+2}x_1x_2x_3 + (x_3x_4x_5x_6 + \ldots + x_{4m+1}x_{4m+2}x_1x_2) \le$$
$$\le x_{4m+1}x_{4m+2}x_3x_4 + x_{4m+1}x_3x_4x_5 + x_{4m+2}x_{4m+1}x_2x_3 +$$
$$+ (x_3x_4x_5x_6 + \ldots + x_{4m+1}x_{4m+2}x_1x_2) \le$$
$$\le (x_1 + x_3 + x_7 + \ldots + x_{4m-1})(x_2 + x_4 + x_8 + \ldots + x_{4m}) \times$$
$$\times (x_5 + x_9 + \ldots + x_{4m+1})(x_6 + x_{10} + \ldots + x_{4m+2}) \le 1/256.$$

2) $x_2 > x_{4m+2}$. Тогда

$$(x_1x_2x_3x_4 + \ldots + x_{4m-2}x_{4m-1}x_{4m}x_{4m+1}) +$$
$$+ x_{4m-1}x_{4m}x_{4m+1}x_{4m+2} + x_{4m}x_{4m+1}x_{4m+2}x_1 +$$
$$+ x_{4m+1}x_{4m+2}x_1x_2 + x_{4m+2}x_1x_2x_3 \le (x_1x_2x_3x_4 + \ldots + x_{4m-2}x_{4m-1}x_{4m}x_{4m+1}) +$$
$$+ x_{4m-1}x_{4m}x_{4m+1}x_2 + x_{4m}x_{4m+1}x_2x_3 + x_{4m+1}x_{4m+2}x_3x_2 + x_{4m+2}x_1x_2x_3 \le$$
$$\le (x_1 + x_5 + \ldots + x_{4m+1})(x_2 + x_6 + \ldots + x_{4m-2}) \times$$
$$\times (x_3 + x_7 + \ldots + x_{4m-1})(x_4 + x_8 + \ldots + x_{4m} + x_{4m+2}) \le 1/256.$$

6. а) $n = km$, $k \ge 5$, $m \ge 2$. Тогда

$$x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_k + \ldots + x_{km}x_1\cdot\ldots\cdot x_{k-1} \le$$
$$\le (x_1 + x_{k+1} + \ldots + x_{(m-1)k+1})(x_2 + x_{k+2} + \ldots + x_{(m-1)k+2}) \times \ldots$$
$$\ldots \times (x_k + x_{2k} + \ldots + x_{mk}) \le \frac{1}{k^k}.$$

Равенство достигается при

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_k = \frac{1}{k},\ x_{k+1} = \ldots = x_{km} = 0.$$

б) $n = km + 1$, $k \ge 5$, $m \ge 2$.

Будем считать, что x_1 — минимальное из чисел.

$$(x_1\cdot\ldots\cdot x_k + \ldots + x_{(m-1)k+2}\cdot\ldots\cdot x_{mk+1}) +$$
$$+ x_{(m-1)k+3}\cdot\ldots\cdot x_{mk+1}x_1 + x_{(m-1)k+4}\cdot\ldots\cdot x_{mk+1}x_1x_2 +$$
$$+ \sum_{p=5}^{k+1} x_{(m-1)k+p}\cdot\ldots\cdot x_{mk+1}x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_{p-2} \le (x_1\cdot\ldots\cdot x_k + \ldots + x_{(m-1)k+2}\cdot\ldots\cdot x_{mk+1}) +$$
$$+ x_{(m-1)k+3}\cdot\ldots\cdot x_{mk+1}x_2 + x_{(m-1)k+4}\cdot\ldots\cdot x_{mk+1}x_3x_2 +$$
$$+ \sum_{p=5}^{k+1} x_{(m-1)k+p}\cdot\ldots\cdot x_{mk+1}x_{p-1}x_2\cdot\ldots\cdot x_{p-2} \le$$
$$\le (x_1 + x_{k+1} + \ldots + x_{mk+1})(x_2 + x_{k+2} + \ldots + x_{(m-1)k+2}) \times \ldots$$
$$\ldots \times (x_k + x_{2k} + \ldots + x_{mk}) \le \frac{1}{k^k}.$$

Задачи на центр масс

1. $F_н = \frac{m}{2}\left(g + \frac{3}{4}\frac{v^2}{l}\right)$. 2. $F_н = \omega^2 l\left(M + m\frac{l^2 - x^2}{2l^2}\right)$.

3. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1m_2}{k(m_1 + m_2)}}$. 5. $\alpha_m = \arcsin\frac{m_2}{m_1}$.

V Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

МАТЕМАТИКА

1. 18π. **2.** $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{7}; \frac{2\pi}{7}; \frac{4\pi}{7}\right)$. *Указание*. Рассмотрите отдельно случаи остроугольного и тупоугольного треугольников. **3.** а) 345; б) 165. *Указание*. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$ — средние числа в пятерках, упорядоченные по возрастанию. Тогда

$3k \le a_k \le 18 + 3k$ при $k = 1, 2, \ldots, 10$. Докажите, что существуют разбиения, при которых достигаются как верхняя, так и нижняя оценки.

4. $(2;1)$, $(1;-1)$. *Первое решение.* Умножьте первое уравнение на y, а второе на x и сложите полученные уравнения.
Второе решение (для тех, кто знаком с комплексными числами). Умножив второе уравнение на i и сложив с первым, придем после преобразований к уравнению относительно $z = x + iy$: $z^2 - 3z + 3 - i = 0$, корни которого $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 1 - i$.

5. а) 80; б) $n(n-1)^2$. *Указание.* Уравнение $x^2 - px - q = 0$ имеет положительный корень, не больший n тогда и только тогда, когда $n^2 - pn - q \ge 0$. Осталось подсчитать количество точек с натуральными координатами $(p; q)$ в треугольнике $p \ge 1$, $q \ge 1$, $pn + q \le n^2$. Это удобно сделать, дополнив треугольник до прямоугольника.

6. 5. *Указание.* Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

7. $m \times n$ делится на 8.

ФИЗИКА

1. $h = (n-1)p_0/(\rho g)$, где p_0 — атмосферное давление, ρ — плотность воды. 2. $h = 10/17\,R$.

3. $n = \dfrac{m}{4\pi\beta}\dfrac{H}{R(R+H)} \approx \dfrac{m}{4\pi\beta}\dfrac{H}{R^2}$, где β — коэффициент пропорциональности в силе сопротивления.

4. $\varepsilon(t) = 12\varepsilon_{\max}/\gamma^4$ при $\gamma \gg 1$, $\varepsilon(t) = \dfrac{\varepsilon_{\max}}{2}\left(1 - \dfrac{4}{5}\gamma\right)$ при $\gamma \ll 1$, где $\gamma = \dfrac{a^2 t}{6L^3}\sqrt{\dfrac{2\varepsilon_{\max}}{m}}$ (m — масса молекулы).

5. Сила равна $F = mg\sqrt{\mu^2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}$ и с направлением движения бруска составляет угол $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\mu}\operatorname{tg}\alpha$.

6. $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, $\omega^2 = \omega_0^2\left(1 + \dfrac{1}{2(1+2\alpha_0/R)^3}\right)$, где $\omega_0^2 = \dfrac{8}{7}\dfrac{Q}{mR^3}$, $\alpha_0 = 0{,}2$ — корень уравнения $(1+2\alpha)^3 \cdot 2\alpha = 1$.

7. $F = \dfrac{R^2c^2}{2GM} \approx 100$ км.

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. -2. 2. $-\sqrt{5}$. *Указание.* Из условия сразу следует, что $|x|(x^2-5) = 0$, откуда либо $x = 0$, либо $x = \pm\sqrt{5}$. Однако $x = 0$ не входит в область определения функции $\sqrt{2x^2 - 4x - 1}$, а при $x = \sqrt{5}$ обращается в 0 знаменатель.

3. $a \ne -3$. *Указание.* Система эквивалентна такой: $(a^2 + 3a)\log_3 y = 0$; $x = a^2\log_3 y + 1$. При $a^2 + 3a \ne 0$ единственное ее решение $y = 1$, $x = 1$ удовлетворяет условию. При $a = 0$ системе удовлетворяют только пары $(1;y)$, где $y > 0$, т.е. условие $y > 1 - x$ выполнено. При $a = -3$ система $x = 9\log_3 y + 1$, $y > 0$ имеет, например, решение $y = 1/3$, $x = -8$, не удовлетворяющее неравенству.

4. $\dfrac{\pi n}{4} < x < \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{4}n$, $n = 0, 1, 2, 3$. *Указание.* Условие задачи приводит к неравенству $\operatorname{tg}x\left(\dfrac{1}{\cos 2x} - 2\cos 2x\right) < 0$, равносильному неравенству $8\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x > 0$, что, в свою очередь, дает неравенство $\sin 8x > 0$.

5. $BE = 9$; $P = 45$. *Указание.* Пусть O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC (рис.6). Треугольники BDO и CFO — равнобедренные, так что $DO = 6$, $OF = 4$. Из подобия треугольников ADO и ABE, AFO и ACE следует, что $\dfrac{BE}{EC} = \dfrac{OD}{OF} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$, откуда $BE = \dfrac{3}{5}BC = 9$. Далее, $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{2}{3}$, откуда $AB = 3BD = 18$, аналогично $AC = 3FC = 12$.

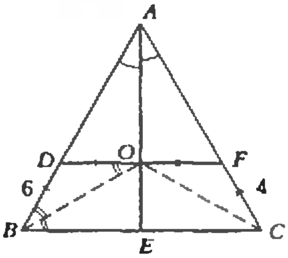


Рис. 6

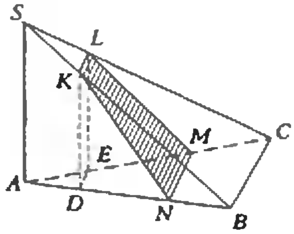


Рис. 7

6. 52. Спроектируем пирамиду $SABC$ (рис.7) на плоскость, перпендикулярную ребру BC. Получим треугольник $S'A'B'$, в котором $\angle B' = 30°$, $S'A' = SA = 13$, $\angle A' = 90°$, поскольку $SA \perp BC$.

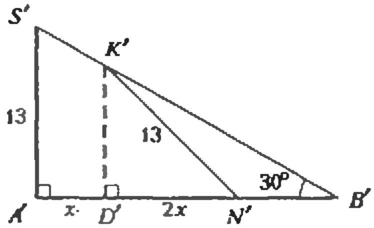


Рис. 8

Трапеция $KLMN$ спроектируется в отрезок $K'N'$ (рис.8), равный ее высоте, поскольку

$$KL \parallel MN \Rightarrow KL \parallel ABC \Rightarrow KL \parallel BC \Rightarrow MN \parallel BC.$$

Наконец, отрезок DE, служащий проекцией отрезка KL на плоскость ABC, проектируется в точку D'. Обозначив $A'D' = x$, в силу подобия треугольников ADE и ANM имеем

$$\frac{A'N'}{A'D'} = \frac{AN}{AD} = \frac{MN}{DE} = 3 \Rightarrow D'N' = 2x$$

и из прямоугольных треугольников $S'A'B'$, $K'D'B'$ и $K'D'N'$ получаем

$$A'B' = S'A'\operatorname{ctg}\angle B' = 13\sqrt{3},$$

$$K'D' = D'B'\cdot\operatorname{tg}\angle B' = \left(13\sqrt{3} - x\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 13 - \frac{x\sqrt{3}}{3},$$

$$\left(K'N'\right)^2 = \left(K'D'\right)^2 + \left(D'N'\right)^2 \Rightarrow 13^2 = \left(13 - \frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (2x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{13}{3}x^2 = 2\cdot 13\frac{x\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 2\sqrt{3}.$$

Таким образом,

$$MN = BC\cdot\frac{A'N'}{A'B'} = 13\cdot\frac{3\cdot 2\sqrt{3}}{13\sqrt{3}} = 6,$$

$$KL = DE = \frac{1}{3}MN = 2,$$

$$S_{KLMN} = \frac{1}{2}(6+2)\cdot 13 = 52.$$

Вариант 2

1. $[-15/4; -3/2) \cup (-3/2; 5/2]$.

2. 3 корня: $x_1 = \log_2 5$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{8}$. *Указание.* Решив уравнение, необходимо доказать, что $\log_2 5 \ne \sqrt{8}$.

3. $k \in [-3;1]$. *Указание.* Пусть $f(x) = 2\sin x + \cos^2 x + 1 = 3 - (\sin x - 1)^2$. Ясно, что $-1 \le f(x) \le 3$ и нам надлежит найти такие k, что неравенство $kf(x) \le 3$ выполняется при всех x. При $k \ge 0$ это значит, что $k \le 1$, а при $k < 0$ равносильно тому, что $-k \le 3$, т.е. $k \ge -3$.

4. 3/29. Конфигурация задачи изображена на рисунке 9. Пусть $S_{ABCD} = s$. Сравнивая площади треугольников AMD и ABD, BMC и ABC, ABD и BCD, имеющих равные высоты, но

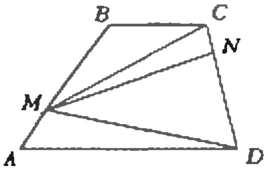


Рис. 9

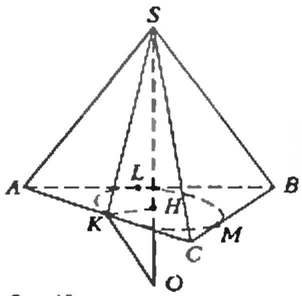


Рис. 10

разные основания, имеем

$$S_{AMD}=\frac{2}{5}\cdot S_{ABD}=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}S_{ABCD}=\frac{4}{15}s,$$

$$S_{BMC}=\frac{3}{5}S_{ABC}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}S_{ABCD}=\frac{3}{15}s.$$

Учитывая неравенство $\frac{4}{15}s>\frac{1}{4}s$, получаем единственно возможный случай

$$S_{AMND}=\frac{3}{4}s,\ S_{BMNC}=\frac{1}{4}s.$$

Интересующее нас отношение равно

$$\frac{CN}{DN}=\frac{S_{MCN}}{S_{MDN}}=\frac{S_{BMNC}-S_{BMC}}{S_{AMND}-S_{AMD}}=\frac{\frac{1}{4}s-\frac{3}{15}s}{\frac{3}{4}s-\frac{4}{15}s}=\frac{3}{29}.$$

5. $\sqrt{6}$. Сечение сферы плоскостью основания – окружность, вписанная в треугольник ABC, радиус которой $r=s/p=\sqrt{5}$ (p – полупериметр треугольника ABC).

Центр O сферы, равноудаленной от точек касания K, L, M окружности со сторонами треугольника, проектируется в центр H этой окружности (рис.10). Вершина S пирамиды, также равноудаленная от точек K, L, M (SK, SL, SM – касательные к сфере, проведенные из одной точки), проектируется в ту же точку H. Поэтому в прямоугольном треугольнике SKO с прямым углом SKO и высотой KH имеем

$$SH=5,\ KH=\sqrt{5}\Rightarrow OH=\frac{KH^2}{SH}=1$$

и, следовательно, $KO^2=KH^2+OH^2=5+1=6$.

6. $\left[\frac{1}{2}-\sqrt{3};-1\right]\cup\{2\}$. *Указание.* Функция $x_1(a)$, значение которой равно наибольшему отрицательному корню уравнения

$$\sqrt{3}\sin x-3\cos x=2a-1\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2a-1}{2\sqrt{3}},$$

определена при

$$-1\le\frac{2a-1}{2\sqrt{3}}\le1\Leftrightarrow\frac{1}{2}-\sqrt{3}\le a\le\frac{1}{2}+\sqrt{3}$$

и имеет промежутки возрастания и убывания, изображенные схематически на рисунке 11 в нижней полуплоскости.

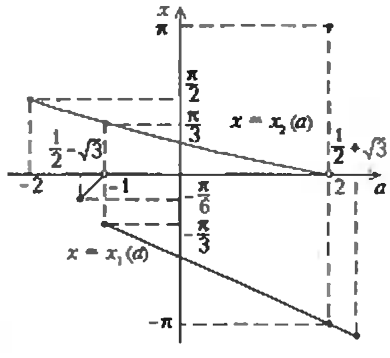


Рис. 11

Функция $x_2(a)$, значение которой равно x_2 – наименьшему положительному корню уравнения

$$2\cos^2x-2\sin^2x=a\Leftrightarrow\cos2x=\frac{a}{2},$$

– определена при $-2\le a\le2$; ее график схематически изображен на рисунке 11 в верхней полуплоскости. Сравнивая схемы для $x_1(a)$ и $x_2(a)$, получаем

$$|x_1(a)|\le x_2(a)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}-\sqrt{3}\le a\le1,\\ a=2.\end{array}\right.$$

Вариант 3

1. $k=-2$. 2. $(0;1)\cup(1;4)\cup(64;+\infty)$.

3. $\frac{\pi}{12}+2\pi k$; $\frac{19\pi}{12}+2\pi l$, πm, $\frac{2\pi}{3}+\pi n$, $k,l,m,n\in\mathbf{Z}$.

Указание. Найдите сначала решения уравнения, принадлежащие промежутку $[0;2\pi]$.

4. $AD=10$, $BC=2$, $R=5\sqrt{5}/2$. *Указание.* Сначала докажите, что $ABCD$ – равнобочная трапеция. Затем из теоремы Пифагора найдите расстояния AE и FD от вершин до оснований высот трапеции, опущенных из вершин B и C (рис.12), после чего из подобия треугольников APD и BPC найдите BC и AD. Для отыскания радиуса R окружности воспользуйтесь формулой $R=abc/4s$.

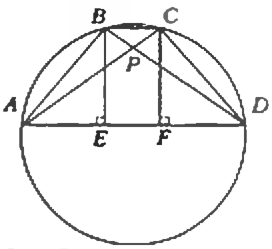


Рис. 12

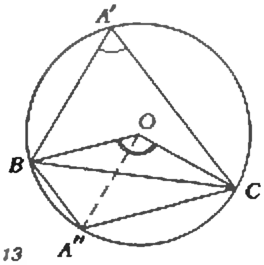


Рис. 13

5. $\frac{5\pi}{12}$. Рассмотрим сечение сферы плоскостью, проходящей через центр O перпендикулярно данным прямым. Радиусы OA, OB, OC, перпендикулярные этим прямым, а с ними и точки A, B, C лежат в этой плоскости (рис.13). Из равенства

$$S_{BOC}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot4\cdot\sin\angle BOC=4$$

имеем $\sin\angle BOC=\frac{1}{2}$. Заметим, что вариант $\angle BOC=\frac{\pi}{6}$ невозможен, так как иначе $\angle BAC=\frac{\pi}{12}$ или $\angle BAC=\frac{11\pi}{12}$, откуда

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC<\frac{1}{2}\cdot8\cdot8\cdot\frac{1}{2}=16.$$

Поэтому $\angle BOC=\frac{5\pi}{6}$ и $\angle BAC=\frac{5\pi}{12}$ ($A\equiv A'$) или $\angle BAC=\frac{7\pi}{12}$ ($A\equiv A''$). Однако последнее равенство невозможно, поскольку иначе

$$S_{ABC}<\frac{1}{2}BC\cdot OA<\frac{1}{2}\cdot8\cdot4=16.$$

Итак, для величины угла $\angle BAC$ остается единственное значение: $\frac{5\pi}{12}$.

6. 0; π; 2π. В силу неравенств $x\ge0$, $x\sin^2\frac{\alpha}{2}\ge0$, $y^2\sqrt{x}\ge0$, $\alpha^2\sqrt{z}\ge0$ и $0\le\sin\frac{\alpha}{2}\le1$ при $0\le\alpha\le2\pi$ левая часть второго неравенства оценивается следующим образом:

$$x\sin^2\frac{\alpha}{2}+y^2\sqrt{x}+\alpha^2\sqrt{z}+\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{3}{2}\alpha\ge$$

$$\ge\sin^2\frac{\alpha}{2}+3\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^3\frac{\alpha}{2}=-4\left(\sin\frac{\alpha}{2}-1\right)\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}\right)\sin\frac{\alpha}{2}\ge0.$$

Следовательно, второе равенство возможно лишь если $\sin\frac{\alpha}{2}=1$ или $\sin\frac{\alpha}{2}=0$, т.е. $\alpha\in\{0;\pi;2\pi\}$, причем для этих значений α оба уравнения системы выполняются, например, при $x=y=z=0$.

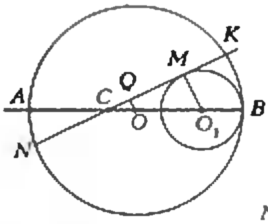


Рис. 14

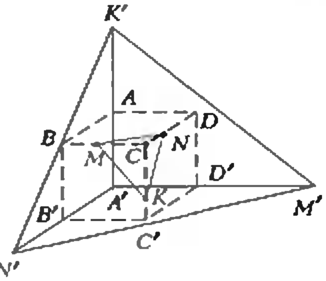


Рис. 15

Вариант 4

1. $n = 13$. 2. $(0;1/3)\cup[1;2)\cup(4;8]$. 3. $x_1 = -\pi - \arcsin\log_3\left(\frac{\sqrt{3}-1}{3}\right)$; $x_2 = -2\pi - \arcsin\log_3\left(\frac{\sqrt{3}+1}{3}\right)$.

4. $(-\infty;0)\cup\left(0;a+\sqrt{a^2+1}\right)\cup\left(-a-\sqrt{a^2-1};-a+\sqrt{a^2-1}\right)$ при $a<-1$; $(-\infty;0)\cup\left(0;a+\sqrt{a^2+1}\right)$ при $a \ge -1$.

Указание. Все $x < 0$ являются, очевидно, решениями данного неравенства. При $x > 0$ неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2ax - 1 < 0, \\ x^2 + 2ax + 1 < 0. \end{array}\right.$$

Второе из неравенств совокупности не имеет положительных решений при $a \ge -1$, а первое имеет решения $0 < x < a + \sqrt{a^2+1}$.

При $a < -1$ положительные решения первого неравенства образуют промежуток $0 < x < a + \sqrt{a^2+1}$, а решения второго — промежуток $-a - \sqrt{a^2-1} < x < -a + \sqrt{a^2-1}$. Осталось убедиться в том, что

$$-a-\sqrt{a^2-1} > a+\sqrt{a^2+1} \text{ при } a<-1.$$

5. $\frac{p^2+1}{2p} < \frac{R}{r} \le \frac{(p+1)^2}{2p}$, $MN = \sqrt{4Rrp - r^2(p+1)^2}$.

Указание. Пусть O_1 — центр второй окружности, C — точка пересечения MK с прямой OO_1, пусть также $CO = \alpha R$ (рис.14). Для того чтобы точка C лежала на луче $[OA)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$CO_1 = \alpha R + R - r.$$

Пусть Q — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на NK, $MK = x$, $\frac{QO}{r} = y$, $\frac{x}{r} = z$, $\frac{R}{r} = k$. Тогда

$$\begin{cases} y = \dfrac{\alpha k}{(\alpha+1)k-1}, \\ \dfrac{(p+1)^2 z^2}{4} = k^2 - y^2, \\ \dfrac{(p-1)^2 z^2}{4} = (1-k)^2 - (1-y)^2. \end{cases}$$

Из второго и третьего уравнения получаем $k + y = \frac{(p+1)^2}{2p}$, а с учетом первого уравнения получаем равенство

$$k + \frac{\alpha k}{(\alpha+1)k-1} = \frac{(p+1)^2}{2p}. \qquad (\bullet)$$

При $k > 1$ функция от α, стоящая в левой части равенства $(\bullet)$, монотонно возрастает (при $\alpha = 0$ она постоянна). Подставляя $\alpha = 0$ в $(\bullet)$, получаем

$$k = \frac{R}{r} \le \frac{(p+1)^2}{2p},$$

а так как $\frac{\alpha k}{(\alpha+1)k-1} < 1$, получаем $1 + k > \frac{(p+1)^2}{2p}$, т.е. $k = \frac{R}{r} > \frac{p^2+1}{2p}$.

Осталось вычислить MN, пользуясь вторым уравнением системы.

6. $465/98$. *Указание.* Пусть K', M', N' — точки пересечения плоскости MNK с прямыми AA', $A'D'$, $A'B'$ (рис.15). Сфера, о которой говорится в условии, вписана в пирамиду $K'M'N'A'$. Для отыскания ее радиуса воспользуемся формулой $V = \frac{1}{3}rS$, где V — объем треугольной пирамиды, r — радиус вписанной в нее сферы, S — площадь поверхности пирамиды. Мы должны найти отрезки $A'K'$, $A'M'$ и $A'N'$.

Сначала найдем отрезки $CM = x$, $CN = y$, $CK = z$. Из условия получаем систему

$$\begin{cases} xz = x + z + \sqrt{x^2 + yz}, \\ xy = 21, \\ y - z = 3, \end{cases}$$

решив которую, найдем два решения: $x = 3$, $y = 7$, $z = 4$ и $x = 14/5$, $y = 15/2$, $z = 9/2$. Поскольку объем пирамиды $CMNK$ меньше 15, условию удовлетворяет только первое решение. Дальше можно действовать так: пользуясь подобными треугольников, найти, что $A'K' = 155/7$, $A'M' = 465/28$, $A'N' = 155/4$. К этому результату можно прийти и так: ввести систему координат $Oxyz$, приняв за начало точку A', за ось Ox — прямую $A'N'$, за ось Oy — прямую $A'M'$, а за ось Oz — прямую $A'K'$. Затем записать уравнение плоскости, проходящей через точки $M(9;6;9)$, $N(2;9;9)$, $K(9;9;5)$: $12(x-2)+28(y-9)+21(z-9)=0$ и найти координаты точки пересечения этой плоскости с осями координат. После этого без труда вычисляется объем пирамиды $M'N'K'A$. Для вычисления площади треугольника $K'M'N'$ удобнее всего воспользоваться «теоремой Пифагора» для тетраэдра с прямым трехгранным углом: $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$, где S — площадь его непрямоугольной грани, а S_1, S_2, S_3 — площади граней, имеющих прямой угол.

Вариант 5

1. $m = -1$; $n = -14$. 2. $(3;\sqrt{2})$; $(\sqrt{2};3)$. *Указание.* Выполните замену $u = x + y$, $v = xy$.

3. $\frac{1}{4}\sqrt{(4b^2-a^2)(a^2-b^2)}$. *Указание.* Пусть K — точка пересечения медиан, $CK = x$, $AK = y$, тогда $x^2 + y^2 = b^2$, $x^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{a^2}{4}$, а $S_{AMB} = S_{ACB} = \frac{3}{4}xy$.

4. $-13 \le x < -11\pi/3$, $x \ne -4\pi$; $-7\pi/3 < x < -\frac{5\pi}{3}$, $x \ne -2\pi$; $-\frac{\pi}{3} < x \le -1$. *Указание.* Исходное неравенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} < \cos x < 1, \\ x^2 + 14x + 13 \le 0. \end{cases}$$

5. 156 домов. *Указание.* Стоимость n домов равна

$$S(n) = 50^2\left(p_1\frac{50}{\sqrt{n}} + p_2 + p_3\frac{\sqrt{n}}{50}\right).$$

При этом имеются 2 возможности: $p_1 = 1$, $p_2 = 4$, $p_3 = 16$ и $p_1 = 16$, $p_2 = 4$, $p_3 = 1$, из которых только первая удовлетворяет всем условиям задачи.

Итак, $S(n) = 50^2\left(\frac{50}{\sqrt{n}} + \frac{16\sqrt{n}}{50} + 4\right)$.

Функция $S(n)$ убывает при $n < 156\frac{1}{4}$ и возрастает при $n > 156\frac{1}{4}$. Следовательно, для натуральных n получаем, что $S(n)$ минимально либо при $n = 156$, либо при $n = 157$. Непосредственно проверяем, что $S(156) < S(157)$.

6. $(36+31\sqrt{2})/16$. *Указание.* Сфера, радиус которой нужно найти, проходит через описанную окружность треугольника MNK (рис.16), центр сферы лежит в плоскости AA_1C_1C и, кроме того, она касается плоскости B_1BDD_1 в точке Q, лежащей на прямой WV. Радиус сферы равен радиусу окружности, проходящей через точки M, L (L — точка пересечения прямой

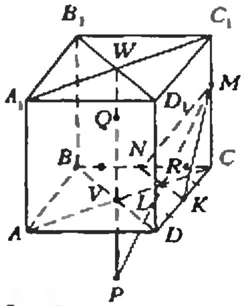


Рис. 16

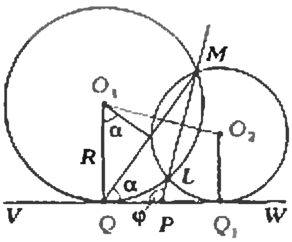


Рис. 17

MR со сферой, так что ML — диаметр окружности, описанной около треугольника MNK) и касающейся прямой VW в некоторой точке Q. Сразу заметим, что существуют две такие окружности — они касаются прямой VW в точках Q и Q_1 таких, что $QP = Q_1P = \sqrt{ml}$, где $PL = l$, $PM = m$. Пусть r — радиус любой из этих окружностей, $\angle QPM = \varphi$, $\angle MQ_1P = \alpha$ (рис.17). Тогда $QM = 2r\sin\alpha$, $QM^2 = m^2 + ml - 2m\sqrt{ml}\cos\varphi$ (теорема косинусов в треугольнике QMP) и, наконец, $QM/\sin\varphi = PM/\sin\alpha$, откуда

$$r = QM/2\sin\alpha,\ \text{т.е. } r = \frac{QM^2}{2PM\sin\varphi} = \frac{m+l-2\sqrt{ml}\cos\varphi}{2\sin\varphi}.$$

Все числа, входящие в выражение для r, легко вычисляются. Наибольший радиус соответствует при этом тупому углу φ.

Вариант 6

1. $2\pi k$, $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. 2. 9^4; 9^{-4}. 3. -2; 4. 4. $\dfrac{c\sin2\alpha}{2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}$.

5. $[-3;-2)\cup(0;1]$. 6. $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)$. 7. $-\frac{9}{10}$. *Указание.* Прежде всего, из тождества $2xy = (x+y)^2 - (x^2+y^2)$ находим, что

$$xy = \frac{1}{2}(5a^2-4a-1).$$

Квадратный трехчлен в скобках минимален при $a = \frac{2}{5}$. При этом $xy = -\frac{9}{10}$, а система имеет решение.

8. $\dfrac{\sqrt{(b-a)^2+(b+a)^2\operatorname{tg}^2\alpha}}{4\sin\alpha}$. *Указание.* По теореме синусов $CD = 2R\sin\alpha$. С другой стороны, CD можно вычислить, пользуясь тем, что трапеция $ABCD$ равнобокая: для этого находим высоту CE (E лежит на AD), а затем применяем теорему Пифагора к треугольнику CED.

Вариант 7

1. 1. 2. 3. 3. $x<0$; $\frac{2}{3}\le x<1$. 4. $CD = \dfrac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}$,

$\angle ABC = \arcsin\dfrac{b\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}$.

5. $-2<x<-\frac{13}{7}$, $x>5$. 6. $\dfrac{ab}{(a+b)^2}$. 7. $-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. 8. $\dfrac{n}{m+n}\cdot\dfrac{V}{d}$.

Вариант 8

1. $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $(-1)^n\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}n$, $n\in\mathbf{Z}$. 2. 0. 3. -4; 0.

4. $2R\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{2R\sin(\alpha+\beta)}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$. 5. $(0;2)$. 6. $\frac{2}{3}H^3\left(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)$.

7. $x\ge-1$ при $a<1$; $x>((a-1)\log_a 2)^2-1$ при $a\ge1$. 8. $\sqrt{pq}$.

Вариант 9

1. $[1;2]$. 2. 1. 3. $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. 4. 25. *Указание.* Если $ABCD$ — равнобокая трапеция, у которой AD — большее основание, а диагонали BD и CE перпендикулярны, то треугольники BHD (H — основание высоты, опущенной из вершины B на AD) и CDK (K — основание перпендикуляра, опущенного из вершины D на прямую BC) равны, а четырехугольник $BHDK$ — квадрат, сторона которого равна средней линии трапеции.

5. $(0;1)$; $(0;-1)$. *Указание.* Система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases}\left(y^2-2^x\right)^2\le0,\\ 8^x-y^4+2^x-1=0,\end{cases}$$

откуда

$$y^2=2^x,\ \text{а}\ (2^x-1)(2^{2x}+1)=0.$$

Вариант 10

1. 2; 16. 2. 2/3; 2. 3. $\pi/6$; $\pi/2$; $5\pi/6$; $3\pi/2$.
4. 1085 и 30.
5. $3\pi/7$. *Указание.* Пусть угловые меры дуг BC и FE равны β и α соответственно. Угол BAD равен полуразности дуг BCD и FE. Это значит, что $\frac{\alpha}{2} = \frac{2\beta-\alpha}{2}$. С другой стороны, $2\alpha+3\beta = 2\pi$. Решая полученную систему, находим, что $\alpha = \pi/7$, а интересующий нас угол равен $\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right) = \frac{3\pi}{7}$.
6. $a=-3$ и $a=9$. *Указание.* Уравнение эквивалентно такому:

$$\left(x^2-6|x|-a+6\right)^2+1=\cos\frac{18\pi}{a}.$$

Но это значит, что $x^2-6|x|-a+6=0$, а $\cos\frac{18\pi}{a}=1$. Уравнение $x^2-6|x|+6=a$ имеет в точности 2 корня при $a=-3$ или при $a>6$. Из второго уравнения следует, что $a=\frac{9}{n}$, где $n\in\mathbf{Z}$, после чего мы без труда получаем ответ.

Вариант 11

1. 50. 2. 2. 3. $(-\infty;-2]\cup(0;1/4]$. 4. $\pi/6$. *Указание.* Пусть O_1 и O_2 — центры большей и меньшей окружностей соответственно (рис.18), AB и EF — рассматриваемые хорды, $AB\perp O_1O_2$, точки H_1 и H_2 — основания перпендикуляров, опущенных из O_1 и O_2 на прямую EF, r — радиус меньшей окружности. Из равенства треугольников EO_1F и AO_1B следует $O_1H_1 = O_1C$. Поэтому $O_1H_1 = \left|(9-4\sqrt{3})r-2r\right| = (7-4\sqrt{3})r$, причем точка D пересечения прямых O_1O_2 и EF расположена на луче O_2O_1 за точкой O_1.

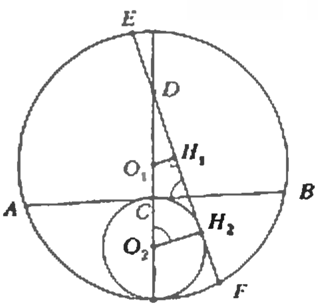


Рис. 18

Точки D, O_1, O_2 расположены на прямой O_1O_2 так, как показано на рисунке 18, и угол DO_2H_2 равен искомому, так как оба угла дополняют $\angle O_1DH_1$ до 90°. Из подобия треугольников DO_1H_1 и DO_2H_2 получаем

$$DO_2 = \frac{O_1O_2}{1-\frac{O_1H_1}{O_2H_2}} = \frac{8-4\sqrt3}{4\sqrt3-6} = \frac{\sqrt3}{2}r.$$

Дальнейшее ясно.

5. $-2<b<0$. *Указание.* Исходную систему приведем к виду

$$\begin{cases}(y-2)^2=1-4b,\\(x-1)^2+y^2=1.\end{cases} \qquad (*)$$

Заметим, что $y^2\le1$ для любого решения системы (*). Первое уравнение системы имеет корень, расположенный на интервале $(-1;1)$ тогда и только тогда, когда $-2<b<0$.

Вариант 12

1. 3. 2. $(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$. 3. $(-7/3;0)$; $(14;14)$.
4. $(-\infty;\log_4 5]\cup(1;4)$. 5. $\pm1/3$; $\pm5/3$; $\pm\sqrt3$. 6. $4n$.
7. $\sqrt2/4$. *Указание.* Треугольник ABC — равнобедренный, так как $\angle BAE=\angle EAC=\frac{\pi}{2}-\beta$, где $\beta=\angle ABC$, но это значит, что AD — перпендикуляр к BC. Поэтому $EC/BC=AC/EC=\operatorname{ctg}\beta$.
8. $a\ge224$. *Указание.* Пусть $t=4^x$, тогда неравенство $(t-15)^2<225-a$, во всяком случае, не должно иметь своим решением $t=16$, т.е. должно выполняться неравенство $(16-15)^2\ge225-a$, т.е. $a\ge224$. Нетрудно проверить, что это условие является и достаточным.

Вариант 13

1. $1\pm\frac{1}{6}+2k$, $k\in\mathbf{Z}$. 2. 16 км/ч. 3. $\pm\left(1+\sqrt3\right)/2$. *Указание.* Выполните замену $t=|x|$.
4. $\sqrt7$. *Указание.* Пусть O — центр окружности. Тогда $\cos\angle AOB=-1/8$, $\angle DOC=\pi-\angle AOB$ и $\cos\angle DOC=1/8$.
5. При $a\in(-\infty;-1-\pi^2)\cup(1;+\infty)$ корней нет, при $a\in[-1-\pi^2;1)$ — два корня, при $a=1$ — один корень. *Указание.* Квадратный трехчлен из условия имеет корни тогда и только тогда, когда $1\le c^2\le5/3$. При этом $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=2-c^2$. Наименьшей сумма квадратов будет при $c^2=5/3$. Итак, $b=1/3$ и речь должна идти о количестве корней уравнения $x^2+a=\cos x$ на отрезке $[-\pi;\pi]$. На отрезке $[-\pi;0]$ функция $f(x)=\cos x-x^2$ является возрастающей и поэтому принимает все значения между $f(-\pi)$ и $f(0)$, т.е. между $-1-\pi^2$ и 1. Примите во внимание также четность функции f.

Вариант 14

1. $(-\infty;-2]\cup(49/16;+\infty)$.
2. $\frac{7\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. *Указание.* Найдите корни, принадлежащие интервалу $(0;2\pi)$.
3. 36; $8\sqrt{19}$. *Указание.* Существуют две трапеции, удовлетворяющие условию: одна с острым, другая — с тупым углом при вершине N.
4. 210 000 р. *Указание.* Пусть S — первоначальная сумма вклада, x — искомая сумма ежегодных дополнительных вкладов, n — количество лет хранения, R — процентный прирост за все n лет. Тогда прирост за n лет составит ($k=1+\frac{p}{100}$):

$$sk^n+xk^{n-1}+\ldots+xk=sk^n+xk\frac{k^{n-1}-1}{k^n-1}=s\left(1+\frac{R}{100}\right).$$

Осталось подставить заданные значения s, k, n, R и найти x.
5. $-3\le x<-2$, $x=1$. *Указание.* При $x<0$ получаем

$$x<f(m)=-1+\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left(3m^2+12m+11\right),\ m\in\mathbf{Z}.$$

Поскольку $\min f(m)=f(-2)=-2$, решениями в области $[-3;0)$ будут $x\in[-3;-2)$. При $x>0$ имеем $x>f(m)$. Но $f(m)\to\frac{\pi}{2}$ при $m\to+\infty$. Поэтому $x\ge1$.
6. $\min\left(a^2+(b-1)^2\right)=(\pm2/5)^2+(4/5-1)^2=1/5$.
Указание. Пусть уравнение

$$\big||t|-2\big|=at+b$$

имеет столько же корней, сколько исходное.

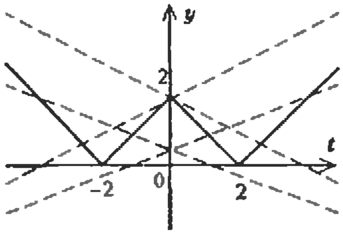


Рис. 19

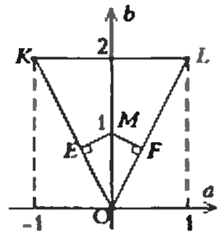


Рис. 20

На рисунке 19 изображен график левой части уравнения, представляющий собой W-образную ломаную. Графиками правой части уравнения будут всевозможные невертикальные прямые. Анализируя взаимное расположение «W-ломаной» и этих прямых, приходим к выводу, что ровно три различные общие точки они будут иметь в следующих случаях:

$$\{-1<a<1,\ b=2\}\cup\{-1<a<0,\ b=-2a\}\cup\{0<a<1,\ b=2a\}.$$

На рисунке 20 представлено изображение этого множества на координатной плоскости (a,b). Это контур равнобедренного треугольника KOL с удаленными вершинами. Выражение $a^2+(b-1)^2$ — это квадрат расстояния от точки $M(0;1)$, лежащей внутри треугольника KOL, до его сторон. Минимум достигается в двух симметричных точках $E\left(\frac{2}{5};\frac{4}{5}\right)$, $F\left(-\frac{2}{5};\frac{4}{5}\right)$, лежащих на боковых сторонах KO и LO, а наименьшее значение равно $\frac{1}{5}$.

Вариант 15

1. $[-7/2;15/2]$. 2. $\{5\}\cup\left(4+\sqrt2;+\infty\right)$. 3. $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $n,k\in\mathbf{Z}$.
4. 8. *Указание.* Пусть $AL=x$, $LC=y$. Тогда $AB=2x$, $BC=2y$. По условию, $3x+3y=28$. Кроме того, $BL^2=AB\cdot BC-AL\cdot LC$ (докажите!), что дает возможность найти x.
5. $a=2$. *Указание.* Если равносильное данному неравенство $\frac{\left(a+\cos x-\sqrt{x^2+9}\right)^2}{a+\cos x}\le0$ имеет единственное решение, то это только $x=0$. (Если $x\ne0$ удовлетворяет неравенству, то $-x$ тоже удовлетворяет.) При $x=0$ получаем

$$\frac{(a-2)^2}{a+1}\le0.$$

Откуда либо $a=2$, либо $a<-1$. При $a<-1$ неравенство выполняется при всех x, а значение $a=2$ удовлетворяет условию.

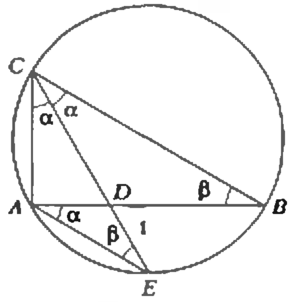


Рис. 21

Вариант 16

1. -1. *Указание*. $\sin\arcsin x = x$, причем $-1 \le x \le 1$. 2. 5.
3. $r_1 = 100$. 4. $\sqrt{3}$. *Указание*. По свойству биссектрисы $BD/AD = BC/AC = 2$ (рис.21). Это значит, что $AD = 1$, $BD = 2$. Из равенства отрезков AD и DE следует, что $\angle\alpha = \angle\beta$, $CD = BD = 2$, а $CE = 3$. Но $AC/CE = CD/BC$, откуда $2AC^2 = 6$, $AC = \sqrt{3}$. 5. $1 \le x \le \pi/2$; $x = 3$. 6. $a \ge 2/3$. *Указание*. После замены $t = |x+2|$ неравенство приводится к виду $(t+3a)^2 \le 4$, откуда $-2-3a \le t \le 2-3a$. Последнее неравенство имеет не больше одного решения лишь при $2-3a \le 0$.

ФИЗИКА

Физический факультет

1. $v = \Delta L\sqrt{k(m+M)}/M$. 2. $v_1 = v/\sqrt{2}$. 3. $T = 2\pi(b/L)\sqrt{m/k}$.
4. $\eta = (p_1 - p_2)/(5p_1)$. 5. $\varphi = (p_{н2}/p_{н1})(T_1/T_2)$. 6. $A = C\mathcal{E}^2/4$.
7. $U_1 = UIR_1/(U + IR_1)$. 8. $x_m = IBL\tau/\sqrt{2mk}$.
9. $\Delta x = \lambda/(2(n-1)\alpha)$. 10. $\Delta x = F\lambda/d$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $\beta = \operatorname{arctg}((1+m/M)\operatorname{tg}\alpha) = 60°$. 2. $\Delta l > \mu(M+m)g/k = 4{,}2$ мм.
3. $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{n} = 30°$. 4. Ускорение равно $a = -g(1 - h/x) = 2$ м/с^2 и направлено вверх. 5. $A = 3/2(m^2-1)RT_0 = 11{,}2$ кДж.
6. $Q = (5P + 3kH + 4k\Delta h)\Delta h/2 = 18$ Дж.
7. $\alpha = 2k - 1 \pm 2\sqrt{k^2 - k} = 3 \pm 2\sqrt{2}$, $\alpha_1 \approx 0{,}17$, $\alpha_2 \approx 5{,}83$.
8. $I_{min} = \dfrac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{Bl(\mu\sin\alpha + \cos\alpha)} = 33{,}2$ А. 9. $r = RF_2/F_1 = 0{,}75$ см.
10. $n = 2\cos\alpha \approx 1{,}73$ (ответ имеет смысл при $\alpha < 45°$).

Новосибирский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 1; $\frac{1}{2}$. 2. $-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}k$, $\frac{\pi}{12} + \pi k$, $k \in Z$. 3. $\left(-\infty; -\frac{8}{7}\right)$. 4. $\sqrt{22}$.

Вариант 2

1. 11, 2. 2. 10 мин. 3. πk, $k \in Z$. 4. $6\sqrt{2}$.

Вариант 3

1. $(-3;-2) \cup \left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$. 2. $\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$. 3. πk, $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$. 4. $\frac{\sqrt{435}}{12}$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Вначале на вертолет действуют сила тяжести, подъемная сила и сила натяжения троса. По второму закону Ньютона $Ma = F - Mg - T$. Аналогично для груза: $ma = T - mg$. После обрыва троса сила натяжения исчезает, поэтому $Ma_1 = F - Mg$. Отсюда получаем

$$a_1 = a + (a+g)m/M.$$

2. В критический момент из условия равенства моментов сил получаем $(pa^2 + mg)a/2 = pa^2 a/2$. По газовому закону $p_0/T_0 = p/T$. Отсюда

$$T = T_0 p/p_0 = T_0\left(1 + \left(mg/p_0 a^2\right)\right).$$

3. Заряды противоположны по знаку, т.е. притягиваются. Тогда в произвольный момент бусинка не сдвинется при условии

$$\mu\left(mg + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\sin\alpha\right) \ge \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\alpha,$$

или

$$\mu mg \ge \frac{(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2},$$

где α — угол между спицей и радиусом, соединяющим заряды. Не прибегая к дифференцированию, минимальное значение μ можно найти, используя известный искусственный прием. Введем обозначения: $\mu = \operatorname{ctg}\beta$, $4\pi\varepsilon_0 R^2 mg/(qQ) = 2\lambda$. Тогда с учетом того, что $\sin\beta = 1/\sqrt{1+\mu^2}$ и $\cos\beta = \mu/\sqrt{1+\mu^2}$, получаем $2\lambda\mu \ge \sqrt{1+\mu^2}\sin(\beta - \alpha)$. Коэффициент трения будет минимальным при $\beta - \alpha = \pi/2$, т.е.

$$\mu_{min} = 1/\sqrt{4\lambda^2 - 1} \text{ при } 2\lambda > 1.$$

4. Исходя из определения давления, в том числе и атмосферного $p_0 \sim 10^5$ Па, сразу же получаем оценку массы атмосферы Земли: $m_{атм} \sim (p_0 S)/g$, где S — площадь поверхности Земли. Для оценки массы океана примем его среднюю глубину равной $H \sim 4$ км и учтем, что океан занимает примерно $2/3$ площади Земли: $m_{ок} \sim 2/3\rho HS$, где $\rho = 10^3$ кг/м^3 — плотность воды. Таким образом,

$$m_{ок}/m_{атм} \sim (2/3)\rho g H/p_0 \sim 300.$$

Этот результат можно было получить, вспомнив, что атмосферное давление соответствует давлению столба воды высотой $h \sim 10$ м. Тогда $m_{ок}/m_{атм} \sim H/h \sim 400$ (это без учета полуторной разницы площадей, что при оценке по порядку величины несущественно).

5. Потенциальная энергия растянутой резины переходит в потенциальную энергию подъема тела в поле тяжести. В первом случае $k_1x_1^2/2 \sim mgh_1$. По закону Гука $k_1x_1 \sim F = Mg$, где M — масса растягивающего резину груза. Таким образом, $k_1x_1^2/2 \sim Mg/k_1 \sim mgh_1$. При вдвое более тонкой резине ее жесткость $k_2 = k_1/2$. Отсюда получаем

$$mgh_1/mgh_2 \sim (Mg/k_1):(Mg/k_2) = k_2/k_1, \text{ или } h_2 \sim h_1(k_1/k_2) \sim 2h_1,$$

т.е. при более тонкой резине и постоянной силе растяжения высота взлета тела практически удваивается.

Вариант 2

1. В соответствии с уравнением Клапейрона – Менделеева,

$$m/m_0 = \beta/\alpha.$$

2. На основании законов сохранения импульса и энергии имеем $m_p v_0 = (M - m_p)v$, $m_p v_0^2/2 = (M + m_p)v^2/2$. Отсюда

$$M = 3m_p, \quad v = v_0/2.$$

С протоном столкнулось ядро трития или ядро гелия-3.

3. В равновесии $mg\cos\alpha = qE\sin\alpha$, т.е. $\operatorname{tg}\alpha = mg/(qE)$, где α — угол отклонения нити от горизонтали. Из второго закона Ньютона $mv^2/l = T - mg\sin\alpha - qE\cos\alpha$. Из закона сохранения энергии (с учетом потенциальности электрического и гравитационного полей) $mv^2/2 = mgl\sin\alpha - qEl(1-\cos\alpha)$. Отсюда находим

$$T = 3\sqrt{(qE)^2 + (mg)^2} - 2qE.$$

4. Считая, что стенки колодца поглощают свет, для отношения освещенностей получаем $I/I_0 \sim S/r^2 \sim d^2/h^2$, где ширина колодца $d \sim 1$м, а глубина $h \sim 10$ м. Тогда $I/I_0 \sim 1/100$.

5. Сила натяжения T, в соответствии со вторым законом Ньютона, равна изменению импульса Δp, отнесенному к интервалу времени Δt, за которое это изменение произошло: $T = \Delta p/\Delta t$. Интервал Δt при подсоединении резинки заметно увеличивается, поэтому натяжение T уменьшается и нить с резинкой не рвется.

Вариант 3

1. Полная энергия электрического поля заряженного конденсатора $W = CU^2/2$, где разность потенциалов на обкладках BA конденсатора $U = 2\mathcal{E}/3 - \mathcal{E}/3 = \mathcal{E}/3$. В каждой ветви $(2R, R)$ мостиковой схемы при разрядке конденсатора через сопротивления выделится половина этой энергии $W/2 = CU^2/4 = C\mathcal{E}^2/36$. В пределах одной ветви выделяющаяся в виде тепла энергия распределяется пропорционально сопротивлениям, т.е. на сопротивлении $2R$ выделится

$$W_{2R} = \frac{2}{3}\frac{C\mathcal{E}^2}{36} = \frac{C\mathcal{E}^2}{54}.$$

2. С учетом уравнения Клапейрона – Менделеева масса газа, вытекающая в единицу времени со скоростью v, равна

$$\rho vS = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \mathrm{M}\frac{\Delta p}{\Delta t}\frac{V}{RT}.$$

При этом плотность газа $\rho = \dfrac{\mathrm{M}p}{RT}$. Отсюда имеем

$$v = \frac{\Delta p}{\Delta t}\frac{V}{pS} = \frac{AV}{pS}.$$

3. Записывая моменты сил относительно точки O:

$$(mg + k(h - l))h/2 = (F - k(l - h/2))h,$$

получаем

$$F = (mg + kl)/2.$$

4. Под действием перепада давлений Δp во рту горошина массой m, пройдя объем V в трубке, приобретает кинетическую энергию за счет работы газа: $A \sim \Delta pV \sim mv^2/2$. Оценив отсюда скорость горошины, получаем возможность из кинематики найти максимальную длину полета:

$$L \sim vt \sim v\sqrt{\frac{2H}{g}} \sim \sqrt{\frac{4H\Delta pV}{mg}}.$$

Положив $\Delta p \sim 0.1p_a \sim 10^4$ Па, $V \sim 5 \times 5$ мм$^2 \times 20$ см $= 5\cdot10^{-6}$ м^3, высоту ребенка $H \sim 1$м и $m \sim 10^{-4}$ кг, получаем $L \sim 10$ м.

5. См. решение задачи 5 варианта 1.

Московский государственный институт электронной техники

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 3/2; 2. 2. πn; $-\pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. 120. 4. -1. 5. 5. 6. 22. 7. Минус. 8. $(-1; -2; -3)$, $(1;2;3)$. 9. $\left(0; 1/\sqrt[3]{10}\right) \cup [10; +\infty)$. 10. 4 км/ч.

11. Искомый график получается в результате такой последовательности преобразований графиков: 1) $y_0 = \log_2 x$; 2) $y_1 = \log_2|x|$ (симметричное отражение относительно оси Oy); 3) $y_2 = \log_2|x - 2|$ (сдвиг вдоль оси Ox вправо на 2 единицы); и, наконец, 4) $y_3 = \log_2\big||x| - 2\big|$ (симметричное отражение относительно оси Oy части графика, соответствующей $x \ge 0$, на область $x < 0$). 12. $a \ge 3$.

Вариант 2

1. $(-1;2) \cup [11; +\infty)$. 2. $\pi/6 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $(-3; -2) \cup (-2; +\infty)$. 4. $4h\sqrt{3}$. 5. 64 км/ч. 6. $(-1)^n \pi/3 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 7. $(1;1;1)$. 8. -2. 9. 50%. 10. $a \le 0$. 11. $f(x) = 1$ при всех $x \ne 0$.

12. $y(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x > -1,\ x \ne 1 \text{ и } x \ne 2, \\ -1, \text{ если } x < -2,\ x \ne -3, \\ \text{не определена при } x = -3, -2, 1, 2. \end{cases}$

Вариант 3

1. $-4/5$. 2. $(-\infty; 2]$. 3. $(-\infty; -1] \cup (1; 2]$. 4. -2. 5. 8. 6. $(1;4)$. 7. $\pm\arccos(-1/5) + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

8. $y(x) = \begin{cases} -2\sin\pi x \text{ при } x \ge 0, \\ 0 \text{ при } x < 0. \end{cases}$

9. 2/5. 10. 1; 100. 11. 1348. 12. $a = 2$; $x = 0$, ±1, $\pm\sqrt{3}$, ±2.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $\Delta v_2 = \left(\sqrt{2} - 1\right)\Delta v_1 = 4{,}1$ м/с. 2. $\Delta l = \dfrac{\sqrt{2A/k}}{(n - 1)} = 0{,}02$ м.

3. $\lambda = \dfrac{\tau_2}{\tau_1}c(t_1 - t_0) \approx 335$ кДж/кг. 4. $Q = -2q(d/r)^3 = -50$ мкКл.

5. $U_1 = \dfrac{\mathcal{E}U}{2\mathcal{E} - U} = 7{,}2$ В. 6. $F = \left(\sqrt{2} + 1\right)b \approx 9{,}6$ см.

Вариант 2

1. $t = \dfrac{2L}{\sqrt{2gH}} = 0{,}02$ с. 2. $F = \mu mg/(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = 20$ Н.

3. $p_1 = (p_0 + \Delta p)T_1/T_2 = 3{,}75\cdot10^5$ Па. 4. $E = 4kq_1/\left(3L^2\right) = 3$ В/м.

5. 1) $I_1 = US/(3L\rho)$, $I_2 = US/(L\rho)$; 2) $F = 4BUS/(3\rho)$, вектор силы лежит в плоскости контура и перпендикулярен стороне квадрата, которая непосредственно подключена к источнику.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.М.Митурич-Хлебникова, С.А.Стулов, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко, Е.В.Титова

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Л.А.Панюшкина

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Е.В.Самойлова

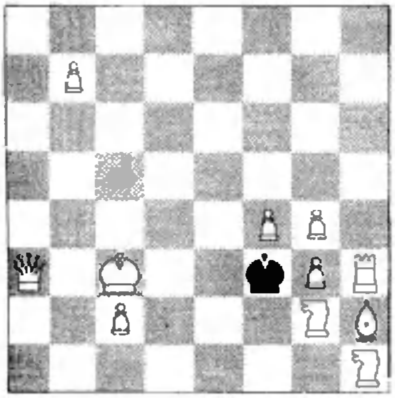
Адрес редакции:

117296 Москва, Ленинский проспект, 64а, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати 142300 г.Чехов Московской области Заказ №1955

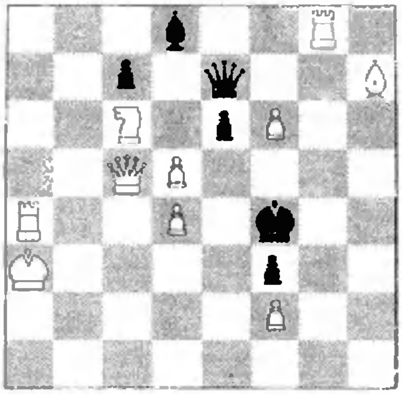
Противостояние фигур

В истории известно немало случаев, когда исход сражения определялся поединком лучших воинов противостоящих сторон. В наше время подобное происходит в матчах КВН, судьбу которых часто решает соперничество капитанов... Нередко и в шахматной партии, а чаще в композиции, встречаются противостояния, составляющие суть позиции. Вот несколько таких дуэтов бело-черных «визави»...



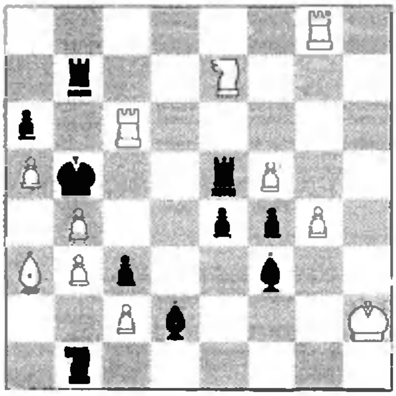
Я.Гартонг, 1958
Матч в 3 хода

Здесь героями являются короли. После **1. Лh6!** черные в цугцванге, и после хода их короля в игру вступает предводитель белой армады, который всякий раз оказывается хитрее своего оппонента. **1...Кре2 2. Крb2! Крd1 3. Фd3×, 1...Кре4 2. Крb4! Крd5 3. Фd3×, 1...Кр:g2 2. Крd2! Крf1 3. Фf3×, 1...Кр:g4 2. Крd4! Крf5 3. Ке3×**.



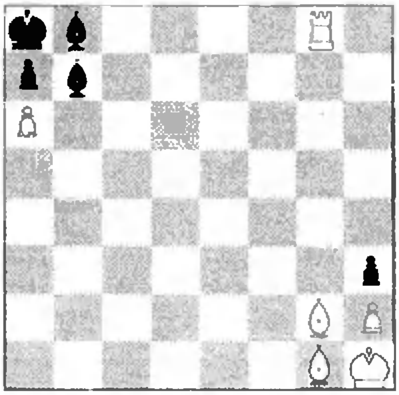
К. Гольдшмединг, 1974
Мат в 2 хода

А это пример ферзевого противостояния. Первый ход **1.de** с угрозой **2. d5×**. У черных вся надежда на своего ферзя, однако если он развязывает оппонента с5, то должен иметь в виду, что появляются еще несколько матов — ферзем с е5, f5, g5 или с1. **1...Ф:е6 2. Фg5×, 1...Ф:f6 2. Фс1×, 1...Фg7 2. Фf5×, 1...Ф:h7 2. Фе5×**.



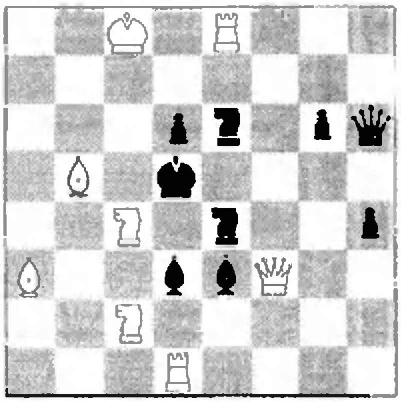
Г.Рэм, 1982
Мат в 12 ходов

В этой задаче разгораются самые настоящие ладейные страсти, причем в игру вступают сразу обе пары ладей. Попытка белых сдвоить ладьи путем 1. Лgg6? опровергается посредством 1...Се3! Однако после оригинального танца ладей этот план становится осуществимым. **1. Лс7! Лb6 2. Лg6 Лb8 3. Лс8 Лb7 4. Ле6 Лd5! 5. Лd6 Ле5 6. Лс7! Лb8 7. Лd8!** — функции ладей меняются. **7...Лb6 8. Ле6 Лb7 9. Ле6! Лс5 10. Лdd6**, и пропала защита 10...Се3, мат в два хода неизбежен.



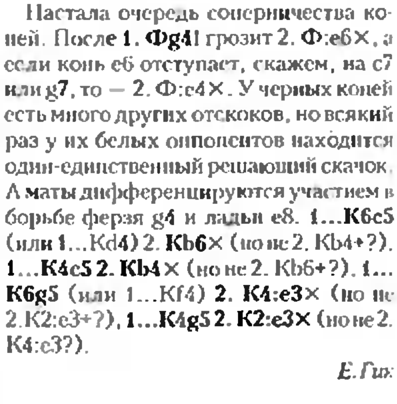
Г.Брейер, 1892
Обратный мат в 9 ходов

А это задача на обратный мат — белые начинают и заставляют черных объявить мат их королю в заданное число ходов. Перед нами классический пример противостояния слонов. Исследование позиции носит математический характер. Анализ показывает, что при всяком противостоянии слонов g2 и b7 у белой ладьи для достижения цели имеется ровно одно подходящее поле. Если расстояние между слонами составляет одно поле, то ладья должна стоять на с8, если два, то на d8, если три, то на е8, если четыре, то на f8, наконец, если слоны стоят вплотную друг к другу, то ладья в этот момент должна находиться в углу доски. Теперь уже можно привести решение. Итак, **1. Лf8! Сс6 2. Ле8! Cd5 3. Лd8! Се4 4. Лс8! Cf3 5. Лh8! Се4 6. Cf3 Cd5 7. Се4 Сс6 8. Cd5 Cb7 9. Сс6 С:с6×**.



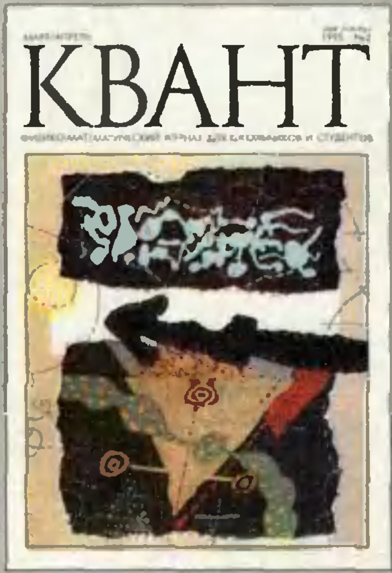
С.Левман, 1934
Мат в 2 хода

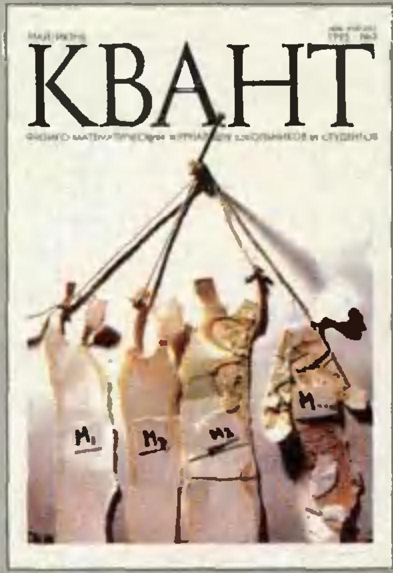
Настала очередь соперничества коней. После **1. Фg4!** грозит 2. Ф:е6×, а если конь е6 отступает, скажем, на с7 или g7, то — 2. Ф:е4×. У черных коней есть много других отскоков, но всякий раз у их белых оппонентов находится один-единственный решающий скачок. А маты дифференцируются участием в борьбе ферзя g4 и ладьи е8. **1...К6с5** (или 1...Kd4) **2. Kb6×** (но не 2. Kb4+?). **1...К4с5 2. Kb4×** (но не 2. Kb6+?), **1...K6g5** (или 1...Kf4) **2. К4:е3×** (но не 2. К2:е3+?), **1...K4g5 2. К2:е3×** (но не 2. К4:е3?).



Е.Гик

Индекс 70465





Уважаемые читатели журнала «КВАНТ».
Мы надеемся, что вы не забыли о нашем журнале
и своевременно оформили подписку на 1996 год.
Если же по каким-то причинам этого не произошло, не расстраивайтесь —
вы сможете подписаться на журнал и в помещении редакции.
Это избавит вас от возможных недоразумений, связанных с доставкой через почту.
В редакции можно также приобрести журналы «КВАНТ»
и Приложения к ним за прошлые годы.
Наш адрес: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64а, «КВАНТ»
тел. 930-56-48
Мы ждем вас ежедневно с понедельника по пятницу с 11 до 17 часов.
Звоните и приходите!