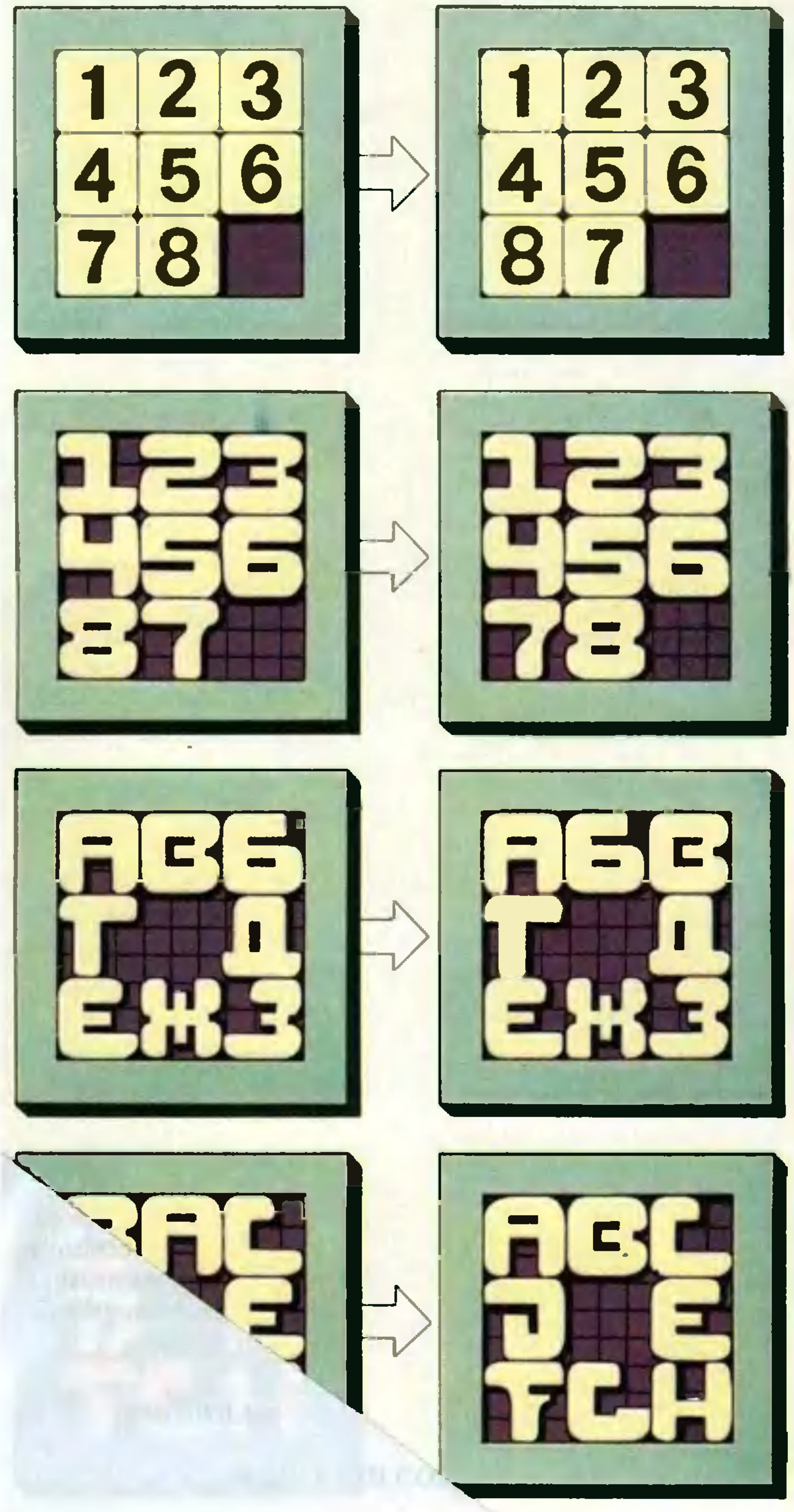
ISSN 0130-2221

НОЯБРЬ/ДЕКАБРЬ

1995 · №6

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



«НЕВОЗМОЖНЫЕ» ГОЛОВОЛОМКИ СЕРГЕЯ ГРАБАРЧУКА

В книгах по занимательной математике можно увидеть игру-головоломку «8»: в коробочке 3×3 имеются 8 фишек и одно свободное место (см. рисунок). Передвигая, но не вынимая фишки из коробки, можно менять их местами. Так же, как в известной игре «15», в игре «8» нельзя поменять местами только две фишки. Как минимум, еще две фишки окажутся не на своих местах.

Известный украинский изобретатель головоломок С.А. Грабарчук придумал головоломку, в которой эта «неразрешимая» задача решается: можно переставить местами две фишки, при этом остальные вернутся в исходное положение.

На рисунках показаны три варианта этой головоломки: с цифрами, буквами русского алфавита (кириллицей) и с буквами латинского алфавита. Все варианты легко сделать в домашних условиях из картона и фанеры.

Секрет головоломки Грабарчука в том, что некоторые фишки имеют вырезы, повторяющие контуры цифры или буквы. За счет этого появляется дополнительное свободное пространство, благодаря которому удается решить «неразрешимую» задачу. Но остается другая проблема: сделать это за минимальное количество ходов. Лучшее решение пока неизвестно.

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

НОЯБРЬ/ДЕКАБРЬ · 1995 · №6

В номере:

Игорь Евгеньевич Тамм

Б.КОНОВАЛОВ, Е.ФЕЙНБЕРГ

ИГОРЬ ЕВГЕНЬЕВИЧ ТАММ научными исследованиями занялся очень поздно — первую статью опубликовал в двадцать девять лет. Физики-теоретики, как правило, уже к тридцати годам успевают сделать свои основные работы. А Тамм только стартовал. Так уж сложилась судьба.

Родился он в 1895 году во Владивостоке. Но все детство и юность Тамма прошли в степном украинском Елизаветграде, где его отец служил городским инженером. Время было бурное, раскаты предреволюционных гроз гремели по всей стране. Юный Тамм с его задиристым, темпераментным характером, естественно, не мог остаться в стороне. Увлеченность революционными идеями была настолько сильной, что обеспокоенные родители после окончания гимназии решили отправить его учиться в Эдинбургский университет, как говорится, «от греха подальше». Выдержав всего год в добровольной ссылке, он вернулся в Россию, чтобы продолжить обучение на физико-математическом факультете Московского университета. А на пороге стояла первая мировая война. Тамм побывал на полях сражений в качестве добровольца — брата милосердия. То, что он увидел и пережил, лишь усилило его антимилитаристские настроения.

Научными исследованиями Игорь Евгеньевич впервые занялся в 1922 году в Москве, куда он вновь попал после всех перипетий Гражданской войны, работы в Крымском университете, Одесском политехническом институте. И взялся за науку с неистовым пылом. Так, словно хотел наверстать все упущенные годы. В сущности всего за пятнадцать лет И.Е.Тамм сделал основополагающие работы, которые принесли ему мировую известность.

Первую работу он выполнил под руководством будущего академика Л.И.Мандельштама, с которым познакомился еще в Одессе и которого всю жизнь почитал как своего учителя. Вначале интересы Тамма касались физики твердого тела, где как раз в эти годы «испытывалась на прочность» только что созданная усилиями многих физиков квантовая механика. Тамм сделал здесь многое.

После длительной зарубежной командировки, где Игорь Евгеньевич познакомился и подружился с одним из создателей квантовой механики — Полем Дираком, в сферу его научных интересов вошли физика высоких энергий и ядерная физика, которые постепенно стали для него главными.

Независимость мышления, способность твердо отстаивать свою точку зрения — одна из главных граней в характере Тамма. И, естественно, на протяжении всей его жизни она очень четко проявлялась, особенно в науке. Примеров тому множество. Можно привести такой. В 1934 году на конференцию физиков в Харьков съехались многие видные ученые, в их числе был знаменитый Бор. Незадолго до этого И.Е. Тамм пришел к поразительному выводу, что нейтрон, не имеющий электрического заряда, тем не менее должен обладать магнитным моментом. Это выглядело дико — ведь магнитный момент должен, по существовавшим представлениям, создаваться вращающимся зарядом. А тут нейтральная частица — и вдруг магнитный момент. Именитые физики уговаривали молодого теоретика, что это чепуха, не может такого быть. А он стоял на своем: «При всем уважении к вам, не могу согласиться — ваши доводы меня не убеждают». Вскоре выяснилось, что «упрямый Тамм» оказался прав. И так с ним не раз бывало и в жизни, и в науке.

Наиболее известная работа Тамма предвоенного периода (совместно с И.М.Франком) — теоретическое объяснение эффекта Вавилова — Черенкова. За эту работу ему вместе с П.А.Черенковым и И.М.Франком была присуждена Нобелевская премия. Безусловно, это была заслуженная премия, но сам Игорь Евгеньевич, когда к нему пришел с поздравлениями один из ближайших учеников, признался: «Да, да, это очень радует, но примешивается огорчение: не за ту работу». Лучшей своей работой Тамм считал созданный им в 1934 году первый вариант квантовой теории ядерных сил. Исходя из теории бета-распада Ферми, Игорь Евгеньевич выдвинул идею, что силы, «цементирующие» ядра, возникают в результате обмена электронами и нейтрино. Но когда Тамм провел все расчеты, то силы получились слишком слабыми, они не могли быть ядерными. Это был отрицательный результат в науке, но очень важный. Он отсекал целое направление поисков и в то же время лег в основу нового. Японский профессор Юкава, опираясь на эту работу Тамма, выдвинул смелую гипотезу о существовании других, новых «обменных частиц» — пи-мезонов, и так родилась современная теория ядерных сил. И вот в зените известности Тамм ставит в один ряд работу, которая принесла ему славу Нобелевского лауреата, и исследование, ценимое только в кругу физиков-теоретиков. Это характерно для Игоря Евгеньевича. Не слава его привлекала в науке, а сама наука, процесс творчества и достижения истины.

В одной из юбилейных статей ученики Игоря Евгеньевича выразили его жизненное кредо строчками Бориса Пастернака:

…И должен ни единой долькой
Не отступаться от лица,
Но быть живым, живым и только
Живым, и только до конца.

Тамм стал очень известным физиком и у нас в стране, и за рубежом. Стала известной его школа, которая возникла в организованном им Теоретическом отделе Физического института им. П.Н.Лебедева АН СССР. Игорь Евгеньевич сыграл выдающуюся роль в решении проблемы термоядерного синтеза, где с блеском

Перепечатывается (с небольшими сокращениями) из сборника «Ленин. Наука. Молодежь» (М.: Наука, 1980).

проявились его разносторонние дарования. В 1953 году он был избран академиком и официально стал одним из ведущих физиков страны.

Но не только научные успехи определяли его известность в научном мире. Тамма нередко называли совестью советской физики. На протяжении всей своей жизни он отстаивал в науке дух истины, ему абсолютно чужды были конъюнктурные соображения. Увлеченность своим направлением никогда не мешала ему объективно оценить значимость чужих работ. Каждый, кто сталкивался с ним, чувствовал его удивительную цельность, честность. В спорах даже с недобросовестными оппонентами Тамм, несмотря на свой темпераментный характер, всегда был неизменно корректен, никогда не пользовался никакими демагогическими приемами — только весомые аргументы были его полемическим оружием, только истина была его целью. И это относилось не к одной физике — Игорь Евгеньевич Тамм принял активное участие в борьбе за подлинно научную генетику, биологию.

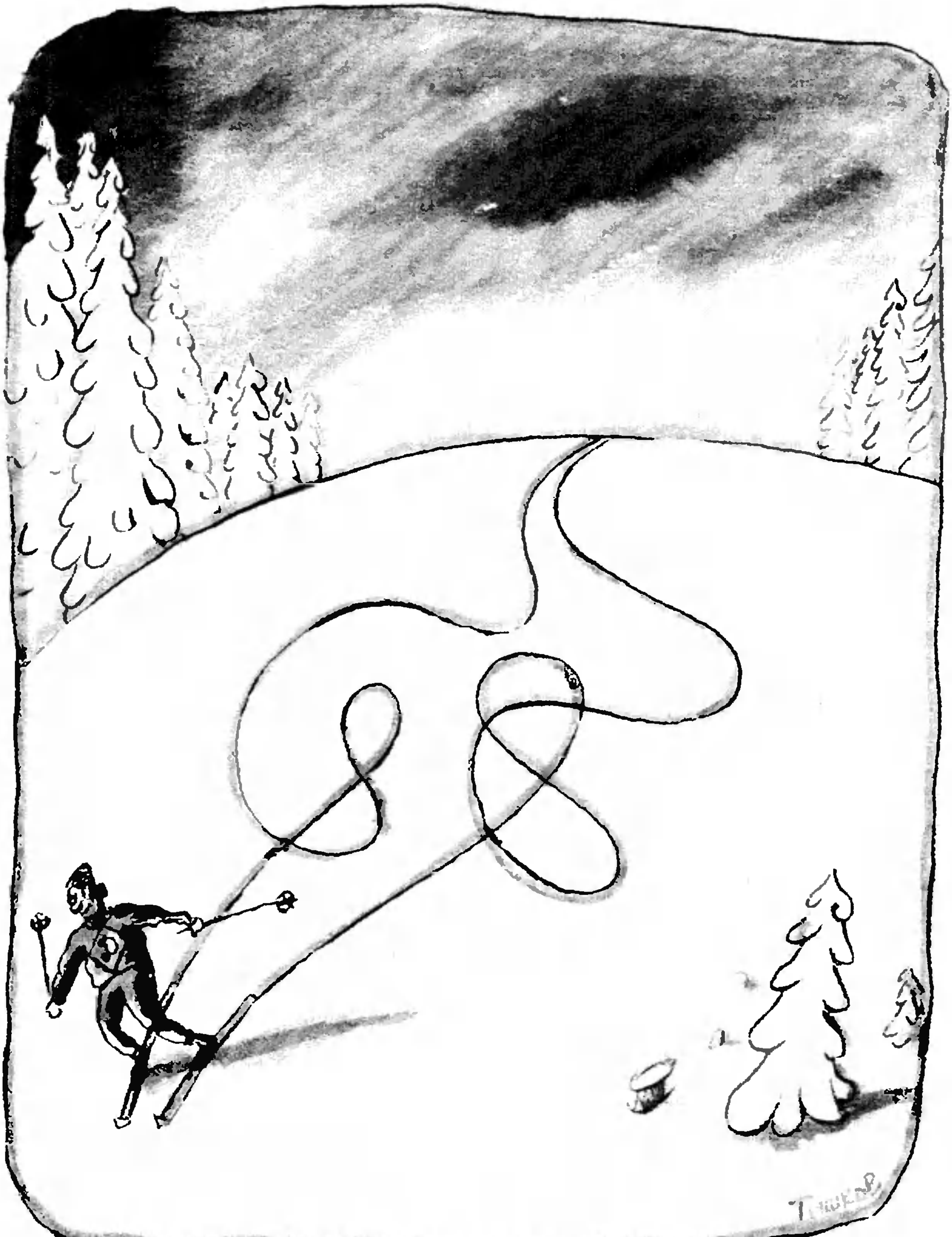
...Тамм был альпинистом и в жизни, и в науке. Он любил горы за красоту, за то, что восхождения рождали веру в свои силы. Но если в горах он не претендовал на сверхтрудные восхождения, то в науке его влекли самые высокие вершины. Тамм всегда занимался самыми передовыми, самыми трудными для данного момента проблемами. На закате своей жизни он взялся за неимоверно трудную задачу устранения бесконечностей в представлениях об элементарных частицах. Физики, двигаясь вперед, временно упрятали эту проблему, обошли ее, используя искусственные приемы. Но она, как «дамоклов меч», висит над всем зданием современной физики, потому что, если посчитать традиционными методами энергию электромагнитного поля, создаваемого одиночным электроном, получается бесконечность. В сущности, это вопрос о том, как устроены элементарные частицы, какова их структура. Тамм пытался на него ответить.

Игорь Евгеньевич Тамм (1895 — 1971)

Он работал самоотверженно. Но проблема была слишком трудной. Иногда после очередной неудачи он приходил в свой отдел и просил: «Подкиньте какую-нибудь задачку». Ему обычно давали трудную. Игорь Евгеньевич «щелкал» ее с легкостью. Но особого удовлетворения это ему не доставляло. Просто надо было самому убедиться, что он еще в форме. Л.Д. Ландау с горечью говорил: «Если бы Игорь Евгеньевич не брался за безумно трудные вещи, сколько бы хороших работ он сделал!».

В последние годы Игорь Евгеньевич был тяжело болен. Он дышал с помощью аппарата «искусственное легкое». Через две недели после операции, когда ему впервые разрешили сесть, он, еще не научившись говорить в новых условиях, знаками попросил вынуть ящик из письменного стола, перевернул его, положил на колени и стал что-то быстро высчитывать на бумаге. Лечащий врач обеспокоенно спросила у близких Игоря Евгеньевича: «Это адекватно? Ведь человек обычно «распадается» после такой операции». Она опасалась, остался ли Тамм в здравом уме. А он что-то надумал за эти две недели после операции, и ему не терпелось проверить свою мысль на бумаге. Практически до конца своей жизни он работал: лежа в постели или переходя к письменному столу, где стоял второй аппарат для искусственного дыхания.

У Тамма не было, как у Ландау, строгой, стройной системы подбора учеников, воспитания молодых ученых. Но школа осталась. Он подбирал по одному признаку — таланту. И учил больше всего своим собственным примером, атмосферой, которую создавал вокруг себя. Альпинисты, когда хотят выразить доверие к человеку, говорят: «Я пошел бы с ним в одной связке». Для каждого преданного науке физика идти в одной связке с Таммом было мечтой, а тем, кому это счастье выпало, — высокой честью.



Проективная топология

В.АРНОЛЬД

Нарисуем на плоскости гиперболу. Она состоит из двух ветвей. Рассмотрим одну из тех прямых — асимптот гиперболы — к которым приближаются ветви на бесконечности. Соединим какой-либо гладкой несамопересекающейся кривой те части одной и другой ветви гиперболы, которые, уходя «на бесконечность» влево и вправо, приближаются к выбранной асимптоте (рис.1).

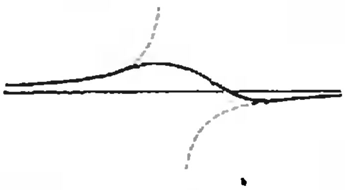


Рис. 1. Теорема Мёбиуса о трех точках перегиба

Одна из первых теорем проективной топологии — теорема Мёбиуса — утверждает, что на полученной кривой *не менее трех точек перегиба*. (*Точка перегиба* гладкой кривой — это точка, в окрестности которой кривая переходит с одной стороны касательной на другую, как это происходит с кривой $y = x^3$ в точке $x = y = 0$.) Нарисовав десяток-другой кривых, вы можете легко убедиться в справедливости этой теоремы. Однако доказать ее совсем не просто. В этой статье рассказывается о простейших основных понятиях проективной топологии — области довольно молодой, хотя ее основы восходят к работам Мёбиуса (XIX век), в связи с которыми и была придумана всем известная «лента Мёбиуса».

В последнее время выяснилось, что эта теория тесно связана с так называемой теорией Штурма колеблемости решений дифференциальных уравнений, с симплектической и контактной топологией (т.е. с топологией фазовых пространств механики и систем волновых фронтов лучей в оптике), с теорией узлов, с алгебраической геометрией и даже с квантовой теорией поля. Разумеется, рассказать о всех таких связях в этой статье невозможно. Но я все же надеюсь объяснить, какого рода задачи здесь возникают. Несмотря на полную элементарность формулировок этих геометрических задач, вся тяжелая артиллерия современной математики оказывается (пока?) бессильной их решить — по-видимому, требуется молодое воображение.

Проективная плоскость

Гильберт говорил, что математики называют точками объекты любой природы, например, пивные кружки. Сейчас мы последуем этому принципу. Плоскость, с которой вы, несомненно, хорошо знакомы, — одно из самых фундаментальных понятий математики. Но математики рассматривают, наряду с обычной плоскостью, еще и так называемую проективную плоскость, полученную из обычной плоскости добавлением «бесконечно удаленных точек». Обычную плоскость, чтобы отличать ее от проективной, называют аффинной (почему — не знаю); происхождение названия «проективная плоскость» объяснено ниже.

Проще всего освоиться с проективной плоскостью, исходя из такого ее определения: *точками проективной плоскости называются проходящие через начало координат O прямые трехмерного пространства.*

Смысл этого определения состоит в следующем.

Рассмотрим в трехмерном пространстве с координатами (x, y, z) обычную плоскость $z = 1$ (с координатами (x, y), рис.2). Каждой точке в этой обычной плоскости сопоставим прямую OP, соединяющую ее с началом координат O. Эта прямая $p = OP$ определяется точкой P обычной плоскости однозначно и, в свою очередь, однозначно определяет точку P.

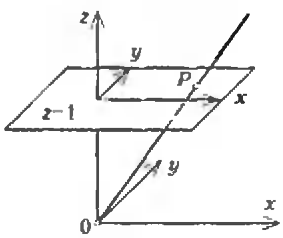


Рис.2. Аффинная карта проективной плоскости

В этом смысле нашу обычную плоскость называют *аффинной картой* проективной плоскости. Точка P называется изображением соответствующей точки p проективной плоскости (т.е. прямой OP) на аффинной карте.

Наиболее часто применяемые в географии карты изображают лишь малую часть поверхности Земли, и даже карта полушария охватывает лишь ее половину. Аффинная карта проективной плоскости тоже изображает на нашей плоскости $z = 1$ не всю проективную плоскость. Действительно, прямые, параллельные плоскости $z = 1$, не пересекают эту плоскость и не имеют изображений на нашей карте. Все же аффинная карта проективной плоскости дает гораздо более полное изображение проективной плоскости, чем, скажем, географическая карта одного полушария. Действительно, на нашей аффинной карте изображены почти все точки проективной плоскости. А именно, точки проективной плоскости, не изображенные на аффинной карте, образуют всего лишь окружность (почему?).

Задачи

1. Покажите, что проективная плоскость полностью покрывается тремя аффинными картами (соответствующими плоскостям $z = 1$, $x = 1$ и $y = 1$).

2. На рисунке 3 показано изображение треугольника проективной плоскости на аффинной карте $z = 1$. Нарисуйте, как выглядит этот же треугольник на аффинной карте $x = 1$ (ответ — на рисунке 7 ниже — достаточно удивителен).

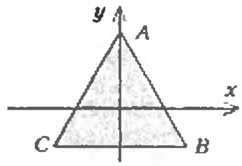


Рис 3. Изображение треугольника проективной плоскости на аффинной карте

3. Уравнение $x^2 + y^2 = 1$ определяет окружность на аффинной карте $z = 1$. Эта окружность является изображением некоторой замкнутой несамопересекающейся кривой, лежащей на проективной плоскости. Нарисуйте изображение этой кривой на аффинной плоскости $x = 1$.

Вместо того чтобы считать точками проективной плоскости прямые, проходящие через точку O в трехмерном пространстве, можно было бы объявить точкой проективной плоскости пару антиподальных точек сферы с центром в точке O (рис.4). Действительно, каждая такая прямая пересекает сферу в двух антиподальных точках, а каждая пара антиподов определяет прямую.

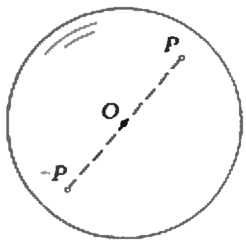


Рис.4. Проективная плоскость как сфера с отождествленными антиподальными точками

Математики говорят, что *проективная плоскость получается из сферы склеиванием диаметрально противоположных точек.* При желании можно ограничиться даже одним полушарием сферы, например южным. Но при этом на экваторе все равно придется склеить диаметрально противоположные точки (рис.5). Это склеивание может создать иллюзию исключительности точек экватора. В действительности же никакой особенности на экваторе нет: все точки проективной плоскости совершенно одинаковы (как одинаковы между собой и все точки обычной плоскости или все точки сферы).

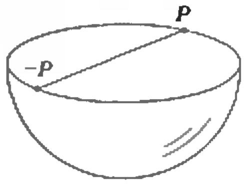


Рис.5. Склеивание проективной плоскости из полусферы

Проективная плоскость обычно обозначается так: $\boldsymbol{RP}^2$ (вещественное проективное пространство размерности 2).

Задача 4. Определите и изучите проективную прямую $\boldsymbol{RP}^1$.

Проективные свойства

Точный смысл «одинаковости» всех точек плоскости или сферы состоит в существовании преобразований плоскости (сферы), сохраняющих все интересующие нас свойства. Например, для евклидовой геометрии плоскости такими преобразованиями являются движения плоскости (сохраняющие расстояния).

Преобразования плоскости, переводящие прямые в прямые (и следовательно, сохраняющие параллельность прямых) называются *аффинными*. Сдвиги, поворот, отражения, растяжения вдоль какого-либо направления очевидно являются аффинными преобразованиями. Всякое аффинное преобразование плоскости (например, гомотетия) является комбинацией перечисленных.

Задачи

5. Докажите, что при аффинном преобразовании середина отрезка переходит в середину.

6. Докажите, что при аффинном преобразовании медианы треугольника переходят в медианы.

Последняя задача доставляет доказательство того, что медианы треугольника пересекаются в одной точке. Действительно, для равностороннего треугольника это очевидно, а любой треугольник можно превратить в равносторонний аффинным преобразованием.

Определение. Преобразование проективной плоскости в себя называется проективным, если оно переводит прямые в проективные прямые.

Замечание. Вы, конечно, уже догадались, что такое проективная прямая на проективной плоскости: это линия, изображение которой на какой-либо (и тогда любой) аффинной карте — прямая. Например, если пользоваться аффинной картой $z = 1$, то на ней имеют изображения (задаваемые уравнениями вида $ax + by = c$) все проективные прямые проективной плоскости, кроме одной. Если представлять себе точку P проективной плоскости как прямую OP трехмерного пространства, то всякая проективная прямая этой плоскости окажется проходящей через O плоскостью трехмерного пространства. Если же представлять себе проективную плоскость как сферу с отождествленными диаметрально противоположными точками, то проективные прямые будут окружностями больших кругов сферы.

Задача 7. Докажите, что каждое аффинное преобразование плоскости продолжается до проективного преобразования содержащей ее проективной плоскости.

Термин «проективная геометрия» происходит из следующего примера (называемого также теорией перспективы).

Рассмотрим в трехмерном пространстве какие-либо две плоскости и точку O, не лежащую ни на одной из них (рис.6). ***Перспективным отображением*** одной из плоскостей на другую называется отображение, сопоставляющее каждой точке A пересечения проходящей через O прямой с

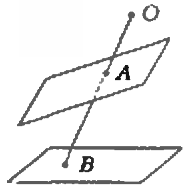


Рис.6. Перспективное преобразование

первой плоскостью точку B пересечения этой прямой со второй плоскостью. В сущности, перспективное отображение — это проектирование (выходящими из центра O лучами).

Задачи

8. Докажите, что всякое перспективное отображение является изображением проективного преобразования проективной плоскости на аффинной карте.

9. Найдите проективные преобразования плоскости, переводящие окружность а) в гиперболу, б) в параболу.

Определение. Свойство геометрической фигуры на плоскости называется *аффинным*, если оно сохраняется при аффинных преобразованиях, и *проективным*, если оно сохраняется при проективных преобразованиях.

Пример. Параллельность прямых — свойство не проективное, но аффинное.

Наука, изучающая проективные свойства фигур, называется *проективной геометрией*.

Замечание. Проективные преобразования фигур на проективной плоскости могут сильно менять длины, углы, площади и т.д. Однако такие свойства фигур, как число связных компонент фигуры на проективной плоскости, при этом не меняются (см. рис.7).

Действительно, проективные преобразования проективной плоскости — это просто аффинные преобразования трехмерного пространства, оставляющие на месте начало координат.

Свойства фигур, не меняющиеся при их непрерывных (не разрывающих) преобразованиях, называются

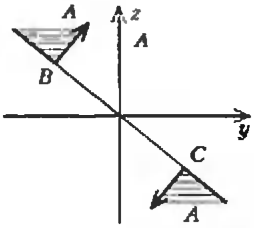


Рис.7. Изображение треугольника рисунка 3 на другой аффинной карте

топологическими, т.е. относящимися к науке о месте (от «топос» — место). Примерами топологических свойств являются число компонент связности фигуры или ее дополнения, число ветвей кривой, сходящихся в одной точке, и т.п.

Топологические свойства проективной плоскости

Проективная плоскость в малом не отличается от обычной плоскости или от сферы. Но ее глобальные топологические свойства сильно отличаются и от свойств плоскости, и от свойств сферы.

Рассмотрим, например, маленький круг — окрестность точки — на обычной плоскости, на сфере и на проективной плоскости.

Задача 10. Докажите, что дополнительные к кругу области на всех трех перечисленных поверхностях топологически различны (не переводятся друг в друга взаимно однозначными и непрерывными вместе со своими обратными отображениями).

Решение. Дополнение к кругу на сфере тоже круг. Дополнение к кругу на плоскости топологически эквивалентно круговому кольцу. Круг и круговое кольцо топологически различны. Это видно, например, из того, что всякая замкнутая кривая в круге может быть непрерывно стянута в точку, а в кольце имеется нестягиваемая замкнутая кривая (рис.8).

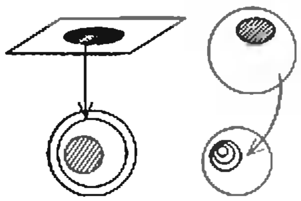


Рис.8. Дополнения к кругу на сфере и на плоскости

Как же выглядит дополнение к кругу на проективной плоскости?

Теорема. *Дополнение к кругу на проективной плоскости топологически эквивалентно листу Мёбиуса.*

Доказательство. Воспользуемся моделью, в которой проективная плоскость — это сфера с отождествленными диаметрально противоположными точками (рис.9). Дополнение к дис-

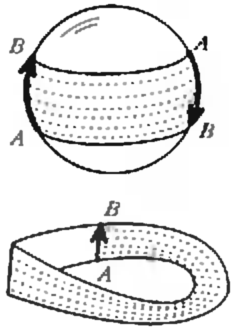


Рис.9. Дополнение к кругу на проективной плоскости

ку на проективной плоскости в этой модели оказывается поясом между, скажем, двумя тропиками (с таким же отождествлением). Часть кольца, расположенная в западном полушарии, представляет по одному разу все точки кольца, за исключением тех, которые расположены на разграничивающем полушария меридиане. Отрезки между тропиками на меридианах долготы 0° и 180° антиподальны друг другу и представляют один и тот же отрезок на проективной плоскости. Поэтому чтобы получить дополнение к кругу на проективной плоскости, надо в «прямоугольнике», расположенном в западном полушарии между тропиками, склеить отрезки ограничивающих меридианов, перевернув один из них по отношению к другому. При таком склеивании получается лента Мёбиуса: эта ее обычное определение.

Вложения окружности в проективную плоскость

Рассмотрим замкнутую гладкую несамопересекающуюся кривую на проективной плоскости.

Пример 1. Окружность, ограничивающая малую окрестность точки на проективной плоскости, является такой кривой.

Пример 2. Проективная прямая (например, бесконечно удаленная прямая, добавляемая к аффинной плоскости для получения проективной плоскости) — тоже замкнутая и несамопересекающаяся кривая на проективной плоскости. По своим внутренним топологическим свойствам обе эти гладкие кривые одинаковы (это окружности). Но расположения этих топологических окружностей на проективной плоскости совершенно различны.

Задачи

11. Докажите, что эти две замкнутые кривые на проективной плоскости гладко не эквивалентны, т.е. не существует взаимно однозначного и гладкого вместе со своим обратным преобразования проективной плоскости в себя, переводящего одну кривую в другую.

Решение. Первая кривая непрерывно стягивается по проективной плоскости в точку, а вторая — нет (рис.10).

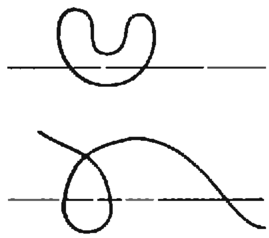


Рис.10. Стягиваемое и нестягиваемое вхождение окружности в проективную плоскость

Нестягиваемость можно доказать, например, так. Зафиксируем какую-либо проективную прямую и сосчитаем число точек пересечения рассматриваемой гладкой кривой с этой прямой, считая, что все пересечения общего положения, т.е. без касаний.

Для кривой первого типа число пересечений четно, а второго — нечетно. Действительно, две проективные прямые пересекаются в одной точке и под ненулевым углом. В процессе деформации гладкой кривой число точек пересечения меняется (при прохождении момента касания) на два. Поэтому четность этого числа сохраняется. Значит, пересечения останутся, как бы мы ни деформировали кривую (их число в моменты общего положения останется нечетным). Итак, кривая второго типа не стягивается.

12. Докажите, что каждая замкнутая гладкая несамопересекающаяся кривая проективной плоскости может быть продеформирована (в классе таких же кривых) либо к окружности, ограничивающей малую окрестность точки, либо к проективной прямой.

Указание. Первый случай реализуется всякий раз, когда число точек пересечения с (какой-нибудь и тогда любой) проективной прямой общего положения четно, а второй когда нечетно (рис.11).

Замечание. Кривая первого типа изображается на сфере двумя замкнутыми кривыми, а второго — одной.

13. Докажите, что как эллипс, так и гипербола и парабола задают гладкие замкнутые несамопересекающиеся кривые на проективной плоскости. К какому типу принадлежит каждая из них (рис.12)?

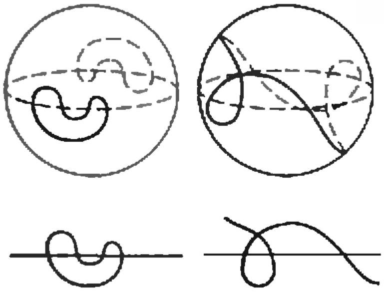


Рис. 11. Два типа кривых на проективной плоскости и их изображения на сфере

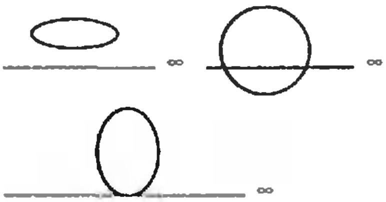


Рис. 12. Эллипс, гипербола и парабола на проективной плоскости

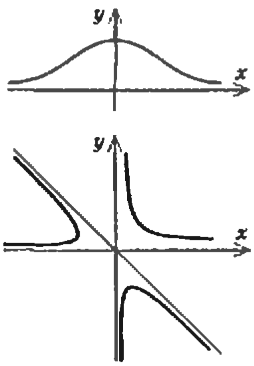


Рис. 13. Кубические кривые на проективной плоскости

14. Рассмотрим кривую на аффинной плоскости, заданную уравнением $y = \frac{1}{1+x^2}$. Докажите, что эта аффинная кривая превращается в замкнутую гладкую несамопересекающуюся кривую на проективной плоскости при добавления одной «бесконечно удаленной» точки (рис.13). К какому типу она принадлежит?

15. Рассмотрим кривую на аффинной плоскости, заданную уравнением $xy(x+y) = 1$. Докажите, что эта аффинная кривая превращается в замкнутую гладкую несамопересекающуюся кривую на проективной плоскости при добавлении трех «бесконечно удаленных» точек. Найдите тип этой кривой.

16. Рассмотрим кривую на аффинной плоскости, заданную уравнением $y = x^3$. Докажите, что эта аффинная кривая превращается в замкнутую негладкую несамопересекающуюся кривую на проективной плоскости при добавлении одной бесконечно удаленной точки.

Точки перегиба кривых

Простейшим примером точки перегиба гладкой плоской кривой является точка O на графике функции $y = x^3$ (рис.14).

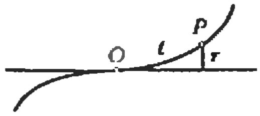


Рис. 14. Точка перегиба плоской кривой

Определение. *Точкой перегиба* гладкой плоской кривой называется точка, в которой кривая имеет со своей касательной прямой более высокий порядок касания, чем обычно (т.е. чем порядок касания окружности со своей касательной).

Обозначим расстояние от точки P кривой до исследуемой точки O через t (рис.14). Исследуемая точка O является точкой перегиба, если (и только если) равен нулю предел отношения r/t^2 расстояния r от точки P до касательной в исследуемой точке O к квадрату расстояния t от P до исследуемой точки O:

$$\lim_{t \to 0} \frac{r}{t^2} = 0.$$

Иными словами, точка перегиба — это точка, где кривизна кривой обращается в нуль (а радиус кривизны в бесконечность).

На первый взгляд свойство точки кривой быть точкой перегиба относится к евклидовой геометрии плоскости: определение использует расстояния. Однако небольшое размышление показывает, что (в отличие от величины кривизны и радиуса кривизны) свойство точки кривой быть точкой перегиба инвариантно относительно аффинных преобразований.

Задачи

17. Докажите, что свойство точки гладкой кривой быть точкой перегиба инвариантно даже относительно проективных преобразований.

Указание. Проективное преобразование переводит прямые в прямые. Расстояния между близкими изображениями близких точек на аффинной плоскости проективное преобразование меняет в ограниченное число раз. Поэтому касательные прямые кривой при проективном преобразовании переходят в касательные прямые преобразованной кривой. Порядки касания в соответствующих точках также одинаковы.

18. Докажите, что кривая $y = \frac{1}{1+x^2}$ (рис.13) имеет на бесконечности точку перегиба.

19. Докажите, что бесконечно удаленные точки кубической кривой $xy(x+y) = 1$ (рис.13) точками перегиба не являются.

20. Докажите, что кривая $y^2 = x^3$ имеет на бесконечности простейшую точку перегиба (такого же порядка, как кривая $y = x^3$ в нуле). Найдите ее касательную прямую в точке перегиба.

Замечание. Точки перегиба определены, таким образом, для гладких (хотя и самопересекающихся) кривых как на аффинной, так и на проективной плоскости. Одновременно мы получаем их определение и для кривых на сфере — ведь сфера локально не отличается от проективной плоскости.

Роль касательных прямых кривой играют при этом касающиеся кривой на сфере окружности больших кругов.

21. Рассмотрим на (аффинной) плоскости (самопересекающуюся) локально гладкую кривую, имеющую вид цифры 8. У этой кривой имеются две точки перегиба. Докажите, что при непрерывной деформации такой кривой (в классе локально гладких кривых на аффинной плоскости) будут все время получаться кривые, имеющие не менее двух различных точек перегиба (конечно, под кривой здесь понимается гладкое отображение параметризующей кривую окружности на плоскость и различными являются именно прообразы точек перегиба на этой окружности).

22. Восьмерка на сфере тоже имеет две точки перегиба. Верно ли, что сферические кривые, получающиеся из восьмерки при непрерывной деформации (в классе локально гладких кривых на сфере), имеют не менее двух точек перегиба?

Ответ. Нет, пример указан на рисунке 15.

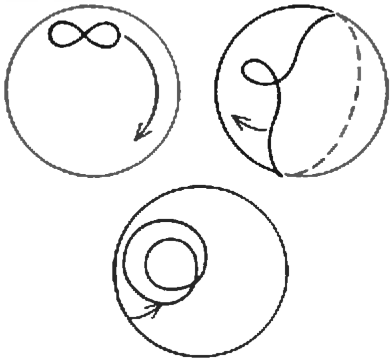


Рис. 15. Исчезновение обеих точек перегиба сферической восьмерки

23. Найдите минимальное число точек перегиба кривой заданного топологического типа (на плоскости, на сфере и на проективной плоскости). Решение этой задачи неизвестно.

Теорема Мёбиуса о трех точках перегиба

Теперь все готово для формулировки теоремы Мёбиуса:

Теорема. *Гладкая замкнутая нестягиваемая несамопересекающаяся кривая на проективной плоскости имеет не меньше трех точек перегиба.*

Пример. На кубической кривой $xy(x + y) = 1$ (рис.13) все три точки перегиба бесконечно удаленные, а на кривой $y(x^2 + 1) = 1$ одна из них бесконечно удалена, а две другие лежат в аффинной плоскости с координатами (x, y).

Замечание. Если наша кривая кубическая (т.е. задается уравнением третьей степени), то число точек перегиба равно именно точно трем, и все три точки перегиба лежат на одной прямой (в случае кривой $xy(x + y) = 1$ эта прямая — бесконечно удаленная, а в случае кривой $y(x^2 + 1) = 1$ она параллельна оси Ox). Я не знаю простого доказательства этой теоремы алгебраической геометрии. Известно много доказательств теоремы Мёбиуса (которую он сам, по-видимому, не доказал). К сожалению, ни одно из известных мне доказательств не умещается в рамки этой статьи.

Задачи

24. Будем непрерывно деформировать проективную прямую в классе локально гладких кривых на проективной плоскости (самопересечения допускаются). Верно ли, что на полученной кривой всегда будет не меньше трех точек перегиба?

Ответ. Нет, деформация показана на рисунке 16. На этом рисунке проективная плоскость изображена условно в виде круга, на граничной окружности которого отождествлены диаметрально противоположные точки. Можно считать, что этот круг изображение полусферы, из которой проективная плоскость получена склеиванием противоположных граничных точек. При деформации, изображенной на рисунке 16, в некоторый момент возникает положительно самокасающаяся кривая (самокасание положительно, если направления обоих касательных векторов, ориентирующих кривую, в точке касания совпадают).

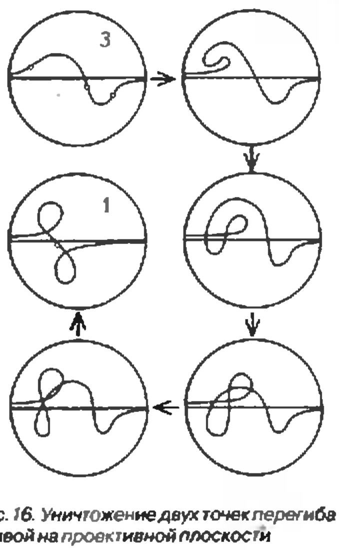


Рис. 16. Уничтожение двух точек перегиба кривой на проективной плоскости

25. Сохраняются ли три точки перегиба на локально гладкой кривой, полученной из проективной прямой непрерывной деформацией, в процессе которой ни разу не было положительного самокасания? (Недавно студент МГУ Д.А.Панов доказал, что три точки перегиба сохраняются при всех деформациях, не имеющих моментов положительного самокасания и не создающих в промежуточные моменты более пяти точек перегиба.)

Во всех известных мне примерах уничтожения двух из трех точек перегиба приходится проходить через положительное самокасание. Если бы удалось доказать, что такое прохождение неизбежно, получилось бы значительное обобщение теоремы Мёбиуса. По-видимому, такое обобщение требует лучшего проникновения в глубокие причины существования трех точек перегиба, утверждаемого теоремой Мёбиуса. В таком же положении находится и следующая теорема, родственная теореме Мёбиуса.

Теорема о теннисном мяче

Рассмотрим замкнутую гладкую несамопересекающуюся кривую на сфере (рис.17).

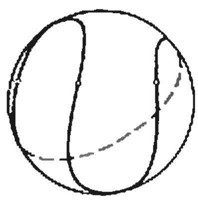


Рис. 17. Четыре точки перегиба шва теннисного мяча

Теорема. *Замкнутая гладкая несамопересекающаяся кривая, делящая сферу на две части равных площадей, имеет не меньше четырех точек перегиба.*

Пример. На поверхности теннисного мяча имеется шов, делящий площадь сферы пополам. На шве есть четыре точки перегиба; их легко обнаружить на рисунке 17.

Рассмотрим теперь самопересекающуюся кривую. Можно ли определить, делит ли такая кривая площадь сферы пополам?

В этом случае кривая делит сферу больше чем на две части, и при определении «площади, ограниченной кривой», их следует учитывать с разными коэффициентами. А именно, коэффициент в одной точке выбирается равным произвольному целому числу и увеличивается на единицу всякий раз, когда мы пересекаем кривую в положительном направлении. Если сумма площадей частей, посчитанных с такими коэффициентами, равна 2π по модулю 4π, то мы будем считать кривую делящей площадь сферы пополам.

Задачи

26. Докажите корректность этого определения: равенство суммы площадей 2π по модулю 4π не зависит ни от выбора «положительной» стороны кривой, ни от выбора значения коэффициента в исходной точке.

27. Рассмотрим непрерывную деформацию экватора сферы в классе локально гладких (быть может, самопересекающихся) кривых, делящих площадь сферы пополам. Верно ли, что всякая полученная в результате такой деформации кривая имеет не менее четырех точек перегиба?

Решение. Неверно: соответствующая деформация изображена на рисунке 18 (где площади частей A, B, C удовлетворяют соотношению $A + C = B$).

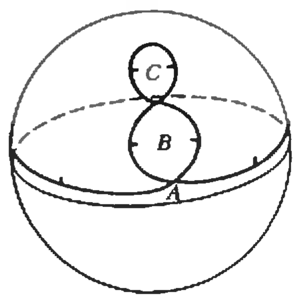


Рис. 18. Уничтожение двух точек перегиба кривой на сфере

Гипотеза. Четыре точки перегиба сохраняются при такой деформации экватора до тех пор, пока никакая замкнутая петля никакой из полученных в процессе деформации кривых не делит площадь сферы пополам.

Замечание. Рассмотрим другое свойство замкнутых несамопересекающихся кривых, делящих площадь сферы пополам: они не менее двух раз пересекают окружность каждого большого круга.

Если кривая в процессе деформации (в классе делящих пополам площадь сферы локально гладких замкнутых кривых) становится самопересекающейся, то свойство пересекать не менее двух раз любую окружность каждого большого круга может потеряться (пример доставляет кривая на рисунке 18).

Однако это свойство не может потеряться, если в процессе деформации не образовывались петли, делящие площадь сферы пополам (отличные от всей кривой).

Я не знаю простого доказательства этого элементарно-геометрического факта (не элементарные доказательства методами так называемой симплектической топологии получены Ю.В.Чекановым и А.Б.Гивенталем).

Соответствующие «многомерные аналоги» теоремы Мёбиуса не только не доказаны, но даже не сформулированы хотя бы в виде гипотез и хотя бы для поверхностей, близких к проективной плоскости в трехмерном проективном пространстве. Кубические поверхности этого вида имеют четыре линии нулевой гауссовой кривизны. Может ли их число быть меньшим, если поверхность не задается уравнением третьей степени?

Проективная двойственность

Рассмотрим множество всех проективных прямых на проективной плоскости. Это множество естественно рассматривать как (другую) проективную плоскость! Этот (довольно удивительный) факт называется явлением проективной двойственности. Он требует рассмотрения именно проективной плоскости: прямые аффинной плоскости образуют не аффинную плоскость, а лист Мёбиуса (убедитесь в этом).

Двойственностью это явление называется потому, что прямые на получившейся проективной плоскости (называемой двойственной к исходной плоскости) естественно отождествляются с точками исходной плоскости. Поэтому проективная плоскость, двойственная к плоскости, двойственной к данной, — это исходная проективная плоскость. Третью плоскость получить повторением нашей конструкции не удается — оно возвращает нас на исходную плоскость.

Определение двойственности проще всего понять, исходя из определения проективной плоскости как множества проходящих через нуль прямых обычного трехмерного векторного пространства $\{(x, y, z)\}$. Рассмотрим линейные однородные функции в этом трехмерном пространстве. Они имеют вид $ax + by + cz$ и сами образуют трехмерное векторное пространство $\{(a,b,c)\}$. Оно называется двойственным к исходному векторному пространству.

Задача 28. Докажите, что второе двойственное пространство векторного пространства совпадает с исходным векторным пространством.

Рассмотрим теперь проходящую через 0 прямую двойственного пространства. Отличные от нуля точки этой прямой — это пропорциональные друг другу (с ненулевыми коэффициентами) линейные функции $ax + by + cz$ от (x,y,z). Такая функция определяет в исходном пространстве плоскость, проходящую через начало координат. Эта плоскость не зависит от выбора точки (a,b,c) на рассматриваемой прямой двойственного пространства.

Тем самым мы сопоставили каждой (проходящей через 0) прямой двойственного пространства проходящую через 0 плоскость исходного пространства. Это естественное соответствие взаимно-однозначно. Оно превращает множество проходящих через 0 плоскостей и исходного пространства в проективную плоскость, получающуюся «проективизацией» из двойственного исходному трехмерному пространства.

Но плоскость, проходящая через 0 в исходном пространстве, превращается после его проективизации в прямую исходной проективной плоскости. Это естественное соответствие тоже взаимно однозначно.

Итак, мы построили естественное взаимно однозначное соответствие между множеством прямых на исходной проективной плоскости и множеством точек другой проективной плоскости — а именно, плоскости, являющейся проективизацией двойственного исходному векторного пространства.

Задачи

29. Рассмотрим множество всех прямых, проходящих через данную точку проективной плоскости. Докажите, что они образуют прямую на двойственной плоскости.

30. Рассмотрим множество всех касательных к окружности на исходной плоскости. Докажите, что они образуют «окружность» на двойственной плоскости.

Определение. Множество всех касательных прямых кривой на проективной плоскости называется *двойственной кривой* исходной кривой.

Задачи

31. Рассмотрим кривую $y = x^3$ на проективной плоскости. Докажите, что двойственная кривая имеет в окрестности точки, соответствующей касательной перегиба ($y = 0$), особенность («точку возврата», такую же как у кривой $u^2 = v^3$ в нуле).

32. Докажите, что вторая двойственная кривая выпуклой кривой (нигде не обращающейся в нуль кривизны) совпадает с исходной кривой.

Замечание. Это верно и для (не слишком скверных) невыпуклых кривых, если соответствующим образом определить касательные в точках, где кривая не гладкая.

33. Исследуйте кривые, проективно двойственные кривым на рисунке 13.

Ответ. Гипоциклоиды с тремя остриями (рис. 19).

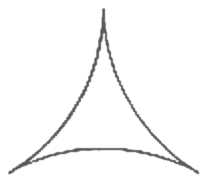


Рис. 19. Двойственная кривая кривой $y = 1/(x^2+1)$

Теорема Мёбиуса имеет особенно красивый вид, если сформулировать ее в терминах двойственной плоскости.

Рассмотрим прямую на исходной проективной плоскости. На двойственной плоскости эта прямая есть просто точка. Продеформируем исходную прямую. Касательные полученной гладкой кривой образуют на двойственной плоскости двойственную к продеформированной кривой кривую. Если продеформированная кривая близка к прямой, то двойственная ей кривая будет маленькой (близкой к точке).

Из теоремы Мёбиуса следует, что двойственная кривая продеформированной кривой имеет не менее трех точек возврата, подобно маленькой гипоциклоиде на рисунке 19.

Замечание. Можно показать, что для «большинства» малых деформаций прямой двойственная кривая будет иметь именно три точки возврата (хотя для некоторых специальных деформаций могут получаться двойственные кривые с пятью, семью и вообще с любым нечетным числом точек возврата).

Задача 34. Нарисуйте кривую, двойственную к кривой $xy(x^2 - y^2)(x - 2y) = C$. При больших значениях C исходная кривая на проективной плоскости близка к прямой (а именно, к «бесконечно удаленной прямой» плоскости $\{(x,y)\}$).

Двойственность площадь — длина

Геометрия исходной и двойственной плоскостей связаны довольно удивительным образом. Мы видели выше, что точки перегиба кривой на исходной плоскости соответствуют точкам возврата двойственной кривой на двойственной плоскости. Оказывается, длины кривых на одной из двойственных друг другу плоскостей соответствуют площадям областей, ограниченных двойственными кривыми на двойственной плоскости. Конечно, если кривые невыпуклые или самопересекающиеся, то как длины, так и площади должны здесь учитываться с соответствующими знаками.

Замечание. Длины и площади на проективной плоскости определяются как длины и площади на соответствующей сфере. Точнее говоря, мы считаем исходное трехмерное пространство евклидовым и рассматриваем в нем единичную сферу (из которой проективная плоскость получается склеиванием диаметрально противоположных точек). Длины и площади, определенные таким образом, не сохраняются при проективных преобразованиях и не являются проективными характеристиками фигур.

Двойственная проективная плоскость может теперь рассматриваться как та же самая сфера. Для этого достаточно сопоставить каждой плоскости, проходящей через начало координат нашего евклидова пространства, ортогональную ей прямую (также выходящую из начала координат). Отобразив таким образом двойственную плоскость на исходную, мы получаем способ измерения длин, углов и площадей и на двойственной плоскости.

Пример. Кривые, делящие площадь сферы пополам, превращаются при переходе к двойственным кривым в кривые нулевой длины (знаки длин отрезков двойственной кривой меняются при прохождении через каждую точку возврата).

Задача 35. Докажите, что огибающая семейства нормалей выпуклой плоской кривой имеет нулевую длину.

Рассмотрим гладкую ориентированную кривую на сфере радиусом 1.

Продолжим каждую касательную большую окружность на расстояние $\pi/2$ вперед от точки касания.

Задача 36. Докажите, что получающаяся кривая гладкая (это верно, даже если исходная кривая имела простейшие точки возврата типа $x^2 = y^3$: нужно только, чтобы направление «вперед» было непрерывным в точке возврата).

Кривая, *полученная* описанной здесь конструкцией продолжения касательных на $\pi/2$, называется *производной* исходной кривой.

Задачи

37. Найдите производную параллели сферы.

Ответ. Экватор, параллельный этой параллели.

38. Докажите, что производная замкнутой несамопересекающейся кривой на сфере делит площадь сферы пополам.

Этот результат двойственен свойству огибающей семейства нормалей иметь нулевую длину (которое выполняется как для кривых на плоскости, так и для кривых на сфере — подумайте, почему).

Двойственность площадь — длина относится к области математики, называемой интегральной геометрией. Интегральная геометрия имеет многочисленные внутриматематические и внематематические применения (например, в томографии, в теории вероятностей, в топологической теории характеристических классов и в квантовой теории поля).

Некоторые важные результаты в этой области были открыты не математиками, а астрофизиками (в связи с проблемой интерпретации результатов телескопических и радиотелескопических измерений). Топологическая теория характеристических классов возникла в качестве побочного продукта исследований в области математической статистики. Эти примеры еще раз показывают, как таинственно связаны между собой все разделы математики от самых абстрактных до самых прикладных.

Задача 39. Плоскую ограниченную кривую случайно бросают на лист линованной бумаги и подсчитывают среднее по большому числу независимых бросаний число пересечений с линиями бумаги. Докажите, что (предельное) среднее число пересечений пропорционально длине кривой (и не зависит от ее формы). Подсчитайте это число для иголки длиной 1, бросаемой на плоскость с расстояниями между соседними линиями, равными 1 («задача Бюффона»).

Ответ. $2/\pi$ (так как для окружности длиной π число пересечений всегда равно 2).

Что такое проективная топология?

Со времен Ф. Клейна (т.е. более ста лет) математики классифицируют различные отделы геометрии в зависимости от того, при каких преобразованиях сохраняются соответствующие свойства фигур. Например, углы и длины относятся к евклидовой геометрии, они сохраняются при евклидовых движениях (а если не учитывать ориентации, то и при отражениях).

Понятия медианы и центра тяжести треугольника относятся к аффинной геометрии, а понятие «точка перегиба» — к проективной. С этой абстрактной точки зрения топология — это наука о свойствах фигур, сохраняющихся при всех непрерывных (вместе со своими обратными) преобразованиях, а дифференциальная топология — о свойствах, сохраняющихся при гладких (дифференцируемых вместе со своими обратными) преобразованиях.

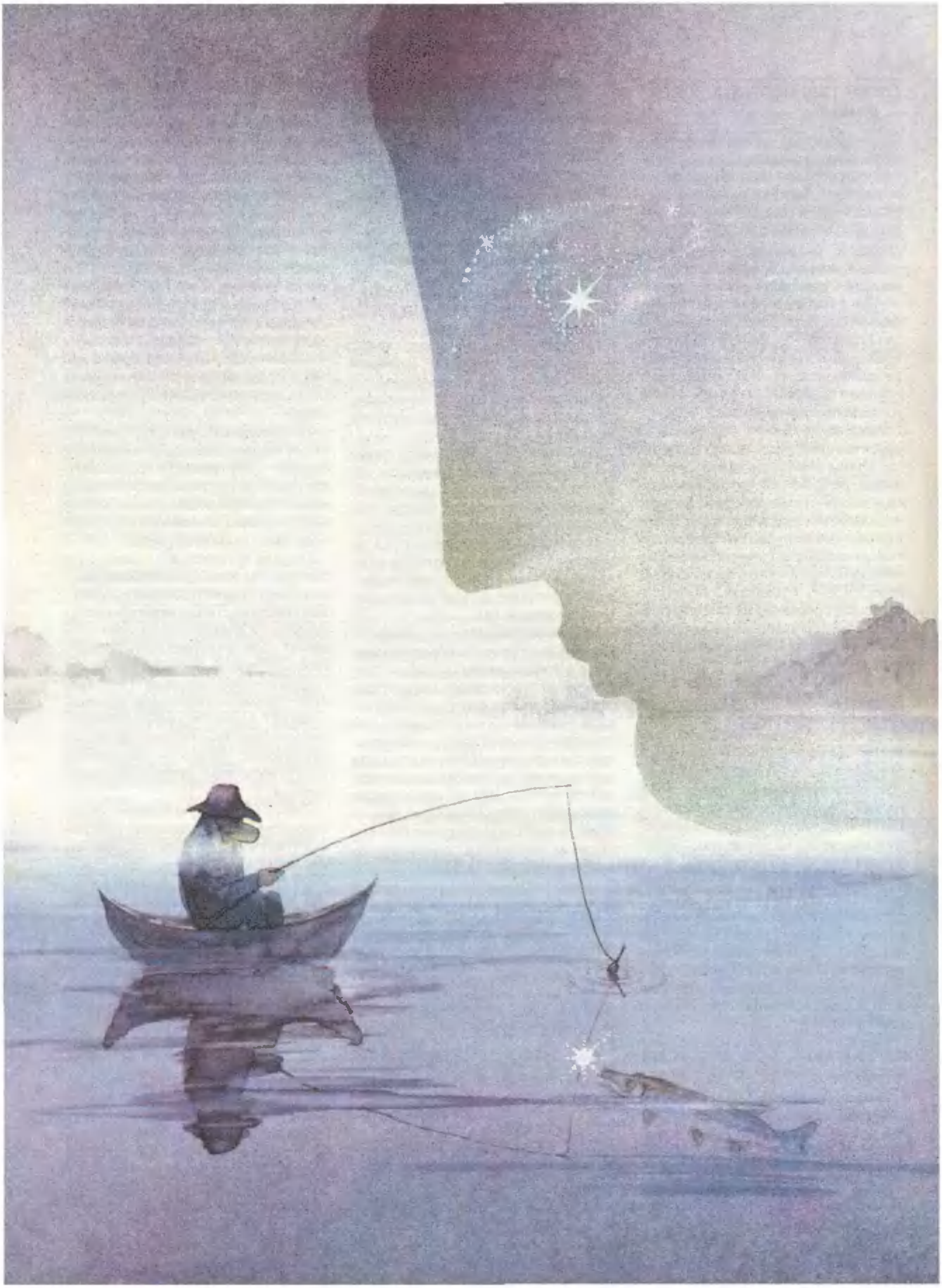
Например, квадрат и круг на плоскости топологически эквивалентны, а гладко — нет. Недавно выяснилось, что существуют фальшивые четырехмерные пространства, топологически эквивалентные обычному четырехмерному пространству, а гладко — нет.

Теорема Мёбиуса показывает, что абстрактная точка зрения неоправданно сужает предмет. Например, утверждение о трех точках перегиба нельзя включить в дифференциальную топологию, потому что понятие точки перегиба инвариантно не относительно всех гладких преобразований (а только относительно проективных преобразований). Между тем теорема Мёбиуса имеет явно топологическую природу, которая, однако, не умещается в прокрустово ложе абстрактного определения.

Я предлагаю такую терминологию: топология (с теми или иными приставками) изучает не только топологические, а вообще все дискретные инварианты фигур, рассматриваемых в какой-либо геометрической теории (определяющей приставку).

Например, число вершин выпуклого многоугольника на аффинной плоскости является дискретным инвариантом выпуклого многоугольника. Понятие выпуклого многоугольника относится к аффинной геометрии, поэтому число вершин — инвариант аффинной топологии.

Число точек перегиба плоской кривой — инвариант проективной топологии, и теорема Мёбиуса является простейшим фактом этой области науки, развитие которой надолго задержалось из-за того, что она не попадала в абстрактно-алгебраическую номенклатуру математических наук.



Тайна «утренней звезды»

В.СУРДИН

ОБЫЧНО, употребив в названии научно-популярной статьи слово «тайна», ее автор непременно приводит читателя к разгадке этой тайны. Но на сей раз будет не так: у нас действительно нет ключа к одной астрономической загадке, и мы надеемся лишь нацелить читателя на ее решение. Может быть, вам посчастливится распутать эту проблему.

Загадка вращения Венеры

Как известно, Венера по своей массе и размеру почти точная копия Земли. Но расположена она немного ближе к Солнцу и совершает один оборот вокруг него за 224,7 суток (здесь и дальше мы имеем в виду земные сутки). А вот о том, как вращается Венера вокруг своей оси, астрономы долгое время ничего не знали, поскольку сквозь ее толстую атмосферу не видны детали поверхности. Однако радиолокация помогла пробиться сквозь облачный слой Венеры и узнать, что она вращается вокруг своей полярной оси очень медленно и к тому же в сторону, обратную ее орбитальному обращению, совершая один оборот вокруг оси в течение 243 суток. В этом отношении она совсем не похожа на родственные ей планеты — Землю и Марс, у которых направление суточного вращения совпадает с направлением орбитального обращения и происходит гораздо быстрее: с периодом около 1 суток.

Но Венера преподнесла еще одну загадку: наблюдая движение облаков в атмосфере Венеры, астрономы установили, что верхние слои атмосферы вращаются как бы сами по себе, отдельно от тела планеты, совершая один оборот в том же направлении, что и планета, но существенно быстрее — всего за 4 суток. А надо заметить, что венерианская атмосфера значительно плотнее и массивнее земной. Естественно, у некоторых исследователей появилось желание объяснить необычное вращение Венеры взаимодействием твердого тела планеты с ее массивной атмосферой.

Например, в один из журналов была прислана рукопись, озаглавленная «Атмосфера Венеры — гигантская тепловая машина». В ней утверждалось, что, перерабатывая поток солнечного тепла, венерианская атмосфера способна повлиять на вращение планеты. Для доказательства был сделан следующий расчет. Мощность солнечного излучения, попадающего в атмосферу Венеры, составляет около 10^{17} Вт. Следовательно, за несколько миллиардов лет эволюции планета получила от Солнца 10^{34} Дж тепла. В то же время, если бы Венера, подобно Земле, вращалась с периодом в 24 часа, то кинетическая энергия ее вращения была бы порядка 10^{29} Дж. Как видим, атмосфера получила от Солнца достаточно энергии, чтобы много раз остановить и вновь раскрутить планету в любую сторону. Авторов гипотезы этот расчет вполне убедил в справедливости идеи. А вас, дорогой читатель?

«Три кита» механики

Проверку любой идеи физик начинает с *законов сохранения*. В нашей задаче с вращением Венеры закон сохранения *энергии*, как мы убедились, выполняется с запасом. А какие еще величины должны сохраняться? Разумеется, *импульс* и *момент импульса*. На этих «трех китах» стоит механика. Поскольку речь идет о вращении, нас особенно интересует момент.

Способность тела сохранять состояние вращения или передавать его другим телам характеризуется *моментом импульса*. Иногда эту величину называют также кинетическим моментом, моментом количества движения или угловым моментом. У импульса и момента импульса есть немало общего.

С импульсом (или, как говорили раньше, количеством движения) школьники знакомы хорошо. Это векторная величина, направленная в сторону движения тела и численно равная произведению его массы на скорость:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \qquad (1)$$

При взаимодействии тел суммарный импульс сохраняется. Пример тому — прыжок человека с лодки: вы прыгаете в одну сторону, а лодка начинает двигаться в противоположную. Так же хорошо проявляет себя этот закон сохранения на льду: если вы с товарищем стоите на коньках, то, оттолкнувшись друг от друга, движетесь в противоположных направлениях, причем кто легче — тот быстрее.

Однако на земле при наличии трения этот закон сохранения не столь очевиден. Автомобиль начинает движение, а земной шар при этом остается на месте. Разумеется, и он тоже получает импульс в противоположном направлении, но при своей гигантской массе испытывает мизерное изменение скорости. Поэтому, будучи уверенными в хорошем сцеплении колес с землей, мы можем не заботиться о законе сохранения импульса: импульс отдачи всегда «уйдет в землю», причем планета при этом практически не изменит своего движения и останется удобной системой отсчета. Зная мощность двигателя и массу автомобиля, вы легко рассчитаете время его разгона до определенной скорости, используя закон сохранения энергии и даже не вспомнив о сохранении импульса.

А вот космическое пространство в этом смысле больше похоже на лед: там импульсом пренебрегать нельзя. Вот пример: если ядерный двигатель звездолета массой m способен развивать мощность W, то с каким ускорением разгоняется звездолет? Оказывается, задачу эту не решить, пока не известно, есть ли у этого звездолета запас рабочего тела и с какой скоростью оно истекает из двигателя. Ведь мощность реактивного мотора расходуется не только на разгон звездолета вперед, но и на разгон рабочего тела назад, причем — с равными по абсолютной величине импульсами. Как видим, в космосе, где «точку опоры» приходится возить с собой, закон сохранения импульса — вещь серьезная.

Столь же серьезен и закон сохранения момента импульса. Момент импульса $\vec{L}$ — величина векторная. В качестве простого (но важного для нас) примера рассмотрим тело, обладающее осью симметрии и вращающееся относительно этой оси. В этом случае направление вектора $\vec{L}$ совпадает с направлением вектора угловой скорости $\vec{\omega}$, т.е. направлено вдоль оси вращения в ту ее сторону, глядя в которую мы видим тело вращающимся по часовой стрелке (так называемое правило буравчика). Напомним, что величина угловой скорости, измеряемая в радианах за единицу времени, связана с периодом вращения тела (T):

$$\omega = 2\pi / T.$$

Для вращающегося тела угловая скорость играет ту же роль, что и линейная скорость для прямолинейно движущегося тела. В определении импульса (1) его величина связана со скоростью через меру инертности тела — его массу. Подобным же образом связаны между собой момент импульса и угловая скорость, но для них мерой инертности тела служит его момент инерции I:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \qquad (2)$$

Для точечной массы момент инерции вычисляется по формуле

$$I = m \cdot R^2,$$

где R — расстояние точки от оси вращения. Кстати, величину момента импульса в этом случае можно представить еще и так:

$$L = \left(mR^2\right)\cdot\left(2\pi/T\right) = \\ = mR\cdot 2\pi R/T = mRv, \qquad (3)$$

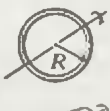
где v — линейная скорость кругового вращения. У жесткой системы тел момент инерции вычисляется путем сложения моментов инерции его составных частей:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2,$$

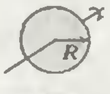
а у непрерывных тел — путем интегрирования по всему их объему:

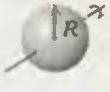
$$I = \int R^2 dm.$$

Ниже приведены моменты инерции некоторых тел простой формы:

Тонкое кольцо  mR^2

Сплошной цилиндр  $\frac{1}{2}mR^2$

Диск  $\frac{1}{2}mR^2$

Шар  $\frac{2}{5}mR^2$

Тонкий стержень  $\frac{1}{12}ml^2$

Рассмотрим примеры выполнения закона сохранения момента импульса.

Пример 1. Вы неподвижно сидите на стуле, способном легко вращаться вокруг вертикальной оси (такой стул называют скамьей Жуковского), и держите в руках массивное колесо

Рис. 1

(рис.1). Очевидно, момент импульса системы «человек — стул — колесо» равен нулю. Теперь попробуйте сами раскрутить колесо — при этом вы вместе со стулом начнете вращаться в противоположном направлении: момент импульса колеса компенсируется моментом импульса системы «человек — стул». А в сумме по-прежнему ноль.

Пример 2. Фигуристка вращается на коньках, широко раскинув руки. Затем она резко прижимает руки к туловищу, и угловая скорость ее вращения заметно увеличивается (рис.2).

Рис 2

Приблизив руки к оси вращения, фигуристка уменьшила момент инерции тела, что при сохранении момента импульса вызвало увеличение угловой скорости ($\omega = L/I$).

Однако опыт подсказывает нам, что для тел, связанных с поверхностью земли, закон сохранения момента импульса так же маловажен, как и закон сохранения самого импульса. Например, видоизменим опыт со скамьей

Рис.3

Жуковского: будем раскручивать колесо, держа его ось перпендикулярно оси скамьи (рис.3). В этом случае скамья не сдвинется с места. А куда же делся момент отдачи? «Ушел в землю»! Разумеется, вращение планеты от этого заметно не изменилось.

А вот еще один пример: требуется рассчитать движение качелей (рис.4). В этом случае мы используем закон сохранения энергии, отмечая ее переход из потенциальной формы в кинетическую, а законом сохранения момента импульса не пользуемся. Потому что сразу видно, что у самих качелей момент импульса не сохраняется — они попеременно вращаются вокруг оси то в одну сторону, то в другую. Где же, в таком случае, тот «резервуар момента импульса», с которым качели непрерывно им обмениваются? Да все та же Земля!

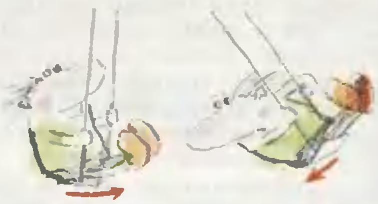


Рис.4

Решая «земные» задачи, инженеры редко задумываются о сохранении момента. Как правило, все двигатели закреплены на массивной опоре и не вращаются в противоположном направлении, когда их маховик начинает раскручиваться. Правда, в некоторых случаях, скажем в вертолетостроении, проблема момента очень важна. Несущий винт вертолета постоянно сообщает момент импульса воздуху, а момент отдачи передается на корпус машины. Чтобы стабилизировать корпус, используют либо два противоположно вращающихся несущих винта (вертолеты Н.И.Камова), либо дополнительный хвостовой винт, вынесенный подальше от оси вращения. Но все же в земной практике таких примеров немного.

А вот при решении космических задач без законов сохранения импульса и момента импульса не обойтись. Нужно развернуть в полете космический аппарат — включай реактивные двигатели ориентации (в этом случае момент отдачи уносят продукты сгорания) или запускай гиродины — массивные маховики, раскручивающиеся в сторону, противоположную повороту аппарата.

Чтобы изменить импульс тела, нужно приложить силу $\vec{F}$, а для изменения момента импульса нужен момент силы

$$\vec{M} = [\vec{r}\,\vec{F}], \qquad (4)$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор, направленный к точке приложения силы.[1] Здесь используется не алгебраическое, а векторное произведение, чтобы учесть возможность различного взаимного направления $\vec{r}$ и $\vec{F}$.

Для тех, кто не знаком с операцией векторного произведения, разъясним, что вектор момента силы $\vec{M}$ направлен перпендикулярно векторам $\vec{r}$ и $\vec{F}$, ориентирован по правилу буравчика, а его модуль равен

$$M = rF\sin\alpha,$$

где α — угол между направлениями $\vec{r}$ и $\vec{F}$ (рис.5). Величину $d = r\sin\alpha$, как вы наверное догадались, называют плечом силы.

Если момент силы действует на тело в течение времени Δt, то момент импульса этого тела изменится на величину $\Delta\vec{L}$:

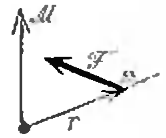


Рис.5

$$\Delta\vec{L} = \vec{M}\,\Delta t.$$

Кроме того, во вращении тела запасена кинетическая энергия (E). Вспомнив, что $v = \omega R$, легко понять, что величина этой энергии составляет

$$E = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Как видим, и здесь момент инерции служит аналогом массы.

В поисках разгадки

А теперь мы вернемся к загадке вращения Венеры. Если предположить, что, родившись, она вращалась так же, как Земля, то что могло изменить ее вращение? Нет сомнения, что атмосфера планеты способна преобразовывать солнечное тепло в механическую работу. Именно это тепло вызывает вертикальные и горизонтальные потоки воздуха, которые передвигают облака и песчаные барханы, подгоняют яхты и вращают лопасти ветряных двигателей. Однако, рассматривая планету как совокупность ее твердого тела и атмосферы, нам нужно помнить о сохранении суммарного момента импульса: тело планеты и атмосфера могут им обмениваться, но не могут изменить полной величины момента.

Как ни обширна венерианская атмосфера, все же ее масса в 20 тысяч раз меньше массы планеты, а момент инерции, соответственно, меньше в 10 тысяч раз. Поэтому, если бы планета первоначально вращалась с периодом 24 часа, а затем практически остановилась, передав весь свой момент атмосфере, то воздушная оболочка планеты должна была бы вращаться сейчас с периодом 24 ч / 10000= = 8,6 с. При такой скорости она бы мгновенно улетела в космос!

Значит, нужно искать внешние тела, с которыми Венера могла бы обменяться моментом импульса. Это мог бы быть, например, спутник Венеры, подобный нашей Луне. Кстати, Луна своим приливным влиянием тормозит вращение Земли и в будущем сделает его очень медленным, имеющим период в десятки современных суток (об этом мы подробнее расскажем в отдельной статье). Возможно, спутник Венеры проделал со своей планетой то же самое, а затем был ею потерян.

Но, оказывается, существует еще один агент, способный влиять на вращение Венеры, — это солнечный свет! Как мы помним, мощность солнечного излучения, попадающего на Венеру, $w \approx 10^{17}$ Вт. Значит, сила давления света на диск планеты составляет $F = w/c \approx 3\cdot10^{8}$ Н. Если у диска Венеры всюду одинаковая отражающая способность, то никакого момента силы при этом не возникнет в виду полной симметрии. Но если в атмосфере Венеры постоянно поддерживается асимметрия между утренним и вечерним полушариями, то налетающий на планету поток фотонов мог бы передавать ей момент импульса.

В простейшем случае, если бы одно полушарие Венеры было черное, полностью поглощающее свет, а другое полушарие белое, отражающее, то давление света было бы способно раскрутить планету до периода в несколько суток. Либо, напротив, остановить ее вращение, происходившее с таким периодом. Разумеется, реальная асимметрия венерианской атмосферы не так сильна, но все же она существует: между утренним и вечерним полушариями замечено небольшое различие как в высоте атмосферных слоев, так и в их отражательной способности. Вызвано оно, по-видимому, дневным нагревом и ночным охлаждением атмосферы.

Итак, используя приведенные в статье формулы, вы можете сами разрабатывать вероятные сценарии эволюции вращения Венеры. Не забудьте также о корпускулярных потоках солнечного ветра, налетающих на планету: быть может, и они могут изменить ее вращение. Но в каждом вашем сценарии суммарный момент импульса всех участников взаимодействия должен непременно сохраняться!

---

[1] *Отметим, что общее определение момента импульса материальной точки имеет вид, очень похожий на определение момента силы (4):*

$$\vec{L} = [\vec{r}\,\vec{p}],$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки. В частном случае движения точки по окружности получим формулу (3). Момент импульса системы точек равен сумме их моментов, что в случае твердого тела, вращающегося вокруг оси симметрии, приводит к формуле (2). В общем случае $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ не параллельны, но объекты, о которых идет речь в данной статье (атмосфера, планета), очень симметричны. Для тел, обладающих сферической симметрией, $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ всегда параллельны. (Прим. ред.)

Информация и математика

В. БОЛТЯНСКИЙ, А. САВИН

Задумывались ли вы о роли информации в нашей жизни? А подумать есть о чем, ведь целых десять лет мы получаем в школе (а многие еще 5 – 6 лет – в вузе) необходимую информацию для полноценной самостоятельной жизни. Но помимо учебников и рассказов учителей мы получаем огромные дозы информации из телевизоров, радиоприемников, книг, газет. Она хранится у нас в виде книг, магнитофонных и видеокассет, фотографий, кинопленок, рисунков. В библиотеках хранятся миллионы томов книг, художественных и научных журналов. В специальных хранилищах размещаются патенты с описаниями различных изобретений. Всю эту информацию необходимо упорядочить, сделать доступной для пользования, т.е. иметь возможность получать ответы на интересующие нас вопросы. Не менее важная задача – передача информации без искажений и в короткие сроки.

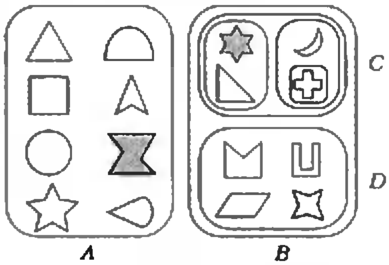
Эти размышления приводят нас к убеждению в необходимости иметь математическую теорию, обслуживающую описанный круг проблем. Такая теория существует и называется теорией информации.

Начнем с игры

Рассказ об этой теории начнем с детской игры, в которой ведущий задумывает некоторый предмет или понятие, а остальные участники должны отгадать, что же было задумано, задавая вопросы и получая на них только ответы «да» и «нет». Например: «Живое?» – «Нет»; «Съедобное?» – «Да»; «Сладкое» – «Нет»; «Белое? – «Да»; «Белый хлеб?» – «Да».

Но не всегда игра оканчивается так быстро. Дело в том, что в этой игре не очерчивается круг первоначально задумываемых предметов. Если же набор возможных предметов точно указан, то поиск существенно ускоряется. Пусть, например, задуман один из 16 предметов. Конечно, можно спрашивать: «Это первый предмет?», «Это второй предмет?» Если повезет, то мы отгадаем, задав лишь один вопрос, а если совсем не повезет, то число вопросов может быть 15. А почему не 16? Да потому, что в случае пятнадцати ответов «нет» мы уже выясняем, что загадан шестнадцатый предмет. А можно ли сократить число вопросов, применив другую систему отгадывания?

Применим следующую стратегию. Разобьем множество из этих 16 предметов на два подмножества A и B, содержащие по 8 предметов, и зададим вопрос: «Содержится ли задуманный предмет во множестве A?». При любом ответе (да или нет) мы будем знать 8 элементов, среди которых находится задуманный. Теперь разобьем эти 8 элементов на два подмножества C и D, содержащих по 4 элемента, и зададим второй вопрос: «Содержится ли задуманный предмет во множестве C?». После получения ответа мы будем знать, среди каких четырех предметов находится задуманный. Следующий, третий, вопрос мы зададим, предварительно разбив эти четыре элемента на две пары, и узнаем, в какой паре находится загаданный элемент. Четвертый вопрос мы зададим, указывая на один из предметов этой пары: «Этот предмет был задуман?». Получив ответ (да или нет), мы окончательно определим задуманный предмет.



Как быстро угадать задуманный предмет

Математизируем стратегию

Опишем эту стратегию иначе. Будем обозначать ответ «да» цифрой 1, а ответ «нет» – цифрой 0. Запишем полученные ответы на наши четыре вопроса один за другим. Пусть мы получили такую последовательность ответов: «нет», «да», «да», «нет», тогда мы получим следующую запись: 0110. Эту запись можно рассматривать как число в двоичной системе счисления. Получая разные серии ответов, мы можем получить любое из чисел от 0000 до 1111, т.е. все числа от 0 до 15 в десятичной системе счисления, всего 16 чисел. Теперь становится ясно, почему, задав 4 вопроса, мы сможем отгадать, какой из 16 предметов был задуман.

Давайте еще более математизируем процесс отгадывания. Для этого сначала занумеруем 16 рассмотренных предметов двоичными числами от 0000 до 1111 и зададим 4 вопроса в следующей форме: «Равна ли единице первая цифра?», «Вторая цифра?», «Третья?», «Четвертая?». На каждый из таких вопросов мы получаем 1 бит информации. Слово «бит» возникло от английского словосочетания binary digit – двоичная единица. Итак, для отгадывания предмета из 16-элементного множества надо получить 4 бита информации.

А можно ли отгадать задуманный предмет из набора в 65 предметов, задав 6 вопросов с возможными ответами «да – нет», т.е. получив 6 битов информации? Но ведь шесть битов информации задают шестибуквенное слово в алфавите с двумя знаками 0 и 1, например, 001101, 100111 и т.п., а таких слов существует всего $2^6 = 64$. Поэтому, если сопоставлять предметам такие слова, то каким-то двум предметам будет соответствовать одно и то же слово, значит шести вопросов может оказаться недостаточно для угадывания предмета.

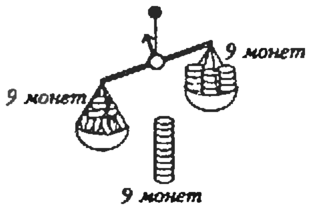
А сколько битов информации понадобится для угадывания предмета совокупности из q предметов? Обобщая сказанное, можно утверждать, что взяв число k, для которого $2^{k-1} < q \le 2^k$, мы получим, что такое число битов информации достаточно для отгадывания предмета, а $(k - 1)$ бит информации еще не достаточен. Для 100 предметов достаточно 7 битов информации, поскольку $2^6 < 100 \le 2^7$.

Неравенства $2^{k-1} < q \le 2^k$ означают, что $(k - 1) < \log_2 q \le k$, т.е. k – наименьшее натуральное число, для которого $k \ge \log_2 q$. Таким образом, чтобы отгадать задуманный элемент множества из q элементов, нужно иметь не меньше $\log_2 q$ битов информации. Например, $\log_2 100 = 6{,}644$, а так как мы не можем задать нецелое число вопросов, то нужно задать 7 вопросов, получив 7 битов информации.

Поиск фальшивых монет

Рассмотрим теперь такую задачу. Представим, что имеется 27 монет одинакового достоинства, среди которых имеется одна фальшивая монета, более тяжелая, чем остальные, но не отличающаяся от них по внешнему виду. Также имеются чашечные весы без гирь. Требуется обнаружить фальшивую монету с помощью не более трех взвешиваний.

Если мы положим часть монет на одну чашку весов, еще столько же — на другую, то результат взвешивания даст нам информацию не только о монетах на чашках весов, но и о оставшихся монетах. Понятно, что монеты выгоднее всего разложить на три равные кучки по 9 монет. Одну из них следует



Как найти фальшивую монету

положить на левую чашку весов, вторую — на правую, а третью оставить в стороне. При взвешивании возможны три результата:

1) перетянет левая чашка,
2) перетянет правая чашка,
3) весы окажутся в равновесии.

В первом из этих случаев, очевидно, фальшивая монета лежит на левой чашке весов, во втором — на правой, а в третьем — в отложенной кучке.

Итак, после первого взвешивания мы выделяем 9 монет, среди которых находится фальшивая. Теперь разделим эти 9 монет на три части по три монеты в каждой. Положим одну часть на левую чашку весов, другую — на правую, а третью вновь отложим в сторону. После второго взвешивания, аналогично предыдущему, мы обнаруживаем ту кучку монет, в которой лежит фальшивая монета. Остается одну из этих трех монет положить на левую чашку весов, другую — на правую, а третью отложить в сторону. Третье взвешивание позволит нам определить фальшивую монету.

Если же даны 3^k монет, среди которых одна более тяжелая, то k взвешиваний позволят однозначно указать фальшивую монету. То же справедливо для q монет, если $3^{k-1} < q \le 3^k$. Мы видели, что для угадывания одного предмета из q предметов требуется иметь $\log_2 q$ битов информации. В частности, при $q = 3^k$ мы получаем, что для нахождения более тяжелой монеты нужно иметь $\log_2 3^k = k\log_2 3$ битов информации. А так как для нахождения (угадывания) фальшивой монеты достаточно провести k взвешиваний, то эти k взвешиваний дают $k\log_2 3$ битов информации. Следовательно, каждое взвешивание дает $\log_2 3 \approx 1{,}584$ бита информации.

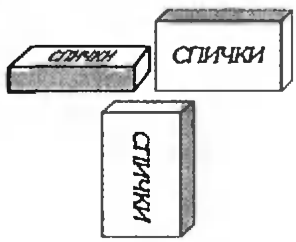
Пусть теперь имеется 6 монет, из которых две фальшивые — более тяжелые, и мы хотим их определить. Несложно подсчитать, что две монеты из шести можно выбрать пятнадцатью способами. Значит, чтобы выбрать один из этих способов, нужно иметь $\log_2 15 = 3{,}907$ битов информации. Заметим, что три взвешивания дают $3\log_2 3 \approx 4{,}752$ бита информации, а два взвешивания лишь $2\log_2 3 \approx 3{,}168$ бита информации. Поэтому двух взвешиваний может не хватить, а трех взвешиваний оказывается достаточно для нахождения этих двух фальшивых монет. Попробуйте сами найти процедуру такого взвешивания.

Немного о вероятности

Когда мы подбрасываем монету, она может упасть как орлом, так и решкой. Когда мы бросаем игральную кость, с равным успехом может выпасть любая из шести ее граней. Когда мы наугад вытаскиваем карту из колоды, для любой из них шансы быть вытащенной одинаковы. Такие события математики называют равновозможными. А каковы шансы вытащить из колоды туза? Из 36 возможных исходов нашего эксперимента нас устроят лишь четыре, поскольку в колоде находится четыре туза. Значит, шансы вытащить туза у нас равны $4/36 = 1/9$. Шансы вытащить карту бубновой масти равны $9/36 = 1/4$. На основе таких рассмотрений было введено понятие *вероятности события*, как отношения количества равновозможных событий, соответствующих рассматриваемому событию, к общему числу равновозможных событий.

Исходя из такого определения, мы получаем, что выпадение орла при бросании монеты имеет вероятность $1/2$, как и выпадение решки. Выпадение шести очков при бросании игральной кости равно $1/6$, а выпадение четного числа очков равно $3/6 = 1/2$.

Однако не всегда удается множество возможных исходов опыта представить как множество равновозможных событий. Например, при бросании спичечного коробка шесть возможных положений коробка, возникающих после бросания, уже не являются равновозможными. Коробок будет чаще падать на большую грань, чем на боковую или торец. В таких случаях каждому из этих событий приписывают свои вероятности — неотрицательные числа, сумма которых равна единице. Для спичечного коробка можно принять вероятность выпадения грани с этикеткой равной 0,46, для грани



Как может упасть коробок

с нанесенной на ней смесью — равной 0,03, и 0,01 для каждого из торцов. Конечно же, такое распределение получено для конкретной коробки спичек. Оно может оказаться другим для другой формы коробки и при другой степени наполненности ее спичками. Другим примером может служить появление той или иной буквы в слове. Вспомним телевизионное «Поле Чудес». Когда ведущий предлагает игроку назвать букву в слове, где еще неизвестны все буквы, то никто из играющих еще не называл буквы «ъ», поскольку она встречается очень редко, а вот буквы «е» или «а» называют почти всегда и с успехом.

Если формализовать проведенные рассуждения, то приходим к следующему определению. Рассматривается множество элементарных событий: A_1, A_2, ..., A_n, каждому из них сопоставлено неотрицательное число: p_1, p_2, ..., p_n, причем $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. *Вероятностью произвольного события называется сумма вероятностей входящих в него элементарных событий.*

В случае бросания кости элементарными событиями будут выпадения той или иной грани, как и в случае бросания спичечного коробка, а в случае вытаскивания карты из колоды элементарными событиями являются все 36 возможных вариантов.

Энтропия

Назовем задачу об отгадывании одного из шестнадцати предметов задачей α. Как мы видели, для ее решения требуется 4 бита информации. Условимся говорить, что *энтропия* (неопределенность) задачи α равна 4 битам и писать $H(\alpha)=4$, а для задачи β отгадывания одного элемента из множества, содержащего q элементов, энтропия, вносимая всеми элементами этого множества, равна $H(\beta)=\log_2 q$. Можно считать, что каждый элемент этого множества вносит энтропию, равную $\frac{1}{q}\log_2 q$ или $-\frac{1}{q}\log_2\frac{1}{q}$.

Но первоначально каждый элемент этого множества имел одну и ту же вероятность оказаться искомым, и эта вероятность равнялась $p=\frac{1}{q}$. Поэтому вместо выражения $-\frac{1}{q}\log_2\frac{1}{q}$ можно написать $-p\log_2 p$. Значит, каждый элемент множества вносит неопределенность, равную $-p\log_2 p$. Отметим, что число $-p\log_2 p$ положительно, так как $0<p<1$, и поэтому $\log_2 p<0$.

Рассмотрим, наконец, общий случай, в котором имеется n элементарных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Событие A_1 вносит неопределенность $-p_1\log_2 p_1$, событие A_2 вносит неопределенность $-p_2\log_2 p_2$ и т.д., поэтому общая неопределенность испытания γ с этими элементарными исходами равна

$$H(\gamma)=-p_1\log_2 p_1-$$
$$-p_2\log_2 p_2-\ldots-p_n\log_2 p_n. \quad (*)$$

Приведенные рассуждения вовсе не служат доказательством этой формулы. Они показывают лишь целесообразность такого понимания энтропии. Формулу (*) следует считать определением энтропии.

Найдем энтропию при бросании монеты. Здесь имеются два элементарных события A_1 и A_2 — выпадение орла и выпадение решки, каждое из которых имеет вероятность $1/2$, т.е. $p_1=p_2=1/2$. По формуле (*) для этого испытания ε получаем энтропию, равную

$$H(\varepsilon)=-\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}=1,$$

т.е. неопределенность составляет один бит.

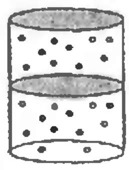
Еще один пример. Пусть в ящике лежат три белых шара и один черный. Испытание δ будет заключаться в том, что наудачу выбирается один из шаров. Обозначим элементарное событие, заключающееся в вытаскивании белого шара, через A_1, а через A_2 — выбор черного шара. Их вероятности равны $p_1=3/4$ и $p_2=1/4$. По формуле (*) имеем:

$$H(\delta)=-\frac{3}{4}\log_2\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4}=$$
$$=2-\frac{3}{4}\log_2 3\approx 0{,}812.$$

Как мы видим, энтропия оказалась меньше одного бита, что и понятно, поскольку в ящике белых шаров больше, чем черных, и поэтому чаще в таком испытании появляется белый шар, а значит и неопределенность в таком испытании меньше одного бита. Заметим, что если бы в ящике все шары были белыми, то энтропия испытания, заключающегося в вытаскивании одного из шаров, была бы равна нулю. Это следует как из формулы (*), так и из замечания, что при таком испытании нет неопределенности — всегда будет вынут белый шар.

Термодинамика и энтропия

Первоначально понятие энтропии появилось в статистической механике и было введено Полем Эренфестом. Он рассматривал следующую модель: сосуд содержит n молекул газа и разделен проницаемой пленкой. Если в первой части сосуда находится k молекул, то во второй — $(n-k)$ молекул. Такое распределение можно произвести $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ способами (эту формулу попробуйте доказать самостоятельно). Каждое такое распределение можно рассматривать, как исход некоторого испытания. Энтропия этого испытания равна $\log\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Эта величина и была принята Эренфестом за меру неопределенности, беспорядка, хаоса. Выбор основания логарифма здесь не имеет значения, поскольку переход к новому основанию соответствует домножению на некоторый коэффициент (модуль перехода от одного основания к другому), при этом лишь меняется единица, которой мы измеряем энтропию.



Модель Эренфеста

Всеобщее выравнивание температуры Вселенной (тепловая смерть Вселенной) соответствует максимуму энтропии, тогда как жизнь имеет стремление приближать биологические процессы к минимуму энтропии, как отмечал У.Р.Эшби. Следует отметить, что применению энтропии в физике способствует также наличие соотношения неопределенностей Гейзенберга.

Информация и кодирование

Современное определение энтропии в виде формулы (*) и развитие на этой основе теории информации и кодирования связано с именем американского математика и инженера Клода Шеннона, который в 1947—48 годах опубликовал ряд основополагающих работ в этой области.

Шеннон использовал введенную им энтропию при исследовании кодов, применяемых при передаче информации. Так, «азбука Морзе» представляет собой троичный код, поскольку она использует три сигнала: точка, тире и длинная пауза между сигналами, означающая раздел между буквами, а двукратная длинная пауза служит для отделения слов друг от друга. Код Бодо, применяемый в телетайпах, — двоичный. Он использует два сигнала: 1 — включение тока и 0 — пауза. Оба сигнала имеют одинаковую длительность. Каждая буква, цифра, знак препинания, пробел в этом коде записываются в виде шести последовательных цифр 0 или 1 (отсутствие и наличие тока). А так как шестью двоичными знаками можно закодировать $2^6=64$ комбинаций, то этого количества достаточно для обозначения всех элементов текста. Декодирование такого текста аналогично отгадыванию одного элемента из 64 задуманных для каждого знака, т.е. оно требует 6 битов информации, а для текста, содержащего n букв (цифр, пробелов, запятых и т.д.), т.е. n шестерок, требуется $6n$ битов информации.

Однако 32 буквы русского алфавита, 10 цифр и 8 знаков препинания составляют всего 50, а не 64, элементов текста, поэтому если все знаки считать равновероятными, то энтропия буквы равна лишь $\log_2 50 \approx 5{,}644$ бита, что существенно меньше чем 6 бит. Кроме того, не все знаки являются равновероятными. Так, вероятность появления буквы «е» равна 0,17, а для буквы «ы» она равна 0,001. Следовательно, шенноновская энтропия будет еще меньше и передача текста в n знаков потребует не $6n$ битов информации, как в коде Бодо, а, скажем, $5n$ битов. Для этого требуется разработать более экономный код, чем код Бодо. Кроме экономичности требуется также возможность однозначного декодирования.

Код, существенно более экономный, чем код Бодо, был разработан Р.Фано. Несколько позже Д.Хартман предложил наиболее экономный код для английских текстов. Этот код также основан на соображениях энтропии.

Избыточность информации

Мы уже отмечали, что информативность сообщения уменьшается, если входящие в него знаки не равновероятны. Шеннон ввел в рассмотрение понятие относительной информации, приняв ее для сообщения равной отношению H_1/H_m, где H_1 — количество информации, доставляемое сообщением, а H_m — количество информации, которое было бы доставлено, если бы все знаки были равновероятны, что для сообщения из n знаков равно $H_m = \log_2 n$. Величину R, дополняющую относительную информацию до единицы, Шеннон назвал «избыточностью»:

$$R = 1 - H_1/H_m .$$

Проведенные опыты показали, что избыточность французского языка составляет около 55%, русского — около 50%. Как заметил Шеннон, тот факт, что избыточность английского языка составляет 50%, означает, что, когда мы пишем по-английски, половина написанного предопределяется самой структурой языка и лишь половина свободно определяется нами.

Избыточность языка ведет к удлинению сообщений, однако дает возможность избежать ошибок при передаче сообщений, особенное при наличии помех. Из помещенного ниже текста мы случайным образом убрали более 10% знаков. Но его все еще можно прочесть.

«*Учит льница*. Скаж , Сэм, есл один п юс оди будет ва, а два пл с два будет ч тре, ско ь о б дет четы е плюс че ыре?

Сэм. Э о несправ дливо, мисс. В всегд отв часте на егкие воп сы, а ми дос аются сам е тяжелые.»

Были разработаны специальные коды, позволяющие обнаруживать и исправлять ошибки текстов, возникающие в результате помех. И здесь пальма первенства принадлежит Шеннону, а работы в этой области не прекращаются и по сей день.

Терминология и аппарат теории информации оказались полезными не только для техники связи, но и для вычислительной техники, где приходится кодировать информацию для ее хранения и последующего использования.

Понятие кодирования информации распространяется не только на письменные сообщения. Вспомним, что вся информация о живом организме закодирована в его хромосоме и декодировка этой информации, к которой уже близки ученые, позволяет понять причины многих заболеваний и бороться с ними.

ИНФОРМАЦИЯ

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП КОНКУРСА «МАТЕМАТИКА 6 — 8»

С 23 по 29 августа около пятидесяти школьников 6 — 8 классов из Иванова, Костромы, Нижнего Тагила, Омска, Харькова и Чебоксар собрались в летний лагерь около Рубского озера в Ивановской области, на базе отдыха Ивановского государственного энергетического университета (ИГЭУ). Это был заключительный этап нашего конкурса «Математика 6 – 8».

Вначале была проведена математическая олимпиада; приводим список ее лауреатов.

Дипломы I степени получили

Андрей Болтенков (Харьков, ФМЛ 27),
Данил Шаповалов (Иваново, лицей 33);

Диплом II степени получил

Константин Бойко (Харьков, ФМЛ 27);

Дипломы III степени получили

Ольга Берштейн (Харьков, ФМЛ 27),
Александр Брут-Бруляко (Кострома, с.ш.32),
Илья Медведев (Омск, с.ш.64),
Андрей Степанов (Чебоксары, лицей-интернат),
Евгений Филатов (Иваново, лицей 22).

Затем пять дней шло «выяснение отношений» в турнире математических боев.

Первое место заняла команда математического клуба «Эврика» Харьковского областного дворца детского и юношеского творчества: Михаил Алеев, Ольга Берштейн, Костантин Бойко, Андрей Болтенков, Людмила Полякова и Елена Шмутер. Подготовили команду Олег Феликсович и Александр Феликсович Крижановские. В финале харьковчане обыграли «хозяев поля» — команду математического кружка при ИГЭУ, — которым досталось второе место, а третье место разделили две команды — Омска (кружок школы 64) и Костромы (сборная города).

Заочный конкурс «Математика 6 – 8» проводится «Квантом» с 1990-91 учебного года, и вот впервые удалось дополнить его очным соревнованием. Здесь следует поблагодарить руководство Ивановского энергоуниверситета, его ректора — Владимира Николаевича Нуждина, чья решительная поддержка и позволила провести это мероприятие. Московский институт развития образо-

(Продолжение см. на с. 42)

Гольфстрим и другие

А. ЯМПОЛЬСКИЙ

Как-то зимой слушал обзор погоды. А почему, собственно, в Осло (столице Норвегии) теплее на десятки градусов, чем в нашем Магадане — ведь находятся они на одной и той же широте? Знакомый метеоролог ответил коротко — Гольфстрим!

Из школьных уроков географии вспомнилось, что Гольфстрим — это теплое течение вдоль берегов Северной Америки, которое начинается в Мексиканском заливе и только у Ньюфаундлендской банки поворачивает на восток к Европе. Такие течения знаменитый русский климатолог А.И.Воейков называл «трубами водяного отопления земного шара». (Кстати, известны и «трубы водяного охлаждения».) Циркулируют в этих трубах колоссальные массы воды — только Гольфстрим переносит теплой воды в десятки раз больше, чем все реки Земли.

В современной океанологии Гольфстримом называют обычно систему интенсивных теплых течений в западной части Северной Атлантики, куда входят Флоридское течение (в окрестности Флоридского пролива), собственно Гольфстрим, вплоть до Большой Ньюфаундлендской банки, и его продолжение — Северо-Атлантическое течение, которое и обогревает Европу.

Первое описание южной части Гольфстрима — Флоридского течения — было опубликовано Понсом де Леоном в 1513 году, приблизительно через 20 лет после того, как корабли Колумба достигли берегов Америки. По словам де Леона, течение это было настолько сильным, что парусные корабли часто удалялись от намеченной цели, вместо того чтобы приближаться к ней.

Первое изображение Гольфстрима на карте появилось лишь в 1665 году — почти через 150 лет. На картах тех лет тесно переплетались реальность и мифы. Так, у Северной Скандинавии изображался мощный водоворот — легендарный Мальстрем. Помните у Гумилева:

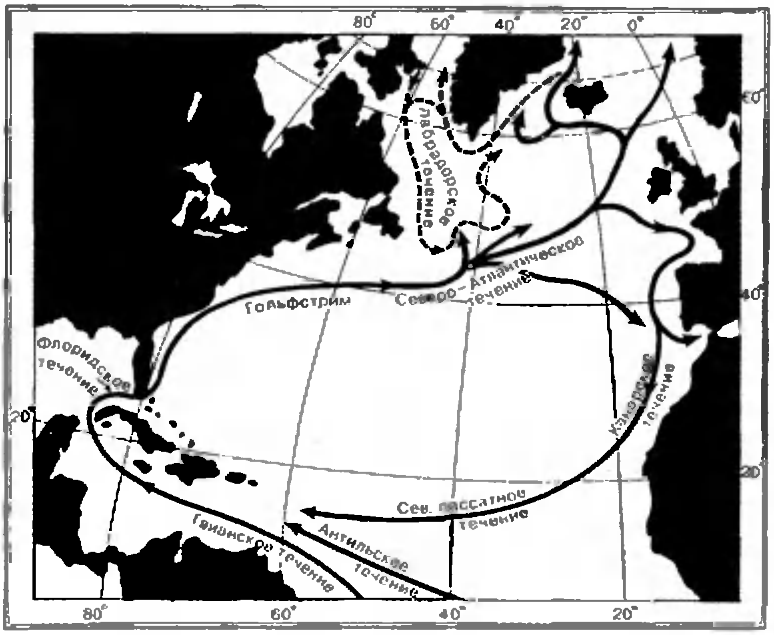
> ...Быстрокрылых ведут капитаны,
> Открыватели новых земель,
> Для кого не страшны ураганы,
> Кто изведал мальстремы и мель...

Легенды о Мальстреме имеют под собой и некоторую реальную почву. Более поздние исследования показали, что в этом районе при определенных условиях, зависящих от особенностей прилива, действительно возникают водовороты, но, конечно, существенно более скромных масштабов.

Первыми наблюдателями и открывателями течений были моряки. Это они, определяя свое положение в море по звездам и солнцу, имели возможность судить о течениях по сносу кораблей, т.е. по разности расчетных (моряки говорят — счислимых) и наблюденных координат. Такие косвенные наблюдения за течениями легли в основу морских карт задолго до «бутылочной почты». Бутылка из-под вина с запиской стала первым «инструментом» для измерения течений. Француз Лагеньер в 1763 году первым вложил в бутылку записку с датой и координатами, а также с просьбой к нашедшему сообщить время и место ее обнаружения. Кстати, через сто лет было установлено мировое достижение в этой области: бутылка, выпущенная в 1830 году у мыса Горн — южной оконечности Южной Америки, была найдена в 1887 году на юго-западном берегу Ирландии.

Постепенно по данным наблюдений за плавающими предметами, за сносом кораблей и по результатам «бутылочной почты» к концу XIX — началу XX веков удалось составить представление об общей картине течений в океанах и морях. Благодаря тому что такая картина основывалась на данных о начале и конце пути плавающих предметов, бутылок с записками и т.д., океанские течения в то время представлялись в виде струй или «рек». В самом деле, зная лишь продолжительность плавания, например, бутылки, его начало и конец, невозможно представить себе все зигзаги и петли, которые эта бутылка выписывала во время движения.

Как мы уже говорили, течения переносят не только корабли и бутылки с записками, но и тепло. Элементарные оценки (учитывая разные теплоемкости воды и воздуха) показывают, что тепла, высвободившегося при охлаждении, например, стометрового слоя воды на одну десятую градуса, достаточно, чтобы нагреть прилегающую к поверхности океана массу воздуха на



Схематическое изображение системы течений северной части Атлантического океана

5–7 градусов (попробуйте сами проверить эту оценку). Существенное влияние на погоду оказывает и испарение. В самом деле, при испарении одного грамма воды затрачивается 586 калорий (при 20 °С). Но когда этот водяной пар конденсируется в атмосфере в облака и туманы, он «отдаст» эти калории воздуху.

Однако влиянием на погоду и климат не ограничивается роль течений в жизни человека. От них зависят и объем выловленной рыбы, и эффективность работы морского флота. Но для того чтобы понимать и учитывать роль океанических течений, нужна полноценная математическая теория этого явления.

Современная теория морских течений основывается на системе классических уравнений вязкой жидкости. Действующими силами здесь являются: касательное напряжение ветра на поверхности, горизонтальные градиенты давления различной природы, приливообразующие силы, обусловленные гравитационным взаимодействием в системах Земля – Луна и Земля – Солнце, а также влияние вращения Земли (сила Кориолиса).

Под действием касательного напряжения ветра на поверхности океана вначале возникают волны, а затем, конечно не сразу и не непосредственно, энергия, передаваемая ветром воде, превращается в кинетическую энергию ветрового, или так называемого дрейфового течения. Но у океана есть берега, благодаря которым под действием ветра возникают наклоны поверхности. Такие наклоны могут быть следствием и многих других причин, например неравномерного распределения плотности воды в толще океана. Хотя наклоны эти невелики – несколько миллиметров на километр, но если учесть размеры океанов, то разность уровней в отдельных районах выражается уже в метрах. А это не мало!

На все движущиеся частицы воды, составляющие течение, действует сила Кориолиса, направленная вправо (в Северном полушарии). Правда, чем ближе к экватору, тем слабее отклоняющее действие этой силы. Но, по-видимому, сила Кориолиса (наряду с другими факторами) играет определенную роль в том, что у берегов острова Ньюфаундленд Гольфстрим отклоняется от побережья Северной Америки и направляется, в виде Северо-Атлантического течения, к Европе.

А нельзя ли заставить его идти ближе к берегу и отворачивать, если уж без этого нельзя, только у северной части Канады? В конце прошлого века одна из американских фирм предложила проект перекрытия Гольфстрима. Предполагалось соединить полуостров Флорида с островом Куба дамбой длиной около 100 км. Высота дамбы в отдельных местах должна была доходить до 500 м. Для спуска теплых вод Мексиканского залива в Атлантический океан предусматривалось прорыть специальный канал в северной части полуострова Флорида. По проекту, теплые воды «Нового Гольфстрима» должны были течь значительно ближе к берегу, и, следовательно, климат прибрежных районов стал бы почти тропическим. Такая перспектива сулила вполне реальные барыши. Ведь в этом случае можно было бы значительно увеличить посевные площади под цитрусовыми, табаком и т.д. В Европе этот проект вызвал замешательство и даже легкую панику. Изменение режима Гольфстрима могло привести к непредсказуемым последствиям. Одно казалось очевидным всем – если в Америке станет теплее, то в Европе будет холоднее. В газетах уже появились описания приключений белых медведей в Париже и «фотографии» снежных сугробов в Ницце. Однако противникам проекта удалось доказать его полную несостоятельность.

По современным представлениям, ветер – основная причина течений в океане. Однако связь между ветром и течениями достаточно сложна. Течение в какой-либо точке почти не зависит и не определяется ветром над ней, а является результатом действия системы ветров в некоторой достаточно большой области. Кстати, несостоятельность проекта перекрытия Флоридского пролива заключалась именно в том, что в нем совершенно игнорировалась роль ветра. Система ветров над северной частью Атлантического океана имеет ярко выраженный антициклонический характер, т.е. ветер дует в направлении вращения часовой стрелки. Такая система циркуляции над Северной Атлантикой приблизительно симметрична относительно одного из меридианов, проходящих через ее центр. Однако поскольку океан находится на вращающемся шаре – планете Земля, то симметрия такой идеализированной картины нарушается. Именно потому, что Земля – вращающийся шар, величина горизонтальной составляющей силы Кориолиса существенно зависит от географической широты. Под действием особой системы ветров, широтного изменения силы Кориолиса и конфигурации берегов возникает существенная асимметрия упомянутой картины течений. Благодаря этому у западных берегов течения сужаются и убыстряются.

Буй для измерения течений. Сверху виден пассивный отражатель для поиска буя с помощью радиолокатора

Столь многосторонний характер действующих на течения сил показывает, насколько сложен расчет течений. Ведь взаимодействие всех этих сил существенно нелинейно (т.е. их

Подготовка к спуску буя в океан

«Поток» — прибор для измерения скорости и направления течений

нельзя учесть по отдельности, а потом просуммировать результаты).

Наблюдения за течениями необходимы для мореплавания. Точно вести корабль по заданному курсу можно лишь в том случае, когда известно, как его будет сносить течение. Поэтому способы наблюдения за течениями были тесно связаны с практикой кораблевождения и долго развивались вместе с ней.

Шло время, и были построены специальные приборы, которые позволили фиксировать скорость и направление движения воды в течение многих суток и даже месяцев. Приборы эти представляют собой достаточно сложные (и дорогие) устройства, которые подвешиваются на большой буй. Нижний конец троса, на котором подвешены приборы, крепится к тяжелому якорю на дне. Система эта называется автономной буйковой станцией — АБС — и позволяет получить представление о вертикальной структуре течений в данной точке в данный момент времени. Однако оказалось, что разовые случайные наблюдения в отдельных точках Мирового океана практически не дают полезной информации о движении его вод. Что толку, если нам стало известно: в такой-то точке в такой-то момент сложное взаимодействие упомянутых сил обусловило течение такой-то скорости и такого-то направления? Ведь по этим данным нельзя судить ни о том, что было во время самих наблюдений в рядом расположенных точках, ни о том, какое течение будет в этой точке завтра или было вчера. Более того, по мере накопления инструментальных данных о скорости и направлении течений возникла весьма любопытная ситуация. Оказалось, что нанесенные на карту данные измерений очень редко согласуются с нарисованными там «реками».

Так что же представляют собой морские течения? Ответ на этот принципиальный вопрос удалось получить только после анализа результатов многих специальных наблюдений. Вместо разрозненных кратковременных измерений в отдельных точках было решено поставить сразу несколько АБС с многими измерителями течений на сравнительно небольших расстояниях друг от друга на довольно длительное время. Такие «полигоны» для измерения течений были выполнены за последние несколько десятков лет как в Атлантическом, так и в других океанах. Кстати, первый прообраз такого полигона был выполнен нашим соотечественником профессором В.Б.Штокманом в 1935 году на Каспийском море.

Изучая материалы таких систематических и длительных измерений, а также учитывая результаты теоретических исследований, океанологи пришли к выводу: морские течения вовсе не являются «реками без берегов» или «реками в жидких берегах». Их скорее можно представить себе в виде системы вихрей (или круговоротов) самых разных масштабов — от нескольких километров до десятков и сотен миль. Вихри эти, перемещаясь друг относительно друга, все вместе движутся в определенном направлении. И это следует иметь в виду, когда приходится пользоваться современными картами океанических и морских течений.

Еще одним подтверждением такого представления о морских течениях в толще вод являются исследования с помощью поплавков нейтральной плавучести. Поплавки эти представляют собой довольно внушительные сооружения и рассчитаны на длительное время работы. Уравновешенные на определенной глубине в толще вод, они перемещаются вместе с водой и периодически излучают ультразвуковые импульсы, по которым береговые и корабельные приемные станции определяют место поплавка, а следовательно, и характеристики течений. Анализ траекторий таких поплавков (обычно их выпускают сразу несколько) дает очень ценную информацию о течениях. (Поплавковые измерения не обходятся и без курьезов. Однажды поплавок указал на течение, которое с фантастической скоростью пересекало океан по прямой в направлении к большому порту. Потом выяснилось, что поплавок поймали рыбаки и отбуксировали его в порт.)

Представление о течениях как совокупности вихрей разных размеров с некоторым общим направлением перемещения делает понятным уже упомянутый факт, что измерения, сделанные в одной и той же точке в разное время, как правило, не согласуются с общей картиной течений. Итак, течение представляется суммой движений различных временных и пространственных масштабов. Следовательно, если бутылка с запиской попала в некоторый вихрь, то она, во-первых, участвует во вращательном движении и, во-вторых, перемещается вместе с вихрем. По-видимому, результирующее движение и переносит бутылку к «месту назначения». Однако благодаря петлям и зигзагам, которые она при этом «выписывает», существенно увеличивается ее время в пути. Поэтому использовать эти данные при построении математической модели нельзя. Для этого наиболее подходящими являются материалы полигонных наблюдений.

Такое представление о течениях в океанах и морях можно сравнить с тем, что наблюдается в атмосфере, где крупномасштабные вихри — циклоны и антициклоны — стали для нас уже привычными понятиями. По-видимому, в океане тоже есть области, где вероятность обнаружения потока определенного направления, подобного ветру в атмосфере, достаточно велика. В таких областях океана встречаются течения, которые считаются устойчивыми. Надо полагать, что здесь скорость поступательного перемещения вихрей сравнима или даже больше скорости вращения внутри.

Теоретически задача о вихрях в системе течений тесно связана с проблемой неустойчивости потока жидкости. Проблемы эти достаточно сложны даже для численного решения на современных ЭВМ. Однако исследования ведутся очень интенсивно, и, вероятно, со временем в задаче о морских течениях в нынешней ее постановке останется совсем немного нерешенных вопросов. Но тогда возникнут новые проблемы, и для их решения потребуются новые данные наблюдений и новые теоретические подходы.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта 1996 года по адресу: 103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6 — 95» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1521» или «Ф1528». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1525—М1529 а), М1530 предлагались на XXXVI Международной математической олимпиаде.

Задачи М1521 — М1530, Ф1528 — Ф1537

М1521. В парламент выбрано 256 депутатов. Каждый из них ответил на 8 вопросов анкеты (требующих ответов «да» или «нет») и выяснилось, что никакие двое не ответили одинаково на все вопросы. Можно ли их рассадить на 256 стульев, расставленных в квадрате 16×16 так, чтобы ответы каждого отличались от ответа любого его соседа (слева, справа, сзади, спереди):
а) только по одному вопросу;
б) по 7 вопросам?

Н.Васильев

М1522. Докажите, что для любых натуральных m, d, k найдется натуральное n такое, что

$$\left(\sqrt{m}+\sqrt{m+d}\right)^k=\sqrt{n}+\sqrt{n+d^k}.$$

П.Филевич

М1523. Рассмотрим последовательность $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=4$, $a_5=5$, $a_6=119$, $a_{n+1}=a_1a_2\ldots a_n-1$ при $n\geq 5$. Докажите, что

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{70}^2=a_1a_2\ldots a_{70}.$$

Л.Курляндчик

М1524. Пусть P — точка пересечения диагоналей описанного четырехугольника $ABCD$. Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники ABP, BCP, CDP, DAP, лежат на одной окружности.

И.Вайнштейн

М1525. Пусть A, B, C и D — четыре различные точки на прямой, расположенные в указанном порядке. Окружности с диаметрами AC и BD пересекаются в точках X и Y. Прямые XY и BC пересекаются в точке Z. Пусть P — точка на прямой XY, отличная от Z. Прямая CP пересекает окружность с диаметром AC в точках C и M, а прямая BP пересекает окружность с диаметром BD в точках B и N. Докажите, что прямые AM, DN и XY пересекаются в одной точке.

М1526. Пусть a, b, c — положительные числа такие, что $abc=1$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}.$$

М1527. Найдите все целые $n>3$, для которых существуют n точек A_1, A_2, …, A_n на плоскости, и действительные числа r_1, r_2, …, r_n, удовлетворяющие следующим двум условиям:
(i) никакие три из точек A_1, A_2, …, A_n не лежат на одной прямой;
(ii) для любой тройки i, j, k $(1\leq i<j<k\leq n)$ площадь треугольника $A_iA_jA_k$ равна $r_i+r_j+r_k$.

М1528. Найдите наибольшее значение x_0, для которого существует последовательность положительных чисел x_0, x_1, …, x_{1995}, удовлетворяющая следующим двум условиям:
(i) $x_0=x_{1995}$;
(ii) $x_{i-1}+\dfrac{2}{x_{i-1}}=2x_i+\dfrac{1}{x_i}$ для всех $i=1,2,\ldots,1995$.

М1529. Пусть $ABCDEF$ — выпуклый шестиугольник, в котором $AB = BC = CD$, $DE = EF = FA$ и $\angle BCD = \angle EFA = 60°$. Пусть G и H — две точки внутри шестиугольника такие, что

$$\angle AGB = \angle DHE = 120°. \qquad (*)$$

а) Докажите, что

$$AG + GB + GH + DH + HE \geq CF.$$

б) Докажите, что последнее неравенство будет выполнено, даже если не требовать условия $(*)$.

М1530*. Пусть p — нечетное простое число. Найдите количество подмножеств A множества $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ таких, что

(i) A содержит ровно p элементов;

(ii) сумма всех элементов из A делится на p.

Ф1528. На рисунке 1 приведена траектория точки A на плоскости (масштаб указан на рисунке). Скорость точки

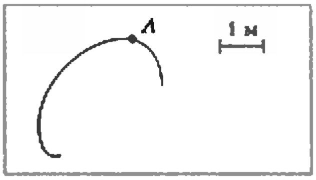


Рис. 1

все время составляет $v = 2$ м/с. Найдите максимальное ускорение точки.

З.Рафаилов

Ф1529. Жук-плавунец может находиться в воде без движения. Попав в ручей, жук может двигаться против течения с максимальной скоростью v_1, а по течению — с максимальной скоростью v_2. С какой максимальной скоростью жук может двигаться перпендикулярно течению ручья?

В.Михайлов

Ф1530. На гладкой плоскости находится тело массой 1 кг, к которому привязана легкая пружинка жесткостью 10 Н/м. Начинаем тянуть вдоль пружинки с постоянной скоростью 1 м/с. Какую работу мы совершаем за первую секунду с момента начала движения?

А.Зильберман

Ф1531. С Северного полюса Земли в исследовательских целях производят запуск баллистической ракеты. Требуется попасть в точку на экваторе Земли, сообщив при этом ракете минимально возможную скорость. Найдите величину этой скорости и угол, под которым нужно произвести запуск.

С.Башинский

Ф1532. Тонкостенный сосуд кубической формы помещен в разреженный газ с концентрацией молекул n_0. В сосуде сделали маленькую дырку — срезали вершину угла так, что дырка имеет форму правильного треугольника. Какая концентрация молекул установится в сосуде? Рассмотрите случаи очень хорошей и очень плохой теплопроводности стенок.

В.Михайлов

Ф1533. Вертикальный сосуд высотой $H = 0{,}1$ м и площадью сечения $S = 1$ см^2 при температуре $T_1 = 273$ К содержит воздух при атмосферном давлении и небольшое количество воды. Сосуд закрывают сверху подвижным поршнем массой $M = 1{,}5$ кг и дают поршню двигаться. После того как поршень остановился, сосуд начинают медленно нагревать и доводят температуру до $T_2 = 373$ К. Какое количество теплоты сообщили при этом системе? Теплоемкостью сосуда и поршня пренебречь.

А.Ольховец

Ф1534. Три резистора соединили последовательно и подключили к батарейке. Два амперметра включили в цепь, как показано на рисунке 2. Токи через амперметры составили 1 А и 3 А. Может ли в этой схеме через

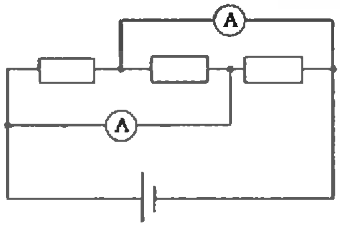


Рис.2

средний резистор течь ток силой 2 А? В каких пределах могут находиться силы токов, текущие через левый и правый резисторы? Сопротивления амперметров считать пренебрежимо малыми.

Р.Александров

Ф1535. Очень далеко друг от друга находятся два проводника. Заряд одного из них Q_1, его потенциал φ_1. Заряд второго проводника Q_2, его потенциал φ_2. Первоначально незаряженный конденсатор емкостью C подключают очень тонкими проводами к этим проводникам. До какого напряжения зарядится конденсатор?

Р.Афаилов

Ф1536. Маятник состоит из длинной, тонкой и легкой нити длиной L и маленького тяжелого шарика. Два таких маятника прикрепили к общей точке подвеса и зарядили одноименно, так что они разошлись на небольшое (по сравнению с длиной нити) расстояние. Найдите период малых колебаний маятников относительно новых положений равновесия.

М.Ермилов

Ф1537. «Черный ящик» с двумя выводами имеет сопротивление R, но если приложенное напряжение увеличить до U_0, то сопротивление возрастет до $2R$ и останется таким при дальнейшем возрастании напряжения. Если же после этого начать снижать напряжение, то к прежнему значению сопротивление вернется только при напряжении $0{,}5U_0$. У вас в распоряжении есть еще регулируемый источник питания (его напряжение можно установить каким угодно), конденсатор, реостат и провода. Придумайте схему генератора колебаний, рассчитайте необходимые параметры входящих в схему элементов и оцените период колебаний при выбранных значениях.

А.Зильберман

Решения задач М1491—М1500, Ф1508—Ф1517

Набор задач М1491 — М1500, решения которых публикуются в этом номере, не совсем типичен. Завершая 25-летний период истории «Задачника «Кванта», мы собрали в юбилейный задачник, в основном, трудные исследовательские задачи, связанные с идеями и понятиями разных разделов математики, каждая из которых могла бы составить предмет курсовой студенческой работы или доклада на научной конференции школьников. Решения написаны из-за экономии места довольно коротко, и разобраться в них до конца — тоже не слишком простая задача. В некоторых случаях мы указываем и связи с другими публикациями, и вопросы для дальнейшего исследования. Задаче М1496 (ее условие предлагалось также «на год» участникам Летней конференции 1995 года «Турнира городов») посвящена отдельная заметка в конце этого раздела.

Разумеется, мы надеемся, что «Задачник» будет продолжаться и дальше, и (вернувшись к традициям первых лет «Кванта») будет включать не только задачи для научно-исследовательских работ школьников и студентов, но и задачи для «обычного» школьника, начинающего увлекаться математикой. Ждем ваших писем!

М1491. *а) Существуют ли различные 1995-значные числа a и b такие, что 3990-значное число $\overline{ab}$ делится на $\overline{ba}$?*
б) Для каких n существуют такие пары n-значных чисел?

б) Ответ: $n=6m-3$, где m — натуральное число.
Предположим, что при некотором натуральном n

$$a\cdot10^n+b=k\left(b\cdot10^n+a\right), \qquad (*)$$

где a и b — n-значные натуральные числа, k — целое число. Очевидно, $2\le k\le9$.
Из равенства (*) получаем

$$\frac{a}{b}=\frac{k\cdot10^n-1}{10^n-k}. \qquad (**)$$

Так как $k\cdot10^n-1>10^n$, то дробь (*) должна быть сократимой (ибо $a<10^n$).
Из равенства

$$\left(k\cdot10^n-1\right)-k\left(10^n-k\right)=k^2-1$$

следует, что общий делитель d чисел $k\cdot10^n-1$ и 10^n-k делит и число k^2-1; при этом, поскольку $\frac{k\cdot10^n-1}{l}>10^n$ при $l<k$, то $d\ge k+1$.
Исходя из этого, легко убедиться, что при всех k, отличных от 6 ($2\le k\le9$), числа 10^n-k и $k\cdot10^n-1$ взаимно просты, т.е. дробь (**) несократима. Действительно, если $k=2$, то $d=3$; но 10^n-2 на 3 не делится. Если $k=3$, то d — четное число. Если $k=4$, то $d=5$ либо $d=15$ (но 10^n-4 на 5 не делится). Если $k=5$ либо $k=7$, то d — четное число. Если $k=8$, то d делится на 3; но 10^n-8 на 3 не делится. Наконец, если $k=9$, то d — делитель 80. Однако 10^n-9 ни на 2, ни на 5 не делится. (Или, как и в случаях $k=3, 5, 7$: $d\ge10$, значит, d — четное число.)

Пусть $k=6$. Найдем те n, при которых числа $10^n-k=10^n-6$ и $k^2-1=35$ имеют общий делитель. Очевидно, что таковым может быть только число 7. Если 10^n-6 делится на 7, то и 10^n+1 делится на 7. Но остатки от деления 10^n на 7 повторяются периодически: 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3,... Видим, что 10^n+1 делится на 7 при $n=3$ и затем — при $n=9$, и вообще при любом $n=6m-3$, где m — натуральное число.
Очевидно, числа $a=\frac{6\cdot10^n-1}{7}$ и $b=\frac{10^n-6}{7}$ — целые n-значные, т.е. удовлетворяют условию задачи.
Легко видеть, что

$$a=\underbrace{\overline{857\ 142\ 857\ 142\ \ldots\ 857\ 142\ 857}}_{(6m-3)\text{ цифры}},$$

$$b=\underbrace{\overline{142\ 857\ 142\ 857\ \ldots\ 142\ 857\ 142}}_{(6m-3)\text{ цифры}},$$

где $m\in N$.
Замечание. При $m=1$ получаем

$$b\cdot10^n+a=b\cdot10^3+a=142\,857.$$

О многочисленных свойствах этого числа можно прочитать в книге Б.А. Кордемского «Математическая смекалка» (М.: Гос. изд. физ.-мат.лит., 1958, с.306 – 312). Число $A=142857$ — полный период дроби $1/7$ при обращении ее в десятичную: $\frac{1}{7}=0,(142857)$, — замечательно, в частности, тем, что при любом «циклическом сдвиге» A результат делится на A. В связи с этим возникает такой общий вопрос: при каких p и q существуют такие p-значное и q-значное числа a и b, что $\overline{ab}$ делится на $\overline{ba}$? Предлагаем читателям подумать над некоторыми его частными случаями (в десятичной и других системах счисления).

Н.Васильев, В.Сендеров, П.Филевич

М1492. *Пусть AH, BK, CL — высоты треугольника ABC, M — произвольная точка плоскости. Докажите, что описанные окружности треугольников AMH, BMK, CML пересекаются еще в одной общей точке, кроме M.*

Для решения задачи нужна лишь одна известная теорема: *если даны окружность и точка P (не лежащая на окружности), то для любой прямой, проходящей через точку P и пересекающей окружность в точках X и Y, произведение $PX\cdot PY$ одно и то же*. Удобно, однако, чуть-чуть уточнить ее. Мы будем считать (всюду ниже) произведение положительным, если векторы $\overrightarrow{PX}$ и $\overrightarrow{PY}$ направлены одинаково (т.е. точка P лежит вне окружности), и отрицательным — если противоположно (т.е. P лежит внутри). Теорема верна и в этом случае, а значение $PX\cdot PY$ с учетом знака называется *степенью* точки относительно окружности (она равна a^2-R^2, где a — расстояние от P до центра, R — радиус окружности).
Пусть P — точка пересечения высот AH, BK, CL треугольника. Тогда

$$PA\cdot PH=PB\cdot PK=PC\cdot PL \qquad (*)$$

(первое равенство следует из того, что H и K лежат на окружности с диаметром AB, второе — из того, что K и L лежат на окружности с диаметром BC; заметим, что это произведение положительно для тупоугольного треугольника и отрицательно – для остроугольного.) Обозначим это число (•) через d.

Для любой точки M плоскости отметим на прямой MP точку M' такую, что $PM \cdot PM' = d$. (Соглашение о знаках позволяет определить ее единственным образом.) Тогда из равенства $PM \cdot PM' = PA \cdot PK$ следует, что точка M' лежит на окружности, проходящей через M, A и K. Аналогично доказывается, что M' лежит и на других двух окружностях.

Утверждение задачи верно в значительно более общей ситуации, когда AK, BL и CM — просто общие хорды каждой пары из трех (попарно пересекающихся) окружностей. Они всегда проходят через одну точку P, степени которой относительно всех окружностей равны, т.е. выполнено равенство (•), и доказательство остается тем же самым. Заметим, что преобразование плоскости $M \to M'$ — это инверсия, если $d<0$, и композиция инверсии и симметрии с центром P, если $d>0$. (Случай $d=0$, соответствующий прямоугольному треугольнику ABC или окружностям, пересекающимся в одной точке, тривиален — M' совпадает с P для всех M.)

Н.Васильев, С.Маркелов

М1493. *Обозначим через $s(n)$ сумму $1+2^2+\ldots+n^n$. Докажите, что при любом $n>3$ верны неравенства*

а) $3s(n)>(n+1)^n$;

б) $2s(n)<(n+1)^n$;

в) $\dfrac{1}{n^n}>\dfrac{1}{s(n)}+\dfrac{1}{s(n+1)}+\dfrac{1}{s(n+2)}+\ldots$

а) Известно, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$. Отсюда $3n^n>(n+1)^n$. Но $s(n)>n^n$ (даже при $n\ge 2$), поэтому $3s(n)>3n^n>(n+1)^n$.

б) При $n=3$ верно равенство: $2s(3)=2\cdot 32=4^3$. Индуктивный переход: при $n>3$ достаточно доказать

$$n^{n-1}+2n^n<(n+1)^n. \qquad (1)$$

Имеем:

$$(n+1)^n=2n^n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot n^{n-2}+\ldots$$

Но $\frac{n-1}{2}>1$.

Другое доказательство. Перепишем (1):

$$\frac{1}{n}+2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

При $n=3$ неравенство верно: $64>63$. При увеличении n левая часть неравенства убывает, правая, как известно, возрастает.

Замечание 1. Из оценки пункта б) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s(n)}{n^n}=1.$$

в) Из монотонности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ следует неравенство

$$\frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+1}}>\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}. \qquad (2)$$

Действительно, для доказательства неравенства (2) достаточно переписать его в виде

$$(n+2)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Можно вывести (2) и непосредственно (из неравенства Бернулли).

Докажем теперь по индукции неравенство

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}>\frac{s(n)}{s(n-1)}. \qquad (3)$$

Пусть (3) верно при некотором n. Так как $\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+d}$ при $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ (для положительных a, b, c, d), то

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}>\frac{s(n+1)}{s(n)}.$$

Воспользовавшись (2), завершаем индуктивный переход.

Докажем теперь неравенство

$$\frac{1}{n^n}>\frac{1}{s(n)}+\frac{1}{(n+1)^{n+1}}. \qquad (4)$$

Перепишем (4) так:

$$\frac{s(n)-n^n}{n^n\cdot s(n)}>\frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

Получили (3).

Последовательным применением (4) получаем

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}}\ge\frac{1}{s(n+1)}+\frac{1}{s(n+2)}+\ldots$$

Из этого неравенства в сочетании с (4) следует неравенство пункта в).

Замечание 2. Известные неравенства, которыми мы пользовались:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \qquad (*)$$

доказываются в любом учебнике по анализу. (Одно из самых коротких доказательств — сравнить члены разложения по формуле бинома Ньютона:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$

Для доказательства левого неравенства (*) достаточно заметить, что $\frac{1}{k!}\le\frac{1}{2^{k-1}}$, правого — что каждая круглая скобка в последней сумме убывает с ростом n.)

А.Грибалко, В.Сендеров

М1494. *Даны четыре одинаковых картонных неравнобедренных прямоугольных треугольника. Разрешается любой треугольник разрезать по высоте, опущенной на гипотенузу. Можно ли, повторяя эту операцию, добиться того, чтобы все полученные треугольники были разного размера?*

Пусть α — меньший угол треугольника, $p=\sin\alpha$, $q=\cos\alpha$. Ясно, что при разрезании из данного треугольника получается два подобных ему с коэффициентами p и q. Поэтому любой треугольник, полученный разрезаниями, будет подобен первоначальному с коэффициентом p^mq^n — назовем его треугольником типа $(m;n)$; здесь $m\ge 0$, $n\ge 0$ — целые числа.

Предположим, что удалось разрезать треугольники на разные части. Ясно, что окончательный результат не зависит от порядка, в котором делаются разрезания разных треугольников. В какой-то момент три из исходных четырех треугольников должны быть разрезаны, и можно начать именно с этих разрезов. В результате получилось три треугольника типа (1;0) и три — типа (0;1). По крайней мере по два каждого типа должны быть разрезаны, и можно считать, что именно эти 4 разреза следуют за первыми тремя. Но в результате получилось 4 равных треугольника типа (1;1), и все начинается сначала. Более строгое оформление этого доказательства: предположив, что можно добиться результата минимум за N разрезаний, мы доказали, что его можно получить и за меньшее $(N-7)$ число разрезаний — противоречие. Для тех, у кого это доказательство «методом спуска» вызывает сомнения, приведем другое, более изысканное. Припишем треугольнику типа $(m;n)$ «вес» $2^{-m-n}=\frac{1}{2^{m+n}}$.

Вначале у нас 4 треугольника и сумма весов равна 4. При разрезании сумма весов не меняется (она, как говорят, *инвариант*). Но если бы в какой-то момент все треугольники стали разными, то сумма весов стала бы меньше 4, поскольку сумма всех чисел в бесконечной таблице

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \ldots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \ldots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \end{array}$$

в точности равна 4: сложив суммы по строкам, получим $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots=4$.

Эта задача — лишь одна из целой серии, связанной с операцией $(m;n)\to\{(m,n+1),(m+1;n)\}$. Ей посвящена заметка А.Б.Ходулева «Расселение фишек» («Квант», 1982, № 7). Но новое обличье — формулировка с треугольниками — позволило предложить эту красивую задачу весной прошлого года на Московской олимпиаде и Турнире городов.

А. Шаповалов, Н. Васильев

М1495. *Диагонали выпуклого четырехугольника ABCD пересекаются в точке O. Докажите, что четырехугольник ABCD — описанный тогда и только тогда, когда для радиусов окружностей r_1, r_2, r_3, r_4, вписанных в треугольники AOB, BOC, COD, DOA, выполнено равенство*

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}.$$

Начнем с исторического замечания. Для случая описанной трапеции доказать равенство задачи предлагалось 30 лет назад на заключительном туре IV Всероссийской математической олимпиады. (См., например: Н.Б.Васильев, А.А.Егоров. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. — М.: Наука, 1988.)

Но для произвольного описанного четырехугольника это сделать совсем не просто.

Обозначим стороны AB, BC, CD, DA четырехугольника $ABCD$ соответственно через a, b, c, d, перпендикуляры, опущенные на них из точки O пересечения диагоналей, — через h_1, h_2, h_3, h_4, отрезки OA, OB, OC, OD — через x, y, z, t, угол AOB между диагоналями — через α (рис. 1).

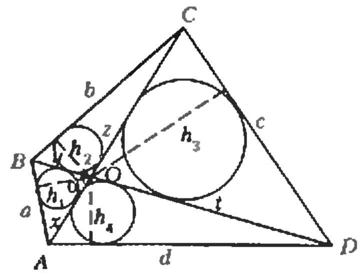


Рис. 1

Вот короткое «вычислительное» решение. Основная его идея: не бояться возвести в квадрат.

Используя теорему косинусов:

$$a^2=x^2+y^2-2xy\cos\alpha,\ b^2=y^2+z^2+2yz\cos\alpha,\ \ldots,\quad (1)$$

преобразуем условие описанности

$$a+c=b+d,\quad (2)$$

возведя обе его части в квадрат, к виду

$$(x+z)(y+t)\cos\alpha=ac-bd.\quad (3)$$

Используя формулу для площади треугольника

$$2S_{AOB}=xy\sin\alpha,\ 2S_{BOC}=yz\sin\alpha,\ \ldots$$

и радиуса вписанной окружности

$$r_1=\frac{xy\sin\alpha}{x+y+a},\ \ldots,$$

равенство в условии задачи

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}\quad (4)$$

можно (после сокращений) записать так:

$$\frac{a}{xy}+\frac{c}{zt}=\frac{b}{yz}+\frac{d}{tx}.\quad (5)$$

Перепишем (5) в виде

$$azt+cxy=btx+dyz$$

и возведем обе части в квадрат, подставив вместо a^2, b^2, c^2, d^2 выражения (1). После очевидных сокращений, разделив все члены на $xyzt$, получаем

$$-2zt\cos\alpha-2xy\cos\alpha+2ac=2yz\cos\alpha+2xt\cos\alpha+2bd,$$

что совпадает с (3).

Эквивалентность равенств (2) и (4) доказана.

Равенство (4) допускает и красивое геометрическое доказательство. Заметим сначала, что (5) эквивалентно

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_4}\quad (6)$$

(если знаменатели в (5) умножить на $\sin\alpha$, в них будут стоять удвоенные площади треугольников с основаниями a, c, b, d и высотами h_1, h_3, h_2, h_4).

Пусть (см. рис. 2) четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I и радиусом R; точки E, F, G, H — точки касания сторон четырехугольника с вписанной в него окружностью; IJ — перпендикуляр, опущенный на EG (случай $I\in EG$ рассматривается аналогично — это как раз и есть случай описанной трапеции или

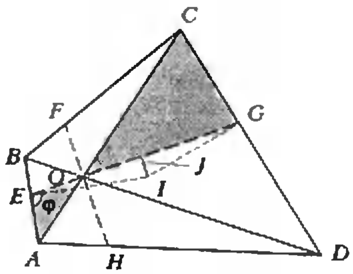


Рис.2

ромба). Положим

$$\varphi = \angle AEG = \angle EGD = \angle EIJ = \angle JIG.$$

Известно, что (для любого описанного четырехугольника!) оба отрезка EG и FH, соединяющие точки касания, проходят через точку O пересечения диагоналей. (Доказать это можно так: с помощью теоремы синусов для заштрихованных треугольников проверяется, что отрезок EG делит диагональ AC в отношении EA/CG, но в том же отношении HA/FC ее делит и отрезок FH.)[1]

Теперь — простые вычисления:

$$h_1 = OE\sin\varphi,\quad h_3 = OG\sin\varphi,$$

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_3} = \frac{OE+OG}{OE\cdot OG\sin\varphi} = \frac{2JE}{\sin\varphi\cdot OE\cdot OG} = \frac{2R}{OE\cdot OG}.$$

Аналогично,

$$\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_4} = \frac{2R}{OH\cdot OF}.$$

Но $OE\cdot OG = OH\cdot OF$ (см. решение задачи М1492). Отсюда следует (6).

Правда, доказать обратное утверждение (5) $\Rightarrow$ (2) геометрически не так просто.

Но эта трудность преодолевается, если придать нашей теореме еще один, «самодвойственный», вид.

Назовем «обращенным» к выпуклому четырехугольнику $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O, четырехугольник $A'B'C'D'$, вершины которого A', B', C', D' лежат на лучах OA, OB, OC, OD так, что

$$OA\cdot OA' = OB\cdot OB' = OC\cdot OC' = OD\cdot OD' = 1$$

(вместо 1 можно взять и другое положительное число). Тогда, в принятых выше обозначениях,

$$A'B' = \frac{a}{xy},\quad B'C' = \frac{b}{yz},\quad C'D' = \frac{c}{zt},\quad D'A' = \frac{d}{tx}.$$

(Эти формулы, вероятно, известны тем, кто знаком с инверсией; впрочем, их легко доказать из подобий: $\Delta A'B'O \sim \Delta BAO, \ldots$).

Значит, наши равенства (4) $\Leftrightarrow$ (5) $\Leftrightarrow$ (6) эквивалентны и такому:

$$A'B' + C'D' = B'C' + D'A'. \qquad (7)$$

Другими словами, мы доказали выше такую теорему: *четырехугольник, обращенный к описанному, — тоже описанный.*[2]

Поскольку операция «обращения», примененная к $A'B'C'D'$, дает снова $ABCD$, из (7) $\Leftrightarrow$ (5) следует (2).

Тем, кто заинтересовался этой темой, предлагаем ее развитие в виде задачи М1524. (Тут мы и сами не знаем — верно ли обратное.)

И.Вайнштейн, Н.Васильев, В.Сендеров

М1497. *Докажите, что на торической доске 15×15 клеток нельзя расставить 15 ферзей, не бьющих друг друга. Другими словами, не существует 15 пар целых чисел от 1 до 15 таких, что различны: первые числа в парах, вторые числа в парах, остатки от деления на 15 сумм чисел в парах и остатки от деления на 15 разностей чисел в парах.*

Будем обозначать, как принято, множество целых чисел через $\mathbf{Z}$, множество остатков при делении на m — через $\mathbf{Z}_m$. Удобно считать, что поля доски — это пары (x, y) элементов $\mathbf{Z}_{15} = \{0, 1, \ldots, 14\}$.

Предположим, что требуемая расстановка 15 ферзей на торической доске 15×15 существует. Занумеруем ферзей по «высоте» (по координате y) и обозначим через k_j значение координаты x для j-го ферзя; таким образом, по предположению, ферзи (k_j, j), $j\in \mathrm{Z}_{15}$, стоят так, что все $k_j \in \mathrm{Z}_{15}$ различны между собой, все суммы $k_j + j$ (по модулю 15) и все разности $k_j - j$ (по модулю 15) также различны. Тогда в наборе («мультимножестве» — т.е. множестве с повторяющимися элементами) из 45 элементов

$$\{k_0, k_0-0, k_0+0,\ k_1, k_1-1, k_1+1, \ldots, k_{14}, k_{14}-14, k_{14}+14\}$$

каждый элемент $\mathbf{Z}_{15}$ встречается по 15 раз.

Теперь — основная идея: заменим все элементы в этом наборе их остатками по модулю 3; тогда каждый из остатков 0, 1, 2 из $\mathbf{Z}_3$ будет встречаться в наборе по 15 раз.

Заметим теперь, что если $j\in\mathbf{Z}_{15}$ не делится на 3, то тройка k_j, k_j+j и k_j-j дает три разных остатка 0, 1, 2 по модулю 3; таких j=1, 2, 4, 5, …, 13, 14 всего 10, и им соответствуют 30 чисел в наборе. Остальным 5 значениям k_j соответствуют 15 чисел набора

$$k_0, k_0, k_0, k_3, k_3-3, k_3+3, \ldots, k_{12}, k_{12}-12, k_{12}+12,$$

которые по модулю 3 равны

$$k_0, k_0, k_0, k_3, k_3, k_3, \ldots, k_{12}, k_{12}, k_{12};$$

количество каждого из остатков 0, 1, 2 среди них кратно трем, а каждый из них должен встречаться ровно 5 раз. Противоречие. Задача решена.

Заметим, что мы использовали такие факты из арифметики остатков: естественное отображение $\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}_m$ множества $\mathbf{Z}$ целых чисел на множество $\mathbf{Z}_m$ (каждому числу соответствует остаток при делении на m) переводит сумму чисел в сумму «по модулю m», и для n, делящегося на m, его можно представить как композицию двух отображений $\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}_n\to\mathbf{Z}_m$.

[1] *Примерно так же, но с помощью площадей треугольников, это доказано в книге Д.О. Шклярского, Н.Н. Ченцова, И.М. Яглома «Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Ч. 2. Геометрия (планиметрия)». — М.: 1952. Гос.изд. технико-теоретической литературы. задача 105. Этот факт предельный случай теоремы Брианшона об описанном шестиугольнике — в книге служит леммой к ее доказательству.*

[2] *Тем, кто знаком с инверсией, конечно, ясно, что четырехугольник, обращенный к вписанному, вписанный (и даже в какую именно окружность)! Но это, видимо, чисто внешнее сходство формулировок.*

Точно так же доказывается невозможность расстановки ферзей на доске $3q\times 3q$, где $q>1$ не делится на 3. Хорошо известно, что если исключить одно из условий — про x_i+y_i или про x_i-y_i, то требуемый набор (x_i, y_i) существует для нечетных n (см. решение задачи М1472, «Квант» № 4, 1995). Можно доказать, что расстановка ферзей на торической доске $n\times n$ существует в том и только том случае, если n взаимно просто с 6; пример для $n=5$: ферзи становятся в клетки (x_i, y_i), где $x+2y\equiv 0 \pmod n$. Получена даже оценка для количества различных расстановок (см. статью в American Math. Monthly (1994), v.101, № 7).

А.Толпыго

М1498. *Решите при каждом $n>1$ систему уравнений*

$$\begin{cases} x_1x_n=2,\\ x_2(x_n-x_1)=1,\\ \dots\\ x_{n-1}(x_n-x_{n-2})=1,\\ x_n(x_n-x_{n-1})=1.\end{cases}$$

При нескольких первых значениях n (n=2, 3, 4, 5) систему удается решить «в лоб»: положив $x_n=z$, можно выразить через z последовательно x_1, $x_2, \dots$, и наконец из последнего уравнения системы получить уравнение вида $P_n(z)=0$, где P_n — многочлен. Например, при $n=2$ получим $z=\pm\sqrt3$, при $n=3$ — $z=\pm\sqrt{2\pm\sqrt2}$, при $n=4$ в ответе появятся корни из 5. Это может навести на мысль сделать тригонометрическую замену переменной (и даже — какую именно).

Положим $x_n=2\cos\alpha$. Тогда

$$x_1=\frac{1}{\cos\alpha},\quad x_2=\frac{1}{2\cos\alpha-\dfrac{1}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha}{\cos2\alpha};$$

и далее по индукции — предположив, что

$$x_k=\frac{\cos(k-1)\alpha}{\cos k\alpha},$$

найдем

$$x_{k+1}=\frac{1}{2\cos\alpha-\dfrac{\cos(k-1)\alpha}{\cos k\alpha}}=\frac{\cos k\alpha}{\cos(k+1)\alpha},$$

поскольку $2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\beta+\alpha)+\cos(\beta-\alpha)$.

Последнее уравнение системы дает

$$x_n=\frac{\cos(n-1)\alpha}{\cos n\alpha}=2\cos\alpha$$

и преобразуется к виду $\cos(n+1)\alpha=0$, откуда

$$\alpha=\frac{\pi(2m+1)}{2(n+1)};$$

при этом

$$x_k=\frac{\cos(k-1)\alpha}{\cos k\alpha}\quad (k=1,\ 2,\ \dots,\ n). \qquad (*)$$

Разные значения $\cos\alpha$ получаются при $0<\dfrac{\pi(2m+1)}{2(n+1)}<\pi$, т.е. при $m=0,\ 1,\ \dots,\ n$. Однако не все они годятся: чтобы ни одно из чисел $\cos k\alpha$ ($k=1, \dots, n$) не обращалось в 0, необходимо и достаточно, чтобы $2m+1$ и $n+1$ не имели общего делителя, большего 1 (если $2m+1=dp$, $n+1=dq$, $d>1$, то p нечетно и $\cos q\alpha=\cos\dfrac{\pi dpq}{2dq}=\cos\dfrac{p\pi}{2}=0$; легко доказать и обратное).

Итак, к строчке $(*)$, дающей ответ, надо добавить условие

$$\text{НОД}(2m+1, n+1)=1,\ 0\le m\le n.$$

Нужно еще доказать, что найдены все решения. Из сказанного выше следует, что нет других решений, для которых $|x_n|\le 2$. Вот один из способов доказать, что решения с $|x_n|>2$ быть не может.

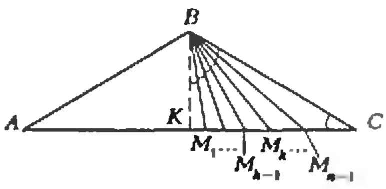
Обозначим $\operatorname{ch}\alpha=\dfrac{e^\alpha+e^{-\alpha}}{2}$, где e — основание натуральных логарифмов — что, впрочем, здесь не важно: нам понадобится лишь, что $e>0$ и что, как и для $\cos\alpha$,

$$2\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\beta=\operatorname{ch}(\alpha+\beta)+\operatorname{ch}(\alpha-\beta).$$

(Тем, кто знаком с комплексными числами, напомним, что $\cos\alpha=\dfrac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$, так что «гиперболический косинус» $\operatorname{ch}\alpha$ — это просто $\cos(i\alpha)$.) Рассуждая так же, как и выше, — положив $x_n=\pm2\operatorname{ch}\alpha$, — найдем, что $\operatorname{ch}(n+1)\alpha=0$. Но функция ch вообще не обращается в 0 ($\operatorname{ch}\alpha\ge1$ при любом α), так что решений с $|x_n|>2$ нет.

Рассказ об этой задаче был бы неполон без объяснения, откуда возникла такая странная на первый взгляд система уравнений. Ее источник — геометрия.

Построим равнобедренный треугольник ABC с боковыми сторонами $AB=BC=1$ и углами при основании $\alpha=\dfrac{\pi}{2(n+1)}$. Пусть K — середина основания. Отметим на отрезке KC точки $M_1, \dots, M_{n-1}$ такие, что $\angle M_{k-1}BM_k=\alpha$ (здесь и ниже $k=1,\ 2,\ \dots,\ n$; $M_0=K$, $M_n=C$, см. рисунок).



Треугольники ABM_k и $CM_{k-1}B$ подобны (их углы: α, $(k+n)\alpha$, $(n+1-k)\alpha$), так что $AM_k\cdot M_{k-1}C=AB\cdot BC$. Положим $x_k=AM_k$, в частности, $AC=x_n$; тогда $M_{k-1}C=x_n-x_{k-1}$, поэтому $x_k(x_n-x_{k-1})=1$ и (поскольку $AM_0=x_n/2$) $x_1x_n=2$. Легко видеть, что (см. рисунок) $AM_k=\cos(k-1)\alpha/\cos k\alpha$, в частности, $AM_1=1/\cos\alpha$, $AC=2\cos\alpha$. Таким образом, мы получим иллюстрацию «основного» решения системы с $m=1$.[3]

Заметим, что наш рисунок — фрагмент правильного $2(n+1)$-угольника со стороной 1; x_k — это кусочки, высекаемые на одной диагонали AC диагоналями, выходящими из вершины B. Решения системы, отвечающие зна-

[3] *Другой вариант этой задачи был предложен В.Протасовым (М1185).*

чениям $m > 1$, можно интерпретировать аналогичным образом как кусочки диагоналей (или их продолжений) правильной $2(n+1)$-угольной звезды.

Эта геометрическая интерпретация позволяет выяснить, при каких n решения системы выражаются в квадратных радикалах (через рациональные числа): при тех, для которых можно построить правильный $(n+1)$-угольник (а значит, и $2(n+1)$-угольник) циркулем и линейкой. Это — в точности те n, для которых число решений системы — степень двойки. Вот несколько первых значений n: 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 14, 15, 16, 19, 23, ... (см. статью А.Кириллова «О правильных многоугольниках, функции Эйлера и числах Ферма», «Квант» № 6 за 1994 год).

Н. Васильев

М1499. *Докажите, что число 2 можно представить в виде суммы трех четвертых степеней рациональных чисел бесконечным числом способов.*

Подберем вначале бесконечное число троек (a, b, c) натуральных чисел, сумма четвертых степеней которых равна удвоенной четвертой степени некоторого натурального числа.

Если $a = u - v$, $b = u + v$, то $a^4 + b^4 = 2(u^4 + 6u^2v^2 + v^4)$. Выражение в скобках окажется полным квадратом, если к нему прибавить $8u^4$. Итак,

$$a^4 + b^4 + (2u)^4 = 2(3u^2 + v^2)^2.$$

Мы естественно пришли к уравнению $3u^2 + v^2 = w^2$. Известно, что оно имеет бесконечно много «разных» (таких, что v и w взаимно просты) решений в натуральных числах. В самом деле, его можно записать в виде

$$3u^2 = (w - v)(w + v),$$

а дальше можно положить

$$w + v = 3p^2,\ w - v = q^2,$$

где p и q — нечетные взаимно простые числа, q не делится на 3; при этом

$$w = \frac{3p^2 + q^2}{2} \text{ и } v = \frac{3p^2 - q^2}{2}$$

— целые, $u = pq$. Заметим, что отношение $\frac{2u}{w} = \frac{4pq}{3p^2 + q^2}$ принимает бесконечно много разных значений (даже при $q = 1$). Отсюда следует утверждение задачи.

М.Ахвердиев, Л.Курляндчик, С.Маиконян, В.Сендеров

Замечание. Покажем, как можно изложить (по существу, как может заметить вдумчивый читатель, то же) решение более «научным» — а не «олимпиадным», т.е. использующим «тюк», — образом.

Поверхность $x^4 + y^4 + z^4 = 2$ в пространстве можно представить себе как кубический «тюк», набитый так основательно, что его ребра и вершины скруглены, или как «слегка надутый» резиновый куб. (Невольно вспоминается вопрос пятиклассника, ошарашивший начинающую учительницу, объяснявшую, что такое куб: «А если куб круглый — где у него ребра?») Конечно, прямолинейных отрезков на поверхности «тюка» нет, но линия второго порядка, допускающая рациональную параметризацию, оказывается, есть. Это просто окружность: линия пересечения с плоскостью

$$x + y + z = 0. \qquad (1)$$

Чтобы обнаружить это, требуются лишь некоторые вычисления с симметрическими функциями. (Конечно, они выйдут более громоздкими, чем в первом решении).

Пусть a, b, c — натуральные числа, $a \ge b \ge c$. Обозначим через $\sigma_a(\sigma_{ab}, \sigma_{abc})$ симметрический многочлен от x, y, z, равный сумме одночленов вида x^a (соответственно, $x^a y^b$, $x^a y^b z^c$); например,

$$\sigma_1 = x + y + z,\ \sigma_2 = x^2 + y^2 + z^2,\ \sigma_{111} = xyz,$$

$$\sigma_{31} = x^3y + y^3x + x^3z + z^3x + y^3z + z^3y,$$

и т.п.

Как нетрудно проверить, проделав умножение,

$$\sigma_2^2 = \sigma_4 + 2\sigma_{22},\ \sigma_1\sigma_3 = \sigma_4 + \sigma_{31},$$

$$\sigma_1\sigma_{21} = 2\sigma_{22} + \sigma_{211} + \sigma_{31},\ \sigma_1\sigma_{111} = \sigma_{211}.$$

Пусть $\sigma_1 = 0$; тогда из последних равенств получаем:

$$\sigma_{211} = 0,\ 2\sigma_{22} = -\sigma_{31} = \sigma_4,\ 2\sigma_4 = \sigma_2^2.$$

Итак, если выполнены условия (1) и

$$\sigma_2 = x^2 + y^2 + z^2 = 2, \qquad (2)$$

задающее сферу, то $\sigma_4 = x^4 + y^4 + z^4 = 2$.

Укажем на окружности, задаваемой условиями (1), (2), (бесконечное) множество всех ее рациональных точек. Удобнее, подставив в (2) $z = -x - y$ из (1), заменить (2) уравнением эллипса

$$x^2 + y^2 + xy = 1 \qquad (3)$$

— проекции окружности на плоскость Oxy. Проведем через некоторую рациональную точку эллипса — скажем, $(-1, 0)$ — прямую $y = t(x+1)$ с произвольным рациональным t. Координаты второй точки пересечения этой прямой с эллипсом:

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t + t^2},\ y = \frac{t^2 + 2t}{1 + t + t^2},$$

а значит и

$$z = -x - y = -\frac{2t + 1}{t^2 + t + 1}$$

— рациональные числа, причем все точки (x, y, z) лежат на плоскости (1), на сфере (2) и на поверхности $x^4 + y^4 + z^4 = 2$.

Было бы интересно выяснить, есть ли еще тройки рациональных чисел (x, y, z), лежащие на поверхности «тюка» (и не лежащие в плоскостях $x \pm y \pm z = 0$). Известно, что в плоскостях $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ таких троек больше нет.

Н.Васильев

М1500. *Докажите, что в любой компании из 50 человек обязательно найдутся двое, имеющие среди остальных членов компании четное число (быть может, 0) общих знакомых.*

Предположим противное: пусть у каждых двух из 50 человек нечетное число общих знакомых.

Пусть A — один из этих людей, $M = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ — множество его знакомых.

Лемма. *Число k знакомых у каждого A четно.*

Действительно, составим для каждого $B_i \in M$ список всех его знакомых в M. Суммарное число мест во всех k списках четно, поскольку оно равно удвоенному числу пар знакомых в M, а число людей в каждом списке нечетно. Значит, k четно.

(Читатель, видимо, встречался с каким-то вариантом этой хорошо известной задачи.)

Итак, пусть $k=2n$. Составим теперь для каждого $B_i \in M$ список всех его знакомых, кроме A (не только в M). Каждый список по лемме (примененной к B_i) состоит из нечетного числа людей и потому суммарное число мест во всех $2m$ списках четно. Но тогда кто-то из 49 людей (кроме A) входит в четное число списков, т.е. имеет четное число общих знакомых с A.

Противоречие с предположением доказывает, что у каких-то двух из 50 человек будет четное число общих знакомых.

С.Токарев

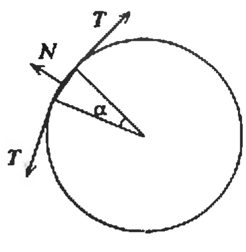
Эта задача, так же как М1494, предлагалась весной 1995 года на Турнире городов.

Разумеется, утверждение задачи остается справедливым для множества не только из 50, но и из любого четного числа элементов. (Условие четности необходимо: например, если каждые двое имеют среди $2k+1$ людей знакомых, то каждые двое имеют $2k-1$ общих знакомых.) Интересно, что эта же задача была независимо «открыта» в Петербурге и предлагалась на городской олимпиаде. Надеемся, что это не свидетельствует о том, что к концу века запас новых красивых «олимпиадных» задач подходит к концу.

Н.Васильев

Ф1508. *На стальной стержень радиусом R надето с натяжением тонкое резиновое кольцо. Сила натяжения кольца T. Какую силу нужно приложить, чтобы сдвинуть кольцо вдоль стержня? Сила распределена по кольцу равномерно, коэффициент трения на границе сталь—резина μ.*

Сила сухого трения при проскальзывании определяется прижимающей силой — силой реакции. Рассмотрим часть резинового кольца (см. рисунок). Из простых гео-



метрических соображений для малого угла α следует

$$2T\frac{\alpha}{2}=N,$$

откуда для прижимающей силы получаем

$$N=T\alpha,$$

а для силы трения для этого куска —

$$f_{тр}=\mu N=\mu T\alpha.$$

Полная сила трения складывается из сил, действующих на такие кусочки, и составляет

$$F_{тр}=\sum f_{тр}=\sum \mu T\alpha=2\pi\mu T.$$

А.Андрианов

Ф1509. *Шероховатый шкив вращается с постоянной угловой скоростью, ось шкива горизонтальна. Через шкив перекинута легкая нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены два груза. При нулевой начальной скорости грузов один из них имеет ускорение, равное a_1 и направленное вверх. Если поменять направление вращения шкива, то при тех же условиях этот груз имеет ускорение, равное a_2 и направленное вниз. Найдите отношение масс грузов.*

Пусть масса M одного из грузов больше, чем масса m другого. Тогда именно тяжелый груз в первом случае

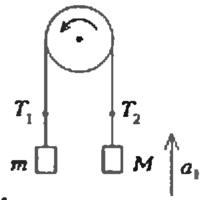


Рис.1

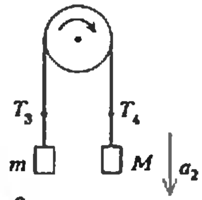


Рис.2

имеет ускорение, равное a_1 и направленное вверх (рис.1):

$$T_2-Mg=Ma_1,\quad mg-T_1=ma_1,$$

откуда получаем

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{M(g+a_1)}{m(g-a_1)}.$$

Для второго случая (рис.2) можно записать

$$Mg-T_4=Ma_2,\quad T_3-mg=ma_2,$$

откуда

$$\frac{T_3}{T_4}=\frac{m(g+a_2)}{M(g-a_2)}.$$

Разность сил натяжения по обе стороны блока определяется силами трения, действующими на нить со стороны блока. Рассчитать эти силы не так просто — ведь натяжение нити меняется от точки к точке, значит, и силы трения различаются для разных частей нити. Но расчет тут и не нужен — достаточно понять, что если сила натяжения «на входе» равна T, то $F_{тр}\sim T$ и, следовательно, отношение сил «на входе» и «на выходе» определяется коэффициентом трения и углом охвата блока нитью. В нашем случае получаем

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{T_3}{T_4},$$

или

$$\frac{M(g+a_1)}{m(g-a_1)}=\frac{m(g+a_2)}{M(g-a_2)}.$$

Отсюда находим искомое отношение масс:

$$\frac{M}{m}=\sqrt{\frac{(g-a_1)(g+a_2)}{(g-a_2)(g+a_1)}}.$$

С.Варламов

(Продолжение см. на с. 34)

Бильярд

Игру на бильярде любят многие, жаль лишь, что бильярдных столов не так много, как хотелось бы. Игра на бильярде требует не только верного глаза и четкого удара, но и точного расчета. Легендарный маршал Семен Михайлович Буденный говаривал: «Играя на бильярде, я беру уроки физики и математики».

Рис. 1

В бильярдной игре много тонкостей, связанных с ударами не по центру шара, а сверху или сбоку, что заставляет шар вращаться, а это, при наличии трения шара о сукно, покрывающее стол, делает траекторию шара криволинейной. Такие эффекты описаны известным французским физиком Г.Кориолисом в книге «Математическая теория явлений биллиардной игры». Эта книга вышла в 1835 году, а ее русский перевод — в издательстве Гостехиздат в 1956 году.

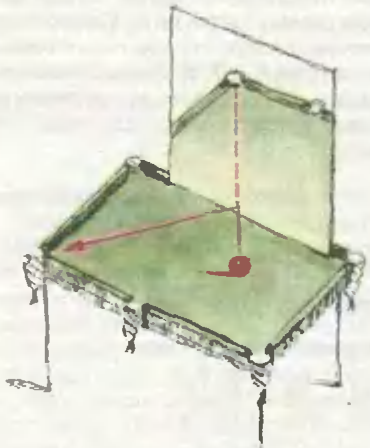


Рис. 2

Здесь мы рассмотрим простейшее прямолинейное движение бильярдного шара и его траектории, возникающие после столкновений со стенками различных бильярдов. Движение шара после столкновения с бортом подчиняется известному закону оптики: «Угол падения равен углу отражения» (рис.1), поэтому траектории бильярдного шара совпадают с траекториями луча света. Заметим, кстати, что фотон можно рассматривать, как маленький бильярдный шарик.

Начнем со следующей задачи: «Задано положение шара на столе. В каком направлении следует его пустить, чтобы один раз ударившись о борт, он попал в заданную угловую лузу?» Чтобы решить эту задачу, представим, что вместо борта бильярда стоит зеркало (рис.2). Тогда движение шара в зеркале после удара о борт (зеркало) будет продолжением прямолинейного движения шара до удара о борт. Нарисуем два отраженных изображения бильярда и проведем прямые, соединяющие начальное положение шара с изображениями выбранного угла (рис.3). Если теперь зеркально отразить отрезки этой траектории относительно бортов, то получим необходимую траекторию движения шарика по бильярду.

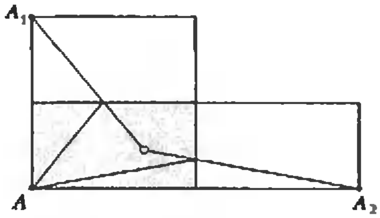


Рис. 3

Чуть более сложной является следующая задача: «На бильярде установлены два шара: красный и белый. Требуется так ударить по красному шару, чтобы он, отразившись сначала от борта AB, а потом от борта BC, попал в белый шар.» И здесь нам

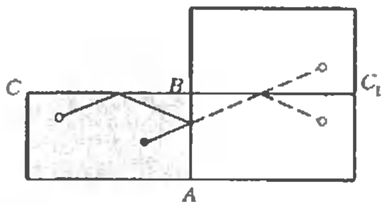


Рис. 4

помогут зеркальные отражения. Сначала отразим бильярд относительно борта AB, а потом отразим это изображение относительно борта BC_1. Теперь соединим изображение белого шара на последнем образе бильярда с красным шаром и, отражая полученную траекторию относительно бортов, получим искомый путь шара (рис.4).

А как будет двигаться шар в круглом бильярде? Ясно, что хорды круга, проходимые шаром между двумя ударами, равны между собой, поэтому траекторией шара будет либо правильный многоугольник, либо звездчатый многоугольник, либо траектория никогда не замкнется и шар будет «заметать» некоторое кольцо (рис.5).

Очень интересно наблюдать движение шара в эллиптическом бильярде, т.е. в бильярде, борт которого имеет форму эллипса. Напомним, что

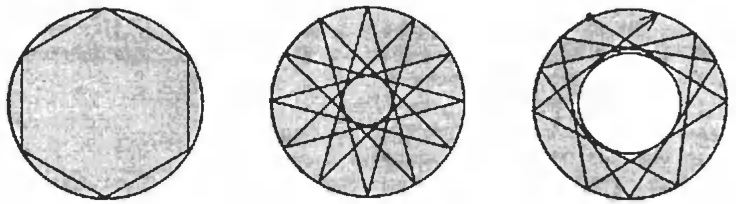


Рис. 5

эллипсом называется множество точек M, сумма расстояний которых от двух точек F_1 и F_2, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная, т.е. $F_1M + F_2M = 2a$ (рис.6).

Замечательное свойство эллипса состоит в том, что шар, пущенный из

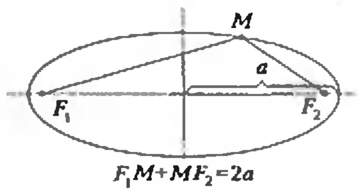


Рис. 6

одного фокуса, после отражения о борт попадает во второй фокус. Это свойство называется оптическим свойством эллипса. Его следствием является и тот факт, что шар, пущенный из

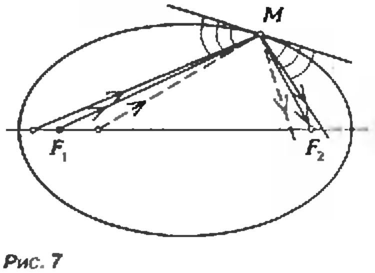


Рис. 7

точек отрезка F_1F_2, после отражения снова пересечет отрезок F_1F_2, а если мы пустим шар из точки, лежащей на прямой F_1F_2, но не лежащей на отрезке F_1F_2, то он никогда не пересечет отрезок F_1F_2 (рис.7).

Давно уже математики ищут такой многоугольник, чтобы в нем существовали две точки M_1 и M_2 такие, чтобы шар, пущенный из M_1, не мог никогда попасть в точку M_2 (рис.8). В последнее время большинство математиков уверено, что такого многоугольника не существует, хотя это до сих пор не доказано.

В то же время нетрудно придумать такой бильярд с криволинейной границей. На рисунке 9 изображен один из таких бильярдов. Дуга AD — половина эллипса с фокусами в точках B и C, а дуги AB, BC и CD — полуокружности. Как мы показали, шар, пущенный из точки M_1 с одном из полукругов, никогда не может пересечь отрезок BC и поэтому никогда не попадет в точку M_2, лежащую внутри среднего полукруга.

Математики рассматривают траектории движения шарика на бильярдах и с более сложными конфигура-

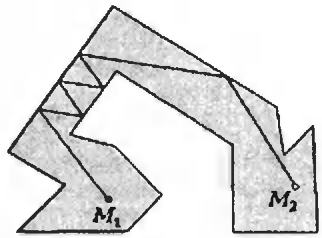


Рис. 8

циями бортов. Зачем? А затем, что решение таких задач помогает понять закономерности движений молекул газа или пучков частиц в замкнутых объемах. А это полезно знать во многих областях физики, в частности в квантовой электронике, ведь молекулы отражаются от стенок точно также, как шар от бортов бильярда.

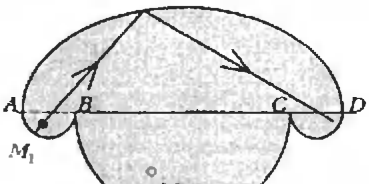


Рис. 9

А. Савин

(Начало см. на с. 23)

Ф1510. *Жесткий невесомый стержень подвешен при помощи шарнира одним концом к потолку. К середине стержня и ко второму его концу прикреплены два одинаковых маленьких тяжелых груза. Стержень свободно вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через точку подвеса, образуя с ней угол α. Чему равен угол между вертикалью и силой, с которой средний груз действует на стержень?*

Разложим силу, с которой стержень действует на средний груз, на вертикальную и горизонтальную составляющие. Ясно, что вертикальная составляющая равна mg, а горизонтальная равна $f = m\omega^2 \frac{l}{2}\sin\alpha$, где m — масса груза, ω — угловая скорость вращения стержня, l — его длина. Для крайнего груза вертикальная составляющая также равна mg, а горизонтальная в 2 раза больше, т.е. $2f$. Стержень образует с вертикалью неизменный угол α, значит, моменты сил, действующих на него со стороны шариков, уравновешены относительно шарнира:

$$mgl\sin\alpha + mg\frac{l}{2}\sin\alpha - 2fl\cos\alpha - f\frac{l}{2}\cos\alpha = 0,$$

откуда получаем

$$f = \frac{3}{5}mg\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Следовательно, искомая сила с вертикалью образует угол β, тангенс которого равен

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{f}{mg} = \frac{3}{5}\mathrm{tg}\,\alpha.$$

А.Якута

Ф1511. *В горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω вращается гладкая штанга, на которую надета муфта, прикрепленная к оси вращения при помощи легкой пружины. Муфта описывает окружность при относительном удлинении пружины, равном 0,25. Если муфту немного сместить вдоль вращающейся штанги и затем отпустить, она начнет колебаться. Определите период этих колебаний. Размерами муфты пренебречь.*

Запишем условие вращения для равновесного положения муфты:

$$m\omega^2 \cdot 1{,}25l = k \cdot 0{,}25l,$$

где m — масса муфты, l — длина недеформированной пружины, k — ее жесткость. Отсюда находим

$$k = 5m\omega^2.$$

Для определения периода колебаний перейдем во вращающуюся вместе со стрежнем систему координат. В этой неинерциальной системе на муфту действует дополнительная сила — центробежная сила инерции, направленная от оси вращения вдоль стержня и равная произведению массы муфты на центростремительное ускорение. Сместим груз на малую величину x от равновесного положения — теперь расстояние от оси составляет $1{,}25l + x$ и результирующая сила, действующая на муфту, равна

$$F = F_{\text{упр}} - F_{\text{ин}} = k(0{,}25l + x) - m\omega^2(1{,}25l + x) = (k - m\omega^2)x = 4m\omega^2 x = k^* x.$$

Видно, что при отклонении груза от равновесного положения возникает возвращающая сила, пропорциональная смещению груза — это есть условие возникновения гармонических колебаний с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k^*}} = \frac{\pi}{\omega}.$$

В.Петерсон

Ф1512*. *Спутник движется вокруг Земли на высоте нескольких десятков километров. Когда начали наблюдение за ним, высота спутника за один оборот уменьшалась на 1 метр. Оцените число оборотов спутника до падения его на Землю. Землю считайте совершенно круглой, а температуру и газовый состав атмосферы — неизменными на всех высотах.*

Сделаем некоторые упрощающие предположения. Будем считать, что высота спутника над Землей h существенно меньше радиуса Земли, а величина ускорения свободного падения g неизменна. Предположим также, что изменение высоты спутника за один виток Δh существенно меньше высоты h — при этом орбиту можно считать круговой и скорость движения неизменной. Тогда изменение энергии спутника за один виток связано с изменением высоты соотношением $\Delta E = mg\Delta h$. Величина силы сопротивления пропорциональна плотности ρ воздуха, значит, $\Delta E \sim \rho$.

Изменение давления воздуха равно

$$\Delta p = \frac{RT}{M}\Delta\rho = \rho g\Delta h,$$

где R — универсальная газовая постоянная, T — температура воздуха, M — его молярная масса. Следовательно, $\Delta\rho \sim \rho^2$. Запишем это иначе:

$$-\frac{\Delta\rho}{\rho^2} = \Delta\left(\frac{1}{\rho}\right) = \text{const}.$$

Это означает, что $1/\rho$ изменяется на одну и ту же величину за каждый виток. Поэтому полное число витков N связано с полным изменением плотности газа от $\rho_{\text{верх}}$ до ρ_0 соотношением

$$N\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho_{\text{верх}}} - \frac{1}{\rho_0} \approx \frac{1}{\rho_{\text{верх}}}$$

(плотность газа на большой высоте во много раз меньше, чем у поверхности Земли).

Для верхнего витка имеем

$$\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\Delta\rho}{\rho_{\text{верх}}^2} = \frac{Mg\Delta h}{\rho_{\text{верх}}RT}.$$

Подставляя, получим оценку искомого числа оборотов спутника:

$$N \approx \frac{RT}{Mg\Delta h} \approx 10^4 \text{ витков}.$$

С.Панков

Ф1513. *Капля воды радиусом 2 мм находится в невесомости. Оцените частоту собственных колебаний капли. Плотность воды 1 г/см³, коэффициент поверхностного натяжения 0,07 Н/м.*

Сделаем оценку периода колебаний из соображений размерностей. Запишем выражение для периода T в виде

$$T = \sigma^\alpha\rho^\beta r^\gamma,$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность воды, r — радиус капли, а α, β и γ — некоторые числа. Преобразуем размерность коэффициента поверхностного натяжения:

$$\frac{\text{Н}}{\text{м}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{м}} = \text{кг}\cdot\text{с}^{-2}.$$

Тогда для правой части размерность будет такой:

$$\text{кг}^{\alpha}\cdot\text{с}^{-2\alpha}\cdot\text{кг}^{\beta}\cdot\text{м}^{-3\beta}\cdot\text{м}^{\gamma} = \text{кг}^{\alpha+\beta}\cdot\text{м}^{\gamma-3\beta}\cdot\text{с}^{-2\alpha}.$$

Получаем три уравнения

$$\alpha+\beta=0,\quad \gamma-3\beta=0,\quad -2\alpha=1,$$

откуда находим

$$\alpha=-\frac{1}{2},\ \beta=\frac{1}{2},\ \gamma=\frac{3}{2}.$$

Частота колебаний капли связана с периодом простым соотношением

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{1}{\sigma^{-\frac{1}{2}}\rho^{\frac{1}{2}}r^{\frac{3}{2}}}=\sqrt{\frac{\sigma}{\rho r^3}}\sim10^2\ \text{Гц}.$$

К.Бедов

Ф1514. *Прямоугольная проволочная рамка размером $a\times b$ сделана из куска тонкой проволоки массой m и общим сопротивлением R. Рамка движется поступательно со скоростью v_0 вдоль стороны b и влетает в область между полюсами магнита, создающего магнитное поле. Индукция магнитного поля равна B_0 и перпендикулярна плоскости рамки. Может ли рамка оказаться целиком в магнитном поле? Границу поля считайте резкой, индуктивностью рамки можно пренебречь.*

Пусть рамка углубилась в поле на x и скорость рамки в этом положении составляет v. Тогда по ней течет ток, равный

$$I=\frac{\mathcal{E}_i}{R}=\frac{B_0va}{R}.$$

На рамку действует тормозящая сила Ампера, равная

$$F=IB_0a=\frac{B_0^2a^2}{R}v.$$

За малый отрезок времени Δt скорость рамки уменьшится на

$$\Delta v=\frac{F}{m}\Delta t=\frac{B_0^2a^2}{mR}v\Delta t=\frac{B_0^2a^2}{mR}\Delta x.$$

Рассмотрим граничный случай: рамка въезжает в поле, потеряв полностью свою скорость, т.е.

$$\sum\Delta v=v_0\ \text{и}\ \sum\Delta x=b.$$

Отсюда получаем

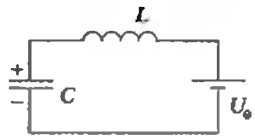
$$v_0=\frac{B_0^2a^2b}{mR}.$$

Если начальная скорость рамки больше этого значения, то рамка сможет оказаться полностью в магнитном поле.

А.Якута

Ф1515. *Стабилитрон — полупроводниковый прибор, который отличается от обычного диода тем, что при некотором обратном напряжении U_0 начинает очень хорошо проводить электрический ток (стабилитрон «пробивается»). Такой стабилитрон подключают последовательно с катушкой индуктивностью L к заряженному до напряжения $U=3U_0$ конденсатору емкостью C. Считая, что в прямом направлении стабилитрон идеально проводит ток, найдите полное количество теплоты, которое выделится в цепи.*

При одной (прямой) полярности приложенного напряжения стабилитрон представляет собой просто кусок провода, при другой напряжение на нем составляет ровно U_0 при любом токе — это очень похоже на идеальную батарейку с такой ЭДС. Пусть полярность подключенного конденсатора такая, что мы попадаем на «батарейчную» часть характеристики (противоположный случай мы рассмотрим ниже). В этом случае колебательный контур составлен из последовательно включенных конденсатора емкостью C, катушки индуктивностью L и идеальной батарейки напряжением U_0 (см. рисунок). В



таком контуре колебания напряжения на конденсаторе происходят не около нулевого значения, а относительно напряжения батарейки — при этом амплитуда составляет $3U_0-U_0=2U_0$. Значит, напряжение конденсатора меняется в пределах от $3U_0$ до $-U_0$. При достижении последнего значения направление тока в цепи меняется на противоположное, при этом наш стабилитрон перестает быть «батарейкой» и становится куском провода. Теперь амплитуда колебаний равна U_0 и напряжение конденсатора меняется в следующем полупериоде от $-U_0$ до U_0. После этого протекание тока по цепи прекращается (или, для любителей формальностей, происходят колебания с нулевой амплитудой — так или иначе, но выделения тепла в цепи больше нет).

Случай подключения конденсатора к цепи в такой полярности, что стабилитрон ведет себя как кусок провода, просто добавляет полпериода колебаний с амплитудой $3U_0$ — тепло при этом не выделяется, а следующий за этим процесс мы уже описали.

Найдем теперь выделившееся количество теплоты: начальная энергия конденсатора составляет $C(3U_0)^2/2$, конечная — $CU_0^2/2$, следовательно, перешло в тепло $4CU_0^2$. Это можно было получить и по-другому — выделение тепла происходит при протекании через стабилитрон с напряжением U_0 заряда $4CU_0$. Разумеется, при этом получается тот же самый ответ.

З.Рафаилов

Ф1516. *Трансформатор имеет две одинаковые обмотки, намотанные на тороидальный сердечник. Индуктивность каждой обмотки L, активное сопротивление провода пренебрежимо мало. К источнику переменного напряжения частоты ω подключают одну из обмоток непосредственно, а другую — последовательно с резистором сопротивлением R. Найдите сдвиг фаз между напряжением и током источника. Рассеяние магнитного потока мало, внутреннее сопротивление источника равно нулю.*

Обмотки трансформатора можно включить двумя способами — в одном случае поля токов обмоток складываются, а в другом вычитаются. Рассмотрим вначале первый случай, когда

$$\mathcal{E}_i = -LI_1' - LI_2'.$$

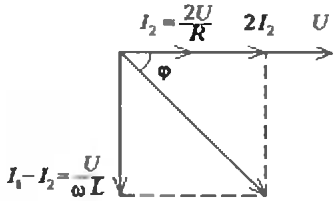
Первая катушка подключена непосредственно к сети, поэтому величина ЭДС индукции равна напряжению (мгновенному) сети: $-LI'_{\text{общ}} = U$. Видно, что в этом случае трансформатор с резистором ведет себя как простая катушка индуктивностью L и сдвиг фаз составляет 90°. Собственно, это понятный результат — ток через резистор в этом случае вовсе не течет, его концы подключены к точкам с одинаковыми потенциалами и от всего трансформатора остается одна катушка индуктивностью L. Второй случай сложнее. Поля вычитаются, и мы можем записать

$$\mathcal{E}_i = -LI_1' + LI_2',\ \text{или}\ \mathcal{E}_i = -L(I_1' - I_2').$$

Для тока $I_1 - I_2$ получается точно такое соотношение, как если бы этот ток протекал по катушке индуктивностью L, включенной в сеть напряжением U. Но ток I_2 мы легко можем найти — этот ток протекает по резистору сопротивлением R, а напряжение на этом резисторе составляет $2U$, т.е.

$$I_2 = \frac{2U}{R}.$$

Изобразим все это на векторной диаграмме (см. рисунок). Ток источника равен $I_1 + I_2$, значит, на векторной



диаграмме нужно сложить токи $I_1 - I_2$ и $2I_2$. Тогда для искомого сдвига фаз получаем соотношение

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{I_1 - I_2}{2I_2} = \frac{U/(\omega L)}{4U/R} = \frac{R}{4\omega L}.$$

Результат этот можно получить также, анализируя схему подключения резистора к сети — через «повышающий автотрансформатор».

Р.Александров

Ф1517. *Симметричную рассеивающую линзу, оптическая сила которой — 10 дптр, используют в качестве зеркала. При этом получаются два изображения удаленного предмета — размер одного в 2,5 раза больше другого. Определите по этим данным коэффициент преломления стекла, из которого сделана линза, и радиус кривизны поверхности линзы.*

Одно из двух изображений соответствует отражению от передней поверхности линзы — от вогнутого зеркала. Оно получается в фокальной плоскости, т.е. на расстоянии $R/2$ от зеркала (R — радиус кривизны поверхности линзы), и его высота равна

$$h_1 = H\frac{R/2}{a} = H\frac{R}{2a},$$

где a — расстояние от предмета до линзы. Во втором случае лучи преломляются на передней поверхности линзы, отражаются от задней поверхности и еще раз преломляются на передней — т.е. получается просто прохождение через рассеивающую линзу, только смотрим мы с другой стороны. Фокусное расстояние линзы выражается через радиусы кривизны поверхностей и коэффициент преломления стекла n соотношением

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{2(n-1)}{R}$$

(формально для рассеивающей линзы радиусы считают отрицательными). Высота изображения предмета в фокальной плоскости линзы равна

$$h_2 = H\frac{F}{a} = H\frac{R}{2(n-1)a}.$$

В условии задачи не сказано, какое из изображений больше, поэтому рассмотрим два варианта:

$$H\frac{R}{2a} = \frac{1}{2{,}5}H\frac{R}{2(n-1)a},\ \text{откуда}\ n = 1{,}4$$

— это разумный результат,
или

$$H\frac{R}{2a} = 2{,}5H\frac{R}{2(n-1)a},\ \text{откуда}\ n = 3{,}5$$

— так не бывает.
Итак, коэффициент преломления стекла равен $n = 1{,}4$ и радиус кривизны поверхности линзы составляет

$$R = 2(n-1)F = -8\ \text{см}.$$

Эти данные примерно соответствуют «школьной» рассеивающей линзе.

А.Зильберман

Вокруг уравнения Маркова

Н.Васильев, В.Сендеров, А.Скопенков

В этой заметке, посвященной решению задачи М1496, мы докажем ряд интересных фактов, касающихся решений в натуральных числах уравнений вида

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = kx_1 \ldots x_n. \qquad (1)$$

Здесь n и k — параметры — тоже натуральные числа. Частный случай уравнения $k = n = 3$ — уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz \qquad (2)$$

— подробно изучался замечательным русским математиком А.А.Марковым [1, 2]; так называемые «формы Маркова», тесно связанные с уравнением (2), используются в теории наилучшего приближения иррациональных чисел рациональными (см., например, [3]).

Дерево решений

Отметим с самого начала чудесное свойство уравнений Маркова. Если уравнение (1) имеет одно решение, то имеет их очень много, и размножать их можно так. Будем смотреть на одну из переменных — скажем, на x_n — как на «неизвестное», а все остальные считать параметрами.

Тогда, поскольку уравнение

$$x^2 - kx_1 \ldots x_{n-1}x + \left(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2\right) = 0$$

– квадратное (относительно x) и имеет корень $x = x_n$, оно должно иметь и второй целочисленный корень $x_n' = u$; по теореме Виета, он равен

$$u = kx_1 \ldots x_{n-1} - x_n = \left(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2\right) / x_n. \qquad (3)$$

Заметим, что $u < x_n$ в том и только в том случае, если

$$x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 < x_n^2 \Leftrightarrow 2x_n > kx_1 \ldots x_{n-1}. \qquad (4)$$

Такую процедуру можно проделать с каждой переменной x_j в роли x_n. Но лишь для одной — наибольшей — может случиться, что выполнено (4) и мы получим новое решение $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n')$, «меньшее» исходного (скажем, по сумме переменных); как правило, решение «растет вверх». Так получается бесконечное ветвящееся «дерево решений»; подробно об этом рассказывается в статье М.Г.Крейна [4].

Ниже, если не оговорено противное, мы считаем, что x_i переставлены по порядку: $x_1 \le \ldots \le x_n$. При этом будем называть решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *корневым*, если

$$x_n^2 \le x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \Leftrightarrow 2x_n \le kx_1 \ldots x_{n-1} \qquad (5)$$

(из него все ветви, идущие к соседним решениям, растут вверх).

Лемма 1. *Если уравнение (1) имеет решение в натуральных числах, то оно имеет и корневое решение.*

В самом деле, от некорневого решения $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно проделать спуск к меньшему $(x_1, x_2, \ldots, x_n')$, затем — переставив x_i по порядку — к еще меньшему, и после конечного числа шагов этот спуск должен остановиться, т.е. прийти к корневому решению.

Заметим, что у некоторых уравнений (1) может быть, в отличие от (2), более одного корневого решения; например, для $n = 50$, $k = 14$ решения (1, …, 1, 7) и (1, …, 1, 2, 2) — корневые, так что решения образуют не одно дерево, а целый лес. В этом лесу ветви (как разных деревьев, так и одного и того же дерева) не могут срастись: «путь вниз», в отличие от «пути вверх», может существовать лишь один — с помощью наибольшей переменной.

Построенный пример показывает также, что корневое решение не обязано быть минимальным (по сумме переменных). Обратное же утверждение справедливо: всякое минимальное решение, очевидно, является корневым.

Основные оценки

При исследовании конкретных (с фиксированными n и k) уравнений (1) полезна следующая

Лемма 2. *Пусть $n>2$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — корневое решение, причем, как всегда, $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$. Тогда*

$$x_1 \ldots x_{n-2} \le \frac{2(n-1)}{k}.$$

Доказательство получаем, сокращая на x_{n-1}^2 крайние члены цепочки

$$kx_1 \ldots x_{n-2}x_{n-1}^2 \le kx_1 \ldots x_n = x_1^2 + \ldots + x_n^2 \le$$
$$\le 2\left(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2\right) \le 2(n-1)x_{n-1}^2.$$

Замечание. Из доказательства следует, что неравенство леммы строгое.

Из леммы 2 следует, что при $n>2$ число корневых решений конечно. Докажем это. Достаточно фиксировать значения $x_1, \ldots, x_{n-2}$ и рассмотреть равенство $x^2 + x_{n-1}^2 + A = Bxx_{n-1}$. Очевидно, $B>2$. Поскольку рассматриваемое решение корневое, то $x = x_n$ — наименьший корень этого (рассматриваемого относительно x) уравнения. Но $x_{n-1} \le x_n$; значит, $2x_{n-1}^2 + A \ge Bx_{n-1}^2$, $A \ge (B-2)x_{n-1}^2$. Очевидно, этому неравенству может удовлетворять лишь конечное число натуральных x_{n-1}. Но для каждого из них $x_n^2 \le x_{n-1}^2 + A$ — что и завершает доказательство.

Таким образом, бесконечный лес может возникнуть лишь при $n=2$. Он и возникает, но «вырожденный»: из каждого корня ничего не растет.

Теорема. *Если уравнение (1) имеет решения и $n \ne k$, то $n \ge 2k-3$ при $n \ge 5$ и $n > 4k-6$ при $n=3$ и $n=4$.*

Нетрудно видеть, что оценка является точной: при $n=2k-3$ достаточно положить $x_1 = \ldots = x_{2k-4} = 1$, $x_{2k-3} = 2$ или $x_1 = \ldots = x_{2k-4} = 1$, $x_{2k-3} = k-2$. (Ясно, что любое из этих решений может быть получено из другого при помощи формул Виета, т.е. они «соседние».)

(Заметим, что при $k \ge 3$ равенство $n = 4k-6$ также реализуется: достаточно положить $x_1 = \ldots = x_{4k-8} = 1$, $x_{4k-7} = x_{4k-6} = 2$.)

Доказательство теоремы будет вытекать из следующей леммы, относящейся просто к наборам n натуральных чисел $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$, где $n \ge 3$.

Лемма 3. *Если $1 < x_n^2 \le x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2$, то отношение $R = \dfrac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{x_1 \ldots x_n}$ не превосходит $(n+3)/2$ (а при $n=3$ и $n=4$ — даже $(n+6)/4$).*

Доказательство. Пусть K — множество наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условиям леммы (т.е. таких, что наибольшее число больше 1 и его квадрат не больше суммы квадратов остальных).

Попробуем из любого данного набора получить «меньший» (по сумме координат) так, что новый набор также входит в K и при этом переходе отношение R не уменьшается. Для этого мы проделываем одну из следующих операций «спуска»:

(C_1) уменьшаем наибольшее число на 1, или, если эта операция выводит из K (это возможно лишь, если в наборе ровно два наибольших числа),

(C_2) уменьшаем два наибольших числа на 1.

То, что R не уменьшается, для операции C_2 очевидно. Проверим, что это так для операции C_1. Для этого положим $x = x_n$, $a = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2$, $f(x) = \dfrac{x^2 + a}{x}$; заметим, что при $0 < x \le \sqrt{a}$ функция убывает.

Через конечное число шагов мы придем к одному из двух наборов: (1, …, 1, 2) (при $n \ge 5$) либо (1, …, 1, 2, 2) (при $n=3$ и $n=4$). В первом случае $R=(n+3)/2$. Во втором случае $R=(n+6)/4<(n+3)/2$. Лемма доказана.

Теперь докажем теорему. Применим лемму 3 к корневому решению некоторого уравнения (1). Согласно лемме 1, такое существует; ясно, что оно отлично от $x_1 = \ldots = x_n = 1$. Получаем неравенство $n \ge 2k-3$ (при $n \ne k$, $n>4$) или $n \ge 4k-6$ (при $n \ne k$, $n=3$ или $n=4$). Теорема доказана.

(Если $n=2$, то уравнение, очевидно, разрешимо лишь при $k=2$. Общий вид решения: (m, m).)

Конкретные примеры

Легко заметить, что при фиксированном k уравнение (1) всегда имеет решение при $n = k$ (из одних единиц) и еще — при бесконечном количестве n (вида $(1, \ldots, 1, x, \ldots, x)$: для того чтобы подобрать такое решение, возьмем натуральное $t > 2$, рассмотрим достаточно большое натуральное x — такое, что $tx^2 \le kx^t$, и дополним (в случае неравенства) левую часть единицами до равенства с правой).

Вопрос, на который мы в состоянии ответить: при каком наименьшем $n = n(k) > k$ существуют решения? Ответ на него при $k \ge 4$ дает теорема, которую мы доказали. Осталось лишь разобраться с $k < 4$, для которых $2k - 3 \le k$ и поэтому оценка теоремы не дает ответа. Здесь будут использованы все наши леммы, оценки, сравнения по модулю, «спуск» — в общем, обычный арсенал средств, применяемых для изучения уравнений в целых числах.

Начнем со случая $k = 1$ и $n = 3$, т.е. с уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$. Оказывается, оно тесно связано с уравнением (2), где $k = n = 3$. Корневое решение дает здесь тройка (3, 3, 3), а при $k = 3$ — тройка (1, 1, 1). Легко показать, что при $k = 1$ все компоненты любого решения делятся на 3. Этот факт позволяет установить естественное взаимно однозначное соответствие между решениями уравнения при $n = 3$, $k = 1$ и при $n = 3$, $k = 3$. Таким образом, рассмотрение каждого из этих случаев сразу сводится к рассмотрению второго. (Обычно считают $k = 3$.)

Мы неоднократно сталкивались с решениями вида $(m, m, \ldots, m)$. Очевидно, при $k = n$, и только в этом случае, решением является $(1, 1, \ldots, 1)$. Вот еще одно «постоянное» решение: равенству $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = xyzt$ удовлетворяет набор (2, 2, 2, 2). Легко проверить, что никакие наборы вида $(m, \ldots, m)$, кроме упомянутых выше, решениями уравнений (1) являться не могут.

$k = 2$

Докажем, что при $n = 3$ уравнение не имеет решений в натуральных числах:

$$x_1 < \frac{2 \cdot 2}{2},\ x_1 = 1,\ 1 + x_2^2 + x_3^2 = 2x_2x_3,\ 1 + (x_2 - x_3)^2 = 0$$

— противоречие.

Заметим, что у уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = kxyz$ при $k > 3$ также нет решений — поскольку по теореме должно быть $n \ge 2k - 3 > 3$.

При $k = 2$, $n = 4$ решений нет. Докажем это.

Из леммы 2 следует, что $x_1x_2 < 3$. Если $x_2 = x_1 = 1$, то $2 + x_3^2 + x_4^2 = 2x_3x_4$, $2 + (x_3 - x_4)^2 = 0$.

Пусть $x_2 = 2$, $x_1 = 1$. Тогда $5 + x_3^2 + x_4^2 = 4x_3x_4$. Число $x_3^2 + x_4^2$ при делении на 4 может давать лишь остатки 0, 1 или 2; значит, левая часть равенства не делится на 4. Следовательно, уравнение не имеет решений.

Можно рассуждать несколько по-другому. Применим метод спуска один раз: доказав, что все числа x_1, x_2, x_3, x_4 четны, мы приходим к уравнению в натуральных числах

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 8xyzt.$$

Но $n = 4 < 2 \cdot 8 - 3 = 2k - 3$ — в противоречии с теоремой.

(Уравнения в целых числах $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ и $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2xyzt$ предлагались на XII Московской математической олимпиаде.)

При $k = 2$, $n = 5$ также нет решений.

Из леммы 2 и замечания к ней следует, что можно считать $x_1x_2x_3 < 4$. Если $x_3 = x_2 = x_1 = 1$, то $3 + x_4^2 + x_5^2 = 2x_4x_5$ — противоречие.

Пусть $x_3 = 2$, $x_2 = x_1 = 1$. Тогда $2(6 + x_4^2) \ge 6 + x_4^2 + x_5^2 = 4x_4x_5 \ge 4x_4^2$, $6 \ge x_4^2$. Так как $x_4 \ge x_3$, то $x_4 = 2$. Но уравнение $10 + x_5^2 = 8x_5$ не имеет рациональных корней.

(Уравнение $6 + x_4^2 + x_5^2 = 4x_4x_5$ можно решить и по-другому. Число $x_4^2 + x_5^2$ делится на 2, но не делится на 4. Следовательно, $x_4 = 2t_1 + 1$, $x_5 = 2t_2 + 1$. Но $(2t + 1)^2 = 4t(t + 1) + 1 \equiv 1 \pmod 8$. Получили: левая часть равенства делится на 8, правая при делении на 8 дает в остатке 4.)

Пусть $x_3 = 3$, $x_2 = x_1 = 1$. Рассуждая, как и выше, получаем: $6 > \frac{11}{2} \ge x_4^2$. Но $x_4 \ge 3$ — противоречие.

Тот факт, что при $k = 2$, $n = 5$ решений нет, можно доказать и следующим образом: показав, что все числа $x_1, \ldots, x_5$ четны, свести уравнение к такому:

$$y_1^2 + \ldots + y_5^2 = 16y_1 \ldots y_5.$$

Поскольку $2 \cdot 16 > 5 + 3$, это уравнение не имеет решений в натуральных числах.

При $k = 2$, $n = 7$ решение есть: (1, 1, 1, 1, 2, 2, 2).

$k = 3$

При $k = 3$, $n = 4$ решений нет. Из теоремы следует, что $k \le (4 + 6)/4 = 5/2$.

При $k = 3$, $n = 6$ решение существует:

$$(1, 1, 1, 1, 2, 2).$$

Замечание. Одесский математик К.Кноп обратил наше внимание на неразрешимость уравнения при $k = 2$, $n = 6$ и $k = 3$, $n = 5$. Она легко доказывается при помощи леммы 2 рассуждениями, аналогичными неоднократно проведенным выше. Для «минимальных» решений $(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_1 \le \ldots \le x_n$, К.Кноп получил более сильную, чем в лемме 2, оценку: $x_1 \ldots x_{n-2} \le \frac{n}{k}$.

Таким образом, доказано следующее

Предложение. *Обозначим через $n(k)$ наименьшее число n, $n \ge 2$, $n \ne k$ такое, что уравнение задачи имеет решение в натуральных числах. Справедливы равенства $n(1) = 3$, $n(2) = 7$, $n(3) = 6$, $n(k) = 2k - 3$ при $k \ge 4$.*

Большой вклад в изучение уравнения задачи (в литературе его обычно называют обобщенным диофантовым уравнением Маркова) внесли крупные немецкие математики А.Гурвиц и Ф.Г.Фробениус.

Конечно, в изучении «обобщенного уравнения Маркова» еще немало открытых вопросов: при каких (n, k) решения существуют, как найти все корневые решения и т.п. Кое-что удается выяснить. Например, в статье [5] для n, меньших заданной границы, построен алгоритм нахождения всех возможных значений n и k, при которых уравнение задачи имеет решения и указаны 15 значений $n \le 131020$, для которых уравнение имеет решения лишь при $k = n$. Наименьшее из таких n — число 12, наибольшее — число 2688.

Литература

1. *Делоне Б.Н.* Петербургская школа теории чисел. — М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1947.

2. *Марков А.А.* О бинарных квадратичных формах положительного определителя. Избранные труды. — М.: Изд-во АН СССР, 1951.

3. *Касселс Дж.В.С.* Введение в теорию диофантовых приближений. — М.: Изд-во ИЛ, 1961.

4. *Крейн М.Г.* Диофантово уравнение А.А.Маркова. — Квант, 1985, № 4.

5. *Herzberg N.P.* On a problem of Hurwitz. Pacif. J. Math. 1974, 50, № 2.

Задачи

1. У нас дома есть кусок поролона размерами 1×2 м. Отец предложил мне сделать из него матрас для моего младшего брата. При этом толщина матраса должна быть вдвое больше толщины куска поролона, а отношение сторон должно сохраниться 1:2.

Как это сделать? Число кусков при этом должно быть как можно меньшим.

Л.Емельянов

2. Решите числовой ребус:

СУМКА + СУМКА = БАГАЖ.

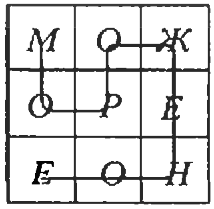
Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

А.Гейн

3. Из 20 монет достоинством в 5, 20 и 50 рублей составьте набор в 500 рублей.

Н.Антонович

4. В квадрате 3×3, изображенном на рисунке, можно прочесть слово МОРОЖЕНОЕ, двигаясь из клетки в



клетку через их общую сторону. А можно ли буквы расположить так, чтобы кроме того в каждом столбце и каждой строке стояла буква О?

И.Акулич

5. Ваня Суеверов очень не любит число 13 — «чертову дюжину», ему не нравятся не только само число 13 и числа, делящиеся на 13, но и такие двузначные числа, которые станут делиться на 13, если изменить одну из цифр. На крючки с какими номерами предпочитает вешать свою одежду в гардеробе Ваня?

С.Дворянинов

Конкурс «Математика 6—8»

Мы продолжаем конкурс по решению математических задач для учащихся 6 — 8 классов. Конкурс состоит из 20 задач (по 5 в каждом номере журнала, начиная с пятого) и заканчивается во втором номере будущего года. Победители будут награждены премиями журнала «Квант»; кроме того, победители и лучшие математические кружки из принявших участие в этом конкурсе будут приглашены в летнюю математическую школу. Решение задач из этого номера высылайте не позже 1 февраля 1996 года по адресу: 103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6 — 8»). Не забудьте указать фамилию, имя и класс.

6. Число 1995 может быть представлено в виде суммы нескольких последовательных натуральных чисел многими способами:

$997 + 998 = 1995$, $664 + 665 + 666 = 1995$, $330 + 331 + 332 + 333 + 334 + 335 = 1995$ и т.д.

В каком из таких представлений наибольшее число слагаемых?

С.Дворянинов

7. Рассмотрим число, записываемое n девятками. Чему равна сумма цифр куба этого числа?

П.Филевич

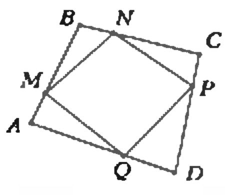
8. На доске записаны в ряд числа 1, 2, …, 1995. Сначала стирают с доски все нечетные числа. Из оставшихся стирают все числа, стоящие на четных местах. Затем снова стирают числа, стоящие на нечетных местах и т.д., пока не останется единственное число. Какое это число?

И.Акулич

9. Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a + b = c + d = 1000$. Какое максимальное значение может принять выражение $\frac{a}{c} + \frac{b}{d}$?

Г.Гальперин

10. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки M, N, P и Q, делящие стороны четырехугольника в отношении 1:2 (см. рисунок). Докажите, что



если четырехугольник $MNPQ$ — параллелограмм, то и четырехугольник $ABCD$ тоже параллелограмм.

В.Произволов

«Пирамиды», банки и прогрессия

А. САВИН

В последнее время многие люди стали жертвами финансовых махинаций. Такие компании, как «МММ», «Телемаркет», «Тибет», «РДС» уже навязли в зубах у журналистов, пишущих о финансах. Однако строгого математического анализа деятельности таких фирм в широкой печати не проводилось, а он очень интересен.

Финансовые аферы бывали в нашей стране и до появления частных фирм и банков. Они проводились в виде «денежных игр по почте». Я неоднократно получал письма, в которых мне сообщалось, что если я пошлю по пяти указанным в письме адресам по рублю, затем разошлю такие же письма по пяти новым адресам, вычеркнув лишь адрес, указанный первым и вписав пятым свой адрес, то в скором времени получу уйму денег.

В письме обосновывался и механизм такого обогащения. Действительно, от пяти человек, которым я пошлю письма, я получу по рублю, тем самым верну потраченные мной деньги. Те рассылают письма, в которых мой адрес стоит уже четвертым. Количество таких писем равно $5 \times 5 = 25$. От этих адресатов я получаю 25 рублей. Эти 25 человек рассылают по 5 писем, в которых мой адрес стоит третьим. Их получают 125 человек, каждый из которых посылает мне по рублю. Кроме того, они рассылают $125 \times 5 = 625$ писем, в которых мой адрес стоит вторым. Таким образом, теперь уже 625 человек посылают мне по рублю, а также посылают $625 \times 5 = 3125$ рублей. Итого мой доход составляет $25 + 125 + 625 = 3900$ рублей. В то время это были огромные деньги! Что-то около нынешних 15 миллионов рублей.

Было немало простаков, желавших разбогатеть подобным образом, но в выигрыше оказывались лишь устроители такой игры. Дело в том, что число участников такой игры увеличивается в пять раз с каждым кругом. Если пять устроителей игры разослали, скажем, 120 писем со своими адресами, то в первом круге участвуют 120 человек, а во втором — в пять раз больше, т.е. 600 человек, в третьем — 3000 человек, в четвертом — 15000 человек, в пятом — 75000 человек. От этих людей устроители получают больше 100000 рублей. Шестой круг будет содержать уже 375000, седьмой 1875000, восьмой 9375000, девятый 46875000 человек, а в десятом должно участвовать все население нашей страны, включая младенцев — 234375000 человек.

Ясно, что те, кто включился в девятом или десятом туре, не получит ничего — поскольку некому посылать эти деньги.

Такую систему финансисты называют «пирамидой». Сходство с геометрической пирамидой состоит в том, что здесь доход начальных участников создается за счет все более и более расширяющихся групп участников.

Математики давно изучают последовательности чисел, подобные рассмотренным. Такие последовательности, в которых каждое следующее число получается умножением предыдущего на некоторое постоянное число (в нашем случае это 5), называются *геометрическими прогрессиями*.

Если то число, на которое последовательно умножают члены прогрессии (оно называется *знаменателем прогрессии*), больше единицы, то члены прогрессии очень быстро возрастают. Это мы видели в рассмотренном случае. Если взять знаменатель прогрессии меньшим, например, равным 2, то и здесь быстро возникают огромные числа. Широко известна легенда об изобретателе шахматной игры индусе Сета. Он попросил у могущественного магараджи в награду за это изобретение несколько зерен пшеницы. Одно из них нужно было положить на первую клетку доски, еще два на вторую клетку, на третью клетку еще в два раза больше, т. е. четыре зерна, и т.д. Поскольку на шахматной доске 64 клетки, то затребованное количество зерна оказалось столь огромным, что его не удалось бы вырастить на всей Земле и за тысячу

лет. Попробуйте найти это количество зерен с помощью карандаша и листа бумаги или калькулятора.

Мы еще вернемся к геометрическим прогрессиям, а сейчас обратимся к финансовым пирамидам, типа «МММ» и «Телемаркет». Напомним принцип работы этих фирм. Выпускаются акции, которые продаются и покупаются по все возрастающей цене. Рассмотрим простейший случай: фирма выпустила 100000 акций по цене 1000 рублей и объявила, что через неделю она будет их скупать по 1090 рублей, а продавать по 1100 рублей, еще через неделю будет скупать по 1180 рублей, продавать по 1200 рублей и т.д., т.е. каждую неделю она будет увеличивать стоимость покупки акций на 90 рублей, а продажи — на 100 рублей.

Здесь мы имеем дело с двумя последовательностями: 1000, 1090, 1180,... и 1000, 1100, 1200,... В них каждый следующий член больше предыдущего на одно и то же (для своей последовательности) число. В первой это 90, а во второй 100. Подобные последовательности называются ***арифметическими прогрессиями***. Они также растут довольно быстро, но медленнее, чем геометрические прогрессии. Это утверждение следует пояснить. Возьмем геометрическую прогрессию 1, 2, 4, 8,... и арифметическую 1, 101, 201, 301,... . Впечатление таково, что члены арифметической прогрессии растут гораздо быстрее, чем члены геометрической. Но посмотрим, что происходит дальше. Десятый член арифметической прогрессии равен 901, а геометрической — 512, их одиннадцатые члены равны, соответственно, 1001 и 1024. Ага! Геометрическая прогрессия обогнала арифметическую и начинает намного ее опережать: 1101 и 2048, 1201 и 4096, 1301 и 8192... Утверждение о том, что геометрическая прогрессия со знаменателем большим единицы растет быстрее любой арифметической прогрессии, нужно понимать так: начиная с некоторого номера члены геометрической прогрессии станут и будут оставаться больше членов любой заданной арифметической прогрессии.

Итак, вернувшись к придуманной нами фирме, назовем ее «АБВ», проследим ее деятельность в течение года. Поскольку в году 52 недели, то через год акции «АБВ» будут продаваться по цене $1000 + 52 \times 100 = 6200$ рублей, а покупаться по цене $1000 + 52 \times 90 = 5680$ рублей. Если каждую неделю акции будут переходить из рук в руки, то фирма на перепродаже будет иметь по 10 рублей с каждой акции в неделю, значит за год ее доход составит $52 \times 10 \times 100000 = 52\ 000\ 000$ рублей.

Все вроде бы «в ажуре». «Из воздуха» получают прибыль и акционеры и хозяева фирмы. Действительно, купив акцию за 1000 рублей, через год за нее можно получить 5680 рублей, правда, и купить через год можно ее за 6200 рублей, но еще через год ее можно будет продать за 10360 рублей. Все довольны.

Но представим себе, что через год все акционеры захотят продать свои акции. Фирме «АБВ» придется выложить для их скупки $5\ 680 \times 100\ 000 = 568\ 000\ 000$ рублей. Где их взять, если фирма получила за год лишь 52 000 000 рублей? Да еще расходы на рекламу, на зарплату служащим, на аренду помещения... Значит, фирма не сможет выкупить акции даже у десятой части своих акционеров. Тщетны попытки акционеров «МММ» получить свои деньги — у фирмы просто нет таких денег и быть не может. Суммарный доход фирмы составляет 100 000 000 — стоимость проданных в начале года акций и 52 000 000 — прибыль за год, а расходы...

Но почему вдруг все акционеры (или значительная их часть) могут перестать покупать акции, а будут пытаться их продать? Причин может быть несколько. Может появиться фирма, которая предложит еще более выгодный способ вложения денег, могут возникнуть слухи о предстоящем банкротстве фирмы, но главная причина — постоянный рост стоимости акций. Так, акции «МММ» к моменту краха стоили около 100 000 рублей и их приобретение было не по карману многим первоначальным акционерам, платившим тогда по 100 рублей за акцию. Именно по этой причине такие «пирамидальные» фирмы обречены на банкротство за счет своих акционеров.

Какие еще существуют способы накопления имеющегося капитала? Конечно же — положить их в банк «под проценты». Предположим, что вы хотите положить в банк 10 000 рублей. В «Сбербанке» вам предложат 120% годовых, если вы кладете деньги на 3 месяца, 130% годовых, если положите на 6 месяцев, и 150% годовых при вкладе на год. Что это значит? Инструкция «Сбербанка» гласит: «Если вклад положен из расчета p% годовых, то за каждый месяц начисляется по $(p/12)$% от суммы вклада». Значит, вклад увеличивается в арифметической прогрессии. Т.е. если вы положили 10 000 рублей на 3 месяца, то получите доход, равный $10000 \times 130/12 \times 3 = 3\ 250$ рублей.

В банке «Триумф» вам предложат 200% годовых при вкладе на год. Посчитаем, сколько «накапает» вам в этом банке за 5 лет. Так как каждый год мы будем получать по 200%, то за 5 лет набежит 1000%, что составляет удесятеренный ваш взнос, т.е. 100 000 рублей. Верно? Нет, неверно! Считать нужно иначе. За год ваш вклад утраивается, т.е. через год у вас будет уже 30 000 рублей в банке, за второй год он снова утроится и вы будете иметь 90 000 рублей, за третий год он снова утроится и станет равным 270 000 рублей. (Узнали свою недавнюю знакомую — геометрическую прогрессию?) После четвертого года у вас будет 810 000 рублей, а после пятого 2 430 000 рублей. В чем была ошибка? Мы считали, что вклад растет по арифметической прогрессии, а на самом деле — по геометрической.

Однако приходится считаться и с такой возможностью: вы приходите в банк за деньгами, а на дверях объявление, смысл которого таков: «Банк лопнул, вкладчики лишились своих сбережений». Поэтому при выборе банка следовало бы осведомится о его надежности. Замечено, что чем больший процент на вклад предлагает банк, тем он менее надежен.

Итак, остановимся на «Сбербанке», как наиболее надежном способе вложения денег. Теперь нам предстоит выбрать способ вложения денег: на 3 месяца, на 6 месяцев или на год. Казалось бы, что лучше всего положить на год, что дает самый высокий процент годовых — 150%. Но не будем спешить, а посчитаем.

Если положить на полгода из расчета 130% годовых, то через полгода, согласно инструкции «Сбербанка», получим доход в 65% от вложенной суммы, таким образом сумма увеличится в 1,65 раза. Теперь положим все полученные деньги еще на полгода. Сумма возрастет еще в 1,65 раза, а в результате за год в $1{,}65 \times 1{,}65 = 2{,}7225$ раза. Это означает, что при вкладе 10 000 рублей мы получим 27 225 рублей, и доход составит 17 225 рублей, что составляет 172,25%

годовых. А это больше, чем первоначальные 150% годовых.

А если положить деньги на 3 месяца, потом еще, еще и еще раз на 3 месяца? В первый раз прибыль составит четвертую часть от 120%, т.е. 30% вложенной суммы. Это значит, что вклад увеличится в 1,3 раза. За следующий квартал он увеличится еще в 1,3 раза, потом еще в 1,3 и еще в 1,3 раза. Общее увеличение равно $1{,}3^4 = 2{,}8561$ раза. Теперь можно понять, что при таком способе вложения денег мы получим 185,61% годовых, что уже не так далеко от ставки банка «Триумф», а риск гораздо меньше. Правда, при этом нужно приходить в «Сбербанк» через каждые три месяца.

Однако заметим, что в «Сбербанке» имеется форма вклада под 100% годовых с правом снять вклад в любое время с получением соответствующей доли прибыли. Вот, наверное, золотая жила! Ведь мы убедились, что чем чаще кладешь и забираешь вклад, тем большей оказывается прибыль. Какую огромную прибыль мы получим, если будем ходить в «Сбербанк» каждый день! Давайте посчитаем. Если за год мы получаем доход в размере вложенной суммы, то за день получим (согласно инструкции) в $(1+1/365)$ раза, а за 365 дней он возрастет в $(1+1/365)^{365}$ раз. Наверное, это очень большое число?!

Мы должны вас разочаровать. Величина числа $(1+1/n)^n$ действительно растет с ростом n, но не может превзойти числа 2,718281828... . Это число обозначается буквой e в честь великого математика Леонарда Эйлера (L. Euler), который ввел это число и вычислил его с 23 знаками, использовав следующее его выражение:

$$e = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \ldots,$$

которое получил Даниил Бернулли. Это число иррациональное. Оно встречается во многих разделах математики, и вы с ним, заведомо, неоднократно встретитесь. Данное здесь его приближение легко запомнить любителям литературы: 2,7, а дальше два раза год рождения Льва Толстого.

Итак, даже бегая в «Сбербанк» через каждый час, вам не удастся увеличить за год вклад больше чем в 2,7183 раза, т.е. получить больше 171,83% годовых при этой форме вложения денег.

Послесловие

С тех пор, когда была написана эта статья, прошло немало времени. За это время процентные ставки в «Сбербанке» изменились. Поэтому, если вы решили вкладывать туда деньги, то все расчеты следует провести заново, исходя из нынешних процентных ставок.

ИНФОРМАЦИЯ

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП КОНКУРСА «МАТЕМАТИКА 6 — 8»

(Начало см. на с. 19)

вательных систем (директор А.М.Абрамов), а также фирма ТКО АСТ (генеральный директор А.А.Герцев) наградили книгами всех участников, а Фонд Сороса (директор образовательной программы — В.В.Борисов) оказал финансовую помощь.

Летом 1996 года такую же встречу юных математиков — победителей заочного конкурса — предполагается провести в летнем лагере близ Костромы, на берегу Волги.

В заключение приведем условия задач личной олимпиады (номера 1 — 6) и финального боя (номера 7 — 14). Эти задачи предложили Р.Женодаров (1, 9), А.Савин (2, 8), С.Токарев (3, 4, 6, 7, 12, 13), В.Произволов (5, 11), О.Крижановский (10) и А.Шаповалов (14).

1. В конференции принимали участие 19 ученых. После конференции каждый из них отправил 4 или 2 письма другим ученым, бывшим на конференции. Может ли случиться, что каждый из них получит по 3 письма?

2. На стороне AB квадрата $ABCD$ со стороной длиной a вне его построен равносторонний треугольник ABE. Найдите радиус окружности, проходящей через точки C, D и E.

3. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 1995, в записи которого любые две цифры, стоящие через одну, одинаковы.

4. Докажите, что в произведении $1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 99!\cdot 100!$ можно вычеркнуть один из ста сомножителей так, чтобы произведение оставшихся было точным квадратом.

5. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки M и N (N между M и B) такие, что $\angle MCN = 45°$. Докажите, что $MN^2 = AM^2 + NB^2$.

6. Можно ли в клетчатой таблице 13×13 отметить некоторые клетки так, чтобы любая клетка граничила по стороне ровно с одной из отмеченных клеток?

7. Может ли наименьшее общее кратное двух натуральных чисел равняться их сумме?

8. Дан треугольник ABC. Прямая, параллельная AC, пересекает сторону AB в точке P, медиану AM — в точке T, а сторону BC в точке K. Найдите длину стороны AC, если $PT = 3$, $TK = 5$.

9. На шахматную доску 8×8 положили 8 доминошек так, что каждая покрывает ровно две соседние клетки. Докажите, что на доске найдется квадрат, состоящий из четырех клеток, ни одна из которых не покрыта доминошкой.

10. В таблице 100×100 расставлены числа 0, 1 и -1 так, что в каждом квадрате 3×3 сумма чисел равна 0. Найдите наибольшее возможное значение суммы всех чисел таблицы.

11. Докажите, что

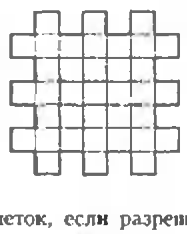
$$1994^2 + 1994^2\cdot 1995^2 + 1995^2$$

— точный квадрат.

12. Можно ли подобрать компанию, где у каждого ее члена было бы ровно пять друзей, а у любых двух — ровно два общих друга?

13. Может ли в выпуклом семиугольнике каждая диагональ быть перпендикулярной какой-либо другой диагонали?

14. На какое наименьшее число прямоугольников (не обязательно одинаковых) можно разрезать данную фигуру



из 37 клеток, если разрешено резать только по границам клеток?

Как же доказать это неравенство?

М. БАЛК, М. МАЗАЛОВ

Пролог

В этом очерке мы рассмотрим один довольно простой прием, позволяющий, однако, установить истинность далеко не простых неравенств с тремя переменными. Мы его проиллюстрируем на следующей задаче:

Задача. *Пусть a, b, c — произвольные положительные числа; $A(a,b,c)$ — их среднее арифметическое:*

$$A(a,b,c)=(a+b+c)/3;$$

функция $M(a,b,c)$ задается формулой

$$M(a,b,c)=a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Докажите, что справедливо неравенство

$$M(ab,bc,ca)/M(a,b,c)\le A(a,b,c), \quad (1)$$

или подробнее:

$$\frac{ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\le \frac{a+b+c}{3}; \quad (1')$$

равенство в (1) — (1′) имеет место лишь тогда, когда $a=b=c$. (Здесь и ниже выражения «лишь тогда», «лишь если» понимаются в смысле «тогда и только тогда».)

Геометрический смысл утверждения задачи таков. Пусть $LNKEL_1N_1K_1E_1$ (или короче: Π) — прямоугольный параллелепипед с измерениями a, b, c и диагональю длиной t (т.е. $LK=a$, $LE=b$, $LL_1=c$, $LN_1=t$). Обозначим через P прямоугольник со сторонами $a+b+c$ и $a+b+c+t$, а через $S(P)$ — его площадь. Плоскость L_1KE отсекает от параллелепипеда Π прямоугольный (т.е. имеющий три взаимно перпендикулярных ребра) тетраэдр L_1LKE (короче: T); площадь его полной поверхности обозначим $S(T)$. Теперь заметим, что

$$M(a,b,c)=a+b+c+t,$$

$$M(ab,bc,ca)=2S(T),$$

$$M(a,b,c)\cdot A(a,b,c)=S(P)/3.$$

Поэтому утверждение задачи означает:

$$S(T)\le S(P)/6,$$

причем равенство имеет место лишь если параллелепипед Π — куб.

Несколько упражнений для разминки

В дальнейших рассуждениях важную роль играет функция

$$D(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx. \quad (2)$$

Упражнение 1. *Верно ли, что для любых действительных чисел x, y, z справедливо неравенство*

$$D(x,y,z)\ge 0?$$

При каких условиях имеет место равенство?

Решение.

$$D(x,y,z)=\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right)/2.$$

Поэтому $D\ge 0$ при любых x, y, z, причем равенство имеет место лишь если $x=y=z$.

Упражнение 2. *Верно ли для любых действительных чисел x, y, z неравенство*

$$3(xy+yz+zx)\le (x+y+z)^2? \quad (3)$$

Решение.

$$(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)=D(x,y,z).$$

Поэтому неравенство (3) верно при любых действительных x, y, z, причем равенство имеет место лишь при $x=y=z$.

Упражнение 3. *Верно ли для любых действительных чисел a, b, c двойное неравенство*

$$(ab+bc+ca)^2\le 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\le (a^2+b^2+c^2)^2? \quad (4)$$

Решение. Воспользуемся формулой (2) и решением упражнения 1. Имеем

$$(a^2+b^2+c^2)^2-3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=D(a^2,b^2,c^2)\ge 0,$$

$$3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(ab+bc+ca)^2=2D(ab,bc,ca)\ge 0.$$

Поэтому формула (4) верна при любых действительных a, b, c, причем равенство имеет место лишь при $a=b=c$.

Упражнение 4. *Докажите, что при каждом $\lambda\le 1$ строгое неравенство*

$$a+b+c>\lambda\sqrt{a^2+b^2+c^2} \quad (5)$$

верно для любых положительных чисел a, b, c.

Решение. Так как

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca),$$

то

$$(a+b+c)^2>a^2+b^2+c^2.$$

А так как $a,b,c>0$, то отсюда следует, что $a+b+c>\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Поэтому подавно верно неравенство (5).

Привлечение фактов, о которых говорится в упражнениях 1 – 4, позволяет справиться с доказательством весьма трудных неравенств.

Теперь решим задачу

Рассмотрим функцию (см. (1′))

$$F(a,b,c)=(a+b+c)^2+(a+b+c)\sqrt{a^2+b^2+c^2}-3(ab+bc+ca)-3\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}. \quad (6)$$

Легко проверить, что $F=0$ при $a=b=c$. Рассмотрим случай, когда среди чисел a, b, c хотя бы два различных. Покажем, что тогда $F>0$. Для этого мы правую часть в (6) немного уменьшим и покажем, что даже после уменьшения она положительна. А для уменьшения правой части в (6) мы немного увеличим одно из вычитаемых положительных выражений — лучше то, которое содержит корень. Имеем (см. упражнение 3)

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2<(a^2+b^2+c^2)^2/3;$$

поэтому

$$F(a,b,c)>(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)+(a+b+c)\sqrt{a^2+b^2+c^2}-\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)^2}=$$

$$=D(a,b,c)+\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times\left(a+b+c-\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}\right)=$$

$$=D(a,b,c)+\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times\frac{(a+b+c)^2-3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c+\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}=$$

$$=D(a,b,c)+\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times$$

(Продолжение см. на с. 49)

Рациональные корни многочлена

А. ЯРСКИЙ

Как известно, при $n \geq 5$ не существует формулы, выражающей корни произвольного многочлена

$$f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x + p_n \quad (*)$$

через его коэффициенты. Однако задача об отыскании *рациональных* корней любого конкретного многочлена с *целочисленными* коэффициентами $p_0, p_1, \ldots, p_n$ может быть решена конечным числом проб.

Теорема. *Пусть коэффициенты $p_0, p_1, \ldots, p_n$ многочлена $(*)$ являются целыми числами. Если несократимая дробь $x = p/q$, $p, q \in \mathbf{Z}$, является корнем многочлена $(*)$, то число p является делителем свободного члена p_n, а число q — делителем старшего коэффициента p_0.*

Данную теорему, как говорится, легче доказать, чем сформулировать: подставив $x = p/q$ в $(*)$ и домножив на q^n, получим

$$p_0 p^n + p_1 p^{n-1} q + \ldots + p_{n-1} p q^{n-1} + p_n q^n = 0.$$

Все слагаемые, начиная со второго, содержат множитель q. Следовательно, слагаемое $p_0 p^n$ делится на q. И так как p и q взаимно просты, то p_0 делится на q. Аналогично доказывается, что p_n делится на p. Только это и утверждает теорема.

Для большей ясности проиллюстрируем сказанное несложным примером. Рациональные корни многочлена

$$f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 8x + 4$$

следует искать среди чисел

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 1/3,\ \pm 2/3,\ \pm 4/3,$$

поскольку, согласно теореме, никаких иных рациональных корней рассматриваемый многочлен не имеет. Перебирая варианты, можно убедиться, что $x = -2/3$ действительно является корнем. Разделив «уголком» многочлен $f(x)$ на двучлен $x + 2/3$, получим

$$f(x) = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x^2 + x + 2\right).$$

Теперь легко убедиться, что $x = -2/3$ — единственный (действительный) корень $f(x)$.

Основное содержание настоящей статьи описывается одним предложением:

Если коэффициенты $p_0, p_1, \ldots, p_n$ многочлена $(*)$ в свою очередь являются многочленами (от любого числа переменных), и если многочлен $(*)$ имеет корень $x = p/q$, где p и q — взаимно простые многочлены, то многочлен p является делителем свободного члена p_n, а многочлен q — делителем старшего коэффициента p_0.

Иными словами, утверждение теоремы, как и ее доказательство, переносятся без каких-либо изменений на описываемый случай.

Рассмотрим некоторые возможные приложения последнего утверждения.

Пример 1. *Решите уравнение*

$$x^4 + x^3 - 3a^2x^2 - 2a^2x + 2a^4 = 0.$$

Решение. Согласно теореме, если уравнение имеет рациональное решение, то его следует искать среди делителей свободного члена уравнения, т.е. проверить варианты

$$x = C,\ x = Ca,\ x = Ca^2,\ x = Ca^3,$$
$$x = Ca^4,\ C \neq 0\ (C \in \mathbf{R}).$$

Подставив $x = Ca$, получим

$$\left(C^4 - 3C^2 + 2\right)a^4 + C\left(C^2 - 2\right)a^3 = 0,$$

откуда

$$C = \pm\sqrt{2}.$$

Итак, нашлись сразу два корня уравнения: $x = \pm\sqrt{2}a$. Следовательно, исходный многочлен должен разделиться без остатка на двучлен

$$\left(x - \sqrt{2}a\right)\left(x + \sqrt{2}a\right) = x^2 - 2a^2.$$

Разделим «уголком»:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +x^3 & -3a^2x^2 & -2a^2x & +2a^4 & x^2 - 2a^2 \\
\hline
x^4 & & -2a^2x^2 & & & x^2 + x - a^2 \\
\hline
 & x^3 & -a^2x^2 & -2a^2x & +2a^4 & \\
 & x^3 & & -2a^2x & & \\
\hline
 & & -a^2x^2 & & +2a^4 & \\
 & & -a^2x^2 & & +2a^4 & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Итак, исходный многочлен разложен на множители второй степени. Решив квадратное уравнение, получим

Ответ: $\pm a\sqrt{2}$; $\left(-1 \pm \sqrt{1 + 4a^2}\right)/2$.

Разумеется, решения не всякий раз устроены столь просто, как в примере 1.

Пример 2. *Решите уравнение*

$$x^3 - 3x = a^3 + a^{-3}.$$

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде

$$a^3x^3 - 3a^3x - \left(a^2 + 1\right)\left(a^4 - a^2 + 1\right) = 0.$$

Согласно теореме, рациональные решения следует искать в виде $x = p/q$, где p — делитель свободного члена $\left(a^2 + 1\right)\left(a^4 - a^2 + 1\right)$, а q — делитель старшего коэффициента a^3. Испробовав различные варианты, рано или поздно придем к случаю

$$x = C\left(a^2 + 1\right)/a.$$

Подстановка в уравнение приведет в этом случае к равенству

$$C^3\left(a^2 + 1\right)^2 - 3Ca^2 - \left(a^4 - a^2 + 1\right) = 0,$$

т.е.

$$\left(C^3 - 1\right)a^4 + \left(2C^3 - 3C + 1\right)a^2 + \left(C^3 - 1\right) = 0,$$

откуда

$$C = 1.$$

Итак, решение найдено: $x = \left(a^2 + 1\right)/a$. Нужно набраться терпения и разделить «уголком» исходный многочлен на двучлен $x - \left(a^2 + 1\right)/a$. В результате получим равенство

$$a^3x^3 - 3a^3x - \left(a^2 + 1\right)\left(a^4 - a^2 + 1\right) =$$
$$= \left(x - \left(a^2 + 1\right)/a\right)\left(a^3x^2 + a^2\left(a^2 + 1\right)x + a\left(a^4 - a^2 + 1\right)\right).$$

Вычислив дискриминант стоящего во второй скобке квадратного трехчлена, получим

$$D = -3a^2\left(a^2 - 1\right)^2 \leq 0.$$

Теперь несложно получить

Ответ: $x = \left(a^2 + 1\right)/a$, $a \neq 0$; $x = -\left(a^2 + 1\right)/(2a)$ при $a = \pm 1$.

Несколько более трудной оказывается задача об отыскании решений следующего уравнения.

Пример 3. *Решите уравнение*

$$a^3x^4 + 6a^2x^2 - x + 9a + 3 = 0,\ a \geq 0.$$

Решение. Попытки найти решение в виде $x = p/q$, где p — делитель свободного члена $3(3a + 1)$, а q — делитель старшего коэффициента a^3, ни к чему не приведут, — рациональных решений уравнение не имеет.

Поменяем переменные местами, считая a независимой переменной, а x —

параметром. Для наглядности перепишем исходное уравнение в виде
$$x^4a^3+6x^2a^2+9a-(x-3)=0.$$
Опираясь на теорему, будем искать решение в виде $a=p/q$, где p — делитель свободного члена $(x-3)$, а q — делитель старшего коэффициента x^4. Как и выше, проделав необходимый перебор вариантов, найдем решение в виде
$$a=C(x-3)/x^2,\ C\in\mathbf{R}.$$
Подстановка дает значение $C=1$. Таким образом, решением уравнения является $a=(x-3)/x^2$. Аналогично предыдущему, остается разделить рассматриваемый многочлен на двучлен $a-(x-3)/x^2$:
$$x^4a^3+6x^2a^2+9a-(x-3)=$$
$$=\left(a-(x-3)/x^2\right)\left(x^4a^2+x^2(x+3)a+x^2\right).$$
Таким образом, рассматриваемый многочлен удается записать в виде произведения
$$(ax^2-x+3)(a^2x^2+ax+3a+1).$$
Из найденного разложения легко получаем

Ответ: $x=\left(1\pm\sqrt{1-12a}\right)/(2a)$ при $a\le 1/12$ и $a\ne 0$; $x=3$ при $a=0$.

Если коэффициентами многочлена являются многочлены от нескольких переменных, то, как уже говорилось, использованные соображения останутся в силе.

Пример 4. *Решите уравнение*
$$a(a-x)(a-2x)(a-3x)=$$
$$=b(b-x)(b-2x)(b-3x).$$
Решение. Сначала нужно набраться терпения, раскрыть скобки и собрать подобные члены:
$$6(b-a)x^3-11(b^2-a^2)x^2+$$
$$+6(b^3-a^3)x-(b^4-a^4)=0.$$
При $b\ne a$ можно сократить общий множитель $(b-a)$:
$$6x^3-11(b+a)x^2+$$
$$+6(b^2+ab+a^2)x-(b+a)(b^2+a^2)=0.$$
Попытаемся найти решение среди делителей свободного члена
$$x=C(b+a),\ C\in\mathbf{R}.$$
Подстановка приводит к соотношению
$$6C^3(b+a)^2-11C^2(b+a)^2+$$
$$+6C(b^2+ab+a^2)-(b^2+a^2)=0.$$
Приравняв к нулю коэффициенты при степенях a, придем к системе
$$\begin{cases}6C^3-11C^2+6C-1=0,\\ 12C^3-22C^2+6C=0.\end{cases}$$
Из второго уравнения получим два значения $C=3/2$ или $C=1/3$ (случай $C=0$ нас не интересует). Проверка показывает, что значение $C=1/3$ удовлетворяет и первому уравнению системы. Тем самым решение найдено: $x=(a+b)/3$. Разделив исходный многочлен на двучлен $3x-(a+b)$, получим частное
$$2x^2-3(a+b)x+(a^2+b^2).$$
Найдя корни квадратного трехчлена, завершим решение.

Ответ: при $a\ne b$: $x=(a+b)/3$, $x=\left(3(a+b)\pm\sqrt{a^2+18ab+b^2}\right)/4$ при $a^2+18ab+b^2\ge 0$; x — любое при $a=b$.

Пример 5. *Разложите на множители многочлен*
$$x^3+y^3+z^3-3xyz.$$
Решение. Перепишем многочлен в виде
$$x^3-(3yz)x+(y+z)(y^2-yz+z^2)$$
и попробуем, как и выше, поискать корень среди делителей свободного члена. Подставив $x=C(y+z)$, при $C=-1$ получим корень многочлена. Таким образом, найден делитель $x+y+z$ исходного многочлена (о таком виде делителя можно было догадаться, учитывая симметрию исходного многочлена). Разделив «уголком», получим

Ответ:
$$x^3+y^3+z^3-3xyz=$$
$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz).$$
Справившись с предыдущей задачей, можно без особых усилий решить

Пример 6. *Решите уравнение*
$$x^3+3ax^2+3(a^2-bc)x+$$
$$+a^3+b^3+c^3-3abc=0.$$
Решение. Из примера 6 известно разложение на множители свободного члена $a^3+b^3+c^3-3abc$ уравнения. Естественно попытаться найти решение в виде
$$x=C(a+b+c),\ C\in\mathbf{R}.$$
Подстановка показывает, что при $C=-1$ действительно получится решение уравнения. Остается разделить стоящий в левой части уравнения многочлен на $x+(a+b+c)$ и исследовать корни частного
$$x^2+(2a-b-c)x+$$
$$+(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$$
Дискриминант этого трехчлена приводится к виду
$$D=-3(b-c)^2\le 0.$$
Таким образом, при $b\ne c$ дискриминант отрицателен и решение единственно. Рассмотрев оставшийся случай $b=c$, получим

Ответ: если $b\ne c$, то $x=-(a+b+c)$; если $b=c$, то $x=-(a+b+c)$ или $x=b-a$.

В заключение рассмотрим более трудную задачу.

Пример 7. *Решите уравнение*
$$a^2b^2x^3-3abx+a+b=0.$$
Решение. Попытки найти решение среди рациональных функций оканчиваются неудачей.

Сделаем замену
$$a=u^{-3},\ b=v^{-3}.$$
Уравнение примет вид
$$x^3-3u^3v^3x+u^3v^3(u^3+v^3)=0.$$
Пытаясь найти решение среди делителей свободного члена, придем к формуле $x=Cuv(u+v)$, $C\in\mathbf{R}$. Подставив в уравнение и сократив, получим
$$(C^3+1)u^2+(C^3+1)v^2+$$
$$+(2C^3-3C-1)uv=0\Rightarrow C=-1.$$
Итак, найдено решение $x=-uv(u+v)$. Разделив исходный многочлен на $x+uv(u+v)$, получим в частном выражение
$$x^2-uv(u+v)x+u^2v^2(u^2-uv+v^2).$$
Вычислим дискриминант полученного квадратного трехчлена:
$$D=-3u^2v^2(u-v)^2.$$
Итак, только при $u=v$ к найденному ранее решению $x=-uv(u+v)$ добавится решение $x=u^3$. Выразив u и v через a и b, получим

Ответ: $x=-a^{-1/3}b^{-1/3}\left(a^{-1/3}+b^{-1/3}\right)$; $x=a^{-1}$ при $a=b$.

Упражнения

1. Решите уравнения

а) $4a^3x^4+4a^2x^2+32x+a+8=0$, $a\ge 0$;

б) $x^3-(4a+3)x^2+4a(a+2)x-4(a^2-1)=0$;

в) $x^3+px^2+\left(p-1+\frac{1}{p-1}\right)x+1=0$;

г) $x^3-2ax^2+(a^2+1)x-2a+2=0$.

2. Разложите на множители многочлены

а) $2(a^5+b^5+c^5)-5abc(a^2+b^2+c^2)$;

б) $6(a^5+b^5+c^5)-5(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)$;

в) $(x+y)(x+z)(y+z)+xyz$;

г) $xyz(x^3+y^3+z^3)-x^3y^3-x^3z^3-y^3z^3$;

д) $(y-z)(y+z)^3+(z-x)(z+x)^3+(x-y)(x+y)^3$;

е) $x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)$.

Разгон торможением (разговор в поезде)

И.ГЕЛЬФГАТ, Л.ГЕНДЕНШТЕЙН

— СМОТРИ, по шоссе рядом с нашим поездом бежит автомобиль. А кажется, будто он стоит на месте.

— Можно так и считать. Мы же знаем, что все инерциальные системы отсчета равноправны, поэтому наш поезд ничем не хуже Земли.

— Ты так думаешь? А если водитель сейчас начнет тормозить — что тогда? Автомобиль остановится?

— Конечно.

— Но по отношению к нам он *начнет двигаться*! Откуда же у него возьмется энергия для такого «разгона»?

— Действительно, непонятно. Мало того, что автомобиль разгонится, еще и тормозные колодки нагреются.

— Ну вот — энергия появляется неизвестно откуда. А ты говорил, что все инерциальные системы отсчета равноправны.

— Но нас же учили, что они *действительно* равноправны. Что же, придется отказаться от закона сохранения энергии? Я где-то читал, что перед открытием нейтрино физики готовы были отказаться от этого закона. А потом оказалось, что «пропадавшую» энергию уносило почти неуловимое нейтрино.

— Может, в нашем случае что-то «приносит» дополнительную энергию?

— Давай разберемся подробнее. Какая сила тормозит автомобиль?

— Сила трения со стороны тормозов.

— Этого не может быть — иначе получится, как у барона Мюнхгаузена, который сам себя за волосы тащил из болота. Ведь тормоза — часть самого автомобиля, а изменить скорость тела могут только *внешние* силы.

— Какая же внешняя сила здесь действует?

— Единственная подходящая сила — это сила трения между колесами и дорогой. Она тормозит автомобиль, и благодаря этому его кинетическая энергия превращается во внутреннюю энергию тормозов (рис. 1). Все это, конечно, в системе отсчета «Земля».

Рис. 1

— Ну что ж, в этой системе отсчета все более или менее ясно. А как же в системе отсчета «Вагон»? Откуда здесь берется энергия для разгона?

— Кажется, я начинаю понимать. Ведь сила трения действует не только на автомобиль, но и на Землю. Значит, энергия Земли тоже как-то меняется. Изменяется и скорость вращения Земли вокруг собственной оси...

— Нет-нет, не надо слишком усложнять. Не будем учитывать вращение Земли — что тогда?

— Тогда до начала торможения в системе отсчета «Вагон» Земля уже двигалась со скоростью, по величине равной скорости движения автомобиля относительно Земли. В результате торможения скорость Земли в системе отсчета «Вагон» уменьшается. Вот откуда берется энергия на разгон автомобиля.

Рис. 2

— Да, это похоже на правду. Автомобиль при торможении «толкает» Землю вперед, тем самым уменьшая ее скорость относительно вагона. Но почему же изменение скорости Земли можно не учитывать в «обычной» системе отсчета?

— Да просто из-за ее огромной массы. Земля приобретает настолько малую скорость, что ее перемещением можно пренебречь и считать работу силы трения по разгону Земли практически равной нулю. А в системе «Вагон» Земля успевает совершить за время торможения автомобиля заметное перемещение, так что работой силы трения пренебрегать уже нельзя.

— Вот теперь, кажется, все в порядке. Мы знаем, как выглядит картина изменения энергии в системе отсчета «Вагон» (рис. 2). (Предлагаем читателям показать самостоятельно, что в системе «Вагон» энергия, «выкачиваемая» из Земли, делится ровно пополам: одна половина идет на разгон автомобиля, а другая — на нагрев тормозов.)

— Ну уж теперь мы во всем разобрались. Правда при этом мы разбудили нашего соседа, спящего на верхней полке.

— Вы разбудили меня уже давно, и я с интересом слушал ваш разговор. Если вы действительно во всем разобрались, то попробуйте решить такую задачу:

Пуля массой m, летящая со скоростью v, догоняет наш вагон, движущийся по горизонтальной дороге со скоростью u (рис. 3), и застревает в вагоне. Какое количество теплоты при этом выделяется?

Рис. 3

— Это совсем просто. У пули была кинетическая энергия $mv^2/2$, а застряв в вагоне, она движется вместе с ним со скоростью u, имея кинетическую энергию $mu^2/2$. Согласно закону сохранения энергии, убыль кинетической энергии как раз показывает, какая энергия перешла во внутреннюю:

$$Q = \frac{mv^2}{2} - \frac{mu^2}{2}. \qquad (1)$$

— Пожалуй, это правильно. Однако посмотрим на всякий случай, как это выглядит в системе отсчета «Вагон». Здесь начальная скорость пули $v - u$, а конечная — ноль. Поэтому

$$Q = \frac{m(v-u)^2}{2}. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) — разные. Какая-то из них неверна. А может, обе?

— Кажется, я знаю, какая формула неверна. Пока пуля «застревает» в вагоне, она толкает его вперед с какой-то силой, т.е. совершает работу, и кинетическая энергия вагона растет. А мы, записывая формулу (1), этим интуитивно пренебрегли. Наверное, потому, что изменение скорости вагона ничтожно мало.

— Скорости, но не энергии! Ведь в выражении для энергии перед квадратом скорости имеется огромный множитель — масса вагона. А как обстоит дело в системе «Вагон»? Между прочим, она теперь неинерциальная — из-за ускорения при ударе пули.

— Давай представим, что рядом с нашим вагоном по соседнему пути движется той же скоростью другой вагон, в который никто не стреляет. С ним мы и свяжем систему отсчета «Вагон», чтобы она по-прежнему была инерциальной.

— Итак, в чем же принципиальное отличие этой системы отсчета от системы «Земля»?

— *Перемещение* нашего вагона в системе отсчета «Вагон» ничтожно мало, поэтому при ударе пули можно пренебречь работой по разгону вагона, а следовательно — приобретенной вагоном кинетической энергией. Значит, *вся* кинетическая энергия пули переходит во внутреннюю, и справедлива формула (2).

— А относительно Земли вагон движется, над ним совершается работа, и его кинетическая энергия растет. Формула (1) этой передачи энергии не учитывает и потому дает завышенное значение Q: ведь $v^2-u^2>(v-u)^2$ при $v>u$.

— Это так, и все же как-то не верится, что разгон громадного вагона «заглатывает» сколь-нибудь заметную часть кинетической энергии пули. Интересно, а можно ли вообще решить эту задачу строго в системе отсчета «Земля»? Что для этого потребуется?

— Думаю, потребуется учесть, что у вагона конечная, хотя и очень большая, масса M. Тогда все должно стать на свои места.

— Попробуем. Обозначим скорость вагона сразу после удара пули через V. Тогда из закона сохранения импульса следует

$$V=\frac{mv+Mu}{m+M}.$$

Согласно закону сохранения энергии,

$$Q=\frac{mv^2}{2}+\frac{Mu^2}{2}-\frac{(m+M)V^2}{2}.$$

Отсюда получаем

$$Q=\frac{mv^2}{2}+\frac{Mu^2}{2}-\frac{(mv+Mu)^2}{2(M+m)}=\frac{m(v-u)^2}{2(1+m/M)}.$$

— Вот это да! Осталось только учесть, что $m/M \ll 1$, и пренебречь этой пустяковой добавкой в знаменателе — и опять у нас получается формула (2).

— Заметьте, если считать, что $V=u$, мы опять получим ошибочный ответ — формулу (1). Но стоило учесть даже очень малое отличие V от u — и ответ получился верным.

— Да, теперь все ясно. Хотя инерциальные системы отсчета действительно все *равноправны*, они далеко не все *удобны* для быстрого и правильного решения задачи. Если в задаче фигурирует тело с *очень большой массой*, лучше сразу проявить к нему должное уважение и перейти в его систему отсчета.

Задачи на движение

О.ЛОБАНОВА

При решении задач на движение полезно начать с построения чертежа. Даже самый простой чертеж помогает осмыслить задачу и найти наиболее простое решение.

Несколько советов до рассмотрения задач.

1. Внимательно прочитайте условие задачи, постройте чертеж. Отметьте на чертеже все пункты, о которых идет речь в задаче.

2. Выберите переменную, тщательно проанализируйте условие задачи, попытайтесь выразить длины всех нужных отрезков через выбранную переменную и другие величины. *Не вводите новой переменной до тех пор, пока не убедитесь, что без этого нельзя обойтись.* Опыт показывает, что многие, составив систему уравнений, не могут затем ее решить.

3. Иногда после построения чертежа и анализа удается переформулировать задачу и тем ее упростить. Постарайтесь не упустить такой возможности. Примером является задача 2.

4. Решив трудную задачу, не спешите приниматься за другую. Уверены ли вы в том, что нашли наиболее простое решение? Прикиньте, не будет ли лучше, если выбрать другую переменную? Если вы уверены, что нашли лучший вариант решения, то полезно рассказать кому-либо о своей удаче. Положительные эмоции помогут вам решать задачи еще лучше. Постарайтесь объяснить кому-либо ход решения задачи. Можно рассказывать даже своим игрушкам (надеюсь, что никто не обидится, совет вполне серьезный), все равно это поможет вам сконцентрировать свои мысли и лишний раз продумать детали решения.

Рассмотрим 5 задач (в квадратных скобках указан номер пособия в списке литературы, данном в конце статьи) и покажем, как анализ чертежа помогает решить довольно сложные задачи. 3 задачи из приведенных решены в известных пособиях более сложными способами. Ссылку на это вы найдете после решения задачи.

Прочитав задачу, постарайтесь сначала решить ее самостоятельно, затем продолжите чтение статьи.

Задача 1. *Поезд идет от станции A к станции B, расстояние между которыми равно d км. На некотором участке пути, примыкающем к станции B, из-за ремонтных работ поезду разрешена скорость, составляющая только 1/n часть первоначальной скорости, поэтому поезд пришел на станцию с опозданием на a ч. На другой день фронт ремонтных работ приблизился к станции B на b км, и при тех же условиях поезд опоздал только на c ч. Найдите скорость поезда.* ([1], задача 13.258.)

Замечание. Эта задача отнесена к задачам среднего уровня сложности. Она интересна тем, что ее условие переопределено.

Решение. Определим допустимые значения параметров:

$$d>b>0,\ n>1,\ a>c>0.$$

Сделаем чертеж (рис. 1). В первый день ремонт дороги производился на

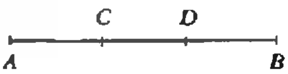


Рис. 1

участке CB, во второй день — на участке DB. Заметим, что расстояние от A до C поезд и в первый и во второй день шел с одной и той же первоначальной скоростью, а расстояние от D до B в обоих случаях шел с новой скоростью. Значит, разница во времени на прохождение пути AC в первый и во второй день возникает за счет того, что на участке CD поезд в эти дни шел с разными скоростями.

Пусть x км/ч — первоначальная скорость поезда, тогда новая его скорость x/n км/ч. $CD=b$ км по условию задачи. За b/x ч поезд прошел путь CD во второй день, за bn/x ч — в первый день. На основании того, что разница во времени составила $(a-c)$ ч, составим уравнение

$$\frac{nb}{x}-\frac{b}{x}=a-c.$$

Отсюда $x=\dfrac{b(n-1)}{a-c}$.

Так как $n>1$, $a>c$, то $x>0$.

Мы видим, что задача переопределена: при ее решении не использовано условие $AB=d$ км.

Ответ: $\dfrac{b(n-1)}{a-c}$ км/ч $(n>1, a>c)$.

Задача 2. *Пассажир, опоздавший на поезд, сначала решил догнать его на такси, однако через некоторое время пересел на автобус, заплатив за билет a рублей, и прибыл на одну из станций одновременно с поездом. Между тем он обнаружил, что если бы продолжал ехать на такси, то догнал бы поезд на* τ *ч раньше, истратив при этом на b рублей меньше. Какова скорость поезда, если скорость такси* v_1, *автобуса* v_2 ($v_1 > v_2$), *а стоимость проезда одного километра на такси* α *рублей?* ([2], задача 18.14.)

Решение. Допустимые значения параметров: $a>b>0$, $v_1>v_2>0$, $\tau>0$, $\alpha>0$.

Сделаем чертеж и проанализируем его (рис. 2). В пункте C пассажир пересел в автобус и догнал поезд в пункте B.

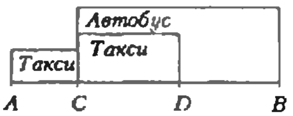


Рис. 2

Если бы он продолжал ехать в такси, то догнал бы поезд в пункте D. В обоих случаях путь AC пассажир ехал на такси, следовательно, проезд этой части пути не сказывается на разнице во времени и стоимости для двух вариантов поездки.

Теперь нашу задачу можно сформулировать так. Из пункта C вслед поезду выезжают одновременно автобус и такси. Такси догнало поезд на τ ч раньше, чем автобус. Пассажир такси заплатил за проезд $(a-b)$ рублей. Какова скорость поезда, если скорость такси v_1 км/ч, автобуса v_2 км/ч, а стоимость одного километра пути α рублей?

Так как за проезд одного километра пассажир платит α р., а всего он заплатил за проезд $(a-b)$ р., то, следовательно, он проехал $(a-b)/\alpha$ км, т.е. $CD=(a-b)/\alpha$ км. Найдем время, за которое такси догнало поезд:

$$t=\frac{CD}{v_1}=\frac{a-b}{\alpha v_1}.$$

Автобус догнал поезд через $(t+\tau)$ часов, следовательно, $CB=v_2(t+\tau)$ км. Из условия задачи ясно, что в пункте D поезд был одновременно с такси, а в пункте B — одновременно с автобусом, следовательно, путь DB поезд прошел за τ часов.

$$DB=CB-CD=v_2(t+\tau)-v_1t=(v_2-v_1)t+v_2\tau.$$

Найдем скорость поезда:

$$v=\frac{DB}{\tau}=\frac{(v_2-v_1)t}{\tau}+v_2=v_2-\frac{(v_1-v_2)(a-b)}{\alpha v_1\tau}.$$

Очевидно, должно выполняться неравенство $v>0$. Из неравенства

$$v_2-\frac{(v_1-v_2)(a-b)}{\alpha v_1\tau}>0$$

следует $\dfrac{v_1v_2}{v_1-v_2}>\dfrac{a-b}{\alpha\tau}$.

Ответ: $v_2-\dfrac{(v_1-v_2)(a-b)}{\alpha v_1\tau}$ км/ч, если $\dfrac{v_1v_2}{v_1-v_2}>\dfrac{a-b}{\alpha\tau}$.

Замечание. На странице 330 указанного задачника вы найдете решение задачи. Составлена система из трех уравнений с тремя неизвестными. Решение гораздо более громоздкое, чем мы с вами получили. Учтя, что проезд пути AC не сказывается на разнице во времени и стоимости проезда и переформулировав задачу, мы смогли ее упростить.

Задача 3. *Города A и B расположены на берегу реки, причем город B расположен ниже по течению. В 9 часов утра из города A в город B отправляется плот. В этот момент времени из города B в город A отправляется лодка, которая встречается с плотом через 5 часов. Доплыв до города A, лодка поворачивает обратно и приплывает в город B одновременно с плотом. Успеют ли лодка и плот приплыть в город к 9 часам вечера того же дня?* ([3], задача на странице 22.)

Решение. Сделаем чертеж (рис. 3). Плот и лодка встретились в пункте C.

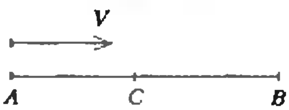


Рис. 3

Пусть v км/ч — скорость течения реки, t ч — все рассматриваемое время, тогда $AB=vt$ км, $AC=5v$ км,

$$CB=AB-AC=vt-5v=v(t-5).$$

Путь BC лодка проплыла за 5 часов, следовательно, скорость лодки против течения реки равна

$$\frac{CB}{5}=\frac{v(t-5)}{5}.$$

Отсюда скорость лодки по течению равна

$$\frac{v(t-5)}{5}+2v=\frac{v(t+5)}{5}.$$

Время, когда лодка плыла против течения, равно

$$\frac{AB}{\frac{v(t-5)}{5}}=\frac{5vt}{v(t-5)}=\frac{5t}{t-5},$$

по течению —

$$\frac{AB}{\frac{v(t+5)}{5}}=\frac{5vt}{v(t+5)}=\frac{5t}{t+5}.$$

Уравнение составим на основании того, что всего лодка плавала t ч:

$$\frac{5t}{t-5}+\frac{5t}{t+5}=t.$$

Отсюда

$$\begin{cases} t^2-10t-25=0,\\ t\neq 5.\end{cases}$$

Свободный член квадратного уравнения отрицателен, следовательно, корни имеют разные знаки. Нас интересует только положительный корень, так как по смыслу задачи $t>0$. Итак,

$$t=5\left(1+\sqrt{2}\right)>12.$$

Ответ: не успеют.

Замечание. В пособии приведено решение: составлена система двух уравнений с тремя неизвестными. Чтобы решить систему, надо знать или догадаться, как ее преобразовать.

Задача 4. *Два понтона, находящихся на одном месте, надо побыстрее сплавить вниз по реке на a км. Буксир не может взять сразу два понтона, поэтому возник такой план: один понтон сразу отправится самоходом как плот, а другой будет на некотором участке реки вначале транспортироваться буксиром, после чего будет отцеплен и отправлен самоходом. Буксир же тотчас развернется и пойдет на сближение с плывущим первым понтоном, возьмет его и отбуксирует до конечного пункта. В результате осуществления плана оба понтона пришли к месту назначения одновременно. По течению буксир все время поддерживал скорость* $(v+u)$ *км/ч, а против течения* $(v-u)$ *км/ч, где u км/ч — скорость течения реки. Сколько времени потребовалось на всю транспортировку по этому плану, и на сколько он сокращает время, за которое понтоны прошли бы требуемое расстояние по течению самоходом?* ([1], задача 13.424.)

Решение. Сделаем чертеж и проанализируем его. В задаче рассматриваются 4 момента времени: начальный момент отплытия из A, 1-й момент — когда буксир отцепил I понтон, 2-й момент — когда буксир подцепил II понтон, и момент приплытия. Римскими цифрами запишем номера понтонов, индексы обозначают моменты времени (рис. 4).

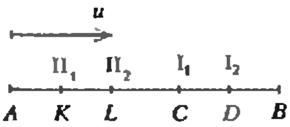


Рис. 4

Для того, чтобы понтоны одновременно оказались в пункте B, необходимо, чтобы буксир вез каждый из них одно и то же время и одинаковое время они плыли самоходом.

Понтон II плыл самоходом от A до L, I – от C до B, следовательно, $AL=CB$. Между 1-м и 2-м моментами времени оба понтона плыли без буксира, следовательно, $KL=CD$, поэтому $AK=DB$.

Пусть буксир вез I понтон t ч. Тогда $AC=(u+v)t$ км, $AK=DB=ut$ км, $KC=$ $=AC-AK=(u+v)t-ut=vt$ км.

Между 1-м и 2-м моментами времени буксир и II понтон сближаются со скоростью v км/ч. Вместе они проплыли путь KC, следовательно, время сближения II понтона и буксира равно $\frac{vt}{v}=t$ ч, а все время $T=3t$ ч (каждый понтон плывет $2t$ ч самоходом и t ч его тащит буксир).

Уравнение составим на основании того, что $AB=a$ км:

$$AC+CD+DB=a;$$

$$(v+u)t+2ut=a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{a}{v+3u}\Rightarrow T=\frac{3a}{v+3u}.$$

Сэкономлено времени

$$\frac{a}{u}-\frac{3a}{v+3u}=\frac{av}{u(v+3u)}\ \text{(ч)}.$$

Ответ: $T=\frac{3a}{v+3u}$ ч, $t_{\text{эк}}=\frac{av}{u(v+3u)}$ ч.

Замечание. Эта задача отнесена в задачнике к наиболее трудным. Ученики всегда при ее решении вводят 4 переменных. Удачный чертеж и его анализ помогли нам найти совсем простое решение.

Задача 5. *Два велосипедиста и пешеход одновременно отправились из пункта A в пункт B. Более чем через час после выезда у первого велосипедиста сломался велосипед, и он продолжал путь пешком, двигаясь в 4,5 раза медленнее, чем на велосипеде. Его обгоняют: второй велосипедист — через 5/8 ч после поломки, а пешеход — через 10,8 ч после поломки. К моменту поломки второй велосипедист проехал расстояние в два раза большее, чем то, которое прошел пешеход к моменту, на 5/36 ч более позднему, чем момент поломки. Через сколько часов после начала движения сломался велосипед?* ([3], задача на странице 24.)

Решение. Сделаем чертеж (рис. 5). В пункте C произошла поломка, в пункте D второй велосипедист догнал первого, в пункте F первого велосипедиста догнал пешеход.

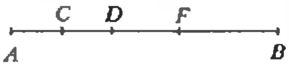


Рис. 5

Пусть x км/ч — скорость 1-го велосипедиста после поломки, тогда $4{,}5x$ км/ч — его скорость до поломки, t ч — время с момента выезда до поломки.

$$AC=4{,}5xt\ \text{км},\ CD=\frac{5}{8}x\ \text{км},$$

$$CF=10{,}8x\ \text{км},$$

$$AD=AC+CD=$$

$$=4{,}5xt+\frac{5}{8}x=\frac{36t+5}{8}x\ \text{(км)},$$

$$AF=AC+CF=$$

$$=4{,}5xt+10{,}8x=0{,}9(5t+12)x\ \text{(км)}.$$

Скорость 2-го велосипедиста

$$v_2=\frac{AD}{t+\frac{5}{8}}=\frac{36t+5}{8t+5}x.$$

Скорость пешехода

$$v_{\text{п}}=\frac{AF}{t+10{,}8}=\frac{0{,}9(5t+12)}{t+10{,}8}x.$$

Уравнение составим на основании того, что к моменту поломки 2-й велосипедист проехал расстояние, в 2 раза большее, чем то, которое прошел пешеход к моменту, на 5/36 ч более позднему, чем момент поломки:

$$v_2t=2v_{\text{п}}\left(t+\frac{5}{36}\right),$$

$$\frac{36t+5}{8t+5}tx=2\frac{0{,}9(5t+12)}{t+10{,}8}x\frac{36t+5}{36}.$$

После преобразований получим уравнение

$$4t^2-19t+12=0\Rightarrow t_1=\frac{3}{4}<1,\ t_2=4.$$

Ответ: через 4 часа.

Замечание. В задачнике составлена система из трех уравнений с четырьмя неизвестными.

При желании вы можете самостоятельно более тщательно сравнить решения задач в данной статье и в указанных задачниках и убедиться в том, что наши решения значительно проще.

Попробуйте на практике применить советы, данные в статье. Интересно было бы узнать, помогли ли они вам.

Литература

1. Сборник задач по математике для поступающих во втузы под редакцией М.И. Сканави. — М.: Высшая школа, 1977.

2. *Ваховский Е.Б., Рывкин А.А.* Задачи по элементарной математике. — М.: Наука, 1971.

3. *Лурье М.В., Александров Б.И.* Задачи на составление уравнений. — М.: Наука, 1990.

Как же доказать это неравенство?

(Начало см. на с. 43)

$$\times\frac{(-2D(a,b,c))}{a+b+c+\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}=$$

$$=\frac{D(a,b,c)}{a+b+c+\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}\times$$

$$\times\left(a+b+c-\left(2-\sqrt{3}\right)\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right).$$

Но $a+b+c>\lambda\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ при любом $\lambda\le 1$ (см. упражнение 4) — в частности, при $\lambda=2-\sqrt{3}$. Следовательно, $F>0$. Итак, $F\ge 0$ при любых положительных a, b, c, причем $F=0$ лишь при $a=b=c$. Но тогда верно утверждение задачи.

Задачи для самостоятельного решения

1. Средним квадратическим $Q(x,y,z)$ трех чисел x,y,z называется число $\sqrt{(x^2+y^2+z^2)/3}$. Верно ли, что ни при каком выборе трех действительных чисел x,y,z их среднее арифметическое $A(x,y,z)$ не может оказаться больше их среднего квадратического, т.е. что всегда $A(x,y,z)\le Q(x,y,z)$?

2. Пусть a,b,c — три действительных числа (среди них могут оказаться и отрицательные). Укажите необходимое и достаточное условие, при котором верно (строгое) неравенство

$$abc>\left(a^3+b^3+c^3\right)/3.$$

3. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c верно строгое неравенство

$$\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\left(a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)>$$

$$>0{,}9(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

XXXVI Международная математическая олимпиада

С 16 по 25 июля 1995 г. в Торонто, Канада, была проведена XXXVI Международная математическая олимпиада (ММО), в которой приняли участие 412 школьников из 73 стран мира.

Команда России на ММО была представлена учащимися трех наиболее сильных математических школ страны: *Сергей Норин, Дмитрий Запорожец, Вероника Есаулова* — с.ш. 239 из Санкт-Петербурга, *Дмитрий Челкак, Илья Кацев* — с.ш. 30 из Санкт-Петербурга, *Михаил Островский* — с.ш. 57 из Москвы. Традиционно, наша команда была одной из самых молодых на олимпиаде, а все ее участники из 239-й школы имеют возможность выступить на ММО в будущем году, так как закончили только десятый класс. Команда России в основном была составлена из школьников Санкт-Петербурга, что связано с целенаправленной системой отбора и подготовки олимпийцев в этом городе (школьники, прошедшие подготовку в Санкт-Петербурге, были также в составах команд США, Израиля, Германии).

Организаторы постарались заполнить свободное время олимпийцев интересными поездками: на Ниагарский водопад, в «Страну Чудес». Очень празднично и тепло прошли закрытие олимпиады и заключительный вечер: счастливые участники олимпиады обменивались адресами, сувенирами, фотографировались на память.

Приведем результаты членов команды России и некоторых команд.

С.Норин — 42 очка (из 42 возможных) — золотая медаль,

М.Островский — 39 очков — золотая медаль,

Д.Запорожец — 38 очков — золотая медаль,

Д.Челкак — 37 очков — золотая медаль

И.Кацев — 36 очков — серебряная медаль,

В.Есаулова — 35 очков — серебряная медаль.

Страна	*Очки*	*Золотые медали*	*Серебряные медали*
1. Китай	236	4	2
2. Румыния	230	4	2
3. Россия	227	4	2
4. Вьетнам	220	2	4
5. Венгрия	210	3	1
6. Болгария	207	1	4
7. Корея	203	2	3
8. Иран	202	2	3
9. Япония	183	1	3
10. Великобритания	180	2	1
11. США	178	0	3
12. Тайвань	176	0	4
13. Израиль	171	1	2
14. Индия	165	0	3
15. Германия	162	1	3
16. Польша	161	0	1
17-18. Чехия	154	0	1
17-18. Югославия	154	0	2
19. Канада	153	0	2
20. Гонконг	151	0	2
...23. Украина	140	1	1
...26-28. Белоруссия	131	0	1
...32-33. Армения	111	0	2
...36-37. Молдавия	101	0	1
...39-40. Латвия	97	0	1
...48. Грузия	79	0	1

Азербайджан, Казахстан, Киргизия, Литва, Эстония остались без медалей.

На олимпиаде был вручен один спецприз: *Николай Николов* из команды Болгарии в четвертый раз участвовал в ММО, выиграв за эти годы 3 золотые и 1 серебряную медаль.

В командах России и Украины во второй раз золотые медали были вручены *Сергею Норину* (С.- Петербург) и *Юлию Санникову* (Севастополь).

Задачи этой олимпиады включены в «Задачник Кванта» этого номера.

Н.Агаханов, Д.Терешин

XXVI Международная физическая олимпиада

С 5 по 12 июля 1995 года в г. Канберре (Австралия) состоялась очередная международная олимпиада школьников по физике. В ней приняли участие команды из 52 стран мира (это своеобразный рекорд олимпиад).

Сборную команду России представляли *Илья Зеленский* (Нижний Новгород), *Евгений Кашменский* (Новосибирск), *Александр Кузнецов* (Тула), *Артем Савельев* (Санкт-Петербург) и *Сергей Сибиряков* (Москва).

Как обычно, участникам олимпиады были предложены 3 задачи на теоретическом туре и 2 задачи — на экспериментальном.

Российские школьники достойно выступили на олимпиаде, завоевав две золотые медали (С.Сибиряков — 84 балла из 100, А.Савельев — 83 балла), две серебряные (И.Зеленский и А.Кузнецов — по 71 баллу) и одну бронзовую медаль (Е.Кашменский — 66 баллов).

Наибольшее число медалей завоевали команды Китая (5 золотых), США (4 золотых и 1 серебряная), Ирана (2 золотых и 3 серебряных), России и Германии (2 золотых, 2 серебряных и 1 бронзовая), Великобритании (2 золотых и 3 бронзовых).

Предлагаем вниманию читателей условия задач теоретического тура. Эти задачи, сформулированные в традиционном стиле международных олимпиад, требуют применения достаточно сложного математического аппарата и знания некоторых вопросов, выходящих за рамки нашего школьного курса физики.

Задача 1. Красное гравитационное смещение и измерение массы звезды

a (3 балла)) Фотон с частотой f имеет эффективную инертную массу m, определяемую его энергией. Предположим, что гравитационная масса фотона равна инертной. В соответствии с этим фотон, излученный с поверхности звезды, будет терять энергию при удалении из гравитационного поля звезды. Покажите, что сдвиг частоты Δf фотона при уходе его с поверхности звезды на бесконечно большое расстояние от нее связан с частотой f (для $\Delta f \ll f$) соотношением

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{GM}{Rc^2},$$

где G – гравитационная постоянная, R – радиус звезды, c – скорость света, M – масса звезды. Таким образом, красное смещение какой-либо известной линии спектра, измеренное на большом расстоянии от звезды, может быть использовано для измерения отношения M/R.

b (12 баллов)) Автоматический космический корабль запущен с целью измерения массы M и радиуса R одной из звезд в нашей галактике. При приближении корабля к звезде вдоль радиуса фотоны, излучаемые с поверхности звезды ионами He^+, наблюдаются с помощью резонансного возбуждения пучка ионов He^+ в испытательной камере внутри корабля. Поглощение происходит только в том случае, если ионы получают скорость, направленную к центру звезды, что позволяет скомпенсировать красное смещение частоты. При этом скорость ($\upsilon = \beta c$) ионов внутри корабля относительно звезды измеряется как функция расстояния d до поверхности звезды. Используя все приведенные в таблице экспериментальные данные, определите графическим способом массу M и радиус R звезды. Оценка погрешности не требуется.

c) Для определения R и M в таком эксперименте обычно рассматривают поправку к частоте, вызванную отдачей излучающего атома. (Тепловое движение расширяет полосы излучения, но не сдвигает положение максимума, и, следовательно, мы можем считать, что все тепловые эффекты учтены.)

1° (4 балла). Пусть ΔE есть разность энергий двух атомных уровней, когда атом находится в покое. Предположим, что покоящийся атом распадается на фотон и отлетающий атом. Получите релятивистское выражение для энергии излученного фотона в зависимости от ΔE и массы m_0 исходного атома.

2° (1 балл). Сделайте численную оценку величины релятивистского сдвига частоты $(\Delta f/f)$ отдачи для случая ионов He^+. Ваш ответ должен быть гораздо меньшим по величине, чем красное гравитационное смещение, полученное в части *b*).

Данные: скорость света $c = 3{,}0\cdot10^8$ м·с$^{-1}$, энергия покоя He^+ равна $m_0c^2 = 4\cdot938$ МэВ, энергетические уровни по Бору определяются выражением $E_n = -\frac{13{,}6\cdot Z^2}{n^2}$ (эВ), гравитационная постоянная $G = 6{,}7\cdot10^{-11}$ Н·м^2·кг$^{-2}$.

Задача 2. Распространение звука

Скорость распространения звука в океане зависит от глубины, температуры и концентрации соли в воде. На рисунке 1 показана зависимость скорости звука от глубины z для случая, когда минимальная скорость c_0 соответствует середине расстояния между поверхностью и дном океана. Для простоты мы положим

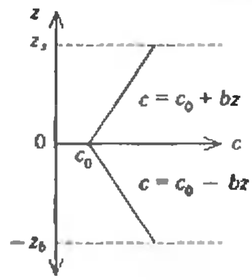


Рис. 1

$z = 0$ для глубины, соответствующей этому минимуму, $z = z_s$ на поверхности и $z = -z_b$ на дне океана. При $z \ge 0$ скорость c определяется из выражения $c = c_0 + bz$. При $z \le 0$ скорость равна $c = c_0 - bz$. В обоих случаях $b = \left|\frac{dc}{dz}\right|$ – это градиент скорости звука по глубине. Предполагается, что b – постоянная величина.

На рисунке 2 показано сечение океана в плоскости ZX, где ось X горизонтальна. Во всех точках этой плоскости зависимость скорости звука $c(z)$ соответствует графику на рисунке 1. Источник звука S расположен в точке $z = 0$, $x = 0$. Направленный звуковой пучок, создаваемый этим источником, описывается звуковым лучом, выходящим из S под начальным углом θ_0. Поскольку скорость звука меняется в зависимости от z, звуковой пучок преломляется, что приводит к изменению угла θ по траектории луча.

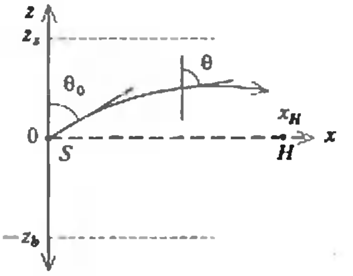


Рис. 2

a (6 баллов)) Покажите, что начальная траектория звукового луча, испущенного источником, есть дуга окружности радиусом $R = \frac{c_0}{b\sin\theta_0}$ для $0 \le \theta_0 < \frac{\pi}{2}$.

b (3 балла)) Получите формулу, содержащую z_s, c_0 и b, для минимального значения угла θ_0 для лучей, направленных вверх, которые не испытывают отражения от поверхности океана.

c (4 балла)) На рисунке 2 изображен приемник H, расположенный в точке $z = 0$, $x = x_H$. Выведите выражение, содержащее b, x_H и c_0 и определяющее набор значений угла θ_0, необходимых для того, чтобы звуковой луч от S достиг приемника H. Вы можете предположить, что z_s и z_b достаточно велики, для того чтобы исключить возможность отражения от поверхности и дна океана.

d (2 балла)) Вычислите четыре минимальных значения θ_0, при которых преломленные лучи от S достигают H, для x_H = 10000 м, c_0 = 1500 м·с$^{-1}$ и $b = 0{,}02000$ с$^{-1}$.

e (5 баллов)) Получите выражение для времени, необходимого для распространения звука от S до H вдоль траектории луча, соответствующей минимальному значению угла θ_0, выведенного в части *c*). Вычислите значение этого времени распространения для условий, указанных в части *d*). Вам может помочь следующий результат:

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

Найдите время распространения прямого луча от S до H по линии $z = 0$. Какой из двух лучей придет первым: луч, соответствующий $\theta_0 = \pi/2$, или луч с наименьшим значением θ_0, вычисленным в части *d*)?

Задача 3. Цилиндрический буй

a (3 балла)) Буй состоит из твердого цилиндра радиусом a и длиной l, сделан-

Таблица

Параметр скорости	$\beta = \upsilon/c\,(10^{-5})$	3,352	3,279	3,195	3,077	2,955
Расстояние от поверхности звезды	$d\ (10^8$ м$)$	38,90	19,98	13,32	8,99	6,67

ного из легкого однородного материала плотностью d, и однородного жесткого стержня, прикрепленного снизу к цилиндру на середине его длины (рис. 3). Масса стержня равна массе цилиндра, его длина равна диаметру цилиндра, а плотность больше плотности морской воды. Буй плавает в морской воде плотностью ρ. Получите соотношение, связывающее угол α в положении равновесия с отношением плотностей d/ρ. Объемом стержня пренебречь.

b (4 балла)) Если буй вследствие возмущений погружен вертикально на малое расстояние z, то он начинает совершать вертикальные колебания относительно положения равновесия. Определите частоту этих колебаний через α, g и a, где g — ускорение свободного падения, предполагая, что влияние движения воды на динамику колебаний буя таково, что его эффективная масса увеличивается на одну треть. Вы можете предположить, что α не мало.

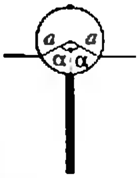


Рис. 3

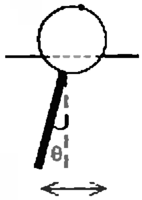


Рис. 4

c (8 баллов)) В предположении, что цилиндр буя может совершать колебания (качаться) относительно своей центральной горизонтальной оси, определите частоту этих качаний через g и a, пренебрегая в этом случае движением воды и ее вязкостью. Угол отклонения θ (рис. 4) при качаниях считайте достаточно малым.

d (5 баллов)) На буе установлены акселерометры, которые могут измерять вертикальные колебания и качания буя и передавать информацию на берег. Измерения показали, что в относительно спокойной воде период вертикальных колебаний равен примерно 1 с, а период качаний составляет примерно 1,5 с. На основе этих данных покажите, что угол α приблизительно равен 90°. Оцените радиус цилиндра буя и его полную массу, если длина цилиндра l равна его радиусу a. (Вы можете использовать для оценок следующие числовые данные: $\rho = 1000$ кг·м$^{-3}$ и $g = 9{,}8$ м·с$^{-2}$.)

Публикацию подготовил В.Орлов

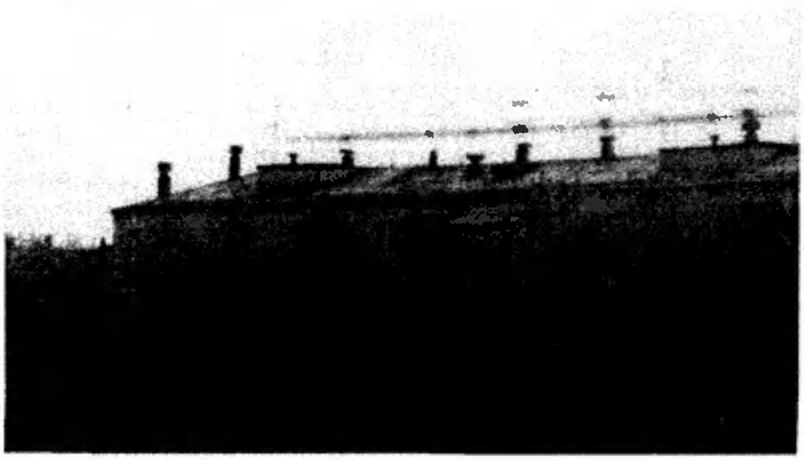
НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

НЕСКОЛЬКО СЛОВ О МИРАЖЕ

А.Митрофанов

Многие, наверное, слышали, что такое оптический мираж, или читали о нем — например рассказ «Старое и новое о миражах» в книге Я.И.Перельмана «Занимательная физика» (ч. 1). А кто-то, быть может, и наблюдал это интересное явление жарким летом над нагретым асфальтом или раскаленной пашней, которые при определенных условиях начинают отражать предметы, как зеркальная гладь озера.

В чем причина оптического миража? Нагретый от земли приповерхностный слой воздуха имеет меньшую плотность и, следовательно, меньший показатель преломления, чем более холодные верхние слои атмосферы. Явление полного отражения света от слоисто-неоднородной среды с переменным показателем преломления и приводит к тому, что есть такое красивое явление — мираж. Как большинство природных явлений, оптический мираж можно смоделировать. Об этом подробно и интересно рассказано, например, в книге В.В.Майера «Полное отражение света в простых опытах» (М.: Наука, серия «Библиотечка физико-математической школы», 1986).



А знаете ли вы, что оптическое явление, подобное миражу, можно наблюдать непосредственно, без всяких дополнительных приспособлений, просто рассматривая окружающие предметы через обычное оконное стекло у себя дома или сидя в электричке? Правда, для этого необходимо, чтобы стекло было с дефектами, т.е. чтобы в стекле были какие-либо неоднородности — их называют «свили». Мираж, наблюдаемый через обычное оконное стекло с еле заметным горизонтальным свилем, показан на фотографии. На ней видно, что трубы на крыше здания как бы расслаиваются и отражаются в неведомом зеркале (естественно — в перевернутом виде). Поверьте, такую картину наблюдать не менее интересно, чем любоваться миражами в пустыне, сидя на верблюде и мечтая о кружке холодного компота или глотке пепси-колы.

Теперь дело за малым — попробуйте объяснить возникновение «оконного» миража. А заодно — ответить на такие вопросы: почему трудно получить качественные фотоснимки, фотографируя предметы длиннофокусным телеобъективом через оконное стекло, и почему стекло для оптических приборов и светофильтров должно быть очень однородным.

ВАС ЖДЕТ ОЛ ВЗМШ

Что это такое? Формальное название — Открытый лицей «Всероссийская заочная многопредметная школа (ВЗМШ)» Российской Академии образования, работающий при Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова.

Теперь по существу. Открытый лицей — это значит, что к нам может поступить каждый, кого интересует одна или несколько из шести областей знаний: математика, биология, физика, химия, филология и экономика (названия этих шести отделений ВЗМШ — расшифровка слова «многопредметная» в названии школы). На Северо-Западе России работает Заочная школа Ленинградского областного Министерства образования, созданная при Санкт-Петербургском государственном университете, она имеет отделения математики, биологии и химии (подробности — ниже).

Поступив к нам учиться — заочно, по переписке, — Вы будете, начиная с сентября 1996 года, получать от нас материалы, содержащие изложение теоретических вопросов, разнообразные задачи для самостоятельного решения и контрольные задания, по которым мы сможем судить о Ваших успехах и проблемах в усвоении программы. Ваши контрольные работы будут тщательно проверяться и рецензироваться преподавателями ВЗМШ — студентами, аспирантами, преподавателями и научными сотрудниками МГУ и других вузов и учреждений, в которых имеются наши филиалы. Все окончившие ВЗМШ получают соответствующие удостоверения.

За время обучения Вы сможете узнать об увлекательных вещах, часто остающихся за страницами школьных учебников, познакомиться с массой интересных задач и попробовать свои силы в их решении (да, бывают задачи и по биологии, и по лингвистике, и, конечно, по экономике, а не только по математике и физике), научиться самостоятельно работать с книгой и грамотно, четко и кратко излагать свои мысли на бумаге. Возможно, нам удастся помочь Вам выбрать профессию, найти свое место в окружающем мире.

Для поступления к нам надо успешно выполнить вступительную контрольную работу. Успешно — это не значит обязательно решить все задачи. Нас интересует, в первую очередь, Ваше умение рассуждать, попытки (пусть даже не совсем удачные) самостоятельно мыслить и делать выводы, Ваша тяга к знаниям.

Преимуществом при поступлении пользуются проживающие в сельской местности, посёлках и небольших городах — там нет крупных научных центров и учебных заведений, и поэтому дополнительное образование можно получить лишь заочно.

Решения задач надо написать на русском языке в ученической тетради в клетку и выслать простой бандеролью, не сворачивая в трубку (об оформлении решения вступительного задания на отделение экономики см. ниже). Если Вы хотите поступить на несколько отделений сразу, каждую работу пришлите в отдельной тетради. На каждой обложке обязательно укажите следующие сведения о себе: фамилию, имя, отчество, год рождения, род занятий (класс, школа с указанием ее адреса и учителя по данному предмету, если Вы учитесь в школе; профессия, должность и т.п. в другом случае), полный почтовый адрес (с индексом!), откуда узнали о нашей школе (из «Кванта», от друзей, из афиши, от учителя и т.п.).

Срок отправки работ — *не позднее 25 апреля 1996 года* (по почтовому штемпелю).

Без вступительной работы, только по заявлению, в ВЗМШ принимаются на индивидуальное обучение участники республиканских и победители областных (краевых), а также Соросовских олимпиад для школьников и учащихся СПТУ по соответствующим предметам.

Учащиеся ВЗМШ частично возмещают расходы на свое дополнительное обучение. Плата невелика; если поступивший не в состоянии ее внести, ВЗМШ может, получив соответствующее мотивированное заявление и справки, снизить плату, освободить от нее или обратиться в любое указанное заявителем учреждение (школа, орган народного образования, другой спонсор) с ходатайством об оплате этой организацией расходов по обучению.

Не успевшие и не сумевшие поступить в ВЗМШ на индивидуальное обучение могут заниматься в группах «Коллективный ученик ВЗМШ» (кроме отделения экономики). Каждая такая группа — кружок, работающий под руководством школьного учителя или другого преподавателя, в основном по той же программе и пособиям, что на индивидуальном обучении. Прием в эти группы производится до 15 октября 1996 года. Для зачисления такой группы достаточно заявления руководителя группы с приложением списка учащихся, четкого указания, по какой программе она будет работать; заявление должно быть подписано руководителем учреждения, при котором будет работать группа, и заверено печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик ВЗМШ» может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия.

Проживающие на Северо-Западе России (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках), желающие поступить на отделения математики, биологии и химии, высылают вступительные работы по адресу:

198097, Санкт-Петербург, ул. Трефолева, д.32, С-З ЗМШ (на прием).

Проживающие в остальных регионах России, дальнем и ближнем зарубежье, высылают работы в адрес ВЗМШ или (по математике) соответствующего филиала.

Адрес ВЗМШ:

119823, ГСП, Москва В-234, МГУ, ВЗМШ, на прием (с указанием отделения).

Филиалы математического отделения ВЗМШ при университетах имеются в городах: Бишкек, Воронеж, Донецк, Екатеринбург, Иваново, Ижевск, Калуга, Магадан, Самара, Ульяновск, Чебоксары, Челябинск, Ярославль; при педагогических институтах — в городах: Армавир, Витебск, Киров, Петрозаводск, Тернополь; работают также филиалы при Брянском Дворце творчества молодежи и Могилевском областном Дворце пионеров.

Вступительная работа на отделение математики

На этом отделении, которое работает дольше всех остальных — более тридцати лет, — Вы сможете глубже понять основные разделы школьного курса элементарной математики: метод координат на прямой, на плоскости и в пространстве (даже в четырехмерном), функции и их графики, целые числа и многочлены, тригонометрию, ряд геометрических тем, начала математического анализа и т.д. Тем, кто хорошо усвоит основной курс и проявит интерес к другим разделам, будут предложены дополнительные главы: комплексные числа, элементы теории игр, начала комбинаторики и теории вероятностей, задачи олимпиадного типа и др. На выпускном, третьем, курсе большое внимание будет уделено подготовке к вступительным экзаменам в вузы.

Прием (по помещенной ниже вступительной работе) проводится:

на 1 курс — усвоивших к сентябрю 1996 года курс 8 классов средней школы;

на 2 курс — тех, кто к сентябрю 1996 года усвоил курс 9 классов средней школы (им будет предложено выполнить часть заданий за 1 курс);

на 3 курс — имеющих знания за 10 классов школы — на обучение по специальной программе, с выполнением части заданий за первые два курса, или на обучение только по подготовке к поступлению в вуз (на обложке тетради должно быть указано, какой вариант выбран поступающим).

1. За каждый из девяти первых месяцев года цены вырастали на 25%, за каждый из трех следующих — на x%. Найдите x, если в целом за год цены выросли в 8 раз.

2. Из некоторой точки M катета AC прямоугольного треугольника ABC опущен перпендикуляр MK на гипотенузу AB. Найдите угол A, если $AK=KB$ и $MK=MC$.

3. При каком наибольшем значении d можно записать числа 1, 2, ..., 1996 в таком порядке, чтобы разность двух соседних чисел была по модулю не меньше d?

4. Последовательные стороны выпуклого пятиугольника равны 10, 12, 8, 9, 11. Можно ли построить круги с центрами в его вершинах так, чтобы каждый из них внешним образом касался кругов с центрами в двух соседних вершинах? Если да, найдите радиусы этих кругов.

5. Докажите, что внутри произвольного остроугольного треугольника можно выбрать точку так, что основания перпендикуляров, опущенных из нее на стороны, будут вершинами правильного треугольника.

6. Найдите все пары целых положительных чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению $2x^2-9xy+10y^2=1996$.

7. Можно ли шесть точек расставить на плоскости так, чтобы все треугольники с вершинами в этих точках были равнобедренными (и никакие три точки не лежали на одной прямой)?

8. Числа 1, 2, 3, ..., 50 разбиты какимто образом на 10 пятерок и в каждой пятерке выбрано среднее по величине число. а) Какова наибольшая возможная сумма десяти средних чисел? б) А наименьшая?

9. Можно ли а) квадрат 6×6 клеток, б) прямоугольник 5×8 клеток, нарисованные на клетчатой бумаге, разбить на уголки в форме буквы Г из четырех клеток?

10. а) Уравнение $x^4+ax^2+bx+36=0$; б) $x^4+ax^2+bx-36=0$ имеет корни $x=2$ и $x=3$. Найдите два других корня этого уравнения.

11. Можно ли на прямоугольном газоне 15×8 метров проложить дорожки так, чтобы из каждой вершины прямоугольника по ним можно было бы пройти в любую другую вершину, а общая длина дорожек не превышала 30 метров?

12. В квадратном зале расставлено 256 стульев — 16 рядов по 16 стульев в каждом. На них надо рассадить 256 депутатов парламента. Им раздали анкету с 8 вопросами, на каждый из которых надо ответить «да» или «нет». Оказалось, что никакие два депутата не дали одинаковых ответов на все вопросы. Можно ли рассадить депутатов так, чтобы ответы соседей (если они есть) справа, слева, сзади и спереди) отличались: а) только в одном вопросе; б) ровно в 7 вопросах?

Вступительная работа на отделение биологии

Отделение успешно работает более 20 лет. Особое внимание уделяется областям биологической науки, наименее раскрытым в школьной программе: молекулярной биологии, биохимии, иммунологии, генетике, биофизике, физиологии и т.д.

Коллективом отделения создан комплекс уникальных учебных пособий и задачников (часть из них издана массовым тиражом в виде экспериментальных учебников издательством «МИРОС»).

В конкурсе могут принять участие:

— желающие поступить на трехгодичное обучение (они к сентябрю 1996 года должны усвоить школьную программу за 8 классов), им надо решать задачи 1—5 из помещенной ниже вступительной работы;

— желающие поступить на двухгодичное обучение (для владеющих школьной программой в объеме 9 классов), они решают задачи 3—7.

В ответах можно использовать и факты, найденные в литературе, и собственные идеи. Для сведений, почерпнутых из книг, надо приводить ссылки на источники.

1. Перед Вами — список растений: береза, брусника, вишня, дуб, ива, картофель, крыжовник, лопух, огурец, одуванчик, подсолнечник, пшеница, рис, томат, яблоня. Предложите как можно больше разных критериев, по которым их можно разделить на две группы. Для каждого критерия укажите, какие растения в какую группу попадут.

2. Мишка очень любит мед.
Почему? Кто поймет?
В самом деле, почему
Мед так нравится ему?

А. Милн

Действительно, лишь для немногих животных мед является существенной частью рациона. Для кого? Объясните, с какими особенностями каждого из этих животных связана его «любовь» к меду.

3. Многим животным свойствен половой диморфизм — различие между самцами и самками (помимо устройства половой системы). Назовите как можно больше признаков, по которым могут отличаться самцы и самки, указав, у каких организмов такие отличия имеются.

4. Урожайность многих плодовых деревьев подчиняется правилу «то густо, то пусто»: за урожайным годом закономерно следует неурожайный и наоборот. С какими причинами это может быть связано? Какие наблюдения и эксперименты Вы бы рекомендовали провести, чтобы проверить каждую из Ваших гипотез?

5. Часто из двух расположенных рядом водоемов один «цветет», а другой — нет. Каковы возможные причины такого явления?

6. Станислав Лем описал планету Пинта. Принятые властями Пинты законы требовали от заселивших ее людей постоянно находиться по шею в воде. Как скажется такой образ жизни на работе человеческого организма?

7. Вам поручено определить, почему в поселке N в последнее время стали весьма распространены случаи снижения остроты зрения. Какие гипотезы Вы можете выдвинуть для объяснения этого? Как их станете проверять?

Вступительная работа на отделение физики

Отделение работает 4 года. За это время создано несколько учебных пособий, которые апробируются и постоянно используются при обучении, ведется работа по написанию ряда новых книг.

Основное внимание при обучении уделяется изучению физики с помощью решения задач, излагаются методы, пригодные как для стандартных, так и для более сложных ситуаций. В программе — все основные разделы школьного курса физики, а также темы, мало изученные в школе.

Желающие поступить на двухгодичный поток обучения (для владеющих школьным курсом в объеме 9 классов) решают задачи 1—4 вступительной работы;

те, кто хочет учиться на одногодичном потоке (знающие школьную программу за 10 классов), решают задачи 3—6;

если Вы хотите за один год пройти двухгодичный курс обучения, решайте все задачи вступительной работы.

1. Если рыбак переправляется через реку из точки A (рис. 1), желая как можно быстрее добраться до противоположного берега, то его сносит на 120 м, а переправа занимает 4 мин. Если же

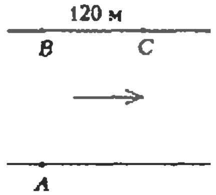


Рис. 1

рыбак направляет лодку так, чтобы попасть в точку B, то он тратит на переправу 5 мин. Найдите скорость лодки относительно воды.

2. Тело равнозамедленно движется по окружности. Известно, что за первые 12 оборотов его угловая скорость уменьшилась вдвое. Найдите, за сколько оборотов угловая скорость тела уменьшится еще в два раза и сколько всего оборотов сделает тело до остановки.

3. На вершине горки, имеющей вид полусферы радиусом R, лежит тело массой M. В тело попадает горизонтально летящая пуля массой m и застревает в нем. Какой минимальной скоростью должна обладать пуля, чтобы заставить тело сразу же оторваться от горки? Какая часть кинетической энергии пули переходит при этом в тепло? На каком расстоянии от основания горки упадет тело?

4. Тело подпрыгивает на тяжелой горизонтальной плите, которая гармонически колеблется с амплитудой A в вертикальной плоскости под действием внешней силы. Все соударения абсолютно упругие. а) Пусть частота колебаний плиты равна ω. Рассчитайте, на сколько выше поднимется тело, ударившееся о плиту в момент прохождения ею среднего положения при движении вверх, чем тело, столкнувшееся с плитой при прохождении ею среднего положения при движении вниз. Считайте, что оба раза тело падало без начальной скорости с высоты H. б) Какой может быть максимальная частота колебаний плиты, для того чтобы после каждого удара тело поднималось на одну и ту же высоту h над средним положением плиты?

5. КПД цикла *1 – 2 – 3 – 4 – 1* (рис. 2), проведенного с идеальным газом, равен η. Найдите КПД цикла *1 – 3 – 4 – 1*.

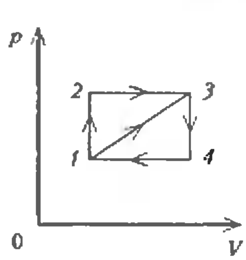


Рис. 2

6. Для измерения величины неизвестного сопротивления R была собрана схема, изображенная на рисунке 3, при этом

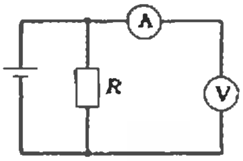


Рис. 3

амперметр показывал $I_1 = 1$ мА, а вольтметр — $U_1 = 4{,}8$ В. После этого собрали другую схему (рис. 4) из тех же элементов, при этом приборы показали ток $I_2 = 2{,}5$ мА и напряжение $U_2 = 4{,}4$ В. Какова же истинная величина R?

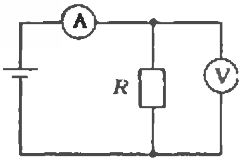


Рис. 4

Вступительная работа на отделение филологии

Отделение работает 6 лет. На этом отделении может учиться каждый, освоивший программу 7 классов средней школы, причем возраст поступающего не имеет значения.

Окончившим 8 классов предлагается три независимых цикла обучения (можно выбрать любое количество циклов):

— Цикл «Русский язык». В программе: тренировка практической грамотности, разборы; сведения об истории языка и его современном устройстве; знакомство с современной проблематикой науки о языке и смежными с ней областями знания.

— Цикл «Сочинение». Вы научитесь анализировать художественное произведение, узнаете, что такое сочинение и какие они бывают; познакомитесь с основными литературоведческими понятиями и научитесь их применять; Вам будет предложен (и совместно с Вами проведен) анализ литературных произведений школьной и абитуриентской программ; Вы поймете, что такое хорошее знание текста произведения и как его добиться.

— Цикл «Общая филология». Вам предстоит познакомиться с основами литературоведения и лингвистики: узнать, как разнообразно устройство языков мира и что такое язык вообще; научиться решать уникальный тип задач, разработанный лингвистами-теоретиками Московского университета и не имеющий аналогов в мире, — так называемые лингвистические задачи, составленные на материале самых разных языков; Вас ожидают занятия логикой, древними языками и литературой.

Каждый из циклов Вы можете пройти по стандартной (2 года) или интенсивной (1 год) программе.

Окончившим 7 классов школы мы предлагаем экспериментальную четырехгодичную программу, включающую в себя все три цикла.

На обложке вступительной работы надо указать желательную для Вас программу («стандарт», «интенсив» или «эксперимент»).

Не расстраивайтесь, если какие-то вопросы оказались Вам не по силам. Иногда для зачисления бывает достаточно хорошего, вдумчивого ответа на 2 – 3 вопроса. Обязательное требование к работе — Ваши рассуждения при ответе на вопросы. Ответы без объяснений, как Вы их получили, зачтены не будут.

1. Русское слово *глагол*, обозначающее соответствующую часть речи, когда-то означало просто речь; *глаголати* — говорить. По-латыни глагол — verbum, и в латинском языке это слово тоже имеет два значения: и терминологическое — соответствующая часть речи, и более широкое — слово, речь. (Ср. *вербальный* — словесный, речевой.) Как Вы считаете, почему обозначение именно этой части речи совпадает с обозначением речи вообще?

2. Краткие прилагательные — более древняя форма прилагательных, чем полные, которые образовались от них позднее. Как Вы думаете, откуда могли произойти окончания полных прилагательных?

3. В русском языке очень много глаголов, от которых другие глаголы свободно образуются с помощью приставки ПО-: *читать — почитать; бежать — побежать; любить — полюбить* и т.д. Как бы Вы логически объяснили, почему от глагола *класть* нельзя образовать форму «покласть», а от глагола *положить* — форму «ложить» (она неправильна и встречается только в просторечии)?

4. Даны слова и словосочетания на языке коми (один из финно-угорских языков) и их переводы на русский язык в перепутанном порядке:

пачын, пачысь, пачо, пач выло, пач вылын, пач сайо, пач сай, пач доро, пач дорысь, пач улысь;

в печь, из печи, в печи, на печи, на печь, за печь, место за печью, из-под печи, к печи, от печи.

Задание. Установите правильные переводы. Объясните свое решение.

5. Даны русские слова: *правый* (поворот), *согласно* (чему-либо), *дорогой* (обращение), *стоящий*, *уже*, *нельзя*, *считая*.

Задание 1. Определите, к каким частям речи относятся слова. Аргументируйте свое решение.

Задание 2. Придумайте предложения, в которых эти слова были бы другими частями речи.

6. Что Вы знаете о звуках, выраженных буквами ъ и ь? Какова их история в русском языке?

7. Сколько значений может иметь предложение *Василий вернулся домой вчера?*. От чего зависит изменение смысла этого предложения?

8. Многие русские поэты и прозаики писали о двух наших столицах, древней и новой. Основываясь на любых известных Вам произведениях, попытайтесь сформулировать, что есть МОСКВА и что есть ПЕТЕРБУРГ для избранного Вами автора (авторов).

9. Сравните описания природы в пушкинских стихотворениях «Деревня» и «Вновь я посетил...» с точки зрения того, что изображается и как изображается, какие художественные средства использует поэт. Что общего можно увидеть в двух этих пейзажах и чем они отличаются?

10. (Только для выбравших курс «Русский язык» и/или курс «Сочинение».) Укажите, какой именно поток Вас интересует. Изложите в форме мини-сочинения развернутый ответ на вопрос: почему именно этот поток Вы выбрали; чего бы Вы от него хотели? Примерный объем сочинения — 3–4 страницы.

Вступительная работа на отделение экономики

Отделение работает третий год. Преподаются основы прикладной экономики, бизнеса и предпринимательства.

В программе первого года обучения: современные экономические теории, международная экономика, изучение опыта ведущих фирм, применение математических методов в экономике.

Для желающих продолжить обучение предлагаются спецкурсы по современному бухгалтерскому учету и финансовому анализу, основам менеджмента, экономике России и т.д.

На экономическом отделении форма обучения «Коллективный ученик» устроена несколько иначе, чем на других отделениях: это просто группа учащихся, выполняющих часть заданий (по управлению своей «фирмой» в деловых играх) коллективно — самостоятельно или вместе с учителем.

Вступительная работа — тест — включает в себя вопросы по экономике, математике, истории, литературе и общей культуре. Решения присылайте ТОЛЬКО на открытках с указанием вашего полного почтового адреса (печатными буквами) и индекса, фамилии, имени и отчества. На открытке обязательно напишите: «Квант», вступительный тест 1996 года», после чего достаточно указать в строчку номера вопросов и под каждым из них написать букву, соответствующую ответу, который Вы считаете правильным (на каждый вопрос имеется лишь один правильный ответ).

Если Вы правильно ответите на все вопросы теста, буквы Ваших ответов составят осмысленную фразу (пробелы между словами и знаки препинания расставьте по собственному желанию).

1. Среднее арифметическое 20 чисел равно 7. Среднее арифметическое 10 других чисел равно 1. Тогда среднее арифметическое всех 30 чисел равно:

К) 2; С) 3; Э) 4; П) 5; Я) 6.

2. Выберите верное утверждение. Именем Веспуччи ...

О) назван материк; И) названа опера; К) назван теплоход; Х) названа столица государства; Л) назван пролив.

3. В фирме «Пупсико» на каждых двух специалистов по маркетингу приходятся три менеджера, а на каждого менеджера — пять продавцов. Каково отношение численности специалистов по маркетингу, менеджеров и продавцов?

Л) 2:3:5; Р) 3:15:12; О) 3:2:15; С) 2:3:15; В) 6:9:15.

4. Какая страна мира является лидером по производству автомобилей?

О) США; Т) Япония; Н) Германия; Е) Франция; Ч) Канада.

5. Если 1 доллар США стоит 4700 рублей, а 1 немецкая марка стоит 3350 рублей, то каков курс доллара по отношению к марке, рассчитанный через рубль (с точностью до десятых долей)?

К) 0,7; В) 1,0; У) 1,4; Ш) 1,1; О) 0,8.

6. Укажите лишнее имя в следующем списке:

А) Пол Маккартни; П) Элтон Джон; Т) Ринго Стар; М) Джон Леннон; К) Джордж Харрисон.

7. Значок (R) на упаковке товара обозначает:

И) что пошлина на товар уплачена; Е) что продукт прошел радиационный контроль; А) зарегистрированную торговую марку; Р) разрешение продажи на территории Российской Федерации; Т) импортируемый продукт.

8. Единственной компьютерной игрой, сделанной в России и завоевавшей весь мир, является:

П) Dendy; Й) Tetris; Ь) Doom-2; Ч) Цивилизация; И) Звездные войны.

9. Население мира составляет примерно (укажите наиболее близкое к истине число):

Е) 100 млн. человек; Ф) 500 млн. человек; О) 1 млрд. человек; Т) 5 млрд. человек; Д) 12 млрд. человек.

10. В Карлсонвилле 9 килограммовых банок варенья стоят меньше 10 крон, а 10 таких же банок — больше 11 крон. Сколько стоят 11 килограммовых банок варенья? (1 крона = 100 эре.)

Ш) 11 крон 99 эре; С) 12 крон 11 эре; И) 12 крон 12 эре; В) 12 крон 20 эре; Е) 12 крон 21 эре.

11. Укажите правильный вариант окончания «крылатого» выражения *«Что позволено Юпитеру, не позволено...»*

Г) Минерве; Р) Аполлону; Л) его сыновьям; К) быку; В) льву.

12. «Запись в число» — это:

Э) система ведения бухгалтерского учета у русских купцов; Н) прообраз переписи населения на Руси; А) название секретного дневника Мао Цзэдуна; В) название старого церковного календаря на Руси; М) древняя система счисления на Руси.

13. Какое занятие пророк Магомет назвал «занятием, достойным мужчины»?

Щ) молитву; Я) разведение скота; К) заботу о продолжении рода; Л) войну с неверными; А) торговлю.

14. В качестве единой валюты в странах Европейского Сообщества предполагается ввести:

Ш) доллар; Х) фунт стерлингов; О) франк; М) экю; И) марку.

15. Наибольшими запасами нефти в мире обладают:

У) страны Персидского залива; Г) страны Большой семерки; К) страны Латинской Америки; Я) страны содружества, возглавляемого Великобританией; О) страны Карибского бассейна.

16. Кто изобрел бумажные деньги?

У) японцы; Ш) американцы; О) Милтон Фридман; Ч) китайцы; Р) Адам Смит.

17. Зачем Чичиков (Гоголь, «Мертвые души») скупал у губернских помещиков души умерших крестьян (как известно, их смерть не была официально зарегистрирована)?

К) для официальной регистрации смерти и сбора статистических данных для губернатора;

О) для того, чтобы выведать истинное экономическое положение помещиков;

И) для того, чтобы получить кредит под обеспечение в банке, который выдавали лишь при наличии определенного числа крестьян;

Л) для того, чтобы заинтриговать дочь губернатора, на которой он хотел жениться.;

И) для того, чтобы под предлогом покупки завести выгодные знакомства среди помещиков.

18. Как известно, Ахматова – псевдоним поэтессы. Укажите ее настоящую фамилию:

Т) Горенко; О) Иванова; Ш) Гвоздок; Я) Цветкова; А) Таруханова.

19. В отделении фирмы «Рога и копыта» 90% сотрудников умеют печатать на пишущей машинке, а 20% умеют водить машину «Антилопа Гну». Сколько процентов сотрудников владеют только одним из указанных профессиональных навыков, если каждый из них умеет делать хоть что-то из перечисленного?

Л) 80%; А) 70%; Т) 75%; Ь) 90%; Б) 95%.

20. Что такое «заповедные лета»?

У) годы, в которые запрещалась рубка леса вблизи усадеб;

А) запрещение юным отрокам вступать в брак до получения образования;

Я) годы особо строгого церковного поста;

Ь) годы, в которые запрещались войны между феодалами;

С) годы, в которые запрещались крестьянские переходы от помещика к помещику.

21. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова был основан:

Й) в 1724 г.; Я) в 1755 г.; Ь) в 1762 г.; К) в 1753 г.; Р) в 1746 г.

Вступительная работа на отделение химии

Принимаются имеющие знания в объеме 9 классов школы.

1. В четырех сосудах без надписей находятся водные растворы карбоната, гидрокарбоната, гидрофосфата и дигидрофосфата натрия. Как установить содержимое каждого сосуда, воспользовавшись только названными растворами и пустыми пробирками? Что использовали бы Вы дополнительно для упрощения решения задачи?

2. При смешивании растворов сульфата цинка, нитрата хрома (III), железного купороса и хлорида железа (III) (растворы А) с растворами кальцинированной соды и сульфида натрия (растворы В) выпадают осадки. Что они собой представляют? Зависит ли состав этих осадков от порядка смешения растворов, т.е. от того, прибавляют ли медленно раствор А к раствору В или, наоборот, раствор В – к раствору А? Напишите уравнения соответствующих реакций.

3. При взаимодействии раствора, содержащего 2,4 г карбоната натрия, с раствором нитрата металла образовался осадок карбоната металла массой 2,265 г. Установите формулу нитрата металла, вступившего в реакцию с карбонатом натрия.

4. Через растворы, находящиеся в четырех пробирках, пропустили бесцветный газ. В первой пробирке сначала выпал черный осадок, который растворился при дальнейшем пропускании газа. Во второй пробирке выпал голубой осадок, который затем растворился с образованием синего раствора. В третьей пробирке выпал бурый осадок, в четвертой – белый. К тем же исходным растворам был добавлен бесцветный раствор. В первой и в четвертой пробирках выпал желтый осадок, во второй – белый, а раствор побурел. В третьей пробирке увеличилась интенсивность окраски. Приведите уравнения всех химических реакций, о которых идет речь в задаче.

5. В Вашем распоряжении имеются бертолетова соль, серная кислота, бромид калия, аммиак, диоксид марганца. Пользуясь этими веществами, получите соляную кислоту, хлор, нашатырь, свободный азот, бром (при необходимости можно использовать воду и кислород воздуха). Напишите уравнения соответствующих химических реакций и укажите условия, при которых они происходят.

6. Серебристо-белый металл горит на воздухе с образованием белого оксида МО. Оксид практически не растворяется в воде, но хорошо растворяется в соляной, серной и азотной кислотах. При действии на раствор хлорида металла раствора карбоната, силиката или фосфата натрия выпали осадки. Какой это может быть металл? Дайте мотивированный ответ с уравнениями соответствующих реакций.

7. Единственным продуктом реакции, протекающей при смешении при нормальных условиях двух жидких веществ, является белый порошок. Он растворяется в воде, но водой не разлагается и устойчив при нагревании. Какие жидкости реагировали друг с другом?

8. При нормальных условиях колба неизвестной вместимости была заполнена неизвестным газом и запаяна. Запаянный конец погружен в неизвестную жидкость и отломлен, после чего жидкость полностью заполнила колбу. Определите концентрацию полученного в колбе раствора.

9. Как можно осуществить превращение:

гематит $\longrightarrow$ магнетит $\longrightarrow$ углекислота $\longrightarrow$ кальцинированная сода $\longrightarrow$ растворимое стекло $\longrightarrow$ питьевая сода $\longrightarrow$ каустическая сода $\longrightarrow$ глауберова соль $\longrightarrow$ гипс $\longrightarrow$ кальцит?

10. К какому классу соединений относятся вещества, имеющие следующие эмпирические формулы:

$H_9N_2O_4P$, H_5NO_4S, $H_4N_2O_3$, $H_{14}FeSO_{11}$, $H_2Cu_2CO_5$?

11. Предложите способ получения водорода, удовлетворяющий следующим условиям: на единицу массы расходуемых реактивов должно получиться максимально возможное количество водорода. Если для проведения реакции понадобится вода (в качестве реактива или растворителя), ее массу можно не учитывать. Электрический ток отсутствует.

ЗАОЧНАЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКАЯ ШКОЛА ПРИ МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) Министерства образования Российской Федерации при Московском физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т.п.), расположенных на территории Российской Федерации.

ЗФТШ при МФТИ как государственное учреждение дополнительного образования работает с 1966 года. За это время школу окончили более 50000 учащихся, практически все ее выпускники поступают в ведущие вузы страны, и каждый второй студент МФТИ – выпускник ЗФТШ. Финансирует ЗФТШ Министерство образования Российской Федерации. Обучение в ЗФТШ бесплатное.

Научно-методическое руководство школой осуществляет Московский физико-технический институт, который готовит инженеров-физиков и инженеров-математиков по существующей только в МФТИ единой специальности «Прикладная математика и физика». В подготовке специалистов принимают участие ведущие отраслевые и академические научно-исследовательские институты и научно-производственные объединения страны (базовые организации МФТИ). Преподаватели – крупнейшие ученые, среди которых около ста членов Академии наук РФ. Обучаясь в МФТИ, Вы получите хорошие шансы стать лидером, и не только в науке.

Цель ЗФТШ при МФТИ — помочь учащимся, интересующимся физикой и математикой, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам.

Набор в 8, 9, 10 и 11 классы ЗФТШ на 1996/97 учебный год проводится на следующие отделения:

— Индивидуальное заочное обучение

Прием на заочное отделение проводится на конкурсной основе по результатам выполнения вступительного задания по физике и математике, приведенного ниже. Полная программа обучения рассчитана на 4 года (8 — 11 кл.), но поступать можно в любой из этих классов.

В течение учебного года, в соответствии с программой ЗФТШ, каждый ученик будет получать задания по физике и математике (по 3 задания по каждому предмету для 8 класса, 6 — 7 заданий по каждому предмету для 9, 10 и 11 кл.), а затем рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий вместе с проверенной работой учащегося.

Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и 8 — 12 контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Задания ЗФТШ составляют опытные преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ. Работы учащихся-заочников проверяют студенты, аспиранты и выпускники МФТИ (часто — выпускники ЗФТШ).

Телефон индивидуального заочного отделения: 408-51-45.

— Очно-заочное обучение в физико-технических кружках и факультативах

Заочные физико-технические кружки и факультативы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении двумя преподавателями — физики и математики. Руководители кружка или факультатива зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Группа (не менее 8 – 10 человек) принимается в ЗФТШ, если директор общеобразовательного учреждения сообщит в ЗФТШ фамилии, имена, отчества ее руководителей и поименный список учащихся (с указанием класса и итоговых оценок за вступительное задание). Все эти материалы и конверт для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом на имя одного из руководителей следует выслать до 25 мая 1996 г. по адресу: *141700, г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, ЗФТШ, с указанием «Кружок» или «Факультатив»* (тетради с работами учащихся не высылаются). Работа руководителей кружков и факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением по представлению ЗФТШ при МФТИ как факультативные занятия.

Руководители кружков и факультативов будут получать в течение учебного года учебно-методические материалы ЗФТШ (программы по физике и математике, задания по темам программы, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся), информационно-рекламные материалы (газеты МФТИ «За науку», проспекты МФТИ и его факультетов с правилами приема и т.п.). Работы учащихся проверяют и оценивают руководители кружков и факультативов, а в ЗФТШ ими высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию.

Телефон для справок: 485-17-66.

— Очное обучение в вечерних консультационных пунктах (ВКП)

Для учащихся Москвы и Московской области по программе ЗФТШ работают вечерние консультационные пункты, набор в которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам собеседования по физике и математике, которое проводится в мае и сентябре.

Справки по телефону: 485-17-66.

Программы ЗФТШ при МФТИ являются дополнительными образовательными программами и едины для всех форм обучения. Кроме занятий по этим программам, ученикам ЗФТШ предлагается участвовать в пробных вступительных экзаменах в МФТИ, которые проводятся в марте и июле, в очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультетов.

По окончании учебного года успешно выполнившие программу ЗФТШ переводятся в следующий класс, а выпускники получают Свидетельство об окончании с итоговыми оценками по физике и математике.

Вне конкурса в ЗФТШ принимаются участники областных, краевых, республиканских, зональных и Всероссийских олимпиад по физике и математике.

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу сделайте на русском языке и аккуратно перепишите в одну школьную тетрадь. Порядок задач сохраняйте тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. На лицевую сторону обложки наклейте лист бумаги, четко заполненный по приведенному здесь образцу. Внизу под заполненной анкетой начертите таблицу для оценок за вступительное задание.

1. Область (край или республика)	*Смоленская обл.*
2. Фамилия, имя, отчество	*Ящерицын Алексей Михайлович*
3. Класс, в котором учитесь	*10*
4. Номер школы	*17*
5. Вид школы (обычная, лицей, гимназия, с углубленным изучением предмета и т.п.)	*гимназия*
6. Подробный домашний адрес (с указанием индекса и телефона)	*215100, г. Вязьма Смоленской обл., ул. Биржевая, д.37, кв.6, тел. 5-92-58*
7. Место работы и должность родителей	
отец	*завод, электромонтажник*
мать	*ЦРБ, медсестра*
8. Адрес школы и телефон	*215110, г. Вязьма Смоленской обл., ул. Межбанковская, 19, тел. 5-28-34*
9. Фамилия, имя, отчество преподавателей	
по физике	*Федотов Владимир Николаевич*
по математике	*Захарова Надежда Юрьевна*
10. Каким образом к Вам попало это объявление?	

№								
Ф.								
М.								
Л.№								

Внимание! Для получения ответа на вступительное задание обязательно вложите в тетрадь конверт с наклеенной маркой по почтовому тарифу. На конверте напишите свой домашний адрес.

Срок отправления вступительного задания — *15 марта 1996 года*. Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1996 года.

Тетрадь с выполненным заданием (по физике и математике) высылайте по адресу: *141700, г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, ЗФТШ.*

Для учащихся Украины работает Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Желающим поступить следует высылать работы по адресу: *252680, г. Киев, пр. Вернадского, д.36, Институт металлофизики, Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Телефон: 444-95-24.*

Ниже приводится вступительное задание ЗФТШ (по физике и математике). В задании по физике задачи 1 – 5 предназначены для учащихся седьмых классов, 6 – 11 – для восьмых классов, 9 – 14 – для девятых классов, 13 – 18 – для десятых классов. В задании по математике задачи 1 – 5 предназначены для учащихся седьмых классов, 3 – 8 – для восьмых классов, 5 – 11 – для девятых классов, 8 – 14 – для десятых классов. Номера классов указаны для текущего 1995/96 учебного года.

Вступительное задание ЗФТШ

Физика

1. Автомобиль проехал от пункта A до пункта B со скоростью $v_1 = 60$ км/ч, а обратно – со скоростью $v_2 = 40$ км/ч. Какова средняя скорость на всем пути?

2. Переход из порта A в порт B длится ровно 12 суток. Каждый полдень из A в B и из B в A отходит по одному пароходу. Сколько пароходов встретит в открытом море каждый из этих пароходов?

3. В открытый цилиндрический сосуд налиты ртуть и вода в равных по массе количествах. Общая высота двух слоев жидкостей $H = 29{,}2$ см. Определите давление на дно сосуда. Плотность ртути $\rho_{рт} = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3.

4. Плотность морской воды на 3% больше плотности речной. Чтобы пароход при переходе из моря в реку не изменил своей осадки, с него сняли 90 тонн груза. Определите вес парохода вместе с оставшимся на нем грузом.

5. На пробку массой $m_{пр}$ намотана проволока из алюминия. Плотность пробки $\rho_{пр} = 0{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3, алюминия $\rho_{ал} = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3, воды $\rho_в = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3. Определите, какую наименьшую массу алюминиевой проволоки надо намотать на пробку, чтобы она вместе с проволокой полностью погрузилась в воду.

6. Полый медный шар, наружный объем которого $V = 200$ см^3, плавает в воде так, что половина его погружена в воду. Найдите объем полости шара. Плотность меди $\rho_м = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

7. К шару массой $M = 10$ кг и диаметром $D = 0{,}3$ м (объем такого шара $V = 0{,}0141$ м^3) прикреплена одним концом железная цепь, другой конец которой свободен. Длина цепи $L = 3$ м, масса $m = 9$ кг. Шар с цепью находится в водоеме глубиной $H = 3$ м. Определите глубину, на которой будет плавать шар. Плотность железа $\rho_ж = 7{,}85 \cdot 10^3$ кг/м^3.

8. В сосуде с водой плавает кусок льда объемом $V_л$, внутри которого находится кусок свинца объемом $V_с$. Как изменится уровень воды в сосуде, когда лед растает? Плотность воды $\rho_в = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3, льда $\rho_л = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, свинца $\rho_с = 11{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3.

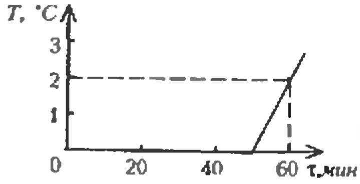


Рис. 1

9. В ведре находится смесь воды со льдом общей массой $M = 10$ кг. Ведро внесли в комнату и сразу же начали измерять температуру смеси. Получившаяся зависимость температуры от времени $T(\tau)$ изображена на рисунке 1. Удельная теплоемкость воды $c_в = 4200$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 340$ кДж/кг. Определите массу льда в ведре, когда его внесли в комнату. Теплоемкостью ведра пренебречь.

10. В термосе находятся равные массы воды и льда при температуре 0 °С. В термос вливают воду, масса которой равна суммарной массе воды и льда, первоначально находившихся в термосе, а температура составляет 49,9 °С. Какая температура установится в термосе?

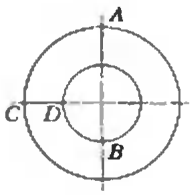


Рис. 2

Удельная теплоемкость воды $c_в = 4200$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 340$ кДж/кг.

11. Из металлической проволоки постоянного сечения сделана фигура, показанная на рисунке 2: два кольца радиусами r и $2r$ соединены отрезком проволоки длиной r в точках C и D. Определите сопротивление этой проволочной фигуры между точками A и B. Единица длины проволоки имеет сопротивление R_0.

12. Лента транспортера движется со скоростью u. На ленту влетает шайба,

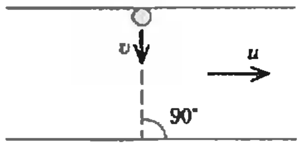


Рис. 3

начальная скорость которой равна v и перпендикулярна границе ленты (рис. 3). Найдите минимальную ширину ленты, при которой шайба достигнет другой стороны. Коэффициент трения между шайбой и лентой μ, лента горизонтальна.

13. Тело массой $M = 1$ кг лежит на горизонтальной шероховатой плоскости. Коэффициент трения $\mu = 0{,}2$. К телу приложена направленная горизонтально сила, величина F которой линейно во времени меняется от 0 до 4Н за время $t = 100$ с. Как меняются при этом сила трения и ускорение тела? Представьте на графике зависимости их от внешней силы F. Чему равна скорость тела в момент, когда внешняя сила достигает своего максимального значения?

14. На конце доски длиной L и массой M находится маленький брусок массой m (рис. 4). Доска может скользить без трения по горизонтальной плоскости.

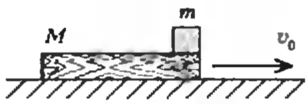


Рис. 4

Коэффициент трения скольжения бруска о поверхность доски μ. Какую горизонтальную скорость v_0 нужно сообщить доске, чтобы она выскользнула из-под бруска?

15. Посередине горизонтальной цилиндрической трубки, закрытой с торцов, находится поршень. Слева и справа от него под давлением p находится пар, конденсирующийся при давлении $2p$. Трубку ставят вертикально, при этом объем под поршнем уменьшается в четыре раза. Найдите вес поршня, если его площадь S. Трением пренебречь. Температуры в обоих отсеках одинаковы и постоянны.

16. В вертикальном цилиндрическом сосуде, площадь сечения которого S, под поршнем массой M находится идеальный одноатомный газ, разделенный перегородкой на два одинаковых объема. Давление газа в нижней части сосуда p, внешнее давление p_0, температура газа в обеих частях сосуда T. На сколько сместится поршень, если убрать перегородку? Высота каждой части сосуда H. Стенки сосуда и поршень не проводят тепло. Трением пренебречь.

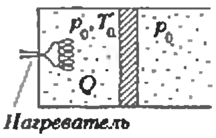


Рис. 5

17. В горизонтальном неподвижном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем, площадь сечения которого S, находится один моль газа при температуре T_0 и давлении p_0 (рис. 5). Внешнее давление постоянно и равно p_0. Газ нагревают внешним источником тепла. Поршень начинает двигаться, причем сила трения скольжения равна F. Найдите зависимость температуры газа от получаемого им от внешнего источника количества теплоты Q, если газ получает еще и половину количества теплоты, выделяющегося при трении поршня о стенки сосуда.

18. Точечный заряд q находится между двумя заземленными проводящими сферами с радиусами R_1 и R_2 на расстоянии R от их центра ($R_1 < R < R_2$). Найдите индуцированные на сферах заряды.

Математика

1. На столе стоят три одинаковых ящика. В одном из них лежат два черных шара, во втором — два белых, в третьем — черный и белый. На ящиках сделаны надписи: «Два белых», «Два черных», «Черный и белый». Известно, что ни одна из надписей не соответствует действительности. Как, вынув только один шар, определить, где лежат какие шары?

2. В треугольнике ABC проведена медиана AK. Найдите величину угла A, если известно, что $AK = BK$.

3. Имеются 26 монет, среди которых одна фальшивая — более легкая. С помощью трех взвешиваний на чашечных весах без гирь определите, какая из монет фальшивая.

4. Постройте треугольник ABC по длинам стороны AB, высоты AH и медианы AM. Сколько решений имеет задача?

5. Найдите наименьшее натуральное число, которое начинается с четырех и при вычеркивании этой цифры уменьшается в 17 раз.

6. «Кошки и мышки» (задача Л. Кэрролла). Шесть кошек съедают шесть мышек за шесть минут. Сколько кошек могут съесть 100 мышек не более чем за 50 минут? (Каждая кошка сама съедает доставшуюся ей мышку, не делясь с другими.)

7. В 1996 году со дня основания ЗФТШ исполняется a лет, а со дня рождения ее основателя — b лет. Корнями уравнения

$$x^2 + ax + b = 0$$

являются числа x_1 и x_2 такие, что x_1 больше x_2 на $4\sqrt{33}$, а x_2^2 больше x_1^2 на $120\sqrt{33}$. Сколько лет исполняется ЗФТШ и ее основателю в 1996 году?

8. Три окружности с центрами A, B, C и радиусами R_1, R_2, R_3 соответственно касаются друг друга и прямой l так, как показано на рисунке 6. Найдите R_3, если $R_1 = 1$, $R_2 = 4$.

9. Решите уравнение

$$\sqrt{a - \sqrt{a^2 + x}} = x$$

при всевозможных значениях параметра a.

10. Из медиан треугольника ABC составлен треугольник $A_1B_1C_1$, а из медиан $A_1B_1C_1$ составлен треугольник $A_2B_2C_2$.

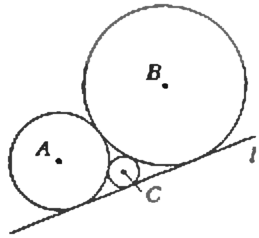


Рис. 6

Докажите, что треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны, и найдите коэффициент подобия.

11. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{8}{3}, \\ \dfrac{yz}{y+z} = \dfrac{12}{5}, \\ \dfrac{zx}{z+x} = \dfrac{24}{7}. \end{cases}$$

12. Найдите все значения a, при которых расстояние между корнями уравнения

$$x^2 + \left(2a^2 + 6\right)x + 14a^2 - 9 = 0$$

является наименьшим.

13. Решите неравенство

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} 3x + \operatorname{ctg} 4x \le 0 \quad (0 \le x \le \pi).$$

14. Через центр тяжести основания правильной треугольной пирамиды проведена плоскость, параллельная двум скрещивающимся ребрам пирамиды. Вычислите площадь образовавшегося сечения, если сторона основания пирамиды равна a, а боковое ребро — $2a$.

НОВЫЙ ПРИЕМ В СУНЦ МГУ И ДРУГИЕ ФМШ ПРИ УНИВЕРСИТЕТАХ

Специализированный учебно-научный центр (сокращенно — СУНЦ) при МГУ (школа им. академика А.Н.Колмогорова), СУНЦ НГУ, СУНЦ УрГУ и Академическая гимназия при СПГУ объявляют набор школьников в 10 (двухгодичное обучение) и 11 (одногодичное обучение) классы.

Профили обучения: физико-математический, компьютерно-информационный, химический, экономический; кроме того, в СУНЦ МГУ — биофизический.

Зачисление в школу производится на конкурсной основе по итогам нескольких туров. Первый тур — заочный письменный экзамен по математике, физике, химии. Успешно выдержавшие письменный экзамен по решению приемной комиссии в апреле – мае приглашаются в областные центры Российской Федерации на устные экзамены.

Ниже приведены условия заочного вступительного экзамена.

Работа должна быть выполнена в обычной ученической тетради (на титульном листе укажите желаемый профиль обучения).

На первой странице укажите свои анкетные данные:

1. Фамилия, имя, отчество (полностью).
2. Домашний адрес (подробный), индекс.
3. Подробное название школы, класс.

Работы отправляйте простыми бандеролями (обязательно вложите в работу конверт с маркой, заполненный на свой домашний адрес).

Высылайте Вашу работу по одному из следующих адресов:

121357 Москва, Кременчугская ул., 11, СУНЦ МГУ, Приемная комиссия, заочный экзамен.

(Телефон для справок 445-11-08.)

Внимание: жители Москвы принимаются в учебный центр без предоставления общежития.

199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9б, Академическая гимназия.

620137 Екатеринбург, ул. Голощекина, 30, СУНЦ УрГУ.

630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, Учебно-научный центр НГУ, Олимпиадный комитет.

Срок отправки работ — не позднее 20 марта 1996 года (по почтовому штемпелю). Работы, высланные позже этого срока, рассматриваться не будут.

Если Вы не сможете решить все задачи, не отчаивайтесь — комиссия рассмотрит работы с любым числом решенных задач.

Желаем успеха!

Основное задание

9 класс

Математика

1. Найдите $\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{xz}+\frac{z^2}{xy}$, если $x+y+z=0$.

2. Угол между диагоналями трапеции равен 120°, одна из ее диагоналей равна 4 см, а высота равна 2 см. Найдите длину второй диагонали.

3. Решите неравенство

$$[1995;n]\le(1995;n)^2,$$

где (;) и [;] обозначают соответственно наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел, n — натуральное число.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x^3+y^3=z,\\ x^3+z^3=y,\\ y^3+z^3=x.\end{cases}$$

5. Может ли сумма 1995 последовательных чисел быть 1995-й степенью натурального числа?

Физика

1. Начальная скорость автомобиля равна нулю. Первую половину пути он движется с постоянным ускорением, а вторую — с постоянной скоростью $v_0=18$ м/с, которой автомобиль достиг в конце первого участка. Найдите среднюю величину скорости автомобиля.

2. Плитку, на которую действует сила тяжести $P=5$ Н, прижимают к стене силой, равной $F=12$ Н и направленной горизонтально. Коэффициент трения скольжения плитки по стене $\mu=0{,}5$. Найдите силу, действующую на плитку со стороны стены.

3. Шарик, подвешенный к нити, качается в вертикальной плоскости. Величина ускорения шарика в положении наибольшего отклонения нити от вертикали в два раза меньше величины ускорения в момент прохождения положения равновесия. Найдите угол наибольшего отклонения нити.

4. В цилиндрическом сосуде плавает плитка пенопласта, на которой лежит кубик. Когда кубик сняли, уровень воды понизился на $h_1=15$ см. Затем кубик опустили в воду, и уровень воды поднялся на $h_2=5$ см. Найдите плотность материала кубика.

10 класс

Математика

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}}$, если x, y, z — числа выражения 1, 2, 3, 4 и 5, причем $x\ne y$, $y\ne z$, $x\ne z$.

2. Найдите площадь трапеции, если известно, что ее диагонали перпендикулярны, высота равна 4 см, а длина одной из диагоналей равна 5 см.

3. Рассмотрим всевозможные графики функций $y=x^2+px+q$, которые пересекают оси координат в трех различных точках. Докажите, что все окружности, описанные около треугольников с вершинами в этих точках, имеют общую точку.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}(x+y+z)^3=w,\\ (x+y+w)^3=z,\\ (x+z+w)^3=y,\\ (y+z+w)^3=x.\end{cases}$$

5. Найдите какое-нибудь натуральное число, сумма цифр квадрата которого равна 1996.

Физика

1. На рисунке 1 изображен процесс, проведенный с одним молем газа. Параметры состояний газа в точках a и b — $p_1=p_0/2$, $p_2=p_0$, $V_1=V_0$, $V_2=2V_0$ — связаны соотношением $p_0V_0=\nu RT_0$, где $\nu=1$ моль. Найдите максимальное значение температуры в этом процессе.

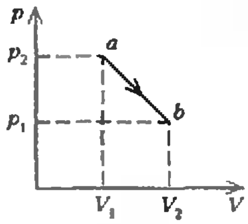


Рис. 1

2. Заряд равномерно распределен по окружности радиусом R, расположенной в плоскости XY с центром в начале координат. Потенциал поля в начале координат равен φ_0. Найдите работу, которую необходимо совершить, чтобы переместить заряд q из начала координат в точку с координатами $x=y=0$, $z=R$.

3. В схеме на рисунке 2 емкости конденсаторов одинаковы, а ЭДС батарей равны $\mathcal{E}_1=6$В и $\mathcal{E}_2=3$В. Найдите разность потенциалов точек m и n.

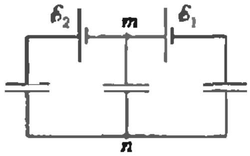


Рис. 2

4. Рамка в форме квадрата $ABCD$, изготовленная из однородного провода, лежит на горизонтальной плоскости. Длина стороны $a=10$ см. К точкам A и C присоединяют провода, по которым проходит ток силой $I=1$А от точки C к точке A. Плоскость с рамкой помещают в однородное постоянное магнитное поле с индукцией, равной $B=10^{-2}$ Тл. Вектор магнитной индукции параллелен направленному отрезку DB. Найдите приращение силы нормального давления рамки на стол.

Дополнительные задачи по химии для поступающих на химическое отделение СУНЦ МГУ

1. В четыре стакана, содержащие по 100 мл дистиллированной воды каждый, поместили: в стакан № 1 — 1,0 г каустической соды; в стакан № 2 — 1,0 г кальцинированной соды; в стакан № 3 — 1,0 г питьевой соды; в стакан № 4 — 1,0 г кристаллической соды.

1) Напишите химические формулы всех «сод».

2) Определите массовую долю растворенного вещества (%) в каждом из стаканов.

3) Все стаканы с растворами выдержали при 20 °С в атмосфере углекислого газа до окончания реакций. Определите массовые доли растворенного вещества (%) в каждом из стаканов после выдерживания в углекислом газе. Напишите уравнения реакций.

2. Смесь водорода с хлором объемом 2,240 л (н.у.) взорвали. Продукты взрыва после пропускания через 10 мл воды (н.у.) имеют объем 1,120 л.

1) Определите содержание хлора (в % по объему) в исходной смеси.

2) Сколько граммов металлического лития может прореагировать с газообразными продуктами взрыва, оставшимися после пропускания через воду? Какова масса полученного при этом соединения лития? Запишите уравнения реакций.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

Задачи

1. Одно из возможных решений изображено на рисунке 1.

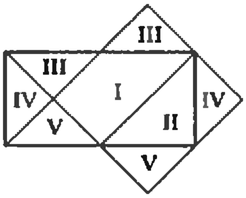


Рис. 1

2. 7926,5 + 7926,5 = 15853.

3. Покажем, что составить такой набор невозможно. Пусть x — количество пятирублевых монет, y — количество двадцатирублевых монет, тогда $20 - x - y$ будет количеством пятидесятирублевых монет.
По условию, $5x + 20y + 50(20 - x - y) = 500$, откуда получаем $45x + 30y = 500$. Но левая часть равенства делится на 3, а правая — нет, следовательно, не существует целых чисел x и y, удовлетворяющих этому уравнению.

4. Представим наш квадрат 3×3 как часть шахматной доски, причем центральный квадрат и 4 угловых квадрата белые, а остальные 4 квадрата черные. Так как соседние буквы в слове МОРОЖЕНОЕ должны стоять в соседних клетках, то пять букв этого слова, стоящие на нечетных местах (согласные), будут стоять на белых клетках, а остальные — гласные буквы — на черных. Теперь нетрудно убедиться, что либо строка, либо столбец, содержащий букву Е, не содержит буквы О.

5. Рассмотрим все двузначные числа, которые делятся на 13: 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91. Значит, номера Вани Суеверова не могут начинаться на 1, 2, 3, 5, 6, 7 и 9, а кончаться на 3, 6, 9, 2, 5, 8 и 1. Таким образом, эти числа могут начинаться лишь с 4 и 8, а кончаться только на 0, 4 или 7. Имеется шесть таких чисел: 40, 44, 47, 80, 84 и 87.

Задачи

(см. «Квант» №5)

1. Это цифра 7. Заметим, что из каждых последовательных десяти чисел остаются числа, оканчивающиеся на 1, 3, 7 и 9. Их произведение оканчивается на 9, произведение их со следующими четырьмя числами будет оканчиваться на 1, так как $9 \times 9 = 81$. Остаток от деления числа 1995 на 20 равен 15, поэтому осталось найти последнюю цифру в произведении $1981 \cdot 1983 \cdot 1987 \cdot 1989 \cdot 1991 \cdot 1993$, которая равна 7.

2. Пузырьки выходящего газа обволакивают таблетку. Их слой практически не меняется в течение растворения. Поскольку растворение таблетки происходит равномерно по ее поверхности, то ее диаметр уменьшается незначительно, а толщина очень сильно (имеется в виду относительное уменьшение), поэтому поверхность таблетки мало изменяется, а масса быстро уменьшается и слой пузырьков газа поднимает таблетку на поверхность.

3. На острове 30 лжецов. Заметим, что лжецы на эти вопросы дважды отвечали «да», а остальные говорили «да» только один раз. Так как всего было 130 раз сказано «да», а жителей 100, то два раза сказали «да» 30 человек.

4. См. рисунок 2.

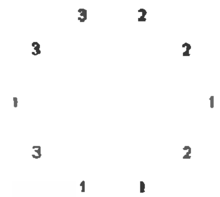


Рис. 2

5. Так как близнецами могут быть лишь мать и ее брат или сын и дочь, то победитель и лицо, занявшее последнее место, — лица одинакового пола. Кроме того, известно, что они имеют и одинаковый возраст. Следовательно, это не могут быть мать и дочь, и значит, это брат и сын. Занявший последнее место имеет близнеца. Если это брат, то его близнецом будет мать, но тогда мать и ее сын — лица одинакового возраста, что невозможно. Итак, первое место занял брат, а последнее место сын, его близнецом является дочь и противоречия не возникает.

Рациональные корни многочлена

1. а) $x = (-2 \pm \sqrt{4-2a})/(2a)$ при $0 < a \le 2$; $x = -1/4$ при $a = 0$; при остальных a решений нет.

б) $x = 2(a+1)$, $x = (2a + 1 \pm \sqrt{4a^2 - 4a + 9})$.

в) $x = p - 1$; $x = \frac{1}{2}(1 - p \pm \sqrt{(p-1)(p-5)})/(p-1)$ при $x \in (1;5)$.

г) $x = a - 1$; $x = \frac{1}{2}(a + \sqrt{(a+1)^2 - 8})$ при $|a+1| \ge 2\sqrt{2}$.

Как же доказать это неравенство?

1. Верно. Равенство имеет место лишь если $x = y = z$.

2. $a + b + c < 0$, причем среди чисел a, b, c хотя бы два различных.

НАПЕЧАТАНО В 1995 ГОДУ

В 1995 году вышли следующие ПРИЛОЖЕНИЯ К ЖУРНАЛУ «КВАНТ»:

№ 1 — Школа в «Кванте». *Геометрия*
№ 2 — Практикум абитуриента. *Молекулярная физика, оптика, квантовая физика*
№ 3 — Практикум абитуриента. *Алгебра и тригонометрия*
№ 4 — Школа в «Кванте». *Физика 9 – 11. Выпуск 1*
№ 5 — Школа в «Кванте». *Физика 9 – 11. Выпуск 2*
№ 6 — Московские математические олимпиады 60 лет спустя

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
К.И.Кобзев, Л.А.Тишков, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
М.Н.Грицук, Е.А.Митченко, Е.В.Титова

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ
Л.А.Панюшкина

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ
Е.В.Самойлова

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ № 1509

Матч-реванш Каспаров — «Гениус»

В статье «Гений ли «Гениус»?» («Квант» № 2, 1995) мы уже рассказывали о сенсационной победе программы «Pentium Genius» над Гарри Каспаровым. Это случилось в прошлом году в Лондоне на международном турнире по быстрым шахматам.

После лондонского турнира многие супергроссмейстеры, и прежде всего сам Каспаров, «запретили» компьютерам вмешиваться в их дела, чтобы те не создавали дискомфорт людям. Разумеется, шахматисты не отказались от сражения с роботами вообще (да и куда от них денешься?!), но сочли, что лучше встречаться с ними «наедине», поскольку игра с электронными коллегами требует другого настроения, особой психологической и шахматной подготовки.

И вот спустя чуть меньше года, 25 мая, в Кельне — на тех же условиях, что и в Лондоне — состоялся матч-реванш между Гарри Каспаровым и его недавним обидчиком, программой «Пентиум Гениус». Напомним, что название этого «компьютерного чуда» означает, что для игры используется самый современный микропроцессор «Пентиум» (американской фирмы «Интел») и программа «Гениус» (разработчик — английский гроссмейстер программирования Ричард Лэнг). Кстати, в Кельне, по сравнению с Лондоном, применялся усиленный «Пентиум», его быстродействие увеличилось за эти месяцы в 1,33 раза — около 200 миллионов операций в секунду, что эквивалентно анализу примерно 100 тысяч позиций в ту же секунду. Усовершенствована была также и сама программа.

Надо сказать, что Каспаров отнесся к матч-реваншу с большой ответственностью, почти как к другому матчу — с Вишванатаном Анандом (это сражение за шахматную корону, как известно, состоялось осенью нынешнего года). Предварительно Каспаров сыграл несколько тренировочных партий с роботом и, кажется, остался доволен результатом. Но разминка эта протекала в домашних условиях, а тут, в телестудии, пришлось творить при большом стечении знатоков, которые, возможно, ждали новой сенсации. И она чуть не произошла...

В первой партии, играя белыми, чемпион мира, видимо, излишне нервничал и уже в дебюте допустил серьезную ошибку, после чего попал в весьма трудное положение. Электронный соперник мог перейти в выигранный эндшпиль, но сыграл слишком академично, взял не ту пешку, и у человека появились контршансы. Затем «Гениус» недооценил маневр Каспарова ферзем, попал под смертельную связку и сам оказался в безнадежной ситуации. Каспаров действовал безупречно, и через пятнадцать ходов сопротивление робота было сломлено.

Вторая партия протекала довольно скучно. Машина играла без риска, но и Каспаров не сжигал мосты — спортивная цель была достигнута и в этом не было необходимости. Итак, на сей раз электронный соперник оказался поверженным, и реванш, причем с тем же счетом — 1,5:0,5, состоялся.

Вот первая, решающая партия этого матча-реванша.

Г.Каспаров — «Пентиум Гениус»
Славянская защита

1. c4 c6 2.d4 d5 3. Kf3 Kf6 4.Kc3 a6. Чаще играют здесь 4...dc 5. a4 Cf5 и т.д. Цель хода a7 – a6 — перед разменом на c4 подготовить маневр b7 – b5.

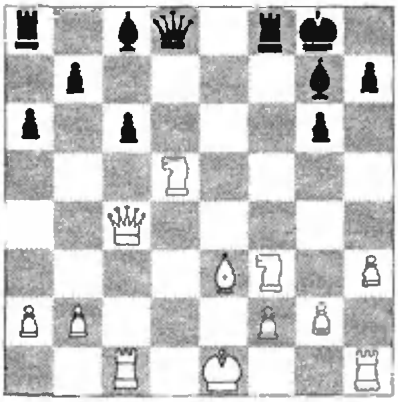
5. c5. Пункт b6 ослаблен, и реакция белых вполне естественна. Впрочем, хорошо и простое 5.e3.

5...g6 6. Cf4 Cg7 7. e3 0-0 8.Cd3 Kbd7. Эта позиция известна в теории. Помимо подрыва b7 – b6 у черных есть план с контригрой в центре e7 – e5. Однако способ его проведения в данной партии является новым — так сказать, дебютный сюрприз машины!

9. h3 Ke8 10. Лc1. По-видимому, лучше было сразу рокировать. Ладья на c1 белым не пригодится, а потеря времени ведет к некоторым проблемам для них.

10... f6 11. e4 e5 12. de K:c5 13. ed fe 14. Ce3 K:d3+ 15. Ф:d3 e4!? Остроумная решимка, позволяющая черным с темпом подтянуть коня.

16. Ф:e4 Kf6 17. Фc4 K:d5 18. K:d5? Понятно желание белых получить позицию с изолированной пешкой «d» у противника. Для этой цели возможно было 18. Kd4, отнимая поле e6 у слона, и на 18... Kph8 уже 19. K:d5. Впрочем, и здесь после 18...C:d4 черные получали хорошую игру.



18... Ce6! Блестящий промежуточный ход. «Гениус» избегает появления у себя «изолятора», более того, белопольный слон попадает в самый центр и производит весьма выгодный размен.

19. 0-0 C:d5 20. Фg4 C:f3 21. gf Фd5! Выигрывая пешку, за которую у белых не будет никакой компенсации.

22. Лcd1 Ф:a2? Какую из двух пешек следовало взять черному ферзю? Из общих соображений лучше, конечно, прихватить полноценную пешку «a», чем сдвоенную «f». Однако это как раз та ситуация, когда стандартный подход несколько подводит... Дело в том, что после 22... Ф:f3 белые практически вынуждены разменять ферзей, переходя в совершенно бесперспективный эндшпиль. Теперь же они активизируют свои силы.

23. Лd7 Лf7 24. Лfd1 Фb3. Надо сказать, что и после размена ладей — 24...Л:d7 25. Л:d7 взятие пешки «b» ничего не дает черным — 25... Ф: b2 26. Фe6+ Kph8 27. Л: g7! Kp:g7 (27... Ф:g7 даже проигрывает из-за 28. Cf4, и нет защиты от появления слона на e5) 28. Фe7+ Kpg8 29. Фe6+, и дело кончается вечным шахом. Возможно было 24...Лe8, но в любом случае белая ладья на седьмой горизонтали вполне компенсирует утраченную пешку.

25. Л1d3 Ф:b2? И все-таки черный ферзь не удерживается от того, чтобы взять отравленную пешку. Теперь выигрыш белых достаточно прост, и трудно объяснить затмение, нашедшее на знаменитого робота. Конечно, ему следовало признать свою ошибку и вернуться ферзем на a2. В этом случае мирный исход партии был бы наиболее вероятен.

26. Фc4! Теперь не проходит 26. Л:f7 из-за Фb1+ и 27... Ф:d3. Но черным от этого не легче...

26... Лf8 27. Л:f7. Возможно, машина рассчитывала откупиться качеством — 27. Cc5 b5! 28. Фe6 Фf6 29. Ф:f6 Л:f6 30. C:f8 C:f8, и пешечная масса черных на ферзевом фланге, скорее всего, решает партию в их пользу.

27...Л:f7 28. Лd8+ Cf8 29. Ch6! Теперь черные фигуры связаны по рукам и ногам, не может шелохнуться не только ладья, но и слон. Потеря ферзя неминуема.

29...Фa3 30. Фe6! При немедленном 30. Л:f8+ Ф:f8 31. C:f8 Kp:f8 черные еще могли надеяться соорудить неприступную крепость. Прежде чем взять ферзя, белые образуют проходную пешку.

30...Фc5 31. h4 Фb4 32. f4 Фb1+ 33. Kph2 Фb4 34. Kpg2 Фc5 35. h5 gh 36. f5 Фb4 37. Л:f8+ Ф:f8 38. C:f8 Kp:f8 39. f6. Черные сдались.

Е.Гик

Индекс 70465

Уважаемые читатели журнала

КВАНТ

Адрес редакции журнала изменился!

Наш новый адрес:

117296, Москва, Ленинский пр., 64а
тел. 930-~~58-46~~
56-48

В помещении редакции можно приобрести вышедшие журналы «Квант» и приложения к ним. Мы по-прежнему ждем Вас ежедневно с понедельника по пятницу с 11 до 16 часов.

Звоните и приходите!
Мы Вас ждем!

Бюро Квантум