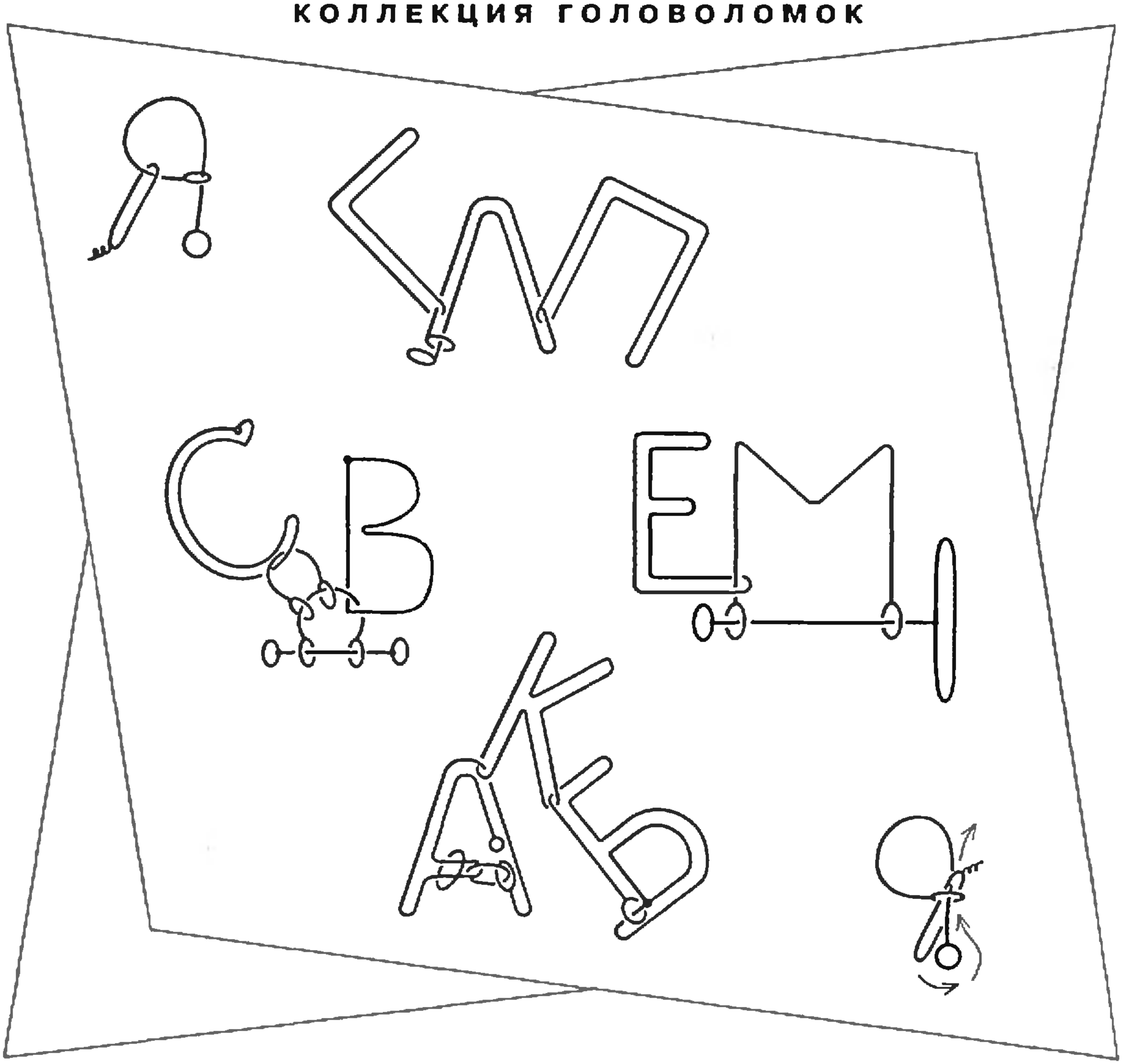
ISSN 0130-2221

МАЙ/ИЮНЬ 1995 · №3

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



ГОЛОВОЛОМКИ ИЗ БУКВ ВАШЕГО ИМЕНИ

Все буквы, показанные на рисунках, сделаны из проволоки. Но сделаны они так, что могут быть превращены в головоломки. Несмотря на внешние отличия, большинство подобных проволочных головоломок из букв основаны на одном принципе. Он называется «принцип проволочной петли». Рассмотрим его на простейшем примере — букве «Я». На первый взгляд кажется, что отцепить челнок от «Я» и превратить букву «Я» в «Р» (или «Ь») совершенно невоз-
-жно. Но взглянув в нижний правый угол рисунка, вы наверняка удивитесь, как легко это де-
-я. Поняв секрет головоломки из последней буквы алфавита, попробуйте сделать из про-
-чальные буквы ваших собственных имени и фамилии, а затем превратить их в голо-
-ственного изобретения. Примеры проволочных головоломок из букв показаны на
-оломку «АКБ» прислал в редакцию Александр Башкиров из Чехова Московской
-о всех головоломках одна и таже — научиться расцеплять и сцеплять прово-

-оволомок подойдет медная или стальная проволока диаметром 0,5 —
-чень жесткая или упругая стальная проволока, раскалите ее до-
-чно остудите и зачистите до блеска наждачной бумагой или по-

-лайте в редакцию.

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

МАЙ/ИЮНЬ · 1995 · №3

В номере:

Глаз и небо

В.СУРДИН

У человека восемь чувств — зрение, слух, обоняние, вкус, осязание, ощущение температуры, ощущение боли и чувство положения и движения тела. Но, безусловно, самое важное и удивительное из них — зрение, доставляющее нашему мозгу более 90% информации об окружающем мире. А для астрономов зрение — это вообще единственный путь во Вселенную. Наблюдая в телескоп или без него, нужно учитывать особенности устройства глаза и работы зрения. Только так можно увидеть почти невидимое: мелкие кратеры на Луне, слабую звезду, далекую комету, бледную галактику и т.д.

Первая встреча с телескопом часто обескураживает любителя астрономии. «Я не вижу никаких деталей», — говорит начинающий наблюдатель, глядя на Марс или даже на Юпитер. А более опытный его товарищ с помощью этого же телескопа составляет подробную карту планеты. У него тренированный глаз. Он научился настраивать свое зрение на астрономические наблюдения. Вы тоже можете научиться этому, если узнаете об особенностях нашего зрения, ну и разумеется, если будете систематически наблюдать небо.

Как устроен глаз?

Устройство глаза показано на рисунке 1. На первый взгляд глаз очень напоминает фотоаппарат. Объектив глаза — роговица, радужка и хрусталик — похож на классический фотообъектив с его системой линз и диафрагмой. Причем это очень широкоугольный объектив: поле зрения наших глаз простирается почти на 180° по горизонтали и на 140° по вертикали. Конечно, качество такого простого объектива не может быть очень высоким: резкое изображение получается только в центре поля зрения, а к периферии оно заметно ухудшается.

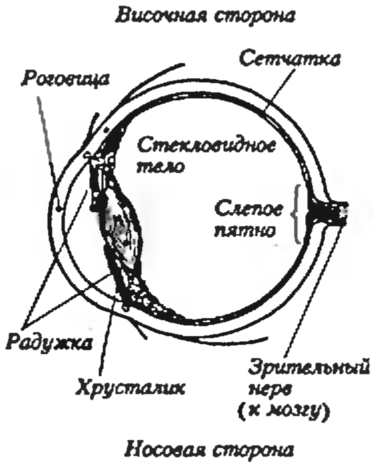


Рис. 1. Разрез глаза человека

Центральное отверстие радужки — зрачок. Он играет ту же роль, что и диафрагма у фотоаппарата: больше или меньше закрывает края линзы в объективе. Глаз может изменять диаметр зрачка в пределах от 2 до 8 мм. Таким образом он регулирует количество света, проходящего через хрусталик на светочувствительную сетчатку. Но на этом аналогия с фотокамерой заканчивается, поскольку про сетчатку уже не скажешь, что это аналог фотопленки.

Сетчатка глаза значительно ближе к светоприемнику современной видеокамеры, состоящему из множества элементарных полупроводниковых приемников света — пикселей. В сетчатке глаза их роль играют светочувствительные клетки. За свою форму одни из них названы колбочками, а другие — палочками. В сетчатке каждого глаза около 7 миллионов колбочек и 120 миллионов палочек.

Палочки работают при слабом освещении и обеспечивают вечернее и ночное зрение. Но они нечувствительны к цвету (именно поэтому нам кажется, что «ночью все кошки серые»). А колбочки могут работать только при ярком свете, т.е. днем, и при этом они чувствуют цвет изображения. Объясняется это тем, что на самом деле в сетчатке глаза присутствуют колбочки трех разных типов, расположенные вперемешку: одни чувствительны к синему, другие — к зеленому, а третьи — к красному (точнее, оранжевому) цвету. Все вместе они довольно точно передают информацию об оттенках изображения. Здесь уже легко увидеть аналогию с кинескопом цветного телевизора, в котором как бы совмещено три одноцветных кинескопа — красный, зеленый и синий.

Способности глаза

Какие самые мелкие детали может заметить глаз? Это определяется его угловой разрешающей способностью. Если мы не можем различить мелких деталей на картинке, то стараемся поднести ее поближе к глазам. Линейный размер деталей при этом не изменяется, но для глаза возрастает их угловой размер α (рис.2). Минимальный угол, под которым глаз способен различить две точки по отдельности, называют его разрешающей способностью, или, короче, разрешением. Здоровый глаз в центре своего поля зрения, т.е. там, где на сетчатке плотно расположено большое количество колбочек, имеет разрешение около 1′. Под таким углом вы видите точку в конце этого предложения, если держите журнал в вытянутых руках. При этом вы легко отличаете запятую от точки. Но отодвиньте тест втрое дальше — и вы уже не отличите их друг от друга. (,.,.,.,.,.,.,.,.)

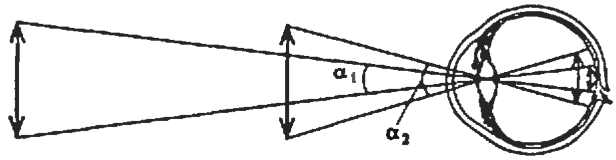


Рис.2. Угловой размер объекта и четкость его изображения зависят от расстояния

Другая важная способность глаза — различать быстрые движения и изменения картины. Ее называют временным разрешением. Например, в некоторых видеоклипах (обычно, под музыку в стиле рок) картинка меняется 5—7 раз в секунду, и глаз способен уловить сюжет всех этих изображений. Но если менять картинку 15—20 раз в секунду, то разные изображения сольются в одно, и вы ничего не различите. Это потому, что временное разрешение глаза составляет около 0,1 секунды. Благодаря этому осуществляется «эффект кино»: когда изображение меняется с частотой 24 кадра в секунду, мы не замечаем мелькания кадров, а воспринимаем это как непрерывную картину.

Заметить разницу в освещенности двух соседних поверхностей глаз может только в том случае, если она превышает 2% почти независимо от абсолютной яркости поверхностей. При этом глаз работает как дифференциальный анализатор: он сопоставляет не на сколько, а во сколько раз различаются яркости. Именно поэтому в астрономии привилось понятие «звездная величина». Разница блеска между двумя звездами на 1^m означает, что потоки света от них различаются в 2,512... раза. Опытный астроном может заметить разницу блеска двух соседних звезд на $0{,}02^m$. Это почти в точности равно тем самым 2% — пороговой чувствительности глаза.

Продолжим аналогию с электронными приборами. Как известно, любая видеокамера имеет систему автоматической регулировки усиления. Глаз — тоже. В темноте его чувствительность повышается в тысячи раз, а при ярком свете — ослабевает. Происходит это не так быстро, как у видеокамеры, поэтому, выходя на яркий свет, мы несколько секунд страдаем от рези в глазах, а попадая в темноту, некоторое время ничего не видим. Полная темновая адаптация глаза происходит примерно за полчаса. По истечении этого срока глаз приобретает максимальную чувствительность (рис.3).

Рис. 3. Величины предельно слабых звезд, доступных нашему глазу, в зависимости от времени его темновой адаптации. Пороговая чувствительность глаза практически недостижима, поскольку ночное небо не бывает абсолютно темным, а светится за счет излучения атмосферы, космической пыли и далеких звезд.

Особенности зрения

Глаз соединен с мозгом пучком нервных волокон, но их в пучке существенно меньше, чем светочувствительных клеток в сетчатке глаза. Поэтому глаз сам осуществляет предварительную обработку информации и передает в мозг простые образы. Так, в хаотически разбросанных пятнах глаз старается «угадать» контуры геометрических фигур, уже знакомых мозгу. Это его свойство иногда оказывается полезным для астрономов (фигуры созвездий запоминаются легче), а иногда вредным. Пример тому — «открытие» каналов на Марсе или «обнаружение» звездных цепочек и колец.

Нужно помнить, что восприятие зрительных образов — дело тонкое, глубоко связанное с особенностями психики человека. Зная эти особенности, можно без труда обмануть те отделы нашего мозга, которые анализируют двухмерное изображение, зафиксированное сетчаткой глаза, и восстанавливают по нему трехмерный образ исходного объекта. Специалистам известно множество зрительных иллюзий, на использовании которых основано немало цирковых фокусов. Кстати, не менее важно и обратное — умение на плоском рисунке верно передать строение трехмерного объекта. Вершиной манипулирования зрительными образами является рисование «невозможных объектов». Мастерски владел этим искусством голландский художник Мауриц Эшер.

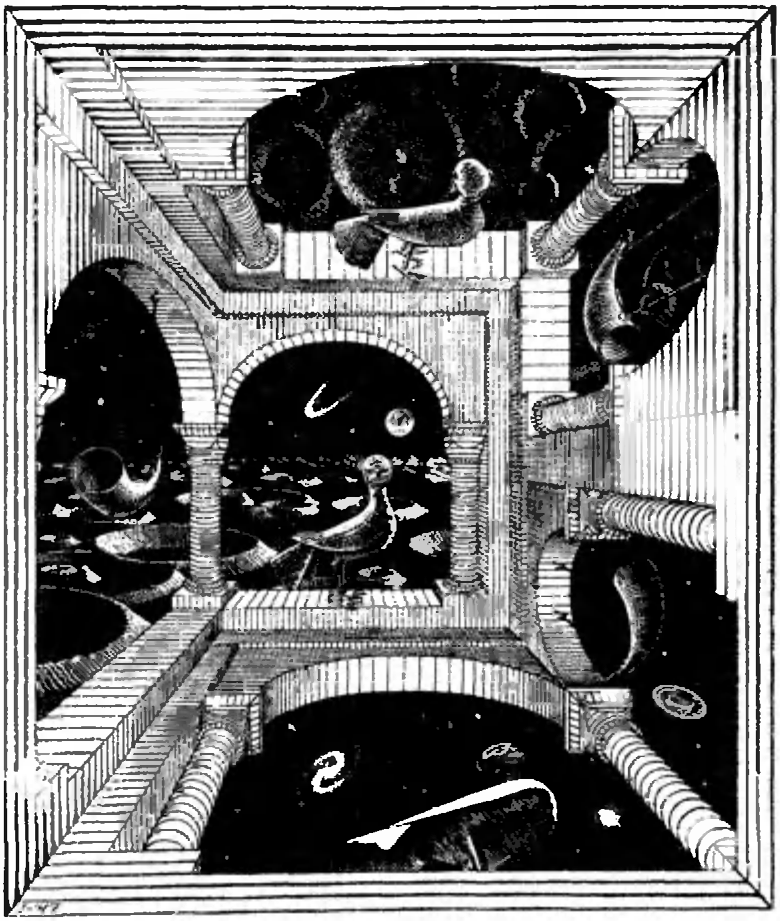


Рисунок М. Эшера

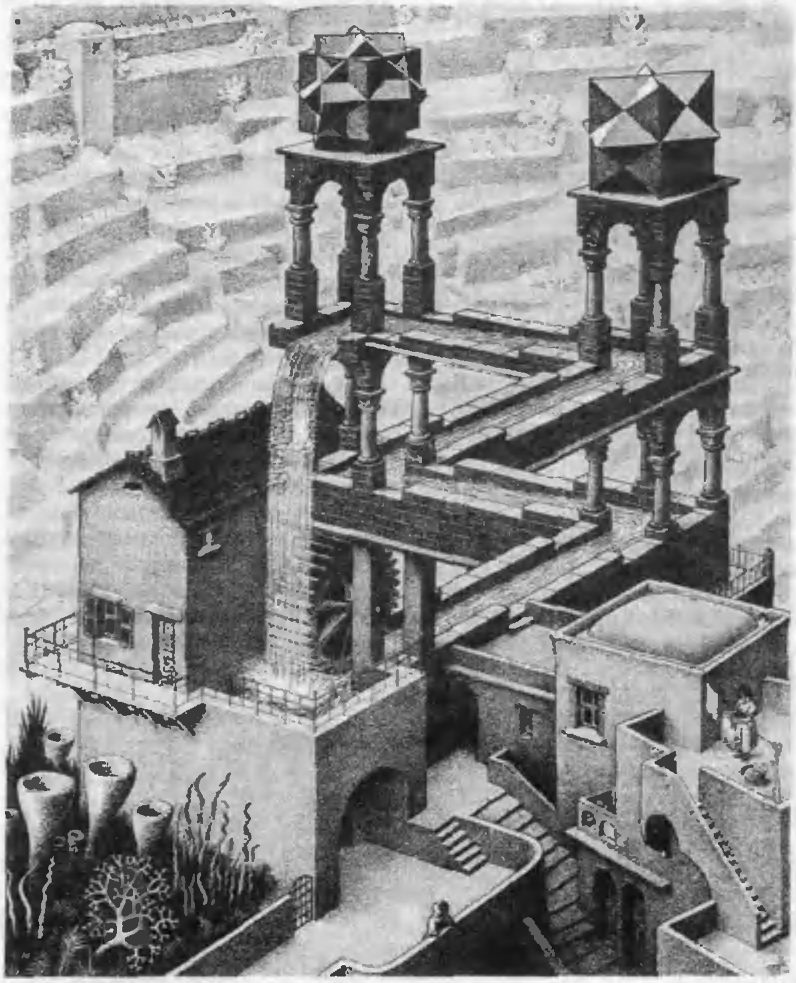


Рисунок М. Эшера

Преобразовывать двухмерное изображение в трехмерную модель ребенок учится с первых дней жизни, ощупывая руками то, что он видит. Поэтому зрение иногда называют «приобретенным умением». При переводе двухмерных образов в трехмерные наш мозг пользуется специальным «словарем» — накопленным в памяти запасом возможных моделей. Причем у каждого из нас этот словарь сугубо индивидуален, связан с конкретным жизненным опытом, с профессией. Недаром каждый по-своему дорисовывает друдлы — загадочные незавершенные картинки. А увидев нечто необычное в небе, каждый из нас по-своему додумывает детали и определяет природу увиденного. Лишь опыт астрономических наблюдений позволяет нам более или менее верно понимать увиденное на небе.

Эффект «полета» Луны

Если в лунную ночь погода выдалась облачная и ветреная, то наверняка вы заметите удивительное явление — так называемый полет Луны (рис.4). Стоит ей показаться в разрыве облаков, как она «метнется в сторону», и вы невольно вскинете голову и начнете следить за ней. Но через несколько секунд вы убедитесь, что Луна стоит на месте, а летят в действительности облака. Впрочем, если облачность плотная и разрывов в ней мало, то вы можете долго не увидеть Луну второй раз и останетесь в полной уверенности, что «нечто яркое округлой формы быстро пролетело на фоне облаков». Известны случаи, когда именно так рождались слухи об НЛО. Как же объясняется эффект «полета» Луны?

Мы уже знаем, что наш глаз передает в мозг далеко не все, что видит, а лишь самое важное. Но откуда он знает, что важно, а что нет? В процессе биологической эволюции каждый орган человека приобрел такие качества, которые помогают нам выжить. Глаз — не исключение. Он прежде всего выделяет из увиденного ту информацию, которая может относиться к потенциальным жертвам человека или к опасным для него хищникам. И то, и другое обычно связано с движением: жертва убегает, хищник нападает. Поэтому наша зрительная система прежде всего фиксирует изменение, перемещение объекта в поле зрения. Причем осуществляется это наиболее эффективным способом.

Дело в том, что между сетчаткой глаза и корой головного мозга зрительный сигнал испытывает сложные преобразования. В целом он существенно упрощается, но при этом из него выделяется жизненно важная информация, потеря которой могла бы стать гибельной для нас. В частности, сохраняется и даже значительно усиливается информация о перемещении изображения по сетчатке. И даже более того — сохраняется только информация о перемещении. Неподвижные объекты, изображение которых не смещается на сетчатке, глаз через некоторое время вообще перестает замечать. Поэтому, чтобы все же видеть неподвижную картину, глаз постоянно совершает микроскопические повороты на 2—3 минуты дуги, создавая тем самым искусственные смещения изображений на сетчатке. Именно поэтому, глядя на звезды, мы иногда замечаем их «прыжки»: в действительности это микроскопические движения глаза.

Другая важная особенность глаза состоит в том, что область четкого

Рис. 4. Проглядывающая в разрывах плывущих облаков Луна кажется быстро летящей по небу

зрения находится в центре сетчатки и имеет размер всего несколько градусов, тогда как все остальное поле нашего зрения обладает низкой разрешающей способностью.

Теперь представьте себе, что вы охотник, всматривающийся в неподвижный пейзаж в поисках жертвы. Кстати, умная жертва, почувствовав неладное, замрет, и ее станет очень сложно различить. Но, предположим, жертва вас не замечает и продолжает спокойно пастись. В принципе, у глаза есть две возможности: зафиксировать взгляд на пейзаже или на движущейся жертве. Если бы взгляд был зафиксирован на пейзаже, то раздражающим стимулом, перемещающимся по сетчатке, было бы изображение жертвы. Но сигнал от него был бы слаб, поскольку он покрывает малую часть сетчатки, а качество изображения жертвы было бы плохим, поскольку оно сразу бы вышло из области четкого зрения.

Поэтому эволюция избрала иной путь. Наш глаз фиксирует взгляд на движущейся жертве; ее изображение постоянно остается в центре сетчатки в области четкого зрения. Зато при этом перемещается по сетчатке изображение всего окружающего пейзажа, создавая мощный зрительный импульс и возбуждая внимание. Это стандартная ситуация, и мозг интерпретирует ее однозначно: небольшое зафиксированное изображение в центре поля зрения — это движущийся объект, а окружающее его обширное движущееся изображение — это неподвижный фон.

И вот перед нами картина — бегущие по ночному небу облака и появляющиеся в их разрывах Луна, яркая звезда или планета. Глаз (точнее, мозг) реагирует на эту картину привычным образом — в нашем восприятии облака стоят, а яркий объект стремительно летит. Лишь сознательно и совсем не сразу удается подавить это ощущение, «остановить» небесное светило и «сдвинуть» облака. Для тех кто любит наблюдать небесные явления, это не представляет труда.

Любопытно, что точно так же работает электронная система стабилизации изображения у портативных видеокамер. Если картинка смещается целиком, то система возвращает ее в пределы кадра, предполагая, что причина смещения — дрожание руки оператора. Но если на неподвижном фоне смещается небольшая часть изображения, то система не вмешивается, считая это реальным перемещением одного из объектов съемки. Таким образом, если направить камеру на облачное небо с Луной, то она, как и глаз, постарается «остановить облака и сдвинуть Луну».

Эффект бокового зрения

Чтобы лучше разглядеть предмет, мы смотрим на него «в упор». При этом изображение предмета попадает в центр сетчатки глаза, где плотно расположенные колбочки обеспечивают цветное и очень четкое зрение. Все, что находится за пределом центральной зоны сетчатки, видно расплывчато и без ярких цветов. Однако и боковое зрение имеет свои достоинства.

Во-первых, в центре сетчатки почти нет чувствительных к свету палочек, обеспечивающих наше ночное зрение. А колбочки далеко не так чувствительны, поскольку их спектральный диапазон ограничен определенным цветом. Но центральная область четкого зрения, заполненная колбочками, невелика — всего несколько угловых градусов. А дальше, на периферии сетчатки расположены очень чувствительные к свету (но не различающие его цвет) палочки. Поэтому боковым зрением мы видим ночью менее яркие объекты, которые не видны в упор.

Астрономы часто пользуются боковым зрением, чтобы заметить слабую звезду или туманность, которую не видно при взгляде в упор. Например,

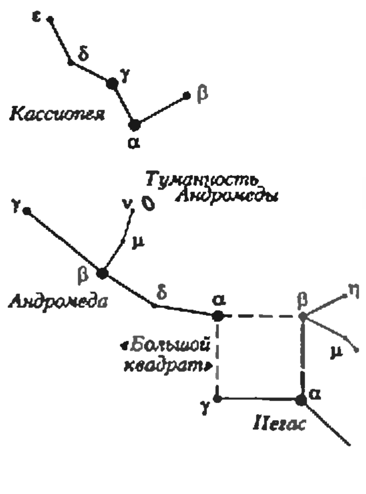


Рис. 5. Попробуйте найти на небе Туманность Андромеды, используя боковое зрение. Для этого зафиксируйте взгляд на звезде ν Андромеды или немного левее.

определив по карте неба положение Туманности Андромеды (рис. 5), вы можете не отыскать ее в указанном месте (особенно на городском небе), но стоит немного отвести взгляд от этой точки, и вы обязательно увидите там овальное пятнышко, похожее на тусклое пламя свечи, — это и есть знаменитая Туманность Андромеды, гигантская звездная система, подобная нашей Галактике. Не удивляйтесь, что ее трудно различить глазом. Удивитесь тому, что это вообще удается, ведь она в сотни раз дальше тех звезд, которые составляют знакомые вам созвездия.

Итак, боковое зрение — ценный инструмент наблюдателя. Если научитесь им пользоваться, он хорошо послужит вам. Но с теми, кому этот эффект не знаком, он может сыграть шутку: заметив на небе краем глаза светящийся объект, вы поворачиваете голову, чтобы рассмотреть его получше, а он... пропадает! Нередко так рождаются легенды об НЛО.

У бокового зрения есть и вторая особенность: оно имеет более высокое временное разрешение, чем центральное зрение. Убедиться в этом легко: взгляните на лампу дневного света сначала в упор, а затем боковым зрением. В первом случае ее свет покажется вам ровным, а во втором — дрожащим: это вы заметили колебания напряжения с частотой 50 Гц, заставляющие мигать люминесцентную лампу. Такой же опыт можно проделать и с экраном телевизора: при взгляде на него в упор вы не замечаете быстрой смены кадров, а боковым зрением без труда отмечаете их мелькание.

Вероятно, эта особенность нашего зрения выработалась еще в древности, когда вокруг человека бродило много опасных хищников, любивших нападать сбоку или сзади. Поэтому именно боковое зрение жертвы должно срабатывать быстро, без задержки сообщая мозгу о нападении. Неважно, что боковое зрение дает нечеткое изображение. Жертве все равно, какой зверь на нее бросился — тигр в полоску или леопард в пятнышках. Главное — быстрее заметить нападение и улизнуть. В наше время быстрая реакция бокового зрения тоже важна: она частенько выручает как водителей, так и пешеходов. Поэтому нужно развивать свое боковое зрение и учитывать его особенности при наблюдении различных оптических явлений — небесных и земных.

Логика и парламент

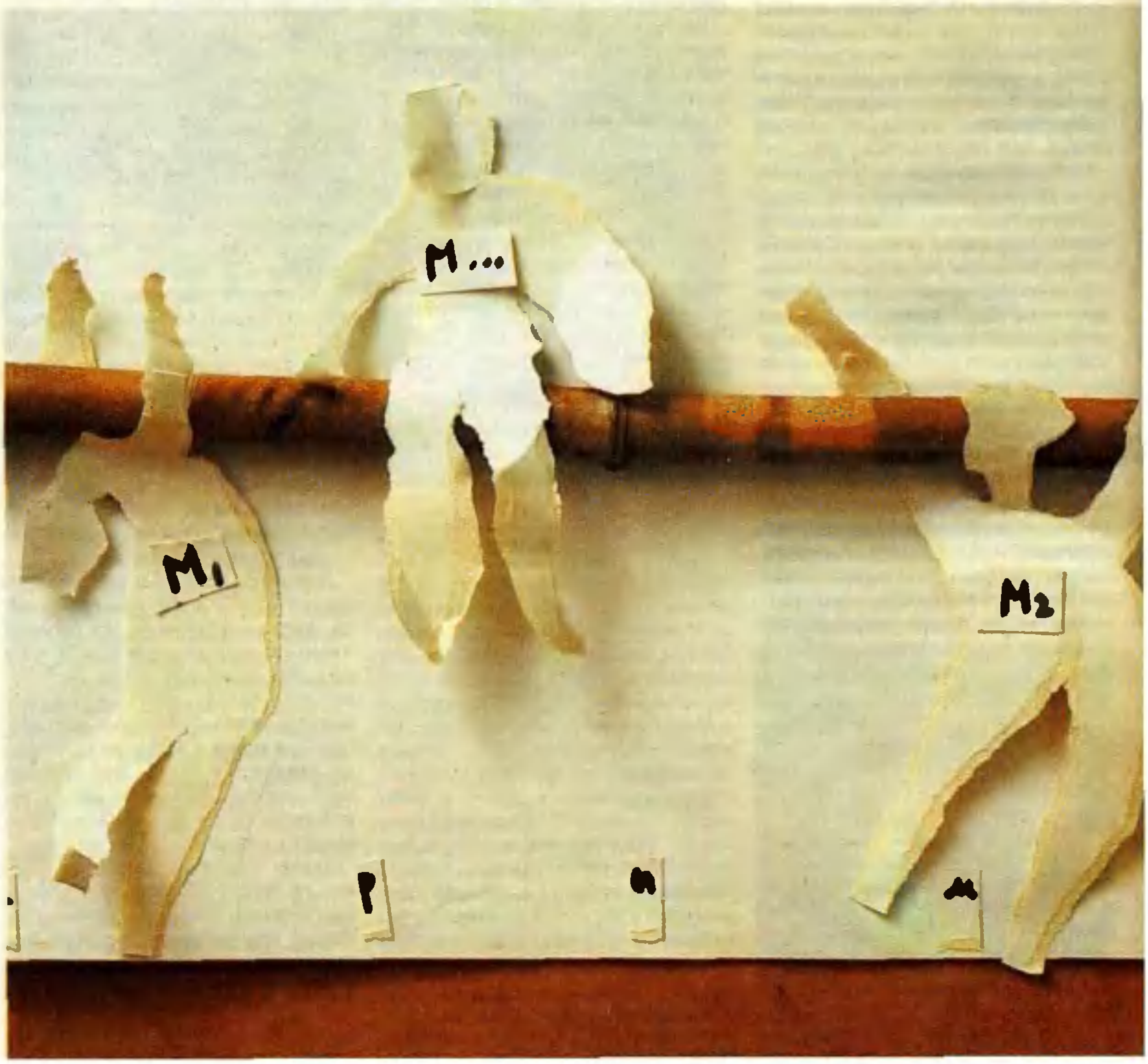
А. ШАПИРО

Введение

В этой статье мы покажем, как можно приложить абстрактную математическую логику к живо-трепещущей проблеме принятия решений впарламенте, а также выделим некоторые особенности мышления прикладного математика и поговорим о моделировании.

Начнем наш рассказ с простого примера из жизни одного доисторического племени. Это племя управлялось вождем и Советом из десяти старейшин. Наиболее важные вопросы жизни племени решались путем голосования в Совете старейшин, где решения принимались простым большинством голосов. Вождь являлся председателем Совета старейшин и мог ставить вопросы на голосование (сам он не голосовал). Такая у них была упрощенная «парламентская» система.

Однажды произошло неприятное событие. Во время субботника по строительству речной плотины дикарь Иннокентий (в просторечии Кеша) уронил бревно вождю на ногу. Вождь счел поступок Иннокентия покушением на себя и вынес вопрос о наказании про-



винившегося на Совет старейшин. По мнению вождя, в качестве наказания следовало уронить бревно Кеше на голову.

Прежде чем ставить свое предложение на голосование, вождь разными тайными способами выяснил мнение старейшин. Результат оказался для него неутешительным.

Только четверо старейшин полностью поддерживали вождя, т.е. считали, что на него было совершено покушение и наказание, предлагаемое вождем, правомерно. Четверо других признавали факт покушения, однако наказание считали слишком строгим. Двое оставшихся членов Совета

были полностью несогласны с вождем: они полагали, что никакого покушения не было и наказывать Кешу не надо.

Итак, если бы вождь прямо поставил на голосование вопрос о «бревновании» Кеши, то шесть из десяти членов Совета высказались бы против. Поэтому глава племени решил действовать в обход.

Прежде чем читать дальше, попытайтесь угадать, какую уловку придумал вождь, чтобы перехитрить Совет старейшин и заставить его принять свое решение.

А придумал он вот что. Собрав Совет, вождь поставил на голосование следующее утверждение:

«Если Иннокентий совершил покушение, то его следует наказать бревном по голове, а если нет, то его наказывать не надо.»

Большинством голосов решение было принято, ибо за него проголосовали четверо старейшин, которые поддерживали идею строгого наказания, и... те двое, которые считали, что Кешу вообще не следует наказывать!

Вслед за этим вождь поставил на голосование простое утверждение:

«Иннокентий совершил покушение.»

За него проголосовали восемь из десяти старейшин.

Совет завершился краткой речью вождя, в которой тот совершенно справедливо утверждал, что на основании только что принятых двух постановлений смутьяна Иннокентия следует бревновать!

Мораль «демократической» истории

Задумаемся: пример чего мы только что рассмотрели? Ясно, что вождя нельзя обвинить в нечестности, а старейшин — в глупости. Вождь по всем правилам выполнял обязанности «спикера», а старейшины голосовали, как им подсказывали их убеждения. И вместе с тем было принято решение, которое не прошло бы при прямом голосовании.

Чем же объяснить, что Совет старейшин мог по одному и тому же вопросу принять два противоположных решения? Приходится признать, что ситуация связана с дефектами самой процедуры принятия решений путем голосования. И значит, она может повториться в любом парламенте!

Проанализируем, в чем состояла процедура голосования, и на чем «сыграл» вождь. Вот три главных обстоятельства:

1) вождь навязал решение Совету старейшин чисто логическим путем;

2) решение о наказании следовало из двух постановлений, одобренных Советом;

3) в Совете не было единогласия по всем вопросам.

Всегда ли достаточно этих условий, чтобы вождь мог добиться своего? Каковы наиболее общие условия непротиворечивой работы парламента? В некоторых достаточно естественных предположениях мы докажем следующую неожиданную теорему.

Теорема. *Если в парламенте не существует большинства, которое по всем вопросам голосует совершенно одинаково, то такой парламент противоречив, т.е. он может принять любое наперед заданное решение.*

Иными словами, если в парламенте есть такое большинство, то парламент можно эффективно заменить одним депутатом — представителем большинства, а если нет, то его можно заменить одним спикером (все зависит от того, какие и в каком порядке он ставит вопросы на голосование!).

Прежде, чем доказывать теорему, сформулируем и обсудим условия, при которых она верна. В этом особенность прикладной математики, в отличие от чистой: хорошо поставить задачу нередко труднее, чем найти решение.

«Идеальный» депутат

При моделировании любого явления (у нас — процедуры голосования) встречаются два крайних подхода: можно попытаться учесть как можно больше особенностей изучаемого явления, либо наоборот, сознательно «обеднить» модель, ухватив в ней только самые общие черты. (По замечанию выдающегося советского физика Я.И.Френкеля, хорошая теория похожа не на точную фотографию, а скорее на удачную карикатуру.)

Ясно, что первый путь моделирования поведения реального депутата в реальном парламенте затруднителен: уж больно объект сложный... Поэтому мы пойдем по второму пути и попытаемся построить модель идеального депутата.

В результате доказательства нашей теоремы выяснится, что даже парламент из идеальных депутатов может вести себя нелогично, а тогда чего уж говорить о парламенте с более «реальным» составом!

Разумеется, не стоит интересоваться убеждениями идеального депутата, но важно определить, как он будет их проявлять. Нам, как избирателям, хотелось бы потребовать от нашего депутата верности своим убеждениям, эрудированности и логичности. Сформулируем Кодекс Идеального Депутата — КИД.

Депутат!

1) Имей свое мнение по каждому обсуждаемому вопросу и не воздерживайся при голосовании.

2) Не голосуй за противоречивую систему утверждений. Голосуй за все абсолютно истинные утверждения (например: «Построим дом или не построим»). Поддерживай одновременно с утверждениями, которые ты принимаешь, и все их логические следствия.

3) Не меняй своих убеждений за время своего депутатского срока.

Совокупность предложений, за которые голосует идеальный депутат, назовем полной непротиворечивой теорией. (Более строгое определение см. в словарике в конце статьи.)

Из всех требований КИД наибольшие возражения вызывает первое требование, запрещающее депутату воздерживаться при голосовании. Мы принимаем это требование, поскольку отказ от него привел бы к существенному усложнению рассуждений, но в конце мы рассмотрим и воздерживающихся депутатов.

Условия 2 и 3 кажутся вполне правдоподобными, но, увы, не являются реалистичными: даже самым последовательным из депутатов доводится забывать, за что они голосовали вчера. Но, как сказано выше, мы сознательно идем на некоторую идеализацию.

Будем предполагать, что читатель умеет обращаться с простейшими логическими операциями («и», «или», «не», «следовательно») и их обозначениями (&, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$), а также знает начальные понятия теории множеств, включая счетность множества. Основные понятия помещены в словарике в конце статьи. Но главное — это вкус к рассуждениям и способность воспринять неожиданный результат.

Модель парламента

Установим теперь, каковы свойства того набора вопросов, которые обсуждает парламент. Общее замечание состоит в том, что обсуждение, конечно, ведется на каком-то языке, и вопросы для голосования могут быть записаны на этом языке. Язык предполагает наличие конечного алфавита (включающего, как мы предполагаем, логические знаки), и все его предложения имеют конечную длину. А отсюда следует, что множество утверждений, которые может обсуждать парламент, не более чем счетно.

Упражнение 1. Докажите последнее утверждение.

В каждом «естественном» языке существуют омонимы — слова, которые пишутся одинаково, а смысл имеют разный. Поэтому может оказаться, что предложения, одинаковые по написанию, имеют разный смысл.

Упражнение 2. Как избавиться от этой неоднозначности?

Мы не будем интересоваться смыслом утверждений, которые могут быть поставлены на голосование, но потребуем, чтобы множество всех утверждений было замкнуто относительно логических операций. Иными словами, наряду с двумя произвольными утверждениями A, B нашему множеству должны принадлежать такие утверждения, как $\neg A, A \vee B, A \,\&\, B, A \Rightarrow B$.

Упражнения

3. Является ли множество утверждений, обсуждаемых парламентом, полной непротиворечивой теорией?

4. Докажите, что множество утверждений, обсуждаемых парламентом, счетно (а не конечно).

5. Докажите, что множество утверждений, которые парламент принимает большинством голосов (если их поставить на голосование), счетно.

Вот и все свойства утверждений, принимаемых парламентом, которые нам потребуются для доказательства теоремы.

Доказательство теоремы

Согласно упражнению 5, множество утверждений, принимаемых парламентом, можно занумеровать. Поэтому мы обозначим через $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ полный список предложений, каждое из которых принимается большинством голосов при постановке на голосование.

Прежде чем излагать строгое доказательство, дадим его набросок. Объединим все утверждения, которые мог бы принять парламент, в одно бесконечное предложение

$$K = A_1 \,\&\, A_2 \,\&\ldots\&\, A_n \ldots$$

Заметим, что по правилам логики каждый из депутатов, голосующих за K, голосует и за утверждения $A_1, A_2, \ldots$ по отдельности.

Если большинство депутатов готово проголосовать за утверждение K, то это же большинство проголосует и за каждое из утверждений $A_1, A_2, \ldots$ Это и есть первый случай непротиворечивого парламента.

Но предположим теперь, что такого большинства нет. Тогда можно попробовать сыграть на противоречии, состоящем в том, что каждое из утверждений $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ принимается парламентом, а все они вместе — нет. Как известно, из противоречия можно логически вывести все, что угодно, и мы получаем второй случай — противоречивого парламента.

Слабым местом этого наброска доказательства является использование бесконечного предложения K. Ведь мы договаривались, что все обсуждаемые предложения имеют конечную длину! И, что гораздо хуже, мы существенно использовали конечность предложений для доказательства счетности их множества.

Обойдем этот пробел с помощью стандартного приема. А именно, вместо бесконечного предложения K рассмотрим последовательность утверждений, «стремящуюся к K»:

$$K_1 = A_1,$$
$$K_2 = A_1 \,\&\, A_2,$$
$$K_3 = A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, A_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Пусть, кроме того, утверждение K_1 одобряет множество M_1 депутатов, K_2 — множество $M_2, \ldots, K_n$ — множество $M_n, \ldots$ Естественно, что каждый из депутатов, принимающий «пакет» K_n, голосует и за любое утверждение $A_1, A_2, \ldots, A_n$ из этого пакета!

Упражнение 6. Докажите, что

$$M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_n \supset \ldots$$

Итак, мы получили цепочку вложенных множеств M_n. А теперь заметим, что все эти множества конечны — ведь они состоят из депутатов! А значит, цепочка $M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_n \supset \ldots$ на некотором шаге стабилизируется: все множества M_1 с номерами, превосходящими некоторый фиксированный индекс n, будут совпадать с M_n (ибо конечное множество не может бесконечно уменьшаться).

А так как утверждения K_n, за которые голосуют депутаты из множеств M_n, образованы из утверждений, принимаемых парламентом, то из стабилизации последовательности множеств M_n следует вывод:

Существует такое n, что множество M_n депутатов, голосующих за K_n, совпадает с множеством депутатов, голосующих за любое из утверждений, принимаемых парламентом (обозначим это множество M).

В равенстве $M_n = M$ и заключается искомое преодоление бесконечности. Отметим, что множество M_n может быть и пустым: это ничему не противоречит!

Осталось совсем немного. Как и выше, мы рассмотрим два случая.

Случай первый. Во множество $M_n = M$ входит большинство депутатов. Как было показано, это случай непротиворечивого парламента.

Случай второй. Пусть теперь множество M_n не содержит большинства депутатов. Тогда большинство депутатов отвергает K_n, а это значит, что наряду с каждым из утверждений $A_1, \ldots, A_n$ парламент проголосует и за утверждение $\neg(A_1 \& \ldots \& A_n)$. По правилам логики, совокупность этих утверждений противоречива, чем мы и воспользуемся.

Допустим, что наша цель — заставить парламент принять систему законов, из которой следует некоторое произвольное утверждение C. Поставим по очереди на голосование парламента следующие $(n+1)$ утверждений

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \neg(A_1 \& \ldots \& A_n) \vee C.$$

Первые n предложений будут приняты по определению, а последнее просто потому, что по предположению будет принято $\neg(A_1 \& \ldots \& A_n)$. Из этой совокупности утверждений следует C.

Поясним последнее рассуждение. Представим себе новый персонаж — идеального чиновника, целью которого является исполнение законов, принимаемых парламентом. Он может рассуждать так: «Казалось бы, принятый парламентом закон $\neg(A_1 \& \ldots \& A_n) \vee C$ предоставляет мне альтернативу: можно исполнить $\neg(A_1 \& \ldots \& A_n)$ или C. Однако первый вариант отвергается системой законов $A_1, \ldots, A_n$. У меня остается одна возможность: исполнить C!»

Теорема полностью доказана.

Упражнение 7*. Переделайте доказательство таким образом, чтобы в нем не использовалась счетность множества утверждений. (Здесь сложность в том, что несчетное множество утверждений нельзя выстроить в последовательность, у которой любой начальный отрезок конечен.)[1]

Еще один способ доказательства теоремы основан на глубокой связи между логическими операциями &, ∨ ... и теоретико-множественными $\cap$, $\cup$ ...

Проверьте, что если за некоторое утверждение A голосует множество M_A депутатов, а за утверждение B — множество M_B, то за $A \& B$ голосует $M_A \cap M_B$, а за $A \vee B$ голосует $M_A \cup M_B$.

Введем на множестве утверждений следующее отношение эквивалентности: назовем два утверждения A, B эквивалентными, если за них голосует одно и то же множество депутатов (обозначение: $A \sim B$). Мы будем обозначать через F_A, F_B, ..., F_C классы эквивалентности, содержащие утверждения A, B, ..., C, а через M_A, M_B, ..., M_C — множества депутатов, голосующих за соответствующие классы эквивалентности.

Упражнения

8. Докажите, что введенное отношение действительно является отношением эквивалентности.

9. Докажите, что если непусты классы эквивалентности F_A, F_B, то множество утверждений, за которые голосуют депутаты из $M_A \cap M_B$, также непусто. Является ли это множество утверждений классом эквивалентности?

10*. Докажите теорему, используя введенное отношение эквивалентности и последние три упражнения.

Обсудим

Если бы наша статья была чисто математической, то словами: «Теорема полностью доказана» все бы и закончилось. Но мы взялись обсуждать не только математику, но и ее связь с остальным миром! За это приходится расплачиваться. Чтобы доказать значимость своих результатов, мы должны еще ответить на неформальные возражения, которые могут возникнуть у нематематиков.

При этом мы не будем отвечать на возражения типа «Зачем все это надо?», «Что это дает?» и т.п. (Однажды на вопрос «Ну и что?» автор данной статьи ответил «Ну и вот!».) Эти вопросы, как и родственные им вопросы о смысле жизни, познаваемости мира и сущности науки, требуют отдельного разговора. Поэтому ответим на возражения по существу.

Одно из возражений можно сформулировать так. «Вы рассмотрели самую простую процедуру голосования, когда решения принимаются большинством голосов. Но в реальном парламенте для принятия наиболее важных решений обычно требуется не менее двух третей голосов.

Более того, в правовом государстве некоторые вопросы вообще не могут решаться голосованием. Неприкосновенны, например, фундаментальные права человека. Так может быть, умелым введением правовых ограничений и затруднением принятия наиболее важных решений нам удастся преодолеть противоречивость парламента?»

На это возражение можно ответить так. В любом современном парламенте все равно остается достаточно большое множество утверждений, которые принимаются простым большинством голосов. В рамках этого множества утверждений теорема остается верной: ведь мы не использовали в доказательстве того, что парламент обязан обсуждать все предложения языка!

Единственное, чего можно попытаться добиться с помощью правовых ограничений — это сделать так, чтобы любое множество предложений оказалось незамкнутым относительно логических операций. Добиться этого сложно, но если даже удастся, то, скорее всего, окажется, что работа парламента будет часто заходить в тупик, «натыкаясь» на правовые нормы.

Реальная же цель введения правовых ограничений состоит в другом — защитить Кешу (а также нас с вами) от произвола власти, оградить от непредсказуемости результатов парламентских игр. Вряд ли кто-нибудь станет отрицать необходимость таких ограничений, но для снятия противоречий, присущих самой процедуре голосования, они, увы, бесполезны.

Другое возражение состоит в том, что мы строили противоречие на голосовании за «пакет» предложений $A_1 \& \ldots \& A_n$. А почему бы не запретить голосовать за «пакеты»?

Ответим на это возражение вопросом: «А всегда ли можно отличить

[1] *Упражнения 7 – 10 предложил А. Канель.*

простое утверждение от составного?» Например, утверждение «Кешу надо бревновать» казалось простым, однако вождь сумел представить его в виде двух других.

Рассмотрим теперь возражение о том, что незачем запрещать депутату воздерживаться при голосовании.

Отметим попутно, что наша идеализация такого депутата слегка расходилась с типичным их поведением. Идеальный депутат должен воздерживаться при голосовании за любое предложение вида $A \& B$, при условии, что он воздерживается от A и принимает B. Реальный же депутат в таком случае, скорее всего, проголосует «за». (Это частный случай голосования пакетом, когда депутат «сильно за» одно из утверждений и «не сильно против» остальных.)

Упражнения

11. Рассмотрим некоторый парламент, в котором позволительно воздерживаться при голосовании. Предположим, что каждый депутат этого парламента бывает против хотя бы одного утверждения, принимаемого большинством голосов. Докажите, что такой парламент «непримиримых» депутатов противоречив.

12. Докажите, что для принятия произвольного решения C в противоречивом парламенте всегда достаточно трех голосований.

Новое свойство парламента, в котором депутаты могут воздерживаться при голосовании, состоит в том, что такой парламент может быть не только «чисто противоречивым» или «чисто непротиворечивым», как в нашей теореме. Возможна третья ситуация, когда бесконечное предложение K, о котором шла речь в наброске доказательства, не принимается, но и не отвергается большинством депутатов. Однако, на наш взгляд, такой парламент должен встречаться редко, тому подтверждением упражнение 11. Кроме того, он вряд ли будет достаточно дееспособным.

Действительно, точно так же, как и в доказательстве теоремы, устанавливается существование утверждения $K_n = A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_n$ такого, что за и против него голосуют те же депутаты, что и за предложение K (а значит, и воздерживается от голосования за K_n столько же, сколько за K). Поэтому в парламенте этого типа становится невозможным принятие сколько-нибудь длинной системы законов, так как голосование все время заходит в тупик.

Еще одно возражение против теоремы, точнее, против ее практической значимости, можно сформулировать так. «На самом деле, депутаты голосуют не столько за текст обсуждаемого предложения, сколько за нечто, гораздо менее определенное — смысл этого предложения. Причем этот смысл все понимают по-разному. Может, например, оказаться, что если для одного депутата из A следует B, то для другого это совсем не так.» О том, что такое возражение правомерно, свидетельствует наличие в политическом лексиконе выражений типа «приход к общему пониманию вопроса».

Однако не следует придавать ему чрезмерного значения. Если бы депутаты понимали смысл одних и тех же предложений совершенно по-разному, то парламент скорее напоминал бы сумасшедший дом. Все-таки какие-то наиболее существенные вещи всеми понимаются одинаково.

Другое дело, что логика у депутатов действительно более богата, чем рассмотренная выше. Например, эта логика допускает уже отмеченные высказывания типа «сильно за» или «слегка против». Кроме того, решая, как голосовать за утверждение X, депутат может рассматривать его, как $X \& Y \& Z \ldots$, где $Y, Z, \ldots$ — какие-то из утверждений, принятых парламентом раньше. В этом случае противоречивость парламента может «захватывать» и отдельных его представителей. Такова логическая природа противоречивости даже достаточно честных депутатов (случаи заведомой нечестности мы не рассматриваем).

Приведенные возражения состояли в том, что необходимо учитывать более сложное поведение депутатов, чем было нами принято. Но вот вопрос: как связаны между собой поведение одного депутата и противоречивость самой процедуры голосования? Как упоминалось, если уж при идеальном депутате голосование оказывается противоречивым, то в парламенте, состоящем из реальных депутатов, эти противоречия только усилятся.

В заключение приведем такое возражение. В наших рассуждениях мы неявно предполагали, что парламент может принимать (или отвергать) одним голосованием набор предложений любого объема. На практике, однако, этот объем всегда ограничен. Скажем, вряд ли кому-нибудь придет в голову поставить на голосование предложение, превосходящее по размерам «Войну и Мир». А тогда не может ли случиться, что предложение $\neg(A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_n)$, с помощью которого мы получали противоречие в доказательстве теоремы, просто слишком велико, чтобы быть рассмотренным парламентом?

Это простое возражение является серьезным. Что делали бы все парламентские хитрецы, если бы их лишили возможности выражать свои мысли в длинных и запутанных фразах? По счастью, для нашей теоремы (но не для общества), реальный противоречивый парламент «запутывается» достаточно быстро. А как показывает упражнение 12, запутать парламент всегда можно в три вопроса (при этом о длине предложений, которые ставятся на голосование, речь не идет). Если же парламент не запутывается на утверждениях, длина которых ограничена только здравым смыслом, то его практически можно считать непротиворечивым.

Конечно, список рассмотреных возражений далеко не полон (полный список, по-видимому, счетен). Читателю предоставляется возможность самостоятельно продолжить увлекательную игру, состоящую в выдвижении и снятии возражений. В ходе такой игры всегда рождаются новые идеи.

Что же мы можем вынести из обсуждения? Если сначала мы думали об идеализации депутатов, то теперь мы проверяли удачность наших предпосылок. Подумайте и вы, все ли важные черты парламентской системы нам удалось смоделировать, и как изменятся результаты, если принять ваши гипотезы.

Благодарности.

Автор благодарен многочисленным читателям вариантов статьи, и особенно А.Ковальджи, без участия которого эта статья не была бы написана, и А.Канелю, который предложил лучшее доказательство теоремы.

Словарик

Здесь содержится разъяснение ряда математических и логических терминов, использованных в статье. Однако словарик не предназначен для изучения соответствующих понятий, а только для напоминания их смысла подготовленному читателю.

Логика математическая — область математики, посвященная изучению математических доказательств. В ней исследуются свойства логических операций и формальных языков. Бурное развитие математической логики пришлось на начало XX века. Тогда появилась надежда на полную «формализацию» и «аксиоматизацию» математики. Но эта надежда не оправдалась: К.Гёдель доказал, что даже арифметика не может быть сведена к конечной системе аксиом.

Логические операции — набор операций, применяющихся к предложениям, которые могут быть истинными или ложными. Например, предложение «Все люди братья» годится, а предложение «Шагом марш!» нет. Обычно используют четыре логические операции (которые, кстати, не независимы): это «и», «или», «не» и «следовательно» (обозначения: &, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$). Пусть A, B некоторые предложения. Предложение $A\&B$ истинно только при условии, что истинны оба предложения A, B. Напротив, предложение $A \vee B$ ложно, только если оба предложения A, B ложны. Операция $\neg$ меняет истинность на ложь и наоборот. Наконец, предложение $A \Rightarrow B$ ложно, только если A истинно, а B ложно. Это несколько расходится с житейскими представлениями о том, что значит «следовательно». Так, если предложение A ложно, то, с точки зрения математической логики, из него следует все, что угодно: как истина, так и ложь.

Операции над множествами. С множествами, как и с предложениями, можно проводить ряд операций. Операции объединения и пересечения (обозначения: $\cup$, $\cap$) аналогичны логическим операциям «и», «или». Мы будем использовать операцию включения, аналогичную логической операции следствия. Именно, множество B включено в множество A (запись: $B \subset A$ или $A \supset B$), если все элементы B содержатся в A. В этом случае говорят также, что B есть подмножество множества A.

Вопросы для размышления. Чему аналогично $B \subset A$: $B \Rightarrow A$ или $A \Rightarrow B$? И как проинтерпретировать на языке множеств то, что «из лжи следует все, что угодно»?

Отношение эквивалентности. Пусть есть некоторое множество (конечное или бесконечное), состоящее из элементов a, b, c... Отношение эквивалентности на множестве — это такое отношение $a \sim b$ между его элементами, для которого выполняются три свойства:

1) рефлексивность: $a \sim a$;

2) симметричность: если $a \sim b$, то $b \sim a$;

3) транзитивность: если $a \sim b$ и $b \sim c$, то $a \sim c$.

Здесь a, b, c — произвольные элементы нашего множества.

Основное свойство отношения эквивалентности состоит в том, что оно разбивает множество на непересекающиеся классы элементов, эквивалентных между собой (это несложно доказать самостоятельно).

Счетное множество — это множество, которое можно «пересчитать», т.е. каждому элементу приписать номер. Счетными являются, например, множества четных, целых и даже рациональных чисел. Можно показать, что счетное множество является наименьшим из бесконечных множеств, т.е. любое его подмножество или конечно, или счетно. Существуют и множества большей мощности, например множества всех точек на прямой или плоскости. Не более чем счетное множество — это конечное или счетное множество. (Конечное множество можно «пересчитать» каким-нибудь начальным отрезком ряда натуральных чисел.)

Теория — множество утверждений формального языка, которое вместе с любым набором предложений содержит и все его логические следствия.

Противоречивая теория — теория, которая одновременно с некоторым утверждением A содержит и утверждение $\neg A$. Можно показать, что в этом случае она содержит вообще любое утверждение.

Полная теория — теория, которая содержит по крайней мере одно из утверждений A или $\neg A$ для любого A. В частности, любая противоречивая теория является полной. Конечно, гораздо более интересны полные непротиворечивые теории, «дающие однозначный ответ на любой вопрос». Одной из основных задач математической логики является выяснение вопроса о полноте и непротиворечивости тех или иных математических теорий. Уже упоминавшаяся выше теорема Гёделя о неполноте арифметики была первым шагом и настоящим открытием на этом пути. В отличие от арифметики, элементарная геометрия является полной, причем она непротиворечива, если непротиворечива арифметика.

ИНФОРМАЦИЯ

ОСЕННЯЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА В САО

С 15 по 24 ноября прошлого года в САО — Специальной астрофизической обсерватории Российской академии наук — проходила осенняя школа для победителей I Российской олимпиады школьников по астрономии и космической физике. (Об этой олимпиаде, прошедшей в мае в Ярославле, можно прочитать в «Кванте» № 6 за 1994 год.) Школа была организована САО и Координационным советом астрономической олимпиады при финансовом содействии Фонда Сороса.

В научный поселок Нижний Архыз в Карачаево-Черкессии, где расположена САО, приехали 22 школьника из различных уголков России. К сожалению, нелетная ноябрьская погода не позволила прибыть на школу всем приглашенным.

Программа школы была очень насыщенной — она включала в себя и лекции, и практические занятия, и ознакомительные экскурсии. Школьники посетили радиотелескоп РАТАН-600, крупнейший в Евразии оптический телескоп БТА, несколько «маленьких» (по сравнению с БТА) телескопов — Zeiss-600, Zeiss-1000 и др. На этих «маленьких» телескопах для участников школы почти на каждый вечер были запланированы наблюдения, однако и здесь вмешалась погода — из семи вечеров лишь один оказался безоблачным.

За восемь рабочих дней школы ученые САО, Москвы, Подмосковья и Нижнего Новгорода прочитали 14 лекций по самым современным проблемам астрономии и астрофизики:

— Ранняя вселенная и радиоастрономия.
— Радиоспектроскопия и галактика.
— Радиотелескопы и методы наблюдений.
— Исследование остатков сверхновых.
— Спектроскопия ярчайших звезд.
— Активные ядра галактик.
— Релятивистская астрофизика.
— Солнечная система.
— Specle-интерферометрия.
— Эволюция научных теорий.
— Проблема SETI.
— Двойные звезды.
— Фотометрия звезд в ближайших галактиках.
— Современные методы поляризационных исследований в астрофизике.

Каждый день проводились практические занятия, на которых можно было познакомиться с самыми современными методами регистрации и обработки данных. В частности — с применением компьютеров в астрономии, с использованием ПЗС-матриц (такое сокращение используется для полупроводниковых приборов с зарядовой связью) и современных спектрометров для регистрации оптических сигналов от космических объектов. Школьники поработали и с Паломарским атласом — самым подробным в настоящее время звездным атласом.

Для участников школы была организована экскурсия к древним христианским храмам, расположенным недалеко от научного поселка. Более тысячи лет назад в этих местах обитали аланы — представители народов иранской языковой группы, живших в то время в Причерноморье. Они одни из первых на территории современной России приняли христианство.

Насыщенной была и программа для взрослых. В рамках школы состоялись как многочисленные неофициальные встречи членов оргкомитета олимпиады и энтузиастов преподавания астрономии, так и несколько официальных совещаний.

На РАТАН-600 прошла конференция по проблемам преподавания астрономии. Были обсуждены проблемы как общего (школьного), так и дополнительного образования. Единодушным было мнение о том, что преподавание основных разделов астрономии нужно перенести с выпускного класса на среднюю ступень общего образования (5 – 9 классы), а в старших классах оставить лишь наиболее сложные разделы, требующие знаний по физике и соответствующего математического аппарата. Хорошую оценку, в этой связи, получил учебник Е.П. Левитана, который ко всеобщему удивлению продавался на воскресном рынке (!) в близлежащей станице Зеленчукской.

Другое совещание было посвящено программе «STAR» — преподаванию различных дисциплин через астрономию. (STAR — Search Through Astronomical Roots, дословно — изучение через астрономические корни.) Программа эта появилась в США около пяти лет назад как принципиально новый подход в системе образования. Но, как оказалось, многие учителя в России уже давно используют похожие методики. Более того, попутно вспомнили, что методики эти существовали еще в Древнем Египте. Тем не менее, программа «STAR» на общенациональном уровне принята лишь в США, где за последние три года дала поразительно хорошие результаты.

По окончании школы каждому ее участнику был вручен специальный сертификат САО. Но, конечно, не это главное. Большинство школьников впервые познакомились с современными телескопами и настоящими исследованиями ученых. На вопрос анкеты о том, что им больше всего дала прошедшая школа, многие ответили, что это знакомство с тем, как работают астрономы-профессионалы.

М. Гаврилов

Ехали медведи на велосипеде

А. ГРОСБЕРГ

Минувшим летом мы с дочкой часто катались на велосипедах и заметили вот какой любопытный факт: на спусках, где мы оба не крутили педали, мой велосипед разгонялся заметно сильнее и я дочку обгонял. Конечно, я гораздо тяжелее — я вообще человек, мягко говоря, не худой, к тому же и велосипед у меня тяжелый, а дочка маленькая и худенькая, велосипед у нее легкий — и, следовательно,.. Но позвольте, почти 400 лет назад Галилей установил закон, что время свободного падения от массы тела не зависит, и, если бы он сбросил нас с дочкой с Пизанской башни, мы бы, по-видимому, упали одновременно — особенно, если бы не было сопротивления воздуха. (Кстати говоря, в одном очень старом учебнике физики параграф про свободное падение начинался так: «Когда вы будете в театре, поднимитесь в антракте на балкон и поставьте такой опыт. Бросьте сначала вниз программку. Она будет медленно опускаться, кружа в воздухе. А теперь бросьте бинокль...») Если мы при спуске теряем высоту h, то потенциальная энергия Mgh превращается в кинетическую $Mv_0^2/2$:

$$Mgh = \frac{Mv_0^2}{2}. \qquad (1)$$

Масса сокращается, и не важно, чья масса M — моя или дочкина, у нас обоих в конце спуска должна быть одинаковая скорость

$$v_0 = \sqrt{2gh}.$$

Я подумал сначала, что давно не смазывал дочкин велосипед, и она не набирает достаточной скорости из-за большого трения в подшипниках. Я взял ее велосипед и очень тщательно отрегулировал и смазал все подшипники. Разрыв в скорости спуска между нами может быть и уменьшился, но совсем несущественно. Моя родительская совесть была тем самым немножко успокоена, но совесть физика — наоборот, растревожена: в чем же причина эффекта?

Ах да, есть же еще трение колес о дорогу. Это, конечно, трение качения, а меня, помнится, еще в школьные годы удивляло, что для силы трения качения нет в учебнике «формулы». Я и теперь, честно говоря, не знаю простого способа эту силу оценить. Но я знаю практически, что она зависит от степени «надутости» шин, т.е. от давления воздуха в камерах. И я накачал колеса дочкиного велосипеда изо всех сил, а свои даже отчасти сдул — и на ближайшем же спуске все равно дочку обогнал! Меньше, чем раньше — но все же...

Тут уже совесть физика заговорила в полный голос, и вопросом пришлось заняться вплотную. Понаблюдав более внимательно, я обнаружил, что процесс «обгоняния» состоит на самом деле из двух стадий. Во-первых, если мы с дочкой начинаем спуск вместе и практически без начального разгона, я быстрее набираю скорость, т.е., говоря чуть более научно, у меня поначалу больше ускорение. Во-вторых, уже разогнавшись так, что свистит в ушах, я еду с большей скоростью, так что расстояние между нами продолжает расти. Чтобы это проверить, я просто задержался на вершине холма, начав спуск позже дочки, и обогнал ее, так что разница скоростей стала очевидной (т.е. видной очами). Итак, две стадии — до свиста в ушах и во время свиста.

Кстати, о свисте в ушах. Почему, собственно, я не подумал о сопротивлении воздуха (см. про «программку и бинокль»)? Подумать-то я подумал, но сначала отбросил эту мысль, так как сила сопротивления должна быть явно больше для большего тела. Я знал, что сила лобового сопротивления пропорциональна площади поперечного сечения тела, т.е. мне она должна, казалось бы, мешать больше, чем дочке. Но потом вспомнил, что тяжелые капли дождя падают быстрее, чем легкие, и понял свою ошибку.

Обсудим, как же падают капли дождя. Вначале, пока скорость мала, сила сопротивления воздуха мала и ускорение капли близко к ускорению свободного падения g. Затем скорость постепенно растет, сила сопротивления увеличивается, компенсируя все большую часть силы тяжести и уменьшая тем самым ускорение, и т.д. вплоть до достижения стационарного режима с нулевым ускорением и постоянной скоростью. Стационарная скорость падения устанавливается такой, что сила сопротивления воздуха при этой скорости равна в точности силе тяжести. И все знают, что в итоге именно большие капли падают быстрее — конечно, потому, что масса тела и сила тяжести пропорциональны его объему, т.е. R^3, а сила трения — меньшей степени R. На каплю, кроме силы лобового сопротивления, действует еще сила вязкого трения, величина которой пропорциональна радиусу капли. Однако эта сила играет заметную роль только при очень малых скоростях или для очень маленьких капель (см., например, статью А.Митрофанова «Полеты в струе и наяву» в «Кванте» № 9 за 1991 г. — *Прим. ред.*). При не очень малых скоростях возникновение сопротивления (его называют лобовым) связано с тем, что воздух не успевает затекать за спину велосипедиста (или другого тела) и создает спереди избыточное давление. Этот эффект хорошо чувствуется, когда на вас налетает струя воздуха. Сила сопротивления оказывается пропорциональной площади поперечного сечения S и квадрату скорости v:

$$F_c = k\rho v^2 S, \qquad (2)$$

где k — некоторый численный коэффициент порядка единицы, ρ — плотность воздуха.

Формулу (2) можно вывести следующим образом. Будем искать силу, действующую на воздух со стороны велосипедиста, — она, конечно, равна F_c. За малое время Δt импульс силы $F_c\Delta t$ равен изменению импульса воздуха. На единицу объема эта величина равна ρv, а объем воздуха, вовлекаемого в движение за время Δt, определяется цилиндром длиной $v\Delta t$ и площадью основания порядка S. В итоге получается

$$F_c\Delta t = (\rho v)(v\Delta t)kS,$$

т.е. как раз формула (2).

Восстановив все это в памяти, я решил оценить скорость установившегося движения велосипедиста, когда сила тяжести компенсируется сопротивлением воздуха. Сделать это, ко-

нечно, проще простого: если мы спускаемся по горке с углом наклона α, проекция силы тяжести вдоль горки (и следовательно, вдоль вектора скорости) равна $Mg\sin\alpha$. Приравнивая ее силе лобового сопротивления (2), получаем

$$v_y = \sqrt{Mg\sin\alpha/k\rho S}.$$

Разгоняемся ли мы до такой скорости при реальном спуске? Это вопрос чисел. Я оценил их так. Моя масса 80 кг плюс масса велосипеда 20 кг — получается около 100 кг. В качестве S естественно взять половину роста, умноженную на ширину плеч, т.е. для меня $0{,}9\cdot 0{,}6 = 0{,}54$ м^2. Так как $g = 10$ м/с^2, плотность воздуха $\rho \sim 1{,}3$ кг/м^3, то получается $v_y \approx 136\sqrt{\sin\alpha}$ км/ч (если принять $k = 1$). Например, если горка такова, что на длине 100 метров мы теряем 5 метров высоты, то $\sin\alpha \approx 0{,}05$ и $v_y \approx 30$ км/ч.

Правилен ли этот ответ? У меня на велосипеде давно уже имеется спидометр (страсть к измерительным приборам и к измерению всего подряд, видимо, профессиональная черта физиков), и я знаю «на ощупь», что сопротивление воздуха становится существенным при скорости не 20 и не 30, а, скорее, 35 — 40 км/ч. Но должно быть понятно, что моя оценка не может претендовать на точность. И если я получил 30 км/ч, а правильнее было бы, скажем, 40 км/ч, то это не неудача, а безусловный успех. Во-первых, я очень грубо оценил площадь S. Во-вторых, я же ничего не знаю о коэффициенте k — а он, очевидно, зависит от формы тела. Недаром при проектировании нового автомобиля его макет продувают в аэродинамической трубе — видимо, ищут такую форму, чтобы k было поменьше. А готовую машину покрывают высококачественной краской — тоже для уменьшения k. Вполне можно вообразить, что для меня на моем велосипеде k равно, допустим, 0,5 — тогда бы я получил 42 км/ч. Так что моя оценка, видимо, более или менее разумна.

Возвращаясь к тому, как я обгонял дочку, нужно взять отношение скоростей v_y для двух тел (k будем считать одинаковыми):

$$\frac{v_{y1}}{v_{y2}} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}}\sqrt{\frac{S_2}{S_1}}.$$

Для меня, как уже говорилось, $M_1 = 100$ кг и $S_1 = 0{,}54$ м^2, для дочки $M_2 = 30$ кг и $S_2 = 0{,}7\cdot 0{,}4 = 0{,}28$ м^2. Получилось $v_{y1}/v_{y2} \approx 1{,}3$ — если мы уже разогнались до скоростей порядка v_y и спуск продолжается, то на каждых следующих ста метрах пути я, согласно оценке, обгоняю дочку метров на 30. Это примерно соответствует действительности.

Итак, часть загадки, похоже, разрешилась: когда скорость уже достаточно велика, то все дело, видимо, в воздухе. Недаром он напоминает о себе свистом в ушах. Можно качественно объяснить эффект так: у моей дочки, т.е. вообще у меньшего тела, все меньше — и сила тяжести, и площадь, определяющая сопротивление воздуха. Но площадь уменьшена не так значительно, как объем, поэтому роль воздушного сопротивления для маленького тела больше.

Все? Задача решена? Увы — я бы даже сказал, что вопрос стал еще таинственнее. Ведь был же еще первый этап — до свиста в ушах! И теперь-то уж точно ясно, что сопротивление воздуха к эффекту начального разгона отношения не имеет.

Что же еще может быть неправильно в простой формуле закона сохранения энергии

$$Mgh = \frac{Mv_0^2}{2},$$

согласно которой скорость спуска не зависит от массы? Мне пришла в голову вот какая идея. Что значит $Mv^2/2$? Почему я так записал кинетическую энергию? Ведь не вся система «человек + велосипед» просто движется поступательно с единой скоростью v — колеса ведь вращаются, так что разные части колес движутся с разными скоростями: нижняя точка колеса неподвижна, верхняя мчится со скоростью $2v$, есть точки со скоростями, направленными вверх и вниз, и т.д. По-видимому, какая-то часть энергии уходит на раскручивание колес. Какую это играет роль?

Оказывается, для ответа на этот вопрос надо использовать одну теорему механики, доказать которую непросто, но понять ее смысл довольно легко. Теорема эта утверждает, что полную кинетическую энергию системы движущихся точек можно разбить на две части. Одна часть соответствует движению всей системы как целого: она равна $mv_ц^2/2$, где m — полная масса системы, а $v_ц$ — скорость ее центра масс. Вторая же часть учитывает движение точек системы относительно центра масс (т.е. в системе отсчета, связанной с центром масс). Получаем

$$E = \frac{mv_ц^2}{2} + E_{отн}.$$

В случае колеса относительное движение соответствует чистому вращению колеса относительно своей оси. Проще всего найти $E_{отн}$, если пренебречь массой спиц и считать, что вся масса колеса сосредоточена на ободе. Тогда скорость каждой точки колеса равна $V = \omega R$, а так как скорость нижней точки колеса относительно земли должна быть равна нулю (колесо катится без проскальзывания!), то V должна быть равна скорости велосипеда v. Получаем

$$E_{отн} = \frac{m_к v^2}{2}. \qquad (3)$$

Если же учесть массу спиц, то часть точек будет иметь меньшую скорость, и $E_{отн}$ можно записать в виде

$$E_{отн} = \frac{\alpha m_к v^2}{2}, \qquad (3')$$

где коэффициент $\alpha < 1$ зависит от распределения масс. Кто знаком с моментом инерции, знает, что энергия вращающегося тела равна $I\omega^2/2$. Если момент инерции колеса записать в виде $I = \alpha m_к R^2$ и учесть, что $\omega = V/R$, то получим ту же формулу (3′).

Итак, полная кинетическая энергия должна учитывать не только энергию поступательного движения $Mv^2/2$, где M — масса велосипедиста с велосипедом (включая колеса!), но и энергию вращения колес. Закон сохранения энергии в этом случае приобретает вид (вместо формулы (1))

$$\frac{Mv^2}{2} + \frac{\mu v^2}{2} = Mgh,$$

где μ — полная масса переднего и заднего колес (без спиц, как мы договорились). Выразим отсюда скорость велосипедиста:

$$v = \sqrt{\frac{2ghM}{M+\mu}} = v_0\sqrt{\frac{1}{1+\mu/M}}.$$

Таким образом, реальная скорость несколько меньше $v_0 = \sqrt{2gh}$ — конечно, из-за того, что часть энергии уходит на раскручивание колес. Если имеются два велосипедиста, то отношение их скоростей равно

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{1+\mu_2/M_2}{1+\mu_1/M_1}}.$$

Найдя такую формулу, можно сделать оценки, чтобы понять, разумно ли предполагаемое объяснение эффекта. Уже говорилось, что $M_1 = 100$ кг и $M_2 \approx 30$ кг. Колеса наших велосипедов ради такого случая мне пришлось отвинтить и взвесить, они оказались неожиданно близкими по массе: $\mu_1 \approx \mu_2 \approx 5$ кг (это, конечно, для каждого велосипеда два колеса вместе). Арифметика дает нам в итоге $v_1/v_2 \approx 1{,}06$, т.е. моя скорость в начале спуска действительно примерно на 6% больше дочкиной (в одной и той же точке склона). Если допустить, как и раньше, что на каждых ста метрах спуска мы теряли 5 метров высоты, и на первой сотне пренебречь сопротивлением воздуха, то, решив простенькую задачку по кинематике, можно получить, что на этих первых ста метрах я должен был бы дочку обогнать примерно на 8 метров.

Этот ответ по порядку величины соответствует тому, что я наблюдал в реальной жизни. Хотя я не нашел способа подручными средствами измерять расстояние по ходу спуска, но на глаз мне кажется, что расстояние было скорее больше восьми метров, чем меньше. Отсюда я сделал вывод, что моя теория, видимо, имеет отношение к делу, однако не исчерпывает проблемы (это, между прочим, обычная история и в настоящей научной жизни). Может быть, сопротивление воздуха, становящееся все более важным к концу первой стометровки, играет свою роль. Я даже написал полное дифференциальное уравнение движения велосипеда с учетом обоих факторов — как вращения колес, так и сопротивления воздуха. Решил его и нашел формулу для смещения как функции времени, и построил график этой зависимости на компьютере для тех значений параметров, о которых шла речь выше. Но, как обычно, когда пытаешься применить мощную технику, вроде дифференциальных уравнений и компьютера, нужно очень серьезно подумать, зачем она на самом деле нужна и что делать с результатами. Как мне мои графики сравнить с реальностью? И потом — если даже все правильно, то что за радость? Интерес ведь в том, чтобы понять эффект физически, интуитивно — а точный расчет по точной теоретической формуле в конце концов просто воспроизводит реальность, а не объясняет ее. Поэтому я собираюсь пойти другим путем и будущим летом поставить очередные эксперименты: привязать что-нибудь тяжелое к ободам колес своего велосипеда, увеличив μ_1/M_1, а также раскормить дочку (или, на худой конец, погрузить что-нибудь тяжелое на багажник ее велосипеда), уменьшив μ_2/M_2.

А может быть, все гораздо проще, и моя дочка-трусишка жмет потихоньку на тормоз?

Подведем итоги. Все у нас было, как в настоящей науке. Начали с наблюдения — заметили факт. Поставили простые опыты. Потом пришел черед теории. Теперь — новые опыты, посложнее. Обратите внимание, что в процессе работы многое прояснилось: и в том, что касается сопротивления воздуха, и в части кинетической энергии внутренних движений. И эффект перестал быть абсолютно загадочным, и попутно мы многое узнали и поняли. Но все же полная незамутненная истина от нас, пожалуй, ускользнула, как жар-птица. Чего-то мы еще не понимаем — и это тоже как в настоящей науке!

В заключение позвольте напомнить, что великий Нильс Бор гордился своим умением самостоятельно разобрать и, главное, после этого собрать заднюю втулку велосипеда. А вообще-то, велосипед — это целый кладезь чудных вопросов по физике. Например, когда лучше надувать шины — утром или вечером? Или почему вообще двухколесный велосипед устойчив и не падает? Или какую работу совершает велосипедист, и какую роль играет кинетическая энергия его ног? О каждом вопросе можно написать статью, но лучше — подумайте сами.

Победители конкурса «Задачник «Кванта» 1994 года

I МЕСТО заняли

по математике:

Савин Александр (Самара, Ун-т Наяновой, 11 кл.),

по физике:

Гуляев Леонид (Н.Новгород, с.ш. 82, 9 кл.).

II МЕСТО заняли

по математике:

Ершов Михаил (Троицк Московской обл., с.ш. 5, 11 кл.),

по физике:

Болтасева Александра (Канаш, с.ш. 10, 11 кл.).

Кроме того, в число победителей вошли

по математике:

Баранов Сергей (Ижевск, школа-гимназия 56, 10 кл.),
Голубев Александр (Челябинск, ФМШ 31, 11 кл.),
Карымов Дмитрий (Екатеринбург, СУНЦ УрГУ, 11 кл.),
Колотов Григорий (Ижевск, школа-гимназия 56, 10 кл.),
Поздняков Илья (Череповец, с.ш. 11, 10 кл.),
Филимонова Ирина (Москва, с.ш. 2, 11 кл.),
Чулков Сергей (Москва, с.ш. 5, 8 кл.),
Шалгунов Никита (Екатеринбург, СУНЦ УрГУ, 11 кл.);

по физике:

Байталюк Михаил (Молдавия, Бельцы, ФМЛ им. Н.В.Гоголя, 11 кл.),
Банаков Вячеслав (Дубна, с.ш. 6, 11 кл.),
Гуменюк Игорь (Кузнецовск, с.ш. 1, 10 кл.),
Мушик Вадим (Кузнецовск, с.ш. 1, 11 кл.),
Сарайкин Кирилл (п. Протвино Московской обл., Протвинский городской лицей, 11 кл.),
Смирнов Дмитрий (Кузнецовск, с.ш. 1, 11 кл.),
Фурсов Дмитрий (Екатеринбург, СУНЦ УрГУ, 11 кл.),
Ширяев Иван (Кузнецовск, с.ш. 1, 11 кл.).

Все победители конкурса награждаются дипломами и призами.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 1995 года по адресу: 103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3 — 95» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1491» или «Ф1498». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи по математике в этом номере трудные. Многие из них предлагались на различных олимпиадах. Мы готовы рассмотреть решения этих задач, присланные и позже указанного выше срока.

Задачи М1491 — М1500, Ф1498 — Ф1507

М1491*. а) Существуют ли различные 1995-значные числа a и b такие, что 3990-значное число $\overline{ab}$ делится на $\overline{ba}$?
б) Для каких n существуют такие пары n-значных чисел?

П. Филевич

М1492*. Пусть AH, BK, CL — высоты треугольника ABC, M — произвольная точка плоскости. Докажите, что описанные окружности треугольников AMH, BMK, CML пересекаются еще в одной общей точке, кроме M.

А. Маркелов

М1493*. Обозначим через $s(n)$ сумму $1 + 2^2 + \ldots + n^n$. Докажите, что при любом $n > 3$ верны неравенства
а) $3s(n) > (n+1)^n$;
б) $2s(n) < (n+1)^n$;
в) $1/n^n > 1/s(n) + 1/s(n+1) + 1/s(n+2) + \ldots$.

А. Грибалко

М1494. Даны четыре одинаковых картонных неравнобедренных прямоугольных треугольника. Разрешается любой треугольник разрезать по высоте, опущенной на гипотенузу. Можно ли, повторяя эту операцию, добиться того, чтобы все полученные треугольники были разного размера?

А. Шаповалов

М1495*. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — описанный тогда и только тогда, когда для радиусов окружностей r_1, r_2, r_3, r_4, вписанных в треугольники AOB, BOC, COD, DOA, выполнено равенство

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}.$$

И. Вайнштейн

М1496*. Рассмотрим уравнения вида

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 = kx_1 \ldots x_n,$$

где n и k — натуральные числа и переменные $x_1, \ldots, x_n$ тоже принимают натуральные значения.
а) Докажите, что при любом k существует бесконечно много значений n, при каждом из которых уравнение имеет хотя бы одно решение.
б) Найдите наименьшее n, большее k, при котором уравнение имеет решение (при $k > 3$).
в) Пусть $n = 3$. Докажите, что уравнение имеет решения лишь при $k = 1$ и $k = 3$.
г) Пусть $k = 2$. Докажите, что при $n = 4$, 5 решений нет, а при $n = 7$ — есть.
д) Пусть $k = 3$. Докажите, что при $n = 4$ решений нет, а при $n = 6$ — есть.
е) Пусть $n > 2$. Фиксируем k. Верно ли, что если уравнение имеет решение, то решений бесконечно много?

А. Скопенков, В. Сендеров

М1497*. Докажите, что на торической доске 15×15 клеток нельзя расставить 15 ферзей, не бьющих друг друга.

Другими словами, не существует 15 пар целых чисел от 1 до 15 таких, что различны: первые числа в парах, вторые числа в парах, остатки от деления на 15 сумм чисел в парах и остатки от деления на 15 разностей чисел в парах.

А.Толпыго

М1498*. Решите при каждом $n > 1$ систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 x_n = 2, \\ x_2(x_n - x_1) = 1, \\ \ldots \\ x_{n-1}(x_n - x_{n-2}) = 1, \\ x_n(x_n - x_{n-1}) = 1. \end{cases}$$

Б. Кукушкин

М1499*. Докажите, что число 2 можно представить в виде суммы трех четвертых степеней рациональных чисел бесконечным числом способов.

М. Ахвердиев

М1500*. Докажите, что в любой компании из 50 человек обязательно найдутся двое, имеющие среди остальных членов компании четное число (быть может, 0) общих знакомых.

С. Токарев

Ф1498. Маленькое тело массой m движется не отрываясь по внутренней гладкой поверхности вертикального цилиндра радиусом R. Начальная скорость тела составляет угол α с вертикалью. Известно, что наивысшая точка траектории тела находится точно над начальной. Чему равна сила, с которой тело давит на поверхность цилиндра в высшей точке траектории?

Э.Прут

Ф1499. Грузы, массы которых M и m, соединили легкой пружинкой. Систему положили на гладкий горизонтальный стол, пружинку немного сжали, и с двух сторон поставили упоры, не дающие грузам разъезжаться (рис.1). Уберем один из упоров — со стороны груза M.

Рис.1

Система начнет двигаться. Во сколько раз изменится скорость движения, если убрать не этот упор, а другой? Как относятся максимальные удлинения пружинки в этих двух случаях?

М.Учителев

Ф1500. Легкий блок подвешен к потолку на пружине жесткостью k_1, через блок переброшена нить. Один из концов нити прикреплен к полу при помощи пружины жесткостью k_2, к другому концу прикреплен груз массой m. Система находится в равновесии, нити вертикальны. Сместим немного груз по вертикали и отпустим его. Каким будет период вертикальных колебаний груза?

Р.Александров

Ф1501. В вертикальном цилиндрическом сосуде объемом V под легким подвижным поршнем содержится некоторое количество гелия при температуре T_0 (рис. 2). Наружное атмосферное давление равно p_0, поршень находится в равновесии и делит сосуд пополам. Газ медленно нагревают, увеличивая его температуру до $3T_0$.

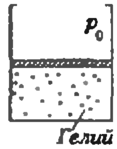


Рис.2

Сверху сделан упор, который не дает поршню выскочить из сосуда. Какое количество теплоты получит газ при нагревании?

А.Зильберман

Ф1502. С двумя молями кислорода совершают циклический процесс. Сначала газ нагревают на 0,1 К, сообщив ему при этом количество теплоты $Q = 1000$ Дж, потом дают возможность охладиться на 100 К без теплообмена с окружающей средой, затем газ сжимают, совершив над ним работу $A = 700$ Дж, газ при этом нагревается на 0,1 К, и, наконец, сжимают до начального объема $V = 100$ л без теплообмена с окружающей средой. Все процессы проводят медленно. Найдите начальную температуру и начальное давление газа.

Ц.Карно

Ф1503. В лаборатории работает криостат — установка для поддержания в рабочей камере очень низкой температуры. В описываемом случае эта температура составляет всего $3 \cdot 10^{-6}$ К, и установка при работе потребляет от электросети мощность 10 кВт. Мощность установки можно еще увеличить на 10%. Теоретики, толпой обступившие установку, начинают громко спорить о том, является ли эта установка идеальной тепловой машиной (работающей по обращенному циклу) или не является. При этом уровень шума (мощность звуковых волн, падающих на единицу площади поверхности) достигает величины $1/10000$ Вт/м^2. Хватит ли запаса мощности установки, чтобы поддерживать и в этих условиях нужную температуру в рабочей камере? Полная площадь наружных стенок криостата составляет 0,5 м^2. Считайте, что практически вся энергия звуковых волн поглощается при падении на наружную поверхность криостата и рассеивается внутри холодной камеры.

В.Шухман

Ф1504. Несколько одинаковых лампочек включены последовательно. При подключении батарейки к одной из них ток через лампочку составил 0,27 А. Когда эту батарейку подключили к двум последовательно соединенным лампам, ток стал 0,18 А, при трех лампочках получился ток 0,14 А, при четырех — 0,12 А, при пяти — 0,1 А. Теперь две такие батарейки подключают к гирлянде лампочек — одну между точками A и B (рис. 3), другую

Рис.3

между точками $Б$ и $Г$. Найдите ток каждой лампочки в этом случае.

З.Рафаилов

Ф1505. Полупроводниковый терморезистор нагревают протекающим через него постоянным по величине током. Сопротивление терморезистора можно считать обратно пропорциональным его абсолютной температуре: $R = A/T$. От начальной температуры 300 К до 310 К терморезистор нагрелся за 10 секунд. Через какое время он нагреется до 350 К? Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

А.Зильберман

Ф1506. Из очень тонкой проволоки сделан виток в виде квадрата, его индуктивность составляет 1 мГн. Вплотную к этому витку придвинули точно такой же по размерам сверхпроводящий виток, плоскость которого перпендикулярна плоскости первого витка и одна сторона практически совпадет с одной из сторон первого витка (получились соседние грани куба). Электрического контакта между витками нет. Измеренная в этих условиях индуктивность первого витка составила 0,95 мГн. Теперь расположим витки иначе — сверхпроводящий виток находится напротив основного (первого) витка, плоскости витков параллельны друг другу (противоположные грани куба). Расстояние между витками равно стороне квадрата. Чему теперь будет равна индуктивность основного витка?

О.Шпырко

Ф1507. Тонкостенный кубический аквариум объемом $V = 8$ л заполнен до половины водой. В воду насыпают соль, в результате коэффициент преломления соленой воды на дне аквариума составляет $n_0 = 1{,}35$ и убывает с высотой h по квадратичному закону: $n = n_0 - ah^2$, где $a = 1$ м$^{-2}$. На боковую стенку аквариума падает параллельный световой пучок, перпендикулярный поверхности. На каком расстоянии от аквариума нужно поставить экран, чтобы получить на нем максимально яркую световую полоску?

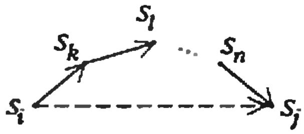
А.Ольховец

Решения задач М1461 — М1470, Ф1478 — Ф1487

М1461. *Профессор Тарантога в статье о сепульках дал n определений сепуления. Аспиранты профессора постепенно доказали, что все эти определения эквивалентны между собой. Каждый из аспирантов защитил диссертацию на тему «Сепуление в смысле i-го определения является сепулением в смысле j-го определения». Какое максимальное количество аспирантов могло быть у Тарантоги, если диссертации защищались последовательно и основной результат очередной диссертации не следовал из ранее защищенных?*

Обозначим определения, данные Тарантогой, через S_i ($i = 1, \ldots, n$). Будем утверждение «сепуление в смысле S_i является сепулением в смысле S_j» обозначать так: $S_i \to S_j$. (Можно представлять себе S_i как «множество всех сепулений по i-му определению», тогда $S_i \to S_j$ будет означать, что S_i содержится в S_j.) Ясно, что результат $S_i \to S_j$ будет следовать из ранее защищенных, только если уже защищена цепочка диссертаций, ведущая из S_i в S_j (см. рисунок).

Назовем парой две диссертации $S_i \to S_j$ и $S_j \to S_i$. Покажем, что защищенные пары не могут образовывать цикла. Действительно, если имеется цикл $S_i \leftrightarrows S_j \ldots\ldots \leftrightarrows S_k \leftrightarrows S_i$, то последняя по времени защищенная диссертация этого цикла следует из остальных.



Докажем теперь по индукции, что всего могло быть защищено не более $(n-1)$ пар. Для $n = 2$ все очевидно. Предположим, что было защищено n пар. Пусть какое-либо S_i входит не более чем в одну защищенную пару. Тогда в оставшихся $(n-1)$ паре участвуют $(n-1)$ определений, чего не может быть по предположению индукции. Значит, любое S_i входит по крайней мере в две пары. Но тогда можно построить цепочку $S_i \leftrightarrows S_j \ldots\ldots \leftrightarrows S_k \leftrightarrows S_i$, которая замкнется не позднее n-го шага. Противоречие (тем самым доказано, что защищенные пары не могут образовывать цикла).

Заметим теперь, что всего имеется $\frac{n(n-1)}{2}$ различных пар. Но, по доказанному, только в $(n-1)$ паре могут быть защищены обе диссертации. Значит, в каждой из оставшихся $\frac{n(n-1)}{2} - (n-1)$ пар может быть защищена только одна диссертация. Таким образом, у профессора Тарантоги было не более

$$2(n-1) + \left[\frac{n(n-1)}{2} - (n-1)\right] = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

аспирантов.

Покажем теперь, как можно защитить такую уйму диссертаций. Сначала $(n-1)$ аспирантов защищают диссертации $S_1 \to S_n$; $S_2 \to S_n$; ...; $S_{n-1} \to S_n$. Затем $(n-2)$ аспиранта защищают диссертации $S_1 \to S_{n-1}$; $S_2 \to S_{n-1}$; ... ...; $S_{n-2} \to S_{n-1}$; ..., и т.д.

Наконец еще один аспирант защищает диссертацию $S_1 \to S_2$.

Последние $(n-1)$ аспирантов последовательно защищают диссертации $S_n \to S_{n-1}$; $S_{n-1} \to S_{n-2} \ldots S_2 \to S_1$. Итак, всего защищено $\frac{n(n-1)}{2} + n - 1 = \frac{n(n+1)}{2} - 1$ диссертаций. Легко проверить, что ни одна диссертация не следует из ранее защищенных. Вместе с тем доказана эквивалентность всех определений, так как защищены диссертации $S_1 \to S_n$; $S_n \to S_{n-1}$; ...; $S_2 \to S_1$.

К.Мишачев

М1462. *Докажите неравенство (при $n \geq 2$)*

$$\left(\sqrt[n]{n!}\right)^2 \geq \sqrt[n+1]{(n+1)!} \cdot \sqrt[n-1]{(n-1)!}.$$

Первое решение.

Лемма. При $n \geq 6$ справедливо неравенство

$$n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n. \qquad (*)$$

Докажем ее методом индукции. При $n=6$ (*) выполняется. Пусть (*) выполняется при некотором $n \ge 6$. Имеем:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} : \left(\frac{n}{2}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{n+1}{2} > n+1,$$

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} > \left(\frac{n}{2}\right)^n (n+1) > (n!)(n+1) = (n+1)!.$$

Решение задачи. Исходное неравенство эквивалентно следующим:

$$\left(\frac{(n!)^{n^2}}{((n+1)!)^{n^2}}\right)\left(\frac{(n!)^{n^2}}{((n-1)!)^{n^2}}\right)\left(\frac{((n+1)!)^n}{((n-1)!)^n}\right)\frac{1}{(n!)^2} \ge 1,$$

или

$$\frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}(n(n+1))^n \frac{1}{(n!)^2} \ge 1.$$

Преобразовав левую часть, получаем

$$\frac{1}{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n}(n(n+1))^n\frac{1}{(n!)^2} >$$

$$> \frac{1}{3^n}(n(n+1))^n\left(\left(\frac{2}{n}\right)^n\right)^2 = \frac{4^n}{3^n}\frac{(n(n+1))^n}{(n^2)^n} > 1,$$

что и требовалось доказать.

Второе решение. Обозначим

$$a_n = \frac{n^{n^2+n-2}}{(n+1)^{n^2-n}((n-1)!)^2}.$$

Так как $a_2 = \frac{16}{9} > 1$ и

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{2n^2+2n}}{n^{n^2+n}(n+2)^{n^2+n}} = \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n^2+n} > 1,$$

то при любом $n \ge 2$ имеем $a_n > 1$.
Отсюда сразу следует неравенство задачи.

Замечание 1. Аналогично (*) доказывается неравенство $n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$. Точное описание поведения $n!$ при $n \to \infty$ дает формула Стирлинга:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}},$$

где $0 < \theta = \theta(n) < 1$.

Замечание 2. Легко видеть, что

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n^2+n} \to e$$

при $n \to \infty$.
Поэтому при всяком a, $1<a<e$, a_n растет быстрее a^n: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a^n} = \infty$. Отсюда следует, что для всякого a, $1<a<e$, существует число $N(a)$ такое, что при $n \ge N(a)$ имеем $a_n > a^n$. (Например, в первом решении доказано, что при $n \ge 6$ имеем: $a_n > \left(\frac{4}{3}\right)^n$.)

Замечание 3. Рассуждения первого решения немедленно дают и верхнюю оценку последовательности: $a_n < \left(\frac{9}{2}\right)^n \cdot e$.
В действительности a_n растет как

$$b_n = \frac{e^{\frac{3}{2}}e^n}{2\pi n}, \text{ т.е. } \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1.$$

В самом деле,

$$a_n = \frac{1}{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n}(n(n+1))^n\frac{1}{(n!)^2} =$$

$$= \frac{1}{e^n}\left(\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right)^n \cdot n^{2n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{e^{2n}}{2\pi n\cdot n^{2n}e^{\theta/6n}}.$$

Но, как можно показать, $\left(\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right)^n \to e^{\frac{1}{2}}$ при $n \to \infty$.

Л.Курляндчик, В.Сендеров

М1463. *Существуют ли такие натуральные числа x и y, что каждое из чисел*
а) $x+y$, $2x+y$ и $x+2y$,
б) $x+y$, $2x+y$ и $3x+y$
является точным квадратом?

а) Ответ отрицателен.
Предположим противное: $x+y=a^2$, $2x+y=b^2$, $x+2y=c^2$.
Сложив последние два равенства, получаем

$$3a^2 = b^2 + c^2. \qquad (*)$$

Докажем, что (*) не имеет решений в натуральных числах. В самом деле, если число b^2+c^2 делится на 3, то числа b и c либо оба делятся на 3, либо оба на 3 не делятся. Если

$$b = 3k \pm 1,\ a\ c = 3l \pm 1, \text{ то } b^2 + c^2 = 3m + 2.$$

Поэтому b и c делятся на 3. Но тогда и a делится на 3, так что тройка $\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right)$ является решением уравнения (*), и т.д. Это может быть только при $a=b=c=0$.
б) Ответ положителен. Обозначим $x+y=a^2$, $2x+y=b^2$, $3x+y=c^2$; имеем $b^2-a^2=c^2-b^2$, причем $2a^2 = 2x+2y > 2x+y = b^2$. Обратно, пусть

$$a^2 + c^2 = 2b^2 \qquad (**)$$

имеет решение в натуральных числах такое, что $2a^2 > b^2 > a^2$. Тогда числа $x = b^2 - a^2$, $y = 2a^2 - b^2$ удовлетворяют условиям задачи.
Решения уравнения (**) можно искать, например, так. Пусть u, v, b — «пифагорова тройка»: натуральные

числа такие, что $u^2+v^2=b^2$. Тогда числа $a=|u-v|$, $c=u+v$ удовлетворяют (**). Условие $2a^2>b^2$ можно переписать так:

$$u^2+v^2>4uv. \qquad (***)$$

Для (***) достаточным является неравенство $u\ge 4v$. Действительно, в этом случае $u^2\ge 4uv$, $u^2+v^2>4uv$.
Итак, для решения задачи достаточно найти пифагорову тройку u, v, b такую, что $u>4v$.
Очевидно, $u=2zt$, $v=|z^2-t^2|$, $b=z^2+t^2$, где $z\ne t$, z, t — натуральные числа, есть пифагорова тройка.
(Нетрудно показать и обратное: всякая пифагорова тройка «кратна» тройке такого вида.)
Уже при $z=4$, $t=5$ имеем $u=40>36=4v$.
Найденное решение является «минимальным»: при $u=2zt<40$ неравенство (***) выполняться не может.
Нетрудно, разумеется, выписать и сами найденные нами числа: $x=720$, $y=241$.

А.Грибалко, В.Сендеров

М1464. *R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника; r_1 — радиус окружности, вписанной в треугольник с вершинами в точках касания окружности со сторонами исходного треугольника. Докажите неравенство $2r_1\le r\le\sqrt{r_1R}$.*

Неравенство $2r_1\le r$ хорошо известно. Его можно доказать различными способами, в частности, заметив, что радиус окружности, проходящей через середины сторон треугольника, равен $r/2$ и, очевидно, не меньше r_1.
Докажем неравенство

$$r\le\sqrt{r_1R}.$$

Обозначим через α, β, γ углы исходного треугольника; нетрудно доказать равенство

$$\frac{r}{R}=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Аналогично

$$\frac{r_1}{r}=4\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\sin\frac{\beta+\gamma}{4}\sin\frac{\gamma+\alpha}{4}.$$

Перепишем доказываемое неравенство:

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\sin\frac{\beta+\gamma}{4}\sin\frac{\gamma+\alpha}{4}\ge\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \qquad (*)$$

Для доказательства (*) достаточно перемножить три неравенства вида

$$\sin\frac{\alpha+\gamma}{4}\ge\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}. \qquad (**)$$

Докажем (**). Пусть x, y — произвольные числа. Имеем:

$$2\sin x\sin y=\cos(x-y)-\cos(x+y)\le$$

$$\le 1-\cos(x+y)=2\sin^2\frac{x+y}{2}.$$

Неравенство задачи доказано.

Покажем теперь, как можно естественно прийти к этому решению.
При доказательстве (*) можно ограничиться рассмотрением случая $\alpha=\beta$.
Достаточно оценить снизу выражение

$$\frac{\left(1-\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\left(1-\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}}=$$

$$=\frac{1-\sin\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Имеем:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\le\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}\le 2\sin\frac{\alpha+\beta}{4}.$$

Перепишем теперь (*) для случая $\alpha=\beta$:

$$\sin^2\frac{\alpha+\gamma}{4}\ge\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Таким образом, мы пришли к (**).
Заметим, что в наших рассуждениях фактически содержится и доказательство этого неравенства, отличное от данного в решении задачи:

$$\sin\frac{\alpha+\gamma}{4}\ge\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}}{2}\ge\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Рассмотрим еще один связанный с решенной задачей вопрос.
Как известно, радиусы R и r и расстояние l между центрами окружностей Γ и Γ_1 связаны соотношением $l^2=R^2-2Rr$ (теорема Эйлера).
Обратно, если радиусы двух окружностей и расстояние между их центрами связаны этим соотношением, то данные окружности можно рассматривать как описанную и вписанную окружности некоторого треугольника (и даже бесконечного числа их; за вершину такого треугольника можно принять произвольную точку большей окружности).
Изучим, как изменяется радиус r_1 при «вращении» треугольника ABC вокруг окружности Γ_1.
Если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=$ $=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.
Пользуясь этим соотношением и равенством

$$\frac{r_1}{r}=4\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\sin\frac{\beta+\gamma}{4}\sin\frac{\gamma+\alpha}{4},$$

легко показать, что $r_1=r(x+y+z-1)$, где $x=\sin\frac{\alpha}{2}$, $y=\sin\frac{\beta}{2}$, $z=\sin\frac{\gamma}{2}$.

Считая окружности Г и $Г_1$ неконцентрическими, исследуем функцию $f(x)=x+y+z$, где $x^2+y^2+z^2=c$, $xyz=c_1$. Имеем:

$$f(x)=x+\sqrt{(y+z)^2}=x+\sqrt{c-x^2+\frac{2c_1}{x}}$$

($\sin\frac{E}{2}\le x\le\sin\frac{D}{2}$ — см. рис. 1).

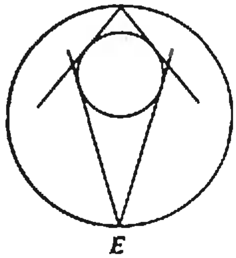


Рис. 1

Уравнение $f'(x)=0$ дает

$$2u^3-cu^2+c_1^2=0, \qquad (***)$$

где $u=x^2$.

Опираясь на (***), покажем, что функция $f(x)$ достигает максимума и минимума на концах отрезка $\left[\sin\frac{E}{2};\sin\frac{D}{2}\right]$. Следовательно, максимум и минимум r_1 достигаются (в каком-либо порядке) на двух треугольниках: с вершинами в E и D.

Заметим, что каждый из экстремумов $f(x)$ достигается не менее чем в одной *внутренней* точке отрезка. Пусть один из экстремумов (например, максимум) не достигается ни на одном из его концов. Тогда максимум $f(x)$ достигается не менее чем в трех внутренних точках отрезка. Следовательно, (***) имеет не менее четырех корней — противоречие.

Можно рассуждать и по-другому: многочлен $P_3(u)=2u^3-cu^2+c_1^2$ имеет не более двух положительных корней. Это сразу следует из неравенства $P_3(0)>0$ (а также из формул Виета, поскольку коэффициент при u равен нулю).

Проведенные рассуждения позволяют, разумеется, сразу выписать положительные корни (***): они отвечают боковым углам треугольников с вершинами в E и D. Вот эти корни: $u_{1,2}=\frac{1}{4}\pm\frac{l}{4R}$ (отрицательный корень: $u_3=-\frac{r}{4R}$).

К положительным корням уравнения $f'(x)=0$ можно прийти и сразу, из следующих геометрических соображений.

Рассмотрим, например, описанный около окружности $Г_1$ и вписанный в окружность Г треугольник AEC. Рассмотрим (на окружности Г) произвольную окрестность $U(A)$ точки A. Очевидно, существует *симметричная* окрестность $V(E)$ точки E такая, что соответствующая ей окрестность $V(A)$ точки A лежит в $U(A)$. Очевидно также, что для любой точки M окрестности $V(A)$, лежащей «слева» от A, найдется точка N этой окрестности, лежащая «справа» от A и такая, что

$$f\left(\sin\frac{M}{2}\right)=f\left(\sin\frac{N}{2}\right).$$

Следовательно, $f'(x)=0$ при $x=\sin\frac{A}{2}$.

Проведенные рассуждения позволяют получить полную информацию об изменении r_1 при «вращении» треугольника.

Функция $f(x)$ ведет себя так, как показано на рисунках 2 или 3.

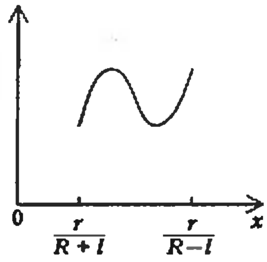


Рис. 2

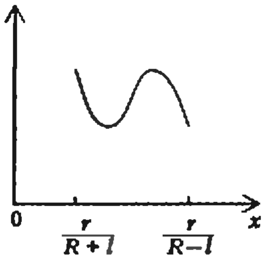


Рис. 3

Если углы с вершинами в D и E (см. рис. 1) не превосходят $\frac{\pi}{3}$, то максимум r_1 достигается в точке D (см. рис. 2). Если оба угла не меньше $\frac{\pi}{3}$, то максимум — в точке E (см. рис. 3).

Выпишем и явную формулу для r_1. Пусть, как и выше, α — один из углов треугольника ABC; обозначим $x=\sin\frac{\alpha}{2}$. Тогда

$$r_1=r\left(x+\sqrt{1-\frac{r}{2R}-x^2+\frac{r}{2Rx}}-1\right).$$

В. Сендеров

М1465. *а) Докажите, что для каждого натурального k существует не более одного многочлена f степени k со старшим коэффициентом 1, для которого выполняется тождество*

$$f(P(x))f(Q(x))=f(R(x)),$$

где $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ — данные многочлены (степени $P(x)$ и $Q(x)$ различны и больше 0).

б) Найдите хотя бы один многочлен $f(x)$ (отличный от постоянной) такой, что

$$f(x)f\left(2x^2\right)=f\left(2x^3+x\right),$$

в) все такие многочлены.

а) Допустим, что существуют два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ степени $k>0$, удовлетворяющие условию задачи. Тогда

$$f(R)-g(R)=f(P)(f(Q)-g(Q))+g(Q)(f(P)-g(P)). \quad (*)$$

Пусть $\deg(f-g)=m$ (знаком deg обозначают степень многочлена). Ясно, что $m<k$.

Пусть $\deg P(x)=\alpha$, $\deg Q(x)=\beta$ и, для определенности, $\alpha>\beta$. Из условия следует, что $\deg R(x)=\alpha+\beta$ (убедитесь в этом!).

В левой части равенства (*) стоит многочлен степени $m(\alpha+\beta)$. В правой части — сумма двух многочленов, степеней соответственно $k\alpha+m\beta$ и $m\alpha+k\beta$. Первая из этих степеней больше второй, и потому степень правой части равна $k\alpha+m\beta$. Но $k\alpha+m\beta>m(\alpha+\beta)$. Противоречие.

б) Ответ: $f(x)=x^2+1$.

в) Первое решение. По условию $\deg f>0$. Покажем, что $a_0=1$. Предположим, что $a_0=0$; пусть i — наименьшая степень, коэффициент при которой отличен от нуля. Наименьшая степень многочлена в левой части равенства, коэффициент при которой отличен от нуля, $3i$, в правой i. Противоречие.

Очевидно, $a_k=1$.

Докажем, что k — четное число. Предположим противное: пусть l — наибольшая четная степень, коэффициент при которой отличен от нуля, $l<k$. Наибольшая четная степень многочлена в левой части равенства $l+2k$, в правой $3l$; но $3l<l+2k$. Противоречие.

(Четность k можно доказать и по-другому. Достаточно доказать, что $f(x)$ не имеет вещественных корней. Предположим противное; пусть α — наибольший по модулю вещественный корень. Так как $a_0\neq 0$, то $\alpha\neq 0$. Очевидно, корнем является и число $2\alpha^3+\alpha$; но $|\alpha|\cdot|2\alpha^2+1|>|\alpha|$. Противоречие.)

Далее, $f(x)$ не содержит нечетных степеней. Доказательство аналогично первому доказательству четности k.

Следовательно, при $k=2$ многочленом задачи может быть лишь x^2+1. Непосредственно убеждаемся, что $f(x)=x^2+1$ удовлетворяет равенству условия.

Пусть теперь $k=2t$, где $t>1$. Тогда $\left(x^2+1\right)^t$ — многочлен задачи степени k. Из пункта а) следует, что других многочленов задачи степени k не существует.

Ответ: $\left(x^2+1\right)^k$, где $k=1, 2,\ldots$

Второе решение.

Пусть $f(x)=a_nx^n+\ldots+a_0$. Легко показать, что $a_n=a_0=1$.

Докажем, что если α — корень многочлена $f(x)$, то $|\alpha|=1$.

Пусть $\max|\alpha|=|\alpha_0|>1$. Тогда $\left|2\alpha_0^3+\alpha_0\right|\geq\left|2\alpha_0^3\right|-|\alpha_0|>|\alpha_0|$. Противоречие. Пусть найдется α такое, что $|\alpha|<1$. Тогда, так как $a_n=a_0=1$, то найдется α такое, что $|\alpha|>1$.

Поскольку для всякого α имеем $|\alpha|=1$, $\left|2\alpha^3+\alpha\right|=1$, то и $\left|2\alpha^2+1\right|=1$. Получили: $1=\left|2\alpha^2+1\right|\geq\left|2\alpha^2\right|-1=1$.

Отсюда $\alpha^2=-1$.

Теперь очевиден вид многочлена:

$$f(x)=\left(x^2+1\right)^n,\text{ где } n\in N.$$

В.Сендеров, М.Тройников

М1466*. *Два художника играют в следующую игру на карте (первоначально пустой). Первый рисует новую страну (многоугольник, не лежащий внутри уже нарисованных), а второй красит ее так, чтобы страны, имеющие общую сторону, были покрашены в разные цвета. Может ли первый художник заставить второго использовать более а) пяти, б) десяти цветов?*

Ответ: Первый может заставить второго использовать любое конечное число цветов.

Решение. Докажем это по индукции. Для одного цвета — очевидно. Допустим, первый художник уже научился заставлять второго использовать n цветов. Добавим в предположение индукции, что все цвета «доступны», т.е. можно нарисовать такую страну, которая будет граничить со странами всех n цветов. Построим тогда карту, в которой придется использовать $n+1$ цвет и все цвета будут доступны. Для этого построим рядом с нашей еще одну карту (такую же), где будут доступны n цветов. Если в новой карте встретится $(n+1)$-й доступный цвет, то цель достигнута; а если все цвета старые, то нарисуем страну, которая граничит в новой карте с n цветами (это можно сделать по предположению индукции). Получится $(n+1)$-й доступный цвет.

В.Ковальджи

М1467. *Пусть m и n — целые положительные числа. Пусть $a_1, a_2,\ldots, a_m$ различные элементы множества $\{1,2,\ldots,n\}$ такие, что для любых индексов i, j, удовлетворяющих условиям $1\leq i\leq j\leq m$ и $a_i+a_j\leq n$, существует индекс k, $1\leq k\leq m$, для которого $a_i+a_j=a_k$. Докажите, что*

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_m}{m}\geq\frac{n+1}{2}.$$

Пусть $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$, $a_1>a_2>\ldots>a_m$. Докажем, что $a_i+a_{m+1-i}\geq n+1$ для всех i. Действительно, если $a_i+a_{m+1-i}\leq n$ для некоторого i, тогда $a_i<a_i+a_m<a_i+a_{m-1}<\ldots\ldots<a_i+a_{m+1-i}\leq n$; но все i чисел a_i+a_m, a_i+a_{m-1}, …, a_i+a_{m+1-i} не могут принадлежать A, поскольку в A существует лишь $i-1$ различных чисел $a_1>\ldots a_{i-1}$, больших a_i. Отсюда следует, что

$$2(a_1+a_2+\ldots+a_m)=$$

$$=(a_1+a_m)+(a_2+a_{m-1})+\ldots+(a_m+a_1)\geq m(n+1),$$

т.е.

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_m}{m}\geq\frac{n+1}{2}.$$

М1468. *Дан равнобедренный треугольник ABC, где $AB=AC$. Предположим, что:*

(i) M — середина BC, и O — точка на прямой AM такая, что OB и AB перпендикулярны;

(ii) Q — произвольная точка отрезка BC, отличная от точек B и C;

(iii) точка E лежит на прямой AB, точка F лежит на прямой AC, и при этом точки E, Q и F различны и лежат на одной прямой.

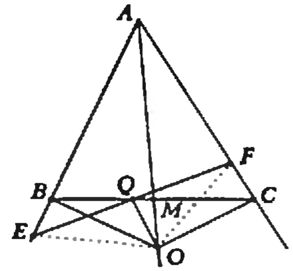
Докажите, что OQ и EF перпендикулярны тогда и только тогда, когда $QE=QF$.

Вот одно из решений задачи чисто геометрическими средствами.

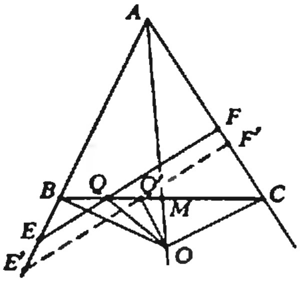
Предположим, что $OQ\perp EF$ (см. рис. а). Тогда четырехугольники $EBQO$ и $OQFC$ — вписанные (EO и OF — диаметры соответствующих окружностей) и $\angle OEQ=\angle OBQ=\angle OCQ=\angle OFQ$. Поэтому треугольник EOF — равнобедренный и $EQ=QF$.

Предположим теперь, что OQ — не перпендикуляр к EF. Через Q' — точку пересечения перпендикуляра, опущенного из O на EF, с прямой BC — проведем $E'F' \parallel EF$ (см. рис. б). Тогда, по доказанному выше, $E'Q' = Q'F'$ и если K — точка пересечения $Q'A$ с EF, то $EK = KF$. Но точка K отлична от Q, значит $EQ \neq QF$.

а



б



Замечание. Рисунок *а* — а именно, тот факт, что середина Q основания равнобедренного треугольника EOF лежит на отрезке BC, — легко объяснить с помощью векторов: поскольку $\vec{OM} = \left(\vec{OB} + \vec{OC}\right)/2$, $\vec{OQ} = \left(\vec{OE} + \vec{OF}\right)/2$, то $\vec{QM} = \left(\vec{CF} + \vec{BE}\right)/2$, а поскольку $\vec{CF}$ и $\vec{BE}$ равны по длине, их полусумма направлена по биссектрисе угла между их направлениями.

М1469. *Для любого целого положительного числа k через $f(k)$ обозначим число всех элементов в множестве $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$, в двоичном представлении каждого из которых имеется в точности три единицы.*
(a) Докажите, что для каждого целого положительного числа m существует хотя бы одно целое положительное число k такое, что $f(k)=m$.
(b) Найдите все целые положительные числа m, для каждого из которых существует единственное k, удовлетворяющее условию $f(k)=m$.

Пусть B_k — множество всех чисел от 1 до $2k$, в двоичной записи которых ровно 3 единицы, $g(k)$ — число элементов в B_k. Ясно, что $g(k)$ — неубывающая функция и $f(k) = g(2k) - g(k)$.
Поэтому

$$f(k+1) - f(k) = g(2k+2) - g(k+1) - \left(g(2k) - g(k)\right) =$$
$$= g(2k+2) - g(2k) - \left(g(k+1) - g(k)\right).$$

(a) Ясно, что $(2k+2) \in B_{2k+2}$ в том и только в том случае, когда $(k+1) \in B_{k+1}$. Поэтому $f(k+1) - f(k)$ не может

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$g(k)$	0	0	1	1	2	4	4	4	5	7	7...
$f(k)$	1	2	3	4	5	5	5	6	7	7	...

вырасти сразу на 2, точнее,

$$f(k+1) - f(k) = \begin{cases} 1, \text{ если } (2k+1) \in B_{2k+2}, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Но поскольку, очевидно, $f(k)$ растет неограниченно, эта функция принимает все натуральные значения.
(b) Уравнение $f(k)=m$ имеет для некоторого m единственное решение в том и только в том случае, если $f(k+1) - f(k) = 1 = f(k) - (f(k-1))$, т.е. $(2k+1) \in B_{2k+2}$ и оба числа k и $k-1$ имеют по две единицы в двоичной записи; другими словами, $k = 2^n + 2$, $n \geq 2$. При этом

$$m = f\left(2^n + 2\right) = 1 + n(n-1)/2 \text{ (где } n=2,3,\ldots),$$

это и есть все нужные значения m.

М1470. *Покажите, что существует множество A, состоящее из целых положительных чисел, которое обладает следующим свойством: для каждого бесконечного множества S простых чисел существует $k \geq 2$, а также существуют два целых положительных числа $m \in A$ и $n \notin A$ таких, что оба являются произведениями k различных элементов множества S.*

В качестве A можно взять множество произведений различных простых чисел вида $q_1 q_2 q_3 \ldots q_{q_1}$, где $q_1 < q_2 < \ldots < q_{q_1}$ (т.е. таких, что число сомножителей равно наименьшему из них: в A входит $2 \cdot 3$, $2 \cdot 5$, $2 \cdot 7, \ldots$, $3 \cdot 5 \cdot 7$, $3 \cdot 5 \cdot 11, \ldots$ и т.д.). Тогда для любого множества $S = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ простых чисел, $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$, очевидно, $m = p_2 p_3 \ldots p_{p_2}$ входит в A, а $n = p_3 p_4 \ldots p_{p_2+1}$ не входит в A: $p_2 + 1 < p_3$, а разложение на простые множители единственно («основная теорема арифметики»).

Ф1478. *С высоты $H = 50$ м без начальной скорости отпускают камень. В тот же момент из точки, находящейся прямо под камнем, начинает удирать по горизонтальной плоскости с постоянной скоростью заяц. При какой минимальной скорости зайца расстояние между ним и камнем в процессе движения не будет уменьшаться?*

По условию камень падает с ускорением g без начальной скорости, а заяц движется равномерно. Обозначим скорость зайца через v. По теореме Пифагора можно выразить расстояние x между зайцем и камнем. Но проще рассматривать квадрат этого расстояния — ведь если положительная величина не уменьшается, то и ее квадрат тоже не уменьшается, а писать лишних корней не придется. Итак,

$$x^2 = \left(H - \frac{gt^2}{2}\right)^2 + (vt)^2 = H^2 - Hgt^2 + \frac{g^2t^4}{4} + v^2t^2 =$$
$$= H^2 + t^2\left(\frac{g^2t^4}{4} + v^2 - gH\right).$$

Из анализа полученного выражения следует, что величина в скобках должна быть всегда положительной — только при таком условии расстояние между «соревнующимися» не будет уменьшаться. Самой большой получается необходимая зайцу скорость сразу после начала движения, именно это значение и дает ответ задачи:

$$v_{\min} = \sqrt{gH} \approx 22{,}4 \text{ м/с}.$$

З.Рафаилов

Ф1479. *Мячик подбрасывают вверх и измеряют полное время его полета. В каком случае это время окажется больше — при наличии силы трения о воздух, которую можно считать пропорциональной скорости мячика, или в отсутствие силы трения?*

Рассмотрим два одинаковых мячика, одновременно подброшенных вверх с одной и той же скоростью. Будем считать, что на мячик *1* действует сила трения о воздух, а на мячик *2* — нет. Легко понять, какой мячик раньше достигнет своей верхней точки — это мячик *1*, ускорение которого при движении вверх больше g. Однако при обратном движении ускорение этого мячика становится меньше g. Если бы падение продолжалось сколь угодно долго, то в конце концов мячик *2* догнал бы мячик *1* (движение которого через некоторое время стало бы почти равномерным). Остается выяснить, что произойдет раньше — встреча мячиков или падение мячика *1* на землю. Для ответа на этот вопрос не обойтись без уравнений.

Напишем для каждого мячика второй закон Ньютона в проекциях на вертикальную ось, направленную вверх:

$$m\frac{\Delta v_1}{\Delta t} = -mg - kv_1,$$

$$m\frac{\Delta v_2}{\Delta t} = -mg,$$

вычтем эти равенства друг из друга:

$$m\frac{\Delta(v_2 - v_1)}{\Delta t} = kv_1$$

и домножим на Δt, разделив на m:

$$\Delta(v_2 - v_1) = \frac{k}{m}v_1\Delta t.$$

Заметим, что

$$v_1\Delta t = \Delta h_1,$$

и просуммируем правую и левую части последнего равенства от начального до произвольного момента времени:

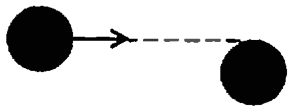
$$v_2 - v_1 = \frac{k}{m}h_1$$

(мы учли, что в начальный момент скорости мячиков одинаковы). Видно, что скорости мячиков сравняются только в тот момент, когда первый мячик коснется земли, т.е. когда $h_1 = 0$. Лишь после этого второй мячик стал бы приближаться к первому, но... уже поздно.

Итак, окончательный ответ — полное время движения мячика больше в отсутствие силы трения о воздух.

А.Черноуцан

Ф1480. *Шайба едет по гладкой горизонтальной поверхности и налетает на склеенные между собой две такие же шайбы (см. рисунок). Найдите угол разлета шайб после абсолютно упругого соударения. «Прицельное» расстояние равно радиусу шайбы. Трение отсутствует.*



При ударе гладких шайб силы реакции направлены вдоль линии, соединяющей центры шайб. В нашем случае — при «прицельном» расстоянии, равном радиусу, — силы эти составляют углы 30° с направлением скорости налетающей шайбы $\vec{v}_0$. Следовательно, тяжелая шайба полетит после удара именно под этим углом. Обозначим угол отклонения налетающей шайбы после удара φ, ее скорость v, скорость тяжелой шайбы u и запишем законы сохранения импульса — для проекций вдоль направления начальной скорости и перпендикулярно ему — и сохранения энергии:

$$0 = mv\sin\varphi - 2mu\sin 30°,$$

$$mv_0 = mv\cos\varphi + 2mu\cos 30°,$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{2mu^2}{2}.$$

Возводя в квадрат обе части второго уравнения и вычитая из него третье, получим, с учетом первого уравнения, что

$$\cos\varphi = 0.$$

Это означает, что налетающая шайба после удара будет двигаться в перпендикулярном начальному направлении, и угол разлета шайб составит 120°.

Р.Александров

Ф1481. *Множество маленьких стальных шариков находятся на гладком дне большой квадратной коробки площадью S. Шарики хаотически двигаются по дну, упруго соударяясь со стенками и друг с другом. Полная кинетическая энергия шариков W, все удары абсолютно упругие. Найдите силу, действующую со стороны шариков на одну из стенок. Какой станет эта сила, если, подвергнув коробку очень медленной деформации, увеличить размеры каждой стороны квадрата в два раза?*

Для нахождения силы, действующей на стенку коробки, воспользуемся приемом, который в школьном учебнике используется для нахождения давления газа на стенку сосуда — там тоже сила возникает при многочисленных ударах хаотически движущихся (но не в плоскости дна коробки, а в объеме всего сосуда) шариков. При ударе шарика о стенку происходит зеркальное отражение и меняется только знак перпендикулярной стенке проекции скорости. Обозначим ее v_x, а массу шарика m, тогда при ударе стенка получит импульс $2mv_x$. За малое время Δt в стенку ударятся те шарики, которые окажутся на расстоянии меньшем $v_x\Delta t$ и двигаются в направлении стенки. Таких шариков будет $Nav_x\Delta t/(2S)$, где N — общее число шариков, $a=\sqrt{S}$ — сторона дна коробки, и переданный стенке за это время импульс составит

$$p=2mv_x\frac{N}{2S}av_x\Delta t.$$

Сила, действующая на стенку, определяется через этот импульс:

$$F=\frac{p}{\Delta t}.$$

Учтем еще, что полная энергия шариков определяется их движением в двух направлениях:

$$W=\frac{2Nmv_x^2}{2}.$$

И тогда

$$F=\frac{W}{a}=\frac{W}{\sqrt{S}}.$$

При медленном увеличении размеров коробки суммарная энергия шариков уменьшается — при ударе шарика об «убегающую» стенку скорость отскока получается меньшей, чем до удара. Собственно, именно этим и объясняется охлаждение газа при его расширении без подвода тепла. Оценить это уменьшение можно разными способами. Например, воспользовавшись уравнением адиабаты (если вы с ним знакомы) — правда, там коечто придется поправить, наш «газ» не совсем обычный, его молекулы имеют не три, (как обычно), а только две степени свободы из-за движения в плоскости. Но можно получить результат и напрямую — изменение энергии шариков равно работе сил, с которыми они действуют на стенки. Итак, пусть две соседние стороны квадрата увеличились на очень малые величины Δa и стали равны $a+\Delta a$. Работа совершалась только над движущимися стенками и составила

$$-\Delta W=2F\Delta a=2W\frac{\Delta a}{a}.$$

Откуда получаем

$$-\frac{\Delta W}{W}=2\frac{\Delta a}{a}.$$

Такая связь между относительными изменениями величин имеет место при условии $W\sim 1/a^2$. Значит, при увеличении стороны квадрата в два раза (как в условии), полная энергия уменьшится в четыре раза. Тогда полная сила, действующая на боковую сторону коробки, станет в 8 раз меньше начальной и составит

$$F_1=\frac{W}{8\sqrt{S}}.$$

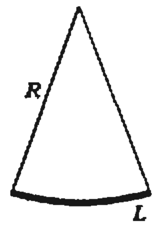
З.Рафаилов

Ф1482. *На двух легких нерастяжимых нитях, длиной R каждая, подвешена проволочная дуга того же радиуса R, имеющая длину L (см. рисунок). Найдите период малых колебаний такого маятника, если нити и дуга при движении остаются в вертикальной плоскости.*

Отклоним систему на очень малый угол φ. Возвращающий момент сил тяжести относительно точки подвеса определяется «излишком» массы m с одной стороны и «недостатком» — с другой:

$$2mgR\sin\alpha=2\left(\frac{M}{L}R\varphi\right)gR\sin\alpha,$$

где 2α — угол между нитями, M — масса всей проволочной дуги. Момент инерции системы относительно точки



подвеса найти очень легко — все «весомые» части находятся на расстоянии R от нужной нам точки:

$$I=MR^2.$$

Теперь напишем уравнение для малых колебаний — аналог второго закона Ньютона для вращательного движения:

$$MR^2\varphi''=-\frac{2MR^2g\sin\alpha}{L}\varphi.$$

Из этого уравнения находим период колебаний:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{2g\sin\alpha}}.$$

Угол α определяется отношением длины полудуги к радиусу:

$$\alpha=\frac{L}{2R}.$$

При малых дугах получается обычная формула для периода колебаний математического маятника (синус малого угла α заменяем самим углом).

У этой задачи есть красивое решение, использующее только закон сохранения энергии (не нужно ничего при этом говорить про момент инерции) — попробуйте найти его самостоятельно. Подсказка: сравните максимальные значения потенциальной и кинетической энергии и вспомните, как выглядит это соотношение для гармонических колебаний.

М.Ермилов

Ф1483. *В сосуде объемом $V=1$ см^3 содержится водяной пар при температуре $t=+100$ °С. Рассмотрим две молекулы пара, находящиеся в разных частях сосуда. Оцените время, в течение которого они столкнутся между собой 100 раз. Воздуха и воды в сосуде нет.*

Для оценки времени такого стократного удара будем считать, что после одного соударения молекулы разлетаются и долго соударяются с другими молекулами, прежде чем вновь встретиться. В этом случае можно считать, что для соударения с одной конкретной молекулой нужно в среднем столкнуться со всеми остальными по одному разу, а для стократного соударения — по 100 раз. Длина свободного пробега в не очень плотном газе, как обычно, составляет

$$l = \frac{1}{\pi d^2 n},$$

где d — диаметр молекулы, n — концентрация молекул в сосуде. За время t с одной молекулой происходит vt/l ударов. Скорость молекул v можно грубо оценить по формуле для средней кинетической энергии поступательного движения:

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \approx 700 \text{ м/с}.$$

Приравнивая число ударов за время t стократному числу молекул и учитывая, что концентрация $n = N/V$, получаем выражение для искомого времени:

$$t = \frac{100\,V}{\pi d^2 v}.$$

Диаметр молекулы воды можно оценить, зная плотность жидкости и считая, что в жидкости молекулы упакованы плотно, так что размер молекулы равен среднему расстоянию между центрами молекул. А это среднее расстояние можно оценить, исходя из величины объема, который приходится в жидкости на одну молекулу. Оценка дает величину $d = 3 \cdot 10^{-10}$ м. Окончательно

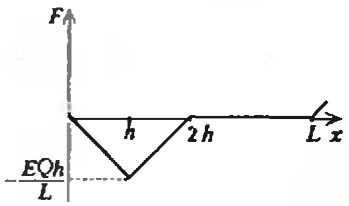
$$t \approx 5 \cdot 10^{11} \text{ с} \approx 10^8 \text{ ч}.$$

Это очень много! На самом деле, удары происходят сериями — «длина» серии зависит от концентрации молекул, и мы сделали оценку «сверху». Кстати, обратите внимание на то, что в ответ не вошла концентрация молекул (или — полное число молекул, или — давление паров), в условии не было сказано ничего о том, является ли водяной пар насыщенным.

А.Зильберман

Ф1484. ***Какую скорость нужно сообщить длинному и тонкому копью массой M, равномерно заряженному по длине L положительным зарядом Q, чтобы оно пролетело через два соседних слоя толщиной h, в первом из которых электрическое поле направлено против скорости копья, а во втором — вдоль скорости? Величина напряженности поля в обоих случаях равна E, полная толщина двух слоев меньше длины копья.***

Нарисуем график зависимости силы, действующей на копье со стороны электрического поля, от координаты наконечника копья (см. рисунок). Снаружи от слоев



поля нет, значит, нет и силы. По мере проникновения копья внутрь слоев вначале появляется и нарастает по величине тормозящая сила — она растет по линейному закону и достигает максимума в тот момент, когда пройден первый слой. Затем тормозящая сила убывает и становится равно нулю, когда наконечник копья высовывается наружу. Некоторое время сила будет равна нулю, а дальше возникнет «разгоняющая» сила — но это уже неинтересно, поскольку критическая точка соответствует концу торможения и если к этому моменту скорость копья не упадет до нуля, то оно проскочит оба слоя. Минимальную скорость найдем из закона сохранения энергии — приравняв начальную кинетическую энергию работе сил торможения (для такого простого закона изменения силы эту работу найти совсем просто):

$$\frac{Mv_0^2}{2} = F_{\text{ср}} \cdot 2h = \frac{1}{2}\frac{EQh}{L}2h = \frac{EQh^2}{L}.$$

Отсюда получаем

$$v_0 = h\sqrt{\frac{2EQ}{ML}}.$$

О.Савченко

Ф1485. *Две большие квадратные непроводящие пластины, площадью S каждая, расположены параллельно на малом расстоянии d друг от друга. Пластины равномерно заряжены по поверхностям зарядами Q и −Q. Найдите разность потенциалов между центром и углом одной из пластин.*

Напряженность электрического поля в середине между пластинами (на самом деле не только в середине, а почти повсюду — лишь бы не было слишком близко к краям пластин) определяется как обычно:

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}.$$

Поэтому разность потенциалов между серединами пластин равна

$$\Delta\varphi_0 = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}.$$

Перпендикулярная составляющая напряженности около угла одной из пластин вчетверо меньше поля в центре — это можно показать, дополнив наш «конденсатор» еще тремя парами заряженных аналогично пластин так, чтобы интересующий нас угол оказался в центре получившегося большого «конденсатора». При этом поле, с одной стороны, увеличилось в четыре раза, с другой — оказалось в центре. Итак, разность потенциалов между пластинами, измеренная в области угла, составляет

$$\frac{1}{4}\Delta\varphi_0 = \frac{Qd}{4\varepsilon_0 S}.$$

Пройдем теперь по такому замкнутому контуру: от центра одной пластины к ее углу, затем в такой же угол другой пластины, далее в ее центр и, наконец, в начальную точку. Интересующую нас разность потенциалов $\Delta\varphi$ между центром пластины и ее углом мы прошли два раза (со знаками все в порядке — заряд второй пластины противоположен заряду первой, но и направление перемещения обратное). Полная работа сил электрического поля равна нулю:

$$2\Delta\varphi - \Delta\varphi_0 + \frac{1}{4}\Delta\varphi_0 = 0,$$

тогда

$$\Delta\varphi = \frac{3}{8}\Delta\varphi_0 = \frac{3Qd}{8\varepsilon_0 S}.$$

О.Савченко

Ф1486. ***В схеме на рисунке 1 амперметр показывает ток 0,1 А, а вольтметр — напряжение 250 В. Что находится в «черном ящике»? Считайте элементы цепи идеальными, а показания приборов — точными. Напряжение сети 220 В, частота сети 50 Гц, индуктивность катушки 1 Гн.***

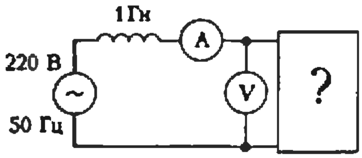


Рис. 1

Когда измерения проводятся только на одной частоте, существует бесчисленное множество схем, которые удовлетворяют результатам измерений. Приведем одну из возможных схем «черного ящика» — самую простую. Она состоит из последовательно включенных конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R. Найдем соответствующие параметры.

Напряжение на катушке равно

$$U_L = 2\pi\nu LI = 31{,}4\ \text{В},$$

напряжение на «ящике» составляет (см. рис.2)

$$U_V = 250\ \text{В} = \sqrt{I^2R^2 + I^2/(4\pi\nu^2C^2)},$$

а общее напряжение $U = 220$ В складывается из напря-

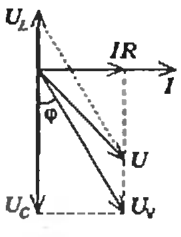


Рис.2

жений на катушке и на «ящике»:

$$U^2 = U_L^2 + U_V^2 - 2U_LU_V\cos\varphi.$$

Отсюда находим

$$\cos\varphi = \frac{U_L^2 + U_V^2 - U^2}{2U_LU_V} = 0{,}96, \quad \varphi = 16°,$$

$$C = \frac{I}{2\pi\nu U_V\cos\varphi} = 1{,}32\ \text{мкФ},\ R = \frac{U_V\sin\varphi}{I} = 690\ \text{Ом}.$$

Все напряжения и токи — действующие величины (напряжение сети 220 В — действующее значение). Однако все вышесказанное вполне подошло бы и для амплитудных значений.

А.Сашин

Ф1487. ***Фотодиод площадью 0,5 мм² расположен в фокусе линзы перпендикулярно главной оптической оси. С другой стороны линзы на этой оси находится точечный источник света. Во сколько раз изменится ток фотодиода при смещении источника от расстояния 1 м до расстояния 0,3 м? Диаметр линзы 1 см, фокусное расстояние 5 см. Ток фотодиода пропорционален световому потоку.***

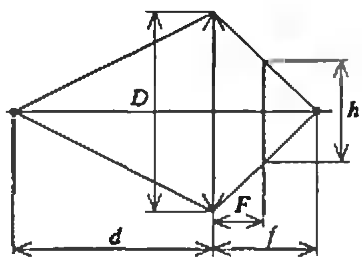
Найдем размер пятна света в фокальной плоскости линзы — там, где расположен фотоприемник (см. рисунок):

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},\ \frac{h}{D} = \frac{f - F}{f},$$

отсюда

$$h = \frac{DF}{d},\ S = \frac{\pi D^2F^2}{4d^2}.$$

В первом случае диаметр пятна меньше размеров фотодиода (проверьте это), и весь поток, попадающий на линзу, попадает и на фотодиод. Во втором случае (когда



источник придвинули поближе) размер пятна стал больше, и на фотодиод теперь попадает только часть светового потока, пропорциональная отношению площадей фотодиода и пятна света —

$$\frac{S_{фд}}{S_{п2}} = \frac{1}{4{,}36}.$$

Тогда отношение токов будет равно

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{1}{4{,}36}\frac{d_1^2}{d_2^2} \approx 2{,}5.$$

Видно, что при смещении источника ближе к линзе ток увеличился не в $(1/0{,}3)^2 \approx 11$ раз, как получилось бы при большом отверстии фотодиода, а только в 2,5 раза.

А.Сашин

Задачи

1. Какое число стоит на 1995-м месте в последовательности

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ... ?

(А.Савин)

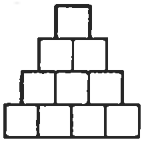
2. Замените буквы цифрами так, чтобы равенство

```
_КВАНТ | 25
 К**   |ЛЕТ
 _ВАН
  ***
   _**Т
    ***
      0
```

стало верным. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

(О.Потяркин)

3. Расположите в клетках пирамиды цифры 0, 1,

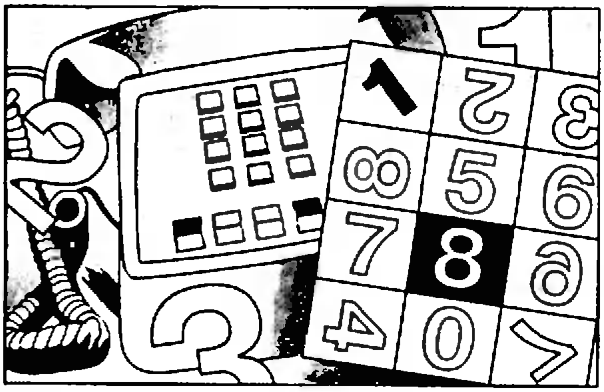


2, ..., 9 так, чтобы числа в каждой строке делились на 7 и на 9.

(Н.Антонович)

4. Какие треугольники можно разрезать на три равных треугольника?

(С.Костин)



5. В прямоугольнике, соответствующем панели кнопочного телефона, «звездочку» и «решетку» заменили некоторыми числами и переставили кнопки так, чтобы суммы чисел во всех четырех горизонтальных рядах стали равны и суммы во всех трех вертикальных рядах тоже стали равны. Какой при этом может стать наибольшая сумма всех этих чисел и какой наименьшая?

1	2	3
4	5	6
7	8	9
*	0	#

(И.Акулич)

Листая классиков...

И. АКУЛИЧ

Речь, разумеется, пойдет о классиках научно-популярной математической литературы как прошлого века, так и наших дней. Кто из нас в свое время (а то и поныне!) не был очарован прелестью замечательных книг Лойда, Дьюдени, Перельмана, Кордемского, Игнатьева, Барра, Гарднера... Да что там, всех не перечислишь! Читать их, решать предложенные задачи — не просто удовольствие, а прямо-таки наслаждение. Постепенно, однако, по мере знакомства со все новыми образцами такой литературы, любитель математики начинает замечать некоторые не вполне приятные детали, слегка (а затем все более и более) портящие стройную и поначалу казавшуюся безупречной картину. Выясняется, к примеру, что многие задачи повторяются у разных авторов почти дословно, разве что с другими именами действующих лиц. Затем выясняется, что и сами-то задачи нередко содержат неточные формулировки, побочные решения, а то и самые натуральные ошибки. В результате глубокий трепет и пиетет как-то незаметно сменяется у читателя снисходительно-полупрезрительным высокомерием: тоже мне, писаки! Ошибок понаделать и я бы смог!

Но давайте все же не будем так строги и в вылитую бочку дегтя добавим хотя бы малюсенькую ложечку меда. Будь популярная литература абсолютно безгрешной и неуязвимой — она из интересного собеседника и ненавязчивого учителя превратилась бы в догму, которая требует не понимания, а зубрежки. А этим, спасибо, мы сыты по горло! Лучше будем считать, что все эти неполадки в задачах даны специально, дабы отучить нас от слепого преклонения перед авторитетами, а заодно развить наше внимание, цепкость и умение зрить в корень. И за это — лишний раз спасибо корифеям популярной математики!

Данная статья вся создана на основе таких задач. Где-то получается интересное развитие темы, где-то двусмысленное толкование позволяет получить неожиданное решение, где-то задача может быть решена проще и эффективней. Думается, разбор таких случаев подвигнет читателя на самостоятельный поиск в этой же области, и притом с немалыми шансами на успех. Корнфеи — тоже люди, а людям, к счастью, свойственно ошибаться. Дерзайте!

Задача 1 (С.Лойд). *В ряд стоят три мальчика, на груди которых написаны большие цифры: 3, 1 и 6. Каким образом надо расположиться этим мальчикам, чтобы эти цифры образовали число, делящееся на 7?*

Правильный ответ заключается в том, чтобы третий мальчик стал на руки впереди первых двух, в результате чего образуется число 931, делящееся на 7. Любые другие перестановки ни к чему не приводят. А вот на той же основе другая задача: как этим мальчишкам с еще меньшими затратами энергии образовать число, делящееся на 27?

Задача 2 (С.Лойд). *Мальчик Том погнался за свиньей. В начальный момент он находился в 250 ярдах к югу от нее. Свинья бежит все время на восток, а Том в каждый момент движется прямо на свинью. Допустим, Том бежит в 4/3 раза быстрей свиньи. Какой путь пробежал Том, прежде чем ему удалось поймать свинью?*

Лойд утверждает, что сначала следует определить расстояние, которое пробежал бы человек до того, как схватить свинью, если бы свинья и человек бежали вперед по прямой. К этому расстоянию надо прибавить расстояние, которое пробежал бы человек до того, как схватить свинью, если бы оба бежали, но уже навстречу друг другу. Разделив полученный результат на 2, найдем искомый пробег Тома. В нашем случае он оказывается равен $571\frac{3}{7}$ ярда.

Конечно, от такого решения (да и решения ли?) у читателя могут глаза вылезти на лоб, но он наверняка будет поражен еще больше, узнав, что ответ этот — верный! Кто не верит, может найти его другим путем (в «Кванте» неоднократно писалось, как это делается). Что ж, победителей не судят. Так что воздержимся от дальнейшей критики и зададимся лучше вопросом: можно ли, не нарушая условия, поймать свинью быстрее?

Задача 3 (Я.Перельман). *Надо развесить 2 кг сахарного песку на 200-граммовые пакеты. Имеется только одна 500-граммовая гиря да еще молоток, весящий 900 г. Как получить все 10 пакетов, пользуясь этой гирей и молотком?*

Автор предлагает такой способ. Сначала кладут на одну чашку молоток, на другую — гирю и столько сахара, чтобы чашки уравновесились; ясно, что насыпанный на эту чашку песок имеет массу 400 г. Ту же операцию выполняют еще 3 раза; остаток песка имеет массу как раз столько же — 400г. Теперь остается только каждый из пяти полученных 400-граммовых пакетов разделить пополам, на два равных по весу пакета. Делается это без гирь очень просто: рассыпают 400 г сахара в два пакета на разных чашках, пока весы не уравновесятся.

А можно ли выполнить требования условия, если гиря отсутствует, а имеется только молоток?

Задача 4 (Я.Перельман).

— Скажи-ка, дедушка, какого возраста твой сын?

— Ему столько же семидневок, сколько внуку дней.

— А внук в каком возрасте?

— Ему столько же месяцев, сколько мне лет.

— Сколько же тебе-то?

— Троим вместе ровно 100 лет. Вот и смекай, сколько каждому.

Смекнуть, конечно, нетрудно, но давайте предположим, что это еще не задача, а только присказка. А сама задача такова. Впоследствии дед утверждал, что такой разговор происходил летом 1924 года, сын — что весной 1925 года, а внук — что зимой 1926 года, но лишь один из них правильно назвал год, и один — время года. Когда же состоялась эта беседа?

Очень важное примечание: Перельман не ошибся!

Задача 5 (Б.Кордемский). *Вот два четырехзначных числа, обладающих интересным свойством:* $3025=(30+25)^2$ *и* $9801=(98+01)^2$. *Найдите еще одно такое число.*

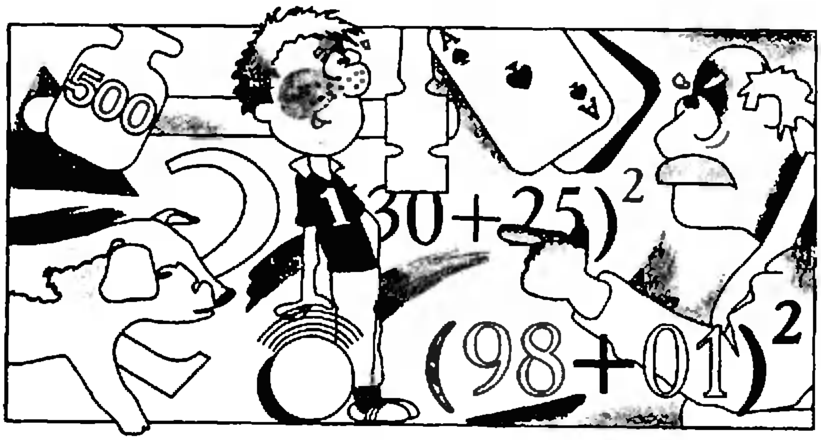
Здесь условие ясно и сомнений не вызывает, но решение... Автор честно признается, что попросту (ничего себе, попросту!) перебрал и проверил все четырехзначные квадраты, а таковых ни много, ни мало — 68 штук! Сизифов труд, особенно если учесть, что при первом опубликовании этой задачи (в пятидесятые годы) калькуляторов еще не было. Нельзя ли решить задачу, уменьшив перебор хотя бы в 5 – 6 раз?

Задача 6 (М.Гарднер). *Из обычной карточной колоды в 52 листа надо выбрать 9 карт так, чтобы из них можно было сложить магический квадрат с наибольшей постоянной (т.е. суммой цифр, одинаковой по всем вертикалям, горизонталям и обеим диагоналям). Туз оценивается в 1 очко, валет — в 11, дама — в 12, король — в 13.*

Оказывается, эта наибольшая постоянная равна 36:

К	В	Д
В	Д	К
Д	К	В

При решении явно чувствуется, что эта задача «не доделана»: ведь поскольку в колоде аж 52 карты, то можно также попытать счастья с магическими квадратами 4×4, 5×5, 6×6 и 7×7. Какая наибольшая постоянная возможна в этих случаях?



Ответы и решения

Задача 1. Поначалу задача кажется неразрешимой. Действительно, как мальчиков ни переворачивай (хоть клади на бок!), ничего, кроме известного уже превращения шестерки в девятку, не произойдет, поэтому сумма цифр результата равна либо 3+1+6=10, либо 3+1+9=13. Ни одно из этих чисел не делится на 9, поэтому (в соответствии с признаком делимости на 9) никакое число, составленное из имеющихся цифр, также не сможет делиться на 9. А поскольку 27 делится на 9, то и решения нет.

И все-таки есть! Для этого первому мальчику надо всего лишь... присесть. Тогда его цифру можно рассматривать как основание, а остальные две — как показатель степени. В результате получаем число 3^{16}, которое, без сомнения, делится на 27.

Задача 2. Свинью можно поймать быстрее, если учесть... шарообразность Земли! Конечно, имеется в виду не погрешность от замены сферы плоскостью — при радиусе нашей планеты 6400 км и жалких сотнях ярдов пробега скольнибудь заметных отличий не будет. Дело в другом: координатная сетка Земли — система параллелей и меридианов, причем параллели представляют собой окружности, радиусы которых убывают по мере приближения к полюсам. Бег же свиньи на восток — это как раз движение по параллели. Если мы перенесем место действия на Северный полюс (бррр...), то при достаточно малом радиусе окружности свинья будет почти что топтаться на месте, попирая ногами земную ось. А путь Тома превратится почти в прямую линию с длиной, равной первоначальному расстоянию, т.е. 250 ярдов. Таким образом, удастся догнать жертву быстрее в $571\frac{3}{7}:250 \approx 2{,}29$ раза. Весомое достижение!

Кажется невероятным, что его можно превзойти — ведь для этого путь Тома должен стать меньше первоначального расстояния, разделяющего его со свиньей. И все-таки это возможно, если перенестись на Южный полюс. Пусть в начальный момент Том и свинья находятся по разные стороны от полюса (тогда Том, в соответствии с условием, будет находиться все же к югу от свиньи, ибо свинья, посмотрев точно на юг, увидит там своего преследователя). Если радиус окружности подобрать так, чтобы Том поймал свинью еще до того, как она пробежит половину окружности, то он поймает ее на встречном курсе, так как свинья сама побежит к Тому, хотя и не по прямой (все это иллюстрирует рисунок 1, на котором точкой *П* обозначен полюс, точками *Т* и *С* — исходные позиции участников, точкой *А* — место встречи). Надо сказать, что эту задачу чисто теоретически решить не удалось, и пришлось использовать компьютер (читатели, также имеющие компьютер, могут лично убедиться в справедливости изложенного ниже). Оказывается, если радиус окружности равен 54,3 ядра, то путь Тома составит всего лишь 167 ярдов, а это в 3,42 раза меньше первоначального!

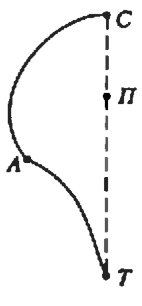


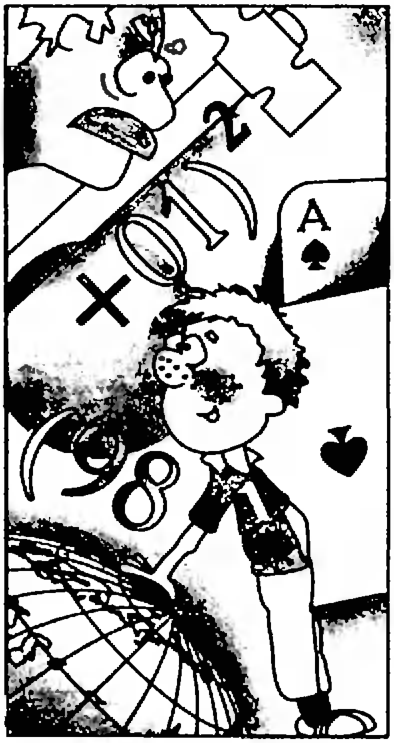
Рис. 1

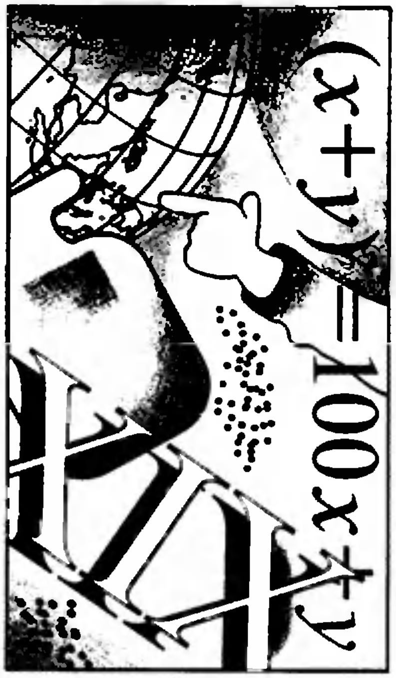
Задача 3. С одним молотком, без гири, задача решается, кажется, еще проще. Отвесим от исходного количества сахара два раза по 900 г, и останется 200 г. Используя эти 200 г как эталон — этакую сахарную двухсотграммовую гирю — отвешиваем еще 9 пакетов по 200 г.

Задача 4. Исходное решение задачи Я.И.Перельмана вполне очевидно. Если внуку — x лет, то сыну $7x$ лет, а деду — $12x$ лет. Вместе это составляет 100 лет, и потому $x = 5$, т.е. внуку — 5 лет, сыну — 35 и деду — 60 лет, причем, согласно примечанию, это решение верное (Перельман не ошибся!).

У нас и без того не было бы оснований сомневаться в результатах, если бы не одно обстоятельство. Если взять любой промежуток времени продолжительностью в 5 лет, то в нем окажется либо 1, либо 2 високосных года, т.е. 5 лет составляют либо $365 \cdot 5 + 1$, либо $365 \cdot 5 + 2$ дней. Таков возраст внука в днях. Сын прожил в 7 раз больше дней, т.е. соответственно либо $365 \cdot 35 + 7$, либо $365 \cdot 35 + 14$ дней. С другой стороны, сыну 35 лет, и среди любых 35 лет либо 8, либо 9 високосных лет. Но тогда сыну должно быть либо $365 \cdot 35 + 8$, либо $365 \cdot 35 + 9$ дней, что никак не согласуется с его возрастом в днях, подсчитанным другим способом.

Конечно, можно возразить: когда говорят, что человеку, например, 35 лет, это означает лишь, что его 36-й день рождения еще не наступил, поэтому противоречия нет. Такое возражение правомерно, но не для данной задачи, потому что когда в условии речь идет о числе прожитых дней, то необходимо все вычисления производить с точностью до одного дня (и не ниже!). Вот если бы было просто сказано, что сын в 7 раз старше внука — тогда другое дело.





Отвергнув сей аргумент, вернемся к решению. Как же примирить несогласующиеся результаты? В качестве миротворца-посредника выступает 1900-й год, который не был високосным! Поскольку разговор происходил либо в 1924, либо в 1925, либо в 1926 году, то сын заведомо родился в XIX веке и «захватил» 1900-й год, вследствие чего он прожил на 1 день меньше, чем было подсчитано ранее, т.е. либо $365 \cdot 35 + 7$, либо $365 \cdot 35 + 8$ дней. Как видно, первое значение совпадает с первым значением возраста внука в днях, увеличенным в 7 раз.

Попробуем определить год разговора. Если он состоялся в 1925 году, то сын родился в 1890 году, и за этот период, как легко убедиться, прошло 8 полных високосных лет (1892, 1896, 1904, 1908, 1912, 1916, 1920 и 1924). По той же причине отвергаем и 1926 год, так как тогда год рождения сына — 1891, и в этот промежуток попадают те же 8 високосных лет. Остается последняя возможность: разговор происходил в 1924 году (и год рождения сына — 1889). Но если это было весной или летом 1924 года, то в число прожитых сыном лет войдет 29 февраля 1924 года, т.е. снова получится 8 високосных лет. Поэтому разговор обязан был произойти только в январе или феврале 1924 года, т.е. зимой. А вот и пример, подтверждающий непротиворечивость ситуации. Пусть разговор состоялся 1 января 1924 года в 22^{00} (время указано для еще большей четкости). Внук родился 1 января 1919 года также в 22^{00}. В момент разговора ему исполнилось как раз 5 лет, либо 60 месяцев, либо (нетрудно проверить) $365 \cdot 5 + 1$ дней. Сын родился в 22^{00} 1 января 1889 года, и ему исполнилось 35 лет, что составляет $365 \cdot 35 + 7$ дней, и это составляет ровно столько же семидневок (т.е. недель), сколько внуку дней. Ну, а деду столько же лет, сколько внуку месяцев, т.е. 60 (число дней, прожитых дедом, нас не интересует), и родился он в 1864 году (разумеется, тоже 1 января в 22^{00}). Сумма их возрастов составляет ровно (и даже очень ровно) 100 лет.

Итак, год разговора (1924) правильно назвал дед, а время года (зиму) — внук.

Задача 5. Обозначим двузначное число, образованное первыми двумя цифрами искомого четырехзначного числа, через x, а число, образованное вторыми двумя цифрами (это, правда, может оказаться и однозначным) — через y. Тогда очевидным образом получаем уравнение

$$(x+y)^2 = 100x + y.$$

Отсюда $x = 50 - y \pm \sqrt{2500 - 99y}$. Чтобы подкоренное выражение было неотрицательным, должно выполняться неравенство $2500 - 99y \geq 0$, откуда $y \leq 25$. Как видно, перебор уже сократился до 26 чисел (от 0 до 25 включительно). Но и это не предел. То же подкоренное выражение должно быть квадратом. Запишем его в виде $2500 - 99y = 100(25 - y) + y$. Отсюда следует, что последние две цифры квадрата представляют собой число y. А, как известно, последние цифры квадрата не могут быть произвольными. Например, квадрат не может оканчиваться цифрой 2, 3, 7 или 8. Это позволяет отбросить значения $y = 2, 3, 7, 8, 12, 13, 17, 18, 22$ и 23. Кроме того, если квадрат оканчивается нулем, то предпоследняя его цифра — тоже ноль. Поэтому отбрасываем также $y = 10$ и 20. Мало того, если квадрат оканчивается на 5, то предпоследняя цифра — только 2. Как следствие отбрасываем $y = 5$ и 15. Наконец, проанализировав равенства

$$(10k \pm 1)^2 = 100k^2 \pm 20k + 1$$

и

$$(10k \pm 3)^2 = 100k^2 \pm 60k + 9,$$

выясним, что если последняя цифра квадрата нечетна, то предпоследняя — непременно четна. Это отсекает еще два числа: $y = 11$ и 19. Что осталось? Только 10 чисел: $y = 0, 1, 4, 6, 9, 14, 16, 21, 24$ и 25. Перебор, как видно, сократился даже более чем в 6 раз: с 68 четырехзначных до 10 одно- и двузначных чисел. Неплохо! А теперь осталось провести прямую проверку.

10	11	12	13
12	13	10	11
11	10	12	13
13	12	11	10

11	11	9	11	9
13	7	9	12	10
12	10	8	10	11
6	13	12	12	8
9	10	13	6	13

11	7	6	10	7	13
13	5	8	7	12	9
8	10	11	7	6	12
8	11	5	12	9	9
5	8	13	12	10	6
9	13	11	6	10	5

6	9	11	8	4	3	10
13	10	2	7	3	13	3
2	12	1	13	9	8	6
11	3	11	4	8	9	5
5	2	9	12	12	7	4
13	5	7	1	8	6	11
1	10	10	6	7	5	12

Рис.2

Что же выясняется? Только в трех случаях подкоренное выражение является квадратом:

1) $y = 0$. Тогда $x = 0$ и 100, но ни одно из этих чисел не является двузначным.

2) $y = 1$. Тогда $x = 0$ и 98. Первое значение не двузначное, а второе дано в условии (ему соответствует 9801).

3) $y = 25$. Тогда $x = 20$ и 30. Второе дано в условии (ему соответствует 3025), а первое не было известно, и потому именно оно дает ответ: $2025 = (20 + 25)^2$.

Задача 6. Рассмотрим квадраты по порядку:

1) 4×4. Этот квадрат содержит 16 клеток. Если взять 16 карт с наибольшим достоинством (все короли, дамы, валеты и десятки), то сумма их значений равна $4 \cdot (13 + 12 + 11 + 10) = 184$, поэтому сумма в каждой строке квадрата не может превысить $184 : 4 = 46$.

2) 5×5. Этот квадрат содержит 25 клеток. Если взять 25 карт с наибольшим достоинством (все короли, дамы, валеты, десятки, девятки, восьмерки и одну семерку), то сумма их значений равна $4 \cdot (13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8) + 7 = 259$, поэтому сумма в каждой строке квадрата не может превысить $259 : 5 = 51\frac{4}{5}$. Таким образом максимальное допустимое значение суммы — 51.

3) 6×6. Этот квадрат содержит 36 клеток. Если взять 36 карт с наибольшим достоинством (все короли, дамы, валеты, десятки, девятки, восьмерки, семерки, шестерки и пятерки), то сумма их значений равна $4 \cdot (13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5) = 324$, поэтому сумма в каждой строке квадрата не может превысить $324 : 6 = 54$.

4) 7×7. Этот квадрат содержит 49 клеток. Если взять 49 карт с наибольшим достоинством (все, кроме трех тузов), то сумма их значений равна $4 \cdot (13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2) + 1 = 361$, поэтому сумма в каждой строке квадрата не может превысить $361 : 7 = 51\frac{4}{7}$. Таким образом, максимальное допустимое значение суммы — 51.

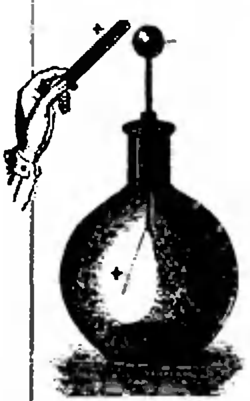
То, что все эти квадраты можно построить, показывает рисунок 2. Как видно, получился весьма неожиданный результат: наибольшая сумма, вопреки ожиданиям, достигается для квадрата 6×6, а не 7×7. Но отчего при переходе от квадрата 6×6 к квадрату 7×7 эта сумма уменьшилась? Дело в следующем. Сумма чисел в каждой строке равна общей сумме, деленной на количество строк. Как видно, возросла и общая сумма, и количество строк, но сумма возросла «слабее», поскольку добавились карты самого мелкого достоинства. Вот и получилось снижение суммы по строкам.

А ТАК ЛИ ХОРОШО ЗНАКОМ ВАМ

электрический заряд?

> *Наэлектризуйте шар, и пробковая горошина отлетит приблизительно на четыре-пять дюймов в зависимости от количества электричества.*
>
> Бенджамин Франклин

ЕСЛИ вы ответили «да», значит, почувствовали, что у Франклина речь идет именно о нем — о заряде. А термин «количество электричества» появился в связи с представлением о заряде как о некой жидкой субстанции, способной перетекать с одного тела на другое и сообщать им свойство притягиваться или отталкиваться. Так это и закрепилось в языке — например, мы говорим: «заряд стекает», «ток течет» и т.д.



А вот воззрения наши на природу электричества за два с половиной века, прошедших со времени опытов Франклина, существенно изменились. Были открыты мельчайшие частицы, «ответственные» за перенос заряда, обнаружено «участие» заряда в неизвестных ранее микроскопических процессах в атоме и его ядре, создано несколько сменивших друг друга теорий, объясняющих не только электрические, но и родственные им магнитные явления. Понятие электрического заряда, занимая в этих теориях центральное место, остается при этом не менее загадочным, чем сотни лет назад.

Тем не менее, огромный опыт человечества, приобретенный от «общения» с электрическими зарядами, поможет нам и сегодня — в решении как самых простых, так и более сложных задач.

Вопросы и задачи

1. Изолированному проводящему телу сообщили положительный заряд. Изменилась ли при этом его масса?

2. На тонких шелковых нитях подвешены две одинаковые легкие гильзы, одна из которых заряжена. Как определить, какая именно заряжена, не пользуясь никакими приборами?

3. Можно ли на концах стеклянной палочки создать разноименные заряды?

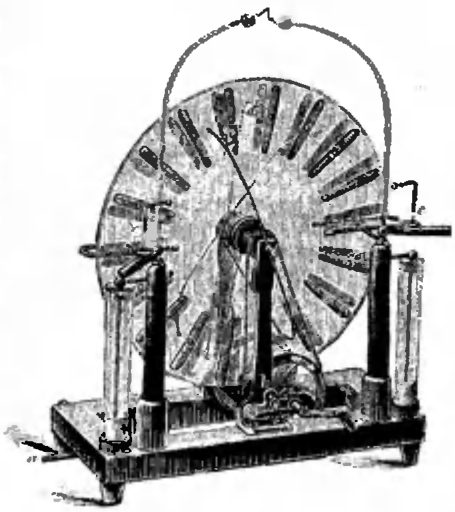
4. Каков знак заряда шара, изображенного на рисунке 1?

5. Положительно заряженная стеклянная палочка притягивает подвешенный на нити легкий проводящий шарик. а) Можно ли отсюда заключить, что шарик заряжен отрицательно? б) Следует ли из отталкивания этой палочкой шарика, что он заряжен положительно?

6. Как, имея электрический заряд, получить заряд другого знака?

7. Можно ли передать весь заряд с одного проводника на другой?

8. Полый латунный шар *A* с небольшим отверстием заряжен положительно, как показано на рисунке 2. Зарядится ли металлический шар *B*, если его соединить проволокой с внутренней поверхностью шара *A*?



9. Если зарядить проводник *A*, то на проводнике *B* возникают индуцированные заряды, а если зарядить проводник *B*, то на проводнике *A* заряды не возникают. В каком случае это возможно?

10. Два одноименно заряженных металлических шара одинакового диаметра приводят в соприкосновение. Как

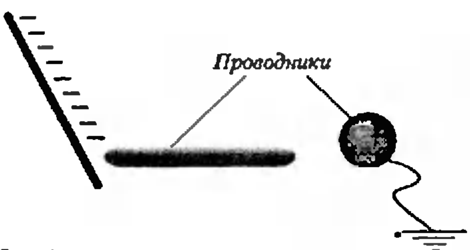


Рис. 1

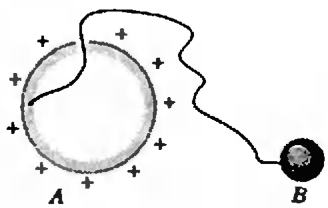


Рис. 2

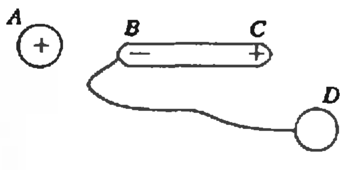
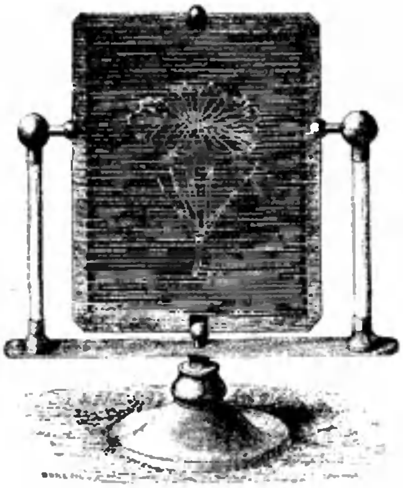


Рис. 3



распределятся заряды на шарах, если один из шаров полый?

11. Положительно заряженный шар *А* индуцировал заряды на незаряженном проводнике *ВС*, как показано на рисунке 3. После этого левую половину проводника *ВС* соединили с незаряженным шаром *Д*. Каков знак заряда, приобретенного этим шаром?

12. Зачем при промышленном изготовлении пороха его обволакивают порошком графита?

13. Листочки электроскопа расходятся при приближении к его стержню наэлектризованной палочки еще до того, как она коснется стержня. Не противоречит ли это закону сохранения заряда?

14. В чем суть различия между явлениями внешнего и внутреннего фотоэффекта?

15. Каким образом при β-распаде из ядра радиоактивного вещества может выбрасываться электрон, когда в состав ядра входят только протоны и нейтроны?

16. Чем отличается по составу ядро легкого изотопа гелия от ядра сверхтяжелого водорода?

17. Почему в камере Вильсона летящий протон оставляет видимый след, а летящий нейтрон нет?

Микроопыт

Потрите газетой детский воздушный шар, приблизьте его к потолку и отпустите. Шар останется висеть у потолка, и это может продолжаться долгое время. Почему?

Любопытно, что...

...впервые исследованием способности янтаря электризоваться занялся знаменитый древнегреческий философ Фалес Милетский. По легенде, его внимание к этому вопросу привлекла дочь, заметившая, как прилипают к янтарному веретену шерстинки во время пряжи.

...французский ученый Ш.Дюфе, введший понятие о двух родах электричества, назвал их «стеклянным» и «смоляным». «Первое, — писал он, — появляется на потертых стекле, кварце, драгоценных камнях, волосах животных, шерсти. Второе — на потертых янтаре, шелке, пряже, бумаге...»

...один из первых приборов, позволяющих измерить электрический заряд, — электрометр — изобрел русский физик Г.Рихман. Увы, Рихман погиб при измерении электрометром заряда конденсатора от молнии, ударившей в шест его «громовой машины».

...научная судьба Б.Франклина, оказавшего огромное влияние на изучение электрических явлений, весьма необычна. Он не был физиком ни по образованию, ни по роду деятельности. Собственно электрическим исследованиям он посвятил всего около семи лет жизни.

...о том, что должен существовать наименьший в природе электрический заряд, догадывались давно. Эти подозрения, а также уверенность в том, что «электрические частицы» как-то связаны с атомами, укрепились после опытов М.Фарадея по электролизу. А понятие электрона как минимального неделимого заряда было введено лет за 25 до открытия электрона как частицы.

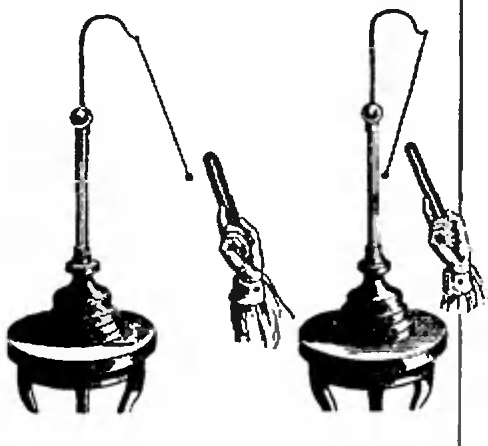
...весьма чувствительные эксперименты, проведенные для выяснения различия в величинах зарядов протона и электрона, позволяют заключить, что эти заряды равны с точностью до 10^{-21}.

...когда в 1963 году из глубин Исландского моря поднялся вулкан, образовав новый небольшой островок, в темных облаках над вулканом засверкали яркие молнии. Дело было в том, что раскаленная лава, попав в море, поднимала вверх облака положительно заряженного пара. После соответствующего накопления заряда облака разряжались в море, причем, в отличие от обычной молнии, электроны двигались вверх по каналу разряда.

...электростатические эффекты, зачастую служащие помехой, например при транспортировке хлеба в элеватор, могут играть и положительную роль. Так, абразивное зерно помещается под намазанной клеем бумагой и подскакивает, прилипая к ней, благодаря электростатическому притяжению, создаваемому в нужном месте.

...с точки зрения электростатики, любой атом как система положительно и отрицательно заряженных частиц не может быть устойчивым. Но так как громадное большинство атомов устойчивы, приходится считать атом системой динамической, т.е. приписать либо протонам, либо электронам непрерывное движение.

...для того чтобы удалить электрон из металла, необходимо преодолеть силу притяжения положительных ионов. Этого можно достичь увеличением температуры — явление термоэлектронной эмиссии, бомбардировкой металла электронами — явление вторичной электронной эмиссии или действием света — явление внешнего фотоэффекта.



Что читать в «Кванте» об электрическом заряде

(публикации последних лет)

1. *«Громоотвод, политика и... шляпки»* — 1989, № 1, с. 13;
2. *«Альфа-частицы и опыты Резерфорда»* — 1989, № 3, с. 49;
3. *«Заряженная поверхность жидкости»* — 1989, №12, с.2;
4. *«Электризация через влияние»* — 1990, №3, с.38;
5. *«Силовые линии и теорема Гаусса»* — 1990, №3, с.52;
6. *«Электрический злодей и волшебное колечко»* — 1990, №8, с.70;
7. *«Гроза и грозоотвод»* — 1991, №1, с.35;
8. *«Из старых опытов»* — 1991, №8, с.35;
9. *«Электрическое действие пламени»* — 1992, №10, с.50;
10. *«Игра нитей в опыте Рихмана»* — 1992, №11, с.28.

Материал подготовил
А.Леонович


$mgH - \frac{mv^2}{2} = A$
$I \rightarrow$
$F \rightarrow 0$
$h = \frac{v_0^2}{g + \frac{k}{2m} v_0^2}$
$n = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} > 1$
$n_2 \sin\alpha_2 = n_1 \sin\alpha_1$
ANABLEPS TETROPHTHALMUS
$k = \frac{c}{2} \rho S$

ФИЗИКА 9 — 11

Публикуемая ниже заметка «Старинное оружие» предназначена девятиклассникам, заметка «Парадоксы постоянного магнитного поля» — десятиклассникам, «Волны на пляже, Солнце в небе и многое другое» — одиннадцатиклассникам.

Старинное оружие

В. ДРОЗДОВ

Дальность эффективной стрельбы из лука 100—150 м (на состязаниях она доходила до 900 м).

БСЭ, том 25

Хотя лук и стрелы давно уже перестали быть оружием, перейдя в область спорта и детских игрушек, приведенная дальность стрельбы из боевого лука на первый взгляд может показаться неправдоподобно большой. Правда относительно недавно газета «Известия» рассказывала о попадании в цель из лука с расстояния 536 м. Для сравнения заметим, что стрела из самодельного лука пролетает примерно 50 м.

Проверим возможности боевого лука с помощью законов физики. Нужные для расчетов величины, характеризующие лук и стрелы, возьмем из литературы. Обычно луки классифицировались по силе F, необходимой для их полного натяжения. В британских единицах различались луки малого, среднего и большого натяжения. В современных единицах это соответствует силам натяжения 648, 864 и 1079 Н. Длина стрелы l составляла, как правило, от 60 до 100 см, а ее диаметр d — соответственно от 0,5 до 1,2 см.

Будем считать лук упругим телом, подчиняющимся закону Гука. Тогда по закону сохранения энергии имеем

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{F(l-h)}{2},$$

где v_0 — начальная скорость стрелы массой m, h — максимальный прогиб лука (пусть, для определенности, $h = l/2$). Очевидно, что сопротивление воздуха играет весьма важную роль при полете стрелы (иначе зачем делать ей оперение?). Однако точно учесть сопротивление воздуха очень трудно, так что придется делать оценочный расчет, результат которого все же не будет отличаться от истинного в «разы».

Оценим максимальную дальность полета стрелы L, исходя из следующих соображений. Известно, что в отсутствие сопротивления воздуха максимальная дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту, равна v_0^2/g (проверьте это). А максимальная высота подъема тела, брошенного вертикально вверх с той же начальной скоростью, равна $v_0^2/(2g)$, т.е. вдвое меньше. Примем, что такое же соотношение существует и при наличии сопротивления воздуха (это разумно, поскольку сопротивление уменьшает обе эти величины).

Итак, пусть тело брошено вертикально вверх. Наибольшую высоту подъема H найдем из закона сохранения энергии

$$mgH - \frac{mv_0^2}{2} = A,$$

где A — работа силы сопротивления воздуха при вертикальном подъеме стрелы. При достаточно быстром, хотя и далеком до скорости звука, движении стрелы силу сопротивления воздуха можно считать пропорциональной квадрату ее скорости: $F_c = kv^2$. Поскольку мы лишь делаем оценки, нет смысла точно вычислять работу A. Положим, что

$$A = -F_{c\,cp}H,$$

где

$$F_{c\,cp} = \frac{kv_0^2}{2}$$

— «среднее» значение силы сопротивления воздуха. Тогда получим

$$H = \frac{v_0^2}{2g + \frac{k}{m}v_0^2}.$$

Значит, максимальная дальность полета стрелы равна

$$L = \frac{v_0^2}{g + \frac{k}{2m}v_0^2}.$$

Легко проверить, что хотя величина v_0 входит и в числитель, и в знаменатель, максимальная дальность полета стрелы монотонно возрастает с ростом начальной скорости (это подтверждает разумность вычислений).

Размерный коэффициент пропорциональности k обычно записывается в виде

$$k = \frac{c}{2}\rho S,$$

где ρ — плотность среды, S — максимальная площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной его скорости, c — безразмерная величина, обычно меньшая чем 1. Заметим, что, пропорциональность силы сопротивления произведению $\rho S v^2$ можно установить, например, из соображений размерностей. (А можно и вывести более строго. См., например, статью А.Гросберга в этом номере журнала. — *Прим. ред.*) Из опыта ясно, что если вектор скорости стрелы совпадает с нею, то сопротивление воздуха минимально, при этом $S = \pi d^2/4$. Если вектор скорости стрелы перпендикулярен к ней, то сопротивление воздуха максимально — при этом $S = ld$. Во время полета стрелы, пущенной из лука, угол между стрелой и ее скоростью меняется с течением времени. Какую же величину S взять для расчета? «Сбалансируем» сомножители c и S так: пусть $c = 1$, а $S = \pi d^2/4$.

Отметим, в связи с этим, что наконечник стрелы играет двоякую роль. Он не только является «боеголовкой» стрелы, но и увеличивает дальность полета, уменьшая угол между стрелой и ее скоростью. (Это легко проверить на опыте.)

Возьмем для расчетов, результаты которых приведены в таблице, три дубовые стрелы: «малую» ($l = 60$ см, $d = 0,5$ см, масса наконечника 3 г) для лука малого натяжения, «среднюю» ($l = 80$ см, $d = 0,85$ см, масса наконечника 4 г) для лука среднего натяжения и «большую» ($l = 100$ см, $d = 1,2$ см, масса наконечника 5 г) для лука большого натяжения. Видим, что дальность полета стрел, указанная в начале статьи, вполне реальна.

Величина	Стрела		
	малая	средняя	большая
m, г	11,24	35,76	84,13
v_0, $\frac{м}{с}$	131,5	98,3	80,1
L, м	885	655	509,6

Парадоксы постоянного магнитного поля

П. КУЗЬМИН

Когда съедают бублик, куда девается дырка?

Загадка

КОНЕЧНО же, вы знаете о том, что магнитное поле – это то, что возникает вокруг проводника с током и способно притягивать другой проводник, если по нему тоже течет ток, или отталкивать его, или вообще двигать куда-то в сторону (смотря по тому, как этот второй проводник и его ток направлены). А почему, собственно, проводники с постоянным током вдруг начинают действовать друг на друга? Согласитесь, есть что-то не совсем понятное в этих магнитных силах.

Посмотрите, как просто выглядят закон всемирного тяготения и закон Кулона и как похожи друг на друга формулы этих законов! Силы гравитационного и электростатического взаимодействий направлены по прямой, соединяющей массы или заряды, а величины сил в обоих случаях обратно пропорциональны квадратам расстояний. Правда, есть и различия – заряды могут не только притягиваться, но и отталкиваться. А самое главное сходство в том, что эти силы связывают между собой материальные объекты – носители массы или заряда.

Совсем другое дело с магнитным полем. Здесь взаимодействуют токи. А что такое токи? Всего лишь движения зарядов в одном направлении. Получается, что взаимодействуют как бы движения, а не тела. Правила этих взаимодействий – выражение для силы Ампера плюс правило левой руки – тоже никак не похожи на законы электростатики и гравитации. И совсем уж странные вещи начинаются, если копнуть чуть глубже.

Вот – два примера.

1) Представим себе длинный прямой проводник, по которому течет ток I (рис.1). Пусть этот проводник электростатически нейтрален, и пусть вдоль него движется заряженная частица. Поскольку эта частица движется направленно и, значит, является сама по себе электрическим током, на нее со стороны проводника действует магнитная сила, которая притягивает частицу к проводнику или отталкивает ее – в зависимости от направлений тока и движения частицы. Если частица двигалась по инерции, то ее траектория, конечно, искривится в сторону проводника или от него, что можно наблюдать в опытах. Как будто бы все просто и понятно.

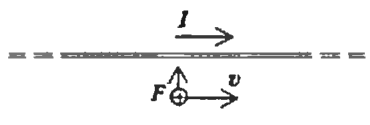


Рис. 1

А теперь представим себе, что мы не сидим и смотрим на все это, а движемся в маленьком вагоне вдоль проводника с током, причем со скоростью v, как у нашей заряженной частицы. Как говорят в таких случаях, перейдем в другую систему координат. Частица теперь для нас неподвижна, она больше не ток. Значит, магнитные силы на нее не действуют? А куда же они делись? Ведь не может же быть, что в одной системе координат проводник притягивает частицу, а в другой – нет. Должно же меняться расстояние между проводником и частицей, как вначале.

Заметим, однако, что теперь мимо нас, сидящих в воображаемом вагоне, движется проводник с током. Это и поможет нам разобраться в ситуации. Правда, придется воспользоваться одним из законов теории относительности, который состоит в том, что с точки зрения неподвижного наблюдателя в любом движущемся объекте сокращаются все линейные размеры в направлении движения. При скоростях, близких к скорости света, эти сокращения могут быть заметны «на глаз», а при обычных скоростях электронов в проводниках (это доли миллиметра в секунду) эффекты сокращений очень-очень малы, но именно они все и объясняют в нашем случае.

В исходной ситуации, когда проводник с током мы считали неподвижным, на самом деле была неподвижна только его кристаллическая решетка, а электроны проводимости, которые и обусловливают ток в обычных проводниках, двигались все в одном направлении, создавая ток. Теперь попробуем двигаться вместе с электронами, так чтобы они в нашей новой системе координат стали неподвижными. Для определенности будем считать, что скорость нашей новой системы координат, т.е. скорость движения электронов, равна исходной скорости v движения заряженной частицы. Кристаллическая решетка в этой системе координат движется, создавая ток. Что изменилось? Положительно заряженные ядра атомов в кристаллической решетке теперь для нас направленно движутся, и, следовательно, расстояния между ними чуть-чуть меньше исходных Это означает, что плотность положительных зарядов увеличилась. Электроны, наоборот, двигаться направленно перестали, значит, пропал эффект сокращения расстояний и их плотность уменьшилась. Таким образом, в движущейся системе координат проводник стал положительно заряженным! И в точке, где находится заряженная частица, он должен создавать электрическое поле. Самое интересное во всем этом то, что возникшие электростатические силы, если произвести все расчеты, оказываются в точности равными тем магнитным силам, которые мы, чуть было, не потеряли. (Тех, кто заинтересовался расчетом, мы отсылаем к замечательной книге «Фейнмановские лекции по физике» (т. 5, с.266), выпущенной издательством «Мир» в 1966 г. – *Прим.ред.*) Они-то теперь и действуют на нашу заряженную частицу. Как ни малы эффекты сокращения расстояний, но электронов в металле очень много, и их суммарный заряд как раз подходит для того, чтоб все сошлось.

Удивительное превращение! Получается, что электрическое и магнитное поля не существуют отдельно, а для разных наблюдателей одно и то же поле может проявляться как магнитное или как электрическое или как их смесь в самых разных пропорциях.

2) Пусть есть два очень длинных проводника (рис.2), к которым где-то далеко слева подключен источник тока плюсом к одному проводнику, а минусом – к другому. И пусть на этих проводниках перпендикулярно им лежит перемычка – неважно, скользящая без трения или закрепленная, поскольку мы будем рассматривать только магнитные силы. Ток течет по верхнему проводнику вправо до перемычки, по перемычке вниз и от перемычки по нижнему проводнику влево. Как направлена магнитная сила, действующая на перемычку? Как направле-

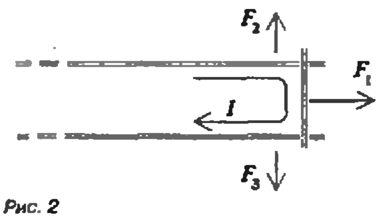


Рис. 2

ны магнитные силы, действующие со стороны перемычки на параллельные проводники?

Для ответа на эти вопросы воспользуемся правилом буравчика, законом Ампера и правилом левой руки. Из них найдем, что ток, текущий по длинным проводникам, создает около перемычки магнитное поле, направленное от читателя за рисунок, значит, на перемычку действует сила, направленная вправо. Перемычка создает около длинных проводников магнитное поле, направленное в ту же сторону, следовательно, на верхний проводник со стороны перемычки действует магнитная сила, направленная вверх, а на нижний — вниз.

А как же третий закон Ньютона? Сила, с которой Земля притягивает к себе яблоко, равна силе, с которой яблоко притягивает Землю. И неважно, висит это яблоко на дереве или летит в космическом пространстве. А у нас что получилось? Длинные проводники пытаются толкать перемычку вправо, а перемычка действует на них магнитными силами, сумма которых вообще равна нулю. Как же так?

Можно сообразить, что поскольку электрическая цепь замкнута, то где-то далеко слева есть еще одна перемычка, на которую действует магнитная сила, как раз противоположная той, что приложена к нашей перемычке, и сумма всех магнитных сил, действующих на цепь в целом, благополучно равна нулю.

(Точно так же, если рассмотреть два контура с током, то взаимодействие отдельных элементов может не подчиняться третьему закону Ньютона, но суммарная сила взаимодействия контуров ему подчиняется. А так как токи всегда замкнуты, то все в порядке. — *Прим. ред.*)

Волны на пляже, Солнце в небе и многое другое

А. СТАСЕНКО

Гляди в оба!

Народная мудрость

Рыба анаблепа живет на поверхности воды. Ее глаз разделен на два сектора: верхний видит в воздухе, нижний — в воде. Одним взглядом анаблепа замечает сразу и птиц в небе, и рыб в водоеме.

Из научной книги

КОНЕЧНО, почти всякая рыба имеет некоторое отношение к волнам и пляжам. Но не в этом дело. А дело в том, что хотелось бы понять, почему на пляжах волны всегда бьются о берег параллельно ему, откуда бы ни дул ветер и как бы волны ни были направлены в открытом море. Иначе говоря, почему линии, перпендикулярные гребням волн, т.е. их *лучи*, искривляются так, что к берегу они подходят под прямым углом.

Оказывается, это имеет прямое отношение к преломлению луча света при переходе из одной среды в другую, скажем из воздуха в воду. Тут все понятно: в воздухе свет распространяется со скоростью v_1, в воде — с меньшей скоростью v_2 ($v_2 < v_1$), их отношение называется показателем (коэффициентом) преломления воды относительно воздуха

$$n = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} > 1,$$

а из закона преломления

$$n_2 \sin\alpha_2 = n_1 \sin\alpha_1, \qquad (1)$$

описанного в школьном учебнике (правда в несколько ином виде), следует, что при переходе в оптически более плотную среду (при $n > 1$) преломленный луч пойдет ближе к нормали, чем падающий, т.е. $\alpha_2 < \alpha_1$.

Как можно убедиться, вывод этого закона не зависит от физической природы волны (и это нам пригодится в дальнейшем).

Найдем прежде всего скорость распространения волн на пляже. От чего она может зависеть? Если мы создадим «горб» на поверхности спокойной воды — моря, озера или лужи — глубиной h (рис.2) и предоставим его самому себе, то под действием силы тяготения (пропорциональной ускорению свободного падения g) он начнет проваливаться вниз, а вследствие инерции проскочит положение, соответствующее спокойной поверхности, рядом возникнут другие «горбы», и начнет распространяться волна.

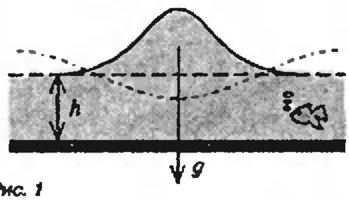


Рис. 1

Перечислим величины (и их размерности), от которых, по нашему мнению, может зависеть искомая скорость движения волны $v\left(\frac{м}{с}\right)$:

$$h(м)\ ,\ g\left(\frac{м}{с^2}\right).$$

Из соображений размерностей сразу видно, что их можно связать формулой (проверьте)

$$v = \sqrt{gh}. \qquad (2)$$

Таким образом, чем мельче водоем, тем с меньшей скоростью распространяется волна (разумеется, это справедливо только для мелкой воды, когда скорость не зависит от длины волны). Значит, с приближением к берегу и уменьшением глубины водоема волны движутся все медленнее. По аналогии с оптикой, можно сказать, что они переходят во все более оптически плотную среду. (Кстати, и в стакане с водой тоже можно создать среду с показателем преломления, плавно растущим по направлению к его дну, если сделать очень концентрированный раствор соли, а затем осторожно, избегая перемешивания слоев, добавлять к нему все менее соленые слои и, наконец, чистую воду (попробуйте!). Тогда *подводная* часть ложки будет выглядеть не преломленной, а плавно изогнутой.)

Разобьем мысленно поверхность моря на полосы ширины dx, параллельные берегу (рис.2). В каждом слое будет своя глубина h, своя скорость распространения волны, свой показатель преломления, *обратно пропорциональный* этой скорости, и свой угол по отношению к оси X, перпендикулярной берегу. Тогда закон преломления (1) для всех этих слоев можно записать в виде

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sqrt{h_1}} = \frac{\sin\alpha_2}{\sqrt{h_2}} = \ldots = \frac{\sin\alpha(x)}{\sqrt{h(x)}} = \text{const.} \qquad (3)$$

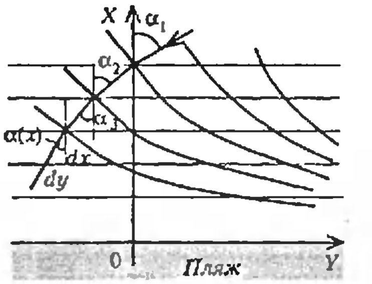


Рис. 2

Уже отсюда видно, что если глубина стремится к нулю, то угол между лучом и нормалью тоже стремится к нулю. Это и объясняет, почему волны на пляжах «плюхают» прямо в берег. Но можно пойти и дальше — найти само уравнение луча.

Исходя из рисунка 3, запишем

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha(x) = \frac{\sin\alpha(x)}{\cos\alpha(x)} = \frac{\sin\alpha(x)}{\sqrt{1-\sin^2\alpha(x)}}.$$

Воспользуемся выражением (3), и мы получим связь между наклоном волны по отношению к нормали на любом расстоянии x от берега с его значением α_1 на каком-то фиксированном расстоянии x_1:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{h/h_1}\sin\alpha_1}{\sqrt{1-(h/h_1)\sin^2\alpha_1}}. \qquad (4)$$

А теперь осталось только «назначить» зависимость глубины от расстояния до берега $h(x)$ — и интегрируйте себе на здоровье! Ну например, возьмем квадратичный закон $h = h_1(x/x_1)^2$. Тогда получим

$$\int_{y_1}^{y} dy = y - y_1 = \int_{x_1}^{x} \frac{(x/x_1)\sin\alpha_1}{\sqrt{1-(x/x_1)^2\sin^2\alpha_1}}dx.$$

Можно спросить у математиков, как вычислить этот интеграл. А можно и попробовать самим. Сделаем такую замену переменной:

$$1-\left(\frac{x}{x_1}\right)^2\sin^2\alpha_1 = \gamma$$

и продифференцируем:

$$2\frac{dx}{x_1}\frac{x}{x_1}\sin^2\alpha_1 = -d\gamma.$$

Подставляя все это в подынтегральное выражение, получим

$$\frac{y-y_1}{x_1/\sin\alpha_1} = -\frac{1}{2}\int_{\gamma_1}^{\gamma}\frac{d\gamma}{\sqrt{\gamma}} = -\sqrt{\gamma}\Big|_{\gamma_1}^{\gamma} =$$

$$= \sqrt{1-\sin^2\alpha_1} - \sqrt{1-\left(\frac{x}{x_1}\right)^2\sin^2\alpha_1}.$$

Это уже и есть искомая зависимость — уравнение луча $y(x)$. Но как бы назвать эту кривую? Перенесем первое слагаемое в правой части влево, возведем обе части в квадрат, а затем оставим справа только единицу:

$$\left(\frac{y-y_1}{x_1/\sin\alpha_1} - \cos\alpha_1\right)^2 + \left(\frac{x}{x_1/\sin\alpha_1}\right)^2 = 1.$$

Да ведь это уравнение окружности! (Разумеется, при другой зависимости глубины от расстояния получится иное уравнение луча.)

Однако пойдем дальше. Уравнение (1) объясняет множество других явлений природы.

Например, *атмосферную рефракцию* солнечных лучей (рис.3). Поскольку плотность атмосферы растет по направлению к поверхности Земли, коэффициент преломления воздуха падает с высотой, и лучи Солнца изгибаются так, что наблюдатель на Земле видит его еще некоторое время после геометрического захода и перед восходом. В результате световой день удлиняется на несколько минут, что очень полезно (для колхозных полей, например). Благодаря этому же явлению в высоких широтах полярная «ночь» короче полярного «дня», что тоже очень хорошо.

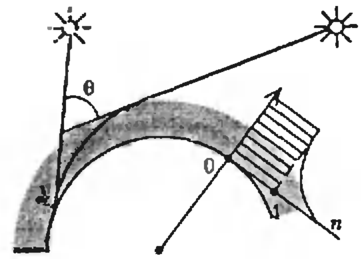


Рис. 3

Этим же уравнением можно объяснить *миражи* в пустыне. Когда раскаленный песок подогревает прилежащий слой воздуха, реализуется ситуация, при которой показатель преломления верхнего слоя больше, чем нижнего. В результате лучи, идущие, например, из точки A (рис.4), изгибаются кверху, так что усталый путник принимает точку A^* за отражение в столь желанном озере, которого, увы, нет.

Кстати, о рыбе. Пусть даже не об упомянутой анаблепе, а о самой простой. Показатель преломления ее среды обитания — воды — заметно больше единицы ($n = 4/3$). Но для того чтобы фокусировать лучи, коэффициент преломления ее глаз должен быть еще больше. Что же, природа должна создавать рыбий глаз из кронгласа или флинта? Это вопрос нетривиальный, и как он решен Природой — об этом можно поговорить или почитать отдельно. Здесь интересно вспомнить, что знаменитый физик Максвелл придумал такой инструмент (он назвал его «рыбьим глазом»), который представляет собою неограниченную среду с показателем преломления, зависящим только от расстояния (r) до фиксированной точки:

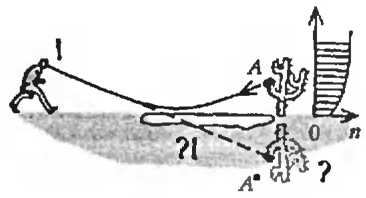


Рис. 4

$$n(r) = \frac{n_0}{1+(r/a)^2}$$

(n_0, a — постоянные). Можно показать, что в такой среде световой луч имеет форму окружности независимо от того, из какой точки и в каком направлении он вышел.

Это все оптика. Но то же самое и в акустике — уравнение (1) описывает общее свойство лучей для волн любой природы загибаться в сторону уменьшения скорости распространения волны. Если днем на пляже песок раскален, то скорость звука в прилегающем горячем слое воздуха несколько больше, чем вверху (она, как известно, пропорциональна корню квадратному из температуры). В результате, как и в случае оптического миража, «лучи звука» уходят вверх, и голоса на пляже звучат приглушенно. А вечером, когда земля успела уже охладиться, а воздух вверху еще теплый, возникает обратная ситуация — звуки, уходящие вверх, затем загибаются вниз, и песни далеко разносятся в поле.

Впрочем, далеко-то они слышны, а вблизи, может быть, и нет. Во время знаменитых битв, производивших много шума, иногда возникали такие атмосферные условия, при которых образовывалась зона молчания. (Конечно, в эти условия, помимо изменения скорости звука с высотой, входят и наличие облаков, и рельеф местности, и другие тонкости, о которых можно узнать при желании из книг по акустике.) Например, шум битвы при Ватерлоо был слышен на очень большом расстоянии, но не был слышен ближе, где стоял корпус наполеоновского генерала Груши, поэтому последний и не пришел на помощь своему императору. Результат известен. Как, однако, полезно знать физику! Даже полководцам.

Разбить числа

С. ГЕНКИН, Л. КУРЛЯНДЧИК

Почти в любой математической дисциплине часто возникают вопросы о существовании конструкции с заданными свойствами. С подобными задачами вы, конечно, встречались в школьном курсе математики. В этой статье речь пойдет о не совсем привычных для вас конструкциях, материалом для которых служат натуральные числа. Мы рассмотрим следующую задачу: *для каких натуральных n множество чисел $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ можно разбить на n пар (a_1, b_1), (a_2, b_2), …, (a_n, b_n) ($a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, $a_n < b_n$) так, чтобы $2n$ чисел $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$, …, $b_n - a_n$, $b_1 + a_1$, $b_2 + a_2$, …, $b_n + a_n$ были различны?*

Ее поставили в 1962 году два математика Мок Конг Шень и Цзен Пао Шень. В течение одиннадцати лет многие математики всего мира занимались этой проблемой, и лишь в 1973 году американец Хафф наконец нашел решение.

Оно базируется на одной содержательной идее, представляющей самостоятельный интерес. Сначала мы познакомим вас с ней на примере нескольких не очень сложных задач, а затем перейдем к самому решению.

Россыпи чисел на шахматной доске

Все вы по своему опыту знаете, что удачная переформулировка может значительно упростить трудную задачу. Для задач о разбиениях множеств чисел часто бывает полезной интерпретация, связанная с шахматной доской. Как это делается, мы сейчас покажем на примерах.

Задача 1. *Докажите, что числа 1, 2, 3, …, n^2 можно разбить на n наборов с одинаковыми суммами по n чисел в каждом.*

Решение. Расположим сначала числа 1, 2, 3, …, n^2 в клетках «шахматной доски» $n \times n$ по порядку (рис. 1, здесь $n = 7$). Занумеруем и строки и столбцы числами от 1 до n. Нетрудно понять, что в клетке с координатами (k, l) находится число $(l - 1)n + k$. Введем удобный для дальнейшего изложения термин. Назовем *россыпью* набор из n клеток, никакие две из которых не находятся ни в одном ряду, ни в одной строке. Понятно, что сумма всех чисел, стоящих в клетках одной россыпи, не зависит от выбора россыпи (и равна $(0 + 1 + \ldots + (n-1)) \cdot n + 1 + 2 + \ldots + n$), потому что и абсциссы и ординаты клеток россыпи образуют перестановку чисел от 1 до n. Для решения задачи нам достаточно теперь разбить всю доску на n попарно непересекающихся россыпей: в один набор мы поместим все числа одной россыпи. Это можно сделать, например, так, как указано на рисунке 2. (Клетки одной россыпи помечены одинаковыми числами.)

7	43	44	45	46	47	48	49
6	36	37	38	39	40	41	42
5	29	30	31	32	33	34	35
4	22	23	24	25	26	27	28
3	15	16	17	18	19	20	21
2	8	9	10	11	12	13	14
1	1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6	7

Рис. 1

1	2	3	4	…			$n-2$	$n-1$	n
2	3	4	…			$n-2$	$n-1$	n	1
3	4	…			$n-2$	$n-1$	n	1	2
4	…			$n-2$	$n-1$	n	1	2	3
…			$n-2$	$n-1$	n	1	2	3	4
		$n-2$	$n-1$	n	1	2	3	4	5
	$n-2$	$n-1$	n	1	2	3	…		
$n-2$	$n-1$	n	1	2	3	…			
$n-1$	n	1	2	3	…				$n-2$
n	1	2	3	…				$n-2$	$n-1$

Рис. 2

Как видите, нам удалось решить задачу, заменив вопрос о разбиении множества чисел от 1 до n^2 вопросом о разбиении доски $n \times n$ на n россыпей. Эта же идея используется и в следующей задаче.

Задача 2. *Даны $2n$ чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$. Докажите, что n^2 сумм $a_k + b_l$ ($k, l = 1, 2, \ldots, n$) можно разбить на n наборов с одинаковыми суммами по n чисел в каждом.*

Решение. На этот раз в клетку с координатами (k, l) поставим число $a_k + b_l$. Ясно, что сумма всех чисел, стоящих в клетках одной россыпи, не зависит от выбора россыпи (и равна $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + b_1 + b_2 + \ldots + b_n$). Поэтому задача снова свелась к разбиению всей доски на n попарно непересекающихся россыпей. А это мы уже умеем делать.

В этих двух примерах задача сводилась к разбиению доски на россыпи. В следующем же примере к цели приведет нахождение россыпи с заданным свойством.

Задача 3. *Для каких k можно написать одну под другой две перестановки чисел от 1 до k так, чтобы сложив стоящие друг под другом числа, мы получили k подряд идущих натуральных чисел?*

Решение. Предположим, что нам удалось подобрать две перестановки чисел от 1 до k – $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и $b_1, b_2, \ldots, b_k$ – так, что числа $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_k + b_k$ – это подряд идущие натуральные числа $n+1$, $n+2$, …, $n+k$. Тогда, с одной стороны, сумма всех чисел $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + b_1 + b_2 + \ldots + b_k$ равна $2(1 + 2 + \ldots + k) = k(k+1)$, а с другой стороны, она равна $(a_1 + b_1) + \ldots + (a_k + b_k) = (n+1) + \ldots + (n+k) = \frac{(2n+k+1)k}{2}$. Значит, $k(k+1) = \frac{(2n+k+1)k}{2}$. Поэтому $k = 2n - 1$. Итак, k – нечетное число. Покажем теперь, как при нечетном k подобрать соответствующие перестановки. Как и ранее, воспользуемся идеей шахматной доски. Рассмотрим доску размерами $(2n-1) \times (2n-1)$ и в каждой клетке напишем сумму ее координат. (На рисунке 3 приведена соответствующая доска в случае $k = 7$). Для решения задачи нам достаточно теперь найти россыпь, на которой встречаются все числа от $n+1$ до $n+k$ (при этом $n = \frac{k+1}{2}$). В нашем примере нам надо найти россыпь, на которой стоят числа от 5 до 11. Ее легко

7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8
	1	2	3	4	5	6	7

Рис. 3

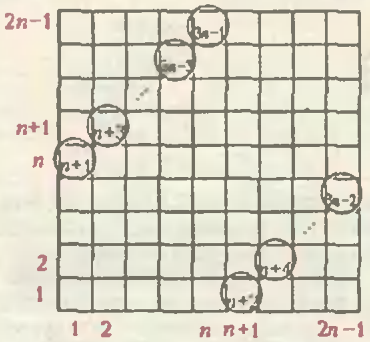


Рис. 4

увидеть (на рисунке она выделена красным цветом). Это построение распространяется и на общий случай (*рис. 4*) и приводит к таким двум перестановкам:

$$\begin{matrix} 1 & n+1 & 2 & n+2 & \ldots & 2n-1 & n \\ n & 1 & n+1 & 2 & \ldots & n-1 & 2n-1 \end{matrix}$$

Расстановка ферзей

До сих пор мы по существу использовали просто квадратную таблицу. В следующей же задаче, которая по формулировке напоминает *исходную проблему*, термин «шахматная доска» будет более оправдан, ибо появится уже и шахматная фигура.

Задача 4. *Для каких k можно написать одну под другой две перестановки чисел от 1 до k так, что среди сумм стоящих друг под другом чисел не нашлось бы двух одинаковых и среди разностей тоже не нашлось бы двух одинаковых?*

Решение. Заметим, что на нашей шахматной доске клетки с одинаковой суммой координат стоят на одной диагонали, идущей вверх справа налево. Также на одной диагонали, только идущей вверх слева направо, стоят клетки с одинаковой разностью координат. Таким образом, задача сводится к нахождению россыпи, никакие две клетки которой не стоят на одной диагонали. А это означает, что нам надо расставить k ферзей на доске размерами $k\times k$ так, чтобы они не били друг друга.

Рассмотрим сначала маленькие доски ($k=2, 3, 4$). Нетрудно убедиться, что на досках 2×2 и 3×3 расставить нужным образом ферзей нельзя. На доске же 4×4 расставить четыре ферзя можно (рис. 5).

Эта картинка подсказывает, как расставить шесть ферзей на доске 6×6 (*рис. 6*). Возникает гипотеза, что на досках $2n\times2n$ расстановка такая, как на рисунке 7. К сожалению, эта гипотеза неверна.

Уже для доски 8×8 получается «плохая» расстановка (рис. 8). Но можно убедиться, что «плохими» при этом оказываются лишь доски $(6k+2)\times(6k+2)$. Разберем этот случай отдельно. Здесь искомая конструкция несколько хитрее. Для $k=1$ и $k=2$ она приведена на рисунках 9 и 10. Как эта конструкция получается в общем случае, видно из рисунков 11, *а–в*. (Рисунок *б* получается из *а* наложением нижнего квадрата $(3k+1)\times(3k+1)$ на верхний, а рисунок *в* получается из *б* отражением относительно центра доски). Проверка того, что построенные конструкции искомые, не сложна, но достаточно громоздка. *Поэтому предоставим желающим возможность проделать соответствующие выкладки самостоятельно.*

Расстановка для нечетного k моментально получается из расстановки на четной доске размерами $(k-1)\times(k-1)$. Для этого достаточно заметить, что в наших расстановках для четных досок главная диагональ (идущая от левого нижнего угла в правый верхний) оставалась свободной. Поэтому для нечетного k можно поступить следующим образом: разместить $k-1$ ферзей на доске $(k-1)\times(k-1)$ (на рисунке 12 она выделена красным цветом), и k-го ферзя поставить в левый нижний угол.

Итак, для любого $k\geq4$ существуют две перестановки чисел от 1 до k, удовлетворяющие условию задачи. Для при-

Рис. 5

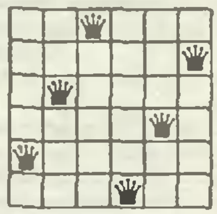


Рис. 6

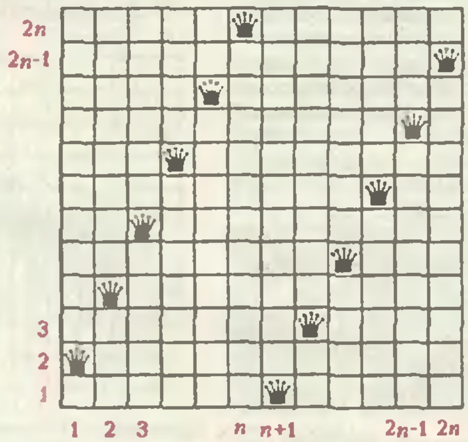


Рис. 7

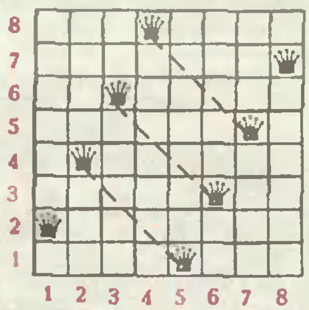


Рис. 8

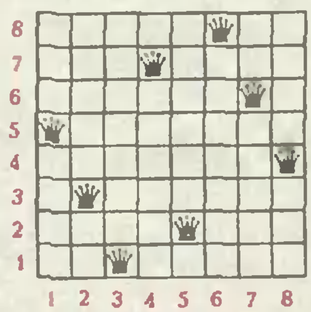


Рис. 9

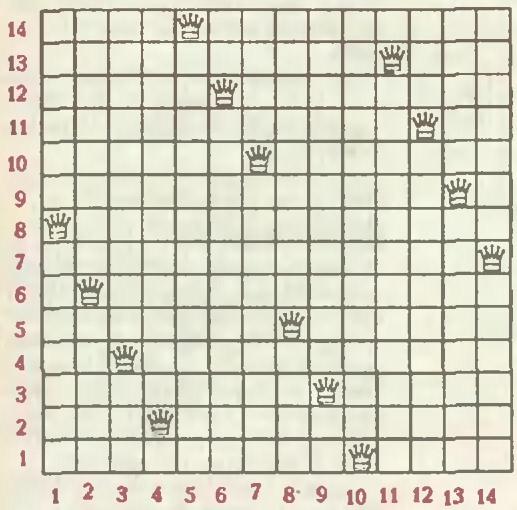


Рис. 10

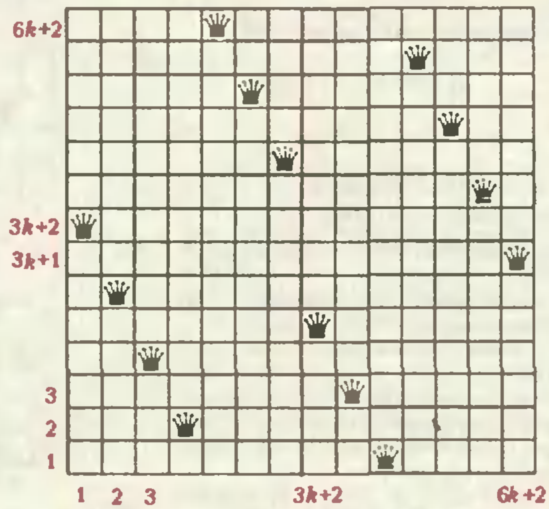


Рис. 11, б

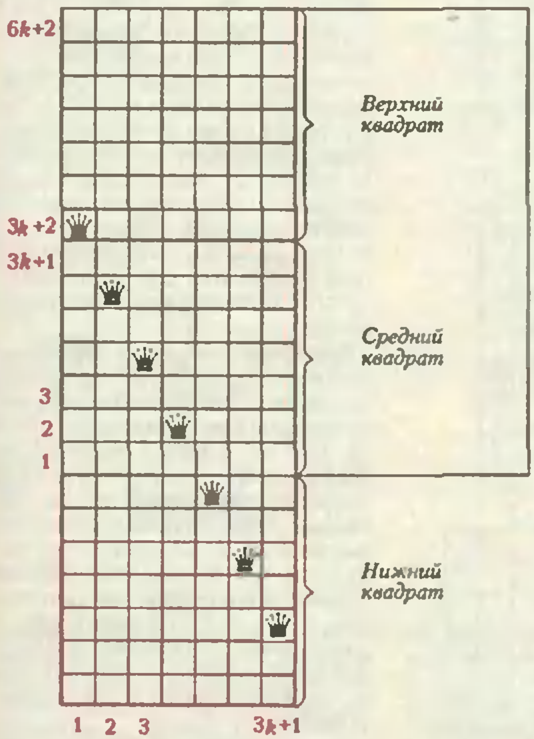


Рис. 11, а

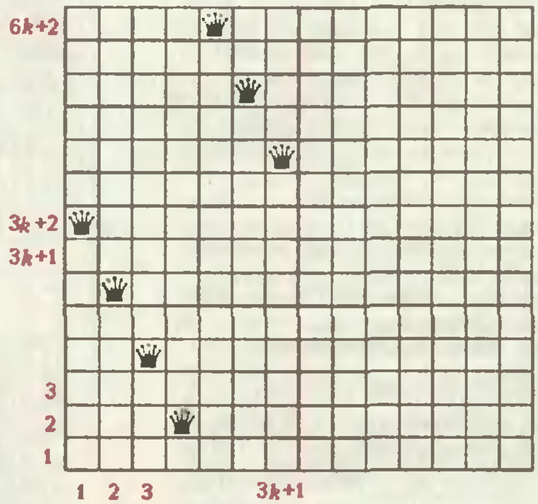


Рис. 11, в

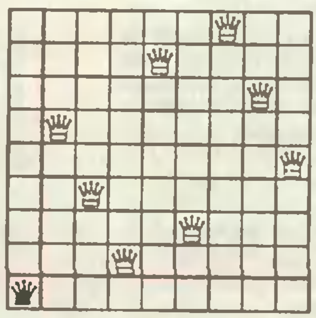


Рис. 12

мера выпишем полученные нами перестановки для $k = 8$ (см. рис. 9):

1 2 3 4 5 6 7 8

5 3 1 7 2 8 6 4

Начинаем решать основную задачу

Предложенная геометрическая интерпретация, оказавшаяся столь удобной в разобранных примерах, поможет нам и в решении поставленной проблемы.

Начнем с маленьких n. При $n = 1$ разбиение ровно одно: (1, 2), и оно, конечно, нас устраивает. Нетрудно убедиться, что при $n = 2$ искомого разбиения нет. Оказывается, для всех $n \geq 3$ такое разбиение существует.

Числа от 1 до 6 ($n = 3$) разбить нетрудно: (1,5); (2,3); (4,6). Изобразим эти точки на шахматной доске 6×6 (рис. 13). Так как ордината каждой точки больше, чем ее абсцисса, все эти точки попадают в урезанную доску (рис. 14). Как и в задаче о ферзях, никакие две из этих точек не должны стоять на одной вертикали, горизонтали и диагонали. Но этого мало. Нельзя допустить, чтобы сумма координат одной из точек совпала с разностью координат другой точки. Проинтерпретируем такое совпадение на языке шахматной доски. На рисунке 15 черные ферзи стоят в точках с суммой координат, равной пяти, а белые — с разностью координат, равной пяти. Слева пририсована еще одна вертикаль — с номером ноль. Именно на ней пересекаются белая и черная диагонали. Такую ломаную, состоящую из белой и черной диагоналей, пересекающихся на нулевой вертикали, будем называть *уголком*. Тем самым, никакие две точки не должны стоять на одном уголке.

Но этого мало. Поскольку каждое из чисел от 1 до $2n$ должно попасть ровно в одну из пар (a_i, b_i), то не могут совпасть абсцисса и ордината двух разных точек. Геометрически это означает, что никакие две точки не могут стоять на вертикали и горизонтали, пересечение которых находится на главной диагонали исходной шахматной доски. Объединение таких горизонтали и вертикали назовем *крестом* (рис. 16).

Для более компактной формулировки нашей задачи удобно ввести фигуру, превосходящую по силе обычного ферзя, — назовем ее *китом*. Кит бьет все клетки, стоящие в его вертикали, горизонтали, диагоналях, уголке и крестах (рис. 17). Теперь наша задача формулируется так: *для любого $n \geq 3$ на урезанной шахматной доске $2n \times 2n$ требуется расставить n китов так, чтобы никакие два из них не били друг друга.*

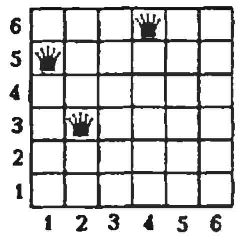


Рис. 13

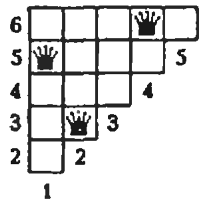


Рис. 14

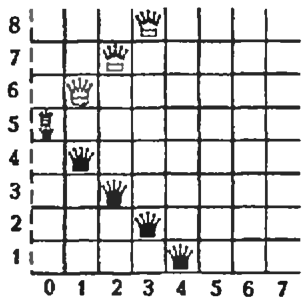


Рис. 15

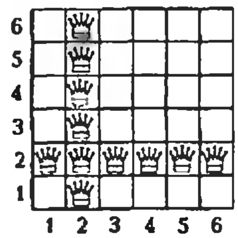


Рис. 16

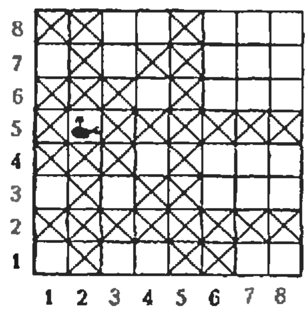


Рис. 17

Расстановки для маленьких досок ($n = 6, 7$), которые нам пригодятся в дальнейшем, приведены на рисунке 18.

Расстановка китов на больших досках

Укажем теперь способ распространения конфигурации с меньших досок на большие. Алгоритм распространения очень сложен. Чтобы сделать его понятнее, начнем с примера. Покажем, как и на какие доски можно распространить конфигурацию с доски 2×2. Все поля, которые бьет кит, стоящий в клетке (1,2), показаны на рисунке 19.

Сначала попробуем добавить четное число — $2x$ китов. Естественно попытаться этих новых китов расставить так же, как мы расставляли ферзей (рис. 20). Как вы помните, мы располагали их двумя «полосками» ходом шахматного коня. Если занумеровать добавленных нами китов в порядке возрастания их абсцисс, то самую маленькую ординату будет иметь кит с номером $x + 1$. Пусть абсциссы этих $2x$ китов — числа 3, 4, 5, ..., $2x + 2$. Сейчас мы решаем задачу о разбиении на пары чисел от 1 до $4x + 2$, поэтому ординаты наших $2x$ китов должны пробегать все числа от $2x + 3$ до $4x + 2$. Так как у кита с номером $x + 1$ самая маленькая ордината, то он стоит на поле $(x + 3, 2x + 3)$. Поскольку эта клетка должна находиться над уголком, который бьется китом, стоящим на поле (1,2), то разность его координат должна быть больше трех (суммы координат кита (1,2)). Значит, должно выполняться неравенство $x > 3$.

Рассмотрим теперь кита, стоящего на поле с абсциссой 3. Так как его ордината на единицу больше ординаты кита с номером $x + 1$, то он находится на поле $(3, 2x + 4)$. В первой полоске у нас должно стоять x китов. Последний из них имеет координаты $(x + 2, 4x + 2)$. Разности координат китов в первой полоске пробегают все натуральные числа от $2x + 1$ до $3x$. Еще одно ограничение на число x мы получаем из того, что кит с поля $(x + 2, 4x + 2)$ должен оказаться ниже уголка, который бьется китом $(3, 2x + 4)$. Это приводит к неравенству $3 + (2x + 4) > (4x + 2) - (x + 2)$. Следовательно, $x < 7$.

И последнее ограничение — это ограничение для обычных ферзей. Как вы помните, при расстановке ферзей «плохими» оказывались доски $(6k + 2) \times (6k + 2)$. В нашем случае это означает, что x не равно $3k + 1$.

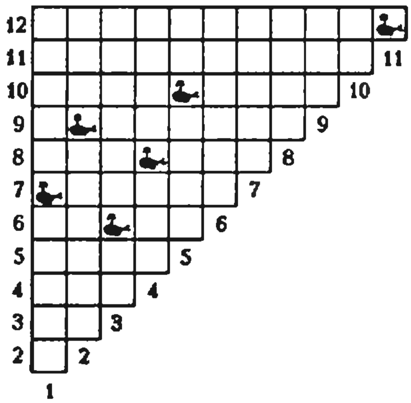


Рис. 18, в

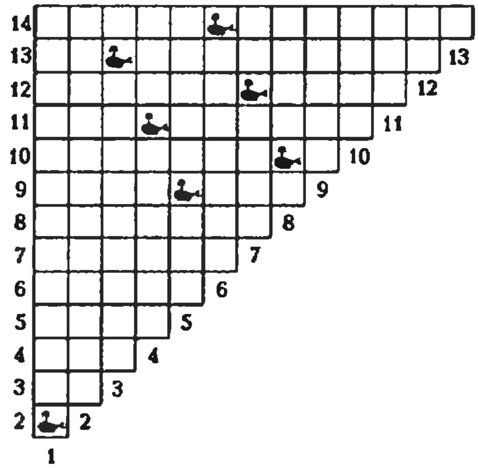


Рис. 18, б

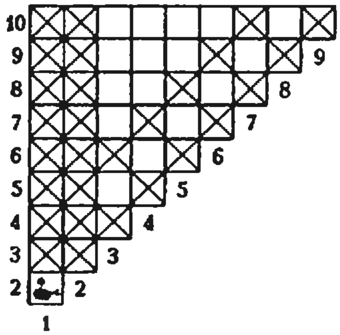


Рис. 19

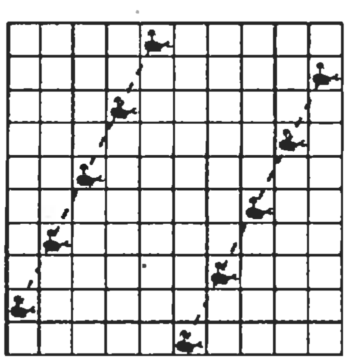


Рис. 20

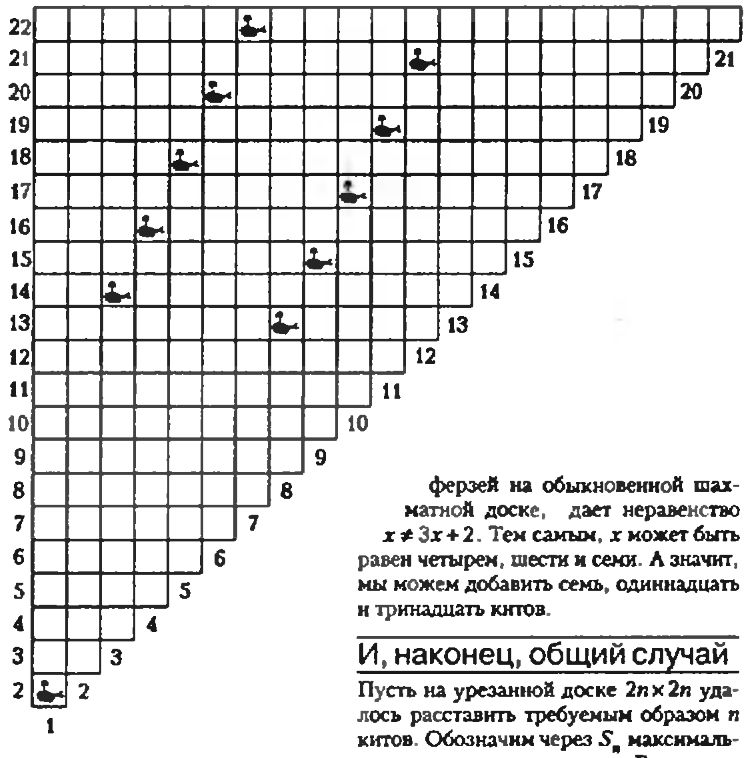


Рис. 21, в

Подводя итоги, получаем, что x может равняться пяти или шести, т.е. мы можем добавить десять или двенадцать китов. При этом получаются расстановки, изображенные на рисунке 21, *а, б*.

Теперь разберемся со случаем нечетного числа китов. Пусть добавлено $2x-1$ китов. Мы их снова располагаем двумя полосками: в первой полоске $x-1$ китов, а во второй — x (рис. 22). Предыдущие рассуждения приводят нас сначала к неравенству $x > 3$ («самый низкий» кит имеет координаты $(x+2,\ 2x+2)$). В первой полоске первый кит занимает клетку $(3,\ 2x+3)$, а последний — $(x+1,\ 4x-1)$. Так как кит $(x+1,\ 4x-1)$ должен стоять ниже уголка, который бьется китом $(3,\ 2x+3)$, то мы приходим к неравенству $3+(2x+3) > (4x-1)-(x+1)$, т.е. $x < 8$. И последнее ограничение, следующее из расстановок обычных ферзей на обыкновенной шахматной доске, дает неравенство $x \neq 3x+2$. Тем самым, x может быть равен четырем, шести и семи. А значит, мы можем добавить семь, одиннадцать и тринадцать китов.

И, наконец, общий случай

Пусть на урезанной доске $2n \times 2n$ удалось расставить требуемым образом n китов. Обозначим через S_n максимальную сумму их координат. Рассуждая теперь так же, как и в случае $n = 1$, мы сумеем добавить, во-первых, $2x$ китов, где $S_n < x < 4n+3$, причем x не является числом вида $3k+1$, а во-вторых, $2x-1$ китов, где $S_n < x < 4n+4$ и x не является числом вида $3k+2$.

Выпишем координаты добавляемых китов. Если их $2x$, то координаты китов, образующих первую полоску, таковы:

$(2n+1,\ 2n+2x+2)$;

$(2n+2,\ 2n+2x+4); \ldots; (2n+x,\ 2n+4x)$,

а координаты китов, образующих

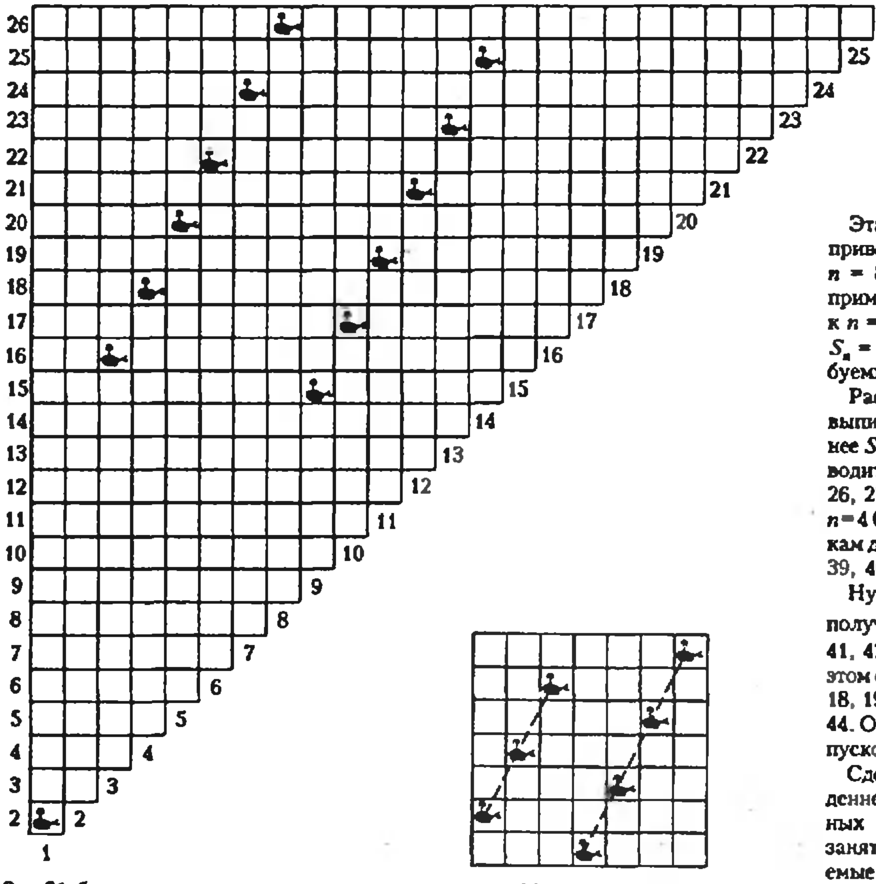


Рис. 21, б

Рис. 22

вторую полоску, следующие:

$$(2n+x+1,\ 2n+2x+1);$$
$$(2n+x+2,\ 2n+2x+3);\ \ldots$$
$$\ldots;(2n+2x,\ 2n+4x-1).$$

Если же добавлено $2x - 1$ китов, то первую полоску образуют $x - 1$ китов:

$$(2n+1,\ 2n+2x+1);$$
$$(2n+2,\ 2n+2x+3);\ \ldots$$
$$\ldots;\ (2n+x-1,\ 2n+4x-3),$$

а вторую полоску — x китов:

$$(2n+x,\ 2n+2x);$$
$$(2n+x+1,\ 2n+2x+2);\ \ldots$$
$$\ldots;\ (2n+2x-1,\ 2n+4x-2).$$

Эта конструкция, начиная с $n = 1$, привела нас к нужным расстановкам для $n = 8, 11, 12, 13, 14$. Но мы можем применить алгоритм распространения и к $n = 0$! При этом естественно считать $S_n = 0$. В этом случае мы получаем требуемые расстановки для $n = 1, 4, 5$.

Расстановка для $n = 3$ нами была выписана ранее: (1,5); (2,3); (4,6). Для нее $S_n = 10$. Поэтому наш алгоритм приводит теперь к расстановкам для $n = 25, 26, 27, 28, 31, 32$. Из расстановки для $n = 4$ ($S_n = 11$) мы приходим к расстановкам для $n = 27, 28, 29, 32, 33, 34, 35, 38, 39, 40, 41$.

Ну и, наконец, из $n = 5$ ($S_n = 15$) получаем требуемое для $n = 36, 39, 40, 41, 42, 45, 47, 48$. Пропущенными при этом оказались $n = 6, 7, 9, 10, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 30, 36, 37, 43, 44$. Оказывается, что в дальнейшем пропусков нет.

Сделаем теперь одно полезное наблюдение. Во всех расстановках, полученных нами из четверки и пятерки, не заняты поля $(a, a + 1)$. Поэтому требуемые расстановки для 30, 37, 43 мы можем получить соответственно из имеющихся расстановок для 29, 36, 42 добавлением кита на поле

$$(2n + 1,\ 2n + 2).$$

Весьма непростой задачей, которую мы оставляем вам для самостоятельных раздумий, является построение оставшихся четырнадцати расстановок.

Электромагнитная индукция

В.МОЖАЕВ

Электродвижущая сила (ЭДС) индукции возникает в проводящем контуре, который пронизывается линиями индукции внешнего магнитного поля, в двух принципиально различных (с точки зрения физики) случаях.

В первом случае мы имеем дело с постоянным (во времени) магнитным полем, а геометрические параметры контура изменяются, т.е. различные участки контура перемещаются в пространстве и при этом пересекают линии индукции магнитного поля. ЭДС индукции возникает в каждом участке, который пересекает линии индукции, а результирующая ЭДС в контуре равна их алгебраической сумме. Сторонней силой в этом случае является сила Лоренца. Свободные носители зарядов в контуре перемещаются под действием как силы Лоренца, так и электростатического поля, возникающего за счет перераспределения свободных зарядов в контуре. При этом работа, совершаемая электрическим полем по перемещению заряда вдоль контура, остается равной нулю.

Во втором случае ЭДС индукции возникает в контуре, когда его геометрические размеры сохраняются, а магнитное поле, пронизывающее контур, изменяется во времени. Переменное магнитное поле вызывает появление вихревого электрического поля. Работа, совершаемая этим полем по перемещению единичного заряда вдоль замкнутого контура, и равна ЭДС индукции.

Для расчета ЭДС индукции в обоих случаях можно пользоваться законом Фарадея — ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$ в контуре прямо пропорциональна скорости изменения во времени магнитного потока Φ через площадь S, ограниченную контуром:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Знак «минус» обусловлен законом сохранения энергии.

Подробнее — на конкретных примерах.

Задача 1. *Проволочный контур расположен в однородном магнитном поле, вектор индукции которого равен B и перпендикулярен плоскости контура (рис. 1). Неподвижная U-образная часть контура выполнена из проволоки с площадью поперечного сечения S_2 и удельным сопротивлением материала ρ_2, а подвижная перемычка — из проводника сечением S_1 и удельным сопротивлением ρ_1. Определите ток в контуре при скорости перемычки v. Размеры контура указаны на рисунке. Нарисуйте также эквивалентную электрическую схему для данного контура.*

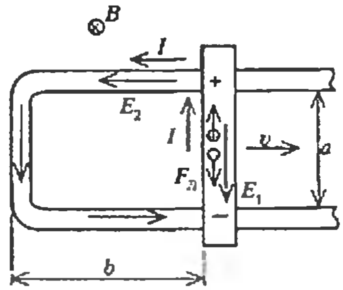


Рис. 1

При движении перемычки со скоростью v на свободные электроны со стороны внешнего магнитного поля действует сила Лоренца $F_л = evB$, где e — заряд электрона. Возникающее перераспределение зарядов перемычки приводит к появлению статического электрического поля. Обозначим напряженность электрического поля в перемычке через E_1, а в другой части контура через E_2. Пусть в контуре течет установившийся ток I. Рассмотрим сначала неподвижную часть контура. В проводнике длиной $2b + a$ за счет напряженности электрического поля E_2 течет ток I. Падение напряжения на этом проводнике равно, с одной стороны,

$$U_2 = IR_2 = I\frac{\rho_2(2b+a)}{S_2},$$

а с другой стороны,

$$U_2 = E_2(2b+a).$$

Приравнивая эти два выражения, получим

$$\frac{I}{S_2} = \frac{E_2}{\rho_2}$$

— так называемый дифференциальный закон Ома. Теперь посмотрим, что происходит в перемычке. Здесь на свободные электроны действуют две силы: сила Лоренца и сила со стороны статического электрического поля напряженностью E_1, т.е. $F = e(vB - E_1)$, что эквивалентно действию электрического поля с напряженностью $E = vB - E_1$. Исходя из этого, мы можем записать дифференциальный закон Ома для перемычки в виде

$$\frac{I}{S_1} = \frac{(vB - E_1)}{\rho_1}.$$

Связь между E_1 и E_2 легко установить из условия потенциальности электростатического поля — работа электрического поля по перемещению заряженной частицы по замкнутому контуру равна нулю:

$$E_1 a - E_2(2b+a) = 0.$$

Совместное решение полученных трех уравнений позволяет найти силу тока:

$$I = \frac{Bva}{\rho_1\frac{a}{S_1} + \rho_2\frac{2b+a}{S_2}}.$$

Мы видим, что это соотношение имеет вид знакомого нам закона Ома для замкнутой цепи, содержащей источник постоянной ЭДС $\mathcal{E}$ с внутренним сопротивлением r и внешний резистор сопротивлением R:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}.$$

В нашем случае роль источника выполняет перемычка, в которой возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = Bva$ (сторонней силой является сила Лоренца). Внутреннее сопротивление источника равно сопротивлению перемычки: $r = \rho_1 a/S_1$, а внешнее — сопротивлению неподвижной части контура: $R = \rho_2(2b+a)/S_2$. Эквивалентная схема изображена на рисунке 2.

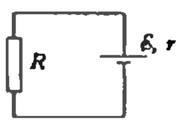


Рис. 2

Получить аналогичное выражение для тока мы могли бы и более простым (но формальным) способом. При движении перемычки происходит изменение магнитного потока, пронизывающего рамку, в которой возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = -\Delta\Phi/\Delta t = Bva$. Ток в рамке равен величине ЭДС, деленной на сопротивление рамки.

В приведенном подробном решении мы обсудили роли, которые играют в данном «спектакле» магнитное поле, отдельные элементы контура и тот, кто перемещает перемычку. Вы уже, наверное, догадались, что тот, кто перемещает перемычку, и совершает работу, за счет которой в контуре поддерживается ток (инициатива всегда наказуема!). Попробуйте самостоятельно показать, что мощность, затрачиваемая «тем, кто...», в точности равна мощности тепловых потерь в контуре.

Задача 2. *Два проволочных контура, изготовленных из одного куска провода, движутся с одинаковыми скоростями к длинному прямолинейному проводу с постоянным током (рис. 3). Контур 1 является квадратом со стороной a, а контур 2, выполненный в виде восьмерки, состоит из двух квадратов, стороны которых тоже a. Когда контуры оказались на расстоянии $b = 2a$ от провода, ток в первом контуре был равен I_1. Чему был равен в этот момент ток во втором контуре, если известно, что индукция магнитного поля, создаваемого током провода, обратно пропорциональна расстоянию от провода? Провод и оба контура расположены в одной плоскости.*

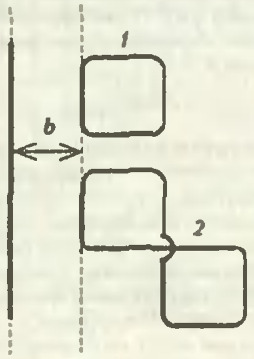


Рис. 3

Запишем выражение для индукции магнитного поля провода с током в виде $B(x) = A/x$, где A — некоторая константа, а x — расстояние от провода. Пусть скорость проволочных контуров равна v. Эквивалентная схема для первого контура изображена на рисунке 4. Здесь ЭДС источников равны $\mathscr{E}_1 = aAv/b = Av/2$ и $\mathscr{E}_2 = aAv/(a+b) = Av/3$, внутренние сопротивления источников одинаковы и равны r (сопротивление провода длиной a), внешнее сопротивление $R_1 = 2r$ (со-

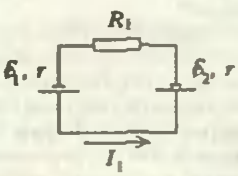


Рис. 4

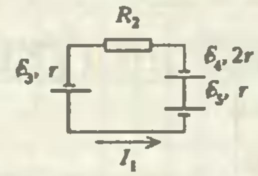


Рис. 5

противление провода длиной $2a$). Величина силы тока в этом контуре равна

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2}{R_1 + 2r} = \frac{Av}{24r}.$$

На рисунке 5 показана эквивалентная схема для второго контура. В ней $\mathscr{E}_3 = \mathscr{E}_1 = Av/2$, $\mathscr{E}_4 = 2aAv/(b+a) = 2Av/3$, $\mathscr{E}_5 = aAv/(b+2a) = Av/4$, $R_2 = 4r$. Ток в этом контуре равен

$$I_2 = \frac{\mathscr{E}_3 + \mathscr{E}_5 - \mathscr{E}_4}{R_2 + 4r} = \frac{Av}{96r}.$$

Сравнивая два выражения для токов, получаем,

$$I_2 = I_1/4.$$

Задача 3. *Два одинаковых проволочных кольца, радиусы которых R, а сопротивления r, движутся поступательно в одной плоскости навстречу друг другу вдоль прямой, проходящей через их центры (рис. 6). Однородное магнитное поле с индукцией, равной B, направлено препендикулярно плоскости колец. Найдите направления и абсолютные величины сил, действующих на кольца со стороны магнитного поля, в тот момент, когда скорости колец равны v, а угол $\alpha = \pi/3$. В точках касания колец а и б имеется хороший электрический контакт. Индуктивностями колец пренебречь.*

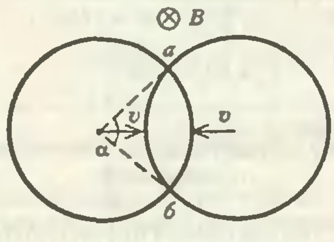


Рис. 6

При движении колец во всех четырех проволочных участках возникают одинаковые по величине ЭДС индукции:

$$\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_3 = \mathscr{E}_4 = \mathscr{E}_i =$$

$$= vBl_{аб} = 2vBR\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Здесь использован тот факт, что ЭДС индукции, возникающая в произвольном по форме контуре, не зависит от его формы, а определяется лишь расстоянием между разомкнутыми концами контура.

(*Для доказательства этого факта достаточно заметить, что при поступательном движении в однородном магнитном поле замкнутого контура, состоящего из криволинейного участка и прямолинейного проводника, соединяющего концы нашего участка, поток вектора индукции через весь замкнутый контур не меняется, а значит, полная ЭДС равна нулю. — Прим. ред.*)

Эквивалентная электрическая схема для нашего случая представлена на рисунке 7, где черный контур соответствует левому кольцу, а красный — правому. В этой схеме $\mathscr{E}_1$ — ЭДС индукции, действующая в левом участке левого кольца, внутреннее сопротивление этого «источника» равно $r_1 = r(1-\alpha/(2\pi))$, $\mathscr{E}_2$ и $r_2 = r\alpha/(2\pi)$ соответствуют правому участку девого кольца, $\mathscr{E}_3$ и $r_3 = r\alpha/(2\pi)$ — левому участку правого кольца, $\mathscr{E}_4$ и $r_4 = r(1-\alpha/(2\pi))$ — правому участку правого кольца.

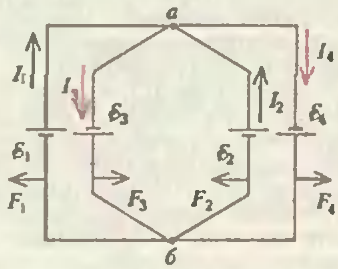


Рис. 7

В силу симметрии,

$$I_1 = I_4,\ I_3 = I_2.$$

По закону Ома для замкнутого контура, содержащего источники ЭДС $\mathscr{E}_2$ и $\mathscr{E}_3$, можно записать

$$\mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3 = I_2 r_2 + I_3 r_3,\ \text{или}\ \mathscr{E}_i = I_2 r\frac{\alpha}{2\pi}.$$

Отсюда

$$I_2 = I_3 = \frac{4\pi BvR\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha r}.$$

Совершенно аналогично для контура, содержащего источники $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_4$, получаем

$$I_1 = I_4 = \frac{4\pi BvR\sin\frac{\alpha}{2}}{(2\pi-\alpha)r}.$$

Сила Ампера, действующая со стороны внешнего магнитного поля на левый участок левого кольца, равна

$$F_1 = BI_1 l_{аб} = \frac{8\pi B^2 vR^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{(2\pi-\alpha)r},$$

а на правый —

$$F_2 = BI_2 l_{аб} = -\frac{8\pi B^2 vR^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha r}.$$

(Здесь использовано утверждение, что сила Ампера, действующая на криволинейный участок контура с током в однородном магнитном поле, не зависит от формы участка и равна силе, действующей на прямолинейный проводник, соединяющий концы нашего криволинейного участка. Можно доказать это утверждение «в лоб», исходя из закона Ампера (см. например, «Квант», 1991, № 5, с. 39). Мы же приведем энергетические соображения. Для доказательства заметим, что при воображаемом поступательном движении замкнутого контура в любом направлении работа сил Ампера должна быть равна нулю. В самом деле, равна нулю как полная работа сил Лоренца, действующих на заряды контура ($\vec{F}_Л \perp \vec{v}$), так и работа по перемещению этих зарядов вдоль контура ($\mathcal{E} = 0$). — *Прим. ред.*)

Результирующая сила Ампера, действующая на левое кольцо, равна

$$F_I = F_1 + F_2 = \frac{16\pi^2 B^2 vR^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha(2\pi-\alpha)r} = \frac{36}{5}\frac{B^2 vR^2}{r}$$

и направлена в противоположную сторону по отношению к скорости кольца. Из соображений симметрии, сила Ампера, действующая на правое кольцо, равна

$$F_{II} = -\frac{36}{5}\frac{B^2 vR^2}{r}.$$

Задача 4. *Два проводящих диска, радиусы которых r_1 и r_2, вращаются с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией, равной B и перпендикулярной их плоскости (рис. 8). Центры дисков присоединены к обкладкам конденсатора емкостью C_1, ободы (через скользящие контакты) — к обкладкам конденсатора емкостью C_2. Найдите разности потенциалов на конденсаторах.*

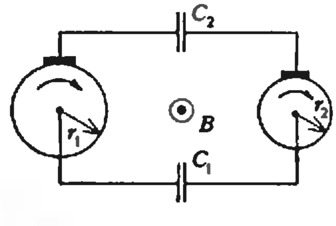


Рис. 8

Эта задача — типичный пример того, когда магнитный поток через замкнутый контур не меняется, а ЭДС индукции тем не менее возникает. Это связано с тем, что в данном случае мы имеем дело с большим количеством контуров, образованных в результате разбиения дисков на маленькие секторы в виде проводящих перемычек, соединяющих центры дисков с проводящими кольцами радиусами r_1 и r_2. На рисунке 9 показана часть одного из таких контуров, в котором при вращении радиальной перемычки магнитный поток уже не сохраняется и возникает ЭДС индукции, равная по закону Фарадея $\mathcal{E}_i = -\Delta\Phi/\Delta t$. Если длина перемычки r_1 и угловая скорость ω, то

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}\omega r_1^2 B,$$

где $\omega r_1^2/2$ — площадь сектора, заметаемая перемычкой за единицу времени.

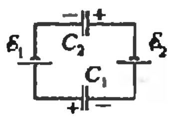


Рис. 9 Рис. 10

Совершенно аналогично, вращающаяся одиночная перемычка другого диска, радиусом r_2, вызывает появление

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\omega r_2^2 B}{2}.$$

Эквивалентная схема для случая двух вращающихся перемычек изображена на рисунке 10.

Возникает законный вопрос — а как учесть все остальные перемычки, на которые мы разбили диски? Разумеется, во всех перемычках одного и того же диска возникают одинаковые ЭДС индукции и все они соединены параллельно друг другу. Но тогда их действие эквивалентно действию одной ЭДС — все остальные можно убрать без всяких последствий. Следовательно, наша эквивалентная схема будет соответствовать действительности.

Очевидно, что заряды на конденсаторах будут равны (условие электронейтральности всех элементов схемы в исходном состоянии). Обозначим заряд каждого конденсатора через Q и запишем условие потенциальности электростатического поля:

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \frac{Q}{C_1} - \frac{Q}{C_2} = 0.$$

Отсюда находим заряды конденсаторов:

$$Q = \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)C_1C_2}{(C_1+C_2)} = \frac{\omega BC_1C_2(r_1^2 - r_2^2)}{2(C_1+C_2)}$$

и искомые разности потенциалов:

$$U_1 = \frac{\omega BC_2(r_1^2 - r_2^2)}{2(C_1+C_2)}$$

и

$$U_2 = \frac{\omega BC_1(r_1^2 - r_2^2)}{2(C_1+C_2)}.$$

При $r_1 > r_2$ знаки зарядов на пластинах конденсаторов соответствуют рисунку 10.

Эту задачу можно решать и не рассматривая магнитный поток, а так, как мы это делали при решении задачи 1. Во вращающихся дисках на свободные электроны будут действовать две силы: сила Лоренца и электрическая сила со стороны возникшего радиального электрического поля. В стационарном режиме надо записать условие отсутствия тока в дисках, а затем записать условие потенциальности электростатического поля вдоль замкнутого контура. Попробуйте проделать это самостоятельно.

Задача 5. *Проволочное кольцо радиусом r_1 изготовлено из проводника с поперечным сечением S_1 и удельным сопротивлением ρ_1. К точкам кольца а и с при помощи проводников общей длиной l, поперечным сечением S_2 и удельным сопротивлением ρ_2 подключен амперметр А (рис. 11). Центральная область кольца радиусом r_0 ($r_0 < r_1$) пронизывается перпендикулярным плоскости кольца магнитным полем, изменяющимся с постоянной скоростью $\Delta B/\Delta t = k$ ($k > 0$). Определите ток, который регистрирует амперметр. Что будет показывать амперметр, если его перебросить в положение, изображенное на рисунке пунктирными линиями? Нарисуйте эквивалентные схемы для обоих случаев. Длина дуги абс равна 1/3 длины кольца. Внутренним сопротивлением амперметра пренебречь.*

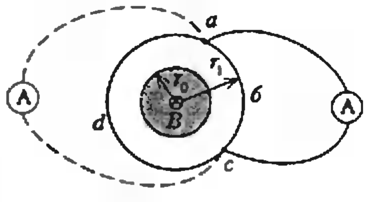


Рис. 11

Нарастающее магнитное поле вызывает появление вихревого электрического поля, силовые линии которого будут иметь вид окружностей, расположенных

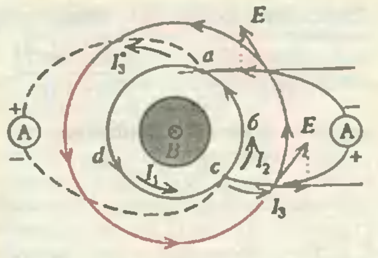


Рис. 12

в плоскости чертежа . Одна из силовых линий, в частности, будет проходить по кольцу. На рисунке 12 красным цветом изображена произвольная силовая линия. Если радиус такой линии $r > r_0$, то работа, совершаемая вихревым электрическим полем по перемещению единичного заряда вдоль окружности, равна

$$E\cdot 2\pi r = |\mathcal{E}_1| = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \pi r_0^2\frac{\Delta B}{\Delta t} = k\pi r_0^2,$$

где E — напряженность вихревого электрического поля на окружности радиусом r. Характерно, что распределение возникающего поля в пространстве не зависит от наличия или отсутствия проводников. Другим фундаментальным *свойством такого поля является* то, что указанная выше работа для любого замкнутого контура, который полностью охватывает область линий индукции магнитного поля, остается постоянной и равной ЭДС индукции.

Рассмотрим контур, включающий в себя амперметр, два проводника (общей длиной l) и дугу кольца adc. В каждом маленьком элементе проводника, входящего в данный контур, имеется своя составляющая вихревого электрического поля вдоль проводника и, следовательно, своя ЭДС индукции. Но суммарная ЭДС индукции во всем контуре будет равна $k\pi r_0^2$: в дуге кольца adc будет распределена ЭДС, равная $2/3\,k\pi r_0^2$, а в другой части контура $1/3\,k\pi r_0^2$. Закон Ома для данного контура будет иметь вид

$$k\pi r_0^2 = I_1\rho_1\frac{4\pi r_1}{3S_1} + I_3\rho_2\frac{l}{S_2}.$$

Рассмотрим теперь круговой контур $abcd$ и запишем для него закон Ома:

$$k\pi r_0^2 = I_1\rho_1\frac{4\pi r_1}{3S_1} + I_2\rho_1\frac{2\pi r_1}{3S_1}.$$

Можно было бы выбрать замкнутый контур, состоящий из амперметра и дуги abc, в котором ЭДС индукции равна нулю (контур не пересекают линии магнитного поля) и получить еще одно уравнение:

$$0 = I_2\rho_1\frac{2\pi r_1}{3S_1} - I_3\rho_2\frac{l}{S_2}.$$

Из этих трех уравнений независимыми являются только два — например, третье уравнение получается почленным вычитанием второго и первого. Поэтому можно выбрать любые два уравнения, а недостающее третье получить из условия непрерывности тока

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Совместное решение трех уравнений позволяет определить ток через амперметр:

$$I_3 = \frac{k\pi r_0^2}{\rho_1\frac{4\pi r_1}{3S_1} + 3\rho_2\frac{l}{S_2}}.$$

Аналогичную систему трех уравнений можно записать для второго положения амперметра:

$$k\pi r_0^2 = I_2^*\rho_1\frac{2\pi r_1}{3S_1} + I_3^*\rho_2\frac{l}{S_2},$$

$$I_1^*\rho_1\frac{4\pi r_1}{3S_1} - I_3^*\rho_2\frac{l}{S_2} = 0,$$

$$I_2^* = I_1^* + I_3^*.$$

Направления токов I_1^* и I_2^* совпадают с направлениями токов I_1 и I_2. Из совместного решения этих уравнений получаем

$$I_3^* = -\frac{k\pi r_0^2}{\rho_1\frac{2\pi r_1}{3S_1} + \rho_2\frac{3l}{2S_2}}$$

— ток через амперметр меняет направление и возрастает в два раза.

Эквивалентные схемы для обоих случаев изображены на рисунке 13 (I — первое положение амперметра, II — второе). Параметры источников (ЭДС $\mathcal{E}$ и внутреннее сопротивление R):

$$\mathcal{E}_1 = \frac{2}{3}k\pi r_0^2,\quad R_1 = \rho_1\frac{4\pi r_1}{3S_1},\quad \mathcal{E}_2 = \frac{1}{3}k\pi r_0^2,$$

$$R_2 = \rho_1\frac{2\pi r_1}{3S_1},\quad \mathcal{E}_3 = \frac{1}{3}k\pi r_0^2,\quad R_3 = \rho_2\frac{l}{S_2},$$

$$\mathcal{E}_3^* = \frac{2}{3}k\pi r_0^2,\quad R_3^* = \rho_2\frac{l}{S_2}.$$

Задача 6. *Неподвижная тонкая проволочная рамка в виде квадрата со стороной a расположена горизонтально в однородном магнитном поле, индукция которого равна B_0 и перпендикулярна плоскости рамки. На рамке лежит проволочная перемычка PP_1 массой m (рис. 14). Рамка и перемычка выполнены из одного куска проволоки с удельным сопротивлением ρ и площадью поперечного сечения S. Какую скорость приобретет перемычка сразу после выключения магнитного поля? Силой трения и перемещением перемычки за время спадания поля пренебречь.*

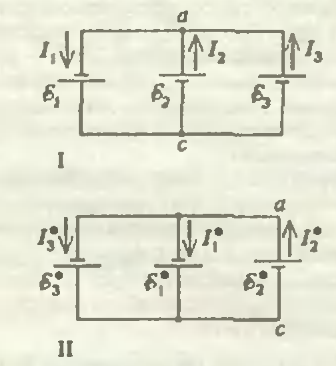


Рис. 13

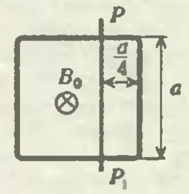


Рис. 14

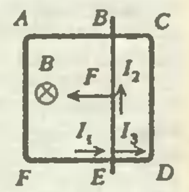


Рис. 15

Пусть в произвольный момент времени в процессе уменьшения магнитного поля индукция поля равна B. Магнитный поток через контур $ABEF$ (рис. 15) равен $\Phi_1 = 3/4\,a^2B$, а через контур $BCDE$ — $\Phi_2 = 1/4\,a^2B$. ЭДС индукции $\mathcal{E}_1 = -3/4\,a^2\,\Delta B/\Delta t$ (в первом контуре) и $\mathcal{E}_2 = -1/4\,a^2\,\Delta B/\Delta t$ (во втором контуре) наводят в проводниках токи I_1, I_2 и I_3. Закон Ома для наших замкнутых контуров будет иметь вид

$$-\frac{3}{4}a^2\frac{\Delta B}{\Delta t} = I_1\rho\frac{5a}{2S} + I_2\rho\frac{a}{S},$$

$$-\frac{1}{4}a^2\frac{\Delta B}{\Delta t} = I_3\rho\frac{3a}{2S} - I_2\rho\frac{a}{S}.$$

Третье уравнение — условие непрерывности тока:

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Из совместного решения этих уравнений находим ток через перемычку:

$$I_2 = -\frac{2}{31}\frac{aS}{\rho}\frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

На перемычку со стороны внешнего магнитного поля будет действовать сила Лоренца

$$F = BI_2a = -\frac{2}{31}\frac{a^2S}{\rho}B\frac{\Delta B}{\Delta t} = -\frac{a^2S}{31\rho}\frac{\Delta(B^2)}{\Delta t}.$$

За малый промежуток времени Δt на перемычку подействует импульс силы, который вызовет приращение импульса перемычки:

$$F\Delta t = m\Delta v.$$

Следовательно, приращение скорости будет равно

$$\Delta v = -\frac{a^2S}{31m\rho}\Delta\left(B^2\right).$$

Поскольку значение B^2 изменяется от B_0^2 до 0, а скорость — от 0 до v, то при

$B = 0$ скорость перемычки будет

$$v = \frac{a^2 S}{31 m\rho} B_0^2 .$$

Упражнения

1. Квадратная проволочная рамка со стороной a находится в магнитном поле с индукцией, равной B и перпендикулярной плоскости рамки (рис. 16). Рамка изготовлена из провода с поперечным сечением S и удельным сопротивлением ρ. По рамке параллельно ее боковым сторонам без нарушения контакта скользит с постоянной скоростью v перемычка PP_1, сопротивление которой R. Определите величину и направление тока в перемычке при произвольном расстоянии x от левой боковой стороны квадрата.

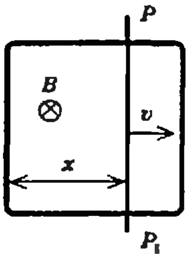


Рис. 16

2. Два проволочных контура, изготовленные из одного куска провода, движутся к длинному прямолинейному проводу с постоянным током (рис. 17). Контур *1* является прямоугольником со сторонами a, $2a$. Контур *2* состоит из двух прямоугольников со сторонами $2a$, a. Когда оба контура находились на расстоянии $b = a$ от провода, токи в контурах были равны. Определите отношение скоростей контуров в этот момент времени, если известно, что индукция магнитного поля, создаваемая током провода, обратно пропорциональна расстоянию от провода. Провод и оба контура расположены в одной плоскости.

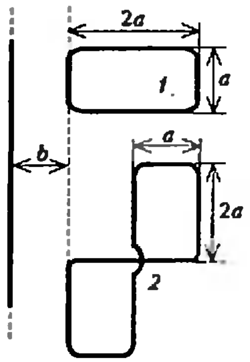


Рис. 17

3. Два одинаковых проволочных кольца, радиусы которых R и сопротивления r, находятся в области однородного магнитного поля, индукция которого перпендикулярна плоскости колец (рис. 18). Известно, что если одно кольцо неподвижно, а скорость поступательного движения другого равна v и направлена вдоль прямой, проходящей через их центры, то при $\alpha = \pi/2$ сила, действующая на каждое кольцо со стороны магнитного поля, равна F. Определите величину индукции магнитного поля. В точках касания колец *а* и *б* имеет место хороший электрический контакт. Индуктивностями колец пренебречь.

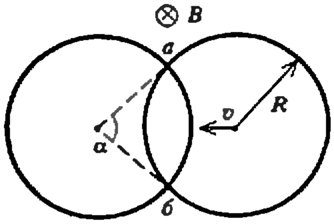


Рис. 18

4. В задаче 5 из статьи вместо амперметра подключен вольтметр с большим сопротивлением R. Определите показание вольтметра в обоих положениях. Найдите также предельные значения этих показаний при $R \to \infty$. Сопротивление подводящих проводов можно не учитывать.

Отсечем все лишнее...

А.ХРУСТАЛЕВ

Совершенство достигается не тогда, когда нечего прибавить, но когда уже ничего нельзя отнять.

Чаще всего условия задач содержат столько исходных данных, сколько нужно для получения результата. Однако, например, на выпускных экзаменах в школах с углубленным изучением математики или на конкурсных экзаменах, время от времени попадаются задачи, содержащие избыточную информацию.

О них и пойдет речь.

Приведенные здесь задачи взяты из различных пособий для школьников и поступающих в вузы.

Задача 1. *Найдите трехзначное число, цифры которого образуют геометрическую прогрессию. Если из этого числа вычесть 792, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Если из цифры, выражающей число сотен, вычесть 4, а остальные цифры искомого числа оставить без изменения, то получится число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию.*

Исключим из условия этой задачи информацию, содержащуюся в последнем предложении. Тогда, обозначив члены геометрической прогрессии через a, b, c, где a — число сотен, b — десятков и c — единиц трехзначного числа, на основании оставшихся данных запишем уравнение

$$100a + 10b + c - 792 = 100c + 10b + a,$$

или

$$a = 8 + c. \qquad (1)$$

Из определения геометрической прогрессии следует, что ее члены отличны от нуля. Поэтому целые числа a, b, c удовлетворяют условиям: $1 \le a \le 9$; $1 \le b \le 9$; $1 \le c \le 9$. Теперь из (1) очевидно: $c = 1$, $a = 9$. Так как числа 9; b; 1 являются положительными членами геометрической прогрессии, то одно из них должно быть средним геометрическим двух других, т.е. $b = \sqrt{9 \cdot 1}$, или $9 = \sqrt{1 \cdot b}$, или $1 = \sqrt{9b}$.

Последние два случая, очевидно, невозможны, следовательно, $b = 3$ и $100a + 10b + c = 931$ — искомое число.

Отметим, что отброшенное условие не противоречит полученному результату.

Задача 2. *Сумма в 95 копеек составлена из пятикопеечных и десятикопеечных монет общим числом не более 14. Если все десятикопеечные монеты заменить пятачками, все пятачки десятикопеечными монетами, общая сумма уменьшится более чем в 1,5 раза. Сколько пятачков и десятикопеечных монет было первоначально?*

Исключим из условия сведение о том, что общее число монет не более 14. Тогда на основании оставшихся данных получим систему

$$\begin{cases} 5n + 10m = 95, \\ (5m + 10n) \cdot 1{,}5 < 95, \end{cases} \qquad (2)$$

где n и m — количества пятикопеечных и десятикопеечных монет соответственно. Но система (2) равносильна системе

$$\begin{cases} n + 2m = 19, \\ 3m + 6n < 38, \end{cases} \qquad (3)$$

поэтому $m = 9$, $n = 1$.

Кстати, из (3) после почленного умножения уравнения на 3 и сложения с неравенством, получим неравенство $9m + 9n < 95$, или $m + n \le 10$, следствием которого является условие $m + n \le 14$.

Задача 3. *Решите уравнение*

$$2x^5-x^4-2x^3+x^2-4x+2=0,$$

если известно, что оно имеет три корня, из которых два являются противоположными числами (противоположными называются два числа, сумма которых равна нулю).

Отбросим «помогающие» условия и просто решим данное уравнение, для чего представим его в виде

$$2x^5-x^4-2x^3+x^2-4x+2=$$
$$=x^4(2x-1)-x^2(2x-1)-2(2x-1)=$$
$$=(2x-1)(x^4-x^2-2)=0.$$

Теперь, решая линейное и биквадратное уравнения, найдем вещественные корни: $x_1=\frac{1}{2}$; $x_2=\sqrt{2}$; $x_3=-\sqrt{2}$. (На самом деле есть еще два комплексных корня, $x_4=i$ и $x_5=-i$. Но поскольку в школьной программе комплексных чисел нет, то и корней этих как бы нет. Если на экзамене вам встретится подобная задача, помните: вы не обязаны находить решения, выходящие за рамки школьного курса! А уж если вы показали, что знаете больше, чем написано в учебнике, будьте готовы объяснить, что такое комплексные числа и с чем их едят!)

Задача 4. *Скорость автомобиля при торможении выражается формулой $v(t)=18-1,2t$. Вычислите путь, пройденный автомобилем, если он остановился через 15 с после начала торможения. (Путь измеряется в метрах.)*

Опустим сведение о том, что автомобиль остановился через 15 с, и найдем это время из уравнения $v(t)=18-1,2t=0$, т.е. $t=15$.

Теперь находим путь, пройденный автомобилем при торможении:

$$S=\int_0^{15}(18-1{,}2t)dt=$$
$$=(18t-0{,}6t^2)\Big|_0^{15}=135(\text{м}).$$

Задача 5. *На сжигание неизвестного вещества массой 5,4 г израсходовали кислород массой 0,8 г. При этом получились оксид углерода (IV) массой 8,8 г, азот массой 2,8 г и вода массой 1,8 г. Определите молекулярную формулу соединения, зная, что относительная молекулярная масса его 27.*

Сразу отметим, что в условии опечатка, так как не выполняется закон сохранения массы. Вместо 0,8 г кислорода должно быть 8,0 г. Без ущерба для определенности задачи из ее условия можно исключить все количественные данные, кроме относительной молекулярной массы. Поскольку в результате реакции образовались оксид углерода, азот и вода, в состав соединения входят углерод, азот и водород, причем в его молекуле содержится только один атом азота, на который приходится 14 единиц из 27, но тогда в оставшихся 13 единицах может содержаться только один атом углерода (12 единиц), а остаток, равный единице, приходится на водород, поэтому других элементов вещество не содержит.

Значит, HCN — формула соединения. Просто и красиво!

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите натуральные числа, образующие арифметическую прогрессию, если произведения трех и четырех первых ее членов равны соответственно 6 и 24.
2. Решите уравнение $12x^3+4x^2-17x+6=0$, если известно, что среди его корней имеются два числа, обратных по абсолютной величине и противоположных по знаку.
3. Произведение двузначного числа на сумму его цифр равно 405, а произведение «перевернутого» числа на сумму его цифр равно 486. Найдите это число.
4. Выведите формулу диенового углеводорода, если при сгорании его объемом 4 л образовался оксид углерода объемом 12 л и пары воды объемом 8 л. Плотность паров по водороду 20.

В заключение — совет: встретив текстовую задачу, в особенности с нагромождением исходных данных, не приступайте сразу к решению, проанализируйте сначала условие. Не исключено, что часть сведений окажется лишней, а после их удаления решение станет гораздо изящней.

Вы знаете, наверное, ответ великого Микеланджело на вопрос, как он создает свои замечательные скульптуры: «Я беру глыбу мрамора и отсекаю от нее все лишнее». Как видите, «рецепт Микеланджело» приложим не только к мрамору. Ведь «математика — не формулы, как музыка — не ноты»...

ИНФОРМАЦИЯ

ЗАОЧНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ШКОЛА ПРИ МГУ

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете МГУ объявляет прием учащихся в 10 и 11 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику, лучше подготовиться к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения и, прежде всего, на физический факультет МГУ.

Физический факультет МГУ готовит физиков — теоретиков и экспериментаторов — по всем разделам современной физики и астрономии. Фундаментальное университетское образование позволяет выпускникам физического факультета быстро осваивать специфику любого научного или технического направления, успешно работать на стыке научных направлений — таких, например, как геофизика и биофизика, астрофизика и химическая физика, компьютерная физика и математическое моделирование.

Выпускникам физического факультета присваивается степень магистра.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать *до 1 сентября* по адресу: *119899, Москва, ГСП, Ленинские горы, МГУ, Физический факультет, ЗФШ.* В письмо вложите два экземпляра анкеты, заполненной на листах плотной бумаги размером 7×12 см по приведенному здесь образцу, и конверт с Вашим адресом.

Решение о зачислении в ЗФШ будет сообщено до 20 октября.

Принятым в ЗФШ в течение года высылаются контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решенные задания оцениваются, рецензируются и отсылаются обратно. Учащиеся 10 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 11 класс. Успешно прошедшие обучение получают удостоверение об окончании ЗФШ (при поступлении на физический факультет МГУ это учитывается приемной комиссией).

Фамилия, имя, отчество	*Крылова Наталия Владимировна*
Класс ЗФШ	*10*
Профессия родителей	*мать — инженер, отец — врач*
Подробный домашний адрес	*240812 г. Калуга, ул. Пушкина, д. 24, кв. 26*
Номер и адрес школы	*школа № 777, г. Калуга, ул. Садовая, д. 11*

Для проживающих в Москве и Московской области имеется вечерняя физическая школа.

Справки по телефону (095) 939-38-78 с 16 до 18 часов по рабочим дням.

(Продолжение на с. 57)

Варианты вступительных экзаменов 1994 года

Московский государственный авиационный институт (технический университет) — МАИ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Изобразите на плоскости множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y+8 \ge x^2+2x, \\ 12+5x \le -2y. \end{cases}$$

2. Найдите значение выражения

$$\frac{\sin\alpha - 3\cos\alpha}{0{,}5\sin\alpha},$$

если

$$\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=2.$$

3. В прямоугольной трапеции большая диагональ, имеющая длину 24, является биссектрисой острого угла. Найдите площадь трапеции, если расстояние от вершины тупого угла до диагонали равно 9.

4. Решите неравенство

$$\left|\log_{x+5}(x+2)^2\right|-2 \le 0.$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x+6=\dfrac{\sqrt{x-y-1}+4\sqrt{x-y}}{y+2x-6}, \\ y^2+\sqrt{x-y}=5+\sqrt{x-y-1}-(x-3)^2. \end{cases}$$

6. На ребре A_1C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ $(AA_1 \| BB_1 \| CC_1)$ взята точка M. Известно, что площадь треугольника AA_1M равна площади сечения пирамиды ABA_1M плоскостью, проходящей через середины ребер AB, BA_1, A_1M. В каком отношении точка M делит ребро A_1C_1?

Вариант 2

1. Изобразите на плоскости множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y-x^2-2x \ge 0, \\ 5x+2y+7 \le 0. \end{cases}$$

2. Найдите значение выражения

$$\frac{\cos\alpha - 2\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

если

$$\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}.$$

3. В прямоугольной трапеции средняя линия равна 13,5. Меньшая диагональ является биссектрисой тупого угла и имеет длину 12. Найдите стороны трапеции.

4. Решите неравенство

$$\left|\log_{x+6}(x+3)^2\right|-2 \le 0.$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y}-4+x=\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x+y-9}+2}{\sqrt{y-x+4}}, \\ 9+(y-5)^2=x+y. \end{cases}$$

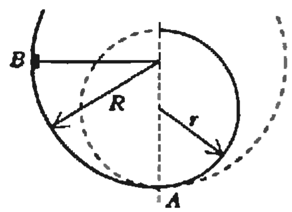
6. В правильной четырехугольной призме $ABCDA'B'C'D'$ $(AA' \| BB' \| CC' \| DD')$ точка M является центром грани $AA'B'B$, а точка N лежит на ребре AD. Пирамида $BB'MN$ пересечена плоскостью, проходящей через середины ребер $B'M$, BN, $B'N$. Площадь полученного сечения составляет $1/3$ от площади треугольника $C'CN$. В каком отношении точка N делит отрезок AD?

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Небольшое тело скользит без трения по внутренней поверхности желоба, выполненного в виде двух сопряженных в точке A окружностей с радиусами R и $R/2 < r < R$ (см. рисунок). Найдите скорость тела в наивысшей точке его траектории (после отрыва от желоба), если первоначально тело находилось в точке B на высоте, равной R относительно точки A. Сопротивлением воздуха пренебречь.



2. Холодильная машина, работающая по обратному циклу Карно, передает тепло от холодильника с водой при температуре $t_2 = 0$ °C кипятильнику с водой при температуре $t_1 = 100$ °C. Какую массу воды нужно заморозить в холодильнике, чтобы превратить в пар $m_1 = 1$ кг воды в кипятильнике? Удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}26$ МДж/кг, удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг.

3. Определите относительную влажность воздуха, взятого при температуре $T = 363$ К и давлении $p = 10^5$ Па, если отношение массы пара к полной массе воздуха в некотором объеме равно $\alpha = 0{,}25$. Отношение молярных масс воды и воздуха составляет $\beta = 0{,}6$, давление насыщенных паров воды при температуре 363 К равно $p_н = 70$ кПа.

4. Элемент с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивление r замкнут на внешнее сопротивление R. Наибольшая мощность, выделяющаяся во внешней цепи, равна $P = 9$ Вт. При этом в цепи течет ток $I = 3$ А. Найдите ЭДС и внутреннее сопротивление элемента.

5. Катушка диаметром $D = 5$ см, содержащая $N = 1000$ витков, помещена в однородное магнитное поле, параллельное ее оси. Индукция поля равномерно нарастает со скоростью $\Delta B/\Delta t = 0{,}1$ мТл/с. К концам катушки подключен конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ. Определите заряд на конденсаторе.

6. На каком расстоянии от тонкой собирающей линзы надо поместить предмет перпендикулярно главной оптической оси, чтобы получить действительное изображение, увеличенное в $\Gamma = 3$ раза? Фокусное расстояние линзы $F = 5$ см.

Публикацию подготовили
Е.Студников, В.Шапошников

Московский инженерно-физический институт (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$\frac{10-5^{x+2}}{5^x+8} \le -0{,}5.$$

2. Из пункта M в пункт N выходит первый пешеход, а через 2 часа навстречу ему из пункта N в пункт M выходит второй пешеход. К моменту встречи второй пешеход прошел $7/9$ от расстояния, пройденного к этому моменту первым пешеходом. Сколько часов требуется первому пешеходу на весь путь от M до N, если второй пешеход проходит путь от N до M за 7 часов?

3. Решите уравнение

$$\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos(5-x) - \sin 5\cdot\sin x}.$$

4. При каких значениях $a \in R$ функция

$$f(x) = \frac{7}{x^2-2x+25}$$

возрастает на отрезке $[a-5;\ 5a]$?

5. Основанием четырехугольной пирамиды $SKLMN$ служит прямоугольник $KLMN$. Точка C лежит на ребре KS, причем $CK : CS = 1 : 3$. Найдите отношение объемов многогранников, на которые разбивает пирамиду плоскость, проходящая через точки M, N, C.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$5^{2\cdot\cos^2 x-\sqrt{3}\cdot\cos x} = 125.$$

2. Решите неравенство

$$2\cdot\log_4(2x-2) \le 3\cdot\log_8(4-x).$$

3. Два трактора могут вспахать поле за 15 часов. Если бы производительность первого трактора была вдвое больше, чем в действительности, а производительность второго трактора на 20% больше, чем в действительности, то на вспашку этого же поля обоим тракторам понадобилось бы 10 часов. За сколько часов может вспахать это поле каждый трактор, работая один?

4. В основании пирамиды $SKLM$ лежит треугольник KLM, все стороны которого имеют длину $4\sqrt{3}$. Центр шара, описанного около пирамиды, совпадает с центром основания пирамиды. Определите объем пирамиды, если известно, что $LS = b$, а боковые ребра KS и MS имеют одинаковую длину. При каком значении b объем пирамиды наибольший?

5. Решите неравенство

$$\frac{4\cdot\sqrt{b-x}}{5\cdot(3+4x)} \le \frac{\sqrt{b-x}}{5x-15},\ b \in R.$$

Вариант 3

1. Решите уравнение $x+\sqrt{x}-6=0$.

2. Если двузначное натуральное число A разделить на сумму его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 7. Определите число A.

3. Вычислите $\cos(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha-\sin\beta=1$ и $\cos\alpha+\cos\beta=\sqrt{3}$.

4. В прямой треугольной призме $PQRP_1Q_1R_1$ ($PP_1 \| QQ_1 \| RR_1$) $P_1Q_1 = Q_1R_1 = a$, $\angle P_1Q_1R_1 = 2\varphi$, $PR_1 = k$. Через прямую PP_1 проведена плоскость, пересекающая отрезок QR. Определите площадь образовавшегося сечения призмы, если известно, что эта площадь имеет наименьшее возможное значение.

5. Решите уравнение ($d \in R$)

$$44-d+(20-7d)\cdot\cos x = 42\sin^2 x.$$

При каких значениях d это уравнение на промежутке $(1{,}5\pi;\ 2{,}5\pi]$ имеет только одно решение?

Публикацию подготовил В.Чижов

Московский государственный институт электронной техники — технический университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Что больше: $\mathrm{ctg}(1993/1994)$ или $\mathrm{ctg}(1994/1995)$?

2. Решите неравенство $1/x \ge 1/13$.

3. В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найдите периметр квадрата.

4. Найдите a, при котором один из корней уравнения $2x^2+ax+3a=0$ равен 3.

5. Решите уравнение

$$(x^2+5x)\sqrt{x-3}=0.$$

6. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 7, а сумма первых шести ее членов составляет 63. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

7. Постройте график функции

$$y = 3+\frac{2}{x-2}.$$

8. Упростите выражение

$$\left(\sqrt{12}\right)^{\left(\log_2|2-\sqrt{5}|\right)/\log_2\left(2\sqrt{3}\right)} - \sqrt{5}.$$

9. Цех в целом увеличил за год выпуск продукции на 34%, причем 20% рабочих цеха увеличили выпуск продукции на 50%. На сколько процентов увеличили выпуск продукции остальные рабочие цеха?

10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy/(x+y) = 2/3, \\ yz/(y+z) = 6/5, \\ zx/(x+z) = 3/4. \end{cases}$$

11. Решите уравнение

$$\log_{\frac{4}{5}(2-x-x^2)} \sin\left(\pi\left(x^2+2x+1{,}25\right)\right) = 0.$$

12. Пусть x_1 — точка минимума, а x_2 — точка максимума функции

$$y = -3x^5 + 5(a-4)x^3 + 60ax - 1.$$

При каких значениях параметра a выполняется равенство $x_1^2 = x_2$?

Вариант 2

1. Вычислите без таблиц $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 12/5$ и $\pi < \alpha < 3\pi/2$.
2. Решите уравнение $\log_{x-1} 5 = 2$.
3. Решите уравнение $|2x-3| = 11$.
4. Приведите определение точки максимума функции.
5. Решите неравенство

$$|x-0{,}5|\left(\log_{2/3} x\right) > -\sqrt{0{,}25 - x + x^2}.$$

6. Постройте график функции

$$y = 2 - (x+1)^2.$$

7. Найдите все значения x, при каждом из которых производная функции

$$f(x) = 8\sqrt{2}\sin(x/4) - 2\sqrt{2}\sin(x/2) - \sqrt{2}x - 1994$$

равна 0.

8. Сколько килограммов воды нужно добавить к 20 кг 5%-ного раствора соли в воде, чтобы получить 4%-ный раствор?

9. Вычислите

$$5^{\log_2^2 3} - 3^{(\log_2 3)(\log_2 5)}.$$

10. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{\cos x} 2 > -1, \\ |x| < \pi. \end{cases}$$

11. Даны две геометрические прогрессии a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3. Известно, что $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$, а числа a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что $a_1 + b_1 = a_3 + b_3$.

12. Точка M лежит на окружности R, описанной около прямоугольника $ABCD$. Докажите, что $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 8R^2$.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Небольшое тело совершает гармонические колебания. Зная, что его максимальная скорость равна $v_m = 9{,}42$ м/с, найдите величину средней скорости тела за время, в течение которого оно перемещается из одного крайнего положения в другое.

2. Вычислите время, за которое тело соскользнет с нулевой начальной скоростью с наклонной плоскости высотой $h = 26$ см с углом наклона $\beta = 60°$, если по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 45°$ и тем же коэффициентом трения оно движется равномерно. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

3. В теплоизолированном цилиндре под теплонепроницаемым поршнем находится одноатомный идеальный газ с начальным давлением $p = 10^5$ Па, объемом $V = 3$ дм^3 и температурой $T = 300$ К. При сжатии газа над ним совершили работу $A = 90$ Дж. Найдите температуру газа после сжатия.

4. Какова работа внешней силы, равномерно перемещающей небольшое тело с зарядом $q = -20$ нКл из точки электростатического поля с потенциалом $\varphi_1 = 700$ В в точку с потенциалом $\varphi_2 = 200$ В?

5. Конденсатор, заряженный до напряжения $U_1 = 10$ В, подсоединяют к конденсатору вдвое большей емкости, заряженному до напряжения $U_2 = 40$ В, при этом соединяют одноименно заряженные обкладки конденсаторов. Какое напряжение установится на конденсаторах?

6. Расстояние от предмета до переднего фокуса линзы в $n = 4$ раза меньше расстояния от действительного изображения до заднего фокуса. Постройте ход лучей и вычислите, с каким увеличением изображается предмет.

Вариант 2

1. Тело двигалось по оси X с постоянным ускорением. В точке $x_1 = 2$ м оно имело проекцию скорости $v_{1x} = 2$ м/с, а в точке $x_2 = 3$ м — проекцию скорости $v_{2x} = 3$ м/с. Найдите координату точки, из которой тело начало движение.

2. Брусок массой $m = 2$ кг, лежащий на шероховатой горизонтальной плоскости, приходит в движение с ускорением $a = 3$ м/с^2, когда на него действуют горизонтальной силой $F = 11$ Н. Какой минимальной горизонтальной силой следует подействовать на брусок, чтобы только сдвинуть его с места?

3. При изобарном нагревании некоторой массы идеального газа его плотность уменьшилась вдвое. На сколько процентов увеличилась температура газа по шкале Кельвина?

4. Из двух одинаковых маленьких проводящих шариков один неподвижен, а другой привязан к концу вертикальной нити длиной $l = 0{,}2$ м. Масса каждого шарика $m = 0{,}9$ г. Шарики, находясь в соприкосновении, получают одинаковые электрические заряды. В результате подвижный шарик отклоняет нить на угол $\alpha = 60°$ от вертикали. Определите заряд каждого шарика. Постоянная в законе Кулона $k = 9 \cdot 10^9$ Н·м^2/Кл^2, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

5. К источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 120$ В подключены последовательно неизвестное сопротивление R и лампочка, рассчитанная на напряжение $U = 12$ В и мощность $P = 48$ Вт. Лампочка горит нормальным накалом. Определите величину R. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

6. Расстояние между предметом и его прямым изображением, создаваемым тонкой линзой с поперечным увеличением $\Gamma = 0{,}2$, равно $L = 32$ см. Постройте ход лучей и определите величину оптической силы линзы.

Публикацию подготовили С.Кальней, А.Овчинников, В.Плис, А.Ревякин

Санкт-Петербургский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математико-механический факультет)

1. При каких a найдутся вещественные числа x и y, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2xy+a} = x+y+1?$$

2. Решите неравенство

$$\log_{9x} 3x + \log_{3x^2} 9x^2 < \frac{5}{2}.$$

3. Решите уравнение

$$\cos x \sin^3 x - \sin x \cos^3 x = \frac{1}{14}\cos 8x.$$

4. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Вписанная в него окружность с центром O касается боковой стороны BC в точке P и пересекает биссектрису угла B в точке Q. Докажите, что отрезки QP и OC параллельны.

5. Середины сторон основания правильной четырехугольной пирамиды объемом V служат вершинами основания правильной четырехугольной призмы объемом $\frac{3}{2}V$. Найдите объем общей части призмы и пирамиды.

Вариант 2

(экономический факультет)

1. Пенсионерка поместила в сбербанк некоторую сумму денег под фиксированный процент месячного дохода. Она планировала получить за год 165 тыс. р. дохода, но через полгода сняла с книжки 100 тыс. р. В конце года на книжке было 420 тыс. р. Найдите исходную сумму вклада.

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}} \ge \frac{1}{1+x}.$$

3. Решите уравнение

$$\arccos x = \frac{3}{2}\arccos\frac{x}{2}.$$

4. Решите уравнение

$$\log_2\left(2^x+2\right)\log_2\left(2^{x-1}+1\right) = 6.$$

5. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с ребром $BC = b$. Точки P и Q — середины ребер $A'B'$ и $C'D'$ соответственно. Найдите объем общей части двух пирамид с общим основанием $ABCD$ и вершинами P и Q.

Вариант 3

(психологический факультет, вечернее и заочное отделения)

1. Трем бригадам поручена некоторая работа. Известно, что первая и вторая бригады, работая вместе, могут выполнить ее за 55 дней. Известно также, что третья бригада затратила бы на эту же работу на 11 дней больше, чем вторая. Найдите наибольший и наименьший возможные сроки, за которые выполнят эту работу три бригады, работая все вместе.

2. Решите неравенство

$$\frac{2x+\sqrt{x+2}}{2x-\sqrt{x+2}} \ge 1.$$

3. Решите неравенство

$$2\log_3 3x - \log_3 x^x \le x.$$

4. Решите уравнение

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\sin 3x}{4\cos x - 2}}.$$

5. Известно, что точки K и L лежат, соответственно, на сторонах AB и BC треугольника ABC, а O — точка пересечения AL и CK. Известно, что площади треугольников AOK и COL равны, соответственно, 1 и 8, а треугольник AOC и четырехугольник $BKOL$ равновелики. Найдите площадь треугольника ABC.

Публикацию подготовили О.Иванов, Н.Нецветаев, А.Орлов

Российский государственный педагогический университет им.А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

(математический факультет)

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$\frac{b\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}},$$

если

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right),$$

причем a, $b > 0$.

2. Для каждого натурального $n > 1$ определена функция

$$f_n(x) = 2^{\log_n\left(x^2-2ax\right)}.$$

а) Найдите области определения этих функций.

б) Нарисуйте график функции $f_2(x)$.

в) Решите уравнение $\frac{1}{8}f_3(x) = 1$.

3. Найдите все решения уравнения

$$\cos(\pi(1-x)) + \cos(2\pi(2-x)) + \cos(3\pi(3-x)) = 0,$$

принадлежащие отрезку $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Катеты прямоугольного треугольника равны a и $2a$. Середина катета $2a$ служит центром окружности с радиусом, равным a. На какие отрезки делится этой окружностью гипотенуза треугольника?

5. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$, все ребра которой равны b. Через точку N, делящую отрезок AD в отношении $2:1$, считая от точки A, проведена плоскость, параллельная плоскости SCD. Вычислите площадь полученного сечения.

Вариант 2

1. Упростите выражение

$$\frac{2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}-x},$$

если

$$x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{c}{d}}+\sqrt{\frac{d}{c}}\right),$$

причем c, $d>0$.

2. Для каждого натурального $n>1$ определена функция

$$f_n(x)=3^{\log_n\left(n+2x-x^2\right)}.$$

а) Найдите области определения этих функций.

б) Нарисуйте график функции $f_3(x)$.

в) Решите уравнение $\frac{1}{3}f_2(x)=1$.

3. Найдите все решения уравнения

$$\sin(\pi(1+x))-\sin(2\pi(2+x))+\sin(3\pi(3+x))=0,$$

принадлежащие интервалу $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Стороны прямоугольника равны a и b. На стороне a, как на диаметре, построена окружность. На какие отрезки окружность делит диагональ прямоугольника?

5. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$, все ребра которой равны a. Через точку M, делящую отрезок AD в отношении 2 : 1, считая от точки A, проведена плоскость, параллельная плоскости ASB. Вычислите площадь полученного сечения.

Публикацию подготовила О.Корсакова

Санкт-Петербургский государственный технический университет (Политехнический институт императора Петра Великого)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультет технической кибернетики)

1. Решите уравнение

$$(\operatorname{tg}x)^{\lg\operatorname{tg}x}\sin^2\lg x+(\lg x)^{\lg\operatorname{tg}x}\cos^2\lg x=1.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}=0.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{2^x-\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}+\frac{x^2-\sqrt{x}}{8-\sqrt{x}}+\frac{8-\sqrt{x}}{2^x-\sqrt{x}}\ge\frac{x^2-\sqrt{x}}{2^x-\sqrt{x}}+\frac{8-\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}+\frac{2^x-\sqrt{x}}{8-\sqrt{x}}.$$

4. Какое подмножество M плоскости Oxy заполняют прямые вида

$$y=x\cos\theta+\cos 2\theta,$$

где θ произвольно? Изобразите это подмножество, приведя уравнения всех частей его границы.

5. Диагонали с длинами $\sqrt{7}$ и 4 делят четырехугольник на части, площади которых образуют арифметическую прогрессию. Найдите площадь четырехугольника, зная, что угол между большей диагональю и меньшей из сторон равен $\pi/6$.

Вариант 2

(физико-технический факультет)

1. При каких значениях параметра p все значения функции

$$f(x)=\frac{p+x-x^2}{1-x+x^2}$$

содержатся в промежутке $[-1;1]$? Каково при этому множество E_f значений f?

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x^2-y^2=16,\\ 3xy^2+x^3=260.\end{cases}$$

3. При каких x одно из чисел $\cos x$, $\cos x^2$, $\sin 2x$ больше двух других и равно их сумме?

4. Изобразите на плоскости Oxy области, заданные неравенством

$$\frac{1}{\log_{x+1}\left(y+x^2/2\right)}+\frac{1}{\log_{x-1}\left(y+x^2/2\right)}<1,$$

приведя уравнения их границ.

5. Четырехугольник $ABCD$, описанный около некоторой окружности, делится диагональю AC на треугольники ABC и ACD с радиусами вписанных окружностей 1 и $3/\sqrt{15}$ соответственно. Найдите стороны четырехугольника и диагональ BD, если площади ABC и ACD равны 6 и $\sqrt{15}$ соответственно.

Вариант 3

(радиофизический факультет)

1. Решите неравенство

$$\log_x\sqrt{4x-1}+\log_2(1-4x)^2\le 0.$$

2. Точка находится внутри круга радиусом 6 и делит проходящую через нее хорду на отрезки длиной 5 и 4. Найдите расстояние от точки до окружности.

3. Решите уравнение

$$\frac{1}{\cos x+\cos 3x}+\frac{1}{\cos x+\cos 5x}+\frac{1}{\cos x+\cos 7x}=0.$$

4. Прямая делит пополам основание AB равнобедренного треугольника ABC с боковой стороной 3 и отсекает на лучах CA и CB отрезки CM и CN соответственно. Найдите длину CM, если длина CN равна 2.

5. Найдите те $\alpha\in[-\pi/2;3\pi/2)$, при которых неравенство

$$\sin^2 x+\cos^2(x-\alpha)\ge 3/4+2\sin x\sin\alpha\cos(x-\alpha)$$

выполнено для всех x.

Вариант 4

(физико-механический факультет, пробный экзамен)

1. Найдите x и y, если 1; x; $2y+3$ — геометрическая, а $|x+2|+|x-1|$; $y+2$; $\sin(\arcsin x)$ — арифметическая прогрессии.

2. Решите неравенство

$$\log_3 2+\log_3\log_3(4-x)\le\log_3\log_3(19-6x).$$

3. Решите уравнение

$$\cos 3x + \sin 7x = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5}{2}x\right) - 2\cos^2\left(\frac{9}{2}x\right).$$

4. Три равных конуса с радиусами основания 1 и высотой H стоят на плоскости, касаясь друг друга основаниями. Найдите радиус шара, касающегося всех трех конусов и плоскости, в которой лежат их вершины.

5. При каких значениях a множество решений неравенства

$$\sqrt{7+x} + \sqrt{x^2 - 2ax + a^2} \le 4$$

является отрезком?

Вариант 5

(физико-механический факультет, основной экзамен)

1. Упростите выражение

$$\log_{a+b} m + \log_{a-b} m - 2\log_{a+b} m \log_{a-b} m,$$

если $m^2 = a^2 - b^2$.

2. Решите уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2(x/2) = 9/16.$$

Укажите решения этого уравнения, удовлетворяющие неравенству

$$\sqrt{112 - 7x^2}\,/x < 7/3.$$

3. Составьте приведенное квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корнями которого являются числа x_1/x_2 и x_2/x_1, если $x_{1,2}$ — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, где $p = 4 + \sqrt{2}$; $q = 3 + 4\sqrt{2}/3$.

4. При каких значениях a функция

$$f(x) = a \cdot 8^x + (3a+1)4^x + (9a+1)2^x + 2$$

не имеет экстремумов?

5. Радиус шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, равен 5/4, радиус вписанного шара равен 1/2. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. Магнитофонная лента перематывается с одной бобины (катушки) на другую. Угловая скорость приемной бобины постоянна и равна ω, радиус пустой бобины R, толщина ленты h. Какова будет скорость подачи ленты через время t после начала движения?

2. В лифте, движущемся вертикально вверх с ускорением $a_0 = 2$ м/с^2, находится вращающийся с частотой $f = 1{,}3$ об/с горизонтальный столик, на котором лежит маленький коробок. Коэффициент трения коробка о столик $\mu = 0{,}4$. Найдите максимальное расстояние коробка от оси вращения, при котором он еще будет удерживаться на столике. Найдите также ускорение коробка относительно земли.

3. Лента горизонтального транспортера движется со скоростью $u = 0{,}5$ м/с. На ленту, касаясь ее, влетает шайба с начальной скоростью, равной $v = 2{,}1$ м/с и перпендикулярной краю ленты. Найдите ширину ленты, при которой шайба остановится на ее краю, если коэффициент трения между шайбой и лентой $\mu = 0{,}75$.

4. Легкий шарик начинает свободно падать и, пролетев расстояние l, сталкивается упруго с тяжелой плитой, движущейся вертикально вверх со скоростью u. Определите время между двумя последовательными ударами шарика о плиту.

5. В сосуде находится смесь азота N_2 и водорода H_2. При температуре T, когда азот полностью диссоциирован на атомы, давление равно p (диссоциацией водорода пренебречь). При температуре $3T$, когда оба газа полностью диссоциированы, давление в сосуде равно $4p$. Каково отношение масс водорода и азота в смеси?

6. Один моль идеального газа совершает замкнутый процесс, состоящий из двух изохор и двух изобар (рис.1). Температура в точке 1 равна $T_1 = 300$ К, в точке 3 — $T_3 = 500$ К. Определите работу, совершаемую газом за цикл, если точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.

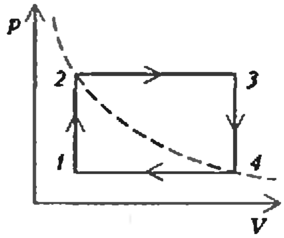


Рис. 1

7. Электрический диполь (система из двух жестко связанных точечных зарядов $+q$ и $-q$, расположенных на расстоянии l друг от друга) находится в положении устойчивого равновесия в однородном электрическом поле напряженностью E. Какую работу нужно совершить, чтобы повернуть диполь на 180°?

8. Тонкий металлический стержень длиной $l = 1200$ мм вращается в однородном магнитном поле вокруг перпендикулярной к стержню оси, проходящей через стержень и отстоящей от одного из его концов на расстояние $l_1 = 250$ мм. Скорость вращения стержня $n = 120$ об/мин. Вектор магнитной индукции параллелен оси вращения и имеет величину $B = 1$ мТл. Найдите разность потенциалов, возникающую между концами стержня.

9. Два одинаковых конденсатора A и B, каждый емкостью C, и катушка индуктивностью L соединены, как показано на рисунке 2. В начальный момент ключ K разомкнут, конденсатор A заряжен до разности потенциалов U, конденсатор B не заряжен и ток в катушке отсутствует. Определите максимальное значение силы тока в катушке после замыкания ключа.

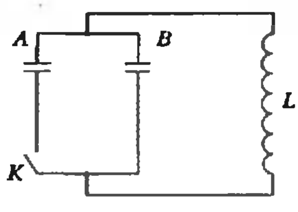


Рис. 2

10. Одна из пластин незаряженного плоского конденсатора освещается рентгеновскими лучами, вырывающими из нее электроны со скоростью $v = 10^6$ м/с. Электроны собираются на второй пластине. Через какое время фототок между пластинами прекратится, если с каждого квадратного сантиметра площади вырывается ежесекундно $n = 10^{13}$ электронов? Расстояние между пластинами $d = 10$ мм. Массу и заряд электрона считать известными.

Публикацию подготовили М.Пoгарский, В.Полищук, С.Преображенский, В.Романов, Б.Чихачев

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3x+2}}}=\frac{3x^2+11x+10}{36x^2-25}-\frac{3-2x}{6x-5}.$$

2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\frac{10}{x+4}<5+\frac{3}{x-2},\\ |6x+10|\le 15.\end{cases}$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1.$$

4. Решите уравнение

$$\cos x+\cos 7x-2\sin^2 2x+1=0.$$

5. Решите уравнение

$$\log_2\left(4^x+1\right)=x+\log_2\left(2^{x+3}-6\right).$$

6. Решите неравенство

$$\left(\frac{8}{5}\right)^{7\sin\left(2\pi+\frac{3x}{4}\right)+15\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3x}{4}\right)-3\sqrt{3}}\ge\left(\frac{8}{5}\right)^{-11\sin\left(\pi+\frac{3x}{4}\right)-13\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{3x}{4}\right)-6\sqrt{3}}$$

7. Сумма шестого и одиннадцатого членов арифметической прогрессии равна 72, а сумма девяти первых членов этой прогрессии тоже равна 72. Первый член геометрической прогрессии равен деленному на 8 первому члену данной арифметической прогрессии, а знаменатель геометрической прогрессии в 4 раза меньше разности арифметической прогрессии. Один из членов геометрической прогрессии равен (-192). Найдите его номер.

8. Если в двузначном натуральном числе заменить цифру десятков на 1, то получится число в 3 раза большее, чем сумма цифр исходного числа. Если же в исходном числе поменять местами цифры десятков и единиц и затем это число умножить на 2, то при делении полученного числа на сумму квадратов цифр исходного числа в частном получается 5, а в остатке — удвоенное число десятков исходного числа. Найдите это двузначное натуральное число.

9. Длина основания равнобедренного треугольника равна 10, а его площадь равна 60. Найдите длину медианы, проведенной к боковой стороне.

10. При каких значениях a прямая $y=a-2x$ имеет две общие точки с окружностью, центр которой находится в точке $(-5;3)$, а радиус равен $\sqrt{5}$?

Публикацию подготовили
Н.Бодунов, М.Доценко

ИНФОРМАЦИЯ

(Начало на с. 50)

Вступительное задание

Поступающим в 10 класс ЗФШ нужно решить задачи 1–4, поступающим в 11 класс — задачи 4–7.

1. Шар, до половины погруженный в воду, лежит на дне сосуда и давит на него с силой, равной трети действующей на шар силы тяжести. Найдите плотность шара.

2. Спутник, движущийся по круговой орбите вблизи поверхности некоторой планеты, совершает один оборот за время T_1. Если же круговая орбита проходит на высоте h от поверхности планеты, то период обращения спутника составляет T_2. Каково ускорение свободного падения тел вблизи поверхности планеты? Влияние атмосферы не учитывать.

3. Камень бросают вертикально вверх. Некоторый начальный отрезок пути он пролетает за время t_1, а следующий такой же по величине отрезок — за время t_2 (оба отрезка примыкают друг к другу). На какую максимальную высоту поднимется камень? Ускорение свободного падения g. Сопротивлением воздуха пренебречь. В момент t_1+t_2 камень движется вверх.

4. Придумайте качественную задачу по любому разделу физики (и приведите ее решение).

5. Гидролокатор подводной лодки, погружающейся вертикально, излучает короткие звуковые сигналы длительностью τ_0 в направлении дна. Длительность отраженных сигналов, измеряемых гидроакустиком на лодке, равна τ. Какова скорость погружения лодки? Скорость звука в воде c. Дно горизонтально.

6. Два сосуда заполнены воздухом. Температура воздуха в обоих сосудах одна и та же, объем второго сосуда в k раз больше объема первого. Сосуды соединили, в результате давление стало p, а температура не изменилась. Найдите начальное давление во втором сосуде, если в первом оно было p_1.

7. Точечный заряд Q находится на расстоянии h от бесконечной металлической плоскости. Какая сила действует на заряд со стороны плоскости?

ЗИФМШ ОБЪЯВЛЯЕТ ПРИЕМ

Заочная инженерная физико-математическая школа (ЗИФМШ) объявляет прием учащихся в 9, 10 и 11 классы на 1995/96 учебный год. Главная цель школы — помочь учащимся глубже изучить математику и физику, развить инженерный склад мышления и лучше подготовиться к поступлению в группы по подготовке инженеров-исследователей высших учебных заведений, прежде всего — Петербургского государственного университета путей сообщения (ПГУПС).

Прием в ЗИФМШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. После номера каждой задачи в скобках указано, для какого класса предназначена эта задача. (Например: 4 (9,10 кл.) означает, что задача 4 входит в конкурсное задание для 9 и 10 классов.) Задание для каждого класса состоит из шести задач.

Решение вступительного задания необходимо прислать по адресу: *190031, Санкт-Петербург, Московский проспект, д. 9, ПГУПС, ЗИФМШ, на конкурс*. В письмо вложите два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 9×12 см и заполненной по прилагаемому образцу.

Зачисленным в ЗИФМШ в течение года высылаются учебные пособия и контрольные задания. Решенные задания оцениваются и рецензируются. Успешно закончившие ЗИФМШ получают удостоверение и имеют преимущество при поступлении в ПГУПС,

Фамилия, имя, отчество	*Сидоров Иван Петрович*
Класс (номер класса указывается на 1 сентября 1995 г.)	*9*
Подробный домашний адрес	*524806 г.Тверь, ул.Садовая, д.55, кв.77*
Номер и адрес школы	*школа № 5, г. Тверь, ул. Зеленая, д. 7*

который готовит инженеров-электриков, инженеров-строителей, специалистов по электронно-вычислительной технике и программному обеспечению вычислительной техники, экономистов, специалистов по бухгалтерскому учету, а также инженеров-исследователей для проектирования и строительства высокоскоростных железнодорожных магистралей (со скоростью движения до 500 км/ч).

Обучение в школе бесплатное.

Вступительное задание

1 (9 кл.). Из Петербурга в сторону Москвы с интервалом в 10 мин вышли два электропоезда и двигались со скоростью 60 км/ч. Какую скорость имел встречный поезд, если он повстречал эти поезда через 4 мин один после другого?

2 (9 кл.). Покажите, что для любых трех положительных чисел произведение их суммы на сумму их обратных величин не меньше 9.

3 (9,10 кл.). Как измерить величину неизвестного сопротивления, имея вольтметр и амперметр с неизвестными внутренними сопротивлениями?

4 (9,10 кл.). Пчелы, перерабатывая цветочный нектар в мед, освобождают его от значительной части воды. Исследования показали, что нектар обычно содержит около 70% воды, а полученный из него мед — 17% воды. Сколько килограммов нектара приходится перерабатывать пчелам для получения 1 кг меда?

5 (9,10,11 кл.). Почему при кладке кирпичных печей используют глиняный раствор, а не цементный (более прочный)? Учесть, что для кладки печей используют желтый кирпич, сделанный из глины.

6 (9,10,11 кл.). В равнобедренном треугольнике ABC на одной из равных сторон BC выбрана точка F так, что $AF = AB$. Докажите что $AB^2 = BC \cdot BF$.

7 (10,11 кл.). Локомотив находился на расстоянии 400 м от светофора и имел скорость 54 км/ч, когда началось торможение. Определите положение локомотива относительно светофора через 1 мин после начала торможения, если он двигался с ускорением 0,3 м/с^2.

8 (10,11 кл.). Найдите значение параметра a, при котором корни уравнения

$$2x^2 + (2a-1)x + a - 1 = 0$$

удовлетворяют условию $3x_1 - 4x_2 = 11$.

9 (11 кл.). Для зарядки автомобильного аккумулятора его подключают к зажимам выпрямителя, дающего практически постоянное напряжение $U = 13$ В, через сопротивление $R = 0{,}09$ Ом. Сопротивление аккумулятора $r = 0{,}01$ Ом. Зарядный ток $I = 10$ А. Найдите ЭДС аккумулятора и мощность, идущую на зарядку. Объясните, куда расходуется остаток мощности, отдаваемой выпрямителем.

10 (11 кл.). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\mathrm{tg}^2 x + 5} + \sqrt{\mathrm{tg}^2 y - 5} = 5, \\ \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^2 y = 13. \end{cases}$$

ЗАОЧНАЯ АЭРОКОСМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

Заочная аэрокосмическая школа (ЗАкШ), организованная Всероссийским молодежным аэрокосмическим обществом (ВАКО «Союз») и Московским физико-техническим институтом (МФТИ), проводит набор учащихся в 10 и 11 классы на 1995/96 учебный год.

Пособия ЗАкШ подготовлены сотрудниками и аспирантами МФТИ и призваны помочь всем, кто собирается поступать в вузы, особенно аэрокосмического профиля. Программа школы охватывает следующие разделы науки и техники: движение космических аппаратов; ракетная техника; движение в атмосфере; исследования Земли из космоса; исследования космоса; перспективная космонавтика.

В течение года учащиеся ЗАкШ получают шесть заданий школы, включающих теоретический материал, список литературы для дальнейшего знакомства с направлениями аэрокосмической физики и задачи для самостоятельного решения, а также дополнительные материалы.

Полный курс обучения в школе — два года. Учащиеся, поступающие в 11 класс, имеют возможность окончить школу по ускоренной программе. В конце обучения выпускники получат варианты вступительных экзаменов в МФТИ и рекламный проспект с правилами приема в институт. Ученикам, успешно окончившим курс обучения в нашей школе, будет выдан диплом ЗАкШ.

Конкурсный набор в школу проводится с целью зачисления учащихся на бесплатную форму обучения. Не прошедшие по конкурсу могут быть зачислены на платную форму обучения — все необходимые сведения по этому вопросу будут сообщены при условии получения приемной комиссией решения вступительного задания.

Вступительное задание для участия в конкурсе необходимо выполнить на русском языке и оформить в отдельной школьной тетради — по одной задаче на листе, с сохранением порядка задач в задании. На обложку тетради наклейте белый лист, оформленный следующим образом:

1. Фамилия, имя, отчество
2. Подробный домашний адрес (с индексом)
3. Номер школы и класс, в котором Вы учитесь
4. Любые дополнительные сведения о себе

Для получения решения приемной комиссии вложите в тетрадь конверт с Вашим домашним адресом.

Тетрадь с выполненным заданием вышлите *не позднее 25 июня 1995 года* простой бандеролью по адресу:

141700 Московская обл., г.Долгопрудный, МФТИ, факультет аэрофизики и космических исследований, «Школа».

Вступительное задание обратно не высылается. Решение приемной комиссии будет сообщено в сентябре 1995 года.

Ниже приводятся условия задач вступительного задания в ЗАкШ. Задачи 1–6 предназначены поступающим в 10 класс, задачи 3–8 — в 11 класс. Для участия в конкурсе не обязательно решать все предлагаемые задачи.

Вступительное задание

1. Шарик массой m скатывается без трения с горки высотой H, как показано на рисунке 1. На какую высоту h^* он поднимется? Все необходимые данные указаны на рисунке.

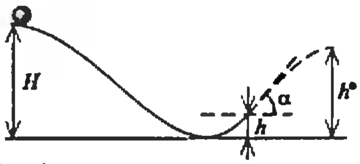


Рис. 1

2. Шарик массой m прикреплен к стержню длиной l. Другой конец стержня шарнирно прикреплен к вертикальной оси (рис.2). Нарисуйте примерный

Рис. 2

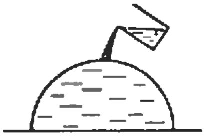


Рис. 3

график зависимости угла α, образуемого стержнем с вертикалью, от угловой скорости ω вращения оси.

3. В полусферический колокол, плотно лежащий на столе, наливают воду (рис.3). Когда вода доходит до отверстия, она приподнимает колокол и начинает вытекать снизу. Найдите массу колокола, если радиус его R, а плотность воды ρ.

4. Два одинаковых шара массой M каждый находятся на расстоянии $2L$ друг от друга (расстояние отсчитывается от центров шаров). Ровно по центру между шарами на прямой, соединяющей их, находится еще один шар — массой m. Этот шар отклоняют от положения равновесия на расстояние x в плоскости P, перпендикулярной прямой, соединяющей большие шары, и отпускают. Определите период малых колебаний шара массой m в плоскости P, если между шарами действуют только силы гравитационного притяжения.

5. Свинцовая пуля массой $m_1 = 10$ г, летящая со скоростью $v = 500$ м/с, попадает в железный шар массой $m_2 = 1$ кг и застревает в нем. Определите установившуюся температуру системы, если начальная температура взаимодействующих тел $t = 20$ °С, удельная теплоемкость свинца $c_1 = 140$ Дж/(кг·К), железа $c_2 = 460$ Дж/(кг·К). Железный шар закреплен.

6. В электронагревательном приборе (полная длина спирали которого $AB = L$) произошло замыкание между точками C и D ($AC = 1/4\ L$, $DB = 3/8\ L$) и между точками E и F ($AE = 7/16L$, $FB = 3/16L$). Определите новую мощность прибора при том же напряжении сети, если первоначально она была $P = 1$ кВт.

7. При нормальных условиях в цилиндре под невесомым поршнем площадью S находится некоторый объем газа. На поршень кладут гирю массой m. До какой температуры необходимо нагреть газ, чтобы его объем стал вдвое больше начального?

8. Какой емкостью должна обладать батарея конденсаторов, заряженная до напряжения $U = 500$ В, чтобы при разряде через медную проволочку диаметром $d = 0{,}5$ мм и длиной $l = 30$ см вызвать ее расплавление?

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

Задачи

(см. «Квант» №2)

1. См. рис. 1. 2. Обозначим через x оставшееся время пути. Такое же время потратил встречный поезд от 23.00 до момента встречи, поэтому время движения поездов от 23.00 до момента встречи равно оставшемуся времени. Сумма этих времен равна 7 часам (от 23.00 до 6.00), поэтому $x = 3{,}5$ ч и пассажир проснулся в 2 ч 30 мин.

3. Рассмотрим отрезок QP, равный и параллельный отрезку BC (рис. 2). Заметим, что $\angle ABQ = \angle DCP$ и $\angle ADQ = \angle PQD$. Отсюда следует, что $\angle PQD = \angle DCP$. Значит, около четырехугольника $DQCP$ можно описать окружность и $\angle QCD = \angle QPD$. Но $\angle QPD = \angle DAQ$, значит, $\angle QCD = \angle DAQ$.

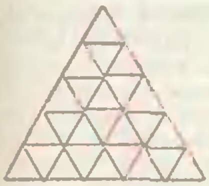


Рис. 1

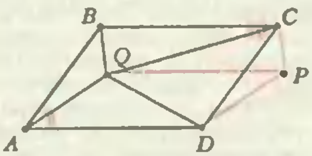


Рис. 2

4. Такой четырехугольник существует. Возьмем на окружности пять точек, делящих ее на пять равных дуг (рис. 3). Теперь рассмотрим четырехугольник с вершинами в четырех из этих пяти точек. Осталось заметить, что перенеся любую из его вершин в оставшуюся пятую точку, мы получим четырехугольник, равный построенному.

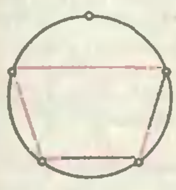


Рис.3

5. В этой задаче есть подвох. Многие решавшие считали, что масса бочки апельсинов равна 125 кг, забывая о массе самой бочки, и получали, что условие задачи противоречиво.

Обозначим через k количество бочек и через x массу в килограммах бочки с апельсинами ($x > 125$). Так как все бочки можно было поровну погрузить в две машины, то k — четное число, а из условия, что в одну машину погрузили вдвое больше бочек, чем в другую, следует, что k делится на 3. Итак, k делится на 6. Отметим, что 85% от трех тонн — это 2550 кг. Так как $2/3$ от количества бочек весят больше 2550 кг, то $x(2k/3) > 2550$, откуда $x > 3825/k$. Условие о том, что в первую машину можно загрузить еще три бочки, запишется так: $3000 - (2kx/3) \geq 3x$, откуда $k \leq [(9000/x) - 9]/2$. Заменяя в этом неравенстве x на меньшую величину, получим неравенство

$$k < [(9000/125) - 9]/2 = 31{,}5.$$

Если мы выразим из предыдущего неравенства не k, а x, то получим, что $x \leq 9000/(2k+9)$. Но $x > 3825/k$, поэтому $3825/k < 9000/(2k+9)$. Из этого неравенства следует, что $1350k > 34425$ и $k > 25{,}5$.

Итак, мы получили, что $25{,}5 < k < 31{,}5$. Но вспомним, что k делится на 6. Единственное число, делящееся на 6 и удовлетворяющее полученным неравенствам, — это 30.

Братья Карамазовы грузили 30 бочек апельсинов. Мы не нашли массы бочки с апельсинами, но это и не спрашивалось, да и точно назвать его невозможно, можно лишь отметить, что эта масса больше 127,5 кг и меньше $130\frac{10}{23}$ кг.

Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» №6 за 1994 год)

6. Любое нечетное число, большее 1, можно представить в виде суммы двух последовательных натуральных чисел. Действительно, всякое нечетное число можно представить в виде $2k+1 = k+(k+1)$. Пусть число n представлено в виде суммы последовательных натуральных чисел:

$$n = m + (m+1) + \ldots + (m+k) = \frac{(2m+k)(k+1)}{2}). \qquad (\bullet)$$

Сомножители в числителе имеют разную четность, поэтому один из них — нечетное число. Следовательно, если $n = 2^s$, то такое число не может быть представлено в виде суммы нескольких последовательных натуральных чисел.

Покажем, что для всякого натурального числа n, не являющегося степенью числа 2, существует такое представление. Представим число n в виде $n = 2^s(2p+1)$. Такое представление существует и единственно для любого натурального числа, здесь s и p — неотрицательные целые числа. Чтобы получить требуемое разложение для случая $2^s > p$, достаточно взять в формуле ($\bullet$) $m = 2^s - p$, а $k = 2p$; в случае $2^s \leq p$, в этой формуле берем $m = p + 1 - 2^s$, а $k = 2^{s+1} - 1$.

Таким образом получаем, что искомыми числами будут лишь числа вида 2^k, где $k = 0, 1, 2, \ldots$.

7. Пусть M — точка пересечения биссектрис углов DAC и DBC (рис. 4). По теореме о биссектрисе угла треугольника имеем: $AC{:}AD = CM{:}MD$ и $CM{:}MD = BC{:}BD$, отсюда $AC{:}BC = AD{:}BD$. Рассмотрим на стороне AB точку K, для которой $AK{:}KB = AC{:}BC = AD{:}BD$. Эта точка K и будет точкой пересечения биссектрис углов ADB и ACB.

8. Сначала убедимся, что всякое слово из 5 букв можно составить не более чем из двух палиндромов. Для этого достаточно проверить все 32 такие слова. Перебор можно сократить вдвое, отбросив те слова, которые получаются заменой буквы А буквой Б, а буквы Б — буквой А. Поэтому можно рассмотреть лишь 16 слов, начинающихся с буквы А:

ААААА=ААААА, ААААБ=АААА+Б, АААБА=АА+АБА, АААББ=ААА+ББ, ААБАА=ААБАА, ААБАБ=АА+БАБ, ААББА=А+АББА, ААБББ=АА+БББ, АБААА=АБА+АА, АБААБ=А+БААБ, АБАБА=АБАБА, АБАББ=АБА+ББ, АББАА=АББА+А, АББАБ=АББА+Б, АБББА=АБББА, АББББ=А+ББББ.

Возьмем произвольное 1995-буквенное слово и разобьем его сначала на 5-буквенные — их будет всего 399. Каждое из этих слов может быть составлено не более чем из двух палиндромов, поэтому это 1995-буквенное слово можно составить не более чем из 798 палиндромов, что меньше 800.

9. Такой маршрут возможен. Один из вариантов изображен на рисунке 5.

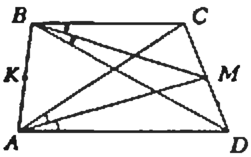


Рис. 4

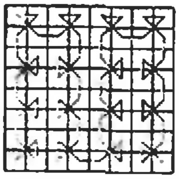


Рис. 5

10. Приводим один из возможных способов нахождения фальшивых монет. Вначале занумеруем монеты числами от 1 до 6. В двух прямоугольниках будем писать номера монет, положенных на левую и правую чашки. Три стрелки, идущие от прямоугольника, означают соотвественно, что 1) перетянула левая чашка, 2) наступило равновесие, 3) перетянула правая чашка. Процесс взвешивания можно изобразить в виде рисунка 6. Заметим, что при взвешивании на весах без гирь невозможно различить случаи всех фальшивых и всех настоящих монет.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Да, так как заряд переносят частицы, обладающие массой. 2. Достаточно коснуться рукой одной из гильз. Если после этого взаимодействие гильз прекратится, значит, мы коснулись заряженной гильзы. 3. Можно. Например, так: один конец палочки надо потереть мехом, другой — амальгамированной кожей. 4. Положительный. 5. а) Нет, поскольку и незаряженное тело, вследствие электростатической индукции, может тоже притягиваться. б) Да. 6. Заземленный проводник поднести, не касаясь, к заряженному телу, а затем убрать заземление. 7. Да. Например, поместив заряженный проводник внутрь полого изолированного проводника и приведя их в соприкосновение. 8. Шар *B* зарядится положительно. 9. В случае,если проводник *A* находится внутри полого проводника *B*. 10. Поровну, так как статические заряды располагаются лишь по поверхности шаров. 11. Положительный. 12. Для предохранения от взрыва при электризации трением. 13. Не противоречит, поскольку появление зарядов на нижней части стержня (вызывающее расхождение листочков) всегда сопровождается образованием избытка зарядов другого знака на его верхней части. 14. При внутреннем фотоэффекте электроны остаются внутри тела, при внешнем — выбиваются с поверхности тела, заряжая его положительно. 15. Один из нейтронов в ядре радиоактивного вещества превращается в протон и электрон, который и выбрасывается при β-распаде. 16. В состав ядра легкого изотопа гелия входят два протона и нейтрон, а ядро сверхтяжелого водорода состоит из одного протона и двух нейтронов. Ядра очень близки по массе, но различаются ровно в два раза по величине заряда. 17. Заряженные частицы, в отличие от электрически нейтральных, оставляют следы (треки), благодаря способности ионизировать попадающиеся на их пути молекулы.

Микроопыт

Шар, зарядившийся при трении о газету, индуцирует на поверхности потолка заряды противоположного знака. Чем ближе материалы шара и потолка по своим свойствам к изоляторам, тем дольше на них сохраняются заряды и продолжается электрическое притяжение шара к потолку.

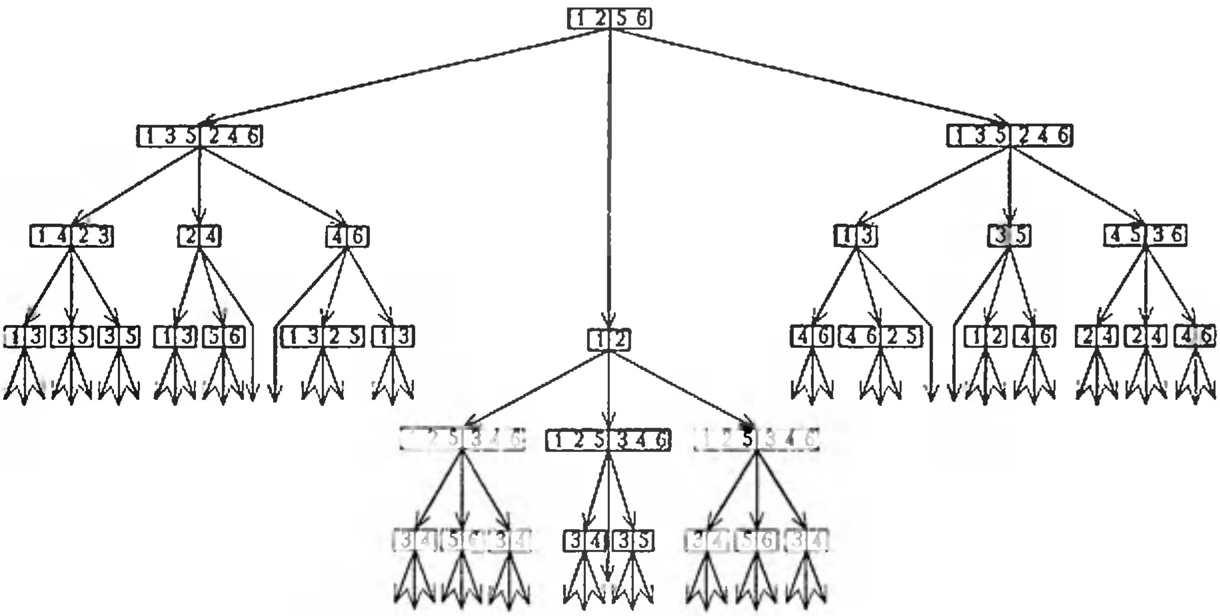


Рис. 6

Электромагнитная индукция

1. Ток по перемычке направлен снизу вверх и равен $I=\dfrac{Bva}{R+\rho\dfrac{(a+2x)(3a-2x)}{4aS}}$.

2. $v_1/v_2=0{,}5$. 3. $B=\dfrac{1}{4R}\sqrt{\dfrac{3rF}{v}}$. 4. $U_{\rm I}=k\pi r_0^2\dfrac{R}{\rho_1\dfrac{4\pi r_1}{3S_1}+3R}$,

$U_{\rm II}=k\pi r_0^2\dfrac{R}{\rho_1\dfrac{2\pi r_1}{3S_1}+\dfrac{3}{2}R}$, при $R\to\infty$ $U_{\rm I}=\dfrac{1}{3}k\pi r_0^2$ и $U_{\rm II}=\dfrac{2}{3}k\pi r_0^2$.

Отсечем все лишнее...

1. Исключим, например, из условия информацию о том, что произведение четырех первых членов арифметичческой прогрессии равно 24.
Число 6 может быть представлено в виде произведения трех натуральных чисел только двумя различными способами: $1\cdot2\cdot3$ и $1\cdot1\cdot6$, причем числа 1; 1; 6 не могут быть тремя первыми членами арифметической прогрессии, тогда как числа 1; 2; 3 являются тремя первыми членами арифметической прогрессии при $a_1=1$ и $d=1$: 1; 2; 3; 4;...
2. Отбросив «помогающее» условие, решим уравнение $12x^3+4x^2-17x+6=0$, для чего умножим обе его части на 2, тогда получим $3(2x)^3+2(2x)^2-17(2x)+12=0$, или, введя обозначение $z=2x$,

$$3z^3+2z^2-17z+12=0. \qquad (*)$$

Теперь легко проверить, что делитель свободного члена, равный 1, является корнем уравнения (*), т.е. $z_1=1$, или $x_1=1/2$. Разделив многочлен, стоящий в левой части исходного уравнения, на $x-\dfrac{1}{2}$ и решив соответствующее квадратное уравнение, найдем $x_2=\dfrac{2}{3}$, $x_3=-\dfrac{3}{2}$.
3. Не уточняя смысл «перевернутого» числа, отбросим информацию о том, что его произведение на сумму цифр равно 486. Теперь, обозначив через m число десятков, через n — число единиц двузначного числа, на основании оставшихся данных запишем уравнение $(10m+n)(m+n)=405$, из которого, например, полным перебором натуральных чисел m: $1\le m\le 9$ ($m\ne 0$ для двузначного числа) придем к однозначному ответу: $m=0$, $n=5$ и 45 — искомое число. Можно указать и более рациональный способ перебора: сумма цифр $m+n$ является делителем числа 405, причем $1\le m+n\le 18$, но таких делителей только пять: 1; 3; 5; 9; 15. Как показывает проверка, условию удовлетворяет только 9. Поэтому 45 — искомое число.
4. Исключим из условия всю информацию, кроме плотности диенового углеводорода по водороду. Тогда записав общую формулу такого углеводорода как C_xH_{2x-2}, получим для определения x уравнение $12x+2x-2=2\cdot20=40$, из которого $x=3$. Значит, формула диенового углеводорода — C_3H_4, или $H_2C=C=CH_2$. По числу исходных данных — всего одно — это решение оптимально!

Московский государственный авиационный институт

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. См. рис. 7. 2. $-\dfrac{30\sqrt{3}+26}{11}$. *Указание.* Из условия $\operatorname{tg}\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=2$ находим, что $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{6-\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}$, а заданное выражение равно $2-\dfrac{6}{\operatorname{tg}\alpha}$.

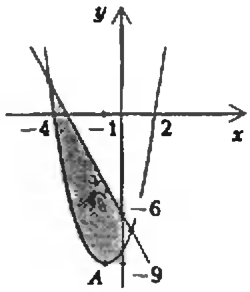


Рис. 7

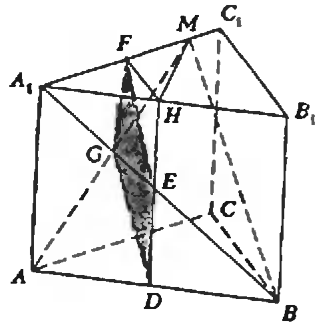


Рис. 8

3. 246,24.
4. $\left(-5;\dfrac{-7-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[-3{,}5;\dfrac{-7+\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{-7+\sqrt{13}}{2};+\infty\right)$. *Указание.* Данное неравенство равносильно системе из двух неравенств: $\log_{x+5}(x+2)^2\le 2$; $\log_{x+5}(x+2)^2\ge -2$.
Рассмотрите два случая: $0<x+5<1$; $x+5>1$.
5. (3;2). *Указание.* Домножив первое уравнение на знаменатель дроби и вычитая это уравнение из второго уравнения системы, получим после преобразований уравнение

$$5\sqrt{x-y}=5-5(x-3)^2,$$

правая часть которого не больше 5, а левая не меньше 5 ($x-y\ge 1$). Поэтому $x=3$, $y=2$.
6. $(\sqrt{13}-1):(7-\sqrt{13})$. ***Решение.*** Пусть $DEFG$ — указанное в условии сечение пирамиды ABA_1M (рис. 8). Этот четырехугольник — параллелограмм, а точка F — середина отрезка A_1M. Пусть H — середина AA_1. Так как прямая GF перпендикулярна плоскости основания $A_1B_1C_1$, то она перпендикулярна отрезку FH. Поэтому FH — высота параллелограмма $DEFG$. $AB=a$, $AA_1=b$, $A_1F=FM=x$, $FG=h$. Приравнивая площади треугольника AMA_1 и параллелограмма $DEFG$, получаем:

$$S_{AMA_1}=\frac{1}{2}\cdot A_1M\cdot AA_1=\frac{1}{2}\cdot 2xb;$$

$$S_{DEFG}=DE\cdot FH=\frac{b}{2}h\Rightarrow h=2x.$$

Рассмотрим теперь основание $A_1B_1C_1$ призмы. По теореме косинусов для сторон треугольника A_1FH можно записать равенство: $h^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+x^2-2\left(\dfrac{a}{2}\right)x\cos60^\circ$. Подставляя $h=2x$, приходим к уравнению $12x^2+2ax-a^2=0$, положительный корень которого $x=\dfrac{\sqrt{13}-1}{12}a$. Следовательно, отрезок A_1M равен $\dfrac{\sqrt{13}-1}{6}a$, после чего получаем

$$A_1M:MC_1=\frac{\sqrt{13}-1}{6}:\left(1-\frac{\sqrt{13}-1}{6}\right)=(\sqrt{13}-1):(7-\sqrt{13}).$$

Вариант 2

1. Область, расположенная не выше прямой и не ниже параболы.
2. $1-\dfrac{14}{\sqrt{3}}$. 3. $3\sqrt{15}$, 3, 24, 24.
4. $\left(-6;\dfrac{-9-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[-4{,}5;\dfrac{-9+\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{-9+\sqrt{13}}{2};+\infty\right)$. 5. (4; 5).

6. $(\sqrt{179}-8);(18-\sqrt{179})$.

ФИЗИКА

1. $v=\frac{2}{3}\frac{R-r}{r}\sqrt{\frac{2}{3}g(R-r)}$. 2. $m_2=m_1\frac{r}{\lambda}\frac{T_2}{T_1}=4{,}96$ кг.

3. $\varphi=\frac{\alpha}{\beta+\alpha(1-\beta)}\frac{p}{p_н}=0{,}51=51\%$. 4. $r=P/I^2=1$ Ом;

$\mathcal{E}=2Ir=6$ В. 5. $q=\frac{CN\pi D^2}{4}\frac{\Delta B}{\Delta t}=1{,}98\cdot10^{-9}$ Кл.

6. $d=\frac{\Gamma+1}{\Gamma}F=6{,}67$ см.

Московский инженерно-физический институт

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $x\ge\log_3(4/7)$. 2. 9 ч. 3. $\mathrm{arctg}(\cos5)+2\pi n,\ n\in Z$.

4. $a\in(-5/4;1/5]$. 5. 21/11.

Вариант 2

1. $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$. 2. $(2;4]$. 3. 40 ч и 24 ч.

4. $V_{пир}=\frac{\sqrt3}{2}\cdot b\cdot(64-b^2)^{1/2}$, $0<b<8$; $V_{пир}$ максимален при $b=4\cdot\sqrt2$. 5. $x=b$ при $b\in(-\infty;-3/4)$; $x\in\{\varnothing\}$ при $b=-3/4$; $x\in(-3/4;b]$ при $b\in(-3/4;5]$; $x\in(-3/4;5]$ при $b\in(5;+\infty)$.

Вариант 3

1. 4. 2. 37. 3. 1. 4. $S_{сеч}=a\cdot\sin2\varphi\cdot(k^2-4a^2\sin^2\varphi)^{1/2}$,

$0<\varphi<\pi/4$; $S_{сеч}=a\cdot(k^2-4a^2\sin^2\varphi)^{1/2}$, $\pi/4\le\varphi<\pi/2$.

5. При $d\in[-4;8]$ $x_1=\pm\arccos(-1/7)+2\pi n,\ n\in Z$,

$x_2=\pm\arccos\left(\frac{d-2}{6}\right)+2\pi m,\ m\in Z$; при $d\in R\setminus[-4;8]$

$x_1=\pm\arccos(-1/7)+2\pi n,\ n\in Z$; единственное решение при $d\in\{2\}\cup\{8\}$.

Московский государственный институт электронной техники

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\mathrm{ctg}\frac{1993}{1994}$. 2. (0;13]. 3. $\frac{4ab}{a+b}$. 4. −3. 5. 3. 6. $b_1=1,\ q=2$.

7. См. рис. 9. 8. −2. 9. 30%. 10. (1;2;3). 11. $-\frac{1}{2}$. 12. $a=1$.

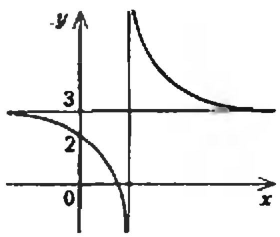


Рис. 9

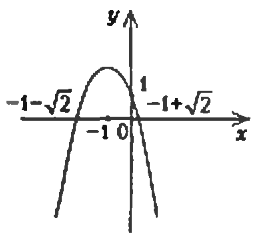


Рис. 10

Вариант 2

1. $-\frac{5}{13}$. 2. $1+\sqrt5$. 3. −4; 7. 5. $\left(0;\frac12\right)\cup\left(\frac12;\frac32\right)$. 6. См. рис. 10.

7. $2\pi+8\pi n,\ 8\pi n,\ n\in Z$. 8. 5 кг. 9. 0. 10. $\left(-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $v_{ср}=2v_m/\pi=6$ м/с. 2. $t=2\sqrt{h}/\sqrt{g(\mathrm{tg}\beta-\mathrm{tg}\alpha)\sin2\beta}\approx0{,}4$ с.

3. $T_1=T\left(1+\frac{2A}{3pV}\right)=360$ К.

4. $A=q(\varphi_2-\varphi_1)=10$ мкДж.

5. $U=(U_1+2U_2)/3=30$ В. 6. $\Gamma=\sqrt{n}=2$.

Вариант 2

1. $x_0=\frac{x_1v_{2x}^2-x_2v_{1x}^2}{v_{2x}^2-v_{1x}^2}=1{,}2$ м. 2. $F_{min}=F-ma=5$ Н.

3. $\Delta=100\%$. 4. $q=2l\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{mg\sin(\alpha/2)}{k}}=0{,}2$ мкКл.

5. $R=\frac{(\mathcal{E}-U)}{P}U=27$ Ом. 6. $D=-\frac{(1-\Gamma)^2}{L\Gamma}=-10$ дптр.

Санкт-Петербургский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $a\ge-\frac12$. $\sqrt{2xy+a}=x+y+1\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+1\ge0,\\(x+1)^2+(y+1)^2=a+1.\end{cases}$

Длина отрезка PK (рис. 11) равна $OP=\frac{1}{\sqrt2}$, поэтому окружность, заданная уравнением, и полуплоскость, заданная неравенством, имеют общие точки при $\sqrt{a+1}\ge\frac{1}{\sqrt2}$.

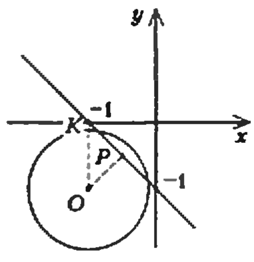


Рис. 11

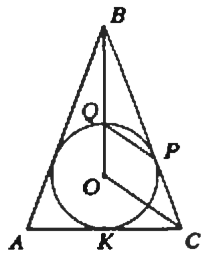


Рис. 12

2. $\left(0;\frac{1}{27\sqrt3}\right]\cup\left(\frac19;\frac{1}{\sqrt3}\right)\cup[1;+\infty)$. 3. $\frac{(-1)^{k+1}}{4}\arcsin\frac14+\frac{\pi k}{4},\ k\in Z$.

4. Пусть K — основание биссектрисы (рис. 12). Имеем:

$$\angle BCO=\frac12\angle BCK=\frac12\left(\breve{PQK}-\breve{PK}\right)=$$

$$=\frac12\left(\breve{QPK}-\breve{PK}\right)=\frac12\breve{PQ}=\angle BPQ.$$

5. Пусть S — площадь основания пирамиды; h и H — высоты пирамиды и призмы соответственно. Так как площадь основа-

ния призмы равна $\frac{1}{2}S$, то $V=\frac{1}{3}Sh$ и $\frac{3}{2}V=\frac{1}{2}HS$, откуда $h=H$, т.е. вершина пирамиды лежит на верхнем основании призмы. Следовательно, общая часть данных тел получается при отбрасывании от данной пирамиды четырех маленьких треугольных пирамид, высоты которых равны $\frac{h}{2}$, а площади оснований — $\frac{S}{8}$. Искомый объем равен

$V-4\cdot\frac{1}{3}\frac{h}{2}\frac{S}{8}=V-\frac{1}{4}V=\frac{3}{4}V$.

Вариант 2

1. 375 тыс. р. Если x — величина исходного вклада (в тыс. р) и за полгода вклад возрастает в t раз ($t>1$), то $xt^2-x=165$, $(xt-100)t=420$, откуда $(t+2)(20t^2+11t-42)=0$ и $t=-2$; $-\frac{7}{4}$; $\frac{6}{5}$, т.е. $t=\frac{6}{5}$. 2. $(-\infty;-1)\cup\left[\frac{\sqrt{13}-3}{2};2\right)$.

3. -1. Поскольку $\cos(2\arccos x)=2x^2-1$ и $\cos\left(3\arccos\frac{x}{2}\right)=4\left(\frac{x}{2}\right)^3-3\frac{x}{2}$, то $(x+1)(x^2-5x+2)=0$, т.е. $x=-1$ или $x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$. Осталось заметить, что исходное уравнение не имеет положительных корней.

4. $\log_2 14$. 5. $\frac{5}{24}b^3$. Общая часть данных пирамид состоит из двух равных пирамид и треугольной призмы.

Вариант 3

1. 55 и 30 дней. Пусть w_1, w_2, w_3 — части работы, которые делают за один день первая, вторая и третья бригады соответственно, а T — искомое время. По условию, $w_1+w_3=\frac{1}{55}$, $\frac{1}{w_3}-\frac{1}{w_2}=11$ и $T=\frac{1}{w_1+w_2+w_3}$, поэтому $T=\frac{1}{1/55+w_2}$. С одной стороны, $w_2>0$, поэтому $T\le 55$, а с другой, $\frac{1}{w_3}=\frac{1}{w_2}+11\ge 11+55=66$, так как $w_3\le\frac{1}{55}$, откуда $T\ge 30$.

2. $\{-2\}\cup\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8};+\infty\right)$. 3. $\left(0;\frac{1}{3}\right]\cup[2;+\infty)$. *Указание.* Данное неравенство приводится к виду $(x-2)(\log_3 x+1)\ge 0$.

4. $\pi+2\pi k$; $-\frac{3\pi}{4}+4\pi k$; $\frac{\pi}{4}+4\pi k$; $\frac{\pi}{2}+4\pi k$, $k\in Z$.

5. 21. *Указание.* Если s — площадь треугольника AOC, то $s+1=\frac{s+1}{1}=\frac{AB\cdot AK}{AL\cdot AO}=\frac{2s+9}{s+1}\cdot\frac{s+8}{s}$.

Полученное кубическое уравнение $s(s+1)^2=(s+8)(2s+9)$ имеет единственный корень $s=6$.

Российский государственный педагогический университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\frac{b}{2a}(a-b)$, если $a>b$; $\frac{1}{2}(a-b)$, если $a\le b$.

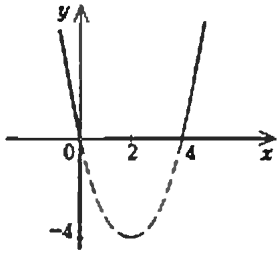


Рис. 13

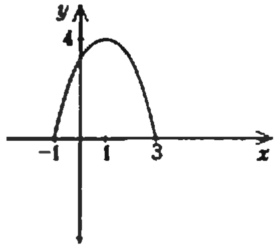


Рис. 14

2. а) $(-\infty;0)\cup(2\pi;+\infty)$; б) $f_2(x)=x^2-4x$, $x\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$; см. рис.13; в) $x_1=-3$, $x_2=9$.

3. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{4}$. 4. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$, $\frac{4a\sqrt{5}}{5}$. 5. $\frac{2b^2\sqrt{3}}{9}$.

Вариант 2

1. $\frac{c-d}{c}$, если $d\ge c$; $\frac{d-c}{d}$, если $d<c$.

2. а) $\left(1-\sqrt{n+1},1+\sqrt{n+1}\right)$; б) $f_3(x)=3+2x-x^2$, $x\in(-1;3)$; см. рис.14; в) $x_1=0$, $x_2=2$.

3. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, 1, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{2}$. 4. $\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 5. $\frac{5}{36}a^3\sqrt{3}$.

Санкт-Петербургский государственный технический университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 10; $\pi/4+\pi n$; $n=1, 2$ ... *Указание.* Учтите равенство $a^{\lg b}=b^{\lg a}$.

2. $2\pi m/7$ $(m\ne 7k)$. *Указание* Умножьте обе части равенства на $\sin x\sin 4x$.

3. $(0;1)\cup\left[2;2\sqrt{2}\right]\cup[3;4]\cup(64;+\infty)$. *Указание.* Используйте тождество

$a/b+b/c+c/a-b/a-a/c-c/b=(1-b/a)(1-c/b)(1-a/c)$

и выпуклость функции $y=2^x$.

4. $-1-x^2/8\le y\le 1+|x|$ при $|x|\le 4$, $1-|x|\le y\le 1+|x|$ при остальных x. *Указание.* Принадлежность точки (x,y) искомому множеству равносильна разрешимости относительно ϑ уравнения вида

$\cos^2\vartheta+p(x,y)\cos\vartheta+q(x,y)=0$.

5. $\sqrt{3}$. *Указание.* Произведения площадей несмежных треугольников равны, прогрессия постоянна, а четырехугольник является параллелограммом.

Вариант 2

1. $p\in[-1;1/2]$, $E_f=\begin{cases}\{-1\} \text{ при } p=-1,\\ \left[-1;(4p+1)/3\right] \text{ при } p\ne -1.\end{cases}$

2. $(5;3)$, $(5;-3)$.

3. $\arcsin(4/5)+2\pi n$, $n\in Z$. *Указание.* Для произвольных чисел a, b, c

$$c=a+b>a,b\Leftrightarrow\begin{cases}a,b>0,\\ c=a+b,\end{cases}$$

поэтому условие задачи можно записать так:

$$\begin{cases}a=b+c,\\ b,c>0,\end{cases}\text{ или }\begin{cases}b=a+c,\\ a,c>0,\end{cases}\text{ или }\begin{cases}c=a+b,\\ a,b>0.\end{cases}$$

4. Четыре области, ограниченные отрезками, лучами и дугами парабол:

$$\begin{cases}1<x<2,\\ y>\left|1-x^2/2\right|,\end{cases}\qquad\begin{cases}x>2,\\ y>x^2/2-1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x<2,\\ -x^2/2<y<-\left|1-x^2/2\right|,\end{cases}\qquad\begin{cases}x>2,\\ -x^2/2<y<1-x^2/2.\end{cases}$$

Указание. Рассмотрите равносильное алгебраическое неравенство $A(x,y)>0$, левая часть которого меняет знак при пересечении элементарных кривых (прямых, парабол).

5. 3, 5, 4, 2; $\sqrt{13+3\sqrt{15}}$. *Указание.* Вначале, используя свойство четырехугольника, описанного около круга, установите касание вписанных в треугольники кругов, затем примените формулу Герона.

Вариант 3

1. $(1/4;1/2]\cup\left[1/\sqrt[4]{2};1\right)$. *Указание.* Перейдите к логарифмам по одному основанию. 2. 2. *Указание.* Произведение длин отрезков, на которые точка делит хорду, для любой из хорд одинаково.

3. $\pi k+\pi/2\pm\pi/6$, $k\in Z$. 4. 6. *Указание.* Проведите через точку C прямую параллельно основанию, затем рассмотрите две пары подобных треугольников. 5. $[-\pi/6;\pi/6]\cup[5\pi/6;7\pi/6]$. *Указание.* Преобразуйте произведение тригонометрических функций в сумму (разность), приведите подобные члены.

Вариант 4

1. $(-1;-1)$. 2. $[-1;3)$.

3. $\pi(2k+1)/12$; $\pi(4k-1)/8$. *Указание.* Понизьте степень и преобразуйте сумму (разность) в произведение.

4. $2\left(\sqrt{H^2+1}-1\right)\big/H\sqrt{3}$, где $\left(H\ge 1/\sqrt{3}\right)$. *Указание.* Найдите расстояние от оси конуса до центра шара, затем рассмотрите сечение, проходящее через ось конуса и центр шара.

5. $(-11;-13/4]\cup(-3;9)$. *Указание.* Найдите a, при котором графики функций $y=\sqrt{7+x}$ и $y=4-|x-a|$ касаются, имеют одну, две или три точки пересечения.

Вариант 5

1. 0. 2. $2\pi n\pm\arccos 3/4$; $-\arccos 3/4$.

3. $x^2-4x+1=0$. *Указание.* Примените теорему Виета к данному и искомому уравнениям.

4. $(-\infty;-1/6]\cup[0;+\infty)$. *Указание.* Введите новую переменную $t=2^x$ $(t>0)$. Найдите производную по t. Исходная функция не имеет экстремумов, если производная сохраняет знак при $t>0$.

5. 8; 9. *Указание.* Рассматривая вертикальные сечения пирамиды, выведите уравнения $a^2=2h(2R-h)$; $a^2(h-2r)=4hr^2$, где R и r — радиусы описанного и вписанного шаров, h — высота, a — сторона основания пирамиды. Исключая a, получите для h квадратное уравнение.

ФИЗИКА

1. $v=\omega\left(R+\frac{\omega ht}{2\pi}\right)$. 2. $r=\frac{\mu(a_0+g)}{4\pi^2f^2}=7$ см;

$a=\sqrt{a_0^2+\mu^2(a_0+g)^2}=5{,}1$ м/с^2. 3. $l=\frac{v\sqrt{v^2+u^2}}{2\mu g}=0{,}3$ м.

4. $t=\frac{2\left(u+\sqrt{2gl}\right)}{g}$. 5. $\frac{m_1}{m_2}=\frac{M_1}{M_2}=\frac{1}{14}$.

6. $A=R\left(T_1-2\sqrt{T_1T_3}+T_3\right)=211$ Дж. 7. $A=2qlE$.

8. $U=\pi nBl(l-2l_1)=5$ мВ. 9. $I_m=U\sqrt{\frac{C}{2L}}$.

10. $t=\frac{\varepsilon_0 mv^2}{2e^2nd}=1{,}6\cdot10^{-7}$ с.

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

МАТЕМАТИКА

1. $\pm\sqrt{\frac{10}{3}}$. 2. $\left[-\frac{25}{6};-4\right)\cup\left(-\frac{8}{5};\frac{5}{6}\right]$. 3. 20. 4. $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$. 5. 0. 6. $\left(\frac{8\pi}{9}+\frac{8\pi n}{3};\frac{28\pi}{9}+\frac{8\pi n}{3}\right)$, $n\in Z$.

7. 7. 8. 22. 9. $\frac{3\sqrt{41}}{2}$. 10. $(-12;-2)$.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
Г.М.Берштейн, К.И.Кобзев, Д.А.Крымов, В.М.Митурич-Хлебникова, С.А.Стулов, Л.А.Тишков

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
М.Н.Грицук, Е.А.Митченко, Е.В.Титова

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ
Л.А.Панюшкина

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ
Е.В.Самойлова

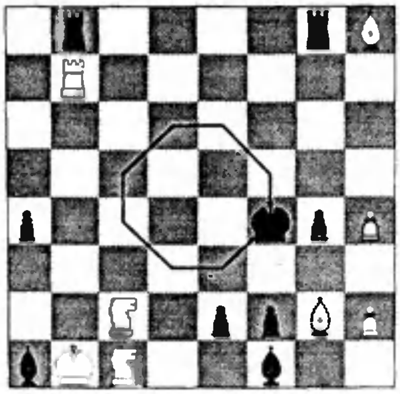
Адрес редакции:
103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант», тел. 250-33-54, 251-55-57

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ № 701

Круг почета

Самые причудливые узоры рисуют на шахматной доске движущиеся фигуры, прежде чем достичь свой цели. Сегодня мы рассмотрим несколько примеров с круговым движением фигур, когда после ряда ходов по замкнутому маршруту они возвращаются на исходное место.

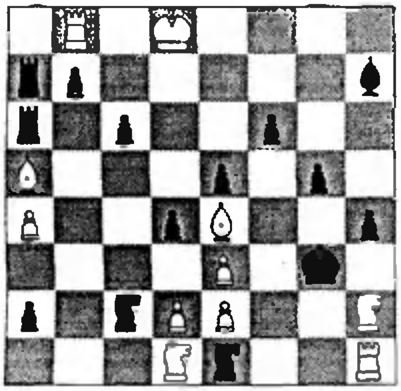
Перед нами один из первых примеров вечного преследования короля.



Ю.Кук, 1852
Ничья

1.Kd3+ Kpf5 2.Ke3+ Kpe6 3.Kf4+ Kpd6 4.Kf5+ Kpc5 5.Ke6+ Kpc4 6.Kd6+ Kpd3 7.Kc5+ Kpe3 8.Kc4+ Kpf4 9.Kd3+ Kpf5 10.Ke3+ с ничьей.

Любопытно, что и кони и король перемещаются по одной и той же траектории, описывая круг в центре доски.



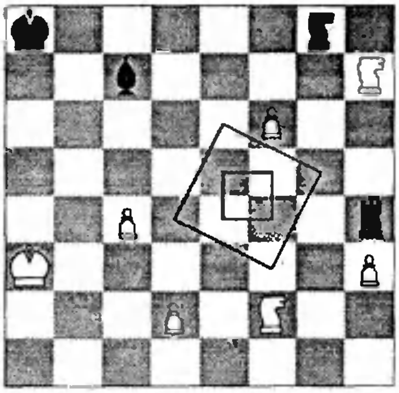
Л.Бюлер, 1969
Мат в 30 ходов

Кажется, что в этой задаче черный король убегает от коневой атаки.

1.Kf1+ Kpg4 2.Kf2+ Kph5 3.Kg3+ Kph6 4.Kg4+ Kpg7 5.Kh5+ Kpf7! 6.Kh6+ Kpe6! 7.Kg7+ Kpd6 8.Kf7+ Kpc5 9.Ke6+ Kpc4 10. Kd6+ Kpb3 11.Kc5+ Kpb2 12.Kc4+ Kpc1 13.Kb3+ Kpd1! 14. Kb2+ Kp:e2 15.Kc1+ Kpf2 16. Kd1+ Kpg3 17.Ke2+ Kpg4.

Не пора ли соглашаться на ничью? Но черный король во время своего долгого путешествия неосторожно съел пешку, и на втором круге белые используют это (десяток ходов пропустим — они уже известны): **18.Kf2+ Kph5... 28. Kc4+ Kpc1 29. Kb3+ Kpd1 30.Cf3×!**

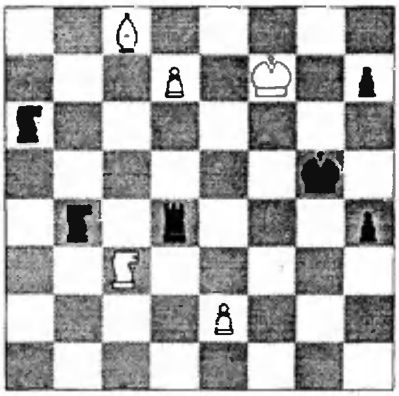
Король получил мат, не успев завершить второй круг почета. Может быть, какой-нибудь любитель рекордов придумает задачу с несколькими (хотя бы с тремя) кругами черного короля?!



В.Корольков, В.Чеховер, 1950
Ничья

1.f7 Cd6+ 2.Kpb2! Kh6 3. f8Ф+ C:f8 4.K:f8 Лf4 5. Kg4! K:g4 6. Ke6! Но не 6.Kg6? из-за 6...Лf6! Теперь обе фигуры черных под ударом, и они смогут выиграть только в том случае, если ладья с темпом убежит от преследования.

6...Лe4 (6...Лf6 7.Kc7+ Kpb7 8.Kd5, и белый конь оказывается под защитой пешки) **7.Kg5! Лe5 8. Kf3 Лf5 9.Kd4 Лf4 10.Ke6 Лe4 11.Kg5!** Конь прыгает по маршруту g5 — f3 — d4 — e6 — g5, а ладья топчется в малом квадрате e5 — f5 — f4 — e4 — e5.

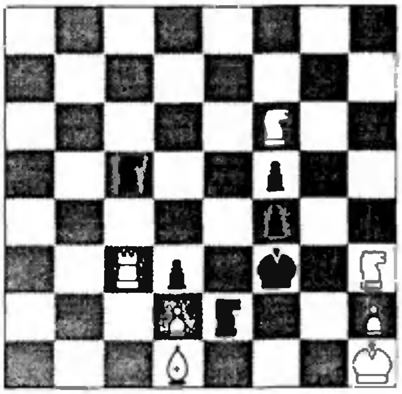


А.Троицкий, 1927
Ничья

Здесь юркий конь попеременно нападает на короля и ладью соперника.

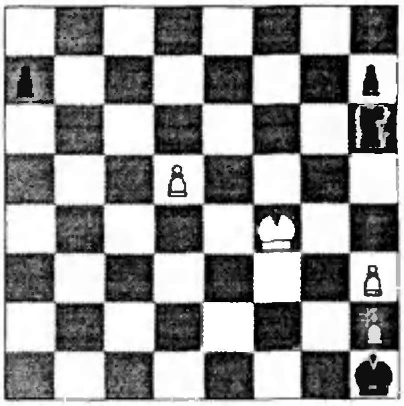
1.e3 Лd3! 2.Ke4+ Kph5 3.Kf6+ Kph6 4. Kg4+ Kpg5 5. Kf2! Лd5 6.Ke4+ Kph6 7.Kf6. Проскакав по сторонам ромба e4 — f6 — g4 — f2 — e4, конь вступает в единоборство с ладьей.

7...Лd6 8.Ke4 Лd1 9.Kf2 Лd5 10. Kg4+ Kpg5 11. Kf6 и т.д.



В.Йоргенсен, 1949
Мат в 6 ходов

В этой задаче замысел выражен в почти кристальной форме. Черные в цугцванге, поскольку на любой ход коня следует 2.Л:d3×. А выигрывают белые таким маневром: **1.Лa3! Kb3 2. Лa4 Kd4 3.Лb4! Ke6 4.Лb3 Kc5 5.Лc3!**



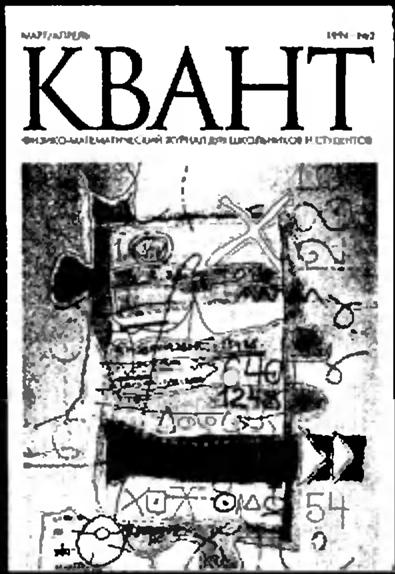
В.Якимчик, 1970
Ничья

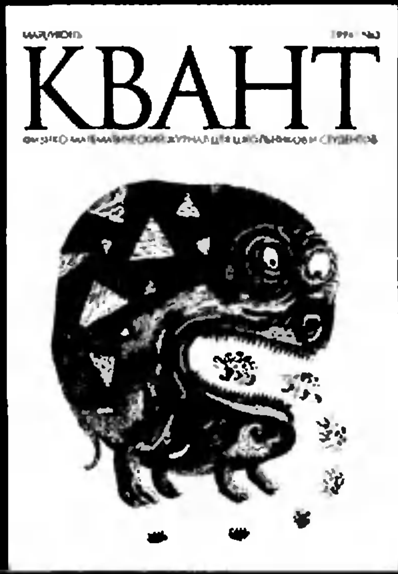
В этом замечательном этюде король (!) непрерывно преследует черного коня.

1.Kpe5 Kf7+ 2.Kpe6 Kg5+ 3. Kpf5 Kf3 (3...h6 4.h4 Kh7 5. Kpg6 Kf8+ 6. Kp:h6) **4. Kpe4 Kd2+ 5.Kpd3 Kb3 6.Kpc4 Ka5+ 7. Kpb5 Kb7 8.Kpc6 Kd8+ 9.Kpd7 Kf7 10.Kpe6 Kg5+** (10...Kh8 11.d6 Kg6 12.Kpf6 Kf8 13.Kpe7 Kg6+ 14.Kpf6) **11.Kpf5.** Если **2...Kd8+**, то **3.Kpd7**, и фигуры бегут друг за другом в обратную сторону.

Е.Гик

Индекс 70465





Уважаемые читатели журнала «КВАНТ».
Мы надеемся, что вы не забыли о нашем журнале
и своевременно оформили подписку на него на второе полугодие 1995 года.
Если же по каким-то причинам этого не произошло, не расстраивайтесь –
вы сможете подписаться на журнал и в помещении редакции.
Это избавит вас от возможных недоразумений, связанных с доставкой через почту.
В редакции можно также приобрести журналы «КВАНТ»
и Приложения к ним за прошлые годы.

Наш адрес: 103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «КВАНТ»
тел. 250-33-54, 251-55-57.

Мы ждем вас ежедневно с понедельника по пятницу с 11 до 17 часов.
Звоните и приходите!