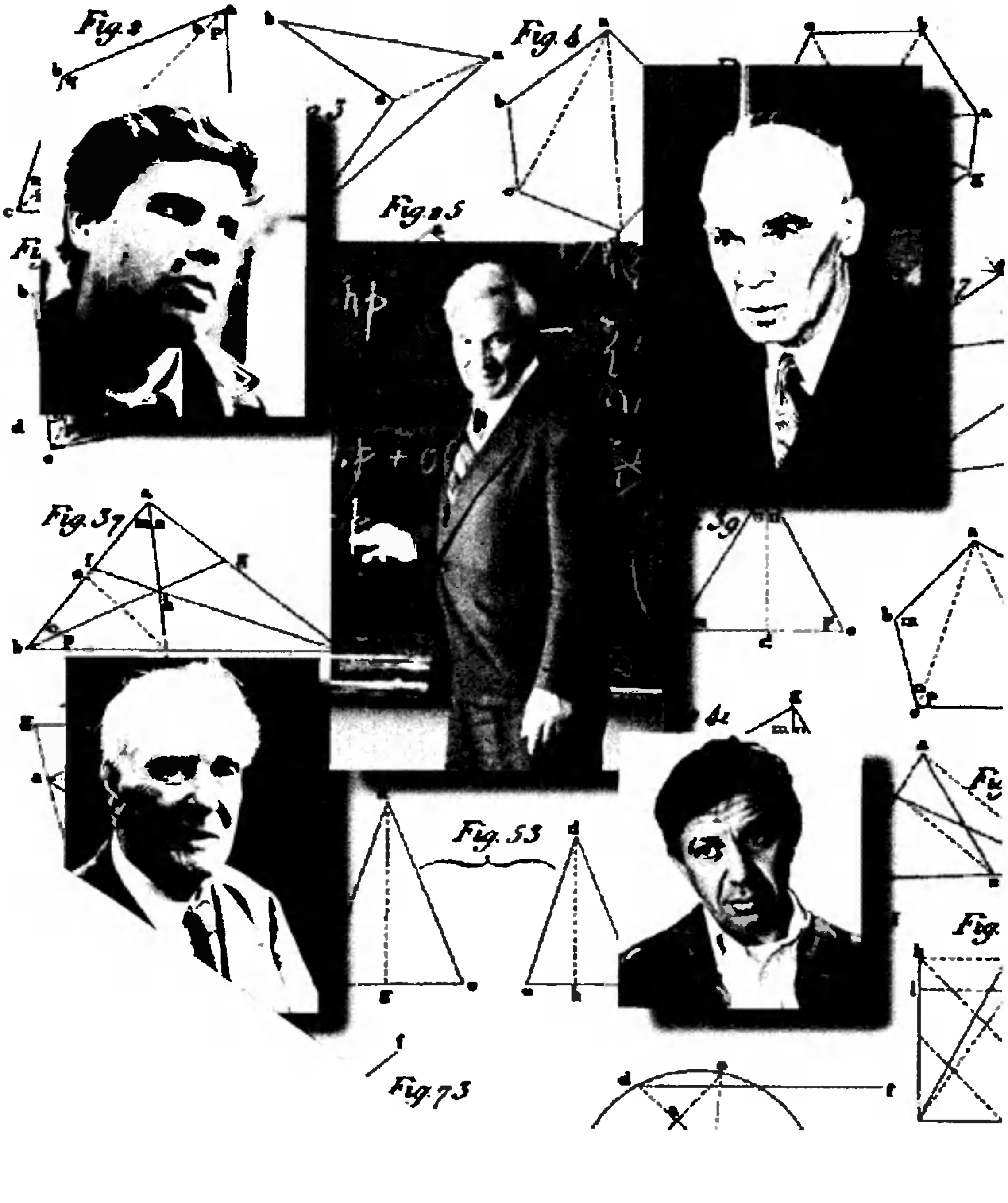
ISSN 0130-2221

ЯНВАРЬ/ФЕВРАЛЬ 1995·№1

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

Идею создания журнала «Квант» первым высказал академик П.Л.Капица в 1964 году.
А в начале 1970 года к читателям пришел его первый номер.
Главным редактором стал академик И.К.Кикоин,
первым заместителем главного редактора — академик А.Н.Колмогоров.
Оба они выполняли эти функции до последних дней жизни.
За четверть века неизбежны серьезные потери — рядом с нами нет многих тех,
кто создавал и развивал «Квант»... Вспомним хотя бы И.Ш.Слободецкого,
энергия которого определяла в первые годы главную повседневную работу редакции,
и Л.Г.Асламазова, бывшего многие годы заместителем главного редактора по физике.
Нам очень не хватает этих людей, часто ловишь себя на мысли: если бы они были рядом,
многое было бы по-другому, принимались бы более правильные решения,
журнал был бы лучше...



КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

ЯНВАРЬ/ФЕВРАЛЬ · 1995 · №1

В номере:

Квант

Учредители — Президиум РАН, НПП «Бюро Квантум»
Издатель — НПП «Бюро Квантум»

Бюро Квантум

К 25-летию нашего журнала

Дорогие друзья!

Номер, который вы держите в руках, не совсем обычен — здесь под одной обложкой встретились авторы, сотрудничавшие с «Квантом» в разные годы и много для него сделавшие. Мы приглашаем вас на эту дружескую встречу, но сначала хотим рассказать вам немного об истории нашего журнала.

Юрий Андреевич Осипьян

Первый номер «Кванта» вышел в 1970 году, но создание физико-математического журнала для школьников задумывалось несколькими годами раньше. Идею создания такого журнала первым высказал академик П.Л.Капица в 1964 году, а затем она обсуждалась теми, кто в 60-х годах организовывал физико-математические школы-интернаты при крупнейших университетах, всесоюзные олимпиады, летние школы, заочную математическую школу. Это были не только академики, профессора ведущих вузов, учителя, но и молодые энтузиасты — ученые, аспиранты и студенты, для которых работа со школьниками и популяризация научных знаний порой становились второй профессией.

Хотя в России еще с конца прошлого века выходил журнал «Вестник опытной физики и элементарной математики», рассчитанный на учеников гимназий и реальных училищ, а с 30-х годов выпускалось «Математическое просвещение» (адресованное, скорее, студентам и преподавателям), но цветного, массового, рассчитанного на широкую аудиторию «научного журнала для школьников», пожалуй, не было не только в России, но и в мире. Так любил говорить И.К.Кикоин — выдающийся физик, академик, первый главный редактор «Кванта», руководивший журналом на протяжении почти 15 лет, вплоть до своей кончины.

Математическую часть «Кванта» возглавил один из величайших ученых нашего века академик А.Н.Колмогоров. Нужно сказать, что и Андрей Николаевич, и Исаак Константинович были отнюдь не формальными руководителями: они внимательно следили за большинством материалов, предлагавшихся для публикации, а нередко участвовали и в их доскональном редактировании.

Каким должен быть журнал? На какой круг читателей он должен быть нацелен? Какая доля материалов должна быть адресована младшим школьникам, ученикам физико-математических школ, учителям, студентам? Каким должен быть уровень изложения, характер оформления? Горячие споры не затихали в редакции и на заседаниях редколлегии (затягиваясь порой до позднего вечера). Говорилось о том, что такой журнал должен быть не просто наполнен популярными рассказами о науке, но и давать разнообразную пищу для размышлений — от занимательных задач до кусочков настоящей науки, что он должен привлекать юных читателей к систематическим занятиям, помогать готовиться к экзаменам даже тем, кто живет далеко от столичных вузов, и о многом, многом другом. В результате творческих дискуссий и напряженной работы большого коллектива единомышленников журнал постепенно менялся, возникали новые рубрики, вырабатывался свой, «квантовский», стиль оформления.

За четверть века неизбежны серьезные потери — рядом с нами нет многих из тех, кто создавал и развивал «Квант». Кого-то уже нет в живых, кто-то уехал, а у кого-то просто не хватает ни сил, ни времени — слишком сложной стала наша жизнь. Нам очень не хватает этих людей, часто ловишь себя на мысли: если бы они были рядом, многое было бы по-другому, принимались бы более правильные решения, журнал был бы лучше... Вспомним хотя бы некоторых из тех, кто так много сделал для журнала, — а наши давние читатели наверняка узнают эти имена:

И.Ш.Слободецкий, энергия которого определяла в первые годы главную повседневную работу редакции; Л.Г.Асламазов, бывший многие годы заместителем главного редактора по физике; крупные физики Я.А.Смородинский и В.А.Фабрикант, доносившие до читателя новости современной науки и ее дух; замечательные ученые и педагоги А.И.Маркушевич, Н.Я.Виленкин, А.К.Кикоин, Г.И.Косоуров.

С глубокой благодарностью вспоминаем мы работу Л.Г.Макар-Лиманова, Т.С.Петровой, И.Н.Клумовой, В.Л.Гутенмахера, Ю.А.Шихановича, А.И.Климанова, Т.М.Макаровой, Л.В.Черновой, И.Н.Бронштейна, М.Л.Смолянского, В.А.Лешковцева, В.Н.Березина, М.Н.Даниличевой, В.Н.Боровишки и многих других.

Но и сегодняшний состав редколлегии и редакции содержит имена тех, кто прошел вместе с «Квантом» весь 25-летний путь (или большую его часть), что обеспечивает необходимую преемственность и сохранение лучших традиций. Назовем наших «ветеранов» (в кавычках — потому что они еще и сейчас молодые духом, энергичные люди). В создании журнала и подготовке его самого первого номера участвовали Н.Б.Васильев, А.П.Савин, Н.Х.Розов, Ю.М.Брук; большую часть пути с журналом А.А.Егоров, В.А.Тихомирова, А.Р.Зильберман, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.В.Можаев, В.Н.Дубровский, Л.В.Кардасевич, А.А.Леонович, В.Г.Болтянский, А.Н.Виленкин, Ю.П.Лысов, Ю.П.Соловьев (многие годы он — заместитель главного редактора по математике; сейчас его сменил В.М.Тихомиров, один из ближайших учеников А.Н.Колмогорова), С.С.Кротов (он сейчас на самом трудном участке — руководит нашим издательством «Бюро Квантум»), А.А.Варламов (в течение ряда лет он был заместителем главного редактора по физике, потом передал свои полномочия А.И.Черноуцану). Возглавляют журнал крупные ученые — академики Ю.А.Осипьян и С.П.Новиков.

Конечно, сейчас времена не те, что в годы создания «Кванта». Тираж «Кванта» со 100 тыс. в 1970-м и более 300 тыс. в «зените» (середина 70-х годов) упал до 13 тыс. Однако мы хотели бы надеяться, что у «Кванта» есть шанс на долгую и активную жизнь. Мы верим в вечную красоту научного знания, которая находит поклонников в каждом поколении. Наш оптимизм поддерживают не только «объективные факты» — вновь растущие конкурсы в ведущие вузы и в лучшие физико-математические школы, новый подъем олимпиадного движения, но и очень важный для нас «субъективный фактор» — живой интерес, который мы каждый день читаем и в письмах, и в глазах наших читателей.

Редакционная коллегия журнала «Квант»

Итак, «Кванту» исполнилось 25 лет. Вослед Пушкину мы можем воскликнуть: «Недаром — нет! — промчались четверть века!» В наших науках — математике и физике — за эти годы свершилось так много! Может быть, нелишне будет вкратце припомнить сейчас «чему, чему свидетелями мы были».

Неслыханного развития достигла вычислительная техника. Произошла всемирная компьютеризация. Задачи, к которым ранее невозможно было подступиться, оказались доступными. Компьютер стал рабочим инструментом математика, физика, инженера, экономиста в той же мере, в какой совсем недавно основным вычислительным подспорьем была логарифмическая линейка. Все это вскоре неизбежно заставит пересмотреть очень многое и в математическом образовании, и в научном творчестве.

Огромные успехи были достигнуты в геометрии и в теоретической физике. Влияние физики на развитие математики всегда было едва ли не определяющим. Самые яркие примеры этого в нашем веке — общая теория относительности и квантовая механика, давшие мощный стимул развития дифференциальной геометрии и функционального анализа. Современная физика оказалась теснейшим образом связанной с геометрией. Многие достижения, скажем, в геометрии многообразий, освещенные осмыслениями физической реальности, поражают воображение.

Совершенно новые аспекты приобрела интерпретация взаимоотношений Порядка и Хаоса в естествознании и самой математике, появилось много новых научных направлений, например теория особенностей. Можно продолжать и продолжать.

Хочу надеяться, что все эти выдающиеся достижения найдут свое место на страницах журнала. Я призываю своих единомышленников, коллег, учителей и вообще всех друзей «Кванта» продолжить традиции, заложенные основателями журнала И.К. Кикоиным и А.Н. Колмогоровым, и надеюсь, что «Квант», как всегда, будет насыщен красивыми задачами для больших и маленьких, статьями, посвященными школьной и кружковой математике, историческими экскурсами, советами абитуриентам, словом, всем тем, что всегда так привлекало заинтересованных читателей к нашему журналу.

Заместитель главного редактора
профессор В.М. Тихомиров

В гостях у «Кванта»

Одна из замечательных традиций нашего журнала — встречи на его страницах с интересными людьми. Сегодня у нас в гостях Помощник Президента Российской Федерации Георгий Александрович Сатаров. Беседу, запись которой мы и приводим ниже, провел член редколлегии журнала профессор МГУ С.С.Кротов. После коротких взаимных приветствий стороны перешли к вопросам и ответам. Итак...

С.К. *Помните ли Вы, каким образом был Вами сделан выбор в пользу естественных наук (математики и пр.)?*

Г.С. Нет, не помню, потому что заведомо это происходило постепенно.

С.К. *Было ли в Вашей жизни событие (может быть, знакомство, успех), которое подтолкнуло Вас в этом направлении?*

Г.С. Да, это было знакомство.

С.К. *Не связан ли был Ваш выбор со встречей с хорошим учителем? Кстати, каких школьных учителей Вы помните? Почему? Когда встречались с ними в последний раз?*

Г.С. Я до сих пор очень хорошо помню двух школьных учителей — математика и историка. Жизнь складывалась так, что специальных встреч мы не устраивали, но вспоминаю я их с большой благодарностью.

С.К. *Были ли у Вас в школе друзья-единомышленники? Я имею в виду тех, кто, как и Вы, тяготел бы к естественным наукам?*

Г.С. Нет, в школе не было.

С.К. *Была ли в Вашей молодости задача, которую Вы помните до сих пор? Может быть, Вы ее сформулируете для наших читателей? Или, может быть, Вы вспомните интересную историю из Вашей биографии?*

Г.С. Я едва ли вспомню сразу конкретную задачу, но особенно хорошо я помню область математики, которая меня очень увлекала (уже в студенческие годы) — это была теория чисел. И вот тогда к одному из зачетов необходимо было придумать контрпример, и тому, кто соответствующий контрпример придумает, был обещан зачет-автомат — высшая форма поощрения. Я, помню, придумал тогда целое семейство необходимых примеров с параметрами и потребовал от экзаменатора, чтобы он поставил зачеты-автоматы всей нашей группе.

С.К. *Но вдруг у Вас осталось в памяти что-то из школьных лет? Может быть, как Вы «входили» в математику?*

Г.С. В школе я «входил» в математику примерно так. Это была геометрия, точнее планиметрия, и я обнаруживал у себя математические способности следующим образом. Когда учитель начинал урок и говорил, что сейчас мы будем доказывать какую-то теорему, я ему тут же заявлял, что я знаю, как ее доказывать. Он принимал мой вызов и приглашал к доске со словами: «Ну, выходи и доказывай..» Для меня это всегда было поединком с самим собой, и я доказывал...

С.К. *Блестяще!!! Вы, должно быть, были олимпиадником?*

Г.С. Нет, олимпиадником я не был, это просто было юношеское баловство.

С.К. *Когда Вы впервые услышали о журнале «Квант»? Читали ли его?*

Г.С. Услышал с самого начала, как он вышел, и потом регулярно читал. Дело в том, что один из наших преподавателей из МГПИ принимал участие в создании журнала. Его фамилия Смолянский.

С.К. *Да? Вы учились у Марка Львовича Смолянского?*

Г.С. Он читал нам лекции, которые мне не нравились, и я на них не ходил, но про «Квант» узнал впервые от него.

С.К. *Итак, Вы учились на матфаке МГПИ. Правильно? Когда и почему Вы решили поступать именно туда? Остались ли воспоминания о подготовке к вступительным экзаменам?*

Г.С. Специальных воспоминаний о подготовке в вуз не осталось, потому что я сам достаточно целеустремленно готовился, и в этом не было ничего особенного.

С.К. *И тем не менее, когда Вы шли сдавать вступительные экзамены, не посещало ли Вас чувство, что Вам придется столкнуться с чем-то неизведанным? Не было ли у Вас такого ощущения, что по каким-то вопросам Вы недостаточно подготовлены?*

Г.С. Нет, таких ощущений не помню, поскольку я увлекался математикой до вуза, я прорешал многие задачи из Демидовича, и мне этого вполне хватило.

С.К. *Произвела ли на Вас особое впечатление первая встреча с вузовскими «судьями» или все прошло само собой, без неожиданностей? Справедливо ли были оценены Ваши знания?*

Г.С. Я был оценен справедливо.

С.К. *Я правильно понимаю по Вашему ответу с улыбкой, что Вы получили все «отлично»?*

Г.С. Примерно так.

С.К. *Произошел ли у Вас в студенческие годы выбор той области математики, с которой Вы связывали свое научное будущее?*

Г.С. Да, это была алгебра.

С.К. *И такой странный вопрос: не посещало ли Вас когда-нибудь на матфаке чувство, что Вы все-таки пришли не туда?*

Г.С. Нет, я серьезно увлекался тогда математикой, и такие вопросы не могли возникать.

С.К. *Сохранились ли у Вас яркие воспоминания из студенческой жизни? Есть ли какие-то вещи, которые Вы помните до сих пор?*

Г.С. Ну, один пример, наверное это лекции и экзамены профессора Лемлейна. Он нам читал теорию Галуа. Это был необыкновенно интересный человек и замечательный преподаватель. И экзамены он принимал очень своеобразно. До экзамена он просил студентов поставить самим себе оценки.

С.К. *Очень интересно. Не могли бы Вы об этом рассказать подробнее? Как это ни парадоксально, нечто* *подобное я тоже устраивал, абсолютно не зная, что так делает кто-то еще. У Вас это носило характер индивидуального контакта (один на один с профессором) или в присутствии сразу всей группы?*

Г.С. Вы входили, брали билет, и профессор просил: «Напишите на бумажке, на сколько Вы будете отвечать». Отвечали при этом только двое, он очень внимательно проверял все. Главное, что никогда не было облав...

С.К. *К чему это сводилось? Профессор хотел проверить, правильно ли Вы оцениваете свои знания (т.е. отдаете себе отчет в том, научились ли Вы чему-то и насколько глубоко), или все-таки, когда человек завышал свою оценку, а мы к этому так или иначе склонны все, он хотел его тактично поправить? Это был некий педагогический трюк?*

Г.С. Не знаю. Я его сверхзадачи не выяснял. Меня устраивало, что я получал то, что заявлял.

С.К. *Вы хотели получить «отлично», или и получали? Это была некая игра?*

Г.С. Для меня это была игра, но и очень интересный разговор по существу. Вот еще один интересный эпизод. Это было на аналитической геометрии. На каком-то коллоквиуме что-то надо было доказать, и я убедил преподавателя в том, что предлагавшийся им для доказательства факт неверен, а верно в точности противоположное. Потом я пришел домой, продолжая думать на эту тему, и обнаружил, что я все-таки был неправ.

С.К. *И какое было продолжение? Правильно ли я Вас понял, что в тот момент, когда Вы отстаивали свою (неверную) точку зрения, преподаватель Вам поверил?*

Г.С. Да, я его убедил.

С.К. *И как разворачивались события потом?*

Г.С. На следующий день я к нему пришел и сказал, что был неправ. Ему это мое признание дико понравилось.

С.К. *А какой это был курс?*

Г.С. Первый, дополнительных подробностей я уже не помню, но это касалось теории инвариантов.

С.К. *Что же, яркий пример.*

Г.С. Да, яркий.

С.К. *Скажите, а когда Вы закончили пединститут? Как складывалась Ваша дальнейшая научная карьера?*

Г.С. Это был 1972 год, и мне по окончании предложили два варианта. Первый — профессор Куликов предлагал пойти к нему в аспирантуру заниматься алгебраической топологией, т.е. погрузиться в чистую теорию. И второй вариант — пойти в научное подразделение, которое занималось прикладной математикой. И я выбрал второй вариант. Это была лаборатория внутри МГПИ, занимавшаяся разработкой математических методов применительно к социальным наукам, где я начал работать научным сотрудником.

С.К. *Когда пришел серьезный интерес к политике? Что повлияло на Ваше решение уйти в нее полностью? Или, может быть, в Вашей душе по-прежнему живет ученый-математик?*

Г.С. Живет, да, живет. А потом я не считаю, что я пришел в политику.

С.К. *Ну, хорошо, а кто Вы сегодня?*

Г.С. Ну, по должности — чиновник, а по сути — человек, который в сфере политики прилагает свои профессиональные знания.

С.К. *Знания именно математика?*

Г.С. Да, математика, и в общем-то я по-прежнему занимаюсь приложением математики к социальным наукам. Разумеется, мне пришлось серьезно изучать и социальные науки, политологию, но от этого я не перестал считать себя профессионалом-математиком.

Георгий Александрович Сатаров

С.К. *А что сыграло наиболее важную роль в Вашем становлении как политика-профессионала? Если сегодня Вы стали человеком нескольких профессий, то приобрели ли Вы при этом дополнительные черты как личность? Помните — «... А из Вашего окна площадь Красная видна, а из нашего окошка только улица немножко...»?*

Г.С. В своем нынешнем положении я бы выделил две вещи — с одной стороны, это специфическая профессиональная деятельность, к которой я шел, а с другой стороны (то, что я сижу в Кремле), здесь имел место случай.

С.К. *Вы имеете в виду изменение общей ситуации в нашей стране?*

Г.С. Нет, то, что ситуация внутри страны изменилась, я не считаю случаем — это было закономерно. Случай — это то, что произошло именно со мной. В принципе, я мог бы работать по-прежнему в какой-нибудь лаборатории или преподавать в институте.

С.К. *Ощущаете ли Вы в повседневной работе свое математическое «происхождение»? Если да, то что из него особенно Вам ценно?*

Г.С. Естественно, ощущаю. Самым ценным, конечно, является сложившийся образ мышления.

С.К. *Находясь сегодня в самом эпицентре политической жизни нашей страны, дефицит какого образования (или опыта) Вы испытываете сильнее всего? Или, может быть, с этим все в порядке?*

Г.С. Конечно, нет. Не хватает фундаментальной базы в сфере социальных наук, экономики. Здесь я, конечно, дилетант.

С.К. *Вы как-то стараетесь наверстывать упущенное?*

Г.С. Я много читаю.

С.К. *Это Ваша собственная программа самоусовершенствования или Вам кто-то в этом плане содействует, советует?*

Г.С. По большей части — это своя собственная, постоянно корректируемая программа, но есть люди, коллеги, которые мне дают советы, рекомендуют почитать те или иные книги.

С.К. *Не было ли в Вашей жизни ситуаций, где Ваше математическое прошлое обусловило бы принятие наиболее верного решения или предопределило бы принятие того самого нестандартного решения?*

Г.С. По большей части я не принимал решений, а либо давал информацию для принятия решения, либо предлагал варианты. Ну, впрочем, была, была, конечно, ситуация перед 5 Российским съездом. Мы построили модель для прогнозирования результатов выборов на пост Председателя Верховного Совета, и она блестяще сработала.

С.К. *Нет ли у Вас жизненной привычки для «поддержания формы» решать на досуге какие-нибудь задачи, заниматься логическим или математическим тренингом?*

Г.С. Сейчас уже нет, конечно. А раньше было время, когда я увлекался такого рода книжками, это длилось довольно долго.

С.К. *И что, среди этих книг бывали журнал «Квант» и книги серии «Библиотечка Квант»?*

Г.С. Да, и «Квант» в том числе, но ведь раньше издавалось очень много книг этого плана, я, например, старался не пропускать книжки Гарднера. Ну, и друзья нередко подкидывали. Вот, есть такая задачка, такая...

С.К. *По тому, как Вы об этом вспоминаете, видно, что Ваша душа до сих пор к этому открыта и Вам это доставило бы удовольствие и сейчас.*

Г.С. Конечно.

С.К. *У нас, как говорится, с собой было, и после окончания беседы мы Вам, на всякий случай, кое-что оставим. Вдруг в какой-нибудь свободный момент Вас посетит желание окунуться в прошлое...*

Г.С.Спасибо.

С.К. *Может ли в наше время стать Президентом страны или быть ключевой фигурой в ее политической жизни (влиять на судьбу страны) ученый — математик или физик?*

Г.С. Теоретически да. Ну, вот, к примеру, губернатор Нижнего Новгорода — Борис Немцов.

С.К. *А что, он — математик?*

Г.С. Он — радиофизик. Если говорить вообще, то мне хочется думать, что это будет скорее ученый-прикладник. Чистые теоретики — это немного отстраненные люди, живущие в некой системе своих «жизненных» аксиом, они разрабатывают красоту, гармонию науки. В этом их особенность. А математик-прикладник ближе к физику-экспериментатору.

С.К. *Я об этом заговорил потому, что известно ведь, что крупнейший американский ученый-физик Бенджамин Франклин (кстати, один из основоположников современной терминологии в теории электричества) принадлежал к блестящей плеяде «отцов нации», участвовал в разработке ключевых документов американского государства — Декларации независимости и Конституции США. Не хо-*

Георгий Александрович Сатаров и Сергей Сергеевич Кротов *телось бы всуе упоминать нашего выдающегося современника — Андрея Дмитриевича Сахарова, но коль скоро мы говорим об этом по большому счету — почему бы и не вспомнить о нем? Может быть, физики больше, чем другие ученые-естественники, склонны к этому?*

Г.С. Мне кажется, что все определяется скорее не профессией, а определенным человеческим типом, который в силу жизненных обстоятельств может попасть сначала в эту профессию, а уже потом прийти в политику...

С.К. *Какое место в образовании современного подрастающего поколения Вы отводите математике, физике, другим точным наукам?*

Г.С. Фундаментальное, безусловно. Потому что нормальное естественно-научное образование (я имею в виду не столько глубину овладения предметом, а скорее глубину проникновения в его логическую структуру, философию знания, овладение способом мышления) избавляет от кучи предрассудков.

С.К. *Кто Вы в Вашем сегодняшнем понимании — гуманитарий или ученый-естественник? Или имеет место что-то третье?*

Г.С. Винегрет.

С.К. *Если начать жизнь сначала, что бы Вы изменили в системе своего образования, чему бы уделили больше внимания?*

Г.С. Ну, если бы я знал заранее, что мне потребуется, то старался бы получить более глубокое образование. В сфере своей деятельности я вижу один серьезный пробел, это — политологическое образование т. е. не бывшая марксистско-ленинская философия, а нормальная политология, которая, на мой взгляд, обязательно должна включать нечто, условно называемое «математической политологией». Которая, вообще говоря, существует.

С.К. *Существует ли политическая фигура, чей образ действия и мыслей Вам особенно близок, кто бы олицетворял образ «идеального политика»?*

Г.С. Мне был когда-то в молодости очень симпатичен американский президент Джон Кеннеди. Может быть, из-за временного совпадения или из-за такой, мягко говоря, нетривиальной судьбы. Но я не настолько хорошо знаю подробности, чтобы говорить, что он одновременно олицетворяет и образ действия.

С.К. *Не посещала ли Вас в последнее время мысль почитать для ищущей себя в жизни молодежи какой-нибудь свой курс лекций?*

Г.С. Ну во-первых, я уже читал на факультете социологии в МГУ студентам 3 курса спецкурс по применению математических методов при изучении парламентаризма.

С.К. *Очень интересно... а давно?*

Г.С. Последние два года. В этом году (1994) уже не читал. Есть мечта написать книжку и разработать курс по матполитологии. По мере возможности этим занимаюсь, но сейчас трудно это.

С.К. *Можете ли Вы что-то сказать о сегодняшнем журнале «Квант»?*

Г.С. Я давно его не читал. Когда читал, он мне нравился всегда.

С.К. *А не кажется ли Вам, что с точки зрения чисто внешнего вида он стал более взрослым, или предыдущий дизайн Вам больше ласкал глаз?*

Г.С. С эстетической точки зрения я его никогда не оценивал, мне важно было содержание... Поэтому, если Вы оставите мне журналы, я с удовольствием посмотрю и готов высказать свою точку зрения.

С.К. *В январе 1995 года журнал «Квант» отмечает свое двадцатипятилетие. Что бы Вы могли пожелать нашим читателям вообще? Тем из них, кого интересует политика? Совместимы ли их увлечения науками с последующей возможностью включиться в активную политическую жизнь?*

Г.С. Первое — адекватно выбрать будущую профессию, второе — любить ее, третье — каждое утро просыпаться с мыслью, что вот я могу опять заняться любимым делом. Что касается совместимости, то да, конечно, совместимы, это доказано экспериментально.

С.К. *Но не заложено ли здесь какое-то противоречие?*

Г.С. Нет, не заложено. И я бы хотел добавить к сфере пожеланий. Есть люди, которые, занимаясь наукой, чрезмерно серьезно к этому относятся.

С.К. *Серьезно относятся к себе или к науке?*

Г.С. И к себе, и к науке. И абсолютизируют науку как самоценность, и себя и свои возможности. Т. е., речь идет об обманчивом ощущении всесильности. Человек думает, если я в области, скажем, геометрической алгебры или физики плазмы могу делать все что угодно, то я способен сделать все что угодно и в любой сфере деятельности. Происходит абсолютизация естественно-научного метода как такового, без должной рефлексии себя и соблюдения необходимых рамок. Здесь исключительно важно чувство меры.

С.К. *Правильно ли я понимаю, что каждый ученый должен быть открыт для духовных, гуманитарных сфер?*

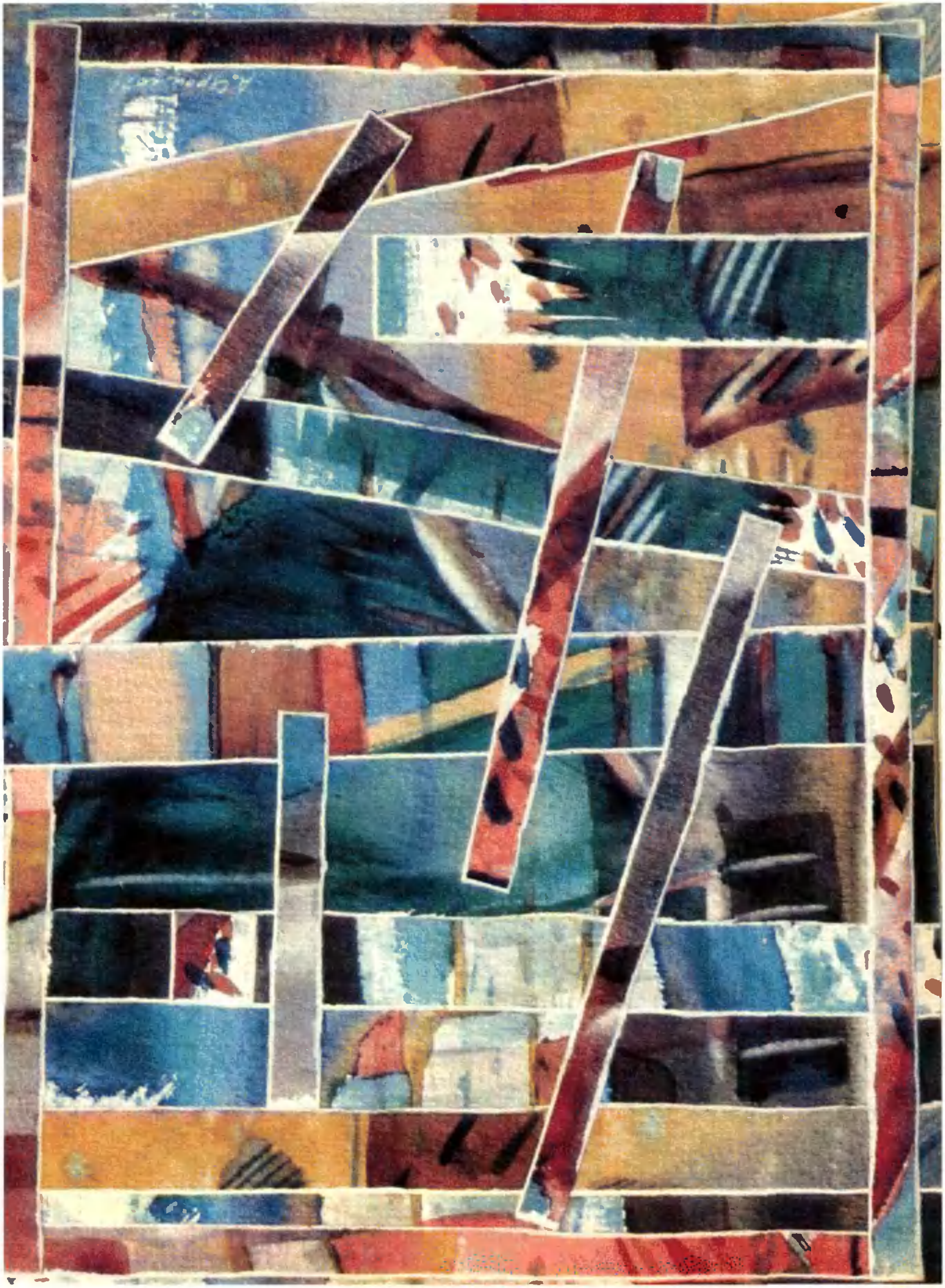
Г.С. Именно, его не должно покидать гуманитарное видение мира, потому что отсутствие рефлексии, зашоренность может приводить к неудачам как в науке, так и за ее пределами тем более.

С.К. *Представим себе, что появились сильные, светлые молодые люди, которые, прочитав, например, нашу с Вами беседу, решили бы заняться матполитологией. С чего бы Вы им посоветовали стартовать? Имеются ли какие-нибудь задачи для вхождения в предмет? Или Вы посоветовали бы заниматься математикой и политикой сначала независимо, а уже потом родится некий симбиоз?*

Г.С. Я думаю, что в сферу приложений математики можно прийти из любой области, здесь должна быть прежде всего некая общая культура — это первое, а второе — это отсутствие абсолютизации (о чем я уже говорил).

С.К. *В заключение я хотел бы задать такой вопрос. Мы — элитарный журнал. Раньше его тираж достигал 250000 экземпляров, что, очевидно, не отражало реальную в нем потребность. Сегодня — это 20 — 25 тысяч читателей. Считаете ли Вы правильным существование элитарного школьного журнала, издание книг, пособий, журналов как бы не для всех?*

Г.С. Конечно. Более того, я считаю что это нормальная ситуация, когда на определенной стадии образование расслаивается на какие-то отдельные специальные группы. И потом я бы не стал делать акцент на слове элитарный. Это — специальная учебная литература. Очень и очень необходимая. Одного «Кванта» мало. Я помню, как мы его зачитывали, передавали из рук в руки — такие вещи помимо познавательной функции выполняют и удивительную воспитательную задачу. Аналогичный журнал для школьников должен был бы существовать и по биологии, и по истории. Математике и физике давно в этом смысле повезло.



Рассказ о кванте

Я. СМОРОДИНСКИЙ

В статье речь идет об очень сложном и вместе с тем фундаментальном понятии, играющем огромную роль в современной физике. Именно поэтому статья несколько трудна для понимания. Но не рассказать в первом номере журнала о кванте как физическом понятии мы не могли, так как наш журнал называется «Квант».

Две самые короткие формулы современной физики

Современная квантовая физика родилась 14 декабря 1900 года. В этот день на заседании Берлинского физического общества выступил с докладом Макс Планк. В его докладе впервые появилась новая мировая постоянная, обозначенная буквой h и названная элементарным квантом действия. Элементарным она была названа потому, что определила самую малую энергию, которую может нести с собой электромагнитное излучение.

Слово «квант» происходит от латинского quantum, означающего «столько» (например, quantum placet означает «столько, сколько хочется»). Мировую постоянную называют теперь постоянной Планка, и ее наиболее точное значение равно

$$h = 6{,}626176 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с}.$$

Вместо h физики чаще пользуются другой величиной, которая в 2π раз меньше. Ее также называют постоянной Планка и обозначают

$$\frac{h}{2\pi} = \hbar = 1{,}0545887 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с}.$$

Формула Планка записывается так:

$$E = h\nu.$$

Здесь E — наименьшая порция света (или радиоволн, или рентгеновских лучей, или любого другого электромагнитного излучения), которую может испустить или поглотить атом, молекула или кристалл при заданной частоте излучения ν. Для видимого света частота определяет «цвет» света. Синему цвету соответствует большая частота, красному — меньшая. Частота колебаний излучения связана с длиной волны λ соотношением

$$\nu = \frac{c}{\lambda},$$

где c — скорость света, которая в пустоте равна $3 \cdot 10^8$ м/с (точнее 299792458 м/с). Таким образом, постоянная Планка связывает наименьшую энергию излучения с его частотой, показывая, что отношение E к ν есть всегда величина постоянная.

Формула Планка вместе с формулой Эйнштейна

$$E = mc^2,$$

связывающей массу и энергию, — две самые короткие и самые знаменитые формулы современной физики.

Попробуем понять, что привело Планка к необходимости квантовой гипотезы и почему формула Планка оказалась столь важной.

С чего все началось?

Если пропустить свет через призму, то на экране, поставленном за ней, возникнет разноцветный спектр. (Его впервые наблюдал Ньютон.) Позже узнали, что спектр дает не только солнечный свет, но и излучение от любого нагретого тела. Чем выше температура тела, тем больше в спектре синих лучей. Не очень нагретое тело (до 500 °С) — красного цвета, сильно нагретое (до 1000 °С) — белого. Постепенно перед исследователями встали два вопроса: как зависит спектр тела от его температуры и как распределяется энергия вдоль спектра?

Если к разным местам спектра приложить термометры, то можно измерить, какая доля энергии приходится на каждый участок спектра. Еще лучше взять не термометры, а прямо калориметры. Измеренные количества теплоты, которые падают, скажем, на полоску спектра ширной в 1 см, и будут теми величинами, которые нам нужны. Геометрическая длина спектра зависит от расстояния до экрана, поэтому обычно измеряют энергию, упавшую не на 1 см, а на участок спектра, соответствующий определенной частоте излучения ν или определенной длине волны λ.

Отношение энергии, сосредоточенной в узкой полоске спектра от ν до $\nu + \Delta\nu$, к ширине полоски $\Delta\nu$ называют спектральной плотностью энергии или просто спектральной функцией и обозначают $f(\nu)$.

Какой вид имеет спектральная функция $f(\nu)$? Ясно, что она зависит от температуры тела. Вообще говоря, $f(\nu)$ разная и у разных тел. Как же определить вид спектральной функции? Это была трудная задача, и чтобы рассказать о том, как она решалась, придется начать издалека. Но сначала еще несколько слов о спектральной функции.

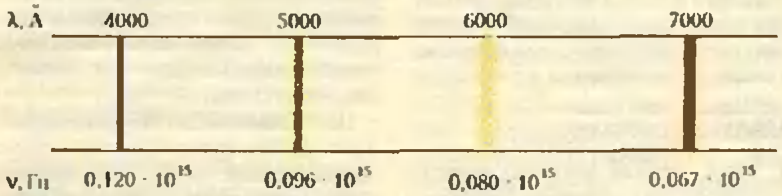


Схема спектра видимого света. Слева фиолетовый конец спектра, справа красный. Наверху длины волн в ангстремах (1 Å = 10^{-8} см), внизу частоты в герцах. Энергии, падающие на выделенные четыре полоски спектра, относятся, как значения спектральной функции — $f(0{,}120\cdot10^{15}) : f(0{,}096\cdot10^{15}) : f(0{,}080\cdot10^{15}) : f(0{,}067\cdot10^{15})$.

Этой статьей фактически открывался самый первый номер нашего журнала — «Квант» № 1 за 1970 год.

Спектральная функция

Спектральная функция $f(\nu)$ — это, вероятно, самое трудное, что нужно понять в этой статье. Спектр, который мы видим на экране, тянется непрерывной полоской, и в нем представлены все частоты. Не имеет смысла спрашивать, какую энергию можно сопоставить в спектре точно данной частоте ν. Когда из источника течет вода, нельзя спросить, сколько воды вытечет в какой-то определенный момент времени, например ровно в 12 часов дня. Точно в этот момент вытекает объем воды, равный нулю. Для того чтобы вытекло какое-то количество воды, надо, чтобы прошел хотя бы небольшой промежуток времени. Можно спросить, сколько воды вытечет за время от 12.00 до 12.01. Можно спросить, сколько вытечет воды за любой интервал времени Δt от 12 часов до 12 часов + Δt минут. Если вода течет более или менее равномерно и за 1 минуту вытекает g см^3 воды, то за время Δt вытечет $g(t)\ \Delta t$ см^3.

Мы написали не g, а $g(t)$, так как в разное время (в час дня, в два часа дня и т.д.) вода может течь по-разному. Это, например, означает, что количество воды, вытекающее за 1 минуту в 12.15, и количество воды, вытекающее за 1 минуту в 12.30, относятся как $g(15) : g(30)$, если за начало отсчета времени взять полдень — 12.00.

При подсчете количества воды мы сталкиваемся с новой величиной, которая описывает интенсивность непрерывного процесса, — g есть отношение количества воды, вытекающего за интервал времени Δt, к этому интервалу, когда он взят очень маленьким.

Спектральная функция имеет аналогичный смысл: она определяет отношение энергии в полоске спектра к ширине этой полоски, когда ширина полоски взята очень маленькой. Ширина при этом измеряется, как было уже сказано, не в длинах, а в частотах.

Частицы или волны?

С самого начала механика встречалась с задачами, которые можно было разбить на два совершенно разных класса. Движение материальных точек и твердых тел описывалось уравнениями Ньютона. Из этих уравнений можно было определять траектории движения тел, например планет солнечной системы, и описывать, как происходит движение вдоль траекторий. Но были и другие объекты. Движение воды в каналах, распространение звука в воздухе, изгиб железной балки — все эти задачи относились к механике сплошных сред, и ими занимались гидродинамика, аэродинамика, теория упругости и другие разделы механики.

Сплошная среда и система материальных точек представлялись совершенно разными физическими объектами. Если даже, решая задачу о течении воды, и выделяли мысленно небольшой объем жидкости, то этот объем никак не связывали с молекулами жидкости (о молекулах вообще узнали через много лет после того, как были написаны уравнения гидродинамики).

Волны в воде или в воздухе (например, те, которые называют звуком) и планета, движущаяся вокруг Солнца, имели, казалось, мало общего. Все было ясно, вот только в оптике оставался нерешенным вопрос: что такое свет? Поток мельчайших частиц, как это думал Ньютон — сторонник корпускулярной теории, или это волны в какой-то среде — мировом эфире, как думал Гюйгенс — создатель волной оптики? Популярность каждой из теорий в разное время была различной, но никто не мог найти решающего аргумента в пользу одной из них: свет в одних явлениях вел себя как поток корпускул, в других — как волны. Сейчас мы хорошо знаем, что в этом нет противоречия — поверить в это стало возможным лишь благодаря квантовой теории. В прошлом же веке противоречие казалось неразрешимым. Свет должен быть либо волной, либо частицей. Это утверждение выглядело логически безупречным.

Степени свободы

Разница между системой материальных частиц и сплошной средой выступает очень четко, если посмотреть, каким числом координат задается состояние системы.

Положение каждой точки в пространстве задается тремя числами — тремя координатами. Говорят, что материальная точка имеет три степени свободы. Если в систему входит N материальных точек, то говорят, что она имеет $3N$ степеней свободы.

Такое же рассуждение можно провести и для скоростей. Скорость одной точки описывается тремя числами — тремя компонентами вектора скорости. Скорости N точек требуют для своего описания $3N$ чисел.

Сколько чисел надо задать, чтобы описать состояние поверхности моря? Строго говоря, для каждой точки поверхности надо задать три числа — вектор скорости воды в данной точке; следовательно, чисел будет бесконечно много. Поверхность моря представляется нам как система с бесконечно большим числом степеней свободы. Даже тот факт, что вода состоит из молекул, а потому число степеней свободы можно определить, сосчитав молекулы, не облегчает задачу: молекул настолько много, что практически число степеней свободы остается бесконечно большим. В действительности же нас не интересует движение каждой молекулы. Когда по морю бегут волны, например от идущего корабля, то мы можем описать картину распределения волн, используя сравнительно немного чисел. Мы можем задавать величину амплитуды и фазы каждой волны; волн хотя и много, но все же меньше, чем молекул. Кроме того, картина, в основном, повторяется со временем: волны более или менее одинаковые.

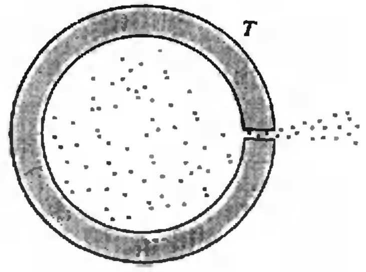
В каждой волне движется много молекул, движение носит коллективный характер, и мы сможем говорить о коллективных степенях свободы на поверхности моря, в отличие от индивидуальных степеней свободы, скажем, отдельной молекулы воды.

Такое же коллективное описание можно использовать, рассказывая о свойствах света. В частности, мы так и делаем, когда пытаемся описать распределение энергии по спектру.

Свет — волновой процесс, и его описание проще всего выглядит с позиций волновой теории. Конечно, подобное описание света совсем непохоже на описание системы точек. Здесь нет даже намека на какие-то степени свободы — волны и частицы совсем непохожи друг на друга. Но это все-таки не совсем так. У волн и частиц есть общие свойства. Это, прежде всего, те, которые проявляются, когда мы начинаем изучать тепловые явления и думать, как распределяется между волнами и частицами тепловая энергия.

Температура и теплоемкость

Рассмотрим газ, находящийся в нагретом сосуде. Мы знаем, что температу-



Сосуд с газом. Атомы сталкиваются со стенками, и в результате устанавливается тепловое равновесие между газом и сосудом — газ приобретает температуру стенок. Число атомов при столкновениях не меняется. Чтобы измерить температуру газа, можно выпустить небольшую порцию через маленькое отверстие.

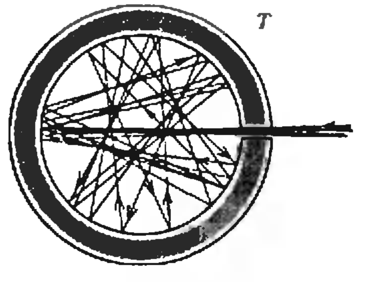
ра газа и стенок сосуда должна быть одинаковой. Если это вначале было не так, то тепло будет до тех пор перетекать от более теплого тела к более холодному, пока температуры не станут равными, т.е. пока не установится тепловое равновесие между стенками сосуда и находящимся в нем газом.

Температура газа связана с кинетической энергией его атомов (мы будем для простоты говорить об одноатомном газе). Один из самых первых выводов кинетической теории газа состоял в том, что каждый атом газа обладает (в среднем) энергией $\frac{3}{2}kT$, по $\frac{1}{2}kT$ на каждую степень свободы, а полная энергия газа равна $\frac{3}{2}NkT$, где N — число частиц в газе ($3N$ — полное число степеней свободы). Здесь k — постоянная Больцмана ($k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К); она играет роль переводного коэффициента от градусов на шкале Кельвина к джоулям. Дальше в кинетической теории газов показывалось, что если есть колебания, то на каждую колебательную степень свободы приходится энергия kT, вдвое большая, чем на степень свободы, отвечающую поступательному движению. Эти утверждения, доказанные и проверенные, относились к газу. Естественно, возник вопрос: а что можно сказать об энергии излучения?

Представим себе, что у нас есть сосуд (как говорили раньше, «полость»), в котором нет газа. Однако в таком сосуде всегда будет электромагнитное поле. Электромагнитные волны излучаются и поглощаются стенками, и эта энергия волн как-то распределяется по спектру. Если стенки сосуда имеют какую-то фиксированную температуру, то распределение энергии будет, очевидно, различным при разных температурах. Мы можем изучить поле внутри сосуда, сделав в нем маленькое отверстие и выпустив пучок света.

Когда впервые начали обсуждать свойства такой «полости», то заметили, что если свет снаружи попадает в отверстие, то он, очень много раз отразившись от стенок и «заблудившись», почти не будет иметь шансов выйти наружу. Отверстие поглощает весь падающий на него свет, поэтому тело и назвали черным (точнее — абсолютно черным), а свет, который выходит из отверстия, назвали излучением черного тела (так что черное тело светится!).

Представьте теперь, что черное тело нагревают. Тогда можно задать вопрос: какое количество тепловой энергии перейдет в свет? Ответ на него был дан в конце XIX века и состоял в том, что свет, заключенный внутри черного тела, должен находиться в тепловом равновесии со стенками сосуда. Это равновесие устанавливается и поддерживается процессами излучения и



Сосуд с излучением (черное тело). Волны или лучи света много раз отражаются от стенок, при этом они поглощаются стенками и излучаются вновь; в результате устанавливается тепловое равновесие между излучением и стенками. При таких процессах число квантов не остается постоянным; величина энергии и число квантов полностью определяются температурой сосуда. Свет, выходящий из маленького отверстия в таком сосуде, будет иметь спектр черного тела.

поглощения световых волн нагретыми стенками (сколько излучают, столько же поглощают обратно), а энергия и ее спектральная плотность полностью определяются только одним параметром — температурой. Никакого разговора о числе степеней свободы (как это было в случае газа) здесь как будто и не возникает.

Если в сосуде, в котором установилось тепловое равновесие, есть маленькое отверстие, то световые волны будут выходить из него. Величина энергии, выходящей из отверстия черного тела, определяется законом Стефана — Больцмана. Согласно этому закону энергия, излученная черным телом с единицы поверхности отверстия в единицу времени, пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры и не зависит от природы тела:

$$\varepsilon = \sigma T^4$$

(постоянная Стефана — Больцмана $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2 \cdot$ К^4)).

Закон Стефана — Больцмана был хорошо проверен экспериментально. Опыты подтвердили, что к излучению можно применять те же понятия — энергия, температура, которые используются при описании тепловых свойств газа в кинетической теории.

Формула Вина и формула Рэлея — Джинса

Теперь пора вернуться к вопросу, который был поставлен в начале статьи: как получить из теории спектральную функцию, которая описывает распределение энергии излучения по спектру, и как она зависит от температуры?

Прежде всего этот вопрос попробовали решить по аналогии, но аналогия с газом не помогла. Число степеней свободы светового потока, как их ни считай, бесконечно велико, и если на каждую степень свободы выделить по одинаковой порции энергии, скажем по kT (световым волнам разумно сопоставить колебательные степени), то общая энергия будет бесконечной при любой конечной температуре. Рассуждение «по аналогии» приводит нас к абсурдному выводу, что вся тепловая энергия стенок (а за ними и всего остального) должна перейти в электромагнитные волны, так что температура всех предметов должна стремиться к абсолютному нулю.

Точные физические измерения говорят, что при каждой температуре тело излучает волны в сравнительно узком интервале спектра. Максимальная энергия излучения сосредоточена вблизи длины волны, которая определяется так называемым законом Вина

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}.$$

Постоянная Вина $b = 0{,}29 \cdot 10^{-2}$ м·К была определена из опыта, но ее происхождение оставалось неясным. Мы увидим дальше, что она связана с постоянной Планка (так же, как и постоянная Стефана — Больцмана).

Закон Вина показывает, что с нагреванием тела максимум спектра смещается в сторону меньших длин волн, т.е. в сторону больших частот (этот закон часто так и называют законом смещения).

Итак, закон Стефана — Больцмана говорит о полной энергии излучения, а закон Вина — о положении максимума в спектре. Другими словами, известно, где спектральная кривая имеет максимум и какова площадь под кривой. Настала очередь обсудить более подробно форму этой кривой.

К началу XX века существовали две формулы, с помощью которых пытались описать форму кривой распределения энергии по спектру. Одну из них предложили два англичанина — это формула Рэлея — Джинса

$$f(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT .$$

Сравнение с опытом показало, что формула Рэлея — Джинса правильно описывает спектр только для самых малых частот (слева от максимума кривой).

Если посмотреть на эту формулу с точки зрения числа степеней свободы, то можно дать ей красивое объяснение. Формула Рэлея — Джинса имеет такой вид, как будто участок спектра $\Delta\nu$ содержит $8\pi\nu^2/c^3$ степеней свободы, на каждую из которых приходится тепловая энергия kT. Однако эта эффектная интерпретация порочна. Число степеней свободы быстро растет, если переходить ко все большим частотам в ультрафиолетовую часть спектра (направо от максимума кривой). Это значит, что чем больше частота, тем больше энергии содержит спектр, т.е. и по этой формуле все тела должны излучать электромагнитные волны с бесконечно большой энергией.

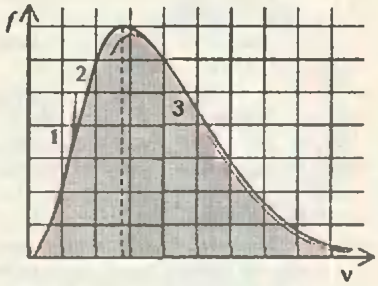
Этот странный вывод носил драматическое название ультрафиолетовой катастрофы, так как демонстрировал полный провал попыток объяснить свойства спектра, оставаясь в рамках понятий классической физики.

Другую формулу предложил уже известный нам Вин:

$$f(\nu) = A\nu^3 e^{-\frac{a\nu}{T}} .$$

(Правда, он писал эту формулу несколько иначе, используя не частоту, а длину волны.) В формуле Вина A и a — некоторые постоянные, связанные, как мы это увидим в дальнейшем, с постоянной Планка. Формула Вина описывала ультрафиолетовую часть спектра, но была беспомощна, когда речь заходила о длинноволновой его части.

Итак, перед работами Планка физики знали уже довольно много: площадь под кривой распределения энергии по спектру, положение максимума и форму кривой в «начале» и в «конце». Оставалось сделать последний смелый шаг. Он-то и привел к рождению новой физики.



Распределение энергии по спектру черного тела. 1 — кривая, соответствующая формуле Рэлея — Джинса; 2 — графическое изображение формулы Планка; 3 — кривая, которую дает формула Вина.

Формула Планка

Сейчас трудно восстанавливать ход мыслей физиков, живших много лет тому назад. По-видимому, Планк просто искал какую-нибудь формулу, которая объединила бы вместе все, что было известно о спектре черного тела. Пробуя разные подходы, он в конце концов пришел к выводу, что надо рассматривать свойства атомов, из которых состоит стенка и которые излучают свет. Гипотеза Планка состояла в том, что излучающие атомы могут иметь не любую энергию, а только энергию, равную целому числу $h\nu$, где ν — частота колебаний атома. Отсюда уже получилось, что атом может излучать свет только квантами (хотя эту связь фактически поняли несколько позже).

Планк записал свою формулу так:

$$f(\nu) = n(\nu)\cdot h\nu ,$$

где $n(\nu)$ — число квантов, равное

$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} ,$$

а $h\nu$ — энергия кванта. Последняя формула может показаться не совсем точной, так как из нее $n(\nu)$ получается не целым. В этом ничего страшного нет, так как формула дает среднее число квантов. Например, если в каком-то объеме половину времени есть один квант, а половину времени квантов нет совсем, то среднее число квантов равно $1/2$.

Формула Планка отличается от формулы Рэлея — Джинса тем, что ее нельзя объяснить с точки зрения степеней свободы. Если считать, что каждый квант имеет три степени свободы, то число степеней свободы системы, равное $3n(\nu)$, оказывается функцией температуры: число степеней свободы растет с повышением температуры. Вывод абсурдный с точки зрения старых представлений о свойствах частиц. Но именно в этом нарушении привычной логики и лежал выход из тупика. Ведь количество излучаемых частиц может и не быть строго определенным числом; оно может изменяться с изменением условий. Это стало особенно ясным, когда было открыто рождение пар: электрон — позитрон, протон — антипротон и т.д.

В тот вечер, когда Планк делал свой доклад, никто не думал о рождении новой физики. На формулу посмотрели с практической стороны и сразу же (в ночь после доклада) сравнили график, даваемый новой формулой, с кривыми, полученными из опыта. Оказалось, что формула Планка хорошо описывает весь спектр.

Для той части спектра, где ν велико, можно вычеркнуть единицу в знаменателе формулы, по которой вычисляется число квантов $n(\nu)$ — эта единица мала по сравнению с первым членом. Тогда формула Планка превратится в формулу Вина. Из сопоставления двух выражений можно заключить, что коэффициенты в формуле Вина равны

$$A = \frac{8\pi h}{c^3} \text{ и } a = \frac{h}{k} .$$

Планк, сравнивая свою формулу с формулой Вина, дал первое значение постоянной h. Он получил, что $h = 6{,}55\cdot10^{-34}$ Дж·с. Даже удивительно, как мало отличается значение h, вычисленное Планком, от современного.

При малых значениях ν в формуле Планка можно произвести следующую замену:

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} \approx 1 + \frac{h\nu}{kT} \text{ (если } \frac{h\nu}{kT} \ll 1\text{)}.$$

Тогда получится в точности формула Рэлея — Джинса. Используя формулу Планка, можно получить и закон Стефана — Больцмана. Постоянная этого закона σ выражается через h формулой

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3}.$$

Явление фотоэффекта

В рассуждениях Планка квант сам по себе не появлялся — речь шла о системах, состоящих из большого числа квантов, для изучения которых применялись методы статистики. Но еще в 1887 году Герцем было открыто явление (изученное подробно Столетовым), в котором квантовые свойства света проявлялись очень четко. Речь идет о фотоэффекте — вылете электронов из куска металла при освещении его светом. На этом эффекте построены многие приборы: телевизор, осциллограф, фотоэкспонометр и т.д.

Фотоэффект обнаруживает закономерность, которая выглядела парадоксальной для физика прошлого века, — энергия электронов, которые вырываются из металла, не зависит от интенсивности света. Если увеличивать интенсивность света, то возрастает число вырванных электронов, энергия же их остается неизменной. Для того чтобы увеличить энергию вылетающих электронов, необходимо увеличить частоту падающего света. Такое поведение совсем непохоже, например, на то, как вылетают электроны из катода радиолампы — чем выше температура катода, тем больше энергия вылетающих электронов. Этот эффект называют термоэмиссией. В нем не замечали ничего парадоксального. А фотоэффект был непонятен.

Сейчас мы знаем, что электрон не может постепенно поглощать и накапливать энергию, как это думали раньше, а может поглощать ее только квантами. Энергия же кванта определяется частотой. Отсюда следовало объяснение фотоэффекта, которое дал Эйнштейн в 1905 году. Все детали теории стали ясны много позднее, когда была создана квантовая теория металлов.

В начале XX века было хорошо известно, что для того чтобы вырвать электрон из металла, надо затратить определенную энергию; она называется работой выхода. Так, для вольфрама эта работа равна примерно 4,6 эВ (1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж), для цезия — около 2 эВ, для платины — около 6 эВ. Остальные металлы имеют промежуточные значения работы выхода. Рассуждения Эйнштейна сводились к следующему. Если частота света такова, что энергия кванта $h\nu$ меньше работы выхода A, то электрон вообще не может быть вырван из металла. Если же энергия кванта больше A, то избыток энергии уходит на кинетическую энергию электрона W. Сказанное можно записать в виде формулы, которая носит имя Эйнштейна:

$$W = h\nu - A.$$

После фотоэффекта квантовый характер поглощения и излучения был открыт в очень многих явлениях. В наиболее общем виде он сформулирован в известном соотношении Нильса Бора: $h\nu = E_{II} - E_I$. Смысл его состоит в том, что если излучающая система переходит из состояния с энергией E_{II} в состояние с энергией E_I, то она излучает квант с энергией $h\nu$. Естественно, что если система, находясь в состоянии с энергией E_I, поглотит квант $h\nu$, то она перейдет из состояния E_I в состояние E_{II}.

Второе рождение кванта

Открытие Планка состояло в том, что он постулировал дискретный (квантовый) характер излучения и поглощения. Однако сам Планк не высказал никаких соображений о том, как же ведет себя испущенное излучение. Лишь Эйнштейн (в упомянутой выше работе) доказал, что из гипотезы Планка и теории относительности следует реальное существование кванта, т.е. что свет не только поглощается или излучается квантами, но что он сам состоит из квантов.

Излучая квант, тело теряет свою энергию, которая передается свету. Значит, свет, согласно теории относительности, уносит и массу тела.

Массу кванта можно получить, скомбинировав две формулы: $E = h\nu$ и $E = mc^2$. Из них

$$m = \frac{h\nu}{c^2}.$$

Лучше говорить, как это принято, что квант имеет импульс $p = mc$, т.е.

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Импульс, конечно, вектор: он направлен туда, куда летит квант. Энергия кванта связана с его импульсом соотношением $E = cp$. Таким соотношением описываются частицы, у которых равна нулю масса покоя. Если масса покоя $m_0 \neq 0$, то энергия и импульс частицы связаны в теории относительности формулой $E = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}$.

Благодаря Эйнштейну квант стал в один ряд с частицами; только он не имеет массы покоя, а потому обречен всегда летать со скоростью света.

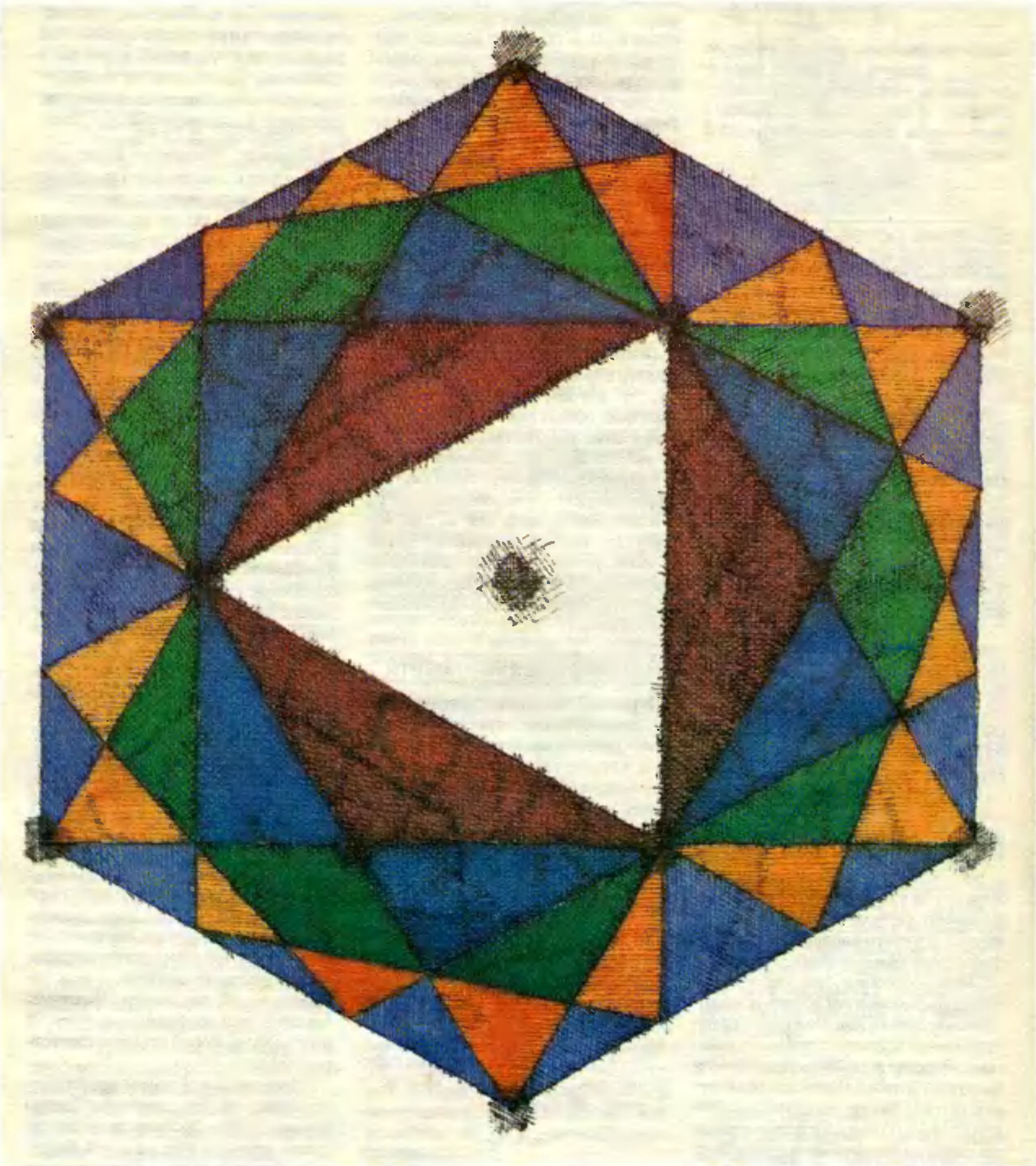
Комптон-эффект

Во всем предыдущем оставался еще один пункт, не проверенный опытом. Если квант обладает энергией и импульсом, то выполняются ли для него законы сохранения энергии и импульса так же, как для других частиц? И хотя в положительном ответе на этот вопрос никто не сомневался, все же прямая экспериментальная проверка законов сохранения была бы очень полезной. Такая проверка была осуществлена в 1925 году Артуром Комптоном, который изучал, как рассеиваются кванты света, когда они падают на покоящийся электрон. Комптон обнаружил, во-первых, что электрон испытывает отдачу, т.е. электрон получает от кванта импульс, а во-вторых, что квант теряет энергию и его частота уменьшается. Качественно картина была похожей на столкновение частиц. Но Комптон показал и больше — что энергия и импульс электрона и кванта в конце соударения как раз такие, какие получаются из уравнений, описывающих законы сохранения.

Заключение

Таким образом, начав с изучения световых волн, физики постепенно пришли к механике квантов, очень напоминающей механику Ньютона, только с теми обобщениями, которые принесла с собой теория относительности.

Рождение новой науки всегда происходило так, что в ней причудливо переплетались разные, в прошлом далеко стоящие друг от друга факты и выявлялись связи, не замечаемые ранее. Термодинамика, кинетическая теория газов, электродинамика, оптика и, наконец, теория относительности — вот тот фундамент, на котором из формулы Планка выросло здание современной физики.



Решетки и зоны Бриллюэна

А. ГОНЧАРОВ

В ЭТОЙ статье мы познакомим читателей с некоторыми красивыми фактами из геометрии решеток. Наиболее приятной частью нашего рассказа будут картинки. Если в них как следует разобраться, сразу становятся ясными все конструкции и основные идеи доказательств.

Сразу же заметим, что задачи, о которых пойдет речь, возникли не случайно, а пришли из физики кристаллов. В конце статьи мы поговорим об этом подробнее.

А пока начнем с того, что отметим на плоскости все точки с целочисленными координатами — узлы квадратной решетки, и среди них выделим один «начальный» узел O. Для каждого из остальных узлов P проведем прямую, относительно которой узлы O и P симметричны, — серединный перпендикуляр к отрезку OP. Проведенные прямые разбивают плоскость на части — выпуклые многоугольники. Припишем каждой из них натуральное число — *ранг* — по следующему правилу: часть, содержащая точку O (она имеет форму квадрата), получает *ранг 1*, части, граничащие с ней по стороне, — *ранг 2*, части, граничащие с ними по стороне (и отличные от уже рассмотренных), — *ранг 3* и т.д.

Возьмите теперь лист клетчатой бумаги и разбейте его на квадраты 2×2 (так удобнее — на исходной решетке тесновато). Выберите один из узлов O этой новой решетки, постройте кусочки, скажем первого, второго, третьего и четвертого рангов, и раскрасьте их в разные цвета (так, чтобы кусочки одного ранга были покрашены одинаково). Очень легко убедиться в том, что суммы площадей одноцветных кусков равны площади квадрата из четырех клеток.

Проделав то же самое с решетками из правильных треугольников (рис. 1) и из 6-угольников (рис. 2), видим, что для малых $r = 1, 2, 3, 4$ суммарные площади одноцветных кусков тоже одинаковы.

Обозначим через $D_r(O)$ объединение всех многоугольников ранга r ($r = 1, 2, 3, \ldots$) для выбранного «центрального» узла O решетки. Оказывается, что вообще *для любой решетки и любого r площадь области $D_r(O)$ одна и та же*.

Повозившись с картинками, можно сделать два наблюдения, подсказывающие идеи двух разных доказательств. С них мы и начнем.

Наблюдение 1. Рассмотрим самую простую квадратную решетку. На рисунке 3 красным цветом выделена область $D_6(O)$; кроме того, жирными черными линиями плоскость разбита на одинаковые квадраты так, что каждый узел Q служит центром одного из квадратов; этот квадрат — обозначим его $D(Q)$ — *получается переносом центрального* квадрата $D(O) = D_1(O)$ на вектор OQ. Если разрезать всю плоскость по жирным линиям на квадраты $D(Q)$ и перенести все квадраты так, чтобы они совместились с центральным $D(O)$, то красные кусочки $D_6(O)$ в точности заполнят квадрат в один слой, не налегая друг на друга (то же самое будет верно для кусочков области $D_r(O)$ при каждом $r = 2, 3, \ldots$; предлагаем это проверить читателям для стольких r, чтобы в этом не осталось сомнений). Отсюда, конечно, сразу будет следовать, что $D_6(O)$ (и $D_r(O)$ при каждом r) имеет ту же площадь, что $D_1(O)$.

Наблюдение 2 проиллюстрируем, отчасти для разнообразия, на примере решетки из вершин правильных шестиугольников, заполняющих плоскость. На рисунке 2 показаны области $D_r(O)$ для $r = 1, 2, \ldots, 6$.

Аналогично можно построить области $D_r(Q)$, приняв за центральный любой другой узел Q решетки. Оказывается, что *все области $D_4(Q)$ для разных Q заполняют плоскость в один слой, не налегая друг на друга.* (То же самое верно для областей $D_r(Q)$ при каждом $r = 1, 2, \ldots$) Таким образом, площадь $D_4(Q)$ (и $D_r(Q)$ при каждом r) — это «средняя» площадь, приходящаяся на один узел. Что это такое, мы уточним ниже, а пока сформулируем лемму, которая объясняет оба наблюдения.

Ключевая лемма. *Область $D_r(O)$ состоит из тех точек M плоскости, для которых узел O является r-м по удаленности от точки M.*

Разберем сначала случай $r = 1$. Заметим, что перпендикуляр, проведенный к отрезку PO в его середине, делит плоскость на две полуплоскости так, что точки M в одной из них (содержащей O) ближе к O, чем к P, в другой — наоборот. Область $D(O) = D_1(O)$ — пересечение таких (содержащих O) полуплоскостей для всевозможных узлов P, отличных от O. Поэтому $D(O)$ состоит из точек M, для которых узел O ближе всех других узлов P.

Пусть теперь M — точка ранга $r > 1$ (по отношению к центру O). Из определения ранга, данного в условии, следует, что, двигаясь по некоторому пути от точки M к O, мы пересечем

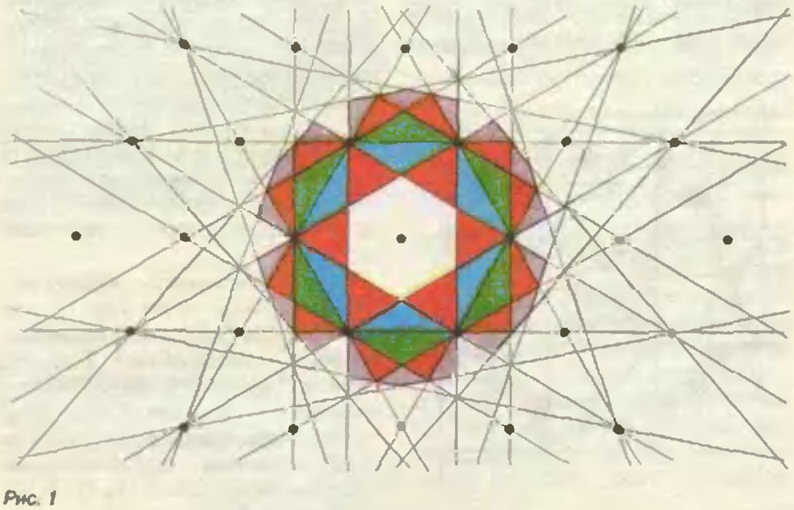


Рис. 1

Эта статья была опубликована в «Кванте» №6 за 1984 год.

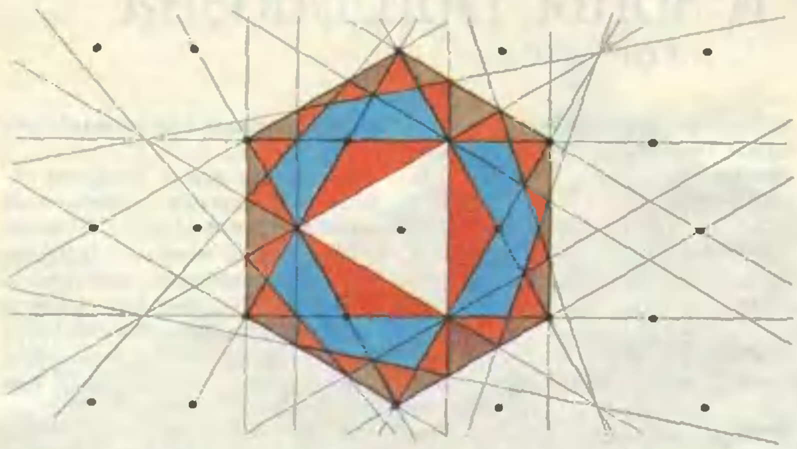


Рис. 2

ровно $r-1$ проведенных прямых — серединных перпендикуляров некоторых отрезков $OP_1, OP_2, \ldots, OP_{r-1}$. Этот путь можно построить так: сначала мы идем по прямолинейному отрезку от точки M до любой пограничной точки областей $D_r(O)$ и $D_{r-1}(O)$, затем — по другому отрезку до пограничной точки областей $D_{r-1}(O)$ и $D_{r-2}(O)$ и т.д. Дойдя до области $D_1(O)=D(O)$, мы по прямолинейному отрезку идем в точку O. Это означает, что имеется $r-1$ узлов $P_1, \ldots, P_{r-1}$, к которым M ближе, чем к O. Лемма доказана.

Теперь применим лемму для анализа наших наблюдений.

1°. Пусть решетка такова, что при переносе на вектор $\vec{OQ}$, где O и Q — любые ее узлы, вся решетка совмещается с собой. (Этому условию удовлетворяют квадратная решетка, «треугольная» решетка на рисунке 1 и вообще любая решетка из концов векторов $m\cdot\vec{OA}+n\cdot\vec{OB}$, где OAB — фиксированный треугольник, а m и n — произвольные целые числа.) Будем ниже «переносами» называть лишь параллельные переносы на векторы $\vec{OQ}$. Докажем, что для любой внутренней точки M «области Дирихле» $D(O)$ найдется перенос T такой, что $T(M)\in D_r(O)$, причем если $T(M)$ лежит внутри области $D_r(O)$, то существует ровно один такой перенос T. Другими словами, область $D(O)$ разбивается на куски, при переносах T которых составляется область $D_r(O)$. Пусть M — такая точка, что r-м по удаленности от нее узлом является Q. По ключевой лемме $M\in D(O)\cap D_r(Q)$, и поэтому при переносе T на вектор $\vec{OQ}$ мы получим, что $T(M)\in D_r(O)$. Перенос T определен однозначно, если не существует узла решетки X, для которого $MQ=MX$. Легко видеть, что этому условию удовлетворяют все точки внутренности $D(O)$, которые лежат вне конечного числа отрезков. Эти отрезки — в точности те линии, по которым надо разрезать $D(O)$, чтобы из полученных кусочков сложить $D_r(O)$.

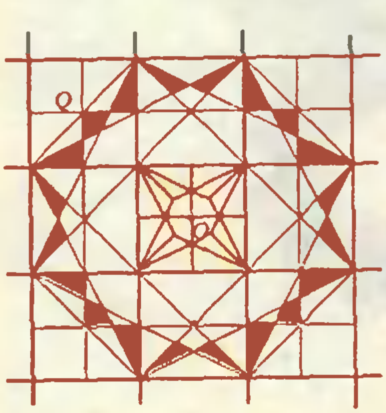


Рис. 3

2°. Пусть решетка такова, что для любых узлов P и Q можно указать некоторое самосовмещение решетки, переводящее P в Q (в отличие от 1°, это может быть и поворот, а не только перенос).

По ключевой лемме для каждой точки M есть лишь один узел Q, для которого $M\in D_r(Q)$ — это r-й по удаленности от точки M узел. Ясно, что области $D_r(Q)$ для разных Q пересекаются лишь по границам. Наложенные условия показывают, что все области $D_r(Q)$ одинаковы — при совмещении решетки, переводящем Q в O, $D_r(Q)$ переходит в $D_r(O)$.

Объясним теперь, почему отсюда следует, что $D_r(Q)$ равновелики для разных r. Назовем для данной решетки «плотностью» следующий предел: $\alpha=\lim\frac{K(N)}{N^2}$, где $K(N)$ — число узлов, лежавших в квадрате размером $N\times N$ с центром O. Докажем, что $\alpha=\frac{1}{S_r}$ (S_r — площадь области $D_r(Q)$) для каждого r. Пусть L_r — наибольшее расстояние точек области $D_r(O)$ от O, $N>L_r$. Тогда для всех $K(N)$ узлов Q квадрата $N\times N$ объединение областей $D_r(Q)$ покрывает квадрат $(N-L_r)\times(N-L_r)$ и содержится в квадрате $(N+L_r)\times(N+L_r)$, поэтому

$$\left(1-\frac{L_r}{N^2}\right)^2=\frac{(N-L_R)^2}{N^2}\le$$

$$\le\frac{S_r\cdot K(N)}{N^2}\le\frac{(N+L_r)^2}{N^2}=\left(1+\frac{L_r}{N}\right)^2.$$

При $N\to\infty$ правая и левая части сколь угодно близки к 1, поэтому существует предел $\lim\limits_{N\to\infty}=\frac{S_r\cdot K(N)}{N^2}=1$, так что $\alpha=\frac{1}{S_r}$; величина $\frac{1}{\alpha}$ — это и есть «средняя площадь на один узел», в частности, площадь S_1 области $D(O)$ тоже равна $\frac{1}{\alpha}$.

Замечание. На тех же идеях основано доказательство знаменитой леммы Минковского о выпуклом теле, имеющей много неожиданных приложений в теории чисел.

Лемма Минковского. *Пусть C — выпуклая центрально-симметричная фигура с центром в узле O решетки. Тогда если отношение площадей C и $D_1(O)$ больше 4, то внутри C есть узел решетки, отличный от O.*

Набросок доказательства. Сначала доказываем, что существуют узлы решетки P и Q такие, что если сдвинуть фигуру $\frac{1}{2}C$ на векторы $\vec{OP}$ и $\vec{OQ}$, то полученные области будут иметь общую точку X (эта часть абсолютно аналогична проведенному выше рассуждению). Обозначим через Y и Z точки, полученные из точки X сдвигами на векторы $\vec{PO}$ и $\vec{QO}$. Эти точки лежат в области $\frac{1}{2}C$. Далее, $\vec{OY}-\vec{OZ}=\vec{OP}-\vec{OQ}$, так что точка A, являющаяся концом вектора $\vec{OY}-\vec{OZ}$ — узел решетки. Заметим, что из выпуклости и центральной симметрии фигуры C следует, что конец вектора $\vec{OY}-\vec{OZ}=\frac{1}{2}\left(\vec{OY}+2\left(-\vec{OZ}\right)\right)$ лежит в C.

Ясно, что рассуждения 1° и 2° вполне применимы к пространственным решеткам: для них речь будет идти о «серединных плоскостях» к парам

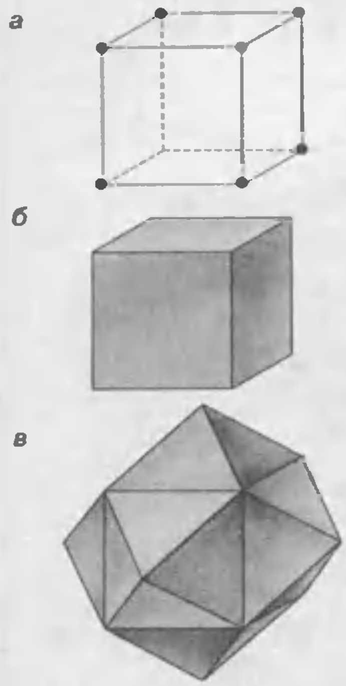


Рис. 4

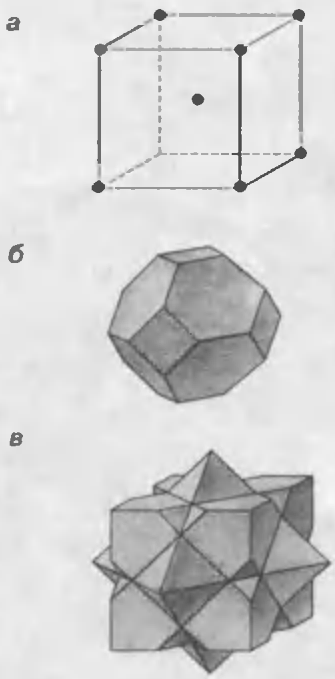


Рис. 5

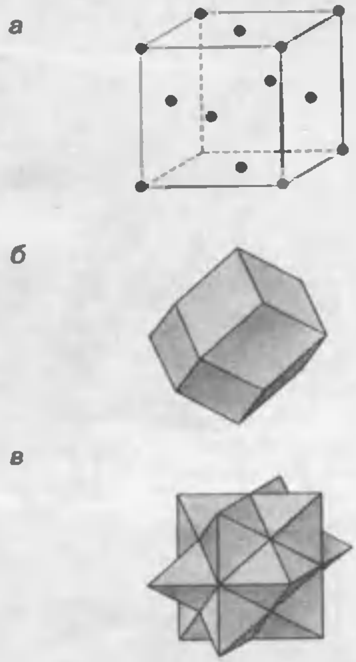


Рис. 6

узлов O, P и об объемах соответствующих «ячеек» $D_1(O)$ и $D_r(O)$. На рисунках 4,*а* – 6,*а* представлены три наиболее популярные решетки — простая кубическая, объемно-центрированная кубическая и гране-центрированная кубическая. Соответствующие им области $D(O)$ и $D_2(O)$ приведены на рисунках 4, *б* – 6, *б* и 4, *в* – 6, *в*. Многогранники на рисунках 4, *в* и 5, *б* называются ромбододекаэдрами, а многогранник на рисунке 6, *б* — *усеченным октаэдром*.

Геометрические конструкции, которые были в центре нашего сюжета, играют важную роль в физике твердого тела. Области $D_r(O)$ известны в физике кристаллов под названием *зон Бриллюэна*, по имени французского ученого Леона Бриллюэна, который в начале 30-х годов детально исследовал квантовые законы движения электронов в кристалле. В нескольких словах это можно пояснить так.

Свойства электропроводности кристалла в основном зависят от наличия «энергетических щелей» — интервалов, в которые не попадают возможные значения энергии электронов. Для свободного электрона (не взаимодействующего с кристаллом) график зависимости энергии от импульса — парабола (кинетическая энергия пропорциональна квадрату скорости, рис.7,*а*). Если же электрон взаимодействует с ионами кристаллической решетки, то в графике зависимости энергии от импульса при некоторых значениях импульса появляются разрывы. Для «одномерного» кристалла график будет выглядеть примерно так, как показано на рисунке 7, *б*. Для «двумерного» и реального — «трехмерного» — кристалла импульс $\vec p$ — вектор. Условившись откладывать эти векторы $\vec p$ от одной точки O — начала координат, мы получим (двумерное или трехмерное) пространство, точкам которого соответствуют значения импульсов — так называемое *импульсное пространство*. Заданной решетке A атомов в обычном пространстве естественным образом ставится в соответствие некоторая «двойственная» по отношению к A решетка P в импульсном пространстве (физики обычно называют ее *обратной решеткой*). При подходящем выборе масштаба в импульсном пространстве она задается так: вектор $\vec p$ принадлежит P, если скалярное произведение $\vec a \vec p$ — целое число для всех векторов $\vec a$, соединяющих две точки решетки A.

Упражнение. а) Объясните, почему концы P таких векторов $\vec p = \overrightarrow{OP}$ образуют решетку. б) Нарисуйте двойственные решетки P для решеток A, изображенных на рисунках 1, 2, 3.

Оказывается, что разрывы энергии (как функции на импульсном пространстве) возникают как раз на плоскостях, являющихся серединными перпендикулярами отрезков OP, где P — точки двойственной решетки. Физический смысл имеет также параллельный перенос всех кусочков зоны Бриллюэна $D_r(O)$ r-го ранга в основную зону $D_1(O)$.

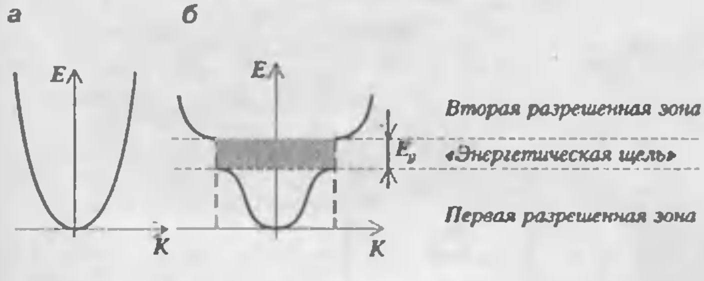


Рис. 7


N=10⁶
0→1
Б.З.

Рассмотрим бесконечную десятичную дробь

С.ГИНДИКИН

Никто не обнимет необъятного.
Иные настойчиво утверждают, что жизнь каждого записана в книге Бытия.

Козьма Прутков

Так как мы сами конечны, то можем оперировать только с конечными предметами.
Человек, каким бы он ни был болтуном, никогда в своей жизни не произнесет более миллиарда слов.

Анри Пуанкаре

«Вещественными числами называются бесконечные десятичные дроби»[1]. Дав такое определение, мы начинаем время от времени произносить фразу, стоящую в заглавии статьи. А что она означает? Не противоречим ли мы, намереваясь рассмотреть бесконечную десятичную дробь, житейской мудрости Козьмы Пруткова или аналогичному высказыванию великого французского математика А.Пуанкаре, фигурирующим в качестве эпиграфов к статье? Конечную десятичную дробь можно «рассмотреть», например, написав ее на доске и посмотрев на написанное. В случае же бесконечной дроби мы, разумеется, лишены такой возможности. Этому в разной степени препятствуют ограниченность размеров классной доски, человеческой жизни, нашей Галактики и т.д. Однако договоримся, что в этой статье мы будем ориентироваться на мифического великана, которому все эти ограничения нипочем и любые конечные рассмотрения под силу.

С другой стороны, нетрудно понять, что бесконечность десятичной дроби еще не обязательно означает ее «необъятность». Так, при изучении рациональных чисел иногда используется их представление в виде бесконечных периодических десятичных дробей, а для задания последних достаточно указать конечное число десятичных знаков, предшествующих периоду, и сам период (тоже конечное число цифр). В результате можно рассматривать такие дроби, не вступая в противоречие с нашей «конечностью». Арифметическая и геометрическая прогрессии (бесконечные последовательности!) определяются по двум числам (первый член и разность или знаменатель). Вы наверняка знаете и другие примеры бесконечных последовательностей, задание которых требует лишь конечной информации (например, формулы общего члена). Все это наводит на мысль, что криминальность с точки зрения Козьмы Пруткова фразы, приведенной в заглавии, не столь безусловна, а поэтому требует более тщательного исследования, к которому мы и переходим.

Итак, мы знаем, что существуют бесконечные десятичные дроби, допускающие конечное описание. Договоримся называть бесконечную десятичную дробь «объятной», если существует ее «словесный портрет» — конечных размеров описание на русском языке, ее однозначно задающее (т.е. этому описанию удовлетворяет только одна дробь). Если «словесного портрета» дроби не существует, то дробь называется «необъятной». Наша цель — доказать существование «необъятных» дробей.

Ограничимся лишь дробями, заключенными между 0 и 1, т.е. выражениями вида

$$0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots, \qquad (1)$$

где α_k, $1 \le k < \infty$ — какие-то цифры 0, 1, ..., 8, 9. В теории вещественных чисел доставляет много хлопот тот факт, что всякая дробь с «хвостом» из девяток (все знаки, начиная с некоторого места, равны 9) равна некоторой дроби с «хвостом» из нулей (например, 0,099... = =0,100...). Чтобы их избежать, не будем рассматривать дроби, в записи которых встречается девятка. Итак, мы будем рассматривать дроби вида (1), т.е. последовательности цифр $0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots$, где α_k могут быть равны 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Мы докажем, что даже среди таких дробей есть «необъятные».

Впрочем, проницательный читатель безусловно обратит внимание при чтении дальнейшего текста, что все рассмотрения были бы столь же содержательны, если бы мы ограничились только двумя цифрами, например 0 и 1.

Как можно это доказать?

Рассмотрим вначале аналогичную ситуацию, относящуюся, правда, к конечным множествам (для лучшего понимания опишем ее в шутливой форме). Директору кинотеатра стало известно, что на сеансе присутствовало сто зрителей, а касса продала девяносто билетов. Вы, вероятно, не удивитесь, что из сопоставления этих двух фактов он сделал вывод, что в зале находились безбилетники. Он просто заметил, что зрителей больше, чем билетов, и на всех зрителей билетов хватить не могло. Обратите внимание, что это рассуждение дает возможность лишь доказать существование безбилетного зрителя, а выявление конкретного «зайца» требует дополнительных исследований (на-

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 9 за 1970 год.

[1] *Читателю не обязательно знать заранее, что такое бесконечная десятичная дробь.*

пример, проверки билетов при выходе).

В семидесятых годах прошлого века Г. Кантор[2] придумал замечательный способ проводить аналогичные рассуждения для бесконечных множеств. Этим способом мы и воспользуемся.

Интересующий нас результат получается из сопоставления двух фактов.

Факт первый. «Объятные» дроби можно перенумеровать, т.е. присвоить каждой некоторый номер (натуральное число) так, что разные дроби получат разные номера, а каждое натуральное число будет номером некоторой дроби.

Факт второй. Если нам дан некоторый набор занумерованных дробей, то мы можем построить дробь, которая при этом не получила номера, т.е. все бесконечные дроби занумеровать нельзя.

В результате получается, что, хотя множество «объятных» дробей бесконечно, оно в некотором смысле «меньше», чем множество всех дробей, а поэтому, рассуждая, как директор кинотеатра, мы можем сделать вывод: существует «необъятная» дробь.

Начнем со второго утверждения. Процесс, которым мы воспользуемся, называется диагональным. Нам потребуется следующая таблица замены цифр:

$0 \to 1 \quad 1 \to 2 \quad 2 \to 3 \quad 3 \to 4 \quad 4 \to 5$
$5 \to 6 \quad 6 \to 7 \quad 7 \to 8 \quad 8 \to 0$

Пусть имеется некоторая занумерованная последовательность дробей. Выпишем все дроби сверху вниз в порядке их номеров (просим не смущаться тем, что получится бесконечная таблица). Выделим диагональ (для дроби с номером k берем k-й знак) и, заменив цифры, стоящие на диагонали, на соответствующие по таблице, вынесем их в правый столбец.

Рассмотрим дробь β, у которой десятичными знаками являются элементы этого столбца (занумерованные сверху вниз). Среди знаков β не встретится 9, так как ее нет в таблице замены цифр.

Пример

№	Занумерованные дроби	$\beta = 0,$
1.	0, 1 2 3 4 5 6 7 8 0 1 …	2
2.	0, 2 4 6 1 4 5 3 2 1 4 …	5
3.	0, 1 3 2 4 5 3 1 7 8 2 …	3
4.	0, 0 1 4 6 7 2 7 8 0 1 …	7
5.	0, 4 2 3 1 2 1 4 5 6 0 …	3
6.	0, 5 6 7 2 4 5 8 0 1 2 …	6
7.	0, 2 4 3 5 6 7 8 0 2 4 …	0
8.	0, 7 5 4 6 2 1 2 0 1 2 …	1
9.	0, 8 0 8 0 1 0 2 2 2 2 …	3

. . . .

$$\beta = 0{,}253736013\ldots$$

Задача 1. Докажите, что построенная дробь β не входит в исходную последовательность.

Итак, второй факт доказан, перейдем к первому.

Сначала обсудим поучительную историю об универсальной библиотеке. Сколько томов должна содержать библиотека, включающая всевозможные книги, которые когда-либо были написаны, пишутся сейчас или будут написаны в будущем? Как правило, человека, впервые услышавшего этот вопрос, удивляет, что такая универсальная библиотека состоит из конечного числа книг (ср. второй афоризм К. Пруткова). Кажется, все это противоречит нашим представлениям о безграничном прогрессе человечества... Но обратимся к выкладкам. Будем считать, что все книги состоят из 500 страниц (иначе будем разбивать их на тома) и что каждая страница состоит из 40 строк по 50 знаков в каждой. Теперь обсудим вопрос о полиграфической базе. Будем интересоваться книгами на русском языке. Для набора потребуются как знаки (литеры), отвечающие буквам, знакам препинания, так и некоторые знаки для набора специальных текстов (впрочем, если не экономить места, можно заменить формулы, таблицы и т.д. их словесными описаниями). Так или иначе, будем считать, что достаточно ста литер. Нам удобно ввести специальный знак пробела между словами. Набирая этот знак достаточно много раз подряд, можно устраивать сколь угодно длинные пробелы (в частности, благодаря этому в число пятисотстраничных книг можно включить книги, состоящие из меньшего числа непустых страниц). В результате книгу можно представить себе как последовательность из $50 \times 40 \times 500 = 10^6$ знаков, каждый из которых может быть одним из 100 знаков наборной азбуки (литер), т.е. как одно слово из миллиона букв в языке, алфавит которого состоит из 100 букв. Обратите внимание, что это сведение стало возможным благодаря введению знака пробела, иначе последовательность знаков могла бы не определять книгу однозначно (ее можно по-разному разбить на слова).

Задача 2. Докажите, что число разных слов[3] длины n в языке, алфавит которого состоит из k букв, равно k^n.

Совет. Вначале рассмотрите пример нашей десятичной системы счисления: различных чисел из n цифр существует 10^n (от 000...0 до 999...9).

Из задачи 2 следует, что число томов универсальной библиотеки записывается «всего лишь» единицей с двумя миллионами нулей. В число этих томов войдут все вершины мудрости, в том числе и не постигнутые человечеством, но большинство книг будет содержать бессмысленные тексты. Будет книга, состоящая из одних букв «а» (впрочем, будет и книга из одних точек, будет и «пустая» книга, сплошь состоящая из знаков пробела).

Теперь договоримся оформлять «словесный портрет» десятичной дроби в виде книги. Будут ли содержаться эти книги в универсальной библиотеке? Вообще говоря, нет. Дело в том, что, говоря об универсальной библиотеке, мы исходили все-таки из предположения, что книги имеют размеры, реальные с точки зрения нашей житейской практики. Однако, если отказаться от реалистичности в этом ее последнем пристанище (а помните, мы ориентируемся на гиганта, которому она не присуща), нельзя исключить того, что некоторые «словесные портреты» могут занимать книги, превышающие по размеру книги из универсальной библиотеки. В связи с этим введем понятие ультрауниверсальной библиотеки. Так мы будем называть библиотеку, содержащую *все* книги сколь угодно больших размеров. Назовем размером книги число знаков в ней. Договоримся расставлять книги по следующему прин-

---

[2] *Г. Кантор (1845 – 1918) — создатель теории бесконечных множеств.*

[3] *Слово — это просто конечная последовательность букв. Мы не интересуемся вопросом его осмысленности.*

ципу: на полке с номером N будут находиться все книги размера N. В частности, вся универсальная библиотека скромно займет одну полку с номером $N = 10^6$. Итак, ультрауниверсальная библиотека будет состоять уже из бесконечного числа томов: в ней бесконечное число полок. Однако на каждой полке будет стоять конечное число книг. Из задачи 2 видно, что на полке с номером N находится 100^N книг. А отсюда следует, что все книги можно перенумеровать!

Проведем инвентаризацию следующим образом. Предварительно фиксируем порядок книг на полках ультраунниверсальной библиотеки. Для этого вначале укажем порядок букв в нашем алфавите (их ведь конечное число — 100), а затем расставим книги в так называемом лексикографическом порядке, принятом в словарях (из двух слов-книг раньше идет то, у которого номер первой буквы меньше; если первые буквы совпадают, то сравниваются вторые буквы слова и т.д.). Расставив книги на полках, начнем нумеровать их с первой полки (на ней стоят книги, состоящие из одной буквы!). Закончив нумеровать очередную полку, переходим к следующей. Поскольку число книг на каждой полке конечно, каждая книга рано или поздно получит номер. Инвентаризация проведена! Теперь заметим, что в ультрауниверсальной библиотеке содержатся словесные портреты всех «объятных» десятичных дробей, а поэтому, двигаясь по нумерации книг в библиотеке, мы можем пронумеровать все эти портреты, а значит, и «объятные» дроби (нужно помнить, что у одной дроби может быть несколько «словесных портретов», и следить, не присвоен ли этой дроби уже какой-то номер ранее; впрочем, не страшно, если одну дробь мы занумеруем несколько раз).

Существование «необъятных» дробей доказано.

Для тех, кто читал книгу Н.Я. Виленкина «Рассказы о множествах», интерпретируем полученный результат несколько иначе. Помните, как телеграф необыкновенной гостиницы, обнаруженной Йоном Тихим, передавал телеграммы, состоящие из бесконечной последовательности точек и тире? Представьте себе, что на другом телеграфе, принимающем эти телеграммы, захотели придумать такой способ их расшифровки, чтобы каждой бесконечной телеграмме отвечало конечное слово в каком-то алфавите. Мы доказали, что такого способа не существует (слова всегда можно занумеровать, а телеграммы — нет). Можно сказать еще, что не существует способа дать всем точкам единичного отрезка различные имена (конечные).

Мы доказали, что «необъятные» дроби существуют, но, подобно вышеупомянутому директору кинотеатра, не в состоянии предъявить конкретную «необъятную» дробь. А что, если попробовать? Воспользуемся однажды выручившим нас диагональным процессом. Ведь мы ввели порядок книг в библиотеке, а значит, стала фиксированной нумерация «объятных» дробей. Используя факт 2, построим незанумерованную бесконечную десятичную дробь β.

Итак, мы превзошли директора кинотеатра, предъявив конкретную «необъятную» дробь. Но что же получилось? Для «необъятной» дроби по определению не должно существовать конечного описания, а для «необъятной» дроби β такое описание построено; им является предыдущий текст этой статьи (ведь вы не сомневаетесь, что он конечен?). Не предъявлен только занумерованный алфавит, но и в этом сомневаться не приходится. Выходит, мы пришли к противоречию? Приятно прийти к противоречию, если перед этим предположили противное тому, что требуется доказать. Но, как вы, вероятно, помните, мы такого предположения не делали. Как же быть?

Единственный вывод, который можно сделать, состоит в том, что использовавшееся нами понятие «объятной» дроби, как дроби, допускающей конечное описание, является некорректным и привело к противоречию. Для подкрепления уверенности в этом приведем еще один пример. Он будет касаться уже не бесконечных дробей, а натуральных чисел. Каждое такое число можно описать конечным текстом (например, назвав его), так что о «необъятности» говорить не приходится.

Однако найдутся числа, описаний которых нет в нашей универсальной библиотеке, т.е. такие числа, для которых не существует описания на русском языке, содержащего не более миллиона знаков. Последнее следует из того, что число томов в универсальной библиотеке конечно. Среди натуральных чисел, не получивших описания, существует наименьшее. Мы доказали следующее утверждение:

Существует наименьшее натуральное число, которое нельзя задать текстом на русском языке, содержащим не более одного миллиона знаков.

Выделенная фраза содержит сто тридцать пять знаков. Но ведь сто тридцать пять меньше миллиона, а поэтому нас можно поздравить еще с одним противоречием: приведенная фраза однозначно описывает упомянутое число!

Настало время критиковать понятие «словесный портрет». Как вы думаете, можно ли считать описаниями такие фразы:

« α — бесконечная десятичная дробь, знаки которой с номерами, делящимися на число шагов, сделанных Наполеоном в день битвы при Ватерлоо, совпадают с соответствующими знаками числа π, а остальные знаки равны нулю».

«Для определения k-го знака дроби δ нужно сосчитать число голов, забитых во всех футбольных матчах, сыгранных в k-м году новой эры (отсчет ведется по московскому времени), и взять последнюю цифру».

«Пятый знак дроби γ равен 1, если в записи $\sqrt{2}$ бесконечной десятичной дробью цифра 7 встречается бесконечное число раз, в противном случае он равен 3; все остальные знаки γ равны 2».

Я очень старался придумать абсурдные описания, которые тем не менее определяют единственную бесконечную дробь. Вряд ли мы согласимся принять их за «словесные портреты» дробей. И дело даже не в их абсурдности, важно то, что они не дают фактического описания этих дробей. Мы даже не исключили того, что описание может использовать уже утраченную информацию из прошлого (α), факты из будущего (δ). Кроме того, конечный текст может содержать требование проделать бесконечное число процедур для определения одного-единственного десятичного знака (γ). Все тот же К.Прутков предостерегал от таких ошибок: «Если бы все прошедшее было настоящим, а настоящее продолжало существовать наряду с будущим, кто был бы в состоянии разобраться: где причина и где последствия?»

Главная же неприятность, которая, собственно, и привела нас к противоречию, заключается в том, что «словесный портрет» мог использовать информацию о множестве всех «словесных портретов», в которую он сам должен входить в качестве одного из элементов.

То, что эта ситуация, носящая в логике название «порочного круга», является источником противоречий, известно со времени полулегендарного мудреца Эпименида, жившего в VI веке до н.э., который, будучи критянином (т.е. живя на о. Крит), заявил: «Все критяне — лжецы». Будем для простоты делить всех людей на лжецов, всегда говорящих ложь, и правдивых, всегда говорящих правду, иначе можно погрязнуть в трудностях, связанных с аккуратным определением понятия «лжец». Приведенное высказывание не может быть правдой, так как тогда критянин Эпименид не мог говорить правды. Итак, оно является ложью, а значит, доказывает существование хотя бы одного правдивого критянина. Что же получилось? Из-за того, что один критянин (то, что он был мудрецом, сейчас не важно) изрек мысль, которая к тому же не могла быть правдой, делается вывод о существовании правдивого критянина. Можем ли мы быть действительно уверены в его существовании? Стоит ли после этого говорить, что речь не идет о возможности указать конкретного правдивого критянина?

Было бы еще хуже, если бы Эпименид (как иные утверждают) прямо заявил: «Я лжец» или «Я говорю сейчас ложь». Эти высказывания не могут быть ни правдой, ни ложью. И источник неприятностей здесь в том, что для решения вопроса об истинности высказывании нужно уже знать ответ на этот вопрос (порочный круг!).

Для того чтобы исключить возможность появления порочного круга в «словесных портретах», наложим дополнительное требование эффективности, т.е. потребуем, чтобы «портрет» давал «возможность» явно построить дробь. Точнее, будем считать, что он должен содержать способ (или, как говорят, алгоритм), позволяющий нашему великану с неограниченной памятью, из которой он может пользоваться сколь угодно большими, но конечными частями, за конечные промежутки времени находить последовательные знаки дроби. Великана можно себе мыслить как математическую машину с неограниченной памятью, а описание дроби — конечной программой для вычисления ее последовательных знаков. Мы, разумеется, не дали строгого определения этого великана-машины, и важно, чтобы читатель уяснил себе это. А тогда я прошу его поверить, что такое определение можно дать (отложив это до другой статьи), и, используя интуитивные представления, принять участие в обсуждении некоторых общих принципов.

Теперь будем понимать под «объятной» дробью такую дробь, для вычисления знаков которой существует программа. Посмотрим, что изменилось. Поскольку программы можно издавать в виде книг, они содержатся в ультрауниверсальной библиотеке, а потому

1) *«необъятные» дроби существуют.*

Далее, хотя и наученные горьким опытом, мы не вправе отказаться от попыток научить великана выписывать конкретную «необъятную» дробь. Что же мешает этому? Вычислить номер книги в ультрауниверсальной библиотеке (а также по номеру написать книгу) нам было бы под силу, имей мы достаточную память и время, а значит, этому можно научить великана. *Теперь оставим лишь книги, содержащие программы для вычисления дробей.* Для нахождения k-го знака «необъятной» дроби β берем k-ю по счету программу, вводим ее в машину, ждем, пока она вычислит k-й знак, а затем подключаем программу замены знаков по таблице (это уже совсем легко). Что же, опять противоречие? Посмотрите внимательно, действительно ли мы построили программу? Вы, конечно, обнаружили слабое место: *нужно уметь по книге определять, является ли она программой для вычисления знаков бесконечной десятичной дроби.* А кто это должен делать? Этому надо научить машину. Давайте разберемся. Если бы существовала программа, позволяющая машине отвечать на этот вопрос, то мы бы действительно пришли к противоречию. Значит, такой программы существовать не может. Итак, получен замечательный факт:

2) *не существует конечно описываемого способа или программы (алгоритма) выяснить, является ли данный текст программой (алгоритмом) для вычисления последовательных знаков бесконечной десятичной дроби.*

Вдумайтесь в этот результат! В предположении, что существует корректное определение понятия алгоритма, без всякой дополнительной информации об этом определении, мы указали, как говорят, алгоритмически неразрешимую проблему. Есть много различных способов установить, что некоторые книги не содержат описаний алгоритмов для вычисления десятичных дробей (если, например, они содержат бессмысленный текст или в них речь идет о жизни на Марсе), но универсального рецепта устанавливать за конечное время, содержит ли книга описание такого алгоритма, не существует.

На этом мы закончим обсуждение возможного смысла слов, стоящих в заглавии статьи. Мы немного боимся, что после всего сказанного часть читателей начнет искоренять в своих занятиях математикой «рассмотрения» бесконечных множеств, доставляя неприятности себе и окружающим. Поэтому сделаем еще несколько замечаний, которые мы, к сожалению, не сможем здесь подкрепить аргументами (и ограничимся ссылками на авторитеты). Большинство математиков спокойно «рассматривает» бесконечные множества, вводя в своих рассуждениях небольшие ограничения, обеспечивающие, по их мнению, отсутствие противоречий. При этом, конечно, приходится «рассматривать» объекты, словесные описания которых человечество не смогло бы завершить до конца дней своих. Тем не менее выяснилось, что такого рода «рассмотрения» лежат в самой основе веками строившегося здания математики, от них зависит и его дальнейшая судьба. Хотя ряд математиков с большей или меньшей последовательностью пытался перестраивать математику, исходя из понятий, допускающих конечное описание, и на этом пути было получено много очень содержательных фактов, позволивших на многие вещи взглянуть по-иному, однако претензии на то, что в этих рамках и должно происходить развитие математики, широкой поддержки не получили. «Никто не может изгнать нас из рая, созданного для нас Кантором», — сказал один из величайших математиков Давид Гильберт.

Задачи по математике и физике

По сложившейся традиции в этом номере мы объявляем конкурс на лучшее решение задач из «Задачника «Кванта». Победители конкурса будут награждены грамотами и призами.

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 апреля 1995 года по адресу: 103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1 — 95» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1471» или «Ф1478». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1471 — М1480, Ф1478 — Ф1487

М1471. Лыжник проехал через каждую из n деревень по 2 раза и вернулся в исходную точку. Всегда ли по его лыжне можно проехать так, чтобы в каждой из этих n деревень побывать ровно один раз (возвращаться в исходную точку не обязательно)?

М. Гервер

М1472. При каких натуральных $n > 1$ в таблице

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \ldots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \ldots & n-3 & n-2 \\ & & & \ldots & & \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n & 1 \end{array}$$

можно выбрать n разных чисел в разных строках и разных столбцах?

А. Савин

М1473. Пусть c_n — первая цифра числа 2^n (в десятичной записи). а) Сколько единиц среди первых 1000 членов этой последовательности? б) Докажите, что в последовательности $c_1 = 2$, $c_2 = 4$, $c_3 = 8$, $c_4 = 1$, $c_5 = 3$, ... встретится ровно 57 различных «слов» $c_k c_{k+1} \ldots c_{k+12}$ длины 13.

А. Канель

М1474. На плоскости дан единичный вектор $\overline{v}_1$. Разрешается провести любую прямую и построить (ортогональную) проекцию $\overline{v}_2$ вектора $\overline{v}_1$ на эту прямую, затем точно так же из вектора $\overline{v}_2$ получить $\overline{v}_3$ и т.д. Можно ли добиться того, что вектор $\overline{v}_k$ (при некотором k) будет перпендикулярен $\overline{v}_1$ и при этом иметь длину не менее 0,99?

Б. Гинзбург

М1475. Полоска размерами $1 \times n$ разбита на единичные квадраты. В квадраты записывают числа 1, 2, ..., n. Сначала в один какой-нибудь квадрат пишут число 1, затем число 2 записывают в один из соседних квадратов, затем число 3 — в один из соседних с уже занятыми и т.д. (произвольными являются выбор первого квадрата и выбор соседа на каждом шаге). Сколькими способами это можно проделать?

А. Шень

М1476. Докажите, что не существует различных простых чисел p, q таких, что $2^p + 1$ делится на q, $2^q + 1$ делится на p.

С. Керопян

М1477. Существует ли выпуклый а) пятиугольник, б) n-угольник, от которого можно отрезать подобный ему?

С. Токарев

М1478. Существует ли многочлен $P(x) = x^4 + bx^2 + c$ с положительными коэффициентами такой, что а) уравнение $P(x) = x^2$ не имеет (вещественных) корней, а уравнение $P(P(x)) = x^2$ имеет корни; б) наоборот: уравнение $P(x) = x^2$ имеет корни, а уравнение $P(P(x)) = x^2$ не имеет корней?

В. Сендеров

М1479*. Число 26 можно тремя способами разложить в сумму четырех натуральных чисел так, что все 12 чисел различны:

$$26=1+6+8+11=2+5+9+10=3+4+7+12.$$

Для каждого натурального n обозначим через $K=K(n)$ наибольшее число четверок натуральных чисел, дающих в сумме n и состоящих из $4K$ различных чисел. Докажите, что

$$K(n)=\left[\frac{n-2}{8}\right],$$

где $[x]$ — целая часть числа x.

Л.Курляндчик

М1480*. Назовем *ежом* фигуру, составленную из куба и шести приклеенных к нему (в точности по граням) кубов того же размера. *Кнопкой* назовем фигуру, получающуюся из ежа отбрасыванием одного из кубов (не центрального). Разбейте пространство на а) кнопки, б) ежи. в) *2-ежом* назовем состоящую из 13 одинаковых кубов фигуру, полученную приклеиванием к одному (центральному) кубу по 2 куба в каждом из направлений каждой из трех координатных осей. Разбейте пространство на 2-ежи. г) Придумайте еще фигуры из кубов, на которые можно разбить пространство.

А.Спивак

Ф1478. С высоты $H = 50$ м без начальной скорости отпускают камень. В тот же момент из точки, находящейся прямо под камнем, начинает удирать по горизонтальной плоскости с постоянной скоростью заяц. При какой минимальной скорости зайца расстояние между ним и камнем в процессе движения не будет уменьшаться?

З.Рафаилов

Ф1479. Мячик подбрасывают вверх и измеряют полное время его полета. В каком случае это время окажется больше — при наличии силы трения о воздух, которую можно считать пропорциональной скорости мячика, или в отсутствие силы трения?

А.Черноуцан

Ф1480. Шайба едет по гладкой горизонтальной поверхности и налетает на склеенные между собой две такие же шайбы (рис. 1). Найдите угол разлета шайб после абсолютно упругого соударения. «Прицельное» расстояние равно радиусу шайбы. Трение отсутствует.

Р.Александров

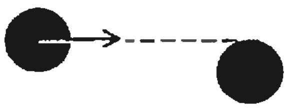


Рис.1

Ф1481. Множество маленьких стальных шариков находятся на гладком дне большой квадратной коробки площадью S. Шарики хаотически двигаются по дну, упруго соударяясь со стенками и друг с другом. Полная кинетическая энергия шариков W, все удары абсолютно упругие. Найдите силу, действующую со стороны шариков на одну из стенок. Какой станет эта сила, если, подвергнув коробку очень медленной деформации, увеличить размеры каждой стороны квадрата в два раза?

З.Рафаилов

Ф1482. На двух легких нерастяжимых нитях, длиной R каждая, подвешена проволочная дуга того же радиуса R, имеющая длину L (рис.2). Найдите период малых колебаний такого маятника, если нити и дуга при движении остаются в вертикальной плоскости.

М.Ермилов

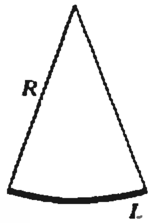


Рис.2

Ф1483. В сосуде объемом $V = 1$ см^3 содержится водяной пар при температуре $t = +100$ °С. Рассмотрим две молекулы пара, находящиеся в разных частях сосуда. Оцените время, в течение которого они столкнутся между собой 100 раз. Воздуха и воды в сосуде нет.

А.Зильберман

Ф1484. Какую скорость нужно сообщить длинному и тонкому копью массой M, равномерно заряженному по длине L положительным зарядом Q, чтобы оно пролетело через два соседних слоя толщиной h, в первом из которых электрическое поле направлено против скорости копья, а во втором — вдоль скорости? Величина напряженности поля в обоих случаях равна E, полная толщина двух слоев меньше длины копья.

О.Савченко

Ф1485. Две большие квадратные непроводящие пластины, площадью S каждая, расположены параллельно на малом расстоянии d друг от друга. Пластины равномерно заряжены по поверхностям зарядами Q и $-Q$. Найдите разность потенциалов между центром и углом одной из пластин.

О.Савченко

Ф1486. В схеме на рисунке 3 амперметр показывает ток 0,1 А, а вольтметр — напряжение 250 В. Что находится в «черном ящике»? Считайте элементы цепи идеальными, а показания приборов — точными. Напряжение сети 220 В, частота сети 50 Гц, индуктивность катушки 1 Гн.

А.Сашин

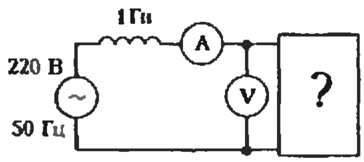


Рис.3

Ф1487. Фотодиод площадью 0,5 мм^2 расположен в фокусе линзы перпендикулярно главной оптической оси. С другой стороны линзы на этой оси находится точечный источник света. Во сколько раз изменится ток фотодиода при смещении источника от расстояния 1 м до расстояния 0,3 м? Диаметр линзы 1 см, фокусное расстояние 5 см. Ток фотодиода пропорционален световому потоку.

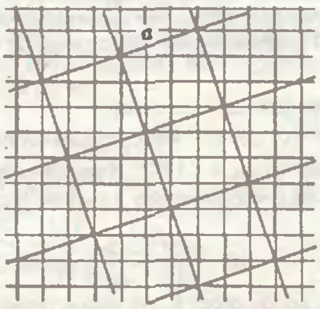
А.Сашин

Решения задач М1441 — М1450, Ф1458 — Ф1467

М1441. *Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика. Докажите, что кузнечики не могут в некоторый момент оказаться в вершинах квадрата большего размера.*

Пусть вначале кузнечики сидят в вершинах квадрата $(0;0)$, $(0;1)$, $(1;1)$, $(1;0)$ на координатной плоскости. Тогда при симметричных отражениях (прыжках) они всегда будут попадать в точки с целочисленными координатами — в точки решетки, порожденной исходным «единичным» квадратом. В самом деле, точка, симметричная (x, y) относительно (a, b), имеет координаты $(2a - x, 2b - y)$.

Заметим теперь, что то же соображение можно использовать, рассматривая последовательность прыжков «с конца»: ведь обратное преобразование к прыжку — точно такой же прыжок. Таким образом, если бы в какой-то момент кузнечики попали в вершины квадрата со стороной $a > 1$, то в предыдущие моменты они должны были бы находиться в точках решетки, порожденной этим квадратом (красная решетка на рисунке). Но вершины



единичного квадрата, конечно, не лежат на такой решетке (хотя бы потому, что расстояние между любыми двумя ее точками не меньше a).

А.Ковальджи

М1442. *Две окружности пересекаются в точках A и B. В точке A к обеим проведены касательные, пересекающие окружности в точках M и N. Прямые BM и BN пересекают окружности еще раз в точках P и Q (P — на прямой BM, Q — на прямой BN). Докажите, что отрезки MP и NQ равны.*

Легко доказать, что треугольники MAP и QAN подобны. Несколько труднее — что они равны. Но и это можно сделать, используя лишь теоремы о величине вписанного угла, о величине угла между касательной и хордой, а также о величине угла между касательной и секущей (он равен полуразности дуг, заключенных между сторонами угла, рис.1).

Пусть величины дуг AB двух кругов (заключенных внутри кругов) равны 2φ и 2ψ (для дуг, лежащих внутри углов MAB и NAB соответственно).

Легко видеть, что $\angle BNA = \angle QNA = \varphi$, а также $\angle MPA = \varphi$ — как в случае, когда точки P и N лежат по одну сторону от прямой AB (рис.2), так и в случае, когда — по разные (рис.3, где $\angle BPA = \pi - \varphi$). Аналогично,

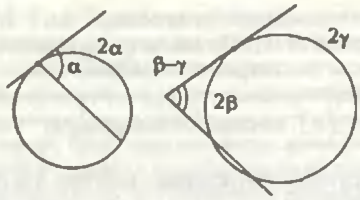


Рис. 1

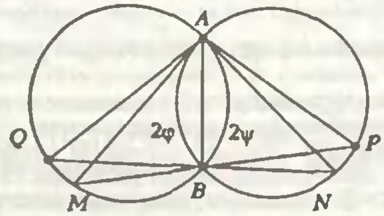


Рис.2

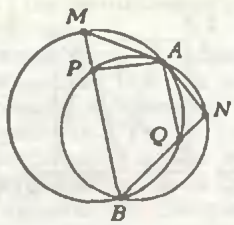


Рис.3

$\angle BMA = \angle PMA = \psi = \angle NQA$. Отсюда следует подобие $\Delta MAP \sim \Delta QAN$.

Докажем, что $AP = AN$. Проверим, что эти хорды стягивают равные дуги. Величина дуги ABN (как и ABM) равна $2\varphi + 2\psi$, т.е. точки A и N делят окружности на дуги $2\varphi + 2\psi$ и $2\pi - 2\varphi - 2\psi$. Дугу AP можно найти, рассмотрев угол $\angle AMB = \varphi$ как угол между касательной и секущей: величина этой дуги, лежащей внутри угла, равна $2\varphi + 2\psi$ на рисунке 2 и $2\pi - 2\varphi - 2\psi$ на рисунке 3, т.е. точки A и P делят окружность на такие же дуги $2\varphi + 2\psi$ и $2\pi - 2\varphi - 2\psi$. Аналогично, $AQ = AM$. Отсюда следует, что $\Delta MAP = \Delta QAN$ и $MP = QN$.

И.Нагель

М1443. *Бесконечная последовательность чисел x_n определяется условиями: $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$, причем $0 \le x_1 \le 1$.*

а) Докажите, что последовательность, начиная с некоторого места, периодическая в том и только в том случае, если x_1 рационально.

б) Сколько существует значений x_1, для которых эта последовательность — периодическая с периодом T (для каждого $T = 2, 3, \ldots$)?

Положим

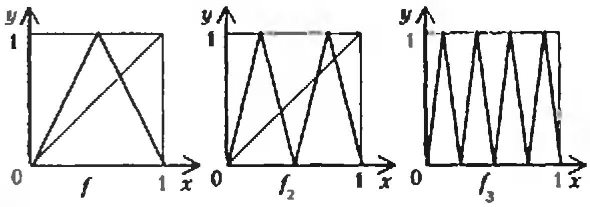
$$f(x) = 1 - |1 - 2x|,\ f_n(x) = \overbrace{f\Big(\big(\ldots(f}^{n\ \text{раз}}(x))\ldots\big)\Big).$$

Пусть x_1 — рациональное число (несократимая дробь вида p/q, где $q = 2^m(2r - 1)$, m и r целые, $m \ge 0$). Тогда $f(x_1)$ — тоже рациональное, причем его знаменатель не больше, чем у x_1 (точнее, он тот же, если $m = 0$, и вдвое меньше, если $m > 0$), причем если $0 \le x_1 < 1$, то $0 \le f(x_1) \le 1$. Точно так же, числа $f_n(x_1)$ будут рациональными, со знаменателем не больше чем у x_1, и лежащими на отрезке [0, 1]. Но таких чисел конечное число, и значит, среди них встретятся одинаковые: $f_n(x_1) = f_{n+T}(x_1)$ при некоторых n и T, так что последовательность $f_n(x_1)$, начиная с некоторого n, — периодическая.

Докажем обратное утверждение. Заметим, что функция $y = f(x)$ на каждом из отрезков $[0, 1/2]$ и $[1/2, 1]$ — линейная:

$$y = 2x \text{ при } 0 \le x \le 1/2,\ y = 2 - 2x \text{ при } 1/2 \le x \le 1.$$

Точно так же, функции $y = f_n(x)$ на каждом из отрезков $\left[k/2^n, (k+1)/2^n\right]$ — линейная (причем $f_n(x) = a_n x + b_n$, где a_n, b_n — целые, $a_n = \pm 2^n$); графики функций $y = f(x)$, $y = f_2(x)$ и $y = f_3(x)$ показаны на рисунке. Поэтому если точка x порождает «периодическую траекторию»: $f_T(x) = x$ при некотором $T \ge 1$, то x — корень уравнения $x = a_T x + b_T$, т.е. число рациональное. Остается еще заметить, что любое y, $0 \le y < 1$, имеет 2^n «прообразов» при отображении $x \to f_n(x)$, т.е. уравнение $f_n(x) = y$ имеет 2^n решений, причем если y — рациональное, то и все эти решения рациональные. Поэтому если $y = f_n(x_1) = f_{n+T}(x_1)$ для некоторого x_1 (т.е. y порождает периодическую траекторию), то и y, и x_1 — рациональны.



Тем самым, оба утверждения пункта а) доказаны. Что касается вопроса б), как он поставлен в условии задачи, — ответ на него очень прост: таких точек бесконечно много для каждого T. В самом деле, существует (для каждого $T = 2, 3, \ldots$) по крайней мере одна точка периода ровно T; это, в частности, «последняя» точка пересечения отрезка $x = y$, $0 \le x < 1$, с графиком $y = f_n(x)$: $x_T^* = 2^T/\left(2^T + 1\right)$. (Ясно, что при $k < T$ все решения уравнения $x = f_k(x)$ меньше x_T^*.) Тогда, взяв в роли x_1 любой из 2^n прообразов x_T^* при отображении $x \to f_n(x)$ (лишь один из них входит в «периодическую траекторию», порождаемую x_T^*), мы получим последовательность, которая, начиная с некоторого места, — периодическая с периодом T.

Более интересный вопрос: сколько существует периодических траекторий каждого периода T (или, что почти то же самое, — точек x, для которых $x = f_T(x)$ и при этом $x \ne f_k(x)$ при $k < T$)? Мы предлагаем читателям подумать над этим и постараемся вернуться к этой теме, получив ваши ответы.

Н.Васильев

М1444. *Существует ли такой многочлен $P(x)$, что у него есть отрицательный коэффициент, а все коэффициенты любой его степени $P^n(x)$, $n>1$, — положительные?*

Ответ: да. Примером может служить многочлен

$$P_\varepsilon(x) = 1 + x - \varepsilon x^2 + x^3 + x^4$$

при достаточно малом положительном ε.

В самом деле, легко проверить, что при $\varepsilon = 0$ коэффициенты $P_0^2(x)$ и $P_0^3(x)$ все — целые положительные числа: эти коэффициенты равны последовательным цифрам чисел $11011^2 = 121242121$ и $11011^3 = 1334996994331$ (многочлены перемножаются «столбиком» так же, как многозначные числа). Коэффициенты $P_\varepsilon^2(x)$ и $P_\varepsilon^3(x)$ при $\varepsilon \to 0$ стремятся к коэффициентам $P_0^2(x)$ и $P_0^3(x)$, и значит, при достаточно малом $\varepsilon < \varepsilon_0$ все они положительны. Но любую степень $P_\varepsilon^n(x)$ можно получить как произведение нескольких $P_\varepsilon^2(x)$ и — при нечетном $n > 3$ — еще одного $P_\varepsilon^3(x)$, так что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ и $n > 1$ коэффициенты $P_\varepsilon^n(x)$ положительны.

О.Крыжановский

М1445. *Найдите наибольшее натуральное число, не оканчивающееся нулем, которое при вычеркивании одной (не первой) цифры уменьшается в целое число раз.*

Ответ: 180625.

Будем искать нужное число x в виде $x = a10^n + b10^{n-1} + c$, где b — вычеркиваемая цифра, a и c — натуральные числа, $c < 10^{n-1}$. В результате вычеркивания цифры b получается число $y = a10^{n-1} + c$. По условию

$$\frac{x}{y} = \frac{a10^n + b10^{n-1} + c}{a10^{n-1} + c} = 10 + \frac{b10^{n-1} - 9c}{a10^{n-1} + c}$$ — целое. Обозначим последнюю дробь через k: это целое число

$$k = \frac{b10^{n-1} - 9c}{a10^{n-1} + c}. \qquad (1)$$

Оценим его сверху и снизу:

$$k \le b/a \le 9/a,$$

$$k \ge -9c/\left(a10^{n-1} + c\right) > -9 \cdot 10^{n-1}/a10^{n-1} \ge -9/a.$$

Отсюда получаем, поскольку k целое (и цифра b не первая), что $1 \le a \le 9$ и что $k = x/y - 10$ заключено между -8 и 9, так что $2 \le x/y = k + 10 \le 19$.

Перепишем (1) в виде $(b - ak)10^{n-1} = (k+9)c$.

Число c по условию не оканчивается нулями, следовательно, разложение c на простые множители либо не содержит двоек, либо не содержит пятерок. Рассмотрим сначала случай, когда c не содержит пятерок. Поскольку нас интересует максимально возможное n, начнем перебор с таких k, при которых $k + 9$ содержит двойку в максимальной степени, т.е. с $k = 7$; тогда $9 + k = 16 = 2^4$. Поскольку $b - ka$ должно быть положительно, $a = 1$; b должно быть равно 8 или 9, $n = 5$. Если $b = 8$, то получаем число 180625. Для него выполняется условие задачи; не доказано только, что оно максимально. При $k = 7$ нужно проверить еще только одну возможность: $b = 9$. Но в этом случае получаем число 191250, которое заканчивается нулем и потому не годится.

Итак, при $k = 7$ имеем вариант ответа; проверим, нет ли другого варианта.

Если по-прежнему c не делится на 2, то при всяком другом k степень n получится меньше, чем 5, и мы не получим максимального числа. Пусть теперь c не делится на 5. Тогда $k + 9$ делится на 5. Но (при допустимых значениях k) $k + 9$ содержит 5 только в первой степени, поэтому n не больше двух, и мы заведомо не получим максимального ответа.

А. Галочкин, Н. Константинов

М1446. *Из выпуклого многогранника с 9 вершинами, одна из которых A, параллельными переносами, переводящими A в каждую из остальных вершин, образуется 8 равных ему многогранников. Докажите, что хотя бы два из этих 8 многогранников пересекаются (по внутренним точкам).*

Пусть V — объем данного девятивершинника M. Обозначим через M^* многогранник, получаемый из M гомотетией с центром в точке A и коэффициентом +2. Его объем равен $8V$.

Легко показать, что M^* содержит M и все 8 многогранников, получаемых из M параллельными переносами (сдвигами), о которых говорится в условии. В самом деле, пусть X — любая точка M, T — перенос, переводящий A в вершину $T(A)=B$; K — середина отрезка между A и $T(X)$. Тогда K — середина отрезка XB (рис.1) и принадлежит M, поскольку многогранник M выпуклый. Поэтому $T(X) \in M^*$.

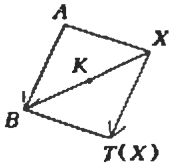


Рис. 1

Рис. 2

Объем каждого из 8 «сдвинутых» многогранников $T(M)$ равен V, и поскольку все они лежат в M^*, то какие-то два из них должны пересекаться; остается только доказать, что они не могут заполнить M^* целиком — а именно, что некоторую окрестность вершины A они не покрывают.

Для этого достаточно доказать, что при сдвиге T, переводящем A в вершину B, точка A не принадлежит $T(M)$. Предположим противное: пусть $T(Y) = A$, где Y — некоторая точка M (рис.2). Тогда A была бы внутренней точкой отрезка YB. Из выпуклости многогранника M следует, что при этом отрезок YB принадлежал бы ему полностью и A не могла бы быть вершиной M.

Замечание. Данная задача — усиление одной из задач XIII международной математической олимпиады. На международной олимпиаде требовалось доказать, что пересекаются хотя бы два из девяти многогранников. (См. книгу «Международные математические олимпиады». Е.А.Морозова, И.С.Петраков, В.А.Скворцов. — М.: Просвещение, 1976. Задача № 76.)

В. Сендеров

М1447. *В квадрате клетчатой бумаги 10×10 нужно расставить один корабль 1×4, два — 1×3, три — 1×2 и четыре — 1×1. Корабли не должны иметь общих точек (даже вершин) друг с другом, но могут прилегать к границам квадрата. Докажите, что:*

а) если расставлять их в указанном выше порядке (начиная с больших), то этот процесс всегда удастся довести до конца, даже если в каждый момент заботиться только об очередном корабле, не думая о будущих;

б) если расставлять их в обратном порядке (начиная с малых), то может возникнуть ситуация, когда очередной корабль поставить нельзя (приведите пример).

а) Очевидно, как бы ни был поставлен корабль 1×4, легко разместить следующий 1×3. Доказать, что при любом их расположении можно разместить еще один корабль 1×3, поможет рисунок 1, где поле 10×10 разбито на 8 прямоугольников (2×5 и 3×5). Каждый корабль 1×4 и 1×3 пересекает (по клеткам) не более чем 2 из 8 прямоугольников, значит, не менее чем $8 - 2 \cdot 2 = 4$ останутся свободными, а в каждом из них можно поставить корабль 1×3 (не примыкающий к границе с соседними прямоугольниками).

Точно так же, рисунок 2 помогает доказать, что если уже расставлены корабли: 1×4, два 1×3 и два (или меньше) 1×2, то можно поставить еще один корабль 1×2: каждый корабль 1×4, 1×3, 1×2 пересекает не более 2 из 12 прямоугольников, значит, не менее $12 - 5 \cdot 2 = 2$ останутся свободными, а в каждом из них можно поместить корабль 1×2 (не примыкающий к границе с соседними прямоугольниками).

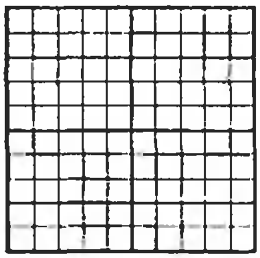


Рис. 1

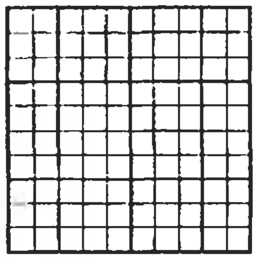


Рис. 2

Наконец, рисунок 3 помогает доказать, что если уже расставлены все корабли 1×4, 1×3, 1×2 и не более 3 «единичных», то останется место для корабля 1×1: первые 6 пересекают каждый не более 2 из 16 прямоугольников, единичные — только один, и остается еще по крайней мере $16 - 2 \cdot 6 - 3 = 1$ свободный прямоугольник.

Каверзность этой задачи состоит в том, что напрашивающийся подход: подсчитать сумму площадей уже расставленных кораблей вместе с их единичными окрест-

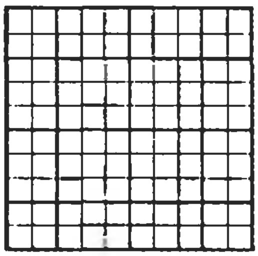


Рис. 3

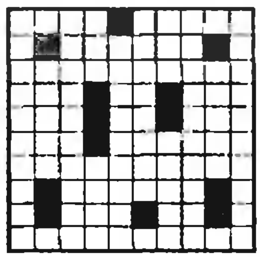


Рис. 4

ностями и убедиться, что остается еще пустое пространство, здесь не приводит (по крайней мере, сразу) к решению.

б) Пример, когда нельзя разместить последний корабль 1×4, привести нетрудно; при этом даже не обязательно использовать все 9 кораблей (рис.4).

К.Игнатьев

М1448. *Рассматривается произвольный многоугольник (не обязательно выпуклый).*

а) Всегда ли найдется хорда многоугольника, которая делит его на равновеликие части?

б) Докажите, что любой многоугольник можно разделить некоторой хордой на части, площадь каждой из которых не меньше, чем 1/3 площади многоугольника. (Хордой многоугольника называется отрезок, концы которого принадлежат контуру многоугольника, а сам он целиком принадлежит многоугольнику.)

а) Ответ: нет, не всегда. На рисунке 1 приведен нужный пример (разумеется, невыпуклого) многоугольника, состоящего из трех одинаковых залов площади $(S-\varepsilon)/3$ и соединяющей их «вертушки» из узких коридоров общей площадью $\varepsilon < S/6$. Этот многоугольник любая хорда делит на части так, что площадь большей из них не меньше $2S/3-\varepsilon$ (тем самым, площадь меньшей не превосходит $S/3+\varepsilon$). Докажем это. Если хорда заходит в один из залов, то благодаря устройству коридора она не может достичь красного треугольника в центре, где сходятся коридоры, так что два другие зала соединены в одну часть. Точно также, если хорда пересекает красный треугольник, (или проходит через его вершину), то все равно по одну сторону от нее остается коридор, соединяющий два зала.

Этот пример показывает, что оценка «1/3 площади» в пункте б) — точная.

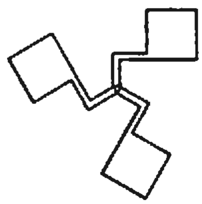


Рис. 1

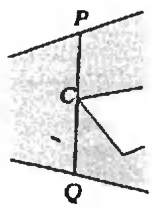


Рис.2

б) Докажем даже более сильное утверждение: для любого многоугольника F и любого направления l (не параллельного никакой прямой, соединяющей вершины F — это предположение лишь упрощает доказательство) можно найти хорду, параллельную l, делящую этот многоугольник F площади S на части, площадь каждой из которых не меньше $S/3$. Проведем произвольную такую хорду h, параллельную l — будем считать это направление вертикальным; обозначим через $s=s(h)$ площадь меньшей из частей, на которые она делит F. Предположим, что нужной хорды h не существует, и будем двигать концы хорды h по контуру F в таком направлении, чтобы $s=s(h)$ увеличивалась (точнее, не уменьшалась; если s сохраняется, то, скажем, двигаемся вправо). В процессе движения мы приходим к некоторому «критическому» положению, когда прямая, содержащая h, проходит через вершину C многоугольника F, лежащую внутри некоторой хорды PQ (рис.2; мы могли прийти к положению $h=PC$ или $h=CQ$ слева или к положению $h=PQ$ справа). Пусть S_1, S_2, S_3 — площади трех частей F, которые примыкают к PC, CQ и PQ. Они не могут быть все меньше $S/3$, значит, одна из них больше $2S/3$, а две другие — среди них одна равна $s(h)$ — даже в сумме меньше $S/3$. Мы будем далее двигать вертикальную хорду в часть, имеющую большую площадь (при этом $s(h)$ увеличится скачком, но даже новое значение $s(h)$ меньше $S/3$).

Ясно, что мы не можем «зациклиться» (вернуться уже к пройденной хорде h), поскольку $s(h)$ растет. С другой стороны, этот процесс можно разбить на конечное число различных возможных шагов — от одного критического положения до следующего; значит, он не может продолжиться бесконечно. Получаем противоречие — значит, нужная хорда h, отделяющая площадь не менее $S/3$ и не более $2S/3$, существует.

По существу, именно такое рассуждение встретилось в решении, предложенном одним из победителей последней Московской олимпиады, где предлагалась эта задача (как и другие из этого номера), и его автор М. Островский получил специальную премию жюри имени Б.Н.Делоне.

Другое решение можно получить, опираясь на возможность триангуляции любого многоугольника диагоналями, лежащими внутри него.

Н.Васильев

М1449. *Продолжения сторон AB и CD выпуклого четырехугольника ABCD пересекаются в точке P, а продолжения сторон BC и AD — в точке Q. Докажите, что если каждая из трех пар биссектрис: внешних углов четырехугольника при вершинах A и C, внешних углов при вершинах B и D, а также внешних углов при вершинах Q и P (треугольников QAB и PBC соответственно) имеет точку пересечения, то эти три точки лежат на одной прямой.*

Прямые AB, BC, CD, DA обозначим через l_1, l_2, l_3, l_4 соответственно. Через $\rho_1(M)$ обозначим ориентированное расстояние от точки M до прямой l_1, что означает либо обычное расстояние, если точка M лежит по ту же сторону от прямой l_1, что и четырехугольник $ABCD$, либо расстояние со знаком «—» в противном случае. Аналогичные функции $\rho_2(M)$, $\rho_3(M)$, $\rho_4(M)$ введем для остальных прямых l_2, l_3, l_4. Заметим, что точка M лежит на биссектрисе внешнего угла при вершине B тогда и только тогда, когда $\rho_1(M)+\rho_2(M)=0$. Аналогично записывается условие принадлежности точки к каждой из остальных пяти биссектрис, названных в задаче. Для каждой из трех точек M_{BD}, M_{AC} и M_{PQ} пересечения биссектрис, о которых говорится в задаче, выполнено условие:

$$\rho_1(M)+\rho_2(M)+\rho_3(M)+\rho_4(M)=0. \qquad (*)$$

Например, для точки M_{BD} пересечения биссектрис углов B и D должны выполняться два условия:

$\rho_1(M_{BD})+\rho_2(M_{BD})=0$ и $\rho_3(M_{BD})+\rho_4(M_{BD})=0$, следовательно, и $(*)$.

Воспользуемся теперь тем, что ρ_i — линейные функции от координат (в произвольно выбранной декартовой системе координат): если уравнение прямой l имеет вид $ax+by+c=0$, то расстояние от точки $M(x,y)$ до прямой l с учетом знака равно

$$\rho(M)=\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Тем самым, сумма ρ_i — также линейная функция координат.

Итак, все три точки M_{BD}, M_{AC}, M_{PQ} удовлетворяют линейному уравнению (*). Чтобы из этого сделать вывод, что все три точки лежат на одной прямой, нужно только проверить, что это уравнение — невырожденное, т.е. его левая часть не является тождественным нулем. Но для точек M, лежащих внутри четырехугольника, левая часть положительна, следовательно, уравнение невырожденное.

С.Маркелов, Н.Васильев

М1450. *Докажите, что для любого $k>1$ найдется степень 2 такая, что среди k последних ее цифр не менее половины составляют девятки. (Например, $2^{12}=4096$, $2^{53}=\ldots992$.)*

Откуда берутся девятки в наших числах? Заметим, что $4096+4=2^{12}+2^2$ делится на 10^2, а $2^{53}+2^3=2^3\left(2^{50}+1\right)$ делится на 10^3. Докажем по индукции такое утверждение.

Лемма. *При каждом $k\ge1$ число $2^{2\cdot5^{k-1}}+1$ делится на 5^k.*

Отсюда будет следовать, что

$$2^k\left(2^{2\cdot5^{k-1}}+1\right)=2^{N_k}+2^k,$$

где $N_k=2\cdot5^{k-1}+k$, делится на 10^k.

Положим $a=4^{5^{k-1}}$ и допустим, по предположению индукции, что $a+1$ делится на 5^k; тем самым, поскольку $k\ge1$, $a+1$ делится на 5, или $a\equiv-1\pmod{5}$[1].

Поэтому $a^4-a^3+a^2-a+1\equiv0\pmod{5}$, и значит,

$4^{5^k}+1=a^5+1=(a+1)\left(a^4-a^3+a^2-a+1\right)$

делится на 5^{k+1}. Лемма доказана.

Итак, число (*) оканчивается не менее чем k нулями. Но при $k>1$ количество цифр числа 2^k не превосходит $k/2$; для первых k это видно из таблицы,

k	2	3	4	5	6	7
2^k	4	8	16	32	64	128
Число цифр	1	1	2	2	2	3

а при переходе от k к $k+2$ (даже к $k+3$) количество цифр увеличивается не более чем на одну (ведь $2^{k+3}=2^k\cdot8$). Значит, среди последних k цифр числа 2^{N_k} лишь не более $k/2$ стоящих в конце могут быть отличны от 9: от числа, оканчивающегося k нулями, нужно отнять число 2^k, в котором не более $k/2$ цифр.

[1] *По поводу этого обозначения см., например, статью А.Егорова и А.Котовой «Необыкновенные арифметики» в «Кванте» № 9/10 за 1993 г. или в сборнике «Школа в «Кванте». Арифметика и алгебра» (приложение к журналу «Квант» № 2 за 1994 год).*

Замечание. Из нашего решения и элементарных теорем теории чисел можно вывести, что степени 4^j, $j=0,1,\ldots,5^k-1$, дают все различные остатки при делении на 5^k.

Н.Васильев

Ф1458. *В изображенной на рисунке 1 системе нити нерастяжимы, массы блоков и нитей пренебрежимо малы. Найдите ускорения подвижных блоков. Найдите также ускорение узелка А, завязанного на нити. Размеры блоков подобраны так, что свободные куски нитей вертикальны.*

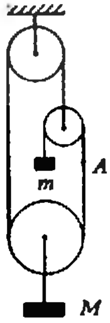


Рис.1

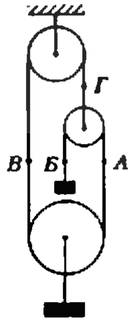


Рис.2

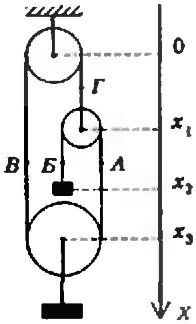


Рис.3

Разберемся сначала с натяжением нитей (рис.2). Обозначим силу натяжения в точке A через $T_A=T$, тогда в точке $Б$ натяжение будет таким же: $T_Б=T_A=T$ (натяжения нити по обе стороны невесомого малого блока). Натяжение в точке B тоже получится равным T: $T_B=T_A=T$ (с двух сторон невесомого нижнего блока). Аналогично — для верхнего блока: $T_Г=T_B=T$.

Запишем уравнение второго закона Ньютона для малого блока (на него действуют только силы натяжения):

$$T_A+T_Б-T_Г=T+T-T=0,$$

откуда

$$T=0.$$

Получилось довольно любопытно — если массы блоков (и нитей) пренебрежимо малы, то натяжения в разных местах нити получаются совсем малыми — система «не держит» грузы. Ясно, что ускорения каждого из грузов и нижнего блока равны по величине g и направлены вниз.

Найдем теперь ускорение малого блока — это можно сделать множеством способов. Приведем один из них, очень поучительный. Ясно, что ускорение блока можно найти из условия нерастяжимости нити. Нарисуем ось координат X, направленную вниз (рис.3). Начало оси выберем напротив оси неподвижного блока, а координаты оси малого блока, верхнего груза и оси нижнего блока обозначим, соответственно, x_1, x_2, x_3. Тогда сумма длин вертикальных кусков нити будет равна

$$l=(x_1-0)+(x_3-0)+(x_3-x_1)+$$

$$+(x_2-x_1)=2x_3+x_2-x_1.$$

При движении (пока нить натянута) эта величина не меняется, т.е.

$$2\Delta x_3 + \Delta x_2 - \Delta x_1 = 0,$$

или

$$2\frac{gt^2}{2} + \frac{gt^2}{2} - \frac{at^2}{2} = 0.$$

Отсюда

$$a = 3g$$

— малый блок имеет ускорение, равное $3g$ и направленное вниз.

С другой стороны, это ускорение равно полусумме ускорений точек нити слева и справа от блока:

$$a = \frac{1}{2}(g + a_A).$$

Таким образом, ускорение узелка A равно

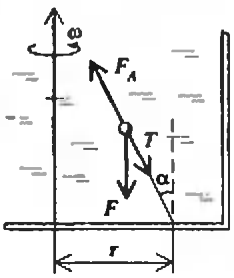
$$a_A = 5g$$

и тоже направлено вниз.

А.Зильберман

Ф1459. *Маленький деревянный шарик с помощью нерастяжимой нити длиной $l = 30$ см прикреплен ко дну цилиндрического сосуда с водой. Расстояние от центра дна до точки закрепления нити $r = 20$ см. Сосуд раскручивают относительно вертикальной оси, проходящей через центр дна. При какой угловой скорости вращения нить отклоняется от вертикали на угол $\alpha = 30°$?*

Нить с шариком отклонится к оси вращения (см. рисунок). На шарик (в неподвижной системе отсчета) будут действовать три силы: сила Архимеда $\vec{F}_A$, сила натяже-



ния нити $\vec{T}$ и сила тяжести $\vec{F}$ ($F = \rho_ш Vg$, где $\rho_ш$ — плотность шарика, V — его объем). (Подробнее о силе Архимеда в движущейся жидкости можно прочитать в статье Л. Асламазова «Гидростатика» — *Прим. ред.*)

Сумма проекций этих сил на вертикальную ось равна нулю:

$$\rho_в Vg - \rho_ш Vg - T\cos\alpha = 0,$$

где $\rho_в$ — плотность воды. Уравнение движения шарика по окружности радиусом $r - l\sin\alpha$ (такое движение вызвано вращением сосуда) имеет вид

$$\rho_ш V\omega^2(r - l\sin\alpha) = \rho_в V\omega^2(r - l\sin\alpha) - T\sin\alpha.$$

Совместное решение двух уравнений позволяет найти ω:

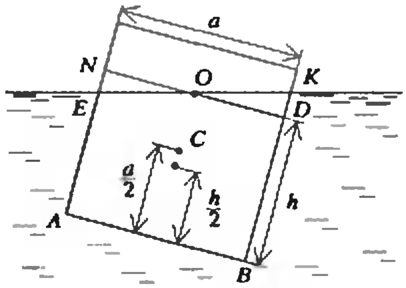
$$\omega = \sqrt{\frac{g\operatorname{tg}\alpha}{r - l\sin\alpha}} = 10{,}6\ \text{с}^{-1}.$$

В.Можаев

Ф1460. *Длинный брусок с квадратным торцом опущен в воду так, что одна из его длинных боковых граней находится над поверхностью воды и параллельна ей. В таком положении брусок свободно плавает. При какой плотности материала бруска это возможно?*

Брусок будет плавать в устойчивом положении, если при его отклонении на небольшой угол α возникает возвращающий момент сил.

Удобно моменты сил считать относительно продольной оси, проходящей через центр C торцевого сечения бруска (см. рисунок), так как относительно этой оси момент



силы тяжести бруска равен нулю. Момент архимедовой силы, действующей на погруженную в воду часть бруска, равен

$$M = M_{OKD} - (M_{ABDN} - M_{ONE}).$$

Обозначим M_{ABDN} через M_1, а M_{OKD} — через M_2. Поскольку по модулю $M_{OKD} = M_{ONE} = M_2$, то положение бруска будет устойчивым, если $2M_2 > M_1$. В свою очередь, имеем

$$M_1 = \rho gLah \cdot l_1,$$

где ρ — плотность воды, L — длина бруска, $l_1 = \left(\frac{a}{2} - \frac{h}{2}\right)\alpha$,

$$M_2 = \rho gL \cdot \frac{1}{2}\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\alpha \cdot l_2,$$

где

$$l_2 = \frac{2}{3}\frac{a}{2} + \left(h - \frac{a}{2}\right)\alpha.$$

Неизвестную величину h можно найти из условия

$$\rho ahL = \rho_x a^2 L,$$

где ρ_x — плотность бруска. Введем обозначение: $x = \rho_x/\rho$, тогда $h = xa$. С учетом этого условие устойчивости бруска примет вид

$$x^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)x + \frac{2 - 3\alpha}{12} > 0.$$

Поскольку α — малый параметр, решая это неравенство, получим

$$0 < x < 0{,}21 \text{ и } 0{,}79 < x < 1.$$

Так как плотность воды равна $\rho = 1 г/см^3$, имеем окончательно

$$0 < \rho_x < 0{,}21\ г/см^3 \text{ и } 0{,}79\ г/см^3 < \rho_x < 1\ г/см^3 .$$

В.Слободянин

Ф1461. ***Вертикальная труба частично заполнена водой с температурой $t_0 = 0\ ^\circ C$ до высоты $H = 20$ м. На сколько изменится высота содержимого трубы при понижении температуры до $t_1 = -0{,}01\ ^\circ C$? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ Дж / г, плотность льда $\rho_л = 0{,}92\ г/см^3$. Известно, что при изменении внешнего давления на Δp температура плавления льда меняется на ΔT, причем $\Delta T/T = (1/\rho_в - 1/\rho_л)\Delta p/\lambda$, где T — температура смеси «лед — вода», а $\rho_в$ — плотность воды.***

Найдем избыточное давление Δp_1 (по отношению к 1 атм), которое соответствует изменению температуры плавления льда на $\Delta t_1 = t_1 - t_0$:

$$\Delta p_1 = \frac{\lambda(t_1 - t_0)\rho_в\rho_л}{T_0(\rho_л - \rho_в)} = 1{,}41 \cdot 10^5\ Па .$$

Этому давлению соответствует столб льда высотой

$$H_л = \frac{\Delta p_1}{\rho_л g} = 15{,}64\ м .$$

Этот столб льда будет находиться в верхней части трубы, а ниже — вода. Высоту $H_в$ столба воды найдем из условия сохранения исходной массы воды:

$$\rho_в H = \rho_л H_л + \rho_в H_в ,$$

откуда

$$H_в = H - \frac{\rho_л}{\rho_в} H_л = 5{,}61\ м .$$

Изменение высоты содержимого трубы составляет

$$\Delta H = H_л + H_в - H = \frac{\lambda(t_0 - t_1)}{T_0 g} = 1{,}25\ м .$$

В.Овчинкин

Ф1462. ***В сосуд объемом $V = 1$ л, откачанный до очень низкого давления, попадает $m = 1$ г воды. Для ее удаления используют адсорбирующее вещество, поглощающее свободные молекулы воды. Общая поверхность адсорбента $S = 100\ м^2$, а полная поверхность, с которой испаряется вода, $s = 0{,}001\ м^2$. Температура сосуда $t = +5\ ^\circ C$, давление насыщенных паров воды при этой температуре $p = 870$ Па. Через какое время весь пар будет поглощен адсорбентом? Считайте, что попадающая на поверхность адсорбента молекула воды обязательно им поглощается и больше свободной не становится. За какое время вся вода испарилась бы, если бы адсорбента не было?***

Эта задача требует не точного аналитического решения, а довольно грубой оценки — ведь из условия ясно, что многими существенными факторами нам предложено пренебречь.

Для начала найдем количество насыщенного водяного пара в этом сосуде и сравним его с количеством введенной в сосуд воды:

$$\nu_{нас} = \frac{pV}{RT} \approx 4 \cdot 10^{-4}\ моль .$$

Видно, что это очень малая часть всей воды в сосуде ($\nu_{общ} \approx 0{,}05$ моль), поэтому на второй вопрос уже можно ответить: никогда вода не испарилась бы вся, если бы не было адсорбента.

Для расчета времени поглощения водяного пара адсорбентом будем считать, что пар все время насыщен. Тогда его концентрация равна

$$n = \frac{p}{kT} .$$

Выберем ось координат X перпендикулярной поверхности адсорбента, тогда число ударов молекул пара о поверхность площадью ΔS за время Δt составит

$$N_{уд} = \frac{1}{2} n \Delta S v_x \Delta t ,$$

а за общее время τ поглощения практически всех молекул —

$$N_{общ} = \frac{1}{2} n S v_x \tau = \frac{1}{2}\frac{p}{kT} S \sqrt{\frac{kT}{m_0}}\tau .$$

После простых преобразований получаем

$$\tau = \frac{2N_{общ}}{N_A}\frac{\sqrt{MRT}}{pS} = 2\frac{1}{18}\frac{\sqrt{18 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}3 \cdot 278}}{870 \cdot 100}\ с \approx 10^{-5}\ с .$$

Ответ получился бессмысленно малый — можно только утверждать, что при заданных условиях адсорбент поглотит большую часть молекул практически сразу. На самом деле адсорбент поглощает далеко не всякую молекулу, которая о него ударяется, так что процесс будет протекать гораздо дольше. Кроме того, когда молекул воды останется мало и пар перестанет быть насыщенным, процесс начнет замедляться и будет идти тем медленнее, чем меньше молекул останется в сосуде.

Д.Макаров

Ф1463. ***Внутрь плоского конденсатора параллельно его обкладкам помещена плоскопараллельная пластина толщиной h, сделанная из слабопроводящего материала с удельным сопротивлением ρ. Конденсатор заряжен до напряжения U_0. Найдите максимальный ток, который потечет через пластину после замыкания обкладок конденсатора накоротко. Площадь каждой обкладки и пластины S, расстояние между обкладками d (оно намного меньше размеров обкладок).***

При переносе проводящей пластины параллельно обкладкам поля не изменяются — перенесем ее к одной из пластин вплотную. Тогда получится простая эквивалентная схема, изображенная на рисунке. В этой схеме конденсатор имеет площадь пластин S и расстояние между обкладками $d - h$. Конденсатор заряжен до напряжения U_0 и его сопротивление равно $R = \rho h/S$.

После замыкания пластин в начальный момент по цепи потечет ток (который и будет максимальным)

$$I = \frac{U_0}{R} = \frac{U_0 S}{\rho h} .$$

В.Дерябкин

А ТАК ЛИ ХОРОШО ЗНАКОМО ВАМ

движение жидкостей и газов?

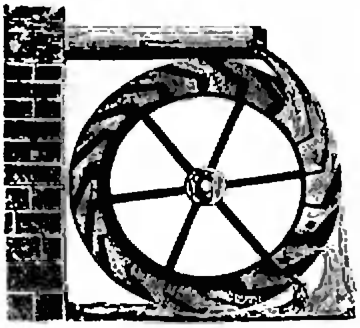
*Всякий легко согласится с тем,
что теория о силах и движениях жидкостей,
если только она не создана против воли Минервы,
не является ни бесполезной, ни тривиальной.*

Даниил Бернулли

Вопросы о движении жидкостей и газов или же о движении различных твердых тел в жидкостях и газах, прежде всего в воде и в воздухе, составляют суть специальной науки — гидроаэродинамики. А вести речь об обеих средах сразу разумно потому, что их движение описывается во многом одинаково.

Прав был Бернулли — наука эта очень непростая. А уж о пользе ее и говорить не приходится: с древнейших времен людей занимали проблемы движения воды по каналам и водопроводным трубам, строительство водяных и ветряных мельниц, а затем — и вопросы море- и воздухоплавания, авиации и ракетной техники.

Чем дальше, тем больше практика подталкивала теорию к поиску законов, «управляющих» движением двух стихий. А это заставляло браться за решение сложнейших задач таких выдающихся ученых, как И.Ньютон и Л.Эйлер, У.Томсон и Дж.Максвелл, Н.Жуковский и С.Чаплыгин. До сих пор важное практическое значение имеет закон, сформулированный более 250 лет назад в знаменитой «Гидродинамике» Даниилом Бернулли и носящий теперь его имя.



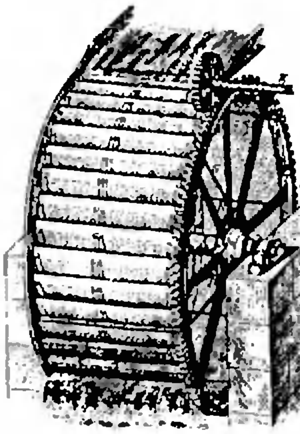
Попробуйте и вы воспользоваться известными вам закономерностями, касающимися движения воздуха и воды.

Вопросы и задачи

1. Можно ли использовать паруса и руль для управления полетом воздушного шара?

2. Вертолет стоял на земле, а затем поднялся в воздух и «завис» на небольшой высоте. Когда он действовал на землю с большей силой?

3. Как удерживается в полете воздушный змей? Зачем ему приделывают хвост?



4. Что произойдет, если подуть в пространство между двумя горящими свечами?

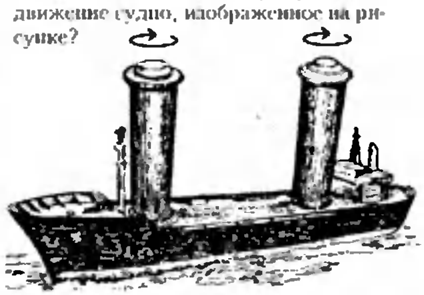
5. Зачем на крышах домов делают чердачные окна?

6. Отчего опасно стоять вблизи края платформы, когда мимо проходит скорый поезд?

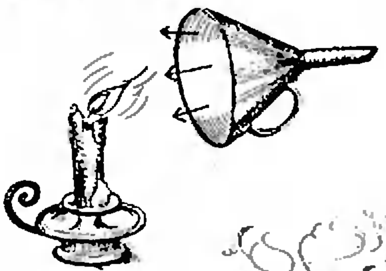
7. Если вращать над головой кусок гофрированной трубки, вроде шланга от пылесоса, раздается звук. Как он образуется?

8. Зачем на валы быстроходных ветродвигателей насаживают массивные маховики?

9. Каким образом вращающиеся вертикальные цилиндры могут привести в движение судно, изображенное на рисунке?



10. Зачем в центре купола парашюта делается отверстие?

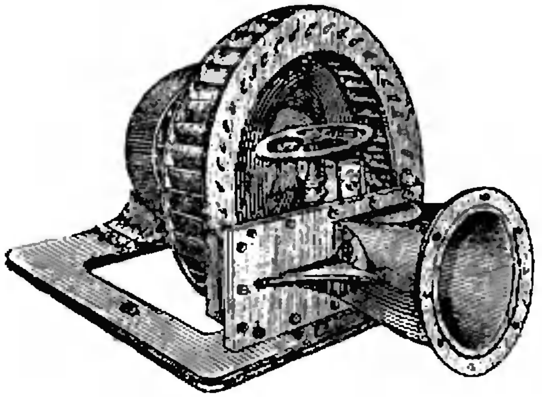


11. Если подуть на пламя свечи через горлышко воронки, пламя отклонится в ее сторону. Отчего?

12. Почему дым от неподвижной сигареты вначале поднимается ровной струйкой, а затем начинает клубиться?

13. Почему сужается струйка воды, равномерно вытекающая из крана?

14. Если открытый водопроводный кран зажать пальцем так, что останется маленькое отверстие, то вода из него вырывается с большей скоростью, чем при полностью открытом кране. Почему?



Микроопыт

Приклейте к пинг-понговому шарику нитку и, держа шарик за нее, коснитесь им струи воды из-под крана. Почему при отведении нитки шарик словно прилипает к струе?

Любопытно, что...

... сила действия струи воды на препятствие очень быстро растет с увеличением скорости жидкости. Благодаря этим силам образуются овраги, русла и долины рек, размываются морские и речные берега. О масштабах работы этих сил можно судить, например, по количеству переносимых реками взвешенных наносов, достигающему сотен миллионов тонн ежегодно.

... законы гидродинамики удивительным образом «учитываются» в живой природе. Скажем, птицы, летящие клином, экономят силы при дальних перелетах, а рыбы, плывущие косяком, увеличивают свою выносливость (как было подсчитано, в несколько раз).

... преимущество движения с использованием силы ветра было подмечено еще в древней китайской пословице: «Тысяча весел, десять тысяч шестов не сравняются с парусом».

... замечательный голландский ученый и инженер Симон Стевин, известный как один из основателей гидростатики, сумел построить парусный автомобиль. Эта ветряная повозка, названная «гаагским чудом», развивала заметную скорость, «брала на борт» порядка 20 человек, могла поворачивать и двигаться даже против ветра.

... особенности движения в воздухе вращающихся тел были давно использованы человеком, например при бросании бумеранга. А вот в спорте на них обратили внимание сравнительно недавно. Это позволило легкоатлетам увеличить дальность метания дисков, а футболистам — посылать крученые мячи («сухие листы»), летящие по криволинейной траектории.

... при обдувании тела потоком воздуха за ним образуются вихри. Попеременно срываясь то с одной, то с другой стороны, они раскачивают тело. Размах колебаний может возрасти настолько, что произойдет разрушение. Так случалось с висящими мостами, радиомачтами и нефтяными вышками.

... при огромных скоростях вылета струй из гидромониторов вода перестает вести себя как жидкое тело, а действует подобно артиллерийскому снаряду, взрывая грунт и подбрасывая в воздух громадные глыбы. Это позволяет применять гидромониторы в земляных и горных работах.

... создавая сжатия и разрежения воздуха в трубах, можно по ним перемещать грузы. Это привело в начале XIX века к изобретению пневматической почты. Тот же принцип использовался и в пневматической железной дороге, перевозившей пассажиров в Нью-Йорке в семидесятых годах прошлого столетия.

... особенно эффективным примером использования сил давления струи газа или жидкости служат турбины. Поэтому практически все электростанции мира работают на водяных или паровых турбинах, а одним из основных двигателей на самолетах стала газовая турбина.

... как показывают расчеты, для дальних перелетов на земле становятся рентабельными гиперзвуковые самолеты. Их скорость может достигать 10 — 12 тысяч километров в час, а высота полета — 36 — 50 километров. Такие самолеты, из-за различных условий при полете и посадке, должны иметь особую форму, в частности — изменяющуюся геометрию крыла.

Что читать в «Кванте» о движении жидкостей и газов

(публикации последних лет)

1. «Почему не летают самолеты в сильный дождь?» — 1989, № 7, с.10;
2. «Десять опытов из «золотого фонда» гидродинамики» — 1989, № 8, 10, с.52;
3. «Снежные заносы» — 1990, № 1, с.15;
4. «Случай в поезде» — 1990, № 5, с.2;
5. «Полеты в струе и наяву» — 1990, № 9, с.2;
6. «Опыты с вращающейся жидкостью» — 1992, № 2, с.42;
7. Калейдоскоп «Кванта» — 1992, № 6, с. 40;
8. «Океанская зыбь» — 1992, № 9, с.9;
9. «Шарик с дыркой в струе пылесоса» — 1993, № 3/4, с.52;
10. «Физика в ложке воды» — 1994, № 9, с.48.

Материал подготовил А. Леонович

Ф1464. *Два замкнутых сверхпроводящих витка, каждый массой m, имеют индуктивности L и 2L. Витки насажены на гладкий горизонтальный немагнитный стержень, по которому они могут перемещаться, не меняя своей ориентации в пространстве. Вначале витки удерживают на расстоянии d друг от друга и по ним пропускают токи I и 3I соответственно. Взаимная индуктивность витков в этом положении составляет M = 0,3L. Витки отпускают, и они разлетаются в разные стороны. Найдите максимальные значения скоростей витков.*

Из условия ясно, что токи витков текут в противоположных направлениях (отталкивание). Значит, добавки в магнитный поток каждого из витков от «соседа» вычитаются из собственных потоков.

Главная проблема состоит в том, чтобы рассчитать энергию магнитного поля в начальный момент, пока есть взаимное влияние витков. Когда витки разлетятся далеко и перестанут влиять друг на друга, расчет энергии поля будет совсем прост.

Для расчета энергии взаимодействующих витков предположим, что токи в них линейно спадают до нуля за время τ (например, из-за включения резисторов с изменяющимися по величине сопротивлениями), и найдем ЭДС индукции и работу, совершаемую вихревым электрическим полем:

$$\mathcal{E}_1 = L_1\frac{I_1}{\tau} - M\frac{I_2}{\tau} = L\frac{I}{\tau} - M\frac{3I}{\tau},$$

$$\mathcal{E}_2 = L_2\frac{I_2}{\tau} - M\frac{I_1}{\tau} = 2L\frac{3I}{\tau} - M\frac{I}{\tau},$$

$$A_1 = \mathcal{E}_1 q_1 = \mathcal{E}_1\frac{I_1}{2}\tau = \frac{LI^2}{2} - \frac{3MI^2}{2},$$

$$A_2 = \mathcal{E}_2 q_2 = \mathcal{E}_2\frac{I_2}{2}\tau = 9LI^2 - \frac{3MI^2}{2}.$$

Отсюда

$$W_{\text{нач}} = A_1 + A_2 = 9{,}5LI^2 - 3MI^2 = 8{,}6LI^2.$$

Для расчета энергии магнитного поля после разлета витков нужно учесть, что магнитные потоки каждого витка не изменяются:

$$L_1I_1^* = L_1I_1 - MI_2,$$

$$L_2I_2^* = L_2I_2 - MI_1,$$

откуда получим

$$I_1^* = 0{,}1I,\ I_2^* = 2{,}85I.$$

Тогда конечная энергия поля будет равна

$$W_{\text{кон}} = \frac{L_1I_1^{*2}}{2} + \frac{L_2I_2^{*2}}{2} = 8{,}13LI^2.$$

Разность начальной и конечной энергий перешла в кинетическую энергию колец. Массы их одинаковы, значит, одинаковы и скорости тоже. Окончательно получим

$$2\frac{mv^2}{2} = W_{\text{нач}} - W_{\text{кон}} = 0{,}47LI^2,$$

$$v = \sqrt{\frac{0{,}47LI^2}{m}} = 0{,}69I\sqrt{\frac{L}{m}}.$$

С. Варламов

Ф1465. *В середине между пластинами незаряженного плоского конденсатора находится неподвижный электрон. На конденсатор подают переменное напряжение высокой частоты: $U = U_0\sin\omega t$. Через какое время электрон достигнет одной из пластин конденсатора? Расстояние между пластинами d, масса электрона m, его заряд q. Влиянием силы тяжести пренебречь. Считайте, что за один период переменного напряжения электрон смещается на расстояние много меньшее, чем d.*

При подаче на пластины переменного напряжения U в конденсаторе возникает переменное электрическое поле

$$E = \frac{U}{d},$$

и на электрон действует сила

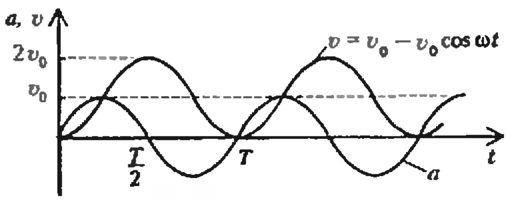
$$F = qE,$$

под действием которой он движется с ускорением

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qU_0}{md}\sin\omega t.$$

График зависимости $a(t)$ показан на рисунке красной линией. Зная график ускорения, несложно проследить за поведением скорости электрона. Вначале — качественные соображения.

В течение первого полупериода ускорение положительно, и, следовательно, скорость от нулевого значения возрастает до некоторой величины $2v_0$ (см. черную линию на рисунке). В начале и в конце полупериода ускорения нулевые, и, следовательно, касательные к графику скорости в этих точках параллельны оси t ($dv/dt = 0$).



В течение второго полупериода электрон движется с точно таким же, но отрицательным ускорением, поэтому, естественно, скорость упадет до нуля. Далее график повторяется с периодом $T = 2\pi/\omega$. Таким образом, видно, что электрон, помимо переменной, имеет еще некоторую постоянную составляющую скорости v_0, причем направление такого «дрейфа» задается знаком ускорения в первый полупериод. В нашем случае направление v_0 положительное, т.е. электрон движется к пластине с более высоким потенциалом.

Интегрированием функции $a(t)$ определим точный вид зависимости $v(t)$ и найдем значение скорости дрейфа v_0:

$$v(t) = \int_0^t a(t)\,dt = \int_0^t \frac{qU_0}{md}\sin\omega t\cdot dt =$$

$$= \frac{qU_0}{md\omega}(-\cos\omega t)\Big|_0^t = v_0(1-\cos\omega t),$$

где $v_0 = \frac{qU_0}{md\omega}$ — скорость дрейфа электрона (постоянная составляющая скорости). Тогда время, через которое электрон достигнет пластины, будет равно

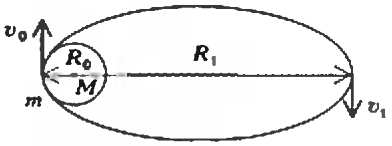
$$t = \frac{d/2}{v_0} = \frac{md^2\omega}{2qU_0}.$$

А.Гуденко

Ф1466. *Вокруг Солнца на орбите Земли (считайте эту орбиту круговой) обращается спутник массой $m = 100$ кг. В некоторый момент спутник открывает солнечный парус — круг из тонкой зеркальной пленки радиусом $r = 70$ м, который все время ориентирован перпендикулярно направлению на Солнце. Пренебрегая влиянием планет, найдите период обращения спутника с открытым парусом. Световая мощность Солнца $L = 3{,}86 \cdot 10^{26}$ Вт, масса Солнца $M = 2 \cdot 10^{30}$ кг, гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Дж·м/кг^2.*

Иллюстрацией к решению задачи служит рисунок. Для вращения на орбите Земли должно выполняться условие

$$\frac{mv_0^2}{R_0} = G\frac{mM}{R_0^2} = F_0.$$



После раскрытия паруса на спутник кроме гравитационной начинает действовать еще и сила светового давления, равная

$$F = 2\frac{W}{c},$$

где W — световая мощность, падающая на парус. Так как излучение Солнца изотропно, то

$$F = 2\frac{L}{c}\frac{\pi r^2}{4\pi R^2},$$

где R — расстояние до Солнца. Обозначим $\alpha = GmM$ и $\beta = Lr^2/(2c)$. Тогда равнодействующая, приложенная к спутнику, будет равна

$$F_p = \frac{\alpha}{R^2} - \frac{\beta}{R^2} = \frac{\alpha - \beta}{R^2}.$$

Поскольку F_p, как и F_0, пропорциональна R^{-2}, движение спутника с парусом будет подчиняться законам Кеплера. В частности, траекторией движения будет эллипс. Найдем его большую полуось.

Из второго закона Кеплера следует, что

$$v_0R_0 = v_1R_1,$$

а из закона сохранения энергии —

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{\alpha - \beta}{R_0} = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{\alpha - \beta}{R_1}.$$

Отсюда получим

$$R_1 = \frac{R_0^2v_0^2}{2(\alpha - \beta)/m - R_0v_0^2} = R_0\frac{\alpha}{\alpha - 2\beta}.$$

Большая полуось эллипса будет равна

$$a = \frac{1}{2}(R_1 + R_0) = R_0\frac{\alpha - \beta}{\alpha - 2\beta}.$$

По третьему закону Кеплера время обращения по такой орбите равно времени обращения по окружности радиусом a:

$$T = \frac{2\pi a}{u}, \text{ причем } \frac{mu^2}{a} = \frac{\alpha - \beta}{a^2}.$$

Отсюда

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3m}{\alpha - \beta}}.$$

С другой стороны, период обращения Земли составляет

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R_0^3}{Gm}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_0^3m}{\alpha}}.$$

Тогда

$$\frac{T}{T_0} = (\alpha - \beta)\sqrt{\frac{\alpha}{(\alpha - 2\beta)^3}}.$$

Так как $\alpha/\beta = 2GmMc/(Lr^2) = 4{,}23$, то $\frac{T}{T_0} = 2$, т.е. искомый период — 2 года.

Л.Мельниковский

Ф1467. *Камера для фотометрических измерений выполнена в форме полой сферы. В центр сферы помещен точечный источник света, а на стенке камеры находится маленький датчик люксметра — прибора для измерения освещенности. В том случае, когда стенки камеры были оклеены черным бархатом, показания люксметра составляли E_1, когда стенки были покрыты белой бумагой, прибор показывал E_2. Найдите коэффициент отражения света для бумаги. Считайте, что коэффициент отражения не зависит от угла падения луча.*

Показания люксметра пропорциональны световому потоку Φ, попадающему на датчик. Бархат, как известно, практически не отражает падающий свет, и в первом случае весь поток света поглощается стенками. Во втором случае (с бумагой) тоже весь поток будет поглощен, но расчет придется проводить с учетом многократных отражений. Непосредственно от источника стенки отразят $\alpha\Phi_0$, а поглотят $(1-\alpha)\Phi_0$. То, что отразилось от стенок, снова попадет на них — частично отразится: $\alpha \cdot \alpha\Phi_0$, остальное при втором падении будет поглощено: $(1-\alpha)\cdot\alpha\Phi_0$ и т.д. С учетом многократных отражений на стенки попадет световой поток

$$\Phi_0 + \alpha\Phi_0 + \alpha^2\Phi_0 + \ldots = \Phi_0(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots) = \frac{\Phi_0}{1-\alpha}.$$

Итак,

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\Phi_0}{\Phi_0/(1-\alpha)} = 1 - \alpha,$$

откуда

$$\alpha = 1 - \frac{E_1}{E_2}.$$

С.Варламов

ФИЗИКА 9 — 11

Публикуемая ниже заметка «Вторая космическая скорость» предназначена девятиклассникам, заметки «Расширение газа в пустоту» и «Как в металле протекает электрический ток?» — десятиклассникам, а заметка «Парадокс Вавилова» — одиннадцатиклассникам.

Вторая космическая скорость

А. КИКОИН

Если некоторому телу сообщить скорость, равную первой космической скорости, то оно не упадет на Землю, а станет искусственным спутником, движущимся по околоземной круговой орбите. Напомним, что эта скорость должна быть перпендикулярна направлению к центру Земли и равна по величине

$$v_1 = \sqrt{gR} \approx 7{,}9 \text{ км/с},$$

где $g = 9{,}8$ м/с^2 — ускорение свободного падения тел у поверхности Земли, $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ м — радиус Земли.

А может ли тело и вовсе порвать цепи тяготения, «привязывающие» его к Земле? Оказывается, может, но для этого его нужно «бросить» с еще большей скоростью. Минимальную начальную скорость, которую необходимо сообщить телу у поверхности Земли, чтобы оно преодолело земное притяжение, называют второй космической скоростью. Найдем ее значение v_{II}.

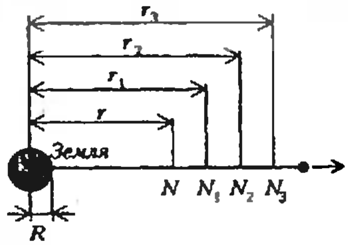
При удалении тела от Земли сила притяжения совершает отрицательную работу, в результате чего кинетическая энергия тела уменьшается. Одновременно с этим уменьшается и сила притяжения. Если кинетическая энергия упадет до нуля до того, как станет равной нулю сила притяжения, тело вернется обратно на Землю. Чтобы этого не произошло, нужно, чтобы кинетическая энергия сохранялась отличной от нуля до тех пор, пока сила притяжения не обратится в нуль. А это может произойти лишь на бесконечно большом расстоянии от Земли.

Согласно теореме о кинетической энергии, изменение кинетической энергии тела равно работе действующей на тело силы. Для нашего случая можно записать:

$$0 - \frac{mv_{II}^2}{2} = A, \text{ или } \frac{mv_{II}^2}{2} = -A, \quad (*)$$

где m — масса брошенного с Земли тела, A — работа силы притяжения. Таким образом, для вычисления второй космической скорости нужно найти работу силы притяжения тела к Земле при удалении тела от поверхности Земли на бесконечно большое расстояние. Как это ни удивительно, но работа эта вовсе не бесконечно большая, несмотря на то, что перемещение тела как будто бы бесконечно велико. Причина тому — уменьшение силы притяжения по мере удаления тела от Земли. Чему же равна работа силы притяжения?

Воспользуемся той особенностью, что работа силы тяготения не зависит от формы траектории движения тела, и рассмотрим самый простой случай — тело удаляется от Земли по линии, проходящей через центр Земли. На приведенном здесь рисунке изображен Земной шар и тело массой m, которое движется вдоль направления, указанного стрелкой.



Найдем сначала работу A_1, которую совершает сила притяжения на очень малом участке от произвольной точки N до точки N_1. Расстояния этих точек до центра Земли обозначим через r и r_1 соответственно, так что работа A_1 будет равна

$$A_1 = -F(r_1 - r) = F(r - r_1).$$

Но какое значение силы F следует подставить в эту формулу? Ведь оно изменяется от точки к точке: в N оно равно GMm/r^2 (M — масса Земли), в точке N_1 — GMm/r_1^2. Очевидно, нужно взять среднее значение этой силы. Так как расстояния r и r_1 мало отличаются друг от друга, то в качестве среднего можно взять значение силы в некоторой средней точке, например такой, что $r_{ср}^2 = rr_1$. Тогда получаем

$$A_1 = G\frac{Mm}{rr_1}(r - r_1) = GMm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right).$$

Рассуждая таким же образом, найдем, что на участке N_1N_2 совершается работа

$$A_2 = GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),$$

на участке N_2N_3 —

$$A_3 = GMm\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2}\right),$$

а на участке NN_3 работа равна

$$A_1 + A_2 + A_3 = GMm\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r}\right).$$

Закономерность ясна: работа силы притяжения при перемещении тела от одной точки к другой определяется разностью обратных расстояний от этих точек до центра Земли. Теперь нетрудно найти и всю работу A при перемещении тела от поверхности Земли ($r = R$) на бесконечно большое расстояние ($r \to \infty$, $1/r = 0$):

$$A = GMm\left(0 - \frac{1}{R}\right) = -\frac{GMm}{R}.$$

Как видно, эта работа и в самом деле не бесконечно велика. (Одиннадцатиклассникам понятно, что таким способом мы вычислили интеграл.)

Подставив полученное выражение для A в формулу (*), найдем значение второй космической скорости:

$$v_{II} = \sqrt{-\frac{2A}{m}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR} = 11{,}2 \text{ км/с}.$$

Отсюда видно, что вторая космическая скорость в $\sqrt{2}$ раз больше первой космической скорости:

$$v_{II} = \sqrt{2}v_1.$$

В проведенных расчетах мы не принимали во внимание то, что наше тело взаимодействует не только с Землей, но и с другими космическими объектами. И в первую очередь — с Солнцем. Получив начальную скорость, равную v_{II}, тело сумеет преодолеть тяготение к Земле, но не станет истинно свободным, а превратится в спутник Солнца. Однако если телу у поверхности Земли сообщить так называемую третью космическую скорость $v_{III} = 16{,}6$ км/с (попробуйте получить это значение самостоятельно), то оно сумеет преодолеть и силу притяжения к Солнцу.

Эта заметка была опубликована в «Кванте» № 3 за 1986 год.

Расширение газа в пустоту

А. СТАСЕНКО

Спросите кого угодно, что произойдет с температурой идеального газа, который расширяется в замкнутом сосуде без теплообмена с окружающей средой, и почти все вам ответят, что газ охладится. Не верьте! Это не всегда так.

Вообразим такой мысленный эксперимент. Пусть одна половина теплоизолированного сосуда занята идеальным газом с давлением p_1 и температурой T_1, а другая — пуста (рис. 1). В некоторый момент уберем перегородку между половинами сосуда. Газ, естественно, будет расширяться, причем в пустоту, и после многочисленных столкновений его молекул со стенками и между собой установится новое равновесное состояние. Ясно, что теперь объем газа вдвое больше: $V_2 = 2V_1$. А каковы давление p_2 и температура T_2?

Рис. 1

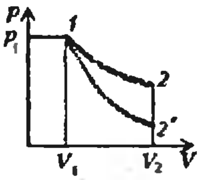


Рис. 2

С одной стороны, так как процесс адиабатический, точки, соответствующие начальному и конечному состояниям газа, должны лежать на адиабате $1-2'$ (рис. 2). Адиабата, как известно, падает круче изотермы, поэтому температура газа должна уменьшаться: $T_2' < T_1$.

С другой стороны, посмотрим, что говорит первый закон термодинамики. Количество теплоты Q, подведенное к газу, идет на увеличение его внутренней энергии ΔU и на работу по расширению A:

$$Q = \Delta U + A.$$

В нашем случае $Q = 0$ (по условию адиабатичности). А какая работа совершается газом? Да никакой, потому что он расширяется в вакуум, со стороны которого не встречает противодействия. Значит, и сила, и работа равны нулю: $A = 0$. Следовательно, и изменение внутренней энергии тоже равно нулю: $\Delta U = 0$. Но поскольку в случае идеального газа внутренняя энергия зависит только от температуры, температура не изменится: $T_2 = T_1$, и давление станет равным $p_2 = p_1/2$. Это означает, что точки, соответствующие начальному и конечному состояниям, будут лежать на изотерме $1-2$.

А что происходит между этими состояниями? К сожалению, школьная термодинамика ничего об этом сказать не может. Почему? Да потому, что вся она верна только для очень медленных (так называемых квазистатических) процессов, которые происходят со скоростями, много меньшими тепловой скорости движения молекул. В нашем же случае, как только мы уберем перегородку, газ буквально бросится в вакуум со скоростью порядка тепловой скорости молекул и даже еще быстрее, потому что в газе есть отдельные молекулы, скорость которых намного больше тепловой. А тут термодинамика просто неверна. Вот почему на рисунке 2 мы изобразили неизвестный нам процесс штрихами, а не сплошной линией.

Все наши рассуждения справедливы для случая идеального газа. А если газ не идеальный? Тогда его молекулы взаимодействуют друг с другом, и внутренняя энергия газа складывается из кинетической энергии движения молекул и потенциальной энергии их взаимодействия.

На рисунке 3 изображена зависимость потенциальной энергии E_p взаимодействия двух молекул от расстояния r между ними. Там, где потенциальная энергия минимальна (точка r_0), вещество конденсируется, т.е. переходит в жидкое состояние. Так как, по условию, мы имеем в начальный момент газ, то среднее расстояние между молекулами соответствует точке $r_1 \gg r_0$. После удвоения объема среднее расстояние между молекулами станет равным $r_2 = r_1\sqrt[3]{2} > r_1$. Получилось, как будто в результате расширения газ слегка «вытащили» наверх, по склону потенциальной ямы. Но кто поработал над тем, чтобы увеличить потенциальную энергию на ΔE_p? Никто. И сам газ тоже ни над кем не работал. Поэтому остается признать, что увеличение потенциальной энергии произошло за счет уменьшения кинетической энергии движущихся молекул. Значит, и температура — мера средней кинетической энергии молекул газа — в результате расширения слегка упадет. Но чем ближе газ к идеальному, тем менее заметно это понижение температуры.

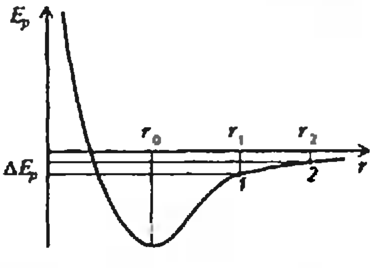


Рис. 3

Эта заметка была опубликована в «Кванте» № 11 за 1987 год.

Как в металле протекает электрический ток?

А. ВАРЛАМОВ

Этот вопрос обычно не вызывает затруднений у школьников. Как протекает? Да очень просто. Если между концами проводника, например металлического, поддерживать разность потенциалов, то в нем возникает электрическое поле. Действуя на имеющиеся в металле свободные электроны, это поле придает им ускорение в направлении того конца проводника, потенциал которого выше (заряд электронов отрицательный). Возникает направленное движение зарядов, которое и является электрическим током.

Нельзя сказать, что такой ответ ошибочен. Все слова в нем верны. Однако этот, на первый взгляд исчерпывающий, ответ сразу же вызывает целый ряд других вопросов и возражений. Попробуем в них разобраться.

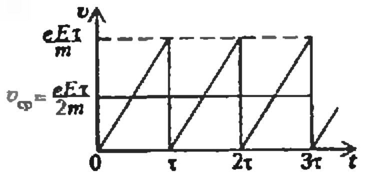
Эта заметка была опубликована в «Кванте» № 3 за 1988 год.

Как движутся электроны при создании между концами проводника разности потенциалов? Казалось бы, ускоренно, ведь на них все время действует сила $\vec{F} = e\vec{E}$ ($\vec{E}$ — напряженность электрического поля в проводнике). Но, с другой стороны, если бы это действительно было так, то сила тока в любом сечении проводника со временем возрастала бы, что противоречит закону Ома — при постоянном напряжении сила тока, протекающего по проводнику, постоянна: $I = U/R$. Как же быть? Вспомним о внутреннем устройстве металла.

Валентные электроны атомов металлов связаны с атомами весьма слабо. Поэтому при образовании кристаллической решетки они легко отрываются от атомов и образуют довольно плотный электронный газ (даже если от каждого атома оторвется лишь по одному электрону, то их концентрация в таком газе окажется порядка $n \sim 10^{29}$ $1/м^3$, в чем вы можете убедиться самостоятельно). Рассуждая выше о протекании тока через металл, мы считали эти электроны свободными. В определенном смысле это верно, но не следует забывать и об их окружении — ионной кристаллической решетке.

Созданная в конце XIX — начале XX веков классическая электронная теория сопротивления металлов предполагала, что в процессе движения под действием электрического поля электроны сталкиваются с ионами кристаллической решетки. Среди этих столкновений бывают и такие, при которых электроны всю приобретенную при разгоне в электрическом поле энергию передают решетке. Именно такие столкновения, их называют эффективными, и ответственны за сопротивление металла. Остальные столкновения для понимания механизма протекания тока можно не принимать в расчет (после них изменяется лишь направление скорости электронов, но не ее величина).

Пусть среднее время между соударениями есть τ. Тогда можно представить себе следующую модель движения электрона в металле, в котором создано электрическое поле. В интервале времени от 0 до τ электрон движется с ускорением $\vec{a} = e\vec{E}/m$, и, следовательно, проекция скорости его направленного движения против поля $\vec{E}$ линейно возрастает со временем: $v = at = eEt/m$. В момент времени τ электрон сталкивается с ионом и полностью передает кинетическую энергию своего направленного движения решетке. Далее он снова ускоряется электрическим полем, и процесс повторяется. График зависимости проекции скорости упорядоченного движения от времени приведен на рисунке. Такое кусочно-равноускоренное движение можно представить себе как равномерный дрейф электрона в направлении, противоположном полю, со скоростью $v_{ср} = eE\tau/(2m)$. Вычислим связанную с этим движением силу тока.



Число электронов, проходящих через сечение S проводника за время Δt, есть $\Delta N = nSv_{ср}\Delta t$. При этом переносится заряд $\Delta q = e\Delta N = neSv_{ср}\Delta t$. Следовательно, в проводнике протекает ток

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = nev_{ср}S = \frac{ne^2\tau}{2m}SE.$$

Величина

$$j = \frac{I}{S} = \frac{ne^2\tau}{2m}E$$

называется плотностью тока.

Оказывается, полученный нами коэффициент при напряженности поля E, который составлен только из микроскопических характеристик металла, есть не что иное, как величина, обратная удельному сопротивлению металла ρ.

Ну вот, кое-что стало проясняться. Однако вопросы еще остались. Давайте, например, оценим среднюю скорость направленного движения электронов. Пусть по медному проводнику сечением, скажем, 10 мм^2 и концентрацией электронов $n \approx 1{,}67 \cdot 10^{29}$ $1/м^3$ протекает ток I = 10 А. Тогда средняя скорость

$$v_{ср} = \frac{I}{neS} \approx 0{,}04 \text{ мм/с}.$$

Если же по известному из эксперимента значению ρ определить время между эффективными соударениями, то окажется, что $\tau \sim 10^{-14}$ с. Поэтому, если предполагать, что пробег между эффективными соударениями происходит со средней скоростью $v_{ср} \sim 0{,}1$ мм/с, то мы приходим к абсурдному утверждению: расстояние между двумя соударениями электрона составляет $l = v_{ср}\tau \sim 10^{-18}$ м, что на много порядков меньше расстояния между ближайшими ионами в решетке. Следовательно, мы снова чего-то не учли.

А не учли мы того, что частицы электронного газа в металле, подобно молекулам идеального газа в сосуде, находятся в постоянном хаотическом движении. Однако, если воспользоваться такой аналогией и вместо $v_{ср}$ подставить в выражение для I тепловую скорость $v_т = \sqrt{3kT/m}$, то этого все равно окажется недостаточно для согласия с опытными данными (убедитесь в этом самостоятельно).

Мы исчерпали возможности классической физики. В действительности последовательная теория сопротивления металлов была построена только в середине XX века с помощью представлений квантовой физики. Оказалось, что электроны в металле движутся с гигантскими скоростями $v_т \sim 0{,}01c$ (c — скорость света в вакууме). Это хаотическое движение частиц электронного газа имеет чисто квантовое, а не тепловое происхождение — оно не прекращается даже при абсолютном нуле температуры. Но и при столь огромных скоростях хаотического движения электронов в отсутствие электрического поля средний перенос заряда через выделенное сечение проводника равен нулю. При включении электрического поля на это хаотическое движение накладывается упорядоченный дрейф электронов против поля — как это уже было описано выше. Расстояние же между двумя последовательными соударениями определяется именно большой скоростью хаотического движения и составляет для взятого нами конкретного медного проводника несколько десятков (а может быть, даже сотен) межатомных расстояний, что уже вполне правдоподобно.

И наконец, последняя неожиданность. Согласно законам квантовой механики, электрон в идеальной периодической кристаллической решетке двигается так, что он... никогда не сталкивается с ионами, ее образующими. А как же быть тогда со всеми нашими предыдущими умозрительными построениями? Как же тогда электроны при своем движении в кристалле передают свою энергию решетке?

Оказывается, при низких температурах электроны сталкиваются с примесными атомами и другими дефектами, всегда имеющимися в решетке реального кристалла. Устраняя их, сопротивление кристаллического металла можно делать все меньше и меньше. При комнатных же температурах электроны в основном рассеиваются на... колебаниях решетки. Если в неподвижной решетке они еще могли «строить» свое поведение так, чтобы «обойти» все периодически повторяющиеся ионы, то когда последние совершают тепловые колебания, электроны уже никак не могут «уследить» за их хаотическим движением и неизбежно сталкиваются то с одним, то с другим.

Вот, вкратце, какие «подводные камни» встретились нам при внимательном рассмотрении, казалось бы, такого ясного вопроса.

Парадокс Вавилова

В. ФАБРИКАНТ

В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ оптике часто и плодотворно применяется понятие о пучке параллельных световых лучей, имеющем конечное поперечное сечение. Более того, даже в теории такого волнового явления, как интерференция, во многих случаях допустимо использование этого понятия.

Во многих случаях, но далеко не во всех. В книге «Микроструктура света» известного советского физика С.И.Вавилова разобран весьма поучительный в этом смысле оптический парадокс.

Напомним коротко, как выглядит энергетика интерференционной картины. Интерференция, как мы знаем, есть сложение колебаний. В нашем случае в волнах колеблются значения напряженности электрического и индукции магнитного полей. Эти величины в каждой точке пространства в каждый момент времени определяют энергию электромагнитного поля. Электромагнитная волна переносит энергию, и можно ввести понятие о плотности потока энергии. Так мы называем величину, равную энергии поля, протекающей в единицу времени через единицу поверхности.

Каждая волна характеризуется еще и фазой. Если при сложении двух световых пучков разность их фаз остается все время одной и той же, мы говорим, что имеем дело с когерентными пучками.

В интерференционной картине, возникающей в результате сложения двух когерентных пучков, происходит пространственное перераспределение световой энергии. В светлых полосах энергия больше, чем сумма энергий складываемых пучков; в темных полосах она, наоборот, меньше. Избыток энергии в светлых полосах как раз компенсируется недостатком ее в темных. Полная энергия, распределенная по всей интерференционной картине, точно равна сумме энергий двух интерферирующих пучков.

На рисунке 1 показана зависимость плотности потока энергии в интерференционной картине от смещения по экрану, на котором она наблюдается. Картина получена при сложении двух когерентных световых пучков равной энергии. Горизонтальная пунктирная линия изображает сумму плотностей потоков энергий в складываемых пучках. Части кривой, идущие над этой прямой, соответствуют светлым интерференционным полосам, а части кривой, лежащие под пунктирной прямой, — темным. Суммарная энергия, распределенная в интерференционной картине, изображается площадью под кривой. Эта площадь точно равна площади под пунктирной прямой. Требования строгого бухгалтера природы — закона сохранения энергии — выполняются неукоснительно.

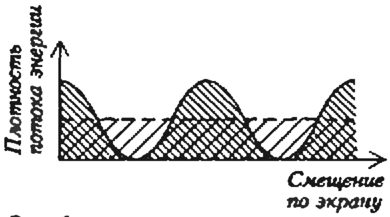


Рис. 1

Перейдем теперь к парадоксу Вавилова. Представьте два совершенно одинаковых когерентных резко ограниченных световых пучка шириной a, пересекающихся под малым углом α (рис.2). В

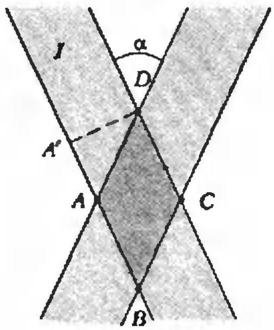


Рис. 2

области $ABCD$ происходит интерференция. Для наблюдения интерференционной картины можно установить экран, перпендикулярный плоскости чертежа, проходящий через точки A и C. Интерференционная картина будет состоять из прямолинейных чередующихся светлых и темных полос, заполняющих экран от точки A до точки C (рис.3).

Распределение плотности потока энергии в интерференционной картине соответствует графику на рисунке 1. Если у обоих пучков одинаковые начальные фазы световых колебаний, то разность фаз световых волн первого и второго пучков в точках, лежащих на прямой BD будет равна нулю. Она соответствует, таким образом, середине центральной светлой полосы. В середине соседней, темной полосы разность фаз должна быть равна π, иными словами, световые колебания в обоих пучках должны быть в противофазе. Разность фаз $\Delta\varphi$ равна разности хода ΔL обеих волн до данного места, деленной на длину волны и умноженной на 2π:

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta L}{\lambda}. \qquad (1)$$

Увеличению длины пути, проходимого волной, на λ соответствует запаздывание фазы на 2π. Из формулы (1) следует, что в середине ближайшей к центру интерференционной картины темной полосы ΔL должно быть равно $\lambda/2$.

Подсчитаем разность хода в точке A. Параллельный пучок можно рассматривать как поток плоских волн, перпендикулярных направлению световых лучей. Проведем через точку D (см. рис.2) одну из волновых поверхностей (поверхностей равной фазы) первого пучка. На этой волновой поверхности лежат точки D и A'. Пути, проходимые обоими пучками до точки D, одинаковы. Для того чтобы попасть в точку A, волновая поверхность первого пучка, проходившая ранее через точку D, должна сместиться на отрезок $A'A$, а волновая поверхность второго пучка, проходившая ранее также через точку D, должна сместиться на отрезок DA. В результате возникает разность хода

$$\Delta L = DA - A'A = a\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = \frac{2a\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \qquad (2)$$

Ясно, что такая же разность хода, но с обратным знаком будет в точке C. Начнем теперь уменьшать угол α. При достаточно малом α можно сделать ΔL равным $\lambda/4$. Тогда вся область AC будет заполнена одной светлой интерференционной полосой. Следовательно, всюду энергия будет превышать сумму энергий двух пересекающихся пучков. Никакой компенсации за счет образования темных полос нет, так как они вообще отсутствуют!

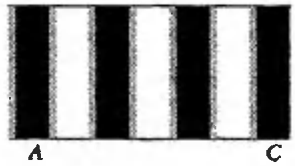


Рис. 3

Эта заметка была опубликована в «Кванте» № 2 за 1971 год.

Можно получить и, так сказать, негативный результат, заставив пересекаться пучки с начальной разностью фаз, равной π. Тогда область AC будет заполнена темной интерференционной полосой.

В первом случае непонятно, откуда берется дополнительная энергия, во втором — неясно, куда исчезает энергия.

Оба случая явно противоречат закону сохранения энергии. Очевидно, в наших рассуждениях есть какой-то дефект, приводящий к противоречию с одним из основных законов природы. Чтобы понять, в чем здесь дело, запишем формулу (2) для указанного случая, когда $\Delta L = \lambda/4$, и воспользуемся при этом малостью угла α ($\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$ для малых α). Тогда получим

$$\frac{\lambda}{4} = \frac{a\alpha}{2}, \text{ или } \alpha = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{a}. \qquad (3)$$

Покажем, что угол α действительно должен быть малым. Возьмем $a = 1$ см, $\lambda = 5\cdot10^{-5}$ см, тогда $\alpha = 2{,}5\cdot10^{-5}$ радиана. Мы видим, что неприятности с законом сохранения энергии возникают при угле между пучками порядка отношения длины волны к величине поперечного сечения пучка.

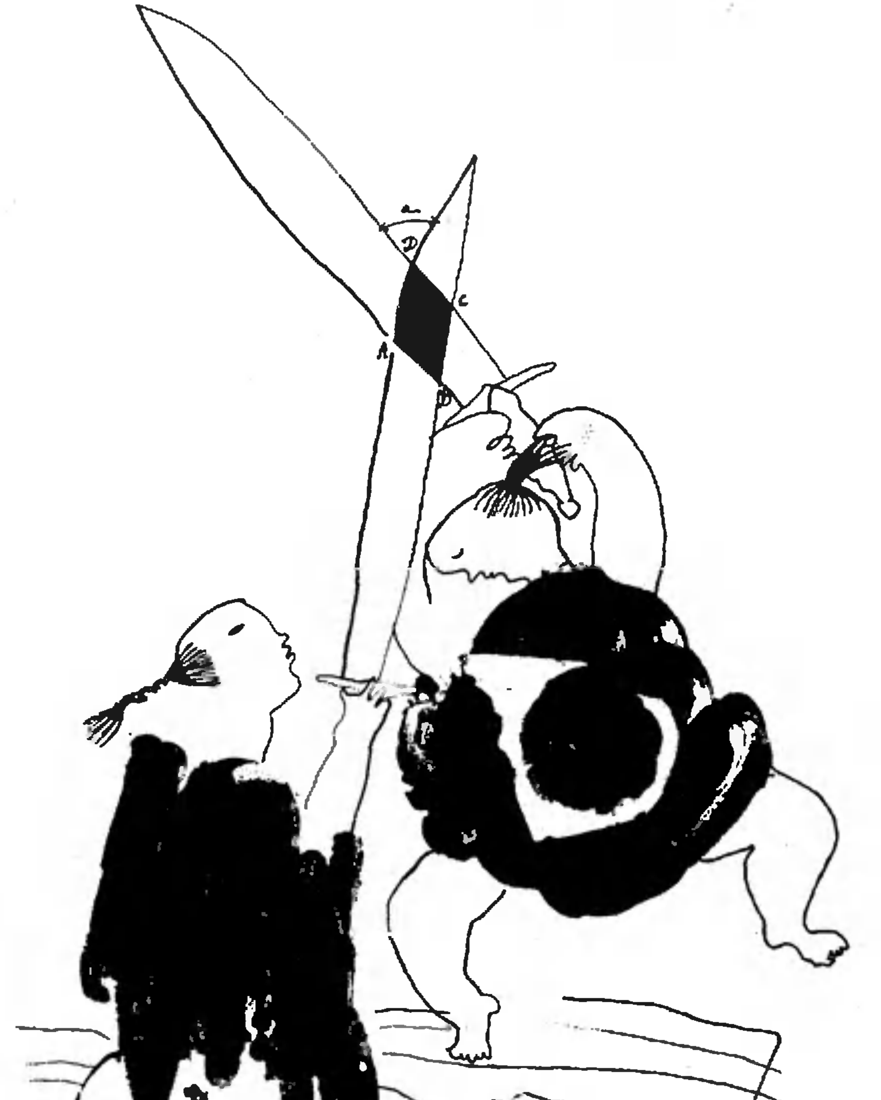
Решение парадокса заключается в том, что при таких малых углах уже нельзя пользоваться понятием идеального параллельного пучка конечного сечения.

При любой попытке реализовать такие пучки мы потерпим неудачу. Ограничение размеров пучка благодаря явлению дифракции с необходимостью приводит к превращению его в расходящийся пучок. Угол расхождения пучка определяется как раз формулой (3). При этом, естественно, угол, под которым пересекаются пучки, можно определить лишь с точностью до величины порядка угла расхождения пересекающихся пучков.

Если бы дифракция еще не была открыта, мы на основании закона сохранения энергии и формулы (3) должны были бы не только догадаться о ее существовании, но и указать на основную закономерность, управляющую величиной дифракционного угла. Это хороший пример того, что закон сохранения в физике всегда может служить надежной путеводной звездой.

Взяв реальные световые пучки, мы никогда, конечно, не получим противоречия с законом сохранения энергии. В интерференционных опытах данного типа всегда дело будет сводиться к пространственному перераспределению потока энергии.

Есть, однако, интерференционные эксперименты, где возникают еще более тонкие энергетические парадоксы, но это, как говорится, уже другая история.

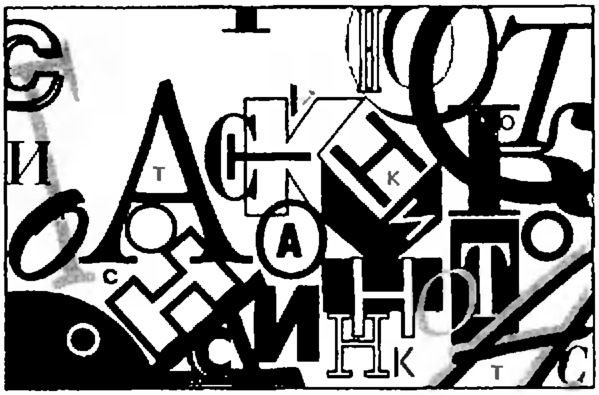


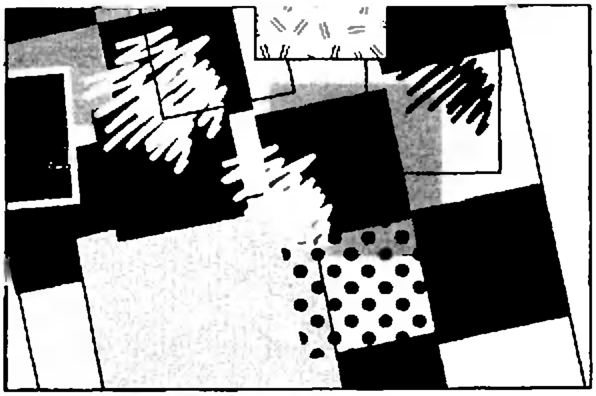
Задачи

1. Из книги выпал кусок. Оказалось, что номера первой и последней страниц этого куска являются трехзначными числами и состоят из цифр 1, 3, 4, но в разном порядке. Сколько страниц содержит выпавший кусок книги? (*И.Акулич*)

2. В языке государства Икнатсо всего семь букв: А, И, К, Н, О, С и Т. Всякое слово в этом языке содержит все семь этих букв и является семибуквенным, причем каждый набор из семи различных букв является словом этого языка. Сын короля Икнатсо принц Скоатни издал полный словарь своей страны. Он расположил буквы в алфавите так, чтобы первое слово словаря было «Икнатсо».

Сколько слов в словаре? Какое слово будет следовать за словом «Скоатни»? Каким словом завершился словарь? (*А.Савин*)





3. Решите арифметический ребус

КРОСС + КРОСС = СПОРТ.

Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные. (*Н.Антонович*)

4. Двое играют в следующую игру: они по очереди закрашивают клетки на клетчатом поле 4×4. За ход следует закрасить одну клетку так, чтобы не образовалось закрашенного квадрата 2×2. Проигрывает тот, кому не удастся сделать такой ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер? (*С.Токарев*)

5. Существуют ли два многоугольника, у которых все вершины общие, но нет ни одной общей стороны? (*В.Произволов*)

Конкурс «Математика 6–8»

Решения задач из этого номера высылайте не позднее 15 апреля 1995 года по адресу: 103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, "Квант" (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать фамилию, имя, класс.

11. Опишите все натуральные числа, которые равны удвоенной сумме некоторых двух своих различных делителей. (*П.Филевич*)

12. Компания из восьми человек семь раз садилась за круглый стол. Могло ли случиться, что любые двое при этом ровно два раза сидели рядом? (*С.Токарев*)

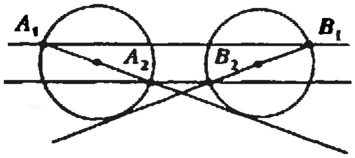
13. На плоскости расположено несколько окружностей. Известно, что окружностей не меньше пяти и любые три из них имеют общую точку. Докажите, что все эти окружности проходят через одну общую точку. (*А.Савин*)

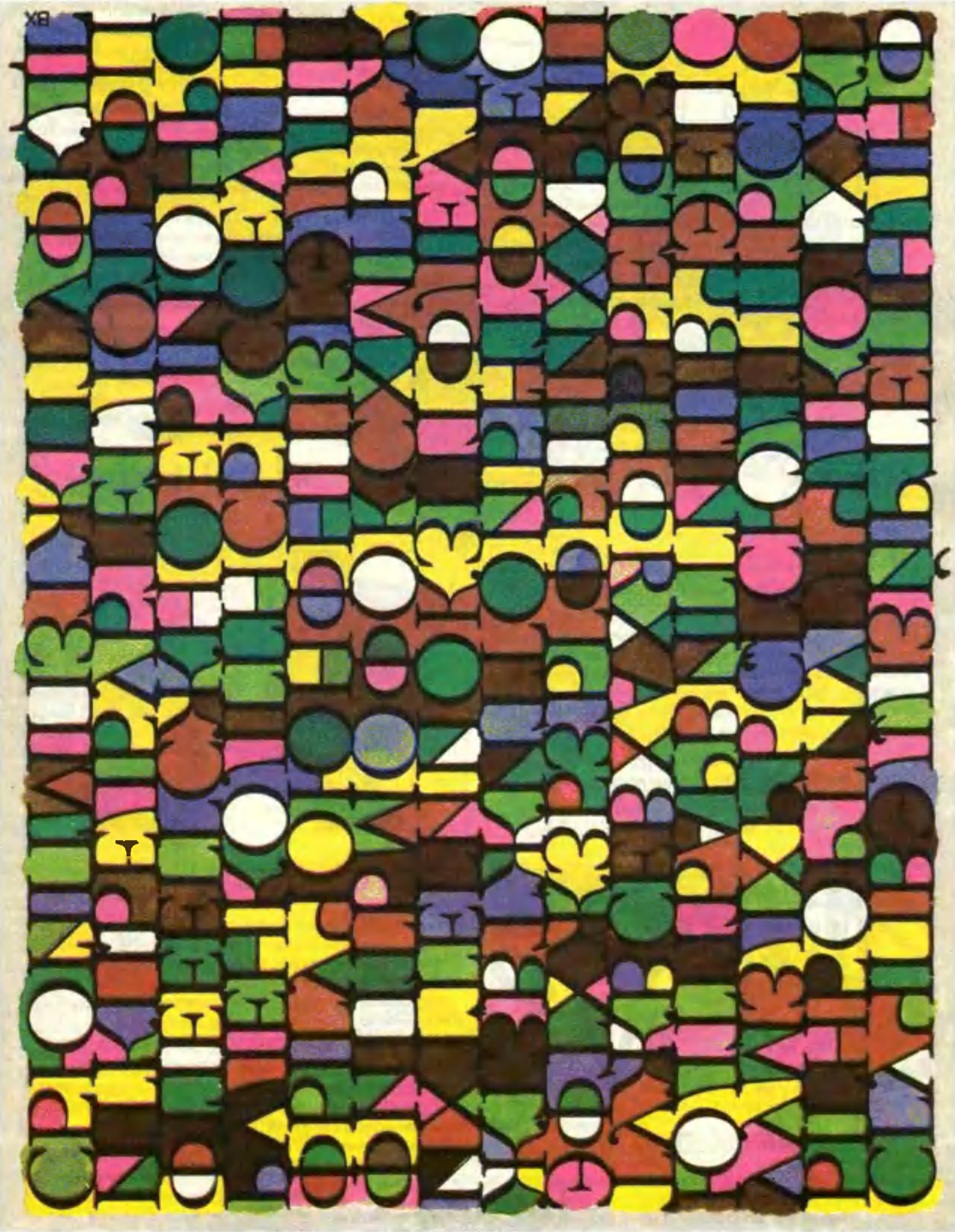
14. Докажите, что число

$$1991\cdot1993\cdot1995\cdot1997+16$$

является полным квадратом. (*В.Произволов*)

15. На плоскости даны две окружности. Через центры каждой из окружностей проведены прямые, касающиеся второй окружности, как это показано на рисунке. Точки A_1 и A_2 — точки пересечения с первой окружностью прямой, проходящей через ее центр, а B_1 и B_2 — такие же точки для второй окружности. Докажите, что прямые A_1B_1 и A_2B_2 параллельны.
А.Грибалко





Криптограмма Жюля Верна

Г. ГУРЕВИЧ

> *Это понимали все. Если документ не удастся расшифровать, положение осужденного безнадежно.*
>
> Жюль Верн. Жангада

Тайна. Зашифрованный документ. Разгадка шифра, открывающая дорогу к богатству или спасающая человеческую жизнь. Это ли не благодатный сюжет приключенческой повести или романа! Классические образцы этого жанра — рассказы «Золотой жук» Эдгара По и «Пляшущие человечки» Артура Конан Дойла.

Таинственные документы, содержание которых выясняется лишь в конце произведения, — излюбленный прием и Жюля Верна. Достаточно вспомнить его романы «Дети капитана Гранта», «Путешествие к центру Земли». Пожалуй, менее известен роман Жюля Верна «Жангада (Восемьсот лье по Амазонке)». В «Жангаде» множество любопытных географических, исторических и этнографических фактов, прекрасны описания животного и растительного мира Амазонки. Однако наиболее увлекательны те главы, которые посвящены расшифровке документа, содержащего исповедь одного из участников преступления, совершенного на алмазных рудниках за двадцать три года до описываемых в романе событий.

Роковое стечение обстоятельств приводит на скамью подсудимых Жоама Дакосту. Большой срок прошел с момента совершения преступления, и Жоам не в силах отвести выдвинутое против него обвинение. Только расшифровка документа может спасти ему жизнь. Такова фабула. А вот текст, который должен быть расшифрован:

*СГУЧПВЭЛЛЗЙРТЕПН
ЛНФГИНБОРГЙУГЛЧДК
ОТХЖГУУМЗДХРЪСГСЮ
ДТПЪАРВЙГГИЩВЧЭЕЦ
СТУЖВСЕВХАХЯФБЬБЕ
ТФЗСЭФТХЖЗБЗЪГФБЩ
ИХХРИПЖТЗВТЖЙТГО
ЙБНТФФЕОИХТТЕГИИО
КЗПТФЛЕУГСФИПТЬМ
ОФОКСХМГБТЖФЫГУЧ
ОЮНФНШЗГЭЛЛШРУД
ЕНКОЛГГНСБКССЕУПН
ФЦЕЕЕГГСЖНОЕЫИОН
РСИТКЦЬЕДБУБТЕТЛО
ТБФЦСБЮЙПМПЗТЖПТ
УФКДГ.*

За разгадку рьяно берется судья Жаррикес. «Будем действовать по системе, — объявил он, — без системы нет логики, а без логики нет успеха». А в успехе судья не сомневался. Он решил воспользоваться методом, блестяще описанным Эдгаром По и основанном на сопоставлении частоты использования различных знаков шифра и букв в обычном тексте:

«... расставив по порядку буквы нашего языка от наиболее к наименее употребительным, я составил азбуку и подставил новые буквы в документы, по принципу нашего бессмертного аналитика Эдгара По, а затем попробовал его прочесть... И представьте, у меня ничего не вышло».

Скрупулезный анализ текста приводит судью к уверенности, что ключом к шифру является число. Он подробно объясняет сыну обвиняемого Маноэлю, как был зашифрован документ:

«Давайте возьмем фразу, все равно какую, ну хотя бы вот эту: «У судьи Жаррикеса проницательный ум». А теперь я возьму наудачу какое-нибудь число, чтобы сделать из этой фразы криптограмму. Предположим, что число состоит из трех цифр, например, 4, 2 и 3. Я подписываю число 423 под строчкой так, чтобы под каждой буквой стояла цифра, и повторяю число, пока не дойду до конца фразы. Вот что получится:

у судьи Жаррикеса проницательный ум
4 23423 423423423 42342342342342 34

Будем заменять каждую букву нашей фразы той буквой, которая стоит после нее в алфавитном порядке на месте, указанном цифрой. Например, если под буквой *А* стоит цифра 3, вы отсчитываете три буквы и заменяете ее буквой *Г*.

Если буква находится в конце алфавита и к ней нельзя прибавить нужного числа букв, тогда отсчитывают недостающие буквы с начала азбуки.

Доведем до конца начатую криптограмму, построенную на числе 423 — взятом произвольно, не забудьте! — и фраза, которую вы знаете, заменится следующей:

ЧУЦИЮЛКВУФКНЙУЧ
УТСЕКЩЦФИПЮРЯЛЦР».

После того как судья приходит к выводу, что криптограмма основана на числе, его уверенность в возможности расшифровки документа сменяется полным пессимизмом. Подсчет, проведенный Жаррикесом, показывает, что поиск ключа перебором всевозможных комбинаций, состоящих не более чем из 10 цифр, потребует более трех веков! Одна попытка сменяется другой, и, наконец, судья из аналитика превращается в игрока, пытающегося наудачу отгадать заветное число.

Наступает день казни. Жоама Дакосту ведут на виселицу...

Все оканчивается благополучно. Выручает счастливый случай. Другу Жоама удается узнать, что автора криптограммы звали Ортега. Поставив буквы О, Р, Т, Е, Г, А под последними шестью буквами документа и подсчитав, на сколько эти буквы по алфавиту сдвинуты относительно букв криптограммы, судья, наконец, находит ключ к документу:

О Р Т Е Г А
4 3 2 5 1 3
Т У Ф К Д Т

Жюль Верн — великий писатель, и ни у кого из читателей нет сомнения,

Эта статья была опубликована в «Кванте» №9 за 1985 год.

что без счастливой случайности отгадать число 432513 — невозможно![1]

Ну, а теперь сообщим читателю, что Жаррикес мог расшифровать криптограмму, и не дожидаясь счастливой случайности. Самое удивительное то, что судья прошел практически весь путь до отгадки. Как говорится, ключ лежал у него в кармане.

Вернемся к тексту романа. Вот рассуждения Жаррикеса, ведущие к решению задачи: «Я уверен, что в документе упоминается Жоам Дакоста. Если бы строчки были разделены на слова, то мы могли бы выделить слова, состоящие из семи букв, как и фамилия Дакоста, и, пробуя их одно за другим, может быть и отыскали бы число, являющееся ключом криптограммы».

Не ясно, почему отсутствие разделения текста на отдельные слова кажется судье непреодолимым препятствием. На самом деле оно только увеличивает объем необходимого перебора. Маноэль возражает судье: «Ну, что ж! Если имя Дакосты упоминается, тогда, принимая одну за другой каждую букву этих строк за первую из тех семи, что составляют его имя, мы в конце концов найдем его».

Вот он — прямой путь к решению задачи! Перебор не так уж велик. Текст состоит из 252 вариантов. В один прекрасный момент, записав над фрагментом ЙБНТФФЕ слово ДАКОСТА, мы определили бы последовательность цифр 5134325. Естественно предположить, что последняя цифра 5 — начало следующего периода:

Д А К О С Т А
...5 1 3 4 3 2 5 1 3 4 3 2 5 1 3 4 ...
...Т Г О Й Б Н Т Ф Ф Е О И Х...

Вместо ключа 432513 мы нашли его циклическую перестановку 513432, что ни в коей мере не мешает расшифровке текста.

И наконец, обсудим следующий вопрос. Мы имели представление о содержании документа и поэтому смогли угадать слово, в него входящее. По этому слову и была проведена расшифровка. А как быть, когда содержание документа неизвестно?

Есть несколько путей. Можно, как и раньше, пытаться отгадать какое-нибудь слово (либо часть слова), входящее в документ. (В текстах часто встречаются слова «который», «тогда», «если», «что» и т.д.; приставки «при», «пре», «под».) Такой поиск может значительно увеличить объем перебора, однако шансов на успех достаточно много. По-видимому, более рациональным путем является проведение анализа частоты использования различных букв в криптограмме. Но как же так?! Ведь Жаррикес прямо говорит, что если ключом к шифру служит число, такой путь неприемлем: «Что же из этого следует? Что значение каждой буквы определяется случайно поставленной под ней цифрой, и буква в криптограмме никогда не обозначает одной и той же буквы текста».

Рассмотрим следующее устройство для кодирования (рис.1). Предположим для простоты, что ключом шифра служит трехзначное число. На четырех концентрических кругах, меньший из которых неподвижен, а остальные могут вращаться относительно своего центра, выпишем буквы алфавита. Пусть в качестве ключа выбрано число 259. Повернем первый круг против часовой стрелки на две буквы, второй — на пять букв, а третий — на девять букв (рис.2). Кодирование производится следующим образом. Первую букву текста находим на неподвижном круге и вместо нее записываем соответствующую ей букву первого круга, вместо второй буквы текста — соответствующую ей букву второго круга и т.д., вместо $3k+i$ ($i = 1, 2, 3$; $k = 0, 1, 2, \ldots$) буквы текста — соответствующую ей букву i-го круга.

Из самого процесса кодирования следует, что если разница между номерами мест, на которых стоят любые две буквы текста, кратна 3, то при их кодировании используется одна и та же цифра. Поэтому утверждение Жаррикеса о том, что буква в криптограмме никогда не обозначает одной и той же буквы текста — ошибочно.

Теперь перейдем к расшифровке. Предположим, мы знаем, что ключ — трехзначное число. Становится ясно, что для нахождения первой цифры этого числа надо провести анализ набора, состоящего из первой, четвертой, ..., $3k+1$-й, ... букв текста; для определения второй цифры — набора, состоящего из второй, пятой, ..., $3k+2$-й, ... букв; для определения третьей цифры — набора, состоящего из третьей, шестой, ..., $3(k+1)$-й, ... букв.

Остается выяснить вопрос: как быть, когда неизвестно, из какого количества цифр состоит ключ? Здесь уже не обойтись без перебора. Сначала предполагаем, что ключ — двузначное число, затем — трехзначное и т.д., — до тех пор, пока текст не будет расшифрован.

Пропуская промежуточные варианты, сразу рассмотрим последовательность расшифровки нашей криптограммы для случая, когда ключ — шестизначное число.

Весь текст криптограммы разбиваем на шесть наборов букв по правилу, описанному выше[2], и подсчитываем, сколько раз буквы алфавита входят в каждый из наборов. Результаты подсчетов приведены в таблице 1.

[1] *В послесловии к роману приводится следующий интересный факт: «Писатель ... получил письмо от своего приятеля, профессора Мориса д'Оканя, узнавшего, что одному студенту Политехнической школы удалось прочесть криптограмму, на которой держится весь замысел «Жангады». Роман еще печатался в журнале, и потому было не поздно исправить досадную оплошность. Жюль Верн спешно подготовил для отдельного издания более сложную перестановку букв, гарантирующую от преждевременности прочтения документа... Пожалуй, ни в каком другом произведении Жюля Верна шифрованный документ не составлен столь замысловато».*

[2] *В первый набор входят 1-я, 7-я, ..., $6k+1$-я, ... буквы; во второй набор — 2-я, 8-я, ..., $6k+2$-я, ... буквы; ...; в шестой набор — 6-я, 12-я, ..., $6(k+1)$-я, ... буквы, где $k = 0, 1, \ldots, 41$.*

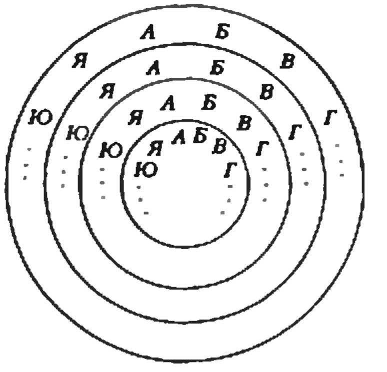


Рис. 1

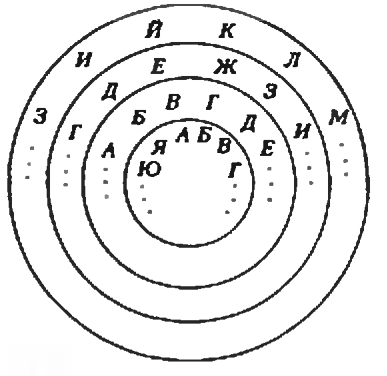


Рис.2

Таблица 1

№ набора	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
1	1	0	0	2	3	0	1	0	3	0	0	0	2	1	1	0	1	4	8	0	4	2	2	1	0	0	1	2	0	2	0	1
2	0	1	0	9	1	3	0	1	2	0	0	4	0	0	1	1	1	4	2	1	5	3	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
3	0	3	4	0	1	3	2	2	1	1	3	2	1	2	4	2	2	0	2	4	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	2	0	0	0	3	0	3	1	2	3	0	0	4	1	0	0	2	6	5	0	1	1	3	2	0	1	0	1	0	1	0
5	1	6	0	4	1	1	4	1	0	2	0	1	1	0	4	5	2	2	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	2	0	0
6	0	0	2	5	0	5	1	2	3	1	1	2	1	3	1	2	1	2	1	1	3	3	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0

Таблица 2

№ набора	Величина сдвига									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5	1	1	9	**13**	1	6	4	7	6
2	6	2	2	**19**	3	4	9	5	4	5
3	8	8	11	3	5	**12**	11	5	5	5
4	5	4	6	3	8	**15**	1	4	6	8
5	6	**17**	3	7	6	1	9	7	2	8
6	9	4	6	**12**	3	10	7	8	7	4

В каждом наборе — всего по 42 буквы: этого, конечно, маловато для того, чтобы сделать достоверные выводы о частоте использования каждой из букв криптограммы. Наша задача упрощается тем обстоятельством, что для каждого набора достаточно отгадать цифру, на которую осуществлялся сдвиг букв алфавита при кодировании.

Возьмем четыре наиболее употребительные буквы: *А, Е, И, О* — и подсчитаем общее число их вхождений в первоначальный текст при различных величинах сдвига от 0 до 9. Результаты приведены в таблице 2.

Поскольку мы выбрали наиболее часто встречающиеся буквы, естественно предположить, что первая цифра ключа — 4, вторая — 3, четвертая — 5, пятая — 1, шестая — 3. Что касается третьей цифры, то ее следует выбирать из цифр 2, 5, 6. Окончательная расшифровка криптограммы теперь уже не представляет никакой трудности.

ИНФОРМАЦИЯ

XXII ЛЕТНЯЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА ВО ВЛАДИВОСТОКЕ

7 июля 1994 года в городе Владивостоке на берегу Амурского залива, в Приморском краевом институте усовершенствования учителей, открылась XXII Летняя физико-математическая школа для учащихся старших классов Дальнего Востока. В течение почти трех недель около 150 школьников Владивостока, Приморского и Хабаровского краев и Амурской области чередовали занятия математикой и физикой (до обеда) с факультативными занятиями современной экономикой и английским языком (после обеда) и с каждодневными (погода была хорошая) купаниями в Амурском и Уссурийском заливах, спортивными соревнованиями и экскурсиями.

Слушателями Школы стали призеры городских и районных олимпиад по математике и физике, активные участники школьных кружков в физико-математических школах и лицеях Дальнего Востока, ну и просто те, кто настолько любит математику и физику, что готовы отдать часть летнего отдыха на их изучение. Чем же (кроме теплого моря) привлекательна для них Владивостокская летняя школа?

По установившейся традиции, занятия в Школе вели преподаватели МФТИ (В.О.Геоджаев, Л.И.Купцов, В.Н.Топников и В.М.Уроев) и Владивостока (В.Н.Савченко), а также впервые принявшие участие в работе Школы члены редколлегии журнала «Квант» (А.А.Егоров и А.И.Черноуцан). Впрочем, последние 14 лет бессменным директором и преподавателем Школы является член редколлегии журнала математик В.М.Уроев. Лекции по экономике (вызвавшие живой интерес слушателей и преподавателей Школы) были прочитаны научным сотрудником Института мировой экономики и международных отношений РАН Е.М.Черноуцан. Для желающих были организованы курсы английского языка.

Основная форма занятий — решение задач, приводящих к интересным самостоятельным «открытиям». Девятиклассники и десятиклассники на занятиях по математике с удовольствием разбирали задачи по элементарной теории чисел и комбинаторике, увлеченно занимались геометрией, решали разнообразные олимпиадные задачи. Школьники узнали, что такое «принцип Дирихле», метод математической индукции и бином Ньютона, сами доказали (с помощью преподавателей) теоремы Ферма (малую), Эйлера и Вильсона, познакомились с комплексными числами.

На уроках физики темы были на первый взгляд школьные — механика, молекулярная физика, — но многие задачи содержали некую «изюминку», и их внимательный анализ позволял глубже понять физический смысл изучаемых законов. От несложных задач разговор порой незаметно переходил к интересным примерам из современной физики, из реального научного опыта преподавателей. Часть занятий была посвящена изучению и объяснению живых демонстраций — иногда шутливых, но зачастую вполне серьезных. В общем, как выяснилось, физика может быть не скучной, а вполне интересной и даже иногда веселой.

Столь же обширна была программа и у самых старших — одиннадцатиклассников. Учитывая довольно близкую перспективу вступительных экзаменов в вузы, им были рассказаны многие вещи, полезные будущим абитуриентам. Разумеется, не были забыты и «неабитуриентские» математика и физика. В частности, были прочитаны лекции об алгебраических и трансцендентных числах, о современных проблемах физики.

(Продолжение см. на с.50)

Кто поедет в Рио?

Г. АДЕЛЬСОН-ВЕЛЬСКИЙ, И. БЕРНШТЕЙН, М. ГЕРВЕР

ЗАДАЧА, о которой идет речь в этой статье, вовсе не носит специфически шахматного — да и вообще спортивного — характера. Ее можно было бы, например, сформулировать так: из n попарно не равных по весу камней отобрать и расположить в порядке убывания k самых тяжелых, пользуясь лишь двухчашечными весами без гирь, с помощью минимального числа взвешиваний. А вот формулировка, имеющая совершенно реальный математический смысл: составить программу для вычислительной машины, которая за минимальное число сравнений отбирала бы из n попарно неравных чисел k самых больших и располагала бы их в порядке убывания[1].

Оговорка о попарном неравенстве чисел (или камней) автоматически обеспечивает выполнение условия: если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$. Не нужно быть опытным болельщиком, чтобы понять, что в спорте на самом деле ничего подобного нет и что, скажем, проигрыш Фишера Петросяну на турнире претендентов в Кюрасао и выигрыш Спасского в решающей партии матча на первенство мира с Петросяном отнюдь не предрешают исхода матча Спасский – Фишер.

Отметим, впрочем, что олимпийская система (проигравший выбывает) основана именно на допущениях, сформулированных в начале статьи. Кстати, «обычная» олимпийская схема, по которой проигравший в финале сразу объявляется вторым призером (а победитель встречи проигравших полуфиналистов — третьим), есть лишь ухудшенный вариант «Правил ВОМИ»!

Задача, о которой рассказывают авторы, как уже говорилось, носит вполне серьезный характер. (Между прочим, ее решение, при всей его видимой «элементарности», удалось получить лишь совсем недавно, что, безусловно, представляет особый интерес для нашего журнала.) Излагать же ее показалось авторам приятнее и веселее на «шахматном» языке...

Глава I. Правила ВОМИ

Свершилось! Шахматисты города Васюки, наконец, допущены на Всемирную Олимпиаду в Рио-де-Жанейро. Выяснилось это, как обычно, в последний момент, и теперь нужно в считанные дни провести отборочный турнир и выбрать из 128 шахматистов-любителей трех сильнейших. Двое из них (чемпион и второй призер) будут играть за команду Васюков на первой и второй доске; третий призер поедет в Рио в качестве запасного участника.

Долго не утихали жестокие споры — как получше организовать турнир, и когда времени почти совсем не осталось, приняли, наконец, следующие предложения:

1. Отборочные игры проводить последовательно, одну за другой[2]. Участников каждой партии назначать в зависимости от результатов предыдущих игр.

2. Ничьи отменить (в случае ничейного исхода победителя определять по жребию).

3. Если A выиграет у B, считать, что A сильнее B.

4. Если A сильнее B, а B сильнее C, считать, что A сильнее C.

5. Если уже установлено, кто из двух шахматистов сильнее, партию между ними не проводить.

6. Поручить ВОМИ[3] срочно разработать точные правила для определения 1-го, 2-го и 3-го призеров за минимальное число партий.

Вот какие правила были составлены ВОМИ.

§ 1. Определение чемпиона

Игры проводятся по олимпийской системе. На 1-м этапе все 128 участников разбиваются на 64 пары, в каждой паре определяется победитель (64 партии). На 2-м этапе 64 победителя 1-го этапа разбиваются на 32 пары, в каждой из них определяется победитель (еще 32 партии) и т.д.: на 3-м этапе проводится 16 партий, на 4-м — восемь, на 5-м — четыре, на 6-м — две, на 7-м — одна. Всего — 127 партий.

Победителю финальной партии присваивается титул «чемпион» и предоставляется право играть на первой доске.

§ 2. Определение второго призера

Ясно, что на это место вправе претендовать лишь те шахматисты, которые проиграли только чемпиону. Их семеро. Присвоим им номера от 1 до 7 (№ 1 проиграл чемпиону на 1-м этапе, № 2 — на 2-м, и т.д.).

Определение второго призера проводится так: № 1 играет с № 2, выигравший играет с № 3, выигравший эту партию — с № 4 и т.д. (всего 6 партий).

Победитель последней партии объявляется «вторым призером» и играет за команду на второй доске.

§ 3. Определение запасного участника (третьего призера)

На это место претендуют шахматисты, не проигравшие никому, кроме чемпиона и второго призера. Второму призеру они непременно проиграли[4].

Второй призер выиграл не больше семи партий. Действительно, пусть вторым призером стал № i (i — одно из чисел от 1 до 7, см. § 2). Тогда при игре по олимпийской системе (см. § 1) он выиграл $i-1$ партию (на 1-м, 2-м, ... $(i-1)$-м этапах). Затем (см. § 2) он победил максимум одного шахматиста с номером, меньшим чем i,[5] $(7-i)$ шахматистов с номерами, большими чем i, т.е. сыграл еще $(8-i)$ или $(7-i)$ партий. Складывая это число с $(i-1)$, получим, что всего второй призер выиграл 7 или 6 партий.

Таким образом, на место третьего призера претендуют не более семи шахматистов, сильнейшего из них можно определить за 6 партий. Этот шахматист и будет запасным участником команды.

§ 4. Выводы

Для того чтобы найти среди 128 шахматистов чемпиона и второго и третьего призеров, достаточно провести

$$127+6+6=139$$

партий.

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 8 за 1972 год.

[1] *В статье разбирается лишь случай $k=3$ (об общем случае говорится в задаче № 3).*

[2] *После знаменитого сеанса гроссмейстера О. Бендера при словах «одновременная игра» васюкинские любители впадают в мрачное оцепенение.*

[3] *Васюкинскому отделению Математического института.*

[4] *Иначе они оставались бы кандидатами на вторую доску.*

[5] *Если $i=1$, то таких шахматистов, разумеется, нет; если же $i>1$, то такие шахматисты имеются, и № i выиграл у сильнейшего из них.*


B
Fig.
c
f
g
h

Глава II. Нельзя ли короче?

Хороши ли правила ВОМИ? Нельзя ли определить 1-го, 2-го и 3-го призеров за меньшее число партий?

§ 1. Мнение руководства, случай и Рок

Пусть еще до соревнований у руководства Клуба Четырех Коней сложилось мнение, что сильнейший шахматист — A, второй по силе — B и третий — C. И пусть цель соревнований — проверить, что это действительно так.

Меньше чем за 127 партий такую проверку осуществить нельзя, так как все шахматисты, кроме чемпиона, должны проиграть хотя бы по одной партии. А за 127 партий — можно: 125 «аутсайдеров» (все, кроме A, B и C) играют 124 партии «на вылет» (после каждой партии проигравший выбывает), затем победитель играет с C и проигрывает[6], C проигрывает[6] B и B проигрывает[6] A. Собственно говоря, не обязательно даже знать призеров заранее: их можно угадать случайно, так что иногда («если повезет») три призера определяются за 127 партий.

Мы будем, однако, считать, что про силу шахматистов ничего заранее не известно и что нам «не везет». Более того, представим себе, что Злой Рок (или агент соперников — как хотите) влияет на исход каждой партии так, чтобы соревнования тянулись как можно дольше. Мы покажем, что в этом случае выбрать 1-го, 2-го и 3-го призеров среди 128 шахматистов меньше, чем за 139 партий, нельзя, как бы [7] ни проводились отборочные соревнования.

§ 2. Формулировки теоремы

Исследуем сразу общий случай, когда в соревнованиях участвует не обязательно 128, а любое число шахматистов. Обозначим его через n. Введем также следующее обозначение. Пусть N — произвольное число; для некоторых целых чисел l выполняется неравенство $2^l \ge N$. Обозначим через $l[N]$ наименьшее из этих целых чисел.

Примеры

1. Так как $2^3 < 10 < 2^4$, $l[10] = 4$.
2. Если $2^{k-1} < N \le 2^k$, то $l[N] = k$.
3. Вскоре нам понадобится знать, чему равно $l[N]$, если $N = 128 \cdot 127$. Так как $128 = 2^7$ и $2^6 < 127 < 2^7$, то $2^{13} < 128 \cdot 127 < 2^{14}$, откуда $l[128 \cdot 127] = 14$.

[6] *Если он выиграет, то, значит, руководство ошибалось, и что делать дальше — неясно.*

[7] *Разумеется, в соответствии с предложениями 1 – 5 главы I.*

Теорема. *Для определения 1-го, 2-го и 3-го призеров среди n шахматистов нужно сыграть не менее чем*

$$P(n) = l[n(n-1)] + n - 3$$

партий.

Пояснение. По-другому эту теорему можно сформулировать так.

Пусть разрешено провести максимум R партий, где

$$R < l[n(n-1)] + n - 3.$$

Тогда (по каким бы правилам ни проводились отборочные соревнования) результаты партий могут оказаться такими, что после R партий определить 1-го, 2-го и 3-го призеров еще не удастся.

Если n=128, то

$$l[n(n-1)] = l[128 \cdot 127] = 14$$

(см. пример 3). Значит, $P(128)$=14+128—3=139. Тем самым из сформулированной теоремы следует, что для определения 1-го, 2-го и 3-го призеров среди 128 шахматистов нужно не менее чем 139 партий. За 139 партий их определить можно по правилам ВОМИ — так что правила ВОМИ хороши!

§ 3. В бухгалтерии Злого Рока

В § 1 этой главы мы предупредили, что Злой Рок старается затянуть отборочные соревнования. Сейчас мы укажем стратегию, придерживаясь которой, он добьется, чтобы для определения 1-го, 2-го и 3-го призеров среди n шахматистов понадобилось как минимум

$$P(n) = l[n(n-1)] + n - 3$$

партий.

Определение 1. Будем называть *командой* любую пару[8] шахматистов (A,B). Подчеркнем, что команды (A,B) и (B,A) — разные: A играет в команде (A,B) на первой доске, а в команде (B,A) — на второй.

До начала соревнований на участие в Олимпиаде претендуют все команды. Сколько их?

До турнира каждый из n шахматистов имеет шансы играть на первой доске. При этом он может возглавить $n-1$ команду (вторым к нему может попасть любой шахматист, кроме него самого). Таким образом, число всех команд равно $n(n-1)$.

В ходе соревнований число команд, претендующих на поездку в Рио, постепенно уменьшается (пока не останется ровно одна такая команда).

[8] *«Команда» состоит именно из двух, а не из трех человек: запасной игрок в состав команды не включается (так удобнее для изложения).*

Пусть в турнире уже сыграно несколько партий. По их результатам разделим всех участников на 3 группы. К первой отнесем всех, кто не проиграл ни одной партии. Ко второй — тех, кто проиграл ровно одну партию, причем обязательно шахматисту первой группы. К третьей — всех остальных (тех, кто проиграл более одной партии или одну партию — но игроку не из первой группы).

Упражнение. Проверьте, что в этой ситуации на поездку в Рио претендуют следующие команды:

1) все команды (A,B), в которых A — из первой группы, а B — из второй, причем единственную партию, которую B проиграл, он проиграл именно A;

2) все команды (C,D) такие, что и C, и D — из первой группы.

Проверьте, что никакие другие команды на участие в Олимпиаде не претендуют.

(**Указание.** Пусть B проиграл A, тогда B уже заведомо не станет чемпионом, а вторым призером сможет стать только при том условии, что чемпионом окажется A. Тем самым B уже не сможет возглавить никакую команду и только в одну команду — в (A,B) — может попасть в качестве второго участника.)

Определение 2. Если к какому-то моменту соревнований шахматист A выиграл a партий, а шахматист B — b партий, то мы будем говорить, что в *активе* команды (A,B) имеется a+b очков. Число 2^{a+b} назовем *характеристикой* команды (A,B).

После каждой новой партии актив любой команды либо увеличивается на 1 (если победитель партии входит в эту команду), либо не меняется. Соответственно характеристика любой команды либо удваивается, либо остается неизменной.

Определение 3. Пусть проведено некоторое число партий. Сложившуюся ситуацию удобно характеризовать числом M, которое равно сумме характеристик всех команд, еще претендующих на участие в Олимпиаде.

Чему равно M в начальной ситуации (до проведения соревнований)? Никто не выиграл еще ни одной партии, в активе каждой команды 0 очков, характеристика любой команды равна $2^0 = 1$. Таким образом, $M_{\text{начальное}}$ — это просто общее число команд, т.е. $M_{\text{начальное}}=n(n-1)$.

Лемма. Пусть в некоторой ситуации, характеризуемой числом M, проводится партия между шахматистами A и B. Обозначим через M_A число, характеризующее ситуацию, которая возникнет, если выиграет A, а через M_B — характеристику ситуации в случае выигрыша B. Тогда

$$M_A + M_B = 2M,$$

так что хоть одно из чисел M_A и M_B не меньше M.

Доказательство. До игры между A и B все команды, претендующие на участие в Олимпиаде, естественно разбить на 3 группы.

I группа. Команды, в которые A входит, а B либо не входит, либо входит после A.[9]

II группа. Команды, в которые B входит, а A либо не входит, либо входит после B.

III группа. Команды, в которые не входят ни A, ни B.

Обозначим через M_I, M_{II}, M_{III} суммы характеристик команд I, II и III групп (так что $M = M_I + M_{II} + M_{III}$).

Докажем, что $M_A = 2M_I + M_{III}$. Действительно, после победы A на поездку в Рио претендуют только команды I и III групп; при этом в III группе характеристики команд не меняются, а в I группе удваиваются.

Аналогично доказывается, что

$$M_B = 2M_{II} + M_{III}.$$

Итак,

$$M_A + M_B = 2(M_I + M_{II} + M_{III}) = 2M.$$

Стратегия Злого Рока. Как идет отборочный турнир? Как мы знаем, все партии проводятся последовательно (одна за другой). Участники каждой новой партии назначаются в зависимости от результатов всех предыдущих игр.

Пусть уже проведено некоторое число партий, и очередная игра назначена между шахматистами A и B. Злой Рок подсчитывает характеристики M, M_A и M_B (см. лемму); затем если $M_A > M_B$, он устраивает так, чтобы победил A, если $M_B > M_A$ — так, чтобы победил B; если же $M_A = M_B$, то он не вмешивается. Так как большее из чисел M_A и M_B заведомо не меньше M (по лемме), то при такой стратегии характеристика M после каждой партии не уменьшается.

Подчеркнем, что Року достаточно быть Всемогущим и не нужно быть Всеведущим: не вникая в планы устроителей турнира, он применяет одну и ту же стратегию при любом расписании игр.

Далее мы покажем, что при этой стратегии определение 1-го, 2-го и 3-го призеров потребует как минимум

$$P(n) = l[n(n-1)] + n - 3$$

партий.

§ 4. Доказательство теоремы

До соревнований $M_{\text{начальное}} = n(n-1)$. Чему равно M, когда соревнования закончены и определены 1-й, 2-й и 3-й призеры X, Y и Z? Для поездки на Олимпиаду отобрана одна команда (X, Y). Обозначим через v число очков в активе этой команды. Тогда $M_{\text{конечное}} = 2^v$.

Если Злой Рок придерживался описанной выше стратегии, то после каждой партии характеристика M не уменьшалась, так что $M_{\text{конечное}}$ не меньше чем $M_{\text{начальное}}$. Отсюда $2^v \ge n(n-1)$, т.е. $v \ge l[n(n-1)]$. Таким образом, первые два призера X и Y участвовали не меньше чем в $l[n(n-1)]$ партиях.

Кроме того, было проведено как минимум $(n-3)$ партии без их участия. Действительно, каждый из $(n-3)$ шахматистов, не вошедших в призовую тройку, должен был проиграть кому-то, кроме X и Y, иначе он претендовал бы на третье место.

Таким образом, всего в турнире было сыграно не менее чем

$$P(n) = l[n(n-1)] + n - 3$$

партии. Теорема доказана.

Глава III. Как определить трех призеров среди n шахматистов?

В главе I были приведены правила, по которым можно определить трех призеров среди 128 шахматистов. Приведем аналогичные правила для случая n шахматистов. Пусть $l[n] = k$, т.е.

$$2^{k-1} < n \le 2^k.$$

§ 1. Определение чемпиона

Игры проводятся по олимпийской системе. На 1-м этапе всех участников разбивают на две группы: в одной $2^k - n$, в другой — остальные $2n - 2^k$ человек; члены второй группы разбиваются на $(n - 2^{k-1})$ пар; в каждой паре определяется победитель, которого допускают ко 2-му этапу; члены первой группы начинают борьбу сразу со 2-го этапа. Всего ко 2-му этапу допущено

$$(n - 2^{k-1}) + (2^k - n) = 2^{k-1}$$

участников. Все этапы, начиная со 2-го, «стандартные»[10]: участники этапа разбиваются на пары, в каждой из пар определяется победитель, которого допускают к следующему этапу. Чемпион определяется в финальной игре на k-м этапе. Так как каждый из n участников, кроме чемпиона, проигрывает при такой системе ровно одну партию, то всего на k этапах будет сыграна $(n-1)$ партия.

§ 2. Определение второго призера

На это место претендуют шахматисты, проигравшие только чемпиону. Их не более чем k; присвоим им номера 1, ..., k (№ i — это тот, кто проиграл чемпиону на i-м этапе[11]).

Проводим игры так: № 1 играет с №2,[12] затем победитель — с № 3, и т.д. (всего не более чем $k-1$ партия). Победитель последней партии — второй призер.

§ 3. Определение третьего призера

Легко проверить (см. § 3 главы I), что второй призер выиграл не более k партий, и поэтому на третье место претендуют не более k человек. Сильнейший из них заведомо определяется за $k-1$ партию. Это и есть третий призер.

§ 4. Выводы

Чтобы найти среди n шахматистов 1-го, 2-го и 3-го призеров, достаточно провести

$$(n-1) + (k-1) + (k-1) =$$
$$= 2k + n - 3 = 2l[n] + n - 3$$

партий. Это число мы обозначим через $Q(n)$.

Глава IV. Обсуждение результатов

Пусть n — целое число, $n \ge 3$. Обозначим через $I(n)$ число, удовлетворяющее следующим двум условиям:

1) за $I(n)$ партий наверняка можно определить 1-го, 2-го и 3-го призеров среди n шахматистов;

2) если $R < I(n)$, то результаты партий могут оказаться такими, что за R партий определить 1-го, 2-го и 3-го призеров среди n шахматистов не удастся.

---

[9] *B входит после A только в одну команду (A, B); эта команда включается в I группу, разумеется, только при том условии, что она еще претендует на поездку в Рио.*

[10] *1-й этап в отличие от случая, разобранного в правилах ВОМИ, является «нестандартным» (т.е. требует указанного в этом параграфе дополнительного разбиения участников на группы), если n не есть точная степень двойки.*

[11] *Отметим, что № 1 может не достаться никому (если чемпион начал игры со 2-го этапа).*

[12] *Иногда эта игра не проводится (см. предыдущую сноску), и все начинается с партии между № 2 и № 3.*

Тогда результаты, полученные в главах II и III, можно записать в виде формулы

$$P(n) \le I(n) \le Q(n).$$

Напомним, что

$$P(n) = l[n(n-1)] + n - 3,$$

$$Q(n) = 2l[n] + n - 3,$$

где $l[n] = k$ при $2^k \ge n > 2^{k-1}$.

Можно показать, что $Q(n)$ равно либо $P(n)$, либо $P(n)+1$. В первом случае $I(n) = P(n) = Q(n)$. Во втором случае для $I(n)$ имеются две возможности: либо $I(n) = P(n)$, либо $I(n) = Q(n)$. Обе возможности могут осуществляться, как видно из приведенной таблицы.

В первой группе определим стандартным способом (см. § 1 и § 2 главы III) 1-го призера A и 2-го призера B. На это уйдет 15+3=18 партий. При этом B выиграет не больше чем у четырех человек (см. § 3).

Во второй группе определим сильнейшего C по олимпийской системе (3 партии). При этом C выиграет у двоих.

Следующую (22-ю) партию проведем между B и C. Если победит B, то ясно, что A — чемпион, B — второй призер, а на третье место претендуют пятеро, проигравших B. За оставшиеся 4 партии можно найти среди них третьего призера.

Пусть, наоборот, победит C. Тогда возникнет следующая ситуация (рис. 1): на призовые места претендуют шахматисты A, B, C, D, E и F (стрелки ведут от победителей к побежденным). Проведем 23-ю партию между D и E; пусть в этой партии победит E (случай, когда победит D, проще и рассматривается аналогично).

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$P(n)$	3	5	7	8	10	11	13	14	15	17	18	19	20	21	23	24	25	26
$I(n)$	3	5	7	9	10	11	13	14	16	17	18	19	20	21	23	24	25	26
$Q(n)$	4	5	8	9	10	11	14	15	16	17	18	19	20	21	24	25	26	27

Как именно ведет себя $I(n)$, мы расскажем подробнее в другой раз. А пока попытайтесь разобраться в этом самостоятельно. Попробуйте решить также следующие задачи.

1. Проверьте приведенную выше таблицу.

Указание. Наметим путь решения этой задачи для $n=20$. В этом случае $P[n] = P[20] = 26$.

Разделим 20 шахматистов на две группы: в первой группе 16 человек, во второй — четыре.

24-ю партию проведем между A и E. Если выиграет E, то C — чемпион, E — второй призер, а на третье место претендуют A, D и F. За оставшиеся 2 партии найдем среди них третьего призера.

Если 24-ю партию выиграет A, то (см. рис.2) на первые два места претендуют A и C, на третье — B и E. Проведя две партии (между A и C и между B и E), мы определим 1-го, 2-го и 3-го призеров. Итак, $I(20)=26=P(20)$.

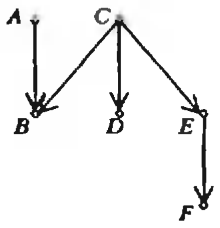


Рис. 1

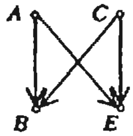


Рис. 2

Только что приведенные правила резко отличаются от стандартных правил из главы III. По стандартным правилам шахматисты, проигравшие хоть одну партию, не участвуют в следующих играх до тех пор, пока не определится чемпион. Только отказавшись от этого, нам удалось определить 1-го, 2-го и 3-го призеров среди 20 шахматистов за 26 (а не за 27) партий.

2. Докажите, что 1-го и 2-го призеров среди n шахматистов наверняка можно определить за $l[n] + n - 2$ партий и может не удастся определить за меньшее число партий.

3. Пусть мы хотим определить среди n шахматистов k сильнейших (1-го, 2-го, ... , k-го призеров). Докажите, что

а) это наверняка можно сделать за $(k-1)l[n]+n-k$ партий;

б) если

$$R < l[n(n-1)\dots(n-k+2)]+n-k,$$

то результаты партий могут оказаться такими, что это не удастся сделать за R партий.

Указание. В задаче б) мы рекомендуем рассуждать так же, как в главе II, рассматривая «команды» $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$, состоящие из $k-1$ участника. Общее число таких команд равно $n(n-1)\dots(n-k+2)$.

ИНФОРМАЦИЯ

XXII ЛЕТНЯЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА ВО ВЛАДИВОСТОКЕ

(Начало см. на с.45)

Как видим, школьникам предлагалось взглянуть на привычные, казалось бы, законы и теоремы под непривычным, не вполне школьным, углом зрения, порешать красивые задачи, в том числе — участвуя в олимпиадах. Победители олимпиад (их было две, одна — чисто математическая, другая — смешанная, физико-математическая) были награждены специальными призами и грамотами журнала «Квант». Кроме того, памятную грамоту журнала «Квант» получил каждый участник Школы. Отметим еще, что все слушатели были приняты в Заочную физико-техническую школу при МФТИ.

Если вспомнить, что кроме уроков и олимпиад были еще занятия в спортзале, соревнования, экскурсии, а ведь летом надо еще и отдыхать, и купаться в море — становится понятно, что жизнь у ребят была весьма насыщенной. Организацией работы и жизни Школы ведала завуч хабаровского лицея № 2 Н.Е.Довбило, а под ее руководством работала группа воспитателей-студентов. Эти молодые люди совсем недавно сами были рядовыми ее участниками, причем некоторые — неоднократно. Именно от них будущие слушатели узнавали о Школе «из первых рук», в частности о том, что практически все прошедшие Школу становятся студентами. Лидером и координатором этой группы студентов был старший воспитатель Евгений Шлямов — студент 5 курса Благовещенского политехнического института. Успешному проведению Школы немало способствовало заботливое отношение директора Приморского краевого ИУУ И.А.Яковлева.

Разумеется, успех столь масштабного предприятия мог состояться только при мощной поддержке организаторов Школы. Это — Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Российский фонд фундаментальных исследований, Московский физико-технический институт, Инновационный фонд Министерства образования РФ, Управление образования Приморского края, а также Международная Соросовская программа образования в области точных наук. Все участники и преподаватели Школы выражают им самую искреннюю благодарность.

В 1995 году во Владивостоке состоится очередная XXIII Летняя школа. Заявки об участие в ней просим присылать в редакцию с пометкой «Приморская летняя школа».

А.Егоров, А.Черноуцан

Гидростатика

Л.АСЛАМАЗОВ

Давление и силы давления

Жидкость оказывает давление на стенки сосуда, в котором она находится, или на любую другую поверхность, соприкасающуюся с ней. Давление — величина скалярная. Оно измеряется абсолютной величиной нормальной (перпендикулярной поверхности) силы, действующей со стороны жидкости на единицу площади поверхности:

$$p = \frac{F}{S}.$$

Давление в различных точках поверхности может быть разным. Поэтому площадь S мы должны брать достаточно маленькой.

По закону Паскаля давление жидкости не зависит от ориентации поверхности. Как бы ни была расположена поверхность в данном месте жидкости, давление на нее будет одним и тем же.

Сила давления всегда перпендикулярна поверхности. В обычных условиях она направлена так, как если бы жидкость стремилась расшириться.

Задача 1. *В сосуд, имеющий форму куба с ребром a, налита доверху жидкость плотностью ρ. Определите силы давления жидкости на дно и стенки сосуда.*

Давление жидкости на дно сосуда равно весу столба жидкости высотой a с площадью основания, равной единице: $p_1 = \rho g a$, где g — ускорение свободного падения. (Для простоты здесь и в других задачах, где это специально не оговорено, предполагается, что атмосферное давление отсутствует.) Сила давления на дно сосуда (рис.1,*а*)

$$F_1 = p_1 S = \rho g a^3.$$

Давление на боковую грань куба будет зависеть от расстояния до поверхности жидкости. На глубине h давление $p = \rho g h$. Так как давление изменяется с глубиной по линейному закону (рис.1,*б*), для определения силы давления мы должны среднее давление

$$p_{ср} = \frac{\rho g a + 0}{2} = \frac{\rho g a}{2}$$

умножить на площадь боковой грани:

$$F_2 = \frac{\rho g a^3}{2}.$$

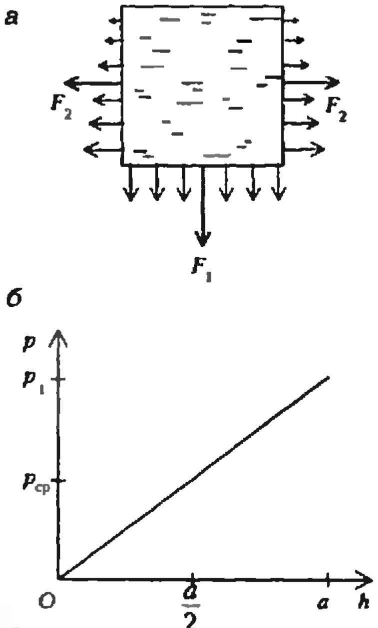


Рис. 1

Задача 2. *В цилиндрический сосуд диаметром D = 0,2 м вставлен поршень с длинной вертикальной трубкой диаметром d = 0,05 м (рис.2). Максимальная сила трения между поршнем и стенками сосуда $F_{тр}$ = 100 Н. Через трубку в сосуд наливают воду. При каком уровне воды в трубке H поршень начнет двигаться? Чему будет равна при этом сила давления воды на дно сосуда? Поршень расположен на высоте h = 0,2 м от дна сосуда. Плотность воды ρ = 10³ кг/м³. Массой поршня с трубкой пренебречь.*

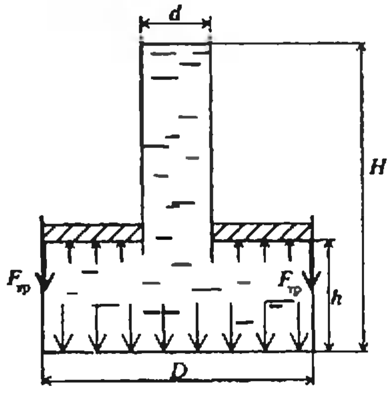


Рис. 2

Давление в жидкости на уровне поверхности поршня определяется расстоянием от этого уровня до свободной поверхности жидкости:

$$p_1 = \rho g (H - h).$$

Поршень начнет двигаться, когда сила давления на него со стороны жидкости станет равной максимальной силе трения:

$$p_1 (S - s) = F_{тр},$$

где $S = \pi D^2/4$ и $s = \pi d^2/4$ — площади поперечных сечений сосуда и трубки соответственно. Подставляя сюда выражение для p_1, находим

$$H = h + \frac{4F_{тр}}{\pi\rho g\left(D^2 - d^2\right)} = 0{,}5\ м.$$

Давление на дно сосуда $p_2 = \rho g H$. Сила давления

$$F = p_2 S = \rho g H \frac{\pi D^2}{4} = 160\ Н.$$

Задача 3. *Длинная вертикальная труба с поршнем опущена одним концом в сосуд с водой. Вначале поршень находится у поверхности воды, затем его медленно поднимают. Как зависит сила, прикладываемая к поршню, от высоты h его поднятия? Площадь поперечного сечения трубы S, атмосферное давление p_0. Изменением уровня воды в сосуде, массой поршня и его трением о стенки трубы пренебречь.*

При поднятии поршня вода под действием атмосферного давления будет вначале заполнять трубу (рис.3,*а*). Давление в трубе на уровне жидкости в сосуде равно атмосферному давлению p_0. Давление воды на поршень меньше атмосферного на величину веса столба жидкости высотой h и площадью основания, равной единице:

$$p = p_0 - \rho g h.$$

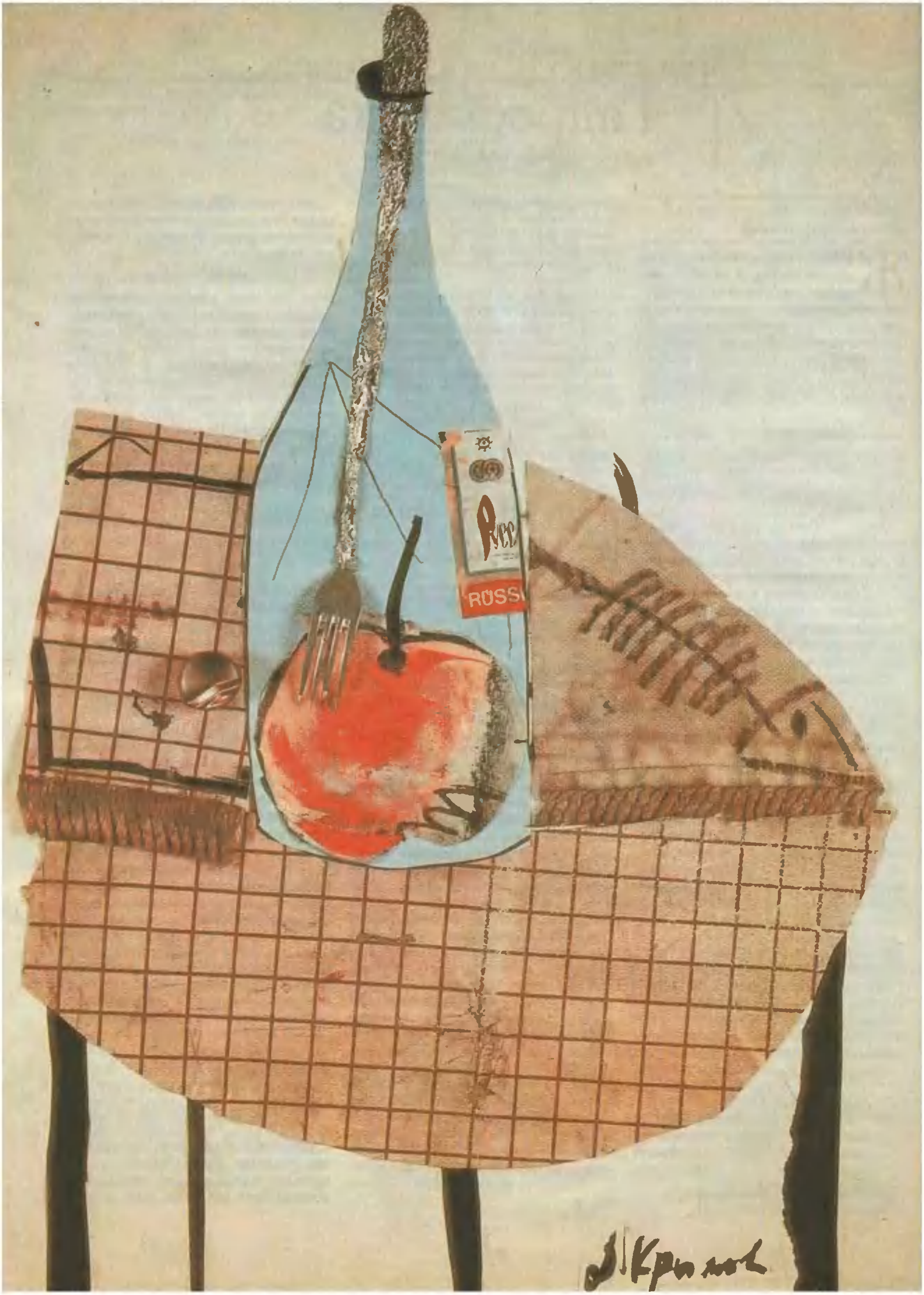
Сверху на поршень по-прежнему действует атмосферное давление. Поэтому для удержания поршня на высоте h к нему надо приложить силу, равную

$$F = (p_0 - p) S = \rho g h S$$

и направленную вверх.

С увеличением h давление воды на поршень будет уменьшаться. На высоте $h_0 = p_0/(\rho g) = 10\ м$ ($p_0 = 9{,}8 \cdot 10^4\ Н/м^2$) давление обратится в ноль. При дальнейшем поднятии поршня уровень воды в трубе изменяться не будет, так как сила атмосферного давления, действующая

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 12 за 1972 год.


RÜSS

на столб жидкости в трубе снизу, уравновесится силой тяжести. Для удержания поршня на высоте $h > h_0$ к нему надо приложить силу

$$F = p_0S .$$

Зависимость прикладываемой к поршню силы F от высоты его поднятия h изображена графически на рисунке 3, *б*.

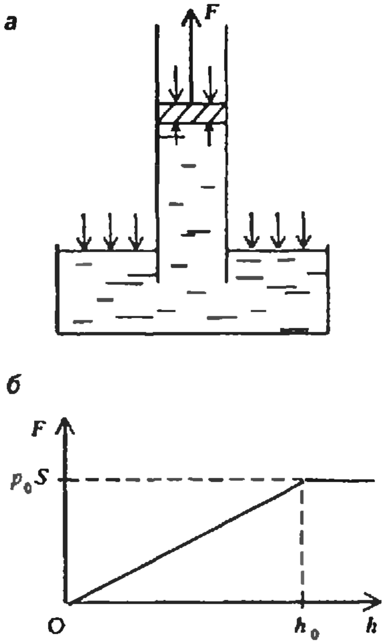


Рис. 3

Высота столба воды в трубе $h_0 = p_0/(\rho g)$, очевидно, может служить для измерения атмосферного давления p_0. Однако обычно в барометрах используют ртуть, и нормальному атмосферному давлению тогда соответствует значительно меньшая высота столба ртути $h_{рт} = p_0/(\rho_{рт}g) = 0{,}76$ м (плотность ртути $\rho_{рт} = 1{,}36 \cdot 10^4$ кг/м^3).

Примером другого гидростатического устройства, широко используемого в практике, являются сообщающиеся сосуды. Известен закон сообщающихся сосудов: если давление над жидкостью в сосудах одинаково, то уровни жидкости в них равны. Нетрудно доказать этот закон для случая цилиндрических сосудов (рис.4). Так как жидкость в соединительной трубке находится в равновесии, то давления на нее с обеих сторон должны быть одинаковы. Поэтому равны и уровни жидкости в сосудах.

В общем случае для доказательства закона сообщающихся сосудов можно воспользоваться принципом отвердевания, который часто используют в гидростатике. Суть этого принципа заключается в следующем: всегда можно представить себе, что часть жидкости отвердела — равновесие оставшейся части

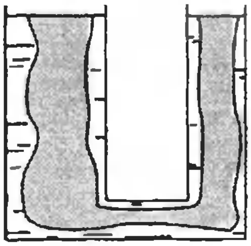


Рис. 4

жидкости от этого не нарушится. Так, в цилиндрических сообщающихся сосудах мы можем мысленно выделить часть жидкости, которая заполняла бы сообщающиеся сосуды любой извилистой формы (см. рис.4), и представить себе, что остальная часть жидкости отвердевает. Тогда равновесие выделенной нами части жидкости не нарушится, и, следовательно, уровни жидкости в извилистых сообщающихся сосудах будут такими же, какими были в цилиндрических сосудах, т.е. одинаковыми.

Закон сообщающихся сосудов справедлив только для однородной жидкости. Если в сосуды налиты жидкости разных плотностей, то уровни в сосудах могут быть разными.

Задача 4. *В U образную трубку налита ртуть. Поверх ртути в одно из колен трубки налили воду (рис.5, а). Высота столбика воды l = 0,1 м. Определите разность уровней жидкостей в коленах трубки. Нарисуйте график зависимости давления в обоих коленах трубки от высоты. Плотность ртути $\rho_{рт} = 1{,}36 \cdot 10^4$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 10^3$ кг/м^3. Атмосферное давление не учитывайте.*

Давления на ртуть на уровне h_0 соприкосновения воды и ртути в обоих коленах должны быть одинаковы (закон сообщающихся сосудов для однородной жидкости). Поэтому

$$\rho_в g l = \rho_{рт} g (l - \Delta h),$$

где разность уровней $h_2 - h_1$ обозначена через Δh. Отсюда

$$\Delta h = \frac{(\rho_{рт} - \rho_в) l}{\rho_{рт}} = 0{,}09 \text{ м}.$$

Давление в колене, содержащем только ртуть, меняется с высотой h по закону

$$p_1 = \rho_{рт} g (h_1 - h).$$

Эта формула справедлива и в изогнутой части трубки. (Представьте себе, что изогнутое колено сообщается с прямым цилиндрическим сосудом, в котором тоже находится ртуть. Тогда давления на одинаковой высоте в обоих сосудах должны быть равны.) В дру-

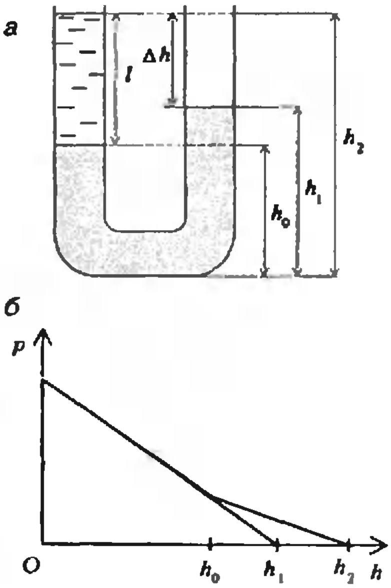


Рис. 5

гом колене в области $h_0 < h < h_2$, где находится только вода, давление

$$p_2 = \rho_в g (h_2 - h).$$

Ниже уровня h_0 зависимость давления от высоты дается той же формулой, что и в первом колене:

$$p_1 = \rho_в g l + \rho_{рт} g (h_0 - h) = \rho_{рт} g (h_1 - h).$$

Зависимость давления в коленах трубки от высоты изображена графически на рисунке 5,*б*. Как видно, выше уровня h_0 давления на одинаковой высоте разные.

Выталкивающая сила

На тело, погруженное в жидкость, как известно, действует выталкивающая сила. Эта сила является равнодействующей сил давления жидкости на тело. Найдем, например, выталкивающую силу, действующую на кубик с ребром a, целиком погруженный в жидкость плотностью ρ. Сила давления со стороны жидкости на верхнюю грань кубика равна

$$F_1 = \rho g h a^2 ,$$

где h — расстояние от этой грани до поверхности жидкости (для простоты мы считаем, что плоскость верхней грани кубика параллельна поверхности жидкости). На нижнюю грань кубика действует сила

$$F_2 = \rho g (h + a) a^2 .$$

Силы давления на боковые грани кубика уравновешивают друг друга. Равнодействующая сил давления, т.е. выталкивающая сила, равна

$$F = F_2 - F_1 = \rho g a^3$$

и направлена вертикально вверх. Мы получили закон Архимеда: выталкивающая сила равна силе тяжести, действующей на вытесненную телом жидкость.

В общем случае закон Архимеда можно доказать с помощью принципа отвердевания. Мысленно заменим погруженное тело жидкостью. Очевидно, что эта жидкость будет находиться в равновесии. Следовательно, сила тяжести, действующая на нее, уравновешена силами давления со стороны окружающей жидкости. Если теперь представить себе, что выделенная нами часть отвердела, то равновесие оставшейся части не нарушится, и поэтому не изменятся силы давления на отвердевшую жидкость. Равнодействующая этих сил будет по-прежнему равна силе тяжести.

При доказательстве мы считали, что тело целиком погружено в жидкость. Однако аналогичные рассуждения легко провести и в случае, когда только часть тела находится в жидкости (проделайте это сами). И мы опять получим, что выталкивающая сила равна силе тяжести, действующей на *вытесненную* телом жидкость:

$$F = \rho g V ,$$

где ρ — плотность жидкости, V — объем погруженной в жидкость части тела, g — ускорение свободного падения.

Задача 5. *На дне водоема установлена П-образная конструкция из трех одинаковых балок, соединенных между собой (рис.6). Как зависит сила давления этой конструкции на дно от уровня воды в водоеме? Рассмотрите два случая: 1) вода подтекает под опоры; 2) опоры плотно соприкасаются с дном. Балки имеют квадратное сечение со стороной a, длина балки $l = 2a$. Плотность материала балок ρ_0, плотность воды ρ.*

а

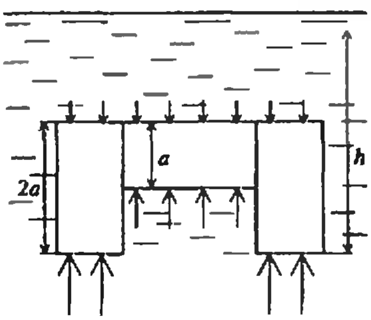


Рис. 6

Сила давления $F_д$ на дно определяется разностью силы тяжести конструкции $6\rho_0 g a^3$ и выталкивающей силы F. В первом случае, когда вода подтекает под опоры (например, если дно водоема покрыто галькой — рисунок 6, а), справедлив закон Архимеда. Зависимость выталкивающей силы от высоты уровня воды h дается формулами:

$$F = 2\rho g h a^2 \text{ при } h \le a,$$

$$F = 2\rho g a^3 + 4\rho g a^2 (h-a)$$

$$\text{при } a \le h \le 2a,$$

$$F = 6\rho g a^3 \text{ при } h \ge 2a.$$

Соответствующий график для силы $F_д$ изображен на рисунке 6, *в* — он обозначен цифрой *1*.

Во втором случае отсутствует давление воды на опоры снизу (рис.6,*б*), и пользоваться законом Архимеда уже нельзя. Для определения силы F необходимо найти равнодействующую сил давления:

$$F = 0 \text{ при } h \le a,$$

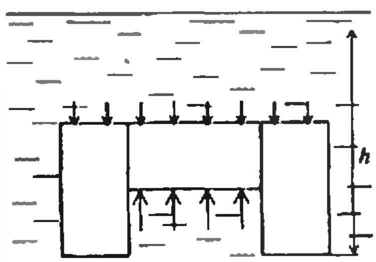
$$F = 2\rho g a^2 (h-a) \text{ при } a \le h \le 2a,$$

$$F = 2\rho g a^2 (h-a) - 4\rho g a^2 (h-2a)$$

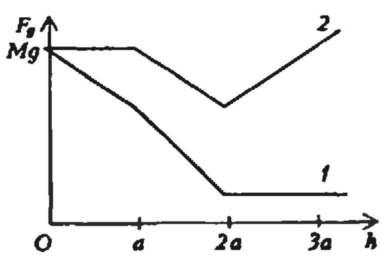
$$\text{при } h \ge 2a.$$

Последнее выражение обращается в нуль при $h = 3a$ и при больших h становится отрицательным. Это означает, что при $h > 3a$ силы давления не выталкивают конструкцию из воды, а наоборот, прижимают ее ко дну. Зависимость силы давления на дно от высоты уровня воды показана на втором графике рисунка 6, *в*.

б



в



Задача 6. *Пробковый кубик с ребром a = 0,1 м погрузили в воду на глубину h = 0,2 м с помощью тонкостенной трубки диаметром d = 0,05 м (рис.7). Определите, какой груз надо положить в трубку, чтобы кубик от нее оторвался. Плотность пробки $\rho_0 = 200$ кг/м³, плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³.*

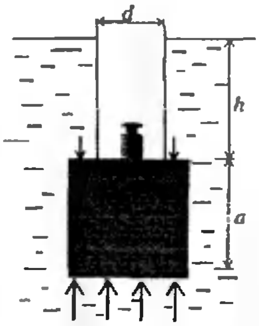


Рис. 7

Вес груза равен разности выталкивающей силы F, действующей на кубик, и силы тяжести кубика $Mg = \rho_0 g a^3$. Если бы кубик был окружен со всех сторон водой, то на него по закону Архимеда действовала бы выталкивающая сила $F_0 = \rho g a^3$. В нашем случае выталкивающая сила будет большей, так как на часть поверхности верхней грани кубика, «заключенную» в трубку, не действует давление воды:

$$F = \rho g a^3 + \rho g h S ,$$

где $S = \pi d^2/4$ — площадь сечения трубки. Таким образом, сила тяжести грузика

$$mg = F - Mg = (\rho - \rho_0) g a^3 + \frac{\pi \rho g h d^2}{4} = 12 \text{Н}.$$

Масса грузика $m = 1{,}2$ кг.

Выталкивающую силу, действующую на кубик, можно найти и другим способом. Рассмотрим кубик с трубкой как единое тело, вытесняющее объем воды $V = a^3 + Sh$. Тогда по закону Архимеда на кубик с трубкой действует выталкивающая сила

$$F = \rho g V = \rho g a^3 + \rho g h S ,$$

которая равна выталкивающей силе, действующей на кубик, так как равнодействующая сил давления воды на трубку равна нулю.

Жидкость в движущемся сосуде

Изучим теперь равновесие жидкости в сосуде, движущемся с ускорением. По второму закону Ньютона в этом случае векторная сумма всех сил, действующих на любой выделенный элемент жидкости, должна равняться $m\bar{a}$, где m — масса выделенной жидкости, $\bar{a}$ — ускорение сосуда. Но на выделенный элемент жидкости действуют сила тяжести и силы давления со стороны окружающей жидкости. Их равнодействующая и должна быть равна $m\bar{a}$.

Задача 7. *Сосуд с жидкостью плотностью ρ падает с ускорением a. Определите давление жидкости на глубине h и силу давления на дно сосуда. Высота уровня воды в сосуде H, площадь дна сосуда S.*

Выделим столбик жидкости высотой h с площадью основания s. На него действуют сила тяжести ρghs и сила давления ps, направленная вверх. Равнодействующая этих сил создает ускорение столбика:

$$ma = \rho ghs - ps,$$

где $m = \rho hs$ — масса столбика. Для давления p на глубине h отсюда находим

$$p = \rho(g-a)h.$$

Сила давления на дно сосуда

$$F = \rho(g-a)HS$$

будет тем меньше, чем больше ускорение сосуда a. При $a = g$ (свободное падение) сила давления жидкости обращается в ноль — наступает состояние невесомости. При $a > g$ жидкость будет свободно падать с ускорением g, а сосуд — с большим ускорением, и вода вытечет из сосуда.

Задача 8. *На дне сосуда с жидкостью лежит тело. Может ли тело всплыть, если сосуд начнет двигаться вверх с ускорением? Определите силу давления тела на дно сосуда, если ускорение сосуда a, плотность жидкости ρ_0, плотность тела ρ, его объем V.*

На тело, лежащее на дне сосуда, действуют сила тяжести mg, сила реакции дна N и выталкивающая сила F (рис.8). Если сосуд покоится, то сумма этих сил равняется нулю. При движении сосуда с ускорением a вверх по второму закону Ньютона имеем

$$ma = N + F - mg.$$

Определим выталкивающую силу F. Аналогично решению предыдущей задачи, легко получить, что при ускоренном движении сосуда вверх давление на глубине h дается формулой

$$p = \rho(g+a)h,$$

т.е. давление в $(g+a)/g$ раз больше, чем в неподвижном сосуде. Соответственно будет большей и выталкивающая сила:

$$F = m_0 g\frac{g+a}{g} = m_0(g+a),$$

где $m_0 = \rho_0 V$ — масса вытесненной телом воды.

Подставляя это выражение в формулу второго закона Ньютона, для силы реакции дна получаем

$$N = (m - m_0)(g+a).$$

Легко видеть, что в сосуде, движущемся с ускорением вверх, сила реакции дна всегда больше, чем в неподвижном. Поэтому тело не только не всплывает, а наоборот, сильнее прижимается ко дну.

Задача 9. *Сосуд с жидкостью движется горизонтально с ускорением a. Определите форму поверхности жидкости в сосуде.*

Выделим горизонтальный столбик жидкости длиной l и площадью поперечного сечения s (рис.9). По второму закону Ньютона

$$ma = (p_1 - p_2)s,$$

где $m = \rho ls$ — масса столбика, p_1 и p_2 — давления на него слева и справа. Давление на глубине h определяется по обычной формуле $p = \rho gh$ (по вертикали ускорения нет). Подставляя выражения для m и p в уравнение второго закона Ньютона, получаем

$$al = (h_1 - h_2)g,$$

или

$$\frac{h_1 - h_2}{l} = \frac{a}{g}.$$

Но $h_1 - h_2$ — это разность высот точек поверхности жидкости. Мы получаем, что поверхность жидкости — плоскость, наклоненная к горизонту под углом α, причем $\operatorname{tg}\alpha = a/g$.

Заметим, что давление жидкости на данной высоте здесь не одно и то же. Линии равного давления параллельны поверхности жидкости. Если ввести расстояние h' от точки до поверхности жидкости, то давление в этой точке

$$p = \rho gh = \frac{\rho gh'}{\cos\alpha} = \rho h'\sqrt{g^2 + a^2}.$$

Поэтому можно сказать, что ускоренное движение сосуда эквивалентно замене ускорения свободного падения $\bar{g}$ на величину $\bar{g}' = \bar{g} - \bar{a}$. Это утверждение в равной степени относится и к предыдущим двум задачам.

Упражнения

1. Три сосуда, имеющие формы цилиндра, усеченного конуса и перевернутого усеченного конуса с одинаковыми площадями оснований и равными объемами, доверху наполнены водой. Как соотносятся между собой силы давления воды на дно сосудов?

2. Трубка ртутного барометра подвешена на нити. Определите натяжение нити, если высота уровня ртути в трубке $H = 0{,}76$ м, внешний диаметр трубки $D = 0{,}02$ м, внутренний $d = 0{,}017$ м, нижний конец трубки погружен в ртуть на глубину $h = 0{,}1$ м, масса трубки $m = 0{,}3$ кг, плотность ртути $\rho = 1{,}36\cdot10^4$ кг/м^3. Считайте, что торцы трубки плоские.

3. Длинная вертикальная трубка погружена одним концом в сосуд с ртутью. В трубку наливают $m = 0{,}71$ кг воды, которая не вытекает из трубки. Определите изменение уровня ртути в сосуде. Диаметр сосуда $D = 0{,}06$ м, плотность ртути $\rho_в = 1{,}36\cdot10^4$ кг/м^3. Толщиной стенок трубки пренебречь.

4. В сосуде с водой плавает кусок льда. Изменится ли уровень воды в сосуде, если лед растает? Что будет, если в лед вморожен а) кусочек свинца; б) кусочек пробки?

5. В цилиндрические сообщающиеся сосуды диаметрами $D = 0{,}06$ м и $d = 0{,}02$ м налита вода. Как изменятся уровни воды в сосудах, если в один из сосудов поместить тело массой $m = 0{,}02$ кг, которое будет плавать в воде? Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3.

6. Сосуд с водой скользит без трения по наклонной плоскости с углом наклона α. Определите, как расположится поверхность воды в сосуде.

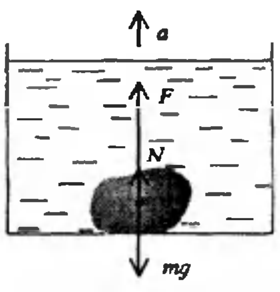


Рис. 8

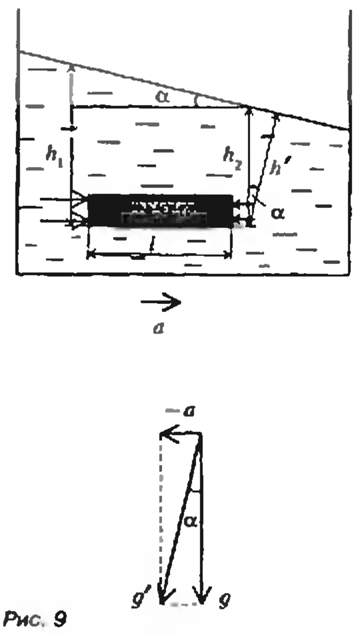


Рис. 9

Варианты вступительных экзаменов 1994 года

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\frac{\operatorname{ctg}x - \operatorname{tg}x}{3\sin x + \cos 2x} = \operatorname{ctg}2x.$$

2. Решите неравенство

$$3^x\left(\sqrt{9^{1-x} - 1} + 1\right) < 3\left|3^x - 1\right|.$$

3. Даны треугольник ABC и ромб $BDEF$, все вершины которого лежат на сторонах треугольника ABC, а угол при вершине E — тупой. Найдите площадь треугольника ABC, если $AE = 3$, $CE = 7$, а радиус окружности, вписанной в ромб, равен 1.

4. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB : BC = 2 : 3$. Точки F и F_1 — середины ребер BC и B_1C_1 соответственно. Сфера касается всех звеньев ломаной $AFDD_1A_1$ и пересекает отрезок F_1F в точках F_1 и E. Найдите объем параллелепипеда и радиус сферы, если

$$F_1E = \frac{3}{2}.$$

5. Корни уравнения

$$x^3 - \frac{32}{p}x^2 + \frac{5}{\sqrt{p}}x - \frac{15}{64} = 0$$

являются длинами сторон некоторого треугольника, а корни уравнения

$$x^3 - \frac{1}{3}\left|\log_2 p\right|x^2 + \left(\log_{8\sqrt{2}} p\right)x - \frac{1}{11 + \sqrt{p}} = 0$$

— длинами высот этого же треугольника.
Найдите p и площадь треугольника.

Вариант 2

1. При каких x числа $\arccos\left(4^{-x}/\sqrt{2}\right)$ и $\operatorname{arcctg}\left(2\cdot 4^x - 3\right)$ являются величинами двух углов некоторого прямоугольного треугольника?

2. Решите неравенство

$$\log_{4|x|+1}(3x + 2) - \log_{3x+2}\left(2|x| + 1\right) > 0.$$

3. Медиана AM и биссектриса CD прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$) пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABC, если $CO = 9$, $OD = 5$.

4. Найдите все значения параметра α, $-\pi < \alpha < \pi$, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \left(1 - 4x^2 - 4y^2\right)\left(4x^2 + 15 - 12y\right) = 0, \\ y\cos\alpha + x\sin\alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

5. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды $SABC$ имеет длину $\frac{11}{5}$ и составляет с плоскостью основания ABC угол, равный $\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{4}\sqrt{2}\right)$. Цилиндр расположен так, что окружность одного из его оснований проходит через середину ребра AC и не пересекает грань SAB. Ортогональные проекции цилиндра на плоскости SAB и SBC — прямоугольники с общей вершиной в точке S. Найдите объем цилиндра.

Вариант 3

1. Решите уравнение

$$\sqrt{17 - 7\sin 2x} = 3\cos x - 5\sin x.$$

2. На координатной плоскости даны точки $A(2; -3)$ и $B(4; 0)$. При каких значениях параметра p, $p > -5$, ближайшая к графику функции $y = \sqrt{x^3} + p$ точка прямой AB лежит на отрезке AB?

3. Решите неравенство

$$\log_8\left(\frac{1}{3} - x\right)\cdot\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3} - x\right) > \log_2\frac{\frac{1}{3} - x}{\sqrt[3]{\left(2x + \frac{1}{3}\right)^2}}.$$

4. В треугольнике ABC угол A равен $\pi - \arcsin\frac{8}{17}$, а длина стороны BC равна 8. На продолжении CB за точку B взята точка D так, что $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через вершину A, касающейся прямой BC в точке D и касающейся окружности, описанной около треугольника ABC.

5. Сфера, касающаяся нижнего основания цилиндра, имеет единственную общую точку с окружностью его верхнего основания и делит ось цилиндра в отношении $1 : 6 : 2$, считая от центра одного из оснований. Найдите объем цилиндра, если известно, что сфера касается двух его образующих, находящихся на расстоянии 8 друг от друга.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1[1]

1. По доске, наклоненной к горизонту под углом $\alpha = \arcsin(1/3)$, можно передвигать вверх или вниз грузы, прикладывая силу вдоль доски. Чтобы передвинуть ящик массой $m = 30$ кг вниз на расстояние $L = 3$ м, надо совершить минимальную работу $A = 100$ Дж. Какую минимальную работу потребуется совершить, чтобы вернуть по доске этот ящик назад?

2. Моль идеального газа переводится из состояния *1* в состояние *3* путем изобарического нагрева *1 — 2* и изохорического охлаждения *2 — 3* (рис. 1). На участке *1 — 2* газ совершает работу $A = 1250$ Дж. В процессе всего перехода *1 — 2 — 3* к газу подводится количество теплоты $Q = 750$ Дж. Найдите разность температур T_2 и T_3.

[1] *Этот вариант предлагался на пробных экзаменах в марте 1994 г.*

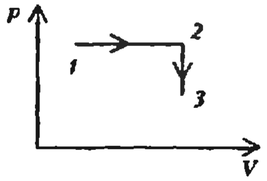


Рис. 1

3. Три плоских конденсатора емкостями $C_1 = C_0$, $C_2 = 2C_0$, $C_3 = 3C_0$, каждый из которых заряжен от батареи с ЭДС $\mathcal{E}$, и резистор сопротивлением R включены в схему, изображенную на рисунке 2. Чему будет равен ток в цепи сразу после замыкания ключа? Какая разность потенциалов установится на конденсаторе емкостью C_3?

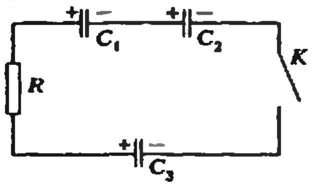


Рис. 2

4. Поверхность озера глубиной $H = 1{,}3$ м покрыта тонким слоем льда со снегом, практически не пропускающим свет. Найдите площадь светлого пятна на дне озера от полыньи в форме круга радиусом $R = 2$ м. Озеро освещается рассеянным светом. Показатель преломления воды $n = 4/3$.

Вариант 2

1. По гладкой горизонтальной поверхности стола скользят вдоль одной прямой навстречу друг другу массивный брусок со скоростью $u = 1$ м/с и небольшой шарик со скоростью $v = 2$ м/с. В некоторый момент времени шарик оказался в точке A на расстоянии $s = 1{,}5$ м от бруска. Через какое время, считая от этого момента, шарик снова окажется в точке A? Столкновение шарика с бруском упругое. Скорость шарика перпендикулярна грани бруска, о которую он ударяется. Масса шарика намного меньше массы бруска.

2. В горизонтально расположенной трубке столбик ртути длиной $l = 12$ см запирает слой воздуха толщиной $L = 35$ см (рис.3). Если трубку открытым концом повернуть один раз вниз, а другой вверх, то столбик ртути смещается. При этом разность величин этих смещений от начального

Рис. 3

горизонтального положения равна $a = 2$см. Найдите величину наружного давления (в мм ртутного столба).

3. В колебательном контуре, состоящем из катушки индуктивностью $L = 1$ Гн и конденсатора емкостью $C = 1$ мкФ с утечкой (омическое сопротивление диэлектрика, заполняющего конденсатор, составляет $R = 10^3$ Ом), происходят затухающие колебания. В некоторый момент времени амплитуда (максимальное значение) напряжения на конденсаторе была $U_0 = 2$ В. Какое количество теплоты выделится на конденсаторе от этого момента времени до полного затухания колебаний в контуре?

4. Тонкий пучок лучей света падает перпендикулярно на плоскую поверхность половины оптически прозрачного шара (рис.4). Радиус шара R, расстояние от луча до оси OO', проходящей через центр шара O, равно $a = 0{,}6R$, показатель преломления материала шара $n = 4/3$. Найдите расстояние от точки O до точки A пересечения луча, преломленного на сферической поверхности, с осью OO'.

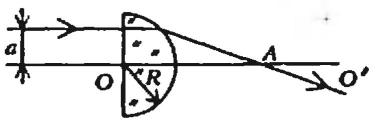


Рис. 4

Вариант 3

1. С верхней точки шара радиусом $R = 54$ см, закрепленного на горизонтальной поверхности стола, соскальзывает без начальной скорости и без трения небольшой шарик. На какую максимальную высоту от стола поднимется шарик после упругого удара о стол?

2. В переносном газовом баллоне объемом $V = 5$ л может поместиться не больше $m = 2{,}2$ кг жидкого пропана (C_3H_8) под давлением $p = 10$ атм и при температуре $t = 27$ °C. Сколько пропана в газообразном состоянии останется в баллоне, если из полного баллона израсходовать 80% пропана?

3. По длинному прямолинейному проводу течет переменный ток. В плоскости, проходящей через провод, расположены три проволочных контура, изготовленные из одного куска провода (рис.5). Контуры *1* и *2* являются квадратами с длиной стороны a, третий контур состоит из двух прямоугольников со сторонами a, b и a, c. В некоторый момент времени токи в контурах *1* и *2* равны, соответственно, I_1 и I_2. Чему равен в этот момент ток в контуре *3*? Пунктирные линии на рисунке параллельны проводу.

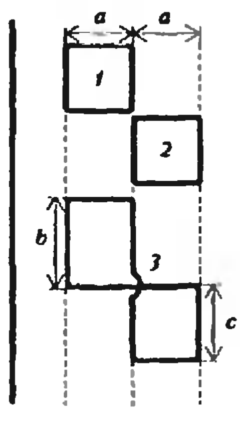


Рис. 5

4. На главной оптической оси линзы с фокусным расстоянием $F = 10$ см лежит спичка. Линза создает действительное изображение спички с увеличением $\Gamma_1 = 25/3$. Если спичку повернуть на 90° вокруг ее середины, то она будет изображаться с увеличением $\Gamma_2 = 2{,}5$. Определите длину спички.

Публикацию подготовили Н.Агаханов, А.Шеронов

Московский государственный институт электроники и математики (Технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты электроники, информатики и телекоммуникаций, автоматики и вычислительной техники)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{3x+3}+2\sqrt{2x-3}=4.$$

2. Из города A в город B, находящийся на расстоянии 50 км, выехал велосипедист. Через полчаса после этого из города A на мопеде выехал курьер, который, нагнав велосипедиста и передав ему поручение, немедленно с той же скоростью двинулся обратно и возвратился в город A в тот же момент, когда велосипедист достиг города B. Какова скорость велосипедиста, если скорость курьера равна 30 км/ч?

3. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{4}-2x}\left(1-9x^2\right)>0.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{2\sqrt{3}\cos 2x+2\sin 5x}{\sqrt{3}\cos x+\sin 5x}=2.$$

5. На продолжении ребра AC правильной треугольной пирамиды $ABCD$ с вершиной D взята точка K так, что $KA : KC = 3 : 4$, а на ребре DC взята точка L так, что $DL : LC = 2 : 1$. Найдите, в каком отношении объем пирамиды делит плоскость, проходящая через точки B, K и L.

Вариант 2

(факультеты прикладной математики и экономико-математический)

1. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-\frac{x^2}{2}}\ge 2^{|3x-10|+x}.$$

2. Из двух пунктов, расстояние между которыми 28 км, выходят одновременно навстречу друг другу два пешехода. Если бы первый не задерживался на 1 ч на расстоянии 9 км от места своего отправления, то встреча пешеходов произошла бы на полпути. После остановки первый пешеход увеличил свою скорость на 1 км/ч, и они встретились на расстоянии 4 км от места остановки первого. Найдите скорость второго пешехода.

3. Решите уравнение

$$\log_{27}\left(\sin 2x-\frac{1}{3}\cos x\right)=\frac{1}{3}\log_3(-\cos x).$$

4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 6, а боковое ребро равно 12. На ребрах SA и SC взяты точки K и L так, что $SK : KA = 1 : 2$, а L — середина SC. Найдите длину KL и отношение, в котором ребро SB делится плоскостью, проходящей через точки D, K и L.

5. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}(x+y)^2=12,\\ x^2+y^2=2(a+1)\end{cases}$$

имеет в точности два решения.

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. На тонкую квадратную пластину из алюминия наложена пластина из стали в форме круга. Толщина пластин одинакова. Сторона квадрата $a = 10$ см, радиус круга $R = a/4$. Круг касается стороны квадрата и проходит через его центр. Определите, на каком расстоянии от центра квадрата находится центр тяжести фигуры. Плотность алюминия $\rho_1 = 2{,}7\cdot10^3$ кг/м³, стали $\rho_2 = 8{,}0\cdot10^3$ кг/м³.

2. Шарик массой $m = 100$ г ударяется о стену под углом $\alpha = 60°$ к ее поверхности, имея скорость $v = 5{,}0$ м/с (рис. 1). Через $t = 0{,}80$ с после удара шарик упал на землю. Чему равна средняя сила абсолютно упругого удара о стену, если продолжительность удара $\Delta t = 5\cdot10^{-3}$ с? На какой высоте от земли произошел удар?

Рис. 1

3. Тело, движущееся со скоростью $v_0 = 26$ м/с, абсолютно неупруго соударяется с покоящимся телом такой же массы. Постройте график зависимости изменения температуры тел от скорости тела до удара. На сколько изменится температура тел, если на нагревание пошло $\eta = 80\%$ тепла, выделившегося при ударе? Удельная теплоемкость вещества $c = 130$ Дж/(кг·К).

4. Над одним молем одноатомного идеального газа проводят три процесса, образующих замкнутый цикл (рис. 2), в котором $p_1 = 10^5$ Па, $V_1 = 1{,}0$ л, $p_2 = 2\cdot10^5$ Па, $V_2 = 2{,}0$ л. Определите изменение внутренней энергии газа в каждом процессе и в целом за цикл, а также работу, совершенную за цикл.

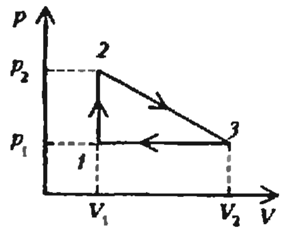


Рис. 2

5. Два последовательно соединенных конденсатора емкостями $C_1 = 2{,}0$ мкФ и $C_2 = 6{,}0$ мкФ зарядили от источника постоянного напряжения $U = 120$ В. Определите напряжение на каждом конденсаторе. Какая энергия выделится, если, отключив источник, соединить конденсаторы проводником накоротко?

6. В схеме, изображенной на рисунке 3, вольтметр показывает $U = 15$ В. Определите ЭДС батареи, если $R_1 = 8{,}0$ Ом, $R_2 = 20$ Ом. Постройте график зависимости показания вольтметра от величины сопротивления R_2. Сопротивления источника и вольтметра не учитывать.

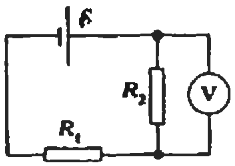


Рис. 3

7. Конденсатор переменной емкости заряжается от источника с ЭДС $\mathcal{E} = 0{,}50$ В и после размыкания ключа K разряжается через индуктивность $L = 3{,}3$ Гн (рис.4). Постройте график зависимости энергии колебательного контура от емкости конденсатора. Определите амплитудное значение заряда на конденсаторе и частоту возникших колебаний при $C = 3 \cdot 10^3$ пФ.

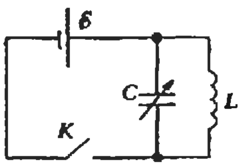


Рис. 4

8. Электрон движется по окружности в магнитном поле с индукцией $B = 10$ мТл. Скорость электрона $v = 10^6$ м/с. Определите поток магнитной индукции через площадь, которую описывает электрон при своем движении, а также период вращения электрона. Масса электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

9. На каком расстоянии от линзы с фокусным расстоянием $F = 20$ см находится предмет, если его прямое мнимое изображение находится на расстоянии $f = 55$ см от линзы? Постройте график зависимости мнимого увеличения собирающей линзы от расстояния от предмета до линзы.

10. В вакуумной трубке находится смесь атомарного водорода и неона. Определите максимальную длину волны излучения, которое сможет вызвать ионизацию этих газов. Энергия ионизации водорода $E_1 = 13{,}6$ эВ, неона $E_2 = 21{,}6$ эВ, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, постоянная Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Публикацию подготовили Ю.Сеюнов, В.Тонян

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Основание пирамиды $PABC$ — треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $AC = BC$. Грань PAB перпендикулярна плоскости основания, а две другие боковые грани образуют с основанием пирамиды углы, равные α. Высота пирамиды равна h. Найдите: 1) площадь боковой поверхности пирамиды, 2) угол между ребром CP и плоскостью APB.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{0{,}5(\sin x + \sin 3x)} = \cos x.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{0{,}8}(4|x| - 2) \le \log_{0{,}8}(3 - x^2).$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = 0{,}5x\ln x - x\ln 2$$

на отрезке $[1;\ 4]$.

5. Для разгрузки двух одинаковых вагонов выделены две бригады грузчиков. В первую смену работала первая бригада и полностью разгрузила один вагон, а затем к разгрузке другого вагона приступила вторая бригада. При таком режиме работы оба вагона были разгружены за 8 часов. Определите, сколько часов работала каждая бригада, если известно, что время, на которое первая бригада работала больше, чем вторая, составляет $5/6$ времени, за которое обе бригады могут разгрузить один вагон, работая совместно.

Вариант 2

(математический факультет)

1. Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — трапеция $ABCD$. $AD \parallel BC$, $\angle ADC = 90°$, $AA_1 = 5$, $BC = 12$, $AB = 18$, $AC = 24$. Через вершины A, B и C_1 проведена плоскость. Найдите: 1) площадь получившегося сечения призмы, 2) угол между плоскостью сечения и плоскостью грани AA_1B_1B.

2. Решите уравнение

$$\sin x = \sqrt{5\sin 2x - \cos 2x}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_4(x^2 - 5) + \log_{0{,}25}\left(\frac{7}{3}|x| - 3\right) \le 0.$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = 2x\ln x - x\ln 49$$

на отрезке $[1;\ 7]$.

5. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 33 км, отправился турист. Через час из пункта A со скоростью 6 км/ч вышел его товарищ, который, догнав туриста и передав ему забытую вещь, немедленно и с той же скоростью двинулся обратно. Турист же после встречи увеличил свою скорость на 0,5 км/ч и достиг B в тот момент, когда его товарищ возвратился в A. Найдите первоначальную скорость туриста.

Вариант 3

(физический факультет)

1. Исследуйте функцию и постройте ее график:

$$f(x) = x^3 - x^2.$$

2. Решите уравнение

$$1 - \cos(\pi + x) - \sin\frac{3\pi + x}{2} = 0.$$

3. Решите уравнение

$$3 \cdot 9^{\log_4 x} - 10 \cdot 3^{\log_4 x} + \log_2 8 = 0.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 4} \le 0.$$

5. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, один из острых углов которого α. Каждое боковое ребро пирамиды равно b и составляет с плоскостью основания угол β. Найдите объем пирамиды.

Публикацию подготовили Б.Кукушкин, М.Чернецов

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Нет, поскольку скорость движения воздушного шара равна скорости ветра.

2. В обоих случаях сила давления на землю одинакова. При «зависании» вертолет давит на воздух с силой, равной силе тяжести, а воздух передает действие этой силы на землю.

3. Плоскость змея разделяет набегающий воздушный поток так, что давление снизу оказывается больше, чем сверху, в результате чего возникает подъемная сила. Хвост стабилизирует полет змея и позволяет выдерживать нужный угол атаки (наклон плоскости змея).

4. Пламя свечей наклонятся друг к другу, так как давление в образовавшейся воздушной струе меньше давления окружающего атмосферного воздуха.

5. Для выравнивания давлений. Подумайте, в связи с этим, почему взрывная волна валит сплошные заборы и оставляет невредимыми тонкие столбы.

6. Увлекаемый движущимся поездом воздух производит на человека меньшее давление, чем неподвижный, что и создает силу, влекущую к поезду.

7. Из-за вращения трубки давление воздуха у движущегося конца меньше, чем у неподвижного (того, что держат в руке). Разность давлений и создает воздушный поток, вибрирующий при протекании через гофрированную поверхность трубки.

8. Маховик регулирует частоту вращения вала ветроколеса, мешая порывам ветра резко ее менять.

9. При соответствующем вращении цилиндров скорость обдувающего их воздушного потока у задней поверхности меньше, чем у передней. Поэтому давление воздуха на цилиндры со стороны кормы судна больше, чем со стороны носа.

10. Отверстие в центре купола пропускает часть набегающего воздушного потока, который разрушает возникающие с наружной стороны купола вихри, раскачивающие парашют.

11. На выходе из раструба воронки образуются вихри, создающие область пониженного давления, куда и втягивается пламя свечи.

12. Вначале горячие газы от сигареты поднимаются сравнительно медленно и образуют ламинарный поток. Однако выталкивающая сила ускоряет их настолько, что поток начинает завихряться и становится турбулентным.

13. Из-за непрерывности потока объемный расход воды на всем протяжении струи остается постоянным. Поэтому по мере увеличения скорости воды (при падении) поперечное сечение струи уменьшается.

14. При течении воды по трубе начальное давление, порядка нескольких атмосфер, из-за вязкости воды постепенно падает почти до атмосферного. Если кран зажать пальцем, внутри трубы течение воды почти прекращается, и вода у малого отверстия оказывается под большим давлением. Оно и сообщает вырывающейся струйке заметную скорость.

Микроопыт

Внутри струи давление меньше атмосферного — воздух и прижимает шарик к струе.

Гидростатика

1. Сила давления на дно наибольшая у сосуда, имеющего форму усеченного конуса, наименьшая — у перевернутого конуса.

2. $T = mg + \frac{\pi\rho g}{4}\left(Hd^2 - h\left(D^2 - d^2\right)\right) = 50$ Н.

3. $\Delta h = \frac{4m}{\pi\rho_0 D^2} \approx 1{,}8$ см.

4. Если лед чистый или в него вморожен кусочек пробки, то уровень воды не изменится. Если же в лед вморожен кусочек свинца, уровень воды понизится.

5. $\Delta h = \frac{4m}{\pi\rho\left(D^2 + d^2\right)} = 6\cdot 10^{-3}$ м. 6. Поверхность воды в сосуде параллельна наклонной плоскости.

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. $\log_3\frac{12}{5} < x \le 1$.

3. $S = 5\sqrt{5}$. *Указание.* Диаметр окружности равен расстоянию от точки E до прямых AB и CB, поэтому синусы углов A и C треугольника ABC равны соответственно $\frac{2}{7}$ и $\frac{2}{3}$. Сторона ромба находится из теоремы синусов.

4. $V = \frac{12}{5}$, $R = \frac{\sqrt{13}}{4}$. *Решение.* Пусть O — центр сферы, K_1, K_2, K_3, K_4 — точки, в которых сфера касается звеньев ломаной $AFDD_1A_1$, G — середина ребра AD (рис.1). Из соображений симметрии, точка O лежит в плоскости GFF_1K_4, а из того, что точка O равноудалена от точек F_1 и E, следует, что она лежит в плоскости α, проходящей через точку M — середину отрезка F_1E и перпендикулярной F_1F. Так как $OK_3 \perp D_1D$, точка K_3 принадлежит плоскости α и $K_3D_1 = MF_1 = \frac{1}{2}EF_1 = \frac{3}{4}$. Кроме того, $D_1K_4 = D_1K_3$, откуда $D_1A_1 = 2D_1K_4 = \frac{3}{2}$. Тогда $BC = \frac{3}{2}$, $A_1B_1 = AB = 1$, $FD = \frac{5}{4}$. Третье ребро параллелепипеда находим из теоремы о касательной и секущей: $FK_2^2 = FF_1\cdot FE$. Пусть $FM = DK_3 = x$, тогда $FF_1 = D_1D = x + \frac{3}{4}$, $FE = x - \frac{3}{4}$, $DK_2 = DK_3 = x$, $FK_2 = \frac{5}{4} - x$. Таким образом,
$\left(\frac{5}{4} - x\right)^2 = \left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{3}{4}\right)$, откуда $x = \frac{17}{20}$ и $D_1D = \frac{8}{5}$.
Пусть N — точка пересечения прямых MO и GK_4. В прямоугольных треугольниках OMF_1 и ONK_3: $OF_1 = OK_3 = R$, $MF_1 = NK_3 = \frac{3}{4}$, поэтому $OM = ON$. Итак, $OM = \frac{1}{2}A_1B_1 = \frac{1}{2}$, $R^2 = OM^2 + MF_1^2 = \frac{13}{16}$.

5. $p = 16$, $S = \frac{1}{8}$. *Решение.* Пусть a, b, c — длины сторон, h_a, h_b, h_c — длины высот треугольника, S — его площадь, тогда $h_a = \frac{2S}{a}$, $h_b = \frac{2S}{b}$, $h_c = \frac{2S}{c}$. Если x_1, x_2, x_3 — корни кубического уравнения, то оно может быть записано в виде
$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$ или
$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3 = 0$. Таким образом, $a + b + c = \frac{32}{p}$, $ab + bc + ca = \frac{5}{\sqrt{p}}$, $abc = \frac{15}{64}$,
$\frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} = \frac{1}{3}\left|\log_2 p\right|$, $\frac{4S^2}{ab} + \frac{4S^2}{bc} + \frac{4S^2}{ca} = \log_{8\sqrt{2}p} p$,
$\frac{8S^3}{abc} = \frac{1}{11 + \sqrt{p}}$. Последние три уравнения можно переписать в виде $2S\frac{bc + ca + ab}{abc} = \frac{1}{3}\left|\log_2 p\right|$, $4S^2\frac{c + a + b}{abc} = \log_{8\sqrt{2}p} p$,
$\frac{8S^3}{abc} = \frac{1}{11 + \sqrt{p}}$ и, исключив переменные a, b и c, мы получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{15}{64} = 8S^3\left(11 + \sqrt{p}\right), \\ \frac{5}{\sqrt{p}} = 4S^2\cdot\frac{1}{3}\left|\log_2 p\right|\left(11 + \sqrt{p}\right), \\ \frac{32}{p} = 2S\left(\log_{8\sqrt{2}p} p\right)\left(11 + \sqrt{p}\right). \end{cases}$$

Перемножив первое и последнее уравнения и разделив на квадрат второго, получаем: $\log_2^2 p = 30\log_{8\sqrt{2}p} p$, т.е. $\log_2^2 p = (30\log_2 p):(\log_2 8\sqrt{2}p)$. Положив $\log_2 p = t$, получаем $t^2 = 30t:\left(\frac{7}{2}+t\right)$ или $t\left(t^2+\frac{7}{2}t-30\right)=0$, откуда $t_1 = 0$, $t_2 = 4$, $t_3 = -\frac{15}{2}$. Корень $t = 0$ — посторонний, так как тогда $h_a + h_b + h_c = 0$, что невозможно. Если $t = -\frac{15}{2}$, то $p = 2^{-\frac{15}{2}}$ и последние два уравнения образуют несовместную систему.
Наконец, если $t = 4$, то $p = 16$ и $s = 1/8$.

Вариант 2

1. $\log_4\frac{3}{2}$; $\log_4 5$. 2. $-\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{5} < x < 0$, $0 < x$.
3. $S = 1323/20$. *Указание.* Если K — середина биссектрисы CD, то треугольники OKM и ODA подобны, следовательно, $AD:KM = 5:2$. С другой стороны, $BD:KM = 2:1$, поэтому $CA:CB = AD:BD = 5:4$.
4. $\alpha \in \left\{\left(-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2},-\arccos\frac{3}{4}\right)\cup\left(\arccos\frac{3}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)\right\}$.
Указание. Прямая l, задаваемая уравнением $y\cos\alpha + x\sin\alpha = \frac{1}{2}$, касается окружности, задаваемой уравнением $1 - 4x^2 - 4y^2 = 0$, поскольку система, задаваемая этими уравнениями, имеет единственное решение $x = \frac{\sin\alpha}{2}$, $y = \frac{\cos\alpha}{2}$. Таким образом, условие задачи выполняется, если прямая l пересекает параболу, задаваемую уравнением $4x^2 + 15 - 12y = 0$, в двух точках, не совпадающих с точкой $A\left(\frac{\sin\alpha}{2},\frac{\cos\alpha}{2}\right)$.
5. $V = 70\pi$. *Решение.* Пусть K — точка, в которой плоскость τ, проходящая через точку A и перпендикулярная ребру SB, пересекает это ребро (рис.2), O — центр основания пирамиды $SABC$, $\angle SBO = \alpha$. Поскольку $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{4}\sqrt{2}$, $\cos\alpha = 2\sqrt{\frac{2}{33}}$, $BO = SB\cos\alpha = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{22}{3}}$, $AB = BO\sqrt{3} = \frac{2}{5}\sqrt{22}$. Пусть T — середина ребра AC, тогда $C, T \in \alpha$, следовательно, TK — высота TSB, в котором $SB = \frac{11}{5}$, $TB = \frac{1}{5}\sqrt{66}$, а высота SO равна $\sqrt{\frac{11}{3}}$.
$2S_{TSB} = SO\cdot TB = TK\cdot SB$, откуда $TK = \sqrt{2}$. Из треугольника AKC получаем $\operatorname{tg}\beta = \frac{AT}{TK} = \frac{\sqrt{11}}{5}$, где $\beta = \angle AKT = \frac{1}{2}\angle AKC$. Отсюда $\cos\beta = \frac{5}{6}$, $CK = TK:\cos\beta = \frac{6}{5}\sqrt{2}$.
Определим теперь расположение цилиндра. Если проекция цилиндра на плоскость ϵ является прямоугольником, то его ось параллельна ϵ. Таким образом, ось цилиндра параллельна плоскостям SAB и SBC, т.е. она параллельна прямой SB. Кроме того, точки T и S принадлежат плоскостям оснований цилиндра, поэтому его высота H равна SK, т.е. $H = \sqrt{SC^2 - CK^2} = \frac{7}{5}$. Далее, проекции цилиндра на плоскости SAB и SCB — прямоугольники с общей стороной SK, поэтому проекции нижнего основания цилиндра на эти плоскости — отрезки, с общим концом K. Это значит, что окружность нижнего основания цилиндра вписана в угол EKF, где $EK \perp CK$, $FK \perp AK$ (рис.3). Отметим, что угол AKC — острый, в силу того, что $\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 > 0$. Итак, основание цилиндра либо окружность $S_1(O_1)$, либо окружность $S_2(O_2)$. Но цилиндр с основанием S_1 пересекает грань SAB, поэтому основание цилиндра — окружность S_2. Если $R = O_2P$ — ее радиус, то из ΔO_2PK: $R = O_2K\cos\beta = (R + TK)\cos\beta = \frac{5}{6}\left(R+\sqrt{2}\right)$, $R = 5\sqrt{2}$.

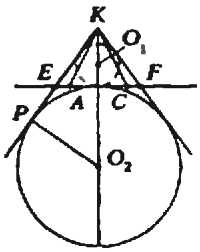


Рис. 3

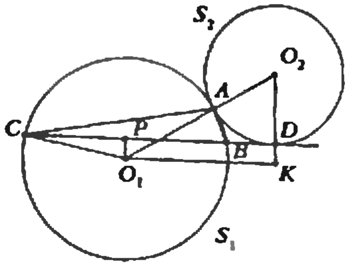


Рис. 4

Вариант 3

1. $-\frac{\pi}{8}+2\pi n$, $-\frac{5\pi}{8}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. $-\frac{10}{3} \le p \le 1$. *Указание.* Условие выполняется, если точка графика, в которой касательная параллельна прямой AB, при проектировании на эту прямую попадает на отрезок AB.
3. $x < -\frac{2}{3}$, $0 < x < \frac{1}{12}$. *Указание.* Заменой $u = \log_2\left(\frac{1}{3} - x\right)$, $v = \log_2\left|2x + \frac{1}{3}\right|$ неравенство приводится к виду $\frac{1}{3}\frac{u^2}{v} > u - \frac{2}{3}v$ или $v(u-v)(u-2v) > 0$.
4. $r = \frac{9}{2}$. По теореме синусов найдем радиус окружности $S_1(O_1)$: $R = CB/(2\sin\angle BAC) = 17/2$ (рис.4). Пусть P — середина BC, тогда $O_1P \perp BC$ и из треугольника O_1CP: $O_1P = \frac{15}{2}$. Окружности $S_1(O_1)$ и $S_2(O_2)$ касаются внешним образом, поэтому $O_1O_2 = R + r = \frac{17}{2} + r$. Пусть K — основание перпендикуляра, опущенного из точки O_1 на прямую O_2D. Тогда $O_2K = O_2D + O_1P = r + \frac{15}{2}$ и $O_1K = PD = PB + BD = 5$. Из треугольника O_1O_2K находим r: $\left(\frac{17}{2}+r\right)^2 = \left(r+\frac{15}{2}\right)^2 + 25$, т.е. $r = \frac{9}{2}$.
5. $V = 98\pi\sqrt{6}$. Пусть A — общая точка сферы и окружности верхнего основания цилиндра, KN — ось цилиндра, O — центр сферы, E — точка касания сферой нижнего основания цилинд-

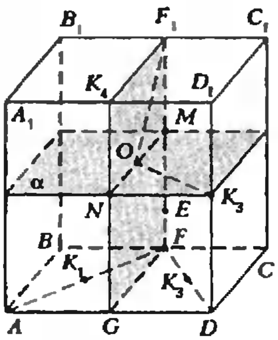


Рис. 1

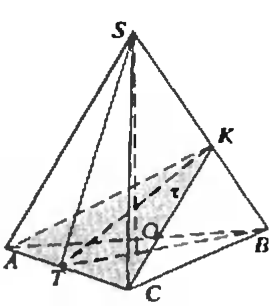


Рис. 2

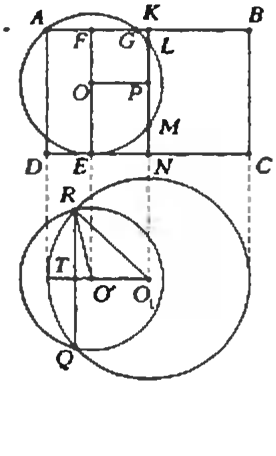


Рис. 5

ра (рис. 5). Точки A и E лежат в плоскости $\alpha = (OKN)$, сечение цилиндра плоскостью α — прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AD = H$, $AB = 2R_ц$, сечение сферы плоскостью α — окружность радиуса $R = R_{сф}$, проходящая через точку A, касающаяся стороны CD в точке E и пересекающая отрезок KN в точках L и M, так что $KL : LM : MN = 1 : 6 : 2$, так как $KL < MN$. Проекции сферы и цилиндра на плоскость основания цилиндра — круги, окружности которых пересекаются в точках R и Q, $RQ=8$ (сфера касается образующих цилиндра, их проекции — точки R и Q, а расстояние между центрами O' и O_1 кругов равно $EP=OP$, где P — середина LM). Пусть G — точка пересечения отрезка AB со сферой ($G \neq A$), F — точка пересечения прямых OE и AB. Тогда $OF \perp AB$, и F — середина отрезка AG. Пусть $KL=z$, $DE=AF=FG=x$, $KG=y$. Тогда $LM=6z$, $MN=2z$, $LP=3z$, $NP=R=5z$. По теореме о касательной и секущей $KG \cdot KA = KL \cdot KM$, т.е. $y(2x+y) = 7z^2$; $NM \cdot NL = NE^2$, т.е. $(x+y)^2 = 16z^2$. Отсюда $x=3z$, $y=z$, $R_ц = 2x+y = 7z$, $O'O_1 = NE = 4z$. Пусть T — середина отрезка RQ. Тогда из $\Delta O'RO_1$: $(7z)^2 = (5z)^2 + (4z)^2 - 2 \cdot 5z \cdot 4z\cos\beta$, где $\beta = \angle ROT$. Отсюда получаем: $\cos\beta = \frac{1}{5}$, следовательно, $\sin\beta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. Тогда $5z = O'R = \frac{5}{2\sqrt{6}}RT$, поэтому $z = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $R_ц = 7\sqrt{\frac{2}{3}}$, $H_ц = 9z = 3\sqrt{6}$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Работа $A_{тр}$ силы трения по условию задачи в обоих случаях (перемещения вверх и вниз) одна и та же. Слагающая силы тяжести, направленная вдоль плоскости (так называемая скатывающая сила), при перемещении вниз «помогает» внешней силе совершать работу против силы трения; напротив, при перемещении груза вверх внешняя сила должна совершать дополнительную работу против скатывающей силы. Обозначив искомую работу внешней силы A_1 (при перемещении груза вверх), имеем

$A = A_{тр} - mgL\sin\alpha$, $A_1 = A_{тр} + mgL\sin\alpha$,

откуда находим

$A_1 = A + 2mgL\sin\alpha = 690$ Дж.

2. Работа на изобаре $1 - 2$ равна

$A = p_1(V_2 - V_1) = R(T_2 - T_1)$.

Количество теплоты Q, подведенное в процессе перехода $1-2-3$, составляет

$Q = A + \Delta U_{12} + \Delta U_{23}$,

где ΔU_{12} и ΔU_{23} — изменения внутренней энергии газа в изобарическом и изохорическом процессах соответственно. В свою очередь,

$\Delta U_{12} + \Delta U_{23} = \frac{3}{2}R(T_3 - T_1)$,

где R — газовая постоянная. Тогда

$Q = A + \frac{3}{2}R(T_3 - T_1)$.

Исключив из выражений для A и Q неизвестную начальную температуру T_1, получим

$T_2 - T_3 = \frac{A}{R} - \frac{2(Q-A)}{3R} = 190$ К.

3. Сразу после замыкания ключа заряд на конденсаторах измениться не успевает, поэтому начальный ток через резистор определяется начальным напряжением на нем:

$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$.

Далее начнется процесс перетекания зарядов на конденсаторах, который окончится к тому моменту, когда напряжение на третьем конденсаторе сравняется по величине с суммой напряжений на первых двух конденсаторах:

$U_3 = U_1 + U_2$.

Если обозначить конечный заряд на конденсаторе 3 через q_3, то из закона сохранения заряда следует, что заряды на конденсаторах 1 и 2 в конечном состоянии равны соответственно

$q_1 = (C_1 + C_3)\mathcal{E} - q_3$, $q_2 = (C_2 + C_3)\mathcal{E} - q_3$.

Окончательно получаем

$$U_3 = \mathcal{E}\frac{2C_1C_2 + C_3(C_1 + C_2)}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_1C_3} = \frac{13}{11}\mathcal{E}.$$

Следует обратить внимание, что закон сохранения заряда мы здесь применяли для двух систем конденсаторов 1, 3 и 2, 3, которые соединены резистором (ток в конечном состоянии не течет!) и ключом.

4. Свет испускается поверхностью дна, которое рассеивает падающее на него излучение. Ход предельного луча, еще выходящего из полыньи и попадающего затем в глаз наблюдателя, изображен на рисунке 6. Угол полного отражения α определяется равенством

$\sin\alpha = \frac{1}{n}$.

Тогда радиус светлого пятна на дне составляет

$r = R + H\operatorname{tg}\alpha = R + \frac{H}{\sqrt{n^2 - 1}} = 3{,}5$ м,

а площадь этого пятна —

$S = \pi r^2 = 38$ м².

Вариант 2

1. Решим задачу в неподвижной системе координат. Время t_0 до столкновения и расстояние s_0, пройденное шариком от точки A до столкновения, очевидно, равны

$t_0 = \frac{s}{v+u}$ и $s_0 = \frac{sv}{v+u}$.

После столкновения с массивным бруском шарик отскакивает от него со скоростью $v_1 = v + 2u$ (вывод этой формулы из законов сохранения энергии и импульса хорошо известен, и мы его опускаем). Время t_1, за которое шарик вернется в точку A после столкновения, есть

$t_1 = \frac{s_0}{v_1} = \frac{sv}{(v+u)(v+2u)}$,

а полное время движения шарика —

$t_2 = t_0 + t_1 = \frac{2s}{v+2u} = 0{,}75$ с.

Многие абитуриенты пытались решить задачу в системе координат, связанной с бруском, однако запутались в переходах из одной системы в другую. Попробуйте самостоятельно решить задачу в этой движущейся системе координат.

2. Пусть соответствующие смещения столбика ртути равны x_1 и x_2. Тогда $x_1 - x_2 = a = 2$ см.

Давления внутри трубки, измеренные в сантиметрах ртутного столба, равны, очевидно, $H - l$ и $H + l$, где H — искомое атмосферное давление. По закону Бойля — Мариотта имеем (сечение трубки S)

$(H - l)(L + x_1)S = HLS$, $(H + l)(L - x_2)S = HLS$.

Отсюда находим

$H = l\sqrt{1 + \frac{2L}{a}} = 72$ см рт.ст. $= 720$ мм рт.ст.

3. В рассматриваемый момент времени заряд конденсатора максимален, т.е. ток утечки через конденсатор, равный $I = U_0/R$, течет и через индуктивность. Поэтому энергия, запасенная в этот момент в контуре, складывается из энергий конденсатора и

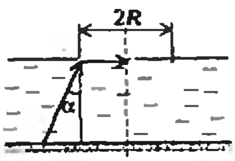


Рис. 6

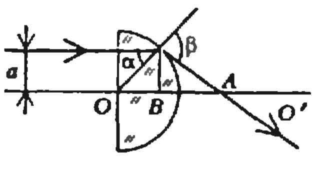


Рис. 7

катушки:

$$W = \frac{CU_0^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = \frac{U_0^2}{2}\left(C + \frac{L}{R^2}\right) = 4\cdot10^{-6}\ Дж.$$

Вся эта энергия и выделится в виде тепла к моменту полного затухания колебаний в контуре.

4. Пусть α и β — углы падения и преломления луча на сферической поверхности (рис.7). По условию $\sin\alpha = 0{,}6$, а по закону преломления $\sin\beta = n\sin\alpha = 0{,}8$. Далее,

$$AB = a\,\mathrm{ctg}(\beta - \alpha) = \frac{72}{35}R,\ OB = R\cos\alpha = 0{,}8R,$$

а искомое расстояние

$$AO = AB + OB = \frac{20}{7}R.$$

Вариант 3

1. Пусть положение точки отрыва шарика задано углом α, скорость отрыва равна v и направлена по касательной к поверхности шара (рис.8). До отрыва шарик движется по окружности под действием силы тяжести $m\vec{g}$ и реакции опоры $\vec{N}$, перпендикулярной поверхности шара:

$$\frac{mv^2}{R} = mg\cos\alpha - N.$$

В момент отрыва реакция обращается в ноль, тогда из уравнения движения и из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mgR(1 - \cos\alpha)$$

получаем

$$\cos\alpha = \frac{2}{3} \text{ и } v^2 = \frac{2}{3}gR.$$

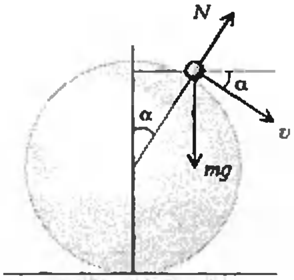


Рис. 8

В дальнейшем горизонтальная составляющая скорости шарика $v_r = v\cos\alpha$ не изменяется. Запишем закон сохранения энергии (отсчет потенциальной энергии удобно вести от нижней точки шара, лежащей на поверхности стола) в виде

$$mg\cdot 2R = mgH + \frac{mv_r^2}{2},$$

откуда для максимальной высоты подъема после отскока получаем

$$H = 2R - \frac{v_r^2}{2g} = \frac{50}{27}R = 1\ м.$$

2. Пусть плотность жидкого пропана равна $\rho = m/V$, V_1 — объем, занятый газообразным пропаном, полная масса оставшегося пропана в газообразном (m_1) и жидком (m_2) состояниях равна $0{,}2m$, молярная масса $M = 44$ г/моль и R — газовая постоянная. Тогда

$$m_1 = \frac{M p V_1}{RT},\ m_2 = \rho(V - V_1),\ m_1 + m_2 = 0{,}2m,$$

откуда находим массу газообразного пропана:

$$m_1 = \frac{0{,}8m}{\frac{mRT}{VMp} - 1} = 70\ г.$$

3. Магнитное поле прямого провода на одинаковых расстояниях от него (в плоскости рисунка) одно и то же и перпендикулярно плоскости рисунка. Поэтому магнитные потоки Φ, пронизывающие контуры, пропорциональны длинам сторон, параллельных проводу. Если r — сопротивление единицы длины провода, то по закону электромагнитной индукции имеем

$$I_1 = \frac{d\Phi_1/dt}{4ar},\ I_2 = \frac{d\Phi_2/dt}{4ar},$$

$$I_3 = \frac{(b/a)d\Phi_1/dt - (c/a)d\Phi_2/dt}{2(a+b)r + 2(a+c)r} = \frac{2(bI_1 - cI_2)}{2a + b + c}.$$

В последней формуле учтено, что потоки, пронизывающие части контура 3, направлены навстречу друг другу (контур свернут «восьмеркой»).

4. Пусть d — расстояние от линзы до середины спички, l — длина спички. Для увеличения в первом случае можно записать

$$\Gamma_1 = \frac{F^2}{(d-F)^2 - l^2/4},$$

во втором —

$$\Gamma_2 = \frac{F}{(d-F)}.$$

Отсюда находим

$$\frac{1}{\Gamma_1} = \frac{1}{\Gamma_2^2} - \frac{l^2}{4F^2},$$

и окончательно $l = 4$ см.

Московский государственный институт электронники и математики (Технический университет)

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 2. 2. 20 км/ч. 3. $(-1/3;0)\cup(0,1/8)$.

4. $2\pi n$; $2\pi(6n+1)/3$, $n \in Z$. 5. 16 : 17.

Вариант 2

1. $(-\infty;-2]\cup[5;\infty)$. 2. 3 км/ч. 3. $\arcsin 1/3 + \pi(2n+1)$, $n \in Z$.

4. 1 : 3. 5. $a = 2$.

ФИЗИКА

1. $x = a\dfrac{\pi\rho_2}{4(16\rho_1 + \pi\rho_2)} = 0{,}9$ см.

2. $F = \dfrac{2mv\sin\alpha}{\Delta t} = 174$ Н; $h = v\cos\alpha\cdot t + \dfrac{gt^2}{2} = 5{,}2$ м

3. $\Delta t = \dfrac{v_0^2}{8c} = 0{,}65$ К. 4. $\Delta U_{21} = 3/2(p_2 - p_1)V_1 = 150$ Дж;

$\Delta U_{32} = 0$; $\Delta U_{31} = 3/2\,p_1(V_1 - V_2) = -150$ Дж; $\Delta U = 0$;

$A = 1/2(p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = 50$ Дж.

5. $U_1 = \dfrac{UC_2}{C_1 + C_2} = 90$ В; $U_2 = \dfrac{UC_1}{C_1 + C_2} = 30$ В;

$W = \dfrac{C_1C_2U^2}{2(C_1 + C_2)} = 10{,}8$ мДж. 6. $\mathcal{E} = \dfrac{U(R_1 + R_2)}{R_2} = 21$ В.

7. $W \sim C$; $q_m = C\mathcal{E} = 1{,}5\cdot10^{-9}$ Кл; $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = 10^4$ с$^{-1}$.

8. $\Phi = \dfrac{\pi m^2 v^2}{e^2 B} = 10^{-8}$ Вб;

$T = \dfrac{2\pi m}{eB} = 3{,}5\cdot10^{-9}$ с.

9. $d = \dfrac{Ff}{F+f} = 14{,}7$ см; $\Gamma = \dfrac{F}{F-d}$

(см. рис.9).

10. $\lambda_{max} = \dfrac{hc}{E_2} = 5{,}7\cdot10^{-8}$ м.

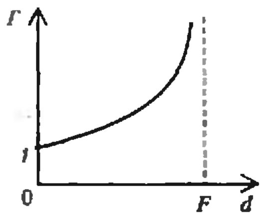


Рис. 9

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $S = \dfrac{h^2\sqrt{2}\cos\alpha(\sqrt{2} + \sin\alpha)}{\sin^2\alpha}$; $\beta = \mathrm{arctg}(\sqrt{2}\,\mathrm{ctg}\,\alpha)$.

2. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ k,n\in Z$.

3. $-\sqrt{3}<x\le -1,\ 1\le x<\sqrt{3}$. 4. $y_{max}=y(4)=0$.

$y_{min}=y\left(\frac{4}{e}\right)=-2/l$. 5. $t_1=24/5$ ч, $t_2=16/5$ ч.

Вариант 2

1. $S=72\sqrt{10}$; $\alpha=\operatorname{arctg}\left(3\sqrt{15}/5\right)$. 2. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$,

$x=\operatorname{arctg}0{,}1+2\pi n,\ k,n\in Z$. 3. $-3\le x<-\sqrt{5},\ \sqrt{5}<x\le 3$.

4. $y_{max}=y(7)=0,\ y_{min}=y\left(\frac{7}{e}\right)=-14/e$.

5. $v=4{,}5$ км/ч.

Вариант 3

1. См. рис. 10.
2. $x=\pi+2\pi k$,

$x=\pm\frac{4}{3}\pi+4\pi n,\ k,n\in Z$.
3. 4; 1/4.
4. $x\le 1,\ 3\le x<4$.
5. $V=\frac{1}{3}b^3\sin 2\alpha\cdot\cos^2\beta\cdot\sin\beta$.

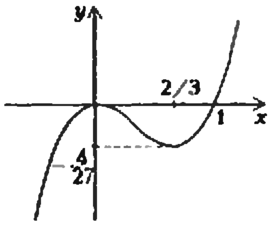


Рис. 10

Движение по окружности: равномерное и неравномерное

(см. «Квант» № 6 за 1994 г.)

1. $n<\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{l}}$. 2. $\omega=\sqrt{\frac{\mu(M+m)g}{MR}}$.

3. $H_{max}=\frac{50}{27}R=1$ м.

Умеете ли вы решать «почти школьные» задачи?

(см. «Квант» № 6 за 1994 г.)

1. Множество, заданное неравенством $|y|\le|\cos x|$ — см. решение задачи 2.
2. См. рис. 11.
3. Период функции $f(\cos 2x)$ равен π.
4. Ответ: $x=k,\ 2k+\frac{1}{2},\ k\in Z$. Для доказательства того, что других решений нет, можно использовать неравенства $\sin^{99}(\pi x)\le\sin^2 x$, $\cos^{92}(\pi x)\le\cos^2 x$.
5. См. рис. 12 — искомое множество является пересечением квадратов, заданных неравенствами $|a-x|+|b-x|\le 2,\ x\in[0;1]$, «в плоскости Oab».

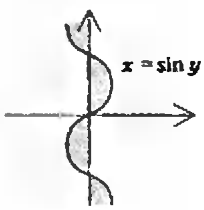


Рис. 11

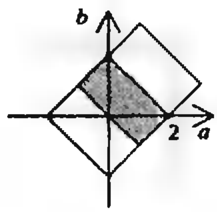


Рис. 12

6. $n\not\equiv 0 \pmod 3$ — см. второе решение задачи 9.
7. а) Можно, к примеру, использовать тригонометрическую форму записи комплексного числа.

б) $AB=|z-1|,\ AC=|z^2-1|=|z-1||z+1|$,

$BC=|z^2+z-2|=|z-1||z+2|$. Вспомните геометрические свойства преобразования плоскости, определенного умножением на данное комплексное число.

в) Ответ: (1;3). Центром описанной около ABC окружности является точка O, так что $R=|z+2|$, где $|z|=1$. Кстати, почему на рисунке 13 исключены значения $z=\pm1$?

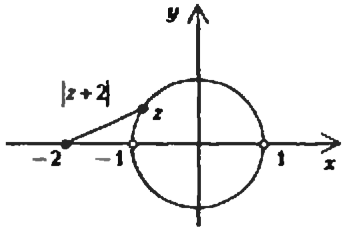


Рис. 13

г) Ответ: $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Если $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$, то $S_{ABC}=|\sin\varphi|(1-\cos\varphi)$.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич,
С.П.Коновалов, А.Ю.Котова,
А.П.Савин, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
Н.Ф.Алексеев, Т.А.Васильева, В.Н.Власов,
Д.А.Крымов, В.М.Митурич-Хлебникова, А.Г.Стройло

ГЛАВНЫЙ ХУДОЖНИК
С.А.Стулов

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Е.В.Титова

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ
Л.А.Панюшкина

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ
Е.В.Самойлова

Адрес редакции:
103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант»,
тел. 250-33-54, 251-55-57

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховском полиграфическом комбинате
Комитета Российской Федерации по печати
142300 г. Чехов Московской области
Заказ №38

Шахматной страничке — 15 лет!

На фоне славного юбилея «Кванта», которому в эти дни стукнуло 25, незамеченным может остаться другой, более скромный юбилей... А между тем в этом месяце исполняется 15 лет нашей шахматной страничке! Впервые она появилась на свет в «Кванте» № 1, 1980, и вот незаметно промелькнуло полтора десятка лет — № 1, 1995. Примечательно, что за эти годы в журнале не было ни одного пропуска, ни один номер не обошелся без шахматной рубрики. Рекорд для книги Гиннесса!

Одна из основных тем, которую мы регулярно освещали и которая весьма близка читателю, — это, конечно, компьютерные шахматы. Буквально на наших глазах роботы из довольно слабых игроков превратились в опасных гроссмейстеров, а в середине прошлого года в мире компьютерных шахмат произошло чрезвычайное событие...

Сенсация в мире компьютерных шахмат

Впервые в истории робот не только победил многих супергроссмейстеров, но и одолел чемпиона мира Гарри Каспарова, разделив с ним в итоге первое место. Правда, случилось это пока еще только в турнире по блицу.

Дело происходило в Мюнхене. На состязание, финансируемое американской фирмой «Интел», собрались почти все сильнейшие шахматисты мира: Каспаров, Ананд, Шорт, Гельфанд, Крамник... Среди приглашенных игроков была и компьютерная программа «Fritz» — совместный плод немецких и голландских программистов. Играла она на персональном компьютере с микропроцессором «Пентиум» — это последняя модель «Интела». При этом с шахматным роботом гроссмейстеры играли не на привычной доске, а прямо на дисплее, что представляло определенный дискомфорт, ведь приходилось переставлять не обычные фигуры, а их силуэты на экране с помощью «мыши».

Еще лет пять назад шахматные компьютеры, как правило, вели расчет на фиксированное число ходов. В современных программах глубина перебора определяется эвристическими правилами и, например, в эндшпиле может быть значительно увеличена. Поэтому, если раньше машина была весьма уязвима в окончаниях, то теперь чувствует себя уверенно, особенно когда они носят тактический характер.

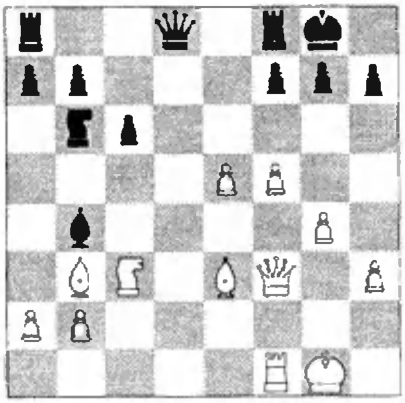
«Fritz» — А.Войткевич
Английское начало

1. c4 c5 2. Kf3 Kf6 3. Kc3 Kc6 4. d4 cd 5. K:d4 e6 6. Kdb5 d5 7. Cf4 e5 8. cd ef 9. dc bc 10. Ф:d8+ Kp:d8 11. Лd1+ Cd7 12. Kd6 C:d6 13. Л:d6 Kpc7? Теория рекомендует 13...Лb8 с контригрой. Всего одна неточность гроссмейстера ведет к печальным последствиям. **14. Лd4! g5 15. g3 fg 16. hg h5 17. Cg2 Лаd8 18. Лс4 Kpd6.** Защищаясь от угрозы Kb5+. Впрочем, у белых уже явный перевес в эндшпиле, и они не оставляют противнику никаких шансов. **19. b4 Лс8 20. Лс5! Лhg8 21. e4 Лсе8 22. Лa5.** Поскольку ответ 22...Ла8 невозможен из-за 23. e5+, черным приходится расстаться с пешкой. **22...Ле5 23. Л:а7 g4 24. Kpe2 Лb8 25. Лb1 Kpe7 26. Kpe3 Kpe8 27. Kpf4 Ле6 28. a4 Ле7 29. e5 Kh7 30. b5 cb 31. Kd5 b4 32. K:e7 Kp:e7 33. Cb7 Kpf8 34. Ce4.** Черные сдались.

На старте вперед уверенно вырвался Гарри Каспаров, выигравший 8 партий подряд. Однако робот неотступно следовал за ним, а затем и догнал, выиграв личную встречу.

Г.Каспаров — «Fritz»
Дебют ван Круйса

1. e3. Вообще-то такой ход в классической теории отсутствует, но иногда этот дебют называют по имени голландского шахматиста, когда-то применявшего его. Очевидно, это специальная заготовка Каспарова, чтобы сбить машину с толку. **1...d5 2. c4 dc 3. C:c4 e5 4. d4 ed 5. ed Cb4+ 6. Kc3 Kf6 7. Kf3 0-0 8. 0-0 Cg4 9. h3 Ch5 10. g4 Cg6 11. Ke5 Kc6 12. Ce3.** Итак, в дебюте робот переигран по всем статьям. **12...K:e5 13. de Kd7 14. f4 Kb6 15. Cb3?** Сейчас белые могли сыграть 15. Ф:d8 Ла:d8 16. C:b6 ab 17. f5, забирая фигуру: 17...Лd2 18. fg hg 19. e6, и все было бы кончено. Каспаров, видимо, автоматически отвел слона, и «Fritz» неожиданно перехватывает инициативу. **15...Cd3 16. Фf3.** После 16. Лf2 Kc4 у черных хорошие контршансы. Жертвуя качество, белые создают атаку на неприятельского короля, но в тактических осложнениях машина оказывается на высоте. **16...C:f1 17. Л:f1 c6 18. f5.**



18...Фe7! 19. f6. Иначе к королю не подобраться; в случае 19. Фе4 Лае8 20. е6 fe 21. C:e6+ Kph8 перевес на стороне черных. **19...Ф:e5 20. fg Kp:g7 21. Ke4 Kd5 22. C:d5 cd 23. Kg3 Kpg8 24. Kf5 Лас8 25. Фf2.** На 25. Cd4 следует 25...Cc5! **25...Лс4! 26. Kh6+.** Вновь не опасно 26. Cd4 из-за 26...Л:d4 27...K:d4 Cc5 28. Лd1 f5. **26...Kph8 27. C:a7.** Проигрывает 27. K:f7+ Л:f7 28. Ф:f7 Фg3+ 29. Kph1 Ф:h3+ 30. Kpg1 Л:g4+ 31. Kpf2 Лg2×. **27...f6 28. Kf5 Ле8 29. a3.** Кажется, что белые добились своего — на отступление слона следует 30. Cd4, и у них все в порядке. Однако... **29...Ce1!** Выясняется, что у слона есть отступление, при котором белые не успевают осуществить необходимую перестройку фигур. **30. Фg2 Ле4 31. Kh6 Ле7 32. Лf5 Ле2! 33. Л:e5 Л:g2+ 34. Kp:g2 fe 35. Cb8 e4 36. Ce5+ Л:e5 37. Kf7+ Kpg7 38. K:e5.** Белым в конце концов удалось восстановить материальное равенство, однако слон в данной ситуации гораздо сильнее коня, и машина вновь четко проводит эндшпиль. **38...Cd2 39. Kpf1.** Или 39. b3 Kpf6 40. Kd7+ Kpe7 41. Kc5 b6. **39...Cc1 40. b3 C:a3 41. g5 d4 42. Kpe2 d3+ 43. Kpd2.** Не помогает 43. Kpe3 Cc1+ 44. Kpf2 C:g5. **43...Cd6 44. Kc4 Cf4+ 45. Kpc3 b5.** Белые сдались.

Турнир закончился, и вот как расположилась тройка победителей: 1—2. Г.Каспаров, «Fritz» — 12,5 очка из 17; 3. В.Ананд — 12. Теперь, чтобы определить обладателя первого приза, человек и машина должны были сыграть матч из шести партий. Чемпион мира отнесся к этому поединку со всей ответственностью и разгромил своего электронного обидчика со счетом 4:1.

Г.Каспаров — «Fritz»
Дебют ван Круйса

1. e3 d5 2. c4 dc. Видимо, самый надежный ответ здесь 2...e6, сводя игру к известным схемам. Вместо этого машина вновь идет на позицию с изолированной пешкой у белых, так и не сумев разобраться в нюансах этого редкого дебюта. В обеих встречах по существу все было кончено к 15-му ходу.

3. C:c4 e5 4. d4 ed 5. ed Cb4+ 6. Kc3 Kf6 7. Kf3 0-0 8. 0-0 Cg4 9. Ce3. На этот раз белые сначала укрепляют центр, а уже затем отбрасывают слона. Реакция робота крайне неудачна.

9... a5? 10. h3? Ch5 11. g4 Cg6 12. Ke5 Kbd7 13. f4.

У белых большой перевес в пространстве, и на сей раз они не составляют сопернику никаких надежд.

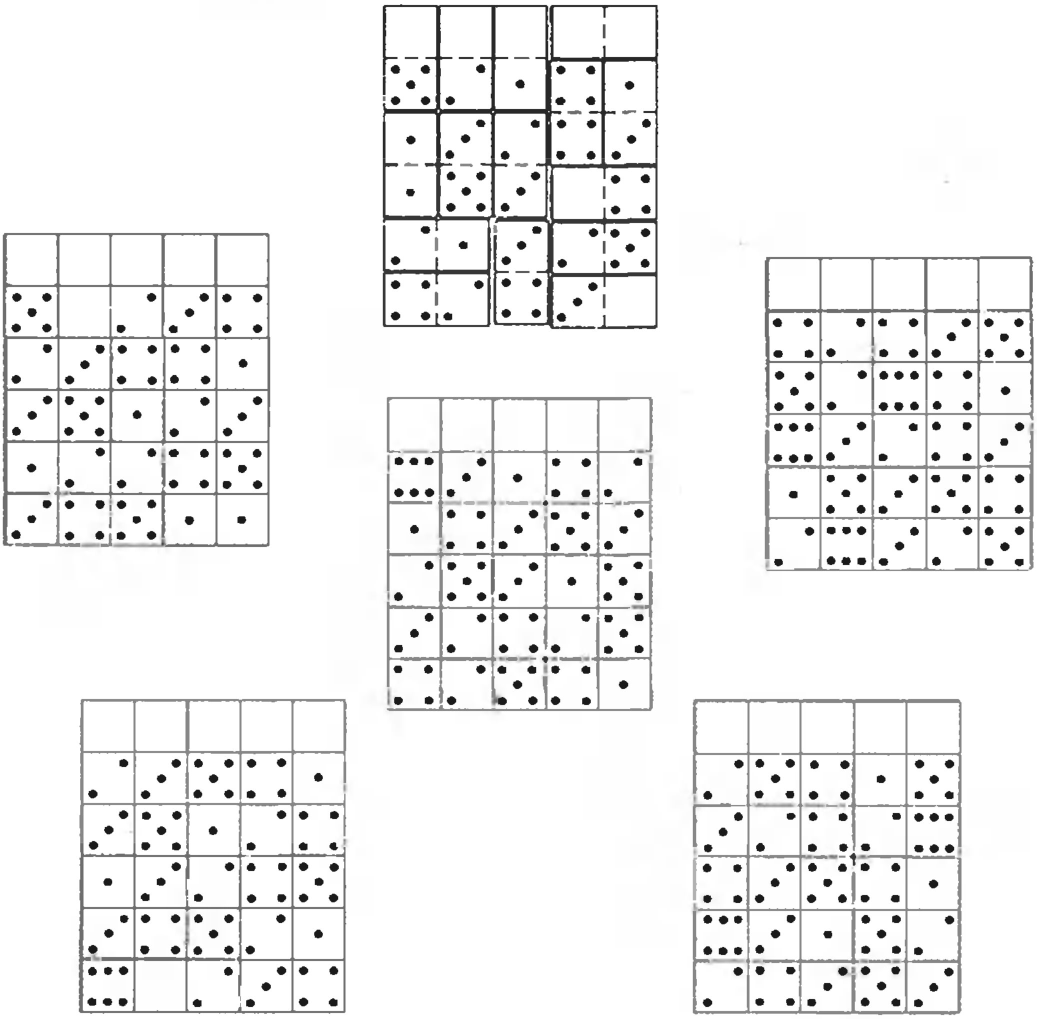
13. ...K:e5 14. de Фe8 15. Фe1 Ke4 16. a3 C:c3 17. bc Фc6 18. Ca2 h6 19. f5 Ch7 20. Cd4 Kg5 21. Фe3 Лfe8 22. h4 Ke4 23. g5 hg 24. hg g6 25. e6 fe 26. fe Ле7 27. Лae1 b5 28. Ф:e4, и черные сдались.

...Спустя три месяца на турнире ПША по быстрым шахматам в Лондоне отличилась уже другая программа — «Гениус Пентиум». Она на старте обыграла Каспарова и исключила его из дальнейшей борьбы. Затем машина взяла верх над гроссмейстером Николичем, а остановить ее победное шествие сумел только Ананд. Но это уже сюжет для другого рассказа...

Е.Гик

Индекс 70465

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК



ДОМИНО И МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ

Магическим квадратом принято называть квадрат, разделенный на n^2 маленьких квадратиков, в которых записаны числа от 1 до n^2, притом так, что в каждой строке, каждом столбце и по каждой из двух диагоналей суммы стоящих там чисел одинаковы. Магические квадраты были широко распространены в Европе и Азии несколько веков назад. Их носили как амулеты, предохраняющие от несчастий.

Позднее магическими квадратами стали называть также и квадраты, в которых расположены любые n^2 различных целых чисел с постоянными суммами в строках, столбцах и диагоналях.

Наш читатель А.Шмелев составил несколько магических квадратов пятого порядка из косточек домино, шесть из которых помещены на рисунке. Естественно, что здесь не следует учитывать верхнюю строку из «пустышек».

В первом из квадратов расположение косточек четко указано, а в остальных вам предлагается найти это расположение.

Попробуйте ответить также на следующие вопросы.

1. Можно ли составить аналогичный квадрат, в котором в каждой строке, каждом столбце и по каждой из диагоналей стояли бы только числа от 1 до 5, каждое по одному разу?

2. Можно ли составить квадрат 6×6 с тем же свойством для чисел от 1 до 6?

3. Все косточки домино можно выложить в виде прямоугольника 7×8. Можно ли это сделать так, чтобы одна строка состояла из семи пустышек, а остальные семь строк образовывали магический квадрат?

А.Савин