ц. 02.2000

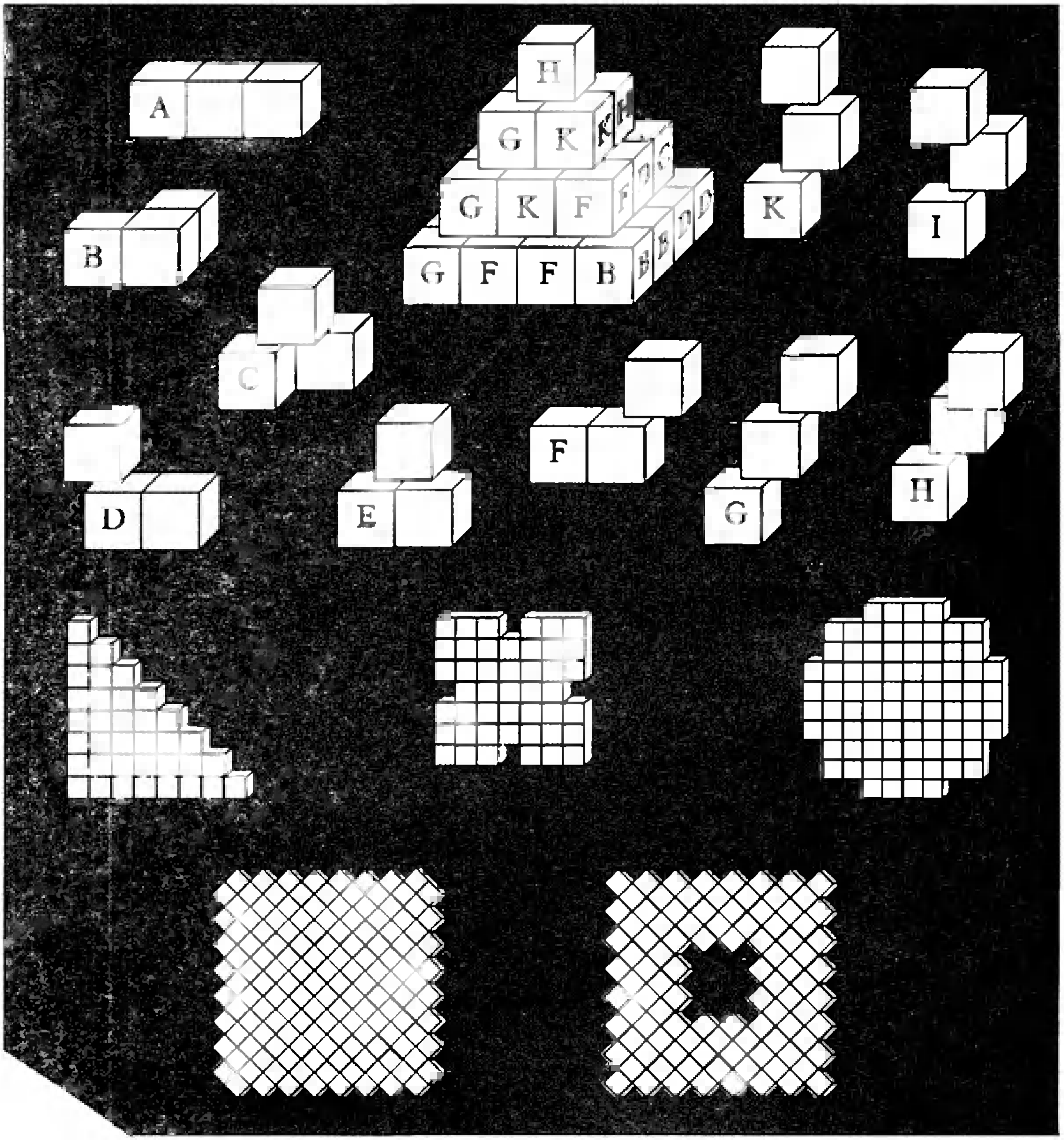
ISSN 0130-2221

НОЯБРЬ/ДЕКАБРЬ 1994 · №6

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК



НОВЫЙ КОНСТРУКТОР МОЧАЛОВА

…оволомок придумал известный изобретатель Л.П.Мочалов. Первая головоломка …из кубиков». Строго говоря, пирамида Мочалова состоит из 10 элементов, …из трех кубиков. Из этих элементов требуется собрать пирамиду, показан… …очень трудна в решении, и пока никому не удалось ни обнаружить более … доказать его единственность.

…чые пять головоломок — «с зубчатыми краями», нужно для каждой …личество частей можно разрезать фигуру, чтобы сложить из

…айдете в новой книге Л.П.Мочалова «Головоломки», …росвещение».

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА
НОЯБРЬ/ДЕКАБРЬ · 1994 · №6

В номере:

Александр Яковлевич Хинчин

Б.ГНЕДЕНКО

К 100-летию со дня рождения выдающегося ученого и педагога

Лузитания

В ПРОШЛОМ столетии математика в Московском университете находилась на весьма среднем уровне. Исключение составляли работы К.М.Петерсона по геометрии и Н.Е.Жуковского по гидродинамике. В начале XX века профессор Б.К.Млодзеевский впервые познакомил студентов физико-математического факультета с новыми идеями, развитыми во Франции, касающимися прогресса теории функций действительного переменного. Он ознакомил слушателей с понятиями меры множества, измеримой функции, интеграла Лебега...

Это был выдающийся шаг, но не в области развития научных идей, а в области математического образования. В 1912 г. одна вслед за другой появились две заметки в «Докладах Парижской Академии наук» Д.Ф.Егорова и Н.Н.Лузина, в которых были доказаны две теоремы, касающиеся выделения основных свойств измеримых по Лебегу функций. Они и послужили основой дальнейшего бурного прогресса математических исследований в Москве и базой для создания всемирно известной Московской математической школы.

В 1914 г. Н.Н.Лузин возвратился в Москву и практически тотчас же начал работу своего семинара по теории функций действительного переменного. Этому семинару предстояло большое будущее. Первыми его учениками были Д.Е.Меньшов, А.Я.Хинчин и П.С.Александров. Они-то и стали ядром школы Лузина. Через несколько лет эта новая математическая школа заявила во весь голос, что появилась в мировой математике новая мощная сила, способная не только решать отдельные задачи, но и выдвигать новые проблемы, оказывать решающее влияние на развитие математики. Ученики Лузина дали Московской математической школе другое имя — Лузитания. Собственно, все позднейшие успехи московских математиков обязаны в конечном счете Лузитании.

Александр Яковлевич Хинчин (1894 — 1959)

Поэт, театрал...

Один из выдающихся питомцев Лузитании — Александр Яковлевич Хинчин родился 19 июля 1894 года в селе Кондрово Медынского уезда; теперь это город, районный центр Калужской области. Его отец был главным инженером Кондровской бумажной фабрики; среди специалистов бумажного дела он пользовался известностью и деловым авторитетом.

Отроческие годы Александра Яковлевича прошли под сильным влиянием поэтических увлечений. Четыре небольших сборника его стихов были изданы в Калуге в период 1908 — 1914 гг. Мне удалось приобрести эти сборники.

Позднее, когда Хинчин уже учился в университете, он систематически посещал заседания литературных объединений «Зеленая лампа» и «Желтая кофта». На этих заседаниях он встречался с В.Маяковским, поэзией которого увлекался.

Постепенно увлечение поэзией прошло. Быть может, на это повлияло письмо А.Блока, в котором тот давал не очень высокую оценку самостоятельности поэтических произведений Хинчина. Он говорил в этом письме о том, что каждый поэт должен иметь и развивать собственный голос, собственную манеру письма. Об этом мне рассказывала В.Я.Хинчина — сестра Александра Яковлевича.

Начиная со школьных времен, Хинчин приучил себя к правилу: все начатое делать сразу и до конца. Ничего не оставлять недопонятым на будущее. Все сомнения разрешать сразу либо путем самостоятельного размышления, либо в сложных случаях — путем обращения к авторитету. Такой подход — самый экономный на пути развития мышления и при том самостоятельного мышления.

В реальном училище у него был превосходный учитель — М.Ф.Берг, известный в ту пору своими задачниками. Несомненно влияние Берга на выбор физико-математического факультета для продолжения образования. Но по собственному признанию Александра Яковлевича еще большее значение имело знакомство с учебником математического анализа, который он изучил самостоятельно. Новые концепции увлекли его и привели в число студентов-математиков Московского университета.

Учился он систематически, следуя своему принципу — понимания, а не бездумного запоминания. Он активно участвовал в работе студенческого математического кружка, выполнил в нем работу по теории бесконечных рядов и был удостоен факультетом за это сочинение золотой медали.

В студенческие годы литературные увлечения сменились театральными. Он стал приверженцем труппы МХАТа и не пропускал ни одной премьеры. Более того, под влиянием МХАТа он организовал в Кондрове театральную труппу, участниками которой была рабочая молодежь. В пустом сарае они оборудовали сцену и зрительный зал и там давали представления, в том числе и платные. На собранные таким образом средства организовывались выезды в Москву на спектакли МХАТа. Ездили всем актерским коллективом.

Заслуживает упоминания то обстоятельство, что Хинчин в этом самодеятельном театре был актером и режиссером. Чтобы руководить труппой, он брал уроки сценического искусства и ставил свой голос у специалистов. Несомненно, что увлечение театром не прошло даром для формирования Хинчина как лектора. Он умел владеть и аудиторией, и своим голосом, никогда не напрягал голосовые связки и тем не менее был хорошо слышим всеми даже в большой аудитории. Он умел выделять интонацией самое важное в сообщаемом материале. Он оставался понятным от начала лекции и до конца. Он умел рассказывать так, что каждый слушатель понимал его и убеждался в незыблемости сообщаемых им знаний. По-видимому, для воспитания лектора необходимы занятия по сценическому искусству, по постановке голоса, чтобы полностью использовать его возможности и не вызывать перенапряжения голосовых связок. А эта болезнь так распространена среди педагогов.

Иваново — Москва

Александр Яковлевич был студентом с 1911 по 1916 г. Его способности были отмечены не только золотой медалью, но и оставлением в университете для подготовки к профессорскому званию. Его педагогическая работа началась в 1918 г. в Иваново-Вознесенске, куда по настойчивым просьбам М.В.Фрунзе был переведен неустроенный Рижский политехнический институт. Основное ядро профессуры переехало в Иваново. В их числе был отец М.В.Келдыша — профессор по теории железобетона. Город делал все возможное для того, чтобы в те тяжелые времена институт работал нормально. В частности, была приглашена туда большая группа московских математиков во главе с Н.Н.Лузиным. В их числе были Д.Е.Меньшов, В.С.Федоров, А.Я.Хинчин и еще несколько человек. Вскоре в Иванове был организован и Педагогический институт, деканом физико-математического факультета которого был избран А.Я.Хинчин. Для расцвета педагогических способностей Александра Яковлевича были созданы превосходные условия.

Хинчин читал лекции, принимал экзамены, занимался факультетом, желая воспитать увлеченных и широкообразованных учителей для средней школы. Кроме того, он занимался пропагандой научных знаний, выступая с публичными лекциями. Позднее, когда я работал в Иванове (с 1930 по 1934 г.), от старожилов местной интеллигенции я слышал восхищенные отзывы о его лекциях для широкой публики. Особенно он любил выступать по вопросам психологии, демонстрируя свободное и хорошее владение современной для того времени литературой.

В 1922 г. при физико-математическом факультете Московского университета был организован Научно-исследовательский институт математики и механики. Туда в качестве научного сотрудника был приглашен Александр Яковлевич. Некоторое время он совмещал эту работу с педагогической работой в Иванове. В 1926 г. он был приглашен заведовать кафедрой математического анализа в Московский педагогический институт им. В.И.Ленина, а через год получил профессуру в Московском университете. С тех пор его педагогическая и научная жизнь была связана лишь с этими двумя высшими учебными заведениями. Ряд лет он был заведующим кафедрой математического анализа, а с 1932 по 1934 г. — директором НИИ математики МГУ. В эти годы он был избран депутатом Моссовета. В ту пору каждый депутат должен был участвовать в работе какой-нибудь секции. Он избрал секцию связи. Там он вплотную столкнулся с математическими задачами телефонных сетей и начал научно разрабатывать эти вопросы. Он был привлечен к работе по проектированию первой в Москве АТС. По словам связистов, эта его работа позволила сэкономить несколько миллионов рублей золотом. Его расчеты доказали, что уже приобретенного оборудования достаточно для безупречной работы телефонной станции.

Учитель и друг

В апреле 1934 г. я приехал в МГУ в кратковременную командировку и первым делом отправился на заседание научного семинара по теории вероятностей. В семинаре было два руководителя — А.Я.Хинчин и А.Н.Колмогоров. Оба они внимательно слушали доклады и делали замечания как по ходу дела, так и в заключительной стадии обсуждения. Оба они были известны своим научным вкладом в математику и по моим теперешним представлениям молоды: Колмогорову был только 31 год, а Хинчину — 40.

Тогда же мне Хинчин показался пожилым. Поведение их было существенно различно: Хинчин внимательно слушал докладчика и отчаянно много курил прямо в аудитории. Колмогоров обычно предлагал докладчику изменить систему изложения, приблизив ее к реальным или более широким задачам. Хинчин давал советы по улучшению содержания статьи. Выступления Колмогорова всегда были более резкими, но всегда отвечали существу задачи. Он не пропускал ни одного неудачного места и отмечал каждое из них, хотя первое впечатление от его поведения говорило, что он устал, дремлет. Но эта была манера отвлечься от всего лишнего и сосредоточиться на основном для заседания.

Хинчин предложил мне несколько простых вопросов и просил меня обдумать их. Иногда он предлагал и ожидаемый ответ. Мне удавалось построить простые примеры, которые иногда противоречили его ожиданиям или же подтверждали его гипотезы. В результате всего этого я пришел к мысли, что мне нужно учиться именно в Москве и именно у этих ученых. Я спросил у Александра Яковлевича, согласится ли он руководить мной, если я поступлю в аспирантуру. Согласие было получено, и осенью я благополучно сдал экзамены и стал аспирантом института математики МГУ. С этих пор я наблюдал жизнь факультета и кафедры теории вероятностей изнутри, радуясь удаче.

Семинар работал регулярно. Постепенно я узнал его участников. Регулярными были математики, нерегулярными физики, биологи, инженеры. Они приходили со своими темами исследований, со своим стилем изложения. Колмогоров активно участвовал в обсуждении всех докладов, было ясно, что его начальная подготовка в этих областях знания высока. Хинчин обычно участвовал в обсуждении докладов физического характера.

Часто случалось, что на следующем заседании оба руководителя делали дополнения к прошлым сообщениям и иногда печатали на эти темы собственные работы. Этим они демонстрировали единство науки; у меня складывался идеал математика, способного не только доказывать новые теоремы, но и применять средства математики к решению задач других научных дисциплин. Александр Яковлевич часто поручал мне проверить правильность решения прикладных задач, которые предлагались прикладниками-участниками семинара. Это также приучало к ответственности.

Колмогоров и Хинчин практически еженедельно делали сообщения о своих новых результатах. Некоторая часть этих сообщений так и осталась неопубликованной, несмотря на утверждение Александра Яковлевича, что печатать следует каждый результат, так как неизвестно, что пригодится для будущего развития науки.

Я счастлив, что оба мои руководителя стали впоследствии моими ближайшими друзьями. Мы нашли общие интересы не только в науке, но и в музыке, живописи, литературе. Впоследствии Александр Яковлевич давал мне прочесть рукописи своих работ как математических, так и педагогических с целью избежать случайного недосмотра, возможной неясности изложения, неряшливости формулировок. Он любил повторять, что работы пишутся не для себя, а для других, поэтому так важно взглянуть на них глазами постороннего читателя.

Примерно раз в год Александр Яковлевич объявлял специальный курс. Обычно тему курса определяли его научные увлечения соответствующего периода. Начиная с 1935 г., я прослушал его лекции по теории цепных дробей, асимптотическим законам теории вероятностей, предельным теоремам для сумм независимых случайных величин, математическим методам статистической физики, задачам квантовой статистики. Все эти курсы были хорошо продуманы, превосходно скомпонованы и блестяще прочитаны. После каждого такого курса слушатели как бы поднимались в своем развитии, приобретали не только твердые и прочные знания, но и приближались к собственной творческой деятельности. Для меня особое значение имели его лекции по теории суммирования, так как открыли мне неисчерпаемый клад нерешенных проблем, помогли выбрать темы исследования на ряд лет, натолкнули на метод решения.

На всю жизнь у меня остается в памяти 1936 г., когда Александр Яковлевич предложил мне снять комнату в Тарусе и пробыть с ним месяц для научного отдыха. Он туда ездил каждый год и страстно любил эти места: Оку, девственные леса, еще не тронутые топором дровосека, изобилие грибов и красивейшую холмистую местность. Каждое утро мы отправлялись в лес по грибы. Он был неутомимым ходоком и настоящим мастером отыскивать скопления белых грибов. Грибы мы приносили к нему на дачу, чистили их и жарили на огромной сковороде. Одновременно мы продолжали начатые в лесу математические разговоры, где обсуждали нерешенные вопросы. Таким путем я пришел к выводу: у ученого нет и не может быть строго определенного времени, когда он занимается творчеством. Нерешенные вопросы его мучают и во время прогулок, и в очередях, и на заседаниях. Нерешенные задачи не оставляют мозг ученого ни днем, ни ночью. Недаром решение приходит неожиданно, в том числе и ночью.

У Хинчина не было большого числа аспирантов, несмотря на то, что он был внимательным и чутким руководителем. За годы с 1934 по 1945 я знаю только пять его учеников — трое по теории вероятностей и двое по теории чисел. Быть может, причиной этого была некоторая внешняя суровость и нелюдимость. Я был исключением, и ко мне он относился как к сыну и близкому другу. Я и был его духовным сыном. Характер Хинчина в Москве казался несовместимым с тем, о котором я слышал в Иванове — ивановские старожилы вспоминали об Александре Яковлевиче как об исключительно доброжелательном, контактном и живом человеке. Впрочем, к студенческой молодежи он всегда относился очень тепло, стремился помочь каждому в его затруднениях.

Ученый

Вместе с А.Н.Колмогоровым, Э.Борелем, П.Леви и рядом других ученых А.Я.Хинчину принадлежит честь формирования теории вероятностей как современной ветви математики. Одновременно с этим теория вероятностей была насыщена для него прикладной тематикой, и он помогал раскрыть богатейшие возможности теории вероятностей как метода исследования задач техники и естествознания.

Первая работа Хинчина, относящаяся к теории вероятностей, была опубликована им в 1924 г., далее они следовали ежегодно вплоть до последних дней жизни. Его вхождение в эту область математики принесло науке новую предельную закономерность — закон повторного логарифма. Затем последовал каскад новых результатов, просто формулируемых, но незамеченных предшественниками. Я, пожалуй, отметил бы закон больших чисел для одинаково распределенных независимых случайных величин: необходимое и достаточное условие в этом случае для его выполнения — существование конечного математического ожидания. Далее, для схемы Бернулли он показал, что интересные закономерности имеют место при изучении больших положительных и отрицательных уклонений. Замечательные результаты были найдены им в связи с изучением стационарных случайных процессов. Затем последовали статьи, посвященные задачам теории массового обслуживания. Этими задачами он занимался в тесной связи со специалистами телефонного дела.

Затем пошел большой цикл работ, посвященных предельным распределениям для сумм независимых случайных величин. Попутно он опубликовал красивые результаты, характеризующие класс характеристических функций. Одновременно и независимо в точности такие же теоремы были опубликованы и С.Бохнером. Годы с 1941 по 1954 Хинчин посвятил вопросам статистической механики. Этот цикл работ, в идейном отношении тесно связанный с вопросами суммирования независимых случайных величин, был завершен тремя монографиями. Далее последовали статьи по теории информации.

Его теоретико-числовые работы заслуживают специального обзора. Ряду его теоретико-числовых результатов можно было бы придать вероятностную формулировку. Здесь мы ограничимся лишь двумя его изящными результатами из теории цепных дробей.

Рассмотрим разложение числа α в цепную дробь:

$$\alpha = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}.$$

Дроби $\dfrac{1}{a_1}$, $\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}}$ и т.д. называются подходящими дробями. После преобразований каждая из этих дробей приводится к обыкновенной дроби $\dfrac{P_n}{Q_n}$.

Александр Яковлевич доказал, что, во-первых, для почти всех[1] чисел α средние геометрические чисел a_i $(1 \le i \le n)$ с ростом n до бесконечности стремятся к постоянному числу

$$C_1 = \prod_{r=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{r(r+2)}\right)^{\lg r/\lg 2};$$

во-вторых, для почти всех чисел α существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{Q_n} = C_2.$$

Здесь C_1 и C_2 — абсолютные постоянные. При этом оказывается, что C_1=2, 6… и, как позднее выяснил П.Леви, $C_2 = \dfrac{\pi^2}{12\ln 2}$.

С позиций теории вероятностей на эти теоремы можно смотреть как на предельные свойства сумм слабо зависимых случайных величин.

Автор учебников

Хинчин заслуженно считался превосходным автором монографий и учебников. Им были написаны, среди прочих, три монографии по теории чисел, пять книг (в том числе две популярные) по теории вероятностей. В 1933 г. Александр Яковлевич задумал вместе с А.Н.Колмогоровым написать фундаментальный том, посвященный современной теории вероятностей с перспективами на ближайшее ее развитие. Я видел лишь две главы в рукописях, написанных раздельно Александром Яковлевичем и Андреем Николаевичем. Где теперь находятся эти тетради, не знаю. Я хорошо теперь понимаю, что двум ученым такого масштаба невозможно было согласовать не только содержание книги, но и стиль изложения. В результате работа над книгой была прекращена практически в самом начале. Мне трудно сказать, является ли это потерей для науки или нет, поскольку время и энергия авторов были направлены на получение новых научных результатов, а не на методические поиски и непринципиальные улучшения формулировок основных известных в то время результатов. С другой стороны, досадно, что книга не была написана, так как математики такого большого масштаба смогли бы указать на новые направления исследований.

Правда, был другой путь для написания этой большой задуманной книги. Надо было начать читать соответствующие лекции и просить учеников тщательно их записывать. Впоследствии по этому пути пошел Колмогоров, когда создавал свой курс функционального анализа. Первичную обработку его лекций взял на себя С.В.Фомин, и получился отличный труд, приносящий пользу молодежи уже более тридцати лет.

Во всяком случае, три небольшие монографии Александра Яковлевича, посвященные предельным теоремам и теории массового обслуживания, не пропали даром. На них воспитывались поколения молодых вероятностников.

Я высоко ценю три монографии Хинчина, посвященные статистической механике. Первая из них вышла в свет в разгар второй мировой войны. Она была издана в 1943 г. на скверной бумаге и малым тиражом, но научная общественность имела возможность познакомится с концепцией большого ученого, увязавшего два направления мысли в единое целое — статистическую физику и предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.

Для меня эти книги были источником моего интереса к локальным предельным теоремам. Теперь меня занимает вопрос о распространении метода Хинчина на незамкнутые физические системы. Здесь придется использовать аппарат предельных теорем для сумм случайного числа случайных слагаемых и попутно развить это направление теории вероятностей.

Я не помню, чтобы Александр Яковлевич читал на факультете общий курс теории вероятностей. Он предпочитал читать курс математического анализа. Этот курс он читал с явным удовольствием и уделял много времени на его подготовку. Теория вероятностей для него была источником вдохновения на специальные курсы. Одновременно он считал назревшим введение в программу математического школьного образования элементарного курса теории вероятностей. Это он мотивировал двумя доводами: 1) каждый человек, закончивший курс средней школы, должен быть знаком с концепциями случайного и с методами изучения случайных событий, 2) случайные явления окружают нас со всех сторон — они играют основную роль в экспериментальных науках, являются основой телефонного дела, организация движения транспорта на дорогах, туннелях, путепроводах и пр. не может быть налажена без учета случайности. В архиве библиотеки им. К.Д.Ушинского хранятся рукописи с предложением о введении и содержании такого курса. Он писал статьи для школьников на эту тему и неоднократно высказывал свои соображения на этот счет устно.

[1] *Слова «для почти всех» имеют строгий математический смысл, который, к сожалению, требует слишком подробных объяснений, чтобы мы могли уточнить его здесь. Они означают, что почти наверняка для наугад взятого числа будет выполняться данная теорема, хотя существует очень много чисел (континуум!), для которых это неверно.*

Школа — высшая и средняя

Облик Александра Яковлевича будет неполон, если не сказать несколько слов о его деятельности как педагога. Его педагогические взгляды изложены в ряде статей, посвященных преподаванию в средней школе, и в ряде учебных книг, предназначенных для университетской молодежи. В начале тридцатых годов под редакцией А.Я.Хинчина вышли три тома «Рабочей книги по математике», в которой излагался курс математики для высших технических заведений. Я уже не помню точно содержания этих книг, но у меня сохранилось представление, что в этом руководстве были предложены новые методические идеи, близкие к идеям программированного обучения. К сожалению, я отдал их на время, и они не вернулись ко мне до сих пор. Все же я надеюсь впоследствии проверить эти воспоминания.

Позднее в двух превосходных книгах «Восемь лекций по математическому анализу» и «Краткий курс математического анализа» им были высказаны явно его методические идеи и принципы. Они сводятся к тому, что как при устном, так и при письменном изложении предмета следует не затемнять его множеством деталей, а доводить изложение основных идей, методов и фактов до полного понимания. Излагать так, чтобы учащийся до конца понимал суть дела, а не просто запоминал. Бездумное запоминание не дает знаний, а только загромождает память, не развивает разум и не дает возможности использовать услышанное в применениях. Принципиальные узловые моменты курса Хинчин обсуждал со всех сторон и давал четкие и ясные формулировки. Он показывал, что их нельзя сокращать без потери части содержания. Нельзя их и разбавлять словами, поскольку лишние слова мешают познаванию и отвлекают сознание в ненужную сторону. Предисловия к обеим книгам, да и само изложение являются образцом педагогического искусства автора и учат тому, как следует обучать.

Я понимаю, что педагогическое искусство многолико, но еще более многолико неумение рационально проводить педагогический процесс. Учиться преподавать, и преподавать только хорошо, следует в первую очередь на блестящих образцах, которые, увы, встречаются очень редко. Хинчин был мастером педагогического искусства всегда, без малейших исключений. Многие приходили к нему на лекции для того, чтобы насладиться превосходным изложением и понять, как следует самому поступать в сложных ситуациях.

В течение 1938 – 1940 гг. Александр Яковлевич был приглашен руководить физико-математической секцией научно-методического совета Наркомпроса РСФСР и кабинетом математики в НИИ школ. Результатом этой работы явилось редактирование и серьезное улучшение учебников А.П.Киселева, на которых выросли несколько поколений школьников, а также ряд статей, опубликованных в педагогических журналах. Александр Яковлевич с большим энтузиазмом взялся за эту работу, уделял ей много времени и усилий. Позднее на этой базе вышла его превосходная брошюра «Основные математические понятия и определения в средней школе». К сожалению, издательство затеряло вторую часть рукописи и выпустило ее без рассуждений об определениях.

Следует сказать, что перед сдачей рукописи этой брошюры в издательство Александр Яковлевич зачитывал ее всю на заседании кабинета. Собралось человек сорок, и Александр Яковлевич начал неторопливо читать свое произведение. Была полная тишина, все с огромным вниманием выслушали все до конца. Были отдельные замечания, которые Александр Яковлевич тщательно записывал и после принимал во внимание. Мне очень понравилась эта форма обсуждения; я нахожу, что мы многое теряем из-за того, что не используем эту форму общения. Ряд работ лучше читать, чем передавать их содержание свободной устной речью.

Точно так же Хинчин зачитывал свою статью «О формализме в преподавании математики» уже в Академии педагогических наук. Я помню, что чтение было организовано в конференц-зале Министерства просвещения РСФСР и зал был полон (собралось человек четыреста). И снова зачитана статья была с блеском. Хинчин в этой статье осветил самую опасную болезнь обучения — формализм знаний учащихся. Под этим Александр Яковлевич понимал подмену понимания запоминанием, бездумное заучивание вместо досконального понимания существа дела, доведенного до осмысленного использования новых знаний на практике.

Еще одна большая педагогическая статья Александра Яковлевича была найдена мной в рукописи после смерти учителя. Эта статья «О воспитательном эффекте уроков математики» была мной подготовлена к печати и опубликована.

Томик «Педагогические статьи А.Я.Хинчина» был почти полностью переведен на английский язык и издан в Англии. Я нахожу, что повторное его издание на русском языке в достаточном числе экземпляров оказало бы огромную помощь нашей школе по той простой причине, что многие болезненные явления школьной жизни живут и процветают.

* * *

В июне 1945 г. я переехал на Украину. Мои встречи с Александром Яковлевичем стали более редкими. Но каждый раз, когда мне приходилось даже на короткое время бывать в Москве, я обязательно навещал его. Мы перешли на регулярный письменный обмен.

В январе или феврале 1959 г. Александр Яковлевич почувствовал резкое ухудшение состояния своего здоровья. Он жаловался на резкие боли в области живота. Несколько раз я бывал у них дома и постоянно заставал его лежащим на диване и курящим сигарету. Александр Яковлевич был убежден, что у него психологический спад и что все пройдет скоро и благополучно. Мое мнение было иное: имеет место соматическое заболевание и вероятнее всего язва желудка или кишечника. Я настаивал на необходимости пройти обследование именно на этот счет, но Александр Яковлевич был непреклонен и категорически отказывался от просвечивания. Я уговаривал его, обещал остаться на день-два лишних в Москве с тем, чтобы вместе быть у врача. Все напрасно. Подобный разговор вновь повторился в сентябре. Результат тот же самый.

Четырнадцатого ноября в Киеве раздался телефонный звонок. Мне сообщили, что Александр Яковлевич скончался. Я без промедления выехал в Москву, чтобы проводить дорогого мне учителя и большого друга в последний путь.

Человечество лишилось талантливого ученого и педагога, человека высоких моральных правил и исключительно доброжелательного к молодежи.

Можно ли зажарить мамонта в микроволновой печи?

А. ВАРЛАМОВ

> *Да, было, было!.. Помнят московские старожилы знаменитого Грибоедова! Что отварные порционные судачки! А стерлядь, стерлядь в серебристой кастрюльке, стерлядь кусками, переложенными раковыми шейками и свежей икрой? А яйца — кокотт с шампиньоновым пюре в чашечках? А филейчики из дроздов вам не нравились? С трюфелями? Перепела по-генуэзски?*
>
> М.Булгаков. Мастер и Маргарита

День, в который неандерталец научился добывать огонь, можно принять за начало эры ЧЕЛОВЕКА, окончательно порвавшего со своим обезьяньим прошлым. Огонь дал ему возможность обрабатывать металлы, создать автомобиль и полететь в космос, но главное — прекратить есть сырое мясо. Хорошо прожаренный бифштекс может служить символом цивилизации наряду с моделью атома.

Вместе с развитием цивилизации изменялись и способы приготовления пищи. Так, лесной костер с жарящимся мамонтом[1] последовательно сменили домашний очаг, дровяная, угольная, газовая печи, керогаз, примус, газовая и электрическая плиты, гриль...

На протяжении тысячелетий изменялась форма воздействия огня на пищу, однако физическая суть его оставалась почти неизменной: тепловая обработка происходила либо за счет прогрева пищи путем непосредственной теплопередачи (возможно с привлечением конвекции), либо посредством инфракрасного облучения. Примером первого механизма является, скажем, приготовление мантов или диетических тефтелей в кастрюле специальной конструкции (рис.1), где они прогреваются паром, исходящим от кипящей внизу воды. При варке супа к прямой теплопередаче от дна кастрюли примешивается и механизм конвекционного переноса тепла от нижних слоев к верхним при их перемешивании. Противоположным примером, когда разогрев пищи происходит только за счет инфракрасного облучения, может служить современный гриль или жарка шашлыка на углях.

[1] *Подумайте, можно ли зажарить мамонта на костре? Перечитайте роман Майна Рида «Охотники за растениями», где рассказывается о способе приготовления африканскими туземцами слоновых ног целиком.*

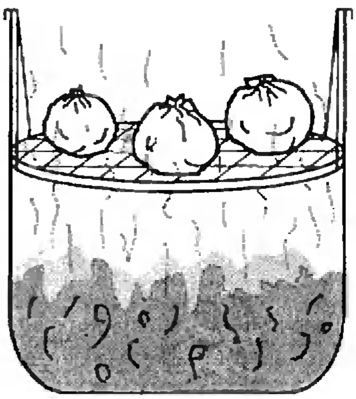


Рис. 1

Совершенствование «очага» (так мы будем называть источник тепла для приготовления пищи) существенно изменяло кулинарные рецепты. Появлялись все новые возможности изготовления весьма замысловатых блюд. Справедливости ради следует отметить, что наряду с увеличивающимся разнообразием кулинарных возможностей, по мере трансформации очага некоторые блюда, к сожалению, уходят со стола человечества, либо забываясь, либо уступая место эрзацу. Так, настоящую неаполитанскую пиццу можно испечь при минимуме ингредиентов всего за несколько минут, но лишь в раскаленной специальной дровяной печи. Поэтому сохранившиеся старинные пиццерии гордятся своим «forno» (так называется по-итальянски печь), где весь процесс приготовления происходит у вас на глазах. Pizzaiolo виртуозно «ваяет» пиццу, сажает ее деревянной лопатой в печь, мгновение — и она уже аппетитно пузырится кипящим сыром перед вами, призывая быть немедленно съеденной и запитой хорошим пивом. Если же вы случайно забредете в современную пиццерию с роскошным интерьером, зеркалами, но без дровяной печи — не поддавайтесь уговорам, уйдите тут же: лучше остаться без обеда, чем есть тот суррогат, который вам здесь подадут.

Однако мы отвлеклись от первоначального предмета повествования. Вернемся же, но пока не в кухню, а ...на лекцию по истории металлургии. Там вы узнаете, что способы плавления металла менялись едва ли не чаще, чем способы приготовления пищи. Так, в частности, после открытия Фарадеем закона электромагнитной индукции был изобретен метод электроплавки. Суть его вкратце такова: кусок металла помещается в сильное и быстроменяющееся магнитное поле. Металл является проводником, поэтому возникающая при изменении магнитного поля ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = -(d\Phi/dt) \qquad (1)$$

(здесь Φ — магнитный поток, пронизывающий образец) приводит к появлению вихревых индукционных токов, или, как их еще называют, токов Фуко. Вихревыми они называются потому, что линии тока, повторяя линии индукционного электрического поля, замкнуты. Протекание индукционного тока, как и обычного, вызываемого приложенным электрическим полем, сопровождается выделе-

нием джоулева тепла. Если при этом ЭДС индукции достаточно велика (велики амплитуда и частота изменения магнитного поля), то тепловыделения может оказаться достаточно для плавления металла. Электроплавильные печи широко используются для выплавки высоколегированных сталей, в космической металлургии и т.д.

Вот мы и оказались вблизи предмета нашего повествования. Отойдем от космической электроплавильной печи и заглянем в кухонный отсек космического корабля. Здесь мы обнаружим очаг, тип которого совсем не вписывается в длинный ряд поименованных выше: эта печь скорее напоминает электроплавильную, чем привычный атрибут кухни, — для прогрева пищи здесь используется сверхвысокочастотное электромагнитное излучение.

Еще в 60-е годы, когда космонавты стали задерживаться на орбите все дольше и дольше, питание из тюбиков перестало их удовлетворять. В то же время и примус с собой в космос брать было невозможно. На то было несколько причин: во-первых, кислород, который непосредственно участвует в горении, в космическом корабле на вес золота, во-вторых, невесомость может не дать воспользоваться рецептами Елены Молоховец — автора знаменитой русской кулинарной книги «Советы молодым хозяйкам». (Подумайте, как повлияет невесомость на возможность приготовления на примусе обыкновенного супа. Какие другие трудности вы видите для космической кулинарии?)

Выход был найден в использовании кухонного аналога электроплавильной печи. Действительно, почти все потребляемые человеком продукты в значительной степени состоят из воды, которая, являясь электролитом, хоть и не очень хорошо, но ток проводит. Поэтому помещая, скажем, кусок мяса в переменное электромагнитное поле, в нем, как и в металле, можно индуцировать токи Фуко, протекание которых приведет к преобразованию энергии электромагнитного поля в джоулево тепло и, следовательно, к тепловой обработке мяса.

Хорошо известным вам примером переменного во времени и пространстве электромагнитного поля является электромагнитная волна. Но вполне понятно, что не всякой электромагнитной волной удастся зажарить отбивную. Так, если упорно светить на нее карманным фонариком, то можно остаться голодным. Поэтому должны быть выполнены некоторые специальные условия. Прежде всего, поле должно быть достаточно интенсивным. Например, подошло бы поле следящего за самолетами радара. (Рассказывают, что птицы, попадающие в зону действия сверхмощных радаров, падают замертво, причем не обгоревшими, а как бы сварившимися. Почти как у барона Мюнхгаузена.) Но это поле для безопасности следовало бы куда-то «запереть», ограничить в объеме и сделать неподвижным.

«Ящиками» для волн служат резонаторы. Для звуковых волн это может действительно быть деревянный ящик. Например, скрипичный корпус — это типичный резонатор. В нем после внешнего возбуждения сравнительно долго могут существовать стоячие звуковые волны. Струны и смычок играют здесь роль источника звуковых волн.

Точно так же можно «запереть» и электромагнитное поле, но ящик должен быть металлический, а на его длине должно укладываться целое число длин полуволн запертого излучения. Возбуждая в таком ящике электромагнитные колебания нужной частоты (с помощью чего-то вроде микрорадара), мы получаем резонатор со стоячей электромагнитной волной, узлы которой (точки волны, в которых амплитуда колебаний равна нулю) расположены на его стенках. Именно таким резонатором, совмещенным с миниатюрными излучателями — «радарами», и является микроволновая, или, как ее еще называют, СВЧ-печь (СВЧ — сверхвысокочастотное излучение). Поскольку размер этого прибора составляет несколько десятков сантиметров, то эта величина сразу же определяет нам порядок максимальной длины волн используемого излучения. Правильность этой оценки легко проверить, взглянув на заднюю стенку микроволновой печи: вы увидите, что стандартная частота составляет $\nu = 2150$ МГц, что соответствует длине волны $\lambda = c/\nu = 14$ см.

Продолжим изучение свойств микроволновой печи путем эксперимента, который автор проделывал сам. Возьмем из морозильника увесистый кусок замороженного мяса, посолим и поперчим его, а затем на специальной посуде (о ней речь впереди) поместим в печь и включим ее. Вначале ничего, кроме мерного гудения излучателей, как кажется, не происходит. Однако с течением времени через прозрачную дверцу вы можете заметить, как мясо все больше зажаривается и минут через тридцать кажется совсем готовым. Достанем его и разрежем. Может так оказаться, что внутри куска мы обнаружим область не только сырую, но даже еще не разморозившуюся. Как объяснить этот феномен?

Первое, простейшее, предположение может быть основано на уже упомянутом неравномерном распределении электромагнитного поля внутри печи. Действительно, размер камеры составляет величину порядка 30 см, а длина волны, как мы убедились выше, примерно 14 см. Учитывая, что на стенки должны приходиться узлы стоячей волны, мы видим, что в объеме имеется как минимум три узла, где интенсивность поля равна нулю. Поскольку волна стоячая, то положение этих узлов неизменно в пространстве, и кусок непрожаренного мяса мог бы как раз оказаться в одном из них. Однако в современных СВЧ-печах эту трудность решают простым медленным вращением столика с готовящимся блюдом внутри камеры, что приводит к усреднению действия СВЧ-поля по его объему. Так что, казалось бы, загрузив тушу найденного в леднике мамонта на столик размером с карусель и поместив в соответствующего размера СВЧ-печь, можно было бы через некоторое время попробовать хорошо пропеченное жаркое из мамонтятины.

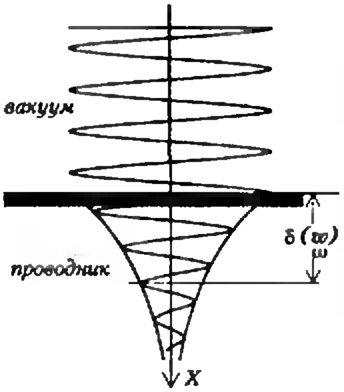


Рис.2

Однако имеется другое, гораздо более важное и непреодолимое, препятствие, которое стоит на пути к готовности нашего блюда. Имя ему — скин-эффект (skin — кожа). Так называют известное свойство высокочастотных токов протекать лишь в поверхностном слое проводника. Поскольку частота электромагнитной волны в СВЧ-печи весьма высока, то скин-эффект может играть здесь существенную роль, и электромагнитное поле, затухая в глубь большого куска мяса, просто не донесет в его середину достаточно энергии, чтобы ее прожарить.

Для того чтобы проверить это предположение, давайте обсудим явление скин-эффекта подробнее и попытаемся оценить эффективную глубину проникновения поля в проводник и выяснить, как она зависит от частоты и от свойств проводника. Эта задача может быть легко решена с помощью дифференциальных уравнений электромагнитного поля (уравнений Максвелла), однако подобное рассмотрение выходит за рамки школьной программы, и мы ограничимся здесь качественными оценками.

Начнем с постановки задачи.

Пусть электромагнитная волна частотой ω нормально падает на плоскую границу проводника (рис.2). Попадая в проводник, волна начинает затухать по амплитуде, ибо ее электрическое поле приводит в движение свободные электроны, возникают токи, энергия волны расходуется на джоулевы потери. Можно показать, что затухание волны происходит по распространенному в природе экспоненциальному закону (вспомните, например, закон радиоактивностного распада)

$$E(x) = E(0)e^{-x/\delta(\omega)}. \qquad (2)$$

Здесь $e = 2{,}71\ldots$ — основание натуральных логарифмов, $E(0)$ — амплитуда электрического поля волны на поверхности проводника, $E(x)$ — амплитуда волны на глубине x, $\delta(\omega)$ — эффективная глубина проникновения поля (длина, на которой поле ослабевает в e раз).

Для того чтобы найти явное выражение для $\delta(\omega)$, воспользуемся методом размерностей. Понятно, что глубина проникновения должна зависеть от частоты — ведь постоянный ток ($\omega = 0$) течет по всему сечению проводника, т.е. при низких частотах скин-эффект выражен очень слабо ($\delta \to \infty$) и должен становиться сильнее с увеличением частоты. Естественно предположить (как это обычно делается в методе размерностей), что глубина проникновения зависит от ω степенным образом:

$$\delta(\omega) \sim \omega^{\alpha},$$

причем следует ожидать, что α окажется отрицательным.

Очевидно также, что глубина проникновения должна зависеть от проводящих свойств образца, которые задают с помощью удельного сопротивления ρ (или удельной проводимости $\sigma = 1/\rho$) вещества. В самом деле, энергия электромагнитной волны при скин-эффекте преобразуется в тепло, а мощность джоулевых потерь в единице объема имеет вид

$$P/V = jE = E^2/\rho = \sigma E^2,$$

где E — напряженность поля в данной точке проводника. (Выведите эту формулу сами. Напомним, что закон Ома в дифференциальной форме имеет вид $j = \sigma E$.) Чем эффективнее рассеивается энергия волны, тем быстрее должна убывать ее амплитуда. Поэтому глубина проникновения волны должна зависеть от удельной проводимости среды:

$$\delta \sim \sigma^{\beta},$$

причем следует ожидать, что β, как и α, окажется отрицательным.

Наконец, следует отметить, что уравнения электромагнетизма в СИ содержат размерную магнитную постоянную $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м. Эта постоянная входит в формулу для магнитной индукции, создаваемой током в окружающем пространстве, аналогично тому, как электрическая постоянная ε_0 входит в известную вам формулу для электрического поля точечного заряда. Предполагая, что глубина проникновения является комбинацией только перечисленных трех величин:[2]

$$\delta \sim \omega^{\alpha} \cdot \sigma^{\beta} \cdot \mu_0^{\gamma}, \qquad (3)$$

определим показатели α, β и γ, сравнивая размерности правой и левой частей этого уравнения. Для этого выпишем размерности всех входящих в (3) величин:

$$[\delta] = \text{м},\ [\omega] = \text{с}^{-1},\ [\sigma] = \text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1},$$

$$[\mu_0] = \text{Гн} \cdot \text{м}^{-1}.$$

Заметим, что поскольку генри есть единица индуктивности, то, благодаря соотношению

$$\mathcal{E} = -L(\Delta I/\Delta t),$$

ее можно представить в виде

$$\text{Гн} = \text{В} \cdot \text{с}/\text{А} = \text{Ом} \cdot \text{с},$$

т.е.

$$[\mu_0] = \text{Ом} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}.$$

Приравняем размерности правой и левой частей уравнения (3):

$$\text{м} = (\text{с})^{-\alpha} (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-\beta} \left(\text{Ом} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}\right)^{\gamma},$$

или

$$\text{м}^1 = (\text{Ом})^{\gamma-\beta} \cdot \text{с}^{\gamma-\alpha} \cdot \text{м}^{-\gamma-\beta}.$$

Получаем три уравнения

$$\begin{cases} \gamma - \beta = 0, \\ \gamma - \alpha = 0, \\ -\gamma - \beta = 1, \end{cases}$$

решая которые, находим $\alpha = \beta = \gamma = -1/2$. Уравнение (3) принимает вид

[2] *Это предположение эквивалентно тому, что мы пренебрегаем так называемым током смещения, т.е. считаем, что магнитное поле создается только реальными токами, и не учитываем переменное электрическое поле. В противном случае в ответ будет входить еще и электрическая постоянная ε_0. При рассматриваемых частотах это предположение выполняется с большой точностью. (Прим. ред.)*

$$\delta \sim \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \omega \sigma}}.$$

Отметим, что зависимость глубины проникновения от ω и σ соответствует предварительному физическому анализу — α и β оказались отрицательными. Строгий расчет, основанный на решении уравнений Максвелла, приводит к такому же выражению с точностью до численного множителя $\sqrt{2}$:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \sigma}}. \qquad (4)$$

Оценим глубину проникновения на интересующей нас частоте $\nu = \omega/2\pi = 2{,}15 \cdot 10^9$ Гц для меди (пример хорошего проводника, $\sigma_1 \approx 6 \cdot 10^7$ Ом$^{-1} \cdot$м$^{-1}$) и для мышцы ($\sigma_2 \approx 2{,}5$ Ом$^{-1} \cdot$м$^{-1}$), что должно неплохо передавать величину эффекта для изучаемого нами куска мяса. Проставляя данные в (4), получим

$$\delta_1 \approx 10^{-3} \text{ см}, \ \delta_2 \approx 1 \text{см}.$$

Видно, что для хорошего проводника эффект очень сильный — благодаря ему сопротивление проводов на высоких частотах существенно выше, чем на низких (ток протекает в узком поверхностном слое, т.е. сечение провода как бы уменьшается). Однако и для гораздо худшего проводника, каковым является наш кусок мяса, эффект остается все же весьма заметным. Даже наш пробный кусок мяса с характерным размером в 10 см великоват — напряженность поля, а с ней и выделяемая мощность падают в центральной области во много раз, и единственным источником тепла остается теплопроводность. А уж что касается нашего гипотетического жаркого из мамонта, то для него скин-эффект приобретает до обидного прямой смысл — прожариться сможет в лучшем случае лишь толстая мамонтовая кожа, мясо же останется сырым.

Но это не самая большая беда. Не загружайте в печь слишком толстые куски — и ваше мясо благополучно и весьма равномерно прожарится. А вот большой, но плоской отбивной скин-эффект не страшен. Возможно, этому эффекту можно даже найти какие-нибудь специальные применения. Поразмышляйте на досуге, например, о рецепте приготовления с помощью микроволновой печи столь немыслимого блюда как ...обжаренное в тесте мороженое.

Как и все на свете, СВЧ-печь имеет свои преимущества и свои недостатки. С одной стороны, микроволновая печь открывает перспективы приготовления неслыханных доселе блюд, сохраняет витамины, позволяет создавать диетические блюда, с другой же — не позволяет сварить элементарное яйцо всмятку. Действительно, давайте мысленно поместим яйцо в печь. После включения регулятора мощности внутри яйца, по жидкому его содержимому, начинают течь токи Фуко. Содержимое очень быстро нагревается, и начинается выделение газов. Им не дает возможности истечь твердая скорлупа. Давление неудержимо повышается, еще мгновение и ... взрыв! Вся камера забрызгана вашим несостоявшимся завтраком, и вы, проклиная свою неосмотрительность, долго еще моете печь.

После сравнительно благополучно закончившегося взрыва самое время подумать о технике безопасности. Следует помнить, что максимальная мощность печи довольно велика — обычно порядка киловатта. С помощью регулятора мощности вы можете ее изменять в этих пределах, но всегда должен быть объект, на котором она может выделиться. Поэтому категорически запрещается включать печь пустой. Ведь если на месте не окажется предмета подогрева, то электромагнитное поле начнет «искать», где бы ему выделить энергию, и сделает это на индукторах-излучателях, разрушив их. Ситуация совершенно аналогична, с электротехнической точки зрения, короткому замыканию батареи. Отсутствие сопротивления нагрузки (в нашем случае эту роль играет курица или жарящееся мороженое) приводит к протеканию сильного тока короткого замыкания — разрушению батареи.

Другая опасность таится в выборе посуды, используемой для приготовления. Конечно, можно купить фирменную специальную стеклянную посуду типа «Pyrex» и пользоваться ею. Но можно задуматься о требованиях к посуде, разобраться в их физике и заодно сэкономить, воспользовавшись старым глиняным горшком. Главное требование к посуде — ее «прозрачность» для СВЧ-излучения. Даже для столь высокой частоты это стекло должно оставаться диэлектриком (чему удовлетворяет далеко не каждый тип фаянса или стекла). (Оказывается, что электрические и оптические свойства веществ могут существенно зависеть от частоты электромагнитного поля.) Уж точно ни в коем случае нельзя помещать в камеру печи металлическую посуду, заворачивать приготовляемую пищу в металлическую фольгу или даже использовать тарелку с золотым ободком. В мгновение ока мирная кухонная СВЧ-печь превратится в свою огнедышащую родственницу из металлургического цеха и наделает бед[3]. Тем не менее, многие глиняные горшочки и керамические тарелки оказываются вполне пригодными для употребления.

Для того чтобы проверить, подходит ли данная посуда для готовки в микроволновой печи, достаточно поместить ее вместе со стаканом воды (подумайте, зачем он нужен) в камеру и на пару минут включить печь. Если после этого исследуемый горшок окажется холодным — он прошел испытание.

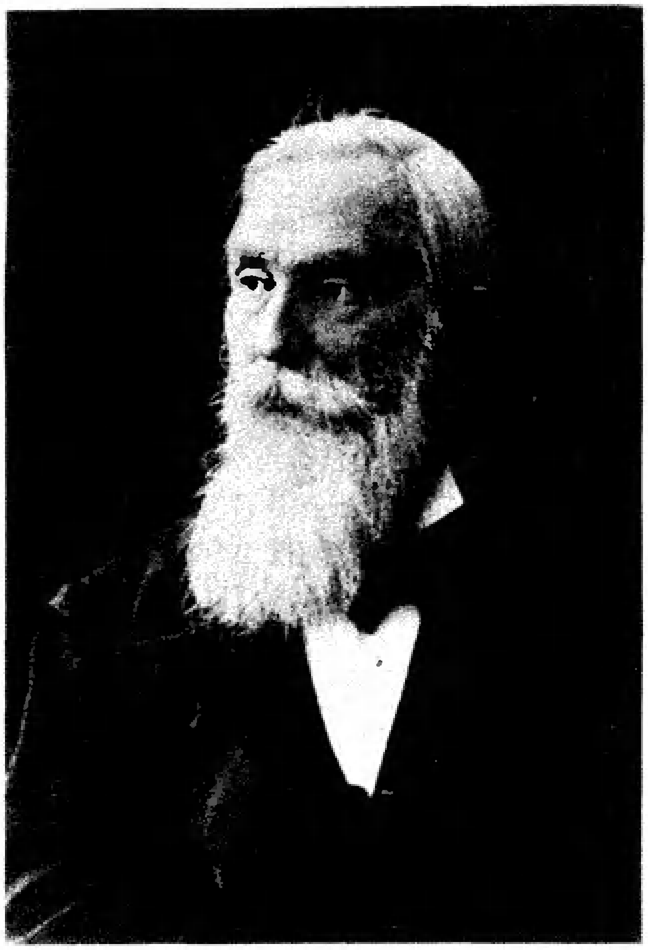
[3] *Подумайте, почему не разогреваются металлические стенки печи во время ее работы (они, конечно, разогреваются, но незначительно, в основном благодаря теплопередаче, а не токам Фуко)?*

Теорема Чебышева о распределении простых чисел

В.ТИХОМИРОВ

В этом году исполняется сто лет со дня смерти одного из величайших русских ученых — Пафнутия Львовича Чебышева. Вот как писал о нем наш замечательный математик Б.Н.Делоне:

«Наряду с Лобачевским, Чебышев был одним из двух крупнейших русских математиков. В творчестве их обоих есть нечто общее. Обоим русским ученым суждено было после более 2000-летних бесплодных усилий математиков всего мира одному — сдвинуть с места глубочайший вопрос об основаниях геометрии, а другому — пробить брешь в труднейшем вопросе арифметики о распределении простых чисел».



Пафнутий Львович Чебышев (1821 — 1894)

ЧТО ЖЕ это за теорема, которая пробила брешь в труднейшем вопросе арифметики? Для ее формулировки надо ввести одно обозначение. Обозначим через $\pi(x)$ — количество простых чисел, не превосходящих x. В частности, $\pi(2)=1$, ибо числа 2 не превосходит лишь одно простое число — два, а $\pi(10)=4$, так как десяти не превосходят четыре простых числа:

2,3,5 и 7.

В III веке до н.э. Евклид доказал, что простых чисел бесконечно много, иначе говоря, что $\pi(x)$ стремится к бесконечности, когда x стремится к бесконечности, и с той поры до Чебышева о распределении простых чисел ничего не было известно. А П.Л.Чебышев доказал следующий результат:

Теорема. *Существуют положительные числа c и C такие, что для всех $x \ge 2$ выполнены равенства*

$$c\frac{x}{\log x} \le \pi(x) \le C\frac{x}{\log x}$$

(log — *логарифм по основанию 2*).

Этот результат вошел в золотой фонд мировой математики. Это, пожалуй, наиболее знаменитая теорема русской математики XIX века.

Интересно отметить, что доказательство этой знаменитой теоремы доступно любому человеку, знакомому с азами арифметики и анализа, в частности школьникам старших классов. Сейчас вы в этом убедитесь.

Приводимое доказательство основывается на следующих утверждениях:

(I) Пусть a и b — два вещественных числа и n — натуральное число. Тогда имеет место следующее равенство:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}, \quad (1)$$

называемое *формулой бинома Ньютона*. Числа

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$$

называются *биномиальными коэффициентами*. Если в формулу для бинома Ньютона подставить $a=b=1$, то получим, что сумма биномиальных коэффициентов равна 2^n.

(II) Положим $N = C_{2n}^n$. Для числа N (в силу сказанного выше) справедлива оценка

$$N < 2^{2n}. \qquad (2)$$

(III) Если число x лежит между 0 и 1, то (в силу неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим) имеет место неравенство

$$x(1-x) \le 1/4. \qquad (3)$$

(IV) Пусть $p_1^{\nu_1} \ldots p_s^{\nu_s}$ — разложение на простые множители наименьшего общего кратного чисел $N_1, \ldots, N_k$ (сокращенно НОК$(N_1, \ldots, N_k)$) и при этом $N_1 \le N_2 \le \ldots \le N_k$, тогда

$$p_i^{\nu_i} \le N_k. \qquad (4)$$

Это утверждение весьма просто следует из определения НОК, и его доказательство предоставляется читателю.

Кроме утверждений (I) — (IV) будут использованы формула для интегрирования степенной функции, правило сложения дробей и простейшие свойства неравенств.

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы Чебышева.

1. **Оценка сверху.** Здесь основное утверждение — следующее: *для числа N, введенного выше, справедливо такое неравенство:*

$$N \ge \prod_{n<p\le 2n} p \qquad (5)$$

(p — символ простого числа). Иначе говоря, произведение простых чисел, больших n и не превышающих $2n$, не превосходит числа N.

Действительно, N — целое число, которое делится на $\prod\limits_{n<p\le 2n} p$ (ибо все эти числа входят в числитель дроби, определяющей число N, и не входят в знаменатель). Отсюда и следует (5).

А теперь требуемая оценка получается в шесть «ходов». Смотрите:

Пусть с самого начала m — достаточно большое число (чуть позже мы разъясним, что это значит).

Произведение Π_m всех простых чисел из промежутка $\left[2^{\frac{m}{2}};\ 2^m\right]$ оценивается снизу так:

$$\Pi_m > \left(2^{\frac{m}{2}}\right)^{k_m},$$

где k_m — количество простых чисел в этом промежутке, т.е.

$$k_m = \pi\left(2^m\right) - \pi\left(2^{\frac{m}{2}}\right) \text{ (первый «ход»)}.$$

А так так всегда $\pi(x) < x$, то

$$k_m > \pi\left(2^m\right) - 2^{\frac{m}{2}} \text{ (второй «ход»)}.$$

Итак,

$$\Pi_m > 2^{\frac{m}{2}\left(\pi\left(2^m\right) - 2^{\frac{m}{2}}\right)}. \qquad (6)$$

С другой стороны,

$$\Pi_m \le \tilde{\Pi}_m,$$

где $\tilde{\Pi}_m$ — произведение всех простых чисел, меньших 2^m (третий «ход»).

Оценим теперь $\tilde{\Pi}_m$. Для этого разобьем это произведение на группы:

$$\tilde{\Pi}_m = (2)\cdot(3)\cdot(5\cdot 7)\cdot(11\cdot 13)\cdot$$
$$\cdot(17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31)\ldots$$

В этом произведении k-я группа сомножителей состоит из простых чисел, больших 2^{k-1} и не превосходящих 2^k. (В первой группе — одно простое число — 2, во второй — тоже одно — 3, в третьей — 2 — числа 5 и 7 и т.д.) Но произведение чисел в k-й группе не больше $C_{2^k}^{2^{k-1}}$ (это следует из неравенства (5)). Поэтому $\tilde{\Pi}_m \le C_2^1 \cdot C_4^2 \cdot \ldots \cdot C_{2^m}^{2^{m-1}}$ (четвертый «ход»). Заменяя в правый части $C_{2^k}^{2^{k-1}}$ на 2^{2^k} (пятый «ход»), получаем

$$\Pi_m \le \tilde{\Pi}_m \le 2^{1+2+\ldots+2^m} < 2^{2^{m+1}}. \qquad (7)$$

Сопоставляя неравенства (6) и (7), после несложных преобразований получаем оценку (шестой «ход»)

$$\pi\left(2^m\right) < \frac{2^{m+2} + m\cdot 2^{\frac{m}{2}}}{m}. \qquad (8)$$

Если m достаточно большое, то $m\cdot 2^{\frac{m}{2}} < 2^m$ (убедитесь самостоятельно, что последнее неравенство выполняется при всех натуральных $m \ge 4$). Поэтому из (8) получаем

$$\pi\left(2^m\right) < \left(5\cdot 2^m\right)/m. \qquad (9)$$

Пусть теперь $2^{m-1} < x \le 2^m$. Тогда

$$2x > 2^m,\ \log_2 x \le m$$

и

$$\pi(x) \le \pi\left(2^m\right) < 10\frac{x}{\log_2 x}.$$

Оценка сверху получена.

2. **Оценка снизу** доказывается еще проще. Пусть теперь $2n+1 \le x < 4n$. Тогда[1]

$$4^{-n} \overset{(3)}{\ge} \int_0^1 t^n(1-t)^n\,dt \overset{(I)}{=}$$

$$\overset{(I)}{=} \int_0^1 t^n\left(1 - nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2 - \ldots + (-1)^n t^n\right)dt =$$

(интегрируем)

$$= \frac{1}{(n+1)} - \frac{n}{(n+2)} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{(2n+1)} =$$

(складываем дроби)

$$= \frac{M}{\text{НОК}(n+1, \ldots, 2n+1)}.$$

Здесь M — натуральное число, т.е. $M \ge 1$, а значит,

$$4^n \le \text{НОК}(n+1, \ldots, 2n+1) = Q.$$

Разлагая Q на простые множители и применяя (4), получаем оценку

$$4^n \le Q = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots$$
$$\ldots p_s^{\nu_s} \le (2n+1)^{\pi(2n+1)}. \qquad (10)$$

(Вспомните, что Q=НОК$(n+1, \ldots, 2n+1)$ и, значит, $p_i^{\nu_i} \le 2n+1$.)

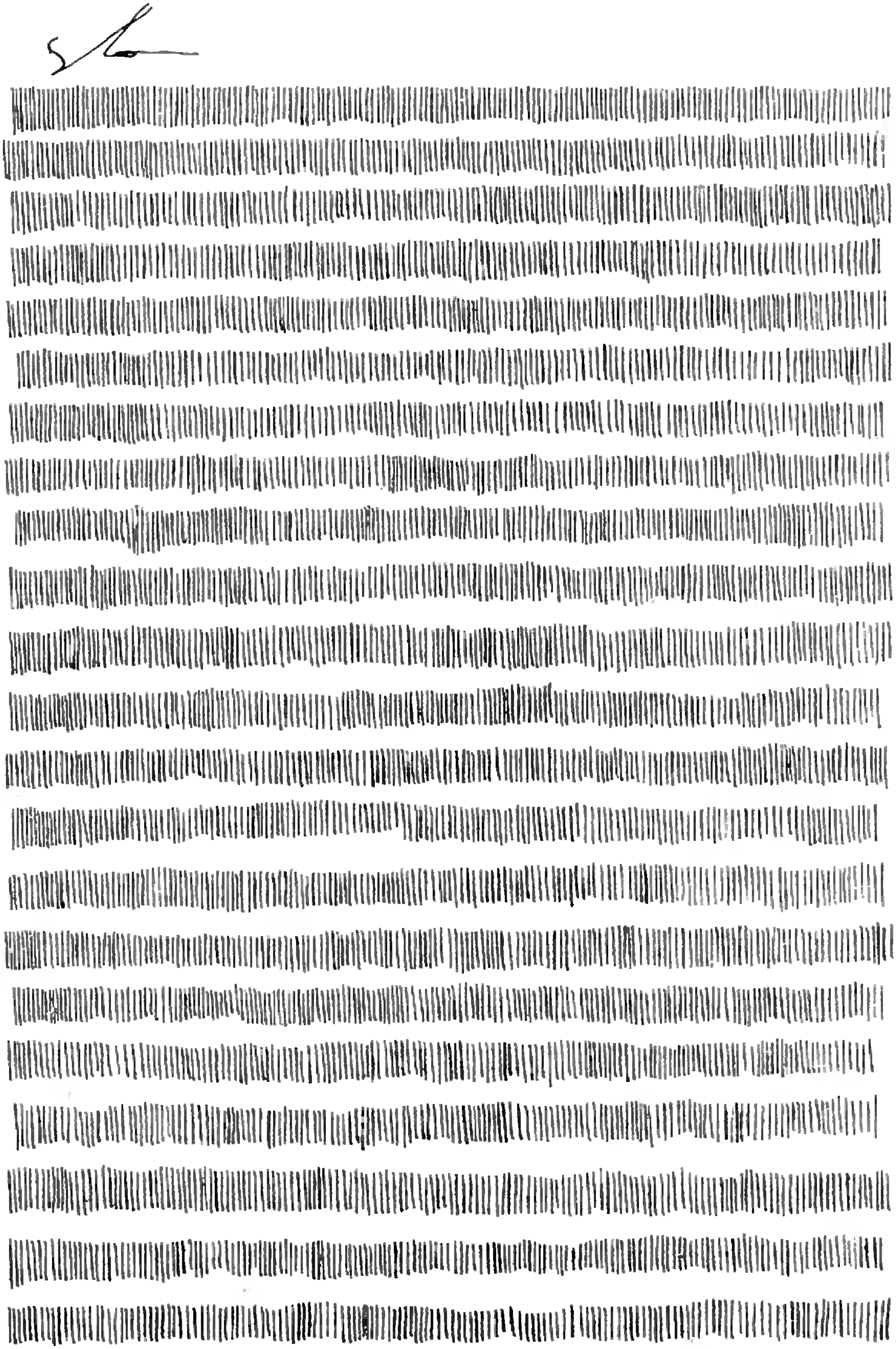
Если $2n+1 \le x < 4n$, то $2n > x/2$, $\log_2(2n+1) < \log_2 x$. Логарифмируя неравенство (10), получаем после несложных вычислений

$$\pi(x) \ge \pi(2n+1) \ge$$
$$\ge \frac{2n}{\log(2n+1)} > \frac{x}{2\log x}.$$

Теорема доказана.

Первоначальный вариант этого текста я обсуждал с Наумом Ильичем Фельдманом. Многим усовершенствованиям я обязан его советам. Считаю своим долгом выразить здесь свою признательность этому замечательному человеку, которого, увы, уже нет с нами.

[1] *Над знаком неравенства или равенства указана причина, по которой оно имеет место.*



О правильных многоугольниках, функции Эйлера и числах Ферма

А. КИРИЛЛОВ

Пролог

Задачи на геометрические построения — один из самых популярных в школьной математике. Почти в каждом математическом кружке разбираются такие задачи. Это, конечно, не случайно. История геометрических построений насчитывает несколько тысяч лет, и уже древние греки достигли здесь большого искусства. В качестве примера можно привести задачу Аполлония: *построить окружность, касающуюся трех данных окружностей.*

Многим, вероятно, известны три знаменитые задачи древности, оказавшиеся неразрешимыми: *о квадратуре круга, трисекции угла и удвоении куба.*

Но, пожалуй, самой красивой является задача о построении правильных многоугольников. Собственно говоря, это не одна задача, а целая серия задач: *для каждого натурального числа $n \geq 3$ требуется с помощью циркуля и линейки построить правильный n-угольник.*

Для некоторых значений n эта задача совсем простая (например, для $n = 3, 4, 6, 8, 12$); для других — посложнее ($n = 5, 10, 15$; ниже мы расскажем, как построить десятиугольник и пятиугольник); для третьих — очень сложная ($n = 17$ или 257). Наконец, существуют такие значения n, для которых эта задача вообще неразрешима (например, $n = 7, 9, 11$).

Выпишем подряд несколько натуральных чисел, начиная с $n = 3$, и отметим красным цветом те числа n, для которых можно построить правильный n-угольник циркулем и линейкой:

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48...

Есть ли какая-нибудь закономерность в распределении «красных» и «черных» чисел? Оказывается, есть; но найти ее довольно трудно. Эта закономерность имеет арифметическую природу; чтобы ее описать, нам придется временно оставить геометрию и заняться элементами теории чисел — высшего раздела арифметики.

Функция Эйлера

Важной арифметической характеристикой числа n является количество чисел, меньших n и взаимно простых с n. Одним из первых это заметил знаменитый математик XVIII века Леонард Эйлер. Он предложил для этого количества обозначение $\varphi(n)$, и с тех пор функция $n \to \varphi(n)$ известна под именем *«функции Эйлера»*. Например, для $n = 10$ имеется четыре числа, меньших десяти и взаимно простых с ним: 1, 3, 7 и 9; так что $\varphi(10) = 4$.

Функция φ обладает многими интересными свойствами. Одно из них было открыто еще самим Эйлером: для любых двух взаимно простых чисел m и n справедливо равенство:

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n). \qquad (1)$$

Кроме того, легко проверить, что *если p — простое число, то* $\varphi(p) = p - 1$, $\varphi(p^2) = p^2 - p$, *и вообще*

$$\varphi(p^m) = p^{m-1}(p-1). \qquad (2)$$

Эти свойства позволяют легко вычислять функцию Эйлера для небольших значений n. Например,

$$\varphi(10) = \varphi(2)\cdot\varphi(5) = 1\cdot 4 = 4,$$

$$\varphi(100) = \varphi(4)\cdot\varphi(25) = 2\cdot 20 = 40.$$

Мы приводим здесь значения функции Эйлера для n от 1 до 42 (см. таблицы 1, *а* и *б*).

Сравните эти таблицы с приведенным выше рядом «красных» и «черных» чисел. Не правда ли, связь между «цветом» чисел n и значением $\varphi(n)$ уже легко угадывается? Мы видим, что если правильный n-угольник можно построить с помощью циркуля и линейки, то соответствующее значение функции $\varphi(n)$ является степенью двойки. Оказывается, это условие является необходимым и достаточным для возможности построения правильного n-угольника.

В настоящей статье мы не сможем строго доказать это. Однако мы приведем достаточно простые и убедительные соображения в пользу этого факта. Аналогичные соображения применимы и ко многим другим задачам на построение — например, к задаче о трисекции угла.

Что значит «построить»?

Вопрос о точной постановке задач на построение циркулем и линейкой уже обсуждался на страницах «Кванта». Мы не будем здесь еще раз предостерегать читателей от неправильного употребления математических инструментов. Скажем лишь, что окончательное решение задачи на построение должно быть (хотя бы в принципе) записываемо в виде цепочки элементарных операций, напоминающей систему команд, отдаваемых электронной вычислительной машине.

Таблица 1, а

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18	8

Таблица 1, б

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
$\varphi(n)$	12	10	22	8	20	12	24	12	28	8	30	16	20	16	24	12	36	18	24	16	40	12

Эта статья впервые была опубликована в "Кванте" № 7 за 1977 год.

Например, задача о построении середины отрезка AB решается следующей «программой» (рис.1):

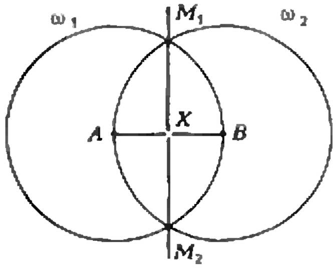


Рис. 1

1. Циркулем построить окружность ω_1 с центром A и радиусом AB.

2. Циркулем построить окружность ω_2 с центром B и радиусом BA.

3. Отметить точки пересечения M_1 и M_2 окружностей ω_1 и ω_2.

4. По линейке провести прямую M_1M_2.

5. Отметить точку X пересечения прямых M_1M_2 и AB.

Еще один пример: построение биссектрисы заданного угла AOB (рис.2). Соответствующая система команд имеет вид:

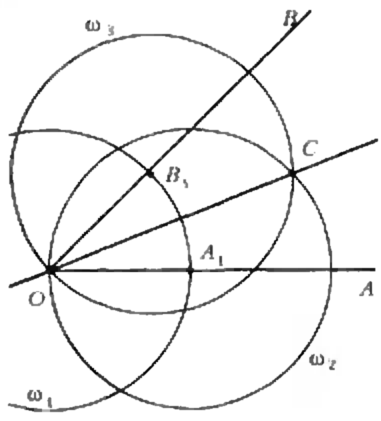


Рис.2

1. Циркулем построить окружность ω_1 с центром O и любым радиусом R.

2, 3. Отметить точки пересечения этой окружности: A_1 — с прямой OA, B_1 — с прямой OB.

4, 5. Циркулем построить окружности ω_2, ω_3 с центрами A_1, B_1 и радиусом R.

6. Отметить точку пересечения C окружностей ω_2 и ω_3.

7. По линейке провести прямую OC.

Однако в этом случае в пунктах 2 и 3 программа сформулирована неточно. В самом деле, окружность ω_1 имеет с прямыми OA и OB по две точки пересечения, и неясно, какие из этих точек нужно обозначить через A_1 и B_1. Вы можете возразить, что речь идет о *лучах* OA и OB, которые пересекаются с окружностью в единственной точке, но понятие «луч» выходит за рамки понимания нашей «математической машины». Ей доступно только понятие «прямая».

Посмотрим, что получится, если понимать выражение «точка пересечения» как «какая-нибудь точка пересечения». Тогда нашей программе будет соответствовать рисунок 3: вмес-

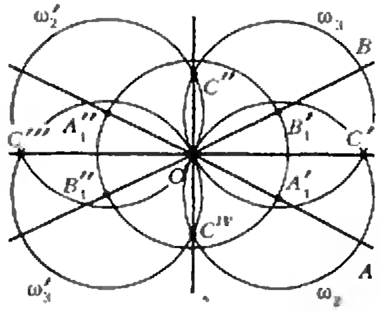


Рис. 3

то точек A_1 и B_1 мы берем по две точки: A_1', A_1'' и B_1', B_1''. И теперь одной точке C соответствует четыре разных точки C', C'', C''' и C^{IV}. Это, однако приводит всего лишь к двум разным ответам: прямые OC' и OC''' совпадают, так же, как и прямые OC'' и OC^{IV}.

К скольким же разным ответам может привести одна и та же программа, решающая задачу на построение? Любая такая программа состоит из элементарных операций. Их всего пять: проведение прямой через две данные точки; проведение окружности с данным центром и данным радиусом; пересечение двух данных прямых; прямой и окружности; двух данных окружностей. Первые три операции однозначны, две последние содержат двузначную неопределенность[1].

Если в программу входят лишь однозначные операции, то мы получаем только один ответ. Если в ней есть одна двузначная операция, то выполнение этой операции приводит к двум реализациям (как в разобранном выше примере). Вообще, если в программе есть k двузначных операций, то эту программу можно реализовать 2^k способами.

Мы видели, что некоторые неопределенности могут в конце концов «сокращаться» и не влиять на окончательный ответ. Оказывается (это можно строго доказать, но не в этом цель настоящей статьи), такие сокращения всегда происходят согласованным образом, так что неопределенность в окончательном ответе всегда имеет вид 2^l $(l \leq k)$. Этот факт имеет не геометрическую, а алгебраическую природу (соответствующая часть алгебры называется теорией Галуа).

Вернемся к задаче о построении биссектрисы. Наша программа, кроме биссектрисы угла AOB, дает также и биссектрису внешнего угла AOB_1 (см. рис.3). Это решение не надо рассматривать как «постороннее». С точки зрения циркуля и линейки, «понимающих» угол только как пару пересекающихся прямых, этот угол ничем не хуже исходного угла AOB. Попробовав определить понятие биссектрисы в терминах, «доступных» циркулю и линейке, мы увидим, что биссектриса внешнего угла будет удовлетворять этому определению так же, как и биссектриса внутреннего угла.

Это обстоятельство имеет общий характер: все 2^l решений, доставляемых программой, содержащей неопределенности, являются «настоящими», а не посторонними решениями, если только правильно сформулировать задачу.

Например, задача: *вписать окружность в данный треугольник* — решается программой с неопределенностью 16 (нужно построить биссектрисы двух углов), и приводит к четырем разным ответам (одна вписанная и три вневписанные окружности), причем все эти ответы равноправны, если сформулировать задачу так: *построить окружность, касающуюся трех данных прямых*. Отличие вписанной окружности от вневписанных основано на понятии «между» (или «внутри») и недоступно пониманию нашей машины.

Разобранные примеры показывают также, что если задача на построение имеет несколько решений, то программа построения дает все эти решения. Это утверждение также справедливо в общем случае.

Поучительный пример: геометрическое построение одного из корней квадратного уравнения автоматически приводит к построению и второго корня.

[1] *Окружность и прямая, так же как и две окружности, могут совсем не пересекаться или касаться друг друга. Эти случаи также могут быть включены в общую схему, но сейчас мы предпочитаем не говорить об этом.*

Таким образом, мы приходим к следующему принципу.

Всякая задача на построение, разрешимая с помощью циркуля и линейки, имеет 2^l решений.

Строгое доказательство этого утверждения дается теорией Галуа и не может быть изложено в этой статье. Однако само утверждение выглядит очень просто и вполне могло бы быть открыто математиками древности. Возникает вопрос, почему же это открытие было сделано лишь в прошлом веке, хотя многие подтверждающие примеры известны уже несколько тысячелетий? (Например, упоминавшаяся выше задача Аполлония имеет 8 решений.)

Одна из возможных причин — отсутствие современной, «машинной» постановки задачи. Другая причина — рассмотрение каждой задачи в отдельности вместо целых серий однотипных задач (вроде задач на построение правильного n-угольника для каждого n).

Возможно, эта тема привлечет внимание историков математики, и они полнее объяснят нам причину этой «упущенной возможности».

Правильные многоугольники

Вернемся к нашей основной задаче. Мы хотим знать, когда с помощью циркуля и линейки можно построить правильный n-угольник. Рассуждение предыдущего параграфа наводит на мысль — посмотреть, сколько решений имеет эта задача. Чтобы получить разумный ответ, нужно уточнить постановку задачи. А именно, нужно фиксировать *размер и положение* правильного n-угольника (иначе, разумеется, число решений будет бесконечно, при условии, что есть хотя бы одно решение). Итак, будем считать, что наш n-угольник вписан в данную окружность ω с центром O, и фиксировано положение A_0 одной его вершины. Требуется определить положения $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ остальных вершин. Разумеется, достаточно найти положение точки A_1 — откладывая последовательно дугу A_0A_1, мы получим точки A_2, A_3, A_4 и т.д.

Проще всего эта задача решается при $n = 6$. Известно, что сторона правильного вписанного шестиугольника равна радиусу данной окружности. Поэтому нужная «программа» выглядит так (рис.4):

1. Циркулем построить из точки A_0 окружность ω_1 с радиусом OA_0.

2. Отметить точку A_1 пересечения окружностей ω и ω_1.

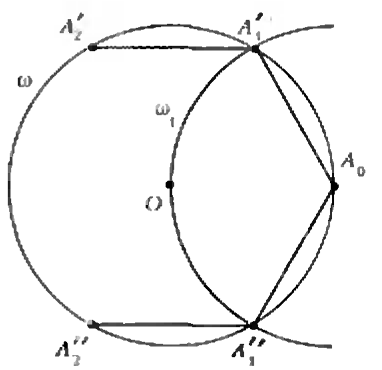


Рис. 4

Мы видим, что эта программа приводит к двум разным ответам, но соответствующие шестиугольники $A_0A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'$ и $A_0A_1''A_2''A_3''A_4''A_5''$ отличаются лишь порядком нумерации вершин.

Такая же ситуация наблюдается в случаях $n = 3$ и $n = 4$. Более интересны случаи $n = 5$ и $n = 10$. Мы разберем здесь случай $n = 10$.

Если провести биссектрису A_1B угла OA_1A_0, то образовавшиеся треугольники OA_1B, BA_1A_0, будут равнобедренными, а треугольники OA_1A_0 и BA_1A_0 — подобными. Будем считать прямую OA_0 числовой осью, на которой точка O соответствует нулю, а точка A_0 — единице. Пусть точка B соответствует числу x. Тогда мы получаем уравнение:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}, \text{ или } x^2 + x - 1 = 0.$$

Решив это уравнение, мы найдем точку B. Искомая точка A_1 найдется как точка пересечения данной окружности ω с окружностью с центром в точке A_0 и радиусом длиной x. Таких точек две — и мы получаем два решения: точки A_1' и A_1'' (рис.5).

Но у нашего квадратного уравнения два корня: $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ и $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$. Второй корень отрицателен и по этой причине вроде бы не годится. Однако не будем спешить «отбрасывать» этот корень, а попробуем понять его геометрический смысл.

Восстановим рисунок 5, считая, что точка B находится не справа, а слева от точки O. Мы получим рисунок 6. Это дает для искомой точки A_1 еще два возможных положения: A_1''' и A_1^{IV}.

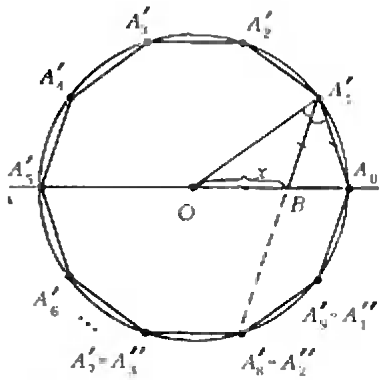


Рис. 5

Итак, мы пришли к четырем различным возможностям для точки A_1. В результате получаются два разных десятиугольника: *выпуклый* и *звездчатый*, причем на каждом из них возможны две разные нумерации вершин (см. рисунки 5 и 6).

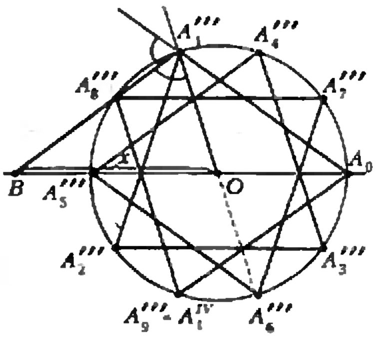


Рис. 6

Заметим, что с «точки зрения» циркуля и линейки звездчатый десятиугольник ничем не хуже выпуклого.

Возможно возражение: у выпуклого многоугольника несмежные стороны не пересекаются, а у звездчатого — пересекаются. Но это возражение отпадает, если мы стороной будем называть не отрезок между двумя вершинами (понятия «между» у нас нет!), а всю прямую. Тогда правильный чертеж «выпуклого» десятиугольника будет иметь вид, лишь размером отличающийся от «звездчатого» (рис.7).

Аналогичная ситуация возникает в случае пятиугольников. Здесь тоже имеется 4 решения, приводящих к двум различным пятиугольникам (рис.8, *а*, *б*) с двумя различными нумерациями вершин на каждом.

Теперь, не решая явно задачи на построение произвольного правильного n-угольника, попробуем установить, сколько у нее различных решений. (Напомним, что мы считаем заданными окружность ω и точку A_0 на ней.) Обозначим через x длину дуги A_0A_1. Точка A_1 является решением задачи (с точки зрения циркуля), если, откладывая дугу длины x от точки A_0 последовательно n раз, мы вернемся в исходную точку A_0, а откладывая меньшее число раз — не вернемся.

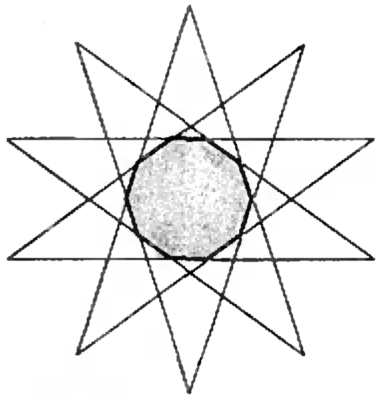


Рис. 7

Последняя оговорка существенна, иначе в случае, например, $n = 6$ нам пришлось бы назвать «правильным вписанным шестиугольником» дважды пройденный треугольник, или трижды пройденный диаметр, или даже шесть раз повторенную точку A_0.

На языке арифметики, принимая длину всей окружности за единицу, наше условие можно сформулировать так: *число nx — целое, а числа x, $2x$, $3x$, …, $(n-1)x$ — не целые.* Если $n = 10$, то в качестве x можно взять, например, $x = 1/10$. Но это не единственный возможный выбор. Можно взять x также равным $3/10$, $7/10$ или $9/10$. Это соответствует тем четырем решениям, которые мы раньше нашли геометрическим способом. Заметим, что если взять в качестве x число $11/10$ (или $13/10$, $17/10$,…), то новых геометрических решений мы не получим: положение точки на окружности зависит не от самого числа $x = \frac{k}{n}$, а от остатка, который дает k при делении на n.

Ясно, что несократимые дроби $\frac{m}{n}$ $(m < n)$ и только они обладают тем свойством, что $k \cdot \frac{m}{n}$ попадает в целое число (в начальную точку окружности) лишь при $k = n$. Таким образом, каждое число, меньшее n и взаимно простое с ним, дает решение задачи о правильном n-угольнике, и мы получаем, что число различных решений этой задачи дается функцией Эйлера! В частности,

$$\varphi(3) = \varphi(4) = \varphi(6) = 2,$$

$$\varphi(5) = \varphi(10) = 4,$$

что согласуется с результатами, полученными выше геометрическим путем. Вспомнив теперь, что всякая разрешимая задача на построение с помощью циркуля и линейки должна иметь 2^l различных решений, мы получим удобное необходимое условие для разрешимости задачи построения правильного n-угольника.

Правильный n-угольник допускает построение циркулем и линейкой только тогда, когда $\varphi(n) = 2^l$ для некоторого целого l.

(Например, правильный семиугольник построить невозможно, так как число $\varphi(7) = 6$ не является степенью двойки.)

Необходимость этого условия мы постарались объяснить. То, что оно является также и достаточным, — отдельный результат, и здесь мы им заниматься не будем.

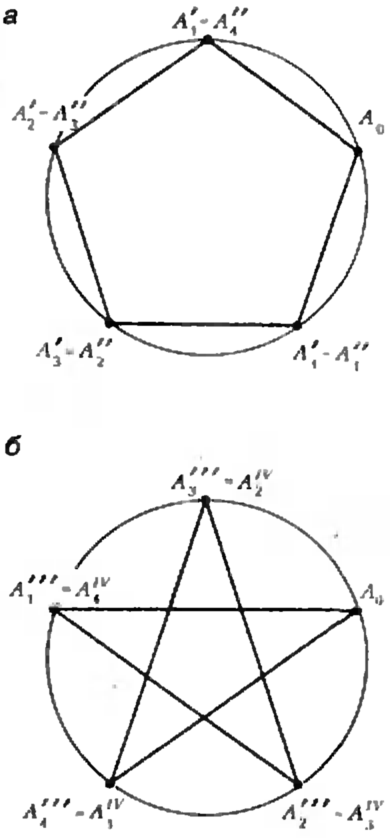


Рис. 8

Числа Ферма

Однако полученный результат не исчерпывает полностью поставленную задачу. Остается невыясненным вопрос — а много ли вообще таких чисел n, для которых $\varphi(n) = 2^l$, т.е. много ли вообще «красных» чисел?

Разумеется, про каждое отдельное число мы можем довольно быстро сказать, красное оно или черное — достаточно вычислить $\varphi(n)$. Но это не дает наглядного описания всей совокупности красных чисел. Оказывается, поиск такого описания приводит к трудной и до сих пор не решенной проблеме из теории чисел. Расскажем кратко, в чем суть этой проблемы.

Разложим n на простые множители:

$$n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k},$$

где $p_1, \ldots, p_k$ — различные простые числа, и посчитаем $\varphi(n)$. Из свойств функции Эйлера (1) и (2) мы получаем:

$$\varphi(n) = \varphi\left(p_1^{m_1}\right) \cdot \varphi\left(p_2^{m_2}\right) \cdot \ldots \cdot \varphi\left(p_k^{m_k}\right) =$$

$$= p_1^{m_1-1} \cdot p_2^{m_2-1} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k-1}(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_k-1).$$

Чтобы правая часть последнего выражения была степенью двойки, нужно, чтобы каждый нечетный простой множитель p_i входил в него с показателем $m_i = 1$; при этом само число p_i обязано иметь вид $p_i = 2^l + 1$. С другой стороны, выражение $2^l + 1$ может быть простым лишь тогда, когда l — степень двойки (если l делится на нечетное число $m > 1$, то $2^l + 1$ делится на $2^{l/m} + 1$). Итак, каждый нечетный множитель $p_i = 2^{2^k} + 1$.

Числа вида $2^{2^k} + 1$ получили название *чисел Ферма*. Первые пять чисел Ферма (при $k = 0, 1, 2, 3, 4$) — 3, 5, 17, 257, 65537 — действительно оказались простыми. Как обнаружил Эйлер, шестое число Ферма $2^{2^5} + 1$ делится на 641.

Со времен Эйлера числами Ферма интересовались математики разных стран. В частности, почти ровно сто лет тому назад в 1878 году, на заседании Петербургской академии наук слушалось сообщение Е.И.Золотарева о работе, представленной в академию священником Иоанном Первушиным. В этой работе устанавливалось, что число $2^{2^{23}} + 1$ делится на $167772161 = 5 \cdot 2^{25} + 1$.

В последнее время многие числа Ферма исследованы на компьютерах. Среди них простых чисел обнаружить так и не удалось, так что до сих пор неизвестно, существуют ли простые числа Ферма, кроме первых пяти. Поэтому мы вынуждены сформулировать ответ на нашу задачу в следующей, еще не окончательной форме:

Правильный n-угольник допускает построение циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда $n = 2^s \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, где p_i — попарно различные простые числа Ферма.

Возможно, кто-нибудь из читателей этой статьи внесет свой вклад в окончательное решение этой очень интересной и трудной задачи.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 февраля 1995 года по адресу: 103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6 — 94» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1467» или «Ф1468». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1467—М1470 предлагались на XXXV Международной математической олимпиаде.

Задачи М1461 — М1470, Ф1468 — Ф1477

М1461. Профессор Тарантога в статье о *сепульках* дал n определений *сепуления*. Аспиранты профессора постепенно доказали, что все эти определения эквивалентны. Каждый из аспирантов защитил диссертацию на тему: «Сепуление в смысле i-го определения является сепулением в смысле j-го определения». Какое максимальное количество аспирантов могло быть у Тарантоги, если диссертации защищались последовательно и основной результат очередной диссертации не следовал из ранее защищенных?

К.Мишачев

М1462. Докажите неравенство (при $n \geq 2$)

$$\left(\sqrt[n]{n!}\right)^2 \geq \sqrt[n+1]{(n+1)!}\cdot\sqrt[n-1]{(n-1)!}.$$

Л.Курляндчик

М1463. Существуют ли такие натуральные числа x и y, что каждое из чисел

а) $x + y$, $2x + y$ и $x + 2y$,

б) $x + y$, $2x + y$ и $3x + y$

является точным квадратом?

А.Грибалко, ученик 9 класса

М1464. R и r — радиусы описанной Γ и вписанной γ окружностей треугольника; r_1 — радиус окружности, вписанной в треугольник с вершинами в точках касания окружности γ со сторонами исходного треугольника. Докажите неравенство

$$2r_1 \leq r \leq \sqrt{r_1 R}.$$

В.Сендеров

М1465. а) Докажите, что для каждого натурального k существует не более одного многочлена степени k со старшим коэффициентом 1, для которого выполняется тождество

$$f(P(x))f(Q(x)) = f(R(x)),$$

где $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ — данные многочлены (степени $P(x)$ и $Q(x)$ различны и больше 0).

б) Найдите хотя бы один многочлен $f(x)$ (отличный от постоянной) такой, что

$$f(x)f(2x^2) = f(2x^3 + x);$$

в) все такие многочлены.

М.Тройников

М1466*. Два художника играют в следующую игру на карте (первоначально пустой). Первый рисует новую страну (многоугольник, не лежащий внутри уже нарисованных), а второй красит ее так, чтобы страны, имеющие общую сторону, были покрашены в разные цвета. Может ли первый художник заставить второго использовать более а) пяти, б) десяти цветов?

В.Ковальджи

М1467. Пусть m и n — целые положительные числа. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — различные элементы множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ такие, что для любых индексов i, j, удовлетворяющих условиям $1 \leq i \leq j \leq m$ и $a_i + a_j \leq n$, существует индекс k, $1 \leq k \leq m$, для которого $a_i + a_j = a_k$. Докажите, что

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}.$$

М1468. Дан равнобедренный треугольник ABC, где $AB = AC$. Предположим, что:
(i) M — середина BC, и O — точка на прямой AM такая, что OB и AB перпендикулярны;
(ii) Q — произвольная точка отрезка BC, отличная от точек B и C;
(iii) точка E лежит на прямой AB, точка F лежит на прямой AC, и при этом точки E, Q и F различны и лежат на одной прямой.
Докажите, что OQ и EF перпендикулярны тогда и только тогда, когда $QE = QF$.

М1469. Для любого целого положительного числа k через $f(k)$ обозначим число всех элементов в множестве $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$, в двоичном представлении каждого из которых имеется в точности три единицы.
(a) Докажите, что для каждого целого положительного числа m существует хотя бы одно целое положительное число k такое, что $f(k) = m$.
(b) Найдите все целые положительные числа m, для каждого из которых существует единственное k, удовлетворяющее условию $f(k) = m$.

М1470*. Покажите, что существует множество A, состоящее из целых положительных чисел, которое обладает следующим свойством:
для каждого бесконечного множества S простых чисел существует $k \geq 2$, а также существуют два целых положительных числа $m \in A$ и $n \notin A$ таких, что оба являются произведениями k различных элементов множества S.

Ф1468. Жук ползет вдоль прямой, и его скорость все время меняется. У вас есть необычный график — зависимости величины, обратной скорости жука, т.е. $1/v$, от координаты жука x (рис.1). Определите по графику время прохождения жуком первых 30 метров.
Л.Мельниковский

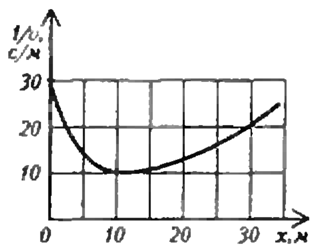


Рис.1

Ф1469. При падении теннисного мячика с высоты H на неподвижную ракетку он отскакивает вертикально вверх на несколько меньшую высоту $h = 0{,}9\,H$. С какой скоростью ракетка должна двигаться навстречу мячику в момент удара, чтобы он подскочил на ту же высоту?
А.Купериптох

Ф1470. Жесткий легкий стержень шарнирно закреплен одним из концов. На расстоянии $a = 0{,}1$ м от этого конца на стержне укреплен груз массой $M = 0{,}3$ кг, на расстоянии $2a$ — груз m и на расстоянии $3a$ — груз массой $M/3 = 0{,}1$ кг. Все грузы имеют малые размеры. Как зависит период колебаний получившегося маятника (так называемый физический маятник) от массы второго груза m?
М.Бойко, ученик с.ш. 548 г.Москвы

Ф1471. При заполнении сосуда Дьюара жидким азотом была немного повреждена наружная стенка, и в пространство между стенками начал проникать наружный воздух. В результате весь азот испарился за 5 часов, а концентрация молекул в пространстве между стенками за это время увеличилась в 6 раз (она осталась при этом очень низкой — молекулы воздуха пролетали от стенки к стенке практически без соударений). За какое время испарился бы азот, если бы мы обращались с сосудом с крайней осторожностью (не повредили бы стенку)? Сосуд Дьюара — это большой термос с маленьким открытым горлышком. Потери тепла через горлышко можно считать малыми.
Л.Блинов

Ф1472. В закрытом сосуде объемом 0,1 л находится 10 г воды и ее насыщенный пар при температуре +80 °С. Найдите теплоемкость сосуда. Массой самого сосуда можно пренебречь. Зависимость давления насыщенных паров воды от температуры можно найти в справочнике. Воздух из сосуда был откачан.
З.Рафаилов

Ф1473. В схеме, изображенной на рисунке 2, верхний миллиамперметр показывает ток 10 мА, вольтметр показывает напряжение 3 В. Найдите показания второго

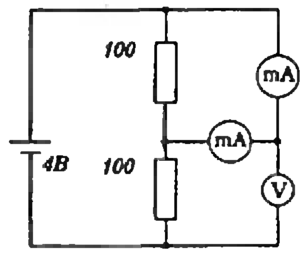


Рис.2

миллиамперметра. Что покажут приборы, если удалить верхний резистор сопротивлением 100 Ом? Миллиамперметры одинаковые, внутреннее сопротивление батарейки мало.
З.Александров

Ф1474. Вдоль одной прямой на расстояниях 0,1 м друг от друга расположены три одинаково заряженных маленьких шарика. В середине находится шарик массой 10 г, слева — шарик массой 0,1 г и справа — шарик массой 1 кг. Заряд каждого шарика 1 мкКл. Шарики отпускают. Найдите их скорости после разлета на большие расстояния. (Точно посчитать не получится, найдите скорости приближенно!).
М.Учителев

Ф1475. К батарейке напряжением U_0 подключены последовательно соединенные конденсаторы, емкости которых C и $3C$. В некоторый момент параллельно конденсатору $3C$ подключают цепочку, состоящую из последовательно соединенных катушки индуктивностью L и идеального диода (диод включен так, что при выбранной полярности батарейки через него может течь ток). Найдите максимальный ток через катушку. Какое напряжение установится на конденсаторе C после прекращения тока через катушку? Через какое время

после подключения ток через катушку станет равным нулю?
А.Зильберман

Ф1476. В сеть переменного тока включены параллельно две цепочки. Одна состоит из двух соединенных последовательно резисторов, сопротивления которых R и $4R$, другая — из включенных навстречу друг другу двух диодов. Во сколько раз изменится мощность, потребляемая от сети, если соединить между собой средние точки этих цепочек?
В.Тельнов

Ф1477. Световой поток от точечного источника света измеряют при помощи маленького фоточувствительного детектора, расположенного на расстоянии $L = 0{,}1$ м. Между источником и детектором помещают плоскопараллельную стеклянную пластинку так, что ее плоскость перпендикулярна прямой, соединяющей источник и детектор. Коэффициент преломления стекла $n = 1{,}5$. При какой толщине пластинки показания детектора останутся прежними? Стекло прозрачное, коэффициент отражения k на границе стекло — воздух при нормальном падении лучей можно найти по формуле

$$k = (n-1)^2/(n+1)^2.$$

С.Варламов

Решения задач М1431—М1440, Ф1448—Ф1457

М1431. *С натуральным числом проделывается следующая операция: его последняя цифра отделяется, умножается на 4 и прибавляется к оставшемуся числу (скажем, из 1993 получается 211). С полученным числом проделывается то же самое, и т.д. Докажите, что если в полученной последовательности встретилось 1001, то в ней нет ни одного простого числа.*

По нашему правилу из числа $x = 10A + b$ (где b — последняя цифра) получается число $y = A + 4b$ такое, что $10y - x = 39b$. Поэтому если y делится на 13, то x тоже делится на 13, и обратно. Значит, если в последовательности встретилось $1001 = 13 \cdot 77$, то все ее члены также делились на 13. Но самого числа 13 в ней нет ни до 1001 (поскольку из 13 получается снова $1 + 4 \cdot 3 = 13$), ни после него (поскольку из 1001 получается $100 + 4 = 104$, затем 26, также являющееся «неподвижной точкой» для нашего правила).
Н.Васильев, Б.Гинзбург

М1432. *Докажите, что для любой последовательности положительных чисел a_n целые части квадратных корней из чисел*

$$b_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(1/a_1 + 1/a_2 + \ldots + 1/a_n)$$

все различны.

Достаточно доказать следующее более сильное утверждение: в последовательности $\sqrt{b_n}$ каждое число отличается от предыдущего не менее чем на 1, т.е. $\sqrt{b_{n+1}} \ge \sqrt{b_n} + 1$. Обозначим

$$a = a_1 + \ldots + a_n,\quad c = \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}.$$

Докажем, что

$$\sqrt{(a+x)\left(c+\frac{1}{x}\right)} \ge \sqrt{ac} + 1 \qquad (*)$$

при $x > 0$. Очевидно, $a/x + cx \ge 2\sqrt{ac}$. Поэтому

$$(a+x)\left(c+\frac{1}{x}\right) \ge (ac+1) + 2\sqrt{ac} = \left(\sqrt{ac}+1\right)^2,$$

откуда и следует (*).
Л.Курляндчик

М1433. *$ABCD$ — вписанный четырехугольник. На лучах BA и DC отложим отрезки BM и DP длиной $(AB+CD)/2$. Аналогично, на лучах CB и AD отложим отрезки CN и AQ длиной $(BC+AD)/2$. Докажите, что $MNPQ$ — прямоугольник и что его площадь равна площади $ABCD$.*

Можно считать, что в нашем четырехугольнике $AB \le CD$ и $BC \le AD$ (поскольку утверждение задачи не изменится, если мы циклическим образом изменим обозначения вершин). В таком случае точки $MNPQ$ будут расположены на сторонах или их продолжениях так, как показано на рисунке 1, причем $MA = CP = (CD - AB)/2$,

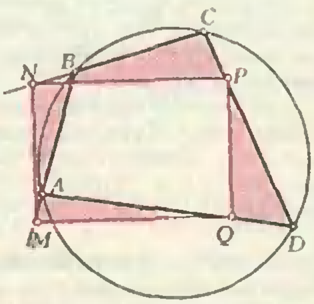


Рис. 1

$BN = DQ = (AD - BC)/2$. Вспомнив, что у вписанного четырехугольника противоположные углы в сумме составляют π, получим: $\angle MBN = \angle PDQ$, $\angle NCP = \angle QAM$. Следовательно, $\Delta MBN = \Delta PDQ$, $\Delta NCP = \Delta QAM$ (по двум сторонам и углу между ними). Отсюда следует, во-первых, равенство площадей четырехугольников:

$$S_{ABCD} = S_{ABCD} + S_{MBN} - S_{PDQ} + S_{QAM} - S_{NCP} = S_{MNPQ};$$

во-вторых, тот факт, что $MNPQ$ — параллелограмм (поскольку $MN = PQ$, $NP = MQ$ и эти отрезки не пересекаются); в-третьих, то, что направления его сторон $MN \parallel QP$ и $NP \parallel MQ$ соответственно параллельны биссектрисам углов между продолжениями сторон BC, AD и AB, CD четырехугольника (поскольку $\angle AQM = \angle CNP$ и $\angle NMB = \angle QPD$). Остается воспользоваться тем, что эти биссектрисы для любого вписанного четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Для доказательства достаточно вспомнить, что угол между двумя прямыми, пересекающими круг, равен полуразности дуг, заключенных внутри этого угла, если вершина угла лежит вне круга, и полусумме, если внутри: на рисунке 2

$$\alpha_1 - \alpha_6 = \alpha_2 - \alpha_5,$$

$$\alpha_3 - \alpha_8 = \alpha_4 - \alpha_7,$$

поэтому

$$\alpha_1+\alpha_8+\alpha_4+\alpha_5=\alpha_2+\alpha_3+\alpha_6+\alpha_7=\pi.$$

Е.Гольдберг

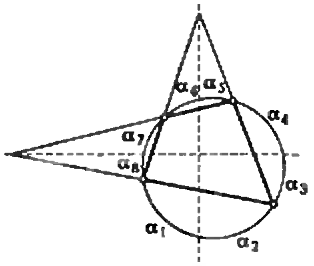


Рис.2

М1434. *Известно, что Земля — плоская. Верно ли, что любой выпуклый многогранник можно осветить точечным фонарем из некоторой точки пространства так, что его тень будет многоугольником, хотя бы один угол которого — острый?*

Верно. Расположим многогранник над горизонтальной плоскостью (Землей) так, чтобы одна из его вершин A была расположена выше всех других — на высоте h над плоскостью. Будем двигать фонарь F вниз по некоторой вертикали, не пересекающей многогранник; пусть z — расстояние F до плоскости ($z>h$). При приближении z к h тенью служат выпуклый многоугольник, у которого все вершины, кроме одной A' (тени A), стремятся к предельным положениям, а A' уходит в бесконечность. Ясно, что при этом угол A' этого многоугольника будет, начиная с некоторого $z=h+\varepsilon$, острым.

А.Белов, Р.Федоров

М1435. *Докажите, что в любой многочлен $P(x)$ степени больше 1 можно подставить многочлен $Q(x)$ такой, что $P(Q(x))$ разлагается на два множителя (все многочлены с целыми коэффициентами).*

Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n>1$:
$P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$; $a_n\ne 0$.
Подставим в это выражение вместо x многочлен $Q(x)=x+P(x)$. Каждый член вида $a_k(x+P(x))^k$ можно представить в виде $a_kx^k+P(x)\cdot R_k(x)$, где $R_k(x)$ — некоторый многочлен. Поэтому
$P(Q(x))=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+P(x)\cdot R(x)$,
так что $P(Q(x))$ — многочлен степени $n^2>n$ — делится на $P(x)$: $P(Q(x))=P(x)(1+R(x))$.

А.Белов

М1436. *Какой наибольший объем имеет тетраэдр, у которого: а) 4 ребра; б) 5 ребер; в) все 6 ребер не превосходят 1?*

Лемма 1. Если стороны a, b, c треугольника не превосходят 1, то его площадь $S\le\frac{\sqrt3}{4}$.

Дадим одно из многих естественных доказательств. Пусть a — наименьшая сторона треугольника, A — противолежащий угол, тогда

$$\sin A\le\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt3}{2}\ \text{ и }\ S=\frac12 bc\sin A\le\frac{\sqrt3}{4}.$$

а) Ответ: $\sqrt3/12$. Рассмотрим два случая. 1) Существует грань, все стороны которой не превосходят 1. Пользуясь леммой, получаем ответ.

2) Такой грани не существует. В этом случае достаточно рассмотреть тетраэдры $ABCD$, у которых $AC=BC=AD=BD=1$, $\angle ADB>\frac{\pi}{3}$. Пусть DK — высота треугольника ADB. Тогда $V_{ABCD}\le\frac13 S_{ABC}\cdot DK<\frac13\cdot\frac12\cdot\frac{\sqrt3}{2}=\frac{\sqrt3}{12}$.

б) Ответ: $1/8$. Пусть тетраэдр $ABCD$ удовлетворяет условиям задачи, AB — наибольшее из 5 ребер, равных 1. Без ограничения общности будем считать $AB=1$. Имеем: $V_{ABCD}=\frac13 S_{ABC}\cdot H_D$, где H_D — высота тетраэдра. Но $H_D\le h_D$, где h_D — высота треугольника ABD. Следовательно,

$$V_{ABCD}\le\frac13 S_{ABC}\cdot h_D=\frac13 S_{ABC}\cdot\left(\frac{2S_{ABD}}{AB}\right)=\frac23 S_{ABC}S_{ABD}.$$

По лемме 1 имеем: $S_{ABC}\le\frac{\sqrt3}{4}$, $S_{ABD}\le\frac{\sqrt3}{4}$. Получили: $V_{ABCD}\le\frac18$. Равенство достигается: достаточно (и необходимо) рассмотреть тетраэдр, у которого две грани — взаимно перпендикулярные правильные треугольники со стороной 1.

Замечание 1. Вариант этой задачи предлагался на Девятой международной математической олимпиаде. Несколько более сложное и громоздкое решение см. в книге «Международные математические олимпиады» (Москва, «Просвещение», 1976 г., № 52).

в) Ответ: $\sqrt2/12$ (объем правильного тетраэдра с ребром 1). Здесь нам понадобятся две простые леммы, оценивающие объем тетраэдра.

Лемма 2. $V_{ABCD}\ge\frac16 H_AH_BH_C$, где H_A, H_B, H_C — длины некоторых трех высот тетраэдра $ABCD$.

Доказательство. $H_A\le AD$, $H_B\le BK$, где BK — высота треугольника ABD. Следовательно,

$V_{ABCD}=\frac16 H_C\cdot AD\cdot BK\ge\frac16 H_AH_BH_C$.

Лемма 3. Если $a_1,\ldots,a_6$ — длины ребер тетраэдра $ABCD$, то

$$V_{ABCD}\le\frac{1}{12}\sqrt{2a_1\cdot\ldots\cdot a_6}. \qquad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим треугольник $A'B'C'$, в котором стороны треугольника ABC являются средними линиями ($A'B'\parallel AB$, $B'C'\parallel BC$, $C'A'\parallel CA$). Обозначим $v=V_{A'B'C'D}$. По лемме 2 имеем:

$$v\ge\frac16\left(\frac{3v}{S_{A'B'D}}\right)\left(\frac{3v}{S_{B'C'D}}\right)\left(\frac{3v}{S_{C'A'D}}\right). \qquad (2)$$

Кроме того,

$$S_{A'B'D}\le\frac12 A'B'\cdot CD=\frac12(2AB)CD,$$
$$S_{B'C'D}\le BC\cdot AD,\ S_{C'A'D}\le AC\cdot BD.$$

Из этих неравенств и из (2) получаем:

$$v^2\le\frac29 a_1\cdot\ldots\cdot a_6.$$

Отсюда, поскольку $v=4V_{ABCD}$, следует (1). Лемма доказана.

Равенство в (1) имеет место тогда и только тогда, когда тетраэдр $ABCD$ правильный. С учетом этого получаем из леммы 3 ответ задачи в).

Замечание 2. Во многих стереометрических задачах полезна формула

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin\varphi,$$

где φ — угол между прямыми AB и CD, d — расстояние между ними. Эта формула доказывается, например, примененным при доказательстве леммы 3 приемом «перестройки» тетраэдра $ABCD$.

В.Сендеров

М1437. *Докажите, что если последовательность удовлетворяет следующим условиям:*
a_1, a_2, a_3 — целые неотрицательные числа;
$a_{n+3} = a_{n+1} + a_n$ (при $n = 1, 2, \ldots$),
то при всех натуральных n и простых p число $a_{n+3p+1} - a_{n+p+1} - a_{n+1}$ делится на p.

Как известно, числа $C_n^k = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$ (биномиальные коэффициенты) целые, причем $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k+1} = C_n^{k+1}$. Достаточно доказать, что при произвольном натуральном p

$$a_{n+3p} = \sum_{j=0}^{p} C_p^j a_{n+j}.$$

При $p = 1$ равенство очевидно. Пусть оно верно при $p-1$. Имеем:

$$a_{n+3p} = a_{n+3(p-1)} + a_{(n+1)+3(p-1)} = \sum_{j=0}^{p-1} C_{p-1}^j a_{n+j} + \sum_{j=0}^{p-1} C_{p-1}^j a_{n+1+j}.$$

Для завершения доказательства достаточно воспользоваться равенством $C_{p-1}^j + C_{p-1}^{j-1} = C_p^j$ и тем, что C_p^j делится на р при простом p.

Другое решение можно получить, используя тот факт, что $a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n$, где x_i — корни уравнения $x^3 - x - 1 = 0$ (см., например,[1]).

$$A = a_{n+3p+1} - a_{n+p+1} - a_{n+1} =$$
$$= \sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i^{n+1} (x_i^3)^p - \sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i^{n+1} x_i^p - \sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i^{n+1}.$$

Поэтому

$$A = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i^{n+1} (x_i + 1)^p - \ldots = \sum_{j=1}^{p-1} C_p^j \left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i^{n+1+j} \right).$$

Но, поскольку p — простое число, C_p^j делится на p; число в скобках равно a_{n+1+j}, следовательно, оно целое.

Замечание. Из решений следует, что в условиях задачи число 3 можно заменить любым натуральным числом, большим 1.

Д.Андриенко, В.Сендеров

М1438. *Докажите, что для любого n существует $P(n)$ такое, что натуральное число, у которого ровно n различных простых множителей и все они больше P, не может быть совершенным. (Число называется совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей, кроме самого этого числа).*

Предположим противное: существует число n такое, что при любом натуральном m существует совершенное число $x = x(m) = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ ($p_1, \ldots, p_n$ — простые числа, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — натуральные числа) такое, что $p_i \ge m$ при $i = 1, \ldots, n$.

Поскольку x — совершенное число, имеем:

$$2p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n} =$$
$$= \left(1 + p_1 + \ldots + p_1^{\alpha_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + p_n + \ldots + p_n^{\alpha_n}\right) =$$
$$= \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_n^{\alpha_n+1} - 1}{p_n - 1} \le \frac{p_1^{\alpha_1+1}}{p_1 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_n^{\alpha_n+1}}{p_n - 1}.$$

Следовательно,

$$2 \le \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_n}{p_n - 1} \le \left(\frac{m}{m-1}\right)^n. \qquad (*)$$

Последнее неравенство следует из того, что $p_i \ge m$ при $i = 1, \ldots, n$, а значит, $\dfrac{p_i}{p_i - 1} \le \dfrac{m}{m-1}$ при $i = 1, \ldots, n$.

Но $\left(\dfrac{m}{m-1}\right)^n \to 1$ при $m \to \infty$, что противоречит $(*)$.

А.Сарсембаев, В.Сендеров

М1439. *В треугольнике стороны равны a, b, c; медианы, проведенные к этим сторонам, — m_a, m_b, m_c. Докажите неравенства*
а) $m_a/a + m_b/b + m_c/c \ge 3\sqrt{3}/2$,
б) $a/m_a + b/m_b + c/m_c \ge 2\sqrt{3}$.

Первое решение

а) Фиксируем наибольшую сторону a треугольника (в этом случае $b^2 + c^2 \le 2a^2$) и медиану m_a (значит, $b^2 + c^2 = const$). Оценим снизу величину $\dfrac{m_b}{b} + \dfrac{m_c}{c}$. Имеем:

$$\frac{m_b}{b} + \frac{m_c}{c} \ge 2\sqrt{\frac{m_b m_c}{bc}}.$$

Обозначим $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = d$, $b^2 = x$, $c^2 = y$. Имеем

$$\frac{m_b^2 m_c^2}{b^2 c^2} = \frac{\frac{1}{16}(d - 3x)(d - 3y)}{xy} = \frac{d^2 - 3d(x+y) + 9xy}{16xy}.$$

Но $d - 3(x+y) = 2a^2 - b^2 - c^2 \ge 0$. Следовательно, выражение минимально при максимальном xy, т.е. при $x = y$.

Таким образом, в дальнейшем решении можно считать $b = c$. Имеем:

$$\frac{m_a}{a} + 2\frac{m_b}{b} = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2a} + \frac{\sqrt{2a^2 + b^2}}{b};$$

положим $t = \dfrac{a}{b}$. Достаточно доказать, что функция

$$f(t) = 2\sqrt{2t^2 + 1} + \frac{\sqrt{4 - t^2}}{t},$$

где $1 \le t \le 2$, минимальна при $t = 1$.

Имеем $f'(t) \to -\infty$ при $t \to 2$. Значит, для того чтобы убедиться, что точка минимума функции $f(t)$ не лежит в интервале $(1, 2)$, достаточно убедиться, что $f'(t)$ имеет в $(1, 2)$ не более одного корня.

[1] *Моденов П.С. Сборник задач по специальному курсу элементарной математики. — М., Советская наука, 1957, стр. 117 – 118.*

В интервале $(1,2)$ корни функции $f'(t)$ совпадают с корнями уравнения $t^6(4-t^2)=2t^2+1$. Рассмотрим многочлен

$$\mathcal{P}(x)=x^4-4x^3+2x+1=(x-1)(x^3-3x^2-3x-1);$$

обозначим $y(x)=x^3-3x^2-3x-1$; имеем: $y(1)<0$, $y'(1)<0$. Следовательно, $y(x)$, а значит, и $\mathcal{P}(x)$ имеет на полуоси $x>1$ ровно один корень.
Итак, минимум функции $f(t)$ на отрезке $[1,2]$ достигается на одном из концов этого отрезка. Имеем:

$$f(1)=3\sqrt{3}<6=f(2).$$

Неравенство пункта а) доказано.
Замечание 1. Так как $f(1)<f(2)$, $f'(t)\to-\infty$ при $t\to2$, то максимум $f(t)$ на отрезке $[1,2]$ достигается во внутренней точке t_0 этого отрезка; разумеется, $f'(t_0)=0$. Существование точки максимума функции $f(t)$ внутри отрезка $[1,2]$ следует также из того, что $\mathcal{P}(3)<0$, $\mathcal{P}(4)>0$ (знаки функций $f'(t)$ и $\mathcal{P}(t^2)$ на интервале $(1,2)$ противоположны).
б) Фиксируем наименьшую сторону a треугольника. Как и в решении пункта а), показываем, что можно считать $b=c$.
Рассмотрим функцию

$$\frac{a}{m_a}+\frac{2b}{m_b}=\frac{2a}{\sqrt{4b^2-a^2}}+\frac{4b}{\sqrt{2a^2+b^2}},$$

где $0<a\le b$. Положим $t=\frac{a}{b}$; очевидно, можно считать $t\in[0,1]$. Имеем:

$$f(t)=\frac{2t}{\sqrt{4-t^2}}+\frac{4}{\sqrt{2t^2+1}},$$

$$\frac{f'(t)}{8}=\frac{1}{(4-t^2)^{3/2}}-\frac{t}{(2t^2+1)^{3/2}}.$$

При $t\in[0,1]$ корни производной совпадают с корнями многочлена $\mathcal{P}(t^2)=(2t^2+1)^3-t^2(4-t^2)^3=$ $=(2z+1)^3-z(4-z)^3$. Поскольку вторая производная $\mathcal{P}''(z)>0$ при всех $z>0$, то многочлен $\mathcal{P}(z)$ имеет не более двух корней при $z>0$. Но $\mathcal{P}(1)=0$; так как $\mathcal{P}(0)>0$, то корень многочлена $\mathcal{P}(z)$ на $[0,1]$, если он и существует, не является точкой минимума функции $f(t)$.
Значит, достаточно проверить значения функции на концах отрезка $[0,1]$. Имеем:

$$f(0)=4>2\sqrt{3}=f(1).$$

Утверждение пункта б) доказано.
Замечание 2. Так как $f'(0)>0$, $f(1)<f(0)$, то функция $f(t)$ достигает максимального значения во внутренней точке t_0 отрезка $[0,1]$; разумеется, $\mathcal{P}(t_0^2)=0$. Существование точки максимума функции $f(t)$ внутри отрезка $[0,1]$ следует также из того, что $\mathcal{P}(0)>0$, $\mathcal{P}(0{,}5)<0$.
Второе решение
Перепишем неравенство пункта б) в виде

$$\left(\frac{a}{m_a}+\frac{b}{m_b}+\frac{c}{m_c}\right)^2\ge12.$$

Так как $(x+y+z)^2\ge3(xy+yz+zx)$, то достаточно доказать, что

$$\frac{ab}{m_am_b}+\frac{bc}{m_bm_c}+\frac{ca}{m_cm_a}\ge4. \qquad (*)$$

Обозначим $AD=m_a$, $CE=m_c$ и применим к четырехугольнику $BDME$ (M — точка пересечения медиан) неравенство Птолемея:

$$2m_bb\le m_ac+m_ca. \qquad (**)$$

Применим неравенство Птолемея к $AEDC$:

$$m_am_c\le\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{4}ac. \qquad (***)$$

Умножим $(**)$ на b и сложим получившееся неравенство с двумя аналогичными:

$$m_aa^2+m_bb^2+m_cc^2\le m_abc+m_bca+m_cab.$$

Умножим $(***)$ на m_b и получим аналогично:

$$3m_am_bm_c\le\frac{1}{2}(m_aa^2+\ldots)+\frac{1}{4}(m_abc+\ldots).$$

Из последних двух неравенств выводим:

$$4m_am_bm_c\le m_abc+m_bca+m_cab.$$

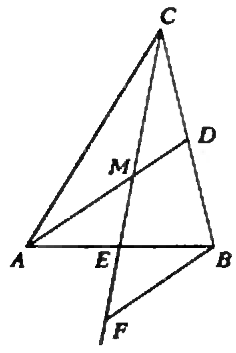
Поделив на $m_am_bm_c$, получаем $(*)$.
Аналогично можно доказать неравенство пункта а):

$$\left(\frac{m_a}{a}+\frac{m_b}{b}+\frac{m_c}{c}\right)^2\ge\frac{27}{4}.$$

Замечание 3. «Принцип двойственности» между сторонами треугольника и его медианами позволяет, доказав какое-либо одно из неравенств задачи, автоматически получить из него второе неравенство.
Проведем BF параллельно AD (см. рисунок). Имеем: $BF=AM$, $MF=2ME=CM$.
Получили: $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$ — медианы треугольника со сторонами $\frac{2m_a}{3}$, $\frac{2m_b}{3}$, $\frac{2m_c}{3}$ соответственно.
Этот результат следует также и из формул

$$a^2=\frac{4}{9}(2m_b^2+2m_c^2-m_a^2),\ \ldots\,.$$

Пусть, например, доказано неравенство пункта а). Заменив в нем m_a на $\frac{a}{2}$, …, a на $\frac{2m_a}{3}$, …, получаем неравенство пункта б).
В. Сендеров



М1440. *Доска $m \times n$ клеток покрыта одинаковыми плитками размерами $1 \times k$ клеток. Разрешается вынуть любой квадрат $k \times k$ клеток (если он состоит из плиток $1 \times k$) и повернуть на 90 градусов. Докажите, что такими операциями можно добиться того, что все плитки будут лежать в одном направлении.*

Задача эта непростая (даже для $k = 2$) — это видно хотя бы из того, что из ее результата вытекают такие неочевидные следствия: в условиях задачи (1) существует хотя бы один квадрат $k \times k$, состоящий из плиток $1 \times k$; (2) одно из чисел m или n делится на k.

Из нашего решения будет понятно, как построить алгоритм (правило), следуя которому, можно выстроить плитки в одном направлении.

Ниже мы будем считать, что в прямоугольнике $p \times q$ первым указывается вертикальный, а вторым — горизонтальный размер; в частности, таблица $m \times n$ состоит из m строк и n столбцов.

Пусть она как-то заполнена плитками $k \times 1$ и $1 \times k$. Попытаемся уложить плитки, примыкающие к левому краю таблицы, горизонтально. Препятствием к этому служит следующая конфигурация (рис.1) — «Г-угол». Более точно, назовем точку A (вершину клетки таблицы) Г-углом, если она является правой верхней вершиной вертикальной плитки $k \times 1$ и левой верхней вершиной горизонтальной плитки $1 \times k$. Нам понадобится такое очевидное утверждение.

Рис. 1

Лемма. Пусть $ABCD$ — прямоугольник размерами $i \times k$ в нашей таблице, у которого верхняя сторона AB и левая AD идут по краям плиток, не содержащий Г-углов внутри себя и на стороне AB (кроме самих точек A и B). Тогда операциями «поворот квадрата $k \times k$» все плитки в прямоугольнике $ABCD$ можно уложить: (1) горизонтально; (2) так, что к каждой горизонтальной и вертикальной плитке, примыкающей к стороне AD слева, прилегала такая же — соответственно, горизонтальная или вертикальная плитка (разумеется, при этом предполагается, что сторона AD не лежит на левом краю таблицы, причем A является правым верхним, а D — правым нижним углом некоторой плитки, рис.2).

Покажем теперь, что можно избавиться от Г-углов. Достаточно показать, как ликвидировать один Г-угол, уменьшив их общее число по крайней мере на 1.

Пусть A — самый нижний Г-угол, а если таких несколько (на одной горизонтальной линии) — самый левый из них. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$, где AD — максимальный отрезок, идущий от A вниз по краям плиток; $AB = k$ (рис. 3а). Согласно утверждению (1) леммы, все плитки в $ABCD$ можно уложить горизонтально (рис.3б). При этом могут возникнуть Г-углы на стороне AD, и чтобы их устранить, достаточно расположить плитки согласно утверждению (2) леммы. Однако при

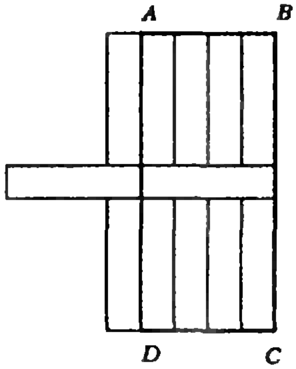


Рис.2

этом могут возникнуть Г-углы на стороне BC. Пусть A' — самый верхний из них (A' может совпадать с B) и $A'B'C'D'$ — прямоугольник, построенный аналогично $ABCD$ ($A'D'$ — наибольший отрезок, идущий от A' вниз по краям плиток, $A'B' = k$, рис.3в).

Рассуждая так же, как и выше, мы можем устранить Г-углы на линии $A'D'$, но при этом могут возникнуть новые на стороне $B'C'$. Их можно устранить с помощью расположенного правее прямоугольника $A''B''C''D''$ и т.д. Этот процесс должен оборваться не позже, чем пра-

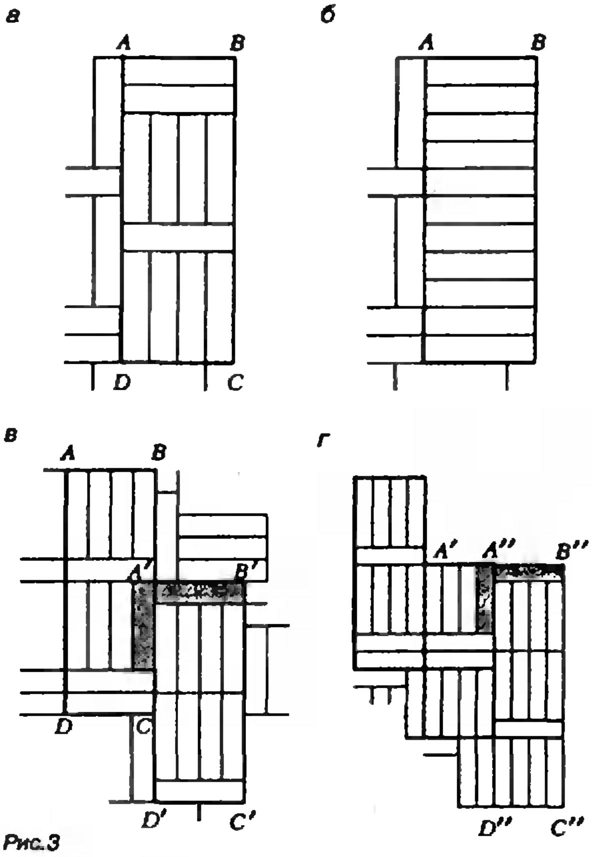


Рис.3

вая сторона будет отстоять от правого края таблицы на расстояние меньше k (поскольку на такой стороне уже не может быть Г-углов).

Таким образом, мы ликвидировали Г-угол в точке A и избавились от всех возникавших при этом углов ниже A (и быть может еще от некоторых, лежавших правее A). Действуя так же, мы ликвидируем все Г-углы.

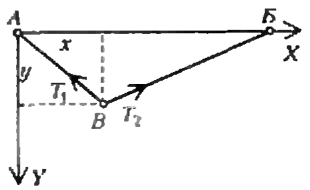
Остальное ясно. Уложим все плитки, прилегающие к левой стороне таблицы, горизонтально — это можно сделать согласно утверждению (1) леммы в применении к самому левому прямоугольнику $m \times k$, затем уложим горизонтально плитки в следующем за ним (направо) прямоугольнике $m \times k$ и т.д. В конце концов, если n делится на k, то все плитки будут уложены горизонтально. Если же $n = qk + r$, $0 < r < k$, то останется правый прямоугольник $m \times r$, где плитки уложены по необходимости вертикально; при этом m делится на k и все горизонтальные плитки лежат, очевидно, можно повернуть вертикально.

Замечание. В этой задаче было интересно получить оценки (снизу и сверху) для наименьшего числа шагов, преобразующих любое расположение в «основное», где все плитки лежат в одном направлении. Но найти хорошие оценки, видимо, очень трудно.

Н.Васильев, А.Канель

Ф1448. *Концы тонкой и легкой паутинки закреплены на одной высоте на расстоянии L друг от друга. Паук массой m ползет, цепляясь за паутинку. По какой траектории он при этом движется? Напишите уравнение этой кривой. Считайте, что паутинка подчиняется закону Гука, ее жесткость k, а длина до растяжения пренебрежимо мала.*

Пусть в некоторый момент паук находится в точка B, а концы паутинки закреплены в точках A и $Б$ (см. рисунок). Будем считать, что паук прополз долю γ от на-



чальной длины паутинки ($0 \le \gamma \le 1$). Тогда жесткость части AB паутинки составляет $k_1 = k/\gamma$, а жесткость части $BБ$ — $k_2 = k/(1-\gamma)$. Горизонтальные компоненты сил натяжения частей паутинки компенсируют друг друга, а сумма вертикальных компонент дает mg:

$$T_1 \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = T_2 \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2+y^2}},$$

$$T_1 \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + T_2 \frac{y}{\sqrt{(L-x)^2+y^2}} = mg,$$

где

$$T_1 = k_1\sqrt{x^2+y^2}, \quad T_2 = k_2\sqrt{(L-x)^2+y^2}.$$

Подставляя значения k_1 и k_2 и исключая из уравнений величину γ (кстати, получается $\gamma = x/L$), получим уравнение, связывающее x и y:

$$y = x(L-x)\frac{mg}{kL^2}.$$

Это — уравнение параболы.

Д.Григорьев

Ф1449. *На гладком горизонтальном столе лежит тонкий обруч радиусом R и массой M, а маленькая шайба массой m лежит, касаясь его внутренней поверхности. Шайбе толчком придают скорость v_0 в касательном направлении. Как будет двигаться эта система? С какой силой шайба будет давить на обруч в процессе движения? Трения нет нигде.*

Система «обруч — шайба» движется по столу без воздействия внешних сил. Скорость центра масс системы равна

$$v = \frac{mv_0}{M+m}.$$

Относительно центра масс шайба движется по окружности радиусом

$$r = R\frac{M}{M+m}$$

со скоростью

$$u = v_0 - v = v_0\frac{M}{M+m}.$$

На обруч в процессе движения действует сила

$$F = \frac{mu^2}{r} = \frac{mM}{M+m}\frac{v_0^2}{R}.$$

Центр обруча также движется относительно центра масс по окружности, ее радиус равен

$$r_1 = R\frac{m}{M+m}.$$

К.Шохикиу

Ф1450. *Тонкий длинный стержень шарнирно закреплен нижним концом на горизонтальной поверхности. Отклонив стержень от положения равновесия, ему дали упасть. Время падения составило при этом T. Каким стало бы это время, если бы нижний конец мог свободно скользить по плоскости?*

Вначале рассмотрим случай стержня, нижний конец которого закреплен шарнирно. Пусть от начального угла α_0 стержень опустился до α. Изменение потенциальной энергии стержня при этом будет равно

$$\Delta E_p = mg\frac{l}{2}(\cos\alpha_0 - \cos\alpha),$$

где l — длина стержня. Изменение кинетической энергии в этом случае составит

$$\Delta E_k = E_k = \frac{1}{3}ml^2\frac{\omega^2}{2},$$

где ω — угловая скорость вращения.

Тогда

$$\omega(\alpha) = \sqrt{\frac{3g}{l}(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)}.$$

В случае свободного стержня его центр масс движется вертикально вниз и стержень в целом вращается. Его кинетическую энергию можно записать в виде

$$E_{k_1} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\omega_1^2.$$

Скорость v и угловая скорость ω_1 связаны между собой (скорость нижней точки стержня горизонтальна) соотношением

$$v = \omega_1 \frac{l}{2}\sin\alpha .$$

Тогда

$$E_{k_1} = \frac{1}{2}m\omega_1^2\frac{l^2}{4}\sin^2\alpha + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\omega_1^2 .$$

Для угла α можно записать выражение для угловой скорости:

$$\omega_1(\alpha) = \sqrt{\frac{3g}{l}(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)\frac{4}{1+3\sin^2\alpha}} .$$

Время падения стержня — это время его поворота от $\alpha = \alpha_0$ до $\alpha = 90°$, т.е. оно определяется законом изменения $\omega(\alpha)$.

При малых углах α_0 почти все время падения — это время набора угловой скорости, т.е. оно определяется начальной фазой движения (см., например, задачу Ф1420), поэтому

$$\frac{4}{1+3\sin^2\alpha} \approx \frac{4}{1+3\sin^2\alpha_0} ,$$

и

$$\frac{T_1}{T} = \frac{\omega}{\omega_1} \approx \sqrt{\frac{1+3\sin^2\alpha_0}{4}} .$$

С учетом малость α_0 получаем

$$T_1 \approx \frac{1}{2}T .$$

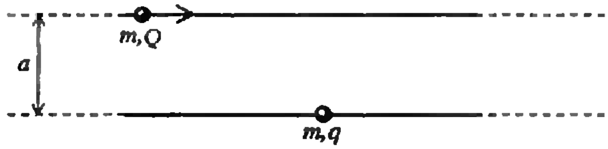
З.Рафаилов

Ф1451. *Обычный прибор для измерения давления разреженного газа (порядка 1 Па) представляет собой трубку диаметром 1 см, заполненную исследуемым газом. Вдоль оси трубки проходит проволока, нагреваемая протекающим по ней электрическим током, причем мощность источника поддерживается постоянной. Измеряя установившуюся температуру проволоки, находят — по заранее составленной таблице — давление газа. При попытке использования такого прибора для измерения давления неона оказалось, что имеется только таблица для гелия, атомы которого в 5 раз легче. Какие поправки нужно внести в таблицу?*

Легко оценить длину свободного пробега молекул для выбранных значений давления газа — она существенно больше радиуса трубки. Это означает, что «горячие» молекулы, отлетающие от нагретой проволоки, практически без помех долетят до стенок трубки, где и «сбросят» избыточную энергию. Оба газа — гелий и неон — одноатомные, значит, одна молекула в том и другом случаях переносит одну и ту же энергию (при заданной температуре нити). Поэтому вся разница будет в числе соударений — при той же концентрации молекулы неона летают в $\sqrt{5}$ раз медленнее, следовательно, заданному значению температуры нити соответствует концентрация молекул неона в $\sqrt{5} \approx 2{,}2$ раза большая и во столько же раз большее давление.

А.Андрианов

Ф1452. *На два длинных и гладких стержня, расположенных в горизонтальной плоскости на расстоянии a друг от друга, нанизаны две одинаковые бусинки массой m каждая, заряженные одноименными зарядами Q и q (см. рисунок). В начальный момент одна из бусинок покоится, а другую издали запускают в ее сторону с некоторой начальной скоростью. При какой величине этой скорости она обгонит первоначально покоящуюся бусинку? Трения нет.*



Бусинка (1) обгонит первоначально покоящуюся (2), если в тот момент, когда они поравняются, скорость бусинки 1 окажется хотя бы немного больше скорости бусинки 2. Для нахождения минимальной скорости запишем уравнения закона сохранения импульса:

$$mv_0 = mv_1 + mv_2$$

и закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 a} .$$

Условие «обхода» имеет вид

$$v_1 \ge v_2 .$$

Отсюда получаем

$$v_0 \ge \sqrt{\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 ma}} .$$

О.Шведов

Ф1453. *В однородную жидкость с большим удельным сопротивлением погружены достаточно глубоко два одинаковых проводящих шара. Сопротивление, измеренное между шарами, оказалось равным R. Каким станет это сопротивление, если один из шаров заменить шаром вдвое меньшего радиуса? Жидкость смачивает шары.*

Рассмотрим сначала вспомогательную задачу: в проводящую жидкость глубоко погружен один шар радиусом r, а второй «электрод» — очень большая концентрическая сфера — окружает этот шар, и нужно найти сопротивление жидкости, помещенной между двумя сферическими поверхностями. Пусть полный ток, отбираемый системой от источника, составляет I. Найдем необходимое напряжение источника.

Допустим, что тонкий сферический слой имеет радиусы x и $x + dx$. Тогда разность потенциалов на этом слое равна

$$dU = I\rho\, dx/4\pi x^2 ,$$

где ρ — удельное сопротивление жидкости. Интегрируя в пределах от r до бесконечности (радиус внешней сферы), получим напряжение:

$$U = I\rho/(4\pi r) .$$

Тогда сопротивление составит

$$R^* = U/I = \rho/(4\pi r) .$$

Кстати, ответ этот можно получить и без интегрирования — при расчете емкости уединенной сферы проводятся практически те же вычисления, а ответ там известен. Видно, что сопротивление определяется околошаровым слоем — именно там самые большие плотности тока, а значит, и вклад в разность потенциалов наибольший. Ясно, что для исходного случая — два глубоко погруженных в жидкость шара — полное сопротивление равно сумме сопротивлений жидкости около шаров:

$$R = R^* + R^* = 2R^*.$$

Тогда для шаров разных радиусов

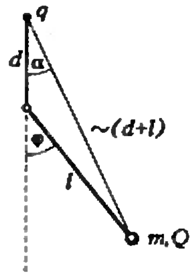
$$R_{общ} = R^* + 2R^* = 1{,}5R.$$

Заметим, что для решения этой задачи не обязательно находить величину R^* — вполне достаточно из соображений размерности получить $R^* \sim 1/r$.

В.Петерсон

Ф1454. *Маятник состоит из жесткого невесомого стержня длиной l и закрепленного на его конце груза массой m. На груз нанесен электрический заряд Q. Заряд q противоположного знака укреплен над точкой подвеса на расстоянии d от нее. Чему равен период малых колебаний маятника? При какой величине заряда груза возможны такие колебания?*

Отклоним маятник на малый угол φ (см. рисунок) В касательном направлении кроме проекции силы тяжести



действует и проекция электрической силы. Она вычитается из механической — заряды притягиваются. Для расчета сил учтем малость углов φ и α и расстояние между зарядами по-прежнему положим равным $d+l$. Тогда в касательном направлении возвращающая сила равна

$$mg\sin\varphi - kQq\sin\alpha/(d+l)^2.$$

Из теоремы синусов найдем связь между углами:

$$d\sin\alpha = l\sin(\varphi - \alpha).$$

Для малых углов заменим синусы углами и получим окончательное выражение для возвращающей силы:

$$F = mg\varphi\left(1 - klQq/mg(d+l)^3\right).$$

Видно, что при положительном знаке выражения в скобках получается возвращающая сила, пропорциональная отклонению, и возможны малые колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{l/g^*} = 2\pi\sqrt{l/g\left(1 - lQq/4\pi\varepsilon_0 m(d+l)^3\right)}.$$

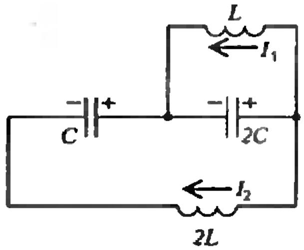
Если же величина в скобках отрицательна, то требуемые колебания около нижнего положения маятника невозможны. Это соответствует величине заряда груза

$$Q > \frac{4\pi\varepsilon_0 m(d+l)^3}{lq}.$$

О.Шведов

Ф1455. *Конденсаторы, емкости которых C и $2C$, заряжены каждый до напряжения U_0 и соединены последовательно «минусом» к «плюсу». К ним одновременно подключают две катушки: катушку индуктивностью L к конденсатору большей емкости, а катушку индуктивностью $2L$ к разноименным концам батареи конденсаторов. Найдите максимальный ток каждой из катушек. Через какое время после включения ток первой катушки станет максимальным?*

Нарастание тока через катушку L определяется напряжением конденсатора $2C$ (см. рисунок):



$$LI_1' = -\frac{q_2}{2C}.$$

Аналогично, для катушки $2L$:

$$2LI_2' = -\left(\frac{q_1}{C} + \frac{q_2}{2C}\right).$$

Данные в задаче подобраны так, что эти токи нарастают после включения по одинаковым законам

$$I_1' = I_2' = -\frac{U_0}{LC}.$$

Но это еще не все. Конденсатор C перезаряжается током катушки $2L$, а конденсатор $2C$ — суммой токов обеих катушек. При $I_1 = I_2$ и $C_1 = 2C_2$ получается, что напряжения конденсаторов меняются одинаково. Значит, токи катушек все время будут одинаковыми (а не только в течение малого отрезка времени после включения), одинаковыми будут и напряжения конденсаторов.

Максимальный ток I_m (любой катушки) определим из закона сохранения энергии:

$$\frac{CU_0^2}{2} + \frac{2CU_0^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} + \frac{2LI_m^2}{2},\ I_m = U_0\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Чуть сложнее найти время нарастания тока катушки. Для катушки $2L$ (токи катушек одинаковы!) можно записать

$$q_C' = -I,\ 2LI' = u_1 + u_2 = 2u_1 = \frac{2q_C}{C}.$$

Мы получили уравнение

$$-I' + \frac{1}{LC}q_C = 0,\ \text{или}\ q_C'' + \frac{1}{LC}q_C = 0,$$

совершенно такое же, как для простого контура L, C. Значит, время нарастания тока равно четверти периода колебаний:

$$\tau = \frac{1}{4}T = \frac{\pi}{2}\sqrt{LC}.$$

А.Зильберман

Ф1456. *Три маленьких громкоговорителя расположены в свободном пространстве на одной линии, расстояние между соседними составляет 0,4 м. На большом расстоянии от них, под углом 60° к перпендикуляру к линии находится чувствительный микрофон. Громкоговорители подключены к генератору, частоту которого можно изменять. При какой частоте этого генератора микрофон не будет регистрировать звук? Скорость звука составляет 330 м/с.*

По отношению к сигналу от среднего громкоговорителя один из крайних дает опережение по фазе, а другой — отставание. Этот временной сдвиг определяется разностью хода $\Delta = l\sin\alpha$ (см. рисунок). Запишем условие компенсации сигналов:

$$A\cos\omega t + A\cos\omega\left(t-\frac{\Delta}{v}\right)+A\cos\omega\left(t+\frac{\Delta}{v}\right)=0,$$

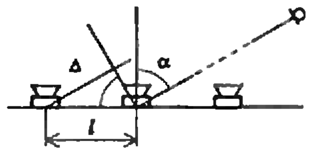
или

$$A\cos\omega t\cdot\left(1+2\cos\frac{\omega\Delta}{v}\right)=0.$$

Отсюда сразу определяем

$$\cos\frac{\omega\Delta}{v}=-\frac{1}{2},\quad \omega=\frac{v}{l\sin\alpha}\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right).$$

Обычно задают не круговую частоту ω, а $\nu=\omega/(2\pi)$.



Тогда получаем

$$\nu_n=\frac{v}{l\sin\alpha}\left(n+\frac{1}{3}\right),\ \text{где } n=0,\,1,\,2\ldots$$

Наименьшая из подходящих частот равна ν_0=318 Гц, следующая ν_1=1270 Гц и т.д.

А.Склянкин

Ф1457. *Оцените, какой мощности лампочку нужно ввернуть в рефлектор настольной лампы, чтобы она («фотонная ракета») взлетела. Масса лампы 1 кг.*

При мощности P за время τ излучается $n=P\tau/\varepsilon$ фотонов (ε — энергия одного фотона). Каждый из них передает лампе импульс $p=\varepsilon/c$, где c — скорость света. Условие взлета «ракеты» можно записать в виде

$$mg\tau=\frac{P\tau}{\varepsilon}\frac{\varepsilon}{c},$$

откуда для оценки мощности лампочки получаем

$$P=mgc=3\cdot10^9\ \text{Вт}.$$

Д.Григорьев

Олимпиада ФПФЭ

Факультет проблем физики и энергетики Московского физико-технического института проводит олимпиаду по физике, в которой попробовать свои силы могут все желающие.

Всем участникам будут высланы их результаты и решения задач. Хорошие работы будут отмечены дипломами, а победители смогут принять участие в очном туре конкурса АБИТУРИЕНТ-95.

Решение следует посылать в тонкой школьной тетради по адресу:

141700 Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9, ЗФТШ при МФТИ, ОЛИМПИАДА ФПФЭ – 94/95

На ее титульном листе укажите полностью фамилию, имя, отчество, домашний адрес, место учебы, класс. В тетрадь вложите конверт с Вашим адресом. Работу необходимо отослать *до 31 января 1995 года* (включительно).

Задачи

1. Средняя скорость автомобиля на первой трети пути составила v_1= 15 км/ч, а оставшуюся часть он проехал со средней скоростью v_2= 60 км/ч. Найдите среднюю скорость на всем пути.

2. Орудие, расположенное на высоте H над поверхностью земли, стреляет так, что дальность полета снарядов максимальна. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите угол между начальной и конечной скоростями снаряда.

3. Система, изображенная на рисунке 1, состоит из невесомой пружины жесткостью k, груза массой m и легкого блока. Найдите максимальную амплитуду, при которой колебания еще гармонические.

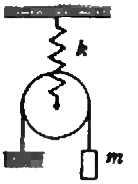


Рис. 1

4. К легкому, шарнирно закрепленному в точке O стержню OC подвешены на невесомых нерастяжимых нитях грузы, как показано на рисунке 2 ($OA=AB=BC$). Найдите ускорения грузов сразу после пережигания нити BD, удерживавшей систему в равновесии.

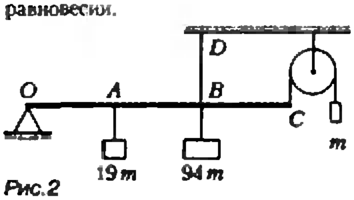


Рис. 2

5. Над некоторым веществом сначала провели процесс $1-2$ (см. рис. 3), а затем, вернув его в исходное состояние, — процесс $1-3$, причем $p_2>p_3$. В каком из этих двух процессов было подведено большее количество теплоты, если оказалось, что точки 2 и 3 лежат на одной адиабате?

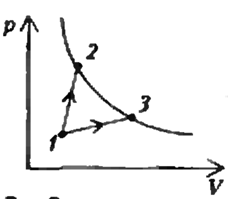


Рис. 3

6. Найдите теплоемкость при постоянном объеме смеси гелия и кислорода, если ее плотность при температуре 20 °С и давлении 10^5 Па оказалась равна 451 г/м^3.

7. Вблизи проводящей заземленной сферы радиусом R находится заряженное кольцо (заряд Q, радиус r), ось которого проходит через центр сферы. Расстояние между их центрами L. Найдите заряд сферы.

8. Найдите показания амперметров в схеме на рисунке 4.

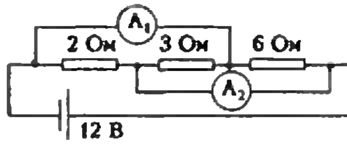


Рис. 4

9. Сколько тепла выделится в сопротивлении R после замыкания ключа (рис. 5), если C, R и $\mathcal{E}$ заданы? Внутреннее сопротивление батарейки и сопротивление проводников считать малыми.

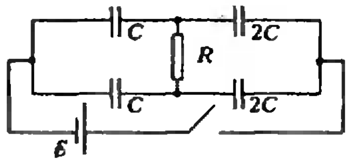


Рис. 5

10. Электрон (заряд e, масса m) движется в однородном магнитном поле $\vec{B}$ в среде, в которой на него действует сила сопротивления $\vec{F}=-\alpha\vec{v}$, где α — известный коэффициент. В начальный момент скорость электрона равна v_0 и перпендикулярна $\vec{B}$. Найдите путь и перемещение электрона.

Публикацию подготовили С.Гордюнин, Д.Александров

Год Улугбека

После распада Римской империи и распространения в Европе христианства наука там заглохла и уступила место суевериям. Но как раз в это время науки получили развитие на востоке, в арабском мире. Особенно высоко почитались математика и астрономия. В VIII—X веках арабы перевели почти все работы греческих астрономов, в том числе и знаменитый «Альмагест» Птолемея, который только благодаря этому дошел до нас. Арабы построили крупные обсерватории и прославились как искусные наблюдатели. Недаром большинство звезд носит арабские имена: Альтаир, Альдебаран, Алькор ... Яркой фигурой среди арабских ученых был Улугбек.

Мухаммед Тарагай, прозванный Улугбеком — т.е. «великим правителем», был внуком знаменитого полководца Тимура. Улугбек родился 22 марта 1394 года. В 1409 году он был объявлен правителем Самарканда, а в 1447 году, после смерти своего отца, стал главой могущественной династии Тимуридов и правителем всей обширной империи Тимуров.

Улугбек был одним из немногочисленных самодержавных властителей, сочетавших государственную деятельность с плодотворными научными занятиями. Пожалуй, еще лишь один ученый-правитель принес такую же пользу науке: это король Кастилии Альфонс X Мудрый (1223 — 1284), собравший в Толедо большую группу арабских, еврейских и кастильских астрономов, которые составили точные таблицы движения планет, столь необходимые для морских и сухопутных путешествий. Именно потребность в точной навигации привела к расцвету астрономии в Европе в эпоху великих географических открытий.

Однако, бытовало мнение, что арабская астрономия в основном обслуживала потребности мусульманской религии и астрологии. В том, что это далеко не так, убеждает отрывок из книги великого среднеазиатского ученого Бируни, жившего за 400 лет до Улугбека: «Я встретил в городе Рай < один из древнейших городов Ближнего востока, расположен близ Тегерана — В.С. > одного человека, который считался знаменитым астрономом. Этот астроном изучал положение звезд, лунные фазы и собирался в результате этого изучения получить возможность предсказывать всевозможные движения воздуха. Я возражал ему, сказав, что истина не соответствует его утверждениям. В действительности изменение лунных фаз зависит от того, что Солнце по-разному освещает Луну по мере ее передвижения.» Как видим, спор двух астрономов не выходит за рамки естественно-научной тематики.

Уже во времена Бируни арабские астрономы создали крупные угломерные инструменты для наблюдения Солнца, Луны и ярких планет. Они могли довольно точно предвычислять положение светил на небе, пользуясь созданной почти за тысячу лет до этого теорией Птолемея. Чем же, спустя несколько столетий, прославил себя Улугбек?

С детства Улугбек увлекался науками и литературой. Большую часть времени он проводил в богатой библиотеке, собранной его отцом Шахрухом. Повзрослев, он привлек в Самарканд группу ученых, с помощью которых в 1425 году построил величайшую в мире обсерваторию. Ее крупнейший инструмент — секстант для измерения высоты кульминаций Солнца и Луны — имел радиус 40 м. Это огромное каменное сооружение уходило под землю на 11 м и еще больше возвышалось над землей. Вокруг него была круглая наблюдательная башня диаметром 46 м, на верхней площадке которой располагались инструменты для измерения положений звезд.

Используя свои уникальные инструменты, Улугбек достиг небывалой точности астрономических измерений. Одним из первых, после древнегреческого астронома Гиппарха, он отважился составить фундаментальный звездный каталог. Ценность таких каталогов для астрономии очень велика: они помогают проследить за движением звезд и вращением Земли на протяжении многих столетий.

Но научная и просветительская деятельность Улугбека была не по душе его окружению. 27 октября 1449 года старший сын Улугбека, подстрекаемый духовенством, убил отца и захватил власть. Обсерватория Улугбека была разрушена, но его ученикам удалось спасти рукописи. Труд Улугбека «Новые астрономические таблицы», содержащий изложение теоретических основ астрономии и каталог точнейших положений 1018 звезд, был опубликован в Оксфорде в 1665 году.

В.Сурдин

Графы

СЛОВО «граф» в математике означает картинку, где нарисовано несколько точек, некоторые из которых соединены линиями. С дворянским титулом «граф» их связывает общее происхождение от латинского слова «графио» — пишу. Типичными графами являются

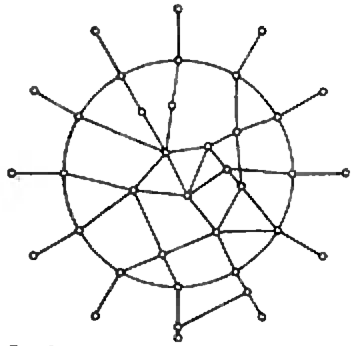


Рис.1

схемы авиалиний, которые часто вывешивается в аэропортах, схемы метро, а на географических картах — изображения железных дорог (рис. 1). Выбранные точки графа называются его вершинами, а соединяющие их линии — ребрами.

Использует графы и дворянство. На рисунке 2 приведена

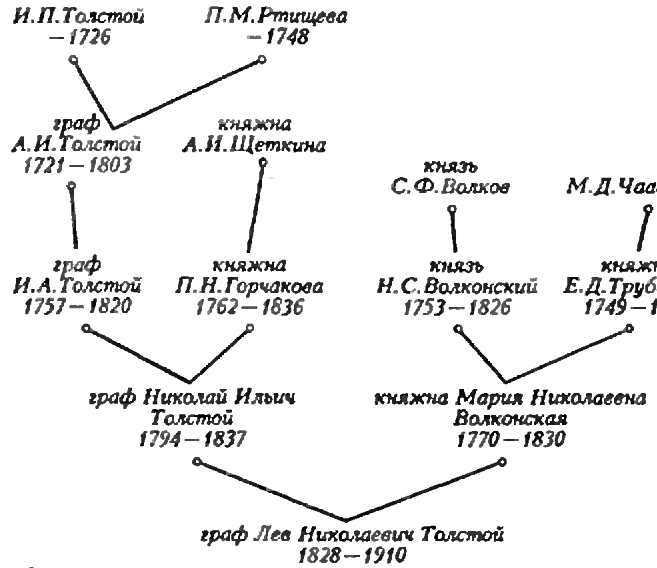


Рис.2

часть генеалогического дерева знаменитого дворянского рода. Здесь его вершины — члены этого рода, а связывающие их отрезки — отношения родственности, ведущие от родителей к детям. Слово «дерево» в теории графов означает граф, в котором нет циклов, т.е. в котором нельзя из некоторой вершины пройти по нескольким различным ребрам и вернуться в ту же вершину. Генеалогическое дерево будет деревом и в смысле теории графов, если в этом семействе не было браков между родственниками.

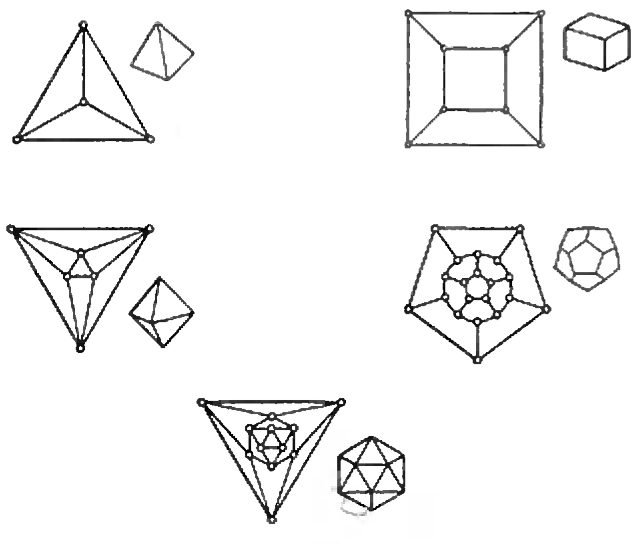


Рис.3

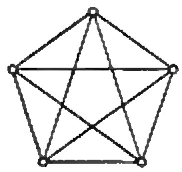


Рис.4

Нетрудно понять, что граф-дерево всегда можно изобразить так, чтобы его ребра не пересекались. Тем же свойством обладают и графы, образованные вершинами и ребрами выпуклых многогранников. На рисунке 3

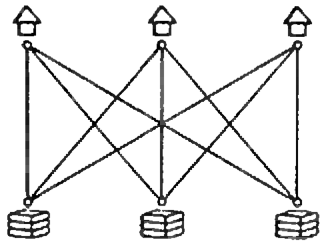


Рис.5

приведены графы, соответствующие пяти правильным многогранникам. В графе, соответствующем тетраэдру, все четыре вершины попарно соединены ребрами. Рассмотрим граф с пятью вершинами, попарно соединенными друг с другом (рис. 4). Здесь ребра графа пересекаются. Попробуйте его изобразить

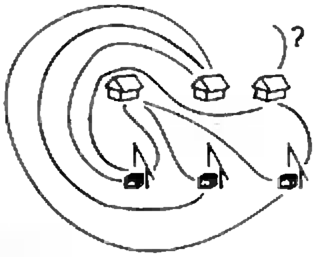


Рис.6

так, чтобы пересечений не было. К сожалению, это вам не удастся, как невозможно выполнить намерения трех человек, описанных Льюисом Кэрроллом.

Они жили в трех домиках, неподалеку от них находились три колодца: один с водой, другой с маслом, а третий с повидлом, и ходили к ним по тропинкам, изображенным на рисунке 5. Однажды эти люди перессорились и решили провести тропинки от своих домов к колодцам так, чтобы эти тропинки не пересекались. На рисунке 6 изображена очередная попытка проложить такие тропинки.

Графы, изображенные на рисунках 4 и 5, как оказалось, играют решающую роль при определении для каждого графа — является ли он плоским, т.е. может ли он быть изображен на плоскости без пересечения его ребер. Польский математик Г. Куратовский и академик Л.С. Понтрягин независимо доказали, что если граф не является плоским, то в нем «сидит» хотя бы один из графов, изображенных на рисунках 4 и 5, т.е. «полный пятивершинник» или граф «домики-колодцы».

Рис.7

Графами являются блок-схемы программ для ЭВМ, сетевые графики строительства, где вершины — события, означающие окончания работ на некотором участке, а ребра, связывающие эти вершины, — работы, которые возможно начать по совершении одного события и необходимо выполнить для совершения следующего (рис. 7).

Удобно пользоваться графами для решения головоломок. На рисунке 8 изображен граф, соответствующий решению старинной головоломки о крестьянине, волке, козе и мешке с капустой, которых нужно перевезти через реку, но без крестьянина волк может задрать козу, а коза может съесть капусту. Здесь у вершин графа нарисованы те персонажи, которые на соответствующем этапе находятся на первом берегу реки.

Теория графов является частью как топологии, так и комбинаторики. То, что это топологическая теория, следует из независимости свойств графа от расположения вершин и вида соединяющих их линий. А удобство формулировок комбинаторных задач в терминах графов

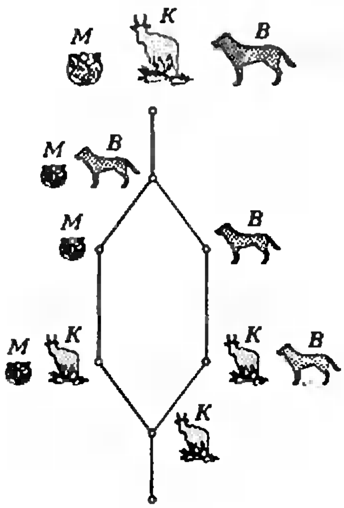


Рис.8

привела к тому, что теория графов стала одним из мощнейших аппаратов комбинаторики.

А. Савин

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА

Площади в задачах

В предлагаемую подборку входят не только задачи, в условии которых в том или ином виде фигурирует понятие площади, но и задачи, которые могут быть решены «методом площадей» (хотя, конечно, каждая из таких задач может быть решена и иным путем).

1. Рассмотрим две прямые, пересекающиеся в точке M. Возьмем на одной из них точки A и A_1, а на другой — точки B и B_1. Докажите, что отношение площадей треугольников MAB и MA_1B_1 равно

$$\frac{MA \cdot MB}{MA_1 \cdot MB_1}.$$

2. Пусть диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Докажите, что

$$\frac{AE}{EC} = \frac{S_{DAB}}{S_{DCB}}.$$

3. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Докажите, что

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AD \cdot AB}{CD \cdot CB}.$$

4. На сторонах BC и CA треугольника ABC взяты точки K и M так, что

$$\frac{BK}{KC} = \frac{1}{2}, \; \frac{CM}{MA} = \frac{3}{4}.$$

В каком отношении прямая AK делит отрезок BM?

5. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки P, K и M так, что $AP:PB = 1:2$, $BK:KC = 2:3$, $CM:MA = 3:4$. Обозначим через D точку пересечения AK и PM. Найдите отношения

$$\frac{AD}{DK}, \; \frac{PD}{DM}.$$

6. Пусть P, K, M и N — середины соответственно сторон AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$. Какую часть площади $ABCD$ составляет площадь четырехугольника, ограниченного прямыми AK, BM, CN и DP?

7. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки K, L и M соответственно так, что

$$\frac{AK}{AB} = \frac{BL}{BC} = \frac{CM}{CA} = \frac{1}{3}.$$

Докажите, что площадь треугольника, ограниченного прямыми AL, BM и CK, составляет $\frac{1}{7}$ часть площади треугольника ABC.

8. В треугольнике ABC известно $CA = b$, $CB = a$, $\angle ACB = \alpha + \beta$. На стороне AB взята точка D так, что $\angle ACD = \alpha$. Найдите CD.

9. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. а) Докажите, что $S_{BEA} \cdot S_{CED} = S_{BEC} \cdot S_{DEA}$. б) Найдите площадь $ABCD$, если площади треугольников ABD, ACD и AED равны соответственно p, q и r.

10. Докажите, что прямая, делящая пополам площадь и периметр описанного около окружности многоугольника, проходит через центр вписанной в этот многоугольник окружности.

11. На плоскости отмечены точки A, B, C, D и M_0. Найдите геометрическое место точек M плоскости, для которых сумма площадей треугольников AMB и CMD постоянна и равна сумме площадей треугольников AM_0B и CM_0D.

12. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей описанного четырехугольника, содержит центр вписанной в него окружности.

13. Точки K и M — середины сторон AD и BC соответственно выпуклого четырехугольника $ABCD$. Прямые BK, CK, AM и BM делят четырехугольник на 7 частей: один четырехугольник и шесть треугольников. Докажите, что площадь образовавшегося четырехугольника равна сумме площадей двух треугольников, прилежащих к AB и CD.

14. В трапеции $ABCD$ через концы меньшего основания BC проведены параллельные прямые, пересекающие основание AD. Эти две прямые и диагонали AC и BD делят трапецию на части. Докажите, что площадь образовавшегося пятиугольника равна сумме площадей трех треугольников, прилежащих к сторонам AB, BC и CD.

15. Площадь прямоугольного треугольника равна S. Из середины медианы, проведенной к его гипотенузе, опущены перпендикуляры на стороны треугольника. Найдите площадь треугольника с вершинами в основаниях этих перпендикуляров.

16. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 3 и 4, а радиус вписанной окружности равен 1.

17. На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опущена высота. На высоте как на диаметре построена окружность. К этой окружности из вершин A и B проведены касательные, касающиеся ее в точках M и N и пересекающиеся при продолжении в точке D. Найдите DM и DN, если $AB = c$.

18. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Рассмотрим фигуру, ограниченную полуокружностями с диаметрами AB, BC и AC, расположенными по одну сторону от прямой. Найдите радиус окружности, касающейся трех построенных полуокружностей, если известно, что расстояние от центра этой окружности до прямой AC равно d.

19. Рассмотрим выпуклый многоугольник с равными сторонами. Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри этого многоугольника до его сторон (до прямых, на которых лежат стороны) есть величина постоянная.

20. Через данную точку внутри данного угла провести прямую, отсекающую от этого угла треугольник наименьшей площади.

21. Дан угол с вершиной A. Найдите на его сторонах точки B и D и точку C внутри него так, чтобы $BC + CD = a$, где a — данный отрезок, и площадь четырехугольника $ABCD$ была бы наибольшей.

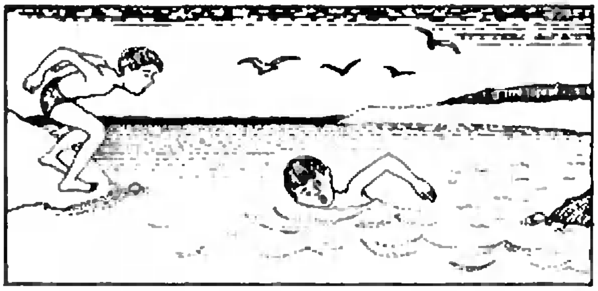
22. Дан угол с вершиной A, внутри которого расположена окружность. Пусть B и C — две точки на сторонах угла такие, что треугольник ABC содержит окружность. Докажите, что площадь треугольника ABC будет наименьшей в том случае, если BC касается окружности, причем точка касания — середина BC.

23. На плоскости расположены две окружности радиусами 1. Расстояние между их центрами равно 3,6. Найдите наименьшее значение площади треугольника, содержащего данные окружности.

И. Шарыгин

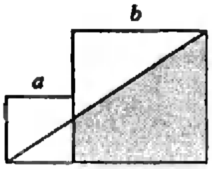
Задачи

1. Толя и Сережа прыгнули с берега в воду и поплыли к острову. Сергей проплыл 40 метров, когда Толя выбирался на берег острова. Правда, Толя тут же поплыл обратно и встретил Сергея в тот момент, когда он проплыл еще 8 метров. Сколько метров от берега до острова? (*С. Манвелов*)



2. Решите арифметический ребус КР***УГ = КРУГ² — замените буквы цифрами так, чтобы равенство оказалось верным. Одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, разным — разные. (*П. Филевич*)

3. Два квадрата со сторонами a и b расположены так, как показано на рисунке. Найдите отношение площади



заштрихованного четырехугольника, образованного при соединении двух вершин этих квадратов, к площади большего квадрата. (*А. Савин*)

4. Трое братьев вскапывали огород. После работы их встретил отец.

— Много ли вскопал? — спросил он у старшего брата.

— Один из нас вскопал вдвое больше, чем остальные вместе.

— Не ты ли так поусердствовал? — спросил отец у среднего брата.

— Нет, не я. Вот если бы я вскопал столько же, сколько мои братья вместе, то огород был бы уже вскопан.

— А много ли осталось? — спросил отец у младшего брата.

— Ровно столько, сколько вскопал один из моих братьев, — ответил тот.

Какую часть огорода вскопал каждый из братьев? (*М. Стрельников*)

5. На каждом из квадратиков «кубика Рубика» сидит по муравью. В некоторый момент все муравьи поползли — каждый в один из квадратиков, соседних (по стороне) с тем, в котором он находился до этого, при этом никакие два муравья не поменялись местами. Могло ли случится, что в каждом квадратике снова оказалось по одному муравью? (*А. Грибалко*)

Конкурс «Математика 6—8»

Решения задач из этого номера высылайте не позднее 15 февраля 1995 года по адресу: 103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, "Квант" (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, класс.

6. Найдите все натуральные числа, которые нельзя представить в виде суммы нескольких (не менее двух) последовательных натуральных чисел.

И. Акулич

7. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ таков, что точка пересечения биссектрис углов DAC и DBC лежит на стороне CD. Докажите, что точка пересечения биссектрис углов ADB и ACB лежит на стороне AB.

С. Токарев

8. *Палиндромом называется слово, которое не меняется, если его прочесть в противоположном направлении*, например, КАЗАК, ШАЛАШ. Пусть задано слово, состоящее из 1995 букв, причем в нем присутствуют только буквы А и Б. Докажите, что его можно разбить на палиндромы так, что их число будет не больше 800.

И. Акулич

9. Укажите на шахматной доске 8×8 маршрут короля, при котором он обходит все клетки по одному разу, чередуя диагональные и недиагональные ходы.

Возможен ли такой маршрут на доске 9×9?

С. Токарев

10. Имеется 6 одинаковых с виду монет, некоторые из них фальшивые — *более легкие*. Как с помощью *не более* чем четырех взвешиваний на чашечных весах без гирь найти все фальшивые монеты?

А. Савин


К
Г
Б
Я
Д. К.

Как бедный Кощей пешком ходил

В.МАХРОВ, А.МАХРОВА

Больше, чем своего деда, старого лесника, Маша любила только его сказки. Их действие всегда происходило в двух шагах от сторожки — правда, обычно в старину. Вот и сегодня, возясь у печи, дед рассказывал удивительную историю, которая случилась в этих местах.

— Давным-давно в нашем лесу проходила столбовая дорога до самого Киева, широкая, удобная. Многие годы ездили по ней богатыри в кольчугах и купцы в бархатных кафтанах. Да поселилась у дороги всякая нечисть, стала баловать: то порчу наведет, то в лесу закружит, с пути собьет, то напугает до полусмерти. Вот и перестали люди сюда забираться, все больше в объезд. А верстовые столбы долго еще стояли, иные и теперь целы.

Скоро прознал народ, что собрались на нашем тракте все знаменитые лиходеи: и Баба-Яга, и Кощей, и Змей Горыныч, и кот Баюн, — совсем не стало человечьего духа в заповедном лесу. А нечисть осталась — понравились, видно, наши места. Жилье свое они поставили прямо на дороге, у верстовых столбов. Это только Леший любит через бурелом лазать, а прочим все ж приятнее гладкий путь. Вот обустроились они, стали на досуге друг к другу в гости ходить. Баба-Яга все больше на ступе разъезжала, иногда и кота прихватывала, — он маленький, не мешает, Змей Горыныч сам с крыльями, а вот Кощею приходилось пешком топать. Старик-то хоть и Бессмертный был, но не семижильный, да и годы давали о себе знать, — бывало, так умотается, уходившись, что и свет не мил.

Вот прослышал однажды Кощей, что Яга вроде бы Ивашку изловила, поковылял к ней — напроситься на жаркое. Сначала, правда, к коту завернул.

— Пойдем, усатый, навестим бабку.

— М-м... неохота... — отозвался кот с печи.

— Вставай, вставай, сороки болтают, что у нее сегодня ужин хорош.

— Не... не пойду... Только что мышей наловил, объелся — сил нет...

Плюнул Бессмертный и пошлепал к Яге один. Пришел — а в избушке на курьих ножках только седой ворон сидит, каркает: «Прроморргал карргу, старрый, к котярре отпрравилась». Пришлось возвращаться к Баюну. Но и там Яги не оказалось.

— Только что залетала, — лениво промурлыкал кот. — Хотела Горыныча навестить, сходи, — может, она там.

Поплелся Кощей к змеевой пещере. Пришел — сидит Горыныч, сам с собой в карты играет. Две головы веселые — выигрывают, а третья горючими слезами обливается — не везет ей, хоть тресни! А старухи нет.

— Улетела Ягушка, — всхлипнула проигравшая голова, Агафон. — Домой двинулась, только к коту залетит — и домой.

В третий раз добрел Кощей до котовьей избы — а там никого. «И лентяя усатого прихватила, — подумал старик, направляясь снова к избушке на курьих ножках. — Где уж мне угнаться за проклятой ступой!»

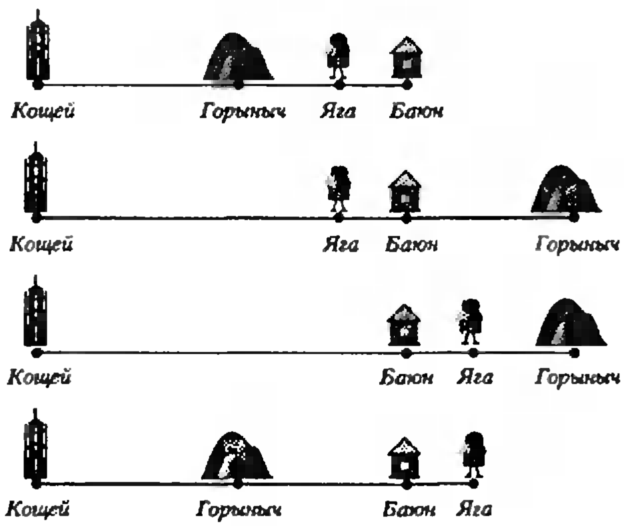


Рис. 1

Наконец, кляня бабку на чем свет стоит, ввалился Кощей к Бабе-Яге.

— Гоняешь меня, как мальца! — напустился он на Ягу, едва отдышавшись. — Весь день за тобой бегаю, двадцать семь верст отмахал!

— Да что ты, белены объелся? Откуда двадцать семь? — опешила старуха.

— Сама посуди, путь от моего терема до избы Баюна, да от Баюна до твоего дома три раза прошлепал, да два раза от избы Баюна до логова Горыныча — сколько будет?

— Не серчай, старый, — примирительно прошамкала Яга. — Отдохни-ка с дороги, отведай пареных галючек с подливочкой, вкусны, чай!

— А Ивашка? — проворчал Бессмертный, немного смягчившись.

— Опять удрал, окаянный, — вздохнула бабка.

В другой раз сговорились нечистые проведать Горыныча — у третьей головы, Егора, именины были. Накануне Кощей заночевал у кота, а утром отправился за Ягой. По случаю праздника бабка могла прихорашиваться весь день, и ее нужно было поторопить. Баюн, разумеется, даже глаз не открыл, когда Кощей позвал его с собой. «Еще чего — топать туда-сюда. Лучше пусть бабка залетит, в ступу меня подсадит.»

С трудом оттащив Ягу от Зеркальца (которое льстиво приговаривало: «Ах, бабулечка, красотулечка, ты ж на свете всех милее...» — и, конечно, бессовестно врало), Кощей усадил ее в ступу. Вдвоем дорога веселее, они и не заметили, как добрались до кота. Баюн вышел в парадном банте, тяжело плюхнулся в ступу и глухо оттуда скомандовал: «Поехали!»

На пороге пещеры кот вдруг хлопнул себя лапой по лбу и шепотом взвыл: «Подарок! Подарок забыл!» И правда — забыл! А какой подарок — целый штоф живой воды! Яга со злости вытянула Баюна по спине метлой, да так, что переломила палку. Без метлы, как известно, ступа неуправляема, послать бабку быстренько слетать за подарком теперь никак бы не удалось. Пришлось Кощею рысью бежать к Баюну и обратно.

Умаявшийся Кощей, чуть сев за именинный стол, пожаловался:

— Ох, ноженьки мои, сколько верст отмахали!

— Сколько? — спросил Егор.

Быстро прикинув в уме, Бессмертный ответил:

— Девятнадцать. Сперва от кота до Яги, потом от Яги до кота, да от котовьей избы до твоей, трехголовый, пещеры, три раза.

Замотал Горыныч головами, слишком для него трудно было сообразить, не ошибся ли Кощей. Но старуха подтвердила:

— Точно, так и выходит.

— В скольких же верстах мы друг от друга живем? — жалобно спросил Степан, самая тупая голова. Долго он думал, да так ничего и не придумал...

— Дедуля, а как их дома стояли? — спросила Маша.

— А это ты сама сообрази, — ответил лесник. — Большая уже, да и поумнее Змея Горыныча будешь... Давай-ка сделаем так: ложись спать, утро вечера мудренее, утречком посчитаешь, что к чему. А я тебе завтра расскажу, что дальше было.

На другой день, подметя сторожку, сварив кашу и накормив поросенка, Маша принялась за задачу.

— Пусть от терема Кощея до избушки кота x верст, от кота до пещеры Горыныча y верст, от Баюна до избы на курьих ногах z верст, — рассуждала она. — В первый раз Кощей прошел x верст, да $3z$, да $2y$...

Через некоторое время у нее получилась система уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 27, \\ 3y + 2z = 19, \end{cases}$$

откуда выходило, что

$$y = (2x + 3)/5,$$
$$z = 8 + 3(1 - x)/5.$$

Увы, у системы оказалось три решения в натуральных числах:

$$x = 11,\ y = 5,\ z = 2;$$
$$x = 6,\ y = 3,\ z = 5;$$
$$x = 1,\ y = 1,\ z = 8.$$

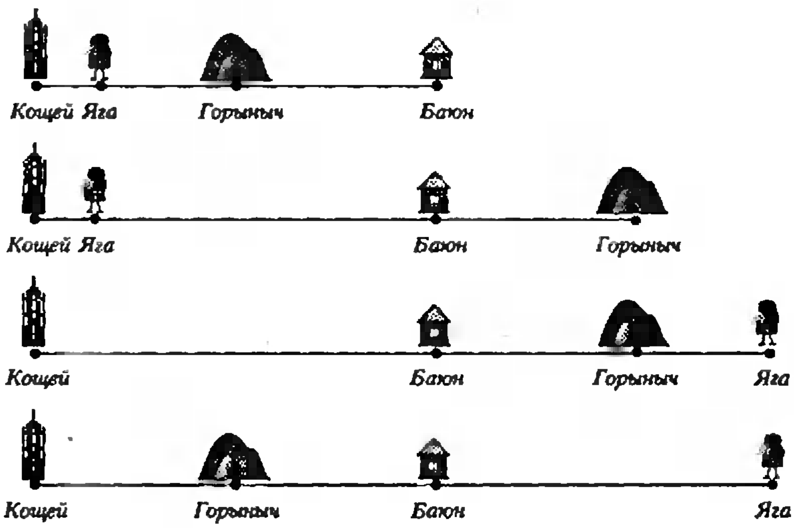


Рис.2

Первое из них давало четыре варианта расположения жилья (рис.1), второе — еще четыре (рис.2), и третье тоже (рис.3). И все разные!

— Немудрено, что Горыныч не смог решить эту задачу, — вздохнула Маша. — Я тоже не могу. Что-то дедуля напутал...

Вечером внучка пристала к старику, — ошибся ты, мол, нельзя понять, как стояли дома нечистой силы.

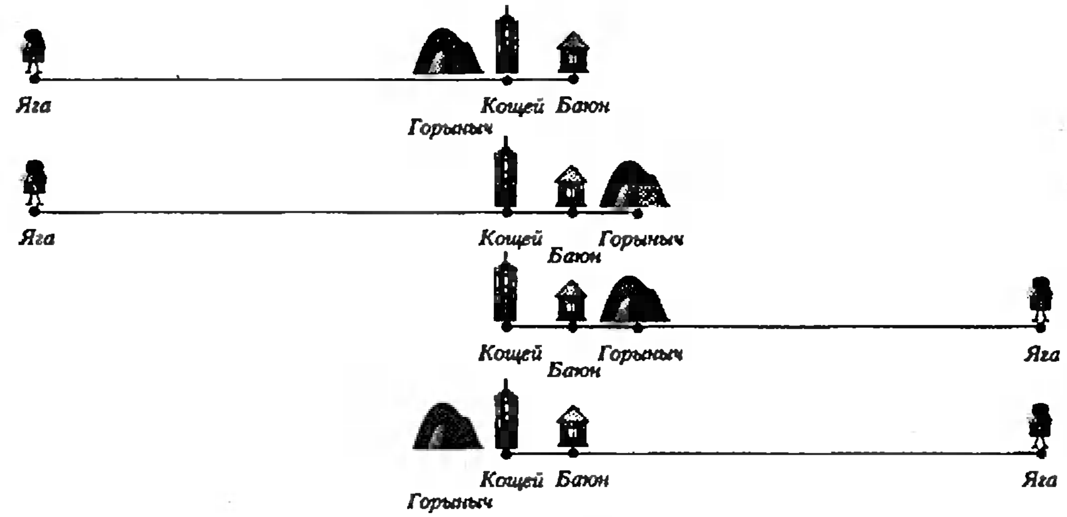


Рис.3

— Верно, милая, — согласился дед. — Сказку-то я не досказал, вот и не получается задачка... Ну, слушай дальше.

Долго ли, коротко ли, да завелся в лесу Соловей-Разбойник. Свил гнездо на Двенадцати Дубах. Свищет злодей по-соловьему, кричит по-звериному. Пожухла трава от того посвиста соловьего, покрика звериного, леса к земле клонятся. Хоть и крепки здоровьем были наши нечистые, да и у них головы заболели. Уж они и уговаривали Соловья, и стращали, а ему хоть бы хны — ничего и никого не боится. Мало того, Бабу-Ягу стал на лету подсекать, у Кощея меч-кладенец украл, Змею Горынычу шишки под четырьмя глазами набил, Баюна за хвост оттаскал, на цепь посадил и к дубу привязал: «Сказки мне рассказывать будешь!»

Видят нечистые — плохо дело. Послали Ягу на поклон к Илье Муромцу, просить подмоги. Прилетела старуха во село Карачарово, бухнулась богатырю в ноги.

— Замучил нас Разбойник, никакой на него управы нет, — причитает. — Уважь ты нас, Илюшенька, побори чудище поганое, а уж мы для тебя ничего не пожалеем.

— Ладно, — говорит Илья, — съезжу, погляжу на вашего буяна. А от вас ничего мне не надо, только уберитесь-ка вы с тракта подальше в лес, нечего людей пугать. Сами небось теперь понимаете, каково с лиходеями рядом жить... Только скажи, где мне того Соловья искать?

Принялась Баба-Яга объяснять:

— Если считать от моей избушки, так это не доезжая версты до Баюна. Или еще от Горыныча можно — от него до Баюна да еще версту в мою сторону...

— Откуда ближе-то?

— Все равно, что от меня, что от Змеюшки. Только от Кощея не езди — семь верст выйдет, да все лесом...

— Ох, мудрено говоришь, старая! — молвил Илья. — Да ничего, разберусь, найду бедокура...

И впрямь, нашел богатырь Соловья-Разбойника, победил его и привез в стольный град Киев самому Владимиру Красну Солнышку в подарок... Что дальше было, рассказывать не буду — это и в книжках прочесть можно.

— Правда, это я знаю, — сказала Маша. — Почему же в книжках не пишут, как Илья Разбойника нашел? И про Ягу с Кощеем в былине ни словечка...

— Сдержали они слово, убрались с дороги, перестали людей баламутить, вот и не попали в былину... А где Двенадцать Дубов росли, ты теперь знаешь.

Маша на минутку задумалась — и поняла, где стояли Двенадцать Дубов, и сколько верст было между домами нечистых. Похвалилась деду.

— Умница ты у меня, — лесник погладил внучку по голове. — Ну, поздно уж, иди спать. А утром в лес пойдем, покажу тебе древний дуб. Говорят, он последний из Двенадцати...

Литературная обработка
А.Котовой

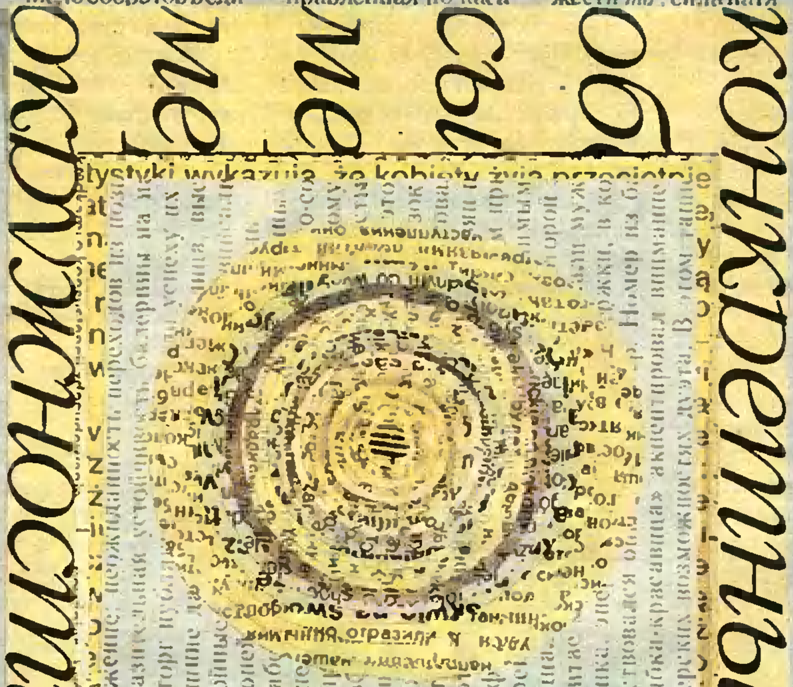
В этой статье на конкретных задачах обсуждаются вопросы динамики равномерного и неравномерного движения по окружности. Все разобранные задачи (кроме второй) и задачи из Упражнений составлены автором статьи и предлагались в разные годы на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт (МФТИ). Но сначала – немного теории.

Пусть тело (материальная точка) движется (вращается) по окружности. Угловой скоростью вращения ω называется предел отношения угла поворота Δφ радиуса, проходящего через тело, ко времени Δt поворота на этот угол при стремлении Δt к нулю: $\omega = \Delta\varphi/\Delta t$ при $\Delta t \to \infty$. Угол поворота принято измерять в радианах, поэтому угловая скорость в СИ измеряется в 1/с (или $с^{-1}$).

Модуль скорости V при движении по окружности называют линейной скоростью. Линейная и угловая скорости в любой момент времени связаны соотношением $V = \omega R$, где R – радиус окружности.

Движение по окружности называется равномерным, если линейная скорость, а значит, и угловая, остается постоянной, в противном случае движение называется неравномерным. Для равномерного движения по окружности вводятся также пе-

риод и частота вращения. Период T – это время одного оборота, частота ν – число оборотов в еди-



но, начинать решение конкретной задачи на вращение надо с изображения реальных сил, действующих на тело, а не с центростремительной силы.

При неравномерном движении по окружности вектор ускорения $\vec a$ не направлен к центру враще-

ния и его удобно разложить на две составляющие (рис. 1). Составляющая $\vec a_t$, направленная по каса-

щей угол α со стержнем. С каким периодом должна вращаться система, чтобы шарик не отрывался от диска?

Шарик движется равномерно по окружности радиусом $l\sin\alpha$ с угловой скоростью $2\pi/T$ и ускорением

$a = (2\pi/T)^2 l\sin\alpha$,

где T – период вращения. На шарик действуют сила тяжести $m\vec g$, сила натя-

натяжение нити в момент, когда она составляла угол $\alpha = 30°$ с горизонтом.

Здесь мы имеем дело с неравномерным движением по окружности. В искомый момент на шарик действуют сила тяжести $m\vec g$ и сила натяжения нити $\vec F_н$

(рис. 3). Эти две силы вызывают ускорение шарика $\vec a$, не направленное к центру вращения O. По второму закону Ньютона,

$\vec F_н + m\vec g = m\vec a$.

Обратите внимание, что вектор ускорения направлен так же, как и результирующая сил $\vec F_н$ и $m\vec g$. Запишем векторное равенство в проекциях на ось X, направленную вдоль нити:

$F_н - mg\cdot\sin\alpha = ma_n$.

Мы воспользовались тем, что при неравномерном движении по окружности проекция ускорения на ось, направленную вдоль радиуса к центру вращения, равна модулю нормального ускорения (об этом говорилось в начале статьи).

Пусть длина нити R, а скорость шарика в рассматриваемый момент V. Тогда

$a_n = V^2/R$.

По закону сохранения энергии полная энергия шарика в точках A и B одна и та же, то есть

$mgR\sin\alpha = mV^2/2$.

Из последних трех уравнений находим силу натяжения нити:

Задача 3. (1983 г.) Диск может вращаться вокруг вертикальной оси, перпендикулярной его плоскости. На диске лежит небольшой брусок массой M на расстоянии R от оси (рис. 4). На горизонтальной поверхности бруска находится шайба массой m, прикрепленная к оси нитью. Диск вместе с бруском и шайбой начинают раскручивать, очень медленно увеличивая его угловую скорость.

Движение по окружности: равномерное и неравномерное

В.ЧИВИЛЁВ

В ЭТОЙ статье на конкретных задачах обсуждаются вопросы динамики равномерного и неравномерного движений по окружности. Все разобранные задачи (кроме второй) и задачи из Упражнений составлены автором статьи и предлагались в разные годы на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт (МФТИ). Но сначала — немного теории.

Пусть тело (материальная точка) движется (вращается) по окружности. Угловой скоростью вращения ω называется предел отношения угла поворота $\Delta\varphi$ радиуса, проходящего через тело, ко времени Δt поворота на этот угол при стремлении Δt к нулю: $\omega = \Delta\varphi/\Delta t$ при $\Delta t \to 0$. Угол поворота принято измерять в радианах, поэтому угловая скорость в СИ измеряется в $1/\text{с}$ (или с^{-1}).

Модуль скорости V при движении по окружности называют линейной скоростью. Линейная и угловая скорости в любой момент времени связаны соотношением $V = \omega R$, где R — радиус окружности.

Движение по окружности называется равномерным, если линейная скорость, а значит, и угловая, остается постоянной, в противном случае движение называется неравномерным. Для равномерного движения по окружности вводятся также период и частота вращения. Период T — это время одного оборота, частота ν — число оборотов в единицу времени. Легко показать, что $T = 1/\nu$ и $\omega = 2\pi\nu$.

Ускорение при равномерном движении по окружности находится по формуле

$$a = V^2/R = \omega^2 R.$$

Оно всегда направлено к центру окружности и называется поэтому центростремительным ускорением. По второму закону Ньютона, центростремительное ускорение $\vec{a}$ вызвано суммой $\vec{F}$ всех сил, действующих на тело со стороны других тел (и полей):

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Поскольку при равномерном движении по окружности ускорение тела $\vec{a}$ направлено к центру вращения (окружности), то и сила $\vec{F}$ направлена к центру вращения и называется поэтому центростремительной силой. Подчеркнем, что центростремительная сила — это не какая-то особая, мистическая сила, появляющаяся в результате вращения, а сумма всех сил, реально действующих на равномерно движущееся по окружности тело со стороны других тел. Следовательно, начинать решение конкретной задачи на вращение надо с изображения реальных сил, действующих на тело, а не с центростремительной силы.

При неравномерном движении по окружности вектор ускорения $\vec{a}$ не направлен к центру вращения и его удобно разложить на две составляющие (рис. 1).

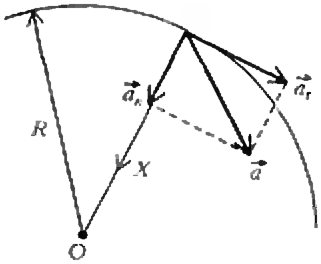


Рис. 1

Составляющая $\vec{a}_\tau$, направленная по касательной к траектории, называется касательным (тангенциальным) ускорением. Оно характеризует быстроту изменения модуля скорости. Составляющая $\vec{a}_n$, направленная по нормали к траектории, т.е. вдоль радиуса к центру вращения O, называется нормальным (центростремительным) ускорением. Его модуль в любой момент времени можно найти по формуле

$$a_n = V^2/R = \omega^2 R,$$

где V и ω — линейная и угловая скорости в этот момент. Из рисунка видно, что при неравномерном движении по окружности проекция ускорения $\vec{a}$ на ось X, направленную вдоль радиуса к центру вращения, всегда равна a_n. На этом основано решение многих задач на неравномерное движение по окружности.

Задача 1 (1990 г.). *Вокруг вертикально расположенного стержня вращается насаженный на него диск (рис. 2). На диске находится шарик, прикрепленный к стержню нитью длиной l и составляющей угол α со стержнем. С каким периодом должна вращаться система, чтобы шарик не отрывался от диска?*

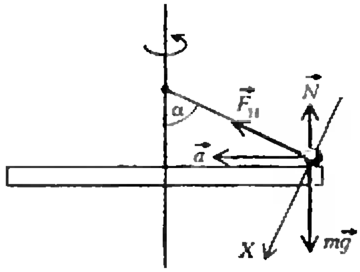


Рис. 2

Шарик движется равномерно по окружности радиусом $l\sin\alpha$ с угловой скоростью $2\pi/T$ и ускорением

$$a = (2\pi/T)^2 l\sin\alpha,$$

где T — период вращения. На шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{F}_н$ и сила нормальной реакции $\vec{N}$ со стороны диска. Уравнение второго закона Ньютона (уравнение движения) имеет вид

$$m\vec{g} + \vec{F}_н + \vec{N} = m\vec{a}.$$

Это векторное равенство удобно записать в проекциях на ось X, направив ее перпендикулярно нити:

$$mg\sin\alpha - N\sin\alpha = ma\cos\alpha.$$

Отсюда

$$N = m(g - a\,\mathrm{ctg}\,\alpha).$$

Шарик не отрывается от диска, если $N > 0$, т.е.

$$m(g - a\,\mathrm{ctg}\,\alpha) > 0.$$

Подставляем сюда выражение для a и находим, что

$$T \ge 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\cos\alpha}.$$

Заметим, что знак равенства в ответе относится к случаю, когда шарик находится на грани отрыва, т.е. может соприкасаться, а может и не соприкасаться с диском (что на практике не имеет значения). Ответ в виде строгого неравенства тоже можно считать правильным.

Задача 2. *Небольшой шарик массой m подвешен на нити. Нить с шариком отклонили в горизонтальное положение и отпустили. Найдите натяжение нити в момент, когда она составляла угол $\alpha = 30°$ с горизонтом.*

Здесь мы имеем дело с неравномерным движением по окружности. В искомый момент на шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{F}_н$ (рис. 3). Эти две силы вызывают ускорение шарика $\vec{a}$, не направленное к центру вращения O. По второму закону Ньютона,

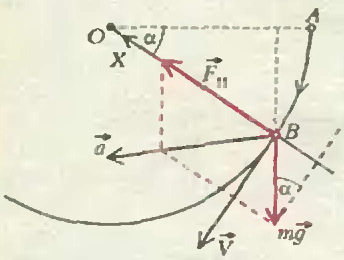


Рис. 3

$$\vec{F}_н + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Обратите внимание, что вектор ускорения направлен так же, как и результирующая сил $\vec{F}_н$ и $m\vec{g}$. Запишем векторное равенство в проекциях на ось X, направленную вдоль нити:

$$F_н - mg\sin\alpha = ma_n.$$

Мы воспользовались тем, что при неравномерном движении по окружности проекция ускорения на ось, направленную вдоль радиуса к центру вращения, равна модулю нормального ускорения (об этом говорилось в начале статьи).

Пусть длина нити R, а скорость шарика в рассматриваемый момент V. Тогда

$$a_n = V^2/R.$$

По закону сохранения энергии полная энергия шарика в точках A и B одна и та же, т.е.

$$mgR\sin\alpha = mV^2/2.$$

Из последних трех уравнений находим силу натяжения нити:

$$F_н = 3mg\sin\alpha = 3mg/2.$$

Задача 3 (1983 г.). *Диск может вращаться вокруг вертикальной оси, перпендикулярной его плоскости. На диске лежит небольшой брусок массой M на расстоянии R от оси (рис. 4). На горизонтальной поверхности бруска находится шайба массой m, прикрепленная к оси нитью. Диск вместе с бруском и шайбой начинают раскручивать, очень медленно увеличивая его угловую скорость. Считая трение между бруском и диском пренебрежимо малым, определите, при какой угловой скорости брусок начнет выскальзывать из-под шайбы. Коэффициент трения скольжения между шайбой и бруском μ.*

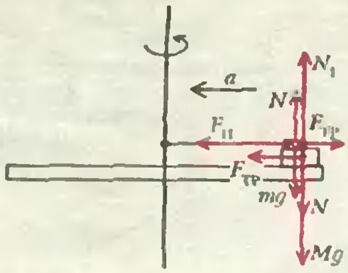


Рис. 4

Найдем сначала угловую скорость ω, при которой брусок не выскальзывает из-под шайбы, т.е. брусок и шайба вращаются вместе. В этом случае они движутся по окружности радиусом R с центростремительным ускорением $a = \omega^2 R$.

В данной системе много тел и, соответственно, много сил. Чтобы не загромождать чертеж, на рисунке 4 силы обозначены так, как обозначают их модули.

Прежде всего разберемся с направлением силы трения (покоя) между шайбой и бруском (голословное утверждение, что расположенная в горизонтальной плоскости сила трения параллельна нити и не может быть направлена под углом к ней, не очевидно). На шайбу действуют вертикально направленные сила тяжести $m\vec{g}$ и сила нормальной реакции $\vec{N}$ со стороны бруска, а также сила натяжения нити $\vec{F}_н$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$, действующая со стороны бруска. Согласно второму закону Ньютона, векторная сумма этих сил должна быть направлена к оси вращения. Это будет только в том случае, если сила трения окажется направленной параллельно нити. По третьему закону Ньютона, такая же по модулю и противоположно направленная сила действует и на брусок со стороны шайбы.

Теперь рассмотрим силы, действующие на брусок. Это сила тяжести $M\vec{g}$, силы $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр}$ со стороны шайбы и сила $\vec{N}_1$ со стороны диска. Уравнение движения бруска, записанное в проекциях на ось, направленную вдоль нити, имеет вид

$$F_{тр} = M\omega^2 R.$$

Брусок не выскальзывает, если модуль силы трения покоя меньше своего максимального значения, равного модулю силы трения скольжения, т.е. если

$$F_{тр} < \mu mg,$$

или, с учетом полученного ранее выражения для $F_{тр}$,

$$M\omega^2 R < \mu mg.$$

Отсюда следует, что брусок начнет выскальзывать, когда угловая скорость вращения диска достигнет величины

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu mg}{MR}}.$$

Задача 4 (1988 г.). *Космонавты, высадившиеся на поверхности Марса, измерили период вращения конического маятника (небольшое тело, прикрепленное к нити и движущееся по окружности в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью; рис. 5), оказавшийся равным $T = 3$с. Длина нити $L = 1$ м. Угол, образованный нитью с вертикалью, равен $\alpha = 30°$. Найдите по этим данным ускорение свободного падения на Марсе.*

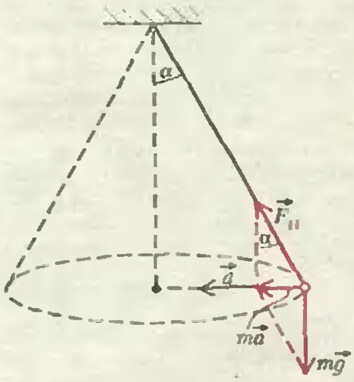


Рис. 5

Тело движется по окружности радиусом $L\sin\alpha$ с угловой скоростью $2\pi/T$ и с ускорением

$$a = (2\pi/T)^2 L\sin\alpha.$$

На тело массой m действуют сила натяжения нити $\vec{F}_н$ и сила тяготения, равная $m\vec{g}'$, где $\vec{g}'$ — ускорение свободного падения на Марсе. Уравнение движения тела имеет вид

$$\vec{F}_н + m\vec{g}' = m\vec{a}.$$

Из рисунка 5 видно, что

$$ma/(mg') = \mathrm{tg}\alpha.$$

Подставив в последнее равенство выражение для a, находим ускорение свободного падения на Марсе:

$$g' = (2\pi/T)L\cos\alpha \approx 3{,}8\ \text{м/с}^2.$$

Задача 5 (1994 г.). *Небольшая шайба соскальзывает без начальной скорости и без трения с верхней точки шара, закрепленного на горизонтальной поверхности стола. Под каким углом к поверхности стола шайба ударится о стол?*

Пусть радиус шара R (рис. 6). Движение шайбы по поверхности шара до момента отрыва — это неравномерное движение по окружности радиусом R. Найдем сначала угол α и скорость шайбы V в момент отрыва от шара.

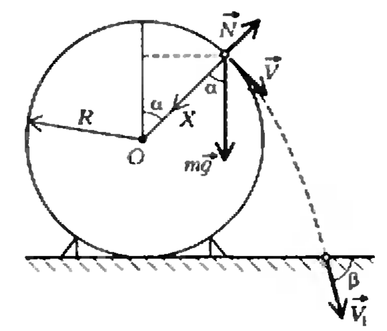


Рис. 6

На шайбу действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила нормальной реакции $\vec{N}$ со стороны шара. Запишем уравнение движения шайбы в проекциях на ось X:

$$mg\cos\alpha - N = ma_n,$$

где $a_n = V^2/R$ — нормальное ускорение. В момент отрыва $N = 0$, поэтому получаем

$$V^2 = gR\cos\alpha.$$

Для нахождения V и α требуется еще одно уравнение. Запишем его, воспользовавшись законом сохранения энергии:

$$mV^2/2 = mg(R - R\cos\alpha),$$

откуда

$$V^2 = 2gR(1-\cos\alpha).$$

Решая систему двух уравнений с двумя неизвестными V и α, находим

$$\cos\alpha = 2/3,\ V = \sqrt{2gR/3}.$$

Теперь найдем скорость падения V_1 на стол. Это проще всего сделать с помощью закона сохранения энергии, приравняв полные энергии шайбы в точке падения на стол и в верхней точке шара:

$$mV_1^2/2 = 2mgR,$$

откуда

$$V_1 = 2\sqrt{gR}.$$

В промежутке времени между отрывом от шара и падением на стол горизонтальная составляющая скорости шайбы не менялась, следовательно (см. рис. 6),

$$V\cos\alpha = V_1\cos\beta.$$

С учетом найденных ранее выражений для V, $\cos\alpha$ и V_1, получим, что шайба упадет на стол под углом β к его поверхности, равным

$$\beta = \arccos\sqrt{6}/9 \approx 74^\circ.$$

Упражнения

1 (1990 г.). К вершине прямого кругового конуса с помощью нити длиной l прикреплена небольшая шайба (рис. 7). Вся система вращается вокруг оси конуса, расположенной вертикально. При каком числе оборотов в единицу времени шайба не будет отрываться от поверхности конуса? Угол при вершине конуса $2\alpha = 120^\circ$.

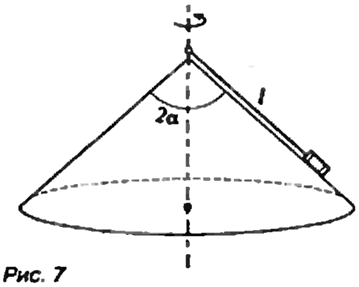


Рис. 7

2 (1983 г.). Диск может вращаться вокруг вертикальной оси, перпендикулярной его плоскости. На диске лежит небольшой брусок массой M на расстоянии R от оси (см. рис.4). На горизонтальной поверхности бруска находится шайба массой m, прикрепленная к оси нитью. Диск вместе с бруском и шайбой начинают раскручивать, очень медленно увеличивая его угловую скорость. Коэффициент трения скольжения между бруском и диском μ. Считая трение между шайбой и бруском пренебрежимо малым, определите, при какой угловой скорости брусок начнет выскальзывать из-под шайбы.

3 (1994 г.). С верхней точки шара радиусом $R = 54$ см, закрепленного на горизонтальной поверхности стола, соскальзывает без начальной скорости и без трения небольшой шарик. На какую максимальную высоту от стола поднимется шарик после упругого удара о стол?

Умеете ли вы решать «почти школьные» задачи?

О. ИВАНОВ

Все приводимые в этой заметке задачи взяты из вариантов различных работ, которые проводились математико-механическим факультетом Санкт-Петербургского университета для старшеклассников школ (гимназий, лицеев) Санкт-Петербурга и Ленинградской области в 1990-93 годах. Задачи эти явно не олимпиадного, но и не обычного школьного характера, хотя в большинстве из них идет речь о решениях уравнений и неравенств или о свойствах и графиках стандартных функций. Эти задачи достаточно просты, а их простота имеет двоякий характер. Как вы увидите, в решениях нет ни громоздких преобразований, ни неожиданных идей. Они (решения) совершенно естественны, однако эти задачи почему-то многих ставили в тупик. Так что почитайте, порешайте и посмотрите, насколько трудными (или же наоборот) они покажутся вам.

Задача 1. *Найдите все такие a, что при любом b уравнение $ax + b = |x|$ имеет решение.*

Задача 2. *Нарисуйте множество точек, являющихся серединами отрезков, концы которых лежат на графике функции $y = x^3$.*

Задача 3. *Известно, что функция f возрастает на луче $(-\infty; 1]$ и убывает на луче $[1; +\infty)$. Найдите промежутки монотонности функции g, где*

$$g(x) = f(x^2 - 1).$$

Задача 4. *Изобразите на плоскости множество всех точек, координаты ко-*

торых удовлетворяют неравенству $\sin(x+y)\sin(x-y)\ge 0$.

Задача 5. *Решите уравнение*

$$\sin\frac{1992\pi^2}{x}=\frac{1}{\cos x}.$$

Теперь — решения.

Наиболее «правильный» подход к решению первой задачи — геометрический. Ответ в ней — $|a|>1$ (а также и рассуждение) — очевиден (см. рисунки 1 и 2). Попробуйте для сравнения провести стандартное рассуждение связанное, с «раскрытием модуля».

Чтобы решить вторую задачу, давайте, наоборот, переведем ее на алгебраический язык. Точка с координатами (x,y) является серединой отрезка с концами на графике $y=x^3$, если существуют та-

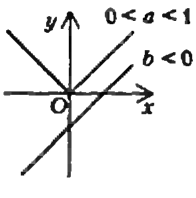


Рис. 1

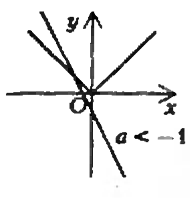


Рис. 2

кие числа a и b (абсциссы концов отрезка), что $\frac{a+b}{2}=x$ и $\frac{a^3+b^3}{2}=y$ (для простоты мы допускаем вырожденные отрезки), т.е. разрешима система

$$\begin{cases}a+b=2x,\\a^3+b^3=2y.\end{cases}$$

Если $x=0$, то $a=-b$, значит, $y=0$. При $x\ne 0$ перейдем к системе

$$\begin{cases}a+b=2x,\\a^2-ab+b^2=\dfrac{y}{x},\end{cases}$$

которая имеет решение, если неотрицателен дискриминант уравнения (относительно a)

$$3a^2-6xa+4x^2-\frac{y}{x}=0.$$

Произведя вычисления, получим неравенство

$$\frac{y}{x}\ge x^2$$

или

$$\frac{y-x^3}{x}\ge 0.$$

Таким образом, $x>0$ и $y\ge x^3$, либо $x<0$ и $y\le x^3$ (рис.3).

Теперь о задаче 3. Если

$$x_1\le x_2\le -\sqrt{2},$$

то

$$x_1^2-1\ge x_2^2-1\ge 1,$$

значит,

$$g(x_1)=f\left(x_1^2-1\right)\le f\left(x_2^2-1\right)=g(x_2),$$

т.е. функция g на луче $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]$ возрастает. Случаи $x_1,x_2\in\left[-\sqrt{2};0\right]\cup\left[0;\sqrt{2}\right]$ и $x_1,x_2\in\left[\sqrt{2};+\infty\right)$ разбираются аналогич-

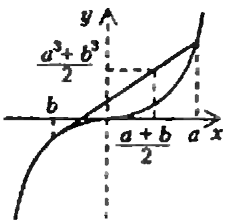


Рис. 3

но. Мы сравнивали x_1, x_2 с 0 и $\pm\sqrt{2}$ ввиду следующего простого и общего соображения: если функция h монотонна и притом ее значения лежат в промежутке, на котором монотонна и функция f, то является монотонной и «сложная» функция $y=f(h(x))$ (в качестве иллюстрации смотрите рисунок 4).

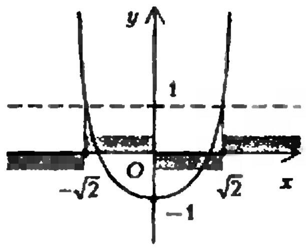


Рис. 4

Задачу 4 будем решать, используя аналог так называемого «метода интервалов» (очень популярного среди абитуриентов). Если $\sin(x-y)=0$, то $x-y=\pi k$, $k\in Z$, поэтому это уравнение задает на плоскости набор параллельных прямых $y=x$, $y=x\pm k\pi$ (рис.5). Уравнение $\sin(x+y)=0$ задает аналогичный набор параллельных прямых, содержащий прямую $y=-x$. Объединение прямых этих двух наборов разбивает плоскость на квадраты (рис.6), каждый из которых либо целиком состоит из решений данного неравенства, либо не имеет внутри себя ни одного из них. Ясно, что все закрашенные на рисунке 6 квадраты состоят из искомых решений (почему?). По аналогии с «методом интервалов» можно заключить (или проверить непосредственно), что внутри соседних с ними квадратов нет решений

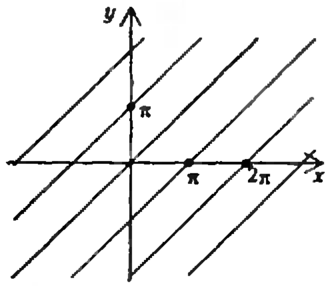


Рис. 5

неравенства, поэтому ответ в данной задаче — это «черные поля бесконечной шахматной доски». Другой же путь, как

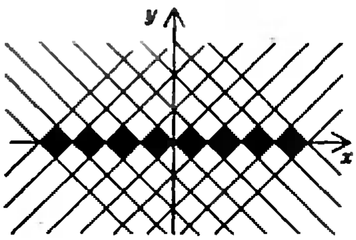


Рис. 6

и в случае стандартных неравенств, состоит в том, чтобы рассмотреть системы неравенств. В данном случае — рассмотреть объединение множеств решений следующих систем

$$\begin{cases}2\pi k\le x-y\le \pi+2\pi k,\\2\pi l\le x+y\le \pi+2\pi l,\end{cases}$$

и

$$\begin{cases}\pi+2\pi k\le x-y\le 2\pi+2\pi k,\\\pi+2\pi l\le x+y\le 2\pi+2\pi l\end{cases}$$

по всем $k,l\in Z$.

Первая идея решения задачи 5 традиционна, именно: поскольку $|\sin x|\le 1$, а $\left|\frac{1}{\cos y}\right|\ge 1$, то равенство обеих частей данного уравнения возможно, только если

$$\sin\frac{1992\pi^2}{x}=\pm 1=\cos x,\ \text{т.е.}$$

$$\frac{1992\pi^2}{x}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ x=2\pi l,$$

или

$$\frac{1992\pi^2}{x}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ x=\pi+2\pi l.$$

Автор специально поставил в этом месте точку. Далее должно идти «стандартное заклинание» — «$k, l \in Z$» — и решение, собственно говоря, здесь только и начинается. Мы получаем уравнения в целых числах: $1992 = l(4k+1)$ или $2\cdot 1992 = (2l+1)(4k+1)$; ясно, что второе решений не имеет. Чтобы решить первое, достаточно найти все делители числа 1992, имеющие остаток 1 при делении на 4 (отрицательное число тоже может быть делителем!). Ответ: 16π, 3924π, -48π, -1328π.

Теперь несколько задач «из области высшей математики».

Задача 6. *В последовательности x_0, x_1, … $x_0 = c$, а $x_n = nx_{n-1} - 1$ $(n \ge 1)$. Докажите, что если число c рационально, то данная последовательность не имеет конечного предела.*

Действительно, если $c = \frac{p}{q}$, то $x_{q-1} = \frac{r}{q}$ (r, p, q — целые), значит, $x_q = r - 1$ и при всех $n \ge q$ число x_n — целое, причем отличное от x_{n-1}. Значит, $|x_n - x_{n-1}| \ge 1$, следовательно, последовательность $\{x_n\}$ не имеет конечного предела.

Попробуйте доказать, что существует только одно значение c, при котором существует $\lim x_n = a \ne \infty$ (кстати, чему должен быть равен этот предел?).

Задача 7. *Найдите все прямые, касающиеся графика функции*

$$y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 19x + 93$$

в двух различных точках.

Систему уравнений относительно абсцисс точек касания такой прямой даже не хочется и выписывать (хотя этот путь можно пройти до конца). Поступим по-другому, несколько более аналитично. Выражение, определяющее данную функцию, можно преобразовать к виду $y = x^2(x-1)^2 + 19x + 93$. Поскольку график $y = x^2(x-1)^2$ касается оси абсцисс в точках $(0,0)$ и $(1,0)$, то прямая $y = 19x + 93$ касается графика данной функции в точках $A(0,93)$ и $B(1,112)$ (в чем легко убедиться прямой проверкой). Осталось доказать единственность подобной «двойной» касательной, что очевидно геометрически, правда, для аккуратного доказательства нужно будет использовать выпуклость графика на определенных его участках. Попробуйте вместо этого провести формальное рассуждение, доказав вначале, что если график многочлена $p(x)$ касается оси абсцисс в точке $x = x_0$, то $p(x) = (x - x_0)^k q(x)$, где $q(x)$ — многочлен, а $k \ge 2$.

Задача 8. *Рассмотрим тело, ограниченное плоскостями $x = 0$, $x = \frac{3\pi}{2}$ и поверхностью, получающейся при вращении графика $y = \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x$ вокруг (лежащей в плоскости Oyx) прямой $y = m$. При каком m объем этого тела является наименьшим?*

Будем решать задачу в общем виде. Пусть дана функция $y = f(x)$, $x \in [a;b]$, тогда объем соответствующего тела вращения вычисляется по формуле

$$V = \pi\int_a^b (f(x) - m)^2\,dx.$$

Проделаем преобразование в интеграле:

$$V = \pi\int_a^b \left(m^2 - 2mf(x) + f^2(x)\right)dx = \pi\left((b-a)m^2 - 2m\int_a^b f(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx\right).$$

Полученное выражение является квадратичной функцией от m, поэтому его наименьшее значение достигается при

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

(это так называемое среднее значение функции). В данной задаче

$$m = \frac{2}{3\pi}\int_0^{3\pi/2}\left(\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \frac{2}{3\pi}.$$

Как мог убедиться читатель, решения всех этих достаточно разнообразных, хотя и основанных на обычном школьном материале, задач не сводятся к цепочке стандартных преобразований.

И последняя

Задача 9. *Докажите, что многочлен $p_n(x) = x^n\sin\alpha - x\sin n\alpha - x\sin(n-1)\alpha$ при всех $n \ge 2$ делится на трехчлен*

$$q(x) = x^2 - 2x\cos\alpha + 1.$$

Ясно, что

$$p_2(x) = \sin\alpha\cdot q(x).$$

Если

$$p_3(x) = (ax + b)(x^2 - 2x\cos\alpha + 1),$$

то $a = \sin\alpha$, $b = \sin 2\alpha$. Действительно,

$$(x\sin\alpha + \sin 2\alpha)(x^2 - 2x\cos\alpha + 1) = x^3\sin\alpha - 2x^2\sin\alpha\cos\alpha + x\sin\alpha + x^2\sin 2\alpha - 2x\sin 2\alpha\cos\alpha + \sin 2\alpha = x^3 + x\sin\alpha(1 - 4\cos^2\alpha) + \sin 2\alpha = p_3(x).$$

Теперь нетрудно догадаться, что

$$p_n(x) = \left(x^{n-2}\sin\alpha + x^{n-1}\sin 2\alpha + \ldots + \sin(n-1)\alpha\right)q(x),$$

а также и проверить это тождество.

Проведем другое решение и предоставим читателю судить самому, какое из двух является более красивым (или естественным).

Трехчлен $q(x)$ имеет комплексные корни $z_{1,2} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$. Многочлен $p_n(x)$ делится на $q(x)$, если числа $z_{1,2}$ являются также и его корнями. Приведем вычисления:

$$p_n(z_{1,2}) = (\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^n\sin\alpha - (\cos\alpha \pm i\sin\alpha)\sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha = (\sin\alpha\cos n\alpha - \cos\alpha\sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha) \pm i(\sin n\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\sin n\alpha) = 0.$$

В заключение отметим, что последняя в списке предлагаемых для самостоятельного решения задач — пример задания профильного элитарного экзамена 1992 года (для выпускников физико-математических школ Санкт-Петербурга).

Литература

1. Опыт проведения разноуровневых выпускных экзаменов по математике в Санкт-Петербурге (Стандарты математического образования. Выпуск 1). Санкт-Петербург, 1993.

2. О.А.Иванов. Контрольные и экзаменационные работы по математике (MATHESIS. Математика, Вып.1(1). Академическая Гимназия СПбГУ). Издательство СПбГУ, 1993.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите множество середин отрезков, концы которых лежат на графике функции $y = \cos x$.

2. Изобразите на плоскости множество всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $\frac{\sin y}{x} \ge 1$.

3. Докажите, что не существует такой функции f, что

$$\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} = f(\cos 2x).$$

4. Решите уравнение

$$\sin^{19}(\pi x) + \cos^{92}(\pi x) = 1.$$

5. Изобразите на плоскости множество таких пар (a,b), что для всех $x \in [0;1]$ верно неравенство $|x - a| + |x - b| \le 2$.

6. Найдите все такие натуральные n, что многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ делится на трехчлен $x^2 + x + 1$.

7. Пусть $A(2z+1)$, $B(z+2)$, $C(z^2+2z)$ — точки плоскости (здесь z — комплексное число).

а) Докажите, что если $|z| = 1$, то $OA = OB$ (O — начало координат).

б) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику с вершинами в точках 0, 1 и $-(z+1)$ комплексной плоскости.

в) Пусть $|z| = 1$. Найдите множество значений радиусов окружностей, описанных около треугольника ABC.

г) При каком значении z, $|z| = 1$, площадь треугольника ABC принимает наибольшее значение?

I Российская олимпиада школьников по астрономии и космической физике

После долгого подготовительного периода в этом году наконец-то состоялась первая Российская олимпиада школьников по астрономии и космической физике. Учредителями олимпиады стали Астрономическое общество, Ногинский научный центр Российской академии наук, Государственный астрономический институт им. П.К.Штернберга Московского государственного университета, Министерство образования Российской Федерации, МНТЦ «Космофлот», Московский городской дворец творчества детей и юношества и Ярославский городской научно-педагогический центр.

Как сказано в Учредительном договоре, «Олимпиада учреждается в соответствии с духом олимпийского движения и в продолжение традиций организации и проведения олимпиад Астрономического общества Российской Империи (XIX век), Московских олимпиад по астрономии, Российских, Союзных, Польских и Международных олимпиад по физике, олимпиад Ногинского научного центра АН СССР — РАН по точным и естественным наукам. Олимпиада проводится ежегодно, с 1993/94 учебного года, в несколько этапов: начиная с олимпиад школ, лицеев, гимназий, дворцов творчества, планетариев и т.п. и кончая заключительным этапом, в котором принимают участие победители региональных соревнований. В олимпиаде предусматривается участие школьников из других государств.»

Таким образом, астрономия стала восьмым предметом в единой системе общероссийских олимпиад (вместе с математикой, физикой, химией, биологией, информатикой, географией и экологией).

Заключительный этап первой олимпиады по астрономии и космической физике прошел 16 — 20 мая в городе Ярославле. В нем принял участие 61 школьник 7 — 11 классов — из числа победителей областных, краевых, республиканских (республик, входящих в состав Российской Федерации), Московской и Петербургской астрономических олимпиад. Участники заключительного этапа были разделены на две группы — учащихся 8 — 9 классов (в эту группу вошли и несколько приехавших семиклассников) и 10 — 11 классов.

Подход к выбору задач для астрономических олимпиад не такой, как по другим предметам. Большинство любителей астрономии изучает ее не в школе, а дополнительно — в кружках, планетариях и т.п. Поэтому знания, необходимые участнику олимпиады, конечно же, шире школьных. Организаторы ориентировались, в основном, на программу внешкольного образования по астрономии (утвержденную еще Министерством просвещения СССР).

Олимпиада в Ярославле включала в себя два тура. На теоретическом туре школьникам было предложено 6 обычных (негромоздких) задач. Каждая задача оценивалась исходя из 10 баллов. Уровень задач оказался в целом подходящим для большинства школьников. Но, к сожалению, были и ребята, почти ничего не решившие. Интересно, что одна девочка решение (да и не только решение) описала в стихах.

Затем состоялся творческий тур. Для российских олимпиад это — нововведение, однако у организаторов имелся опыт проведения таких туров на Открытых (Международных) олимпиадах Ногинского научного центра. Участникам нужно было решить одну задачу, которая давалась в достаточно общей формулировке (8 — 9-классникам было предложено две задачи — на выбор; если школьник решал обе задачи, то учитывалась только одна — разумеется, лучшая). Задачи творческого тура оценивались из 30 баллов.

После расшифровки работ, каждый участник олимпиады смог ознакомиться с оценкой своей работы, побеседовать с членами жюри (в ряде случаев после такой беседы оценки были немного повышены). На закрытии олимпиады победителям были вручены дипломы, грамоты, а также спецпризы.

Задачи теоретического тура

Первые пять задач для каждой группы участников предложил В.Сурдин, а шестые задачи — А.Широков.

8 — 9 классы

1. Почему самые продолжительные солнечные затмения наблюдаются в тропических странах?

2. 12 знаков Зодиака имеют одинаковую протяженность по эклиптике. В каком из них Солнце находится наименьшее время?

3. Комета Галлея обращается вокруг Солнца за 76 лет, а планета Нептун — за 165 лет. Кто из них более удален от Солнца в точке афелия своей орбиты?

4. Почему у молодой Луны хорошо видна неосвещенная Солнцем поверхность (пепельный свет Луны), а в момент солнечного затмения она не видна?

5. От звезды 0^m на 1 см^2 земной поверхности падает около 1 млн. фотонов в секунду. Сколько фотонов попадает на фотопластинку от звезды 20^m за 1 час, если диаметр объектива телескопа 1 м?

6. Подлетев к незнакомой планете и выключив двигатели, космический корабль вышел на круговую орбиту.

Могут ли космонавты, используя только бортовые часы, определить среднюю плотность вещества исследуемой планеты?

10 — 11 классы

1. Космический корабль опустился на астероид диаметром 1 км и средней плотностью 2,5 г/см^3. Космонавты решили объехать астероид по экватору на вездеходе за 2 часа. Смогут ли они это сделать?

2. Три звезды одной и той же массы образуют равносторонний треугольник со стороной L и движутся вокруг общего центра масс по круговой орбите с периодом P. Найдите массы звезд.

3. У Альтаира (Альфа Орла) годичный параллакс $\pi = 0{,}198''$, собственное движение $\mu = 0{,}658''$, лучевая скорость $v_r = -26$ км/с и блеск m = 0,89. Когда и на какое наименьшее расстояние Альтаир сблизится с Солнцем и каким будет тогда его блеск?

4. Какой вид имеет спектр быстро вращающейся планеты, если щель спектрографа направлена вдоль ее экватора?

5. Сколько раз в году Луна бывает в зените на экваторе?

6. Какова максимальная высота гор на поверхности Марса; Земли; Венеры; Луны? Теплота плавления скальных пород Q, ускорение силы тяжести g. Для расчетов принять $Q = 60$ кал/г для кварца.

Задачи творческого тура

Первую задачу для первой группы учащихся и задачу для второй группы предложил В.Чичмарь, а вторую задачу для первой группы — В.Сурдин.

8 — 9 классы

1. Обнаружена комета, орбита которой в перигелии и афелии касается орбит планет Земли и Марса. Что можно сказать об этой комете: период, скорость встречи с планетами, устойчива ли орбита, условия наблюдения и т.п.?

2. Вам предложено сделать телескоп для визуального наблюдения Луны и планет, используя при этом лишь одну линзу. Возьметесь ли Вы за это задание? Если да, то какую линзу закажете (укажите диаметр и фокусное расстояние). Каковы при этом будут характеристики вашего телескопа: увеличение, поле зрения?

10 — 11 классы

1. Для захоронения радиоактивных отходов предложено отправлять их на Солнце или выводить за пределы Солнечной системы. Предложите наиболее экономичный способ, как это сделать.

Публикацию подготовили
М.Гаврилов, В.Сурдин

Призеры I Российской олимпиады школьников по астрономии и космической физике

Дипломы I степени

по 8 — 9 классам получили

Егоров И. — Москва, с.ш. 705,
Нестеров А. — Улан-Удэ, с.ш. 32;

по 10 — 11 классам —

Барков М. — Москва, с.ш. 1180,
Кургузин А. — Самара, Аэрокосмический лицей,
Птушенко В. — Москва, с.ш. 875.

Дипломы II степени

по 8 — 9 классам получили

Грызов Г. — Липецк, с.ш. 44,
Засядько А. — Липецк, с.ш. 12,
Тунцов А. — Москва, с.ш. 22;

по 10 — 11 классам —

Егоров С. — Санкт- Петербург, с.ш. 239,
Пономарев А. — Москва, с.ш. 1180.

Дипломы III степени

по 8 — 9 классам получили

Аверин П. — Рязанская обл., Подвязьевская с.ш.,
Довжиков А. — Ухта, Технический лицей,
Дудкин А. — Новокузнецк, школа-гимназия 11,
Панченко Д. — Нижний Новгород, с.ш. 180,
Пригорнев Е. — Ухта, Технический лицей,
Сидоров В. — Ухта, Технический лицей,
Степашкин М. — Рязанская обл., Ижевская с.ш. им. Циолковского;

по 10 — 11 классам —

Воронин А. — Липецк, с.ш. 44,
Гусев М. — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Казаков М. — Нижний Новгород, Техническая гимназия,
Олоев В. — Улан-Удэ, с.ш. 32,
Османкин Д. — Самара, Аэрокосмический лицей,
Порошин В. — Брянск, с.ш. 16,
Скитяев В. — Тутаев, с.ш. 6,
Фаловский Д. — Самара, Аэрокосмический лицей,
Федоров С. — Ярославль, Провинциальный колледж.

Дипломы за оригинальное решение задачи

по 8 — 9 классам получил

Грызов Г. — Липецк, с.ш. 44;

по 10 — 11 классам получили

Гольберг С. — Прохладный, с.ш. 2,
Петровичева И. — Новокузнецк, с.ш. 84.

Дипломы за волю к победе

по 8 — 9 классам получила

Абазова А. — Нальчик, с.ш. 2;

по 10 — 11 классам получил

Ануфриев А. — Сыктывкар, с.ш. 12.

XXV Международная физическая олимпиада

В 1994 году олимпиада по физике проходила с 12 по 19 июля в Китае. Команду России представляли

Сергей Гращенко (Барнаул, с.ш. 123), Дмитрий Курашов (Москва, с.ш. 193), Алексей Любшин (Пермь, с.ш.9), Алексей Стратонников (Сясьстрой, с.ш.) и Василий Филиппов (Санкт-Петербург, ФМШ 45).

По традиции, участникам олимпиады предлагалось решить три теоретические задачи и выполнить два экспериментальных задания. По результатам выступлений в список призеров вошел лишь В. Филиппов, получивший бронзовую медаль.

Предлагаем вниманию читателей условия теоретических задач (на их решение давалось пять часов).

Задача 1. Релятивистская частица

В специальной теории относительности связь между энергией E и импульсом p для свободной частицы определяется соотношением

$$E=\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4}=mc^2.$$

Когда такая частица находится под действием консервативной силы, ее полная энергия, являющаяся суммой энергии E и потенциальной энергии, сохраняется. Если энергия частицы очень велика, то энергией покоя можно пренебречь (такая частица называется ультрарелятивистской).

1) Рассмотрим одномерное движение частицы с очень высокой энергией, на которую действует притягивающая центральная сила, модуль которой постоянен и равен f вне начала координат и равен нулю в точке, соответствующей началу координат. При движении такой частицы могут возникать короткие промежутки времени, когда частица перестает быть ультрарелятивистской. В данной задаче этим явлением следует пренебречь и считать частицу ультрарелятивистской на всех этапах ее движения (кроме п.4).

Допустим, что в начальный момент $t=0$ частица находится в начале координат (в силовом центре) и имеет импульс p_0. Изобразите движение частицы с помощью графиков зависимости импульса p от координаты x и координаты x от времени t для одного периода движения. Выразите координаты точек поворота частицы через параметры p_0 и f и укажите стрелками направление движения на (p,x)-диаграмме.

2) Мезон является частицей, состоящей из двух кварков. Масса покоя мезона M равна суммарной энергии системы двух кварков, деленной на c^2.

Рассмотрим одномерную модель покоящегося мезона, в которой предполагается, что оба кварка движутся вдоль оси X и притягиваются друг к другу с постоянной по модулю силой f. Предполагается также, что кварки могут свободно «проходить» друг сквозь друга. При исследовании движения кварков с высокой энергией их массой покоя можно пренебречь.

Пусть при $t=0$ оба кварка находятся в точке $x=0$. Изобразите движение кварков (по отдельности) с помощью графиков $x_1(t)$, $x_2(t)$, а также с помощью диаграмм $p_1(x_1)$ и $p_2(x_2)$. Выразите координаты точек поворота через величины M и f. Укажите направления процессов на (p,x)-диаграммах и определите максимальное расстояние d между двумя кварками.

3) Систему отсчета, использованную в п.2, будем обозначать через S. Пусть другая система S' (назовем ее Лабораторной) движется с постоянной скоростью $v=0{,}6\ c$ в отрицательном направлении оси X. Координаты в этих двух системах выбираются так, что точка $x=0$ в S совпадает с точкой $x'=0$ в S' в момент времени $t=t'=0$. Изобразите движение обоих кварков в системе S' с помощью графиков $x_1'(t')$ и $x_2'(t')$. Определите координаты точек поворота в S' через M, f и c и найдите максимальное расстояние d' между кварками, наблюдаемыми в Лабораторной системе S'.

В соответствии с преобразованиями Лоренца, связь между координатами x и x' и временами t и t' в системах отсчета S и S' имеет вид

$$x'=\gamma(x+\beta ct),$$

$$t'=\gamma\left(t+\beta\frac{x}{c}\right),$$

где $\beta=v/c$, $\gamma=1/\sqrt{1-\beta^2}$.

4) Для мезона с энергией покоя $Mc^2=140$ МэВ, движущегося со скоростью $v=0{,}60\ c$ относительно Лабораторной системы S', определите его энергию E' в этой системе.

Задача 2. Сверхпроводящий магнит

Сверхпроводящие магниты широко применяются в лабораториях. Наиболее распространенный формой сверхпроводящего магнита является соленоид из сверхпроводящей проволоки. Удивительным свойством сверхпроводящего магнита является то, что он создает сильное магнитное поле без диссипации (рассеяния) энергии, обусловленной джоулевыми потерями, так как электрическое сопротивление сверхпроводящей проволоки становится равным нулю, когда магнит погружают в жидкий гелий при температуре 4,2 К.

Обычно магнит снабжается специальным сверхпроводящим ключом, как показано на рисунке 1. Сопротивление r ключа может изменяться — оно либо равно нулю, когда ключ находится в сверхпроводящем состоянии, либо $r = r_н$, когда ключ находится в нормальном состоянии.

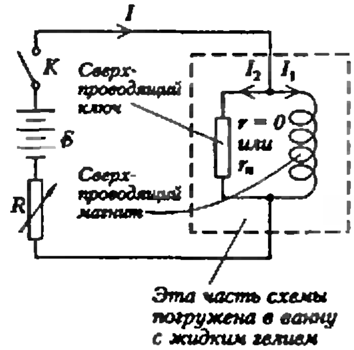


Рис. 1

Если ключ находится в сверхпроводящем состоянии, магнит может работать в устойчивом режиме. В этом случае ток циркулирует через магнит и сверхпроводящий ключ неограниченно долго. Устойчивый режим позволяет создавать магнитное поле, которое длительное время поддерживается неизменным при отключенном источнике тока.

Детали сверхпроводящего ключа не показаны на рисунке. Обычно он изготавливается из куска сверхпроводящей проволоки, намотанной вместе с проволочным нагревателем, теплоизолированным от ванны с жидким гелием. При нагревании температура сверхпроводящей проволоки увеличивается, и она переходит в нормальное состояние. Типичная величина $r_н$ составляет несколько ом (примем в дальнейшем $r_н$ = 5 Ом). Индуктивность сверхпроводящего магнита зависит от его размеров (примем ее равной L = 10 Гн). Полный ток в цепи (см. рис.1) может быть измерен путем регулировки сопротивления R. Стрелки на рисунке обозначают положительные направления токов I, I_1 и I_2.

1) Если предположить, что полный ток I и сопротивление r сверхпроводящего ключа изменяются со временем так, как показано на рисунке 2, и на интервале времени от 0 до t_1 токи I_1 и I_2 через магнит и ключ одинаковы и неизменны, то как они будут изменяться на интервале времени от t_1 до t_2? Изобразите результат вашего решения графически.

2) Предположим, что ключ K, подключающий магнит к источнику, был включен при $t = 0$, когда $r = 0$, $I_1 = 0$ и R = 7,5 Ом, и полный ток оказался равным 0,5 А. Пусть ключ K остается замкнутым, а сопротивление r сверхпроводящего ключа изменяется так, как показано на рисунке 3. Как будут изменяться со временем токи I, I_1 и I_2? Выполните расчеты и изобразите результаты графически.

3) Только малые токи, меньшие чем 0,5 А, разрешается пропускать через сверхпроводящий ключ, когда он находится в нормальном состоянии. При

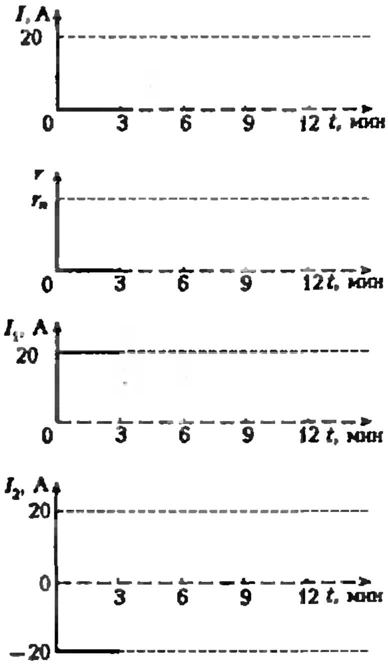


Рис. 4

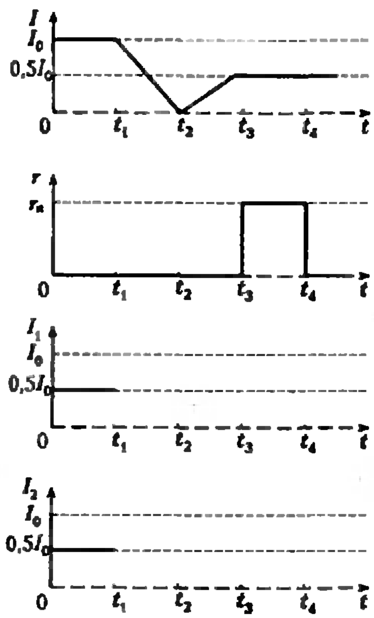


Рис. 2

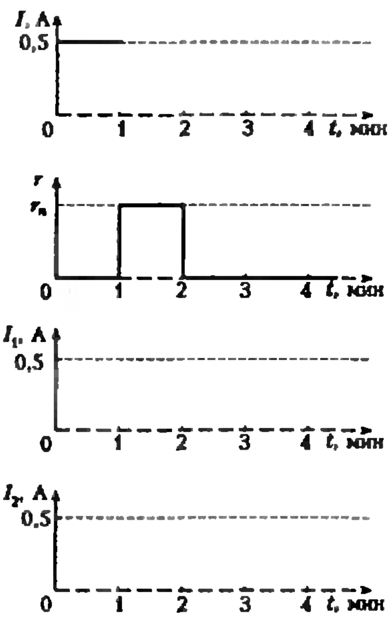


Рис. 3

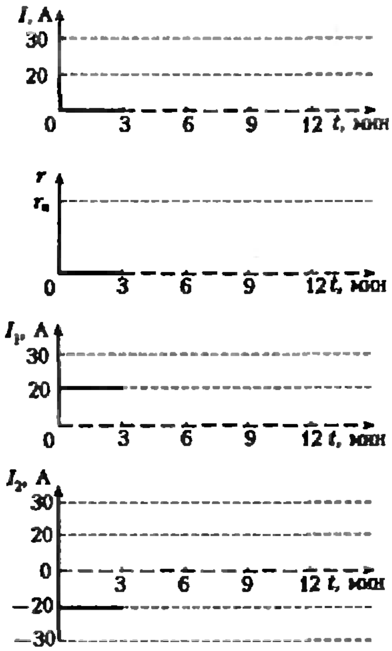


Рис. 5

больших токах ключ перегорит. Допустим, что сверхпроводящий магнит работает в устойчивом режиме, когда $I=0$, $I_1=i_1$ (например, 20 А) и $I_2=-i_1$, как показано на рисунке 4 для интервала времени от $t=0$ до $t=3$ мин.

Если эксперимент необходимо остановить путем уменьшения тока через магнит до нуля, то как вы это будете делать? Остановка должна быть сделана в несколько этапов (операционных шагов). Изобразите графически на рисунке 4 соответствующие изменения I, r, I_1 и I_2.

4) Допустим, что магнит работает в интервале времени от $t=0$ до $t=3$ мин в устойчивом режиме при токах $I_1=-I_2=20$ А (рис.5). Каким образом можно перевести магнит в устойчивый режим с токами $I_1=-I_2=30$ А, не превышая максимально допустимого значения тока через сверхпроводящий ключ в нормальном состоянии (см. п.3)?

Задача 3. Соударение дисков при наличии поверхностного трения

Однородный цилиндрический диск A массой m и радиусом R_A движется поступательно со скоростью v по гладкой горизонтальной плоскости XY в направлении оси X на расстоянии b от этой оси (рис.6). Он сталкивается с неподвижным однородным диском B

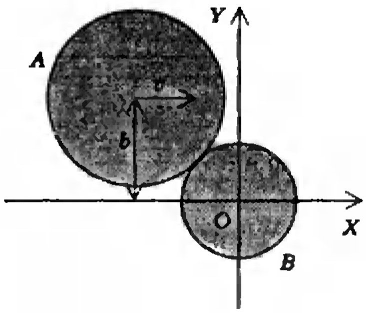


Рис. 6

той же массы, но радиусом R_B, центр которого находится в начале координат. Во время столкновения между дисками в точке соприкосновения возникает достаточно большое трение. Предполагается следующая модель взаимодействия. После столкновения компоненты скоростей дисков, перпендикулярные линии их центров, в точке соприкосновения равны друг другу, а величины относительных скоростей дисков вдоль линии центров одинаковы до и после соударения.

В рамках этой модели:

1) Определите проекции скоростей центров дисков после столкновения на координатные оси OX и OY, т.е. выразите v'_{Ax}, v'_{Ay}, v'_{Bx} и v'_{By} через параметры m, R_A, R_B, v и b.

2) Определите кинетические энергии E'_A и E'_B обоих дисков после их столкновения через те же параметры.

Публикацию подготовил С.Кротов

XXXV Международная математическая олимпиада

В Гонконге с 8 по 20 июля 1994 г. состоялась 35-я ММО, в которой участвовали команды 69 стран. Соревнование, как всегда, проходило в два дня, в каждый из которых школьники решали по 3 задачи. Каждая задача оценивалась в 7 очков. Команду России представляли Михаил Бондарко, Анна Дюбина, Сергей Норин (все трое из Санкт-Петербурга), Роман Карасев (г. Лобня Московской обл.), Наталья Добринская (Саратов) и Александр Борисов (Нижний Новгород). Отметим, что девятиклассник Сергей Норин и десятиклассник Александр Борисов, которому во время олимпиады исполнилось 14 лет, входили в число самых молодых участников ММО.

В команде России золотые медали получили М.Бондарко, Р.Карасев, С.Норин; *серебряные —* А.Дюбина, Н.Добринская; *бронзовую —* А.Борисов.

В неофициальном командном зачете наша команда заняла почетное третье место. Нас опередила команда США (общая сумма очков — 252), неожиданно показавшая удивительный результат: все школьники решили все задачи, получив за каждую максимальный бал, а также команда КНР (229).

Команды стран, входивших некогда в СССР, показали следующие результаты: Армения — 110 очков, Белоруссия — 114 очков, Грузия — 95 очков, Киргизия — 24 очка, Латвия — 98 очков, Литва — 73 очка, Молдавия — 52 очка, Украина — 163 очка, Эстония — 82 очка.

В заключение хочется отметить, что участие команды России в ММО стало возможным благодаря финансовой помощи АО «Гермес».

Задачи

Первый день

1 (Франция). См. задачу М1467 из «Задачника «Кванта».

2 (Армения — Австрия). См. задачу М1468 из «Задачника «Кванта».

3 (Румыния). См. задачу М1469 из «Задачника «Кванта».

Второй день

4 (Австралия). Найдите все упорядоченные пары (m,n) целых положительных чисел таких, что

$$\frac{n^3+1}{mn-1}$$

является целым числом.

5 (Великобритания). Пусть S — множество всех действительных чисел, строго больших, чем -1. Найдите все функции $f\colon S\to S$, удовлетворяющие двум условиям:

(I) $f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x)$ для всех x и y из S;

(II) $\frac{f(x)}{x}$ строго возрастает на каждом из интервалов $-1<x<0$ и $0<x$.

6 (Финляндия). См. задачу М1470 из «Задачника «Кванта».

Публикацию подготовил А.Фомин

ПОСТУПАЙТЕ В ВЗМШ!

ВЗМШ – это Открытый лицей «Всероссийская заочная многопредметная школа» Российской Академии образования, работающий при Московском университете им. М.В.Ломоносова.

Наша цель — рассказать о многих увлекательных вещах, часто остающихся за страницами школьных учебников, предложить и помочь решить интересные разнообразные задачи, научить самостоятельно работать с книгой, грамотно, четко и кратко излагать свои мысли на бумаге.

Всем окончившим ВЗМШ (в том числе ее филиалы и группы «Коллективный ученик» — см. ниже) выдаются соответствующие удостоверения.

ВЗМШ имеет отделения математики, биологии, физики, филологии и экономики. На Северо-Западе России работает Заочная школа Ленинградского областного Министерства образования, созданная при Санкт-Петербургском университете; она имеет отделения математики, биологии и химии (подробности см. ниже).

Для поступления в школу надо успешно выполнить вступительную контрольную работу. Преимуществом пользуются проживающие в сельской местности, поселках и небольших городах — там нет крупных научных центров и поэтому дополнительное образование можно получить лишь заочно.

Чтобы быть принятым, не обязательно решить все задачи. Нас интересует ваше умение рассуждать, попытки (пусть даже не совсем удачные) самостоятельно мыслить и делать выводы, ваша тяга к знаниям.

Решения задач надо написать на русском языке в ученической тетради в клетку и выслать ее *простой* бандеролью, не сворачивая в трубку. Задачи надо записать в том же порядке, как и у нас, причем сначала условие, потом — решение.

На обложку тетради наклейте листок бумаги, разграфив и заполнив его по прилагаемому образцу (на каждое отделение — свое количество задач).

Область (Республика)	Московская
Фамилия, имя, отчество	Иванов Петр Петрович
Год рождения ученика	1980
Класс, школа с адресом	8 кл. "Б" школы №2; 123456, г.Баян, ул.Лебедева, д.4
Фамилия, имя, отчество учителя (математики)	Учитель математики - Орлов Борис Петрович
Место работы и должность родителей	Отец - шофер автобазы №1 Мать - медсестра больницы №7
Полный почтовый адрес (с индексом!)	123456, г.Баян, ул.Строителей, д.1, корп.4, кв.12

№ №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Всего баллов

В тетрадь вложите два листка бумаги размером 6×14 см с вашим полным почтовым адресом (с индексом!), а также конверт с адресом.

Если вы хотите поступить сразу на несколько отделений, каждую работу присылайте в отдельной тетради.

Выдержав конкурс и поступив к нам, вы будете, начиная с сентября 1995 г., получать наши материалы, содержащие изложение теоретических вопросов, задачи для самостоятельного решения (с образцами решения задач) и контрольные работы. Выполненные вами работы будут проверяться и тщательно рецензироваться преподавателями ВЗМШ — студентами, аспирантами и преподавателями МГУ и других вузов, в которых имеются наши филиалы, а также научными сотрудниками различных учреждений. Филиалы работают по тем же программам и учебным пособиям, что и московская группа ВЗМШ (С-З ЗМШ в Санкт-Петербурге — по своим пособиям и программам).

Предполагается, что часть заданий будет даваться по журналу «Квант», поэтому мы советуем подписаться на него.

Без вступительной работы, только по заявлению, принимаются на индивидуальное обучение участники республиканских и победители областных (краевых) олимпиад для школьников и учащихся СПТУ.

Не успевшие или не сумевшие поступить в ВЗМШ на индивидуальное обучение могут заниматься в группах «Коллективный ученик ВЗМШ» (кроме отделения экономики). Каждая такая группа — кружок, работающий под руководством школьного учителя или другого преподавателя по той же программе и пособиям, что на индивидуальном обучении. Прием в эти группы производится *до 15 октября 1995 г.* на трех-, двух- и одногодичный потоки (на физическое отделение — на одно- и двухгодичный потоки). Для зачисления в ВЗМШ достаточно заявления руководителя группы с приложением списка учащихся, количества лет обучения; оно должно быть подписано руководителем учреждения, при котором будет работать группа, и заверено печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик ВЗМШ» может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия. Заявления следует направлять в адрес ВЗМШ.

Проживающие на Северо-Западе России (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках), в Беларуси (кроме Витебской и Могилевской областей) и в Прибалтике, желающие поступить на отделения математики, биологии и химии, высылают работы по адресу: *198097, Санкт-Петербург, ул. Трефолева, д.32, С-З ЗМШ (на прием).*

Проживающие в остальных регионах России, дальнего и ближнего зарубежья высылают работы в адрес ВЗМШ или (по математике) соответствующего филиала.

Адрес ВЗМШ: *119823, ГСП, Москва, В-234, МГУ, ВЗМШ, на прием (с указанием отделения).*

Филиалы математического отделения ВЗМШ при университетах имеются в городах: Бишкек, Воронеж, Донецк, Екатеринбург, Иваново, Ижевск, Магадан, Самара, Ульяновск, Чебоксары, Челябинск, Ярославль; филиалы при педагогических институтах — в городах: Акмола, Бирск, Витебск, Киров, Петрозаводск, Тернополь, Уральск, Ходжент; работают также филиалы при Брянском доме творчества молодежи и Могилевском областном Дворце пионеров.

Срок отправки вступительных работ — *не позднее 25 апреля 1995 г.* (по почтовому штемпелю).

Учащиеся ОЛ «ВЗМШ» частично возмещают расходы на свое обучение. ВЗМШ — некоммерческое учреждение дополнительного образования, наша цель — не получение прибыли, а помощь всем интересующимся разными областями знания. Необходимость возмещения незначительной части расходов вызвана постоянно растущей стоимостью типографских услуг и почтовых расходов, на которые не хватает выделяемых ВЗМШ бюджетных средств. Впрочем, если поступивший не в состоянии нести такие расходы, ВЗМШ освобождает его от уплаты, получив мотивированное заявление.

Внимание! Чтобы успешно учиться в ВЗМШ, надо, чтобы к сентябрю 1995 г. поступающим был усвоен курс средней школы в следующем объеме:

а) отделение математики — трехгодичный поток — 8 классов;
двухгодичный — 9 классов;
одногодичный — 10 классов;
б) отделение биологии — трехгодичный поток — 8 классов;
двухгодичный поток — 9 классов;
в) отделение физики — двухгодичный поток — 9 классов;
одногодичный поток — 10 классов;
г) отделение филологии — четырехгодичный поток — 7 классов;
трехгодичный поток — 8 классов;
двухгодичный поток — 9 классов;
одногодичный поток — 10 классов;
д) отделение экономики — 8 классов.

Вступительная работа на отделение математики

Вы глубже изучите основные разделы школьного курса элементарной математики: метод координат на прямой, на плоскости и в пространстве (даже в четырехмерном), функции и их графики, целые числа и многочлены, тригонометрию, геометрию, начала математического анализа и т.д. Хорошо успевающим учащимся предлагаются дополнительные курсы: комплексные числа, элементы теории игр, задачи олимпиадного типа и др. В выпускном классе большое внимание уделяется подготовке к выпускным и вступительным экзаменам в вузы.

1. Заочной школе исполнилось в этом году a лет, а ее главному основателю — b лет. Найдите a и b, если известно, что уравнение

$$x^2-ax+b=0$$

имеет два целых корня, один из которых — куб другого.

2. В центре шахматной доски размерами 25×25 стоит конь. Нарисуйте множество полей, на которых он может оказаться ровно через 5 ходов.

3. По кругу расставлены 10 красных и 15 синих фишек. Известно, что число пар соседних синих фишек равно p.

а) Сколько существует пар соседних красных фишек?

б) При каких значениях p это возможно?

4. На стороне AB ромба $ABCD$ во внешнюю сторону построен правильный треугольник AMB. Найдите угол CMD.

5. Сколько существует решений в натуральных числах $(x;y)$ уравнения

$$x^2-y^2=1995?$$

6. Существует ли такая компания из n человек, в которой каждый знаком ровно с 4 другими и нет трех, попарно знакомых между собой, если n равно: а) 7; б) 8; в) 9?

7. Пусть K — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Окружность, касающаяся гипотенузы в точке K и проходящая через вершину C, пересекает прямые AC и BC еще в точках M и N. Зная наименьший угол α треугольника ABC, найдите: а) углы треугольника KNM; б) углы треугольника CMN.

8. Найдите все целые числа m и n, не превосходящие по абсолютной величине 10, для которых

$$\frac{m}{7}-\frac{n}{11}=\frac{1}{77}.$$

9. Прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ получен из прямоугольника $ABCD$ параллельным переносом, причем никакие три из их 8 вершин не лежат на одной прямой.

а) Сколько существует параллелограммов, у которых две вершины служат вершинами первого прямоугольника, а две другие — вершинами второго?

б) Сколько из этих параллелограммов попарно неравных?

10. Имеется

а) 10; б) n

неразличимых по внешнему виду монет, одна из которых фальшивая. Как наименьшим числом взвешиваний на чашечных весах (без гирь) узнать, легче фальшивая монета настоящих или тяжелее? (Находить фальшивую монету не требуется.)

11. Внутри угла в 45° расположена точка A.

а) Постройте на сторонах угла точки P и Q такие, что бильярдный шар, двигаясь из точки A по направлению AP, пройдет по ломаной $APQA$ (т.е. вернется в точку A).

б) Докажите, что для отличных от P и Q точек M и N на сторонах угла периметр треугольника AMN больше периметра треугольника APQ.

в) Постройте на сторонах угла такие точки, чтобы бильярдный шар, двигаясь из точки A, отразился от одной стороны угла, затем от второй, затем — опять от первой, а потом попал в исходную точку A.

12. а) Некоторая точка внутри выпуклого 9-угольника соединена отрезками со всеми вершинами. Можно ли так занумеровать эти 9 отрезков всеми числами от 1 до 9 и стороны 9-угольника — тоже числами от 1 до 9, чтобы сумма номеров сторон каждого из 9 треугольников, на которые разбит 9-угольник, была одной и той же?

б) Тот же вопрос для 10-угольника с номерами от 1 до 10.

Вступительная работа на отделение биологии

Особое внимание уделяется областям биологической науки, наименее раскрытым в школьной программе: молекулярная биология, биохимия, иммунология, генетика, биофизика, физиология и т.д.

Поступающие на трехгодичный поток решают задачи № 1—4, на двухгодичный — задачи № 2—6. В ответах можно использовать и факты, найденные в литературе, и ваши собственные идеи. Для сведений, почерпнутых из книг, необходимо указать источники.

1. Какие животные сами производят материал, из которого делают постройки?

2. Какие Вы знаете приспособления, защищающие растения от поедания их животными?

3. Девочка Марина обратила внимание на то, что когда она входит в ванную, тараканы остаются спокойно сидеть на стенках, а когда входит ее мама, они быстро разбегаются. Как Марина может узнать, по каким признакам тараканы отличают ее от мамы?

4. Известно, что одни дикие животные легко одомашниваются, а другие — с большими сложностями. Как Вы думаете, с какими особенностями их образа жизни это может быть связано?

5. Известны случаи, когда у некоторого растения и некоторого животного ареалы совпадают. Какими могут быть причины этого явления?

6. Почему невозможно установить общие для всех людей нормы питания: содержание в ежедневном рационе калорий, белков, жиров, углеводов и других веществ?

Вступительная работа на отделение физики

Основное внимание уделяется изучению физики с помощью решения задач: излагаются методы, пригодные как для стандартных, так и для более сложных ситуаций. В программе — все основные разделы школьного курса физики, большое внимание уделено также темам, мало изучаемым в школе.

Поступающие на двухгодичный поток решают задачи № 1–4, на одногодичный – № 3–6; желающие за один год пройти двухгодичный курс решают все задачи и пишут об этом на обложке тетради.

1. Диск радиусом R катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания с постоянной скоростью v. В момент времени $t = 0$ из нижней точки диска вдоль диаметра начинает ползти жук с постоянной скоростью u. Найдите зависимость от времени скорости жука относительно земли.

2. В цилиндрическом стакане высотой H и радиусом основания R находится однородная палочка с массой единицы длины m (рис.1). Плотность материала стакана ρ, толщина стенок $l \ll R, H$.

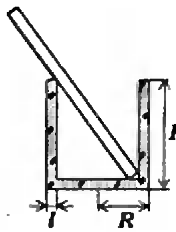


Рис. 1

Найдите, при какой длине палочки стакан перевернется. Как изменится ответ, если стакан наполовину залить водой?

3. По гладкому стержню длиной L, закрепленному под углом α к горизонту, начинает без начальной скорости соскальзывать муфта массой M. В нижней точке в муфту попадает горизонтально летящая пуля массой m и застревает в ней. Найдите, какой должна быть скорость пули, чтобы муфта достигла точки, с которой она начала соскальзывать.

4. Тело соскальзывает с наклонной плоскости высотой H с углом при основании α без начальной скорости. Коэффициент трения μ тела о плоскость зависит от высоты h по закону $\mu(h) = \mu_0(1 - h/H)$. Соскользнув с плоскости, тело падает на горизонтальную поверхность с коэффициентом трения μ_0 и скользит по ней до остановки. Найдите путь, пройденный телом по горизонтальной поверхности. Зазор между наклонной плоскостью и поверхностью много меньше H, но больше размеров тела (рис.2).

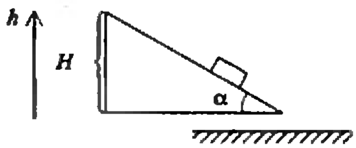


Рис. 2

5. Стеклянный капилляр с внутренним радиусом r_1 и внешним r_2 вставлен в другой капилляр с внутренним радиусом r_3 ($r_2 < r_3$) так, что просвет между стенками капилляров везде одинаков. Капилляры опускают в сосуд с водой. При каком соотношении между их радиусами высоты столбиков воды во внутреннем капилляре и в просвете между капиллярами будут равны?

6. Емкости конденсаторов *1* и *2* одинаковы и равны C, ЭДС батареи равна $\mathcal{E}$ (рис.3). Какое количество теплоты выделится на сопротивлении после замыкания ключа?

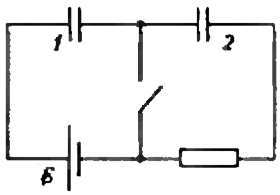


Рис. 3

Вступительная работа на отделение филологии

Тем, кого интересуют филологические науки — литературоведение и лингвистика, мы предлагаем курс «Общая филология». В программе — введение в лингвистику (особое внимание уделено проблемам и методам структурной лингвистики, возможно участие в московской Традиционной олимпиаде по лингвистике и математике на базе МГУ и РГГУ), введение в литературоведение, логика и другие специальные филологические дисциплины.

Желающим лучше узнать, как устроен наш родной язык и почему, тем, кто хочет быть абсолютно уверен в своей грамотности, адресован курс «Русский язык».

Для тех, кто хочет глубже понять произведения русской литературы из школьной (и абитуриентской) программы, узнать, что такое вступительное сочинение и каковы требования к нему, «набить руку» на сочинениях по всем программным произведениям, разработан курс «Сочинение».

Задачи № 1 – 12 — общие для поступающих на все потоки и курсы.

1. В каждом языке имеются многозначные слова, т.е. слова, имеющие несколько значений. Отдельные значения таких слов связаны определенными отношениями:

«иголка (швейная) — иголка (хвойного дерева)» — сходство по форме; «шляпка (женская) — шляпка (гвоздя)» — сходство в расположении предмета относительно чего-либо; «аудитория (помещение) — аудитория (слушатели)» — пространственная смежность и т.п.

Задание 1. Приведите еще по 2 – 3 примера на данные в условии отношения.

Задание 2. Какие еще отношения могут связывать отдельные значения многозначных слов? Приведите примеры (4 отношения, по 2 – 3 примера на каждое).

2. «Пепелюга» — такое название на одном из славянских языков имеет некая известная сказка.

Задание. Как эта сказка называется по-русски?

3. Одна иностранная фирма рекламировала свой товар следующим образом: «Фирма предлагает прочные кожаные наличники всех размеров и форм».

Задание. Определите, какие ошибки были допущены при переводе текста на русский язык. Попробуйте объяснить, почему?

4. От какой европейской денежной единицы в русском языке появилось название посудного прибора?

5. При встречах с русскими поморами и зверопромышленниками ненцы заимствовали слово, которое по-ненецки звучит «торо́ва». Что это за слово?

6. Даны русские слова: болото, владыка, влажный, волосатый, волость, излечение, локоть, обладать, оболочка, поладить, увлечение, уложить.

Среди них есть тройка слов, восходящих к одному и тому же общеславянскому корню.

Задание. Найдите эту тройку. Если в Вашем решении предполагается, что корни изменяли свой вид, — подтвердите возможность каждого изменения примерами.

7. Ниже приводятся предложения и словосочетания на индонезийском языке и их переводы на русский язык, расположенные в другом порядке:

engkau guru adik saja
мой младший брат — друг твоего учителя
guru adik sahabat engkau
ты — учитель моего младшего брата
adik saja sahabat guru engkau
учитель младшего брата моего друга
saja guru sahabat engkau
мой младший брат — твой учитель
adik saja guru engkau
я — учитель твоего друга

Задание 1. Установите правильные переводы индонезийских фраз и значения слов.

Задание 2. Опишите замеченные закономерности построения предложений в индонезийском языке.

Задание 3. Как еще, исходя из полученных Вами правил построения индонезийских предложений, можно перевести вторую фразу на русский язык?

8. Догадайтесь, какое слово в русском языке образовано из слов «тереть» и «доска».

Догадайтесь, какие слова образовали слово «близорукий», если известно, что к рукам оно не имеет отношения.

9. В каком стихотворении М.Ю.Лермонтов использует глагол «кидать» в несовременном для нас смысле?

10. Прочитайте комедию А.С.Грибоедова «Горе от ума». Опишите характер Софьи и подробно объясните, что и кто его сформировали.

11. Что такое пассивный и активный романтизм? Представителем какого течения считается В.А.Жуковский?

12. Прочитайте стихотворения «Пророк» А.С.Пушкин и «Пророк» М.Ю.Лермонтова. Сравните их. Какие особенности характера авторов Вы заметили?

13. (Только для выбравших курс «Русский язык» и/или курс «Сочинение».)

Укажите, какой именно поток Вас интересует. Изложите в форме мини-сочинения развернутый ответ на вопрос: почему именно этот поток Вы выбрали; чего бы Вы от него хотели? Примерный объем сочинения — 3–4 страницы.

Не расстраивайтесь, если какие-то вопросы оказались Вам не по силам. Иногда для зачисления бывает достаточно хорошего, вдумчивого ответа на 2–3 вопроса. Обязательное требование к работе — изложите Ваши рассуждения при ответе на вопросы 6, 7, 8. Ответы без объяснений, как Вы их получили, зачтены не будут.

Вступительная работа на отделение экономики

Здесь преподаются основы экономики бизнеса и предпринимательства. В программе: современные экономические теории, международная экономика, изучение опыта ведущих фирм, применение математических методов в экономике и т.п.

Вступительная работа — тест — включает в себя вопросы по экономике, математике, истории, литературе и культуре. Решения присылайте *только* на открытках с указанием Вашего полного почтового адреса (печатными буквами). Достаточно указать номер вопроса и букву ответа, который Вы считаете правильным (верный ответ оценивается в 1 балл, неверный или отсутствие ответа — в 0 баллов).

1. Подберите наиболее близкий аналог к новому для русского языка слову «менеджер»: а) генеральный директор; б) директор; в) бухгалтер; г) администратор; д) предприниматель.

2. *Монголо-татарское иго рухнуло после:* а) Куликовской битвы; б) стояния на реке Угре; в) битвы при Калке; г) Ледового побоища; д) сражения на реке Воже.

3. Сколько целых чисел удовлетворяют неравенству $x(x-5)<14$: а) 7; б) 8; в) 9; г) 10; д) 11?

4. «Мы живем, под собою не чуя страны...» Автор стихотворения: а) Багрицкий; б) Блок; в) Брюсов; г) Мандельштам; д) Тютчев.

5. Вложение капитала в производство продукции и создание запасов — это: а) индексация; б) инвестиция; в) приватизация; г) ассигнация; д) корпорация.

6. Жители деревень Веники (100 чел.) и Мочалкино (200 чел.), расстояние между которыми равно 3 км, решили построить баню в таком месте, чтобы суммарный путь до бани для всех любителей попариться (а это все население обеих деревень) был минимальным. Баню следует построить: а) в Вениках; б) в Мочалкине; в) ровно на полпути между деревнями; г) в 1 км от Веников; д) в 1 км от Мочалкина.

7. Какая пара русских городов стояла на пути «из варяг в греки»: а) Новгород и Псков; б) Новгород и Киев; в) Москва и Смоленск; г) Владимир и Суздаль; д) Москва и Киев?

8. Кто написал роман «Бесы»: а) Гоголь; б) Достоевский; в) Булгаков; г) Пастернак; д) Солженицын?

9. Когда завершилось формирование единого всероссийского рынка: а) в 11 веке; б) в 13 веке; в) в середине 15 века; г) в середине 17 века; д) в середине 19 века?

10. Школьник положил в коммерческий банк 200 т.р. Сколько денег будет на его счету через два года, если банк выплачивает 50% годовых (рубли не учитывайте): а) 300 т.р; б) 350 т.р; в) 400 т.р; г) 450 т.р; д) 500 т.р?

11. После Октябрьской революции главой нашего государства стал: а) Генеральный секретарь ЦК ВКП(б); б) Председатель Совнаркома; в) Председатель ВЦИК; г) Председатель Реввоенсовета; д) Председатель ВЧК.

12. Банкнотой называется: а) сообщение о банкротстве; б) долговая расписка; в) чек на покупку определенного товара; г) вид акции; д) банковский билет — вид денег.

13. Точки D, E и G — середины сторон треугольника ABC. Во сколько раз площадь треугольника DEG меньше площади треугольника ABC: а) в 2 раза; б) в 4 раза; в) в 6 раз; г) в 8 раз; д) в 16 раз?

14. Промышленная революция впервые произошла в: а) Нидерландах; б) Англии; в) США; г) Испании; д) Германии.

15. После приватизации предприятия производительность выросла на 50%, поэтому решили *сократить* в два раза рабочий день. В результате выпуск продукции: а) возрос на 25%; б) уменьшился на 25%; в) не изменился; г) возрос на 10%; д) уменьшился на 10%.

16. Первая биржа в России была создана в: а) 1703 г.; б) 1801 г.; в) 1825 г.; г) 1861 г.; д) 1884 г.

17. Каждая акция компании «Пузырь» приносит 10% годовых, компании «Соломинка» — 15%, а «Лапоть» — 20%. На начало года цена всех акций одинакова. Какой набор из 10 акций лучше купить (в каждом наборе компании идут в вышеуказанном порядке): а) 2, 3, 5; б) 3, 2, 5; в) 1, 4, 5; г) 4, 1, 5; д) 6, 2, 2?

18. Самый известный менеджер, спасший компанию «Крайслер» от краха: а) Дейл Карнеги; б) Генри Форд; в) Ли Якокка; г) Джо Блоу; д) Рональд Рейган.

19. Больше всего нефти на территории бывшего СССР добывается: а) в Азербайджане; б) в Западной Сибири; в) в Восточной Сибири; г) в Карпатах; д) в Поволжье.

20. На острове Чунга-Чанга в результате инфляции цены подскочили на 300%. Возмущенное население поймало вождя и потребовало вернуть цены к прежнему уровню. На сколько процентов вождь должен уменьшить цены: а) на 300%; б) на 200%; в) на 100%; г) на 75%; д) на 50%?

Вступительная работа на отделение химии

1. Предложите вариант превращения веществ по схеме:

$$\begin{array}{ccccc} A & \to & Б & \to & В \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & & X & & X \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ Г & \to & Д & \to & Е \end{array}$$

X — одно и то же вещество для данного варианта.

2. Над нагретой навеской цинка массой 0,39 г пропустили газ X. В результате получили 1,35 г твердого вещества и 134,4 мл горючего газа (н.у.). Определите газ X и напишите уравнение реакции.

3. Три элемента A, B, C находятся в одном ряду Периодической системы и образуют соединения A_2B и AC, которые при взаимодействии с соляной кислотой дают газообразные вещества, при этом одно из них самовоспламеняется, а другое может гореть на воздухе. Соединение A с хлором растворимо в воде, причем его раствор обладает слегка кислой реакцией, соединение B с хлором

бурно реагирует с водой, а C образует с хлором несколько соединений, обладающих неприятным запахом.

Определите, о каких элементах идет речь.

4. Случайно в банку с порошком металлического магния попал карбонат магния. Порошки равномерно перемешались. С помощью каких реакций можно определить состав образовавшейся смеси?

5. Можно ли из двух солей получить кислоту, из двух кислот получить соль, из двух солей — основание? Если все или некоторые из названных процессов возможны, напишите уравнения соответствующих реакций и укажите условия их проведения.

6. При взаимодействии металла с некоторой жидкостью образуются два новых вещества с относительными молекулярными массами 25 и 4. Какие вещества вступили в реакцию?

7. Могут ли существовать смеси газов:

H_2+O_2; $HBr+Cl_2$; $CO+NH_3$; CO_2+Cl_2; H_2S+NH_3; H_2S+F_2; $CO+HCl$; NH_3+HCl; SO_2+O_2; $NO+O_2$; O_2+Cl_2?

Если могут, укажите, при каких условиях, а если нет, то почему?

8. В пяти банках без этикеток находятся порошки гидроксида натрия, сульфата магния, сульфата бария, хлорида бария, нитрата серебра. Используя в качестве дополнительного реактива только воду, определите, что в какой банке находится.

9. В кабинете химии нашли разорванную шпаргалку, на которой сохранились лишь правые части уравнений. Допишите химические реакции, зная, что все коэффициенты расставлены верно:

$= KNO_3 + KNO_2 + H_2O$,

$= CO_2\uparrow + CaCl_2 + H_2O$,

$= CuSO_4 + 5H_2O$,

$= 2PbO + 4NO_2 + O_2$,

$= NaH_2PO_4 + H_2O$,

$= N_2 + 2H_2O$,

$= 2N_2 + 6H_2O$,

$= 6N_2 + 2H_2O$,

$= 3Cu + N_2 + 3H_2O$.

10. Через 400 г раствора серной кислоты с массовой долей 42,875% пропустили оксид серы (VI). При этом раствор поглотил 28 литров газа (н.у.). Определите массовую долю вещества в образовавшемся растворе.

11. Имеется 5 г смеси солей нитрата калия и хлорида калия. При действии нитрата серебра выпало 1,5 г осадка. Определите процентный состав исходной смеси.

ЗАОЧНАЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКАЯ ШКОЛА ПРИ МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) Министерства образования Российской Федерации при Московском физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся общеобразовательных учреждений — школ, лицеев, гимназий и т.п., расположенных на территории Российской Федерации. ЗФТШ при МФТИ как государственное учреждение дополнительного образования работает с 1966 года. Научно-методическое руководство школой осуществляет Московский физико-технический институт. Финансирует ЗФТШ Министерство образования Российской Федерации. За годы работы школу окончили почти 50000 учащихся; практически все ее выпускники поступают в ведущие вузы страны и каждый второй студент МФТИ — выпускник ЗФТШ.

Цель школы:

— оказание квалифицированной помощи тем, кто интересуется физикой и математикой, в расширении, углублении и систематизации своих знаний по этим предметам;

— развитие у учащихся интуиции, формально-логического и алгоритмического мышления, навыков моделирования, использования математических методов для изучения физики, понимания физической стороны применяемых математических приемов, воспитание научной культуры;

— формирование в процессе обучения познавательной активности, умения приобретать и творчески распоряжаться полученными знаниями, потребности к научно-исследовательской деятельности в процессе активной самостоятельной работы.

Обучение в ЗФТШ бесплатное.

На 1995/96 учебный год набор проводится в 8, 9, 10 и 11 классы на следующие формы обучения:

— *Индивидуальное заочное обучение*

Прием на заочное отделение проводится на конкурсной основе по результатам выполнения вступительных заданий по физике и математике, приведенных ниже. Полная программа обучения рассчитана на 4 года (8 — 11 кл.), но поступать можно в любой из указанных классов.

В течение учебного года, в соответствии с программой ЗФТШ, каждый ученик будет получать задания по физике и математике (по 3 задания по каждому предмету для 8 класса, по 6 — 7 заданий для 9, 10 и 11 кл.), а затем рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий вместе с проверенной работой учащегося.

Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и 8 — 12 контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Задания ЗФТШ составляют опытные преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ. Эти задания рассчитаны на любознательных, желающих учиться школьников, и надеемся, что они покажутся Вам интересными, достаточно сложными и нескучными.

Работы учащихся-заочников проверяют студенты, аспиранты и выпускники МФТИ (часто — выпускники ЗФТШ), которые и ведут активную переписку с учащимися по темам заданий и другим интересующим их вопросам.

— *Очно-заочное обучение в физико-технических кружках и факультативах*

Заочные физико-технические кружки и факультативы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении двумя преподавателями — физики и математики. Руководители кружка или факультатива набирают и зачисляют в них учащихся (не менее 8 — 10 человек), успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Группа принимается в ЗФТШ, если директор общеобразовательного учреждения сообщит в ЗФТШ фамилии, имена, отчества ее руководителей и поименный список учащихся (с указанием класса и итоговых оценок за вступительные задания по физике и математике). Все эти материалы и конверт для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом на имя одного из руководителей следует выслать до 25 мая 1995 года по адресу: 141700 г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, ЗФТШ, с указанием «Кружок» или «Факультатив» (тетради с работами учащихся в ЗФТШ не высылаются). Работа руководителей кружков и факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением по представлению ЗФТШ при МФТИ как факультативные занятия. Телефон для справок: 485-17-66.

Руководители кружков и факультативов будут получать в течение учебного года учебно-методические материалы ЗФТШ (программы по физике и математике для каждого класса, задания по темам программы, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся) и информационно-рекламные материалы (газеты МФТИ «За науку», проспекты МФТИ и его факультетов с правилами приема и т.п.). Работы учащихся проверяют и оценивают руководители кружков и факультативов, а в ЗФТШ ими высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию.

— *Очное обучение в вечерних консультационных пунктах (ВКП)*

Для учащихся Москвы и Московской области, желающих посещать занятия по физике и математике по программе ЗФТШ, работают вечерние консультационные пункты, набор в которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам собеседования по физике и математике, которое проводится в мае и сентябре.

Справки по телефону: 485-17-66.

Программы ЗФТШ при МФТИ по физике и математике являются дополнительными образовательными программами и одинаковы для всех форм обучения.

Кроме занятий по этим программам, ученикам ЗФТШ предлагается участвовать в межвузовских конкурсах (например, в ежегодном Всероссийском конкурсе «Абитуриент»), в пробных вступительных экзаменах в МФТИ, которые проводятся в марте и июне, в очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультетов и т.п.

По окончании учебного года успешно выполнившие программу ЗФТШ по выбранной форме обучения переводятся в следующий класс, а выпускники (11 кл.) получают Свидетельство об окончании с итоговыми оценками по физике и математике.

Вне конкурса в ЗФТШ принимаются участники областных, краевых, республиканских, зональных и Всероссийских олимпиад по физике и математике.

Вступительные задания по физике и математике каждый ученик должен выполнить самостоятельно на русском языке и аккуратно переписать в одну школьную тетрадь. Порядок задач сохраняйте тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решениями обязательно вышлите справку из школы (лицея, гимназии), в которой учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. На лицевую сторону обложки наклейте лист бумаги, четко заполненный, желательно печатными буквами, по образцу. Внизу под заполненной анкетой начертите таблицу для оценок за вступительное задание.

Внимание! Для получения ответа на вступительное задание обязательно вложите в тетрадь конверт с наклеенной маркой по почтовому тарифу. На конверте напишите свой домашний адрес.

Срок отправления решений — *не позднее 15 марта 1995 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1995 г.

Тетрадь с выполненными заданиями (по физике и математике) высылайте по адресу: *141700 г. Долгопрудный Московской области, Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.*

Для жителей Украины работает Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Желающим поступить следует высылать работы по адресу: *252680 г. Киев, пр. Вернадского, д.36, Институт металлофизики, Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Телефон: 444-95-24.*

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике. В задании по физике задачи 1 — 5 предназначены для учащихся седьмых классов, 6 — 11 для восьмых классов, 9 — 14 для девятых классов, 13 — 18 для десятых классов. В задании по математике задачи 1 — 5 предназначены для учащихся седьмых классов, 3 — 8 для восьмых классов, 5 — 11 для девятых классов, 8 — 14 для десятых классов. Номера классов указаны для текущего 1994/95 учебного года.

1. Область (край или республика)	Смоленская обл.
2. Фамилия, имя, отчество	Ящерицын Алексей Михайлович
3. Класс, в котором учитесь	десятый
4. Номер школы	17
5. Вид школы (обычная, лицей, гимназия, с углубленным изучением предмета и т.п.)	гимназия
6. Подробный домашний адрес (с указанием индекса и телефона)	215100 г. Вязьма, ул. Московская, д.37, кв.6, т.5-92-58
7. Место работы и должность родителей отец мать	 завод, электромонтер ЦРБ, медсестра
8. Адрес школы, телефон	215100 г. Вязьма, ул. Московская, д.20, т.5-17-34
9. Фамилия, имя, отчество преподавателей по физике по математике	 Федотов Владимир Николаевич Захарова Надежда Юрьевна

Вступительное задание по физике

1. Ровно в 12.00 дядя Федор отправился на электричке из Москвы в Простоквашино. В то же самое время из Простоквашино в Москву на скором поезде отправился кот Матроскин. На промежуточной станции, находящейся от Москвы на расстоянии L_1, Матроскин увидел дядю Федора и быстро перебежал к нему в электричку. Успеют ли они к обеду, приготовленному Шариком к 14.00, если известно, что средняя скорость поезда на 20% больше средней скорости электрички, а встретились они в тот момент, когда часы показывали 13.00?

2. На стадионе для тараканьих бегов заканчивались последние приготовления к финальным бегам на Кубок Большого Таракана. К сожалению, работники стадиона успели подготовить только половину беговой дорожки, а на второй половине лежал песок. На тренировку вышли два брата-близнеца Фердинанд и Цезарь. Каждый из них на дорожке развивает скорость v_1, на песке — v_2. Чтобы не мешать друг другу, они от места старта побежали в противоположные стороны. Через какое время после старта

№ пп								
Ф								
М								
Л. №								

встретятся Фердинанд и Цезарь, если известно, что старт находится на границе готовой дорожки и песка, а длина всей дорожки L?

3. В левом борту пиратского судна «Бесстрашная килька» на глубине 1 м под водой имелась наспех заделанная небольшая пробоина, выдерживающая максимальное давление $2{,}5\cdot10^4$ Па. Напав в открытом море на банановый транспорт, пираты перегрузили себе на борт 200 т бананов. Кому достанутся эти бананы: пиратам или рыбам? При проведении расчетов считайте, что судно имеет высокие борта и площадь судна в горизонтальном сечении равна 100 м^2.

4. Шар, до половины погруженный в воду, лежит на дне сосуда и давит на него с силой, равной трети его силы тяжести. Найдите плотность материала шара.

5. В сосуд с водой вертикально опущена трубка цилиндрической формы сечением 2 см^2. В трубку налили 72 г масла ($\rho_м = 900$ кг/м^3). Найдите разность уровней воды в сосуде и масла в трубке. Трубка не касается дна сосуда.

6. Уходя от погони, пираты со шхуны «Свирепый минтай» спрятали на льдине то, что дарило им силы и бодрость каждый день, — мороженое «МАРС» (целых 5 тонн). Оно лежало ровным слоем по всей поверхности льдины. Плоская льдина площадью 1000 м^2 и толщиной 15 см начала таять. Ее толщина уменьшалась на 22 мм в день. Что будет написано на лице капитана «Свирепого минтая», когда они вернутся в бухту через 5 дней?

7. Аквариум, имеющий длину 50 см, ширину 20 см и высоту 40 см, заполнен водой на 3/4 своего объема. На сколько изменится сила давления воды на стенки аквариума, если в него опустить деревянный кубик объемом 1000 см^3? Как изменится результат, если деревянный кубик заменить на медный такого же объема? Плотность дерева считайте равной 400 кг/м^3.

8. Трубка радиусом r, закрытая снизу металлической пластиной, имеющей форму цилиндра радиусом R ($R>r$) и высотой h, погружена в воду на глубину H (рис. 1). Ось трубки совпадает с осью

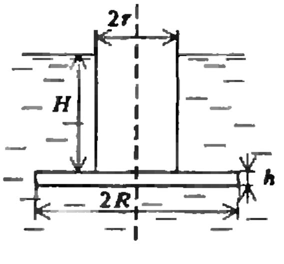


Рис. 1

пластинки. Давление воды прижимает пластинку к трубке. До какой высоты следует налить воду в трубку, чтобы пластинка отделилась от трубки? Плотность металла $\rho_м$.

9. Алхимик Пьетро Нетудатти изготовил 1 кг золотого порошка. Достав из печи порошок, нагретый до температуры 1000 °С, он ссыпал его в сосуд с тремя литрами воды при 10 °С. За всем этим из укрытия наблюдал злоумышленник Шура, которому для полного счастья не хватало немного золотишка — грамм 200. Стоило Нетудатти удалиться, как Шура мгновенно запустил руку в перчатке в сосуд, сгреб сколько мог порошка и был таков. Хватит ли Шуре для полного счастья вытащенного золота, если известно, что порошок, который оказался у Шуры в руке, имел температуру 70 °С, а в сосуде в конце концов установилась температура 20 °С? Удельные теплоемкости воды и золота равны 4200 Дж/(кг·°С) и 130 Дж/(кг·°С) соответственно. Потерями тепла на нагревание сосуда и окружающего воздуха пренебречь.

10. Смесь, состоящую из 5 кг льда и 15 кг воды при общей температуре 0 °С, нужно нагреть до температуры 80 °С, впуская в нее водяной пар с температурой 100 °С. Определите необходимую для этого массу пара. Удельная теплоемкость льда 2100 Дж/(кг·°С), удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·°С), удельная теплота парообразования воды $2{,}26\cdot10^6$ Дж/кг. Весь впущенный пар остается в смеси.

11. Кусок проволоки AB длиной L, имеющий сопротивление R_0, касается вершины прямого угла, изготовленного из куска такой же проволоки (рис. 2).

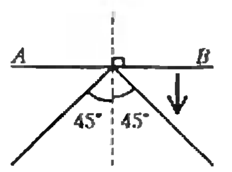


Рис. 2

Проводник AB смещают таким образом, что он всегда остается перпендикулярным биссектрисе угла, направление смещения указано на рисунке. На какое расстояние нужно сместить проводник из начального положения, чтобы сопротивление между точками A и B уменьшилось в полтора раза?

12 (экспериментальная). Определите диаметр проволоки, из которой изготовлена спираль в лампе накаливания. Лампа при этом должна оставаться целой.

13. Небольшое тело массой m прикреплено к стенке с помощью невесомой пружины и лежит на горизонтальной шероховатой доске (рис. 3). Линия,

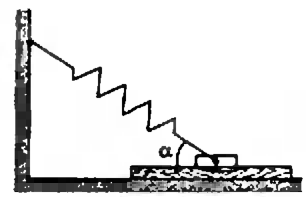


Рис. 3

соединяющая точки крепления пружины на стенке и на теле, составляет угол α_0 с поверхностью доски. Доску медленно смещают вправо. В тот момент, когда ось пружины составляла угол α_1 с поверхностью доски, тело начало скользить. Определите жесткость пружины, если известно, что коэффициент трения между телом и доской μ, начальная длина пружины L. В начальном состоянии пружина не деформирована.

14. Бревно цилиндрической формы расположено вертикально так, что его нижний конец касается поверхности воды. Бревно отпускают, и оно начинает падать без начальной скорости по гладким вертикальным направляющим. Определите максимальную скорость бревна, если известно, что его длина L, площадь сечения S, масса M. Считайте, что со стороны воды на бревно действует только выталкивающая сила. Сопротивлением воздуха, энергией волн, возникающих в результате удара бревна о поверхность воды, а также изменением уровня воды пренебречь.

15. В закрытом с обоих торцов откачанном цилиндре подвешен на пружине скользящий без трения поршень, положение равновесия которого находится у дна цилиндра. Под поршень вводится такое количество газа, что поршень поднимается на высоту h (рис. 4). На какой высоте установится поршень, если этот

Рис. 4

газ нагреть от начальной температуры T до температуры T_1? Сила, действующая со стороны пружины на поршень, пропорциональна смещению поршня.

16. В цилиндрическом сосуде находится в равновесии тяжелый теплонепроводящий поршень. Над поршнем и под ним

находятся одинаковые массы газа при одинаковых температурах. Отношение верхнего объема к нижнему равно 3. Каким станет соотношение объемов, если температуру газа увеличить в 2 раза?

17. Какое количество росы выпадет из 1 $м^3$ воздуха при изотермическом уменьшении его объема в 5 раз, если температура воздуха 10 °С, а относительная влажность 60 %? Плотность насыщенного водяного пара при 10 °С равна 9,43 $г/м^3$.

18. Имеются два соосных неподвижных равномерно заряженных кольца, расположенных в одной плоскости. Радиусы колец $R_1 = R$ и $R_2 = 3R$, а заряды $Q_1 = -Q$ и $Q_2 = +2Q$ $(Q>0)$. Точечному заряду $-q$ массой m, расположенному на оси далеко от колец, сообщается начальная скорость v_0 по направлению к центру колец. Определите, при каком минимальном значении v_0 заряд пролетит через систему колец.

Вступительное задание по математике

1. Велосипедист должен попасть в место назначения к определенному сроку. Известно, что если он поедет со скоростью 15 км/ч, то приедет на час раньше, а если скорость будет 10 км/ч, то опоздает на 1 час. С какой скоростью должен ехать велосипедист, чтобы приехать вовремя?

2. Если от задуманного трехзначного числа отнять 9, то получившееся число разделится на 9, если отнять от задуманного числа 10, то результат разделится на 10, а если отнять 11, то результат разделится на 11. Какое число было задумано?

3. На одном и том же берегу реки расположены города A и B (рис. 5). Где следует построить мост через реку, чтобы он был одинаково удален от обоих городов?

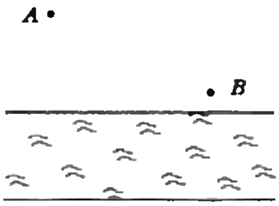


Рис. 5

4. Сколько различных замкнутых цепочек можно составить из двух белых, двух синих и одной зеленой бусин?

5. Постройте на плоскости точку, равноудаленную от двух прямых и находящуюся на расстоянии a от данной точки. Сколько решений имеет задача?

6. Решите уравнение

$$x^2 + |x+1| - 7 = 0.$$

7. В городе N живет 44100 человек. Известно, что каждые три года население города увеличивалось на 5%. Сколько жителей было в городе N шесть лет назад?

8. При каких значениях параметров b и c расстояние от начала координат до меньшего из корней уравнения

$$x^2 + bx + c = 0$$

в два раза короче, чем расстояние до большего корня?

9. В равнобокую трапецию вписана окружность. Известно, что площадь трапеции равна 32 $см^2$, а ее боковая сторона в два раза длиннее высоты. Найдите радиус окружности.

10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y, \\ \cos^2 x = \sin x \sin y. \end{cases}$$

11. В квадрате $ABCD$ точки M и N принадлежат сторонам BC и CD, причем

$$\frac{BM}{MC} = \frac{1}{2}, \ \frac{CN}{ND} = \frac{3}{2}.$$

Найдите площадь пятиугольника, ограниченного прямыми BC, CD, AN, BD и AM, если длина стороны квадрата равна a.

12. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 6xz + 3x = 2z - 2, \\ xy + zy = 2(z - x + 1), \\ zy - 6xz + y = 3x + 3. \end{cases}$$

13. Дан шар с радиусом $R = 2$ см. Вершиной пирамиды служит центр шара O, а основанием — квадрат, вписанный в окружность сечения шара некоторой плоскостью. На каком расстоянии от точки O должна располагаться эта плоскость, чтобы площадь поверхности пирамиды равнялась 8 $см^2$?

14. Какое наименьшее значение может принимать расстояние между такими двумя точками A и B параболы $y = x^2$, что прямая AB перпендикулярна касательной к параболе в точке A?

НОВЫЙ ПРИЕМ В СУНЦ МГУ И НГУ

Московский и Новосибирский государственные университеты объявляют набор учащихся в специальные учебно-научные центры МГУ и НГУ (созданные на базе школ-интернатов при этих университетах). Первый тур вступительных экзаменов — заочный письменный вступительный экзамен по математике, физике, химии, экономике, информатике для учащихся 9 и 10 классов 11-летней школы интересующихся этими предметами. Успешно выдержавшие заочный экзамен по решению приемной комиссии будут в апреле — мае 1995 г. приглашены в областные центры Российской Федерации (РФ) на устные экзамены.

Работа должна быть выполнена в обычной ученической тетради.

На первой странице укажите свои анкетные данные:

1. Фамилия, имя, отчество (полностью).
2. Домашний адрес (подробный), индекс.
3. Подробное название школы, класс.

Работы отправляйте простыми бандеролями (обязательно вложите в работу конверт (с маркой) с Вашим домашним адресом). Если Вы проживаете в Европейской части РФ, высылайте Вашу работу по адресу:

121357 Москва, Кременчугская ул., 11, СУНЦ МГУ, Приемная комиссия.

Внимание: с 1992 г. в учебный центр МГУ без предоставления общежития принимаются жители г. Москвы.

Учащиеся 10 классов принимаются в 11 класс учебного центра при МГУ только в физико-математические классы!

Если Вы живете на Дальнем Востоке или в Средней Азии, пишите по адресу: *630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, Учебно-научный центр НГУ, Олимпиадный комитет.*

Срок отправки работ — *не позднее 30 марта 1995 года* (по почтовому штемпелю). Работы, высланные позже этого срока, рассматриваться не будут.

Если Вы не сможете решить все задачи, не отчаивайтесь — комиссия рассмотрит работы с любым числом решенных задач. ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!

Основное задание

9 класс

Математика

1. Числа a, b, c удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} a + b + c = 1, \\ a^3 + b^3 + c^3 = 1. \end{cases}$$

Докажите, что по крайней мере одно из них равно 1.

2. Найдите длину диагонали прямоугольника площади $1/2$, вписанного в

квадрат со стороной 1 так, что на каждой стороне квадрата лежит в точности одна вершина прямоугольника.

3. Найдите корень уравнения

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0),$$

если он также является корнем уравнения

$$bx^2+cx+a=0.$$

4. Найдите три натуральных числа x, y, z, удовлетворяющих уравнению

$$x^3+y^4=z^7.$$

Докажите, что это уравнение имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

Физика

1. На тело массой M, лежащее на горизонтально плоскости, начинает действовать переменная сила, направленная под углом α к горизонту (рис.1). Величина силы меняется от 0 до ∞. Постройте график зависимости величины силы трения от величины приложенной силы. Коэффициент трения тела о плоскость μ.

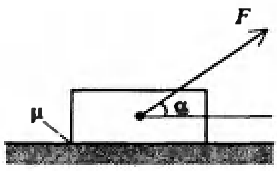


Рис. 1

2. Два тела, массы которых m_1 и m_2, связаны пружиной жесткостью k и движутся по гладкому столу под действием силы F (рис.2). Найдите растяжение пружины.

Рис. 2

3. Тележка массой $M=4$ кг движется по горизонтальной поверхности со скоростью $v_0=0{,}5$ м/с. На тележку вертикально опускают груз массой $m=1$ кг. Через какой промежуток времени тележка и груз будут двигаться с одинаковыми скоростями? Коэффициент трения между грузом и тележкой $\mu=0{,}1$.

4. Верхний конец лестницы опирается на гладкую стену, а нижний стоит на шероховатом полу. На какое наибольшее расстояние от стены можно отодвинуть нижний конец лестницы, чтобы она не скользила? Длина лестницы $l=2$ м, коэффициент трения между лестницей и полом $\mu=0{,}5$.

10 класс

Математика

1. Найдите положительные ($x>0$, $y>0$, $z>0$) решения системы:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z}=3,\\ x+y+z\le 12.\end{cases}$$

2. Две окружности пересекаются в точках A и B. Отрезок CD проходит через точку A, а отрезок EF — через точку B так, что точки C и E лежат на одной окружности, а точки D и F — на другой, как показано на рисунке 3. Известно, что $CE=a$, $DF=b$, а площади четырехугольников $ACEB$ и $ADFB$ равны. Найдите AB.

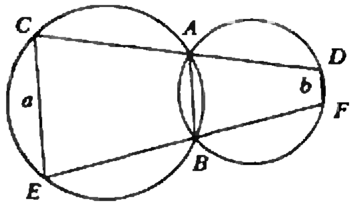


Рис. 3

3. Уравнения $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$ и $bx^3+cx^2+dx+a=0$ имеют общий корень. Докажите, что этот корень также удовлетворяет уравнению $cx^3+dx^2+ax+b=0$.

4. См. задачу 4 для 9 класса.

Физика

1. Небольшое тело соскальзывает с нулевой начальной скоростью без трения с вершины полусферы радиусом R. На какой высоте тело оторвется от поверхности полусферы?

2. На горизонтальной поверхности покоится тело, к которому приложена сила $\vec{F}$ (рис. 4). При каких значениях угла α тело будет оставаться в покое независимо от величины силы? Коэффициент трения $\mu=0{,}15$.

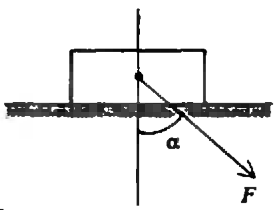


Рис. 4

3. Два шарика, радиусы которых отличаются в $n=5$ раз, заряжены равными одноименными зарядами. Во сколько раз изменится сила взаимодействия между шариками, если их соединить проволокой?

4. Процессы, происходящие в цилиндре теплового двигателя с идеальным газом, изображены на диаграмме $p-V$ (рис.5). Известно, что $T_2=500$ К, $T_3=450$ К, $T_4=300$ К. Найдите, на сколько градусов температура T_1 отличается от T_3.

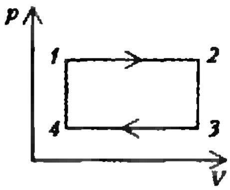


Рис. 5

Внимание! Для учащихся 9 классов, поступающих в СУНЦ МГУ, в анкетных данных (на 1 странице работы) укажите профиль обучения: физико-математический, компьютерно-информационный, экономический, химический, биофизический. Поступающим на компьютерно-информационное, экономическое, химическое отделения необходимо решить дополнительные задачи по профилю.

Дополнительные задачи по информатике для поступающих на компьютерно-информационное отделение

1. Напишите программу на любом известном Вам языке программирования. Программа должна определять, делится ли на 3 произвольное число, десятичная запись которого может содержать до N цифр ($N\le 1000$). При этом нельзя использовать никаких операций деления (в том числе целочисленного деления и операцию взятия остатка от деления).

2. На единичной окружности задано N дуг ($N\le 1000$). Начало и конец каждой дуги обозначаются целым числом градусов. Все дуги ориентированы по часовой стрелке, т.е. дуга [300; 30] имеет «протяженность» 90 градусов, а дуга [30; 300] — 270 градусов. Напишите программу, которая будет определять размер в градусах области пересечения всех дуг.

Дополнительные задачи по химии для поступающих на химическое отделение

1. При нагревании 150 г смеси бертолетовой соли с диоксидом марганца выделилось 33,6 л газа (н.у.). При растворении продуктов реакции в горячей воде осталось 3,0 г осадка. Определите состав (%) твердых продуктов реакции.

2. При растворении 5,38 г кристаллогидрата сульфата цинка в 92 см^3 воды получен раствор с массовой долей сульфата цинка 0,0331. Установите состав кристаллогидрата (значение X).

Дополнительные задачи по математике для поступающих на экономическое отделение

1. Найдите наименьшее значение параметра a, при котором графики функций $y = x^2$ и $y = 2x + a$ имеют общую точку (общие точки).

2. Мебельная фабрика выпускает шкафы и тумбочки. При их изготовлении используется два типа древесных материалов (досок). В таблице приведены данные о затратах каждого материала (в м) на изготовление единицы каждого вида продукции, а также величина прибыли от реализации единицы каждого вида продукции и общие объемы ресурсов каждого вида. Определите, сколько шкафов и тумбочек должна выпустить мебельная фабрика, чтобы общая прибыль была максимальной (решите задачу геометрически).

	Затраты на единицу продукции		Объем ресурсов (м)
	шкаф	тумбочка	
Доска первого типа (м)	21	5	1340
Доска второго типа (м)	10	7	1100
Прибыль (руб.)	2400	1000	

ТУРНИР ЮНЫХ ФИЗИКОВ

В июне этого года VII Международный турнир юных физиков состоялся в Гронингенском университете в Нидерландах. В нем приняли участие команды Белоруссии, Венгрии, Грузии, Нидерландов, Польши, России, Словакии, Узбекистана, Украины, Чехии, Швеции. Россия была представлена двумя командами — победителями Российского турнира: командой СУНЦ МГУ и г.Фрязино Московской области. В финал вышли три команды. Первое место разделили команды Чехии и СУНЦ МГУ. Второе место присуждено команде Грузии.

Организаторы предложили интересную культурную программу. Участники турнира посетили некоторые лаборатории физического факультета, совершили экскурсии по каналам и в Амстердам, увидели уникальную дамбу, отделяющую внутренние водоемы Нидерландов от моря, посетили заповедный остров в Северном море. Следующий Международный ТЮФ решено провести в Польше. Опыт прошедшего турнира наиболее остро показал недостаточность знания нашими школьниками английского языка, необходимого для активного общения и ведения дискуссий. Это, несомненно, следует учесть при подготовке команд.

В этом году возрождается Московский ТЮФ, который будет проходить с 15 декабря на физическом факультете МГУ. В нем примут участие команды Москвы и Московской области, успешно выступившие в заочном конкурсе. Всероссийский открытый турнир состоится в марте — апреле 1995 г. Заявки принимаются до 1 февраля. Участники Всероссийского турнира будут оплачивать только прямые расходы, включая проживание, питание и, по желанию, культурную программу. Международный турнир будет проведен в мае — июне 1995 г.

Для получения более полной информации и присылки заявок и работ заочного конкурса сообщаем адрес Оргкомитета ТЮФ:

121357 Москва, Кременчугская ул., д. 11, кафедра физики СУНЦ МГУ; т. 445-53-06, факс 445-46-34.

Адрес электронной почты:
lob@bio.phys.msu.su.

Ниже приводятся задачи Московского турнира, которые составят основу Российского и Международного турниров.

Задачи XVII Московского турнира юных физиков

1. «Парадокс»

Придумайте парадоксальную физическую демонстрацию для розыгрыша соперника.

2. «Гравилет»

Космический аппарат в форме гантели с изменяющейся длиной может без помощи реактивных двигателей перейти с околоземной орбиты (300 км над поверхностью Земли) на лунную. Рассчитайте минимальное время, которое понадобится аппарату для такого маневра.

3. «Занавес»

В театрах иногда применяют световой занавес. Какая конструкция обеспечит функционирование занавеса при минимальной мощности ламп, приходящейся на один метр ширины сцены?

4. «Бумажный мост»

Объявляется конкурс на лучшую конструкцию моста из стандартного листа бумаги формата А4. Качество моста оценивается по величине Р×Д, где Р — максимальная нагрузка, которую мост выдержит на середине пролета, Д — длина пролета. Клей использовать запрещается. $Д_{макс} = 20$ см.

5. «Пузырьки»

Пластиковую бутылку наполнили водой из-под крана и положили в морозильную камеру. При замерзании воды в объеме льда образуются пузырьки воздуха. Чем определяется расположение соседних пузырьков? Почему они выстраиваются в цепочки?

6. «Мороженое»

Получите экспериментально переохлажденную воду. На сколько градусов ниже 0 °С Вам удалось ее охладить? Каким, по Вашему мнению, будет рекорд в этом эксперименте? Измерьте температуру замерзания воды.

7. «Капля»

Капля соленой воды, высыхая на гладкой поверхности, образует систему колец. Исследуйте и объясните это явление.

8. «Богатырь»

Русский богатырь Илья Муромец однажды бросил булаву весом в сорок пудов (1 пуд = 16 кг) и упала булава через сорок дней на то же место. Оцените параметры богатырского броска.

9. «Юпитер»

Космические пираты украли Юпитер. Какими могут быть последствия?

10. «Венера»

Предложите проект превращения Венеры в пригодную для жизни планету.

11. «Шина»

Один школьник рассказывал, что, катаясь на велосипеде, потерял ниппель, однако развил такую скорость, что шина не сминалась до обода, т.е. вела себя так же, как и накачанная воздухом. Какова была скорость велосипедиста?

12. «Кинескоп»

Известный физик А. Ферст решил посмотреть по телевизору футбольный матч, а другой известный физик Б.Секонд проделал в кинескопе дырочку диаметром 1 мкм. Успел ли А.Ферст досмотреть футбольный матч?

13. «Батут»

Спортсмен, прыгая на батуте, хочет совершить как можно больше оборотов. Какие советы вы ему дадите и сколько оборотов сделает рекордсмен?

14. «Двигатель»

Вы приобрели 3-фазный двигатель на 380 В мощностью 0,5 кВт, а дома электросеть однофазная, 220 В. Изготовьте устройство, которое обеспечит Вам работу двигателя с максимально возможной мощностью и КПД.

15. «Данди-крокодил»

Герой известного фильма подавал звуковые сигналы, вращая над головой дощечку, привязанную одним концом к веревке. Объясните как возникает звук и почему существуют устойчивые состояния движения дощечки.

16. «Звук»

Переведите электрическую энергию, запасенную в конденсаторе емкостью 10 мкФ, который заряжен до напряжения 30 В, в звуковую. Разработайте устройство, не содержащее внутри себя источников энергии, которое бы обеспечило на расстоянии 1м: а) Максимально громкий звук для человеческого уха; б) Максимальную продолжительность непрерывного отчетливо слышимого звучания.

17. «Бутылка»

Пластиковую бутылку объемом 2 л доверху наполнили водой и «нечаянно» уронили на пол с высоты $H = 1$ м. На какую максимальную высоту взлетит струя брызг и почему? С какой высоты должна упасть бутылка, чтобы разорваться?

Задачи подготовили В.Афанасьев, Т.Бибилашвили, С.Варламов, В.Лобышев, З.Савилова, Е.Юносов

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

Задачи

1. Обозначим расстояние от берега до острова через x. Так как 8 метров составляют пятую часть от 40 метров, то Толя, возвращаясь, проплыл $x/5$ метров из $x - 40$ метров, отделявших Сережу от острова, а Сережа проплыл 8 метров до встречи. Поэтому $x/5+8=x-40$, откуда $x = 60$ метрам. 2. Заметим, что $11\bullet\bullet^2 > 12\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$, поэтому К=1, а Р=0. Кроме того, квадрат числа оканчивается на те же две разные цифры, что и само число, лишь в двух случаях: когда он оканчивается на 25 или на 76. Проверяем оба случая: КРУГ=1025 и КРУГ=1076. В первом случае имеем $1025^2 = 1050625$; во втором же $1076^2 = 1157776$, что не соответствует условию. Итак, КРУГ=1025. 3. Обозначим отрезок DE (рис. 1) через x. Из подобия треугольников AED и ABC находим, что $x:a=b:(a+b)$. Отсюда $x = \frac{ab}{a+b}$. Площадь четырехугольника $BCDE$ равна разности площадей треугольников ABC и AED, т.е. равна

$$\frac{1}{2}b(a+b)-\frac{1}{2}a\frac{ab}{a+b}=\frac{b^2(2a+b)}{2(a+b)}.$$

Отношение этой площади к b^2 — площади большего квадрата — равно $\frac{2a+b}{2(a+b)}$.

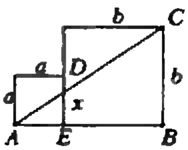


Рис.1

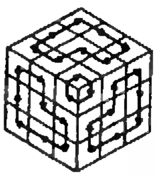


Рис.2

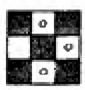


Рис.3

4. Старший брат вскопал 0,4 огорода, а средний и младший — по 0,1. 5. Указанная ситуация может возникнуть, если муравьи будут ползти так, как показано на рисунке 2.

(см. «Квант» № 5)

1. Пусть струя, под которой стоит большой кувшин, дает воды в k раз больше, чем другая. Так как до перестановки в меньший кувшин налилось 2 литра, то в больший налилось $2k$ литров. После перестановки в больший кувшин налилось $5-2k$ литров, а в меньший 2 литра, что в k раз больше, чем за это время налилось в больший кувшин, т.е. $k(5-k)=2$, или $2k^2-5k+2=0$. Отсюда k равно либо 2, либо $1/2$. Таким образом, в обоих случаях одна из струй дает вдвое больше воды, чем другая.

2. Указанное число равно $10^{1995}+1=\left(10^{665}\right)^3+1=\left(10^{665}+1\right)\left(10^{1330}-10^{665}+1\right)$. Следовательно, оно составное. 3. $98^2 = 9604$, $27^3 = 19683$.

4. Раскрасим клетки квадрата в черный и белый цвета в шахматном порядке так, чтобы центральная клетка была черной. Заметим, что буквы, стоящие на четных местах, попадут на белые клетки, а остальные — на черные. Все три буквы O стоят на четных местах, поэтому они располагаются единственным (с точностью до поворота) способом и при этом они не попадают хотя бы в один столбец или строку (рис.3). Ответ к задаче: требуемую запись слова в клетки сделать невозможно. 5. Условия задачи можно записать в виде системы уравнений, если обозначить через x мой возраст, а через y — ваш:

$$x=2(y-(x-y)),$$

$$x+(x+(x-y))=63.$$

Упрощая, получаем $3x=4y$, $3x-y=63$, откуда $y=21$, $x=28$.

Геометрическая страничка

3. Доказательство следует из результата задачи 2. 4. $\frac{7}{8}$. *Указание.* Искомое отношение равно $\frac{S_{ARK}}{S_{AMK}}$. 5. $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{18}$. Пусть площадь ABC равна S. Тогда

$$S_{PBK}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}S=\frac{4}{15}S,\quad S_{APK}=\frac{1}{2}S_{PBK}=\frac{2}{15}S,\quad S_{MKC}=\frac{9}{35}S,$$

$$S_{AKM}=\frac{12}{35}S,\quad S_{APM}=\frac{4}{21}S,\quad S_{PKM}=\left(1-\frac{4}{15}-\frac{9}{35}-\frac{4}{21}\right)S=\frac{2}{7}S.$$

Таким образом, $\frac{AD}{DK}=\frac{S_{APM}}{S_{PKM}}=\frac{2}{3}$, $\frac{PD}{DM}=\frac{S_{APK}}{S_{AKM}}=\frac{7}{18}$.

6. $\frac{1}{5}$. 8. $\frac{ab\sin(\alpha+\beta)}{a\sin\beta+b\sin\alpha}$; CD можно найти из равенства $S_{ABC}=S_{ADC}+S_{BDC}$.

9 б). $\frac{pq}{r}$. Имеем $S_{ABE}=p-r$, $S_{CDE}=q-r$. Далее найдем (см. пункт а)) $S_{BEC}=\frac{(p-r)(q-r)}{r}$. Таким образом,

$$S_{ABCD}=\frac{(p-r)(q-r)}{r}+p+q-r=\frac{pq}{r}.$$

10. Пусть A и B — две точки на границе многоугольника, делящие пополам его периметр, O — центр окружности. Ломаная AOB делит пополам площадь многоугольника (для любых таких A и B). Следовательно, если прямая AB делит пополам и периметр и площадь, то AB содержит O.

11. Понятно, что если AB и CD параллельны, то и M также описывает параллельную им прямую. Пусть прямые AB и CD пересекаются. Обозначим через P точку их пересечения и отложим на них отрезки $PK = AB$ и $PN = CD$ (рис. 4) так, что точка M_0 лежит внутри угла KPN. Поскольку площадь PKM_0 равна площади ABM_0, а площадь PNM_0 равна площади CDM_0 и то же имеет место для любой точки M внутри этого угла, то искомые точки M внутри угла лежат на прямой, проходящей через M_0 параллельно KN. Все геометрическое место состоит из четырех отрезков, образующих параллелограмм, вершины которого расположены на данных прямых.

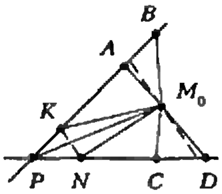


Рис.4

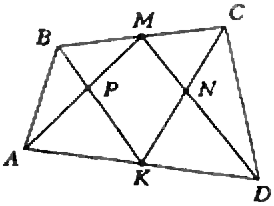


Рис. 5

12. Пусть $ABCD$ — рассматриваемый четырехугольник, K и P — середины AC и BD, O — центр вписанной окружности. Нетрудно доказать равенства $S_{KAB} + S_{KCD} = S_{PAB} + S_{PCD} = S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Теперь из результата предыдущей задачи следует, что точки K, P и O лежат на одной прямой.

13. Обозначим через P и N точки пересечения AM и BK, DM и CK (рис.5). Нам надо доказать, что $S_{ABP} + S_{CND} = S_{PMNK}$. Прибавим к обеим частям этого равенства $S_{APK} + S_{KND}$. Это равенство оказывается эквивалентным равенству

$S_{ABK} + S_{KCD} = S_{AMD}$. Но последнее равенство верно, поскольку левая и правая части равны $\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

14. Обозначим площади, как показано на рисунке 6. Имеем $p + m + n + y = (x + m + y) + (z + n + y)$. Отсюда $p = x + y + z$.

15. $\frac{3S}{16}$. 16. 6 или $4+\sqrt{2}$. Обозначим через x третью сторону треугольника. Тогда полупериметр равен $\frac{7+x}{2}$. Приравнивая два выражения для площади треугольника (формулу Герона и формулу $S = pr$), получим уравнения для x

$$\sqrt{\frac{(7+x)}{2}\cdot\frac{(1+x)}{2}\cdot\frac{(x-1)}{2}\cdot\frac{(7-x)}{2}} = \frac{7+x}{2},$$

или

$$x^3-7x^2+3x+35=0,\ (x-5)(x^2-2x-7)=0,\ x_1=1, x_2=1+2\sqrt{2}.$$

17. $\frac{c}{3}$. Обозначим $DM = DN = x$, $AM = u$, $BN = v$, $u + v = c$ и $uv = h^2$, где h — высота. Выражая площадь ADB двумя способами, приходим к уравнению

$$\sqrt{(x+u+v)xuv} = \frac{h}{2}(x+u+v),\text{ откуда } x = \frac{c}{3}.$$

18. $\frac{d}{2}$. Обозначим через O, O_1 и O_2 середины AC, AB и BC соответственно (O, O_1 и O_2 — центры полуокружностей), Q — центр искомой окружности. Если $AB = 2a$, $BC = 2b$, то $O_1O = b$, $OO_2 = a$. Из условия касания окружности и полуокружностей получим (x — радиус окружности) $O_1Q = a + x$, $O_2Q = b + x$, $OQ = a + b - x$. Выразим двумя способами площади треугольников O_1QO_2 и O_1QO:

$$\sqrt{(a+b+x)abx} = \frac{1}{2}(a+b)d,\ \sqrt{(a+b)(b-x)ax} = \frac{1}{2}bd.$$

Возводя эти равенства в квадрат и вычитая, найдем $x = \frac{d}{2}$.

19. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — расстояния от точки внутри многоугольника до его сторон, a — длина одной стороны, S — его площадь, то $2S = a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$. 20. Отрезок этой прямой внутри угла должен делиться пополам данной точкой.

21. Должны выполняться следующие равенства: $BC = CD$, $AB = AC = AD$. В самом деле, из всех треугольников с заданной стороной и с заданной суммой двух оставшихся сторон наибольшую площадь имеет равнобедренный. Отсюда $BC = CD$. Далее, из всех треугольников с заданной стороной и противоположным углом наибольшую площадь также имеет равнобедренный. Отсюда $AB = AD$, а затем и $AB = AD = AC$. 22. Пусть M — точка касания BC с окружностью и M — середина BC. Проведем другую прямую, касающуюся окружности в точке M_1 и пересекающую стороны угла в точках B_1 и C_1 (рис.7). Пусть K — точка пересечения BC и B_1C_1, K — на отрезке MC. Возьмем на KB_1 точку P так, что $BP \parallel AC$. Треугольник BPK подобен KCC_1 с коэффициентом $k > 1$.

Таким образом, площадь треугольника BKP, а тем более BKB_1 больше площади KCC_1, т.е. площадь AB_1C_1 больше площади ABC. 23. 13, 28. Из предыдущей задачи следует, что у искомого треугольника ABC одна сторона (AB) касается обеих окружностей, AC и BC касаются одной из окружностей, причем точки касания — середины AC и BC. Имеем $AC = BC$. Пусть D — середина AB (рис.8), K и M — точки касания. $CM = AM = AK = x$, $KD = 1{,}8$, $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{3x^2 - \frac{18}{5}x - \frac{81}{25}}$.

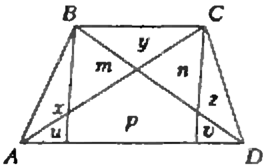


Рис. 6

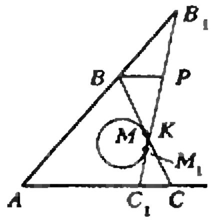


Рис. 7

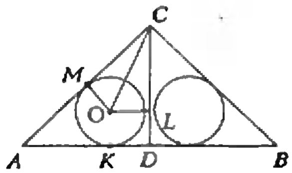


Рис. 8

С другой стороны, $CD = CL + 1 = \sqrt{CO^2 - OL^2} + 1 =$

$$= \sqrt{x^2 + 1 - \frac{81}{25}} + 1 = \sqrt{x^2 - \frac{56}{25}} + 1.$$ Имеем уравнение

$$\sqrt{3x^2 - \frac{c8}{5}x - \frac{81}{25}} = \sqrt{x^2 - \frac{56}{25}} + 1.$$ После преобразований получаем $25x^4 - 90x^3 + 6x^2 + 90x + 81 = 0$, или

$$(x-3)(25x^3 - 15x^2 - 39x - 27) = 0.$$

Второй множитель имеет положительный корень меньше 2, который не может подойти, так как в процессе преобразований возникает условие $2x^2 - \frac{18}{5}x - 2 > 0$. Итак, $x = 3$.

Кроссворд «Вокруг света»

(см. «Квант» № 5)

По горизонтали: 3. Люминесценция. 8. Блеск. 9. Планк. 10. Экран. 11. Лазер. 12. Кулибин. 13. Пфунд. 17. Алмаз. 18. Бор. 20. Ферма. 21. Секунда. 22. Зеркало. 23. Морли. 24. Вин. 25. Франк 29. Гелий. 30. Комптон. 31. Капля. 32. Линза. 34. Фотон. 35. Рэлей. 37. Интерференция. По вертикали: 1. Люкс. 2. Цинк. 4. Нептун. 5. Евклид. 6. Плазма. 7. Радуга. 11. Ландсберг. 14. Дисторсия. 15. Кандела. 16. Серебро. 18. Басов. 19. Рубин. 23. Молния. 26. Кеплер. 27. Фосфор. 28. Солнце. 33. Зона. 36. Эфир.

НАПЕЧАТАНО В 1994 ГОДУ

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, А.Т.Калинин, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, А.П.Савин, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛ

Н.Ф.Алексеев, Б.Ф.Бельский, Н.Б.Ёжкин, В.М.Митурич-Хлебникова, А.О.Хоменко

ГЛАВНЫЙ ХУДОЖНИК

С.А.Стулов

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

С.В.Вакуленко, Е.А.Митченко, Е.В.Титова

И.О. ЗАВЕДУЮЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Адрес редакции:

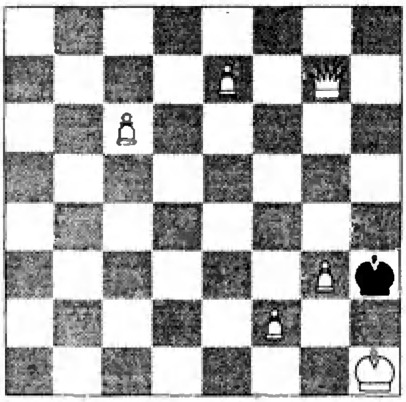
103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант», тел. 250-33-54, 251-55-57

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати 142300 г. Чехов Московской области

Заказ № 3479

Беспомощные короли

Многие знакомы с задачей-шуткой Л.Куббеля, придуманной им давным-давно.

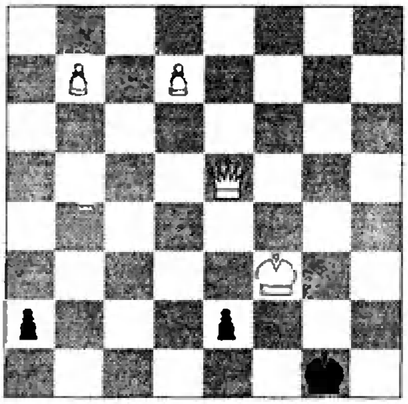


Л.Куббель, 1941
Мат в 2 хода

С одним черным королем так быстро не справиться, зато это можно сделать с двумя королями...

1. e8Кр (черный!) Крd8. Первый король запатован, зато у второго есть ход. **2. Фd7×!** Мат сразу двум королям.

Спустя полвека эта идея была реализована еще более занятным образом.

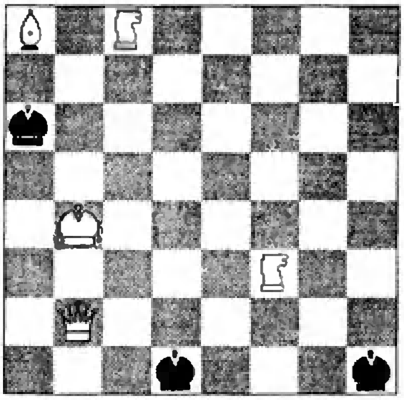


В.Чекарьков, 1990
Кооперативный мат в 2 хода

Черные должны помочь белым объявить мат, и без появления новых королей не обойтись.

1. e1Кр (белый!). В кооперативных задачах начинают черные, и в данном случае первым делом они ставят белого короля! **d8Кр (черный!).** Белые не остаются в долгу! **2. a1Л (белая!).** Обе стороны принципиально отказываются ставить на доску фигуры своего цвета. **0-0-0×!** Правильный мат обоим черным королям! Заметьте, что все по «правилам»: рокировка возможна, так как король e1 и ладья a1 только что появились на доске и еще не двигались.

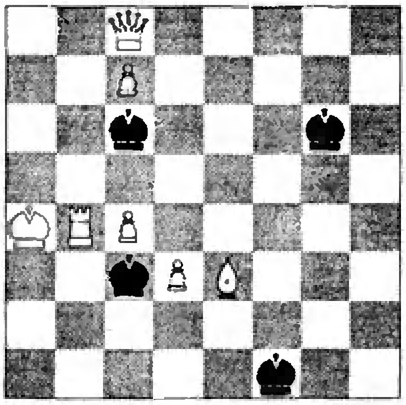
С двумя королями все ясно, рассмотрим теперь задачу-шутку, в которой требуется заматовать трех уже появившихся на доске королей.



В.Шкрыль, 1991
Мат в 4 хода

1. Kg5+ Крg1 2. Kh3+ Крf1 3. Cf3+ Крe1. Все черные короли подтянулись и теперь **4. Фe2×.**

Двинемся дальше...

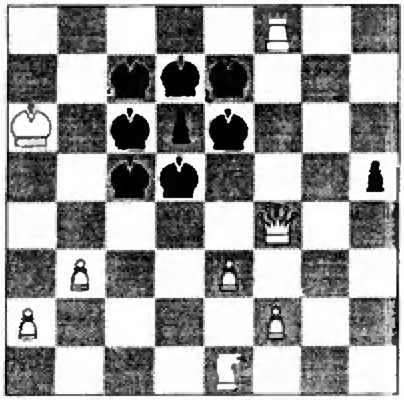


Р.Мюллер, 1977
Кооперативный мат в 6 ходов

Черные короли разбросаны по всей доске, и заматовать их можно только согласованными действиями обеих сторон.

1. Крe2 Лb2+ 2. Кр:d3 Фh8+ 3. Кр:c4 c8Кр (белый)! У черных много королей, но и белым один лишний не помешает. **4. Крb6d5 Крd7 5. Крf5 Лf2+ 6. Крfe4 Фd4×!** Черные короли пришли в центр доски, где и помогли белым добиться цели.

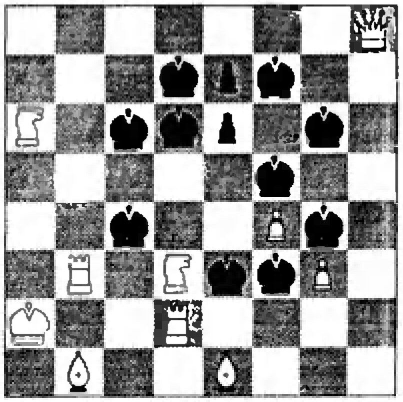
Еще увеличим число королей...



М.Артц, 1947
Мат в 5 ходов

1. Kf3 h4 2. Kd2 h3 3. f3 h2 4. Ke4+ Крb4 5. Ф:d6×.

А каково максимальное число черных королей, которые могут быть заматованы одновременно? Нетрудно убедиться, что рекордное число равно десяти, причем семь королей матуются конем, а еще три короля получают вскрытый мат. Самой старинной задаче на эту тему более 110 лет.



Г.Рейхельм, 1882
Мат в 1 ход

1. Ke5×! и все десять черных королей попали в матовую сеть.

Е.Гик

Индекс 70465

Уважаемые читатели журнала

КВАНТ

Вы держите в руках последний номер нашего журнала за 1994 год.
Итак, несмотря на многочисленные трудности и проблемы,
о которых не будем повторяться, это свидетельствует о том,
что наш журнал снова зажил полноценной самостоятельной жизнью.
Нам это особенно приятно, поскольку мы сдержали данное
читателям обещание ликвидировать все временные задолжности
по выпуску нашей продукции и выйти на регулярный график
выпуска журнала КВАНТ *уже в 1994 году.*
Пусть это послужит залогом нашего дальнейшего успешного
сотрудничества и взаимного доверия.
Оглядываясь назад и строя всевозможные планы на будущее,
представляется особенно уместным вспомнить добрым словом
те организации, которым была небезразлична
судьба нашего журнала в самый трудный для него период.
Мы глубоко признательны
Комитету Российской Федерации по печати,
Российскому фонду фундаментальных исследований
(председатель — академик В.Е. Фортов),
П/О «Надымгазпром»
(генеральный директор — Л.С. Чугунов)
за оказанную нам материальную поддержку.
Мы особенно ценим плодотворное и доброжелательное
сотрудничество с руководством и разными службами
Чеховского полиграфического комбината.
Напоминаем Вам, что срок подписки на наш журнал
в помещении редакции продлен до 15 декабря 1994 года.
Не упустите эту возможность.
Приходите, звоните. Мы Вас ждем!

Бюро Квантум