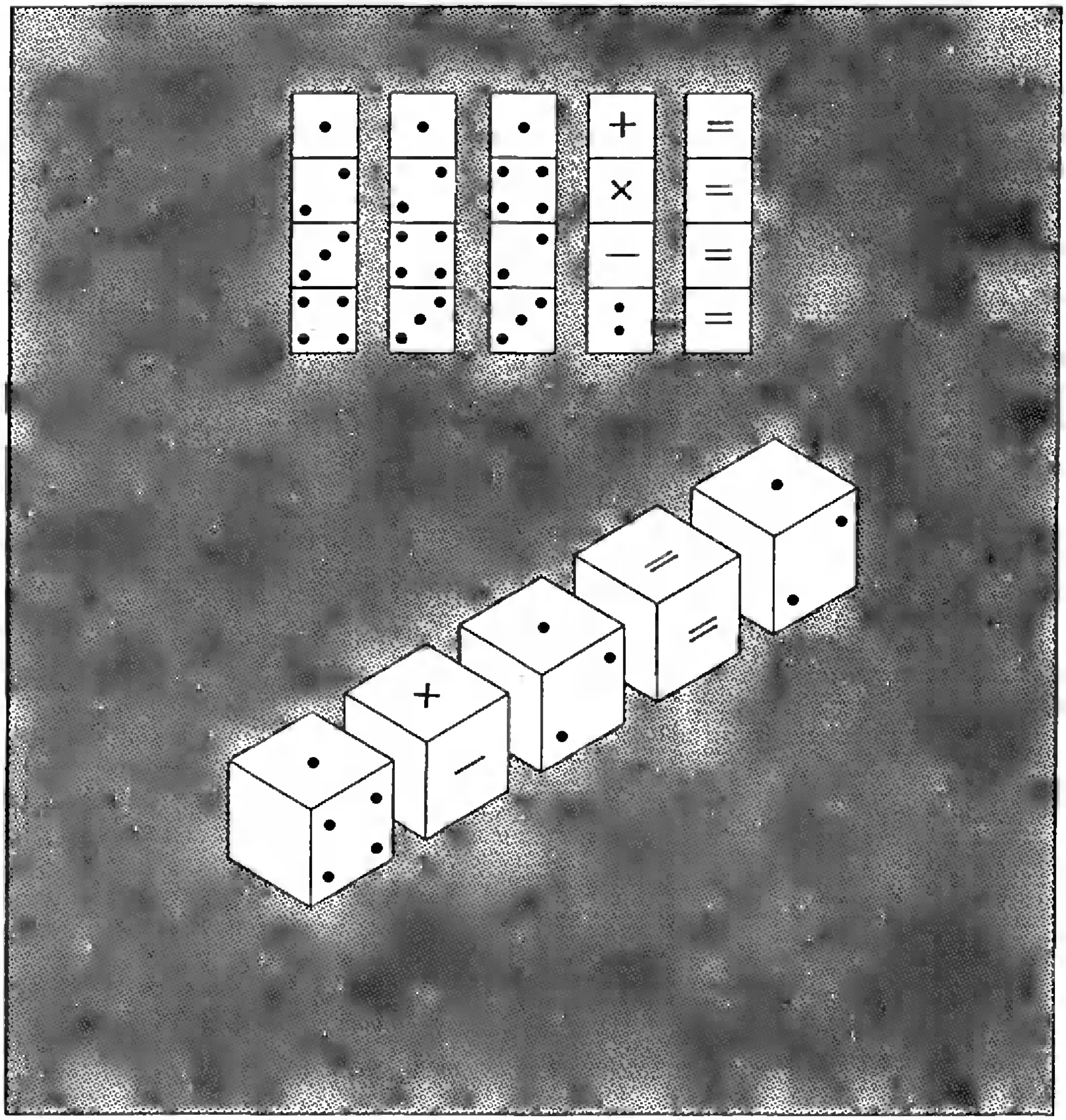
ISSN 0130-2221
СЕНТЯБРЬ/ОКТЯБРЬ 1994 · №5

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК



МАТЕМАТИКА НА КУБИКАХ

Знаете ли вы, что всем знакомые детские кубики изобретены сравнительно недавно? Самый старый из хранящихся в музеях наборов был сделан в Германии в середине прошлого века. Археологам при раскопках в Египте, Италии и в средневековых городах не попадалось ничего подобного.

Однако за последние несколько десятилетий появилось так много игр с кубиками, что можно издать толстую книгу с их описаниями. Продолжают появляться и новые игры. Сегодня мы предлагаем вам оригинальную головоломку, придуманную известным изобретателем *Владимиром Красноуховым*.

Игрушка состоит из 5-ти кубиков с числами и знаками арифметических действий на гранях. Развертки боковых граней кубиков показаны на рисунке. Кубики надо выстроить в ряд так, чтобы одновременно на всех четырех гранях получившегося прямоугольного параллелепипеда были правильно решены примеры на сложение, вычитание, умножение и деление. Сколько решений этой головоломки вам удастся найти?

Попробуйте придумать и прислать нам новые варианты этой игрушки, например головоломку из пяти- или шестигранных призм с разными сочетаниями чисел и знаков и т.п.

Все изобретатели новых головоломок будут награждены специальными призами.

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

СЕНТЯБРЬ/ОКТЯБРЬ · 1994 · №5

В номере:

Квант

Учредители — Президиум РАН, НПП «Бюро Квантум»
Издатель — НПП «Бюро Квантум»

Бюро Квантум

К 100-летию П.Л.КАПИЦЫ

В этом году научная общественность всего мира отмечает столетие со дня рождения Петра Леонидовича Капицы, известного советского физика, лауреата Нобелевской премии. Мы публикуем подборку материалов, посвященных удивительной жизни и замечательным достижениям этого ученого. Об основных этапах жизни и главных научных результатах Капицы рассказывается в статье академика А.С.Боровика-Романова, много лет работавшего бок о бок с Петром Леонидовичем. Затем мы предлагаем несколько небольших текстов, принадлежащих самому Капице. Учитывая специфику нашего журнала, мы выбрали из обширного наследия П.Л.Капицы материалы, посвященные проблемам преподавания и популяризации науки. В их числе — знаменитые «задачи Капицы», научно-популярная статья о природе шаровой молнии и ряд других материалов. Особое значение мы придаем первой публикации письма в ЦК КПСС о необходимости создания физико-математического журнала для школьников (будущего журнала «Квант»), написанного самим Капицей и подписанного шестью академиками. Текст письма, предоставленного членом редколлегии нашего журнала Ю.М.Бруком, предваряется его рассказом об участии П.Л.Капицы в развитии олимпиадного движения и в создании журнала «Квант». Статьи «О природе шаровой молнии», «Физические задачи» и «Профессор и студент» публикуются по книге: Капица П.Л. Эксперимент, теория, практика (М.: Наука, 1977). Статья «О творческом непослушании» перепечатана из журнала «Наука и жизнь» (1987, № 2). Фотографии из архива П.Л.Капицы нам предоставил П.Е.Рубинин

Капица — ученый и человек

А. БОРОВИК-РОМАНОВ

Петр Леонидович Капица (1894—1984)

Петр Леонидович Капица родился 9 июля 1894 года в Кронштадте. Его отец был военным инженером. Жизнь Петра Леонидовича сложилась очень не просто. На его долю выпали три тяжелейших удара, которые он сумел перенести только благодаря своему сильному характеру и большой личной смелости.

Первое испытание постигло Петра Леонидовича в 1920 году, когда он только начинал свою научную карьеру в группе учеников и сподвижников Абрама Федоровича Иоффе — одного из основателей физической школы нашей страны. Судьба нанесла ужасный удар по семье Петра Леонидовича — во время эпидемии скарлатины и испанки в течение месяца Капица теряет отца, двухлетнего сына, жену и только что рожденную дочку. Пётр Леонидович был в ужасно подавленном состоянии и практически не мог работать.

Чтобы отвлечь Петра Леонидовича от его тяжелых дум, А.Ф.Иоффе включил его в состав группы ученых, командированных за границу для установления контактов с ведущими лабораториями Германии и Англии и для закупки оборудования для вновь организуемых физических институтов в Петрограде. При посещении Кавендишской лаборатории в Кембридже по рекомендации Иоффе и в значительной степени благодаря находчивости самого Петра Леонидовича ему удалось уговорить тогда уже одного из самых знаменитых физиков Эрнеста Резерфорда принять его на стажировку в свою лабораторию. Так получилось, что больше 10 лет Петр Леонидович занимался наукой в Англии. В Кембридже он очень быстро проявил себя как замечательный физик-экспериментатор и разработал абсолютно оригинальные установки (о которых мы поговорим в следующем разделе).

Поскольку в конце 20-х годов Петр Леонидович со своими уникальными установками готов был начать исследования в совершенно новой области физики, по инициативе Э.Резерфорда для Капицы в 1933 году была построена новая лаборатория в Кембридже. Деньги на эту лабораторию выделило Лондонское Королевское Общество из фонда, который завещал Обществу Людвиг Монд. Поэтому лаборатория получила название Лаборатории Королевского Общества имени Монда, или сокращенно — Мондовской Лаборатории. Петр Леонидович был назначен директором этой лаборатории.

Год спустя после открытия этой лаборатории, когда Капица начал развертывать новые исследования в области низких температур и сверхсильных магнитных полей, судьба преподнесла ему второй удар — осенью 1934 года Советское Правительство запретило ему вернуться в Англию после очередного приезда в СССР. Он остался в Советском Союзе без жены и детей, без лаборатории и возможности вести научные исследования. В течение нескольких месяцев положение Петра Леонидовича было совершенно неопределенным — у него не было работы, многие знакомые боялись встречаться с ним (в 30-е годы все боялись доносов и арестов), тем более что за ним в открытую ходили агенты НКВД.

Петр Леонидович понимал, что, не имея того лабораторного оборудования, которое он построил в Англии, он не сможет успешно развивать исследования в выбранной им области физики. Он решает посвятить себя биологии, вернее биофизике, встречается с известным физиологом Иваном Петровичем Павловым и договаривается о возможности проведения экспериментов по изучению биофизики мускульного процесса. Начинает знакомиться с научной литературой по этому вопросу.

Однако к декабрю 1934 года обстановка вокруг Капицы начинает проясняться. Его вызывают в Москву из Ленинграда, где он жил у своей матери. В Москве происходят переговоры относительно его будущей работы сначала в Президиуме Академии наук, а затем в Правительстве. Обсуждается вопрос о строительстве в Москве специального института для развития работ Петра Леонидовича Капицы, начатых им в Англии. При этом Петр Леонидович ставит обязательным условием покупку всей созданной им уникальной аппаратуры и перевоз ее из Кембриджа в Москву. В конце концов, в значительной степени благодаря содействию Э.Резерфорда, эту проблему удается решить, и в Москве строится Институт физических проблем, оснащенный уникальной аппаратурой и главное — созданными Петром Леонидовичем установками по получению сверхсильных магнитных полей и по ожижению водорода и гелия. Директором этого института назначается Петр Леонидович Капица.

В 1936 году в основном заканчивается строительство института, и изголодавшийся по научной работе Петр Леонидович начинает работать с необычайной напористостью и энергией. За пять лет (к началу войны в 1941 году) он делает два крупнейших открытия — одно научное, другое инженерное (о них подробнее в следующем разделе). В разгар войны его достижения высоко оцениваются Правительством — в мае 1943 года его назначают председателем специального Комитета (в ранге министра) по развитию промышленного производства разработанных им установок по получению кислорода. В августе 1945 года его привлекают к работе совершено секретного Комитета по созданию ядерного оружия. На этих административных должностях у него складываются очень сложные отношения с Л.П.Берией. Капица пишет два письма Сталину, в которых критикует Берию. Подобные действия были в те времена неслыханной дерзостью. Конфликтная ситуация кончается тем, что Капицу снимают не только с государственных постов, но и с поста директора созданного им института и практически выгоняют его из института. Это был третий тяжелый удар, который судьба нанесла Капице. Удар был очень тяжелым, но не сломил Петра Леонидовича. Он постепенно создает у себя на даче настоящую физическую лабораторию. Сначала он проводит несколько изящных исследований в области механики и гидродинамики, а через несколько лет совершает характерный для Капицы прорыв в абсолютно новой области. Он разрабатывает теорию и строит уникальный генератор сантиметровых радиоволн непрерывного действия рекордной по тем временам мощности в несколько сот киловатт. После смерти Сталина и казни Берии Капицу реабилитируют, и в 1955 году он возвращается в свой институт и развивает новый цикл работ в области электроники больших мощностей и высокочастотного нагрева плазмы.

Открытия и изобретения Капицы

Значительность любого ученого можно оценивать по тому, как долго помнят о его открытиях и используют изобретенные им приборы или установки. Капица — столь же великий инженер, как и ученый. Нужно отметить три его крупных вклада в науку, которые используются и продолжают развиваться до сих пор во многих ведущих лабораториях мира.

Петр Леонидович первый понял, что получать рекордно сильные магнитные поля можно только в импульсном режиме, и разработал для этого уникальную установку со специальным мотор-генератором (1924 – 25 годы). В этом генераторе энергия, необходимая для создания сильного магнитного поля, накапливалась в виде кинетической энергии очень тяжелого маховика, находившегося на оси ротора генератора. При закорачивании генератора на катушку в ней за 10 мс выделялась мощность 220 МВт и при этом внутри катушки создавалось магнитное поле индукцией 32 Тл. Нужно сказать, что все это сделать было не так просто, как это коротко сказано здесь. На мой взгляд, создание Петром Леонидовичем установки для получения сильных импульсных полей было в физике одним из первых шагов того процесса, который позже был назван научно-технической революцией. Это понятие имеет два аспекта: немедленное освоение промышленностью фундаментальных открытий и создание промышленностью специальной сложной аппаратуры, предназначенной только для фундаментальных исследований. Первым примером такой сложной аппаратуры была установка Капицы. Достаточно сказать, что мотор-генератор весил больше 2,5 т, а разработку его конструкции проводили ведущие инженеры фирмы «Метрополитен-Викерс». Впрочем, сам Капица тоже активно участвовал в этой работе. Следует подчеркнуть, что установка создавалась во времена, когда не было осциллографов и других привычных нам теперь приборов импульсной техники. Для решения всех этих проблем Петр Леонидович придумывал оригинальные устройства. Предложенная Петром Леонидовичем идея получения импульсных магнитных полей широко используется и теперь во многих лабораториях. Правда, вместо мотор-генератора применяют выпускаемые промышленностью мощные конденсаторы (а иногда взрывные устройства).

Особенно крупный вклад Капица внес в физику низких температур. Он открыл явление сверхтекучести жидкого гелия. Формально это означает, что жидкий гелий при температурах ниже 2 К может протекать без трения о стенки. В серии чрезвычайно изящных экспериментов Петр Леонидович подробно изучил это явление и выявил следующие удивительные особенности явления сверхтекучести. Если в колбе с жидким гелием, окруженной также жидким гелием, с помощью нагревателя выделять тепло, то в жидкости возникает два потока — из колбы вытекает струя гелия, обладающая вязкостью (она отклоняет подвешенное крылышко), и одновременно навстречу втекает струя сверхтекучей части жидкого гелия. Капица доказал, что через тонкие капилляры и щели протекает только сверхтекучая компонента. Л.Д.Ландау, работавший вместе с Капицей, построил теорию сверхтекучести, в которой важную роль играет сосуществование нормальной и сверхтекучей компонент в гелии, перешедшем в сверхтекучее состояние. В 1978 году Капице была присуждена Нобелевская премия — за основополагающие изобретения и открытия в области низкотемпературной физики. (Ландау тоже получил Нобелевскую премию, в 1962 году — за теоретические исследования в области конденсированного состояния, особенно жидкого гелия.) Открытие сверхтекучести явилось открытием совершенно нового направления — квантовой физики конденсированного состояния. Исследования этого явления велись все 55 лет после его открытия и ведутся и в настоящее время во многих лабораториях мира.

В ходе исследований теплопередачи в жидком гелии Капица открыл еще одно явление, которое получило в литературе два названия: скачок Капицы или теплосопротивление Капицы. Речь идет о том, что на границе металла, в котором выделяется тепло, и прилегающего к нему жидкого гелия возникает скачок температуры. Величина этого скачка резко растет с понижением температуры. Поэтому все исследователи, работающие в области сверхнизких температур, должны учитывать это теплосопротивление. Теоретическое и экспериментальное исследования этого явления велись многие десятилетия и продолжаются до сих пор.

Достижения Капицы в области техники лежат на грани между фундаментальной и инженерной наукой. Первым очень важным его изобретением было создание оригинальной модели гелиевого ожижителя. Жидкий гелий получают не только для изучения его свойств, но и как хладагент для изучения поведения разных веществ при самых низких температурах. До Петра Леонидовича все гелиевые ожижители (а их и было в ту пору всего несколько штук) работали с использованием эффекта Джоуля — Томсона, когда газ охлаждается, совершая работу при расширении из очень сильно сжатого состояния. Недостатками таких ожижителей были использование высокого давления и, главное, необходимость предварительно охлаждать гелий с помощью жидкого водорода. Последнее обстоятельство делало установку взрывоопасной.

Капица построил гелиевый ожижитель так называемого детандорного типа, в котором охлаждение происходит за счет совершения работы при адиабатическом расширении газа в поршневой машине. Идея детандера не была новой, но никто не пробовал реализовать ее для ожижения гелия, так как не существовало смазки, которая могла бы работать при такой низкой температуре. Петр Леонидович нашел решение задачи о смазке, использовав для этого сам газообразный гелий. Для того чтобы не было слишком большой утечки гелия через зазор между поршнем и цилиндром, этот зазор был сделан очень тонким (порядка 50 мк). А для того чтобы поршень не терся о цилиндр, Петр Леонидович сделал специальные канавки на стенке поршня и шаровую опору на толкателе поршня. В результате ему удалось решить казалось бы неразрешимую задачу — добиться движения поршня совсем без перекосов, так что он не касался стенок цилиндра. Во всех лабораториях мира теперь используют только ожижители гелия, конструкция которых была предложена Капицей, и целый ряд фирм выпускает их по нескольку сот штук в год.

П.Л.Капица — учащийся Кронштадтского реального училища (1911 г.)

Как известно, кислород для промышленных целей добывается путем ректификации (разделения) жидкого воздуха. До Капицы охлаждение в установках для получения жидкого воздуха достигалось в поршневых детандерах, в которых было велико выделение тепла за счет трения поршня о стенки и которые требовали использования высокого давления. Поршневые детандеры и компрессоры высокого давления не могли обеспечить высокой производительности таких установок. Петр Леонидович предложил использовать вместо поршневого детандера турбодетандер. Важным шагом в удачном решении этой проблемы был выбор типа турбины. Капица показал, что при низких температурах гидродинамика воздуха ближе к жидкости, чем к газу. Соответственно он рассчитал, сконструировал и опробовал специальный радиальный турбодетандр, предназначенный для работы в установках по ожижению воздуха. Как все, что делал Капица, и созданный им турбодетандер был совершенно необычен. Его ротор имел диаметр всего 8 см. Он вращался со скоростью 40000 об/мин и пропускал 1000 $м^3$ воздуха в час. Установка с таким турбодетандером могла выдать до 50 л жидкого воздуха.

Такая установка начала работать в Институте в 1938 году — это всего через два года после окончания строительства института. И при этом параллельно Капица вел уникальные исследования свойств жидкого гелия, открыл сверхтекучесть и продолжал тонкие эксперименты по ее изучению. Отметим, что если на старых кислородных установках требовались компрессоры высокого давления — до 200 атм, то на установке Капицы стоял турбинный компрессор на 9 атм. Была построена большая установка для получения кислорода, которая одна производила 1/6 часть всего кислорода в стране.

Все развивалось прекрасно, но нужно сказать, что многие из инженеров-криогенщиков, работавших в кислородной промышленности до Капицы, не поняли значения изобретенного им метода, всячески препятствовали его распространению и сыграли немалую роль в снятии его со всех постов в 1946 году. Как и полагалось в те времена, когда Капица попал в опалу, все его изобретения были признаны недействительными и никто не решался работать на созданных им установках для ожижения гелия и воздуха. Дальнейшую разработку его метода прекратили, опытные установки разобрали и продолжали выпускать старые машины. Однако в западных странах быстро поняли достоинства изобретенных Петром Леонидовичем установок и уже в конце 40-х годов начали выпускать и детандерные гелиевые установки, и турбодетандерные кислородные заводы. Постепенно это поняли и у нас в стране и продолжили выпуск установок с турбодетандером, не акцентируя, что их изобрел Капица (пока его не реабилитировали). Теперь такие установки работают во всем мире и ежегодно производят более 150 млн. тонн кислорода, который кроме металлургии используется также в химической промышленности и в ракетной технике.

Капица — организатор науки

Велика роль Капицы в организации науки в нашей стране. Всего, что он сделал, не перечислишь. Он создал прекрасный институт, руководил им и обеспечил в нем исключительно благоприятные условия для научного творчества. Петр Леонидович всегда подчеркивал, насколько заслуга первооткрывателя в науке больше заслуг тех ученых, которые, хотя и прилежно трудятся, но движутся в уже проложенном фарватере. Огромное значение в жизни физиков играл общемосковский семинар, широко известный под названием «Капичник», который проводил Петр Леонидович. Доложить на нем была большая честь, и зал был обычно переполнен, так как реплики и замечания Капицы и других выдающихся ученых на «Капичнике» всегда бывали очень весомы. Успех семинара в значительной степени определялся той жадностью, с которой Капица всю жизнь охотился за талантливыми людьми и новыми фундаментальными открытиями.

Капица рад был помочь добиться признания всякому таланту, открытия которого консервативными коллегами не признавались. Наиболее ярким примером этого является поддержка Петром Леонидовичем Е.К.Завойского, который в 1944 году в Казани открыл электронный парамагнитный резонанс. Он приехал в Москву и хотел защитить докторскую диссертацию по своим работам, посвященным этому открытию. Хотя, как это ясно каждому теперь, открытие это относилось к крупнейшим открытиям нашего века, многие ведущие физики Москвы не сумели понять значения работ Завойского. Только благодаря вмешательству Петра Леонидовича, который сразу оценил и талант и значение работ Завойского, его открытие было признано и диссертация принята к защите. Этот пример очень характерен для Капицы, который умел и любил открывать таланты.

Особенно большую роль играл Капица в воспитании научной молодежи. Он всегда подчеркивал, что занятия наукой должны сочетаться с преподавательской деятельностью. Ученый только тогда может сохранять хорошую форму новатора, когда он работает вместе со студентами и аспирантами. Петр Леонидович был одним из главных инициаторов создания Московского физико-технического института (МФТИ). В этом институте почти все преподаватели совмещают преподавание с научной работой в ведущих физических институтах. Студенты МФТИ после третьего курса начинают активно работать в одной из научно-исследовательских лабораторий, которая образует базовую кафедру. Петр Леонидович сам заведовал кафедрой физики низких температур, которая базировалась на Институте физических проблем. Он относился к своим обязанностям очень серьезно, следил за работами студентов. Он никогда не пропускал заседаний, на которых слушались защиты дипломных работ. На этих заседаниях присутствовали практически все сотрудники института. Петр Леонидович очень внимательно слушал каждого студента и умелыми вопросами старался определить творческие способности студента. Он всю жизнь искал вокруг себя таланты, помогал непризнанным талантам получить заслуженное признание.

Легендарная личность Капицы

Далеко не все гениальные ученые играли такую большую роль в самых различных областях жизни их современников. Сложная биография Капицы, его нестандартное мышление и способность находить неожиданные решения сделали его легендарной личностью, о поступках или высказываниях которой знал широкий круг людей, далеко не всегда связанных с наукой. Капица легко находил контакт с людьми, занимавшими гораздо более высокое положение в обществе. И это с молодых лет. Приведу два примера.

В 1920 году 25-летний молодой ученый, только начинавший научную деятельность, пришел к уже очень знаменитому тогда художнику Б.М.Кустодиеву и сказал ему: «Почему Вы рисуете только портреты тех людей, которые уже знамениты? Нарисуйте портрет молодых людей, которые будут знаменитыми.» Как ни странно, Кустодиев согласился и нарисовал знаменитый теперь портрет Петра Леонидовича Капицы и Николая Николаевича Семенова. Оба они действительно стали знаменитыми, и каждый из них получил Нобелевскую премию.

Второй пример связан с поступлением Капицы на стажировку к Резерфорду. Сначала Резерфорд не хотел принимать Петра Леонидовича и сказал, что лаборатория переполнена и он не сможет принять лишнего человека. Тогда Капица спросил Резерфорда, с какой точностью он обычно проводит свои эксперименты. Резерфорд был удивлен этим необычным вопросом и ответил, что с точностью до 3-х процентов. После этого Капица заявил, что у Резерфорда в лаборатории как раз 30 человек, значит, при такой точности наблюдений одного лишнего сотрудника он не заметит. На Резерфорда такой смелый и остроумный выпад Петра Леонидовича произвел сильное впечатление, и он согласился принять его в лабораторию.

Смелость Петра Леонидовича и его умение убедительно разговаривать и переписываться с руководителями государства спасли жизнь двум крупнейшим физикам нашей страны — В.А.Фоку, который был арестован в 1937 году, и Л.Д.Ландау, арестованному в 1938 году. Как только Капица узнавал об аресте каждого из них, он писал письма Сталину в их защиту. В случае с Фоком это сработало сразу — он был освобожден через неделю. Ландау находился под арестом почти год, и Петр Леонидович за это время написал несколько писем Сталину, Молотову и Берии. В письме Берии Капица просил освободить Ландау под его Капицы поручительство, и после этого письма через два дня Ландау был освобожден. Для того чтобы совершать такое в 30-е годы, надо было обладать не только отчаянным мужеством, но и еще каким-то даром, который был только у Капицы. Петр Леонидович помогал своими письмами начальству и другим физикам и не физикам и в менее критических ситуациях. Он никогда не оставался равнодушным, если узнавал о нарушенной справедливости, и всегда находил эффективный способ помочь человеку.

Капица был исключительно широко образованным человеком, и его интересовали все аспекты жизни людей. Поэтому у него был много друзей самых разных профессий — писатели, режиссеры, артисты, шахматисты, не говоря уже об ученых из всех областей наук. Они часто собирались вместе в маленьких и больших компаниях. Большую роль в жизни Петра Леонидовича играла его жена Анна Алексеевна, дочка знаменитого математика и кораблестроителя академика А.Н.Крылова. Анна Алексеевна — тоже выдающаяся личность, которой следует посвятить отдельную повесть.

Не будет преувеличением сказать, что такие удивительные по таланту, широте кругозора и еще чего-то, что трудно сформулировать словами, люди рождаются раз в столетие. Естественно, что в таком кратком очерке не было сказано многого, что важно рассказать о Петре Леонидовиче. Я надеюсь, что со временем найдется писатель, который сумеет рассказать если не все, то хотя бы главное об этом замечательном человеке.

Король Швеции Карл XVI Густав вручает П.Л.Капице Нобелевскую премию (1978 г.)

О творческом непослушании

П. КАПИЦА

Гений и послушание — две вещи несовместные.
Фрейд

Когда говорят о Ломоносове в наши дни, то обычно говорят о его научных достижениях. Сейчас они нам не только понятны, но наука за эти 200 лет настолько ушла вперед, что они нам кажутся самоочевидными, и чтобы понять силу гения Ломоносова, нам надо вообразить себя на уровне культуры того времени. Это, конечно, можно сделать, но единственная польза, которую мы можем от этого получить, — это оценка необычно больших и нарастающих темпов развития науки и ее влияния на человеческую культуру. Но можно подойти и с другой стороны. Это — взаимопонимание гения и общества, то, что представляет интерес для нас и в наши дни.

В жизни гения есть что-то вечное, что не теряет никогда интереса, и это заставляет людей интересоваться жизнью великих людей любой эпохи. Это не только относится к людям, но и ко всем высшим достижениям человеческой культуры. Пикассо говорит, что сюжетное содержание картин Возрождения и средневековья давно потеряло интерес для современной жизни, но в картинах великих художников Возрождения есть достижения человеческого гения, благодаря которым картины сохраняют для нас неугасимую ценность, независимо от понимания нами значения жизненных запросов, при которых они создавались.

...В облике Ломоносова, в его жизни и деятельности можно много найти того, что захватывает и что интересно и полезно понять, вне зависимости от того, что между нами лежит пропасть в 200 лет.

П. Л. Капица на открытии Мондовской лаборатории в Кембридже (1933 г.)

Мне хотелось бы остановиться на одной из сторон проявления гения Ломоносова и поговорить о ней с нашей точки зрения.

Я хочу привлечь ваше внимание к одному из очень хорошо известных фактов в жизни Ломоносова — простой крестьянский сын из далекой Архангельской губернии вопреки воле отца пришел в Москву на заре развития нашей отечественной науки для того, чтобы отдать силу своего гения ее служению. Даже в детских хрестоматиях описываются все перипетии, которые пришлось преодолеть Ломоносову, пока он не достиг высшего звания в Академии наук, и вы их, конечно, хорошо знаете.

Теперь попробуем ответить на следующий вопрос, который я позволил себе поставить в несколько упрощенной форме. В наши дни юношам не только из Архангельской области, но из самых отдаленных мест Сибири во много раз легче и проще — и без героизма Ломоносова — добраться до Москвы и отдать себя служению науке. Почему же у нас не появляются ломоносовы в большом количестве?

Казалось бы, наиболее простой и естественный ответ на этот вопрос дает теория вероятностей. Можно объяснить это тем, что вероятность рождения в стране такого гения, как Ломоносов, очень мала, и случается это так редко, что за 200 лет такое не повторилось. Что же касается величины барьера, отделяющего деревню от Академии наук, то его преодоление для гения не представляет трудности, как бы велик ни был барьер.

Мне думается, что это объяснение несостоятельно. Действительно, исто-

---

По-видимому, это — тезисы выступления 1970 или 1971 года.

рия человеческой культуры неизменно дает примеры, когда в отдельной эпохе в какой-либо определенной стране сразу рождается несколько гениев. Для примера возьмем хотя бы время, когда Италия дала человечеству непревзойденных гениев — Микеланджело, Леонардо, Рафаэля, Тициана, Донателло, Тинторетто... Или возьмем более близкую для нас эпоху, когда Россия на протяжении ста лет дала человечеству трех гениальных писателей — Толстого, Достоевского и Чехова, которые, по общему признанию, считаются основателями современной мировой художественной литературы.

Таким образом, история нас учит обратному: для развития гения в любой области творчества необходима соответствующая историческая обстановка. Для эпохи Возрождения это уже хорошо изучено. Кто читал Тэна «Философия искусства», наверное, помнит то яркое описание отношения, во время Возрождения в Италии, к искусству. Не только общество, но и церковь выказала полное интереса и понимания отношение. Это и создало благоприятную почву для расцвета.

Но кто из историков ставил вопрос: какая же почва нужна для работников науки, чтобы наиболее благоприятно могли разворачиваться природные таланты ученого? Это, конечно, сложный и большой вопрос, и его невозможно решить в кратком докладе. Но все же я решусь отметить одно условие для развития таланта ученого, которое было во времена Ломоносова и которое, возможно, отсутствует у нас теперь.

Кто-то в шутку говорил, что Ломоносов у нас в Москве не мог бы остаться, так как у него не было московской прописки (сказал это сам П.Л.Капица на приеме в Кремле в 1961 году Н.С.Хрущеву — *Прим. ред.*). Замечание это не лишено актуальности, но навряд ли оно может быть серьезно рассмотрено. Хотя то, о чем я сейчас предполагаю говорить, тоже может сперва вам показаться необычным.

...Все знают о необузданности темперамента Ломоносова. Из многочисленных известных примеров его необузданности я вспоминаю здесь об одном случае, относящемся к тому времени, когда Ломоносов был уже адъюнктом Академии наук, что на нашем языке что-то вроде старшего научного сотрудника, а может быть, даже члена-корреспондента. Так вот, известны его ссоры с рядом академиков, в особенности с иностранцами. После одного инцидента он подошел ко всем известному ученому секретарю Академии Шумахеру, который, хотя и считался вторым лицом в Академии наук после графа Разумовского, который был президентом, но на самом деле вершил всеми делами. Так вот, в официальной протокольной записке описывается, как Ломоносов «непристойно сложил перста, поводил ими под носом у академика Шумахера и сказал — накося-

П.Л.Капица и Н.Н.Семенов. Портрет Б.М.Кустодиева (1921 г.)

выкуси...» Дальше я должен отослать интересующихся к протокольной записке, ибо, хотя дальнейший текст и был произнесен Ломоносовым на немецком языке, но его воспроизведение у нас не представляется возможным. Как известно, после этого у Ломоносова были неприятности, но уже не такие большие: его гениальность была уже признана, и такие его покровители, как граф Шувалов, Воронцов и другие, не позволили лишить Ломоносова возможности вести научные работы.

Теперь позвольте поставить такой вопрос: возможен ли аналогичный случай в наши дни у нас в Академии наук? Конечно, сперва покажется постановка вопроса нелепой и смешной. Нужно иметь совсем необычное воображение, чтобы даже приблизительно вообразить себе нечто подобное в наши дни и в нашей Академии наук. Но на самом деле во всем описанном инциденте есть очень много поучительного и для наших дней. Ведь гений обычно проявляется в непослушании. Человек ищет новое, когда он не хочет следовать существующему, так как оно его не удовлетворяет. Вспомним случаи непослушания из биографии Павлова, Пирогова, Суворова, Менделеева, и трудно не прийти к выводу — непослушание есть одна из неизбежных черт, проявляющихся в человеке, ищущем и создающем всегда новое в науке, искусстве, литературе, философии. Таким образом, казалось бы одно из условий развития таланта человека — это свобода непослушания.

Интересно вспомнить, какова она была в различные эпохи и как она влияла на взаимодействия человека и государства.

Вот пример их эпохи Возрождения. Молодой Микеланджело выполняет заказ Медичи. Ведет он себя дерзко. Когда один из Медичи выразил неудовольствие по поводу сходства его портрета, Микеланджело сказал: «Не беспокойтесь, ваше святейшество, через сто лет будет похоже на вас». Не менее недозволенно он ведет себя с папой. Микеланджело, когда ему было 30 лет, когда уже гений его был признан, ссорится с папой. В Риме он исполняет заказ папы Юлия II, но он проявил непослушание и ссорится с папой. У Ромена Роллана описано, как Микеланджело кладет свою котомку на плечи и самовольно покидает Рим и идет к себе во Флоренцию. Когда об этом узнает папа, он сам садится в карету и со свитой отправляется в погоню за Микеланджело, настигает его вблизи границы и уговаривает его вернуться. Наместник бога на земле готов был принести гению Микеланджело свои извинения и простить его непослушание, лишь бы не потерять его. Этот эпизод отражает отношение церкви к искусству во времена Возрождения.

Вот другой пример, уже из нашей истории, где послушание ставится выше гениальности.

Тарле в одной из своих книг рассказывает о посещении Николаем I Московского университета. Когда ему ректор представлял лучших студентов, после короткого разговора с ними Николай I сказал: «Не нужны мне умники, а нужны мне послушники». Отношение к умникам и послушникам в различных областях знания и искусства характерно для каждой эпохи. Николай хотел сделать из Пушкина послушника, в итоге такого обращения Пушкин погиб.

Спрашивается, чему в данное время у нас открыты более широкие ворота в жизни — послушанию или независимому творчеству, и сколько непослушания прощает общество гению?

Людям объективно судить о своей эпохе и трудно, и рискованно, но все же в области гуманитарных наук у нас сейчас несомненно более высоко ценится послушание. В области точных наук хотя и есть более широкие возможности проявления гения, но до масштабов непослушания Ломоносова нам далеко. Я говорю, конечно, не об отношении бюрократического аппарата, но широкой общественности.

Я хотел бы рассказать кратко об одном поучительном случае, из которого можно было бы вывести некоторое представление о том, как могла бы сложиться судьба молодого Михайлы Ломоносова в наши дни. На редколлегии «Журнала экспериментальной и теоретической физики» мы рассматривали одну работу, посвященную радиоизлучению облаков. Работа была правильная, хотя и не представляла достаточного интереса для напечатания, и мы отклонили ее. Но мы обратили внимание на то, что прислана эта работа учеником 10-го класса средней школы, который живет в городе, отстоящем от Москвы ближе, чем Архангельск, и все же достаточно далеко. Это меня настолько заинтересовало, что мы организовали приезд этого юноши в Москву.

Познакомившись с ним, мы узнали, что это весьма скромный юноша из семьи с ограниченными средствами (отец был убит на войне). Мы выяснили, что он действительно очень любит физику и математику, отдает все свое свободное время самообразованию и работает самостоятельно... И мы решили ему помочь поступить в один из московских вузов. Но когда пришла пора его приезда в Москву, потеряли его из виду и даже получили письмо, что с ним не все благополучно. Чтобы выяснить, что же произошло, в город, где учился юноша, поехал наш сотрудник. Вот тут и выяснилось то, ради чего я веду этот рассказ.

Дело в том, что юноша был радиолюбителем и сам делал приборы, и ему очень нужен был телефон. Так как денег у него не было, то он срезал телефон в общественной будке. Но это не прошло безнаказанно. Нужно отдать справедливость нашей прокуратуре — они сразу все поняли, и дело против юноши было прекращено. Но вот школа поступила иначе. Там юношу не любили за непослушание и за то, что, зная ряд предметов лучше преподавателей, он демонстрировал это во время уроков. То, что юноша был привлечен прокуратурой, дало школе основание исключить его без права сдачи экзаменов на аттестат зрелости. Он ушел на завод и стал к станку. Там и нашел его наш сотрудник.

Конечно, мы вмешались, и теперь юноша уже успешно окончил университет и стал научным работником (речь идет о Борисе Румянцеве — *Прим. ред.*).

Интересно в этой истории то, что, к сожалению, когда наша школа воспитывает нашу молодежь, она ценит больше послушание, чем талант. Что было бы в нашей школе с ломоносовыми? Может быть, уже многие из них отфильтровались от науки нашей школой? На этот вопрос трудно ответить, и даже трудно ответить: хорошо это или плохо? Мы не можем дать точный ответ, нужна ли на данном историческом интервале развития страны в данной области науки или искусства четкая и жесткая система и организация или свобода деятельности самобытных гениев. Вполне возможно, что сила и успех нашей эпохи в социальной структуре, а не в отдельных талантах, что гении в науке, искусстве, литературе на данном этапе нашего развития нам не нужны. Это не парадокс, а диалектика исторического момента нашего развития. Гении раздаются эпохой, а не гении рождают эпоху.

О природе шаровой молнии

П. КАПИЦА

Природа шаровой молнии пока остается неразгаданной. Это надо объяснить тем, что шаровая молния — редкое явление, а поскольку до сих пор нет указаний на то, что явление шаровой молнии удалось убедительно воспроизвести в лабораторных условиях, она не поддается систематическому изучению. Было высказано много гипотетических предположений о природе шаровой молнии, но то, о котором пойдет речь в этой заметке, по-видимому, еще не высказывалось. Главное, почему на него следует обратить внимание, это то, что его проверка приводит к вполне определенному направлению экспериментальных исследований.

П. Л. Капица в лаборатории на даче (1947 г.)

Нам думается, что ранее высказанные гипотезы о природе шаровой молнии неприемлемы, так как они противоречат закону сохранения энергии. Это происходит потому, что свечение шаровой молнии обычно относят за счет энергии, выделяемой при каком-либо молекулярном или химическом превращении, и, таким образом, предполагают, что источник энергии, за счет которого светится шаровая молния, находится в ней самой. Это встречает следующее принципиальное затруднение.

Из основных представлений современной физики следует, что потенциальная энергия молекул газа в любом химическом или активном состоянии меньше той, которую нужно затратить на диссоциацию и ионизацию молекул. Это дает возможность количественно установить верхний предел энергии, которая может быть запасена в газовом шаре, заполненном воздухом и размерами с шаровую молнию.

С другой стороны, можно количественно оценить интенсивность излучения с ее поверхности. Такого рода прикидочные вычисления показывают, что верхний предел времени высвечивания получается много меньше действительно наблюдаемого у шаровых молний. Этот вывод теперь также подтверждается опытным путем из опубликованных данных о времени высвечивания облака после ядерного взрыва. Такое облако сразу после взрыва, несомненно, является полностью ионизованной массой газа, и поэтому его можно рассматривать как заключающее в себе предельный запас потенциальной энергии. Поэтому, казалось бы, оно должно высвечивать за время большее, чем наиболее длительно существующая шаровая молния подобного размера, но на самом деле этого нет.

Поскольку запасенная энергия облака пропорциональна объему (d^3), а испускание — поверхности (d^2), то время высвечивания энергии из шара будет пропорционально d, его линейному размеру. Полностью облако ядерного взрыва при диаметре d, равном 150 м, высвечивается за время, меньшее чем 10 с, так что шар диаметром в 10 см высветится за время, меньшее чем 0,01 с. Но на самом деле, как указывается в литературе, шаровая молния таких размеров чаще всего существует несколько секунд, а иногда даже минуту.

Таким образом, если в природе не существует источников энергии, еще нам не известных, то на основании закона сохранения энергии приходится принять, что во время свечения шаровой молнии непрерывно подводится энергия, и мы вынуждены искать этот источник энергии вне объема шаровой молнии. Поскольку шаровая молния обычно наблюдается «висящей» в воздухе, непосредственно не соприкасаясь с проводником, то наиболее естественный и, по-видимому, единственный способ повода энергии — это поглощение ею приходящих извне интенсивных радиоволн.

Примем такое предположение за рабочую гипотезу и посмотрим, как согласуются с ней наиболее характерные из описанных явлений, сопровождающих шаровую молнию.

Если сравнить поведение шаровой молнии со светящимся облаком, оставшимся после ядерного взрыва, то бросается в глаза следующая существенная разница. После своего возникновения облако ядерного взрыва непрерывно растет и бесшумно тухнет. Шаровая молния в продолжение всего времени свечения остается постоянных размеров и часто пропадает со взрывом. Облако ядерного взрыва, будучи наполнено горячими газами с малой плотностью, всплывает в воздух и поэтому двигается только вверх. Шаровая молния иногда стоит неподвижно, иногда движется, но это движение не имеет предпочтительного направления по отношению к земле и не определяется направлением ветра. Теперь покажем, что эта характерная разница хорошо объясняется выдвинутой гипотезой.

Известно, что эффективное поглощение электромагнитных колебаний ионизованным газовым облаком — плазмой — может происходить только при резонансе, когда собственный период электромагнитных колебаний плазмы совпадает с периодом поглощаемого излучения. При тех интенсивностях ионизации, которые ответственны за яркое свечение шара молнии, резонансные условия всецело определяются его наружными размерами.

Если считать, что поглощаемая частота соответствует собственным колебаниям сферы, то нужно, чтобы длина λ поглощаемой волны была приблизительно равна четырем диаметрам шаровой молнии (точнее, $\lambda = 3{,}65d$). Если в том же объеме ионизация газа слаба, то тогда, как известно, период колебаний плазмы в основном определяется степенью ионизации, причем соответствующая резонансная длина волны всегда будет больше, чем та, которая определяется размерами ионизованного объема и, как мы указали, равна $3{,}65\,d$.

При возникновении шаровой молнии механизм поглощения можно себе представить так: сперва имеется небольшой по сравнению с $(\pi/6)d^3$ объем плазмы, но если ионизация его будет слаба, то все же резонанс с волной длины $\lambda = 3{,}65d$ будет возможен и произойдет эффективное поглощение радиоволн. Благодаря этому ионизация будет расти, а с ней и начальный объем сферы, пока она не достигнет диаметра d. Тогда резонансный характер процесса поглощения будет определяться только формой шаровой молнии, и это приведет к тому, что размер сферы шаровой молнии станет устойчивым.

Действительно, предположим, что интенсивность поглощаемых колебаний увеличивается; тогда температура ионизованного газа несколько повысится, и сфера раздуется, но такое увеличение выведет ее из резонанса, и поглощение электромагнитных колебаний уменьшится, сфера остынет и вернется к размерам, близким к резонансным. Таким образом можно объяснить, почему наблюдаемый диаметр шаровой молнии в процессе свечения остается постоянным.

Размеры наблюдаемых шаровых молний лежат в интервале от 1 до 27 см. Согласно нашей гипотезе, эти величины, помноженные на четыре, дадут тот диапазон волн, который ответствен в природе за создание шаровых молний. Наиболее часто наблюдаемым диаметрам шаровых молний от 10 до 20 см соответствуют длины волн от 35 до 70 см.

Местами, наиболее благоприятными для образования шаровых молний, очевидно, будут области, где радиоволны достигают наибольшей интенсивности. Такие места будут соответствовать пучностям напряжения, которые получаются при разнообразных возможных интерференционных явлениях. Благодаря повышенному напряжению электрического поля в пучностях, их положение будет фиксировать возможные места шаровой молнии. Такой механизм приводит к тому, что шаровая молния будет передвигаться с передвижением пучности, независимо от направления ветра или конвекционных потоков воздуха.

Как возможный пример такого фиксированного положения шаровой молнии рассмотрим случай, когда радиоволны падают на проводящую поверхность земли и отражаются. Тогда благодаря интерференции образуются стоячие волны, и на расстояниях, равных λ; длине волны, помноженной на 0,25; 0,75; 1,25; 1,75 и т.д., будут образовываться неподвижные в пространстве пучности, в которых напряжение электрического поля удваивается по сравнению с падающей волной. Вблизи этих поверхностей благодаря повышенному напряжению будут благоприятные условия как для создания начального пробоя, так и для дальнейшего развития и поддержания ионизации в облаке, образующем шаровую молнию. Таким образом, поглощение электромагнитных колебаний ионизованным газом может происходить только в определенных поверхностях, параллельных рельефу земли. Это и будет фиксировать в пространстве положение шаровой молнии.

Такой механизм объясняет, почему шаровая молния обычно создается на небольшом расстоянии от земли и часто передвигается в горизонтальных плоскостях. При этом наименьшее расстояние центра шаровой молнии до проводящей поверхности будет равно $1/4$ длины волны, и, следовательно, зазор между отражающей поверхностью и краем шара должен быть примерно равен его радиусу.

При интенсивных колебаниях вполне возможно, чтобы в ряде пучностей образовывались отдельные шаровые молнии, на расстоянии полудлины волны друг от друга. Такие цепочки из шаровых молний наблюдаются, они носят название «четочных» молний и даже были засняты.

Наша гипотеза также может объяснить, почему иногда шаровая молния пропадает со взрывом, который не причиняет разрушений. Когда подвод мощности внезапно прекращается, то при малых размерах остывание шара произойдет так быстро, что образуется сфера разреженного воздуха, при быстром заполнении которой возникает ударная волна небольшой силы. Когда же энергия медленно высвечивается, гашение будет процессом спокойным и бесшумным.

Выдвинутая нами гипотеза может дать удовлетворительное объяснение, пожалуй, наиболее непонятному из свойств шаровой молнии — ее проникновению в помещение через окна, щели и чаще через печные трубы. Попав в помещение, светящийся шар в продолжение нескольких секунд либо парит, либо бегает по проводам. Таких случаев описано столько, что их реальность не вызывает сомнения.

С нашей точки зрения, весьма интересен случай, когда в аэроплан, пересекающий грозовую тучу на высоте 2800 м, влетела шаровая молния. Нашей гипотезой все эти явления объясняются тем, что проникновение в замкнутые помещения шаровых молний происходит благодаря тому, что они следуют по пути коротковолновых электромагнитных колебаний, распространяющихся либо через отверстия, либо по печным трубам или проводам как по волноводам. Обычно размер печной трубы как раз соответствует тому критическому сечению волновода, в котором могут свободно распространяться волны длиною 30 — 40 см, что и находится в соответствии с наблюдаемыми размерами шаровых молний, проникающих в помещение.

Таким образом, гипотеза о происхождении шаровой молнии за счет коротковолновых электромагнитных колебаний может объяснить не только ряд других известных и непонятных явлений, связанных с шаровой молнией, как то: ее фиксированные размеры, малоподвижное положение, существование цепочек, взрывная волна при исчезновении, — но также ее проникновение в помещение.

Тут следует поставить вопрос: не происходит ли давно наблюдаемое в природе явление тлеющего кистеобразного свечения, называемого «огни св. Эльма», также за счет электромагнитных колебаний, но более слабых мощностей? До сих пор это свечение объяснялось стеканием зарядов с острия, происходящим благодаря постоянному напряжению, возникающему при больших разностях потенциалов между землей и тучей. Такое объяснение было вполне естественно до тех пор, пока это свечение наблюдалось на земле, где можно указать замкнутый путь постоянного тока, но теперь описаны случаи, когда «огни св. Эльма» продолжительное время наблюдаются на фюзеляжах летящих самолетов. Поэтому возможно, что и тут выдвинутая нами гипотеза может помочь решению этой трудности.

Хотя выдвинутая гипотеза успешно разрешает ряд основных трудностей понимания процесса шаровой молнии, все же следует указать, что этим еще вопрос до конца не решается, так как нужно еще показать существование в природе электромагнитных колебаний, питающих шаровую молнию. Тут в первую очередь нужно ответить на естественно возникающий вопрос: почему во время грозы излучения электромагнитных колебаний в области той длины волны, которая нужна для создания шаровой молнии, до сих пор не описаны в литературе?

Эксперимент с жидким гелием проводят П.Л. Капица и его помощник С.И. Филимонов (1939 г.)

Пока еще не было направлено внимание на обнаружение во время грозы этих волн, нам думается, можно предположить следующее. Поскольку шаровая молния — редкое явление, то естественно считать, что возникновение соответствующих радиоволн тоже редко происходит, кроме того, еще реже можно ожидать, чтобы они попадали на приемные аппараты в той коротковолновой области радиоволн от 35 до 70 см, которая пока еще сравнительно мало используется. Поэтому как следующий шаг проверки выдвинутых предположений следует выработать советствующий экспериментальный метод наблюдения, попытаться обнаружить во время грозы радиоизлучения в указанном коротковолновом диапазоне волн.

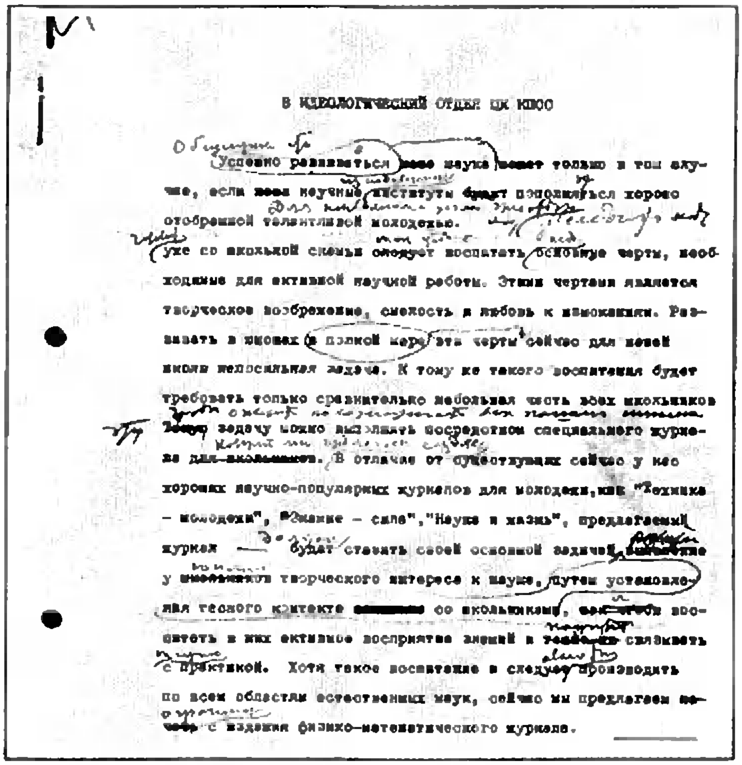
Что касается источника этих радиоволн, то, по-видимому, есть два факта в наблюдениях над шаровыми молниями, которые могут помочь пролить свет на механизм их возникновения. Один из них — то, что шаровая молния наиболее часто возникает к концу грозы; второй — то, что шаровой молнии непосредственно предшествует обычная.

Первый факт указывает, что наличие ионизованного воздуха помогает созданию радиоволн, а второй — что возбудителем этих колебаний является грозовой разряд. Это ведет к естественному предположению, что источником радиоволн является колебательный процесс, происходящий в ионизованной атмосфере либо у тучи, либо у земли. В последнем случае, если источник находится у земли, то район, захваченный интенсивным радиоизлучением, будет ограничен и будет непосредственно прилегать к месту, где находится шаровая молния. Интенсивность радиоколебаний может быстро падать при удалении от этого места, и поэтому на значительных расстояниях для наблюдения будет нужна чувствительная аппаратура. Если радиоволны излучаются самой грозовой тучей, то они будут захватывать большие районы и их обнаружение даже малочувствительным приемником не представит труда.

Наконец, как второе возможное направление для экспериментальной проверки выдвинутой гипотезы надо указать на возможность создания разряда, подобного шаровой молнии, в лабораторных условиях. Для этого, очевидно, нужно располагать мощным источником радиоволн непрерывной интенсивности в дециметровом диапазоне и уметь их фокусировать в небольшом объеме. При достаточном напряжении электрического поля должны возникнуть условия для безэлектродного пробоя, который путем ионизационного резонансного поглощения плазмой должен развиться в светящийся шар с диаметром, равным примерно четверти длины волны.

Капица, олимпиады и «Квант»

Ю. БРУК



В ИДЕОЛОГИЧЕСКИЙ ОТДЕЛ ЦК КПСС

Успешно развиваться наша наука может только в том случае, если наши научные институты будут пополняться хорошо отобранной талантливой молодежью.

Уже со школьной скамьи следует воспитать основные черты, необходимые для активной научной работы. Этими чертами является творческое воображение, смелость и любовь к изысканиям. Развивать в школах в полной мере эти черты сейчас для нашей школы непосильная задача. К тому же такого воспитания будет требовать только сравнительно небольшая часть всех школьников. Эту задачу можно выполнять посредством специального журнала для школьников. В отличие от существующих сейчас у нас хороших научно-популярных журналов для молодежи, как "Техника — молодежи", "Знание — сила", "Наука и жизнь", предлагаемый журнал — будет ставить своей основной задачей развитие у школьников творческого интереса к науке, путем установления тесного контакта [redacted] со школьниками, воспитать в них активное восприятие знаний и связывать с практикой. Хотя такое воспитание и следует производить по всем областям естественных наук, сейчас мы предлагаем начать с издания физико-математического журнала.

Мне хотелось бы рассказать о той роли, которую сыграл П.Л.Капица в организации Всероссийских олимпиад школьников и в создании журнала «Квант». Эта страница истории олимпиад и журнала должна стать известной нашим читателям.

Начнем с того, что в начале шестидесятых годов ведущие вузы нашей страны стали организовывать так называемые «большие» олимпиады по физике и математике. «Большими» их условно называли потому, что студенты, аспиранты и преподаватели этих вузов выезжали в разные города (обычно во время зимних студенческих каникул) и проводили в этих городах олимпиады для школьников. Первыми такие олимпиады провели математики Московского университета, физики Московского физико-технического института и физического факультета МГУ, ученые Сибирского отделения Академии наук СССР.

Опыт проведения школьных олимпиад в нашей стране к тому времени уже имелся, и немалый. (Интересно напомнить, что самая первая олимпиада — по математике — была организована в 1934 году в Ленинграде. В 1935 году состоялась первая, также математическая, олимпиада в Москве. Физики свои олимпиады начали проводить позже.) Но именно в начале шестидесятых годов наметился и произошел переход олимпиадного движения в качественно новую форму — родились Всероссийские олимпиады. Датой этого рождения следует считать 1961 год, когда была проведена первая Всероссийская математическая олимпиада. Почти сразу же возникли идеи организовать такие же олимпиады по физике, что и было реализовано в зимние студенческие каникулы 1962 и 1963 годов.

Математики и физики проводили свои «большие» олимпиады сначала независимо друг от друга и практически в одно время. Это привело к тому, что школьники, желающие поучаствовать в олимпиадах и по физике, и по математике, не всегда могли это сделать. Было и много организационных проблем, которые легче было бы решать вместе физикам и математикам (позже к ним присоединились и химики). Был уже накоплен опыт и проведения олимпиад в областях. И естественно встал вопрос о структуре олимпиад и различных их этапах в масштабах всей страны.

Осенью 1964 года было решено объединить усилия организаторов олимпиад и создать Центральный оргкомитет Всероссийской физико-математической олимпиады школьников. Председателем первого Оргкомитета стал академик П.Л.Капица, и это не было случайностью. Один из создателей Московского физико-технического института и председатель Попечительского Совета МФТИ, П.Л.Капица всегда интересовался проблемой привлечения в науку способных молодых людей, их воспитания и обучения. Он сам придумывал и предлагал задачи для экзаменов и конкурсов, внимательно следил не только за успехами студентов, но за отбором школьников. Неоднократно Петр Леонидович выступал с докладами и писал статьи о принципах преподавания физики в средней школе. Акцент он делал при этом на том, что молодых людей надо как можно раньше приучать и обучать действовать самостоятельно, решать больше задач, в том числе и таких, которые ставятся в достаточно общей форме, когда решающий задачу сам должен выбрать характерные параметры и правильно оценить масштабы рассматриваемого явления или процесса. Петр Леонидович вовсе не считал, что способных молодых людей надо привлекать только в научные учреждения или в вузы, готовящие научных работников. Будучи сам не только физиком, но и крупным инженером, он полагал, что каждый физик должен быть инженером, а каждый инженер должен хорошо знать математику и физику.

Первое заседание Центрального оргкомитета Всероссийских олимпиад школьников состоялось 19 октября 1964 года в Институте физических проблем Академии наук СССР, директором которого был Петр Леонидович. Я упомяну здесь только о нескольких вопросах, обсуждавшихся на том, теперь уже можно сказать историческом, заседании Оргкомитета. После утверждения жюри олимпиад по физике (председатель этого жюри — академик И.К.Кикоин) и по математике (председатель — профессор, ныне академик, В.И.Арнольд), Оргкомитет очень подробно обсудил Положение об Олимпиадах, рассмотрел вопросы об организации Всероссийской заочной олимпиады школьников, о проведении лабораторных (экспериментальных) работ на олимпиадах по физике, об активном участии в Международных олимпиадах и о создании специализированного журнала для школьников по физике и математике.

Следует сказать, что почти все обсуждавшиеся на том заседании вопросы были в основном решены в том же (1964/65) учебном году. Согласованная и утвержденная тогда структура Всероссийских олимпиад сохранилась, по существу без серьезных изменений, и до сих пор. Но вопрос о создании журнала для школьников быстро решить не удалось. Первый номер журнала, в котором вы читаете эту заметку, вышел только в 1970 году. Увы, в этом не были повинны участники того первого заседания Центрального оргкомитета олимпиад. Тогда, в октябре 1964 года, было решено обратиться с соответствующими предложениями в директивные органы — так назывались тогда высшие партийные инстанции, которые только и могли решить вопрос о создании нового журнала. В начале 1965 года П.Л.Капица сам написал текст письма шести академиков (публикуемого ниже), переданного в Центральный Комитет КПСС. Прошло однако еще несколько лет, прежде чем появилось соответствующее решение об издании журнала.

Главным редактором журнала «Квант» с самого начала был назначен академик И.К.Кикоин. Ему же П.Л.Капица передал свои полномочия по руководству Центральным оргкомитетом Всероссийской физико-математической олимпиады школьников (это произошло с начала 1965/66 учебного года). Сам же Петр Леонидович все годы продолжал активно интересоваться олимпиадными делами и был членом редакционной коллегии журнала «Квант».

П.Л.Капица (1937 г.)

Принципы и идеи, сформулированные в письме академиков, которое мы публикуем впервые, по существу полностью реализованы в работе редакционной коллегии и редакции нашего журнала.

В Идеологический отдел ЦК КПСС

Общепринято, что наука успешно развивается только в том случае, когда научно-исследовательские институты пополняются хорошо отобранной талантливой молодежью. Чтобы этот отбор бы наиболее успешным, нужно уже со школьной скамьи воспитывать в молодежи те основные черты, которые необходимы для активной научной работы. Этими чертами являются: творческое воображение, смелость и любовь к изысканиям. Развивать в юношах эти черты в полной мере сейчас для нашей школы непосильная задача. К тому же такого воспитания будет требовать только сравнительно небольшая часть наших школьников. Чтобы охватить по возможности все наши школы, такую задачу можно выполнить посредством специального журнала, который мы и предлагаем создать. В отличие от существующих у нас сейчас хороших научно-популярных журналов для молодежи, как «Техника — молодежи», «Знание — сила», «Наука и жизнь», предлагаемый журнал должен ставить своей основной задачей развитие у школьников творческого интереса к науке и воспитание в них активного *восприятия знаний и умения связывать теорию с практикой. Хотя такое воспитание и следовало бы производить по всем областям естественных наук, сейчас мы предлагаем начать с издания физико-математического журнала.*

Этот журнал должен быть предназначен для руководства и систематической помощи учащимся в самостоятельной работе по физике и математике. Он должен направлять внеклассную работу, проводимую в предметных кружках школ и домов пионеров, установить непосредственный контакт с учащимися и воспитывать в них творческий и активный подход к восприятию научных знаний.

Для осуществления этой цели журнал должен будет публиковать обширный материал, накопленный в физико-математических школах и кружках при ведущих вузах страны, наиболее интересные и поучительные задачи физико-математических олимпиад, а также все лучшее, что появляется по этим вопросам в зарубежной печати.

Журнал также предоставит возможность школьникам публиковать свои статьи, задачи и описания приборов, которые они сами строят. Журнал в большой мере будет способствовать пропаганде науки, повышению у учащихся интереса к физике и математике.

При журнале должна быть создана группа молодых ученых, могущих внимательно вести переписку как со школьниками, так и с их учителями и таким путем направлять и стимулировать со школьной скамьи самостоятельную работу учеников. Журнал мог бы иметь группу инспекторов-консультантов, которые могли бы ездить по школьным кружкам и направлять их работу. Журнал должен руководиться редакцией, состоящей в основном своем большинстве из ученых, а не из педагогов. Во главе журнала должно стоять авторитетное лицо — академик. Желательно, чтобы Академия наук взяла шефство над этим журналом и чтобы он издавался в издательстве «Наука».

Журнал предполагается выпускать ежемесячно, объемом в 5 — 6 печатных листов и тиражом достаточно большим (несколько сот тысяч экземпляров), чтобы охватить школьников всей страны.

Мы просим ЦК КПСС рассмотреть вопрос об издании в ближайшее время такого журнала.

Академик П.Л.Капица
Академик М.А.Лаврентьев
Академик И.К.Кикоин
Академик А.Н.Колмогоров
Академик И.В.Обреимов
Академик П.С.Александров

П.Л.Капица и П.Дирак (конец 1920-х годов)

Физические задачи

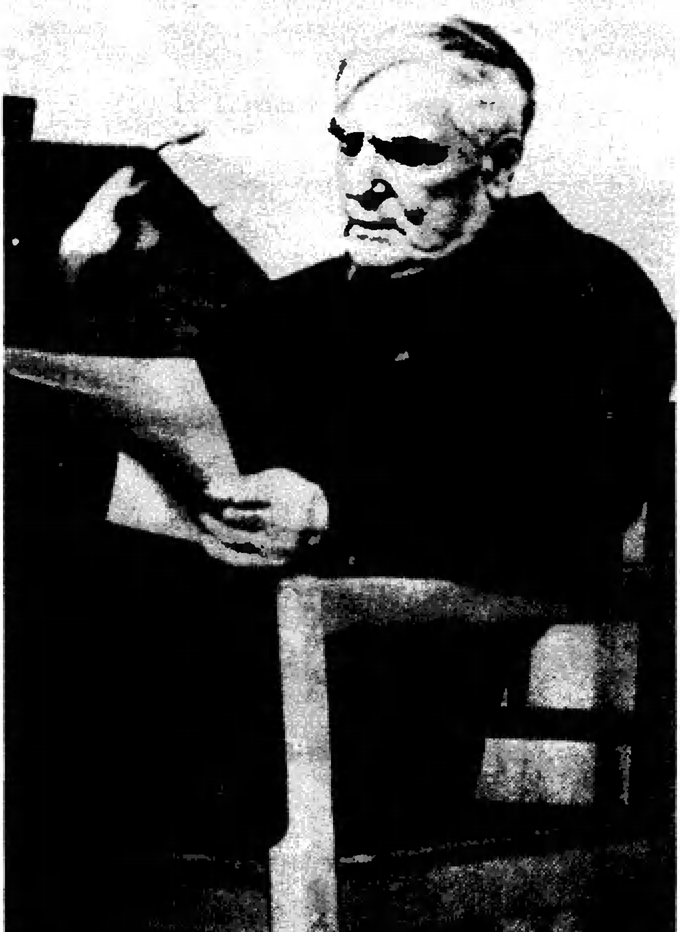
П. КАПИЦА

Напечатанные в этом сборнике задачи были составлены мной для студентов Московского физико-технического института, когда в 1947 — 1949 гг. я там читал курс общей физики. В этот сборник вошли также задачи, которые давались на экзаменах при поступлении в аспирантуру Института физических проблем Академии наук СССР. Эти задачи собрали вместе и подготовили к печати студенты физтеха, недавно окончившие институт, И.Ш.Слободецкий и Л.Г.Асламазов.

При составлении этих задач я преследовал определенную цель, поэтому они был составлены не обычным образом. Чтобы их решение для читателя представляло интерес, следует сделать некоторые разъяснения.

Хорошо известно, какое большое значение имеет решение задач при изучении точных наук, таких как математика, механика, физика и др. Решение задач дает возможность не только самому студенту применить свои знания к решению практических проблем, но и для преподавателя задачи являются одним из наиболее эффективных способов проверить, насколько глубоко понимает студент предмет, не являются ли его знания только накоплением заученного наизусть. Кроме того, при обучении молодежи с помощью решения задач можно еще воспитывать и выявлять творческое научное мышление.

Я стремился осуществить эту цель, составляя большинство задач таким образом, что они являются постановкой небольших проблем, а студент должен на основании известных физических законов проанализировать и количественно описать заданное явление природы. Эти явления природы выбраны так, чтобы они имели либо научный, либо практический интерес, и при этом нами учитывалось, что уровень знаний студентов должен быть достаточным, чтобы выполнить задание.



На заседании ученого совета Института физических проблем

Обычно задачи ставятся так, чтобы подходов к их решению было несколько, с тем чтобы и в выборе решения могла проявиться индивидуальность студента. Например, задачу о траектории полета самолета, при которой в кабине была бы невесомость, можно решить стандартным способом, написав уравнение движения самолета в поле тяжести Земли и приравняв нулю равнодействующую сил, действующих на точку, находящуюся в самолете. Другой способ решения более прост: принять, что если самолет следует траектории свободно летящего тела, которая в земном поле близка к параболе, тогда тело, находящееся в самолете, может быть в состоянии невесомости. Более любознательный студент может углубить вопрос и выяснить, что требуется при полете самолета для того, чтобы во всех точках кабины самолета было одновременно состояние невесомости. Далее можно разобрать вопрос, какие навигационные приборы нужны, чтобы пилот мог вести самолет по нужной для осуществления невесомости траектории, и т.п.

Характерной чертой наших задач является то, что они не имеют определенного законченного ответа, поскольку студент может по мере своих склонностей и способностей неограниченно углубиться в изучение поставленного вопроса.

Кроме проблемного характера этих задач, в большинстве из них есть еще одна особенность: в них не заданы численные величины физических констант и параметров, и их предоставляется выбрать самим решающим. Так например, в той же задаче о невесомости в самолете требуется определить время, в продолжение которого она может осуществляться, и при этом говорится, что выбирается современный самолет.

Из книги «Физические задачи», опубликованной в 1972 году.

Потолок полета этого самолета и его предельную скорость предоставляется выбрать самому студенту. Это мы делаем потому, что практика преподавания показывает, что обычно у нас мало заботятся о том, чтобы ученый и инженер в процессе своего учения научились конкретно представлять себе масштабы тех физических величин, с которыми им приходится оперировать: тока, скорости, напряжения, прочности, температуры и пр.

При решении научных проблем ученому всегда приходится в своем воображении ясно представлять величину и относительную значимость тех физических параметров, которые служат для описания изучаемого явления. Это необходимо, чтобы уметь выбирать те из них, которые являются решающими при опытном изучении данного явления природы. Поэтому надо приучать смолоду ученых, чтобы символы в формулах, определяющие физические величины, всегда представляли для них конкретные количественные значения. Для физика, в отличие от математика, как параметры, так и переменные величины в математическом уравнении должны являться конкретными количествами. В наших задачах мы к этому приучаем студентов тем, что они сами должны в литературе отыскивать нужные для решения величины.

Мне думается, что решение задач-проблем, подобных собранным в этой книге, может быть широко использовано не только при преподавании физики, но и других областей точных наук: математики, механики, химии и др. Перед тем как решить крупную научную проблему, ученым надо уметь ее решать в малых формах. Поэтому решение задач, аналогичных приведенным в этом сборнике, является хорошей подготовкой для будущих научных работников.

1. По какой траектории должен лететь современный самолет для того, чтобы можно было воспроизвести невесомость? Как долго можно воспроизводить невесомость?

2. У автомобиля, участвующего в гонке, лопается шина. С какой скоростью должен ехать автомобиль, чтобы шина не сминалась?

3. Во сколько раз можно увеличить высоту прыжка акробата однократным применением трамплина?

4. Эквилибрист массой m стоит на шаре радиусом R и массой M. Шар находится на горизонтальной плоскости и катится по ней без скольжения. Проанализируйте, как должен эквилибрист переступать по шару, чтобы катиться, и как связан коэффициент трения подошв эквилибриста с ускорением качения.

5. Объясните, почему человек может бежать по очень тонкому льду и не может стоять на нем, не проваливаясь.

6. Оцените порядок скорости, с которой человек должен бежать по воде, чтобы не тонуть.

7. Космический корабль летит от Земли к Марсу. Половина поверхности корабля зачернена и полностью поглощает излучение от Солнца, другая половина — полированная, металлическая — полностью отражает излучение от Солнца. Изучите, как будет влиять световое давление на поступательное и вращательное движение корабля. Количественно оцените величину эффекта для корабля-шара массой 5 т и диаметром 300 см.

8. Определите искажение поверхности жидкости, производимое силой тяготения шара. Разберите возможность экспериментального наблюдения этого эффекта для определения постоянной тяготения.

9. Объясните, почему, когда камень или капля дождя падают в воду, брызги летят вверх. От чего больше зависит высота полета брызг: от размеров камня или от скорости его падения? Какова максимальная высота полета брызг?

10. Почему жидкий азот можно лить на руку, не боясь «ожога»?

11. Определите предел радиуса слышимости разговора на открытом воздухе.

12. В прежние времена у сторожей, чтобы злоумышленники знали, что они не спят, были колотушки, которые состояли из дощечки, на одном конце которой была рукоятка, на другом на бечевке длиной l висел шарик массой m. Определите, при каком движении рукоятки колотушки шарик будет стучать с периодом T.

13. Объясните, почему бывали случаи, когда во время выстрела из артиллерийского орудия целиком отлетал передний конец дула.

14. Какие движения должен совершать человек, чтобы вертеть на туловище обруч?

15. Перечислите факторы, которые сказываются на точности хода карманных часов. Оцените относительные значения этих факторов.

16. Поверхность реки образует наклонную плоскость. Может ли тело свободно плыть по реке со скоростью, превышающей максимальную скорость течения?

17. Самолет летит со скоростью, близкой к звуковой; благодаря трению о воздух фюзеляж нагревается. Оцените предельно возможную температуру нагревания поверхности самолета.

18. Изолированный медный шарик заданного радиуса, покрытый известным количеством полония, помещен в вакуум. Благодаря вылету α-частиц он приобретает заряд. Определите нарастание потенциала со временем и его предельное значение.

19. Почему для получения больших мощностей на практике пользуются электромагнитными, а не электрофорными машинами?

20. Через тонкую проволочку диаметром d пропускают импульс тока силой I. Через время t проволочка разрушается. Вычислите магнитное поле и оцените, какое наибольшее магнитное поле можно получить таким образом и чему равно время его существования.

21. Громоотвод соединен с землей через круглую медную трубку диаметром 2 см и толщиной стенки 2 мм. После удара молнии трубка превратилась в круглый стержень. Объясните это явление и оцените силу тока грозового разряда.

22. Разберите, чем точнее можно мерить магнитное поле: баллистическим гальванометром или флюксметром.

23. Почему при разрыве тока в первичной цепи трансформатора во вторичной не получается перенапряжения, в то время как в индукционной спирали оно возникает?

24. Предлагается магнитная пушка, работающая по следующему принципу. Недалеко от соленоида, на его оси, помещается цилиндр (снаряд). Внезапно по соленоиду пускают ток. Когда, втягиваясь, цилиндр достигает середины соленоида, ток автоматически выключается. Оцените практически осуществимую в такой пушке начальную скорость снаряда. Оцените необходимую мощность генератора.

25. Опишите отражение белого света от боковой стороны мыльного пузыря в зависимости от его размеров и толщины пленки.

Профессор и студент

П. КАПИЦА

Мы замечаем, что у нас еще есть все-таки большие пробелы в нашей профессуре, нам не всегда удается привлекать к обучению молодежи лучших профессоров. И есть еще один недостаток, о котором я скажу. Институт не выполняет еще все те функции, которые он мог бы выполнять. Вот об этих функциях я тоже хочу поговорить. Что касается подбора профессуры, то, как вы знаете, у нас есть и хорошие профессора, есть и средние, и даже встречаются ниже среднего. Тут ничего не поделаешь. Так всегда будет.

Самое, пожалуй, тяжелое то, что у нас недостаточно хорошо обеспечено преподавание основных дисциплин. В прежние времена чтение курсов основных предметов в высших учебных заведениях — общая физика, химия, математика, механика — возлагалось на самых крупных ученых, и считалось исключительно почетным делом вести такие курсы. Теперь это изменилось, трудно сказать, почему. Потому что с точки зрения воспитания молодежи очень важно, конечно, чтобы основа знаний давалась крупными учеными, которые закладывали бы фундамент, сообщали молодежи то, что нужно для построения здания. Если фундамент будет недостаточно надежным, то и все здание будет некрепко стоять на ногах.

П. Л. Капица. Дружеский шарж Кукрыниксов (1945 г.)

Как поправить дело, как обеспечить, чтобы в вузе читали курс лучшие профессора, лучшие преподаватели, лучшие ученые? Казалось бы, можно было бы использовать современную технику, скажем, сделать кинофильм, в котором лектор, самый крупный ученый в данной области (или даже группа ученых), будет рассказывать студентам физику, или химию, или математику.

Конечно, это привлечет лучших профессоров к преподаванию студентам. Но посмотрим, что из этого получится на самом деле. Может быть, администрация института и будет приветствовать такое начинание — сократится число штатных единиц и не будет необходимости привлекать и *подыскивать* преподавательские кадры. С точки зрения министерства — те же самые удобства. Сделав один фильм, они смогут сократить свои штаты и снизить расходы по вузу. Некоторые студенты были бы рады, поскольку все-таки в темных киноаудиториях комфортабельнее спать, чем в светлых.

И все же такая система, конечно, нелепа. Вы представьте себе, что в институте вместо профессуры стоят одни киноаппараты и ходят только студенты и киномеханики. Это будет исключительно скучное и темное заведение, к которому вы не будете относиться как к своей *альма матер*.

Из выступления на вечере выпускников Московского физико-технического института в 1963 году.

Не в этом, однако, дело. Говорят, студенты рано или поздно как-нибудь к этому приспособятся, как-нибудь это переживут. Гораздо хуже отнесутся к этому изменению сами преподаватели. Дело в том, что совершенно забывают о другой функции высшего учебного заведения — учить не только студентов, но учить и самих профессоров и преподавателей.

Хороший ученый, когда преподает, всегда учится сам. Во-первых, он проверяет свои знания, потому что, только ясно объяснив другому человеку, можешь быть уверен, что сам понимаешь вопрос. Во-вторых, когда ищешь форму ясного описания того или иного вопроса, часто приходят новые идеи. В-третьих, те, часто нелепые, вопросы, которые задают студенты после лекций, исключительно стимулируют мысль и заставляют с совершенно новой точки зрения взглянуть на то явление, к которому подходим всегда стандартно, и это тоже помогает творчески мыслить.

И наконец, студенты лучше знают, шире знают вопросы физики, чем преподаватель. Преподаватель, как специалист, подходит узко, у него нет широкого подхода. У студентов гораздо шире подход. И когда студент беседует с преподавателем, преподаватель очень много узнает от студента.

Вот почему молодым ученым необходимо заниматься преподавательской деятельностью. Хороший вуз — это тот вуз, который дает возможность развиваться талантам преподавателей так же широко, как и талантам их учеников.

Чтобы показать, что это не есть общие фразы, я вам приведу целый ряд примеров того, как преподавательская деятельность приводила к большим открытиям. Примеры эти настолько разительны, что они, мне кажется, вполне подтверждают эту идею.

Один из самых классических примеров хорошо известен — это Менделеев и его периодическая система. Менделеев искал, каким способом легче объяснить студентам свойства элементов, чтобы эти свойства могли восприниматься по определенной системе. Он распределял элементы по карточкам, складывал эти карточки в разном порядке и, наконец, нашел, что карточки, разложенные в виде периодической таблицы, представляют собой закономерную систему. 1 марта 1869 г. таблица была напечатана отдельным изданием и немногим позже вошла как приложение во второй выпуск «Основ химии». Таким образом, периодическая система элементов в основе своей возникла из педагогической деятельности Менделеева как профессора Петербургского университета.

Второй случай, немного более ранний, относится к математике. В начале XIX в. русское правительство решило, что все чиновники должны иметь среднее образование. Те чиновники, которые не имели аттестата зрелости, должны были его получить. Чтобы облегчить им это, были созданы курсы, которые готовили к экзаменам на аттестат зрелости. Одним из преподавателей геометрии таких курсов был Лобачевский. Ему было тогда 24 — 25 лет. Он был очень молод, и он объяснял престарелым чиновникам принципы евклидовой геометрии. И они никак не могли понять, откуда берется аксиома о непересекаемости двух параллельных линий.

Лобачевский долго бился над тем, чтобы дать подходящее объяснение, но убедился, что такого объяснения не существует. Он понял, что можно построить такую геометрию, при которой линии всегда пересекаются. Таким образом, он нашел новую область математики, которой, как вы знаете, суждено было сыграть фундаментальную роль в современной физике.

Могу привести еще пример, о котором мне рассказал известный физик Дебай. Дебай в то время был преподавателем, профессором в Цюрихе. У него был ученик, тоже преподаватель, Шредингер, тогда еще совсем неизвестный молодой человек. Дебай познакомился с работой де Бройля, в которой де Бройль, выдвинувший, как вы знаете, гипотезу о существовании волновой структуры электрона, показал, что при известных условиях интерференции можно заменить движение электрона волновым движением. Идея эквивалентности волнового движения и квантовых процессов, волнового движения и корпускулярного движения была воспринята целым рядом физиков весьма отрицательно. Отрицательно отнесся к ней и Шредингер. Когда Дебай попросил его рассказать молодежи о работах де Бройля, Шредингер сначала отказался. Потом, когда Дебай, пользуясь своим положением профессора, снова предложил ему это сделать, Шредингер согласился, и он начал искать, как можно было объяснить идеи де Бройля в наиболее полной и точной математической форме. И когда он рассказал о работах де Бройля в том представлении, какое он считал наиболее точным, Дебай ему сказал: «Послушайте, ведь вы же нашли новый замечательный вид уравнения, который является фундаментальным в современной физике». Таким образом, в результате педагогической деятельности было найдено и волновое уравнение — основное уравнение современной физики.

Приведу вам еще четвертый пример. Происходило это в Кембридже, во второй половине прошлого века. Теоретическую физику тогда преподавал Стокс. К нему пришел сдавать аспирантский экзамен один молодой человек. Аспирантский экзамен в те времена был довольно трудный, потому что аспирантур тогда было очень мало — всего две-три, и состязание за право попасть в аспирантуру было очень трудным. Стокс давал задачу, причем система была такая: давался десяток задач, и студент сам выбирал те, которые он хотел решить. Ему давалось определенное число часов, и Стокс, не стесняясь, ставил часто неразрешимые задачи, чтобы посмотреть, знает ли студент, что эта задача неразрешима. Он ставил, например, такую задачу (то были домаксвелловские времена): найти распределение скоростей в газе. Тогда это распределение скоростей не было известно. Бернулли и все остальные считали, что скорости примерно равны.

Один молодой человек, к удивлению Стокса, решил эту задачу, и решил правильно. Вы догадываетесь, что этот молодой человек был не кто иной, как Максвелл.

Таким образом, открытие закона распределения скоростей молекул в газе было сделано Максвеллом на экзамене.

Таких примеров можно было бы привести еще много, но мне кажется, что совершенно очевидно, что если учебная деятельность плодотворна в таких серьезных фундаментальных вопросах, то она, несомненно, плодотворна и в более простых вопросах, она часто оказывает плодотворное влияние на современную науку и на современных ученых. Поэтому высшие учебные заведения нужно рассматривать не только как заведения, в которых готовят молодых ученых, но и как место, где развиваются научные таланты и уже сформировавшиеся ученые...


ПАСТЕРИЗОВАННОЕ
МОЛОКО
3,5% ЖИРА
NESCAFÉ
sélection

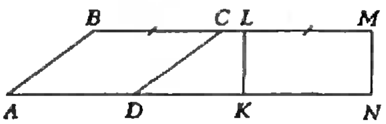
Прибавим, вычтем... умножим, разделим...

А. ЕГОРОВ

МАТЕМАТИК решил выпить кофе с молоком. У него была большая банка молока и чашка черного кофе. Он решил, что одной ложки молока ему будет достаточно. Но по рассеянности, присущей многим математикам, наш математик зачерпнул ложку кофе, перелил ее в банку с молоком и тщательно размешал. Заметив ошибку, он зачерпнул из банки ложку образовавшейся там смеси и уже безошибочно вылил ее в чашку с кофе. А потом задумался: чего оказалось больше — молока в кофе или кофе в молоке?

Упражнение 1. Прежде, чем читать дальше, ответьте на этот вопрос. Подумайте также, изменится ли ответ, если кофе, перелитый в банку, не размешивать вообще или размешивать не тщательно.

Наш математик, разумеется, довольно быстро разобрался в ситуации и тут же придумал, рассуждая по аналогии, еще одно доказательство формулы площади параллелограмма, если известно, что площадь прямоугольника — это произведение его сторон. Для этого он продолжил стороны BC и AD (см. рисунок), провел где-то в стороне отрезки MN и KL, перпендикулярные AD и BC так, что $LM=BC$, и заметил, что площади фигур $ABLK$ и $DCMN$ равны (сами эти фигуры равны) и потому площадь параллелограмма $ABCD$ равна площади прямоугольника $KLMN$, т.е. равна произведению основания на высоту.



Подумайте, какую аналогию с кофе ухитрился усмотреть тут наш герой.

А вот какую. Убедившись, что кофе в банке с молоком осталось ровно столько, сколько молока в чашке кофе, он понял, что если отнестись к площади $ABLK$ как к ложке кофе, отправленной в банку, а к площади $DCMN$ как к ложке смеси, то станет ясно, что площадь $DCLK$ — это кофе, возвращаемый назад, площадь $ABCD$ — кофе, остающийся в банке, а площадь $KLMN$ — молоко, переносимое из банки в чашку с кофе.

Два примера, рассмотренные нами, показывают идею, вокруг которой группируются рассматриваемые дальше задачи.

Упражнения

2 (старинная задача). Аксакал завещал трем своим сыновьям состояние из 17 верблюдов. Старшему сыну — половину, среднему — треть, а младшему — одну девятую. Начав делить наследство, сынья призадумались: как быть? Ведь 17 не делится ни на 2, ни на 3, ни, тем более, на 9. Мудрец, проезжавший мимо на верблюде, немного подумав, разделил наследство так, что все сыновья остались довольны и ни одного верблюда не пришлось разрубать на части. Как он это сделал?

3. Выведите формулы для площади трапеции и треугольника.

4. а) Докажите, что объем призмы равен произведению площади сечения, перпендикулярного ее ребрам, на длину ребра.

б) Чему равна боковая поверхность наклонной призмы, если известен периметр P ее ортогонального сечения и длина l бокового ребра?

Выделение полного квадрата

Будем использовать такой прием: для приведения какого-нибудь алгебраического выражения к удобному для нас виду сначала прибавим к нему, а потом вычтем одну и ту же величину. В частности, сумму квадратов u^2+v^2 можно преобразовать так, чтобы выделить квадрат суммы или квадрат разности:

$$u^2+v^2=u^2+2uv+v^2-2uv=$$
$$=(u+v)^2-2uv=(u-v)^2+2uv.$$

Приведем примеры задач, решаемых с помощью этих очевидных соотношений.

Задача 1. *При каких натуральных n число n^4+4 является простым?*

Решение. Поскольку

$$n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=$$
$$=(n^2+2)^2-4n^2=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2),$$

наше число раскладывается на 2 множителя, меньший из которых равен 1 лишь при $n=1$. Таким образом, при $n>1$ число n^4+4 — составное, а при $n=1$ — простое.

Попутно мы разложили многочлен n^4+4 на два квадратичных множителя.

Ответ: при $n=1$.

Задача 2. *Разложите на 2 квадратичных множителя x^4+x^2+1.*

Решение.

$$x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=$$
$$=(x^2+1)^2-x^2=(x^2-x+1)(x^2+x+1).$$

Задача 3. *Выведите формулу для корней квадратного уравнения*

$$x^2+px+q=0.$$

Решение. Выделим полный квадрат следующим образом:

$$x^2+px+q=x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}=$$
$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}-q\right).$$

Приравнивая последнее выражение к нулю, получаем

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q,$$

откуда (при $p^2-4q\ge 0$) получаем

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Приведем еще примеры разложения на множители, решения которых основаны на идее «прибавим-вычтем».

Задача 4. *Разложите на два множителя с целыми коэффициентами число $A=a^5+a+1$.*

Решение.

$$a^5+a+1=a^5-a^2+a^2+a+1=$$
$$=a^2(a^3-1)+a^2+a+1=$$

$$=\left(a^2+a+1\right)\left(a^3-a^2+1\right).$$

Попутно мы установили, что число A при всех натуральных $a>1$ является составным.

Упражнения

5. Разложите на множители а) $a^{10}+a^5+1$; б) a^8+a+1.

6. Докажите, что число 1280000401 — составное.

7. При каких натуральных n будет простым число n^4+4^n?

Пойдем дальше. Применим наш прием к решению некоторых уравнений.

Задача 5. *Решите уравнение*

$$x^4+4x-1=0.$$

Решение. В основе решения лежит следующее преобразование, додуматься до которого не так уж просто:

$$x^4+4x-1=x^4+2x^2+1-2x^2+4x-2=$$

$$=\left(x^2+1\right)^2-2(x-1)^2=0.$$

Откуда либо $x^2+1=-\sqrt{2}(x-1)$,
либо $x^2+1=\sqrt{2}(x-1)$,
т.е. либо $x^2+\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}=0$,
либо $x^2-\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}=0$.

Осталось решить полученные уравнения.

Ответ: $x_{1,2}=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$.

Дальше мы увидим, как с помощью выделения полного квадрата можно разложить на квадратичные множители любой многочлен 4-й степени. Пока только заметим, что с разложением на множители выражения x^4+a^4 связан исторический курьез. Великий математик, один из создателей математического анализа, Г.В.Лейбниц считал, что это выражение не может быть разложено на два квадратичных множителя. Мы же это немедленно проделаем:

$$x^4+a^4=x^4+2x^2a^2+a^4-2x^2a^2=$$

$$=\left(x^2+a^2\right)^2-\left(\sqrt{2}xa\right)^2=$$

$$=\left(x^2+\sqrt{2}xa+a^2\right)\left(x^2-\sqrt{2}xa+a^2\right).$$

Правда, в полученном разложении не все коэффициенты целые.

Упражнения

8. Разложите на два квадратичных множителя а) $x^4-a^2x^2+a^4$, б) x^4+bx^2+c.

9. Постройте циркулем и линейкой отрезок $\sqrt[4]{a^4+b^4}$, где a и b — данные отрезки.

10. Решите уравнения

а) $x^4+8x-7=0$,

б) $\left(x^2-1\right)^2=4(2x+1)$,

в) $x^2+\dfrac{x^2}{(x+1)^2}=1$.

Разделим-умножим

До этого момента мы прибавляли и вычитали. Теперь будем умножать и делить.

Задача 6. *Найдите произведение*

$$A=\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\ldots\cdot\cos 2^{n-1}x. \quad (1)$$

Решение. Полагая, что $\sin x\neq 0$, умножим и разделим число A на $\sin x$:

$$A=\frac{\sin x\cdot\cos x\cdot\cos^2 x\cdot\ldots\cdot\cos 2^{n-1}x}{\sin x}=$$

$$=\frac{\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos 2^{n-1}x}{2\sin x}=\ldots=\frac{\sin 2^n x}{2^n\sin x}.$$

Получилась весьма компактная формула, с помощью которой можно получить формулу Виета для числа π.

Для этого в выражении

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}, \quad (2)$$

получающемся из (1) подстановкой $x/2^n$ вместо x, перейдем к пределу при $n\to\infty$.

Поскольку, как известно, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$, предел знаменателя в правой части (2) равен

$$\lim_{n\to\infty}2^n\cdot\sin\frac{x}{2^n}=x\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}=x,$$

так как $\dfrac{x}{2^n}\to 0$ при $n\to\infty$.

Итак, при любом x

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\cdot\ldots=\frac{\sin x}{x}. \quad (3)$$

Подставляя в эту формулу $x=\dfrac{\pi}{2}$, получаем $\cos\dfrac{\pi}{2}\cdot\cos\dfrac{\pi}{8}\cdot\ldots\cdot\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\cdot\ldots=\dfrac{2}{\pi}$.

Но для острых углов x

$$\cos\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}},$$

поэтому

$$\cos\frac{\pi}{2^n}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2^{n-2}}}}\ldots=$$

$$=\underbrace{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}_{n\text{ радикалов}},$$

так что

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ldots}.$$

Упражнение 11. Чему равно бесконечное произведение

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\cdot\ldots$$

$$\ldots\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\ldots+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}}}\cdot\ldots?$$

Теперь подсчитаем некоторые суммы.

Задача 7. *Найдите сумму*

$$S_n=1+11+111+\ldots+\underbrace{11\ldots1}_{n}.$$

Решение. Решение немедленно получается, если рассмотреть

$$9S_n=9+99+999+\ldots+\underbrace{9\ldots9}_{n}=$$

$$=10-1+10^2-1+10^3-1+\ldots+10^n-1=$$

$$=10+10^2+\ldots+10^n-n=\frac{10^{n+1}-10}{9}-n.$$

Итак, $S_n=\dfrac{10^{n+1}-9n-10}{81}$.

Задача 8. *Найдите сумму*

$$S_n=\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx.$$

Решение. Если $\sin\dfrac{x}{2}\neq 0$, то

$$S_n\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2}\cdot\sin x+$$

$$+\sin\frac{x}{2}\sin 2x+\ldots+\sin\frac{x}{2}\sin nx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{7x}{2}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2n-1}{2}x-\cos\frac{2n+1}{2}x\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x\right)=\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)x}{2}.$$

Итак, $S_n=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

Упражнение 12. Найдите суммы

а) $S_n=x+2x^2+\ldots+nx^n$,

б) $\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx$.

Еще одна задача из области теории чисел.

Задача 9. *На какую степень двойки делится произведение $P_n(n+1)\cdot\ldots\cdot 2n$?*

Решение. Умножим и разделим P_n на $n!$, а затем перегруппируем сомножители в числителе:

$$P_n=\frac{n!(n+1)\ldots(2n)}{n!}=\frac{(2n)!}{n!}=$$

$$=\frac{2\cdot(2\cdot 2)\ldots(2n)\cdot(1\cdot 3\ldots(2n-1))}{n!}=$$

$$=\frac{2^n\cdot n!(1\cdot 3\ldots(2n-1))}{n!}=2^n\cdot(2n-1)!!.^1$$

Как видим, количество задач, решаемых с помощью приемов «прибавим-вычтем» и «умножим-разделим» весьма велико; надеемся, что читатели сами найдут и решат достаточно много таких задач. Мы же в заключение выполним данное раньше обещание и расскажем, как раскладывать на квадратные множители многочлены четверной степени.

Метод Феррари

Итак, мы намерены вслед за Феррари — итальянским математиком первой половины XVI века — научиться сводить решение уравнений 4-й степени к решению квадратных уравнений.

Пусть дано уравнение

$$P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0. \quad (4)$$

Преобразуем $P(x)$ так:

$$P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d=$$

$$=x^4+2\frac{a}{2}x^3+\frac{a^2}{4}x^2-\frac{a^2}{4}x^2+bx^2+cx+d=$$

$$=\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)^2+\left(b-\frac{a^2}{4}\right)x^2+cx+d.$$

Постараемся превратить последнее выражение в разность квадратов. Для этого прибавим к $P(x)$ и вычтем $2\alpha\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)^2+\alpha^2$, где α — неизвестное нам пока число. Тогда $P(x)$ перепишется таким образом:

$$P(x)=\left(x^2+\frac{ax}{2}+\alpha\right)^2-\left(Ax^2+Bx+C\right),$$

где $A=2\alpha+\frac{a^2}{4}-b$, $B=a\alpha-c$, $C=\alpha^2-d$. Но для того, чтобы трехчлен Ax^2+Bx+C был полным квадратом, необходимо и достаточно выполнение условий $A>0$ и $B^2-4AC=0$, то есть

$$(a\alpha-c)^2=4\left(2\alpha+\frac{a^2}{4}-b\right)\left(\alpha^2-d\right). \quad (5)$$

Кубическое уравнение (5) называется *резольвентой Феррари многочлена $P(x)$*.

Если α_0 — корень резольвенты, причем $2\alpha_0+\frac{a^2}{4}-b>0$, то $P(x)$ есть разность квадратов:

$$P(x)=\left(x^2+\frac{ax}{2}+\alpha_0\right)^2-(kx+l)^2,$$

где k и l выражаются через коэффициенты многочлена $P(x)$ и α_0, и решение исходного уравнения труда не представляет.

Убедимся, что нужный нам корень у резольвенты есть.

Для этого заметим, что (5) можно переписать так:

$$P(\alpha)=4\left(2\alpha+\frac{a^2}{4}-b\right)\left(\alpha^2-d\right)-(a\alpha-c)^2.$$

Если $\alpha=\frac{1}{2}\left(b-\frac{a^2}{4}\right)$, то

$$P(\alpha)=-\left(\frac{1}{2}a\left(b-\frac{a^2}{4}\right)-c\right)^2<0,$$

а при очень больших α заведомо $P(\alpha)>0$. Поэтому для некоторого $\alpha_0>b-\frac{a^2}{4}$ будет $P(\alpha_0)=0$, так что существует корень уравнения (5), удовлетворяющий нужным нам условиям.

Подведем некоторые итоги.

Для решения кубических уравнений имеется формула Кардано, которая выражает α_0 через коэффициенты с помощью радикалов. Квадратные уравнения тоже решаются в радикалах. Так самым корни уравнения (4) могут быть выражены через коэффициенты с помощью радикалов, т.е. существует формула для решения уравнений 4-й степени в радикалах.

Как доказали в начале XIX века Руффини и Абель, для уравнений более высоких степеней такой формулы нет.

Более того, как это следует из работ Галуа, существует уравнение пятой степени с целыми коэффициентами, корни которого не могут быть выражены через коэффициенты, т.е. через целые числа, с помощью конечного число сложений, вычитаний, умножений, делений и извлечений корней любой степени и в любом количестве.

Таким уравнением, к примеру, является уравнение $x^5-25x-5=0$, имеющее 3 действительных (и два комплексных) корня.

Рассмотрим пример решения уравнений n-й степени по методу Феррари.

Задача 10. *Решите уравнение*

$$x^4-10x^2-8x+5=0.$$

Решение. Мы не будем пользоваться готовыми формулами, а выполним последовательно преобразования. Прежде всего перепишем уравнение так: $x^4=10x^2+8x-5$.

Прибавляя к правой и левой частям $2\alpha x^2+\alpha^2$, получаем

$$\left(x^2+\alpha\right)^2=(10+2\alpha)x^2+8x+\alpha^2-5. \quad (6)$$

Приравнивая к нулю дискриминант квадратного трехчлена, приходим к уравнению относительно α:

$$(10+2\alpha)\left(\alpha^2-5\right)-16=0,$$

или после упрощений

$$\alpha^3+5\alpha^2-5\alpha-33=0.$$

Один из корней этого уравнения нетрудно угадать: это $\alpha=-3$. После чего получаем из (6):

$$\left(x^2-3\right)^2=4x^2+8x+4=4(x+1)^2.$$

Итак, либо $x^2-3=2x+2$, либо $x^2-3=-2x-2$, т.е. $x^2-2x-5=0$ или $x^2+2x-1=0$. Окончательно:

$$x_{1,2}=1\pm\sqrt{6},\ x_{3,4}=-1\pm\sqrt{2}.$$

В заключение предлагаем вам решить несколько упражнений:

Упражнения

13. Решите уравнения

а) $x^4-4x^3+5x^2-2x-6=0$,

б) $x^4+x^3-10x^2-2x+4=0$.

14. Разложите на квадратичные множители

а) $x^4+2x^3+2x^2+x-2$,

б) $x^4+2x^3-3x^2-4x-1$.

---

[1] $(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)$ — *произведение всех нечетных чисел от 1 до $2n-1$.*

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 1994 года по адресу: 103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5 — 94» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1451» или «Ф1458». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1451—1460 предлагались на XX Российской олимпиаде по математике, а задачи Ф1459 —Ф1461, Ф1463 и Ф1466 — на XXVIII Всероссийской олимпиаде по физике.

Задачи М1451 — М1460, Ф1458 — Ф1467

М1451. Натуральные числа a и b таковы, что $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ — целое число. Пусть d — наибольший общий делитель чисел a и b. Докажите, что $d^2 \le a+b$.
А.Голованов, Е.Малинникова

М1452. Две окружности S_1 и S_2 касаются внешним образом в точке F. Их общая касательная касается S_1 и S_2 в точках A и B соответственно. Прямая, параллельная AB, касается окружности S_2 в точке C и пересекает окружность S_1 в точках D и E.
Докажите, что
а) точки A, F и C лежат на одной прямой;
б) общая хорда окружностей, описанных около треугольников ABC и BDE, проходит через точку F.
А.Калинин

М1453. Существует ли квадратный трехчлен $p(x)$ с целыми коэффициентами такой, что для любого натурального числа n, в десятичной записи которого участвуют одни единицы, число $p(n)$ также записывается одними единицами?
А.Перлин

М1454. Прямоугольник $m \times n$ разрезан на уголки:

Докажите, что разность между количеством уголков вида a и количеством уголков вида b делится на 3.
О.Емельянов

М1455. В вершинах выпуклого n-угольника расставлены m фишек $(m > n)$. За один ход разрешается передвинуть две фишки, стоящие в одной вершине, в соседние вершины: одну — вправо, вторую — влево.
После N ходов в каждой вершине n-угольника оказалось столько же фишек, сколько было вначале. Докажите, что N делится на n.
И.Рубанов

М1456. В классе 30 учеников, и у каждого из них одинаковое число друзей среди одноклассников. Каково наибольшее возможное число учеников, которые учатся лучше большинства своих друзей? (Про любых двух учеников в классе можно сказать, кто из них учится лучше.)
С.Токарев

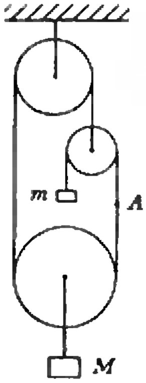
М1457*. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 тетраэдра $ABCD$ пересекаются в центре H сферы, вписанной в тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что тетраэдр $ABCD$ — правильный. (Высотой тетраэдра называется отрезок перпендикуляра, проведенного из его вершины к противоположной грани, заключенный между этой вершиной и плоскостью этой грани.)
Д.Терешин

М1548. В правильном $(6n+1)$-угольнике k вершин покрашено в красный цвет, а остальные — в синий. Докажите, что количество равнобедренных треугольников с одноцветными вершинами не зависит от способа раскраски.
Д.Тамаркин

М1459*. Игроки A и B по очереди ходят конем на шахматной доске 1994×1994. Игрок A может делать только горизонтальные ходы, т.е. такие, при которых конь перемещается на соседнюю горизонталь. Игроку B разрешены только вертикальные ходы, при которых конь перемещается на соседнюю вертикаль. Игрок A ставит коня на поле, с которого начинается игра, и делает первый ход. При этом запрещено ставить коня на то поле, на котором он уже побывал в данной игре. Проигравшим считается игрок, которому некуда ходить. Докажите, что для игрока A существует выигрышная стратегия.
А.Перлин

М1460*. В клетках бесконечного листа клетчатой бумаги записаны вещественные числа. Рассматриваются две фигуры, каждая из которых состоит из конечного числа клеток. Фигуры разрешается перемещать параллельно линиям сетки на целое число клеток. Известно, что для любого положения первой фигуры сумма чисел, записанных в накрываемых ею клетках, положительна. Докажите, что существует положение второй фигуры, при котором сумма чисел в накрываемых ею клетках положительна.
Б.Гинзбург, И.Соловьев

Ф1458. В изображенной на рисунке системе нити нерастяжимы, массы блоков и нитей пренебрежимо малы. Найдите ускорения подвижных блоков. Найдите также ускорение узелка A, завязанного на нити. Размеры блоков подобраны так, что свободные куски нитей вертикальны.
А.Зильберман



Ф1459. Маленький деревянный шарик с помощью нерастяжимой нити длиной $l = 30$ см прикреплен ко дну цилиндрического сосуда с водой. Расстояние от центра дна до точки закрепления нити $r = 20$ см. Сосуд раскручивают относительно вертикальной оси, проходящей через центр дна. При какой угловой скорости вращения нить отклоняется от вертикали на угол $\alpha = 30°$?
В.Можаев

Ф1460. Длинный брусок с квадратным торцом опущен в воду так, что одна из его длинных боковых граней находится над поверхностью воды и параллельна ей. В таком положении брусок свободно плавает. При какой плотности материала бруска это возможно?
В.Слободянин

Ф1461. Вертикальная труба частично заполнена водой с температурой $t_0 = 0$ °С до высоты $H = 20$ м. На сколько изменится высота содержимого трубы при понижении температуры до $t_1 = -0{,}01$ °С? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ Дж/г, плотность льда $\rho_л = 0{,}92$ г/см^3. Известно, что при изменении внешнего давления на Δp температура плавления льда меняется на ΔT, причем $\Delta T/T = (1/\rho_в - 1/\rho_л)\Delta p/\lambda$, где T — температура смеси «лед — вода», а $\rho_в$ — плотность воды.
В.Овчинкин

Ф1462. В сосуд объемом $V = 1$ л, откачанный до очень низкого давления, попадает $m = 1$ г воды. Для ее удаления используют адсорбирующее вещество, поглощающее свободные молекулы воды. Общая поверхность адсорбента $S = 100$ м^2, а полная поверхность, с которой испаряется вода, $s = 0{,}001$ м^2. Температура сосуда $t = +5$ °С, давление насыщенных паров воды при этой температуре $p = 870$ Па. Через какое время весь пар будет поглощен адсорбентом? Считайте, что попадающая на поверхность адсорбента молекула воды обязательно им поглощается и больше свободной не становится. За какое время вся вода испарилась бы, если бы адсорбента не было?
Д.Макаров

Ф1463. Внутрь плоского конденсатора параллельно его обкладкам помещена плоскопараллельная пластина толщиной h, сделанная из слабопроводящего материала с удельным сопротивлением ρ. Конденсатор заряжен до напряжения U_0. Найдите максимальный ток, который потечет через пластину после замыкания обкладок конденсатора накоротко. Площадь каждой обкладки и пластины S, расстояние между обкладками d (оно намного меньше размеров обкладок).
В.Дерябкин

Ф1464. Два замкнутых сверхпроводящих витка, каждый массой m, имеют индуктивности L и $2L$. Витки насажены на гладкий горизонтальный немагнитный стержень, по которому они могут перемещаться, не меняя своей ориентации в пространстве. Вначале витки удерживают на расстоянии d друг от друга и по ним пропускают токи I и $3I$ соответственно. Взаимная индуктивность витков в этом положении составляет $M = 0{,}3L$. Витки отпускают, и они разлетаются в разные стороны. Найдите максимальные значения скоростей витков.
С.Варламов

Ф1465. В середине между пластинами незаряженного плоского конденсатора находится неподвижный электрон. На конденсатор подают переменное напряжение высокой частоты: $U = U_0 \sin\omega t$. Через какое время электрон достигнет одной из пластин конденсатора? Расстояние между пластинами d, масса электрона m, его заряд q. Влиянием силы тяжести пренебречь. Считайте, что за один период переменного напряжения электрон смещается на расстояние много меньшее, чем d.
А.Гуденко

Ф1466. Вокруг Солнца на орбите Земли (считайте эту орбиту круговой) обращается спутник массой $m = 100$ кг. В некоторый момент спутник открывает солнечный парус — круг из тонкой зеркальной пленки радиусом $r = 70$ м, который все время ориентирован перпендикулярно направлению на Солнце. Пренебрегая влиянием планет, найдите период обращения спутника с открытым парусом. Световая мощность Солнца $L = 3{,}86\cdot10^{26}$ Вт, масса Солнца $M = 2\cdot10^{30}$ кг, гравитационная постоянная

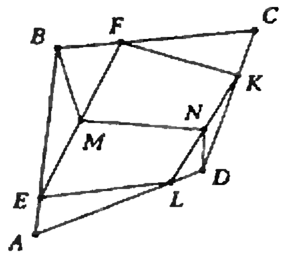
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Дж·м/кг^2.
Л.Мельниковский

Ф1467. Камера для фотометрических измерений выполнена в форме полой сферы. В центр сферы помещен точечный источник света, а на стенке камеры находится маленький датчик люксметра — прибора для измерения освещенности. В том случае, когда стенки камеры были оклеены черным бархатом, показания люксметра составляли E_1, когда стенки были покрыты белой бумагой, прибор показывал E_2. Найдите коэффициент отражения света для бумаги. Считайте, что коэффициент отражения не зависит от угла падения луча.
С.Варламов

Решения задач М1421—М1430, Ф1438—Ф1447

М1421. *а) В выпуклый четырехугольник ABCD, у которого углы при вершинах B и D — прямые, вписан четырехугольник с периметром P (его вершины лежат по одной на сторонах четырехугольника ABCD). Докажите неравенство $P \ge 2BD$.*
б) В каких случаях это неравенство превращается в равенство?

а) Пусть $EFKL$ — четырехугольник, вписанный в $ABCD$ (см. рисунок). Обозначим через M и N середины отрезков EF и KL соответственно. Мы докажем неравенство задачи в более общем случае: $\angle B \ge \frac{\pi}{2}$, $\angle D \ge \frac{\pi}{2}$.



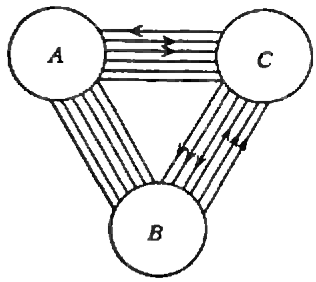
При этом
$$BM \le \frac{1}{2}EF,\ DN \le \frac{1}{2}KL. \qquad (*)$$
Далее, так как $\vec{MN} = \frac{1}{2}\left(\vec{EK} + \vec{FL}\right)$, то
$$\left|\vec{MN}\right| \le \frac{1}{2}(EK + FL). \qquad (**)$$
Поскольку
$$BM + MN + ND \ge BD,$$
получаем из $(*)$, $(**)$ неравенство задачи.
б) Равенство $(*)$ имеет место, если $\angle B = \frac{\pi}{2}$, $\angle D = \frac{\pi}{2}$.
Неравенство $(**)$ переходит в равенство, если $EK \| FK \| MN$. Кроме этого, в случае равенства точки B, M, N, D лежат на одной прямой.
Из вышесказанного получаем следующий способ построения всех четырехугольников, для которых неравенство задачи превращается в равенство.
Пусть O — точка пересечения AC и BD, $AO \le OC$. Проведем через произвольную точку отрезка AO прямую EK, параллельную BD ($E \in AB$, $K \in AD$). Симметрично отобразив прямую EK относительно BD, получим противоположную сторону FL четырехугольника.
Г.Нерсисян

М1422. *Докажите, что числа 312500051 и 1280000401 — составные.*

Пусть $a = 50$. Тогда $312500051 = a^5 + a + 1 = a^5 - a^2 + a^2 + a + 1 = \left(a^2 + a + 1\right)\left(a^3 - a^2 + 1\right)$. Оба множителя в этом разложении больше 1.
При $a = 20$ второе число записывается так:
$$1280000401 = a^7 + a^2 + 1 = a^7 - a + a^2 + a + 1 = \left(a^2 + a + 1\right)\left(a\left(a^3 + 1\right)(a - 1) + 1\right)$$
— здесь оба сомножителя тоже больше 1.
А.Егоров

М1423. *Три шахматиста A, B и C сыграли матч-турнир (каждый с каждым сыграл одинаковое число партий). Может ли случиться, что по числу очков A занял первое место, C — последнее, а по числу побед, наоборот, A занял последнее место, C — первое (за победу присуждается одно очко, за ничью — пол-очка)?*

Ответ: да, такое может случиться.
Пример легко построить, взяв за основу матч-турнир, в котором все партии A с B закончились вничью, все партии B с C результативны (причем побед и проигрышей



поровну), C с A выиграли друг у друга по одной партии, а остальные закончили вничью (на рисунке победы изображены черными стрелками, ничьи — линиями без стрелок): при этом все набрали поровну очков, но побед у C больше. Если число партий каждой пары не меньше 6, то слегка изменив результаты — увеличив на 1 число побед A над C (красная стрелка), мы получим нужный пример: матч-турнир, таблицу результатов которого вы

	+	−	=	Σ
A	2	1	9	6½
B	3	3	6	6
C	4	5	3	5½

видите перед собой, удовлетворяет всем условиям (число побед, поражений, ничьих и очков указано в столбцах +, −, = и Σ соответственно).
А.Рубин, Н.Васильев

М1424. *В строчку выписано 10 целых чисел. Вторая строчка находится так: под каждым числом A первой*

строчки пишется число, равное количеству чисел первой строчки, которые больше A и при этом стоят правее A. По второй строчке аналогично строится третья строчка и т.д.
а) Докажите, что все строчки, начиная с некоторой, нулевые (состоят из сплошных нулей).
б) Каково максимально возможное число ненулевых строчек (содержащих хотя бы одно число, отличное от нуля)?

а) В каждой строчке, начиная со второй, стоят целые неотрицательные числа.
Ясно, что во 2-й строке последнее число равно 0, поэтому в 3-й — два последних числа равны 0, в 4-й — три последних равны 0, и т.д., в 10-й — 9 последних (т.е. все, кроме первого) равны 0, так что в 11-й — одни нули.
б) Ответ: 10. Пример, когда все 10 строк ненулевые, можно получить, начав со строки 0101010101, а еще лучше — со строки 0504030201 — тогда каждый раз строка как бы сдвигается на единицу влево, дополняясь в конце нулем, и получается такая таблица:

0	5	0	4	0	3	0	2	0	1
5	0	4	0	3	0	2	0	1	0
0	4	0	3	0	2	0	1	0	0
4	0	3	0	2	0	1	0	0	0
0	3	0	2	0	1	0	0	0	0
3	0	2	0	1	0	0	0	0	0
0	2	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

С. Токарев

М1425. *Дан невыпуклый несамопересекающийся четырехугольник, который имеет три внутренних угла по 45°. Докажите, что середины его сторон лежат в вершинах квадрата.*

Если A, B, C — углы четырехугольника $ABCD$, равные 45°, то при продолжении сторон CD и AD за точку D возникает очень много прямоугольных равнобедренных треугольников: ABF, BCE, AED, DFC, а если отметить середины сторон четырехугольника K, L, M, N (рис.1),

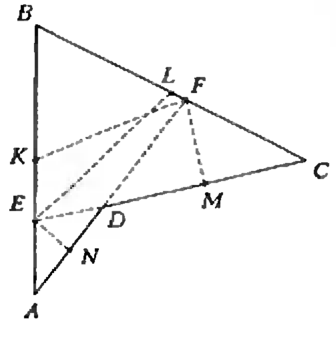


Рис. 1

то еще и их половинки: AFK, FBK, EBL, CEL, FCM, DFM, EDN, AEN. Среди них нам нужны только два: EDN и DFM. Последний имеет сторону MF, равную и параллельную EK; таким образом, ΔNEK переходит при повороте на 90° (вокруг N) в ΔNDM, так что отрезки NK и NM равны и перпендикулярны.
А тот факт, что $KLMN$ — параллелограмм, верен, как известно, для любого четырехугольника $ABCD$ (KL и MN параллельны диагонали AC и равны $AC/2$).
Заметим, что эта задача совпадает, по существу, с задачей про два угольника, предложенной в том же номере «Кванта» младшим школьникам.

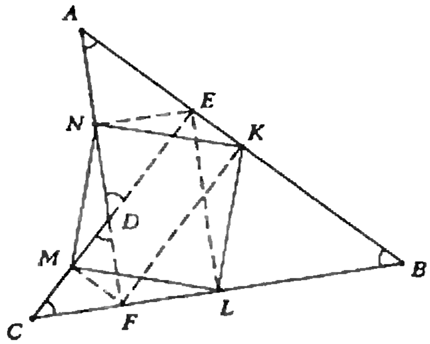


Рис. 2

Задачу можно обобщить так: если два прямольных равнобедренных треугольника AFB и CFD имеют общую вершину прямого угла F и одинаково ориентированы, то середины отрезков AB, BC, CD и DA — вершины квадрата (рис.2). В самом деле, ΔAFC при повороте на 90° переходит в ΔBFD, поэтому отрезки AC и BD равны и перпендикулярны друг другу.
В.Произволов

М1426. *Через $S(n)$ обозначим сумму цифр числа n (в десятичной записи). Существуют ли три различных числа m, n и p таких, что*
$$m + S(m) = n + S(n) = p + S(p)?$$

Ответ: да, такие числа существуют, например $10^{15} + 99$, $10^{15} + 117$, $10^{15} - 9$ или $10^{13} + 91$, $10^{13} + 100$, $10^{13} - 8$.
Положим $f(x) = x + S(x)$. Например, $f(91) = 91+9+1 = 101$, $f(102) = 102+1+2 = 105$. Легко найти два таких числа m и n, что $f(m) = f(n)$, скажем, $f(99) = f(108) = 117$. Заметим, что (для любого количества нулей) $f(100...0099) = f(100...0108) = 100...0118$, и покажем, как найти еще одно число вида $x = \underbrace{9...9}_{k}z$ с тем же значением $f(x)$; здесь z — некоторая цифра. Поскольку x и $S(x)$ имеют один и тот же остаток при делении на 9 и для числа 10...099 остаток равен 1, возьмем $z = 1$. Тогда $x = 10^{k+1} - 9$ и $f(x) = 10^{k+1} - 9 + 9k + 1 = 10^{k+1} + 9(k-1) + 1$; при $k = 14$, $9(k-1) = 11$ получим $f(x) = 10^{k+1} + 118$.
Замечание. Тот же прием позволяет, исходя из r чисел a_1, a_2, ..., a_r с одинаковыми значениями функции f, построить $r + 1$ чисел с тем же свойством (из которых r имеют вид $10^{k+1} + a_1$, ..., $10^{k+1} + a_r$).
М.Гервер, Н.Васильев

М1427. *В каждый клетке квадрата 8×8 клеток проведена одна из диагоналей. Рассмотрим объединение этих 64 диагоналей. Оно состоит из нескольких связных частей (к одной части относят точки, между которыми можно пройти по одной или нескольким диагоналям).*

Может ли количество этих частей быть а) больше 15? б) больше 20? в) может ли в аналогичной задаче про квадрат $n \times n$ клеток получиться больше чем $n^2/4$ частей (для $n > 8$)?

На первый взгляд может показаться, что самое большое число связных компонент получается, когда все диагонали направлены в одну сторону — при этом для квадрата 8×8 получается 15 компонент (для квадрата $n \times n$ их будет $2n-1$). Однако оказывается, что это не так: большее число компонент можно получить, устроив одну «многосвязную» компоненту, внутри которой располагается много мелких компонент, состоящих из одной диагонали. Эта идея позволяет дать на все три вопроса а), б), в) положительные ответы.

Для квадрата 8×8 на рисунке 1 указано расположение с 21 компонентой.

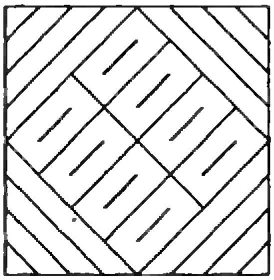


Рис. 1

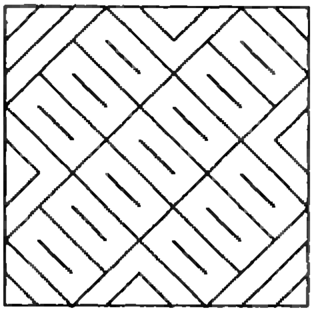


Рис. 2. $n = 9$.

Для квадрата $n \times n$ клеток можно составить многосвязную компоненту, разбитую на прямоугольники $d \times 2d$, где $d = \sqrt{2}$ — диагональ клетки (сторона клетки считается равной 1), так, что непокрытая ею площадь квадрата — бордюр — будет составлена из равнобедренных прямоугольных треугольников с гипотенузами 4 или с катетами 4, 3 или 2, лежащими на сторонах квадрата (рис.2,

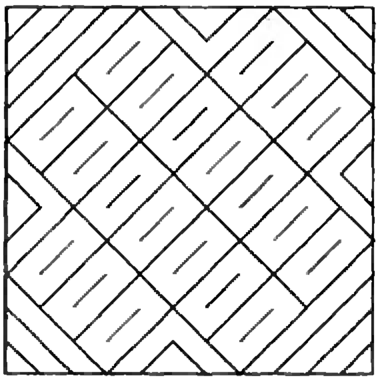


Рис. 3. $n = 11$.

3). В прямоугольнике $d \times 2d$ площадью 4 и треугольнике с гипотенузой 4 и той же площадью размещается по одной компоненте; в угловых треугольниках с площадями $S = 16/2 = 8$ — 3 компоненты, площадями $S = 9/2$ — 2 компоненты, площадями $S = 4/2 = 2$ — 1 компонента, так что отношение S к числу компонент для каждого меньше 4, так что (даже если не считать еще одну, «многосвязную» компоненту) общее число компонент не меньше 1/4 площади квадрата, т.е. не меньше $n^2/4$.

Эта задача дает любопытный пример ситуации, которую физики назвали бы «нарушением симметрии»: в оптимальном расположении, наши «частицы» — диагонали — оказываются исполняющими разные роли: одни объединяются в одну большую общую компоненту, а другие живут поодиночке.

Н.Васильев

М1428. *Подряд выписаны десятичные записи всех натуральных чисел, начиная с единицы, до некоторого n включительно: 12345678910111213...(n).*

Существует ли такое n, что в этой записи все десять цифр встречаются одинаковое количество раз?

Ответ: нет, не существует.

Рассмотрим 10 функций-счетчиков. Пусть $f_i(n)$, для каждого $i = 0, 1, \ldots, 9$, означает количество цифр i в десятичной записи всех чисел, не превосходящих n ($n = 1, 2, \ldots$). Ясно, что с ростом n значение каждой функции f_i растет; например, для $n = 9, 10, 11, \ldots, 99, 100, \ldots, 110$ их значения равны соответственно:

На участке $10^k \le n < 10^{k+1}$ в каждом разряде цифры по-

	f_0	f_1	f_2	...	f_9
$n = 9$	0	1	1	...	1
$n = 10$	1	2	1	...	1
$n = 11$	1	4	1	...	1
...	...	...	...	...	...
$n = 99$	9	20	20	...	20
$n = 100$	11	21	20	...	20
...	...	...	...	...	...
$n = 110$	21	32	21	...	21

являются в таком порядке: 0, 1, ..., 9 (а в старшем, левом разряде — 1, 2,.., 9), поэтому неравенства $f_1(n) \ge f_2(n) \ge \ldots \ge f_9(n)$ выполняются при каждом n, и все они превращаются в равенства лишь для последнего $n = 10^{k+1} - 1$ на этом участке. Но для такого n, очевидно, $f_0(n) < f_1(n)$: ведь если бы мы ко всем числам, меньшим 10^k, дописали слева нули, превратив их в «k-значные числа», то лишь тогда в записях всех таких «чисел» от 00...0, 00...1 вплоть до 99...9 стало бы поровну цифр 0, 1, ..., 9 (ведь эти «числа» — всевозможные слова длины k из 10 символов, роли которых совершенно равноправны).

А.Анджанс, Н.Васильев

М1429. *Выпуклый многоугольник разрезан на выпуклые семиугольники (так, что каждая сторона многоугольника является стороной одного из семиугольников). Докажите, что найдутся четыре соседние вершины многоугольника, принадлежащие одному семиугольнику.*

Предположим, что существует разбиение, в котором никакие три идущие подряд стороны многоугольника не принадлежат одному семиугольнику.

Оценим двумя способами среднее (арифметическое) всех углов всех семиугольников. Его можно посчитать, с одной стороны, по семиугольникам, так что оно равно среднему семи углов семиугольника, т.е. $\pi(7-2)/7 = 5\pi/7 > 2\pi/3$. Покажем, с другой стороны, что оно не больше $2\pi/3$, и тем самым получим противоречие. Для этого разобьем все углы на группы, соответствующие вершинам. Рассмотрим различные возможные случаи.

1) В вершине разбиения, лежащей внутри исходного многоугольника, сходится $k \ge 3$ семиугольников (рис.1). Тогда среднее значение углов в этой вершине равно $2\pi/k \le 2\pi/3$.


Рис.1


Рис. 2


Рис. 3

2) Два (или $k \ge 2$) семиугольника имеют общую вершину на стороне одного из семиугольников (рис.2). Тогда средний угол равен $\pi/k \le \pi/2$.

3) Вершины семиугольников лежат в вершинах исходного n-угольника (их мы все объединим в одну группу). По условию, никакие три (подряд) стороны многоугольника не принадлежат одному семиугольнику. Значит, по крайней мере $n/2$ вершин относятся к двум или более семиугольникам (рис.3), так что сумму $\pi(n-2)$ всех углов n-угольника надо разделить не менее чем на $n + n/2 = 3n/2$ углов. Таким образом, средний угол в этой группе не больше $\pi(n-2)/(3n/2) < 2\pi/3$.

Ясно, что если среднее арифметическое в каждой группе не больше некоторого m, то и среднее всех чисел не больше m. Отсюда следует обещанная оценка.

Наметим идею другого решения этой задачи, используя теорему Эйлера о карте на сфере (о том, что число вершин, ребер и граней карты связаны соотношением $B - P + \Gamma = 2$). Натянем нашу карту на верхнюю полусферу так, что контур многоугольника лежит на экваторе, построим симметричную ей относительно экваториальной плоскости карту и на нижней полусфере, а затем все стороны, лежащие на экваторе, сотрем. Тогда (при выполнении предположения о разбиении) мы получили бы карту, в которой все страны имеют 6, 7 или большее число сторон, но это, как нетрудно доказать, противоречит теореме Эйлера.

А.Канель

М1430. *Монотонно возрастающая последовательность целых чисел $\{a_n\}$ обладает тем свойством, что для любой пары взаимно простых чисел p и q выполняется равенство: $a_{pq} = a_p a_q$; кроме того, известно, что $a_1 = 1$; $a_2 = 2$.*

а) Докажите, что $a_3 = 3$.

б) Докажите, что $a_n = n$ для любого натурального n.

(Взаимно простыми называются числа, не имеющие общего делителя.)

а) Из условия следует, что $a_3 = 3 + t$, где $t \ge 0$. Докажем, что $t = 0$. Поскольку $a_6 = a_2 a_3 = 6 + 2t$, имеем $a_5 \le 5 + 2t$. Далее, $a_{10} = a_2 a_5 \le 10 + 4t$. Следовательно, $a_9 \le 9 + 4t$, $a_{18} = a_2 a_9 \le 18 + 8t$, $a_{15} \le 15 + 8t$. Но $a_5 \ge 2 + a_3 = 5 + t$, $a_{15} = a_3 a_5 \ge (3+t)(5+t)$.

Получили: $15 + 8t \ge (3+t)(5+t) = 15 + 8t + t^2$, т.е. $t^2 \le 0$, и значит $t = 0$, $a_3 = 3$.

б) Докажем утверждение по индукции. Пусть оно справедливо при всех $i \le n$, где $n \ge 3$. Достаточно доказать, что утверждение справедливо при всех $i \le n(n-1)$. Поскольку числа n и $n-1$ взаимно просты, то $a_{n(n-1)} = n(n-1)$, но так как последовательность a_i — строго возрастающая, то $a_i = i$ при всех $i \le n(n-1)$.

В.Сендеров

Ф1438. *Лиса гонит зайца, держа курс точно на него. Заяц, как известно, косой — он думает, что удирает от лисы точно вдоль соединяющей их прямой, а на самом деле его скорость составляет все время угол 60° с этой прямой. Начальное расстояние между лисой и зайцем составляет L, скорости их одинаковы и равны v. Через какое время лиса догонит зайца? На каком расстоянии от начального положения лисы это произойдет? Как изменится ответ, если заяц окосеет до 90°? А если поправит зрение до 40°?*

Время погони найти просто — достаточно взять проекции скоростей участников на соединяющую их прямую. Относительная скорость лисы и зайца вдоль этой прямой равна

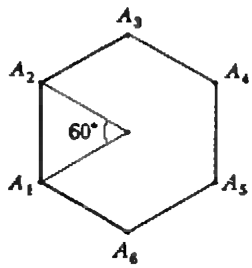
$$v_{\text{отн}} = v(1 - \cos\alpha).$$

Тогда время погони

$$\tau = \frac{L}{v_{\text{отн}}} = \frac{L}{v(1 - \cos\alpha)}.$$

Эта формула подходит для всех трех случаев.

Чтобы найти расстояние до точки встречи, сделаем до-



полнительное построение. Для первого случая построим правильный шестиугольник (см. рисунок). Пусть точка A_1 по-прежнему движется прямо на точку A_2, точка A_2 — на точку A_3 и так далее. Ясно, что этот шестиугольник со временем будет поворачиваться и уменьшаться, оставаясь правильным, значит, встреча произойдет в его центре — на расстоянии L от начального положения лисы. Если заяц окосеет до 90°, вместо шестиугольника получится квадрат, если поправит зрение до 40° — правильный девятиугольник. Во всех случаях искомое расстояние равно

$$x = \frac{L}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

О.Шпырко

Ф1439. *На легкой нерастяжимой нити длиной L = 1 м висит тяжелый маленький шарик массой m = 1 кг. Верхний конец нити начинают двигать по горизонтали с постоянной скоростью v_0 = 0,5 м/с и продолжают это*

А так ли хорошо знакомо вам

трение?

Взгляните, какие имена среди ученых, издавна ломавших голову над загадками и парадоксами трения. Наверняка вы сразу же обнаружите в эпиграфах и слишком смелые утверждения, опровергнутые в дальнейшем наукой. Что ж, вывод ясен: проблемы, связанные с трением, очень важны и очень сложны.

...каждое тяжелое тело порождает сопротивление трения, равное четверти веса этого тела.

Леонардо да Винчи

Теперь, установив в достаточной мере природу трения и его законы, остается только сказать кое-что о правилах, по которым оно может быть сведено к расчету, дабы знать, каково трение в самых сложных машинах.

Гильом Амонтон

Хотя в природе не встречается другого сопротивления, кроме того, которое пропорционально квадрату скорости, но я рассмотрел еще некоторые другие виды сопротивлений...

Леонард Эйлер

При скольжении дерева по дереву без смазки с некоторой скоростью сила трения также пропорциональна нормальному давлению...

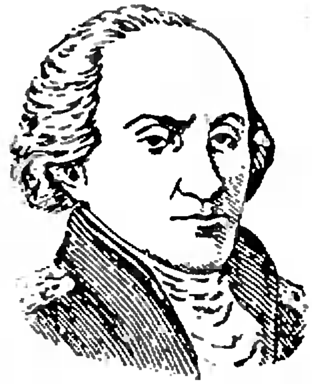
Шарль Огюстен Кулон

Вопросы и задачи

1. Может ли сила трения по величине превышать вес тела?

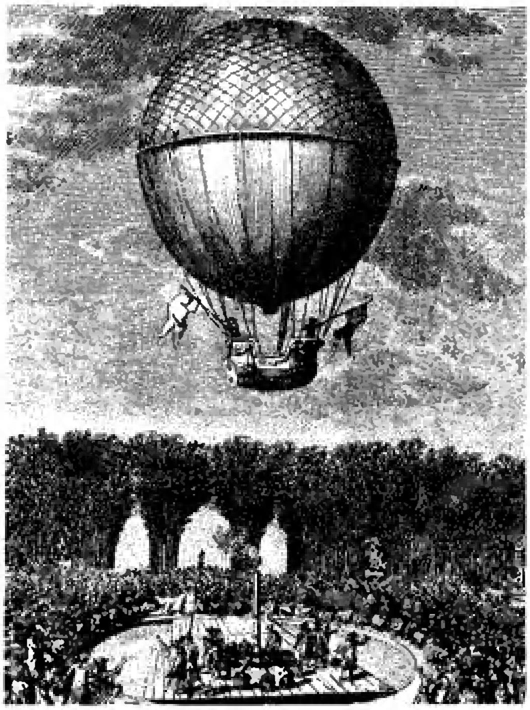
2. Для чего смычок перед игрой на скрипке натирают канифолью?

3. Одинакова ли механическая работа совершается при забивании гвоздя в бревно и при вытаскивании его из бревна?



Не стоит перечислять все области нашей жизни, где знание законов трения крайне необходимо, — внушительный список статей, посвященных «Квантом» этой теме лишь в последние годы, достаточно красноречив. А сложность самого явления хорошо демонстрирует, например, такой факт, что до сих пор никому не удалось теоретически рассчитать коэффициент трения между материалами, определяемый лишь экспериментально. Анализ же поведения жидкости, обтекающей движущееся тело, при учете вязкости и турбулентности становится устрашающе трудным.

Вот и сегодня наша подборка позволит обнаружить лишь верхушку огромного айсберга по имени «трение». Надеемся, работа с ней раззадорит вас и побудит к дальнейшему знакомству с этим удивительным явлением.



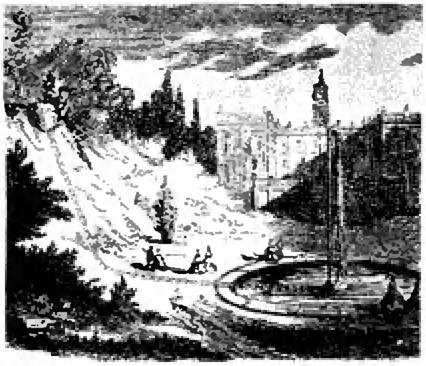
4. Два одинаковых полых шара заполнены один водой, а другой песком и подвешены на нитях одной и той же длины. Шары отклонили на одинаковые углы. Будут ли равными периоды колебаний таких маятников? Одинаково ли долго они будут колебаться?

5. Как лучше тормозить при движении на велосипеде, если перед вами возникает неожиданное препятствие, — скольжением (так называемый юз) или качением (колеса заторможены, но проворачиваются)?

6. Почему у гоночных велосипедов руль опущен так низко?

7. Равно ли время подъема камня, брошенного вертикально вверх, времени его падения?

8. В каких точках траектории камень, брошенный вертикально вверх, будет иметь максимальное ускорение, если считать, что сила сопротивления воздуха растет с увеличением



скорости камня?

9. Капля дождя, падая с большой высоты, испаряется. Как это влияет на ее движение?

10. Если одновременно с одной высоты отпустить монету и такой же величины кружок из бумаги, то они будут падать с разными скоростями. Однако если этот кружок положить на монету, они упадут вместе. Отчего?

11. Ветер уносит воздушный шар на север. В какую сторону при этом отклоняется флажок, прикрепленный к вершине гондолы?

12. Отчего, спускаясь на лодке по реке, плывут посередине реки, а поднимаясь, стараются держаться берега?

13. Изменится ли скорость движения судна относительно воды при переходе из реки в море, если мощность, развиваемая двигателями, не меняется?

14. Почему уровень подъема воды в фонтане никогда не достигает уровня воды в емкости, питающей фонтан, даже если струя направлена вертикально вверх?

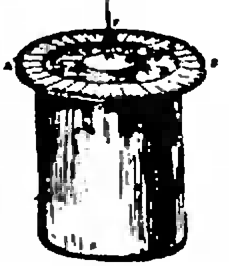
Микроопыт

Положите на стол стопку из десяти одинаковых книг. Попробуйте одним пальцем сдвинуть пять верхних книг или вытолкнуть из стопки четвертую сверху книгу. Что легче? Почему?

Любопытно, что...

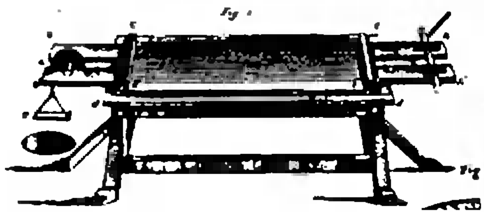
... на некоторых древних рисунках, найденных в пирамидах, изображены египтяне, подливающие молоко под полозья саней, на которых волокли каменные глыбы.

... между канатом и причальными тумбами при швартовке развиваются значительные силы трения. Раньше, когда тумбы делали из дерева, они, нагреваясь, иногда начинали дымится и их обливали холодной водой. А связь между натяжением каната, трением и углом охвата тумбы канатом удалось установить Л. Эйлеру.



... законы сухого трения Амонтона — Кулона в строгом смысле вовсе не законы, а эмпирические правила. Так, французский ученый П. Пенлеве показал в 1895 году, что возможны случаи, когда эти законы приводят к противоречию с основными законами динамики.

... разрыв молекулярных связей — вот главное, что отличает силы сухого трения, имеющие электромагнитное происхождение. Картина же мира без трения, часто изображаемая в научной фантастике, фактически означает уничтожение электрических сил, что повлекло бы полный распад вещества.

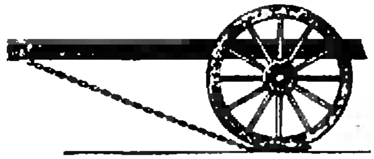


... увеличение силы сопротивления при росте скорости приводит к установившемуся равномерному движению тела при падении с большой высоты в жидкости или газе. Так, парашютист до раскрытия парашюта может приобрести скорость около 50 м/с, а капли дождя, в зависимости от их размеров, достигают скоростей от 2 до 7 м/с.

...в газах среднее расстояние между молекулами столь велико, что молекулярное притяжение не может вызвать трения между слоями газа, движущимися друг относительно друга. Если бы тепловое движение не выбрасывало молекулы за границы слоев, приводя к их замедлению либо ускорению, не было бы и трения.

...существование «пограничного слоя» жидкости или газа, движущегося вместе с предметом, иллюстрирует такой факт. Лист или камешек сметаются с крыши едущего автомобиля, а мелкие частицы пыли, недостаточно возвышающиеся над поверхностью, чтобы на них воздействовал движущийся навстречу воздух, остаются на кузове.

... если у движущегося поезда одновременно открыть все окна, то обтекание его воздухом настолько ухудшится, что сила сопротивления возрастет примерно на четверть.



... когда приливная волна движется по океанскому дну, силы трения приводят к замедлению вращения Земли и удлинению суток.

... линейная скорость спутника, движущегося в разреженных слоях атмосферы, из-за сопротивления воздуха увеличивается. Парадокс объясняется тем, что уменьшается радиус орбиты и часть потенциальной энергии спутника преобразуется в кинетическую.

... при определенных условиях жидкий гелий обладает свойством сверхтекучести — протекает через узкие щели и капилляры без трения. Это явление, открытое академиком П.Л. Капицей, получило объяснение только в рамках квантовой механики.

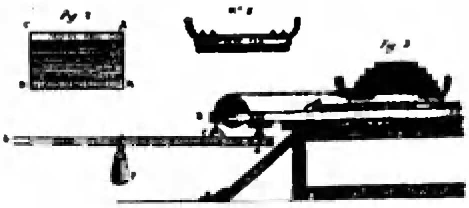
Что читать в «Кванте» о трении
(публикации прошлых лет)

1. «О швартовке, трении и формуле Эйлера» — 1988, № 5, с. 49;

2. «Почему не скользит мешок?» — 1989, №5, с.56;

3. «О сверхтекучести жидкого гелия II» — 1990, №1, с.7;

4. «Что произойдет, если исчезнет трение?» — 1990, №5, с.50;



5. «Сила трения покоя» — 1990, №11, с.37;

6. «История одного падения» — 1991, №2, с. 2;

7. «Работа сил трения» — 1991, №5, с. 37;

8. «Полеты в струе и наяву» — 1991, №9, с.2;

9. «Конус трения» — 1992, №1, с. 33;

10. «Шарик с дыркой в струе пылесоса — 1993, №3/4, с. 53;

11. «Проигрывая в перемещении, выигрываем в силе?» — 1994, №2, с.11.

до тех пор, пока нить снова не окажется вертикальной. В этот момент направление скорости верхнего конца нити меняют на противоположное, и в дальнейшем она остается равной v_0. Найдите силу натяжения нити сразу после изменения скорости конца нити. Найдите также максимальную высоту подъема шарика.

Движение такого рода удобно рассматривать в специально выбранной системе отсчета — СО. Свяжем СО с верхним концом нити, который движется горизонтально со скоростью v_0. В этой системе получится обычный математический маятник, и скорость шарика в нижней точке будет равна v_0 (и направлена против скорости точки подвеса в неподвижной системе отсчета). Нить снова станет вертикальной через половину периода колебаний, скорость шарика в нашей СО поменяет направление и опять будет равной v_0. Таким образом, относительно земли шарик теперь имеет скорость $2v_0$.

После этого движение изменилось — сменим и систему отсчета. Пусть теперь она движется в противоположную начальной сторону со скоростью v_0 (опять СО связана с верхним концом нити). В этой системе скорость шарика равна $3v_0$. Сделаем все расчеты в этой системе — она ведь инерциальная. Итак, после изменения направления движения конца нити шарик движется со скоростью $3v_0$ по окружности радиусом L и сила натяжения нити в нижней точке составляет

$$T = mg + \frac{m(3v_0)^2}{L} \approx 12\ \text{Н}.$$

Высоту подъема шарика найдем из закона сохранения энергии:

$$\frac{m(3v_0)^2}{2} = mgH,$$

откуда

$$H = \frac{9v_0^2}{2g} \approx 0{,}1\ \text{м}.$$

Примечание. Сразу после рывка нельзя говорить о натяжении нити — оно различно в разных местах, по нити бежит упругая волна. Только после затухания упругих колебаний — а это произойдет очень быстро, поскольку скорость упругой волны велика — можно найти силу натяжения. За короткое время шарик не успеет заметно сместиться из нижнего положения, а именно это нам и нужно для расчета.

А.Зильберман

Ф1440. *Два одинаковых груза связаны легкой пружиной. Грузы удерживают так, что они находятся на высоте H = 1 м над столом. Грузы одновременно отпускают, и система начинает падать. На какую высоту поднимется центр масс системы после того, как нижний груз испытает абсолютно неупругий удар о поверхность стола? Известно, что вес одного из грузов растягивает пружину на l = 0,05 м.*

Мы приносим извинения читателям журнала за досадную неточность в условии задачи — следовало задать расстояние не до центра масс системы H, а до нижнего края системы грузов h — лишь в этом случае можно получить корректное решение.

После того как мы отпустили систему, грузы начинают падать с одинаковыми ускорениями g, а пружина остается недеформированной. В момент удара нижнего груза о поверхность стола верхний груз имеет скорость

$$v_1 = \sqrt{2gh},$$

пружина начинает сжиматься, а затем разжиматься. Когда деформация пружины снова станет равной нулю, верхний груз опять будет иметь скорость, равную v_1. Теперь найдем его скорость v_2 в момент отрыва нижнего груза от стола — в этот момент сила натяжения пружины равна весу груза, значит, она растянута на l:

$$\frac{mv_2^2}{2} + mgl + \frac{kl^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2},$$

$$kl = mg,$$

откуда получаем

$$v_2^2 = v_1^2 - 3gl.$$

Скорость нижнего груза в момент отрыва от стола равна нулю. Следовательно, скорость центра масс системы составляет $v_ц = 1/2v_2$ и высота подъема центра масс над столом равна

$$h_ц = \frac{v_ц^2}{2g} = \frac{v_1^2 - 3gl}{8g} = \frac{h}{4}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{l}{h}\right) \approx 0{,}2\ \text{м}.$$

В.Михайлов

Ф1441. *В сосуде находится насыщенный водяной пар при 100 °С. Оцените среднее время разлета двух столкнувшихся между собой молекул на расстояние 1 см друг от друга. (Вы достаточно много знаете про этот газ — водяной пар, чтобы оценить все необходимые для решения величины не пользуясь справочником.)*

Из условия ясно, что нужно сделать довольно грубую оценку. Прежде всего нам понадобится размер молекулы воды — будем считать эту молекулу шариком с диаметром d. Плотность воды равна 1 г/см^3, значит, 1 моль воды — 18 г — занимает объем $V = 18\ \text{см}^3 = 18\cdot10^{-6}\ \text{м}^3$, а на одну молекулу приходится объем $V/N_A = 30\cdot10^{-30}\ \text{м}^3$ (N_A — число Авогадро). Считая молекулы плотно прижатыми друг к другу (вода почти несжимаема!), оценим диаметр молекулы:

$$d = \sqrt[3]{\frac{V}{N_A}} \approx 3\cdot10^{-10}\ \text{м}.$$

Длина свободного пробега в газе (водяной пар) равна

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n},$$

где n — концентрация молекул. При 100 °С насыщенный водяной пар имеет давление $p_н = 1$ атм, тогда

$$n = \frac{p_н}{kT} = \frac{p_н N_A}{RT} \approx 2\cdot10^{25}\ \text{м}^{-3},\ \lambda \approx 10^{-7}\ \text{м}.$$

Скорость движения молекулы между ударами оценим из энергии теплового движения:

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \approx 7\cdot10^2\ \text{м/с}.$$

Время между последовательными столкновениями равно

$$\tau = \frac{\lambda}{v}.$$

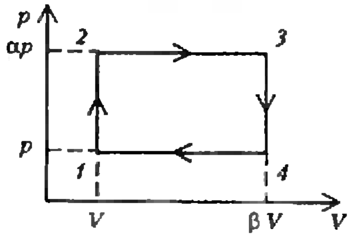
Будем считать, что после столкновения направление скорости молекулы меняется случайным образом (броуновское движение). В этом случае смещение молекулы от начального положения после N ударов составит 1 см $= s = \lambda\sqrt{N}$ и искомое время

$$t = \frac{N}{2}\tau = \frac{s^2}{2\lambda^2}\frac{\lambda}{v} = \frac{s^2}{2\lambda v} \approx 1\ \text{с}.$$

З.Рафаилов

Ф1442. *Тепловой цикл, проводимый с одноатомным разреженным газом, состоит из двух изохор и двух изобар. Найдите максимальный КПД такого цикла.*

Тепло газ (в количестве ν молей) получает на участках $1-2$ и $2-3$ (см. рисунок):



$$Q=\frac{3}{2}\nu R(T_3-T_1)+\alpha p\cdot(\beta-1)V=$$

$$=\left(\frac{3}{2}(\alpha\beta-1)+\alpha(\beta-1)\right)pV.$$

Работа в цикле $1-2-3-4-1$ равна

$$A=(\alpha-1)(\beta-1)pV.$$

Коэффициент полезного действия в цикле составляет

$$\eta=\frac{A}{Q}=\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\frac{3}{2}(\alpha\beta-1)+\alpha(\beta-1)}=\frac{1-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha\beta}}{\frac{5}{2}-\frac{1}{\beta}-\frac{3}{2\alpha\beta}}.$$

Видно, что КПД растет при увеличении α и β, и максимальное значение этой величины — при очень больших α и β — равно

$$\eta_{max}=\frac{2}{5}=0{,}4=40\%.$$

Ю.Кременцова

Ф1443. *Разреженный газ нагревают в сосуде постоянного объема, при этом его удельная теплоемкость оказывается равной 740 Дж/(кг·К). Что это за газ?*

Если это одноатомный газ, то теплоемкость его при постоянном объеме в расчете на один моль составляет

$$C_{V1}=\frac{3}{2}R=12{,}46\ \text{Дж/(моль}\cdot\text{К)},$$

а масса одного моля равна

$$M_1=\frac{12{,}46\ \text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}}{740\ \text{Дж/(кг}\cdot\text{К)}}=0{,}0168\ \text{кг/моль}=16{,}8\ \text{г/моль}$$

— такого одноатомного газа нет.

Посмотрим среди двухатомных газов. Для них

$$C_{V2}=\frac{5}{2}R=20{,}775\ \text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}$$

и масса одного моля

$$M_2=\frac{20{,}775\ \text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}}{740\ \text{Дж/(кг}\cdot\text{К)}}=0{,}028\ \text{кг/моль}=28\ \text{г/моль}.$$

Это — азот (возможны и другие ответы — например, CO тоже двухатомный газ и тоже имеет молярную массу 28 г/моль).

Для трех- и многоатомных газов

$$C_{V3}=3R=24{,}93\ \text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}$$

и масса одного моля

$$M_3=0{,}0337\ \text{кг/моль}=33{,}7\ \text{г/моль}.$$

Если считать число в условии точным, такого газа быть не должно. Однако, если посчитать теплоемкость 740 Дж/(кг·К) приблизительно заданной, то можно поискать газ с $M_3=34$ г/моль или $M_3=33$ г/моль.

И еще — в условии задан газ, а не смесь газов, иначе решение сильно усложнилось бы.

Р.Александров

Ф1444. *От катушки с проводом из сплава с высоким удельным сопротивлением отрезали два куска, длины которых 1 м и 3 м. Провода эти соединили параллельно и подключили к источнику питания. От левого конца одного из проводов и от правого конца другого отмерили по 0,2 м и получившиеся точки соединили куском такого же провода (длина этого куска неизвестна). Найдите отношение токов в длинных частях первых двух проводов. При какой длине провода-соединителя в нем будет рассеиваться максимальная мощность?*

Обозначим сопротивление куска провода длиной 0,2 м буквой r, тогда кусок провода длиной 0,8 м имеет сопротивление $4r$, а длиной 2,8 м — $14r$ (рис.1). Пусть сопротивление соединяющего куска провода (диагональ «мостика») x, напряжение батареи $\mathcal{E}$.

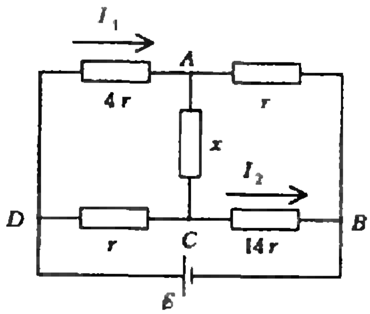


Рис. 1

Если формулировка задачи верна, то отношение токов не должно зависеть от сопротивления x, а в этом случае можно этот кусок вообще не подключать ($x=\infty$) — отношение токов легко при этом найти:

$$I_2:I_1=1:3.$$

Разумеется, это не решение задачи — но все же хорошая подсказка. А теперь — собственно решение.

Пусть потенциал точки B равен нулю, тогда

$$\varphi_D=\mathcal{E},\ \varphi_C=14rI_2,\ \varphi_A=\mathcal{E}-4rI_1.$$

Выразим токи в цепи через эти величины и запишем соотношение

$$I_{DA}+I_{DC}=I_{AB}+I_{CB},$$

или

$$I_1+\frac{\mathcal{E}-14rI_2}{r}=\frac{\mathcal{E}-4rI_1}{r}+I_2.$$

Отсюда сразу получаем

$$5I_1=15I_2,\ I_1=3I_2.$$

Итак, ответ действительно не зависит от x.

Вторая часть решения чуть сложнее. Составим уравнения для напряжений (рис.2):

$$r(I+I_x)+14rI=\mathcal{E},$$

$$r(I+I_x)+xI_x=4r\cdot 3I.$$

Исключая из них величину I, получим

$$I_x = \frac{11/15\mathscr{E}}{x + 26/15r}.$$

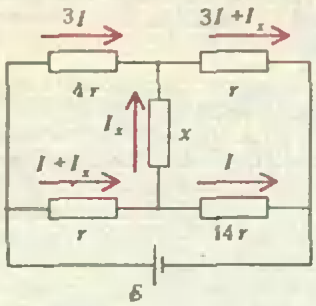


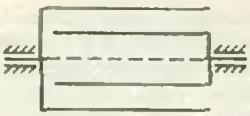
Рис. 2

Это соответствует току в цепи с батарейкой, ЭДС которой $\mathscr{E}_x = 11/15\mathscr{E}$, а внутреннее сопротивление $r_x = 26/15r$. Известно, что максимальная полезная мощность в такой цепи будет при нагрузке $x = r_x$, т.е. $x = 26/15\,r$. А это соответствует длине провода-соединителя

$$l_x = \frac{26}{15} \cdot 0{,}2\text{ м} = 0{,}35\text{ м}.$$

А.Зильберман

Ф1445. *Два длинных тонкостенных непроводящих цилиндра могут свободно вращаться вокруг общей оси, как показано на рисунке. Радиус большого цилиндра в два раза больше радиуса малого. Цилиндры заряжают по поверхностям с одинаковой поверхностной плотностью заряда. Внешний цилиндр раскручивают до угловой скорости* ω. *В какую сторону и с какой скоростью будет вращаться внутренний цилиндр? Цилиндры очень легкие.*



Вращающийся заряженный непроводящий цилиндр подобен кольцевому току, который создает магнитное поле. Получившаяся система похожа на длинный соленоид с большим числом плотно расположенных по всей длине l витков. Суммарный ток, текущий по всем виткам, можно выразить через заряд цилиндра:

$$I = \frac{Q}{T} = \frac{\sigma \cdot 2\pi R l}{2\pi/\omega} = \sigma R l \omega.$$

Поле внутри такого соленоида однородно и пропорционально току:

$$B = \alpha I = \alpha\sigma R l \omega,$$

где α — коэффициент пропорциональности.

Во время раскручивания внешнего цилиндра (с радиусом R) до угловой скорости ω изменяющееся магнитное поле создает вихревое электрическое поле, которое действует на заряды внутреннего цилиндра (радиусом r) и раскручивает его. Угловая скорость внутреннего цилиндра растет до величины ω_1 такой, что пронизывающий этот цилиндр суммарный магнитный поток (внутренний цилиндр тоже создает магнитное поле) в любой момент равен нулю (по условию задачи цилиндр очень легкий).

Таким образом, можно записать

$$\alpha\sigma R l\omega + \alpha\sigma r l\omega_1 = 0,$$

и

$$\omega_1 = -\frac{R}{r}\omega = -2\omega$$

— внутренний цилиндр вращается в противоположную сторону.

Попробуйте сами разобраться с другим случаем — когда мы раскручиваем не внешний, а внутренний цилиндр. Учтите, что поле соленоида снаружи оказывается очень малым.

В.Михайлов

Ф1446. *На рисунке 1 изображены главная оптическая ось собирающей линзы, положения ее фокусов и размеры самой линзы, а также точечный источник света A. Покажите хотя бы одну точку, из которой не видны ни источник, ни его изображение в линзе. Покажите также точку, из которой одновременно видны источник и его изображение.*

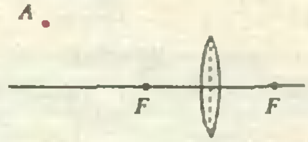


Рис. 1

Построим обычным образом изображение источника (рис.2) — оно получится в точке A'. Проведем «крайние» лучи через верхнюю $Л_1$ и нижнюю $Л_2$ точки линзы. Ясно, что линза загораживает источник A от наблюдателя и он виден вне области, ограниченной (в плоскости рисунка) продолжениями лучей $AЛ_1$ и $AЛ_2$. С другой стороны, изображение A' видно внутри области, ограниченной продолжениями лучей $Л_1A'$ и $Л_2A'$, например в точке 3, и не видно вне этой области. Дальше все просто. В точке 1 не видны ни источник (линза загораживает), ни изображение (точка не попадает в пучок преломленных линзой лучей). Наоборот, в точке 2 можно видеть и то, и другое.

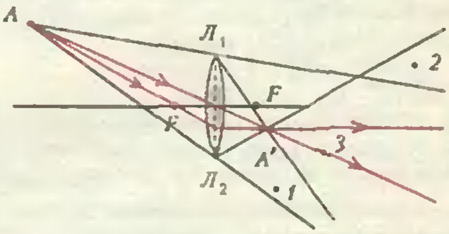


Рис. 2

Подумайте сами — при каком расположении источника относительно линзы точек типа 2 вообще не будет.

З.Рафаилов

Ф1447. *Монохроматический рентгеновский луч падает под углом* α *на тонкую пластинку, как показано на рисунке 1. Рассеянный луч фиксируют приемником под таким же углом* α. *Найдите разность длин волн падающего и рассеянного излучений.*

Будем считать, что атомы пластинки легкие. Энергия связи электрона в легком атоме во много раз меньше его энергии покоя, поэтому в нашем случае можно считать электрон свободным. Поглотить фотон такой электрон

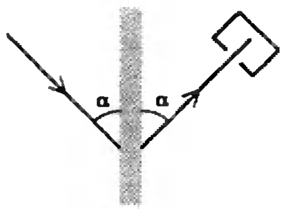


Рис. 1

не может, и происходит рассеяние, т.е. упругое столкновение фотона с электроном (эффект Комптона). В результате электрон приобретает некоторую скорость, а значит — кинетическую энергию и импульс, а фотон изменяет направление движения и уменьшает свою энергию — уменьшается его частота, т.е. увеличивается длина волны.

Для упругого удара выполняются законы сохранения энергии и импульса. Воспользуемся ими (рис. 2):

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E},$$

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\beta.$$

Учтем соотношения для фотона:

$$\mathcal{E}_1 = h\nu = \frac{h\nu}{c}c = p_1c,\ \mathcal{E}_2 = h\nu' = p_2c,$$

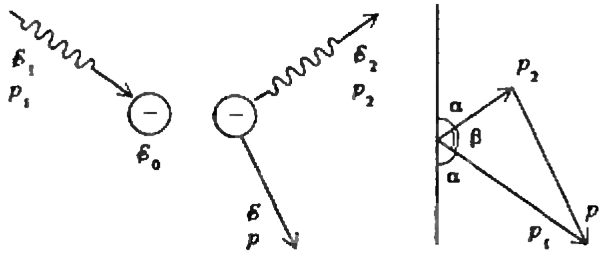


Рис. 2

а также для электрона:

$$\mathcal{E}_0 = m_0c^2,\ \mathcal{E} = mc^2,\ m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Кроме того,

$$\nu = \frac{c}{\lambda},\ \nu' = \frac{c}{\lambda'}.$$

После преобразований для искомой разности длин волн получим

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\beta) = \frac{2h}{m_0c}\sin^2\frac{\beta}{2} = \frac{2h}{m_0c}\cos^2\alpha.$$

Изменение длины волны не зависит от длины волны падающих лучей и от материала пластинки, но зависит от направления рассеяния.

Д.Кример

Победители конкурса «Математика 6—8»

*Жюри конкурса «Математика 6—8»
награждает призами журнала «Квант»
и Российского благотворительного фонда «Интеллект»
следующих участников конкурса:*

1. *Гуляев Михаил,* Нижний Новгород, с.ш. № 139, 6 кл.
2. *Шаповалов Данил,* Иваново, с.ш. № 30, 7 кл.
3. *Пономарев Алексей,* Красноярск, с.ш. № 41, 7 кл.
4. *Смирнов Евгений,* Москва, с.ш. № 920, 6 кл.
5. *Петренко Ирина,* пос. Дружный Пуховичского района Минской области, 8 кл.
6. *Кудинов Антон,* Минск, с.ш. № 64, 8 кл.
7. *Чулков Сергей,* Москва, с.ш. № 5, 8 кл.
8. *Санников Юлий,* Севастополь, с.ш. № 8, 8 кл.
9. *Жвакина Светлана,* Видное, с.ш. № 7, 8 кл.
10. *Федеткина Ольга,* Видное Московской области, с.ш. № 7, 8 кл.

Задачи

1. Сулико подошла к роднику с двумя кувшинами. Один вмещал 5 литров, а другой — 4 литра. Вода из родника текла двумя струями — одна сильнее, другая слабее. Сулико поставила одновременно кувшины под струи и, когда набралась половина меньшего кувшина, поменяла кувшины местами. Как это ни удивительно, но кувшины наполнились одновременно. Во сколько раз больше воды дает одна струя, чем другая?
А.Шевкин

2. Представьте себе огромное число, у которого первая и последняя цифры — единицы, а остальные 1994 цифры — нули. А теперь докажите, что оно — составное.
С.Дворянинов

3. Решите два числовых ребуса: $УЖ^2 = УДАВ$, $УЖ^3 = ПИТОН$. В каждом из них одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным — разные. (Одинаковые буквы в разных ребусах могут быть разными).
Л.Лихтарников

4. Квадрат размерами 3×3 разбит на единичные клетки. Назовем клетки соседними, если они имеют общую сторону. Попробуйте записать в этих клетках слово МОРОЖЕНОЕ, передвигаясь из клетки в соседнюю клетку так, чтобы в каждом горизонтальном и вертикальном ряду оказалось по одной букве О.
И.Акулич

5. Мне вдвое больше лет, чем вам было тогда, когда мне было столько лет, сколько вам теперь. Когда вам будет столько лет, сколько мне теперь, тогда сумма наших возрастов будет равна 63 годам. Сколько сейчас лет мне и сколько вам?

Конкурс «Математика 6—8»

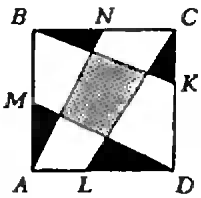
В этом номере мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6 — 8 классов. Конкурс состоит из 20 задач и заканчивается во втором номере будущего года. Победители будут награждены премиями журнала «Квант» и Российского благотворительного фонда «Интеллект». Решения задач из этого номера присылайте не позже 1 января 1995 года по адресу: 103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6 — 8»). Не забудьте указать фамилию, имя, класс и школу.

Мы приглашаем к участию в конкурсе математические кружки. Кружки, показавшие лучшие результаты, предполагается пригласить в летнюю математическую школу вблизи г.Иванова в августе 1995 года.

1. Первый член последовательности чисел равен 439, каждый следующий равен сумме цифр предыдущего, умноженной на 13. Чему равен 99-й член этой последовательности?
Н.Антонович

2. Укажите все натуральные числа, произведение цифр которых больше 885, но меньше 895.
С.Манвелов

3. В квадрате со стороной a проведены отрезки AN, BK, CL и DM так, что площадь заштрихованного четырехугольника равна сумме площадей черных треугольников (см. рисунок). Докажите, что $AM+BN+CK+DL=2a$.
С.Дворянинов

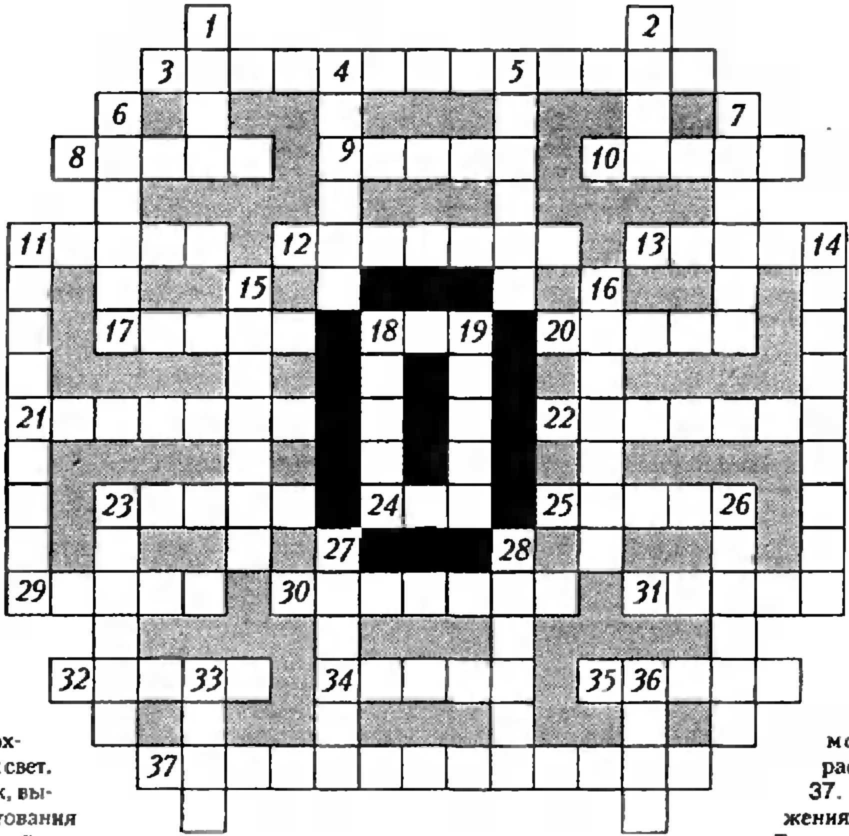


4. Целые числа A, B и C таковы, что $A(A+B) = B(B+C) = C(C+A)$. Докажите, что $A = B = C$.
С.Токарев

5. На пульте находятся 100 светящихся кнопок, расположенных в виде квадрата 10×10. Табло устроено так, что при нажатии на произвольную кнопку она и все кнопки в одном с ней ряду и в одном столбце меняют свое состояние: светящиеся кнопки гаснут, а негорящие — загораются. Какое наименьшее число кнопок нужно нажать, чтобы все кнопки оказались погашенными, если первоначально все они светились?
С.Токарев

КРОССВОРД

Вокруг света



По горизонтали:
3. Излучение света. 8. Характеристика свойства поверхности, отражающей свет. 9. Немецкий физик, выдвинул идею квантования излучения. 10. Устройство для диффузного отражения света. 11. Оптический квантовый генератор. 12. Русский изобретатель «зеркального фонаря». 13. Американский физик, открыл спектральную серию в инфракрасной области. 17. Драгоценный камень с большим показателем преломления. 18. Датский физик, объяснил механизм излучения света атомом. 20. Французский ученый, сформулировал основной принцип геометрической оптики. 21. Время, за которое свет в вакууме распространяется на 299 792 458 м. 22. Тело, позволяющее получать оптические изображения предметов. 23. Американский физик, провел (совместно с Майкельсоном) точные эксперименты по изучению влияния движения Земли на скорость света. 24. Немецкий физик, вывел закон смещения в спектре излучения абсолютно черного тела. 25. Один из лауреатов Нобелевской премии по физике за открытие и объяснение эффекта Вавилова – Черенкова. 29. Химический элемент, обнаруженный с помощью спектрального анализа сначала на Солнце, а затем и на Земле. 30. Американский физик, открыл упругое рассеяние электромагнитных волн на свободных электронах. 31. Образование в атмосфере, способствующее возникновению радуги. 32. Один из основных элементов оптической системы. 34. Квант света. 35. Английский физик, заложил основы теории молекулярного рассеяния света. 37. Результат наложения световых волн.

По вертикали:
1. Единица освещенности. 2. Металл, использовался Столетовым в опытах по фотоэффекту. 4. Планета, открытая «на кончике пера». 5. Древнегреческий ученый, в трудах которого впервые формулируется закон прямолинейного распространения света. 6. Ионизованный газ. 7. Красивое оптическое явление. 11. Советский физик, открыл (совместно с Мандельштамом) комбинационное рассеяние света на кристаллах. 14. Искривление изображения в оптических системах. 15. Единица силы света. 16. Металл, используется при изготовлении отражающих поверхностей. 18. Один из лауреатов Нобелевской премии по физике за фундаментальные исследования в области квантовой электроники. 19. Минерал, послуживший рабочим телом в первом лазере. 23. Электрический разряд в атмосфере. 26. Немецкий астроном, высказал предположение, что направление хвостов комет связано с воздействием солнечного света. 27. Химический элемент, в переводе с греческого означающий «светоносный». 28. Основной источник света на Земле. 33. Понятие, на котором основывается метод Френеля, позволяющий объяснить дифракцию света. 36. Гипотетическая среда, ответственная за распространение света.

М. Красин

Физика 9—11

Публикуемая ниже заметка «Кинематика на карусели» предназначена девятиклассникам, заметка «Механика пузырьковых систем» — десятиклассникам, «Колебания заряда и космическая оранжерея» — одиннадцатиклассникам.

Кинематика на карусели

А.СТАСЕНКО

«Неужели в самом деле все сгорели карусели?» — спрашивается в детской классике. Надеемся, что не все, и вообразим себе такую идиллию: девочка-отличница угощает мальчика вишенками, бросая ему в рот по одной штуке. Расстояние между ними L, угол бросания α, начальная скорость v_0 — все, как на обычном уроке. Но при этом мальчик стоит на вращающейся карусели, прямо в ее центре.

Давайте исследуем траекторию летящей ягоды в двух системах координат; одна из них связана с землей и неподвижной девочкой — назовем ее Д-системой, а другая жестко связана с каруселью и вращается вместе с мальчиком — это М-система. А чтобы не писать скучных формул, выполним построение траекторий графически.

Но прежде уточним исходные данные. Пусть $\alpha = 60°$, а L, v_0 и скорость вращения выбраны так, что за все время τ полета вишенки карусель с мальчиком сделает два оборота (ясно, что это число оборотов должно быть целым числом, чтобы ягода достигла цели).

В Д-системе траектория ягоды в вертикальной плоскости будет параболой (вид сбоку), а в горизонтальной (вид сверху) — прямой линией (рис. 1 и 2; черные штриховые линии). В момент бросания $t = 0$ горизонтальная скорость равна $v_x = v_0 \cos\alpha$, а вертикальная $v_y = v_0 \sin\alpha$. Конечно, сопротивление воздуха не учтено.

В М-системе мальчик, разумеется, неподвижен, а девочка мчится по окружности в сторону, противоположную вращению, с линейной скоростью $V_0 = 2\pi L/T$ и угловой скоростью $\omega_0 = 2\pi/T$. (Здесь $T = \tau/2$ — период, или время одного оборота карусели.) Траектория девочки в М-системе изображена на рисунке 2 штрих-пунктирной линией. Поскольку скорость вращения постоянна, угловая координата девочки и ягоды (азимут) в М-системе линейно растет со временем: $\varphi = \omega_0 t = 4\pi t/\tau$.

Отметим несколько характерных точек на траектории ягоды, которые особенно просто построить. Например, ясно, что в момент времени $t = T = \tau/2$ вишенка будет находиться в самой верхней точке на расстоянии $L/2$ от оси вращения. В этой точке ее горизонтальная скорость, постоянная во все время движения, равна $v_x = v_0 \cos\alpha$, вертикальная скорость равна нулю, а линейная равна $V_0/2$ (так как линейные скорости точек жесткой карусели пропорциональны расстоянию от оси вращения). По исте-

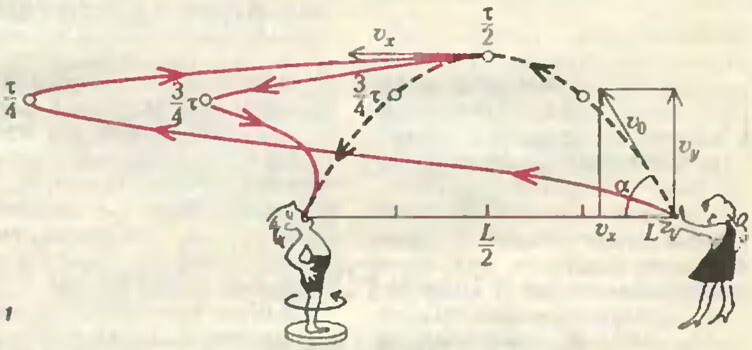


Рис. 1

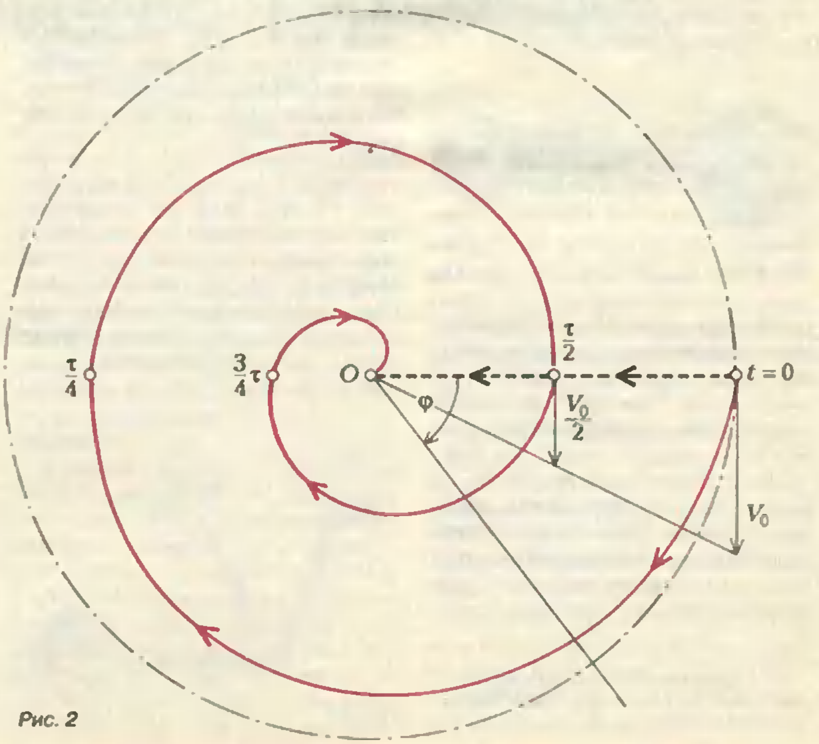


Рис. 2

чении времени $\tau = 2T$ (через два оборота) ягода окажется на оси, где линейная скорость равна нулю, горизонтальная скорость по-прежнему v_x, а вертикальная равна $-v_y$ (равна по модулю и противоположна по направлению той, что была в момент бросания).

В моменты времени $\tau/4$ и $3\tau/4$ вишенка будет на одной и той же высоте, но, конечно, на различных расстояниях от центра.

Если вы поняли, как построены эти характерные точки, то сможете нарисовать и всю траекторию или научить этому ваш компьютер, а уж он-то изобразит на своем экране любую проекцию траектории. Автор и художник не стали обращаться к компьютеру, поэтому к их рисункам (рис. 1 и 2; красные линии) не нужно подходить слишком строго.

Заметим, что в Д-системе на ягоду действует единственная сила — сила притяжения Земли (ведь силой сопротивления воздуха мы пренебрегли). Но во вращающейся М-системе траектория довольно-таки замысловата, и мальчик может вообразить себе, что на ягоду, помимо тяготения, действуют еще какие-то силы (когда он будет изучать динамику, он назовет их *силами инерции* — но об этом позже).

А если мальчик будет бросать назад девочке косточки от ягоды под тем же углом α и с той же начальной скоростью? Наверное, вам нетрудно будет изобразить и траектории косточек в обеих системах координат.

Ну а если вместо девочки представить себе ДОТ, вместо мальчика — вращающийся танк, линкор или самолет (которые перебрасываются отнюдь не вишенками), то все это можно назвать модным словом *конверсия* и сообразить, как можно поставить аналогичную задачу для бортового компьютера.

Механика пузырьковых систем

М. СКОРОБОГАТЫЙ

Многие частные задачи по физике допускают обобщения, что зачастую приводит к открытию интересных фактов и закономерностей. Вот — конкретный пример.

Общеизвестна задача о поведении системы из двух мыльных пузырьков с разными радиусами, выдутых на концах соломинки (рис. 1). Ответ прост — меньший пузырек со временем уменьшается, а больший — увеличивается до тех пор, пока радиусы кривизны пузырьков не сравняются.

Рис. 1

Обобщим задачу. Предположим, что имеется система из n пузырьков, выдутых на n соломинках и связанных между собой. Как будет вести себя такая система, предоставленная самой себе?

Сразу ответить на такой вопрос сложно, поэтому сначала конкретизируем ситуацию и рассмотрим трехпузырьковую систему, с диаметром трубок много меньшим начальных диаметров пузырьков. Будем считать трубки одинаковыми (по сечению и длине) и длинными, а вещество в трубках несжимаемым. Для полной ясности картины предположим, что течение в трубках ламинарное. Пусть r_1, r_2, r_3 — радиусы пузырьков, p_0 — внешнее давление, p_1, p_2, p_3 — давления в пузырьках, p — давление в узле, т.е. в месте соединения трубок (рис. 2).

Не будем сразу бросаться в омут математических выкладок, а порассуждаем физически. Избыточное давление под изогнутой поверхностью жидкости, обусловленное силами поверхностного натяжения, тем больше, чем меньше радиус пузырька. Иными словами,

$$p_1 - p_0 \sim \frac{1}{r_1},\quad p_2 - p_0 \sim \frac{1}{r_2},\quad p_3 - p_0 \sim \frac{1}{r_3}.$$

Тогда очевидно, что вещество будет переходить из пузырька, где давление больше, в пузырек, где оно меньше. При этом больший пузырек будет расти, а меньший — уменьшаться. А что же будет со средним пузырьком?

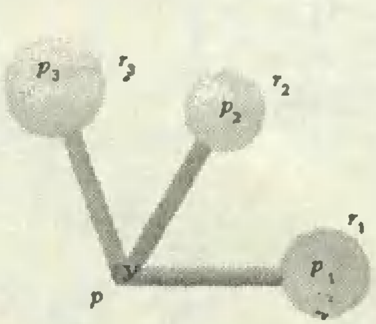


Рис. 2

Теперь призовем на помощь математику. Известно, что если течение по трубе ламинарное, то количество переносимого вещества в единицу времени пропорционально разности давлений на концах трубы (закон Пуазейля). Учтем, что количество вещества, вошедшего в узел (см. рис.2), равно количеству вышедшего из него вещества, и получим:

$$p - p_1 + p - p_2 + p - p_3 = 0,$$

откуда

$$p = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{3}.$$

Пойдем дальше. Объем первого пузырька $V_1 \sim r_1^3$, поэтому $\Delta V_1 \sim r_1^2 \cdot \Delta r_1$. С другой стороны, $\Delta V_1 \sim \Delta m_1$, где Δm_1 — масса ушедшего из первого пузырька (или пришедшего туда) вещества (предполагается, что плотность вещества неизменна). Но

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} \sim p - p_1 \sim p_2 + p_3 - 2p_1,$$

или

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} \sim \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{2}{r_1}.$$

Итак,

$$r_1^2 \cdot \frac{\Delta r_1}{\Delta t} \sim \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{2}{r_1}.$$

Переходя к производной, с точностью до коэффициента, можем записать:

$$r_1^2 \cdot r_1' \sim \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{2}{r_1}.$$

Аналогично получим уравнения для двух других пузырьков и объединим

Автор этой статьи Максим Скоробогатый — студент Московского физико-технического института.

все три уравнения в систему:

$$\begin{cases} r_1^2 \cdot r_1' \sim \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3} - \dfrac{2}{r_1}, \\ r_2^2 \cdot r_2' \sim \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_3} - \dfrac{2}{r_2}, \\ r_3^2 \cdot r_3' \sim \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} - \dfrac{2}{r_3}. \end{cases}$$

Проверим, описывает ли эта система качественные предположения, сделанные раньше. Пусть для определенности $r_1 > r_2 > r_3$. Тогда из первого уравнения системы находим

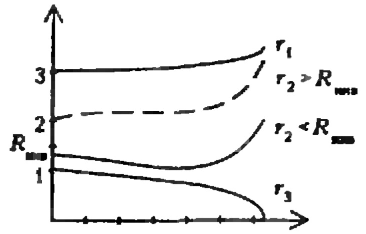


Рис. 3

$$\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{2}{r_1} > 0, \text{ т.е. } r_1' > 0,$$

из третьего —

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{2}{r_3} < 0, \text{ т.е. } r_3' < 0.$$

А это и означает, что больший пузырек растет, а меньший уменьшается.

Далее, из второго уравнения получаем, что

$$\text{если } r_2 > \frac{2r_1r_3}{r_1 + r_3}, \text{ то } r_2' > 0,$$

т.е. r_2 увеличивается.

$$\text{Если же } r_2 < \frac{2r_1r_3}{r_1 + r_3}, \text{ то } r_2' < 0,$$

т.е. r_2 уменьшается. Радиус

$$r_2 = \frac{2r_1r_3}{r_1 + r_3}$$

называют радиусом инверсии и обозначают $R_{инв}$.

Результаты компьютерного моделирования зависимости радиусов пузырьков от времени в трехпузырьковой системе изображены на рисунке 3.

Интересно, что случай трехпузырьковой системы довольно просто проверить экспериментально, воспользовавшись системой «двумерных» пузырьков (рис. 4). Если на стекле выложить канавки из пластмассовых палочек и налить в них масло, а на стекло воду, то происходящие при этом механические изменения в пузырьковой системе полностью соответствуют изменениям, предсказанным теоретически.

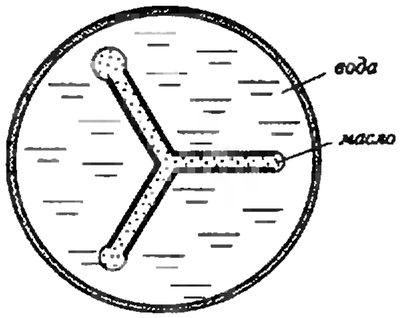


Рис. 4

Что же дальше — остановиться или продолжать исследования? Решать вам. Только имейте в виду, что неограниченное увеличение количества пузырьков в системе приводит к пене, а это уже совсем другая физика.

Колебания заряда и космическая оранжерея

А.СТАСЕНКО

Запишем выражение для напряженности электрического поля E на расстоянии r от точечного заряда Q (которое прямо следует из закона Кулона) в таком виде:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Узнали? Только теперь его можно прочесть так: произведение напряженности электрического поля на площадь замкнутой поверхности, все элементы которой перпендикулярны вектору поля, пропорционально заряду, создавшему это поле (рис. 1). Это утверждение представляет собой частный случай основной теоремы электростатики — теоремы Гаусса. (В общем случае теорема Гаусса гласит: поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность пропорционален величине заряда, находящегося внутри этой поверхности.)

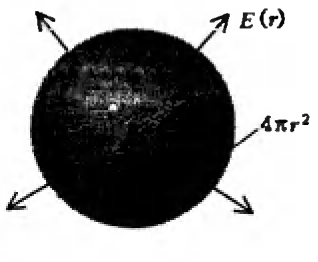


Рис. 1

А теперь представим себе, что точечный заряд не один, их много, и все они «размазаны» внутри бесконечного слоя толщиной $2a$ ($-a < x < a$; рис. 2) с постоянной объемной плотностью ρ_0. Интуитивно ясно, что электрическое поле в средней плоскости ($x = 0$) должно равняться нулю, так как силы, действующие влево и вправо на любой пробный заряд со стороны всех зарядов этого слоя, уравновешиваются. Физик сказал бы, что это ясно *из соображений симметрии*. Из тех же соображений ясно, что если мы отступим от средней плоскости на расстояние $|x|$ (все равно — внутри слоя или вне его) влево или вправо, то в плоскостях $\pm x$ электрические поля должны быть одинаковыми по модулю, но противоположными по направлению: $E(x) = -E(-x)$, т.е. антисимметричными.

Применим теорему Гаусса к замкнутой поверхности — цилиндрику длиной $2x$, образующая которого параллельна оси X, а два донышка имеют одинаковую площадь S (рис. 2, *а*). Тогда произведение напряженности поля на перпендикулярные ему площади: $E(x) \cdot S + (-E(-x) \cdot S)$ должно быть пропорционально полному заряду внутри цилиндрика: $Q = \rho_0 \cdot 2x \cdot S$.

Учитывая антисимметричность полей $E(x)$ и $E(-x)$, запишем

$$2E(x)\cdot S = \frac{\rho_0 \cdot 2x \cdot S}{\varepsilon_0},$$

откуда получаем

$$E(x) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} x.$$

Эта зависимость поля от координаты изображена на рисунке 2, *б* в виде прямой линии (внутри слоя).

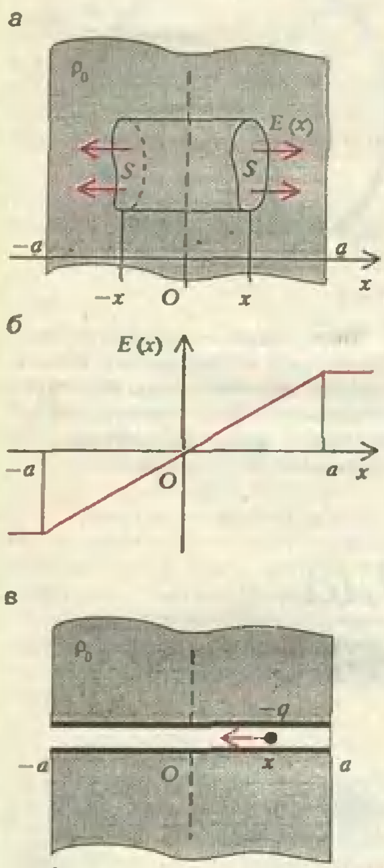


Рис. 2

Ну и что тут интересного? Статика она и есть статика. Но давайте теперь внутрь этого слоя поместим маленький отрицательно заряженный $(-q)$ шарик. А чтобы он там не мешал распределенным зарядам, создающим поле, заключим его, например, в тонкую стеклянную трубочку, параллельную оси X (рис. 2, *в*). Если он находится сейчас на расстоянии x от средней плоскости, то на него действует сила $F = -qE(x)$. Запишем второй закон Ньютона для шарика (пусть его масса m):

$$x'' = -\frac{q}{m} E(x) = -\frac{q\rho_0}{m\varepsilon_0} x.$$

Сразу видно, что это уравнение *гармонического колебательного движения* с круговой частотой $\omega_0 = \sqrt{q\rho_0/(m\varepsilon_0)}$. И этот шарик моделирует все гармонические колебания — ну например, какого-нибудь другого шарика, подвешенного на нити длиной l в поле тяготения и совершающего малые колебания с частотой $\omega_g = \sqrt{g/l}$.

А что если заряд внутри слоя распределен неравномерно? Допустим, его объемная плотность линейно изменяется по координате:

$$\rho(x) = \rho_0 \frac{|x|}{a}.$$

Это означает, что плотность нулевая в *центре, а на границах слоя $x = \pm a$ она* равна ρ_0 (рис. 3, *а*). Тогда полный заряд внутри нашего цилиндрика уже нельзя найти просто умножением плотности заряда на объем, а надо интегрировать по объему:

$$Q(x) = 2\int_0^x \rho(x) S\,dx = 2\rho_0 \frac{Sx^2}{2a} = \frac{\rho_0 S x^2}{a}.$$

Теорема Гаусса дает для поля выражение

$$E(x) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 a} x|x|,$$

а уравнение движения шарика в трубочке примет вид

$$x'' = -\frac{q}{m} E(x) = -\frac{q\rho_0}{2ma\varepsilon_0} x|x| = -\beta_0^2 x|x|, \quad (*)$$

где $\beta_0 = \omega_0/\sqrt{2a}$ — новая положительная постоянная, а вместо x^2 написано более хитрое выражение $x|x|$, которое отражает тот факт, что напряженность поля направлена к средней плоскости $x = 0$ (рис. 3, *б*).

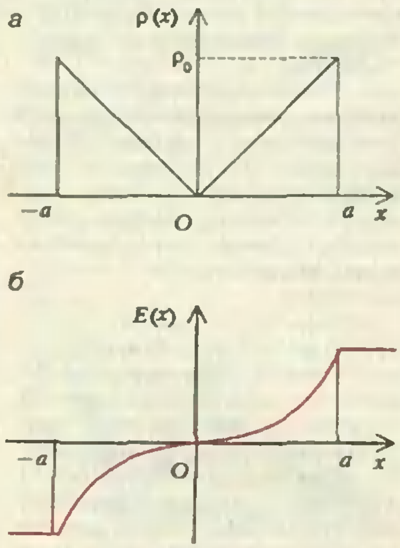


Рис. 3

Это тоже уравнение колебаний. Но уже ни один здравомыслящий человек не назовет их гармоническими, ибо возвращающая сила пропорциональна не смещению, а его квадрату. Интересно, что период таких *ангармонических колебаний* зависит от амплитуды колебаний (см., например, статью А.Черноуцана «Гармонические колебания — обычные и удивительные» в «Кванте» № 9 за 1991 год.).

Можно было бы порезвиться и дальше: если взять $\rho(x) \sim x^2$, то электрическое поле будет пропорционально x^3; если взять $\rho(x) \sim x^3$, то $E \sim x^4$; если $\rho(x) \sim x^4$, то ... Но давайте посмотрим, нельзя ли использовать уже полученное уравнение (*) для какой-нибудь надобности — смоделировать что-нибудь более сложное, чем шарик в трубочке.

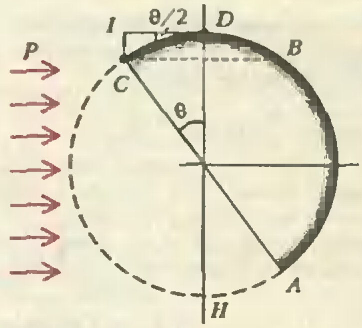


Рис. 4

Ну например, вообразим себе космическую оранжерею — цилиндр радиусом R, длиной L ($L \gg R$) и массой M, которая вся распределена по поверхности цилиндра (внутри он пустой). Половина поверхности этого цилиндра пусть абсолютно прозрачна для солнечного излучения, которое падает слева и интенсивность которого равна P (рис. 4). Другая же половина пусть полностью поглощает излучение. Если в данной момент цилиндр повернут на угол θ, то излучение, поглощаемое участком AB, не создает вращения вокруг оси цилиндра. А вот фотоны, поглощаемые участком CD, попытаются вращать оранжерею по часовой стрелке (так как участок AH прозрачен и не задерживает фотонов). Но по инерции положение равновесия $\theta = 0$ будет пройдено, навстречу солнечным лучам выдвинется нижний поглощающий участок, так что возникнут вращательные колебания. Итак, если отклонить оранжерею от положения равновесия $\theta = 0$ на какой-то начальный угол θ_0, она будет колебаться в солнечных лучах с угловой амплитудой θ_0 (если нет потерь энергии). И это покачивание вокруг оси для растений даже очень комфортно: центробежная сила инерции создает у них иллюзию поля тяготения (правда, переменного), и они в своем росте будут тянуться к оси вращения.

Составим уравнение колебательного движения оранжереи. Прежде всего найдем силу, действующую на поглощающий излучение участок CD перпендикулярно оси. Предполагая угол θ малым, получим, что длина отрезка CD приблизительно равна длине s дуги CD:

$$CD \approx \breve{CD} = s \approx R\theta .$$

Мощность, поглощаемая этим участком, равна мощности излучения, прошедшего через перпендикулярную площадку CI:

$$W = P \cdot CD \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot L = \frac{1}{2} PRL\theta^2 .$$

А поскольку импульс каждого фотона получается делением его энергии на скорость света c, то поток импульса всех фотонов, поглощенных участком CD, т.е. сила, равен W/c.[1] Тогда уравнение «движения массы M по окружности» примет вид

$$Ms'' = MR\theta'' = -\frac{PRL}{2c}\theta|\theta| .$$

Здесь учтено, что вследствие малости угла θ сила действует почти по касательной к дуге окружности CD, а знак минус отражает тот факт, что сила направлена в сторону уменьшения угла θ (положительное значение которого отсчитывается против часовой стрелки). Заметим, что то же самое уравнение получится и в случае цилиндра, одна половина которого зеркальная, а другая – черная.

Если теперь обе части равенства поделить на MR и обозначить

$$\beta_0^2 = \frac{PL}{2cM} ,$$

то получим уравнение, в точности совпадающее с (*). Хотя, казалось бы, что у них общего? Там — заряженный шарик в трубочке, а тут — оранжерея в солнечных лучах!

«...обогащение и рост интеллекта заключается в его способности находить подобия... все должно быть подобно друг другу, самая мельчайшая часть подобна целому, пылинка — вселенной, и все подобно Божеству. Что вверху, то и внизу» (П.Д.Успенский, Новая модель Вселенной).

[1] *Не огорчайтесь, если эта фраза сейчас вам не очень понятна.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА

Трапеция

1. Основание трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей этой трапеции.

2. Докажите, что если отрезок, соединяющий середины противоположных сторон четырехугольника равен полусумме двух других сторон, то этот четырехугольник — трапеция (или параллелограмм).

3. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что если стороны AD и BC параллельны, то треугольники AOB и COD равновелики. Докажите так же, что если AOB и COD равновелики, то AD и BC параллельны.

4. Основания трапеции равны a и b. Отрезок длиной c, параллельный основаниям, имеет концы на боковых сторонах этой трапеции. В каком отношении этот отрезок делит боковые стороны трапеции ($a<c<b$)?

5. Основания трапеции равны a и b, боковые стороны c и d. Построить эту трапецию. Найдите площадь трапеции.

6. Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны m и n, а средняя линия равна l.

7. Диагонали трапеции равны 6 и 8, а отрезок, соединяющий середины оснований равен 5. Найдите площадь трапеции.

8. Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника. Площади треугольников, прилежащих к основаниям, равны 4 и 9. Найдите площадь трапеции.

9. Построить трапецию по боковым сторонам, углу между ними, а также углу между ее диагоналями.

10. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC равны углы ABD и ACD. Докажите, что эта трапеция равнобокая.

11. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC описана около окружности радиуса R. M и N — точки касания, расположенные на AD и BC. Докажите, что $AM \cdot BN = DM \cdot CN = R^2$.

12. Основания трапеции равны 10 и 20, а боковые стороны 6 и 8. Найдите радиус окружности, проходящей через концы меньшей боковой стороны трапеции и касающейся противоположной боковой стороны.

13. Докажите, что прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей трапеции с точкой пересечения продолжений ее боковых сторон, делит пополам основания трапеции.

14. На плоскости даны две параллельные прямые и точка A. С помощью одной линейки провести через A прямую, параллельную данным.

15. На основании BC трапеции $ABCD$ взята точка K так, что $BK = \lambda BC$. Пусть P — точка пересечения прямых AB и CD, M — точка пересечения AK и BD. Прямая PM пересекает BC в точке N. Докажите, что $BN = \dfrac{\lambda}{\lambda+1} BC$.

Используя этот результат покажите как с помощью одной линейки разделить данный отрезок на n равных частей, если дана прямая, параллельная этому отрезку.

16. Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, делит ее на две подобные трапеции. Найдите длину отрезка этой прямой внутри трапеции.

17. Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, делит трапецию на две равновеликие части. Найдите длину отрезка этой прямой внутри трапеции.

18. Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, проходит через точку пересечения ее диагоналей. Найдите длину отрезка этой прямой внутри трапеции.

19. Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям трапеции, пересекает боковые стороны. Отрезок этой прямой внутри трапеции равен ($a<c<b$). В каком отношении эта прямая делит площадь трапеции?

20. Основания трапеции равны a и b, углы при основании a равны α и β. Докажите, что для того чтобы в эту трапецию можно было вписать окружность, необходимо и достаточно выполнения равенства $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{b}{a}$.

21. Прямые пересекают стороны AD и BC параллелограмма $ABCD$ и делят параллелограмм на несколько трапеций, в каждую из которых можно вписать окружность. Пусть сторона AD разделена на отрезки $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а сторона BC — на отрезки $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Докажите, что $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$.

22. Трапеция с основаниями AD и BC описана около окружности. K и M — точка касания на AD и BC. Найдите $\dfrac{BM}{MC}$, если $\dfrac{AK}{KD} = \alpha$.

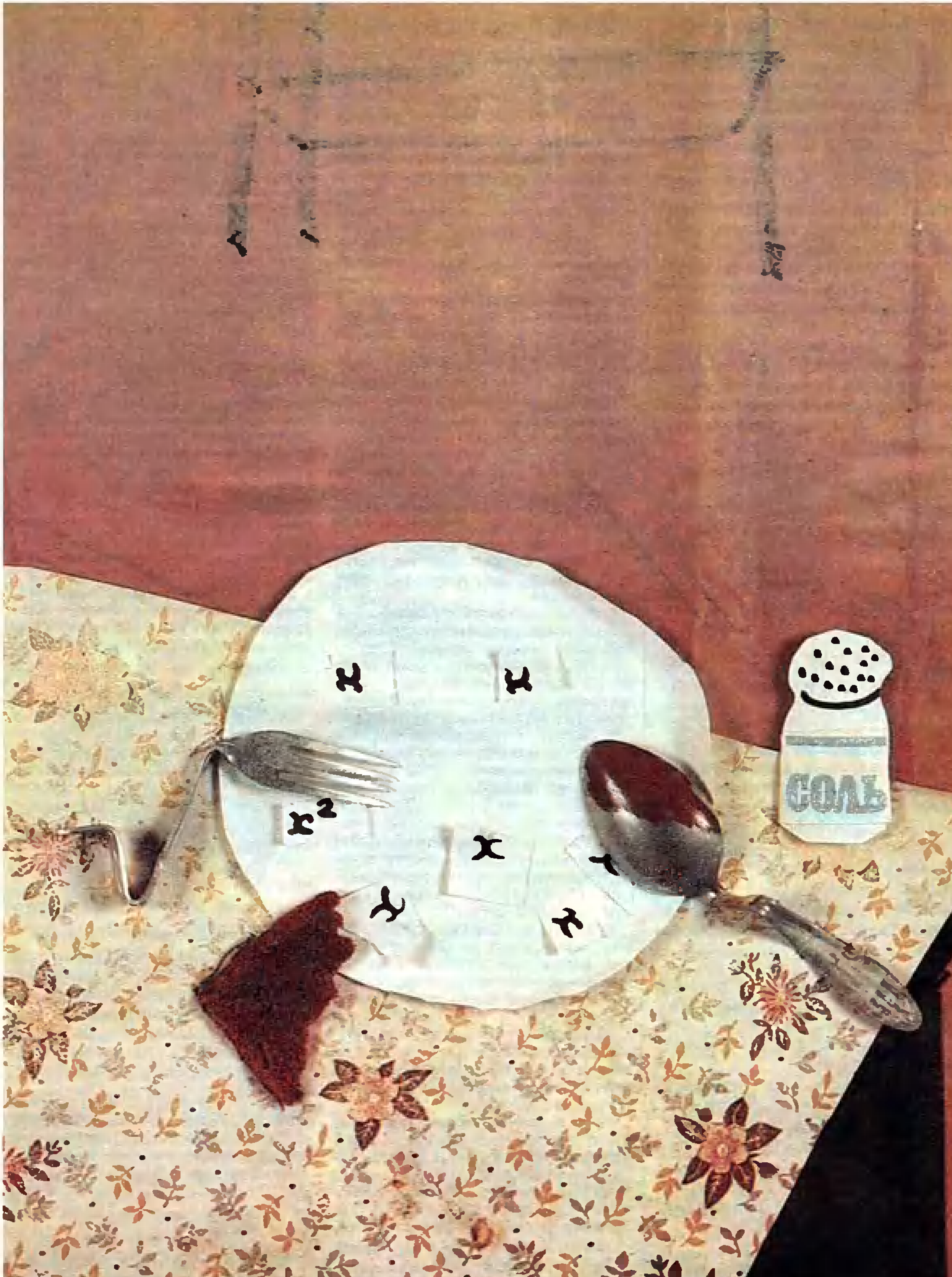
23. Основания трапеции равны a и b, угол между диагоналями α (угол, под которым видны основания из точки пересечения диагоналей). Боковые стороны при продолжении пересекаются под углом β. Найдите площадь трапеции.

24. Разрезать квадрат на непрямоугольные трапеции.

26. В равнобочной трапеции $ABCD$ основание AD равно диагонали AC. Известно, что $\angle CAD = \angle CDM$, где M — середина BC. Найдите углы трапеции.

27. В окружности вписана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Пусть M — произвольная точка дуги BC. Найдите $\dfrac{BM+MC}{AM+MD}$, если $AB=a$, $AC=b$, $BC=c$.

И.Шарыгин


x²
x
СОЛЬ

Если вы переходите к совокупности…

П.ГОРНШТЕЙН, В.ПОЛОНСКИЙ, М.ЯКИР

Решая уравнения $F(x)=0$ (или неравенства $F(x)\geq 0$), приятно бывает обнаружить, что левую часть можно представить в виде произведения нескольких выражений. Появляется возможность разобраться с совокупностью более простых уравнений (неравенств), вместо зачастую громоздкого исходного.

Однако именно на этом этапе решения абитуриенты допускают немало ошибок. О трех наиболее распространенных мы и собираемся рассказать в этой статье.

Подвох первый

То, что высказывание $ab=0$ равносильно совокупности

$$\left[\begin{aligned}&a=0,\\&b=0,\end{aligned}\right.$$

наверное, знает каждый. Многие считают, что так же обстоит дело и с уравнением

$$f_1(x)f_2(x)=0, \qquad (1)$$

т.е. последнее равносильно совокупности

$$\left[\begin{aligned}&f_1(x)=0,\\&f_2(x)=0.\end{aligned}\right. \qquad (2)$$

Однако это верно далеко не всегда. Так например, решая уравнение $(x-2)\sqrt{x-3}=0$ переходом к совокупности

$$\left[\begin{aligned}&x-2=0,\\&\sqrt{x-3}=0,\end{aligned}\right.$$

мы приобретаем посторонний корень $x=2$. В чем же дело?

Следует ясно представлять себе, что при переходе к совокупности (2) может произойти расширение области определения исходного уравнения – причина появления посторонних корней. Впрочем, этой неприятности можно избежать, заметив, что уравнение (1) на самом деле равносильно вовсе не системе (2), а системе

$$\left\{\begin{aligned}&\left[\begin{aligned}&f_1(x)=0,\\&f_2(x)=0,\end{aligned}\right.\\&x\in D(f_1)\cap D(f_2).\end{aligned}\right.[1]$$

[1] $D(f_1)\cap D(f_2)$ – *область определения уравнения (1).*

Рассмотрим несколько характерных примеров.

Задача 1 (МГУ, факультет почвоведения). *Решите уравнение*

$$\sqrt{x}\left(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}\right)=3^{2\sqrt{x^2-3}+1}-3^{\sqrt{x^2-3}+1}+6\sqrt{x}-18.$$

Решение. Выполним очевидные преобразования:

$$\sqrt{x}\left(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}\right)=3\left(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}\right)+6\left(\sqrt{x}-3\right),$$

$$\left(\sqrt{x}-3\right)\left(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}-6\right)=0.$$

Легко установить, что область определения рассматриваемого уравнения – промежуток $\left[\sqrt{3};\infty\right[$. Следовательно, исходное уравнение равносильно системе

$$\left\{\begin{aligned}&\left[\begin{aligned}&\sqrt{x}-3=0,\\&9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}-6=0,\end{aligned}\right.\\&x\geq\sqrt{3}.\end{aligned}\right.$$

Ясно, что $x=9$ – корень первого уравнения совокупности. Рассмотрев второе как квадратное относительно $3^{\sqrt{x^2-3}}$, определяем, что $x=\pm 2$ – его корни. Учитывая, что $x\geq\sqrt{3}$, получаем

Ответ: $x=9$ или $x=2$.

Задача 2 (МГУ, механико-математический факультет). *Решите уравнение*

$$\left(3^{8x\,\mathrm{ctg}\,\pi x}\right)^x\cdot 27^{5x\,\mathrm{ctg}\,\pi x}=9^{\mathrm{ctg}\,\pi x}.$$

Решение. Имеем

$$3^{8x^2\mathrm{ctg}\,\pi x+15x\,\mathrm{ctg}\,\pi x}=3^{2\,\mathrm{ctg}\,\pi x},$$

$$\mathrm{ctg}\,\pi x\left(8x^2+15x-2\right)=0.$$

Последнее уравнение, а значит и исходное, равносильно системе

$$\left\{\begin{aligned}&\left[\begin{aligned}&\mathrm{ctg}\,\pi x=0,\\&8x^2+15x-2=0,\end{aligned}\right.\\&\pi x\neq\pi n,\ \text{где } n \text{ – целое.}\end{aligned}\right.$$

Отсюда

$$\left\{\begin{aligned}&\left[\begin{aligned}&x=\frac{1}{2}+k,\\&x=\frac{1}{8},\\&x=-2,\end{aligned}\right.\\&x\neq n,\ k\text{ – целое.}\end{aligned}\right.$$

Ответ: $x=\frac{1}{2}+k$, k – целое, или $x=\frac{1}{8}$.

Задача 3 (МИФИ). *Решите уравнение*

$$\sqrt{\sin x-\frac{1}{2}}\cdot\log_3(x-2)=0.$$

Решение. Следующая система равносильна данному уравнению:

$$\left\{\begin{aligned}&\left[\begin{aligned}&\log_3(x-2)=0,\\&\sin x=\frac{1}{2},\end{aligned}\right.\\&x>2,\\&\sin x\geq\frac{1}{2}.\end{aligned}\right.$$

Корнем первого уравнения совокупности будет $x=3$. Поскольку $\sin 3<\frac{1}{2}$ (докажите!), то $x=3$ не является корнем исходного уравнения. Теперь осталось среди множества $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, n – целое, – корней второго уравнения совокупности – выбрать лишь те, которые удовлетворяют условию $x>2$. Ясно, что для этого достаточно потребовать, чтобы n был натуральным.

Ответ: $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, n – натуральное.

Подвох второй

Одним из способов решения неравенства $f_1(x)f_2(x)>0$ служит переход к совокупности

$$\left[\begin{aligned}&\left\{\begin{aligned}&f_1(x)>0,\\&f_2(x)>0,\end{aligned}\right.\\&\left\{\begin{aligned}&f_1(x)<0,\\&f_2(x)<0.\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.$$

В тех случаях, когда знак какого-либо множителя f_1 или f_2 известен, можно сократить работу, ограничившись рассмотрением лишь одной из систем совокупности. Так например, для неравенства $(x-4)\sqrt{x^2-4x+3}>0$ достаточно решить систему

$$\begin{cases} x-4>0, \\ \sqrt{x^2-4x+3}>0. \end{cases}$$

А уместна ли подобная «рационализация» при решении нестрогих неравенств $f_1(x)f_2(x)\ge 0$? Испытаем это на только что разобранном примере, заменив знак > на ≥. Итак, при каких x верно $(x-4)\sqrt{x^2-4x+3}\ge 0$ (КГУ, химический факультет)? Если решение этого неравенства свести к системе

$$\begin{cases} x-4\ge 0, \\ \sqrt{x^2-4x+3}\ge 0, \end{cases}$$

то произойдет потеря решений $x = 1$ и $x = 3$. И это понятно. Ведь при $x = 1$ или $x = 3$ второй множитель равен нулю. В таком случае знак первого множителя не играет роли, а система требует, чтобы он был неотрицательным.

Как же избежать подобных осложнений? Наиболее распространенный прием — это переход к совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_1(x)\ge 0, \\ f_2(x)\ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f_1(x)\le 0, \\ f_2(x)\le 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Впрочем, часто бывает удобно обратиться и к такой совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x)f_2(x)=0, \\ f_1(x)f_2(x)>0. \end{array}\right.$$

Перейдем к примерам.

Задача 4 (КГУ). *Решите неравенство*

$$(1+\sin x)\left(-x^2+x+6\right)\ge 0.$$

Решение. Имеем

$$\left[\begin{array}{l} (1+\sin x)\left(-x^2+x+6\right)=0, \\ (1+\sin x)\left(-x^2+x+6\right)>0. \end{array}\right.$$

Решив уравнение, получим $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, n — целое, $x=-2$, $x=3$. Неравенство совокупности равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x\ne -1, \\ x^2-x-6<0, \end{cases}$$

решением которой будет объединение промежутков $\left(-2;-\frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(-\frac{\pi}{2};3\right)$.

Ответ: $\left[-2;-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2};3\right]\cup\left\{-\frac{\pi}{2}+\pi n\right\}$.

Задача 5 (МИФИ). *Решите неравенство*

$$\sqrt{-x^2+7x-10}\,\log_2(x-3)\le 0.$$

Решение. Запишем

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{-x^2+7x-10}\,\log_2(x-3)=0, \\ \sqrt{-x^2+7x-10}\,\log_2(x-3)<0. \end{array}\right.$$

Здесь мы ограничимся только ответом, предложив читателю провести дальнейшее решение самостоятельно. Отметим лишь, что уравнение совокупности можно рассматривать как одно из упражнений к предыдущему разделу.

Ответ: $(3;4]\cup\{5\}$.

Подвох третий

Выделим еще один тип задач, в которых требуется определить число корней уравнения вида $f_1(x)f_2(x)=0$. Нередко при решении подобных примеров абитуриенты поступают следующим образом: переходя к совокупности, определяют отдельно число корней каждого из уравнений $f_1(x)=0$ и $f_2(x)=0$, затем складывают полученные результаты. Но ведь нет никаких гарантий, что некоторые корни уравнений совокупности не совпадут. Поэтому решающему не следует исключать такую возможность, а надо стараться держать ее в поле зрения.

Проиллюстрируем сказанное на примерах.

Задача 6 (МИСиС). *Определите число корней уравнения*

$$5\sin 2x-8\operatorname{tg}x-5\cos^2 x+4=0$$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Легко получить из данного уравнения следующее:

$$5\cos^2 x(2\operatorname{tg}x-1)-4(2\operatorname{tg}x-1)=0.$$

Отсюда

$$(2\operatorname{tg}x-1)(5\cos 2x-3)=0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}x=\frac{1}{2}, \\ \cos 2x=\frac{3}{5}. \end{array}\right.$$

Заданному промежутку принадлежит лишь один корень первого уравнения: $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ и два корня второго уравнения: $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}$. На первый взгляд естественно считать ответом число 3. Однако более внимательный анализ показывает, что $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}$ (проверьте!). Тогда мы получим такой

Ответ: 2.

Справедливости ради заметим, что, выразив в исходном уравнении $\sin 2x$ и $\cos^2 x$ через $\operatorname{tg}x$, мы практически исключим возможность попадания в ловушку. Однако «внешность» данного уравнения не указывает на то, что второй способ предпочтительней первого. Это выясняется лишь на завершающей стадии. Поэтому выбор пути решения скорее связан с везением, чем с заранее продуманной стратегией.

Задача 7 (КГУ). *Сколько различных решений имеет система уравнений*

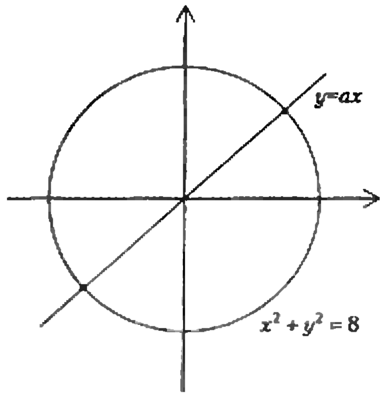
$$\begin{cases} x^2+y^2=8, \\ (y-ax)\left(y-a\sqrt{2}\right)=0 \end{cases}$$

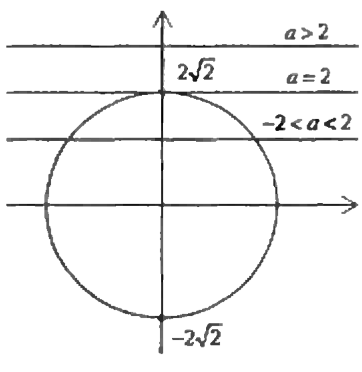
в зависимости от значений параметра a?

Решение. Запишем совокупность систем, равносильную данной. Имеем

$$\begin{cases} x^2+y^2=8, \\ y=ax \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2+y^2=8, \\ y=a\sqrt{2}. \end{cases}$$

Обратившись к графической интерпретации (см. рисунок), увидим, что первая система совокупности имеет два решения при любом a. Тот же рисунок поможет определить число решений второй системы. Имеем: при $|a|>2$ — нет решений, при $|a|=2$ — одно решение, при $|a|<2$ — два решения.





Здесь снова надо быть внимательным и заметить (опять-таки благодаря рисунку), что при $a=\sqrt{3}$, или $a=-\sqrt{3}$, или $a=0$ прямые $y=ax$ и $y=a\sqrt{2}$ пересекаются в точках, лежащих на окружности $x^2+y^2=8$. Понятно, что этот факт внесет корректировку в ответ.

Ответ: если $|a|>2$ или $a=0$, то решений два; если $|a|=2$ или $|a|=\sqrt{3}$, то решений три; если $-2<a<-\sqrt{3}$, или $-\sqrt{3}<a<0$, или $0<a<\sqrt{3}$, или $\sqrt{3}<a<2$, то решений четыре.

Задача 8 (КГУ). *Сколько различных корней имеет уравнение*

$$\cos x\operatorname{ctg}x-\sin x=a\cos 2x$$

на отрезке $[0;2\pi]$?

Решение. После преобразований левой части получим

$$\frac{\cos 2x}{\sin x}=a\cos 2x.$$

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0,\\ \dfrac{1}{\sin x}=a,\end{array}\right.\\ \sin x\neq 0.\end{cases}$$

Первое уравнение на отрезке $[0;2\pi]$ имеет четыре корня: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$. Второе при $|a|<1$ вообще корней не имеет. Если $|a|=1$, то, очевидно, на рассматриваемом промежутке уравнение $\frac{1}{\sin x}=a$ имеет только один корень. Если $|a|>1$, то, переходя к уравнению $\sin x=\frac{1}{a}$, получим, что на $[0;2\pi]$ оно имеет два корня. Но при этом следует подметить, что при $a=\pm\sqrt{2}$ корни второго уравнения совокупности содержатся среди корней первого. Итак,

Ответ: если $|a|<1$ или $a=\pm\sqrt{2}$, то уравнение имеет четыре корня; если $|a|=1$, то корней пять; если $|a|>1$ и $a\neq\pm\sqrt{2}$, то корней шесть.

Упражнения

1 (МГУ, мехмат). Решите уравнение

$$x^2\cdot 3^{x-2}+3^{\sqrt{x}+2}=3^x+x^2\cdot 3^{\sqrt{x}}.$$

2 (ЛПИ). Решите уравнение

$$\log_3(4-x)\log_{4-3x}(1-x)(2-x)=9^{\log_3\sqrt{\log_3(4-x)}}.$$

3 (МИФИ). Решите уравнение

$$\left(\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\right)\sqrt{\operatorname{tg}x+1}=0.$$

4 (МГУ, ВМК). Решите уравнение

$$(3+5\cos 2x)\left(2-4\sin x+\sqrt{3-2\cos 2x+5\sin x}\right)=0.$$

5 (МГУ, мехмат). Решите систему

$$\begin{cases}\sqrt{\sin x}\cdot\cos y=0,\\ 2\sin^2 x-\cos 2y-2=0.\end{cases}$$

6 (КГУ). Решите неравенство

$$\left(2^x-2\right)\sqrt{-x^2+x+6}\geq 0.$$

7 (МИФИ). Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-7{,}5x+14}\,\log_2|x-3|\leq 0.$$

8 (МИФИ). Решите неравенство

$$\left(x^2-2{,}8x+1{,}8\right)\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}|x-2|}\geq 0.$$

9 (МГУ, мехмат). Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1}\geq 0.$$

10 (КПИ). Решите неравенство

$$\sqrt{5+9x-2x^2}\left(\operatorname{ctg}^2x+\operatorname{ctg}x\right)\leq 0.$$

11 (МГУ, ВМК). Решите неравенство

$$1\leq|\cos x|^{\sqrt{2x+3}\log_{\cos x}\frac{1+2|\cos x|}{8\sin^2 x-4}}.$$

12 (МИСиС). Определите число корней уравнения

$$10\sin^2 x-3\operatorname{tg}x-15\sin 2x+9=0$$

на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

13 (МАИ). При каких значениях параметра a уравнение $4^x-(a+3)2^x+4a-4=0$ имеет один корень?

14 (МАИ). На координатной плоскости изобразите множество пар $(a;b)$, для каждой из которых уравнение

$$\left(x^2-(a+b)x+1\right)\left(x^2-(a-b)x+1\right)=0$$

имеет четыре различных действительных корня.

ИНФОРМАЦИЯ

ЧЕТВЕРТЫЕ САХАРОВСКИЕ ЧТЕНИЯ В САНКТ-ПЕТЕРБУРГЕ

Начиная с 1991 года в день рождения А.Д.Сахарова — 21 мая — санкт-петербургский лицей «Физико-техническая школа» проводит Сахаровские чтения — научную конференцию школьников.

По традиции четвертая конференция открылась 20 мая 1994 года в актовом зале «Туман» знаменитого Физико-технического института им.А.Ф.Иоффе.

В зале присутствовали не только школьники из Санкт-Петербурга, Москвы, Калининграда и Челябинска, но и ученые из санкт-петербургских институтов, преподаватели школ и вузов. Выступавшие говорили о нравственных аспектах профессии исследователя, о великих традициях Российских научных школ, об умении радоваться чужому научному результату, о честности в науке, об уважении к личности независимо от возраста и положения. Словом, о качествах, олицетворением которых был Андрей Дмитриевич Сахаров.

В этом году пришлось отступить от традиции — конференция прошла 20 мая из-за того, что в воскресенье 21 мая выпускники лицеев и гимназий Санкт-Петербурга сдавали письменный экзамен по математике.

После открытия началась работа пяти секций — математики, физики, химико-биологической, системного программирования, проблемного программирования и историко-филологической.

Лучшие доклады были отмечены призами и почетными дипломами. На заключительном заседании жюри и оргкомитета Сахаровских чтений председатели предметных жюри отметили очень высокий уровень некоторых докладов. Особенно отличились математики, программисты и филологи.

В культурную программу конференции входили экскурсии по городу, посещение Эрмитажа и театров Санкт-Петербурга.

Мы надеемся провести 21 мая будущего года пятые Сахаровские чтения.

Заявки об участии просим присылать по адресу 194021 С.-Петербург, ул.Хлопина 5, «Физико-техническая школа».

Телефон для справок:
(812) 247-15-15.

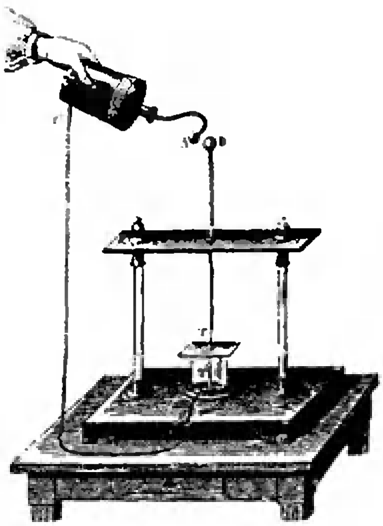
Я.Бирман

125 пФ = 25 мл?

В.ГРАЧЕВ

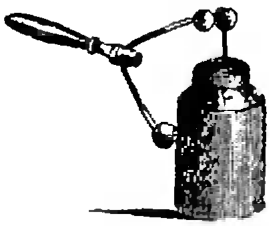
Без сомнения, о лейденской банке знает каждый, кто открывал учебник физики. Но многие ли читатели «Кванта» держали ее в руках? Давайте изготовим эту «прабабушку» и поэкспериментируем с ней в домашней (полезно и в школьной) лаборатории.

Классическая модель лейденской банки: стеклянный сосуд с двумя обкладками из фольги по внешней и внутренней поверхностям и металлический стержень с шариком на одном конце, а другим концом соединенный с внутренней обкладкой. Вариант для нас не самый лучший — можно сказать, по техническим причинам. Дело в том,



что если горлышко склянки достаточно узкое, то не так-то просто наклеить фольгу на ее внутреннюю поверхность (если пробовали — знаете). Мы сделаем конденсатор, похожий на тот, с которого и начали исследователи восемнадцатого века. Наша лейденская банка проста до смешного, а экспериментировать с ней ничуть не хуже. Итак, за дело.

Начнем с банки в прямом смысле. Подойдет стеклянный аптечный флакон объемом примерно 25 мл. Теперь подумаем, где взять стержень с шариком — шарик очень важен, чтобы максимально уменьшить стекание заряда в воздух. Найдите старую телескопическую комнатную антенну для телевизора (только не оставляйте телевизор без антенны). Последнее «колено» антенны — это обычно латунный (никелированный или хромированный) стержень с небольшим шариком на конце. Вот — то, что надо.

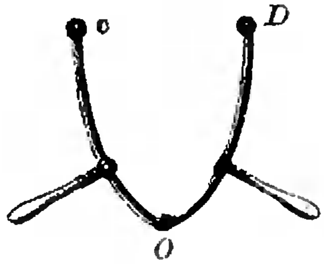


Залейте во флакон обычную водопроводную воду и опустите туда стержень (если хотите, чтобы все было проще простого, пробка не нужна), держа его рукой, — все! Одна обкладка — ваша ладонь («земля»), другая — вода, диэлектрик — стекло.

Несколько раз коснитесь шарика каким-нибудь заряженным предметом (можно использовать, например, бутылки из-под шампуня — обычно они всегда обладают электрическим заря-

дом) — наша лейденская банка заряжена. Свободной рукой возьмите заостренный проводящий предмет — хотя бы кусок проволоки — и медленно подносите к шарику. В некоторый момент вы услышите характерный треск — яркая нить искрового разряда на мгновение замкнет цепь (это очень впечатляющее зрелище). И ваша ладонь — элемент этой цепи.

Заметим, что в этом нет ничего странного — известно немало электронных устройств, органично «вплетающих» в себя человека. Это разнообразные сенсорные автоматы, радиоприемники, антенной которым служит их владелец, и конечно, хорошо известный в двадцатые годы *терменвокс* — электромузыкальный инструмент (изобретение нашего соотечественника Л.С.Термена). Ладонь играющего на этом инструменте — это обкладка конденсатора переменной емкости, изменяющая своими пассами параметры высокочастотного генератора. Так что наша электрическая банка не так уж одинока.



Но мы пока ничего не знаем о ней. Самое время сделать расчеты. Например, посчитать емкость нашего конденсатора.

Вместо известной формулы

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$$

для расчетов удобно пользоваться упрощенной формулой

$$C = \frac{0{,}9\varepsilon S}{d}$$

и измерять площадь окладок S в квадратных сантиметрах, а расстояние между обкладками d — в миллиметрах (постоянная ε — безразмерная). Тогда емкость конденсатора получим в пикофарадах.

Расчеты будут носить характер оценки — большего нам не нужно, значит, исходные данные могут быть до известной степени «средними». За S примем площадь внешней цилиндричес-

Когда Вячеслав Грачев прислал эту статью в редакцию, он учился в одиннадцатом классе с.ш. 31 г. Новокузнецка Кемеровской области.

кой поверхности флакона в сумме с площадью дна. Для склянки объемом 25 мл $S \approx 60$ см^2. Толщину стекла будем считать равной $d = 3$ мм. Для ε стекла в справочниках почти всегда дается интервал 4 — 10, выберем среднее значение $\varepsilon = 7$. Произведя несложные вычисления, получаем $C = 125$ пФ.

Емкость, как видите, весьма небольшая. Хотя размеры... Современный промышленный конденсатор такой емкости (радиолюбитель может найти ему место, скажем, в колебательном контуре), мягко говоря, меньших размеров.

Любопытно, а какая разность потенциалов устанавливается между обкладками самодельной лейденской банки? Можно ли ее измерить?

Есть такой вольтметр — искровой. Напряжения, которые им можно измерять, — киловольты. Вольтметра проще скорее всего не придумаешь.

Действие его основано на том, что напряжение U между одинаковыми электродами — допустим, шарами — и длина l_{max} максимального искрового промежутка между ними связаны практически линейной зависимостью

$$U = E_{пр}\, l_{max},$$

где $E_{пр}$ — пробивное значение напряженности электрического поля. Для воздуха при атмосферном давлении $E_{пр} = 3$ МВ/м. Создав между шарами разность потенциалов, которую необходимо измерить, шары медленно сдвигают. Как только промежуток будет пробит, отмечают его величину. Полученный результат остается умножить на пробивное значение напряженности электрического поля.

Теперь, очевидно, вам не составит труда соорудить что-то вроде искрового вольтметра с помощью нашей лейденской банки.

На этом можно и закончить. Описать все эксперименты с лейденской банкой вряд ли возможно. Так что размышляйте и экспериментируйте.

ИНФОРМАЦИЯ

III МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ЮНЫХ УЧЕНЫХ

VISEGRÁD' 94

HUNGARY

UNIV. BUDAPESTINENSIS DE EÖTVÖS NOM. FACULTAS SCI. NAT. 1635

Eötvös Loránd University
BUDAPEST

С 24 по 30 апреля 1994 года в маленьком живописном венгерском городке Вышеграде, расположенном на берегу Дуная, проходила традиционная Международная научная конференция школьников, организованная Московским интеллект-клубом «Глюон», Будапештским университетом имени Роланда Этвоша и Белорусским государственным Университетом (Минск).

На заседании трех секций — математики, информатики и физики — 112 школьников из Белоруссии, Венгрии, России, Румынии и Украины рассказали о своих первых шагах в науку.

Рабочим языком конференции был английский — это, разумеется, создавало дополнительные трудности для докладчиков. Впрочем, большинство из них с успехом их одолело — в целом, английский язык докладчиков был вполне добротным.

Весьма строгие жюри секций, возглавляемые крупными учеными из России и Венгрии, назвали лауреатов конференции. Ими стали по секции математики — ученик 11 класса Аничкова Лицея из Санкт-Петербурга Владимир Камоцкий, по секции физики — ученица 10-го класса ФМШ-интерната при МГУ Евгения Вишневская, по секции информатики Роман Шапоткин из Аничкова лицея.

Во всех секциях были также присуждены дипломы 1-й, 2-й и 3-й степени, дипломы участника получили все остальные докладчики.

Особенно высоким оказался уровень докладов, представленных учащимися Санкт-Петербургского Аничкова лицея, Академической гимназии, Физико-технической школы-лицея, а также Московской школы-интерната при МГУ.

Богатая и разнообразная культурная программа надолго запомнится участникам конференции, посетившим старинный город Сентендре, совершившим продолжительную экскурсию по Будапешту и очень интересные прогулки по окрестностям Вышеграда, включая восхождение на гору со старинной крепостью наверху, господствующую над городом.

Следующая конференция юных ученых состоится в апреле-мае 1995 года. Место ее проведения будет определено позже. Участвовать в ней приглашаются школы, лицеи, гимназии, а также организации, работающие со школьниками, увлекающимися физико-математическими науками.

Заявки на участие в конференции просим присылать по адресу: Россия, 115570 Москва, Московский интеллект-клуб «Глюон».

В.Альшидеров, А.Егоров

Roland Eötvös Physical Society
BUDAPEST

Intellectual Club "GLUON"
MOSCOW

Belarus State University
MINSK

XX Российская олимпиада школьников по математике

Как всегда, в дни весенних школьных каникул состоялся зональный, а с 19 по 25 апреля (в Твери) — заключительный этап Российской олимпиады школьников по математике. Мы приводим здесь задачи этих этапов олимпиады.

Зональный этап

9 класс

Первый день

1. Как-то раз Кролик торопился на встречу с осликом Иа-Иа, но к нему неожиданно пришли Винни-Пух и Пятачок. Будучи хорошо воспитанным, Кролик предложил гостям подкрепиться. Пух завязал салфеткой рот Пятачку и в одиночку съел 10 горшков меда и 22 банки сгущеного молока, причем горшок меда он съедал за 2 минуты, а банку молока — за минуту. Узнав, что больше ничего сладкого в доме нет, Пух попрощался и увел Пятачка. Кролик с огорчением подумал, что он бы не опоздал на встречу с осликом, если бы Пух поделился с Пятачком. Зная, что Пятачок съедает горшок меда за 5 минут, а банку молока — за 3 минуты, Кролик вычислил наименьшее время, за которое гости смогли бы уничтожить его запасы. Чему равно это время? (Банку молока и горшок меда можно делить на любые части.)

Д.Терешин

2. Города A, B, C и D расположены так, что расстояние от C до A меньше, чем расстояние от D до A, а расстояние от C до B меньше, чем расстояние от D до B. Докажите, что расстояние от города C до любой точки прямолинейной дороги, соединяющей города A и B, меньше, чем расстояние от города D до этой точки.

А.Левин

3. См. задачу М1453.

4. На совместной конференции партий лжецов и правдолюбов в президиум было избрано 32 человека, которых рассадили в четыре ряда по 8 человек. В перерыве каждый член президиума заявил, что среди его соседей есть представители обеих партий. Известно, что лжецы всегда лгут, а правдолюбы всегда говорят правду. При каком наименьшем числе лжецов в президиуме возможна описанная ситуация? (Два члена президиума считаются соседями, если один из них сидит слева, справа, спереди или сзади от другого.)

Р.Женодаров

Второй день

5. Известно, что уравнение $ax^5+bx^4+c=0$ имеет три различных корня. Докажите, что уравнение $cx^5+bx+a=0$ также имеет три различных корня.

Н.Агаханов

6. Внутри прямого угла KLM взята точка P. Окружность S_1 с центром O_1 касается сторон LK и LP угла KLP в точках A и D соответственно, а окружность S_2 с центром O_2 такого же радиуса касается сторон угла MLP, причем стороны LP — в точке B. Оказалось, что точка O_1 лежит на отрезке AB. Пусть C — точка пересечения прямых O_2D и KL. Докажите, что BC — биссектриса угла ABD.

А.Кочерова

7. Найдите все простые числа p, q, r и s такие, что их сумма — простое число, а числа p^2+qs и p^2+qr — квадраты натуральных чисел.

Р.Женодаров

8. В классе 16 учеников. Каждый месяц учитель делит класс на две группы. Какое наименьшее количество месяцев должно пройти, чтобы любые два ученика в какой-то из месяцев оказались в разных группах?

Д.Тамаркин

10 класс

Первый день

1. Имеется семь стаканов с водой: первый стакан заполнен водой наполовину, второй — на треть, третий — на четверть, четвертый — на одну пятую, пятый — на одну восьмую, шестой — на одну девятую и седьмой — на одну десятую. Разрешается переливать всю воду из одного стакана в другой или переливать воду из одного стакана в другой до тех пор, пока он не заполнится доверху. Может ли после нескольких переливаний какой-нибудь стакан оказаться заполненным а) на одну двенадцатую; б) на одну шестую?

Н.Агаханов

2. Уравнение $x^2+ax+b=0$ имеет два различных вещественных корня. Докажите, что уравнение

$$x^4+ax^3+(b-2)x^2-ax+1=0$$

имеет четыре различных вещественных корня.

С.Берлов

3. Окружность с центром O вписана в четырехугольник $ABCD$ и касается его непараллельных сторон BC и AD в точках E и F соответственно. Пусть прямая AO и отрезок EF пересекаются в точке K, прямая DO и отрезок EF — в точке N, а прямые BK и CN — в точке M. Докажите, что точки O, K, M и N лежат на одной окружности.

М.Сонкин

4. См. задачу М1454.

Второй день

5. Найдите все простые числа, которые являются одновременно суммой двух простых чисел и разностью двух простых чисел.

С.Кожухов

6. Найдите свободный член многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, если известно, что он по модулю меньше тысячи и $P(19)=P(94)=1994$.

Н.Агаханов

7. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ сторона AB перпендикулярна стороне CD, а сторона BC — стороне DE. Докажите, что если $AB=AE=ED=1$, то $BC+CD<1$.

С.Берлов

8. В Цветочном городе n площадей и m улиц ($m \geq n+1$). Каждая улица соединяет две площади и не проходит через другие площади. По существующей в городе традиции улица может называться либо синей, либо красной. Ежегодно в городе происходит переименование: выбирается площадь и переименовываются все выходящие из нее улицы. Докажите, что вначале можно назвать улицы так, что переименованиями нельзя добиться одинаковых названий у всех улиц города.

С.Берлов, С.Рукшин

11 класс

Первый день

1. Докажите, что при всех x, $0<x<\pi/3$, справедливо неравенство

$$\sin 2x+\cos x>1.$$

Н.Агаханов

2. В один из дней года оказалось, что каждый житель города не более одного раза позвонил по телефону. Докажите, что население города можно разбить не более чем на три группы так, чтобы жители, входящие в одну группу, не разговаривали в этот день между собой по телефону.

С.Гулько

3. Окружность с центром O вписана в треугольник ABC и касается его сторон AB, BC и AC в точках E, F и D соответственно. Прямые AO и CO пересекают прямую EF в точках N и M. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника OMN, точка O и точка D лежат на одной прямой.

М.Сонкин

4. См. задачу М1455.

Второй день

5. См. задачу 5 для 10 класса.

6. Найдите все функции, удовлетворяющие уравнению

$$(x-1)f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-f(x)=x$$

при всех $x \neq 1$.

А.Калинин

7. На боковых ребрах SA, SB, SC правильной треугольной пирамиды $SABC$ взяты точки A_1, B_1, и C_1 соответственно так, что плоскости $A_1B_1C_1$ и ABC параллельны. Пусть O — центр сферы, проходящей через точки A, B, C_1 и S. Докажите, что прямая SO перпендикулярна плоскости A_1B_1C.

Д.Терешин

8. Внутри круга расположены точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$, а на его границе — точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$ так, что отрезки A_1B_1, $A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ не пересекаются. Кузнечик может перепрыгнуть из точки A_i в точку A_j, если отрезок A_iA_j не пересекается ни с одним отрезком A_kB_k, $k \neq i, j$. Докажите, что за несколько прыжков кузнечик может попасть из любой точки A_p в любую точку A_q.

С.Мисник, Д.Ван-дер-Флаас

Заключительный этап

9 класс

Первый день

1. Докажите, что если

$$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1,$$

то $x+y=0$.

А.Галочкин

2. См. задачу М1452 а).

3. На столе лежат три кучки спичек. В первой кучке находится 100 спичек, во второй — 200, а в третьей — 300. Двое играют в такую игру. Ходят по очереди, за один ход игрок должен убрать одну из кучек, а любую из оставшихся разделить на две непустые части. Проигравшим считается тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

К.Кохась

4. На прямой отмечены n различных синих точек и n различных красных точек. Докажите, что сумма попарных расстояний между точками одного цвета не превосходит суммы попарных расстояний между точками разного цвета.

О.Мусин

Второй день

5. Докажите тождество

$$\frac{a_1}{a_2(a_1+a_2)}+\frac{a_2}{a_3(a_2+a_3)}+\ldots+\frac{a_n}{a_1(a_n+a_1)}=$$
$$=\frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)}+\frac{a_3}{a_2(a_2+a_3)}+\ldots+\frac{a_1}{a_n(a_n+a_1)}$$

Р.Женодаров

6. Натуральные числа от 1 до 1000 по одному выписали на карточки, а затем накрыли этими карточками какие-то 1000 клеток прямоугольника 1×1994. Если соседняя справа от карточки с числом n клетка свободна, то за один ход ее разрешается накрыть карточкой с числом $n+1$. Докажите, что нельзя сделать более полумиллиона таких ходов.

Д.Карпов

7. Трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$) такова, что на ее сторонах AD и BC существуют точки P и Q соответственно, такие что $\angle APB = \angle CPD$, $\angle AQB = \angle CQD$. Докажите, что точки P и Q равноудалены от точки пересечения диагоналей трапеции.

М.Смуров

8. Плоскость разбита двумя семействами параллельных прямых на единичные квадратики. Назовем каемкой квадрата $n\times n$, состоящего из квадратиков разбиения, объединение тех квадратиков, которые хотя бы одной из своих сторон примыкают изнутри к его границе. Докажите, что существует ровно один способ покрытия квадрата 100×100, состоящего из квадратиков разбиения, неперекрывающимися каемками пятидесяти квадратов. (Каемки могут и не содержаться в квадрате 100×100).

А.Перлин

10 класс

Первый день

1. Даны три квадратных трехчлена: $P_1(x)=x^2+p_1x+q_1$, $P_2(x)=x^2+p_2x+q_2$ и $P_3(x)=x^2+p_3x+q_3$. Докажите, что уравнение $|P_1(x)|+|P_2(x)|=|P_3(x)|$ имеет не более восьми корней.

А.Голованов

2. См. задачу 3 для 9 класса.

3. Пусть a, b и c — длины сторон треугольника, m_a, m_b и m_c — длины медиан, проведенных к этим сторонам, D — диаметр окружности, описанной около треугольника. Докажите, что

$$\frac{a^2+b^2}{m_c}+\frac{b^2+c^2}{m_a}+\frac{c^2+a^2}{m_b}\le 6D.$$

Д.Терешин

4. См. задачу М1458.

Второй день

5. Докажите, что для натуральных чисел k, m, и n справедливо неравенство

$$[k,m]\cdot[m,n]\cdot[n,k]\ge[k,m,n]^2$$

($[a, b, c, \ldots, z]$ — наименьшее общее кратное чисел $a, b, c, \ldots, z$).

6. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве целых чисел, не превосходящих по модулю 1000. Обозначим через m число пар (x,y), для которых $f(x)=g(y)$, через n — число пар, для которых $f(x)=f(y)$, а через k — число пар, для которых $g(x)=g(y)$. Докажите, что $2m\le n+k$.

А.Белов

7. Каждая из окружностей S_1, S_2 и S_3 касается внешним образом окружности S (в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно) и двух сторон треугольника ABC (рис. 1). Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Д.Терешин

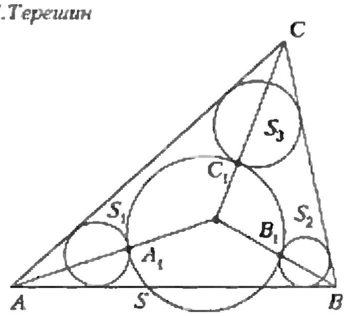


Рис. 1

8. См. задачу М1456.

11 класс

Первый день

1. См. задачу М1451.

2. Внутри выпуклого стоугольника выбрано k точек, $2\le k\le 50$. Докажите, что можно отметить $2k$ вершин стоугольника так, чтобы все выбранные точки оказались внутри $2k$-угольника с отмеченными вершинами.

С.Берлов

3. См. задачу М1452 б).

4. См. задачу М1460.

Второй день

5. Дана последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ в которой a_1 не делится на 5 и для всякого n имеет место равенство

$$a_{n+1}=a_n+b_n,$$

где b_n — последняя цифра числе a_n. Докажите, что последовательность содержит бесконечно много степеней двойки.

Н.Агаханов

6. См. задачу 6 для 10 класса.

7. См. задачу М1457.

8. См. задачу М1459.

XXVIII Всероссийская олимпиада школьников по физике

Задачи теоретического тура заключительного этапа олимпиады подготовлены кафедрой общей физики Московского физико-технического института, а задачи экспериментального тура — кафедрой физики Тульского педагогического института. Официальные материалы нам предоставило Министерство образования России.

Теоретический тур

9 класс

1. Самолет летит по прямой в горизонтальном направлении со скоростью $v_0 = 720$ км/ч. Определите, на какую величину надо изменить скорость самолета, чтобы он смог описать в горизонтальной плоскости окружность радиусом $R = 8$ км. Каков при этом угол наклона самолета? Подъемная сила направлена перпендикулярно плоскости крыльев и пропорциональна квадрату скорости самолета (коэффициент пропорциональности в обоих случаях считать одинаковым). Ускорение свободного падения положите равным $10\ м/с^2$.
С.Кленов

2. Два стальных шарика брошены одновременно из одной точки горизонтальной плоскости с одинаковыми начальными скоростями в одном и том же направлении. Начальная скорость первого шарика составляет угол $\alpha_1 = 30°$ с горизонтом, скорость второго — некоторый угол α_2, где $45° < \alpha_2 < 90°$. При полете первого шарика его горизонтальная координата x_1 изменяется по закону, представленному на рисунке 1. Спустя время

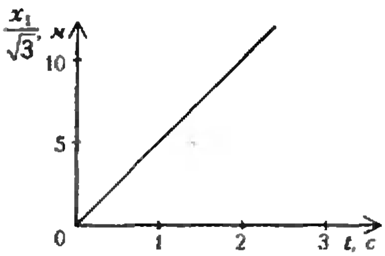


Рис. 1

$t = 7/5$ с после броска оба шарика оказались на одной высоте над плоскостью. Определите угол α_2, под которым брошен второй шарик, а также расстояние между шариками через 1 секунду после броска. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения положите равным $10\ м/с^2$.
А.Чугунов

3. В цилиндрический сосуд с площадью основания $S = 10\ см^2$ налит 1 литр соленой воды плотностью $\rho_1 = 1{,}15\ г/см^3$. В этой воде плавает кусок льда из пресной воды массой $m = 1$ кг. Определите, как изменится уровень воды в сосуде, если половина льда растает. Считайте, что при растворении соли в воде объем жидкости не изменяется.
С.Кленов

4. Лабораторная плитка, сопротивление которой $R = 20$ Ом, включена в сеть последовательно с сопротивлением $R_0 = 10$ Ом. При длительной работе она нагрелась от комнатной температуры $t_0 = 20$ °С до $t_1 = 52$ °С. До какой температуры нагреется эта плитка, если параллельно ей включить еще одну такую же плитку?
Ю.Самарский

10 класс

1. В системе, изображенной на рисунке 2, блок и нить практически невесомы, а пружины в начальном положении — не деформированы. Затем левый груз сдвигают вниз на расстояние x и отпускают без толчка. Найдите ускорения грузов сразу после этого. Считайте $k_1 > k_2$.

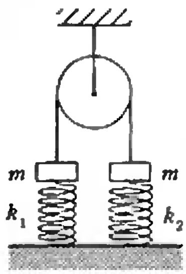


Рис. 2

Пружины прикреплены к грузам и к земле.
В.Волков

2. На гладком горизонтальном столе покоится шар массой m. С ним упруго сталкивается клин массой $M = m/2$, движущийся углом вперед со скоростью $v = 5$ м/с (рис.3). Определите, через какое время шар опять столкнется с клином. Угол клина $\alpha = 30°$. Клин не подпрыгивает.
С.Кленов

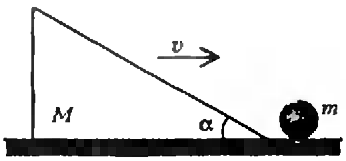


Рис. 3

3. См. задачу Ф1460 в «Задачнике «Кванта».

4. См. задачу Ф1461 в «Задачнике «Кванта».

5. См. задачу Ф1463 в «Задачнике «Кванта».

11 класс

1. См. задачу Ф1459 в «Задачнике «Кванта».

2. См. задачу Ф1461 в «Задачнике «Кванта».

3. Прямоугольный аквариум длиной $L = 50$ см разделен перегородкой на две части. В центр перегородки вставлена симметричная двояковыпуклая линза. В середине левой стенки нарисована стрелка длиной h (рис.4). Если левую часть аквариума заполнить жидкостью, то на его правой стенке получится четкое изображение стрелки длиной $h_1 = 4{,}5$ мм. Если жидкость перелить в правую часть

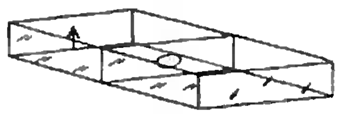


Рис. 4

аквариума, то на правой стенке вновь будет видно четкое изображение стрелки, но теперь длиной $h_2 = 2$ мм. Найдите 1) длину стрелки h; 2) показатель преломления жидкости; 3) расстояния между линзой и стенками аквариума.
В.Слободянин

4. В колебательный контур, состоящий из катушки индуктивностью $L =$

= 0,1 Гн и конденсатора емкостью C = 10 мкФ, включен «электронный ключ», составленный из двух одинаковых диодов (рис.5), вольт-амперная характеристика которых показана на рисунке 6. Пороговое напряжение, при котором диод открывается, составляет $U_п$=0,7 В. До замыкания ключа K напряжение на конденсаторе равно U_0 = 4,5 В. 1) Через какое

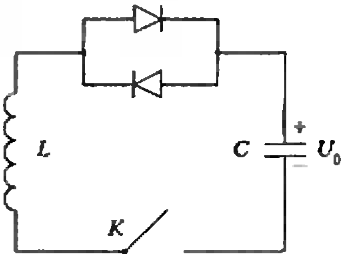


Рис. 5

время после замыкания ключа колебания в контуре прекратятся и установится стационарный режим? 2) Чему будет равно установившееся (остаточное) напряжение на конденсаторе?

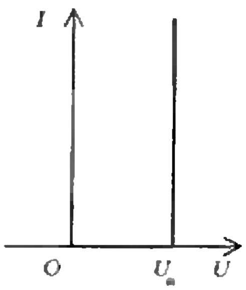


Рис. 6

3) Нарисуйте график зависимости напряжения на конденсаторе от времени.

Ю.Чешев

5. См. задачу Ф1466 в «Задачнике «Кванта».

Экспериментальный тур

9 класс

Определите вес плоской фигуры.

Оборудование: плоская фигура, линейка, гирька.

Н.Сотский

10 класс

Небольшое тело (канцелярская кнопка) может скользить по вогнутой бумажной цилиндрической поверхности радиусом R. Определите максимальный коэффициент трения покоя и коэффициент трения скольжения железа по бумаге.

Точное теоретическое решение задачи представляет большие математические трудности, поэтому поставьте эксперимент так, чтобы свести к минимуму систематические погрешности, возникающие при приближенном решении.

Оборудование: вогнутая цилиндрическая поверхность с двумерной вертикальной миллиметровой шкалой, канцелярская кнопка, линейка, транспортир (не обязательно), карандаш.

Примечание: на миллиметровой шкале можно проводить вспомогательные линии.

В.Акимов

11 класс

Через металлический стержень перекинута нить, к одному из концов которой прикреплен груз. Установите зависимость между силой, удерживающей груз, и углом охвата стержня нитью. По полученным данным определите коэффициент трения.

Оборудование: штатив с креплением, металлический стержень (лапка), груз, нить, динамометр, инженерный калькулятор (или таблицы Брадиса), миллиметровая бумага.

Р.Романов

Призеры XX Российской олимпиады школьников по математике

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Горшенин А. — Челябинск, ФМЛ 31,
Козлов М. — Санкт-Петербург, с.ш.239,
Норин С. — Санкт-Перетбург, с.ш. 239,
Уздин С. — Санкт-Петербург, с.ш. 239;

по 10 классам —

Борисов А. — Нижний Новгород, с.ш. 40,
Петров К. — Москва, с.ш. 7,
Челкак Д. — Санкт-Петербург, с.ш. 30;

по 11 классам —

Карасев Р. — Долгопрудный, с.ш. 5,
Сенцов Ю. — Калуга, с.ш. 5.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Бабенко В. — Москва, с.ш. 91, 8 кл,
Гимон И. — Москва, с.ш. 57,
Есаулова В. — Санкт- Петербург, с.ш. 239,
Запорожец Д. — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Казаков М. — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Макарычев Ю. — Москва, с.ш. 57,
Мамедов М. — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Рудо Е. — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Сергеева Т. — Ижевск, с.ш. 41,
Слободяник И. — Санкт-Петербург, с.ш 239,
Спиридонов А. — Вятка, ФМШ 135;

по 10 классам —

Буфетов А. — Москва, с.ш. 2,
Дужин Ф. — Переславль-Залесский, с.ш 7,
Кацев И. — Санкт- Петербург, с.ш. 30,
Куликов М. — п. Черноголовка Московской обл., с.ш. 82,
Островский М. — Москва, с.ш. 57,
Сай С. — Санкт-Петербург, с.ш. 239;

по 11 классам —

Богданов И. — Пермь, ФМШ 9,
Бондарко М. — Санкт- Петербург, с.ш. 239,
Дюбина А. — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Тарасов А. — Москва, СУНЦ МГУ,
Уткин П. — Челябинск, ФМЛ 31.

Дипломы III степени

по 9 классам получили
Беляев А. — Саратов, ФТЛ 1,
Бойцов В. — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Васильев С. — Москва, с.ш. 57,
Герко А. — Москва, с.ш. 57,
Грибалко А. — Иваново, с.ш. 33,
Громова О. — Краснодар, с.ш. 4,
Егорова Ю. — Северодвинск, лицей 17,
Коровин А. — Долгопрудный, с.ш. 5,
Медведев Д. — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Никитин П. — Мурманск, гимназия 1,
Плахов А. — Сургут, гимназия, 8 кл,
Якимова О. — Москва, с.ш. 57;

по 10 классам —
Алехнович М. — Москва, с.ш. 57,
Баргачев В. — Санкт-Петербург, Аничков лицей,
Бушков С. — Вятка, с.ш. 35,
Голубев А. — Челябинск, ФМЛ 31,
Драгошанский О. — Ухта, технический лицей,
Евдокимов Л. — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Ершов М. — Троицк Московской обл., с.ш. 5,
Захаров А. — Курган, с.ш. 19,
Зеленский О. — Темрюк, с.ш. 13,
Кириенко Д. — Тула, с.ш. 73,
Колинько К. — Санкт-Петербург, с.ш. 610,
Корнилов А. — Ростов-на-Дону, с.ш. 5,
Пикулин С. — Вятка, с.ш. 35,
Романов А. — Пермь, с.ш. 9;

по 11 классам —
Белов П. — Санкт-Петербург, ФМГ 30,
Голынский А. — Москва, СУНЦ МГУ,
Добринская Н. — Саратов, ФТЛ 1,
Дубова О. — Заволжье Нижегородской обл., с.ш. 17,
Зубов М. — Москва, с.ш. 57,
Казаков Е. — Челябинск, ФМЛ 31,
Ковалев Л. — Владивосток, с.ш. 73,
Кондратьев М. — Санкт-Петербург, ФМГ 30,
Кострыкин С. — Ангарск, с.ш. 10,
Кравцов А. — Старый Оскол, с.ш. 17,
Лапунов А. — Вятка, ФМЛ,
Мальков К. — Вятка, ФМЛ,
Матюнин Е. — Москва, с.ш. 57,
Орлов А. — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Павчинский Р. — Санкт-Петербург, ФМГ 30,
Храпай В. — Тихвин, с.ш. 8,
Шувалов В. — Москва, с.ш. 57.

Призеры XXVIII Всероссийской олимпиады школьников по физике

Дипломы I степени

по 9 классам получили
Иванов П. — Нижний Новгород, с.ш. 40,
Соколов О. — Новгород, гимн. 2;

по 10 классам —
Азаров А. — Березники, с.ш. 3,
Афанасьев А. — Нижний Новгород, ФМШ 82,
Кузнецов А. — Тула, с.ш. 73,
Сибиряков С. — Москва, ФМШ 2,
Фурсов Д. — Москва, СУНЦ МГУ;

по 11 классам —
Баргатин И. — Челябинск, с.ш. 31,
Гращенко С. — Барнаул, с.ш. 123,
Любшин Д. — Пермь, с.ш. 9,
Стратонников А. — Сясьстрой, с.ш.,
Филиппов В. — Санкт-Петербург, ФМШ 45.

Дипломы II степени

по 9 классам получили
Беляев В. — Санкт-Петербург, с.ш. 470,
Дарьин А. — Москва, с.ш. 548,
Соломатин А. — Екатеринбург, с.ш. 9,
Тарасов Е. — Санкт-Петербург, с.ш. 566,
Тимоновский А. — Москва, с.ш. 1631,
Фомин Е. — Березники, с.ш. 3;

по 10 классам —
Васильев В. — Москва, СУНЦ МГУ,
Волков Д. — Тула, с.ш. 73,
Зеленский И. — Нижний Новгород, с.ш. 40,
Кашменский Е. — Новосибирск, с.ш. 130,
Ли А. — Москва, с.ш. 463,
Пакулин К. — Березники, с.ш. 3,
Савельев А. — Санкт-Петербург, с.ш. 30,
Сидоров М. — Тольятти, с.ш. 51,
Ташенов С. — Вологда, ЕМЛ;

по 11 классам —
Дядичев В. — Москва, с.ш. 1210,
Итин А. — Москва, СУНЦ МГУ,
Колмогоров В. — Тула, с.ш. 73,
Колчин П. — Нижний Новгород, с.ш. 40,
Кроковный П. — Новосибирск, ш.«Сибирская»,
Курашов Д. — Москва, с.ш. 193,
Стесев Д. — Тула, с.ш. 73.

Дипломы III степени

по 9 классам получили
Горев А. — Вятка, ФМЛ 35,
Гуляев Л. — Нижний Новгород, ФМШ 82,
Кустов Р. — Тихвин, с.ш. 7,
Найденов А. — Тула, лицей 1,
Осадчий Н. — Тула, с.ш. 73,
Хижняков А. — Москва, с.ш. 354;

по 10 классам —
Балабаев П. — Кострома, с.ш. 17,
Борщан Д. — Новомосковск, лицей 1,
Брацлов Ю. — Москва, с.ш. 57,
Утешев А. — Саратов, ФТЛ 1;

по 11 классам —
Барков Ф. — Березники, с.ш. 3,
Гиренко Д. — Москва, ФМШ 2,
Денисов С. — Москва, СУНЦ МГУ,
Егоров С. — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Ковальский А. — Казань, с.ш. 131,
Лавров С. — п. Голицино-2 Московской обл., с.ш. 3,
Миюзов Л. — Санкт-Петербург, ФМШ 45,
Нагорный И. — Подольск, с.ш. 23,
Трощанович П. — Брянск, лицей 1.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

Прибавим, вычтем... умножим, разделим...

1. Поровну. Ответ не изменится, если кофе не размешивать.

2. Мудрец сказал: «Я присоединю своего верблюда к вашим семнадцати, тогда верблюдов будет 18. Ты, сын мой, возьми себе половину, т.е. 9 верблюдов, ты — треть, т.е. 6 верблюдов, а ты — одну девятую, т.е. 2 верблюда. Ну, а я сяду на своего верблюда и поеду дальше.» Так они и поступили. Каждый из сыновей аксакала при этом заметил, что он получил даже больше, чем ему завещал отец. Источник кажущегося парадокса в том, что аксакал не умел складывать дроби. Однако способ решения, предложенный мудрецом, вполне отвечает теме нашей статьи.

3. Пусть h — высота трапеции $ABCD$, а $AD = a$, $BC = b$ (рис. 1). Через середину M стороны CD проведите $KL \parallel AB$. Площади треугольников KMD и CML равны. Поэтому $S_{ABCD} = S_{ABLK} = \frac{1}{2}h \cdot AK = \frac{h(a+b)}{2}$.

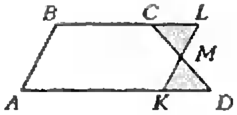


Рис. 1

4. а) Пусть плоскости $P'Q'R'S'T'$ и $PQRST$ перпендикулярны прямым AA', BB', ..., причем $PP' = AA'$. Прямая призма $PQRSTP'Q'R'S'T'$ имеет тот же объем, что исходная.
б) lP.

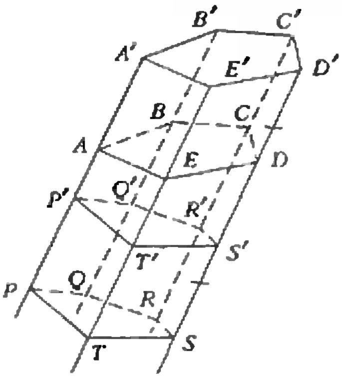


Рис. 2

5. а) $a^{10} + a^5 + 1 = a^{10} - a + a^5 + a + 1 =$
$= a(a^3 - 1)(a^6 + a^3 + 1) + a^5 - a^2 + a^2 + a + 1 =$
$= (a^2 + a + 1)\left((a^2 - a)(a^6 + a^3 + 1) + a^2(a - 1) + 1\right) =$
$= (a^2 + a + 1)(a^8 - a^7 + a^5 - a^4 + a^3 - a + 1)$.

б) $a^8 + a + 1 = a^8 - a^5 + a^5 + a + 1 =$
$= a^5(a^3 - 1) + (a^2 + a + 1)(a^3 - a^2 + 1) =$
$= (a^2 + a + 1)(a^6 - a^5 + a^3 - a^2 + 1)$.

В обоих случаях дальнейшее разложение (с целыми коэффициентами) невозможно.

6. $1280000401 = a^7 + a^2 + 1$, где $a = 20$, но
$a^7 + a^2 + 1 = a^7 - a + a^2 + a + 1 =$
$= (a^2 + a + 1)\left(a(a - 1)(a^3 + 1) + 1\right)$.

7. При $n = 1$. Если n — четно, то данное число четно. При $n = 2k + 1$ раскладываем на множители:
$n^4 + 2^{2n} = n^4 + 2 \cdot n^2 \cdot 2^n + 2^{2n} - 2^{n+1} \cdot n^2 =$
$= (n^2 + 2^n)^2 - (2^{k+1} \cdot n)^2 = (n^2 + 2^n - 2^{k+1} \cdot n)(n^2 + 2^n + 2^{k+1} \cdot n)$.
При $n > 1$ первый (меньший) сомножитель больше 1.

8. а) $x^4 - a^2x^2 + a^4 = x^4 + 2a^2x^2 + a^4 - 3a^2x^2 =$
$= (x^2 + a^2)^2 - 3a^2x^2 = (x^2 - ax\sqrt{3} + a^2)(x^2 + ax\sqrt{3} + a^2)$.

б) Интересен случай, когда $b^2 - 4c < 0$, тогда

$$x^4 + c + bx^2 = x^4 + bx^2 + \frac{b^2}{4} - \left(\frac{b^2}{4} - c\right) =$$
$$= \left(x^2 + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}\right)^2.$$ Остальное ясно.

9. $\sqrt[4]{a^4 + b^4} = \sqrt[4]{(a^2 - ab\sqrt{2} + b^2)(a^2 + ab\sqrt{2} + b^2)}$.

Строим последовательно отрезки $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $d = \sqrt{a(b\sqrt{2})}$ (отрезок $b\sqrt{2}$ — это гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом b), после чего строим отрезки $u = \sqrt{c^2 - d^2}$ и $v = \sqrt{c^2 + d^2}$ и, наконец, $\sqrt[4]{a^4 + b^4} = \sqrt{uv}$.

10. а) $\frac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 1}}{\sqrt{2}}$. Преобразуем левую часть уравнения так:
$x^4 + 8x - 7 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2(x^2 - 4x + 4) = (x^2 + 1)^2 - 2(x - 2)^2$.
б) $1 \pm \sqrt{2}$. Уравнение приводится к виду $(x^2 + 1)^2 = 4(x + 1)^2$.
в) $\frac{\sqrt{2} - 1 \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$. После преобразования

$$x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 - \frac{2x^2}{x+1} + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1 - \frac{2x^2}{x+1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2 = 1 - \frac{2x^2}{x+1}$$ выполните замену $t = \frac{x^2}{x+1}$.

11. $3\sqrt{3}/4\pi$. Получается из формулы (3) в тексте статьи при $x = \frac{2\pi}{3}$.

12. а) $\frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$. Умножьте S_n на x и рассмотрите разность $xS_n - S_n$.

б) $\frac{\sin\frac{nx}{2} \cdot \cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$. Умножьте сумму на $\sin\frac{x}{2}$ и преобразуйте так же, как в тексте статьи преобразовывались суммы синусов.

13. а) $1 \pm \sqrt{3}$. Перепишем уравнение, выделяя полный квадрат в левой части:
$(x^2 - 2x)^2 = -x^2 + 2x + 6$.
Добавляя к левой и правой частям сумму $2\alpha(x^2 - 2x) + \alpha^2$, получаем
$(x^2 - 2x + \alpha)^2 = (2\alpha - 1)x^2 - (4\alpha - 2)x + 6 + \alpha^2$.
Составляем резольвенту Феррари; приходим к уравнению относительно α:
$(2\alpha - 1)^2 = (2\alpha - 1)(6 + \alpha^2)$,
ему удовлетворяет $\alpha = 1/2$. При этом α имеем $\left(x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.
б) $1 \pm \sqrt{3}$; $(-3 \pm \sqrt{17})/2$.

14. а) $(x^2 + x - 1)(x^2 + x + 2)$.
б) $x^4 + 2x^3 + x^2 - (4x^2 + 4x + 1) =$
$= (x^2 + x)^2 - (2x + 1)^2 = (x^2 - x - 1)(x^2 + 3x + 1)$.

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

(см. «Квант» № 4)

Задачи

1. Заметим, что не больше одной команды может не иметь побед. В самом деле, предположим, что их было две. Но во встрече этих команд одна обязательно победила, получили противо-

речне. Так как одна команда составляет 20% от общего числа, то всего было 5 команд. Каждая команда встречалась дважды с 4 командами, таким образом, общее число встреч равно $4 \cdot 5 = 20$.
2. Существует всего пять трехзначных кубов: 125, 216, 343, 512 и 729. Теперь осталось выбрать из чисел 521, 612, 343, 215 и 927 простые числа. Таким оказалось лишь число 521. Итак, искомые числа 125 и 521.
3. Бабушкам 61 и 62 года, дедушкам 78 и 79 лет.
4. $7402 + 7402 = 14804$.
5. Здесь следует воспользоваться утверждением, что площадь четырехугольника равна произведению его диагоналей, умноженному на половину синуса угла между ними. В четырехугольниках, на которые данный четырехугольник разбивается проведенным отрезком (рис. 3), диагонали попарно перпендикулярны, поэтому и углы между ними равны; равны и их длины. Из приведенного утверждения следует, что площади этих четырехугольников равны.

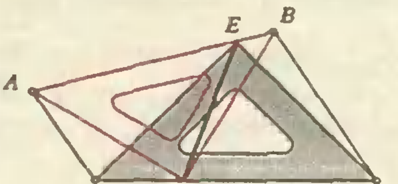


Рис. 3

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»
Вопросы и задачи

1. Да. Например, вес детали, зажатой в тисках, меньше силы трения покоя.
2. Чтобы увеличить трение смычка о струну и тем самым улучшить условия возбуждения колебаний струны.
3. Разная. Хотя бы из-за того, что при забивании гвоздя нужно было не только преодолевать силу трения, но и разрывать волокна дерева.
4. Периоды колебаний будут практически одинаковыми. Раньше остановится маятник с водой, поскольку часть его энергии израсходуется на преодоление внутреннего трения слоев воды.
5. При неизбежности наезда лучше тормозить юзом — вначале скорость падает более резко (см. рис. 4) и удар будет «мягче»; в остальных случаях — качением: тормозной путь короче и шины изнашиваются меньше.
6. Чтобы уменьшить (для согнутого гонщика) сопротивление встречного потока воздуха.
7. Нет. Время подъема меньше времени падения, так как при подъеме сила тяжести направлена так же, как и сила сопротивления воздуха, а при падении — противоположно.
8. Ускорение камня будет максимально в самом начале движения, поскольку в дальнейшем оно может лишь уменьшаться (см. решение задачи 7).
9. При испарении капли уменьшается ее радиус. При этом уменьшается сила лобового сопротивления, пропорциональная квадрату радиуса, и сила тяжести, пропорциональная кубу радиуса. Поэтому движение капли замедляется.
10. Обладая разными массами, монета и кружок из бумаги при движении в воздухе получают различные ускорения. Но если кружок лежит на монете, то он движется с тем же ускорением, что и монета.
11. Флажок повисает, поскольку шар движется со скоростью, равной скорости ветра.
12. Скорость течения реки посередине больше, чем у берегов.
13. Глубина погружения судна в море уменьшится, значит, уменьшится и сопротивление воды движению судна. При неизменной мощности двигателей это приведет к увеличению скорости движения.
14. Из-за трения воды о стенки труб и о воздух.

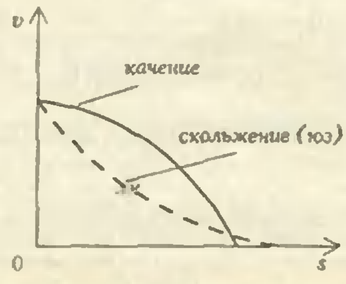


Рис. 4

Микроопыт

Сила, необходимая для сдвига пяти книг, пропорциональна весу пяти книг. А сила, необходимая для выталкивания четвертой сверху книги, пропорциональна весу семи книг. Поэтому легче сделать первое.

Геометрическая страничка

1. $\frac{|a-b|}{2}$. 2. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, K и M — середины AB и CD. Пусть $KM = \frac{1}{2}(BC + AD)$. Если P — середина AC, то $KP = \frac{1}{2}BC$, $PM = \frac{1}{2}AD$. Значит, $KP+PM=KM$, т.е. P лежит на KM. И т.д. 3. Равновеликость AOB и COD эквивалентна равновеликости ABD и ACD, а равенство площадей ABD и ACD эквивалентно параллельности BC и AD. 4. $\frac{c-a}{b-c}$.
5. Проведем через какую-то вершину трапеции прямую, параллельную противоположной боковой стороне. Получим треугольник со сторонами c, d и $|a-b|$, который можно построить.
6. Площадь трапеции равна площади треугольника со сторонами m, n и $2l$. (Проведем через какую-то вершину прямую, параллельную другой диагонали.) 7. 12. Проведем через какую-то вершину трапеции прямую, параллельную диагонали. Получим треугольник со сторонами 6, 8 и медианой между ними, равной 5. Этот треугольник равновелик трапеции. Продолжая медиану на расстояние, равное ей, получим окончательно треугольник со сторонами 6, 8 и 10 (он прямоугольный), равновеликий трапеции. 8. 25. Для произвольного выпуклого четырехугольника имеет место равенство $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$, где S_i — площади треугольников, на которые данный четырехугольник разбивается диагоналями. (Нумерация в порядке обхода.) Докажите это равенство. Как мы знаем, площади треугольников, прилежащих к боковым сторонам, равны (задача 3). Обозначим их через x. Имеем $x^2 = 4 \cdot 9$, $x = 6$. Площадь равна $2x+4+9=25$. 9. Рассмотрим трапецию $ABCD$ (см. рис. 5: AD и BC — основания) Пусть M на AD такая точка, что $CM \parallel AB$. Треугольник MCD можем построить (знаем MC, CD и $\angle MCD$). Продолжим MC за точку C и возьмем K так, что $CK=MC$. Тогда $ABKC$ — параллелограмм. $\angle KBD$ известен (он равен углу между диагоналями, либо дополняет его до $180°$). Теперь можем построить точку B как точку пересечения прямой, параллельной MD, и дуги окружности, проходящей через D и K, соответствующей заданному углу. 10. Из условия следует, что около данной трапеции можно описать окружность. 11. Пусть K — точка касания окружности с AB, O — ее центр. Тогда $AK=AM$, $BK=BN$, треугольник AOB — прямоугольный, $OK=R$ — высота к гипотенузе. Значит, $AK \cdot BK = R^2$. 12. 9. Можно показать, что боковые стороны при продолжении пересекутся под прямым углом. Пусть P — точка их пересечения (рис. 6), K — середина AB ($AB = 6$), O — центр искомой окружности, M — точка касания с CD ($CD = 8$). $PKOM$ — прямоугольник. Радиус искомой окружности есть $OK=KP$. Поскольку $BC=10=\frac{1}{2}AD$, то BC — средняя линия в треугольнике APD. Значит, $R = KP = KB+BP = 3+6 = 9$.

13. Рассмотрим трапецию $ABCD$, с основаниями AD и BC, P — точка пересечения прямых AB и CD, Q — точка пересечения диагоналей AC и BD, M и N — середины AD и BC. Из параллельности AD и BC следует, что точки P, M и N лежат на одной прямой, а точки Q, M и N — лежат на одной прямой, т.е. все четыре точки Q, P, M и N лежат на одной прямой.

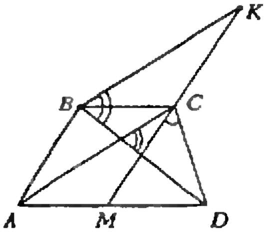


Рис. 5

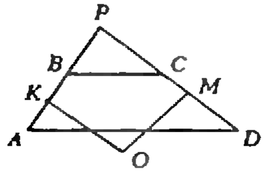


Рис. 6

14. Заметим сначала, что если по одной из двух параллельных прямых перемещается отрезок постоянной длины KM, а по другой отрезок PL, то точка пересечения прямых PK и LM описывает прямую, параллельную данным. Нужное построение следует теперь из задачи 13 (см. рисунок 7: числа указывают порядок проведения прямых).

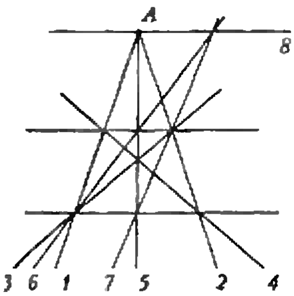


Рис. 7

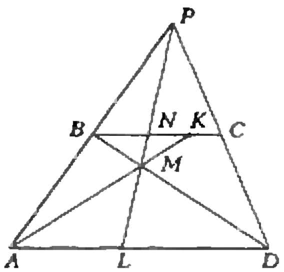


Рис. 8

15. Обозначим через L точку пересечения PM и AD (рис. 8). Имеем

$$\frac{BN}{NC}=\frac{AL}{LD}=\frac{AL}{NB}\cdot\frac{NB}{LD}=\frac{AP}{BP}\cdot\frac{MB}{MD}=\frac{AD}{BC}\cdot\frac{KB}{AD}=\frac{KB}{BC}=\lambda.$$

Отсюда следует, что $\frac{BN}{BC}=\frac{\lambda}{\lambda+1}$. Теперь, если $\lambda=\frac{1}{2}$ (K — середина BC; см. задачу 13), то $\frac{\lambda}{\lambda+1}=\frac{1}{3}$. И вообще, если $\lambda=\frac{1}{n}$, то $\frac{\lambda}{\lambda+1}=\frac{1}{n+1}$. 16. $\sqrt{ab}$. Если x — длина искомого отрезка, то $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$. 17. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Пусть x — длина искомого отрезка. Продолжим боковые стороны до пересечения. Получим три подобных между собой треугольника, соответствующие стороны которых a, x и b. Если их площади соответственно S_1, S_2, S_3, то по условию $S_2-S_1=S_3-S_2$, или $2S_2=S_1+S_3$, $2\frac{S_2}{S_1}=1+\frac{S_3}{S_1}$.

По свойству отношения площадей подобных фигур получим $2\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{b^2}{a^2}$. 18. $\frac{2ab}{a+b}$. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями $AD=a$, $BC=b$. Пусть Q — точка пересечения AC и BD, P — на AB, $PQ\parallel BC$ (рис. 9). Если $PQ=x$, то $\frac{x}{a}=\frac{PB}{BA}$, $\frac{x}{b}=\frac{PA}{BA}$. Сложив эти равенства, получим $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1$, $x=\frac{ab}{a+b}$. Такой же будет и вторая часть искомого отрезка. (Отсюда можно вновь получить утверждение задачи 13.) 19. $\frac{c^2-a^2}{b^2-c^2}$.

20. Если r — радиус окружности, то $r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)=a$, $r\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)=b$. Разделив второе равенство на первое, получим

$$\frac{b}{a}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

Вторая часть доказывается методом от противного. Построим окружность, касающуюся боковых сторон и одного основания. Предположим, что эта окружность не касается второго основания. Построим к этой окружности вторую касательную, параллельную основаниям. Получим две трапеции, для каждой из которых выполняется наше условие. Отсюда докажем, что они должны совпасть.

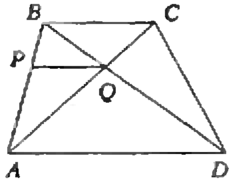


Рис. 9

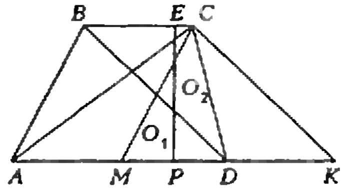


Рис. 10

21. К каждой из образовавшихся трапеций применим критерий, сформулированный в предыдущей задаче. 22. $\frac{1}{\alpha}$. Воспользуйтесь результатом задачи 11.

23. $\frac{ab(a+b)}{2(|a-b|\operatorname{ctg}\beta-(a+b)\operatorname{ctg}\alpha)}$.

Рассмотрим трапецию $ABCD$. Возьмем на AD точки M и K так, что $CM\parallel AB$, $CK\parallel BD$. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных соответственно около треугольников ACK и MCD. Имеем $R_1=\frac{a+b}{2\sin\alpha}$, $R_2=\frac{MD}{2\sin\beta}=\frac{|a-b|}{2\sin\beta}$. Если P — середина MD (и AK), $EP=h$ — высота трапеции (рис. 10), то

$EO_1=h-R_1\cos\alpha$, $EO_2=h-R_2\cos\beta$. Имеем

$CO_1^2-EO_1^2=CO_2^2-EO_2^2$, или

$R_1^2-(h-R_1\cos\alpha)^2=R_2^2-(h-R_2\cos\beta)^2$. Откуда

$$h=\frac{R_1^2\sin^2\alpha-R_2^2\sin^2\beta}{2(R_2\cos\beta-R_1\cos\alpha)}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4(|a-b|\operatorname{ctg}\beta-(a+b)\operatorname{ctg}\alpha)}=$$

$$=\frac{ab}{|a-b|\operatorname{ctg}\beta-(a+b)\operatorname{ctg}\alpha}.$$

24. См. рисунок 11 (на этом рисунке квадрат разделен на 8 частей).

25. Острые углы трапеции равны 75°. Пусть P — середина AB, $\angle CAD=\angle MDC=\varphi$ (рис.12). Из условий следует, что

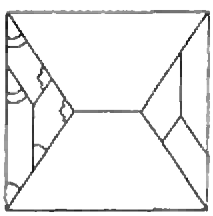


Рис. 11

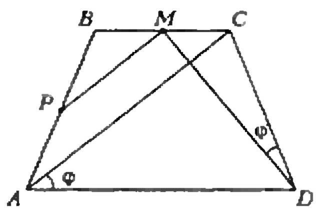


Рис. 12

$\angle BAD = \angle CDA = \angle ACD = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$. Значит, $\angle BPM = \angle BAC = \left(90^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) - \varphi = 90^\circ - \frac{3}{2}\varphi = \angle MDA$. Из этого следует, что $APMD$ — вписанный четырехугольник, $\angle AMD = \angle APD = 90^\circ$. $\angle MDA = \angle MAD = 45^\circ$. Таким образом, $\angle CDA = 90^\circ - \frac{\varphi}{2} = 45^\circ + \varphi$, $\varphi = 30^\circ$. 26. $\frac{c}{a+b}$. Обозначим $\angle BAC = \angle BDC = \alpha$, $\angle CBA = \angle BCD = \beta$, $\angle BAM = \varphi$. Тогда

$$\frac{BM+MC}{AM+MD} = \frac{\sin\varphi + \sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\beta+\alpha-\varphi)+\sin(\beta+\varphi)} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\varphi\right)}{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\varphi\right)} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta+\alpha)+\sin\beta} = \frac{c}{a+b}.$$

Если вы переходите к совокупности...

1. $x = 3$ или $x = 4$. *Указание*: $x^2\cdot\frac{3^x}{9} + 9\cdot 3^{\sqrt{x}} = 3^x + x^2\cdot 3^{\sqrt{x}}$, $\left(x^2-9\right)\left(3^x - 3^{\sqrt{x}+2}\right) = 0$.
Отсюда

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-9=0,\\ 3^x = 3^{\sqrt{x}+2},\end{array}\right.\\ x\ge 0.\end{cases}$$

2. $x = -1$. *Указание*. Имеем

$\log_3(4-x)\log_{(4-2x)}(1-x)(2-x) = \log_3(4-x)$,

$\log_3(4-x)\log_{(4-2x)}\left((1-x)(2-x)-1\right) = 0$.

Область определения уравнения $(-\infty;1)$. Тогда последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\log_3(4-x)=0,\\ \log_{(4-2x)}(1-x)(2-x)=1,\end{array}\right.\\ x<1.\end{cases}$$

3. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k = 1, 0, -1, -2, \ldots$ *Указание*. Сразу переходим к равносильной системе

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\log_{\sqrt{2}}(3-x)=0,\\ \text{tg}x+1=0,\end{array}\right.\\ x<3,\\ \text{tg}x\ge -1,\end{cases} \quad\text{или}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z,\end{array}\right.\\ x<3,\\ \text{tg}x\ge -1.\end{cases}$$

4. $x = (-1)^k\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5} + \pi k$, $k\in Z$. *Указание*. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}8-10\sin^2 x=0,\\ \sqrt{4\sin^2 x+5\sin x+1} = 4\sin x-2,\end{array}\right.\\ 4\sin^2 x+5\sin x+1\ge 0.\end{cases}$$

Второе уравнение совокупности решений не имеет. Получаем

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{2}{\sqrt{5}},\\ \sin x=-\frac{2}{\sqrt{5}},\end{array}\right.\\ 4\sin^2 x+5\sin x+1\ge 0.\end{cases}$$

5. $x = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k$, $y = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $k, n\in Z$. *Указание*. Исходная система равносильна совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=0,\\ \cos 2y=-2,\end{cases}\\ \begin{cases}\cos y=0,\\ 2\sin^2 x=1,\\ \sin x\ge 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

6. $\{-2\}\cup(1;3]$. 7. $[2;3)\cup\left(3;\frac{7}{2}\right]\cup\{4\}$. 8. $\{1\}\cup\left[\frac{9}{5};2\right)\cup(2;3]$.

9. $\{5\}\cup\left(4+\sqrt{2};\infty\right)$. 10. $\left[-\frac{1}{2};0\right)\cup\left[\frac{3\pi}{4};\pi\right)\cup\left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};5\right\}$.

11. $\left\{-\frac{3}{2}\right\}\cup\left[-\frac{\pi}{3}+\pi k;-\frac{\pi}{4}+\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{3}+\pi k\right]$,

где $k = 0, 1, 2, \ldots$. 12. 2. *Указание*. Данное в условии уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\text{tg}x=3,\\ \sin 2x=\frac{3}{5}.\end{array}\right.$$

Откуда

$$\left[\begin{array}{l}\text{tg}x=3,\\ \frac{2\text{tg}x}{1+\text{tg}^2 x}=\frac{3}{5}.\end{array}\right.$$

Имеем $\text{tg}x = 3$ или $\text{tg}x = \frac{1}{3}$.

13. $a\in(-\infty;1]\cup\{5\}$. Уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}2^x=4,\\ 2^x=a-1.\end{array}\right.$$

Условие задачи выполняется, если второе уравнение совокупности либо не имеет решений, либо имеет единственное решение $x = 2$.

14. Искомое множество — точки, координаты которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases}|a+b|>2,\\ |a-b|>2,\\ b\ne 0.\end{cases}$$

XX РОССИЙСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Зональный этап

9 класс

1. Ответ: 30 мин.

Ясно, что Пух и Пятачок должны закончить есть одновременно, иначе один из них сможет помочь другому, уменьшив тем самым общее время, затраченное на еду. Пусть Пух съел x_1 горшков меду и y_1 банок сгущенного молока, а Пятачок — x_2 горшков меда и y_2 банок молока (x_1, x_2, y_1 и y_2 — не обязательно целые числа). Тогда для времени T, которое затрачено каждым из них на еду, получаем

$T = 2x_1 + y_1 = 5x_2 + 3y_2$,

причем $x_2 = 10 - x_1$, а $y_2 = 22 - y_1$. Следовательно,

$2x_1 + y_1 = 50 - 5x_1 + 66 - 3y_1$,

откуда

$y_1 = \frac{116 - 7x_1}{4}$, $T = \frac{x_1}{4} + 29$.

Заметим, что $y_1 \le 22$, поэтому $116 - 7x_1 \le 88$, т.е. $x_1 \ge 4$. Значит, наименьшее время T получается при $x_1=4$ и равно 30 минутам. При этом Пух должен съесть 4 горшка меда и всю сгущенку, а Пятачок — 6 горшков меда.

2. *Указание.* Города A, B и C лежат по одну сторону от серединного перпендикуляра к отрезку CD.

4. Ответ: при восьми лжецах.

Указание. Разобьем все места в президиуме на 8 групп так, как показано красным цветом на рисунке 13. Если лжецов меньше 8, то в одной из групп сидят одни правдолюбы, что невозможно. На том же рисунке показано, как следует разместить 8 лжецов так, чтобы выполнялись условия задачи.

	Λ				Λ		
			Λ				Λ
Λ				Λ			
		Λ				Λ	

Рис. 13

5. *Указание.* Если x_1, x_2, x_3 — корни первого уравнения, то $1/x_1$, $1/x_2$, $1/x_3$ — корни второго.

6. *Указание.* Четырехугольник O_1DO_2B — параллелограмм, (O_1D и O_2B перпендикулярны прямой LP), а $CLEO_2$ — прямоугольник (E — точка касания окружности O_2 с LM). Треугольники DCL и BDO, равны, а потому равны углы DCB и DBC.

7. Ответ: $p=2$, $q=7$, $r=3$ и $s=11$ или $p=2$, $q=7$, $r=11$, $s=7$.

Указание. Сначала докажите, что одно из чисел равно 2. Если $p\neq 2$, то либо p^2+qs, либо p^2+qr дает при делении на 4 остаток 3, что невозможно. При $p=2$ получаем $4+qs=a^2$, $4+qr=b^2$, откуда следует, что $|q-s|=4$, $|q-r|=4$. Далее используйте то, что одно из чисел $q-4$, q, $q+4$ делится на 3.

8. Ответ: 4 месяца.

Указание. Каждому ученику ставим в соответствие набор из нулей и единиц, показывающий, в какую группу он попал — в первую или во вторую. Так набор (0,1,0,1) означает, что ученик 1-й и 3-й месяцы провел в 1-й группе, второй и четвертый — во второй. Всего существует 16 различных наборов из четырех нулей и единиц, и, значит, 4-х месяцев хватает. Поскольку наборов из трех нулей и единиц всего восемь, то трех месяцев не хватит.

10 класс

1. Ответ: а) да; б) нет.

Указание. а) Если вместимость стакана равна 1, то в первых трех стаканах $1\frac{1}{12}$ воды.

б) Стаканы с третьего по седьмой не могут участвовать в переливаниях, в результате которых получается $1/6$, а переливаниями с участием первого и второго стаканов $1/6$ получить нельзя.

2. *Указание.* $x^4+ax^3+(b-2)x^2-ax+1=$
$=(x^2-x_1x-1)(x^2-x_2x-1)$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+ax+b=0$.

3. Пусть данная окружность касается стороны AB в точке P (рис. 14). Углы AOP и FEP равны, так как оба они измеряются половиной дуги FP. Из этого следует, что $\angle POK+\angle KEP=180°$, поэтому точки K, O, P и E лежат на окружности. Так как $\angle OPB+\angle OEB=90°$, то точки O, P и E лежат на окружности с диаметром OB, на этой же окружности должна лежать и точка K. Следовательно, $\angle BKO=90°$. Аналогично доказывается, что $\angle CND=90°$, откуда и вытекает утверждение задачи.

5. Ответ: $5=7-2=2+3$.

6. Ответ: 208.

Указание. Пусть a_0 — свободный член многочлена $p(x)$. Тогда $p(19)=19n+a_0$, $p(94)=94m+a_0$, откуда $19n=94m$, т.е. $n=94k$, $m=19k$. Поэтому $a_0=1994-1786k$, а поскольку $|a_0|<1000$, то $k=1$.

7. *Указание.* Пусть прямые AB и CD, BC и ED пересекаются в точках K и M соответственно (рис. 15), $\angle BAE=\alpha$, $\angle DEA=\beta$, а $BN=AB=1$. Имеем $\alpha+\beta<180°$. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha<90°$ (убедитесь в этом). Далее $\angle BAN=\frac{1}{2}(180°-\angle ABN)=\frac{(\alpha+\beta-90)}{2}$, но $\angle DAE=(180°-\beta)/2$, так что $\angle BAN+\angle DAE=(90°+\alpha)/2>\alpha$. Это значит, что точка D лежит внутри треугольника ABN. В треугольнике CNS угол CNS — острый, а $\angle NSC$ — тупой, и $CS<CN$, откуда $BC+CD<BC+CS<BC+CN=BN=1$.

8. Заметим, что существует всего 2^m способов присвоения названий улицам. Для краткости будем называть их раскрасками. Оценим количество раскрасок, которые можно получить с помощью переименований из раскраски, для которой все улицы красные. Раскраска, полученная после серии переименований, не зависит от порядка, в котором эти переименования были произведены. Кроме того, если дважды переименовать улицы, выходящие из одной и той же площади, то все улицы сохранят свои прежние названия. Наконец, если провести n переименований, по одному для каждой площади, то каждая улица будет переименована два раза и потому сохранит свое название. Следовательно, мы можем получить не более 2^n-1 раскрасок. Аналогично, если все улицы были синими, то с помощью переименований можно получить не более 2^n-1 раскрасок. В сумме получается не более $2(2^n-1)<2^{n+1}\le 2^m$ раскрасок, следовательно, какую-то раскраску нельзя получить с помощью переименований из раскраски, для которой все улицы названы одинаково.

11 класс

1. Неравенство приводится к виду $2\cos x>\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, но $2\cos x>2\cos\frac{\pi}{3}=1$, а $\operatorname{tg}\frac{x}{2}<\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}<1$.

2. Докажем утверждение задачи индукцией по n — числу жителей города. При $n\le 2$ утверждение очевидно. Пусть $n\ge 3$, а m — общее количество звонков в этот день. По условию $m\le n$, поэтому найдется житель N города, разговаривавший не более чем с двумя жителями (в противном случае $m\ge\frac{3n}{2}>n$). По предположению индукции, всех жителей города, кроме N, можно разбить на три группы так, чтобы выполнялось условие

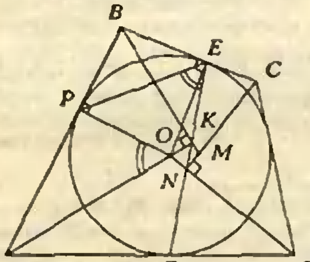


Рис. 14

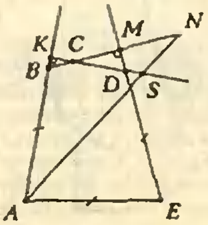


Рис. 15

задачи. Житель N не разговаривал с жителями, входящими в одну из групп, поэтому его можно добавить к этой группе, сохранив в силе требуемое условие.

3. Проведем отрезки OD, OF и FD (рис. 16).

Углы AOD и EFD измеряются половиной дуги ED, поэтому они равны. Отсюда $\angle NOD + \angle NFD = 180°$, и точки O, N, F, D, лежат на одной окружности. С другой стороны, поскольку $\angle ODC = \angle OFC = 90°$, точки O, F, D лежат на окружности с диаметром OC. Следовательно, и точка N лежит на этой окружности, откуда $\angle ONC = 90°$. Аналогично доказывается, что $\angle AMC = 90°$. (Если точка M лежит вне отрезка EF, то из равенства углов DOC и DEF следует, что $\angle MOD = \angle MED$, т.е. точки M, E, O, D тоже лежат на одной окружности.)

Пусть AM и CN пересекаются в точке K. Поскольку AN и CM — высоты треугольника AKC, точка O — его ортоцентр, точка D лежит на OK, и утверждение задачи следует из того, что отрезок OK — диаметр окружности, описанной около четырехугольника $OMKN$.

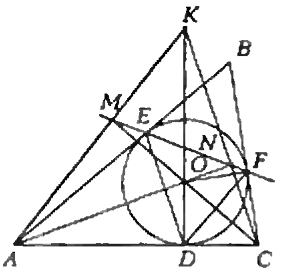


Рис. 16

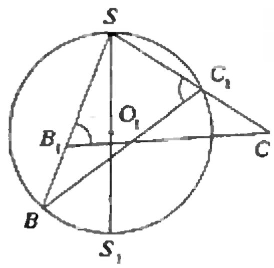


Рис. 17

6. Ответ: $f(x) = 2x + 1$.

Указание. Подставьте в данное уравнение вместо x дробь $(x+1)/(x-1)$ и решите полученную систему относительно $f(x)$ и $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

7. Проекция O_1 точки O на плоскость SBC — центр окружности, описанной около треугольника SBC_1. Прямые SO_1 и B_1C перпендикулярны. Действительно (см. рис. 17),

$$\angle SB_1C + \angle B_1SS_1 = \angle SC_1B + \angle BSS_1 = \frac{1}{2}\overset{\smile}{SB} + \frac{1}{2}\overset{\smile}{BS_1} = \frac{1}{2}\cdot 180° = 90°.$$

Аналогично, прямая A_1C перпендикулярна проекции прямой SO на плоскость SAC. По теореме о трех перпендикулярах $SO \perp A_1C$ и $SO \perp B_1C$, следовательно, $SO \perp A_1B_1C$, что и требовалось доказать.

8. Применим индукцию по n. При $n \le 2$ утверждение задачи очевидно. Пусть теперь $n \ge 3$.

Без ограничения общности можно считать, что многоугольник M с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_k$ есть выпуклая оболочка множества точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Пусть всего имеется m отрезков A_kB_k, пересекающих M более чем в одной точке. Эти отрезки по условию не пересекаются, поэтому они разрезают многоугольник M на $m+1$ слой так, что любой слой, кроме двух крайних, граничит с двумя другими слоями (рис. 18). Крайние слои содержат вершины A_i и A_j такие, что отрезки B_iA_i и B_jA_j имеют только по одной общей точке с M. Следовательно, отрезок A_iB_i не пересекает отрезков A_pA_q при $p, q \ne i$.

Применив предположение индукции к $(n-1)$-му отрезку $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_{i-1}B_{i-1}, A_{i+1}B_{i+1}, \ldots, A_nB_n$, получаем, что точки $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n$ можно соединить прыжками кузнечика. То же верно и в отношении точек $A_1, A_2, \ldots, A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots, A_n$. Наконец, и точки A_i и A_j также связаны прыжками кузнечика: из точки A_i можно добраться до точки A_s, $s \ne i, j$, а из точки A_s — до точки A_j.

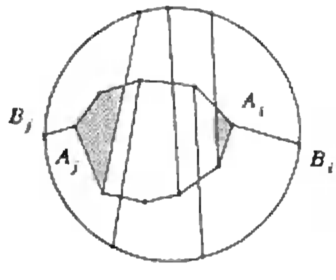


Рис. 18

Заключительный этап

9 класс

1. *Указание.* Умножьте левую и правую части равенства сначала на $x - \sqrt{x^2+1}$, затем на $y - \sqrt{y^2+1}$, после чего сложите полученные равенства.

3. Если перед ходом начинающего количества спичек на столе имеют вид $2^n \cdot a$, $2^n \cdot b$ и $2^m \cdot c$, где $0 \le n < m$, а числа a, b и c нечетны, то он сможет, очевидно, сделать свой следующий ход. Докажем индукцией по числу ходов k, сделанных начинающим, что он сможет добиться такого распределения спичек по кучкам перед каждым своим ходом.

При $k = 0$ утверждение верно: $100 = 2^2 \cdot 25$, $300 = 2^2 \cdot 75$, $200 = 2^3 \cdot 25$.

Предположим, что оно справедливо для $k = l - 1$. Это означает, что перед l-м ходом начинающего на столе лежат кучки, содержащие $2^n \cdot a$, $2^n \cdot b$ и $2^m \cdot c$ спичек.

Если своим l-м ходом он уберет кучку из $2^n \cdot a$ спичек, а кучку из $2^m \cdot c$ спичек разделит на кучки из 2^n и $2^n\left(2^{m-n} \cdot c - 1\right)$ спичек, то количества спичек в кучках будут иметь вид $2^n \cdot a_1$, $2^n \cdot a_2$, $2^n \cdot a_3$, где a_1, a_2 и a_3 — нечетные числа. Без ограничения общности можно считать, что второй игрок своим ходом убирает кучку из $2^n \cdot a_1$ спичек, а кучку из $2^n \cdot a_2$ спичек делит на две кучки — из $2^{n_1} \cdot b_1$ и $2^{n_2} \cdot b_2$ спичек, где b_1 и b_2 — нечетные числа и $n_1 \ge n_2$. Тогда $2^n \cdot a_2 = 2^{n_1} \cdot b_1 + 2^{n_2} \cdot b_2$, следовательно, либо $n_1 = n_2 < n$, либо $n_2 = n$, $n_1 > n$. В каждом из этих случаев количества спичек в кучках имеют указанный вид, следовательно, утверждение верно и при $k = l$.

4. Докажем утверждение задачи в более общем предположении, когда рассматриваемые точки могут и совпадать. Доказательство будем вести индукцией по числу N различных точек среди $2n$ отмеченных.

В случае $N = 1$ доказываемое неравенство, очевидно, выполнено. Для N различных точек обозначим через S_1^N сумму попарных расстояний между точками одного цвета, а через S_2^N — сумму попарных расстояний между точками разных цветов.

Предположим, что $S_1^{N-1} \le S_2^{N-1}$, и докажем, что $S_1^N \le S_2^N$.

Занумеруем различные точки, двигаясь по прямой слева направо: $A_1, A_2, \ldots, A_N$. Пусть с точкой A_1 совпадает k красных и s синих точек. Переместим все точки, совпадающие с A_1, в точку A_2. При этом разность $S_1^N - S_2^N$ не уменьшается. Действительно, так как $S_1^N - S_1^{N-1} = \left(k(n-k) + s(n-s)\right) \cdot A_1A_2$, а $S_2^N - S_2^{N-1} = \left(k(n-s) + s(n-k)\right) \cdot A_1A_2$, то

$$\left(S_1^N - S_2^N\right) - \left(S_1^{N-1} - S_2^{N-1}\right) = \left(S_1^N - S_1^{N-1}\right) - \left(S_2^N - S_2^{N-1}\right) =$$

$$= \left(2ks - k^2 - s^2\right) \cdot A_1A_2 = -(k-s)^2 \cdot A_1A_2 \le 0,$$

т.е. $S_1^N - S_2^N \le S_1^{N-1} - S_2^{N-1} \le 0$, откуда и следует утверждение задачи.

5. *Указание.* $\dfrac{a_k}{a_{k-1}(a_k + a_{k+1})} = \dfrac{1}{a_{k-1}} - \dfrac{1}{a_k + a_{k+1}}$.

6. *Указание.* Карточку с числом n можно двигать не более $n-1$ раза, так как мы можем положить ее только справа от карточки с числом $n-1$, которую, в свою очередь, можно двигать

не более $n-2$ раз. Значит, число сделанных ходов не больше чем $1+2+\ldots+999<500000$.

7. Пусть точка B' симметрична точке B относительно прямой AD (рис. 19). Тогда P — точка пересечения прямых $B'C$ и AD. Применив теорему синусов к треугольникам APB и PDC, получаем

$$\frac{B'P}{PC}=\frac{BP}{PC}=\frac{AB}{CD}.$$

Из подобия треугольников AOB и COD следует, что

$$\frac{AO}{OC}=\frac{AB}{CD}.$$

Из этих равенств следует подобие треугольников COP и CAB'. Поэтому $OP=\frac{OC}{CA}AB'=\frac{CD}{AB+CD}AB$. Аналогично $OQ=\frac{AB}{AB+CD}$, т.е. $OP=OQ$.

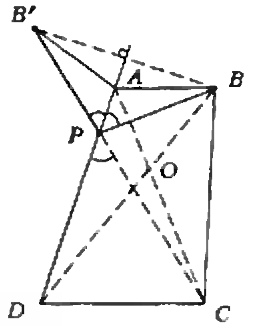


Рис. 19

8. Покажем вначале, что все 50 каемок, покрывающих квадрат K 100×100 клеток, лежат в полосе шириной в 100 клеток и каждая горизонталь полосы (вертикаль, если эта полоса расположена вертикально) содержит в себе горизонтальную (вертикальную) сторону ровно одной каемки.

Каждая клетка квадрата K лежит либо в горизонтальной, либо в вертикальной стороне одной из каемок, поэтому если какая-либо горизонталь, пересекающая квадрат K, не содержит в себе горизонтальной стороны ни одной из каемок, то все клетки этой горизонтали квадрата K лежат в вертикальных сторонах каемок, и, значит, все вертикали, пересекающие K, содержат в себе стороны каемок.

Пусть, например, все сто горизонталей, пересекающих K, содержат стороны каемок. Но у каемки ровно две горизонтальных стороны, поэтому каждая из горизонталей должна содержать ровно по одной стороне рассматриваемых пятидесяти каемок, и все горизонтальные стороны каемок лежат в этих горизонталях.

Итак, мы доказали сформулированное утверждение. Из него, в частности, следует, что длина стороны любой каемки — не более 100 клеток. Пусть все каемки лежат в горизонтальной полосе шириной 100 клеток. Рассмотрим верхнюю строку квадрата K. Выше нее нет клеток ни одной из каемок, поэтому строка покрыта только горизонтальными сторонами каемок, но, как мы показали выше, эта горизонталь содержит горизонтальную сторону ровно одной из каемок, причем ее длина не более 100 клеток. Следовательно, верхняя строка квадрата K совпадает с верхней строкой некоторой каемки K_1. Внутри K_1 остается квадрат 98×98, покрытый 49 каемками. Рассуждая аналогично, получаем, что все 50 каемок вложены друг в друга и, значит, покрыть каемками квадрат 100×100 можно единственным способом.

10 класс

1. *Указание.* Корни данного уравнения содержатся среди корней четырех квадратных уравнений $P_1(x)\pm P_2(x)\pm P_3(x)=0$.

3. Продолжим медианы до пересечения с описанной окружностью в точках A_1, B_1 и C_1 (рис. 20). Очевидно, что

$AA_1\le D$, $BB_1\le D$, $CC_1\le D$, т.е.

$m_a+A_1A_2\le D$, $m_b+B_1B_2\le D$, $m_c+C_1C_2\le D$.

Найдем A_1A_2. По теореме о пересекающихся хордах

$A_1A_2\cdot AA_2=BA_2\cdot A_2C$, т.е. $m_a\cdot A_1A_2=a^2/4$ и $A_1A_2=a^2/4m_a$.

Аналогично, $B_1B_2=b^2/4m_b$ и $C_1C_2=c^2/4m_c$.

Подставим эти выражения в неравенства и сложим их:

$$\frac{4m_a^2+a^2}{4m_a}+\frac{4m_b^2+b^2}{4m_b}+\frac{4m_c^2+c^2}{4m_c}\le 3D,$$

но $4m_a^2+a^2=2b^2+2c^2$, $4m_b^2+b^2=2c^2+2a^2$, $4m_c^2+c^2=2a^2+2b^2$, следовательно,

$$\frac{a^2+b^2}{2m_c}+\frac{b^2+c^2}{2m_a}+\frac{c^2+a^2}{2m_b}\le 3D,$$

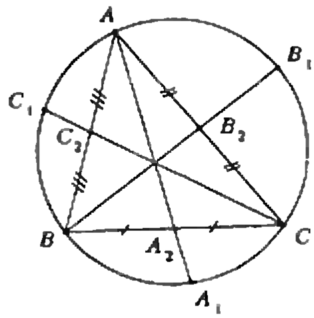


Рис. 20

откуда и вытекает требуемое неравенство.

5. Если данное простое число входит в разложение числа k на множители в степени α, числа m — в степени β и числа n — в степени γ, причем $0\le\alpha\le\beta\le\gamma$, то в правую часть оно входит в степени 2γ, а в левую — в степени $\beta+2\gamma$.

6. Пусть a — одно из значений, принимаемых функцией $f(x)$, а n_a и k_a — количество тех x, для которых $f(x)=a$ и $g(x)=a$ соответственно (возможно, что $k_a=0$). Тогда равенствам $f(x)=a$, $g(x)=a$ будут удовлетворять $n_a\cdot k_a$ пар чисел (x, y), равенствам $f(x)=a$, $f(y)=a$ — n_a^2 пар, а равенствам $g(x)=a$, $g(y)=a$ — k_a^2 пар. Поэтому если a, b, ..., u — все значения, принимаемые функцией f, то

$m=n_ak_a+n_bk_b+\ldots+n_uk_u$, $n=n_a^2+n_b^2+\ldots+n_u^2$, $k=k_a^2+k_b^2+\ldots+k_u^2$.

Используя неравенство $2pq\le p^2+q^2$, получаем требуемое.

7. Рассмотрим гомотетию H_{A_1}, переводящую окружность S_1 в окружность S. При этом прямая AB, касающаяся S_1 и S_2, перейдет в касательную к окружности S, параллельную AB. Аналогично гомотетии H_{B_1} и H_{C_1}, переводящие S_2 и S_3 в S, переводят соответственно прямые BC и AC в касательные к окружности S, параллельные самим прямым BC и AC. Возникающий при этом треугольник $A_2B_2C_2$ (рис. 21) гомотетичен треугольнику ABC, а центр гомотетии, переводящей ABC в $A_2B_2C_2$, и есть точка пересечения прямых AA_1, BB_1 и CC_1.

11 класс

2. Будем называть выпуклой оболочкой конечного множества точек наименьший выпуклой многоугольник, содержащий все эти точки. Можно доказать, что у любого конечного множества точек существует единственная выпуклая оболочка.

Пусть $M=A_1A_2\ldots A_n$ — выпуклая оболочка выбранных k точек ($n\le k$) и точка $O\in M$ отлична от $A_1A_2,\ldots,A_n$.

Продолжим каждый отрезок OA_i до пересечения с границей стоугольника в точке B_i. Докажем, что M находится внутри выпуклой оболочки точек $B_1B_2,\ldots,B_n$.

Имеем: $\vec{OA_i} = \gamma_i \vec{OB_i}$, где $0 \le \gamma_i < 1$. Так как $O \in M$, то существуют неотрицательные числа α_i такие, что $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \le 1$ и $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{OA_i} = \vec{0}$ (знак $\sum$ означает суммирование). Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_i \vec{OB_i} = \vec{0}$, причем $\alpha_i \gamma_i \ge 0$ и $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_i \le 1$, т.е. $O \in M'$. Поскольку A_i лежит внутри отрезка OB_i, то $A_i \in M'$ и M лежит внутри M'.

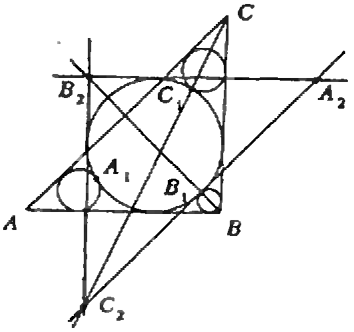


Рис. 21

Выберем для каждый точки B_i сторону многоугольника, ее содержащую. Рассмотрим множество концов этих сторон. В нем $m \le 2n \le 2k$ точек. Добавим к ним произвольным образом $2k - m$ вершин стоугольника и рассмотрим $2k$-угольник с вершинами в полученных точках. Он выпуклый, его граница содержит точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$ и, следовательно, M' и M.

5. По условию b_1 отлично от 0 и 5, поэтому b_2 есть одно из чисел 2, 4, 6 или 8, но тогда последовательность $b_2, b_3, \ldots$ является периодической с периодом 4:
…, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, … .
Поэтому для любого $n > 1$ $a_{n+4} = a_n + (2+4+8+6)$ и для любого $s > 1$ $a_{n+4s} = a_n + 20s$.
Из двух членов последовательности $a_n = 10m + 2$ и $a_{n+1} = 10m + 4$ хотя бы одно число делится на 4, пусть это будет число $a_{n_1} = 4l$. Тогда $a_{n_1+4s} = 4(l + 5s)$, и осталось доказать, что среди чисел вида $l + 5s$ бесконечно много степеней двойки. Последнее следует из того, что остатки от деления на 5 степеней двойки образуют периодическую последовательность:
1, 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, …
и, следовательно, бесконечно много степеней двойки дают при делении на 5 такой же остаток, как и число l.

XXVIII ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

9 класс

1. $\alpha = \arcsin\frac{v_0^2}{gR} = 30°$; $\Delta v = \frac{v_0}{\cos\alpha} - v_0 = 54$ км/ч.
2. $\alpha_2 = \arcsin\frac{11}{14} = 51°$; $l = \sqrt{14}$ м $= 3{,}7$ м.
3. Уровень повысится на $\Delta h = 0{,}85$ см.
4. $t_2 = t_0 + (t_1 - t_0)\frac{(R_0 + R)^2}{4(R_0 + R/2)^2} = 38$ °C.

10 класс

1. Если $x < \frac{2mg}{k_1 - k_2}$, то $a_1 = a_2 = \frac{(k_1 - k_2)x}{2m}$;
если $x > \frac{2mg}{k_1 - k_2}$, то $a_1 = \frac{k_1 x}{m} - g$ и $a_2 = \frac{k_2 x}{m} + g$.
2. $t = \frac{2v}{\sqrt{3}g} = 0{,}6$ с.

11 класс

3. 1) $h = \sqrt{h_1 h_2} = 3$ мм; 2) $n = \sqrt{h_1/h_2} = 1{,}5$; 3) $a = b = 25$ см.
4. 1) $\tau = 3\pi\sqrt{LC} = 9{,}42 \cdot 10^{-3}$ с; 2) $U_C = -0{,}3$ В; 3) см. рис. 22.

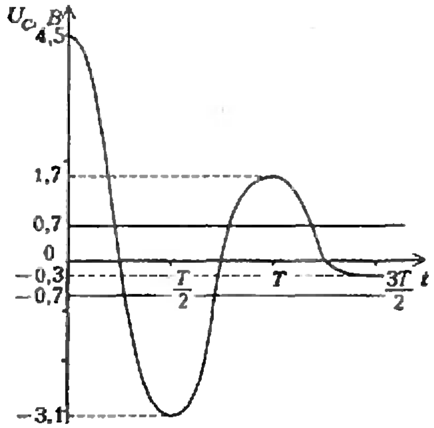


Рис. 22

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, А.Т.Калинин, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, А.П.Савин, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛ
Д.А.Крымов

ГЛАВНЫЙ ХУДОЖНИК
С.А.Стулов

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
С.В.Вакуленко, Е.А.Митченко, Е.В.Титова

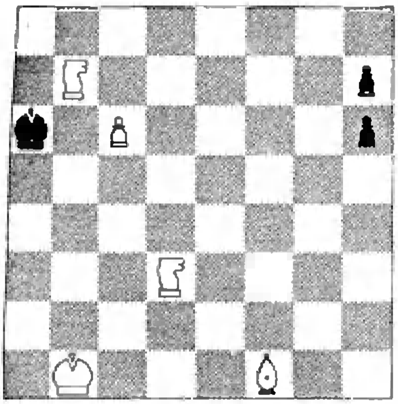
ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ
Н.И.Лямина

Адрес редакции:
103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант»,
тел. 250-33-54, 251-55-57

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховском полиграфическом комбинате
Комитета Российской Федерации по печати
142300 г. Чехов Московской области
Заказ № 3160

Загадочные серии

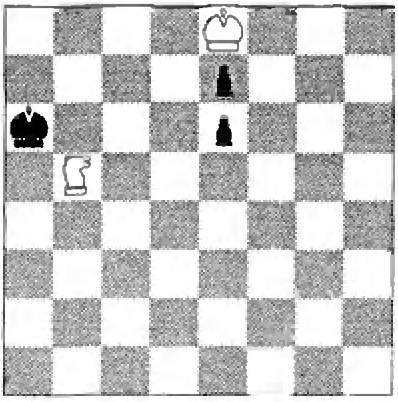
«Серийные» задачи гораздо ближе к математике, чем к шахматам, это один из самых популярных шахматно-математических жанров. Напомним, что в серийных задачах ходит только одна сторона — черные, которые совершают определенную серию ходов, а белым разрешается сделать только завершающий ход, в результате которого черные получают мат или оказываются в патовом положении. В процессе решения черный король не должен попадать под шах. Поскольку черные своей серией ходов ведут подготовительную работу для замуровывания собственного короля, то речь идет о серийных кооперативных задачах на мат или пат (коопмат или коoпат). В таких задачах кратчайшая серия необходимых ходов часто допускает перестановки, т.е. мы имеем некоторое множество решений (серий ходов). Поэтому часто требуется также произвести подсчет числа серий, и возникает интересная комбинаторная задача. Впрочем, в данной статье нас будет интересовать любая серия, обеспечивающая достижение цели, а вопросы подсчета числа серий мы оставим в стороне. Итак, рассмотрим шесть увлекательных задач на серийный коопмат (пат).



Серийный коопмат в 14 ходов

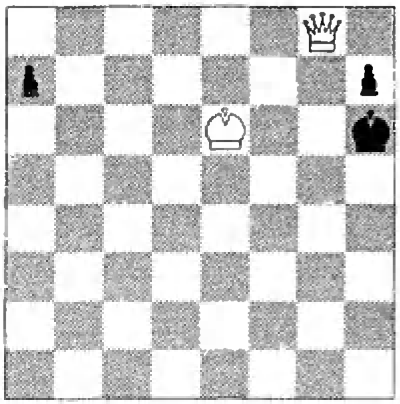
Вот серия ходов, ведущая к цели. **1—5. h5—h4—h3—h2—h1Ф 6. Фg1 7. Фa7 8—12. h5—h4—h3—h2—h1Ф 13. Фhg1 14. Фgb6+ Кb4×.**

В данной задаче уже на третьем ходу возможно как 3. h4, так и 3. h5, на четвертом — в зависимости от предыдущих ходов — 4. h2, 4. h3 или 4. h5, т.е. уже 6 различных вариантов. Перестановки возможны на всем протяжении решения, причем количество их непрерывно растет. Однако примечательно, что отличаясь перестановками, все необходимые серии образуют одно и то же множество из 14 ходов.



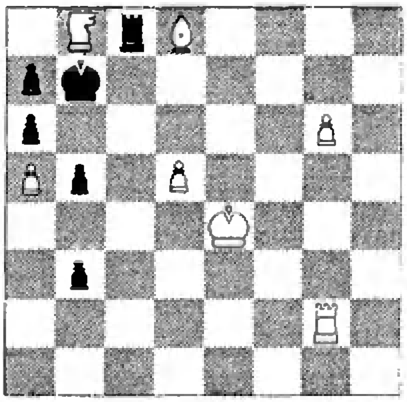
Серийный коопмат в 16 ходов

1—5. e5—e4—e3—e2—e1С 6—7. Сg3—b8 8—12. e5—e4—e3—e2—e1Л 13—14. Лc1—c7 15—16. Крb7—c8 Кd6×. Легко убедиться, что пешки могут превратиться только в ладью и слона (хотя и в разном порядке).



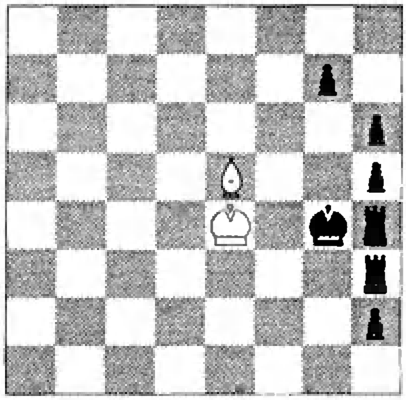
Серийный коопмат в 16 ходов

1—5. Крh5—h4—h3—h2—h1 6—9. h5—h4—h3—h2 10—14. a5—a4—a3—a2—a1С 15—16. Сd4—g1 Фa8×. Движение короля и крайних пешек, как обычно, может быть осуществлено разными способами, но набор ходов один и тот же (это относится и ко всем последующим задачам).



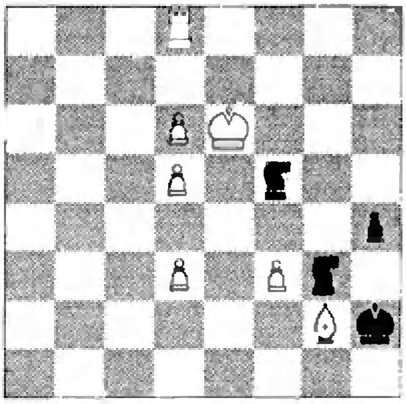
Серийный коопмат в 9 ходов

1—2. b2—b1Л 3—4. Л:b8—a8 5—6. Лc1—c8 7—9. b4—b3—b2 Л: b2×.



Серийный коопат в 11 ходов

1—2. Лf3—f5. 3—4. Лh3—f3 5—6. h4—h3 7—8. Лh5—h4 9—10. Лf5—h5 11. g5 С:h2 пат.



Серийный коопмат в 16 ходов

1—7. Крg1—f2—e3—d4—c5—b6—a7 8—10. h3—h2—h1Л 11—16. Лf1:f3:d3:d5—b5—b6 Лa8×.

Е.Гик

Индекс 70465

НОМЕР ПОДГОТОВЛЕН ПРИ ПОДДЕРЖКЕ
РОССИЙСКОГО ФОНДА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ