ISSN 0130-2221
МАЙ/ИЮНЬ 1994 · №3

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

ОБРАЗЫ ПРОСТРАНСТВА

Леонардо да Винчи «Тайная вечеря». (Роспись трапезной монастыря Санта-Мария делле Грацие в Милане, 1495—1497.)

Пожалуй, никогда и никого нельзя назвать в такой мере художником-ученым, как Леонардо да Винчи (1452—1515). Он был не только великим художником, но и замечательным математиком, механиком, инженером. Вся его многосторонность была лишь разными поворотами одной целостности. Для него искусство не отражало, а постигало природу. Он считал, что лучшим инструментом познания мира является живопись, а картина — итог такого познания. Создать произведение живописи — значит дать синтез, философию естества. Чем больше у живописца знаний о мире, тем глубже проникает он в строение и связь явлений и тем труднее дается этот синтез.

Если для ранних работ Леонардо («Благовещение», «Мадонна Бенуа») были свойственны утонченно-зрелые формы, то начиная с «Поклонения волхвов» аналитической утонченности составных частей леонардовской живописи сопутствует абстрактивизм обобщения. Леонардо нашел форму композиционного синтеза, сделав картину живым организмом. Это не просто окно в мир, не кусок открывшейся жизни, не нагромождение планов, фигур и предметов, это — микрокосм, малый мир, подобный реальности мира большого. В этом новаторство леонардовского искусства, вот почему он основоположник новой классической живописи.

«Тайная вечеря» — величайшее повествовательное произведение живописи, рассказ в контурах и красках, где каждая из тринадцати фигур живет своей глубочайшей внутренней и внешней жизнью, во всем разнообразии душевной полноты и физической выразительности, и где общая композиции, строго замкнутая в форму абстрактной пирамиды, собирает все части [illegible]оедино в простой и ясной архитектонике. Но не следует думать, что это общедоступное [illegible]изведение, общепонятна здесь только наглядность темы, леонардовское начинается за [illegible]ами первичной иллюстрации к евангельскому тексту. Тонкость замысла, хитрости пос[illegible]удеса мастерства рассчитаны на медленное и вдумчивое созерцание.

[illegible]ожественная слава Леонардо да Винчи находится в решительном несоответст[illegible] его искусства, и это стало уже традицией. Его имя знает каждый, но его [illegible]ногим, он самый трудный для понимания из мировых гениев кисти.

Р.Мусина

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

МАЙ/ИЮНЬ · 1994 · №3

В номере:

Квант

Учредители — Президиум РАН, НПП «Бюро Квантум»
Издатель — НПП «Бюро Квантум»

Бюро Квантум


f(a)

Соображения непрерывности и крах гипотезы Борсука

В. БОЛТЯНСКИЙ, А. САВИН

Прелюдия

Читая рассказы Артура Конан Дойля о расследованиях Шерлока Холмса, мы вслед за доктором Ватсоном поражаемся тому, как из пустяковых наблюдений рождаются существенные утверждения, ведущие к раскрытию преступления, как торжествует «дедуктивный метод» Шерлока Холмса.

В математике также немало очевидных утверждений, из которых следуют неожиданные факты. Кстати, вся геометрия построена с помощью дедуктивного метода на основе очевидных аксиом, правда, дорога от аксиом до трудных теорем часто лежит через десятки, а то и сотни промежуточных утверждений. Разумеется, чем короче путь между очевидным и неочевидным утверждениями, тем удивительнее такой результат. В этой статье мы хотим рассказать о неожиданных следствиях теоремы Больцано, простейшей теоремы о непрерывных функциях.

Понятие непрерывности интуитивно понятно каждому человеку, однако строгое ее определение появилось лишь в прошлом веке. Античные философы, немало размышлявшие на эту тему, так и не пришли к единому мнению. Атомисты — сторонники идеи дискретного строения материи — были чужды понятию непрерывности. Древнегреческие математики считали, что кривая не состоит из точек, а является тем местом, где они располагаются (геометрическое место точек). Точка не имеет длины и ширины, а сколько ни прибавляй нуль к нулю, получишь нуль, — говорили они, — поэтому точки не могут заполнить целиком отрезок.

Знаменитый Зенон Элейский в своей апории «Стрела» показал, как этот постулат приводит к противоречию. Рассмотрим летящую стрелу. В каждый миг она занимает какое-то определенное место, т.е. находится там в неподвижном состоянии. А так как это верно для каждого момента полета, то стрела неподвижна. Оппонентами атомистов были континуалисты, которые считали, что числа, пространство, время и вещество бесконечно делимы. И им Зенон припас апорию, известную как «Ахиллес и черепаха». Ахиллес соревнуется в беге с черепахой, дав ей фору. Пока Ахиллес добежит до точки старта черепахи, она проползет некоторое расстояние, пока Ахиллес пробежит это расстояние, черепаха проползет еще немного и т.д. Таким образом, Ахиллес никогда не догонит черепаху.

Выйти из этого тупика удалось лишь после создания строгой теории действительных чисел.

Развитие идеи непрерывности стимулировало успехи физики и техники, которые использовали понятие функциональной зависимости для описания законов природы и технологических процессов. В терминах функций понятие непрерывности можно сформулировать так: функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если для значений x, мало отличающихся от x_0, значения $f(x)$ и $f(x_0)$ также «мало» отличаются друг от друга. Функция непрерывна на некотором отрезке, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка.

Более точно, *функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число $\delta > 0$, что для любого x, отстоящего от x_0 менее чем на δ, соответствующее значение $f(x)$ отличается от $f(x_0)$ менее чем на ε.*

Обратимся к теореме Бернардо Больцано, чешского католического священника, изложенной в его книге «Парадоксы бесконечности», изданной в 1850 году. В этой книге Больцано показывает, что все казалось бы очевидные утверждения о непрерывных функциях должны быть доказаны для того, чтобы их можно было применять во всей общности.

Теорема Больцано. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, тогда существует точка x_0 этого отрезка, в которой функция $f(x)$ обращается в нуль* (рис.1).

Доказательство этой теоремы мы приведем в конце статьи, чтобы не загромождать изложение, а сейчас продемонстрируем ее удивительные следствия.

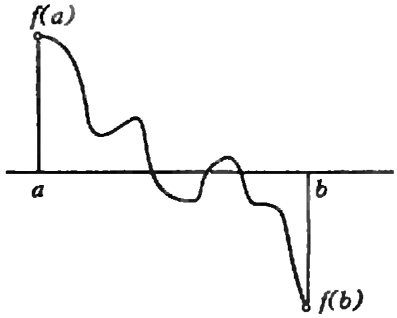


Рис. 1

Алгебра

Теорема о многочлене нечетной степени. *Всякий многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень.*

Идею доказательства поясним на примере многочлена

$$f(x) = x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3,$$

степень которого равна трем. Запишем его в виде

$$f(x) = x^3\left(1 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \frac{\alpha_3}{x^3}\right).$$

При достаточно большом $|x|$ каждое из трех последних слагаемых в скобках будет по модулю меньше $1/3$, и поэтому при достаточно большом $|x|$ выражение в скобках положительно. Следовательно, найдется такое (достаточно большое по модулю) отрицательное число a, что $f(a) < 0$, и такое положительное число b, что $f(b) > 0$. Осталось применить теорему Больцано, чтобы закончить доказательство.

Соображения непрерывности помогают доказать и более общее утверждение, которое носит название «Основная теорема алгебры».

Основная теорема алгебры. *Любой многочлен $f(x)$ степени $n > 0$ с действительными или комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один корень (действительный или комплексный).*

Доказательство этой теоремы использует комплексные числа, поэтому мы его не приводим. А читателям рекомендуем самостоятельно решить следующие задачи:

1. Докажите, что если в уравнении нечетной степени

$$f(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_{n-1}x + \alpha_n = 0 \ (n = 2k + 1)$$

свободный член α_n отрицателен, то уравнение имеет хотя бы один положительный корень, а при $a_n > 0$ — хотя бы один отрицательный.

2. Подтвердите примером, что для уравнения четной степени второе утверждение задачи 1 может не иметь места.

3. Докажите, что если в квадратном уравнении $x^2 + px + q = 0$ свободный член q отрицателен, то уравнение имеет один положительный и один отрицательный корень. Приведите доказательства, основанные а) на формулах Виета, б) на идее непрерывности. Какое из них можно распространить на произвольное уравнение четной степени?

4. Многочлен $f(x) = x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3$ имеет производную $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha_1 x + \alpha_2$, являющуюся многочленом второй степени. Следовательно, уравнение $f'(x) = 0$ может либо иметь два действительных корня (различных или совпадающих), либо не иметь ни одного действительного корня. Докажите, что если оно имеет два различных действительных корня c_1 и c_2, то при $f(c_1) \cdot f(c_2) < 0$ уравнение

$$x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3 = 0$$

имеет три различных действительных корня, а при $f(c_1) \cdot f(c_2) > 0$ — один действительный корень.

Геометрия

Перейдем к геометрическим приложениям теоремы Больцано. Сначала докажем теорему Урысона.[1]

Теорема Урысона. *Вокруг всякой ограниченной плоской геометрической фигуры можно описать квадрат.*

Доказательство. Введем понятие опорной прямой к плоской ограниченной фигуре. Пусть задана фигура Ф. Возьмем некоторую прямую l_0, не пересекающую Ф, и начнем ее передвигать параллельно себе до тех пор, пока она не коснется фигуры Ф (рис.2).

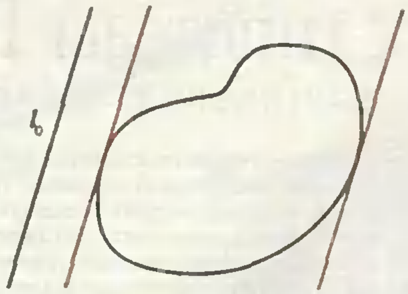


Рис. 2

Полученная прямая и называется *опорной прямой к фигуре Ф в направлении* l_0. Очевидно, что существует и вторая опорная прямая фигуры Ф, параллельная первой, расположенная по другую сторону от фигуры Ф. Нас будет интересовать расстояние h между этими опорными прямыми. Проведем пару опорных прямых к фигуре Ф под углом α к первоначально выбранной прямой l_0. Расстояние между этими прямыми обозначим через $h(\alpha)$. Величина $h(\alpha)$ является функцией, определенной для всех α и периодической с периодом π: $h(\alpha) = h(\alpha + \pi)$. Докажем, что функция $h(\alpha)$ непрерывна.

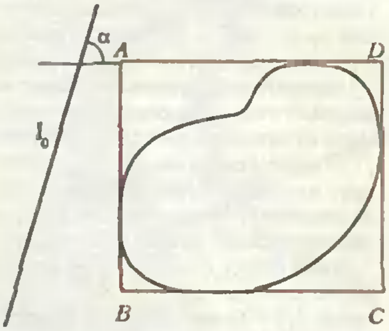


Рис. 3

Пусть BC и AD — опорные прямые фигуры Ф, составляющие угол α с прямой l_0, а AB и CD — пара перпендикулярных им опорных прямых той же фигуры Ф (рис.3). Обозначим длину диагонали прямоугольника $ABCD$ через a, а угол CAD через β. Тогда $h(\alpha) = a\sin\beta$. Увеличим угол α на δ (значения углов будем брать в радианах) и проведем пару опорных прямых фигуры Ф под углом $\alpha + \delta$. На рисунке 4 они выделены цветом. Как мы условились, расстояние между ними равно $h(\alpha + \delta)$. Проведем также через точки A, B, C и D прямые, параллельные новому направлению. Из чертежа видно, что расстояние $h(\alpha + \delta)$ не меньше, чем расстояние между прямыми, проведенными через точки A и C, и не больше, чем расстояние между прямыми, проходящими через точки B и D. Но расстояние между первыми равно $a\sin(\beta - \delta)$, а между вторыми $a\sin(\beta + \delta)$. Запишем эти неравенства:

$$a\sin(\beta - \delta) \le h(\alpha + \delta) \le a\sin(\beta + \delta).$$

Теперь уже нетрудно оценить разность $h(\alpha + \delta) - h(\alpha)$. Вычтем из каждого члена предыдущего неравенства $h(\alpha)$ или $a\sin\beta$. Получим:

$$a\sin(\beta - \delta) - a\sin\beta \le h(\alpha + \delta) - h(\alpha) \le$$
$$\le a\sin(\beta + \delta) - a\sin\beta.$$

Применяя формулу для разности синусов и вспомнив, что косинус всегда не превосходит 1, получаем:

$$a\sin(\beta - \delta) - a\sin\beta =$$
$$= 2a\sin\left(-\frac{\delta}{2}\right)\cos\left(\beta - \frac{\delta}{2}\right) < -2a\sin\left(\frac{\delta}{2}\right),$$

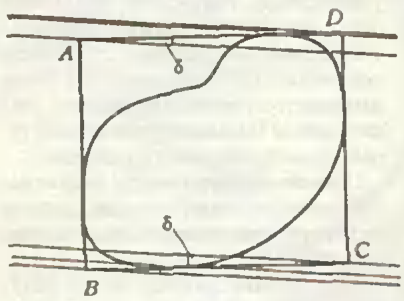


Рис. 4

$$a\sin(\beta + \delta) - a\sin\beta =$$
$$= 2a\sin\frac{\delta}{2}\cos\left(\beta + \frac{\delta}{2}\right) < 2a\sin\frac{\delta}{2}.$$

Подставим эти соотношения в первоначальное неравенство:

$$-2a\sin\frac{\delta}{2} \le h(\alpha + \delta) - h(\alpha) \le 2a\sin\frac{\delta}{2}.$$

Если угол α уменьшается, т.е. $\delta < 0$, то те же соображения приводят к неравенству

$$2a\sin\frac{\delta}{2} \le h(\alpha + \delta) - h(\alpha) \le -2a\sin\frac{\delta}{2}.$$

Оба полученных неравенства можно переписать в одно:

$$|h(\alpha + \delta) - h(\alpha)| \le 2a\sin\left|\frac{\delta}{2}\right|.$$

Теперь видно, что при уменьшении модуля δ приращение функции стремится к нулю, что и требуется показать для установления непрерывности этой функции.

---

[1] *Павел Самуилович Урысон (1898 – 1924) — выдающийся московский математик, один из основоположников топологии теории размерности. Несмотря на раннюю трагическую гибель (он утонул во время купания в штормовом море), оставил глубокий след в математике.*

Итак, непрерывность функции $h(\alpha)$ доказана. Нетрудно показать, что сумма и разность непрерывных функций снова являются непрерывными функциями, поэтому функция $f(\alpha) = h(\alpha) - h\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ непрерывна. Она является разностью сторон прямоугольника, описанного вокруг фигуры Ф. Если мы покажем, что при некотором α функция $f(\alpha)$ равна нулю, то тем самым мы докажем теорему Урысона. Отметим важное свойство функции $f(\alpha)$, вытекающее из периодичности $h(\alpha)$: $f(\alpha) = -f\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$. Действительно,

$$f\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = h\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - h(\alpha + \pi) = h\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - h(\alpha) = -f(\alpha).$$

Таким образом, в точках α и $\alpha + \frac{\pi}{2}$ функция $f(\alpha)$ принимает значения разных знаков. Возьмем $\alpha = 0$. Если $f(0)$ равно нулю, то искомое значение α найдено, а если $f(0)$ отлично от нуля, то в точках 0 и $\frac{\pi}{2}$ функция $f(\alpha)$ принимает значения разных знаков и по теореме Больцано должна в некоторой промежуточной точке обращаться в ноль. Доказательство теоремы Урысона завершено.

Московский математик Л.Г. Шнирельман доказал теорему-близнеца теоремы Урысона: *во всякую замкнутую кривую можно вписать квадрат.* Ее доказательство существенно сложнее.

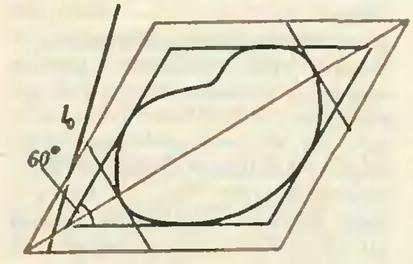


Рис. 5

В дальнейшем мы будем использовать характеристику фигуры, которая называется диаметром фигуры Ф и обозначается diam Ф. Это — наибольшее из расстояний между точками фигуры. В квадрате — это диагональ, в треугольнике — наибольшая сторона, в круге — его диаметр. Попытайтесь решить несколько задач, используя это новое понятие:

5. Докажите, что для любой ограниченной фигуры Ф выполняется неравенство $h(\alpha) \le$ diam Ф.

6. Докажите, что существуют две параллельные опорные прямые, расстояние между которыми равно diam Ф.

7. Опишем вокруг фигуры Ф параллелограмм с углом 60° между сторонами и углом α между одной парой сторон и направлением прямой l_0. Нарисуем также ромб (рис.5) с теми же направлениями сторон, центром в центре этого параллелограмма и расстоянием между параллельными сторонами, равными diam Ф. Проведем, наконец, опорные прямые к фигуре Ф, перпендикулярные большей диагонали ромба. Через $h_1(\alpha)$ и $h_2(\alpha)$ обозначим высоты отсекаемых равносторонних треугольников. Докажите, что функции $h_1(\alpha)$ и $h_2(\alpha)$ непрерывны.

8. Используя результат задачи 7, докажите, что существует угол α, при котором $h_1(\alpha) = h_2(\alpha)$.

9. Теперь докажите, что существует правильный шестиугольник, содержащий фигуру Ф, у которого расстояние между параллельными сторонами равно diam Ф.

Надеемся, что, прочтя условия задач, читатель тут же решил их или просто поверил в справедливость содержащихся там утверждений. В таком случае читатель готов к доказательству теоремы, принадлежащей известному польскому математику Карелу Борсуку.

Теорема Борсука. *Всякую ограниченную плоскую фигуру Ф можно разделить на три части, каждая из которых имеет диаметр, меньший diamФ.*

Заметим, что на две части меньшего диаметра невозможно разрезать многие фигуры, например круг или правильный треугольник, а вот на три такие части, оказывается, разрезать можно всегда.

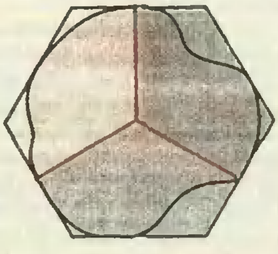


Рис. 6

Для того чтобы доказать теорему Борсука, достаточно построить для произвольной ограниченной фигуры Ф правильный шестиугольник, указанный в задаче 9, а затем разрезать его на три части так, как это показано на рисунке 6. Диаметр каждой из частей меньше ширины шестиугольника, а та равна diam Ф.

Свою теорему К. Борсук доказал в 1933 году и выдвинул гипотезу, что всякую n-мерную фигуру можно разбить на $n+1$ частей меньшего диаметра. В 1955 году английский математик Г.Эглстон доказал, что любую трехмерную фигуру действительно можно разбить на 4 части меньшего диаметра. Надеемся, что читатель без труда укажет трехмерные фигуры, которые невозможно разбить на три части меньшего диаметра. Доказательство гипотезы Борсука для $n = 3$ затем упрощалось, одно из них содержится в книге В.Г. Болтянского и И.Ц. Гохберга «Задачи и теоремы комбинаторной геометрии».

Попытки доказать гипотезу Борсука для произвольного n долгое время не приводили к результату. Правда, для «хороших» фигур это утверждение было доказано. Так, швейцарский математик Г.Хадвигер доказал справедливость гипотезы Борсука для тел, у которых нет «заострений» — точек, через которые проходит несколько различных опорных «плоскостей». В.Г.Болтянский доказал этот факт для случая, когда таких точек не больше n. Казалось, что решение близко, но в 1993 году израильские математики Г.Калай и Д.Кан построили пример, показывающий, что число частей, на которое можно разбить тело, уменьшая диаметр, растет не как $n+1$, а как $1,1^{\sqrt{n}}$, что при большом n превосходит $n+1$. Гипотеза Борсука потерпела крах.

Топология

С течением времени математики рассматривали функции все более общего вида, их аргументами стали точки многомерных пространств, да и значениями функций стали элементы различных множеств, а не только числа. Эта тенденция привела к образованию понятия *отображение*. Пусть заданы два множества A и B, задать отображение f множества A во множество B — это значит поставить в соответствие для каждой точки x из множества A точку $f(x)$ из множества B. Кратко это записывается так: $f: A \to B$, точка $g = f(x)$ называется образом точки x, а множество точек x для которых $f(x) = y$ — прообразом точки y. Обычная функция $y = f(x)$ есть отображение множества ее определения во множество действительных чисел.

Как мы убедились, непрерывные функции имеют массу полезных свойств. Естественно, что понятие непрерывности было перенесено и на отображения. В этом процессе существенную роль сыграло понятие окрестности точки. Окрестностью точки x во множестве M, точнее r-окрестностью, называется множество точек из M, отстоящих от данной точки на расстояние, меньшее чем r; она обозначается $O_r(x)$. В терминах окрестностей определение непрерывной функции будет звучать так:

Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех x из δ-окрестности точки x_0 их значения $f(x)$ содержатся в ε-окрестности точки $f(x_0)$.

Теперь нетрудно заметить, что греческие буквы ε и δ, обозначающие размеры окрестностей, можно в этом определении опустить и дать следующее определение:

Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если для любой окрестности точки $f(x_0)$ найдется окрестность точки x_0, такая, что значения функции в точках этой окрестности содержатся в выбранной окрестности точки $f(x_0)$.

Соответственно, отображение f множества A во множество B называется непрерывным в точке x_0, если для любой окрестности точки $f(x_0)$ найдется окрестность точки x_0 такая, что образы точек из этой окрестности точки x_0 содержатся в выбранной окрестности $f(x_0)$.

Итак, для любых множеств и отображений мы можем проверить, являются ли они непрерывными? К сожалению, еще нет. Дело в том, что при определении окрестности мы пользовались наличием заданного расстояния между точками, но не всегда такое расстояние имеется. Правда, избавившись от букв ε и δ в определении, мы сделали первый шаг к определению непрерывности, не прибегая к понятию расстояния.

Следующее понятие, приближающее нас к цели, — это понятие открытого множества. *Множество M из пространства A называется открытым, если для каждой точки множества M в нем содержится и некоторая окрестность этой точки.* На плоскости это — круг без ограничивающей окружности, треугольник с удаленными сторонами и вершинами и т.д. Открытые множества обладают следующими важными свойствами: объединение любого числа открытых множеств — вновь открытое множество и пересечение любого конечного числа открытых множеств — также открытое множество. Эти свойства совсем нетрудно доказать даже неподготовленному читателю.

Однако и здесь участвует понятие окрестности, а следовательно, и расстояние между точками. Выход из этого положения заключается в том, что можно для произвольного пространства взять и определить систему множеств, которую и будем считать системой открытых множеств. Требования к этой системе очевидны и просты: сумма любого числа множеств из этой системы вновь является множеством из этой системы и пересечение любого конечного числа множеств этой системы также является множеством из этой системы. Кроме того, в эту систему должны входить пустое множество и само пространство. В том случае, если такая система открытых множеств определена, то говорят, что на пространстве определена «*топология*» (не путать с наукой топологией), а само пространство становится *топологическим пространством*. Теперь мы уже почти готовы определить непрерывность отображения одного топологического пространства в другое. Для этого нам осталось лишь определить, что такое окрестность точки. Это делается совсем просто: назовем окрестностями точки произвольные открытые множества, содержащие эту точку.

Теперь предыдущее определение непрерывности отображения годится для отображений произвольных топологических пространств.

Топология — новая, чрезвычайно обширная наука. Та ее часть, которая анализирует основы понятия непрерывности, которые мы здесь попытались чуть-чуть осветить, носит название *общей топологии*, а большая часть этой науки изучает те свойства фигур, которые не изменяются при гомеоморфизмах. *Гомеоморфизмом (или гомеоморфным отображением) $f: A \to B$ называется отображение f, если оно, во-первых, взаимно однозначно, а во-вторых, взаимно непрерывно, т.е. не только само отображение f непрерывно, но и обратное отображение f^{-1} также непрерывно.* Отсюда ясно, что понятие непрерывности в топологии является главенствующим. Приведем один из примеров топологических теорем, не относящихся к гомеоморфизмам, а связанных лишь с непрерывностью.

Теорема Брауэра о неподвижной точке. *Пусть $f: S \to S$ — непрерывное отображение круга S в себя, тогда в круге найдется хотя бы одна точка M такая, что она при отображении f переходит в свое прежнее положение.*

Этот факт совсем неочевиден. Представьте себе тонкую резиновую пленку, являющуюся круглой прокладкой между двумя металлическими цилиндрами. Вы вынули прокладку, растянули, завязали узлами, а потом вновь положили между цилиндрами, которые сжали этот клубок в тонкую лепешку. Теорема Брауэра утверждает, что по крайней мере одна из точек резиновой пленки попадает на свое старое место. Несмотря на «игрушечность» этой теоремы, она и многие ее обобщения оказались чрезвычайно полезными в разных областях математики и ее приложений. Основная идея доказательства этой теоремы, которое можно прочесть в книге Р.Куранта и Г.Роббинса «Что такое математика», состоит в том, что если непрерывная

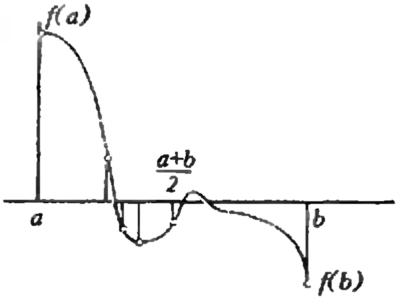


Рис. 7

функция принимает только целые значения, то во всех своих точках определения она принимает одно и то же значение.

Доказательство теоремы Больцано

Итак, пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, непрерывна на нем и принимает на его концах значения разных знаков, для определенности положим, что $f(a) > 0$, а $f(b) < 0$. Рассмотрим середину отрезка $[a, b]$. В этой точке функция либо равна нулю, либо больше нуля, либо меньше нуля. В первом случае искомая точка обнаружена. Если же имеет место второй случай, то на правой половине отрезка $[a, b]$ функция принимает в концах значения разных знаков, а в третьем случае такая ситуация возникает на левой половине отрезка (рис.7). В этих случаях мы вновь повторяем описанную процедуру: делим пополам тот отрезок, на концах которого функция принимает значения разных знаков и, если в середине этого отрезка функция не обращается в нуль, переходим к вдвое меньшему отрезку и т.д. В результате мы либо обнаружим, что в некоторой середине получающихся отрезков функция $f(x)$ обращается в нуль, либо получим бесконечную последовательность вложенных друг в друга отрезков, длины которых стремятся к нулю, причем значения функции на левом конце каждого из этих отрезков положительно, а на правом — отрицательно. **Возьмем точку x_0, принадлежащую всем этим отрезкам**, и докажем, что в этой точке функция $f(x)$ обращается в нуль. Действительно, если она, скажем, положительна: $f(x_0) = a > 0$, то взяв в определении непрерывности функции в качестве ε число a, получим противоречие, ибо для всех правых концов построенной последовательности уменьшающихся отрезков значения функции отрицательны, а следовательно, разность этих значений и значения функции в точке x_0 превосходит a.

Теорема доказана. Однако в доказательстве содержится обман. Взгляните на фразу, набранную жирным шрифтом. Это не ошибка наборщика. «Возьмем точку x_0, принадлежащую всем этим отрезкам». А почему такая точка существует? Оказывается, что здесь уже никакие рассуждения не помогут, а мы сами должны решить: принимаем это положение или нет. Знаменитый немецкий математик Георг Кантор, отец современной теории множеств, сформулировал этот выбор в виде следующей аксиомы, носящей его имя: *«Для любой последовательности вложенных отрезков существует хотя бы одна точка, принадлежащая всем отрезкам»*. Из нее уже легко следует теорема Кантора: *«Если длины последовательности вложенных отрезков стремятся к нулю, то существует единственная точка, принадлежащая всем этим отрезкам.»*

Если бы мы хотели вести изложение последовательно, как это делается в учебниках математического анализа, то аксиому и теорему Кантора следовало рассмотреть раньше теоремы Больцано.

Но вновь вернемся к аксиоме Кантора. А что будет, если ее не принять? Оказывается, что возникает непротиворечивая математическая теория, подобно тому, как получается геометрия Лобачевского отбрасыванием пятого постулата Евклида. Правда, в отличие от геометрии Лобачевского, эта теория оказывается малосодержательной. В заключение предлагаем еще несколько задач:

10. Докажите, что сумма и разность непрерывных функций — непрерывная функция.

11. В каком случае можно утверждать, что отношение двух непрерывных функций снова является непрерывной функцией?

12. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на его концах равные значения. Верно ли, что для любого положительного числа p, меньшего длины отрезка, найдутся две точки x_1 и x_2 отрезка $[a,b]$, отстоящие на расстояние p: $|x_1 - x_2| = p$, в которых функция $f(x)$ принимает равные значения?

ИНФОРМАЦИЯ

ЗАОЧНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ШКОЛА ПРИ МГУ

ЗАОЧНАЯ физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете МГУ объявляет прием учащихся в 10 и 11 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику, лучше подготовиться к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения и, прежде всего, на физический факультет МГУ.

Физический факультет МГУ готовит физиков-теоретиков и физиков-экспериментаторов по всем разделам современной физики и астрономии. Фундаментальное университетское образование позволяет выпускникам быстро осваивать специфику любого научного или технического направления, успешно работать на стыке научных направлений, таких, например, как геофизика и биофизика, астрофизика и химическая физика, компьютерная физика и математическое моделирование.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже.

Решение вступительного задания необходимо отослать до 1 сентября по адресу: 119899 Москва, ГСП, Ленинские горы, МГУ, Физический факультет, ЗФШ. В письмо вложите два экземпляра анкеты, заполненной на листах плотной бумаги размером 7 × 12 см по приведенному здесь образцу, и конверт с Вашим адресом.

Решение о зачислении в ЗФШ будет сообщено до 20 октября.

Принятым в ЗФШ в течение года высылаются контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решенные задания оцениваются, рецензируются и отсылаются обратно. Учащиеся 10 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 11 класс. Успешно прошедшие обучение получают удостоверение об окончании ЗФШ (при поступлении на физический факультет МГУ это учитывается приемной комиссией).

Для проживающих в Москве и Московской области работает вечерняя физическая школа.

Справки по телефону (095) 939-38-78 с 16 до 18 часов по рабочим дням.

Вступительное задание

Поступающим в 10 класс ЗФШ нужно решить задачи 1 — 4, поступающим в 11 класс — задачи 4 — 7.

1. Камень бросают вертикально вверх. Некоторый начальный отрезок пути он пролетает за время t_1. Следующий такой же по величине отрезок пути он пролетает за время t_2. (Оба отрезка примыкают друг к другу.) На какую максимальную высоту поднимается камень? Ускорение свободного падения равно g. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. В момент $t_1 + t_2$ камень движется вверх.

2. Спутник, движущийся по круговой орбите вблизи поверхности некоторой планеты, совершает один оборот за время T_1. Если же круговая орбита проходит на высоте h от поверхности планеты, то период обращения спутника равен T_2. Каково ускорение свободного падения тел вблизи поверхности планеты? Влияние атмосферы не учитывайте.

3. Тело массой m соскальзывает с наклонной плоскости и движется по горизонтальной поверхности, проходя до остановки путь s. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы вернуть тело в исходную точку по прежней траектории? Плоскость наклонена к горизонту под углом α. Коэффициент трения при движении одинаков на всем пути и равен μ.

4. Придумайте качественную задачу по любому разделу физики (с решением).

5. В некотором процессе давление и объем одного моля идеального газа связаны соотношением $p - p_0 = A(V - V_0)$, где постоянные величины A, p_0 и V_0 известны. Чему равно давление одного моля газа в этом процессе при температуре T?

6. Чему равен потенциал изолированного незаряженного металлического шара радиусом R, если на расстоянии $a\,(a > R)$ от его центра находится точечный заряд q?

7. Найдите внутреннее сопротивление источника постоянного тока, если известно, что мощность, выделяемая на внешнем сопротивлении, одинакова при двух различных значениях этого сопротивления $R_1 = 12.5$ Ом и $R_2 = 2$ Ом.

Фамилия, имя, отчество	Бадаев Олег Павлович
Класс ЗФШ	10
Профессия родителей	мать - инженер, отец - врач
Подробный домашний адрес	240812 г.Калуга, ул.Пушкина, д.24, кв. 26
Номер и адрес школы	шк.№777, г.Калуга, ул.Садовая, д. 11

Нейтрино: вездесущее и всемогущее

Лилипут-пушинка, который может стать чемпионом Вселенной

К. УОЛТЕМ

Самым замечательным экземпляром в нашей коллекции элементарных частиц является нейтрино. Это, вероятно, самая распространенная (вместе с фотоном) частица во Вселенной — плотность нейтрино достигает нескольких сот на кубический сантиметр *везде*, включая внутренние области Солнца и Земли, а также Ваше собственное тело. Эту плотность можно сравнить со средней плотностью Вселенной, равной, по оценкам, примерно одному атому водорода на 100000 см^3. Хотя эти частицы столь многочисленны, мы наблюдали всего около миллиона нейтрино за 35 лет после их открытия. Для сравнения: столько же фотонов воспринимает наш невооруженный глаз, когда мы глядим на блистающий Сириус в течение нескольких секунд.

Нейтрино — очень легкая частица. Если оно имеет хоть какую-то массу, эта масса должна быть меньше, чем наименьшая измеряемая масса — это примерно 1 / 100000 массы электрона. И все же нейтрино может определять величину массы Вселенной.

Нейтрино крайне мало. Может быть даже, что оно существует в виде математической точки. Если нейтрино имеет хоть какой-то размер, он должен быть меньше минимального пространственного масштаба, который мы можем наблюдать, — порядка 10^{-18} м. И все же нейтрино может определять структуру Вселенной.

Нейтрино очень слабо взаимодействуют с материей, поскольку они не имеют заряда. Они могут пройти через слой свинца толщиной в световой год. И все же нейтрино участвуют в наиболее бурных и грандиозных событиях — от ежедневного производства энергии внутри нашего Солнца до взрывов Сверхновых звезд (а также в таких потенциально апокалипсических «земных» устройствах, как ядерные реакторы и ядерные бомбы).

Как это может быть? Как мы смогли сделать такие замечательные заключения о таинственной и вроде бы не представляющей интереса частице? В этой статье я расскажу вкратце, как мы пришли к пониманию всего этого, и опишу эксперимент, на который возлагаются большие надежды и который должен прояснить наши представления о нейтрино и его месте во Вселенной.

Краткая хронология

1914: Джеймс Чедвик, англичанин, работавший в Берлине, обнаружил намеки на «недостачу» энергии в некоторых так называемых бета-распадах. Было известно, что многие тяжелые атомные ядра нестабильны и некоторые из них распадаются с испусканием электрона, называвшегося тогда бета-частицей. Если бы вся история на этом кончалась, электрон двигался бы в направлении, противоположном направлению движения ядра отдачи, и обе частицы имели бы четко определенные кинетические энергии. Однако Чедвик показал, что на самом деле это не так. Энергия электронов была различной, даже если распадающиеся ядра были идентичны.

1930: Вольфганг Паули, австриец, работавший в Цюрихе, заключил, что результаты экспериментов Чедвика обусловлены случайным распределением энергии между продуктами реакции. Это распределение может быть случайным, только если число результирующих частиц превышает два. Значит, должна быть третья — невидимая — частица вдобавок к электрону и ядру отдачи. Паули постулировал существование слабо взаимодействующего *нейтрино* и его античастицы *антинейтрино* (обозначаемых греческими буквами ν и $\tilde{\nu}$ соответственно), которые уносят энергию, оставаясь незамеченными. Это была радикальная идея — даже великий Нильс Бор поначалу склонялся скорее к отказу от закона сохранения энергии, но не к «изобретению» новой частицы.

1933: Энрико Ферми в Риме создал детальное математическое описание взаимодействий, включающих нейтрино, — так называемых слабых взаимодействий. Это описание дожило, с небольшими изменениями, до наших дней. Нейтрино также обязано ему своим названием — оно означает на итальянском «маленькая нейтральная» (частица).

1938: Ханс Бете, немецкий эмигрант, работавший в Корнеллском университете, США, развил первую работоспособную модель генерации энергии внутри Солнца. Основной реакцией является слияние двух протонов p с образованием дейтрона d, позитрона e^+ и нейтрино ν, причем все частицы уносят кинетическую энергию. Протон — это ядро водорода, дейтрон — ядро тяжелого изотопа водорода (протон и нейтрон, связанные вместе), а позитрон — положительно заряженный электрон, античастица обычного электрона. Эту реакцию можно записать в виде

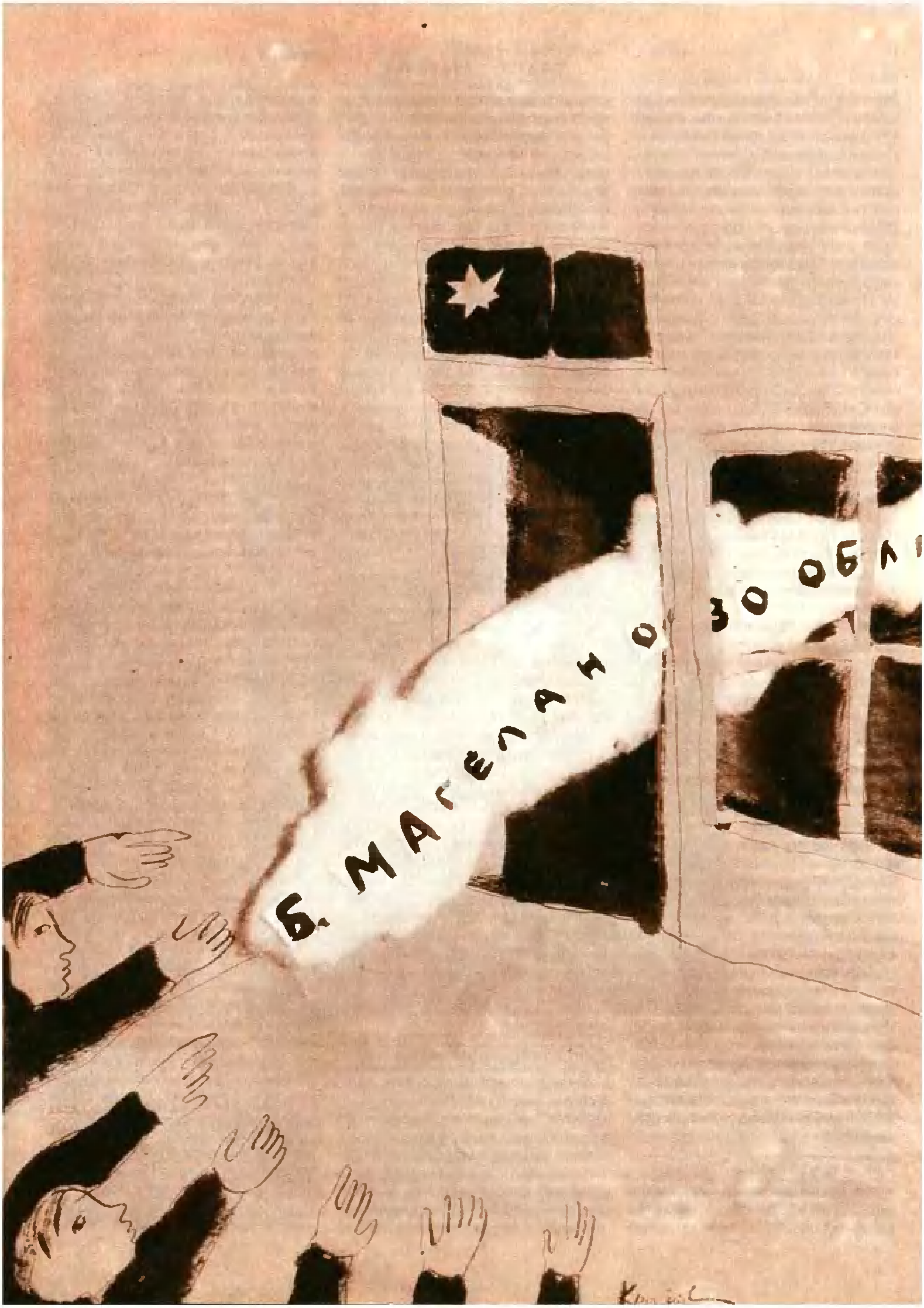
$$p + p \to d + e^+ + \nu + \text{энергия}.$$

За этот и дальнейшие вклады в развитие ядерной физики Бете был награжден в 1967 году Нобелевской премией по физике.

1956: Два физика из Лос-Аламосской научной лаборатории в Нью-Мексико, США, — Коуэн и Райнес — впервые наблюдали взаимодействие нейтрино на реакторе в Джорджии, США. Поток антинейтрино от бета-распадов продуктов деления в реакторе колоссален — типичное значение 10^{13} см$^{-2}\cdot$с$^{-1}$. Но даже при этом детектор должен был иметь размеры небольшой комнаты, чтобы зарегистрировать очень малое количество нейтринных взаимодействий за много недель наблюдения.

1962: Леон Ледерман, Мэл Шварц и Джек Стейнбергер, работавшие в Брукхейвенской национальной лаборатории, США, показали, что нейтрино могут рождаться в ускорителях заряженных частиц и что их по крайней мере два вида: ν_e и ν_μ. Один вид, ν_e, может рассматриваться как незаряженный сородич электрона e, а

Крис Уолтем (Chris Waltham) — профессор физики в Университете Британской Колумбии (провинция Канады) и руководитель Канадской физической команды на Международных физических олимпиадах школьников.



другой, ν_μ — как незаряженный сородич мюона μ. Мюон был впервые обнаружен в космических лучах (которые на уровне поверхности Земли и представляют из себя в основном мюоны), и он ведет себя совершенно как электрон, за исключением того, что он в 207 раз массивнее. Никто не знает, почему он существует, и никто не понимает взаимоотношений между электронами, мюонами и их нейтрино. Но за раскрытие небольшой тайны о двух типах нейтрино Ледерман, Шварц и Стейнбергер получили в 1988 году Нобелевскую премию по физике.

1975: Мартин Перл и его сотрудники в Станфорде, США, нашли третью электроноподобную частицу — тау-лептон τ. Имеется также доказательство существования его нейтринного партнера ν_τ — «недостача» энергии в тау-распадах, аналогичная наблюдавшейся в экспериментах Чедвика. На самом деле все известные частицы образуют группы по три. Природа явно старается нам что-то сказать, но до сих пор никто не сумел понять, что именно.

1980-е: Все более и более изощренные попытки взвесить три типа нейтрино продолжали (и все еще продолжают!) терпеть неудачу в обнаружении хоть какой-то массы. Таким образом, ν_e должно иметь массу менее 1/100000 электронной массы, что является пределом чувствительности наших приборов. О других нейтрино мы знаем меньше — так, масса ν_τ может лежать где угодно в интервале от нуля до 40 электронных масс.

К настоящему моменту теория возникновения Вселенной, включающая Большой Взрыв, придала смысл многим наблюдениям Вселенной как целого. Она также предсказала, что Вселенная всюду заполнена морем абсолютно невидимых нейтрино. Эти нейтрино могут влиять на что-то только через гравитационное взаимодействие, если они имеют хоть какую-то массу. Их так много, что они могут определять глобальную структуру Вселенной. Они могут быть чем-то вроде «темной материи», абсолютно невидимой, но способной замедлить расширение Вселенной своим гравитационным притяжением.

Как «увидеть» нейтрино

В наше время нейтрино получают и наблюдают в рутинных опытах на ускорителях, и, кроме того, становится возможным детектирование нейтрино от астрономических тел. Каждый раз они возникают в огромных количествах, но шанс одному из них прореагировать с атомом в детекторе крайне мал. Так что детекторы должны быть огромными — самые большие достигают нескольких тысяч тонн, т.е. содержат порядка 10^{33} атомов. Способ прямого наблюдения взаимодействия заключается в «поощрении» части атома, испытавшей удар нейтрино, к излучению одного или нескольких фотонов. Последние могут быть легко зарегистрированы фотоэлектронными умножителями (ФЭУ), размещенными вокруг детектора. ФЭУ — это как бы электролампа наоборот: он превращает свет в электричество. Один фотон, попавший в ФЭУ, порождает маленький электрический импульс, обычно величиной в несколько милливольт и длительностью в несколько наносекунд. Существуют также методы непрямой регистрации нейтрино, но здесь нет места описывать их.

Принципиально детектор представляет собой большой бак воды, окруженный тысячами ФЭУ. Когда нейтрино ударяет в электрон, входящий в состав атома, электрон вылетает со скоростью, большей скорости света в данном веществе (0,75 *c* в воде). После вылета электрон испускает свет (эквивалентный звуковой ударной волне) в форме конического ливня синих и ультрафиолетовых фотонов, называемый черенковским излучением — по имени его российского открывателя П.А. Черенкова, который (вместе с И.Е. Таммом и И.М. Франком) получил Нобелевскую премию в 1958 году. Эти фотоны регистрируются ФЭУ, и таким образом мы «видим» нейтрино. На практике эти нейтринные детекторы часто помещают глубоко под землей — чтобы обеспечить мощный каменный щит, блокирующий космические мюоны, которые могут вызывать сильные вспышки света, происходящие гораздо чаще, чем слабые вспышки от нейтрино.

Солнечные нейтрино

Единственная часть Солнца, которую мы можем наблюдать непосредственно, — его поверхность. Она представляет собой сферу радиусом 700000 км, излучающую при температуре 6000 К. Однако в единственной правдоподобной модели Солнца (которая у нас есть), базирующейся на работе Бете, энергия возникает глубоко в центральной области Солнца, скрытой от прямого наблюдения. Поток нейтрино — одно из немногих проверяемых предсказаний этой модели, ведь нейтрино могут покидать центральную область Солнца без всякого рассеяния. Напротив, тепло и свет, генерируемые в центральной области, совершают случайные блуждания к поверхности длительностью 10000 лет.

Мы ожидаем увидеть колоссальный поток низкоэнергетических нейтрино и меньший поток нейтрино более высоких энергий. Проблема заключается в том, что два эксперимента, спланированные так, чтобы увидеть высокоэнергетические нейтрино (водяной черенковский детектор в Японии и детектор другого типа в Южной Дакоте, США), регистрируют только малую часть того, что ожидалось (примерно половину и треть, соответственно). И два эксперимента с детекторами, чувствительными к низкоэнергетическим нейтрино (называемым *pp*-нейтрино; см. задачу 1), также дают, как сообщалось, результаты ниже ожидавшихся.

Это состояние дел известно как проблема солнечных нейтрино. Теоретики, занимающиеся физикой Солнца, утверждают, что они понимают Солнце так хорошо, по столь многим различным параметрам наблюдений — температура и состав поверхности, колебания (да, Солнце дрожит весьма выразительно!), что изменение их моделей для согласования с низким нейтринным потоком уничтожит хорошее согласие в других областях.

Поэтому некоторые физики — специалисты по элементарным частицам попытались понять ситуацию, рассматривая модель, в которой разные типы нейтрино имеют разные массы. В соответствии с этой моделью, некоторая часть ν_e на пути к детектору может превратиться в ν_μ и ν_τ. А поскольку существующие детекторы не очень чувствительны к нейтрино других, чем ν_e, типов, так что изменившиеся нейтрино улетят в основном незамеченными. Это — эффект МСВ, названный так по имени двух россиян и одного американца, которые его придумали: Станислава Михеева, Алексея Смирнова и Линкольна Вольфенстайна.

Даже крохотная масса нейтрино может иметь космологическую значимость, будучи умноженной на плотность нейтрино во всей Вселенной. Нет необходимости говорить, что космологи, в их вечном поиске «темной материи», следят за ситуацией очень внимательно. Возможно, здесь и обнаружится способ «измерить» это море ненаблюдаемых нейтрино.

Сверхновая 1987А

Довольно смело с нашей стороны описывать происходящее внутри Солнца. И еще более дерзко утверждать, что мы знаем, как звезда *взрывается*. Однако к концу 1986 года астрофизики неоднократно высказывали утверждение, что если звезда определенного типа взрывается на определенном расстоянии, то они могут сказать нам, как много нейтрино будет отмечено существующими детекторами. При гигантских давлениях, вызванных коллапсом звездного ядра, атомы водорода оказываются стиснутыми между собой настолько плотно, что электрон и протон превращаются в нейтрон и нейтрино, которое быстро ускользает. На самом деле нейтрино и еще не наблюдавшиеся гравитационные волны — это единственные объекты, которые могут вылететь при начальном коллапсе. Поскольку вы получаете одно нейтрино на атом во всем ядре звезды, число испущенных нейтрино колоссально — порядка 10^{57} для средней Сверхновой. После того как ядро сжимается до огромной плотности, оно «пружинит» и расширяется, вызывая ударную волну, которая взрывает звезду. Это то, что мы видим через оптические приборы, и во время этого взрыва, как мы думаем, освобождаются дополнительные нейтрино.

23 февраля 1987 года Ян Шелтон из Торонтского университета, Канада, наблюдал визуально Сверхновую в Большом Магеллановом облаке, в 170000 световых лет от нас. В двух больших водяных детекторах, расположенных в глубоких в шахтах в Огайо, США, и в Японии (оба они в то время готовились для других целей), в течение одного и того же промежутка времени в несколько секунд появились двадцать следов, указывающих на Большое Магелланово облако. Это (как вы увидите из задачи 2) было почти ожидаемое число. Таким образом родилась новая наука — нейтринная астрономия.

Садберийская нейтринная обсерватория

Новая наука требует специально для нее предназначенного оборудования. Первая задача этой новой науки — прояснить проблему солнечных нейтрино, а это означает сконструировать детектор, имеющий большую скорость отсчетов, так что результаты будут статистически значимы, и который сможет различать различные типы нейтрино, так что можно будет проверить, верна ли гипотеза МСВ. Вторая его работа будет состоять в наблюдении любых астрономических событий, в которых рождаются нейтрино.

Из воды получается хороший детектор, но уже давно известно, что еще лучше работает тяжелая вода. (Тяжелая вода химически подобна обычной воде, но ядра обычного водорода замещены дейтронами. Поэтому она имеет молярную массу 20 вместо 18, т.е. ее плотность на 10% больше.) Это происходит потому, что нейтрино взаимодействуют с нейтронами в ядрах тяжелого водорода, и вероятность этого взаимодействия в 100 раз больше вероятности взаимодействия с электронами. К тому же тяжелая вода взаимодействует со всеми нейтрино, так что их можно различить. Подарок физикам-нейтринщикам? Может быть, но при цене 300 долларов США за литр необходимые 1000 тонн выглядели безнадежно дорогими.

Рис. 1. Садберийская нейтринная обсерватория (рисунок художника)

Однако оказалось, что в настоящее время ядерная энергетика Канады имеет большой резерв тяжелой воды.[1] Еще в 1984 году в результате искусно проведенных переговоров канадских и американских ученых с ответственными представителями правительства Канады был не только согласован долгосрочный «займ» в 1000 тонн тяжелой воды, но и оговорено предоставление штольни на глубине двух километров в Садбери, провинция Онтарио, для ее размещения.

Теперь, десятью годами позже, остается только один год до момента, когда Садберийская нейтринная обсерватория (СНО) стоимостью в 60 миллионов долларов, сконструированная 55 физиками (и неисчислимым количеством инженеров, техников и студентов) из Канады, Соединенных Штатов и Великобритании, начнет собирать данные. На рисунке 1 представлен набросок, сделанный художником, на котором изображен примерный вид СНО, раз-

[1] *Канадские реакторы используют тяжелую воду как замедлитель нейтронов.*

мещенной под землей. Центральная сфера, сделанная из акрила толщиной 5 сантиметров, будет содержать 1000 тонн тяжелой воды. Вне ее находятся 6000 тонн обычной воды для механической поддержки и защиты от естественной радиоактивности пород. В обычной воде находятся десять тысяч ФЭУ, диаметром 20 сантиметров каждый, обращенные внутрь. Подземное помещение имеет высоту 30 м и поперечник 22 м.

На рисунке 2 изображен вид экрана компьютера при работе программы, моделирующей действие СНО, которая воспроизводит то, что мы ожидаем от настоящего детектора.

Когда СНО наконец завершит сбор данных в августе 2000 года, мы ожидаем получить

— решение проблемы солнечных нейтрино;

— измерение массы нейтрино и подтверждение или опровержение гипотезы МСВ (что добавит горючего в дебаты о «недостающей массе» Вселенной, в то же время объясняя коечто о взаимоотношениях триплетов элементарных частиц);

— прояснение картины ядерных процессов в центральной области Солнца и, в результате, определение температуры этой области.

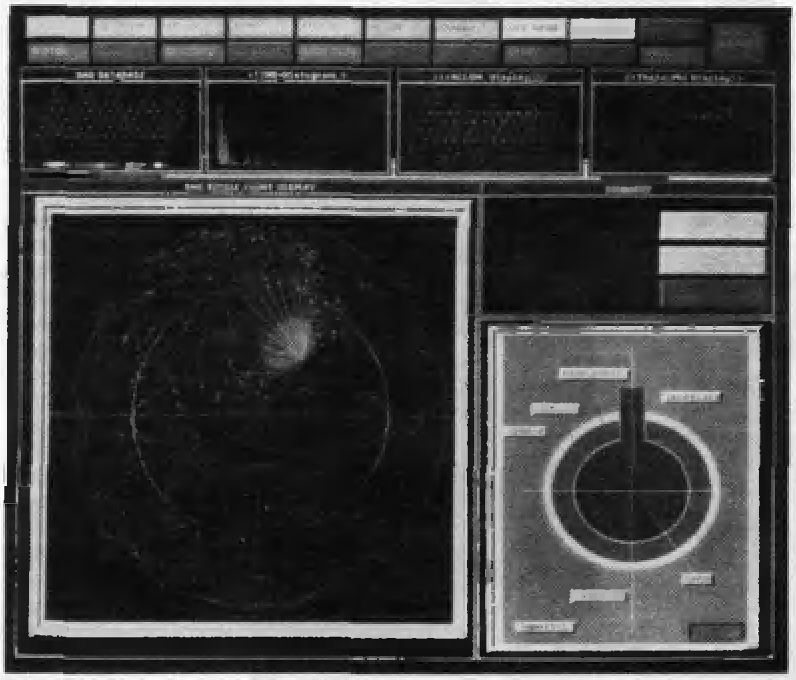


Рис. 2. Экран компьютера при работе программы, моделирующей действие СНО

Заметим, что мы сознательно назвали наш детектор «обсерваторией». Мы ожидаем увидеть что-нибудь неожиданное. Не беспокойтесь, мы не сможем привести все в идеальный порядок. Останутся еще непристроенные детали, чтобы ввести вас, следующее поколение физиков, в лабиринты неразгаданной тайны.

Для напоминания об этом я оставляю вас с двумя задачами для самостоятельной работы.

Задача 1. Солнечные нейтрино в Вашем теле.

Главная реакция, генерирующая энергию и нейтрино на Солнце, — это реакция водородного синтеза

$$4p \rightarrow {}^4\mathrm{He} + 2e^+ + 2\nu_e + \text{энергия}.$$

Заметьте, что это просто удвоенная реакция, приведенная выше. He — это ядро атома гелия, содержащее 2 протона и 2 нейтрона. В среднем гелий и $2e^+$ уносят 26,3 МэВ кинетической энергии, которая вызывает нагрев Солнца (и нас). Каждое нейтрино уносит с собой 0,2 МэВ в среднем, но они взаимодействуют с материей столь нечасто, что покидают Солнце не внося никакого вклада в его нагрев. Солнечная постоянная — мощность, приходящая от Солнца на единицу поверхности на верхней границе Земной атмосферы, — равна 1377 Вт/м^2. Один МэВ — это стандартная единица энергии в субатомной физике, равная $1,6 \cdot 10^{-13}$ Дж.

Каков поток этих *pp*-нейтрино на Земной поверхности? Не пугайтесь огромности вашего ответа!

Оцените, сколько нейтрино находится внутри Вашего тела в любой момент времени. Вы можете считать, что нейтрино движутся со скоростью света; если они и имеют крошечную массу, предположение остается достаточно точным.

К сожалению, эти нейтрино слишком малоэнергичны, чтобы быть замеченными СНО. Однако два других эксперимента были поставлены, чтобы заметить их. Одна из установок действует сейчас в Италии, другая в России. Эти большие и сложные *устройства должны отмечать 1,2 нейтрино* в день. Но одна отмечает 0,2 — 0,8, другая еще меньше. Так что солнечные нейтрино все еще представляют проблему, но будем надеяться, что не надолго.

Задача 2. Нейтрино от Сверхновой.

Когда взрыв Сверхновой 1987А наблюдался на Земле в феврале 1987 года, это был первый случай, когда были замечены нейтрино от такого события. Всего 20 нейтрино были зарегистрированы в двух подземных детекторах общим объемом 4000 м^3. Конечно, вероятность зарегистрировать каждое отдельное нейтрино крайне мала, поскольку средняя длина его свободного пробега в воде равна приблизительно одному световому году. Иначе говоря, вероятность детектирования равна отношению длины пути в воде к средней длине свободного пробега. Принимая, что Сверхновая была на расстоянии 170000 световых лет от Земли, определите, сколько нейтрино было испущено при взрыве.

Подсказка: если Вы не чувствуете себя уверенно, имея дело со средней длиной свободного пробега, мысленно превратите детектор в трубку, длина которой равна одной средней длине свободного пробега, направленную на Сверхновую, при сохранении объема детектора. Теперь любое нейтрино, входящее в детектор, имеет, в среднем, единичную вероятность быть зарегистрированным. Это дает правильный ответ, потому что на самом деле крохотный шанс провзаимодействовать зависит только от числа атомов в детекторе, а не от его формы.

Перепечатывается из журнала QUANTUM (июль/август 1993).

Перевод с английского А. Уланцева.

Примечание

Для полноты картины хочется обратить внимание читателей и на другое направление физики нейтрино — на реакторную нейтринную физику. Дело в том, что кроме Солнца и звезд испускать нейтрино могут и искусственные, созданные человеком, объекты. Самый мощный из них — это атомный реактор. В реакторе в процессе деления тяжелых ядер урана на легкие осколки постоянно происходит превращение избыточных нейтронов, входящих в состав тяжелых ядер, в протоны с одновременным рождением нейтрино, точнее — антинейтрино. Родившись в реакторе, антинейтрино свободно выходят из него через защиту наружу, так как они очень слабо взаимодействуют с веществом. Именно эти искусственно полученные нейтрино и были впервые наблюдены в 1956 году Коуэном и Райнесом, как описано в статье. Для детектирования антинейтрино использовалась очень чистая вода, в которой наблюдали реакцию с рождением нейтрона и позитрона:

$$\tilde{\nu}_e + p \to e^+ + n. \qquad (*)$$

До конца 70-х годов с реакторными нейтрино работала только одна группа в мире — группа Райнеса. Затем эксперименты стали проводиться во Франции (на реакторе в Буже) под руководством Р. Мёссбауэра. Сейчас в этом направлении очень продуктивно работают две группы из Института Курчатова: одна группа базируется на *Ровенской АЭС (на Украине), вторая* — под Красноярском.

Проводить исследования с реакторными нейтрино крайне трудно, но интересно. Во-первых, у нас в руках оказывается очень мощный искусственный источник нейтрино, которым можно управлять, изменяя мощность реактора. Во-вторых, антинейтрино от реакторов имеют принципиально другую структуру, нежели от ускорителей (здесь рождаются электронные антинейтрино, тогда как в ускорителях — в основном мюонные нейтрино и антинейтрино), и их используют для исследования новых классов слабых процессов. Среди них наиболее интересны процессы, в которых нейтрино не превращается в заряженную частицу, как в реакции (*), а рассеивается на электронах или ядрах атомов вещества (как свет рассеивается на атомах). В этих процессах физики встречаются с самыми малыми из известных в мире сечений взаимодействия (порядка $10^{-44} - 10^{-46}$ см^2), которые играют главную роль при взрывах Сверхновых, в охлаждении и эволюции нейтронных звезд, рождающихся в таких взрывах.

Программа экспериментов, выполняемых в Красноярске и Ровно (рис.3), включает измерение характеристик основополагающей реакции (*) с точностью 1 — 2%, спектра антинейтрино от действующих реакторов, сечения взаимодействия антинейтрино с электронами и с ядрами тяжелого изотопа водорода — дейтерия. Последние составляют основу для проектирования нейтринной обсерватории в Садбери, о которой рассказывалось в статье. Трудность выполняемых экспериментов связана с тем, что полезные события в детекторах массой в 100 кг вещества, например, в случае взаимодействия нейтрино с электронами составляет 1 — 2 в

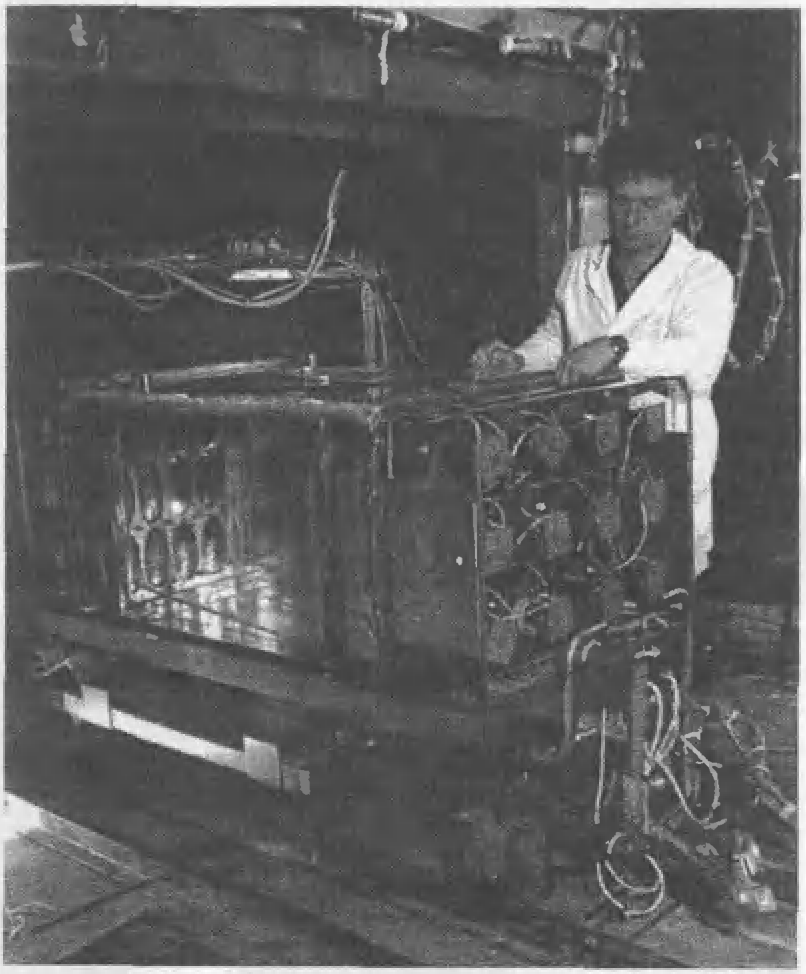


Рис. 3. В нейтринной лаборатории на Ровенской АЭС завершается монтаж первого спектрометра антинейтрино (весна, 1982 г.)

день на фоне около десятка случайных событий другой природы.

Развитие техники детектирования позволило начать изучение возможности превращения электронных антинейтрино на лету в другие — мюонные или тауонные. Для этого детектор нейтрино постепенно отодвигают от реактора и исследуют изменения нейтринного потока и его спектра с расстоянием. Такие эксперименты впервые проводились во Франции группой Мёссбауэра в начале 80-х годов на расстояниях 38, 46 и 65 метров. Это очень трудные эксперименты, так как поток нейтрино от реактора падает с расстоянием квадратично. Рекордное расстояние было достигнуто в Красноярске, где удалось наблюдать нейтрино на расстоянии 321 метра, а счет составлял несколько полезных событий в день.

Еще одна, уже практическая, задача, решаемая в реакторных экспериментах, связана с прозрачностью самой мощной реакторной защиты в нейтринных лучах. Это позволяет разместить нейтринный детектор за защитой и свободно наблюдать с его помощью за работой и изменениями состава реакторного топлива, не вмешиваясь в его работу. Такие эксперименты уже осуществлены и позволяют надеяться в будущем на создание совершенно новых методов контроля над реакторами.

Зам. председателя Научного совета РАН по нейтринной физике, доктор физико-математических наук
Ю. Гапонов


Тишков

Открытие Сары Барабу

А. КОТОВА

Саре Барабу, известной животноводке с острова Тимбукту[1], наскучили эксперименты по превращению коровы Му в марабу и обратно, и она решила расширить свой зверинец. В надежде приобрести что-нибудь оригинальное фрекен Барабу выписала журнал «Practical methamorphoses», знаменитый своей рекламной вкладкой.

И вот — удача! «Продаются карликовые неедяки, едяки и прожорлики для декоративного разведения в домашних условиях. Неприхотливы, чистоплотны, идут на свист.» Решив, что едяки вряд ли представляют научный интерес (все мы в какой-то степени едяки), Сара немедленно отправила по указанному адресу заявку на неедяк и прожорликов.

Как и многие крупные ученые, она была рассеянна и не заметила поэтому напечатанных мелким шрифтом слов: «оптовые поставки»...

...Через несколько месяцев (путь к Тимбукту долог и чреват опасностями) в бухте Тарарахте бросил якорь большой пароход. Он был так велик, что корова Му и марабу испугались и на всякий случай залезли на пальму. Фрекен Барабу поспешила к берегу.

— Распишитесь здесь, — буркнул мрачный моряк, протягивая Саре мятую почтовую квитанцию.

Обмакнув перо марабу в кисломолочные чернила, наша героиня вывела поперек квитанции имя, фамилию и пару научных званий для солидности.

— Забирайте вашу живность, — заметно повеселев, сказал моряк, козырнул и прыгнул в шлюпку. Сара обернулась. На песке стоял неимоверных размеров контейнер. «Я заказывала карликовых...» — мелькнула растерянная мысль.

Пароход загудел, в берег ударилась волна.

— Стойте! — закричала Сара. Поздно. Ее не услышали.

Му и марабу, увидев, что корабль уходит, слезли с дерева и подошли к хозяйке. Пока корова вытирала слезы фрекен Барабу кончиком хвоста, любопытный марабу вскрыл контейнер, отковырнув замок, как рычагом, своим длинным клювом.

В стеклянном террариуме объемом с хорошую цистерну копошились зеленые неедяки длиной с мизинец каждый. Среди них неспешно прогуливались прожорлики, ростом немного покрупнее, фиолетовые в оранжевую крапинку. Время от времени с громким урчанием какой-нибудь прожорлик кидался на ближайшего к нему зелененького малыша и заглатывал его, не жуя.

— О боже! — воскликнула Сара. — Они сожрут всех неедяк!

К вечеру зверушки были отделены друг от друга и рассажены в два больших корыта. Когда какой-нибудь шустрый прожорлик пытался выбраться, Му ловким щелчком хвоста сбрасывала его обратно.

Утром фрекен Барабу первым делом пошла проведать новых обитателей острова Тимбукту.

Неедяки за ночь успели расплодиться так, что не могли ходить по корыту. Они сидели, плотно прижавшись друг к другу, и жалобно пищали. Прожорликов, напротив, стало заметно меньше.

Спешно вытряхнув неедяк в террариум, Сара присела возле него на камень и задумалась.

Смешные шестилапые неедяки грелись на солнышке, подставляя его лучам окрашенные хлорофиллом спинки.

— Му! — сказала Му, указывая рогом на крупного, не меньше трех сантиметров в холке, зверька. Зверек явно беспокоился. Вот он начал извиваться, задрыгал левой задней ножкой и вдруг с громким треском лопнул вдоль хребта. С десяток маленьких неедячек, точные копии лопнувшего, высыпались на дно террариума и разбежались. Тонкая кожица мамаши (или папаши, кто их, однополых, разберет) в считанные секунды заросла. Сара поискала глазами детенышей и не нашла их. Они уже достигли размеров взрослой особи.

Только сейчас фрекен Барабу поняла, что за звук мешал ей размышлять. Это размножались неедяки.

Прожорлики в корыте убывали. Они и не думали заводить детей, худели и скучнели на глазах. Время от времени кто-нибудь из них ложился на бок и закрывал глазки, потом его шкурка начинала бледнеть. Когда она становилась совсем серой, его сосед с отвращением на осунувшейся морде обнюхивал несчастного и с тяжелым вздохом съедал.

Сердобольный марабу предлагал прожорликам рыбу, мух и улиток. Они вяло глотали еду, но не выздоравливали.

— Все ясно, — сказала Сара Барабу, взвесив факты. — Неедяки в отсутствие прожорликов размножаются с неимоверной скоростью. Этак мне через неделю-другую придется отдать им весь мой остров. С другой стороны, прожорлики в отсутствие неедяк неотвратимо вымирают. А они такие хорошенькие, крапчатые! Так дело не пойдет.

Несколько дней биостанция острова Тимбукту жила напряженной научной жизнью. Неедяк подсаживали к прожорликам. Прожорликов — к неедякам. Марабу ходил за Сарой с блокнотом под крылом и услужливо подставлял свой хвост, когда ей нужно было новое перо для записей. Му деловито доилась, обеспечивая Сару молоком для питья и простоквашей для изготовления чернил.

Наконец, данных накопилось достаточно, чтобы сделать первые выводы.

Неедяки размножались через правильные промежутки времени и приносили одинаковое количество неедячек в каждый помет.

Прожорлики вымирали с постоянной скоростью.

Когда прожорлика подсаживали к неедякам, он оживлялся и приступал к охоте. Но главное — слопав несколько шестиногих, он сносил яйцо! Вскоре из яйца вылуплялся юный прожорлик, аппетит которого не уступал аппетиту родителя.

Марабу, отличавшийся острым умом, долго пыхтел, царапая когтем песок, и

[1] *Об этой даме даже сложена песня, прославляющая ее успехи в практической биологии (вы могли слышать ее в исполнении ныне распавшейся группы «Секрет»). Слова песни приведены также в книге С. Хопп «Волшебный мелок».*

после доброго часа напряженного труда показал хозяйке выведенный им закон:

$$v_{н} = kн - aнп$$
$$v_{п} = -lн + bнп$$

Прокомментировать свой результат он не мог, поскольку не умел говорить, но Сара быстро сообразила, что к чему.

«Если в корыте присутствуют лишь неедяки и число прожорликов $п = 0$, — строчила фрекен Барабу в своем блокноте, — скорость размножения неедяк пропорциональна их числу: $v_{н} = kн$. Если прожорлики в корыте есть, они поедают неедяк со скоростью, пропорциональной количеству неедяк и количеству прожорликов: $-aнп$; поэтому скорость изменения численности неедяк $v_{н}$ равна сумме скоростей размножения и поедания:

$$v_{н} = kн - aнп.$$

Аналогично, в отсутствие неедяк прожорлики вымирают со скоростью, пропорциональной их числу; в присутствии же неедяк перерабатывают их в новых прожорликов со скоростью $bнп$...»[2]

Фрекен Барабу предвкушала большое научное открытие...

Между тем хлопот со зверушками было очень много. Сара, марабу и корова дежурили по очереди возле террариума и корыта, чтобы время от времени отсыпать накопившийся излишек неедяк прожорликам на обед. Стоило зазеваться — и хищники начинали голодать, тосковать и угрожающе бледнеть. Фрекен совершенно сбилась с ног, корова засыпала на ходу, у марабу под глазами появились нездоровые тени. Искусственное поддержание равновесия прожорликов и неедяк становилось непосильным.

С тяжелым вздохом Сара взялась за расчеты. Ей всегда претили точные науки, и в своих биологических опытах она предпочитала полагаться на интуицию. Хорошо, что верный марабу, талантливый математик-самоучка, постоянно был под рукой.

Раз пятнадцать ошибшись в арифметике, фрекен Барабу вычислила наконец, что количество животных будет постоянным, если посадить в посудину l/b неедяк и k/a прожорликов. Наша героиня быстро пересчитала зверушек. Увы! Реальные цифры отличались от столь желанного равновесного состояния...

Горе Сары было безмерно. Напрасно Му совала ей под нос стакан с молоком и сочувственно гладила ее по голове теплым дружеским копытом. Марабу заложил за спину крылья и задумчиво бродил вокруг пальмы.

Вдруг он пронзительно вскрикнул, подпрыгнул и захлопал крыльями. Сара с надеждой подняла голову. У ее пернатого товарища явно возникла блестящая мысль.

Теперь марабу быстро вышагивал вокруг дерева, ведя клювом по песку. Описав полный круг, он остановился и попытался почесать ногой в затылке. Кончилось это плачевно — бедняга упал, подняв облачко пыли. Дамы бросились поднимать его. Отряхнувшись и запорошив песком корове глаза, марабу потянул Сару за рукав.

Вокруг дерева была начерчена незамкнутая линия. Марабу заквакал, тыча в нее клювом. Фрекен Барабу недоуменно смотрела на него.

— Что такое, милый? Объясни подробнее! — попросила она.

Марабу сердито плюнул на песок. Потом с утомленным видом учителя, втолковывающего тупице элементарные вещи, принялся рисовать. На пляже появился крест из двух кривоватых линий. Возле одной был нарисован странный зверь с шестью ногами, возле другой — с четырьмя.

— Координатные оси? — нерешительно спросила Сара. — Прожорлики и неедяки?

— Ква, — кивнул марабу.

Пальма росла в положительном квадранте. Возле нее марабу нацарапал: $(l/b,\ k/a)$. Это было равновесное состояние. Кривая, изгибавшаяся вокруг дерева, начиналась в точке с абсциссой l/b и ординатой, меньшей k/a.

Придирчиво оглядев свое произведение, марабу решительно наступил на кривую, огибавшую волосатый ствол. Отошел, взглянул, вернулся и наступил снова, уже в другом месте. Повторив эту процедуру еще дважды, защелкал клювом в знак того, что чертеж готов. Он выглядел так (рис.1).

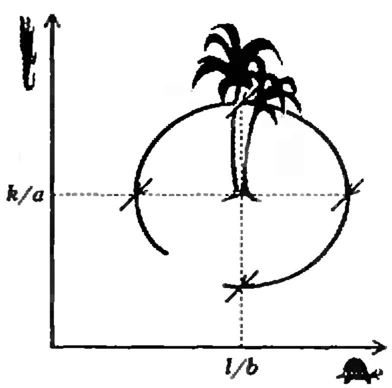


Рис. 1

Фрекен Барабу остановилась у первого по счету отпечатка птичьей лапы. Кажется, что-то стало проясняться.

«Если бы неедяк было как раз l/b штук, а прожорликов меньше, чем k/a, — записала она в свой блокнот, — скорость изменения численности прожорликов была бы нулевой. Это видно из формулы для $v_{п}$. Зато скорость изменения числа неедяк была бы положительна. В самом деле:

$$п < k/a,$$
$$kн - aпн > kн - aн\,k/a = 0.$$

Так что неедяки благополучно будут плодиться. Но как только их стало бы больше, чем l/b, скорость размножения прожорликов тоже стала бы положительной:

$$н > l/b,$$
$$-lп + bнп > -lп + bl\,п/b = 0.$$

Прожорлики начнут откладывать яйца...»

— Ура! — закричала Сара и отбросила блокнот.

Марабу покачал головой и ткнул клювом во второй свой след на кривой.

— Ох, правда, — согласилась Сара, — когда прожорликов станет k/a особей, прирост неедяк остановится:

$$v_{н} = kн - aнп = kн - ak\,н/a = 0.$$

А прожорлики будут исправно нестись:

$$v_{п} = -lп + bнп > 0,$$

потому что неедяк-то больше, чем l/b.

Как только количество прожорликов перевалит за k/a, они начнут съедать больше шестиножек, чем те успеют народить:

$$v_{н} < kн - akн/a = 0.$$

Неедяк будет все меньше, а прожорликов все больше...

Марабу кивнул и показал на третий след.

— Ква? — требовательно спросил он.

— Здесь? Здесь численность неедяк упадет снова до l/b особей, и прожорлики перестанут плодиться... Понимаю, — облегченно вздохнула фрекен Барабу. — Неедяк будет все меньше, но и прожорликов — тоже. А когда коли-

[2] Му клянется, что помнит, чему были равны a, b, k и l, но ей нельзя доверять — она с детства очень забывчива. Фрекен же Барабу принципиально не сообщает конкретных цифр, утверждая, что с точки зрения науки это совершенно неважно.

чество прожорликов сократится до k/a, неедяки перестанут убывать... Потом они снова начнут размножаться быстрее, чем их съедают, и весь цикл повторится снова! Замечательно! Пойду ссыплю всех зверей в террариум.

— Ква-а... — сомнение в голосе марабу было столь явным, что Сара начала искать ошибку в своем рассуждении. Была, была ошибка! Когда весь цикл размножения-поедания-вымирания обойдет вокруг пальмы, неедяк-то и правда станет l/b особей, но неизвестно, сколько будет прожорликов!..

что сил ее больше нет пасти эту мелюзгу, что она устала, хочет спать и, между прочим, недоена! А если не подоиться вовремя, может пропасть молоко!

Фрекен Барабу оставила марабу размышлять и делать выводы, а сама поспешила сменить Му на боевом посту.

Марабу потерял покой. Он бродил по пляжу, исчерчивая клювом и истаптывая лапами песок. Сара и Му освободили его от дежурств. Им стало еще тяжелее, но обе понимали, что лишь

— Ты нашел... выход?.. — дрожащим от слабости голосом спросила фрекен Барабу.

— Ква, ква! — радостно ответил марабу.

Когда Сара немного окрепла, марабу попытался втолковать ей, как он разрешил проблему. Он квакал, хлопал крыльями, рисовал диаграммы и шутя брал производные. Наконец фрекен Барабу настолько разобралась в его рассуждениях, что смогла записать их. «Кривая имени марабу задается таким уравнением:

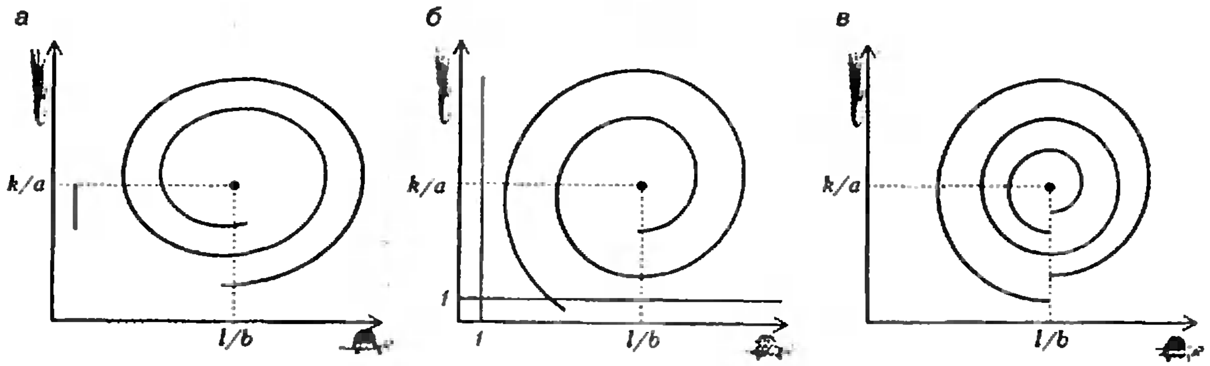


Рис.2

Сара задумчиво рисовала на песке круги и спирали. Только что, казалось, проблема содержания ее беспокойных малюток готова была разрешиться сама собой, и вот... У нее получилось несколько вариантов. Одни из них были плачевными для зверушек, другие — обнадеживающими. Кривая имени марабу (так Сара назвала ее) могла вести себя как угодно. Если после каждого оборота число прожорликов будет увеличиваться, за зверей можно было не беспокоиться — они не вымрут (рис.2,*а*). Если оно будет убывать, рано или поздно умрет последний неедяка или последний прожорлик (рис. 2,*б*), тогда останется лишь оплакать прожорликов (вслед за неедяками, если они вымрут раньше), либо уезжать с острова (если раньше погибнут прожорлики).

— А если круг замкнется? — спросила себя фрекен Барабу. — Ведь, может быть, для разных исходных количеств животных и картинки разные? И моих милых крошек будет больше или меньше, чем надо?..

Она не успела как следует обдумать, чем это грозит милым крошкам[3]. Жалобным мычанием корова возвестила,

математический гений их товарища может спасти их. Прожорлики требовали пищи. Неедяки — расширения жилплощади. У Му упали надои. У Сары пропал аппетит.

Она проклинала тот день, когда так опрометчиво телеграфировала продавцу чистоплотных, неприхотливых, идущих на свист домашних животных.

Еще через несколько дней Сара упала возле террариума и не смогла встать. Ноги отказывались служить ей. В голове было пусто. Лишь на мгновение появился и сразу исчез слабый проблеск мысли: «Все. Это конец...»

Она очнулась от ласкового прикосновения шершавого и влажного коровьего языка. Марабу, отощавший, взъерошенный, но так и светившийся от счастья, пододвигал к ней клювом стакан парного молока. Сара села, медленно выпила молоко и огляделась. Корыто было пусто. Все зверье сидело в террариуме, как и в день прибытия на Тимбукту.

[3] *Посмотрите на рисунок 2,в и попробуйте сами разобраться, опасна ли изображенная ситуация или нет.*

$$-l\ln н + bн - C = k\ln п - aп.$$

Здесь C — произвольное постоянное число, и при каждом C есть такая кривая. Как мой ученый друг додумался до этой формулы, ума не приложу. Но она верна. Вот как он объясняет, почему.

«Продифференцируем обе части этого выражения по времени», — сказал он мне. Не понимаю, как можно брать производную от числа зверей, — ведь количество неедяк или прожорликов всегда целое. Но результат говорит сам за себя: получается, что

$$-\frac{l}{н}н'(t) + bн'(t) = \frac{k}{п}п'(t) - aп'(t), \qquad (1)$$

или

$$\frac{н'(t)}{п'(t)} = \frac{kн - aнп}{-lп + bнп}. \qquad (2)$$

«Посмотри-ка теперь на наш закон размножения-поедания:

$$v_н = kн - aнп,$$

$$v_п = -lп + bнп.$$

Раздели первое уравнение на второе. Разница есть?» — так сказал мне мой верный марабу. Вышло, что скорость изменения численности зверушек совпадает с компонентами скорости движения по кривой... Я возразила, что нельзя делить на v_n в тех точках, где $\text{н} = l/b$. Но мой друг говорит, что это не страшно. В таких точках, ответил он, мы забудем об уравнении (2) и сразу посмотрим на уравнение (1):

$$-\frac{l}{l}b\text{н}' + b\text{н}' = \frac{k}{\text{п}}\text{п}' - a\text{п}',$$
$$\frac{k}{\text{п}}\text{п}' - a\text{п}' = 0.$$

Это значит лишь, что $\text{п}' = 0$ или $\text{п} = k/a$. Так что уравнение (1) равносильно закону размножения-вымирания. (А производные $\text{п}'(t)$ и $\text{н}'(t)$ выражают скорости изменения количества прожорликов и неедяк! Впрочем, до этого я и сама могла додуматься.)

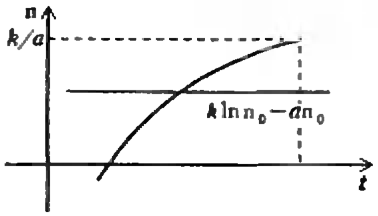


Рис.3

«Хорошо, — сказала я ему. — Ты нашел уравнение кривой твоего имени. И что же это нам даст?» Он объяснил мне, и я, кажется, поняла.

Предположим, что сначала в террариуме сидят н_0 неедяк и п_0 прожорликов. Кривая марабу для этого случая такова, что

$$-l\ln \text{н}_0 + b\text{н}_0 - k\ln \text{п}_0 + a\text{п}_0 = C.$$

Поэтому ее уравнение можно переписать так:

$$-l\ln\text{н} + b\text{н} - \left(l\ln\text{н}_0 + b\text{н}_0 - k\ln\text{п}_0 + a\text{п}_0\right) = k\ln\text{п} - a\text{п}.$$

Найдем точку, в которую вернется кривая марабу после обхода вокруг пальмы... то есть вокруг положения равновесия $(l/b, k/a)$. Эта точка имеет координаты $(\text{н}_0, \text{п})$ на плоскости неедяк-прожорликов; кроме того, она лежит на той же кривой; поэтому

$$k\ln\text{п}_0 - a\text{п}_0 = k\ln\text{п} - a\text{п}$$

(остальные члены уравнения взаимно уничтожаются). Решим полученное уравнение!

Слева стоит конкретное число. Справа — функция от п. Найдем ее производную:

$$(k\ln\text{п} - a\text{п})' = k/\text{п} - a.$$

При $\text{п} = k/a$ она равна нулю, а при $0 < \text{п} < k/a$ она больше нуля.

Поэтому при $0 < \text{п} < k/a$ эта функция возрастает. Значит, ее график лишь в одной точке пересекает график постоянной функции

$$k\ln\text{п}_0 - a\text{п}_0,$$

и уравнение наше имеет, самое большее, одно решение (см.рис.3). А поскольку $\text{п} = \text{п}_0$ — корень этого уравнения, то это он и есть.

«Видишь теперь? — сказал марабу. — Кривая вышла из точки $(\text{н}_0, \text{п}_0)$ и вернется в нее снова. Значит, если сначала было сколько-то неедяк и сколько-то прожорликов, неважно, сколько именно, их будет ровно столько же через то время, какое понадобится на полный оборот вокруг пальмы.»

Надеюсь, я правильно поняла его.»

Сара Барабу закончила статью, озаглавленную с достоинством «Открытие Сары Барабу и марабу» и привязала свиток с текстом к ноге своего ученого друга. Тяжело взмахивая крыльями, марабу взял курс на север. Он летел в редакцию журнала «Practical methamorphoses».

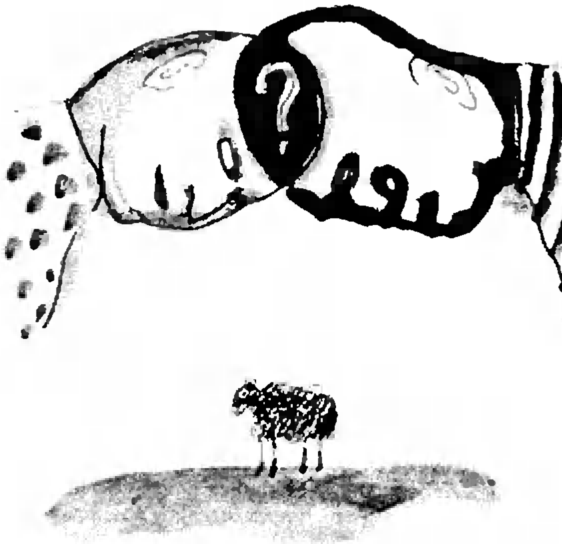
На днях к нам в «Квант» зашел печальный марабу с письмом в клюве.

«Уважаемая г-жа Барабу, — прочитали мы. — Наш консультант выражает свое восхищение способностями вашего фламинго, самостоятельно переоткрывшего классический результат, широко известный под названием системы Лотка — Вольтерра, или системы хищник — жертва... Единственное, что представляет интерес в вашей статье — это наблюдения за карликовыми прожорликами и неедяками, уникальными представителями нашей фауны, для которых модель Лотка — Вольтерра верна безо всяких допущений. Публикацию считаем нецелесообразной.»

— Ну квак, квак я вернусь к ней с этим? — скорбно проквакал марабу.

Мы пожалели его и напечатали всю эту правдивую историю.

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ



Кто вы: физик или математик?

Физик и математик летят на одном самолете из Калифорнии в Вашингтон. Каждого из них попросили по прибытии в Вашингтон представить отчет обо всем увиденном в пути. Пролетая над Канзасом, оба увидели далеко внизу черную овцу. Физик записал в блокноте: «В Канзасе водится черная овца». Математик также сделал соответствующую запись в своем блокноте: «Где-то на Среднем Западе водится овца, черная сверху».

Из книги Р.Смаллиана «Как же называется эта книга?» (М.:Мир, 1981)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июля 1994 года по адресу: 103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3 — 94" и номера задач, решения которых Вы посылаете, например М1431 или Ф1438. В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1431—М1440, Ф1438—Ф1447

М1431. С натуральным числом проделывается следующая операция: его последняя цифра отделяется, умножается на 4 и прибавляется к оставшемуся числу (скажем, из 1993 получается 211). С полученным числом проделывается то же самое, и т.д. Докажите, что если в полученной последовательности встретилось 1001, то в ней нет ни одного простого числа.
Б.Гинзбург

М1432. Докажите, что для любой последовательности положительных чисел a_n целые части квадратных корней из чисел $b_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(1/a_1 + 1/a_2 + \ldots + 1/a_n)$ все различны.
Л.Курляндчик

М1433. $ABCD$ — вписанный четырехугольник. На лучах BA и DC отложим отрезки BM и DP длиной $(AB+CD)/2$. Аналогично, на лучах CB и AD отложим отрезки CN и AQ длиной $(BC+AD)/2$. Докажите, что $MNPQ$ — прямоугольник и что его площадь равна площади $ABCD$.
Е.Гольдберг

М1434. Известно, что Земля — плоская. Верно ли, что любой выпуклый многогранник можно осветить точечным фонарем из некоторой точки пространства так, что его тень будет многоугольником, хотя бы один угол которого — острый?
Н.Козеренко, Р.Федоров

М1435. Докажите, что в любой многочлен $P(x)$ степени больше 1 можно подставить многочлен $Q(x)$ такой, что $P(Q(x))$ разлагается на два множителя (все многочлены с целыми коэффициентами).
А.Белов

М1436. Какой наибольший объем имеет тетраэдр, у которого: а) 4 ребра; б) 5 ребер; в) все 6 ребер не превосходят 1?
В.Сендеров

М1437*. Докажите, что если последовательность удовлетворяет следующим условиям:
$a_1,\ a_2,\ a_3$ — целые неотрицательные числа;
$a_{n+3} = a_{n+1} + a_n$ (при $n = 1, 2, \ldots$),
то при всех натуральных n и простых p число $a_{n+3p+1} - a_{n+p+1} - a_{n+1}$ делится на p.
Д.Андриенко

М1438. Докажите, что для любого n существует число $P(n)$ такое, что натуральное число, у которого ровно n различных простых множителей и все они больше P, не может быть совершенным. (Число называется совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей, кроме самого этого числа).
А.Сарсембаев

М1439. В треугольнике стороны равны a, b, c; медианы, проведенные к этим сторонам, — m_a, m_b, m_c. Докажите неравенства

а) $m_a/a + m_b/b + m_c/c \geq 3\sqrt{3}/2$,

б) $a/m_a + b/m_b + c/m_c \geq 2\sqrt{3}$.

Г.Алиханов, В.Сендеров

М1440*. Доска $m \times n$ клеток покрыта одинаковыми плитками размерами $1 \times k$ клеток. Разрешается вынуть любой квадрат $k \times k$ клеток (если он состоит из плиток $1 \times k$) и повернуть на 90 градусов. Докажите, что такими операциями можно добиться того, что все плитки будут лежать в одном направлении.
А.Канель

Ф1438. Лиса гонит зайца, держа курс точно на него. Заяц, как известно, косой — он думает, что удирает от лисы точно вдоль соединяющей их прямой, а на самом деле его скорость составляет все время угол 60° с этой прямой. Начальное расстояние между лисой и зайцем составляет L, скорости их одинаковы и равны v. Через какое время лиса догонит зайца? На каком расстоянии от начального положения лисы это произойдет? Как изменится ответ, если заяц окосеет до 90°? А если поправит зрение до 40°?
О. Шпырко

Ф1439. На легкой нерастяжимой нити длиной $L = 1$ м висит тяжелый маленький шарик массой $m = 1$ кг. Верхний конец нити начинают двигать по горизонтали с постоянной скоростью $v_0 = 0,5$ м/с и продолжают это до тех пор, пока нить снова не окажется вертикальной. В этот момент направление скорости верхнего конца нити меняют на противоположное, и в дальнейшем она остается равной v_0. Найдите силу натяжения нити сразу после изменения скорости конца нити. Найдите также максимальную высоту подъема шарика.
А. Зильберман

Ф1440. Два одинаковых груза связаны легкой пружиной. Грузы удерживают так, что они находятся один над другим, а пружина не деформирована. При этом центр масс системы отстоит на $H = 1$ м над столом. Грузы одновременно отпускают, и система начинает падать. На какую высоту поднимется центр масс системы после того, как нижний груз испытает абсолютно неупругий удар о поверхность стола? Известно, что вес одного из грузов растягивает пружину на $l = 0,05$ м.
В. Михайлов

Ф1441. В сосуде находится насыщенный водяной пар при 100 °С. Оцените среднее время разлета двух столкнувшихся между собой молекул на расстояние 1 см друг от друга. (Вы достаточно много знаете про этот газ — водяной пар, чтобы оценить все необходимые для решения величины не пользуясь справочником.)
З. Рафаилов

Ф1442. Тепловой цикл, проводимый с одноатомным разреженным газом, состоит из двух изохор и двух изобар. Найдите максимальный КПД такого цикла.
Ю. Кременцова

Ф1443. Разреженный газ нагревают в сосуде постоянного объема, при этом его удельная теплоемкость оказывается равной 740 Дж/(кг · К). Что это за газ?
Р. Александров

Ф1444. От катушки с проводом из сплава с высоким удельным сопротивлением отрезали два куска длиной 1 м и 3 м. Провода эти соединили параллельно и подключили к источнику питания. От левого конца одного из проводов и от правого конца другого отмерили по 0,2 м и получившиеся точки соединили куском такого же провода (длина этого куска неизвестна). Найдите отношение токов в длинных частях первых двух проводов. При какой длине провода-соединителя в нем будет рассеиваться максимальная мощность?

Ф1445. Два длинных тонкостенных непроводящих цилиндра могут свободно вращаться вокруг общей оси, как показано на рисунке 1. Радиус большого цилиндра в два раза больше радиуса малого. Цилиндры заряжают по поверхностям с одинаковой поверхностной плотностью заряда. Внешний цилиндр раскручивают до угловой скорости ω. В какую сторону и с какой скоростью будет вращаться внутренний цилиндр? Цилиндры очень легкие.
В. Михайлов

Рис. 1

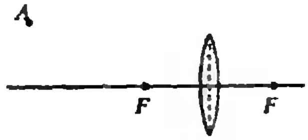


Рис. 2

Ф1446. На рисунке 2 изображены главная оптическая ось собирающей линзы, положения ее фокусов и размеры самой линзы, а также точечный источник света A. Покажите хотя бы одну точку, из которой не видны ни источник, ни его изображение в линзе. Покажите также точку, из которой одновременно видны источник и его изображение.
З. Рафаилов

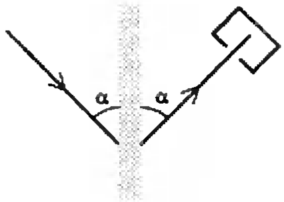


Рис. 3

Ф1447. Монохроматический рентгеновский луч падает под углом α на тонкую пластинку, как показано на рисунке 3. Рассеянный луч фиксируется приемником под таким же углом α. Найдите разность длин волн падающего и рассеянного излучений.
Д. Кример

Решения задач М1401 — М1410, Ф1418 — Ф1427

М1401. *На дуге BC окружности, описанной около треугольника ABC (не содержащей A), взята точка K. Пусть NK и MK — биссектрисы треугольников AKB и AKC. Докажите, что прямая MN проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.*

Выпишем условие, при котором прямая MN (где M и N — точки на сторонах угла A) пересекает биссектрису в заданной точке Q (рис. 1). Положим $AM = x$, $AN = y$, $AQ = q$, $\angle MAN = 2\alpha$. Сумма площадей треугольников AMQ и ANQ равна площади треугольника MAN; отсю-

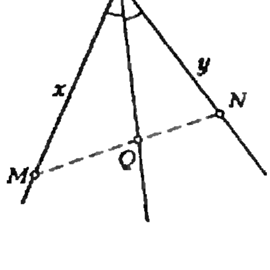


Рис. 1

да $xq + yq = 2xy\cos\alpha$, или $1/x + 1/y = 2\cos\alpha/q$. (Это — формула для вычисления биссектрисы q треугольника по двум сторонам x, y и углу 2α между ними.) Таким образом, чтобы доказать, что в нашей задаче прямые MN пересекают биссектрису в одной и той же точке, достаточно проверить, что величина $1/AM + 1/AN$ постоянна.

Один из способов доказать это — использование теоремы синусов. Пусть d — диаметр круга, $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma$, $\angle ABK = \varphi$. Тогда $AK = d\sin\varphi$,

$$AM = d\sin\varphi\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin(\varphi+\gamma)},$$

$$AN = d\sin\varphi\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(\pi-\varphi+\beta)} = d\sin\varphi\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(\varphi-\beta)},$$

поэтому величина

$$\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}=\frac{1}{d}\left(\frac{\sin(\varphi+\gamma)}{\sin\varphi\sin\gamma}+\frac{\sin(\varphi-\beta)}{\sin\varphi\sin\beta}\right)=$$

$$=\frac{1}{d}(\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\varphi+\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\varphi)=\frac{1}{d}(\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\beta)$$

действительно не зависит от φ.

Еще один способ, вместо тригонометрии, использует теорему Птолемея. По свойству биссектрисы имеем:

$$\frac{AB-x}{x}=\frac{BK}{AK},$$

или

$$\frac{AB}{x}=1+\frac{BK}{AK}. \qquad (1)$$

Аналогично

$$\frac{AC}{y}=1+\frac{CK}{AK}. \qquad (2)$$

По теореме Птолемея $BK\cdot AC + CK\cdot AB = AK\cdot BC$. Следовательно,

$$\frac{BK}{AK}\cdot AC+\frac{CK}{AK}\cdot AB = BC.$$

С помощью этого равенства получаем из (1) и (2) доказываемое утверждение о том, что величина $1/x + 1/y$ постоянна.

Остается объяснить, что фиксированная точка Q, через которую проходят все прямые MN, действительно центр вписанного круга.

Это можно сделать, например, рассмотрев одно специальное положение точки K, когда она находится в середине дуги BC; тогда

$$BM/MA = BK/KA = CK/KA = CN/NA \qquad (3)$$

(так что MN параллельна BC). Пусть P — точка пересечения AK со стороной BC. Из подобия треугольников BKA и PKB (они имеют общий угол K и равные углы, опирающиеся на равные дуги KC и KB), отношение (3) равно:

$$BK/KA = BP/AB = PQ/QA,$$

где Q — центр вписанной окружности треугольника.

Но это можно сделать и без помощи вычислений. Заметим, что когда точка K приближается к B, то M также приближается к B, так что предельным положением прямой MN будет биссектриса угла B (точно так же, когда K приближается к C, предельным положением MN будет биссектриса угла C). Эти «предельные» прямые, конечно, тоже проходят через точку Q; тем самым Q — точка пересечения биссектрис треугольника ABC.

Другое решение задачи М1401 можно получить, опираясь на следующую замечательную *теорему Паскаля*: точки пересечения трех пар противоположных сторон вписанного шестиугольника лежат на одной прямой[1]. Чтобы получить этот шестиугольник $ABDKEC$, достаточно продолжить биссектрисы до пересечения с окружностью в точках D и E (они делят соответствующие дуги пополам — см. рис.2); тогда M, N, Q — точки пересечения его сторон AB и EK, DK и CA, BD и EC.

В. Акопян, Н. Васильев, В. Дубровский, В. Сендеров

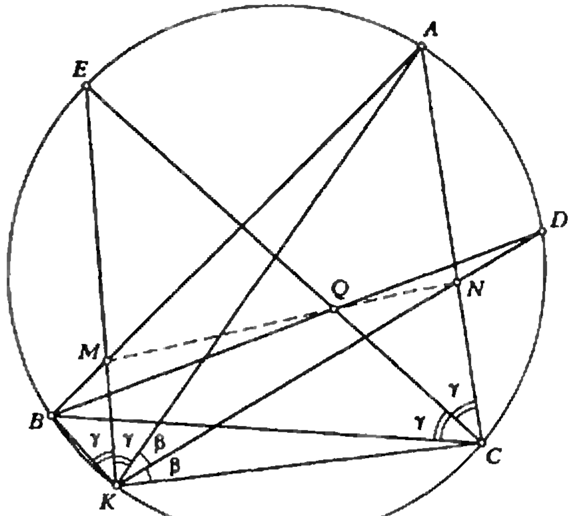


Рис. 2

М1402. *Докажите для положительных чисел* $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ $(n > 2)$ *неравенство*

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_n}{x_1}\ge\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\ldots+\frac{x_1}{x_n}.$$

Это неравенство можно доказать «в лоб» методом индукции. Для $n = 2$ оно превращается в тождество. Неравенство для $n+1$ чисел $x_1,\ldots,x_{n+1}$ $(0 < x_1 \le \ldots \le x_n \le x_{n+1})$ получается сложением неравенства для n чисел $x_1,\ldots,x_n$ (в предположении, что оно верно) и неравенства

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}+\frac{x_{n+1}}{x_1}-\frac{x_n}{x_1}\ge\frac{x_{n+1}}{x_n}+\frac{x_1}{x_{n+1}}-\frac{x_1}{x_n}; \qquad (*)$$

последнее очевидно: в обозначениях $x_n/x_{n+1} = q \le 1$, $x_1/x_n = p \le 1$ $(p > 0,\ q > 0)$ его можно переписать как

$$q+\frac{1}{pq}-\frac{1}{p}\ge\frac{1}{q}+pq-p,$$

или

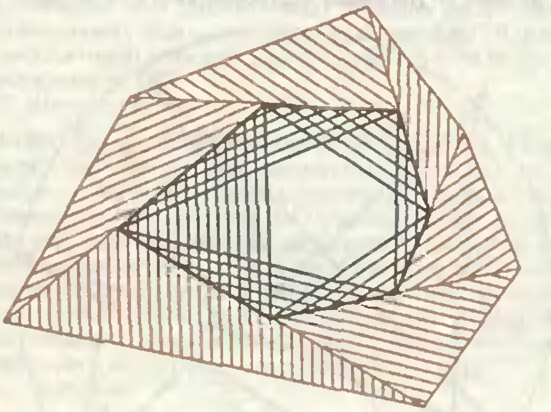
$$\left(\frac{1}{p}-1\right)\left(\frac{1}{q}-1\right)=\frac{1-p}{p}\cdot\frac{1-q}{q}\ge(1-p)(1-q).$$

Н. Васильев, Л. Курляндчик, А. Мельцер

М1403. *Каждая сторона A_kA_{k+1} выпуклого n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ $(n > 4)$ продлевается на равную ей длину $A_{k+1}B_k = A_kA_{k+1}$. Докажите, что площадь полученного n-угольника $B_1B_2\ldots B_n$ не более чем в 5 раз превосходит площадь исходного.*

[1] *См. статью Н. Васильева «Гексаграммы Паскаля и кубические кривые» в «Кванте» № 8 за 1987 г., или задачу 204 в книге И. Шарыгина «Задачи по геометрии. Планиметрия» — М.: Наука, 1986 (Библиотечка «Квант», вып. 17), или задачу 6.92 в книге В. Прасолова «Задачи по планиметрии», ч. 1 — М.: Наука, 1991 (Библиотека математического кружка, вып. 15).*

Нужно доказать, что сумма площадей n добавленных (заштрихованных на рисунке цветными линиями) треугольников не превосходит $4S$ (где S — площадь n-угольника). Каждый из этих треугольников делится медианой на два равных по площади; отсюда следует, что его площадь вдвое больше площади треугольника, образуемого двумя соседними сторонами и диагональю данного



n-угольника (соответствующие треугольники заштрихованы черными линиями того же направления). Но сумма площадей этих «черных» треугольников не превосходит $2S$, поскольку они покрывают n-угольник не более чем в два слоя — пересекаются только треугольники, примыкающие к общей стороне пятиугольника.

Н.Васильев

М1404. *Три числа x, y, z удовлетворяют условиям $x + y + z = 0$, $xyz = 2$. Найдите максимум величины $x^2/y + y^2/z + z^2/x$.*

Задача сводится к нахождению максимума выражения $u = x^3y + y^3z + z^3x$.

Пусть $c = xy + yz + zx$.

Тогда

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ xy + yz + xz = c, \\ xyz = 2. \end{cases}$$

Следовательно, числа x, y, z являются корнями уравнения $t^3 + ct - 2 = 0$. Поэтому

$$x^3y = -cxy + 2y,$$
$$y^3z = -cyz + 2z,$$
$$z^3x = -czx + 2x.$$

Сложив эти равенства, получаем: $u = -c^2$. Так как уравнение $t^3 + ct - 2 = 0$ имеет три корня, то $c < 0$. (В противном случае функция $S(t) = t^3 + ct$ возрастает и уравнение имеет единственный корень.)

Задача, таким образом, сводится к нахождению максимума выражения $c = xy + yz + zx$. Имеем:

$$c = x(y + z) + \frac{2}{x} = -x^2 + \frac{2}{x}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $x < 0$.

Функция $f(x) = -x^2 + \dfrac{2}{x}$ достигает своего максимума (при $x < 0$), равного -3, при $x = -1$ (в этом можно убедиться с помощью производной).

Таким образом,

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \le -\frac{9}{2},$$

причем равенство достигается здесь тогда и только тогда, когда два из чисел x, y, z равны -1, а третье 2.

Замечание. Фактически исходная задача в процессе решения была сведена к следующей: найти наибольшее число c, при котором уравнение $t^3 + ct - 2 = 0$ имеет три корня. Аналогично можно доказать и более общее утверждение: для уравнения

$$t^3 + ct + q = 0$$

такое число c определяется из неравенства

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3 \le 0.$$

С.Дойчев, Р.Козарев, В.Сендеров

М1405. *В основании пирамиды лежит правильный n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$, B — вершина пирамиды. Известно, что углы BA_1A_2, BA_2A_3, ..., $BA_{n-1}A_n$, BA_nA_1 равны. Докажите, что пирамида правильная.*

Первое решение.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — длины последовательных боковых ребер пирамиды; будем считать, что стороны ее основания равны 1, а углы, равенство которых постулируется условием, равны φ. Обозначим $t = \cos\varphi$.

По теореме косинусов

$$\begin{cases} x_2 = \sqrt{x_1^2 + 1 - 2x_1t}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \sqrt{x_{n-1}^2 + 1 - 2x_{n-1}t}, \\ x_1 = \sqrt{x_n^2 + 1 - 2x_nt}. \end{cases}$$

Перепишем эту систему:

$$x_2 = f(x_1), \ldots, x_n = f(x_{n-1}), x_1 = f(x_n), \qquad (*)$$

где $f(x) = \sqrt{x^2 + 1 - 2xt}$.

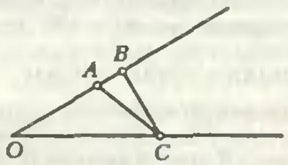
Докажем, что система $(*)$ имеет единственное решение, причем для этого решения $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Из системы $(*)$ видно, что числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяют уравнению

$$x = \underbrace{f(f(f\ldots f(x)))}_{n}. \qquad (**)$$

Покажем, что уравнение $(**)$ имеет единственный корень. Для этого изучим поведение функции $f(x)$.

Заметим, что для любого x число $f(x)$ — длина третьей стороны треугольника со сторонами 1 и x и углом между ними, равным φ. Это дает возможность изобразить два треугольника (две боковые грани пирамиды со сторонами 1, x и 1, y соответственно и с углом φ между ними) на одном рисунке, совместив на нем стороны, равные 1, и угол φ.



На рисунке $OA = x$, $OB = y$, $\angle AOC = \varphi$.

Но в треугольнике ABC стороны AC и BC равны $f(x)$ и $f(y)$ соответственно. Из неравенства треугольника следует, что $|AC - BC| < AB$, т.е.

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \qquad (***)$$

при $x \ne y$.

Функции, удовлетворяющие при $x \neq y$ условию (* * *), называются сжимающими. Очевидно, всякая функция $\underbrace{f(f(f\ldots f(x)))}_{k}$ является сжимающей.

Докажем, что для всякой сжимающей функции $\psi(x)$ уравнение $x = \psi(x)$ имеет не более одного решения. Пусть $x \neq y$, $\psi(x) = x$, $\psi(y) = y$. Тогда $|x - y| = |(\psi(x) - \psi(y))| < |x - y|$. Противоречие.

Замечание 1. Система (*) может быть решена и непосредственно. Однако это решение достаточно громоздко, и мы его не приводим.

Второе решение.

Пусть на рисунке AC и BC являются (в каком-либо порядке) наибольшим и наименьшим боковыми ребрами ($AC \neq BC$). Из неравенства треугольника следует, что $|AC - BC| < AB = OB - OA$. Но OA и OB — также некоторые боковые ребра. Однако разность между максимальным и минимальным числами всегда не меньше разности чисел, заключенных между ними: $|AC - BC| \geq OB - OA$. Противоречие.

Замечание 2. В решении мы использовали не правильность основания пирамиды, а лишь его равносторонность. Однако, используя результат задачи, легко показать, что (априори лишь равносторонний) многоугольник, лежащий в основании нашей пирамиды, является правильным.

Н.Васильев, В.Дубровский, В.Сендеров

М1406. *На доске написано n выражений вида* $*x^2 + *x + * = 0$ *(n — нечетное число). Двое играют в такую игру. Ходят по очереди. За ход разрешается заменить одну из звездочек числом, не равным нулю. Через 3n ходов получится n квадратных уравнений. Первый игрок стремится к тому, чтобы как можно большее число этих уравнений не имело корней, а второй хочет ему помешать. Какое наибольшее число уравнений, не имеющих корней, может получить первый игрок независимо от игры второго?*

Ответ: $(n+1)/2$.

Приведем стратегию первого игрока, позволяющую ему получить не менее $\frac{n+1}{2}$ уравнений, не имеющих корней. Назовем *распечатыванием* выражения первую замену в нем звездочки на число. Своим первым ходом, а также в ответ на любой распечатывающий ход второго игрока, первый игрок распечатывает одно из оставшихся выражений, записывая число 1 перед x. Если второй игрок записывает число a перед x^2 или вместо свободного члена в выражении, распечатанном первым, то в ответ первый записывает на оставшееся место число $\frac{1}{a}$. Дискриминант получившегося уравнения $\left(D = 1 - 4a \cdot \frac{1}{a} = -3\right)$ отрицателен, поэтому оно не имеет корней. Если же второй игрок запишет число вместо одной из двух звездочек в ранее распечатанном им выражении, то первый произвольным образом заполняет в этом выражении оставшееся место. Ясно, что описанная стратегия позволяет первому игроку распечатать $\frac{n+1}{2}$ выражений, которые он в ходе игры превращает в уравнения, не имеющие корней.

Осталось показать, что второй игрок, мешая первому, может получить $\frac{n-1}{2}$ уравнений, имеющих корни. В самом деле, второй игрок может $\frac{n-1}{2}$ раз распечатать выражения, записывая число 1 перед x^2. Тогда, как бы ни играл первый игрок, второй игрок сумеет поставить еще по одному числу в каждое из распечатанных им выражений. Если место свободного члена не занято, то, записывая на него число −1, второй игрок обеспечивает получение уравнения с положительным дискриминантом. Если же вместо свободного члена первым игроком было записано число c, то второму достаточно записать перед x число $b > 2\sqrt{|c|}$, и дискриминант полученного уравнения окажется положительным.

И. Рубанов

М1407. *В семейном альбоме есть а) десять, б) n фотографий. На каждой из них изображены три человека: в центре стоит мужчина, слева от мужчины — его сын, а справа — его брат. Какое наименьшее количество различных людей может быть изображено на этих фотографиях, если известно, что все десять (соответственно, n) мужчин, стоящих в центре, различны?*

Ответ: а) 16; б) $[(3n+1)/2] + 1$ для любого $n > 1$.

Назовем n мужчин, стоящих в центре фотографий, взрослыми, остальных (среди всех m изображенных на фотографиях мужчин) — юными. Отметим на координатной плоскости возможные пары (n, m), соответствующие различным наборам фотографий.

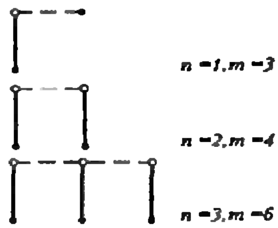


Рис. 1

Каждый набор изображается как генеалогическое дерево (или «лес» из нескольких таких деревьев): верхний этаж — те, кто не имеет отцов (среди взрослых), предпоследний этаж — их дети, ниже — дети их детей и так далее, вплоть до «нулевого этажа» (где нет ни одного взрослого). Деревья (и леса), которые получаются из набора фотографий, назовем допустимыми.

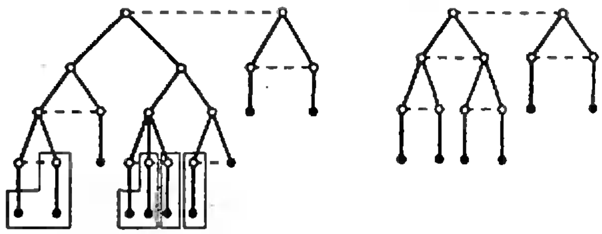


Рис. 2

Деревьям всего из двух этажей (первого и нулевого — см.рис.1) соответствуют пары $n = 1$, $m = 3$; $n = 2$, $m = 4$ и вообще $n = k$, $m = 2k$ (а лесу из нескольких таких деревьев соответствуют пары, получаемые как суммы векторов $(1,3), (2,4), (k, 2k)$).

В любом допустимом дереве с большим числом этажей можно произвести такую операцию: убрать из нижних двух этажей 3 из 4 людей — двух братьев и их детей, уменьшив число фотографий на 2 (заменив четвертого — взрослого на юношу), либо убрать 2 людей — отца и сына, уменьшив число фотографий на 1 (рис.2); такими операциями можно постепенно прийти к дереву всего из двух этажей — это означает, что все отмеченные точки (n,m) получаются из векторов $(1,3)$, $(2,4)$ прибавлением нескольких векторов $(2,3)$ и $(1,2)$; верно и обратное: все такие суммы векторов дают отмеченные точки — очевидно, что можно соответствующим образом достраивать снизу допустимое дерево.

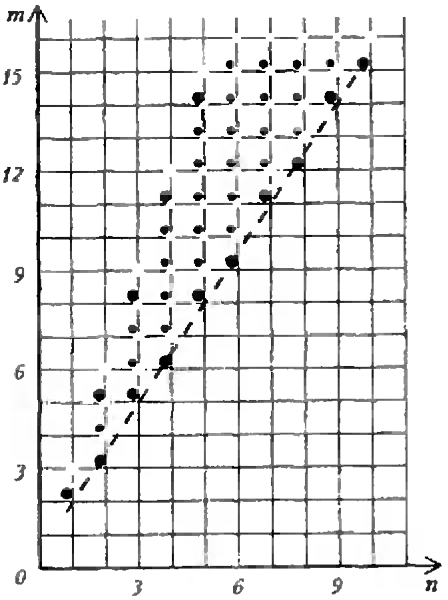


Рис. 3

Мы получили полное описание множества отмеченных точек (n,m) — на рисунке 3 они выделены цветом. Чтобы ответить на вопросы, заданные в условии, достаточно заметить, что для каждого $n > 2$ отмеченная точка (m,n) с наименьшим m — точка, лежащая не ниже пунктирной прямой на рисунке 3; при четном n это $m = 3n/2 + 1$, при нечетном n это $m = (3n+1)/2 + 1$. Можно записать ответ в виде единой формулы, как это сделано выше.

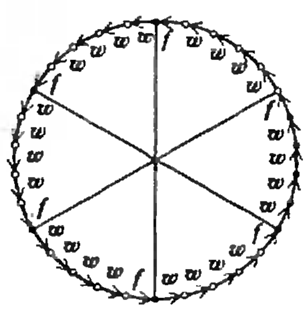
С. Конягин, Н. Васильев

М1408. ***За круглым столом сидит компания из тридцати человек. Каждый из них либо дурак, либо умный. Всех сидящих спрашивают: «Кто Ваш сосед справа — умный или дурак?» В ответ умный говорит правду, а дурак может сказать как правду, так и ложь. Известно, что количество дураков не превосходит F. При каком наибольшем значение F всегда можно, зная эти ответы, указать на умного человека в этой компании?***

Ответ: при $F = 8$.

Если $F = 0$, то можно указать на любого человека, сидящего за столом.

Пусть теперь $F \neq 0$. Разобьем всех сидящих за столом на непустые группы подряд сидящих умных и подряд сидящих дураков; число этих групп обозначим через $2k$ (k групп умных и k групп дураков). Количество людей в i-й группе умных обозначим через w_i, а количество людей в i-группе дураков — через f_i $(1 \le i \le k)$. Тогда $w_1 + w_2 + \ldots + w_k + f_1 + f_2 + \ldots f_k = 30$ и $f_1 + f_2 + \ldots + f_k \le F$. Рассмотрим последовательность подряд идущих ответов «умный» и последнего человека x, про которого так говорят. Группа их w_i умных дает такую последовательность длиной не меньше $w_i - 1$, при этом x — действительно умный. Если же x — дурак и находится в i-й



группе дураков, то длина такой последовательности ответов не более $f_i - 1$. Следовательно, если $\max w_i > \max f_i$, то можно утверждать, что последний человек, который назван умным в самой длинной последовательности ответов «умный», действительно умный. Так как

$$\max_i \ge \frac{30 - (f_i + \ldots + f_k)}{k} \ge \frac{30 - F}{k},$$

$$\max_i f_i \le (f_i + \ldots + f_k) - k + 1 \le F - k + 1,$$

то если неравенство $\frac{30 - F}{k} > F - k + 1$ выполняется при всех k от 1 до F, то можно указать на умного человека, сидящего за столом. Это неравенство равносильно такому:

$$k^2 - (F+1)k + 30 - F > 0.$$

Оно справедливо для всех k, если $D = (F+1)^2 + 4(F - 30) < 0$, т.е. при $F < -3 + \sqrt{128} < -3 + 12 = 9$. Итак, при $F \le 8$ можно на основании данных ответов указать на умного человека. При $F = 9$ это не всегда возможно. Действительно, рассмотрим компанию, сидящую за столом так, как показано на рисунке (рядом со стрелочками даны ответы: w — «умный», f — «дурак»; дураки показаны заштрихованными кружочками).

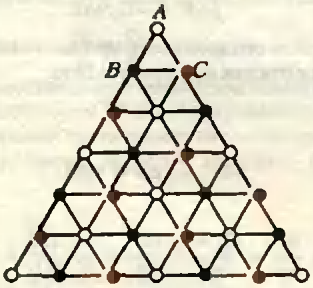
Будем поворачивать эту картинку вокруг центра на углы 60°, 120°, 180°, 240° и, наконец, 300° по часовой стрелке. При этом, как нетрудно проверить, на каждом месте может оказаться как умный, так и дурак, а последовательность ответов останется той же самой. Поэтому в такой компании указать на умного человека на основании данных ответов невозможно.

О. Ляшко

М1409. ***Докажите, что существует такое натуральное число n, что если правильный треугольник со стороной n разбить прямыми, параллельными его сторонам, на n^2 правильных треугольников со стороной 1, то среди вершин этих треугольников можно выбрать $1993n^2$ точек, никакие три из которых не являются вершинами правильного треугольника (не обязательно со сторонами, параллельными сторонам исходного треугольника).***

Пусть для некоторого n указанное в задаче разбиение произведено. Раскрасим вершины треугольников в 3 цвета, как на рисунке.

Заметим, что у любого правильного треугольника с вершинами в этих точках либо все вершины разноцветны, либо одноцветны. Убедиться в этом можно, проверив, что если нашу решетку повернуть вокруг любой ее вер-



шины (пусть она имеет цвет A) на угол 60°, то вершины, имевшие цвет A, сохранят его, а вершины двух других цветов B и C поменяют его на C и B соответственно; центр поворота на 60°, *приводящий к самосовмещению* решетки, может лежать также в центре одного из треугольников — тогда цвета сдвигаются по циклу:

$$A \to B \to C \to A.$$

Выберем цвет, которым покрашено наименьшее число точек, и выбросим из нашей решетки точки этого цвета. Эту операцию назовем *разрежением*. Останется не менее $\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2}{2}$ точек двух цветов. Любой правильный треугольник с вершинами в этих точках одноцветный, а значит, имеет сторону не менее $\sqrt{3}$.

Рассмотрим отдельно множество точек каждого из двух оставшихся цветов, которые образуют часть треугольной решетки со стороной $\sqrt{3}$, и сделаем аналогичное разрежение. В результате останется не менее $\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{n^2}{2}$ точек, которые могут образовывать вершины правильного треугольника со стороной не менее $\left(\sqrt{3}\right)^2$. Действуя аналогично, после k-го разрежения мы сохраним не менее $\left(\frac{2}{3}\right)^k\cdot\frac{n^2}{2}$ точек, а правильные треугольники будут иметь сторону не менее, чем $\left(\sqrt{3}\right)^k$.

Пусть $n = 3^m$, тогда после $k = 2m + 1$ разрежений правильных треугольников не останется вовсе, а точек останется не менее, чем $\left(\frac{2}{3}\right)^{2m+1}\cdot\frac{n^2}{2} \ge \left(\frac{4}{3}\right)^m\cdot\frac{n}{3} \ge 1993\cdot n$, при $\left(\frac{4}{3}\right)^m \ge 3\cdot 1993$. Таким образом достаточно взять $n > 3^l$, где $l = \log_{4/3}(3\cdot 1993)$.

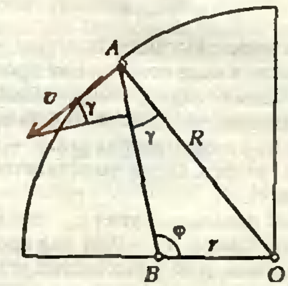
С. Августинович, Д. Ван-дер-Флаас

Решение задачи М1410 опубликовано в «Кванте» № 2 за этот год в статье Д. Терешина «Обращение принципа Кавальери».

Ф1418. *По окружности радиусом R с постоянной скоростью v бежит лошадь. На расстоянии r от центра окружности стоит человек. Чему равно максимальное значение скорости сближения лошади и человека?*

Пусть в некоторый момент лошадь находится в точке A, а человек — в точке B (см. рисунок). Обозначим $OA = R$, $OB = r$, $\angle OBA = \varphi$ и $\angle BAO = \gamma$. Скорость сближения лошади и человека — это проекция скорости v на направление AB: $v_{сбл} = v\sin\gamma$. Нужно найти такое положение точки A, при котором максимален угол γ. Сделаем это:

$$\frac{\sin\varphi}{R} = \frac{\sin\gamma}{r},\ \sin\gamma = \frac{r}{R}\sin\varphi \le \frac{r}{R}.$$

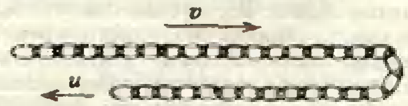


Итак, при угле $\varphi = 90°$ скорость сближения максимальна и равна

$$v_{сбл\,max} = v\frac{r}{R}.$$

А. Быцко

Ф1419. *Длинная и гибкая однородная цепочка длиной L и массой m двигалась вдоль прямой со скоростью v. Передний конец цепочки «завернули» назад и тянут с постоянной скоростью u (см. рисунок). С какой силой приходится действовать на передний конец цепочки, чтобы поддерживать такое движение?*



Пока вся цепочка не поедет назад, необходима постоянная по величине сила. Найдем ее. Для этого рассмотрим изменение импульса цепочки за некоторый отрезок времени Δt — за это время изменяет направление движения участок цепочки длиной

$$\Delta l = \frac{v+u}{2}\Delta t.$$

Масса этого куска равна

$$\Delta m = \frac{m}{L}\frac{v+u}{2}\Delta t,$$

а скорость меняется от v до $-u$. Значит, импульс изменяется на величину

$$\Delta P = \Delta m(v+u) = \frac{m}{2L}(v+u)^2\Delta t.$$

Для этого на цепочку приходится действовать силой

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m}{2L}(v+u)^2.$$

З. Рафаилов

Ф1420*. *Маленький тяжелый шарик закреплен[1] на верхнем конце легкого тонкого стержня длиной L, закрепленного шарнирно нижним концом на горизонтальной плоскости. Отклонив стержень на некоторый угол, отпустим шарик. Оцените значение начального угла отклонения, при котором падение продолжается две недели. Влиянием посторонних факторов пренебречь.*

В тот момент, когда стержень составляет угол α с вертикалью, касательное ускорение равно $a = g\sin\alpha$. Если рассматривать вращение стержня, то его угловое ускоре-

[1] *К сожалению, в опубликованном условии задачи вместо этого слова было написано «лежит». Надеемся, что эта неточность не затруднила решение. (Прим. ред.)*

ние при этом составляет

$$\varepsilon = \frac{a}{L} = \frac{g}{L}\sin\alpha.$$

Мы получили уравнение

$$\alpha'' = \frac{g}{L}\sin\alpha.$$

К сожалению, оно только выглядит простым — подобрать к нему решение в виде комбинации простых функций невозможно. Однако задачу можно сильно упростить. Для этого заметим, что большая часть времени падения происходит при совсем малых углах — когда угол достигнет хотя бы градуса, стержню останется падать всего несколько секунд.

Итак, найдем такой начальный угол α_0, при котором увеличение его до, скажем, $\alpha_m = 0{,}01$ рад происходит за упомянутые две недели. Для таких малых углов можно считать $\sin\alpha \approx \alpha$, и уравнение становится простым (и решаемым):

$$\alpha'' = \frac{g}{L}\alpha.$$

Найти такую функцию $\alpha(t)$, что ее вторая производная равна ей самой (с точностью до «вылезающего» коэффициента) совсем легко:

$$\alpha = \alpha_0 e^{\sqrt{g/L}\,t}.$$

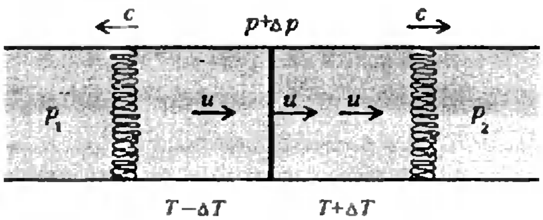
При $t = 14 \cdot 24 \cdot 3600$ с $\alpha = \alpha_m = 0{,}01$ рад. Тогда

$$\alpha_0 = \alpha_m e^{-\sqrt{g/L}\,t} \approx 0{,}01 e^{-10\cdot 14\cdot 24\cdot 3600} \text{ рад.}$$

Получающееся при расчете совсем малое число и дает формально ответ задачи. Все же стоит сказать, что пренебрежение «посторонними» факторами при решении этой задачи не выглядит разумным — учитывая ответ задачи. Явно именно они и задают реальный начальный угол (это — вибрации, случайные толчки, движение воздуха, электризация...).

А.Зильберман

Ф1421*. *В длинной трубе, заполненной азотом, находится легкий подвижный поршень. В начальный момент поршень закреплен, температуры газа слева и справа одинаковы и равны $T_1 = T_2 = 300$ К, давления составляют $p_1 = 1{,}1$ атм и $p_2 = 1{,}0$ атм. Поршень отпускают. Найдите его установившуюся скорость. Стенки трубы и поршень теплонепроницаемы, газ идеальный.*



После установления процесса в обе стороны от перегородки двигаются два возмущения со скоростью c, а газ между ними и перегородка двигаются со скоростью u (см. рисунок).

Рассмотрим газ справа от перегородки. Если p, T и ρ — давление, температура и плотность невозмущенного газа, $p + \Delta p$, $T + \Delta T$ и $\rho + \Delta\rho$ — то же для газа за возмущением, то из закона сохранения массы

$$u(\rho + \Delta\rho) = c\rho$$

и импульса

$$\Delta p = \rho c u$$

с учетом $\Delta\rho \ll \rho$ (как обычно при выводе формулы скорости звука) получим

$$c^2 = \frac{\Delta p}{\Delta\rho}.$$

Эту же величину можно вычислить с помощью закона сохранения энергии (тепло не отводится)

$$p\Delta V = -C_V \nu\Delta T$$

(C_V — молярная теплоемкость при постоянном объеме) и уравнения состояния идеального газа

$$pV = \nu RT,$$

или

$$p\Delta V + V\Delta p = \nu R\Delta T.$$

Получим

$$c^2 = \frac{\Delta p}{\Delta\rho} = \frac{C_V + R}{C_V}\frac{RT}{M} = \frac{C_p}{C_V}\frac{RT}{M} = \gamma\frac{RT}{M}.$$

Отсюда и из закона сохранения импульса имеем

$$u = \frac{\Delta p}{\rho c} = \frac{\Delta pRT}{pMc}.$$

Аналогичное рассуждение применимо для газа слева от поршня, откуда следует, что

$$\Delta p = \frac{p_1 - p_2}{2},$$

$$u = \frac{p_1 - p_2}{2p_2}\sqrt{\frac{RT_2}{\gamma M}}.$$

Для азота (двухатомного газа) $\gamma = 7/5$ и М = 28 г/моль, поэтому окончательно

$$u \approx 13 \text{ м/с}.$$

С.Башинский

Ф1422. *В прочный сосуд налили немного воды, закрыли герметично крышкой и медленно нагрели до 160 °С. При этой температуре давление в сосуде составило 3,7 атм. Определите температуру, при которой вся вода испарилась.*

Давление в сосуде равно сумме парциальных давлений воздуха и паров воды. Найдем вклад водяных паров при температуре 160 °С, т.е. 433 К:

$$p_п = p - p_в\frac{433}{293} \approx 3{,}7\text{атм} - 1{,}5\text{атм} = 2{,}2\text{атм}.$$

Эта величина существенно меньше давления насыщенных паров при 160 °С ($\approx 6{,}3$ атм), так что и в самом деле вся вода испарилась до этого.

Проще всего решать задачу графически. На графике зависимости давления от температуры нарисуем кривую для $p_{нас}(T)$ — ее мы возьмем из справочника, и прямую $p_п \sim T$, проходящую через точку 433 К и 2,2 атм (если пар не насыщен, то его давление возрастет пропорционально абсолютной температуре). Пересечение этих кривых и даст нам ответ:

$$t_{исп} \approx 120 \text{ °C}.$$

Е.Доннер

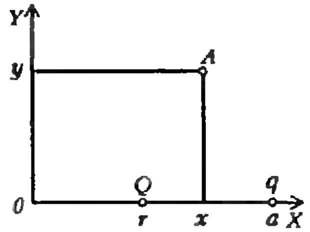
Ф1423. *На тонкой непроводящей направляющей в форме окружности радиусом R может скользить без трения маленькая заряженная бусинка. Заряд Q расположен в плоскости направляющей на расстоянии r от центра окружности. Куда нужно поместить второй заряд и какой он должен быть величины, чтобы бусинка могли скользить по окружности с постоянной по модулю скоростью? Сила тяжести отсутствует.*

Те, кто знакомы с методом изображений в электростатике, уже, наверное, узнали эту задачу. В самом деле —

чтобы скорость заряда не менялась, потенциал на окружности должен быть постоянным, значит, нужно подобрать систему из двух зарядов, обеспечивающую это условие. Ясно также, что второй заряд должен располагаться вне окружности и быть противоположного знака. Итак,

$$\frac{q_1}{a_1}+\frac{q_2}{a_2}=\text{const},$$

где a_1 и a_2 — расстояния от некоторой точки окружности до зарядов. Попробуем обойтись нулевым значением константы в правой части равенства — вычисления при этом явно будут проще. А если не выйдет — будем думать дальше.



Пусть неизвестный заряд q мы поместили на расстоянии a от центра окружности, заряд Q находится на расстоянии r от него и A — произвольная точка окружности с координатами x и y: $x^2+y^2=R^2$ (см. рисунок). Тогда можно записать

$$\frac{Q}{\sqrt{(x-r)^2+y^2}}+\frac{q}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}=0.$$

Отсюда получаем

$$\frac{(a-x)^2+y^2}{q^2}=\frac{(x-r)^2+y^2}{Q^2},$$

или

$$\frac{a^2-2ax+x^2+y^2}{q^2}=\frac{r^2-2rx+x^2+y^2}{Q^2}.$$

Заменяя $x^2+y^2=R^2$, перепишем равенство в виде

$$\frac{a^2+R^2}{q^2}-\frac{r^2+R^2}{Q^2}=2x\left(\frac{a}{q^2}-\frac{r}{Q^2}\right).$$

Это равенство будет выполняться при любых x (на окружности), если

$$\frac{a}{q^2}-\frac{r}{Q^2}=0,$$

или

$$a=r\frac{q^2}{Q^2}.$$

Но тогда и слева получится ноль, т.е.

$$\frac{a^2+R^2}{q^2}=\frac{r^2+R^2}{Q^2},$$

или

$$q=-Q\frac{R}{r}.$$

Окончательно находим

$$a=\frac{R^2}{r} \text{ и } q=-Q\frac{R}{r}.$$

Нам удалось подобрать и расположить заряды так, чтобы потенциалы всех точек этой окружности оказались равными (нулевыми). Ясно, что это справедливо и для сферы радиусом R с центром в той же точке. Этот факт широко используется в электростатике.

А.Зильберман

Ф1424. *Лампочка рассчитана на напряжение 2,5 В при токе 0,2 А. Мы подключаем ее к батарейке последовательно с резистором сопротивлением 5 Ом, и она горит полным накалом. Если изменить схему включения — присоединить к батарейке лампочку и резистор параллельно, то лампочка горит точно так же, как в первом случае. Найдите ЭДС и внутреннее сопротивление батарейки. При каком включении КПД такого «фонарика» больше и во сколько раз?*

При последовательном включении через батарейку течет ток $I_1=I_л$ и напряжение батарейки равно

$$U_1=U_л+I_лR=2{,}5\ \text{В}+0{,}2\ \text{А}\cdot5\ \text{Ом}=3{,}5\ \text{В}.$$

При параллельном включении ток через батарейку равен

$$I_2=I_л+\frac{U_л}{R}=0{,}2\ \text{А}+\frac{2{,}5\ \text{В}}{5\ \text{Ом}}=0{,}7\ \text{А},$$

а напряжение —

$$U_2=U_л=2{,}5\ \text{В}.$$

Теперь можно найти ЭДС $\mathcal{E}$ и внутреннее сопротивление r батарейки:

$$U_1=\mathcal{E}-I_1r,$$
$$U_2=\mathcal{E}-I_2r,$$

откуда

$$\mathcal{E}=3{,}9\ \text{В и } r=2\ \text{Ом}.$$

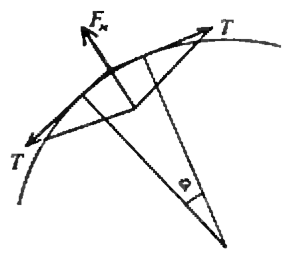
В первом случае ток через батарею составляет $I_1=0{,}2$ А, во втором — $I_2=0{,}7$ А. Полезная же мощность одна и та же. Значит, отношение КПД равно

$$\frac{\eta_1}{\eta_2}=\frac{P_п/(\mathcal{E}I_1)}{P_п/(\mathcal{E}I_2)}=\frac{I_2}{I_1}=3{,}5.$$

Р.Александров

Ф1425. *Проволочный виток в форме окружности радиусом R, по которому течет ток I, помещен в сильное однородное магнитное поле, вектор индукции которого B перпендикулярен плоскости витка. Найдите силу натяжения в витке.*

Будем считать, что сила со стороны магнитного поля направлена от центра кольца (для второго возможного случая решение точно такое же, только кольцо не растянуто, а сжато).



Рассмотрим маленький участок кольца (угол φ мал — см. рисунок), на который действует магнитная сила $F_м$ и две искомые силы натяжения T со стороны соседних участков. Из условия равновесия получаем

$$2T\sin\frac{\varphi}{2}=T\varphi=F_м=IBR\varphi,$$

откуда

$$T=IBR.$$

Мы пренебрегли взаимодействием частей кольца между собой (по кольцу течет ток, он создает собственное маг-

нитное поле и т.д.) — если внешнее поле сильное, то добавкой «своего» поля и в самом деле можно пренебречь.
А.Лузин

Ф1426. *Катушка индуктивностью L с параллельно присоединенным к ней резистором сопротивлением R подключаются во внешнюю цепь, в которой поддерживается постоянный по величине ток I. Какое количество теплоты выделится в резисторе?*

Вначале весь ток течет только через резистор, затем понемногу увеличивается ток через катушку и в конце концов достигает значения I. Пусть через малый промежуток времени Δt_i ток через катушку возрастет на ΔI_i, а ток в резисторе равен I_i. Тогда можно записать

$$RI_i = L\frac{\Delta I_i}{\Delta t_i},$$

или

$$RI_i^2\Delta t_i = LI_i\Delta I_i.$$

А выделившееся в резисторе количество теплоты легко найти суммированием:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} RI_i^2\Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} LI_i\Delta I_i = L\frac{I^2}{2}.$$

Ответ получился совсем простой, его можно найти и многими другими способами.
А.Зильберман

Ф1427. *Действительное изображение точечного источника получено в точке А (рис.1) при помощи тонкой линзы. Заменив эту линзу другой, но расположив ее в том же месте, получили изображение в точке Б. После этого первую линзу придвинули вплотную ко второй, и изображение переместилось в точку В. Определите построением положение источника.*

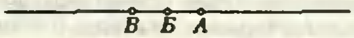


Рис. 1

Пусть луч от источника попал в точку $Г$, а на этом месте стояла первая линза (рис.2). После преломления в ней он должен пройти через точку $А$ — получим луч $ГА$. Добавим теперь вторую линзу — после преломления в ней луч $ГА$ превратится в луч $ГВ$. Это позволит нам построить положение фокуса второй линзы. Проведем через точку $О$ вспомогательный луч, параллельный лучу $ГА$, — он пересекается с продолжением луча $ГВ$ в фокальной плоскости второй линзы, значит, точка $Д$ лежит в этой плоскости (на нашем рисунке она получилась точно над точкой $А$ — это не принципиально).

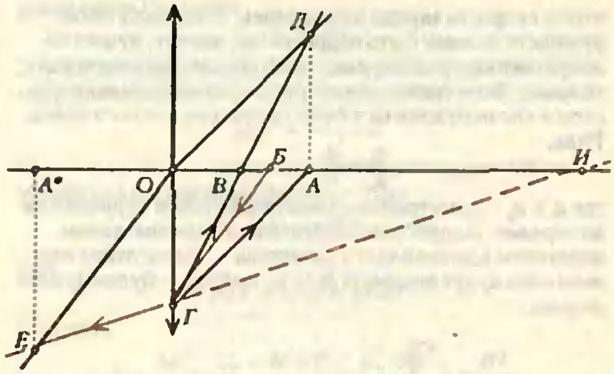


Рис. 2

Теперь, используя найденное положение фокуса второй линзы, можно построить положение источника. Воспользуемся обратимостью лучей. Пустим луч из точки $Б$ в точку $Г$ — он должен после преломления пройти через точку $И$ — источник (возможно, это будет не сам преломленный луч, а его продолжение).

Построим точку $А^*$ — левый фокус второй линзы, симметричный точке $А$, и проведем вспомогательный луч через точку $О$ параллельно $БГ$. Точка $Е$ фокальной плоскости, через которую этот луч пройдет, даст нам возможность построить дальнейший ход преломленного луча — $ГЕ$. Источник и в самом деле оказался на продолжении этого луча.

Из рисунка видно, что это «мнимый» источник — на линзы падал сходящийся в точке $И$ пучок лучей. Если бы точка $В$ на чертеже была дальше от точек $А$ и $Б$, получился бы обычный «действительный» источник.
А. Дешковский

ИНФОРМАЦИЯ

Конференция в Энерго-физическом лицее

В РЯД ли кого-то нужно убеждать в наши дни, что народное образование испытывает колоссальные финансовые трудности. Тем более поразительно, что традиция крупных, как сейчас говорят, межрегиональных научных конференций школьников, заложенная еще в 70-х годах на Батумских праздниках юных математиков, не только не иссякла, но и продолжает развиваться. По крайней мере три большие конференции — в Башкирии, недалеко от Уфы, в Черноголовке под Москвой, и в Москве — состоялись в начале этого года. Об одной из них мы расскажем в этой заметке.

Это Международная научно-практическая конференция школьников, проводившаяся уже в третий раз Энерго-физическим лицеем № 1502 при Московском Энергетическом институте с 25 по 30 января 1994 г. Состав участников, включающий, в основном, учащихся лицеев и гимназий научно-технического профиля, в этом году значительно расширился. Полный перечень всех 27 команд занял бы слишком много места, укажем лишь, что они приехали из Петрозаводска и Баку, Черновцов и Нижнего Тагила, Киева, Новгорода, Рязани, Одессы, Воронежа, Нальчика, Пушкина, Тольятти и, конечно, Санкт-Петербурга и Москвы. Разумеется, принять такое количество участников (176) одной школе было бы не под силу. Огромную помощь и поддержку оказали организаторам конференции Департамент образования г. Москвы, Восточное окружное управление народного образования и, естественно, Московский энергетический институт.

Программа конференции была достаточно традиционной для такого рода встреч. Центральное место в ней заняли заседания секций математики, физики и информатики, на которых были заслушаны 98 докладов, вдвое больше чем год назад! Впрочем, не все команды привезли докладчиков — некоторые из них пока приехали только познакомиться с тем, как поставлена научно-исследовательская работа учеников в других школах. Однако все без исключения (некоторые даже двумя командами) приняли участие в соревнованиях — физбое и «математической регате». (Этот вид соревнований придумал ведущий рубрики «Квант» для младших школьников» А.П. Савин специально для данного случая, когда за полтора – два часа нужно было выбрать из почти 30 команд самую сообразительную: команды решали задачи в несколько туров с выбыванием неудачников после каждого тура; при этом для исключения случайностей неудачникам предоставлялся последний шанс в виде «утешительных заездов».) Гости конференции получили и возможность поработать в компьютерном практикуме, а по вечерам и в свободные от докладов дни для них были организованы экскурсии по Москве и в Сергиев Посад, походы в театр Образцова и цирк.

Но вернемся к докладам. Жюри, в которое вошли профессора и преподаватели нескольких ведущих московских вузов, досталась нелегкая работа: за сравнительно небольшое время нужно было прослушать, оценить, а порой и помочь довести до слушателей большое число докладов, весьма различных как по содержанию, так и по уровню. (Среди участников были и «асы» подобных конференций, такие как команды СУНЦ МГУ, Аничкова лицея С.-Петербурга или Ришельевского лицея из Одессы, и новички.) И неудивительно, что самые высокие места из 28 отмеченных дипломами докладов достались представителям школ, в которых научная работа учащихся поставлена наиболее основательно и имеет давние традиции. Так, огромная (33 чел.) команда Аничкова лицея представила 7 докладов только по секции математики, и все они получили дипломы. Такой успех этой школы объясним — система обучения в ней нацелена на то, чтобы как можно быстрее ввести учащихся в курс вполне актуальных разделов современной математики, тем самым предоставляя им возможность со школьной скамьи заняться самостоятельными научными исследованиями. Результаты были налицо. Доклады учащихся Аничкова лицея относились к таким областям математики, как гомологическая алгебра, теория Галуа, топология, дескриптивная теория множеств. Изучить эти темы настолько, чтобы сделать по ним самостоятельный доклад, не говоря даже о том, чтобы получить собственные результаты, нельзя без очень большой работы, и ее по достоинству оценило жюри. Но, при общем высоком стартовом уровне, и эти доклады были весьма неравноценны. А главное, докладчики как будто не очень беспокоились о том, чтобы донести суть своих работ до аудитории, перед которой выступали. И если в одних случаях это вряд ли было возможно объективно из-за сложности темы (более подходящей для студенческой конференции), то в других возникало сомнение, видят ли сами выступающие тот простой наглядный смысл, который скрывается за выдаваемыми ими абстрактными формулировками. С подобным грехом приходится сталкиваться на разных конференциях, и хочется пожелать будущим докладчикам (и их руководителям) больше думать о тех, кому придется слушать доклад.

На заключительном заседании участники конференции приветствовали дипломантов, получивших ценные призы, и еще раз вспомнили дни, проведенные в лицее, посмотрев видеофильм, который успели подготовить хозяева. Хочется присоединиться к высказанной гостями высокой оценке работы устроителей конференции во главе с директором Энергофизического лицея В.Л. Чудовым, вынесших за эти дни двойную нагрузку (занятия в школе шли своим чередом), и пожелать им успешного проведения следующей конференции.

В.Дубровский

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

Фон Нейман и задача о мухе

Эту задачу можно решить двумя способами: «трудным» и «легким». *Два поезда, находившиеся на расстоянии 200 км друг от друга, сближаются по одной колее, причем каждый развивает скорость 50 км/ч. С ветрового стекла одного локомотива в начальный момент движения взлетает муха и принимается летать со скоростью 75 км/ч вперед и назад между поездами, пока те, столкнувшись, не раздавят ее. Какое расстояние успевает пролететь муха до столкновения?*

С каждым из поездов муха успевает повстречаться бесконечно много раз. Чтобы найти расстояние, которое муха преодолела в полете, можно просуммировать бесконечный ряд расстояний (эти расстояния убывают достаточно быстро, и ряд сходится). Это — «трудное» решение. Чтобы получить его, вам понадобятся карандаш и бумага.

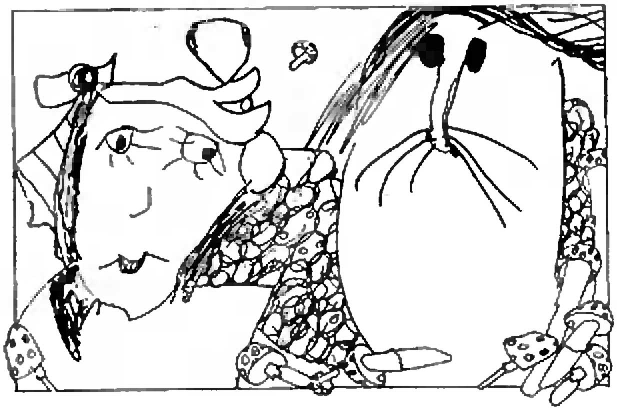
«Легкое» решение состоит в следующем. Поскольку в начальный момент расстояние между поездами равно 200 км, а каждый поезд развивает скорость 50 км/ч, то от начала движения до столкновения проходит 2 ч. Все эти 2 ч муха находится в полете. Поскольку она развивает скорость 75 км/ч, то до того момента, как столкнувшиеся локомотивы раздавят ее, муха успеет пролететь 150 км. Вот и все!

Один из выдающихся математиков современности Джон фон Нейман, когда ему задали эту задачу, задумался лишь на миг и сказал: «Ну, конечно, 150 км!» Приятель спросил его: «Как вам удалось так быстро получить ответ?» «Я просуммировал ряд», — ответил математик.

Из книги Р.Смаллиана «Как же называется эта книга?» (М.:Мир, 1981)

Задачи

1. Баба-Яга и Леший собирали в лесу мухоморы. Оказалось, что крапинок на мухоморах, собранных Бабой-Ягой, в 13 раз больше, чем на мухоморах Лешего. Когда Баба-Яга отдала Лешему свой мухомор с наименьшим числом крапинок, то у нее осталось крапинок лишь в 8 раз больше, чем у Лешего. Докажите, что Баба-Яга собрала не больше 23 мухоморов. *К. Кохась*



2. Во втором классе учитель вызвал к доске Колю, Васю, Мишу, Степу и Гришу и каждому из них задал по примеру из таблицы умножения. Результат каждого последующего умножения оказывался в полтора раза больше предыдущего. Какие числа перемножал Степа? *И. Акулич*

3. К юбилею Александра Маслякова. Решите арифметический ребус:

КУМИР + КУМИР + КУМИР = ШУРИК

Одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, разным – разные. *Н. Антонович*

4. Прямая пересекает треугольник, причем ее отрезок внутри треугольника превосходит половину большей стороны треугольника. Докажите, что эта прямая пересекает окружность, вписанную в этот треугольник. *С. Азлецкий*

5. Возьмите шестизначное число, которое делится на 7, или на 11, или на 13, или на 37. Переставьте первую его цифру в конец числа. Проверьте, что полученное число вновь делится на то же самое число. Почему? *А. Савин*

Расчет или просчет?

А. ШЕВКИН

Как сохранить деньги, теряющие свою покупательную способность из-за инфляции, – вот одна из проблем, занимающих иногда взрослых. Некоторые из них вкладывают свои деньги в банки под проценты. Это лишь отчасти решает проблему сохранения денег, так как рост цен чаще всего опережает рост суммы на вкладе. Кроме того, надо еще выбрать банк, условия которого выгоднее. Да и в одном и том же банке могут быть вклады на разные сроки и под разные проценты. Вот последний пример.

Сбербанк России с 1 октября 1993 г. за хранение денег на депозитном вкладе в течение года, шести и трех месяцев выплачивает доход в 150%, 130% и 120% годовых соответственно. Расчеты показывают, что если при этих условиях положить деньги на 6 месяцев, затем полученную сумму (с процентами) еще раз положить на 6 месяцев, то за год будет получен доход 172,25% от первоначальной суммы. Если таким же способом положить деньги 4 раза на 3 месяца, то годовой доход составит 185,61%. Таким образом, можно за счет процентов на процентные деньги увеличить годовой доход по вкладам сбербанка почти на четверть (на 23,74%).

Итак, если ваши родители не хотят вкладывать деньги в малоизвестные банки под большие проценты, а идут в Сбербанк, то пусть используют его условия с максимальной выгодой для себя описанным выше способом. Выгодно ли это Сбербанку, который будет платить наиболее сообразительным вкладчикам не 150, а 185,6 процента годовых? Не знаю. Как не знаю и того, что это – просчет или хорошо продуманный расчет Сбербанка, нацеленный на удержание денег вкладчиков не мытьем, так катаньем.

Впрочем, оставим взрослые проблемы взрослым, а сами рассмотрим естественно возникающие в этой ситуации задачи. Сначала проверим правильность всех расчетов, результаты которых приведены выше.

Действительно, если вы положите a рублей на депозитный счет под 150% годовых, то через год получите $a + 1,5a = 2,5a$ рублей.

Если вы положите a рублей на 6 месяцев под 130% годовых, то за это время на них начислят 130% : 2 = 65% дохода, т.е. вы получите $1,65a$ рублей. Другими словами, за 6 месяцев вложенная сумма увеличится в 1,65 раза. Если же все полученные деньги еще раз положить на 6 месяцев, то эта новая сумма тоже увеличится в 1,65 раза и составит к концу года $1,65 \cdot 1,65a = 2,7225a$ р. Это на $1,7225a$ р. или 172,25% больше, чем a р.

Если же вы положите a р. на 3 месяца, т.е. увеличите вложенную сумму на 120% : 4 = 30%, потом каждый раз полученные деньги будете вкладывать еще на 3 месяца, то через год вы получите $1,3^4 \cdot a = 2,8561a$ р. Это на $1,8561a$ р. или на 185,61% больше, чем a р.

В итоге за счет процентов на процентные деньги вы увеличите свой доход со 150% до 185,61%, т.е. на

$$\frac{185,61 - 150}{150} \cdot 100 = 23,74 \text{ процента.}$$

Следующую задачу должно было бы поставить и решить руководство Сбербанка, если бы оно считало нежелательным многократное использование клиентами вкладов на 3 и 6 месяцев:

Каким наибольшим целым числом

должен выражаться процент годовых для вкладов на 6 месяцев, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход меньший, чем вклад на 1 год? Каким наибольшим целым числом должен выражаться процент годовых для вкладов на 3 месяца, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход меньший, чем вклад на 6 месяцев?

Решим задачу в общем виде, считая, что за хранение денег на срочном депозитном вкладе в течение года Сбербанк выплачивает доход в размере $p\%$. Определим наибольшее целое число x, которым должен выражаться процент годовых для вкладов на 6 месяцев, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход, меньший $p\%$.

Пусть в начале года положили a р. под $p\%$ годовых. В конце года получат

$$a + \frac{p}{100}\cdot a = a\left(1+\frac{p}{100}\right) \text{ р.}$$

Пусть теперь положили a р. под $x\%$ годовых на 6 месяцев и полученную через полгода сумму, увеличенную на $\frac{x}{2}\%$, еще раз положили на 6 месяцев. В конце года получат $a\left(1+\frac{x}{200}\right)^2$ р. По условию задачи первый результат должен быть больше второго:

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right) > a\left(1+\frac{x}{200}\right)^2;$$

$$1+\frac{p}{100} > 1+\frac{2x}{200}+\frac{x^2}{40000};$$

$$400p > 400x + x^2;$$

$$x^2 + 400x - 400p < 0.$$

Так как $x > 0$, то

$$x < 20\sqrt{p+100} - 200. \qquad (1)$$

При $p = 150$ наибольшее целое x определяется из неравенства (1):

$$x < -200 + 20\sqrt{150+100} =$$

$$= 20\sqrt{250} - 200 < 116{,}3,$$

т.е. $x = 116$.

Проверим полученный результат.

Двукратное вложение денег на 6 месяцев под 116% годовых дает доход $\left(1+\frac{116}{200}\right)^2 - 1 = 1{,}49\ldots$ Это меньше 150%. А под 117% годовых — дает доход $\left(1+\frac{117}{200}\right)^2 - 1 = 1{,}51\ldots$ Это больше 150%.

Пусть теперь известна процентная ставка x по вкладам на 6 месяцев. Определим наибольшее целое число y, которым должен выражаться процент годовых для вкладов на 3 месяца, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход, меньший $x\%$. Дальше можно полностью повторить рассуждения по приведенной выше схеме или получить результат из неравенства (1) подстановкой $p = \frac{x}{2}$, $x = \frac{y}{2}$:

$$\frac{y}{2} < 20\sqrt{\frac{x}{2}+100} - 200,$$

откуда

$$y < 20\sqrt{2x+400} - 400. \qquad (2)$$

При $x = 116$ наибольшее целое y определяется из неравенства (2):

$$y < 20\sqrt{232+400} - 400 =$$

$$= 20\sqrt{632} - 400 < 102{,}8$$

т.е. $y = 102$.

Проверим полученный результат.

Двукратное вложение денег на 3 месяца под 102% годовых дает доход $\left(1+\frac{102}{400}\right)^2 - 1 = 0{,}575\ldots$ — меньший, чем $\frac{116\%}{2} = 58\%$, а под 103% годовых дает доход $\left(1+\frac{103}{400}\right)^2 - 1 = 0{,}581$ — больший 58%.

Таким образом, мы получили неравенства (1) и (2), с помощью которых по заданному проценту p для депозитных вкладов на 1 год можно вычислить процент годовых x для вкладов на 6 месяцев, а по нему вычислить процент годовых y для вкладов на 3 месяца. При указанных процентах x и y многократное использование вкладов на 6 и 3 месяца вместо одного вклада на 1 год теряет экономическую эффективность.

А так ли хорошо знакомы вам

деформации?

..сила любой пружины пропорциональна ее растяжению.

Роберт Гук

Конечно же, в утверждении Гука речь идет об одной из самых наглядных — об упругой деформации. Однако в школе дается представление и о других видах деформаций, изучение которых играет огромную роль. Вспомните задачи об упругих и неупругих ударах, о равновесии тел, об изменении формы и объема тел, о механических колебаниях... Список настолько велик, а понимание связанных с деформациями механических свойств тел столь важно для науки и техники, что можно без преувеличения говорить об исследовании этих свойств как об одной из главных задач современной физики.

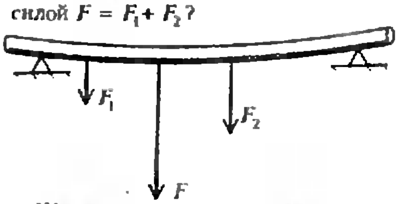
Получается, что и в школьном курсе к понятию деформации приходится обращаться не раз и в различных его частях. На макроскопическом уровне — в механике и при изучении тепловых явлений; при объяснении взаимодействия атомов и молекул — в кинетической теории вещества; при выявлении природы упругих сил — в электромагнетизме. Поэтому так разнообразны ситуации, в которых вы сегодня встретитесь с этим отнюдь не второстепенным понятием.

Вопросы и задачи

1. В каком случае веревка сильнее натягивается — если человек тянет ее руками за концы в разные стороны или если он тянет обеими руками за один конец, привязав другой к стенке? В обоих случаях каждая рука действует с одной и той же силой.

2. Тяжелый цилиндр свободно падает. Какие силы действуют на каждый его горизонтальный слой со стороны соседних?

3. К доске, лежащей на опорах, приложены силы F_1 и F_2. Изменится ли прогиб доски, если их заменить одной силой $F = F_1 + F_2$?



4. Железная и медная проволоки одинаковых размеров подвешены вертикально и соединены внизу горизонтальным невесомым стержнем. Сохранится ли горизонтальное положение стержня, если к его середине прикрепить весомый груз?

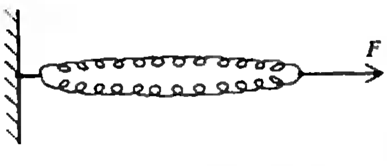
5. Как отличаются относительные удлинения двух проволок из одного и того же материала при одинаковых нагрузках, если длина и диаметр первой проволоки в 2 раза больше, чем второй? А абсолютные удлинения?

6. При волочении металлический стержень многократно протягивается через ряд отверстий с уменьшающимся диаметром. Какие деформации он испытывает при этом?

7. Зачем у динамометров делают ограничители растяжения пружин?

8. Для чего рыболовы используют удилища с тонкими упругими концами?

9. Почему быстро летящая пуля в мягком пластмассовом стакане с водой пробивает лишь два маленьких отверстия, а стеклянный стакан разбивает вдребезги?



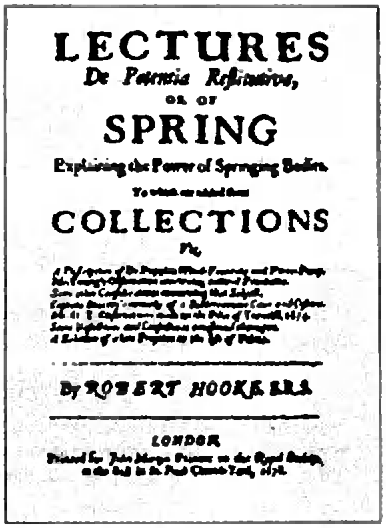
10. Концы двух невесомых спиральных пружин разных длин скреплены, как показано на рисунке. Как будет выглядеть график зависимости растягивающей силы F от перемещения x ее точки приложения?

11. Как изменится период вертикальных колебаний груза, висящего на двух одинаковых пружинах, если их последовательное соединение заменить параллельным?

12. На нити висит тело A. К нему на пружине подвешивают тело B и нить пережигают. С одинаковыми ли ускорениями начнут падать тела?

13. Почему кварцевый стержень выдерживает резкие охлаждения, не разрушаясь при этом?

14. Чтобы разорвать кусок проволоки, требуются значительные усилия, однако раскаленную проволоку разорвать намного легче. Почему?

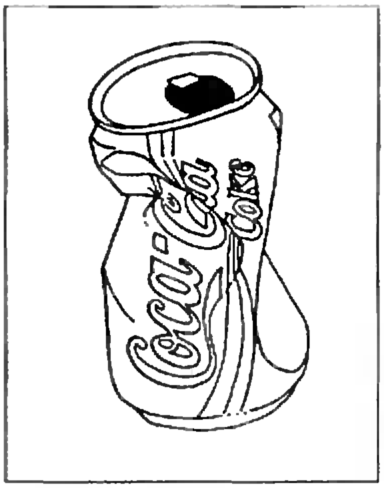


LECTURES
De Potentia Restitutiva,
OR OF
SPRING
Explaining the Power of Springing Bodies.
To which are added some
COLLECTIONS
Viz.

By ROBERT HOOKE S.R.S.

LONDON
Printed for John Martyn Printer to the Royal Society, at the Bell in St. Paul's Church-Yard, 1678.

15. Как изменится напряжение в стержне, если его нагревать, препятствуя его расширению?
16. Как изменяется энергия тела при пластических деформациях?
17. Сжатая стальная пружина обладает потенциальной энергией. Куда девается эта энергия при растворении сжатой пружины в кислоте?



18. Какая из двух одинаковых по размерам невесомых пружин — стальная или медная — приобретает б$_0$льшую потенциальную энергию под действием одной и той же нагрузки?

Микроопыт

Поставьте вертикально резиновую трубку, на которую предварительно туго надето металлическое кольцо, и растяните трубку. Что при этом произойдет с кольцом? Почему?

Любопытно, что...

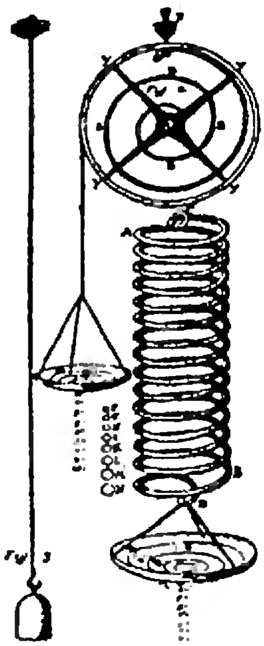
...научные интересы Гука были столь широки, что он часто не успевал доводить свои исследования до конца. Это давало повод к острейшим спорам о приоритете в открытии тех или иных законов с крупнейшими учеными (Гюйгенсом, Ньютоном и др.). Однако «закон Гука» был настолько убедительно обоснован многочисленными экспериментами, что тут приоритет Гука никогда не оспаривался.

...в начале XVIII века участились аварии на рудниках, связанные с разрывом железных цепей, применяемых в шахтных подъемниках. Попытки модернизировать цепи предпринимали многое ученые, в том числе и знаменитый математик и философ Г.Лейбниц. Но — безуспешно. А вот старшему горному советнику, юристу по образованию, В. Альберту пришла в голову идея заменить цепи проволочными канатами или тросами. Это позволило использовать такое важное свойство железа, как прочность на растяжение.

...побеление мокрого песка при ходьбе по нему впервые удалось объяснить в 1885 году английскому физику и инженеру О. Рейнольдсу. Он показал, что под действием возникающей под ногой деформации сдвига объем, занимаемый песчинками, увеличивается и песок некоторое время находится выше уровня воды.

...одиночные кристаллы многих металлов, выросшие из расплава, оказываются настолько мягкими, что их легко согнуть пальцами. А вот разогнуть — уже не удается. Это — пример замечательной способности пластически деформируемых тел упрочняться.

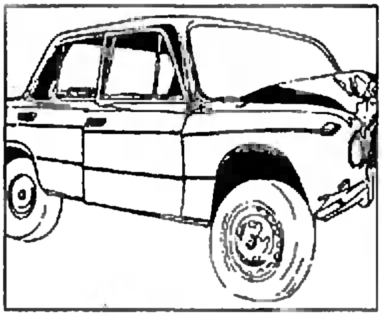
...объяснение пластической деформации возникло лишь тогда, когда физики (уже в нашем столетии) открыли так называемые дислокации — дефекты кристаллической решетки твердого тела. С современной точки зрения, этот вид деформации есть «движение беспорядка» вдоль кристалла.



...на сегодняшний день получены особые сверхупругие сплавы, напоминающие поведением резину и способные выдерживать огромные упругие деформации — на два порядка больше, чем обычные металлы. С другой стороны, многие сплавы можно привести в сверхпластичное состояние, когда они при очень низких напряжениях текут, подобно разогретому стеклу.

...совместить противоположные механические характеристики удается в композитах — «сборных» материалах, включающих легкую и пластичную основу и наполнители из тонких волокон очень прочного вещества.

...можно измерить деформации, меньшие диаметра атома, правда, если они носят колебательный характер — тогда их легко преобразовать в электрические сигналы. Кстати, ухо человека способно «измерить» столь же малые деформации барабанной перепонки.



...при деформации кварца и некоторых других диэлектриков на их поверхности возникают электрические заряды, а поляризация диэлектриков в электрическом поле может привести к их деформации. Эти явления называют прямым и обратным пьезоэлектрическим эффектом.

...если достаточно долго облучать свинец нейтронами, в нем происходит внутренняя перестройка и он становится настолько упругим, что изготовленный из него колокол мог бы звучать не хуже отлитых из лучшей колокольной бронзы.

Что читать в «Кванте» о деформациях

(публикации последних лет)

1. «О двух мерах взаимодействия» — № 3, 1991, с. 37;
2. «Слинки — шагающая пружинка» — № 6, 1991, с. 42;
3. «Что покажет динамометр?» — № 2, 1992, с.47;
4. «Физика и гитара» — № 6, 1992, с. 48;
5. «Корабельные пушки и волны в упругих стержнях» — №7, 1992, с. 21;
6. «Повесть о том, как столкнулись два шара» — № 9/10, 1993, с. 13.

Материал подготовил А. Леонович

Физика 9 — 11

Публикуемая ниже заметка «Качели» предназначена девятиклассникам, заметка «Как при помощи магнитного поля не дать себя в обиду» — десятиклассникам, «Капельная модель ядра» — одиннадцатиклассникам.

Качели

А.ЧЕРНОУЦАН

Наверное, правильно предположить, что человек никогда не изобретал качелей — уж слишком проста их «конструкция». Здесь не требуется никакой high technology. Достаточно взять веревку, привязать один ее конец на высоте нескольких метров, взяться за другой, разбежаться, поджать ноги — и вот вы уже раскачиваетесь на самодельных качелях.

Но так ли все просто? Если мы, оторвавшись от земли, не будем ничего предпринимать, то амплитуда колебаний будет постепенно уменьшаться, пока качели совсем не остановятся. Это и понятно — действие сил трения в точке подвеса качелей и сил сопротивления воздуха приводят к тому, что высота, на которую поднимается центр тяжести качелей (вместе с человеком) в крайних положениях, с каждым разом становится все меньше и меньше. Иными словами, уменьшается механическая энергия системы. Как же избежать этого? Что нужно сделать, чтобы, не касаясь земли, вновь раскачать качели и продолжать качаться столько, сколько нам хочется? Разумеется, ответ вам известен — нужно в крайних положениях чуть-чуть опускать центр тяжести своего тела относительно качелей, а в среднем — поднимать (рис. 1). Если вы стоите на качелях, то можно просто вовремя приседать и подниматься, а если вы качаетесь сидя, надо периодически сгибать и разгибать колени. В результате оказывается, что за счет работы мышц происходит увеличение механической энергии всей системы.

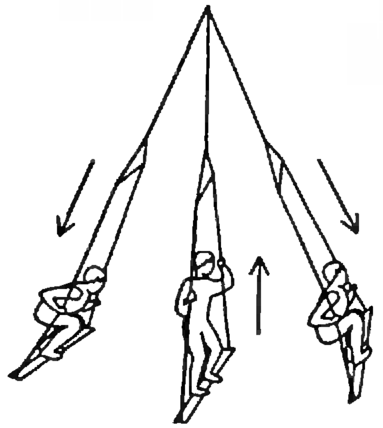


Рис. 1

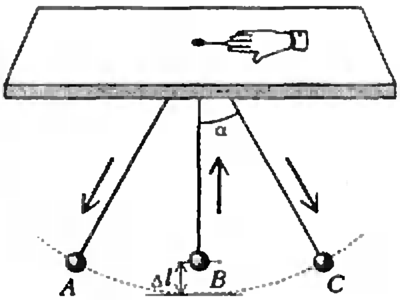


Рис. 2

Чтобы понять, почему это так, рассмотрим предельно упрощенную модель человека на качелях — обычный маятник, т.е. небольшой грузик на легкой и длинной нити. Чтобы имитировать поднимание и опускание центра тяжести, пропустим верхний конец нити через маленькое вертикальное отверстие и будем немного вытягивать нить вверх, когда маятник проходит среднее положение, и настолько же опускать нить вниз, когда маятник проходит крайние положения (рис. 2). Втягивая нить, мы совершаем положительную работу, т.е. увеличиваем энергию маятника, а отпуская нить, мы совершаем отрицательную работу, т.е. отбираем энергию у маятника. Но легко понять, что в среднем положении нить натянута сильнее, чем в крайнем, — в первом случае сила натяжения нити не только уравновешивает силу тяжести, но и сообщает маятнику центростремительное ускорение, а во втором лишь уравновешивает составляющую силы тяжести вдоль нити. Поэтому положительная работа будет больше отрицательной.

Аналогичное явление возникает и при раскачивании человека: в среднем положении его «прижимает» к качелям (можно сказать, что на него действует центробежная сила инерции — если вы знакомы с неинерциальными системами отсчета, то поймете, о чем идет речь), мышцы ног напряжены сильнее, и работа по разгибанию ног оказывается больше, чем по сгибанию.

Вернемся, однако, к нашей упрощенной модели и проделаем несложные расчеты, которые помогут нам понять, как и при каких условиях может происходить раскачивание. Натяжение нити в нижнем положении (B) равно

$$F_1 = mg + \frac{mv^2}{l},$$

а в крайнем (A и C) —

$$F_2 = mg\cos\alpha$$

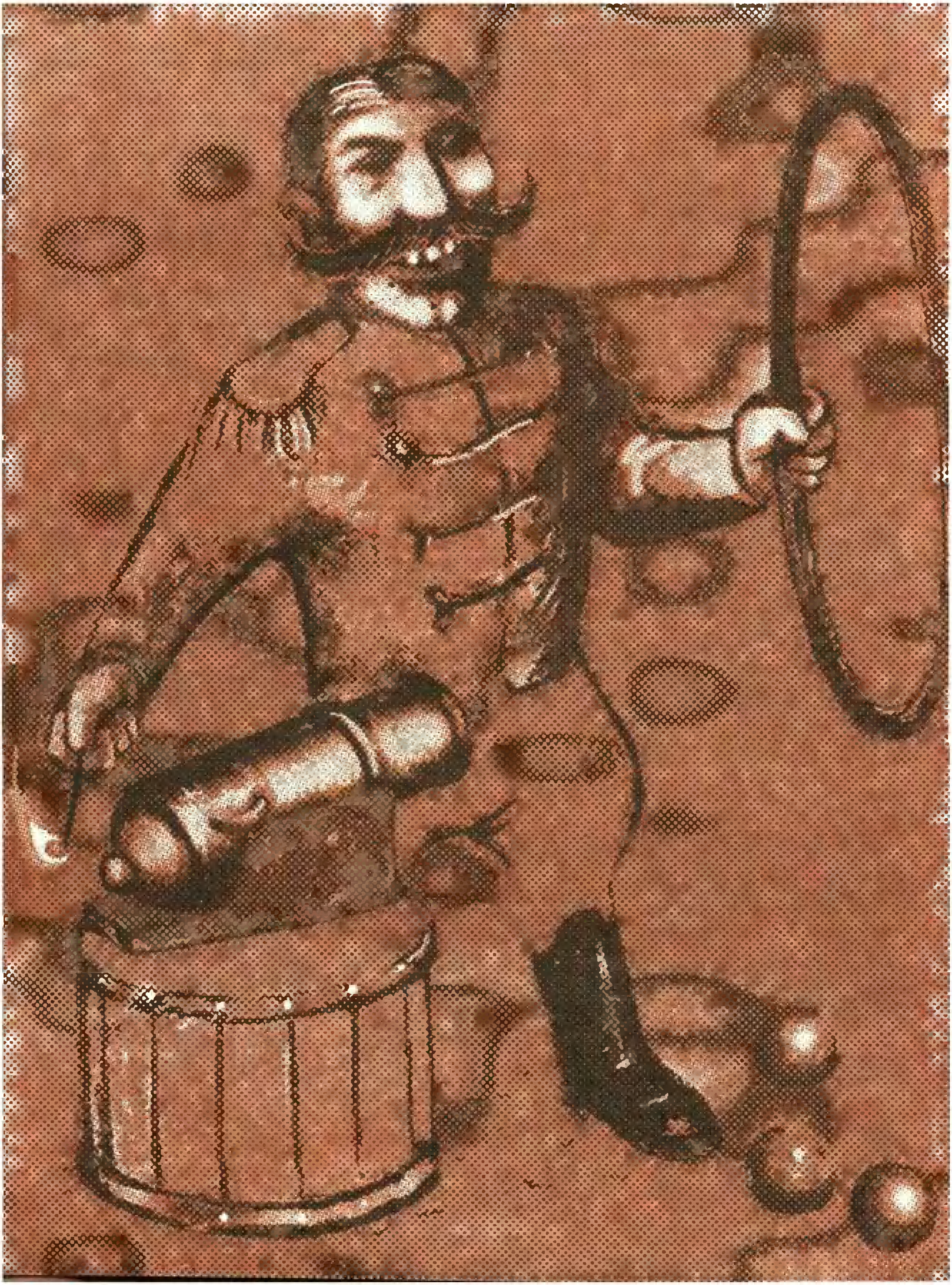
Здесь m — масса грузика, v — его скорость в среднем положении, l — длина нити, α — угол отклонения в крайнем положении. Совершенная нами за один период работа равна

$$A = \Delta E = 2\left(F_1\Delta l - F_2\Delta l\right) = \frac{2\Delta l}{l}\left(mgl(1-\cos\alpha) + 2\frac{mv^2}{2}\right),$$

где Δl — изменение длины маятника (мы считаем, что $\Delta l/l \ll 1$). Выражение в скобках есть не что иное, как утроенная энергия колебаний E. Поэтому получаем

$$\frac{\Delta E}{E} = 6\frac{\Delta l}{l}.$$

Обратите внимание: относительное увеличение энергии за период не зависит от того, слабо раскачивается маятник или сильно. Это очень важно, и вот почему. Если маятник не «подкачивать», то за каждый период он будет терять за счет трения определенную часть своей энергии и колебания будут затухать. А чтобы размах колебаний увеличивался, необходимо, чтобы приобретаемая энергия превышала потерянную. И это условие, оказывается, одно и то же — как при маленькой амплитуде движения, так и при большой. Так, если за один период энергия



свободных колебаний уменьшается на 6%, то для раскачивания маятника длиной 1 м достаточно в среднем положении уменьшать его длину на 1 см, а в крайнем — настолько же увеличивать.

Возвращаясь к качелям: если вы начали раскачиваться, то нет необходимости приседать все глубже и глубже — приседайте все время одинаково, и будете взлетать все выше и выше! Более того: если даже качели стоят на месте, а вы начали достаточно глубоко приседать с периодом, вдвое меньшим периода качелей, то колебания обязательно возникнут (правда, во-первых, надо угадать период, а во-вторых — должен помочь случай). Говоря языком техники, мы можем не только усиливать уже возникшие колебания, но и генерировать (т.е. создавать) их.

На примере детской игрушки — качелей — вы познакомились с важным физическим явлением — *параметрическим резонансом*. Почему такое название? Да потому, что для раскачивания колебаний периодически изменяют какой-нибудь из параметров, характеризующих свойства колебательной системы, например — период колебаний. Не обязательно менять параметр два раза за период — можно делать это один раз или даже один раз за несколько периодов. (Кстати, дети на качелях обычно приседают только тогда, когда движутся лицом вперед, т.е. один раз за период — так им, наверное, удобнее.) Какой мы при этом изменяем параметр, неважно. Например, для математического маятника период колебаний зависит от длины нити и от ускорения свободного падения — $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, т.е. можно изменять не только l, но и g. (Для этого не надо пытаться изменять притяжение к Земле — достаточно держаться за точку подвеса и придавать ей необходимое ускорение в вертикальном направлении. Ускорение вверх приводит к увеличению g в неинерциальной системе отсчета, связанной с точкой подвеса, ускорение вниз — к его уменьшению.) Для груза на пружинке период определяется массой груза и жесткостью пружинки — $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, т.е. можно изменять либо жесткость пружинки k , либо массу груза m (придумайте сами, как это сделать). Во всех случаях надо так изменять параметр, чтобы полная работа была положительной и энергия маятника увеличивалась.

Как при помощи магнитного поля не дать себя в обиду

А. СТАСЕНКО

В одном из мультфильмов главный герой (конечно, непоседливый мальчик) случайно выключил некий «сфероотражатель» на своем универсальном корабле, и в результате в него попал-таки неприятельский снаряд (пущенный ставленником нехорошего транснационального чудовища Боа, живущего в глубинах океана). Правда, кончилось все хорошо.

Давайте обсудим, однако, на каких физических принципах мог бы работать такой «сфероотражатель».

Первое, что приходит в голову, — зарядить снаряд и корабль одноименными зарядами, да как можно большими по модулю: ведь известно, что одноименные заряды отталкиваются, причем с силой, пропорциональной зарядам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Но откуда знать заранее, каков знак заряда у снарядов Боа?

Известно также, что заряд взаимодействует и с незаряженным металлическим телом, но в этом случае он порождает в теле свое «отражение» противоположного знака и — увы! — притягивается к нему.

Теперь попробуем использовать магнитное поле. Предположим, что снаряд обладает магнитными свойствами — пусть он похож на линейный магнит, поле которого качественно изображено на рисунке 1. Вообразим себе тонкое проволочное кольцо радиусом a и сопротивлением R, расположенное так, что снаряд-магнит движется вдоль его оси X. По мере сближения магнита и кольца последнее попадает в области все большей магнитной индукции $\vec{B}$, ее поток через неизменную площадь кольца возрастает — значит, в кольце возникают ЭДС индукции и ток. Согласно великому принципу Ле Шателье – Брауна, природа сопротивляется попытке что-либо изменить в ней — в этом секрет ее устойчивости. В нашем случае, в соответствии с правилом Ленца, направление тока должно быть таким, чтобы он порождал собственное магнитное поле $\vec{B}_1$, препятствующее росту потока внешнего поля $\vec{B}$. Таким образом, если смотреть со стороны магнита, ток в кольце должен быть направлен против часовой стрелки в случае их сближения (см. рис. 1) и по часовой стрелке — в случае удаления.

Сделаем следующий шаг в наших рассуждениях. Поскольку возникший ток находится в поле $\vec{B}$, на каждый малый отрезок кольца Δl действует сила Ампера $\Delta\vec{F}$, перпендикулярная векторам $I\Delta\vec{l}$ и $\vec{B}$ в данном месте. Она направлена к оси кольца, но не к его центру, поскольку векторы $\vec{B}$ в различных точках кольца не совсем параллельны друг другу, как бы далеко ни отстоял магнит. Модуль этой силы равен произведению длины отрезка кольца, индукции поля, силе тока и синусу угла между векторами $\vec{B}$ и $I\,\Delta l$ — а он (синус) в нашем случае равен единице.

Разложим вектор $\Delta\vec{F}$ на две составляющие: $\Delta\vec{F}_r$, направленную по радиусу к центру, и $\Delta\vec{F}_x$, параллельную оси X. Очевидно, $\Delta F_x = \Delta F \sin\alpha$. Эта-то составляющая нас и интересует. Если мы просуммируем все ΔF_x , действующие на все элементы кольца, то и получим силу отталкивания, с которой приближающийся магнит действует на кольцо:

$$F_x = 2\pi aBI\sin\alpha. \qquad (1)$$

(Еще раз напомним, что здесь угол α не есть угол между индукцией магнитного поля и током в кольце!)

Возникновение этой силы отталкивания можно объяснить и с энергетической точки зрения. Поскольку кольцо обладает сопротивлением, возникновение тока будет приводить к выделению тепла (согласно закону Джоуля – Ленца, в единицу времени будет выделяться количество теплоты I^2R). Откуда берется это тепло? Конечно, оно черпается из кинетической энергии относительного движения магнита и кольца — значит, эта энергия должна

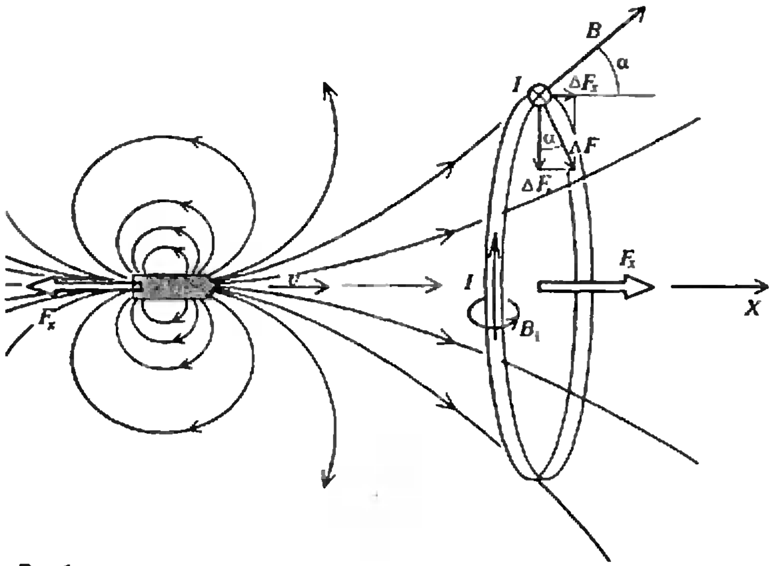


Рис. 1

убывать, или, как говорят физики, диссипировать. Следовательно, будет убывать и скорость относительного движения магнита и кольца — возникает что-то вроде «трения» их друг о друга, только это полевое «трение».

А есть ли еще какие-либо потери энергии? В принципе, да. Поскольку ток в кольце изменяется со временем (чем ближе к магниту, тем он больше), мы имеем нечто похожее на антенну — значит, могут излучаться электромагнитные волны, как от радиостанции.

Для целей торможения полезен любой канал потерь кинетической энергии.

А теперь, когда мы поняли уже так много, можно попытаться выяснить и характер зависимости силы отталкивания от расстояния. Прежде всего поймем, как изменяется индукция магнитного поля с удалением от магнита. Будь это точечный электрический заряд, напряженность поля падала бы с квадратом расстояния. Но магнитных зарядов одного знака пока что никто не видел, магнит скорее похож на диполь — два заряда, смещенных относительно друг друга. Суммарное поле двух зарядов противоположного знака в любой точке, конечно, слабее, чем поле любого из них в той же точке. Но оно не равно нулю. Можно показать, что оно обратно пропорционально кубу расстояния (см., например, статью «Любовь и ненависть в мире молекул» в предыдущем номере журнала). По аналогии для магнитного поля можно записать

$$B \sim \frac{1}{x^3}, \qquad (2)$$

а для ЭДС индукции и тока —

$$\mathcal{E} \sim \frac{dB}{dt} \sim \frac{d}{dt}\frac{1}{x^3}, \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

(здесь мы пренебрегли влиянием поля B_1, или ЭДС самоиндукции).

Согласно формуле (1), сила отталкивания будет порядка (для оценки положим $\sin\alpha \sim a/x$)

$$F_x \sim 2\pi a \cdot \frac{1}{x^3} \cdot \frac{d}{dt}\frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{a}{x} \sim \frac{v}{x^8}.$$

Вообще говоря, скорость $v = dx/dt$ тоже зависит от x. Но если кто-то возьмет на себя труд двигать кольцо в магнитном поле с постоянной скоростью, то можно считать что

$$F_x \sim x^{-8}.$$

Это очень «резкая» зависимость. Попробуйте вспомнить, где еще в физике встречается такое.

Согласно третьему закону Ньютона, такая же по модулю сила действует и на магнит. А зная силу, можно найти и зависимость скорости от расстояния.

Конечно, это только принципиальная возможность, и проведенное рассмотрение полезно лишь для целей изучения магнитного поля. Для практического осуществления «сфероотражателя» снарядов нужно еще долго трудиться — продумывать способы увеличения силы отталкивания. Например, что если взять не один виток, а два? Очевидно, поток индукции магнитного поля тоже удвоится, увеличится сила тока и сила отталкивания. Но почему два? Можно много, причем в разных плоскостях, ибо заранее неизвестно, откуда прилетит снаряд-магнит. Вот вам и «сфероотражатель».

Но что, если снаряды не обладают собственным магнитным полем? Тогда можно заранее включить ток в кольце, и он будет создавать магнитное поле, изменяющееся (на больших расстояниях от кольца) тоже согласно выражению (2). Это поле станет индуцировать ток в приближающемся теле и тормозить его (рис. 2).

Ну, а если это тело не проводник, не пара- и не ферромагнетик — ну, совсем из пластика или, хуже того, из диамагнетика? Тогда уж думайте сами, что еще можно сделать. Или поступайте учиться в Московский физико-технический институт, где вам придет в голову множество светлых мыслей.

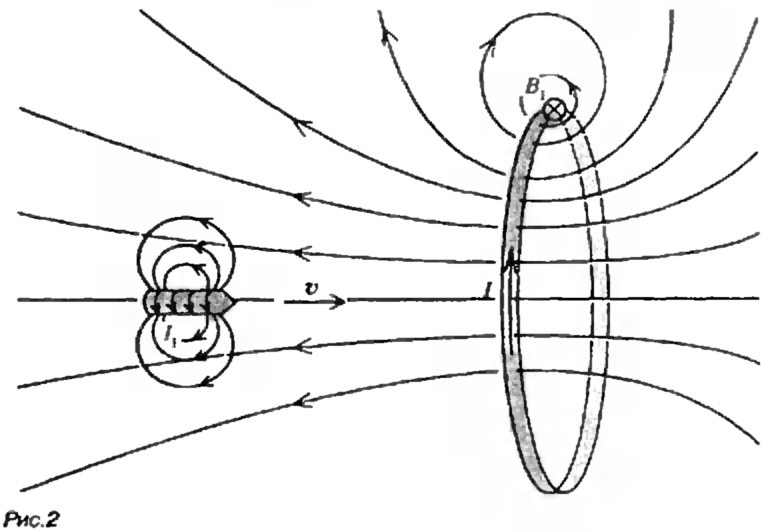


Рис.2

Капельная модель ядра

А. ВАРЛАМОВ

Однажды основоположника ядерной физики Э. Резерфорда спросили, какой практический интерес могут иметь его открытия в области радиоактивности. Ученый ответил, что ровно никакого. В то время — в начале века — действительно невозможно было даже вообразить способ использования внутриядерных процессов и явлений.

Важнейшую роль в открытии возможностей использования атомной энергии сыграла способность некоторых тяжелых ядер к делению. В 1938 году было обнаружено, что при бомбардировке ядер урана нейтронами образуются ядра-осколки более легких элементов. И этот процесс всегда сопровождается испусканием нескольких новых нейтронов.

Почему же ядра могут делиться? Первую теорию деления ядер создали в 1939 году физики-теоретики датчанин Н. Бор и американец Дж. Уилер и независимо от них советский физик-теоретик Я. И. Френкель. Данное ими объяснение основывалось на так называемой капельной модели атомного ядра. Согласно этой модели, ядро, представляющее собой сгусток нуклонов, ведет себя подобно капле электрически заряженной жидкости. Попробуем разобраться в этом подробнее и прежде всего выясним, от чего и как зависит энергия связи ядра — энергия, которую необходимо затратить для разделения ядра на составляющие его нуклоны.

Ядерные силы, притягивающие нуклоны друг к другу, проявляются лишь на очень малых расстояниях, поэтому каждый нуклон взаимодействует практически только со своими ближайшими соседями, а не со всеми имеющимися в ядре нуклонами. (Физики называют эти силы короткодействующими и говорят, что они обладают ограниченным радиусом действия порядка 10^{-15} м.) Так же обстоят дела и в обычной капле — поскольку силы межмолекулярного притяжения действуют на расстояниях, не превышающих расстояния между молекулами, приходится считаться лишь с взаимодействием ближайших соседей. Число соседей у каждого нуклона внутри ядра можно считать постоянным, поэтому вклад в энергию связи, обусловленный ядерными силами, оказывается пропорциональным числу нуклонов в ядре, т.е. массовому числу A —

$$E_я \sim A.$$

Однако у нуклонов на поверхности «ядерной капли» соседей меньше, чем внутри ядра, поэтому в энергию связи они дают несколько меньший вклад, чем мы уже приписали. Это можно учесть, вычтя из $E_я$ поверхностную энергию $E_{пов}$, пропорциональную числу нуклонов на поверхности ядра, а следовательно, и площади его поверхности —

$$E_{пов} \sim S_{пов} \sim R_я^2 \sim A^{2/3}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что, как показывает опыт, радиусы ядер довольно точно пропорциональны кубическому корню из массового числа. Как видим, и тут имеется полная аналогия с каплей обычной жидкости — молекулы, находящиеся на поверхности, стремятся уйти вглубь и создают поверхностное натяжение, с которым связана поверхностная энергия жидкости.

Чтобы получить окончательное выражение для энергии связи ядра, нам осталось учесть, что часть нуклонов — протоны — заряжены. А это означает, что, помимо ядерного притяжения к ближайшим соседям, они испытывают еще и обычное электростатическое отталкивание, подчиняющееся закону Кулона. Взаимное отталкивание протонов стремится разорвать ядро и, таким образом, уменьшает его энергию связи. В отличие от ядерных, кулоновские силы не короткодействующие, а дальнодействующие — каждый протон взаимодействует со всеми протонами своего ядра. Энергия отталкивания двух протонов пропорциональна их зарядам и обратно пропорциональна расстоянию между ними, т.е. $\sim e^2/r_я$. Если в ядре имеется Z протонов, то каждый из них взаимодействует с $(Z-1)$ остальными и число взаимодействующих пар равно $1/2\,Z(Z-1)$. Для больших Z можно считать, что это число пропорционально Z^2; таким образом, энергию электростатического отталкивания протонов в ядре можно представить в виде

$$E_{эл} \sim Z^2e^2/R_я \sim Z^2e^2/A^{1/3}.$$

Итак, окончательно для энергии связи ядра получаем

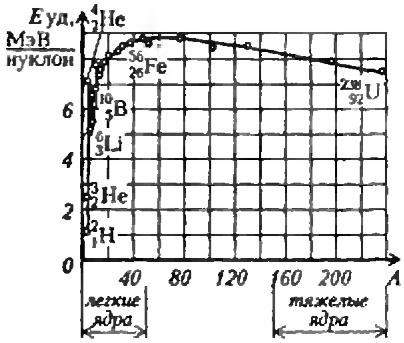
$$E_{св} = E_я - E_{пов} - E_{эл} = \alpha A - \beta A^{2/3} - \gamma Z^2/A^{1/3},$$

где α, β и γ — некоторые постоянные коэффициенты. Эта формула неплохо описывает экспериментальную кривую зависимости удельной энергии связи, т.е. энергии связи, приходящейся на один нуклон ядра, от массового числа (см. рисунок). Сначала с ростом A энергия связи растет, где-то в средней части таблицы Менделеева она достигает максимума, а затем уменьшается.

Рассмотрим теперь процесс деления ядра. Пусть «ядерная капля», поглотив попавший в нее нейтрон, возбуждается, начинает деформироваться и в какой-то момент вытягивается. Минимальную поверхность при заданном объеме имеет сферическая капля. У вытянутой капли поверхностная энергия увеличивается, а энергия связи ядра соответственно уменьшается. С другой стороны, при растяжении ядра возрастает среднее расстояние между нуклонами и энергия их электростатического отталкивания уменьшается, в результате чего энергия связи увеличивается. Если в этой борьбе победит электростатическое взаимодействие, ядро разорвется; если же поверхностное — ядро вернется в исходное состояние.

Из полученного выражения для $E_{св}$ ясно, что судьба ядра во многом зависит от числа протонов (Z) и общего числа нуклонов (A). С ростом порядкового номера элемента энергия электростатического отталкивания возрастает быстрее поверхностной энергии, поэтому делиться могут только тяжелые ядра.

Как уже говорилось, в процессе деления ядра всегда испускается еще несколько нейтронов (для урана обычно 2 — 3), которые могут вызвать деление других ядер. Именно эти нейтроны и позволяют, опровергнув пессимистическое предсказание Резерфорда, реализовать на практике цепную ядерную реакцию деления, которая сопровождается выделением огромной энергии.



Эта заметка была опубликована в «Кванте» № 5 за 1986 год.

Медианы треугольника

1. Докажите, что медиана, выходящая из вершины A треугольника ABC, является геометрическим местом точек M внутри треугольника, для которых треугольники AMB и AMC равновелики.

2. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершин треугольника.

3. Поместим в вершинах треугольника грузы с равными массами. Докажите, что центр масс этих грузов есть точка пересечения медиан треугольника.

Замечание. Рассматривая такую систему грузов, мы можем доказать также, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

4. Докажите, что медианы треугольника делят его на 6 равновеликих треугольников.

5. Дан треугольник ABC. Найдите геометрическое место точек M, расположенных в плоскости этого треугольника, для которых треугольники AMB и AMC равновелики.

6. Найдите все точки M, расположенные в плоскости треугольника ABC, для которых треугольники AMB, BMC и CMA равновелики.

7. Постройте треугольник по трем медианам.

8. Докажите, что из медиан треугольника можно составить треугольник (т.е. треугольник со сторонами, равными медианам данного). Чему равно отношение площади данного треугольника и треугольника из его медиан?

9. Пусть a, b и c — стороны треугольника, m_a — медиана к стороне a. Докажите, что

$$m_a^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right).$$

10. Докажите, что для всех треугольников отношение суммы квадратов его медиан к сумме квадратов его сторон одно и то же. Чему равно это отношение?

11. На плоскости даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек M плоскости, для которых $MA^2 + MB^2$ есть величина постоянная.

12. Пусть a, b, c и d — стороны четырехугольника, m и n его диагонали, l — расстояние между серединами диагоналей. Докажите, что

$$l^2 = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - m^2 - n^2\right).$$

13. Докажите, что для любого четырехугольника сумма квадратов его сторон не меньше суммы квадратов его диагоналей, причем равенство имеет место, если четырехугольник — параллелограмм.

14. Пусть M — произвольная точка плоскости, G — центр тяжести (точка пересечения медиан) треугольника ABC. Докажите, что имеет место равенство

$$3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{3}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right)$$

(*теорема Лейбница*).

Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до вершин треугольника достигает наименьшего значения, если точка совпадает с точкой пересечения медиан этого треугольника.

15. Полупериметр треугольника ABC равен p. Докажите, что для любой точки M плоскости имеет место неравенство

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 \ge \frac{4}{9}p^2,$$

причем равенство имеет место лишь в случае, когда ABC — правильный треугольник, M — его центр.

16. Докажите, что если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 0$. Докажите также, что если $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 0$, то M — точка пересечения медиан треугольника ABC.

17. На сторонах треугольника во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника с вершинами в центрах этих квадратов совпадает с точкой пересечения медиан данного треугольника.

18. В равнобочной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC проведена высота BK. Докажите, что прямая CK проходит через точку пересечения медиан треугольника ABD.

19. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки K и M так, что $\frac{AK}{KB} + \frac{CM}{MB} = 1$. Докажите, что отрезок KM проходит через точку пересечения медиан треугольника ABC.

20. На плоскости отмечены две точки A и M. Найдите геометрическое место точек B плоскости, для каждой из которых существует точка C такая, что M — точка пересечения медиан треугольника ABC и все углы этого треугольника острые.

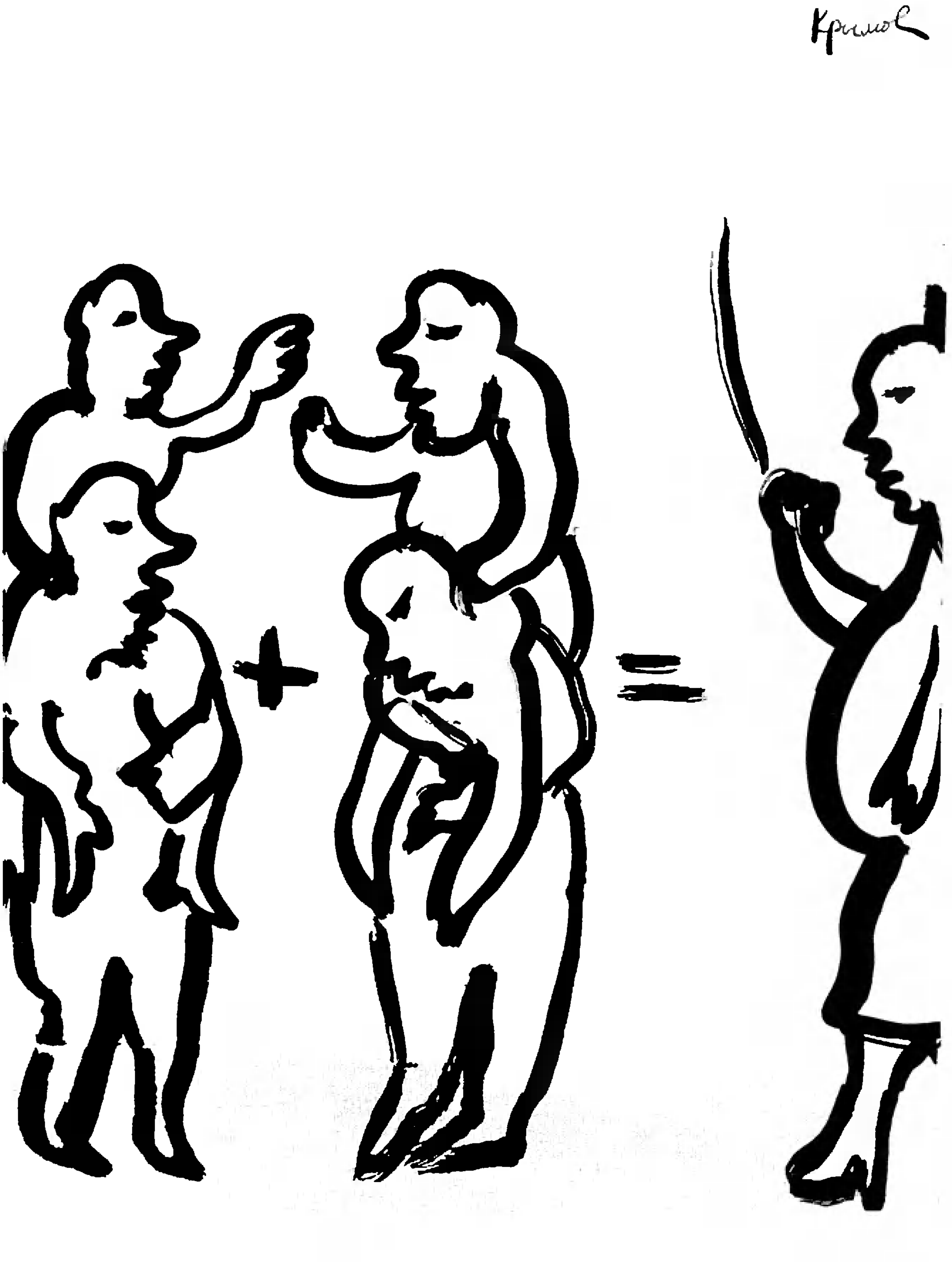
21. Найдите геометрическое место точек пересечения медиан треугольников, две вершины которых расположены в фиксированных точках плоскости, а третья описывает заданную окружность.

22. Назовем медианой пятиугольника отрезок, соединяющий его вершину с серединой противоположной стороны. Докажите, что если 4 из 5 медиан пятиугольника пересекаются в одной точке, то и пятая проходит через ту же точку.

23. Внутри данного треугольника найдите геометрическое место точек M, для каждой из которых для любой точк K, лежащей на границе треугольника, можно найти такую точку P внутри или на границе, что площадь треугольника MKP не меньше $1/6$ площади данного треугольника.

24. Внутри окружности отмечена точка P. Рассмотрим треугольник, вписанный в эту окружность и такой, что P для него является точкой пересечения медиан. Укажите точки окружности, где может находиться вершина наибольшего угла такого треугольника, угла среднего по величине, а также вершина его наименьшего угла.

И. Шарыгин


Крылов

Легко ли складывать и умножать дроби

С.ГАШКОВ

«Конечно!» — скажет бойкий школьник, и, возможно, добавит, что это умели делать еще в древнем Египте сорок веков назад. «Это смотря какие дроби», — возразит знаток. Например, так называемые цепные, или непрерывные, дроби складывать или умножать совсем непросто — удобные алгоритмы для этого неизвестны (познакомиться с цепными дробями вы можете по статье Е.М.Никишина и Ю.В.Нестеренко в пятом номере «Кванта» за 1983 г. или по книжке А.Я.Хинчина «Цепные дроби».)

Но далее речь пойдет об обыкновенных дробях и их десятичных представлениях. Правила действий с ними действительно несложны и известны сейчас, надо надеяться, любому грамотному человеку. Однако так было не всегда, в чем можно убедиться, прочитав в интересно написанной книжке О.Оре «Приглашение в теорию чисел» (Библиотечка «Квант», выпуск 3) несколько строк из дневника Сэмюэля Пеписа, повествующие о том, с каким трудом он осваивал в тридцатилетнем возрасте таблицу умножения — а к тому времени (1662 г.) он уже получил в Кембридже степени бакалавра и магистра! Если уж говорить об умении действовать с дробями, то в средневековье владевших этим искусством людей во всей Европе, видимо, можно было пересчитать по пальцам — не случайно с тех времен и до наших дней в немецком языке сохранилась поговорка, буквально означающая «попасть в дроби».

Справедливости ради надо заметить, что трудности в действиях с обыкновенными дробями имеют объективную причину: две графически различные дроби могут оказаться равными по величине, как например $\frac{116690151}{427863887}$ и $\frac{3}{11}$ (пример заимствован из книги Ч.Тригга «Задачи с изюминкой»[1]). По этой же причине по-настоящему строгое построение числовой системы рациональных чисел осуществляется только в университетском курсе математики, а каждый, кто хочет вполне овладеть искусством обращения с дробями, вынужден знакомиться с такими понятиями как наименьшее общее кратное (НОК), наибольший общий делитель (НОД), простые и составные числа и т.д.

Однако прекратим запугивать читателя и вспомним, что еще средневековые математики Ближнего Востока нашли простой подход к вычислениям с дробными числами — использование десятичных позиционных дробей. Позиционная десятичная система попала туда, видимо, из Индии, а позиционные дроби, правда не десятичные, а шестидесятиричные, были известны еще в древнем Шумере. Двадцатиричная система использовалась индейцами майя, а десятичные дроби впервые появились в древнем Китае. Но идея позиционной системы счисления не так тривиальна, как это кажется на первый взгляд — этой идеей не владели, например, великолепные математики Древней Греции. Заслуга введения в практику десятичных дробей и алгоритмов действия с ними принадлежит нидерландскому ученому и инженеру Симону Стевину (1548 – 1620). Сейчас эти алгоритмы с успехом работают в любом микрокалькуляторе, что вполне может привести к тому, что школьники совсем разучатся выполнять эти действия вручную.

Десятичные дроби имеют один недостаток, правда не сказывающийся на их применении и поэтому остающийся в тени. Именно, некоторые обыкновенные дроби невозможно точно выразить в виде конечных десятичных дробей, а лишь в виде бесконечных периодических дробей, причем период может начинаться не сразу после запятой, отделяющей целую и дробную части, а после так называемого предпериода. Такие примеры приведены в предыдущем номере нашего журнала в статье Г.Радемахера и О.Теплица.

Вычисление периода и предпериода на практике не всегда простое дело. Попробуйте-ка вычислить период у безобидной с виду дроби $1/49$ (пример заимствован из упоминавшейся книги Ч.Тригга). Теоретически этот вопрос тоже не прост, и не случайно в школьных учебниках, как правило, отсутствует доказательство периодичности десятичных дробей, представляющих рациональные числа, и тем более какие-нибудь факты о длине периода. Мы не будем их здесь излагать, а отошлем читателя к упомянутой статье Г.Радемахера и О.Теплица. Чтобы читателю не приходилось каждый раз заглядывать в предыдущий номер, напомним несколько утверждений о периодах и предпериодах.

1. Правильная обыкновенная дробь $\frac{m}{n}$ представляется конечной десятичной дробью, если и только если n не делится на простые числа, отличные от 2 и 5.

Правильная обыкновенная несократимая дробь $\frac{m}{n}$ представляется десятичной дробью с периодом длиной t и предпериодом длиной k, если и только если $10^k(10^t-1)$ делится на n, причем k и t — наименьшие натуральные числа, удовлетворяющие этому условию.

Дробь имеет чисто периодическое разложение, если и только если n не делится ни на 2, ни на 5.

2. Сумма длин периода и предпериода десятичного разложения любой правильной дроби со знаменателем n не превосходит $\varphi(n)$ — числа всех несократимых правильных дробей со знаменателем n. Равенство возможно лишь для дробей с чисто периодическим разложением.

3. Длина периода является делителем числа $\varphi(n)$, где n — знаменатель соответствующей обыкновенной дроби. Длина периода равна $\varphi(n)$ для бесконечно многих дробей, например $1/7^k$, $1/17^k$.

Из утверждения 3 следует, что $10^{\varphi(n)}-1$ делится на n — это частный случай теоремы Эйлера; общий случай получится, если рассматривать позиционные дроби по произвольному основанию a.[2]

4. Длина периода десятичной записи дроби со знаменателем n не превосходит $n-1$. Равенство возможно лишь при простом n.

Примерами таких n служат 7, 17, 29 и 1013, однако неизвестно, конечно или бесконечно их количество. Гаусс пред-

[1] *М., «Мир», 1975 г.*

[2] *См. также статью А.Егорова и А.Котовой «Необыкновенные арифметики» («Квант», 1983 г., № 3/4).*

положил, что оно бесконечно.

Функция $\varphi(n)$, упомянутая выше, называется функцией Эйлера. Если известны все простые делители $p_1, \ldots, p_m$, то ее можно вычислить по формуле Эйлера

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_m}\right).$$

Напомним также, что наименьшее общее кратное натуральных чисел m и n — это наименьшее натуральное число, делящееся как на m, так и на n. Для него принято обозначение НОК (m, n) или $[m; n]$. Наибольший общий делитель чисел m и n обозначается НОД (m, n) или $(m; n)$.

Упражнение 1. Докажите, что длина предпериода у десятичного разложения правильной дроби со знаменателем n не превосходит $\log_2 \frac{n}{3}$. Равенство достигается для несократимых дробей со знаменателем $3 \cdot 2^k$ и только для них.

Сложение дробей

Разумеется, для выполнения действий над периодическими дробями можно обратить их в обыкновенные дроби, выполнить нужные действия, а затем результат разложить в десятичную дробь. Однако при таком способе действий трудно понять, какой будет длина периода у получившейся дроби, так что дальше мы будем поступать несколько иначе.

Нам понадобится еще один подход к десятичным дробям. Рассмотрим, например, дробь $\alpha = 0,79(123)$. Ее можно записать в виде суммы

$$\alpha = \frac{79}{100} + \frac{123}{100 \cdot 1000} + \frac{123}{100 \cdot 1000^2} + \ldots + \frac{123}{100 \cdot 1000^k} + \ldots$$

Слагаемые, начиная со второго, образуют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{123}{100}$.

Суммируя эту прогрессию по известной формуле $\left(a + aq + aq^2 + \ldots = a / (q-1) \text{ при } |q| < 1\right)$ получаем

$$\alpha = \frac{79}{100} + \frac{123}{100000\left(1 - \frac{1}{1000}\right)} = \frac{79}{100} + \frac{123}{100 \cdot 999} = \frac{79(10^3 - 1) + 123}{99900} = \frac{6587}{8325}$$

(сравните этот способ с описанным у Радемахера и Теплица).

В общем виде для дроби $\alpha = 0, \alpha_1 \ldots \alpha_k (\alpha_1 \ldots \alpha_t)$ (α_i, $i = 1, 2, \ldots k$ и a_j, $j = 1, 2, \ldots, t$ — цифры десятичного разложения) получаем

$$\alpha = \frac{a}{10^k} + \frac{A}{10^k \cdot 10^t} + \frac{A}{10^k \cdot 10^{2t}} + \ldots + \frac{A}{10^k \cdot 10^{nt}} + \ldots = \frac{a}{10^k} + \frac{A}{10^k(10^t - 1)},$$

здесь $a = \overline{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$ — предпериод, а $A = \overline{a_1 \ldots a_t}$ — период дроби α.

В дальнейшем, чтобы не употреблять слишком часто слов «длина периода», будем говорить, что *период дроби равен n, если он состоит из n цифр*. То же будет относиться и к предпериоду. Это означает, что если a_k — k-я цифра после запятой, то $a_{k+n} = a_k$ при достаточно больших k. В частности, дробь

$$\frac{1}{10^k(10^t - 1)} = 0,\underbrace{0\ldots01}_{k}\left(\underbrace{00\ldots01}_{k}\right)$$

имеет предпериод k период t.

Теперь заметим, что в принципе мы можем считать, что дробь с периодом n имеет также периоды $2n$, $3n$, …, вообще pn при любом натуральном p, ибо $a_{k+pn} = a_k$. Кроме того, если предпериод дроби равен k, то мы можем начинать отсчитывать периоды с любого $m \ge k$ — дробь будет по-прежнему периодической, а период будет той же длины, но может начинаться с другого места, т.е. записываться несколько иначе.

Таким образом, всякая периодическая дробь имеет много периодов. Разумеется, наибольший интерес представляет *наименьший из них*.

Лемма 1. *Для всякой периодической последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ наименьший период является делителем любого другого ее периода.*

Доказательство. Пусть n — некоторый период последовательности $\{a_k\}$, t — ее наименьший период, и n не делится на t. Тогда $n = qt + r$, где $0 < r < t$, причем $a_k = a_{k+n} = a_{k+qt+r} = a_{k+r}$ для любого k. Но это означает, что число r, *меньшее t*, тоже является периодом последовательности $\{a_n\}$. Противоречие.

Некоторое представление о том, какими могут быть наименьшие периоды суммы и разности двух дробей, дает следующая лемма.

Лемма 2. *Предпериод суммы (разности) двух дробей не больше максимума их предпериодов, а наименьший период суммы (разности) является делителем наименьшего общего кратного их периодов.*

Доказательство этой леммы вы получите, решив следующие упражнения.

Упражнения

2. Докажите, что при сложении дробей $\alpha = 0, \alpha_1 \ldots \alpha_k (a_1 \ldots a_t)$ и $\beta = 0, \beta_1 \ldots \beta_k (b_1 \ldots b_t)$ получается дробь $\alpha + \beta$ с предпериодом k и периодом t, причем цифры периода находятся по следующему правилу: если $A = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$, $B = \overline{b_1 b_2 \ldots b_k}$, то в периоде будет стоять $A + B$, если $A + B < 10^t - 1$ и $A + B - 10^t + 1$, если $A + B > 10^t - 1$. Если же $A + B = 10^t - 1$, то период состоит из одних девяток и получается дробь, эквивалентная дроби с «хвостом» из одних нулей.

3. Докажите, что период разности $\alpha - \beta$ состоит из цифр числа $A - B$, если $A - B > 0$, и $10^t - (B - A)$, если $A - B < 0$.

Лемма 3. *Сумма и разность дробей $\frac{1}{10^{k_1}(10^{t_1} - 1)}$ и $\frac{1}{10^{k_2}(10^{t_2} - 1)}$, имеющих предпериоды k_1 и k_2 и периоды t_1 и t_2, имеют предпериоды* $\max(k_1, k_2)$ *и периоды* НОК $(t_1, t_2) = [t_1, t_2]$.

Упражнение 4. Докажите лемму 3.

Итак, из леммы 1 следует оценка наименьшего периода суммы двух дробей, а лемма 2 показывает, что эта оценка точная. Однако, как показывает пример дробей $\alpha = 0,(03)$ и $\beta = 0,(30)$, $\alpha + \beta = 0,(33) = 0,(3)$, наименьший период суммы, вообще говоря, не равен наименьшему общему кратному их периодов.

Может показаться, что любой делитель НОК периодов может быть периодом суммы дробей. Но и это неверно.

Упражнение 5. Приведите пример, подтверждающий сказанное.

Пусть теперь m и n — *наименьшие* периоды дробей α и β соответственно, а t — наименьший период их суммы. Тогда дробь $\alpha = (\alpha + \beta) - \beta$ имеет период $[t, n]$ (вообще говоря, не наименьший). Значит, $[t, n]$ делится на m. Аналогично $[t, m]$ делится на n, т.е. $[t, m]$ делится на $[m, n]$. Пусть p_1, p_2, …, p_k — все простые числа, входящие в разложения на простые множители чисел m и n *в разных степенях* так, что $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ и $n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k}$ (где $\alpha_i \ge 0, \beta_i \ge 0, \alpha_i \ne \beta_i$ при $i = 1, 2, \ldots, k$).

Мы выделяем простые делители чисел m и n, входящие в их канонические разложения на множители в разных степенях. Пусть $]m; n[= p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \ldots p_k^{\gamma_k}$, где $\gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$.

Например, для чисел $1650 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11$ и $2100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$ имеем $p_1 = 2$, $p_2 = 7$, $p_3 = 11$ и $]1650; 2100[= 2^2 \cdot 7 \cdot 11 = 308$.

Теперь мы можем сформулировать теорему.

Теорема 1. *Наименьший период t суммы и разности двух периодических дробей с периодами m и n делится на $]m, n[$.*

Доказательство. Выше мы доказали, что $[t, m]$ делится на n, а $[t, n]$ делится на m. Пусть простое число p_i входит в разложение t на множители в степени δ_i. Тогда $\alpha_i \le \max(\delta_i, \beta_i)$ а $\beta_i \le \max(\delta_i, \alpha_i)$ (здесь мы воспользовались тем, что если простое число p входит в разложение на множители числа a в степени s, а число b — в степени q, то в разложение на множители $\text{НОК}(a,b) = [a;b]$ оно входит в степени $\max(s;q)$). Отсюда следует, что $\delta_i \ge \gamma_i$. Но это и значит, что t делится на $]m;n[$. Аналогично утверждение доказывается и для разности $\alpha - \beta$. Теорема доказана.

Из теоремы 1 в частности следует, что если m и n взаимно просты, то период суммы и разности равен mn.

Теорема 2. *Любой делитель числа $[m;n]$, делящийся на $t =]m;n[$, может быть наименьшим периодом суммы дробей с периодами m и n.*

Доказательство. Если $m = n = 1$, доказывать нечего. Заметим, что если

$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \cdot u$, $\quad n = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k} \cdot u$,

то $]m;n[= \left[\frac{m}{u}; \frac{n}{u}\right]$. Пусть $m' = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, $\quad n' = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$. Тогда $[m;n] =]m;n[\cdot u = [m', n'] \cdot u$. Предположим, что число t — некоторый делитель $[m;n]$, делящийся на $]m;n[$. Тогда $t =]m;n[\cdot u'$, где u' — делитель числа u, причем оба числа u' и u взаимно просты с m' и n'. Рассмотрим дроби

$$a = \frac{1}{10^u - 1} + \frac{1}{10^{n'u'} - 1}$$

$$\text{и } b = \frac{1}{10^{m'} - 1} - \frac{1}{10^u - 1},$$

если последняя дробь положительна (в противном случае прибавим к b единицу — длина периода при этом не изменится).

Тогда $\quad a + b = \frac{1}{10^{n'u'} - 1} + \frac{1}{10^{m'} - 1}$

(или на 1 больше, что не существенно). По лемме 2, периоды дробей a, b и $a + b$ равны соответственно $[u, n'u'] = n'u = n$, $[m', u] = m'u = m$, $[n'u', m'] = [n', m']u' = t$.

Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 мы сразу получаем решение задачи М1399:

а) Поскольку $[6;12] = 12$, а $]6;12[= 4$, периодами могут быть только 4 и 12.

б) Так как $[12;20] = 60$, $]12;20[= 15$, наименьшими периодами сумм и разностей дробей могут быть 15, 30 и 60.

О периоде произведения

Рассмотрим вопрос о предпериоде и периоде произведения дробей.

Теорема 3. *Если две дроби имеют предпериоды k_i и периоды t_i $(i = 1, 2)$, то их произведение имеет предпериод $k \le k_1 + k_2$ и период $t \le [t_1, t_2]\left(10^{(t_1,t_2)}\right) - 1$.*

Эти неравенства точные и достигаются для уже знакомых нам дробей

$$1/10^{k_i}\left(10^{t_i} - 1\right), \quad i = 1, 2.$$

Из теоремы 3 следует, в частности, что если периоды дробей взаимно просты, то период их произведения не превосходит удевятеренного НОК их периодов, но если периоды имеют большой наибольший общий делитель (НОД), то период произведения может их значительно превосходить. Так, при возведении в квадрат дроби с периодом t может получиться период $t\left(10^t - 1\right)$ и не может получиться больший (последняя задача предлагалась в 1990 г. на Московской математической олимпиаде школьников).

Для доказательства нам понадобятся некоторые широко известные факты.

Пусть u, v — натуральные числа. Разделив u на v с остатком, получим $u = qv + r$, где $0 \le r < v$. Тогда $(u, v) = (v, r)$.

Пользуясь этим утверждением, можно доказать, что существуют такие *целые* числа x и y, что $ux + vy = (u;v)$.

Кроме того, справедливо равенство $[u;v] \cdot (u;v) = uv$ (его нетрудно получить, пользуясь основной теоремой арифметики о существовании и единственности разложения на простые множители).

Нам понадобится также следующее утверждение.

Упражнение 6. Пусть $u = qv + r$, $0 \le r < v$, $u, v \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{Z}$. Тогда остаток от деления $10^u - 1$ на $10^v - 1$ равен $10^r - 1$. Выведите отсюда, что $\left(10^u - 1, 10^v - 1\right) = 10^{(u,v)} - 1$.

Пусть даны две дроби с предпериодами k_i и периодами t_i $(i = 1, 2)$. Можно считать, что они имеют знаменатели $10^{k_i}\left(10^{t_i} - 1\right)$. Перемножая знаменатели и используя еще раз упомянутое утверждение, получаем, что *предпериод произведения дробей удовлетворяет неравенству $k \le k_1 + k_2$, а период не превосходит наименьшего натурального t такого, что число $10^t - 1$ делится на число $\left(10^{t_1} - 1\right)\left(10^{t_2} - 1\right)$.*

Найдем наименьшее t, обладающее этим свойством.

Из утверждения упражнения 11 следует, что $t = t_1 n$, $n \in \mathbf{N}$, так как $10^t - 1$ делится на $10^{t_1} - 1$, а значит, t делится на t_1. Тогда согласно известному тождеству (формуле суммирования геометрической прогрессии) $10^t - 1 = \left(10^{t_1} - 1\right)\left(1 + 10^{t_1} + \ldots + 10^{(n-1)t_1}\right)$, и поэтому $1 + 10^{t_1} + \ldots + 10^{(n-1)t_1}$ должно делиться на $10^{t_2} - 1$.

Рассмотрим последовательность $r_1, r_2, r_3, \dots$ остатков от деления чисел $t_1, 2t_1, 3t_1, \dots$ на число t_2.

Согласно упражнению 6, последовательность остатков от деления чисел $10^{t_1}, 10^{2t_1}, 10^{3t_1}, \dots$ на число $a = 10^{t_2} - 1$ есть $10^{r_1}, 10^{r_2}, 10^{r_3}, \dots$

Докажем, что последовательность $r_1, r_2, r_3, \dots$ периодическая с длиной периода $d = t_2/(t_1, t_2)$ и ее период $r_1, r_2, r_3, \dots, r_d$ состоит из всех различных чисел из промежутка от 0 до $t_2 - 1$, делящихся на $b = (t_1, t_2)$, и заканчивается нулем. Последнее очевидно, так как dt_1 делится на t_2, откуда с помощью упражнения 10 следует также периодичность с периодом d. То, что остатки $r_1, \dots, r_d$ делятся на b, следует из того же упражнения. Остается проверить, что все они разные, откуда вытекает также, что d — минимальный период. Допустим противное, например $r_i = r_j$, тогда $(j - i)t_1$ делится на t_2 и $0 < j - i < d$. Противоречие.

Из доказанного следует, что последовательность остатков от деления чисел $10^{t_1}, 10^{2t_1}, 10^{3t_1} \dots$ на число a периодическая с длиной периода $d = t_2/(t_1, t_2)$ и ее период $10^{r_1}, 10^{r_2}, \dots 10^{r_d}$ состоит из переставленных в каком-то порядке чисел $1, 10^b, 10^{2b}, \dots, 10^{(d-1)b}$.

Поэтому остаток от деления на a числа $s = 1 + 10^{t_1} + \ldots + 10^{(n-1)t_1}$ равен при $n = dm$ остатку от деления на a числа $m\left(1 + 10^b + 10^{2b} + \ldots + 10^{(d-1)b}\right) =$

$$= m\frac{10^{db} - 1}{10^b - 1} = m\frac{10^{t_2} - 1}{10^b - 1}.$$

Следовательно, при $n = \left(10^b - 1\right)d$ число s делится на a, а при меньших натуральных n — нет. Вспоминая доказанное выше, выводим отсюда, что *наименьшее натуральное t, при котором $10^t - 1$ делится на $\left(10^{t_1} - 1\right)\left(10^{t_2} - 1\right)$, есть*

$$t_1 n = \left(10^b - 1\right)dt_1 = \left(10^b - 1\right)t_1 t_2/(t_1, t_2) =$$

$$= [t_1, t_2]\left(10^{(t_1,t_2)} - 1\right),$$

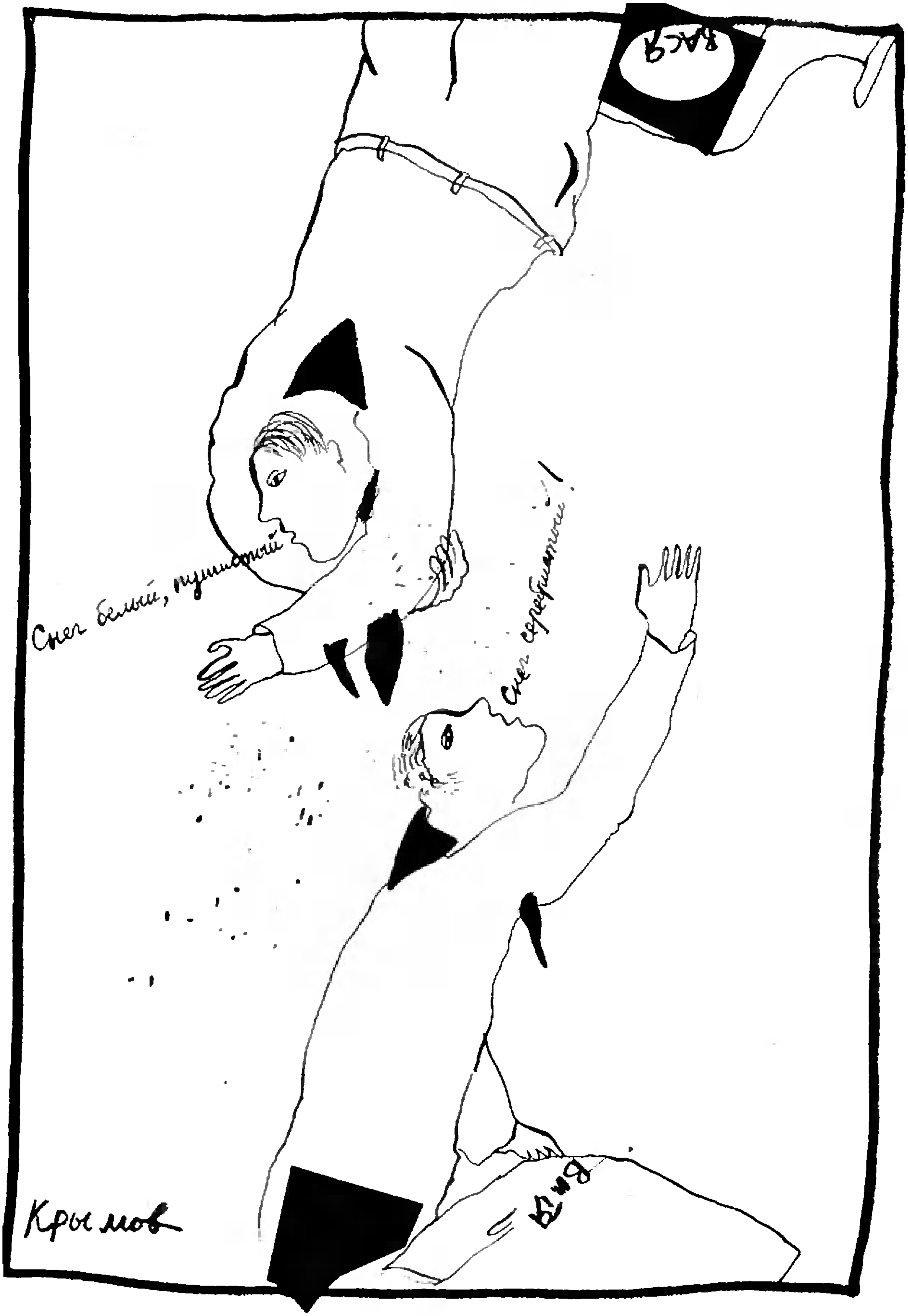
откуда и следует вторая верхняя оценка теоремы 3.

Рассмотрим теперь дроби $1/10^{k_i}\left(10^{t_i} - 1\right)$, $i = 1, 2$. Из упражнения 6 следует, что предпериод их произведения равен $k_1 + k_2$, а период равен минимальному натуральному t такому, что $10^t - 1$ делится на $\left(10^{t_1} - 1\right)\left(10^{t_2} - 1\right)$.

Но по доказанному выше таким числом является $t = [t_1, t_2]\left(10^{(t_1,t_2)} - 1\right)$.

Теорема 3 дает оценку периода произведения двух дробей.

В заключение мы предлагаем вам подумать о том, какими вообще могут быть периоды призведений дробей α и β с периодами m и n Сумеете ли вы найти правило, аналогичное теоремам 1 и 2 для сумм и разностей?


Вася
Снег белый, пушистый
Снег серебристый!
Витя
Крымов

Machina sapiens

А. ЖУКОВ

Успехи, достигнутые вычислительной техникой, сегодня уже никого не удивляют. Но вот к исходу двадцатого века ученые все больше и больше стали говорить о качественно новом поколении машин, к которым термин «вычислительные» не очень-то и подходит. Что это за машины, «племя младое, незнакомое»?

Традиционный компьютер способен действовать согласно заранее составленным инструкциям — алгоритмам. Его младший собрат, machina sapiens («машина разумная»), способна самостоятельно «додумываться» до решения задач, находить подходящие алгоритмы и, если требуется, производить по ним необходимые расчеты.

Решить задачу — помогут связи

Давайте посмотрим, как машина может придумать решение простой школьной задачи по геометрии: *зная катеты a и b прямоугольного треугольника, найти радиус r вписанной окружности.*

Решить эту задачу сходу, подставив данные в некую готовую формулу, не удастся — такой формулы нет (по крайней мере, в учебнике). Значит, надо опереться на какие-то другие, известные нам формулы. Что мы знаем о прямоугольном треугольнике, кроме «пифагоровых штанов»?

Предположим, нам удалось вспомнить следующие зависимости:

○ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$,

⦶ $a = b\,\mathrm{tg}\,\alpha$,

⊖ $a^2 + b^2 = c^2$,

◑ $\alpha + \beta = 90°$,

◓ $R = \frac{c}{2}$,

◐ $p = \frac{a+b+c}{2}$,

◒ $S = \frac{ab}{2}$,

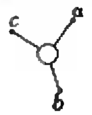
● $S = pr$.

Здесь α, β — острые углы прямоугольного треугольника, лежащие против катетов a и b соответственно; c — гипотенуза; p — полупериметр; R — радиус описанной окружности; S — площадь треугольника.

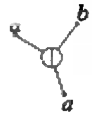
Эти формулы как раз и образуют то «тесто», из которого будет лепиться нужный нам алгоритм решения задачи. Они могли вспоминаться в совершенно произвольном порядке. Для того чтобы показать, что они неупорядоченны и равноправны, мы их пометили не цифрами, как обычно, а специальными значками, стоящими слева. Формулы можно менять местами, удалять, добавлять новые.

Вот теперь мы приближаемся к самому главному — как же в этой путанице, в этом беспорядочном нагромождении формул отыскать верный путь к цели?

Рассмотрев пристально наши формулы, мы замечаем, что переменные в большинстве своем «работают по совместительству», одновременно фигурируя в нескольких формулах. Это наблюдение позволяет выделить в хаосе некоторую структуру. Обозначим переменные точками, а для обозначения формул будем использовать введенные ранее символы. Тогда формулу ○ можно представить так:



а формулу ⦶ — так:



и т.д. Отрезочки в этих графических представлениях показывают связь переменных с соответствующими формулами. «Склеив» все одноименные точки, мы получим сеть (рис. 1).

Это еще не алгоритм, но уже и не первозданный хаос, не путаница и не сумятица.

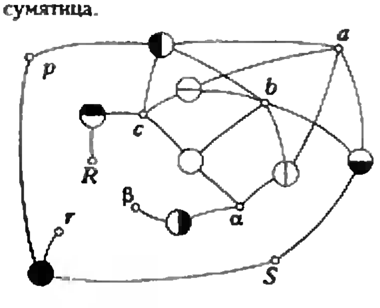


Рис. 1

Построенная нами сеть описывает некоторые свойства прямоугольного треугольника, и пока не ясно, как с ее помощью решить поставленную задачу (и можно ли вообще это сделать). Формулы мы вспоминали, как говорится, наобум, и поэтому нет гарантии, что среди них окажутся как раз те, из которых удастся построить нужный нам алгоритм. И все же попробуем.

Наша сеть очень напоминает марсианские каналы. Пусть это будет система пустых (незаполненных водой) каналов, точки будут пустыми колодцами, а кружочки — распределительными станциями, которые открывают шлюзы для пуска воды в пустой канал только в том случае, если во всех остальных каналах, подведенных к данной станции, вода уже есть. Вода в данном случае будет олицетворять наполнение переменных арифметическим содержанием — числовым значением.

Итак, что дано в задаче? a и b. Пусть в пунктах a и b «забили чистые ключи». По разным каналам вода поступит к распределительным станциям ◐, ⊖, ⦶, ◒, ○, но только три — ⊖, ⦶ и ◒ смогут открыть шлюзы для наполнения колодцев c, α, S. В дальнейшем вода из этих колодцев поступит в другие каналы, и шлюзы на втором этапе смогут открыть распределительные станции ◐, ◓ и ◑, наполнив колодцы p, R, β. Наконец, на третьем шаге шлюзы откроет распределительная станция ●, наполнив колодец r.

Итак, вывод первый: наша совокупность формул достаточна для того, чтобы решить поставленную задачу: отправляясь от известных значений a и b, мы в конце концов сможем найти значение r. Заметим, что этот вывод мы сделали, не производя вычислений, а только анализируя структуру сети.

Представим процесс движения воды в виде схемы (рис. 2).

Эта схема показывает, что и как можно вычислить, пользуясь нашей совокупностью формул и отправляясь от известных значений a и b. Здесь бросаются в глаза некоторые лишние «рукава», которые не имеют никакого отношения к задаче. Отправляясь из пункта r и двигаясь строго вверх, обрежем все участки, которые не используются для вычисления ответа, пока не дойдем до исходных данных задачи. В итоге получим новую схему (рис. 3), которая и представляет искомый

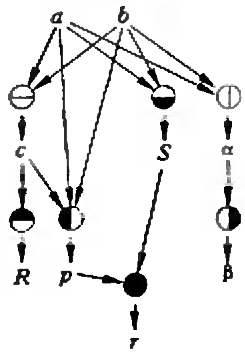


Рис. 2

алгоритм. Эта схема обладает очень полезным свойством — на каждом ее ярусе может располагаться не одна, а, вообще говоря, несколько формул (в нашем случае на первом ярусе расположены формулы ⊖ и ◒). Расчет по этим формулам может выполняться параллельно и независимо, что может быть эффективно реализовано на многопроцессорных вычислительных устройствах.

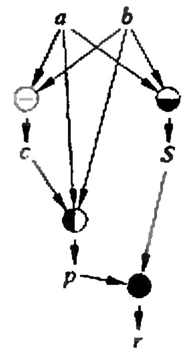


Рис. 3

Запоминание различных формул, построение связывающей их сети, анализ сетевой структуры, синтез решающего алгоритма — все это по силам современным компьютерам.

Ассистирует логика

В условиях некоторых задач наряду с указанием, что какие-то величины принимают некие значения, говорится также о том, что между какими-то объектами существуют определенные отношения: равенства, параллельности, перпендикулярности, подобия и т.д. Решение таких задач наряду с анализом информационных связей предполагает получение каких-то логических следствий из исходных посылок с учетом относящихся к предмету аксиом и установленных теорем. На примере следующей задачи рассмотрим, как может быть реализован один из простейших вариантов логического вывода.

Задача. Прямые s, t касаются окружности с центром в точке O соответственно в точках A и B (рис 4). Прямые u и r суть продолжения радиусов OA и OB,

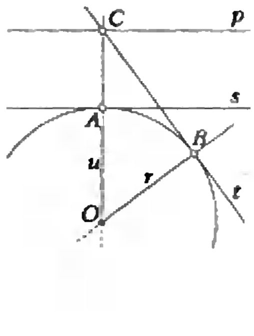


Рис. 4

проведенных в соответствующие точки касания. Через C, точку пересечения прямых u и t, проводится прямая $p \parallel s$. Пусть угол между прямыми r и u равен α (этот факт мы запишем так: $\widehat{ru} = \alpha$). Требуется найти угол между прямыми t и p.

Запишем основные факты, которые следуют из условия задачи и свойства касательных к окружности:

$$p \parallel s,$$

$$r \perp t,$$

$$u \perp s.$$

Предположим, в нашей базе знаний содержатся следующие общие правила, касающиеся отношений между прямыми.

обозначение правила	содержание правила
	$X \parallel Y \Rightarrow Y \parallel X$
	$X \perp Y \Rightarrow Y \perp X$
	$X \parallel Y,\ Z \perp Y \Rightarrow Z \perp X$
	$X \parallel Y,\ Z \parallel U \Rightarrow$ $\Rightarrow \widehat{XZ} = \widehat{YU},\ \widehat{UX} = \widehat{ZY}$

Здесь большими буквами латинского алфавита X, Y, Z, U обозначены произвольные прямые. Если эти правила справедливы для произвольных прямых, то тем более им будут подчиняться и конкретные прямые p, r, s, t, заданные в условии задачи. Поэтому, поочередно подставляя вместо переменных X, Y, Z, U конкретные значения p, r, s, t, мы будем получать различные логические следствия (рис. 5).

В частности, получаем $\widehat{ru} = \widehat{tp}$ и, следовательно, $\widehat{tp} = \alpha$.

Здесь мы познакомились с так называемым прямым логическим выводом. В некоторых случаях, когда требуется доказать заданную формулу, установить конкретный факт или подтвердить выдвинутую гипотезу, весьма полезным бывает обратный вывод, adatio ad absurdum (приведение к абсурду). Предположив, что заданная формула, факт, гипотеза не имеют место, осуществляем логический вывод путем применения общих правил до

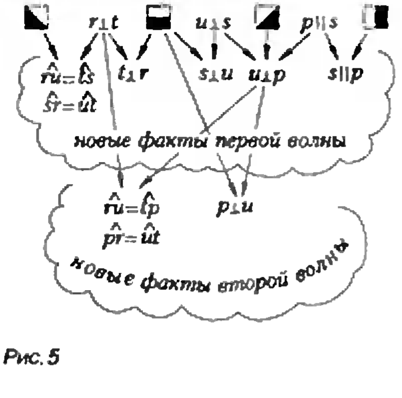


Рис. 5

тех пор, пока не обнаружатся два противоречивых, взаимоисключающих факта — они и будут сигнализировать об ошибочности исходного предположения.

В реальных решающих «интеллектуальных» системах используются «гибридные» алгоритмы, в которых логический вывод органично сочетается с анализом информационных связей.

«Мне бы ваши проблемы!»

— скажет machina sapiens в будущем, а сейчас она лишь делает первые шаги, чтобы разобраться в наших сложных житейских проблемах.

Разработчики машинного интеллекта заметили, что логические модели, используемые при решении математических задач, с успехом могут быть применены к описанию широкого класса отношений: родства, служебной подчиненности (между людьми), пространственных, временных, причинно-следственных (между различными объектами и процессами физического мира). Предлагаем читателю самостоятельно осуществить логический вывод, анализируя условие следующей задачи:

«Кухарка в Герцогиню метнула: банку, склянку, вилку, ложку и неочищенную картошку. Вилку она метнула позже банки, но не позже склянки, ложку — раньше склянки, но не позже банки. Восстановите последовательность брошенных предметов, если неочищенная картошка предшествовала ложке и была пущена вслед за вилкой».

В расследовании вышеописанного кухонного инцидента весьма полезными оказываются правила:

X позже Y $\Rightarrow Y$ раньше X,

X предшествует Y $\Rightarrow$ X раньше Y,

X вслед за Y $\Rightarrow$ Y раньше X,

X раньше Y, Y раньше Z $\Rightarrow X$ раньше Z.

Переменные X, Y, Z здесь обозначают произвольные объекты, в том числе и те, которые Кухарка в состоянии метнуть в Герцогиню.

Человек, если это не связано с его научной деятельностью, редко пользуется строгой математической логикой. В его лексиконе нередки оценки: «может быть», «скорее всего», «кажется», «примерно» и прочие, а вывод часто основывается на правдоподобных рассуждениях. Вот как, например, рассуждает бармен в рассказанной С.В.Чесноковым истории «Силлогизм бабушки»[1]:

«— Вы не правы, — к удивлению друзей вежливо, но твердо возразил бармен. — Еще моя покойная бабушка, помню, лю-

[1] *В книге Д.А.Поспелова «Моделирование рассуждений». М.: Радио и связь, 1989.*

била повторять: если почти все, кто носит цилиндр, ходят с тросточкой, и вместе с тем почти все, кто ходит с тросточкой, пьют только абсент, то наверняка можно сказать только одно — из тех, кто носит цилиндр, многие пьют только абсент. Многие — да, согласен. А сказать «почти все» — это неверно».

Нечеткие категории — далеко не единственная особенность человеческих рассуждений. Наитие, догадки, внезапное озарение, «божья искра» — столь же привлекательная, сколь и непостижимая тайна за семью печатями.

Пока еще не удается понять и смоделировать механизмы ассоциативного мышления, лежащего в основе большинства творческих процессов. В научном творчестве ассоциация проявляется в поиске аналогий, в установлении связей между прототипом и некоторым его образом (аналогом), в обобщении (выделении общих связующих характеристик и закономерностей). Известный математик и популяризатор науки Дьердь Пойа (1887 – 1985) пишет, что «аналогия, по-видимому, имеет долю во всех открытиях, но в некоторых она имеет львиную долю»[2].

Делать выводы или вырабатывать решения на основе обобщения разнородной, в том числе плохо формализуемой информации, сегодня приходится диагностическим экспертным системам в медицине, экономике и других областях человеческой деятельности.

Покажем, как может быть сделан вывод на основе анализа связи понятий. Мы будет исходить из того, что каждое понятие находится в ореоле («облачке») других понятий, определяется через них (в этом можно убедиться, открыв любой толковый словарь). Для построения ореола какого-либо понятия можно привлекать информацию из художественных книг, словарей, из практики языкового общения. Если, например, Вася нам сообщил, что «снег белый, пушистый», а Витя — «снег серебристый», то мы скажем, что понятие «снег» находится в ореоле сообщенных Васей понятий «белый», «пушистый», и запишем

снег = 1 · *белый* + 1 · *пушистый*,

а также понятие «снег» находится в ореоле понятия «серебристый», сообщенного Витей:

снег = 1 · *серебристый*.

Васю и Витю мы назовем информантами, поскольку они снабжают нас важной информацией, а сообщаемые ими ореолы мы назовем эталонными. В общем случае информантов может быть очень много — чем их будет больше, тем лучше у нас будет представление о характеризуемом ими понятии. Числовые коэффициенты в ореолах информантов могут выбираться из промежутка (0,1). Если, например, снег «слегка влажный», то можно принять

снег = 0,3 · *влажный*.

Как же по эталонным ореолам, сообщаемым различными информантами, построить обобщенный ореол:

понятие = x_1 · понятие$_1$ +
+ x_2 · понятие$_2$ + ... + x_n · понятие$_n$? (1)

Здесь понятие$_1$, понятие$_2$,..., понятие$_n$ — совокупность понятий, называемых ниже базисными, которые встречаются в ореолах информантов; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — коэффициенты, подлежащие определению. Естественно потребовать, чтобы базисное понятие, которое наиболее часто встречается в сообщаемых информантами ореолах и наиболее ассоциируется с определяемым понятием, получило наибольший вес и, кроме того, чтобы коэффициенты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ отражали относительный вклад (долю) базисных понятий в обобщенный ореол. Указанным требованиям удовлетворяет формула

$$x_i = \sum_{j=1}^{N} x_i^j \Big/ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{N} x_i^j , \qquad (2)$$

где x_i^j ($i = 1,2,\ldots,n$; $j = 1,2,\ldots,N$) — коэффициенты, сообщаемые j-м информантом по i-му базисному понятию.

В качестве примера рассмотрим ореолы некоторых эталонов, почерпнутых из художественной литературы.

Представители кошачьих

Эталон	Ореол
Кот-ворюга	тощий, рыжий
Степан	черный, усатый
Базилио	полосатый, усатый
Мурка	серая, мордастая
Тигра	полосатый

Представители мышиных

Эталон	Ореол
Шушара	серая, на низких ногах, длинный тонкий хвост, злая
Маламыш	серый
Лариска	острые зубы, усатая

Представители собачьих

Эталон	Ореол
Белый Клык	серый
Собака Баскервилей	черная, поджарая, глубоко сидящие глаза
Дружок	одно ухо черное
Каштанка	рыжая
Мурзик	белый, мохнатый, одно ухо черное
Белый Бим черное ухо	белый, с рыжими подпалинами, одно ухо и одна нога черные

Пользуясь формулой (2), сформируем обобщенные ореолы представителей различных семейств животных:

кошачьи = $\frac{1}{7}$ серый + $\frac{1}{7}$ черный + $\frac{2}{7}$ полосатый + $\frac{1}{7}$ рыжий + $\frac{2}{7}$ усатый + $\frac{1}{7}$ тощий + $\frac{1}{7}$ мордастый;

собачьи = $\frac{1}{10}$ серый + $\frac{1}{10}$ черный + $\frac{1}{10}$ поджарый + $\frac{2}{10}$ рыжий + $\frac{2}{10}$ белый + $\frac{1}{10}$ мохнатый + $\frac{1}{10}$ (с рыжими подпалинами) + $\frac{1}{10}$ (одна нога черная) + $\frac{3}{10}$ (одно ухо черное) + $\frac{1}{10}$ (глубоко сидящие глаза);

мышиные = $\frac{1}{6}$ усатый + $\frac{1}{6}$ (длинный тонкий хвост) + $\frac{1}{6}$ злой + $\frac{1}{6}$ (на низких ногах) + $\frac{2}{6}$ серый + $\frac{1}{6}$ (острые зубы).

А теперь зададим загадку Самуила Яковлевича Маршака: «Серый, усатый, весь полосатый. Кто это?»

Вы не знаете? В таком случаем вам придется обратиться к эксперту, способному анализировать ореолы. Полагая в построенных обобщенных ореолах признаки «серый», «усатый», «полосатый» равными единице, а остальные — нулю, получим значения: кошачьи = $\frac{5}{7}$, мышиные = $\frac{1}{2}$, собачьи = $\frac{1}{10}$. Так что, скорее всего, неизвестный зверь принадлежит к породе кошачьих.

Machina sapiens еще очень молода, неопытна. Она нуждается в вашем творческом опыте, в ваших смелых догадках, неординарных идеях, чтобы достичь в конце концов того высшего качества, которое выражено в слове «sapiens» — «разумная».

---

[2] *Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975.*

Смеси, сплавы и растворы в задачах

В. РАДЧЕНКО

Среди различных текстовых задач, встречающихся в школе и предлагаемых на конкурсных экзаменах, задачи на смеси, сплавы и растворы не пользуются популярностью. Одним школьникам они кажутся трудными, другим — простыми, большинство же считает их просто скучными. Мы надеемся, что прочитав эту статью, кто-то изменит свое мнение.

Задача 1. *Смешали 10%-й раствор серной кислоты с 30%-м раствором. В результате получили 600 г 15%-го раствора серной кислоты. Сколько нужно было взять того и другого раствора?*

Решим эту задачу разными способами. Чаще всего при решении пользуются алгебраическим способом. В данном случае можно предложить два таких решения.

Первое решение. Пусть x необходимое количество 10%-го раствора в граммах. Тогда $(600 - x)$ приходится на 30%-й раствор. Составим уравнение

$$0{,}1x + 0{,}3(600 - x) = 0{,}15 \cdot 600.$$

Решив это уравнение, получаем ответ: 10%-го раствора — 450 г, 30%-го раствора — 150 г.

Второе решение. Пусть x — количество 10%-го раствора, а y — количество 30%-го раствора, тогда из условия получается простая система

$$\begin{cases} x + y = 600, \\ 0{,}1x + 0{,}3y = 0{,}15 \cdot 600. \end{cases}$$

Выразив из первого уравнения системы y через x, приходим к уравнению, рассмотренному в предыдущем случае.

Следующее решение потребует большего внимания к сути процесса смешивания раствора.

Третье решение. По условию задачи в 600 г раствора должно содержаться **90** г чистой серной кислоты $(600 \cdot 0{,}15 = 90)$. Предположим, что мы взяли бы все 600 г 10%-го раствора. В нем содержалось бы только 60 г серной кислоты $(0{,}1 \cdot 600 = 60)$, т.е. необходимо еще 30 г. Недостающее количество серной кислоты можно получить, если часть 10%-го раствора заменить более крепким 30%-м. 1 г 10%-го раствора содержит 0,1 г чистой серной кислоты, а 1 г 30%-го раствора содержит 0,3 г чистой серной кислоты. Таким образом, при замене одного грамма 10%-го раствора на 1 г 30%-го содержание кислоты в растворе увеличивается на 0,2 г. Всего недостает 30 г. Значит, необходимо заменить 150 г 10%-го раствора на 150 г 30%-го $(30 : 0{,}2 = 150)$.

Отсюда получаем: 10%-го раствора — 450 г, 30%-го — 150 г.

Четвертое решение. Для наглядности рассуждений воспользуемся изображенной на рисунке 1 схемой.

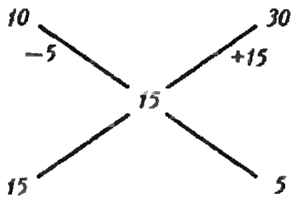


Рис. 1

Сделаем необходимые пояснения. То, что раствор 10%-й, означает, что в любой доле раствора содержится 10 частей чистого вещества (в качестве такой доли можно взять и 1 г) из 100, а в 30%-ом — 30 частей. В полученном растворе должно быть 15 частей чистого вещества в каждой доле (число 15 в центре схемы). Следовательно, каждая доля 10%-го раствора дает недостачу в 5 частей (− 5), а каждая доля 30%-го раствора дает избыток в 15 частей (+15). При смешивании избыток и недостаток должны погаситься, поэтому исходные растворы следует брать в отношении, обратном к данному (5:15), т.е. в отношении 15:5 или 3:1.

Разделив 600 г в данном отношении, мы получим искомый ответ: 450 г и 150 г.

Замечание. Фактически, данный способ позволил решить более общую задачу: каково должно быть соотношение 10%-го и 30%-го растворов, чтобы при смешивании получился 15%-ый раствор.

Упражнение 1. Имеется два сосуда с 16%-м раствором серной кислоты. Как можно получить 20%-й раствор, имея в распоряжении только кружку неизвестной емкости (пустой сосуд для смешивания имеется)?

Пятое решение. Для нас достаточно привычно, что при установлении каких-либо фактов или закономерностей в физике или в химии проводятся опыты, ставятся эксперименты, а в результате приходят к определенным выводам. А нельзя ли воспользоваться этим приемом при решении данной задачи?

Попробуем смешивать растворы, количество которых нам известно. Самый простой случай, когда имеется одинаковое количество каких-либо растворов. Пусть смешивается 100 г 12%-го раствора со 100 г 8%-го раствора. В результате получаем 200 г раствора, содержащего 20 г чистой серной кислоты. Это означает, что получился 10%-й раствор. С другой стороны, $10\% = (12\% + 8\%) : 2$ — среднее арифметическое числа процентов в исходных растворах.

Упражнение 2. Докажите, что при смешивании равного количества $p\%$ и $q\%$ растворов концентрация полученного раствора будет равна $(p + q) : 2$ процентов.

Вернемся к нашей задаче. У нас должно получиться 600 г 15%-го раствора. 15% можно получить как среднее арифметическое 10% и 20%. То есть для получения 600 г 15%-го раствора можно взять по 300 г 10%-го и 30%-го растворов (рис.2). Но у нас нет 20%-го раствора, зато есть 10%-й. Если этих растворов взять поровну, то получится 20%-й раствор (150 г каждого раствора). Окончательно получаем, что необходимо смешать 450 г 10%-го раствора с 150 г 30%-го.

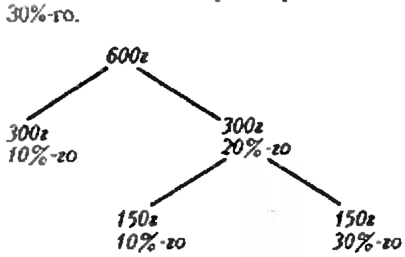


Рис. 2

Упражнение 3. Составьте схему получения 600 г 12,5%, 17,5%, 22,5%, 25%, 27,5%-го растворов.

В любом пособии для поступающих в вузы имеется большое количество задач, при решении которых вам могут помочь методы, изложенные в этой статье. Желаем успеха!

Варианты вступительных экзаменов

Санкт-Петербургский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математико-механический факультет, факультет прикладной математики — процессов управления)

1. Числа $\frac{1}{17}, \frac{1}{15}, \frac{1}{13}$ являются членами арифметической прогрессии с возрастающими номерами. Каково наибольшее возможное значение разности прогрессии?

2. При каких a уравнение $2\lg(x+1) = \lg(ax)$ имеет единственное решение?

3. Решите уравнение $\sin 2x = \sqrt{\frac{5}{4} - 2\sin^2 x}$.

4. Дана равнобедренная описанная трапеция $ABCD$, в которой обе диагонали равны основанию AD. Найдите углы при основании.

5. Дана прямая призма $ABCA'B'C'$, стороны основания которой $AB = BC = 1$, $AC = \sqrt{3}$. В каком отношении объем вписанного в призму цилиндра делится плоскостью $AB'C$?

Вариант 2

(факультеты биолого-почвенный и экономический)

1. Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x + y, \\ x + y \le 1. \end{cases}$$

2. При каких a уравнение $\lg(x^2 + 6x + 8) = \lg(a - 3x)$ имеет единственное решение?

3. Решите уравнение $\frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 - \sin 2\alpha}$.

4. Точка X делит сторону AB треугольника ABC в отношении 1:2. Точка Y лежит на стороне AC, и отрезок BY делится отрезком XC в отношении 5:2. В каком отношении точка Y делит сторону AC?

5. В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной a. Одна из боковых граней представляет собой такой же треугольник, при этом она перпендикулярна плоскости основания. Найдите радиус описанного шара пирамиды.

Вариант 3

(вечернее и заочное отделения, психологический факультет)

1. Гражданин положил в сберегательный банк некоторую сумму денег под фиксированный процент годового дохода. За первые два года сумма вклада возросла на 60 тысяч рублей, а за третий год — еще на 49 тысяч рублей. Какова была первоначальная сумма вклада?

2. Решите уравнение $\log_{3x} \sqrt{x} = \sqrt{\log_x 3x}$.

3. Решите уравнение $\left|\sqrt{3}\cos 3x\right| = \sqrt{2}\cos 2x$.

4. Решите неравенство $\sqrt{x^3 + 3x} > x^2 - 6x + 3$.

5. Плоскость делит боковые ребра правильной треугольной призмы в отношениях 2:1, 3:4 и 1:5, считая от нижнего основания. В каком отношении она делит объем призмы?

Публикацию подготовили О. Иванов, Н. Нецветаев, А. Орлов

Московский авиационный институт

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Самолет летит из пункта A в пункт B и обратно со скоростью $v_1 = 600$ км/ч относительно воздуха. Сколько времени затратит самолет на весь полет, если вдоль линии полета непрерывно дует ветер постоянного направления со скоростью $v_2 = 20$ м/с? Расстояние между пунктами $l = 900$ км.

2. Небольшое тело массой m, находящееся на горизонтальной плоскости, испытывает действие постоянной по модулю силы (рис.1). Угол α между вектором $\vec{F}$ и горизонтом может непрерывно изменяться. Определите максимальное ускорение тела. Коэффициент трения между телом и плоскостью μ.

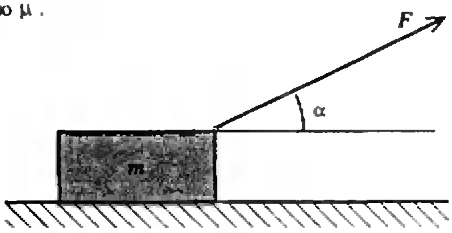


Рис. 1

3. Сколько ходов должен сделать компрессор, чтобы увеличить давление в сосуде объемом V от атмосферного $p_0 = 1$ атм до $p = 3$ атм, если объем рабочего резервуара компрессора в $n = 10$ раз меньше объема сосуда? Забор воздуха производится из атмосферы. Изменением температуры можно пренебречь.

4. Окружность радиусом R, равномерно заряженная зарядом Q, расположена горизонтально в вакууме. В ее центр помещают одноименный точечный заряд q. Найдите силу натяжения, возникающую в окружности.

5. Катящийся по горизонтальной дороге металлический обруч, радиусом $r = 50$ см, падает на землю. Определите заряд, который протечет по обручу, если сопротивление единицы длины обруча $R_0 = 1$ Ом/м. Считайте, что вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли $B = 5 \cdot 10^{-5}$ Тл.

6. Когда предмет находился в точке A, тонкая собирающая линза давала увеличение $\Gamma_1 = 2$, а когда предмет переместили в точку B, увеличение стало $\Gamma_2 = 3$. Каким будет увеличение, если предмет поместить в середину отрезка AB? Предмет расположен перпендикулярно главной оптической оси линзы, изображение действительное.

Вариант 2

1. Напишите уравнение гармонических колебаний груза массой $m = 100$ г, подвешенного к пружине жесткостью $k = 10$ Н/м, если амплитуда колебаний $A = 30$ мм, а начальная фаза $\varphi_0 = \pi/4$.

2. В сосуде под поршнем находится идеальный газ. В результате нагревания объем газа увеличился в 4 раза. Во

сколько раз изменилась средняя квадратичная скорость молекул газа?

3. Один моль идеального газа расширяется по закону $p = a/T$. Конечный объем газа в 4 раза больше начального. Молярная теплоемкость газа в этом процессе меняется по закону $C = C_V + 3R$, где C_V — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме, $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная. Какую работу совершает газ в этом процессе, если его начальный объем $V_1 = 0{,}5$ л и $a = 33{,}2$ Дж·К/м^3?

4. В схеме, приведенной на рисунке 2, лампочка горит одинаково ярко как при замкнутом, так и при разомкнутом ключе K. Найдите напряжение на лампочке, если $R_1 = R_3 = 90$ Ом, $R_2 = 180$ Ом, $\mathcal{E} = 54$ В. Внутренним сопротивлением источника тока можно пренебречь.

5. Разность потенциалов между обкладками конденсатора емкостью C равна U. Конденсатор разряжается через соленоид индуктивностью L. Найдите максимальную величину тока в соленоиде. Сопротивлением обмотки соленоида можно пренебречь.

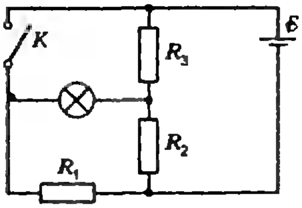


Рис. 2

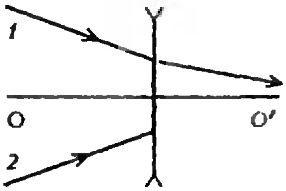


Рис. 3

6. Найдите построением ход луча *2* после тонкой рассеивающей линзы, если известен ход луча *1* (рис.3). Построение поясните; OO' — главная оптическая ось линзы.

Публикацию подготовил Е. Студников

Московский государственный авиационный технологический университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение
$$25^{-x} - 5^{-x+1} = 50.$$

2. Найдите интервалы монотонности функции
$$v = x^2 + 4x + 6\ln\frac{2}{x} + 4.$$

3. Решите уравнение
$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 2x + \cos^4 2x.$$

4. Бассейн может заполняться через две трубы, причем через первую — на пять часов медленнее, чем через вторую. При каких значениях времени t заполнения бассейна через первую трубу заполнение бассейна через обе трубы одновременно продолжается не менее шести часов?

5. Найдите все значения a, при которых уравнение
$$\sqrt{x+a} + \sqrt{x-1} = 3$$
имеет решение.

6. В треугольнике ABC площадью 90 биссектриса AD делит сторону BC на отрезки BD и DC, причем $BD:DC = 2:3$. Отрезок BL пересекает биссектрису AD в точке E и делит сторону AC на отрезки AL и LC такие, что $AL:LC = 1:2$. Найдите площадь четырехугольника $EDCL$.

Вариант 2

1. Решите уравнение
$$\log_2(2^x + 6) = 2x.$$

2. Определите промежутки монотонности функции
$$v = 2x\cdot e^{2x} - 4x\cdot e^x - e^{2x} + 4\cdot e^x - 4x^2 + 2.$$

3. Решите уравнение
$$2\sin 2x + \sin x + \cos x + 1 = 0.$$

4. Маршрут теплохода состоит из участка длиной 20 км по озеру и участка длиной 14 км вниз по течению реки, причем скорость течения равна 4 км/ч. При каких значениях скорости теплохода в спокойной воде общая продолжительность плавания не превысит 1 ч 20 мин?

5. Найдите все значения параметра k, при которых уравнение
$$x + 2k\sqrt{x+1} - k + 3 = 0$$
имеет решение.

6. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC через вершину A проведена прямая, которая пересекает диагональ BD в точке E и боковую сторону CD в точке K, причем $BE:ED = 1:2$ и $CK:KD = 1:4$. Найдите отношение длин оснований трапеции.

Вариант 3

1. Решите уравнение
$$4^{-x+0,5} - 7\cdot 2^{-x} - 4 = 0.$$

2. Определите промежутки монотонности функции
$$v = \frac{x+2}{x^2 - 4x + 13}.$$

3. Решите уравнение
$$3\sin^2 x\cdot\sin^2 2x = \cos 6x.$$

4. Имеются два сплава меди с другими металлами, причем процентное содержание меди во втором сплаве на 12% больше, чем в первом. Для создания нового сплава берется кусок первого сплава, содержащий 15 кг меди, и кусок второго сплава, содержащий 9 кг меди. Найдите все возможные значения процентного содержания меди в первом сплаве, при которых полученный новый сплав будет содержать не менее 64% меди?

5. Найдите все значения параметра k, при которых уравнение
$$x^4 - 2kx^2 + k + 6 = 0$$
имеет решение.

6. В равнобедренном треугольнике ABC с вершиной в точке B основание высоты AD делит сторону BC так, что
$$BD:DC = \sqrt{2}:\left(2-\sqrt{2}\right).$$
Найдите углы треугольника.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Тележка движется по горизонтальной дороге со скоростью $v = 36$ км/ч и въезжает на подъем. Преодолеет ли тележка подъем, высота которого 4 м? Сопротивлением движению можно пренебречь.

2. Источник тока с ЭДС $\mathcal{E} = 15$ В и внутренним сопротивлением $r = 5$ Ом замкнут на резистор сопротивлением $R = 10$ Ом. К зажимам источника подключен конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ. Найдите заряд на конденсаторе.

3. В цилиндре под поршнем находится $m = 10$ г водяного пара при температуре $t = 100$ °С и давлении $p = 40$ кПа. Какая масса пара сконденсируется, если объем пара изотермически уменьшить в 5 раз?

4. Кусочек металлической фольги массой $m = 1$ мг осве-

щается лазерным импульсом мощностью $P = 15$ Вт и длительностью $\tau = 0,05$ с. Свет падает на плоскость фольги нормально и полностью отражается от нее. Какую скорость приобретет фольга под действием света? Скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

5. В сеть переменного тока с напряжением $U = 220$ В включена схема, состоящая из двух идеальных диодов и трех одинаковых резисторов сопротивлением $R = 5$ кОм каждый (рис.1). Какая мощность выделяется на резисторах?

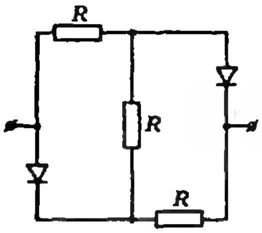


Рис. 1

6. Какую минимальную скорость должен иметь камень, брошенный мальчиком, чтобы он перелетел дом высотой $H = 25$ м и шириной $L = 12,5$ м? Для броска мальчик может выбрать место на любом расстоянии от дома. Ростом мальчика можно пренебречь.

Вариант 2

1. Электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,2$ мТл перпендикулярно линиям магнитной индукции со скоростью $v = 10^7$ м/с. Каков радиус кривизны траектории электрона в поле? Чему равна работа силы, действующей на электрон? Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

2. При бомбардировке изотопа бора $^{10}_{5}B$ α-частицами образуется изотоп азота $^{13}_{7}N$, который радиоактивен и распадается с испусканием позитронов. Напишите соответствующие ядерные реакции.

3. Два шара — стальной массой $m_1 = 0,5$ кг и свинцовый массой $m_2 = 0,4$ кг — подвешены на нитях так, как показано на рисунке 2. Расстояние от точки подвеса до центра каждого шара $l = 25$ см. Свинцовый шар отклоняют от положения равновесия на угол 90° и отпускают. На какую высоту поднимется стальной шар после соударения, если свинцовый останется в положении равновесия?

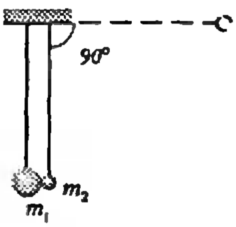


Рис. 2

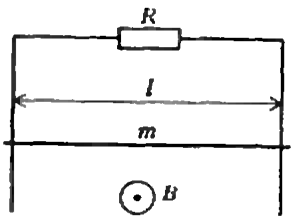


Рис. 3

4. Баллон, содержащий кислород под давлением $p_1 = 700$ кПа, соединили с другим баллоном, содержащим такую же массу азота под давлением $p_2 = 400$ кПа. Температуры одинаковы. Определите давление смеси газов. Молярная масса кислорода $M_1 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, азота — $M_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

5. В однородном горизонтальном магнитном поле с индукцией $B = 40$ мТл находятся вертикальные рейки, расположенные в плоскости, перпендикулярной линиям поля (рис.3). По рейкам, расстояние между которыми $l = 0,5$ м, без трения скользит проводник массой $m = 1$ г. Какой максимальной скорости достигнет проводник, если верхние концы реек замкнуты на резистор сопротивлением $R = 40$ мОм?

6. Стартовав, автомобиль разгоняется, выходит на первую отметку и до второй отметки, находящейся на расстоянии $l = 0,5$ км от первой, движется с постоянной скоростью. На каком расстоянии до первой отметки должен стартовать автомобиль, чтобы время его появления на второй отметке после старта было наименьшим?

Публикацию подготовили Р.Ведерников, М.Либерзон, А.Симонов

Московский государственный технический университет им.Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Рабочий должен был по плану изготовить за несколько дней 72 детали. Так как каждый день он изготавливал на 2 детали меньше плана, то закончил работу через 3 дня после срока. Сколько деталей в день должен был изготовлять рабочий по плану?

2. Найдите все решения уравнения
$$\sqrt{2}\sin\frac{x}{2} + 1 = \cos x,$$
принадлежащие отрезку $[-\pi; 0]$.

3. Решите уравнение $\lg x = \lg 3 - \lg(3x - 8)$.

4. Решите неравенство $\dfrac{4^{\frac{1}{x}} - 4}{x - 2} > 0$.

5. При каком значении a прямая $2x + y = 0$ касается графика функции $y = a(x-2)^2$? Сделайте чертеж.

6. Найдите все значения a, при которых система уравнений
$$\begin{cases} y = \dfrac{2x}{x - |x|}, \\ (x+a)^2 + y + a = 3 \end{cases}$$
имеет одно решение.

7. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит равнобедренный прямоугольник ABC с катетами $AB = BC = 3$; боковое ребро призмы $BB_1 = 4$. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник BCM, если точка M лежит на диагонали боковой грани AC_1? На какие части делит точка M диагональ AC_1 в этом случае?

Вариант 2

1. Два лыжника стартовали друг за другом с интервалом в 6 минут. Второй лыжник догнал первого в двух километрах от точки старта. Дойдя до отметки 5 км, второй лыжник повернул обратно и встретил первого на расстоянии 1 км от точки поворота. Найдите скорости лыжников.

2. Решите уравнение
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(3x + \frac{3}{2}\pi\right) = 0.$$

3. Решите уравнение
$$\log_x\left(5x^2 - 6x + 2\right) = 2.$$

4. Решите неравенство
$$(x+2)\sqrt{3x^2 - x - 2} > 0.$$

5. Решите уравнение
$$3|x - 1| = 11 + 2x - 3x^2.$$

6. Найдите все значения a, при которых система уравнений
$$\begin{cases} x + \sqrt{y - a - 2} = 0, \\ y^2 - x^2 = a(2x + a) \end{cases}$$
имеет два решения.

7. В сферу с радиусом R вписана пирамида, основанием которой служит прямоугольник с углом между диагоналями 45°, и с высотой, проходящей через точку пересечения диагоналей. Какую наибольшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через одну из диагоналей основания и середину не пересекающего ее бокового ребра?

Публикацию подготовил Л. Паршев

Московский инженерно-физический институт

ФИЗИКА

Устный экзамен

Вариант 1

1. Трансформатор. Передача электроэнергии на большие расстояния.
2. Постройте изображение предмета AB в собирающей линзе (рис.1) и определите, действительное оно или мнимое, прямое или перевернутое.

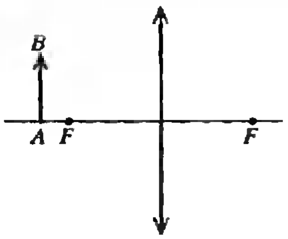


Рис. 1

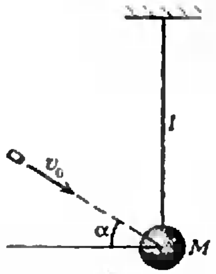


Рис. 2

3. Ко льду массой $m = 1$ кг при температуре $T_0 = 270$ К подвели количество теплоты $Q = 10^5$ Дж. Определите температуру образовавшейся воды. Удельная теплоемкость воды $c_в = 4,2$ кДж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 340$ кДж/кг, теплоемкостью льда можно пренебречь.
4. В небольшой шар массой M, подвешенный к потолку на невесомой нерастяжимой нити длиной l, попадает пуля массой m, летевшая со скоростью v_0 под углом α к горизонту (рис.2), и застревает в нем. Определите, на какой максимальный угол отклонится шар от вертикали.

Вариант 2

1. Силы трения. Коэффициент трения скольжения.
2. На каком расстоянии друг от друга точечные заряды $q_1 = 1$ мкКл и $q_2 = 10$ нКл взаимодействуют в вакууме с силой $F = 9$ мН? Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 0,9 \cdot 10^{-11}$ Ф/м.
3. При каком расположении прямого предмета, перпендикулярного главной оптической оси, относительно собирающей линзы его изображение в этой линзе будет уменьшенным?

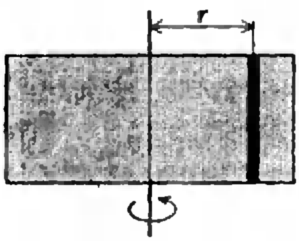


Рис. 3

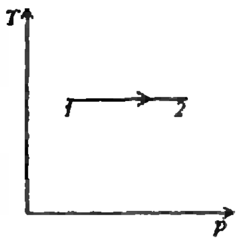


Рис. 4

4. В закрытом с обоих торцов цилиндре объемом V находится воздух под давлением p_0. Цилиндр разделен на две одинаковые части тонким поршнем массой m. Длина цилиндра $2l$. Цилиндр приводят во вращение вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину (рис.3). Найдите угловую скорость вращения, если поршень оказался на расстоянии r от оси вращения. Трения нет. Температура постоянна.

Вариант 3

1. Когерентность. Интерференция света.
2. Постройте график процесса $1-2$ для идеального газа постоянной массы, изображенного на рисунке 4, в координатах p, V.
3. Два бруска, массы которых m_1 и m_2, находятся на гладком столе и связаны нитью (рис.5). К первому приложена

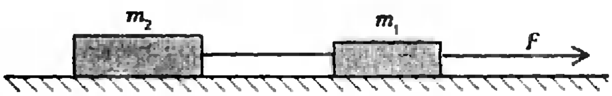


Рис. 5

горизонтальная сила $\vec{F}$. Найдите натяжение нити.
4. Два заряженных шарика, массой $m = 2,0$ г каждый, подвешены к одному крючку на невесомых и нерастяжимых нитях одной и той же длины и связаны третьей такой же нитью. Если третью нить пережечь, то шарики, отталкиваясь, поднимаются на максимальную высоту, при которой нити подвеса горизонтальны. Найдите силы натяжения нитей и ускорения шариков в этот момент.

Публикацию подготовили И. Николаев, Д. Храмченков

Московский государственный институт электронной техники — технический университет

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. За пятую секунду равнозамедленного движения тело проходит путь $s_5 = 5$ см и останавливается. Какой путь тело проходит за вторую секунду этого движения?
2. Угол наклона плоской доски к горизонту составляет $\alpha = 30°$. На доску положили кирпич массой $m = 2$ кг. Коэффициент трения между доской и кирпичом $\mu = 0,8$. Вычислите величину силы трения, действующей на кирпич. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.
3. Сосуд с водой, масса которой $m_1 = 100$ г и температура $t_1 = 0$ °С, был подвешен посередине комнаты. Через $\tau_1 = 15$ мин температура воды поднялась до $t_2 = 2$ °С. В другой раз в тот же сосуд вместо воды поместили лед массой $m_2 = 100$ г при температуре $t_1 = 0$ °С. В тех же условиях лед растаял за $\tau_2 = 10$ ч. Оцените по этим данным удельную теплоту плавления льда. Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · К).
4. Расстояние между точечными зарядами $q_1 = 1$ мкКл и $q_2 = -2$ мкКл равно $l = 12$ см. Вычислите модуль вектора напряженности электрического поля, созданного этими зарядами в точке, удаленной от каждого из зарядов на $r = 10$ см. Постоянная закона Кулона $k = 9 \cdot 10^9$ Н · м^2/Кл^2.
5. Из двух одинаковых кусков проволоки изготовлены два контура — круглый и квадратный. Оба контура помещены в одной плоскости в однородное магнитное поле, изменяющееся со временем. В круговом контуре индуцируется пос-

тоянный ток $I_1 = 0,4$ А. Найдите величину тока в квадратном контуре.

6. Сечение стеклянной призмы имеет форму равностороннего треугольника. Луч падает на одну из граней перпендикулярно к ней. Вычислите угол между этим лучом и лучом, вышедшим из призмы. Показатель преломления стекла $n = 1,5$.

Вариант 2

1. Тело, движущееся вдоль прямой с постоянным ускорением, прошло за первую секунду путь $s_1 = 1$ м, за вторую $s_2 = 2$ м. Какой путь пройдет тело за третью секунду?

2. Небольшое тело массой $m = 0,1$ кг подвешено на легкой нити длиной $l = 1$м и совершает колебания в вертикальной плоскости. В момент, когда нить образует угол $\alpha = 30°$ с вертикалью, скорость тела равна $v = 2$ м/с. Какова в этот момент величина силы натяжения нити?

3. Некоторое количество молекулярного водорода находится при температуре $T_1 = 200$ К и давлении $p_1 = 400$ Па. Газ нагревают до температуры $T_2 = 10000$ К, при которой молекулы водорода практически полностью распадаются на атомы. Вычислите новое значение давления газа, если его объем и масса остались неизменными.

4. Плоский воздушный конденсатор емкостью $C = 5 \cdot 10^{-9}$ Ф заряжен до напряжения $U = 2$ В и отключен от источника. Какую работу необходимо совершить, чтобы, медленно раздвигая пластины, увеличить расстояние между ними в $n = 3$ раза?

5. Пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 3,52$ кВ, электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,01$ Тл перпендикулярно линиям индукции и движется по окружности радиусом $R = 2$см. Вычислите отношение заряда электрона к его массе.

6. Рассматривая предмет в собирающую линзу и располагая его на расстоянии $d = 4$ см от нее, получают мнимое изображение в $\Gamma = 5$ раз большее самого предмета. Постройте ход лучей, формирующих изображение, и вычислите оптическую силу линзы.

Публикацию подготовили А.Берестов, А.Овчинников, В.Плис

Московский энергетический институт

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$\left(\frac{8-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}+2} : \left(2+\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+2}\right)+\left(\sqrt[6]{x}+\frac{2\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}-2}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}}\right)\cdot 3^{\log_4^{-1} 3}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x}{2}} 8 + \log_{\frac{x}{4}} 8 < \frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^4 - 4}.$$

3. Два вертолета одновременно вылетели навстречу друг другу из городов A и B. Через 15 минут после вылета они встретились и затем продолжили путь (каждый в своем направлении). Первый вертолет прибыл в город B на 40 минут раньше, чем второй прибыл в город A. Сколько времени потребовалось первому вертолету на путь из A в B?

4. Найдите все корни уравнения

$$6\sin x + 4(\sin 3x - \sin 5x) - \sin 7x = 256\sin^5 x\cos^4 x,$$

принадлежащие области определения функции

$$f(x) = \sqrt{\pi^2 - 9x^2}.$$

5. Трапеция, большее основание которой равно b, меньшее основание равно a и углы при большем основании равны α и β, вращается около большего основания. Найдите объем тела вращения.

Вариант 2

1. Упростите выражение для $f(x)$ и найдите $f'(x)$, если

$$f(x) = \left[\left(1-\frac{x^4-3x^2-4}{x^4-8x}\right)\cdot\frac{1}{3-2x^{-1}}\right]^{-1} + \log_{\sqrt{3}} 3^{-x}.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4^{2x} + 3^{2y} = 5, \\ 4^x \cdot 3^y = 2. \end{cases}$$

3. Моторная лодка, отправившись от лодочной станции в 10 часов, спустилась на 20 км вниз по течению реки, затем повернула обратно и вернулась на станцию в 17 часов того же дня. На обратном пути, на расстоянии 12 км от лодочной станции, лодка встретила плот (плывущий относительно берегов со скоростью течения реки), который ранее проплывал мимо лодочной станции в 10 часов (т.е. в момент отправления лодки от станции). Определите собственную скорость лодки (т.е. скорость лодки в стоячей воде) и скорость течения реки.

4. Найдите все корни уравнения

$$\left(2-\cos^4 6x\right)\left(1-\operatorname{ctg}^2 x\right)\left(1-3\operatorname{ctg}^2 x\right)\left(1-\operatorname{tg}2x\operatorname{ctg}3x\right) = 1,$$

удовлетворяющие неравенству $\left(x^2 - 7\pi^2\right)\sin(149,6\pi) \ge 0$.

5. В основании прямой треугольной призмы лежит равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна a и угол при основании равен α. Через основание треугольника под углом β к плоскости треугольника проведена плоскость. Найдите площадь сечения призмы указанной плоскостью, если известно, что это сечение является треугольником.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Магнитные свойства вещества. Магнитная проницаемость. Ферромагнетизм.

2. Можно ли натянуть горизонтально канат массой m так, чтобы он не провисал?

3. Какой путь пройдет шайба до остановки, если ее пустить вверх по плоской ледяной горке с начальной скоростью v_0? Коэффициент трения шайбы о лед μ, угол наклона горки к горизонту α.

4. Определите период обращения искусственного спутника, вращающегося по круговой орбите радиусом R. Радиус Земли R_0, ускорение свободного падения у поверхности Земли g.

5. Найдите максимальные токи в катушках, индуктивности которых L_1 и L_2, после замыкания ключа K в цепи (рис.1). Емкость конденсатора C, его заряд Q.

Вариант 2

1. Состав ядра атома. Изотопы. Энергия связи атомных ядер.

2. Почему большую льдину, плавающую в воде, легко привести в движение, но трудно сразу же сообщить ей большую скорость?

3. В однородном электрическом поле напряженностью $E = 10^3$ В/м перемещается заряд $Q = 5 \cdot 10^{-8}$ Кл на расстояние $l = 12$ см под углом $\alpha = 30°$ к линиям напряженности. Определите работу поля по перемещению этого заряда.

4. Расстояние между предметом и экраном $L = 1$ м. На каком расстоянии от экрана надо расположить линзу с фокусным расстоянием $F = 90$ мм, чтобы на экране наблюдалось четкое изображение предмета?

5. Жесткий стержень AB длиной l опирается концами о пол и стену (рис. 2). Конец B движется по полу равномерно со скоростью v, причем при $t = 0$ точка B находится на рас-

стоянии d от угла. Найдите скорость конца A в произвольный момент времени t.

Публикацию подготовили А.Касаткин, В.Прохоренко, А.Седов

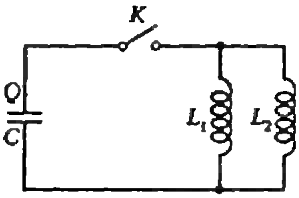


Рис. 1

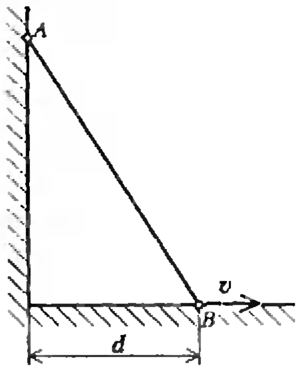


Рис. 2

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Дана функция $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}|2x-6|$.

а) Найдите ее область определения.
б) Постройте ее график.
в) Решите неравенство $f(x) < \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$.

2. Решите задачу арифметическим способом: «Из пункта A вышла грузовая машина со скоростью 60 км/ч. Через 2 часа вслед за ней из A вышла легковая машина со скоростью 90 км/ч. На каком расстоянии от A легковая машина догонит грузовую?»

3. Не решая уравнения $2x^2 - 4x + 1 = 0$, вычислите сумму квадратов его корней.

4. Решите уравнение $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = 2\frac{10}{27}$.

5. Что больше: $\sin 1$ или $\cos 1$?

6. Длины параллельных сторон трапеции равны 25 и 4, а длины непараллельных сторон 20 и 13. Найдите высоту трапеции.

7. Найдите объем треугольной пирамиды, если известно, что две ее взаимно перпендикулярные грани — равносторонние треугольники со стороной 4.

8. В правильной треугольной призме сторона основания равна b, боковое ребро $2b$. Постройте сечение, проходящее через сторону нижнего основания и центр верхнего основания призмы и найдите площадь этого сечения.

Вариант 2

1. Дана функция $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}|2x+6|$.

а) Найдите ее область определения $f(x)$.
б) Постройте ее график.
в) Решите неравенство $f(x) > \log_{\frac{1}{2}}(3x-1)$.

2. Решите задачу арифметическим способом: «Волк, заметив в 30 м перед собой зайца, бросился за ним. В этот момент заяц помчался к укрытию, которое находилось в 250 м от него. Догонит ли волк зайца, если он пробегает за минуту 600 м, а заяц — 550 м, причем волк, заяц и укрытие находятся на одной прямой?»

3. Не решая уравнения $2x^2 - 4x + 1 = 0$, вычислите сумму чисел, обратных его корням.

4. Решите уравнение $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$.

5. Что меньше: $\sin 2$ или $\cos 2$?

6. Длины двух сторон треугольника равны 27 и 29. Длина медианы, проведенной к третьей стороне, равна 26. Найдите высоту треугольника, проведенную к стороне длиной 27.

7. Ромб со стороной 15 служит основанием пирамиды, каждая грань которой наклонена к основанию под углом 45°. Боковая поверхность пирамиды равна 3. Найдите объем пирамиды.

8. В прямой треугольной призме через одну из сторон нижнего основания проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро и составляющая с плоскостью основания угол, равный 45°. Определите площадь сечения, если в основании призмы лежит правильный треугольник, сторона которого равна a.

Публикацию подготовила З.Новосельцева

Санкт-Петербургский государственный технический университет

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. В последнюю секунду свободного падения тело прошло путь вдвое больший, чем в предыдущую секунду. С какой высоты падало тело?

2. Санки, движущиеся по горизонтальному льду со скоростью $v = 6$ м/с, выезжают на асфальт. Длина полозьев санок $L = 2$ м, коэффициент трения санок об асфальт $\mu = 1$. Какой путь пройдут санки до полной остановки?

3. Пружина жесткостью k зажата между двумя телами. После того как оба тела одновременно освободили, они до момента полного распрямления пружины прошли расстояния x_1 и x_2. Какую кинетическую энергию приобрело каждое из этих тел?

4. Бассейн площадью $S = 100$ м^2, заполненный водой до уровня $h = 1$ м, разделен пополам перегородкой. Перегородку медленно передвигают так, что теперь она делит бассейн в отношении 1:3. Какую для этого надо совершить работу, если вода через перегородку не проникает?

5. С какой скоростью растет толщина покрытия стенки серебром при напылении, если атомы серебра, обладая энергией $E = 10^{-17}$ Дж, производят давление на стенку $p = 0{,}1$ Па? Атомная масса серебра $A = 108$, его плотность $\rho = 10{,}5$ г/см^3.

6. В закрытом горизонтальном цилиндрическом сосуде длиной $2L$ находится ν молей идеального газа при температуре T. Цилиндр разделен пополам тонким гладким поршнем массой m. Найдите круговую частоту малых колебаний поршня, считая процесс изотермическим.

7. Электрон влетает в однородное магнитное поле (рис. 1). В точке A он имеет скорость v, которая составляет с направлением поля угол α. При какой индукции магнитного поля электрон окажется в точке C, если $AC = L$? Заряд электрона e, его масса m.

8. В водоем на некоторую глубину помещают источник белого света. Показатель преломления воды для красных лучей $n_1 = 1{,}328$, для фиолетовых $n_2 = 1{,}335$. Вычислите отношение радиусов кругов, в пределах которых возможен выход красных и фиолетовых лучей в воздух.

9. Излучение аргонового лазера с длиной волны $\lambda = 500$ нм

сфокусировано на плоском фотокатоде в пятно диаметром $d = 0{,}1$ мм. Работа выхода фотокатода $A = 2$ эВ. На анод, расположенный на расстоянии $L = 30$ мм от катода, подано ускоряющее напряжение $U = 4$ кВ. Найдите диаметр пятна фотоэлектронов на аноде. Анод считайте плоским и расположенным параллельно поверхности катода.

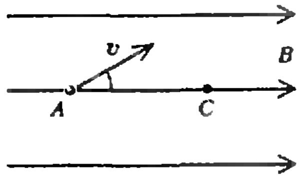


Рис. 1

10. Реакцию синтеза тяжелого изотопа водорода (дейтерий) и сверхтяжелого (тритий): $^2H + ^3H = ^4He + n$ изучают, направляя ускоренные до энергии $E = 2$ МэВ ядра дейтерия на тритиевую мишень. Детектор регистрирует нейтроны, вылетающие перпендикулярно направлению пучка ядер дейтерия. Определите энергию регистрируемых нейтронов, если в реакции выделяется энергия $Q = 14$ МэВ.

Публикацию подготовили В.Романов, И.Русанов

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Дана функция $f(x) = \frac{1}{x}\left((x+1)^{\frac{1}{3}} - 1\right)$.

а) Решите неравенство $f(x) > 0$.

б) Решите уравнение $f(t^3 - 1) = \frac{1}{7}$.

в) Найдите множество значений функции f.

2. Дана функция $f(x) = (a+1)\log_3^2 x + a\log_3 x^4 - 16$.

а) При $a = 3$ решите уравнения $f(x) = 0$.
б) Докажите, что один из корней уравнения $f(x) = 0$ не зависит от величины a.
в) При каких значениях a наименьшее значение функции f конечно.
г) Вычислите один из корней уравнения

$$(x+1)\log_3^2 x + x\log_3 x^4 - 16 = 0.$$

3. Дана функция $f(x) = \cos(a\cos x)$.

а) При $a = \frac{\pi}{6}$ решите уравнение $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

б) Найдите множество значений функции f при $a = \frac{\pi}{4}$.

в) При $a = \frac{11}{5}\pi$ решите уравнение $f(x) = f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

Вариант 2

1. Дана функция $f(x) = \frac{1}{x}\left(\log_3(3^x + b) - 2\right)$.

а) При $b = \frac{26}{3}$ решите уравнение $f(x) = 0$.

б) При $b = -\frac{1}{48}$ решите неравенство $f(x) > 2$.

в) При $b > 0$ решите неравенство $f(x) \geq 0$.

2. Дана функция

$$f(x) = \left(4^x - 3\cdot 6^x + 9^x\right)\cdot\left(4^x - 4\cdot 6^x + 9^{x+0{,}5}\right)^{-1}.$$

а) Решите уравнение $f(x) = \frac{3}{4}$.

б) Решите неравенство $f(x) < \frac{5}{3}$.

в) Докажите, что число $\left(f\left(\frac{1}{\log_2 3 - 1}\right)\right)^{-1}$ целое, и найдите его.

3. Дан треугольник ABO, его вершины имеют координаты $A(a,0), B(0,b), O(0,0)$. Точка $P(k,h)$ лежит на отрезке $[A,B]$.
а) Докажите, что $\frac{k}{a} + \frac{h}{b} = 1$.
б) Выразите расстояние между точками A и B через a, k, h.

в) Докажите, что минимум этого расстояния при фиксированном положении точки P достигается при

$a = k + \left(k\cdot h^2\right)^{\frac{1}{3}}$.

г) Найдите минимальное расстояние между токами A и B при фиксированном положении точки P.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Человек тянет санки массой $m = 8$ кг с силой $F = 100$ Н за веревку под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Санки движутся горизонтально, и коэффициент трения санок о снег $\mu = 0{,}1$.
1) Определите ускорение, с которым движутся санки.
2) Под каким углом к горизонту «выгоднее» тянуть санки?
2. В баллоне объемом $V = 0{,}2$ м^3 находится гелий под давлением $p = 100$ кПа при температуре $t = 17$ °С. После подкачки гелия давление повысилось на $\Delta p = 200$ кПа, а температура — на $\Delta t = 30$ °С. Молярная масса гелия $M = 4$ кг/кмоль.
1) На сколько изменилась масса гелия в баллоне?
2) Станет ли другим давление в баллоне, если вместо гелия в баллон поместить такое же количество молекул водорода?
3. Амперметр с внутренним сопротивлением $R_1 = 2$ Ом, подключенный к источнику тока, показал ток $I = 5$ А, а вольтметр с внутренним сопротивлением $R_2 = 15$ Ом, подключенный к тому же источнику, показал $U = 12$ В.
1) Определите внутреннее сопротивление источника.
2) Почему при измерениях предпочитают использовать вольтметр с большим внутренним сопротивлением, а амперметр — с малым?
4. Квадратная рамка со стороной $a = 1$ см помещена в однородное магнитное поле с индукцией $B = 10$ мТл так, что две стороны рамки перпендикулярны линиям индукции поля, а нормаль к плоскости рамки образует с линиями индукции угол $\alpha = 30°$. Ток в рамке $I = 0{,}1$ А.
1) Найдите момент сил, действующих на рамку.
2) При каком положении относительно линий индукции рамка будет находиться в устойчивом состоянии?
5. Расстояние между предметом, находящимся на оптической оси линзы, и его действительным изображением равно $l = 6{,}25F$, где F — фокусное расстояние линзы.
1) Найдите расстояние от предмета до линзы и от линзы до изображения.
2) Как объяснить наличие двух решений?

Вариант 2

1. Ледяная горка составляет с горизонтом угол $\alpha = 30°$. По ней пускают снизу вверх камень, который за время $t = 2$ с проходит расстояние $l = 12$ м, после чего скатывается вниз.
1) Найдите коэффициент трения камня о горку и время скатывания камня с горки.

2) При каком максимальном угле α камень «застрянет» на горке?

2. Запаянную с одного конца трубку длиной $l = 1$ м погружают в вертикальном положении открытым концом в сосуд со ртутью.

1) На каком расстоянии от поверхности должен находиться запаянный конец трубки, чтобы уровень ртути в ней был ниже уровня ртути в сосуде на $h = 25$ см? Атмосферное давление $p = 0,1$ МПа.

2) Может ли «застрять» ртуть в трубке, если трубку вынуть из ртути после того, как атмосферное давление а) увеличится, б) уменьшится?

3. Две параллельные пластины площадью $S = 200$ см^2 каждая, находясь в керосине на расстоянии $d = 0,4$ см друг от друга, притягиваются за счет электростатического взаимодействия с силой $F = 250$ мкН. Диэлектрическая проницаемость керосина $\varepsilon = 2$.

1) Определите разность потенциалов между пластинами.

2) Изменится ли разность потенциалов, если пластины наполовину вынуть из керосина?

4. Катушка индуктивностью $L = 0,3$ Гн, имеющая сопротивление $R = 0,01$ Ом, соединена параллельно с резистором сопротивлением $R_1 = 1$ кОм и подключена к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 4$ В и внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом.

1) Какое суммарное количество теплоты выделится в катушке и резисторе после отключения источника тока?

2) Изменится ли это количество теплоты, если параллельно резистору включить еще и конденсатор?

5. Пучок параллельных лучей падает из воздуха на поверхность воды под углом $\alpha = 60°$. Ширина пучка в воздухе $d = 10$ см, показатель преломления воды $n = 4/3$.

1) Определите ширину пучка в воде.

2) Что произойдет с преломленным пучком, если на воду налить слой прозрачного масла?

Публикацию подготовили К. Барсуков, А. Коточигов, А. Сивацкий

ИНФОРМАЦИЯ

ЗИФМШ объявляет прием

Заочная инженерная физико-математическая школа (ЗИФМШ) объявляет прием в 9, 10 и 11 классы на 1994/95 учебный год. Главная цель школы — помочь учащимся глубже изучить математику и физику, развить инженерный склад мышления и лучше подготовиться к поступлению в группу по подготовке инженеров-исследователей высших учебных заведений, прежде всего — Петербургского государственного университета путей сообщения (ПГУПС).

Прием в ЗИФМШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. После номера каждой задачи в скобках указано, для какого класса предназначена эта задача. (Например: 4(9, 10 кл.) означает, что задача 4 входит в конкурсное задание для 9 и 10 классов.) Задание для каждого класса состоит из шести задач.

Решение вступительного задания необходимо прислать до 1 сентября по адресу: 190031 Санкт-Петербург, Московский пр., д.9, ПГУПС, ЗИФМШ, на конкурс. В письмо вложите два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 9×12 см и заполненной по прилагаемому образцу.

Зачисленным в ЗИФМШ в течение года высылаются учебные пособия и контрольные задания, решенные задания оцениваются и рецензируются. Успешно закончившие ЗИФМШ получают удостоверение и имеют преимущество при поступлении в ПГУПС, который готовит инженеров-исследователей для проектирования и строительства высокоскоростных железнодорожных магистралей со скоростью движения до 500 км/ч.

Обучение в школе бесплатное.

Вступительное задание

1 (9 кл.). Автомобиль с двигателем мощностью 30 кВт при перевозке груза развивает скорость 15 м/с. Автомобиль мощностью 20 кВт при тех же условиях развивает скорость 10 м/с. С какой скоростью будут двигаться автомобили, если их соединить тросом?

2 (9, 10 кл.). Можно ли включить в сеть с напряжением 220 В последовательно две лампы разных мощностей, рассчитанные на напряжение 110 В? Ответ обоснуйте.

3 (9 кл.). Задача Пифагора: докажите, что всякое нечетное число, кроме 1, есть разность двух квадратов.

4 (9, 10 кл.). При смешивании трех сортов суперфосфата высшего сорта (20% усвояемого фосфора), I сорта (18% усвояемого фосфора) и II сорта (16% усвояемого фосфора) было получено 100 кг суперфосфата с 18,8% усвояемого фосфора. Сколько было взято суперфосфата каждого сорта, если суперфосфата I сорта было на 300 кг больше, чем II сорта?

5 (10, 11 кл.). Железнодорожный состав движется с постоянной скоростью 72 км/ч по горизонтальному участку пути. На сколько должна измениться мощность, развиваемая локомотивом, чтобы состав с той же скоростью продолжал двигаться во время сильного вертикального дождя? Считайте, что каждую секунду на состав падает 100 кг воды, которая затем стекает на землю по стенкам вагонов. Изменением сил трения можно пренебречь.

6 (9, 10, 11 кл.). В куске льда, находящемся при 0 °С, сделано углубление объемом 160 см^3. В это углубление налили 60 г воды, температура которой 75 °С. Какой объем будет иметь свободное от воды углубление, когда вода остынет? Удельная теплота плавления льда 334 кДж/кг.

7 (9, 10, 11 кл.). Решите уравнение

$$|x-2|+|x+3|+|2x-8|=9.$$

8 (10, 11 кл.). Возрастающая геометрическая прогрессия $\{b_n\}$ и арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ таковы, что $b_3 - b_1 = 9$, $b_5 - b_3 = 36$, $b_1 = a_1$ и $b_2 = a_3$. Найдите сумму первых восьми членов арифметической прогрессии и первых пяти членов геометрической прогрессии.

9 (11 кл.). Электрический чайник, содержащий 0,6 л воды при температуре 10 °С, включили и забыли выключить. Через какое время после включения вся вода в чайнике выкипит? Сопротивление обмотки чайника 14,4 Ом, напряжение в сети 120 В, КПД чайника 60%.

10 (11 кл.). При каких действительных a система

$$\begin{cases} 8\cos x\cos y\cos(x-y)+1=0, \\ x+y=a \end{cases}$$

имеет решение? Найдите эти решения.

Фамилия, имя, отчество	Сидоров Иван Петрович
Класс (номер класса указывается на 1 сентября 1994 г.)	9
Подробный домашний адрес	524806 г.Тверь, ул.Садовая, д.5, кв. 7
Номер и адрес школы	шк.№5, г.Тверь, ул.Зеленая, д. 7

НОВЫЙ ПРИЕМ НА ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ МАЛОГО МЕХМАТА

Малый механико-математический факультет (МММФ) — математическая школа при механико-математическом факультете МГУ — объявляет прием учащихся, оканчивающих восьмые классы одиннадцатилетних общеобразовательных школ, на заочное отделение. Зачисление на МММФ производится по результатам решения задач вступительной работы, опубликованных ниже.

Основные задачи МММФ — приобщение к математике, углубление знаний в рамках школьной программы, а также расширение математического кругозора учащихся средних школ.

Занятия на заочном отделении начинаются в октябре. Обучение платное. Срок обучения — три года. Учащиеся, особо успешно выполнившие все задания, получают удостоверение об окончании МММФ.

Преподавателями на заочном отделении МММФ работают аспиранты и сотрудники механико-математического факультета МГУ. Разработку тематических брошюр осуществляет методический совет, состоящий из профессоров и преподавателей механико-математического факультета МГУ.

Желающие поступить на МММФ должны не позднее 1 октября 1994 года выслать в наш адрес решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все задачи). Возможно обучение коллективных учеников.

Работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. На обложку тетради наклейте лист бумаги со следующими данными:

1) республика, край, область;

2) фамилия, имя учащегося (для коллективного ученика — Ф.И.О. руководителя и полный список учащихся);

3) школа и класс;

4) полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения);

5) фамилия, имя, отчество родителей, место их работы и должность.

В работу вложите листок бумаги 4×6 см^2, на котором напишите полный домашний адрес и индекс. Наш адрес: *119899 Москва, МГУ, Малый мехмат.*

Для школьников 7 — 11 классов Москвы и ближнего Подмосковья работает вечернее отделение МММФ. Справки по телефону 939-39-43.

Вступительная работа

1. С 1 января по 1 мая 1993 года на заочное отделение МММФ было выслано 250 вступительных работ. Докажите, что в один из дней было выслано не менее 3 работ.

2. Среди математиков каждый седьмой — философ, а среди философов каждый девятый — математик. Кого больше, математиков или философов?

3. Какое наименьшее число преподавателей может работать на заочном отделении МММФ, если аспиранты составляют менее 20, но более 17 процентов от их общего числа?

4. Семь студентов и три аспиранта вместе проверяют за месяц на 44 работы больше, чем семь аспирантов и три студента, а пять аспирантов и пять студентов на 99 работ больше, чем два аспиранта и два студента. Сколько работ проверили за 1993 год 33 аспиранта и 34 студента, если они работали 9 месяцев?

5. Площадь круглого жетона равна $1993x$ квадратных сантиметров, а длина его окружности $1994x$ сантиметров. Можно ли этот жетон просунуть в четырехсантиметровую щель автомата?

6. Строгий преподаватель каждый месяц ставит три двойки и несколько пятерок, а снисходительный — 40 пятерок и одну двойку. Сколько пятерок ставит строгий преподаватель, если каждый месяц все преподаватели заочного отделения МММФ вместе ставят 26 двоек и 298 пятерок?

7. Конкурсом на факультете называется отношение числа поступающих к плану приема. Если число поступающих на механико-математический факультет МГУ в 1997 году будет на 20% больше, чем на физический факультет, а план приема на физфак составит 80% от плана приема на мехмат, то на сколько процентов и в какую сторону (больше или меньше) будет отличаться конкурс на мехмате от конкурса на физфаке?

8. В результате измерения расстояний от дуба до клена, от клена до ясеня, от ясеня до дуба, от дуба до тополя и от тополя до клена получились числа 2, 2, 3, 5, 7. Чему равно расстояние от дуба до клена, если эти деревья растут в вершинах выпуклого четырехугольника?

9. Можно ли построить два а) квадрата, б) куба с целочисленными сторонами (ребрами), разность соответственно площадей и объемов которых равна 1993? А 1994?

10. Преподаватель МММФ, составляя вступительную работу на заочное отделение, в примере на сложение пятизначного числа с шестизначным заменил одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные — разными. Получилось: МАЛЫЙ + +МЕХМАТ = МОСКВА. Докажите, что он ошибся.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

Нейтрино: вездесущее и всемогущее

1. Поток нейтрино у Земли составляет $6{,}6 \cdot 10^{14}$ м$^{-2}$ · с$^{-1}$. Число нейтрино в теле автора в любой момент времени равно $1{,}8 \cdot 10^{5}$.
2. Число нейтрино, испущенных при взрыве Сверхновой, равно $1{,}8 \cdot 10^{57}$.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Во втором случае. 2. Никакие. 3. Да, поскольку деформация доски зависит от того, в каких именно точках к ней приложены силы. 4. Нет, так как удлинение проволок будет различно из-за разных значений модуля Юнга для железа и меди. 5. У первой проволоки относительное удлинение меньше в 4 раза, а абсолютное — в 2 раза. 6. Перед отверстием — сжатие, затем растяжение. 7. Чтобы деформации пружин не выходили за рамки упругих. 8. Для уменьшения силы рывка при подсечке попавшей на крючок рыбы. 9. Пластмассовый стакан при движении внутри него пули деформируется, увеличиваясь в объеме на величину объема пули, а стеклянный стакан на это не способен и под действием силы давления воды раскалывается. 10. См. рис.1. 11. Период уменьшится в 2 раза. 12. Пока пружина

Рис. 1

растянута, тело A будет падать с ускорением большим, а тело B — с меньшим, чем ускорение свободного падения. 13. Кварц обладает малым коэффициентом линейного расширения, поэтому при изменении температуры длина стержня практически не меняется и не возникает значительных деформаций. 14. При нагревании проволоки среднее расстояние между атомами увеличивается, а силы притяжения между ними уменьшаются. 15. Напряжение увеличится. 16. Внутренняя энергия тела увеличивается. 17. Превращается во внутреннюю энергию раствора.
18. Медная.

Микроопыт

Поскольку при растяжении трубки уменьшается диаметр ее поперечного сечения, кольцо упадет вниз.

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

Задачи

(см. «Квант» № 2)

1. Заметим, что количество зубов в верхней челюсти человека меньше 20. По условию это количество до операции делилось на 5, а после операции — на 4, следовательно, зуб был вытащен именно из верхней челюсти, а до этого в ней было 5 зубов и один зуб — в нижней. После операции у пациента осталось 5 зубов.
2. Напрашивается такая закономерность: каждый следующий член последовательности получается из предыдущего прибавлением 3 или 6 попеременно; однако такая конструкция не позволяет за пять шагов перейти от 129 до 201. Поэтому возникает вопрос: нет ли здесь опечатки? Нет! Последовательность устроена так: к предыдущему числу прибавляется сумма его цифр. Итак, пропущены числа 141, 147, 159, 174, 186.
3. $10509 + 10509 + 10509 + 10509 = 42036$.
4. Обозначим капитал Вовы через x, а Бори — через y. Тогда по условию $3x/5 + 7 = y$ и $y = x - 3$. Отсюда $3x/5 + 7 = x - 3$. Решая это уравнение, получаем, что $x = 10$, а $y = 10 - 3 = 7$.
5. Известно, что середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма, поэтому нам достаточно доказать, что у параллелограмма $PMQN$, вершины которого являются серединами сторон рассматриваемого четырехугольника, две соседние стороны PM и PN равны и перпендикулярны (рис. 2). Пусть катет BC треугольника ABC равен a, а катет

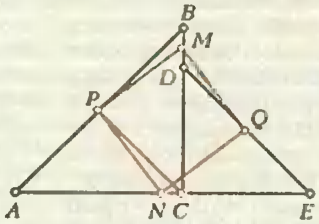


Рис. 2

DC треугольника CED равен b, тогда $BM = \frac{a-b}{2}$ и $CN = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}$, т.е. $BM = CN$. Теперь очевидно, что если повернуть треугольник PMB на 90° вокруг точки P, то он совпадет с треугольником PCN. Следовательно, $PM = PN$ и $PM \perp PN$.

Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» №1)

6. Представить сетку в виде 8 ломаных длиной 5 возможно, например так, как показано на рисунке 3, где указаны 4 из восьми ломаных. Остальные получаются симметрией относительно диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний. Представить эту сетку в виде пяти ломаных длиной 8 невозможно. Заметим, что в узлах сетки, расположенных на сторо-

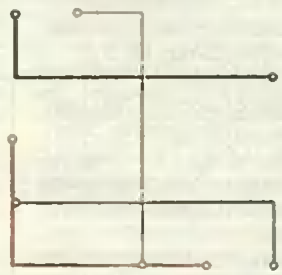


Рис. 3

нах (но не в вершинах квадрата), сходятся по 3 отрезка, поэтому каждый из этих 12 узлов должен быть концом одной из этих ломаных, но у 5 ломаных только 10 концов.
7. Обозначим через n и k частное и остаток, полученные Чебурашкой, а через m и l — полученные Геной, тогда $8n + k = 9m + l$. Отнимем от обеих сторон этого равенства $8n$; получим, что $k = 9(m - n) + n + l$, но $n + l = 13$, поэтому $k = 9(m - n + 1) + 4$. Таким образом, число k при делении на 9 дает в остатке 4, но k — остаток от деления некоторого числа на 8, поэтому оно не больше 7. Отсюда следует, что $k = 4$.
8. Пусть такой многочлен существует, тогда его можно представить в двух видах: $(x-1)(x-5)P(x)$ и $x \cdot Q(x) + 1995$. Заметим, что если x имеет остаток от деления на 3, равный 1 или 2, то из первого представления следует, что при этих значениях многочлен делится на 3, а из второго представления следует, что он делится на 3 и при x, кратном 3, т.е. при всех целых значениях x многочлен делится на 3, а 1994 на 3 не делится.
9. Заметим, что при увеличении числа в 10 раз его остаток от деления на 9 не изменяется, поэтому остаток при делении на 9 при каждом штрафе был один и тот же, значит, суммарная ве-

личина штрафа делилась на 9. Тогда должно быть $777 = 9 \cdot a + x$, но единственной купюрой, удовлетворяющей этому условию, является $x=3$. Итак, утеряно 3 рубля. Заметим, что действие происходило до 1994 года, когда такие купюры еще принимались.

10. Покажем, что указанная сумма может равняться только нулю. Для этого раскрасим клетки таблицы в шахматном порядке и посчитаем сумму чисел в черных клетках двумя способами. Обозначим сумму чисел на одной диагонали через S. С одной стороны, эта сумма равна $5S$, если взять сумму по диагоналям, идущим справа вниз налево, а по остальным диагоналям она равна $6S$. Итак, $5S=6S$, отсюда $S=0$ (рис. 4).

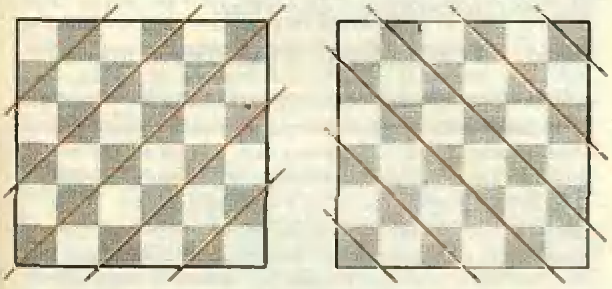


Рис. 4

Заметим, что для таблиц с нечетным числом строк возможны и другие суммы. На рисунке 5 приведена таблица 5×5, у которой $S=1$.

1	1	1	1	1
0	0	0	0	0
0	0	−1	0	0
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1

Рис. 5

Геометрическая страничка

2. Можно воспользоваться утверждением предыдущей задачи. Обозначим через M_0 точку пересечения медиан, выходящих из вершин A и B. Тогда треугольники AM_0B, AM_0C и BM_0C оказываются равновеликими. Это означает, что M_0 лежит и на третьей медиане. Дальнейшее ясно.

5. Искомое геометрическое место состоит из двух прямых, проходящих через A: одна из них делит пополам BC, а другая параллельна BC.

6. Искомое геометрическое место состоит из четырех точек: M_1 — точка пересечения медиан треугольника ABC, M_2, M_3, M_4 — таковы, что $ABCM_2$, ABM_3C и AM_4BC являются параллелограммами.

7. Рассмотрим треугольник ABC, в котором A_1 — середина BC, M — точка пересечения медиан, K — середина MB. Тогда стороны треугольника KMA_1 равны $\frac{1}{3}$ соответствующих медиан, т.е. треугольник KMA_1 можно построить, а затем построить и сам треугольник ABC.

8. См. решение предыдущей задачи. Любой треугольник имеет площадь в $\frac{4}{3}$ раза большую, чем площадь треугольника, составленного из его медиан.

9. Пусть медиана m_a составляет со стороной a углы, равные φ и $180°-\varphi$ (угол φ противолежит стороне b). Запишем две теоремы косинусов и сложим: $b^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - m_a \cdot a\cos\varphi$, $c^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} + m_a \cdot a\cos\varphi$. Получим $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$ и т.д.

10. Воспользуйтесь формулой, доказанной в предыдущей задаче. Указанное отношение равно $\frac{3}{4}$.

11. Искомое геометрическое место есть окружность с центром в середине AB (или точка или пустое множество). Это следует, в частности, из того, что в треугольнике AMB медиана к стороне AB имеет постоянную длину (см. формулу задачи 9).

12. Пусть для определенности диагональ m образует со сторонами четырехугольника два треугольника a, b, m и c, d, m. Обозначим через x и y медианы в этих треугольниках к стороне m. Тогда в треугольнике со сторонами x, y, n медиана к стороне n равна l. По формуле задачи 9 имеем

$l^2 = \frac{1}{4}\left(2x^2 + 2y^2 - n^2\right)$, $x^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - m^2\right)$,

$y^2 = \frac{1}{4}\left(2c^2 + 2d^2 - m^2\right)$. Из этих равенств сразу следует искомое равенство.

13. Утверждение задачи следует из формулы, доказанной в задаче 12.

14. Пусть A_1 — середина BC. Положим $\angle MGA_1 = \varphi$ ($\angle MGA = 180° - \varphi$). По теореме косинусов

$MA_1^2 = MG^2 + GA_1^2 - 2MG \cdot GA_1 \cos\varphi$,

$MA^2 = MG^2 + GA^2 - 2MG \cdot GA\cos\varphi$. Умножим первое равенство на 2 и сложим со вторым ($GA = 2GA_1$). Получим

$2MA_1^2 + MA^2 = 3MG^2 + 2GA_1^2 + GA^2$ или ($GA_1 = \frac{1}{3}AA_1$)

$$2MA_1^2 + MA^2 = 3MG^2 + \frac{2}{3}AA_1^2. \qquad (*)$$

Далее по формуле задачи 9 имеем

$2MA_1^2 = MB^2 + MC^2 - \frac{1}{2}BC^2$,

$\frac{2}{3}AA_1^2 = \frac{1}{6}\left(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2\right)$. Заменив теперь в равенстве (*) $2MA_1^2$ и $\frac{2}{3}AA_1^2$, получим требуемое.

15. Воспользуйтесь теоремой Лейбница (задача 14):

$AM^2 + BM^2 + CM^2 \ge \frac{1}{3}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right)$. Но сумма квадратов сторон треугольника при заданном периметре будет наименьшей для правильного треугольника:

$\frac{1}{3}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right) \ge \left(\frac{AB + BC + CA}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}p^2$.

16. Обозначим через A_1 середину BC $\left(2\vec{MA_1} = -\vec{MA}\right)$. Тогда $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{MA} + 2\vec{MA_1} = 0$. Обратно, пусть M_1 — такая точка, что $\vec{M_1A} + \vec{M_1B} + \vec{M_1C} = 0$, M — точка пересечения медиан. Имеем

$0 = \vec{M_1A} + \vec{M_1B} + \vec{M_1C} = \left(\vec{M_1M} + \vec{MA}\right) +$

$+ \left(\vec{M_1M} + \vec{MB}\right) + \left(\vec{M_1M} + \vec{MC}\right) = 3\vec{M_1M}\left(\vec{M_1A} + \vec{MB} + \vec{MC}\right)$.

Значит, $\vec{M_1M} = 0$ и M_1 совпадает с M.

17. Воспользуемся утверждением предыдущей задачи. Рассмотрим треугольник ABC. Пусть A_0, B_0, C_0 — центры квадратов, построенных соответственно на сторонах BC, CA и AB, M — точка пересечения медиан ABC. Нам достаточно доказать, что $\vec{MA_0} + \vec{MB_0} + \vec{MC_0} = 0$. Но $\vec{MA_0} + \vec{MB_0} + \vec{MC_0} =$

$= \vec{MB} + \vec{BA_0} + \vec{MC} + \vec{CB_0} + \vec{MA} + \vec{AC_0} =$

$= \left(\vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MA}\right) + \left(\vec{BA_0} + \vec{CB_0} + \vec{AC_0}\right)$. Далее имеем $\vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MA} = 0$. Также нулю равна и вторая сумма. Это следует из того, что вектора $\vec{BA_0}$, $\vec{CB_0}$ и $\vec{AC_0}$ получаются соответственно из $\vec{BC}$, $\vec{CA}$ и $\vec{AB}$ поворотом на 45° в одном и том же направлении и умножением на $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

19. Решим задачу методом, который можно назвать «методом масс». Поместим в вершинах A и C грузы единичной массы. Обозначим их как грузы *1* и *2*. В вершине B поместим два груза: груз *3* массой $\frac{AK}{KB}$ и груз *4* массой $\frac{CM}{MB}$. Нетрудно видеть, что центр масс всех четырех грузов совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC. (Центр масс грузов *1* и *2* — в середине AC, сумма их равна 2. Суммарная масса грузов в вершине B равна 1, и т.д.) С другой стороны, центр масс всех четырех грузов лежит на отрезке KM, поскольку центр масс грузов *1* и *3* находится в точке K, а центр масс грузов *2* и *4* — в точке M.

20. Возьмем на луче AM точки A_0 и A_1 так, что $AA_0 = \frac{3}{2}AM$, $AA_1 = 2AA_0$. Рассмотрим три круга: 1-й — с диаметром AA_0, 2-й — с диаметром A_0A_1, 3-й — с диаметром AA_1. Искомое геометрическое место состоит из точек вне кругов 1 и 2 (тем самым обеспечивается острота углов B и C) и внутри круга 3 (тогда острым будет угол A).

21. Пусть K — середина отрезка, соединяющего данные точки. Искомое геометрическое место есть окружность, гомотетичная данной с центром в K и коэффициентом $\frac{1}{3}$.

22. Рассмотрим пятиугольник $ABCDE$. Пусть медианы, выходящие из вершин A, B, C и D, пересекаются в точке M. Нам достаточно доказать равновеликость треугольников EMB и EMC. (Это будет означать, что медиана из точки E проходит через M (см. задачу 1).) Но поскольку через M проходят медианы, выходящие соответственно из B, D, A, C, то $S_{EMB} = S_{BMD} = S_{DMA} = S_{AMC} = S_{CME}$, что и требовалось.

23. Такая точка единственная — точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажем это. Пусть M лежит внутри или на границе треугольника BGA_0, где G — точка пересечения медиан треугольника ABC, A_0 — середина BC (M отлична от G). Проведем через M прямую, параллельную GA_0. В качестве K возьмем точку ее пересечения с BC. M_1 — точка пересечения этой прямой с BG. Нам достаточно доказать, что каждый из треугольников AM_1K, BM_1K, CM_1K имеет площадь меньше 1/6 площади ABC.

24. Пусть O — центр данной окружности. Взяв любую точку A на окружности, мы можем построить единственный треугольник ABC, вписанный в нашу окружность, для которого P есть точка пересечения медиан, либо доказать, что такой треугольник не существует. Для этого можно поступить следующим образом. Проведем отрезок AP и на его продолжении за точку P возьмем точку A_0 так, что $AA_0 = \frac{3}{2}AP$. A_0 — середина BC. Если A_0 внутри данной окружности, мы можем построить требуемый треугольник ABC. (Хорда BC перпендикулярна OA_0). Если A_0 на окружности или вне ее — треугольник не существует. Теперь для решения задачи мы можем воспользоваться подобием метода интервалов. Вся окружность разбивается на некоторое число дуг. При этом для всех точек A внутри соответствующей дуги либо соответствующего треугольника нет, либо A наименьший угол нового треугольника, либо средний по величине, либо наибольший. Концами дуг являются точки, которым либо соответствует равнобедренный треугольник, либо треугольник, вырождающийся в отрезок. Различаются два случая:

1) $OP < \frac{R}{3}$ (R — радиус данной окружности). Рассмотрим диаметр KM, содержащий P. Пусть P на OM. Рассмотрим две хорды A_1A_1' и A_2A_2', перпендикулярные KM, такие, что MA_1A_1' и KA_2A_2' — равнобедренные треугольники (A_1 и A_2 по одну сторону от KM). Если A лежит на дуге A_1KA_1', то она соответствует наименьшему углу треугольника ABC. Если A на дуге A_2MA_2', то она соответствует наибольшему углу. Все остальные точки (они лежат на двух дугах A_1A_2 и $A_1'A_2'$) соответствуют среднему углу. Сами точки A_1, A_1', A_2, A_2' принадлежат двум множествам (соответствуют либо наименьшему и среднему, либо наибольшему и среднему углу).

2) $OP \ge \frac{R}{3}$. Возьмем хорду A_1A_1' так же, как в случае 1. Проведем через P две симметричные относительно KM хорды A_3A_4' и $A_3'A_4$ такие, что $A_3P = A_3'P = 2A_4'P = 2A_4P$ (A_3, A_4 и A_1 по одну сторону от KM). Теперь если A на дуге A_3KA_3' (включая концы), соответствующий треугольник невозможен. Точкам двух дуг A_3A_1 и $A_3'A_1'$ соответствуют наименьшие углы. Точкам дуги A_4MA_4' — наибольший угол. Оставшиеся точки окружности соответствуют среднему углу.

Легко ли складывать и умножать дроби

1. Правильная обыкновенная несократимая дробь $\frac{m}{n}$ представляется десятичной дробью с периодом t и предпериодом k если и только если $10^k(10^t - 1)$ делится на n, причем k и t — наименьшие натуральные числа, удовлетворяющие этому условию. Пусть $n = 2^\alpha 5^\beta s$, где $(s, 10) = 1$. Тогда $s \ge 3$, и $\max\{\alpha, \beta\} = k$, потому что n делит $10^k(10^t - 1)$ тогда и только тогда, когда $2^\alpha 5^\beta$ делит 10^k, а s является делителем числа $10^t - 1$. Значит, $n \ge 2^k \cdot 3$ и равенство возможно лишь при $s = 3$, $\alpha = k$, $\beta = 0$, т.е. $k \le \log_2(n/3)$.

2, 3. Пусть

$$\alpha = 0,a_1\ldots a_k(A_1\ldots A_t) = 0,a_1\ldots a_k + \sum_{i=0}^{\infty} 0,A_1\ldots A_t\ 10^{-it-k}$$ и

$$\beta = 0,b_1\ldots b_k(B_1\ldots B_t) = 0,b_1\ldots b_k + \sum_{i=0}^{\infty} 0,B_1\ldots B_t\ 10^{-it-k},$$

где буквами a_i, b_i, A_i, B_i обозначены цифры предпериодов и периодов дробей a и b. Очевидно, если
$0,a_1\ldots a_k + 0,b_1\ldots b_k = c_0,c_1\ldots c_k$ и
$0,A_1\ldots A_t + 0,B_1\ldots B_t = 0,C_1\ldots C_t$, то

$$a + b = c_0,c_1\ldots c_k + \sum_{i=0}^{\infty} 0,C_1\ldots C_t\ 10^{-it-k}.$$

Если же $0,A_1\ldots A_t + 0,B_1\ldots B_t > 1$, то для некоторой дроби $0,C_1\ldots C_t$

$$0,A_1\ldots A_t + 0,B_1\ldots B_t = 0,C_1\ldots C_t + \underbrace{0,9\ldots9}_{t},$$

а так как $\sum_{i=0}^{\infty} 0,\underbrace{9\ldots9}_{t}\ 10^{-it} = 1$, то

$$a + b = c_0,c_1\ldots c_k + \sum_{i=0}^{\infty}\left(0,C_1\ldots C_t + 0,\underbrace{9\ldots9}_{t}\right)10^{-it-k} =$$

$$= c_0,c_1\ldots c_k + 0,\underbrace{0\ldots01}_{k} + \sum_{i=0}^{\infty} 0,C_1\ldots C_t 10^{-it-k}.$$

Случай вычитания рассматривается аналогично: если $0,A_1\ldots A_t - 0,B_1\ldots B_t < 0$, то для некоторой дроби $0,C_1\ldots C_t$

$$0,A_1\ldots A_t + 0,B_1\ldots B_t = 0,C_1\ldots C_t + \underbrace{0,9\ldots9}_{t},$$

а так как $\sum_{i=0}^{\infty} 0,\underbrace{9\ldots9}_{t}\ 10^{-it} = 1$, то

$$a - b = 0,c_1\ldots c_k + \sum_{i=0}^{\infty}\left(0,C_1\ldots C_t - 0,\underbrace{9\ldots9}_{t}\right)10^{-it-k} =$$

$$= 0,c_1\ldots c_k - 0,\underbrace{0\ldots01}_{k} + \sum_{i=0}^{\infty} 0,C_1\ldots C_t\ 10^{-it-k}.$$

4. Это самое трудное из упражнений статьи. Доказать его утверждение рассуждениями, похожими на применявшиеся в решениях предыдущих упражнений, сложно (кроме очевидного случая $t_1 = t_2$), поэтому мы поступим по-другому. Предположим, что $k_2 \ne k_1$ и сложим дроби $1/10^{k_i}(10^{t_i} - 1)$, применяя для нахождения НОК знаменателей последнее из упражнений

статьи. Получим дробь со знаменателем

$$10^{k_2}\left(10^{t_1}-1\right)\left(10^{t_2}-1\right)/\left(10^{(t_1,t_2)}-1\right)$$

и с числителем

$$10^{k_2-k_1}\left(10^{t_2}-1\right)/\left(10^{(t_1,t_2)}-1\right)+\left(10^{t_1}-1\right)/\left(10^{(t_1,t_2)}-1\right).$$

Последняя цифра числителя равна 1 при $k_2>k_1$ и 2 при $k_2=k_1$, поэтому числитель не делится ни на 2, ни на 5. Так как числа

$$n_1=\left(10^{t_1}-1\right)/\left(10^{(t_1,t_2)}-1\right) \text{ и } n_2=\left(10^{t_2}-1\right)/\left(10^{(t_1,t_2)}-1\right)$$

не имеют общих делителей, то числитель не имеет общих делителей ни с n_1, ни с n_2, значит после сокращения рассматриваемой дроби ее знаменатель будет кратен числу $n=10^{k_2}n_1n_2$. Эта дробь представляется десятичной дробью с периодом t и предпериодом k если и только если $10^k\left(10^t-1\right)$ делится на n, причем k и t — наименьшие натуральные числа, удовлетворяющие этому условию. Значит $k=k_2=\max(k_1,k_2)$ и числа n_1 и n_2 делят число 10^t-1.

Предположим, что $t_1>t_2>(t_1,t_2)$. Заметим, что для любого m, делящего 10^v-1, число v делится на наименьшее u, для которого 10^u-1 кратно m. Действительно, если бы $(v,u)<u$, то согласно упомянутому упражнению m делило бы $10^{(u,v)}-1$, что противоречит выбору u. Отсюда следует, что наименьшее u, такое, что 10^u-1 кратно n_i, равно t_i, ибо

$$n_i=\left(10^{t_i}-1\right)/\left(10^{(t_1,t_2)}-1\right)>\left(10^{t_i}-1\right)/\left(10^{t_i/2}-1\right)>10^{t_i/2}-1,$$

и поэтому t делится на t_i, а значит t не меньше $[t_1,t_2]$. Если же $t_2=(t_1,t_2)$, то все равно t $t_2=[t_1,t_2]$. Случай вычитания дробей рассматривается аналогично.

5. Сумма дробей α и β с периодами 6 и 12 соответственно не может иметь период 6, так как иначе разность дробей $(\alpha+\beta)-\alpha$ с периодом 6 имела бы период 12, что противоречит лемме 2.

6. Так как $u=qv+r, 0, r<v$ то

$$10^u-1-\left(10^r-1\right)=10^r\left(10^{qv}-1\right)$$

делится на 10^v-1, значит остаток от деления 10^u-1 на 10^v-1 равен 10^r-1. Отсюда с помощью упражнения 8 следует, что $\left(10^u-1,10^v-1\right)=\left(10^v-1,10^r-1\right)$ и $(u,v)=(v,r)$. Повторяя это рассуждение далее, получаем,

$$\left(10^u-1,10^v-1\right)=\ldots=\left(10^{r_k}-1,10^{r_{k+1}}-1\right) \text{ и}$$

$$(u,v)=(v,r)=\ldots(r_k,r_{k+1})=r_{k+1},$$

откуда

$$\left(10^u-1,10^v-1\right)=10^{r_{k+1}}-1=10^{(u,v)}-1.$$

Смеси, сплавы и растворы в задачах

1. Достаточно смешать четыре кружки 16%-го раствора с одной кружкой 36%-го.

2. Пусть a (г) — количество p%-го и q%-го растворов. Найдем количество чистого вещества в полученном растворе:

$$\frac{ap}{100}+\frac{aq}{100}=\frac{a(p+q)}{100} \text{ (г).}$$

Это количество содержится в растворе массой в $2a$ (г). Таким образом, отношение будет равно

$$\frac{a(p+q)}{100}:2a=\frac{p+q}{2\cdot 100}.$$

2. См. рис. 6. Ответ: 12,5% – (525,75), 17,5% – (375,225), 22,5% – (225,375), 25% – (150,450), 27,5% – (75,525). В скобках записано количество в граммах 10%-й и 30%-й кислоты соответственно.

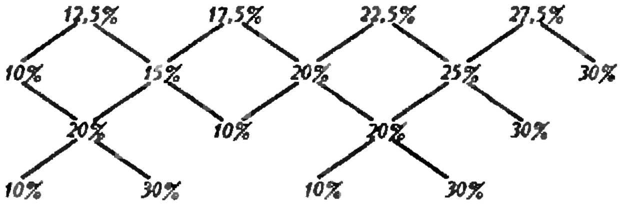


Рис. 6

Санкт-Петербургский государственный университет

Вариант 1

1. $\frac{2}{13\cdot 15\cdot 17}=\frac{2}{3315}$. 2. $(-\infty;0)\cup\{4\}$. 3. $\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$.

4. $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$. 5. $\sqrt{3}:2$, считая от нижнего основания.

Решение. Будем считать, что основания цилиндра и призмы лежат в горизонтальных плоскостях. Прежде всего заметим, что плоскость ACB' делит цилиндр на части с такими же объемами, что и горизонтальная плоскость, проходящая через точку P пересечения исходной плоскости ACB' и оси цилиндра. Поэтому отношение, в котором делится объем цилиндра, равно отношению, в котором делится его ось точкой P. В свою очередь, последнее равно отношению, в котором центр вписанной окружности треугольника ABC делит его высоту. (Чтобы убедиться в этом, нужно рассмотреть вертикальное сечение, проходящее через BB' и ось цилиндра.) Таким образом, мы должны найти отношение $\frac{r}{h-r}$, где r — радиус вписанной окружности, а h — высота треугольника ABC, опущенная из вершины B. Пусть S — площадь треугольника ABC. Тогда

$$r=2S/(AB+BC+AC),\ h=\frac{2S}{AC},$$

$$\frac{h-r}{r}=\frac{h}{r}-1=\frac{AB+BC+AC}{AC}-1=\frac{AB+BC}{AC},$$

и наконец,

$$\frac{r}{h-r}=\frac{AC}{AB+BC}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Вариант 2

1. См. рис.7. 2. $\left\{-\frac{49}{4}\right\}\cup[-12;-6]$. 3. $\alpha\in\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right\}$, $k\in\mathbf{Z}$. 4. 1:4. 5. $a\cdot\frac{\sqrt{15}}{6}$.

Вариант 3

1. 62,5 тыс. р. 2. $\sqrt[3]{\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-1\right)}$. 3. $\pm\frac{\pi}{12}+\pi k;\ \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. *Указание.* Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3\cos^2 3x=2\cos^2 2x, \\ \cos 2x\geq 0, \end{cases}$$

решать которую удобно с помощью замены $\cos 2x=t$.

4. $\left(\frac{9-\sqrt{69}}{2};\frac{9+\sqrt{69}}{2}\right)$.

5. 53 : 73.

Решение. Для простоты примем длину ребра призмы за единицу. Пусть $AX=\alpha$, $BY=\beta$, $CZ=\gamma$. Тогда объемы пирамид $AXYZ$, $AYBC$ и $AZCY$ равны соответственно $\frac{\alpha}{3}V$, $\frac{\beta}{3}V$, $\frac{\gamma}{3}V$,

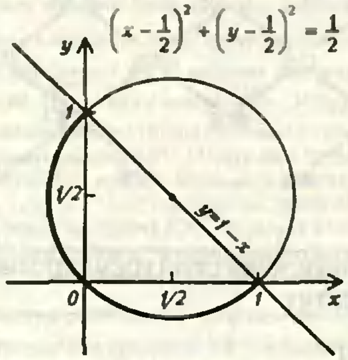


Рис. 7

где V — объем призмы, а эти пирамиды и составляют нижнюю часть призмы. Осталось заметить, что $\alpha=\frac{2}{3}$, $\beta=\frac{3}{7}$, $\gamma=\frac{1}{6}$.

Московский авиационный институт

Вариант 1

1. $t=\frac{2lv_1}{v_1^2-v_2^2}=3{,}04$ ч. 2. $a_{\max}=F\sqrt{1+\mu^2}/m-\mu g$.
3. $k=n(p/p_0-1)=20$. 4. $T=\frac{qQ}{8\pi^2\varepsilon_0R^2}$.
5. $q=Br/(2R_0)=12{,}5$ мкКл. 6. $\Gamma_3=\frac{2\Gamma_1\Gamma_2}{\Gamma_1+\Gamma_2}=2{,}4$.

Вариант 2

1. $x=0{,}03\sin(10t+\pi/4)$. 2. В 2 раза. 3. $A=3\sqrt{aRV_1}=1{,}1$ Дж.
4. $U=6$ В. 5. $I_{\max}=U\sqrt{C/L}$. 6. См. рис. 8.

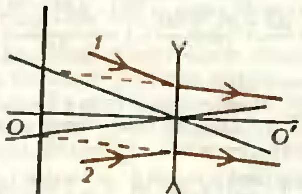


Рис. 8

Московский государственный авиационный технологический университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $-1-\log_5 2$. 2. Возрастает при $x>1$, убывает при $0<x<1$.
3. $\frac{\pi k}{2}$; $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$. 4. $t\ge 10$ ч. 5. $-10\le a\le 8$. 6. 44.

Вариант 2

1. $\log_2 3$. 2. Возрастает при $x<0$ и при $x>\ln 2$, убывает при $0<x<\ln 2$. 3. $-\frac{\pi}{4}+(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{4}+\pi n$;
$-\frac{\pi}{4}+(-1)^m\arcsin\frac{1}{2\sqrt2}+\pi m$, $n, m\in Z$.
4. При $v\ge 24$ км/ч. 5. При $k\le -2$ и $k\ge 2$. 6. $BC:AD=1:4$.

Вариант 3

1. -2. 2. Возрастает при $-7<x<3$, убывает при $x<-7$ и при $x>3$. 3. $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{65}-1}{8}+\pi n$, $n\in Z$.
4. При $60\%\le x\le 88\%$. 5. При $k\ge 3$ и $k\le -6$. 6. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Преодолеет. 2. $q=C\mathcal{E}R/(R+r)=10$ мкКл.
3. $\Delta m=m(1-p_0/(Sp))=5$ г (здесь $p_0=100$ кПа).
4. $v=2P\tau/(mc)=5\cdot10^{-3}$ м/с. 5. $P=5U^2/(3R)=16{,}1$ Вт.
6. $v_{\min}=\sqrt{g(2H+L)}=25$ м/с.

Вариант 2

1. $R=mv/(eB)=0{,}28$ м; $A=0$. 2. ${}^{10}_{5}B+{}^{4}_{2}\alpha\to{}^{13}_{7}N+{}^{1}_{0}n$; ${}^{13}_{7}N\to{}^{0}_{1}e+{}^{13}_{6}C$.
3. $h=lm_1^2/m_2^2=16$ см.
4. $p=p_1p_2(M_1M_2)/(p_1M_1+p_2M_2)=500$ кПа.
5. $v=mgR/(B^2l^2)=1$ м/с. 6. $s=l/2=250$ м.

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

Вариант 1

1. 8 деталей. 2. $-\pi/2$; 0. 3. 3. 4. $(-\infty;0)\cup(1;2)$.
5. $a=1/4$. 6. $\{2\}\cup(-2;1]$. *Указание.* Так как $x<0$ и $y=1$, то система имеет одно решение, если уравнение
$x^2+2ax+a^2+a-2=0$
имеет одно отрицательное решение.
7. $18/5$; $9\sqrt{34}/25$, $16\sqrt{34}/25$. *Указание.* Пусть PM — высота треугольника BCM (рис. 9). Если $MK\parallel BC$, то $PM=BK$ и отрезок BK должен быть высотой треугольника ABB_1.

Вариант 2

1. 10 и 20 км/ч. 2. $k\pi/2$, $k\in Z$. 3. $1/2$.
4. $(-2;-2/3)\cup(1;+\infty)$. 5. -1; 2. 6. $\{-1;-7/8\}$. *Указание.* Второе уравнение системы можно представить в виде
$(y-x-a)(y+x+a)=0$. 7. $R^2/\sqrt2$. *Указание.* Если h — высота пирамиды и d — диагональ основания, то $(d/2)^2=h(2R-h)$. Пусть M — середина ребра TC. Проведем $MN\perp AC$, затем $NP\perp BD$, тогда MP будет высотой треугольника BMD (рис. 10).
Вычислите $MP=\sqrt{h^2+2Rh}/2\sqrt2$ и
$S_{\Delta BMD}=\frac{1}{2}BD\cdot MP=\sqrt{4h^2R^2-h^4}/2\sqrt2$ и исследуйте подкоренное выражение на экстремум.

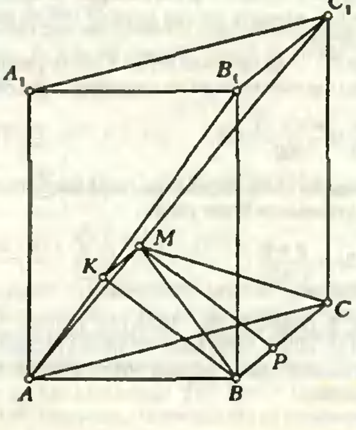


Рис. 9

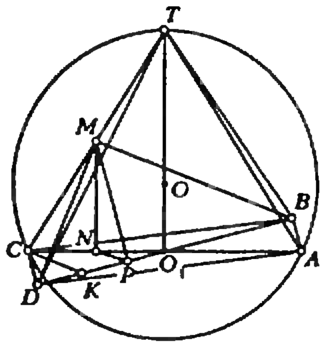


Рис. 10

Московский инженерно-физический институт

Вариант 1

2. См. рис. 11: изображение действительное и перевернутое.
3. $T = T_0 = 270$ К (растаяла лишь часть льда).
4. Из законов сохранения импульса и энергии для максимального угла отклонения получаем

$$\varphi_{max} = \arccos\left(1 - \frac{m^2 v_0^2 \cos^2\alpha}{2gl(m+M)}\right).$$

Заметим, что если

$$\frac{m^2 v_0^2 \cos^2\alpha}{2gl(m+M)^2} > 1,$$

то шар ударится о потолок и максимальный угол составит $\varphi_{max} = \pi/2$.

Вариант 2

2. $r = \sqrt{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{F}} = 0{,}1$ м.

3. При удалении от линзы на расстояние, превышающее два фокусных расстояния линзы.
4. Запишем для поршня второй закон Ньютона в виде

$$m\omega^2 r = p_2 S - p_1 S,$$

где p_1 и p_2 — давления в отсеках цилиндра слева и справа от поршня, S — площадь поршня. Поскольку температура системы оставалась постоянной, для воздуха в первом и втором отсеках имеем соответственно

$$p_0 \frac{V}{2} = p_1 S(l + r),$$

$$p_0 \frac{V}{2} = p_2 S(l - r).$$

Отсюда находим угловую скорость вращения цилиндра:

$$\omega = \sqrt{\frac{p_0 V}{m(l^2 - r^2)}}.$$

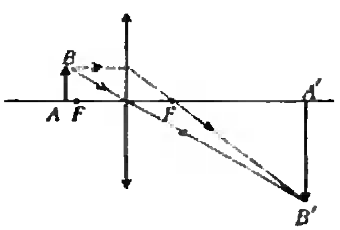


Рис. 11

Рис. 12

Вариант 3

2. См. рис. 12. **3.** $T = Fm_2/(m_1 + m_2)$. **4.** $T_1 = T_2 = mg\sqrt{3}/2 = 17$ мН; $a_1 = a_2 = g = 9{,}8$ м/с^2.

Московский государственный институт электронной техники — технический университет

Вариант 1

1. $s_2 = 7s_5 = 35$ см. **2.** $F_{тр} = mg\sin\alpha = 10$ Н.

3. $\lambda = c(t_2 - t_1)\dfrac{m_1}{m_2}\dfrac{\tau_2}{\tau_1} = 336$ кДж/кг.

4. $E = \dfrac{k}{r^2}\sqrt{q_1^2 + q_2^2 - 2q_1|q_2|\left(1 - \dfrac{l^2}{2r^2}\right)} = 1{,}8 \cdot 10^6$ В/м.

5. $I_2 = \pi I_1/4 = 0{,}3$ А. **6.** $\varphi = 120°$.

Вариант 2

1. $s_3 = 2s_2 - s_1 = 3$ м. **2.** $T = m(g\cos\alpha + v^2/l) = 1{,}3$ Н.

3. $p_2 = 2p_1T_2/T_1 = 40$ кПа. **4.** $A = CU^2(n-1)/2 = 2 \cdot 10^{-8}$ Дж.

5. $\dfrac{e}{m} = \dfrac{2U}{B^2R^2} = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. **6.** $D = (\Gamma - 1)/(\Gamma d) = 20$ дптр.

Московский энергетический институт

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 8 при $x > 0$, $x \neq 64$. **2.** $(0,2)\cup(4,+\infty)$. **3.** 20 мин.
4. 0, $\pm\pi/9$, $\pm 2\pi/9$, $\pm\pi/3$. **5.** $(\pi/3)(b + 2a)(a - b^2)/(\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta)$.

Вариант 2

1. $f(x) = x^2 + 4$, $f'(x) = 2x$, $x \neq 0$, $x \neq 2/3$, $x \neq 2$.
2. $(1/2, 0)$; $(0, \log_3 2)$.
3. Собственная скорость лодки равна 7 км/ч, скорость течения реки равна 3 км/ч.
4. $\pm\pi/2$, $\pm 3\pi/2$, $\pm 5\pi/2$. 5. $a^2 \sin 2\alpha/(2\cos\beta)$.

ФИЗИКА

Вариант 1

3. $s = \dfrac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$. **4.** $T = \dfrac{2\pi R}{R_0}\sqrt{\dfrac{R}{g}}$.

5. $I_1 = \dfrac{Q}{C}\sqrt{\dfrac{L_2}{L_1}\dfrac{C}{L_1 + L_2}}$; $I_2 = \dfrac{Q}{C}\sqrt{\dfrac{L_1}{L_2}\dfrac{C}{L_1 + L_2}}$.

Вариант 2

3. $A = QEl\cos\alpha = 5{,}2 \cdot 10^{-6}$ Дж. **4.** $f_1 = 0{,}9$ м; $f_2 = 0{,}1$ м.

5. $v_A = v\dfrac{d + vt}{\sqrt{l^2 - (d + vt)^2}}$.

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена

Вариант 1

1. а) $]-\infty; 3[\cup]3; \infty[$. б) См. рис. 13. в) $]2; 2\frac{2}{3}[\cup]4; \infty[$.
2. Легковая машина догонит грузовую машину на расстоянии 360 км от A. **3.** 3. **4.** -3. **5.** $\sin 1 > \cos 1$, так как $\sin 1 > \sin\frac{\pi}{4} > \cos 1$.

6. 12. 7. 8. 8. $\dfrac{35b^2\sqrt{3}}{36}$.

Вариант 2

1. а) $]-\infty; -3[\cup]-3; \infty[$. б) См. рис. 14. в) $]7; \infty[$.
2. Волк не догонит зайца. 3. 4. 4. 2. 5. $\sin 2 > \cos 2$, так как $\sin 2 > 0 > \cos 2$. 6. 20. 7. 500. 8. $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$.

Санкт-Петербургский государственный технический университет

1. $h = 25/8\, g\Delta t^2 = 31$ м. 2. $s = v^2/(2\mu g) + l/2 = 2{,}84$ м.
3. $E_1 = k/2\, x_1(x_1 + x_2)$; $E_2 = k/2\, x_2(x_1 + x_2)$.

4. $A = 1/6\rho g S h^2 = 2 \cdot 10^5$ Дж. 5. $\frac{d}{\Delta t} = \frac{p}{\rho}\sqrt{\frac{A}{2EN_A}} = 9 \cdot 10^{-8}$ см/с.

6. $\omega = \sqrt{\nu RT/(ml^2)}$. 7. $B = \frac{2\pi m v \cos\alpha}{eL} n$, где n — целое число.

8. $\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{n_2^2 - 1}{n_1^2 - 1}} = 1{,}012$. 9. $D = d + 4L\sqrt{(hc/\lambda - A)/(eU)} = 1{,}3$ мм.

10. $E_n = \frac{m_\alpha}{m_n + m_\alpha}\left(Q + \frac{m_\alpha - m_O}{m_\alpha} E\right) = 12$ МэВ.

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. а) $x \ne 0$. б) -3; 2. в) $\left(0, \frac{4}{3}\right]$. *Указание.* При $a \ne 0$ уравнение $f(x) = a$ равносильно $t^2 + t + 1 - \frac{1}{a} = 0$, где $t = \sqrt[3]{x+1} - 1$, $t \ne 0$. 2. а) 3; 3^{-4}. б) $x = 3^{-4}$ при любом a. в) $a > -1$. г) 3^{-4}. *Указание.* Заметьте, что
$f(x) = (a+1)(\log_3 x + 4)(\log_3 x - 4(a+1)^{-1})$,
и положите в нем $a = x$.

3. а) πk, $k \in Z$. б) $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$. в) $\frac{\pi}{4}(2k+1); \pm\frac{1}{2}\arcsin\frac{21}{121} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$.

Вариант 2

1. а) -1. б) $(-\log_3 48; -\log_3 36) \cup (-\log_3 12; 0)$. в) $x > 0$ при $b \ge 9$, $x < \log_3(9 - b)$ или $x > 0$ при $8 < b < 9$, $x \ne 0$ при $b = 8$, $x < 0$ или $x > \log_3(9 - b)$ при $0 < b \le 8$. *Указание.* Рассмотрите по отдельности три случая: $b \ge 9$; $8 < b < 9$; $0 < b < 8$, в каждом из которых легко получить решение соответствующего неравенства для $x > 0$ и для $x < 0$.

2. а) $\frac{1}{2}\log_{\frac{2}{3}} 5$. б) $\left(-\infty; \log_{\frac{2}{3}} 4\right) \cup \left(\log_{\frac{3}{2}} 3; 1\right) \cup (0; +\infty)$. в) -5.

3. а) Из подобия треугольников следует $\frac{h}{b} = \frac{a-k}{a}$ и далее $\frac{k}{a} + \frac{h}{b} = 1$. б) $d = \left(a^2 + a^2h^2(a-k)^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}$. в) $a = k + (kh^2)^{\frac{1}{3}}$ — точка минимума. *Указание.* Найдите минимум функции $f(a) = d^2(a)$. $f'(a) = \left(2a(a-k)^3 - kh^2\right)(a-k)^{-3}$. г) $\left(k^{\frac{2}{3}} + h^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

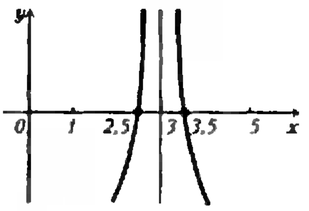


Рис. 13

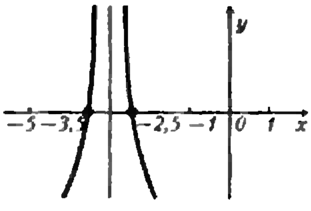


Рис. 14

ФИЗИКА

Вариант 1

1. 1) $a = (F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha))/m = 10{,}5$ м/с^2; 2) $\alpha = \mathrm{arctg}\,\mu = 5{,}7°$.
2. 1) $\Delta m = \frac{VM}{R}\left(\frac{p + \Delta p}{T + \Delta T} - \frac{p}{T}\right) = 57$ г; 2) не станет.
3. 1) $r = R_2(U - IR_1)/(IR_2 - U) = 0{,}48$ Ом; 2) для повышения точности измерений.
4. 1) $M = IBa^2\sin\alpha = 0{,}5 \cdot 10^{-7}$ Н·м; 2) когда плоскость рамки перпендикулярна полю, причем направление магнитного поля рамки совпадает с направлением внешнего поля.
5. 1) $d_1 = 5F$, $f_1 = 1{,}25F$; $d_2 = 1{,}25F$, $f_2 = 5F$; 2) обратимостью световых лучей.

Вариант 2

1. 1) $\mu = (2l - gt^2\sin\alpha)/(gt^2\cos\alpha) = 0{,}13$; $t_1 = 2l/(g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)) = 6{,}3$ с; 2) $\alpha_{max} = \mathrm{arc\,tg}\,\mu = 7{,}4°$.
2. 1) $d = \frac{l}{1 + \rho gh/p} - h = 0{,}5$ м; 2) а — может, б — не может.
3. 1) $U = \sqrt{2d^2F/(\varepsilon_0\varepsilon S)} = 150$ В; 2) увеличится.
4. 1) $Q = \frac{L\mathcal{E}^2}{2(r + RR_1/(R + R_1))^2} = 0{,}6$ Дж; 2) увеличится.
5. 1) $D = d\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{n\cos\alpha} = 15{,}2$ см; 2) ширина пучка не изменится, но пучок сместится параллельно самому себе.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, А.Т.Калинин, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, Е.А.Митченко А.П.Савин, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

П.А.Балод, Д.А.Крымов, А.Н.Логвин, Л.А.Тишков, А.О.Хоменко

ГЛАВНЫЙ ХУДОЖНИК

С.А.Стулов

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

С.В.Вакуленко, Е.В.Титова

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Н.И.Лямина

Адрес редакции:

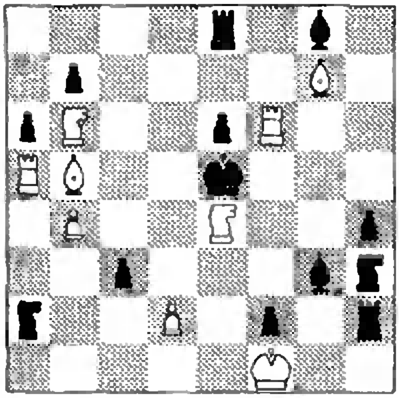
103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант», тел. 250-33-54, 251-55-57

Отпечатано в Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате 142300 г. Чехов Московской области Заказ № 2570

Необычный матч

Финал этой шахматной истории состоялся в 1903 году. Одного из ее героев тогда уже не было в живых, но именно ему была посвящена уникальная задача, которую буквально наперебой стали публиковать газеты и журналы всей Европы.

Под девизом «Гамбит Стейница» на один из конкурсов по шахматной композиции поступила трехходовка, на первый взгляд ничем не примечательная.



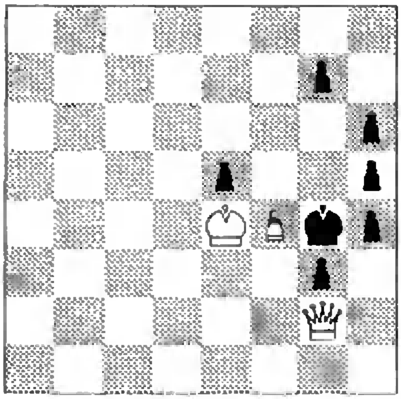
С.Лойд, 1903
Мат в 3 хода

В этой позиции традиционными путями до истины не дойти. Невероятное решение можно, пожалуй, обнаружить, лишь припомнив вариант королевского гамбита, названного именем Стейница: **1. e4 e5 2. f4 ef 3. Кc3 Фh4+ 4. Кpe2!?** Ключ к разгадке: король бесстрашно выходит на сцену, а две «батареи» белых (ладья a5 и слон g7) не будут стрелять, пока не придет командир и не научит их бить точно по цели.

1. Кpe2!! К своим под огнем неприятеля! Грозит 2. Лf7+Кр:e4 3. Сd3×. На 1...Кр:e4 появляется 2. Сd3+ Кpd4 3. Лf4×, а хитрое 1... К:b4 ослабляет пешку c3 и допускает 2. Сd3+ Кpd4 (2...Кd5 3. Лf7×) 3. dc×! Но почему бы черным не поставить ферзя, к тому же с шахом?

1...f1Ф+! 2. Кpe3!! Фантастика! У черных десять способов нападения на короля-героя, но ни один из них не спасает. Слон b5 или ладья f6 отражают шах, а открывающаяся при этом фигура батареи объявляет мат.

Автор этой задачи — знаменитый шахматный композитор и один из основоположников занимательной математики Сэм Лойд. Надо сказать, что Стейниц и Лойд хорошо знали друг друга. В конце прошлого века они оба жили в Нью-Йорке и часто встречались в манхеттенском шахматном клубе. Однажды при большом стечении публики между ними было заключено оригинальное пари: Лойд утверждал, что быстрее составит задачу, чем Стейниц ее решит. Тут же принялись за дело. Спустя десять минут Лойд придумал хитрую трехходовку.

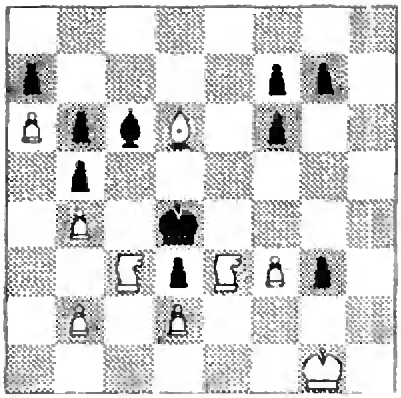


С.Лойд, 1885
Мат в 3 хода

Внешне задача не очень сложна, но Лойд полагал, что обилие вариантов затруднит поиски первого хода. Однако Стейниц разгадал задачу ровно за пять минут.

1. Фe1! попытка 1. Фe2+Кph3 2. Кpf3 отбивалась с помощью 2...e4+, но теперь черные в цугцванге: 1...h3 2. Фf3+, 1...Кpg5 2. Фh3! 1...g6 2. Фf1!, и, наконец, главный вариант **1...g5 2. Кpd5! Кpf5** (2...h3 3. Фe4×.) **3. Фe 4×.**

Мысль о реванше не давала Лойду покоя, и осенью того же года он снова вызвал Стейница на «поединок».



С.Лойд, 1885
Мат в 4 хода

На этот раз Лойд заявил, что сколько бы шахматный король ни размышлял, все равно полного решения этой четырехходовки он не обнаружит.

Так и случилось. Истратив полчаса, Стейниц верно показал первый ход 1. f4 и угрозу 2. Сf8 с последующим 3. С:g7 4. С:f6×, от которой, казалось, нет защиты. Лойд великодушно предложил подумать еще, но дополнительные раздумья ничего нового не принесли. И тогда великий проблемист торжественно показал главный вариант.

1. f4 Сh1!! Теперь намеченное 2. Сf8 g2! 3. С:g7 ведет к пату, и приходится перестраиваться.

2. b3! Грозит 3. Кf5×, а 2...Сe4 не помогает из-за 3. К:b5×.

2...g6 3. Сe7 и **4. С:f6×.**

В этом же варианте раскрывается тонкость ложного следа: 1. b3? Сd7! Отсюда слон сторожит оба опасных поля b5 и f5. 2. f4 g2! 3. Сe7 f5!, и ничего у белых не вышло.

Итак, счет «матча» Стейниц — Лойд 1:1.

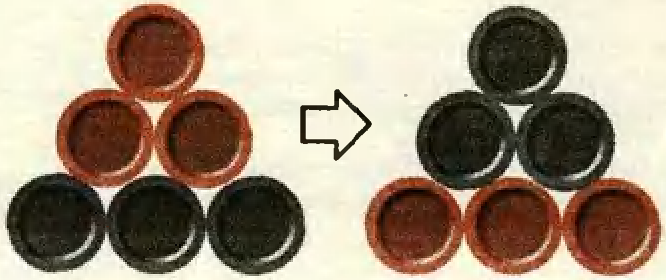
Эта занятная история получила широкую известность, и вот уже около ста лет две неразрывно связанные задачи Лойда занимают свое место в шахматной истории.

Е.Гик

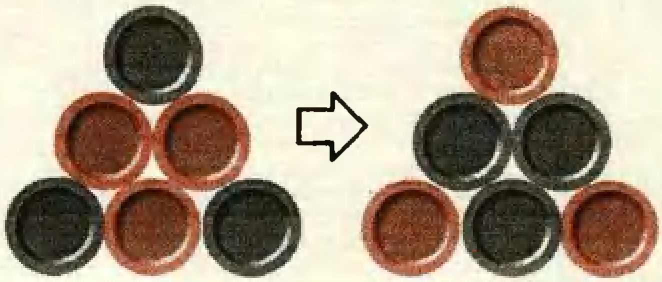
Индекс 70465

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

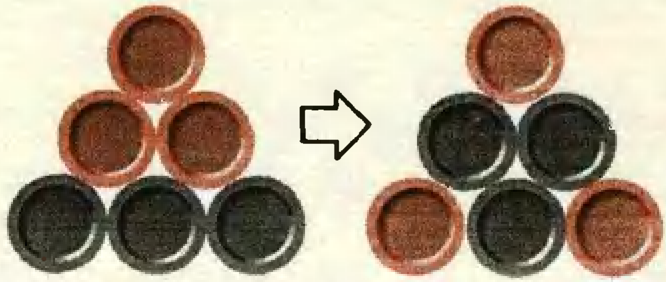
а



б



в



ТРИАДЫ

Хотя в последние годы — после знаменитого изобретения Э. Рубика — новые комбинаторные головоломки появляются довольно часто, обычно они представляют собой довольно хитрые механические конструкции. В продаже их не найти, а самому сделать довольно сложно. Поэтому нам особенно приятно познакомить читателей с новой головоломкой *Сергея Грабарчука* из Ужгорода. Чтобы «сделать» ее, вам нужны только шесть шашек — три одного цвета и три другого. Сложите из них треугольник — один из тех, что изображены на рисунках слева. А теперь, передвигая тройки касающихся друг друга шашек — *триады*, — составьте конфигурации, показанные на соответствующих рисунках справа. При перемещении триады не разрешается поворачивать шашки и поднимать над столом — они должны сдвигаться «плоскопараллельно»; также нельзя касаться трех неподвижных шашек. Однако после каждого хода передвинутая триада должна прикоснуться к одной из остальных шашек.

Автор утверждает, что расположил задачи в порядке усложнения. А как покажется вам?

Если вы справитесь с этими задачами, прелагаем провести небольшое исследование. Допустим, что все шашки разноцветные (или пронумерованы от 1 до 6). Какие перестановки можно получить передвижениями триад?

Еще один вопрос связан с тем, что большой треугольник из шашек после передвижений триад может сместиться относительно исходного положения (это не запрещается). Можно ли решить предложенные задачи так, чтобы этот треугольник остался на месте? Какие перестановки можно получить при этом дополнительном условии?

И последний вопрос: можно ли передвинуть шашки так, чтобы каждая сместилась на один и тот же вектор (т.е., чтобы их относительное расположение осталось прежним), и каким может быть вектор такого сдвига?