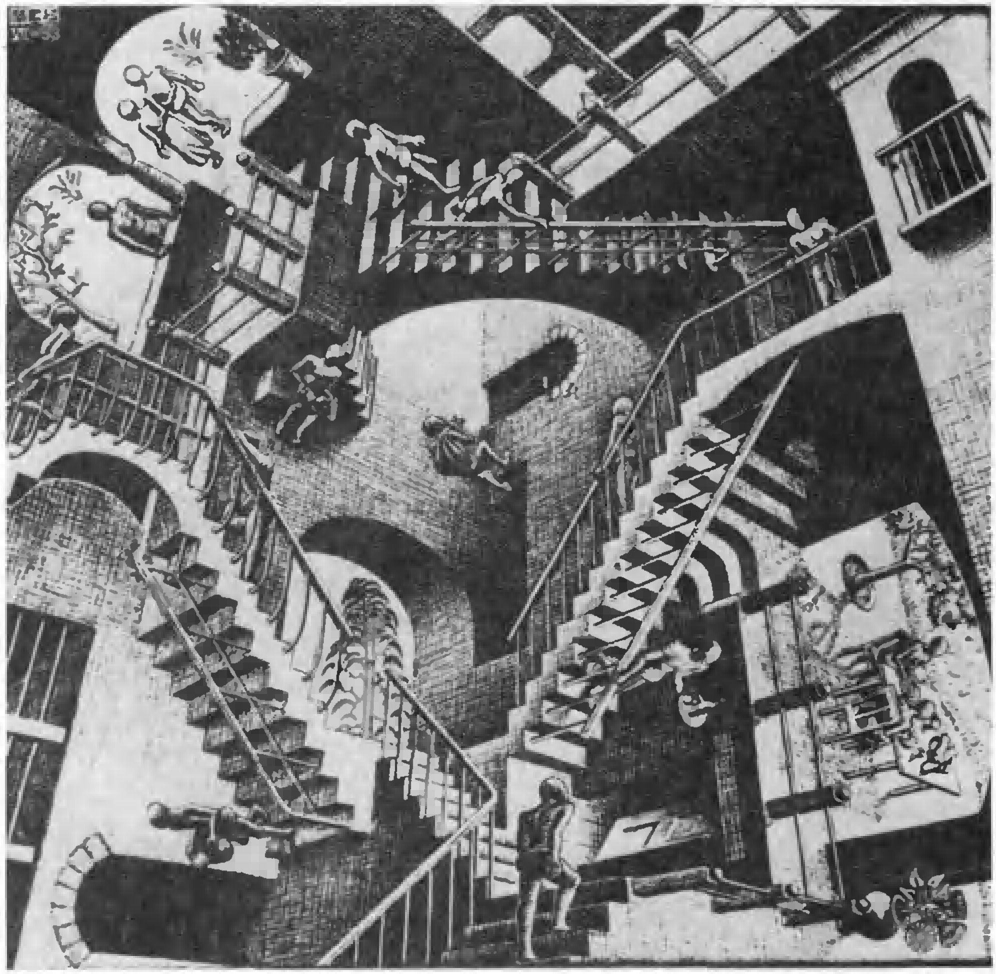
ISSN 0130-2221
ЯНВАРЬ/ФЕВРАЛЬ 1994 · №1

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

Из жизни физиков и физики

ОБРАЗЫ ПРОСТРАНСТВА



«Относительность», М. Эшер (литография, 1953)

Французский мыслитель Блез Паскаль представлял себе видимый мир находящимся на гране двух бесконечностей — «большой» и «малой». Одна из них простирается вовне и являет собой «сферу, центр которой повсюду, в границы — нигде». Другая уходит в глубь вещества, внутрь атома, и движение это проходит через все новые и новые *«вселенные»* со своим *небосводом, планетами,* звездами. Человек, осознавший себя посреди Вселенной, между двух головокружительных бездн, застывает в без-
...вном восхищении перед великимсовершенством мира.
...ландского художника Мориса Корнелиса Эшера
...972) это ощущение не покидало, по-видимому, ни-
...о творчество — непрекращающаяся попытка
...пространства.
...е идет речь? Разве пространство само
...душный объем, лишенный свойств
...бые формы? Оказывается, нет. У
...ая и определенная внутрен-
...й список отвлеченных
...изация.
...времени использу-
...ожный) метод

для передачи на плоскости объемных предметов, называемый прямой перспективой. Эшер остро ощущал тот разрыв, который возникает между живой реальностью и ее плоским изображением. «Разве это не абсурд, — спрашивает он,— нарисовать на бумаге несколько линий и сказать: это дом?» Он прекрасно осознает свою «*беспомощность*» и *тем не менее* снова и снова берется за карандаш. Эшер не отказывается от прямой перспективы, но хладнокровно доводит ее до логического абсурда, например показывает, что с ее помощью можно очень похоже изобразить водяной вечный двигатель («Водопад», 1961). Так он берет своеобразный реванш у трехмерного мира. Глядя на его работы, мы поневоле задумываемся над тем, что давно стало привычным, а потому незаметным.

Мир Эшера парадоксален. Саркастический и едкий наследник знаменитых «чудаков» 19 века века Эдварда Лира и Льюиса Кэрролла, человек резкого и своеобразного ума, он шел в искусстве своим путем. Его произведения понятны всем, и все же тот, чье мышление воспитано математикой, поймет их глубже. Ведь творчество Эшера балансирует на тонкой грани, отделяющей Искусство от Науки.

А. Ярин

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

ЯНВАРЬ/ФЕВРАЛЬ · 1994 · №1

В номере:

Квант

Учредители — Президиум РАН, НПП «Бюро Квантум»
Издатель — НПП «Бюро Квантум»

Бюро Квантум

Из жизни физиков и физики

Об одной Зимней школе по теоретической физике

М. КАГАНОВ

НА ГРАНИЦЕ между Польшей и Чехией, в невысоких горах, расположился небольшой уютный курортный городок Кудова Здруй. «Здруй» по-польски — родник, источник. В середине февраля прошлого года один из отелей городка — «Гварек»[1] — заполнили не отдыхающие, а физики из многих стран мира: из Европы, Америки, один физик приехал даже из Африки — из Южно-Африканской Республики. В Кудову Здруй они приехали на 29-ю Зимнюю школу по теоретической физике. Внушительный номер показывает, что школы традиционны. Институт теоретической физики Вроцлавского университета с 1963 года ежегодно проводит Зимние школы. Был один пропуск — в 1982 году. Он был вызван военным положением, объявленным в Польше в попытке сохранить коммунистический режим. До этого года местом проведения Школ была не Кудова Здруй, а другой курортный (лыжный) городок в горах — Карпач. Поэтому физики по привычке и эту (29-ю) Школу называли «Карпач».

Тематика Школ охватывает всю современную физику. Каждый год материалы очередной Школы (лекции, выступления) публикуются в виде книги. Листая выпущенные тома, перелистываешь историю послевоенной физики. Как правило, каждая Школа посвящена одной — двум проблемам. В этой Школе главное место занимали фононы, хотя заметная часть лекций была посвящена модным в последние годы

[1] *Точное значение слова Гварек мне не удалось узнать. Что-то связанное с горняками.*

системам с низкой размерностью: двумерному и одномерному электронным газам.

Несколько разъясняющих слов.

Фононы — кванты колебаний атомов в твердых телах. Тепловое движение атомов в твердом теле осуществляется в виде волн колебаний, а волна очень напоминает квантовую частицу. Кванты таких колебаний называют фонОНами. Суффикс «ОН» подчеркивает принадлежность к классу частиц. Вспомните: электрОН, протОН, нейтрОН... Корень — «фон» — означает по-гречески звук. Фонон — «частица звука». Правда, чаще фононы называют не частицами, а квазичастицами (почти частицами, якобы частицами). Все же фонон существует только в твердом теле, в свободное пространство его не выпустишь.

Интерес к фононам не удивителен: они есть в каждом (буквально) твердом теле. Их число тем больше, чем выше температура. Они — главный переносчик тепла в твердом теле и, вообще, ответственны за многие свойства твердых тел. Вот несколько загадочная фраза: теплоемкость твердого тела — это теплоемкость газа фононов. Может быть, она поможет понять интерес физиков к свойствам фононов. Стоит еще добавить, что в последнее время делаются попытки утилизировать наши знания о фононах — создать приборы, в которых активным элементом служат фононы.

Слова «двумерный газ», «одномерный газ» могут показаться по меньшей мере странными. Кто не знает, что наш мир трехмерен, а газ надо содержать в трехмерном сосуде, т.е. сосуде, имеющем длину, ширину и высоту, иначе атомы газа разлетятся во все стороны и исследовать будет нечего. Правда, вдруг приходит на ум наша атмосфера, силой тяжести прижатая к поверхности Земли. Если забыть о далекой ионосфере, то высота атмосферы над Землей всего 100 – 200 км, а радиус Земли 6400 км. Атмосфера над поверхностью Земли — неплохая модель двумерного газа. Двумерный и одномерный газы электронов на поверхности и внутри твердого тела создаются по тому же принципу, по которому существует атмосфера. Конечно, вместо силы тяжести действуют электрические силы. Они не позволяют электронам удаляться от поверхности тела или от определенной поверхности внутри тела, разрешая им свободно двигаться вдоль поверхности (плоскости) или даже только вдоль специально созданного канала. Неплохие модели двумерного и одномерного газов электронов — металлическая пленка и, соответственно, проволока. Вы знаете, конечно, что в металле есть свободные электроны? Чтобы электроны в металлической пленке или в проволоке могли считаться двумерным или одномерным газом, толщина пленки или проволоки должна быть около десяти ангстрем ($1\,\text{Å} = 10^{-8}$ см).

Двумерный и одномерный электронные газы надо специально создавать. Создавать, а лишь потом изучать их свойства. Интерес к ним физиков — как бы реакция на запросы практики. Дело в том, что они — обязательные атрибуты современных полупроводниковых приборов. Например, транзистор выполняет свою роль в вашем радиоприемнике или телевизоре только потому, что в нем есть двумерный электронный газ.

Лекторы теперь редко пользуются доской. Правда, в лекционном зале Школы доска была. Белая. На ней изредка писали, писали фломастерами. Написанное легко стиралось матерчатой подушечкой. Руки не пачкались мелом, а лектор после лекции не был похож на мукомола. На Школу лекторы приехали со специально заготовленными пленками. То, что на них изображено, проектор «перенесет» на экран. Проектор мощный. Нет необходимости тушить свет. На пленках формулы, рисунки, иногда даже текст. Если лекция посвящена нескольким вопросам, обязательно первая пленка — оглавление. Возможно, кто-то из вас уже бывал на лекциях, где вместо грифельной доски — проектор?

Во время одной из лекций лектор случайно оказался на пути потока света из проектора, и на его рубашке появился красивый многоцветный узор. Я, как и, наверное, другие слушатели, подумал: на этой Школе необычно много красивого иллюстративного материала. Дело в том, что физики научились видеть фононы. Наверное, слова «видеть фононы» надо было взять в кавычки. Видим мы, конечно, не сами фононы, а результат их воздействия на регистрирующие приборы, после обработки и расшифровки изображенный на дисплее компьютера. Чтобы красивые картинки, которые, пожалуй, составляют главное содержание этой статьи, были понятны, придется сказать несколько слов о том, что мы хотим увидеть.

Начнем издалека.

Энергию свободной частицы ε можно выражать как через скорость $\vec{v}$ ($\varepsilon = mv^2/2$), так и через импульс $\vec{p}$ ($\varepsilon = p^2/2m$). Импульс и скорость связаны таким простым соотношением ($\vec{p} = m\vec{v}$), что кажется безразличным, какую из этих величин использовать. К тому же векторы $\vec{p}$ и $\vec{v}$ имеют одинаковые направления. Отметим, что во все эти соотношения входит всего один параметр частицы — ее масса m.

Фонон — не обычная частица, а квазичастица. Фонон движется в кристалле, и на его свойствах сказывается неизотропность кристалла, т.е. неравноправность различных направлений (пустое пространство, конечно, изотропно). Нам важны сейчас две особенности фононов. Во-первых, энергия фононов зависит не только от величины импульса, но и от его направления. Второе свойство тесно связано с первым. Оказывается, импульс и скорость фонона могут не совпадать по направлению.[2]

Обсудим, каким образом можно описать зависимость энергии фонона от его импульса. Именно эта зависимость представляет фундаментальный интерес при изучении свойств фононов. Так как она может быть очень сложной (взгляните на иллюстрации!), то очень важно иметь наглядный способ ее описания. Поступим следующим образом. Введем новое трехмерное пространство. Чтобы отличать от обычного, назовем его $\vec{p}$-пространством (а обычное

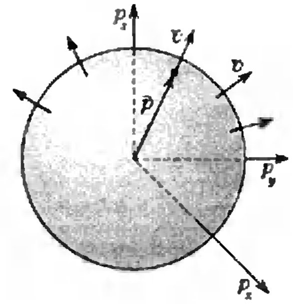


Рис. 1. В случае свободных частиц поверхность равной энергии в импульсном $\vec{p}$-пространстве — сфера. Стрелки, нормальные к поверхности, — скорости частиц

пространство будем иногда называть $\vec{r}$-пространством). Построим декартову систему координат, на осях которой будем откладывать проекции вектора $\vec{p}$. Это пространство и эта координатная система удобны для изображения зависимости энергии частицы от направления ее импульса. Удобны, если рисовать поверхности равной энергии (изоэнергетические поверхности). А чтобы увидеть, что происходит при изменении энергии, рисуют несколько картинок, для разных ε. Например, для свободных частиц изоэнергетические поверхности — сферы радиусом $p_\varepsilon = \sqrt{2m\varepsilon}$ (рис. 1).

[2] *Конечно, для фононов не действует обычное определение $p = mv$. К сожалению, мы не можем здесь дать строгих определений.*

Обратите внимание на стрелки, нарисованные в разных точках сферы. Эти стрелки изображают направление скорости частиц. Они направлены по

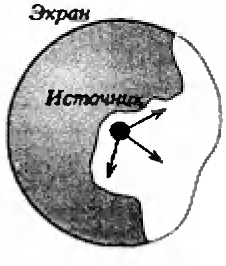


Рис. 2. Приспособление, позволяющее увидеть, по каким направлениям вылетают частицы из точечного источника

радиусу, т.е. параллельны соответствующему вектору $\vec{p}$. А можно ли найти направление скорости в случае фононов, когда изоэнергетическая поверхность имеет весьма сложную форму? Оказывается, можно. Общее правило, верное как для частиц, так и для квазичастиц, заключается в следующем: вектор скорости направлен по нормали к изоэнергетической поверхности, проведенной через данную точку $\vec{p}$-пространства. Легко понять, что если поверхность равной энергии имеет форму, отличную от сферы, то направление $\vec{v}$ может не совпадать с направлением $\vec{p}$.[3] Отметим также, что, построив изоэнергетические поверхности для разных ε, можно определить и величину скорости фононов в каждой точке $\vec{p}$-пространства (т.е. вычислить длину «стрелок»); однако, объяснять это правило мы здесь не будем.

Выяснить, как энергия фонона зависит от импульса, или, что эквивалентно, получить изображение изоэнергетических поверхностей — это и означает «увидеть фононы». Как же можно извлечь такую информацию из результатов эксперимента?

Представим себе такое несколько странное устройство (оно изображено на рисунке 2): из центра во все стороны вылетают частицы с одной и той же энергией и, долетев до сферического экрана, оставляют на нем свой след, скажем темное пятнышко. Что мы увидим на экране через достаточно большой промежуток времени? Если во все стороны частицы летят с одинаковой интенсивностью, то, естественно, весь экран окажется однородно темным.

Это «Если...» нуждается в разъяснении. Источники частиц бывают разные. Легко представить себе пушку, которая стреляет с определенной скоростью во вполне определенном направлении. Если частицы — электроны или ионы, то так и говорят — электронная или ионная пушка. Такие источники мы рассматривать не будем.

Источники, о которых идет речь здесь, назовем тепловыми. Главное в устройстве источника — маленькая область, нагретая до высокой температуры. В нашем случае, например, это маленький шарик, с поверхности которого вылетают «горячие» частицы. Естественно, число частиц, вылетающих в данном направлении, не зависит от направления. Итак, в этом случае, как мы сказали, весь экран будет однородно темным. Запомним это и вернемся к фононам.

Говоря о фононном источнике, следует быть более аккуратным. Что должна означать фраза «Фононы летят во всех направлениях»? Оказывается, она описывает ситуацию не в обычном, а в $\vec{p}$-пространстве. Более точно, не скорости вылетающих фононов, а их импульсы имеют совершенно произвольные направления. А как же разлетаются фононы в обычном, $\vec{r}$-пространстве? Что мы увидим на нашем воображаемом сферическом экране? Ответ зависит от того, какую форму имеет поверхность равной энергии в $\vec{p}$-пространстве. Напомним, что все вылетающие фононы имеют одинаковую энергию.

Чтобы понять, как картинка, получаемая на экране, зависит от формы изоэнергетической поверхности, рассмотрим два простых модельных примера. Давайте для начала предположим, что поверхность равной энергии в $\vec{p}$-пространстве — куб (рис. 3,*а*). Пусть в центре нашего устройства имеется тепловой источник этих странных «кубических» фононов. Это по-прежнему — горячий шарик, но испускает он не обычные частицы, а «кубические» фононы. Они летят так, как им положено, — по направлению скорости, которая всегда ортогональна поверхности равной энергии (какова бы ни была форма этой поверхности). Значит, скорость «кубических» фононов направлена по одному из шести направлений — ортогонально граням куба. Куб находится в $\vec{p}$-пространстве, но скорости $\vec{v}$ — во вполне реальном $\vec{r}$-пространстве (см. сноску 3). То есть от источника (горячего шарика) «кубические» фононы будут лететь по шести различным направлениям, и значит, в данном случае на экране будет всего 6 точек (рис. 3,*б*).

Усложним связь между энергией и импульсом фононов. Представим себе, что изоэнергетическая поверхность — цилиндр со сглаженными торцами (рис. 4,*а*). Как видно, фононы летят во все стороны, но на экватор экрана летит много фононов, а во все остальные точки мало. Если потемнение экрана пропорционально числу попавших на экран фононов, то на слегка потемнев-

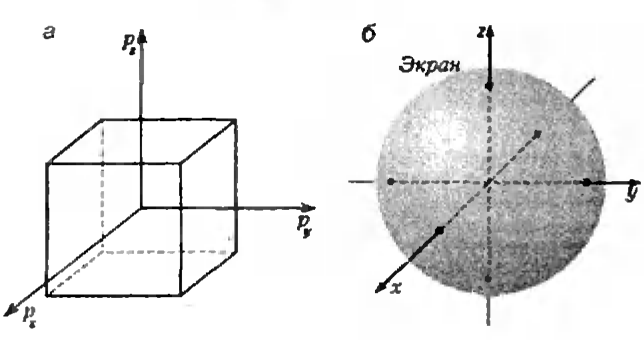


Рис. 3. Если бы изоэнергетическая поверхность фононов имела форму куба (а), то частицы из точечного источника летели бы по шести направлениям и оставляли на экране шесть точек (б)

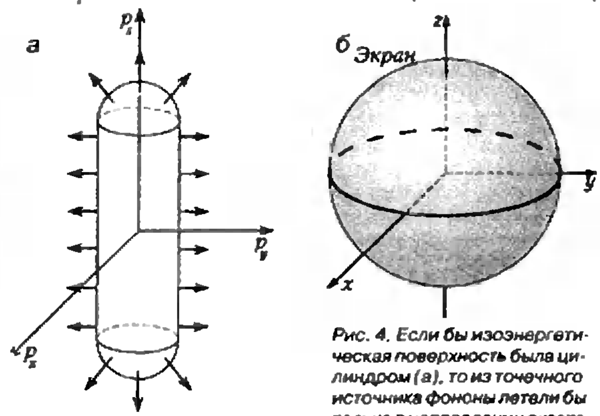


Рис. 4. Если бы изоэнергетическая поверхность была цилиндром (а), то из точечного источника фононы летели бы только в направлении экватора сферического экрана (б)

---

[3] *Обратите внимание: скорость $\vec{v}$ как бы связывает два пространства. Вектор скорости ортогонален поверхности равной энергии в $\vec{p}$-пространстве и определяет движение частицы (фонона) в $\vec{r}$-пространстве.*

шем фоне мы увидим темную линию экватора (рис. 4,*б*). Шесть точек в первом случае и темная линия на более светлом фоне во втором случае — своеобразные портреты фононов.

Таких простых зависимостей энергии фонона от компонент его импульса, как мы придумали, конечно, не бывает. Нет больших плоских участков на поверхностях постоянной энергии, откуда все фононы летят в одну точку на экране, нет строго цилиндрических участков, след фононов с которых выделяет линию на экране. Однако есть маленькие участки уплощения, есть участки, которые близки к цилиндрам. Все это делает картины на экране очень сложными. На рисунках 5, 6 показано, какие картинки получаются в случае кристаллов германия (Ge) и арсенида галлия (GaAs). Рисунки сделал компьютер «под руководством» аспиранта Института теоретической физики Вроцлавского университета Войцеха Ганьчи.[4] Расшифровывая их, удается установить, как выглядят поверхности равной энергии. На рисунке 7 изображены изоэнергетические поверхности фононов двух типов в кристалле GaAs. Они получены японскими физиками С.Тамурой и Т.Харадой. Для сравнения, на рисунке 8 вы можете полюбоваться на изоэнергетические поверхности фононов для... обычной меди (для трех разных значений энергии), полученные сотрудником Института физических проблем РАН А.С.Семеновым.

Цикл лекций одного из участников Школы — профессора из ЮАР А.Г.Эвери так и назывался «Изображение фононов». Он собрал и прокомментировал огромный экспериментальный материал.

Явление, которому на Школе было уделено так много времени, называют фокусировкой фононов. Слова «фокусировка фононов» могут привести к недоразумению. Никаких приспособлений для фокусировки потока фононов не создается. Лучше было бы говорить о самофокусировке. Интенсивность потока фононов в разных направлениях различна как следствие формы изоэнергетической поверхности фононов, а они (эти поверхности) очень вычурны. Поэтому и картинки, которые изображают измеренную или вычисленную интенсивность потоков фононов в разных направлениях, столь нетривиальны.

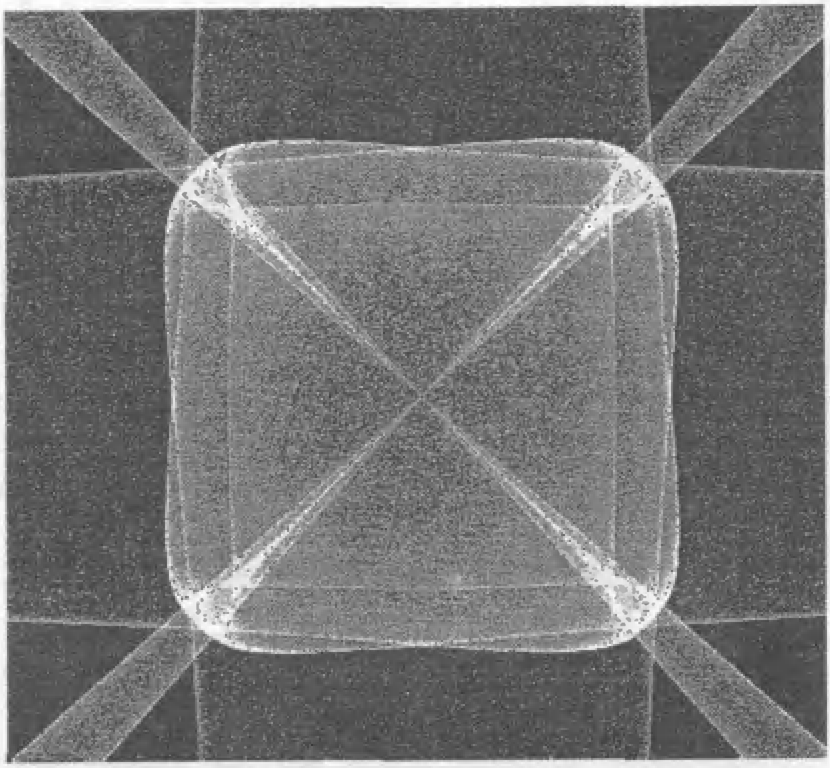


Рис. 5. Результат фокусировки фононов в германии. Белые линии — места, куда попало больше всего фононов

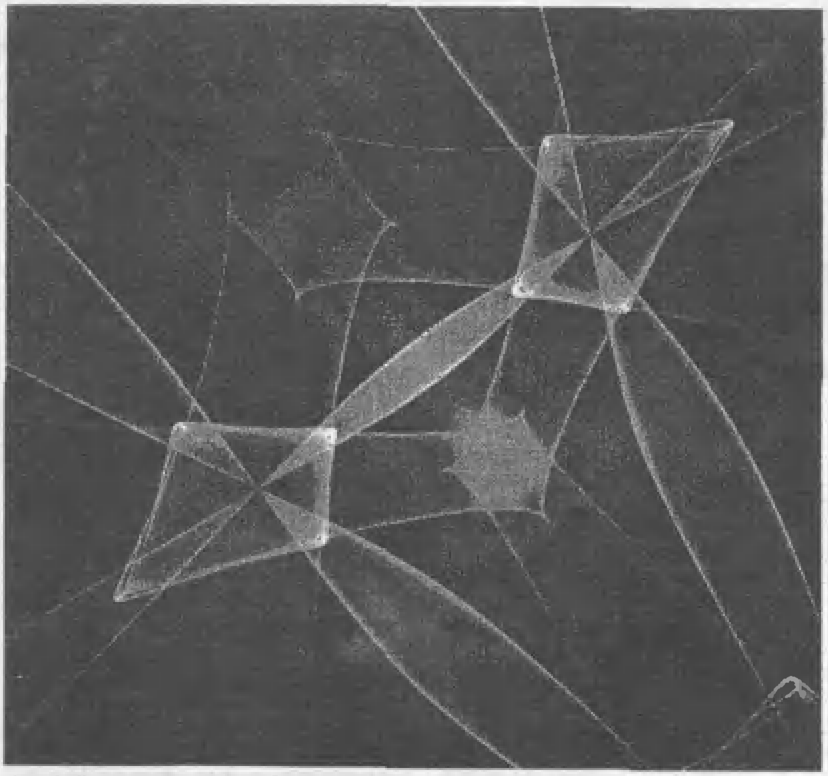


Рис. 6. То же, что на рисунке 5, но для кристалла арсенида галлия

[4] *Научить компьютер рисовать совсем непросто. Задача «обучения компьютера» оказалась настолько сложной, что Войцех не смог обойтись без помощи. На помощь ему пришел ученик предпоследнего класса лицея (тоже во Вроцлаве) Лука Калек.*

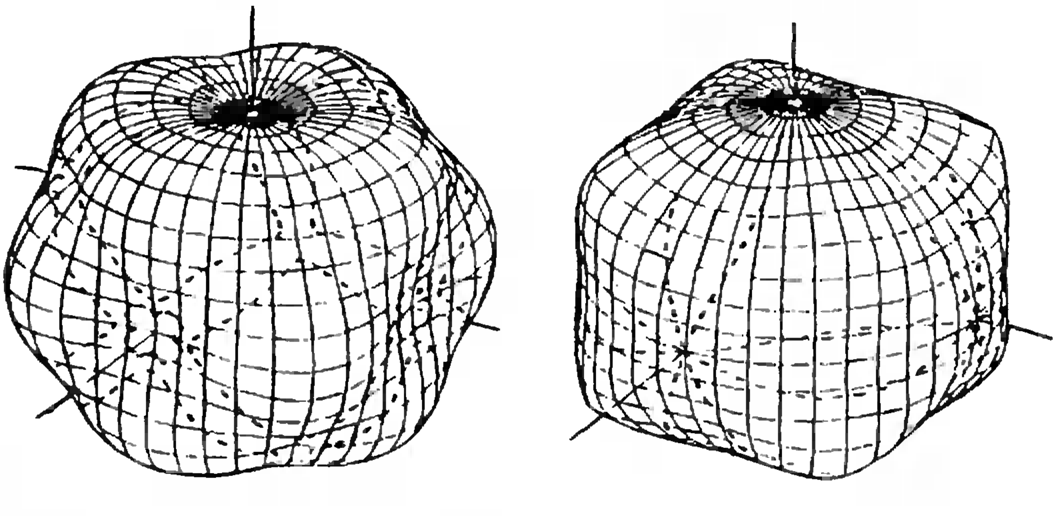


Рис. 7. Изоэнергетические поверхности двух видов фононов в кристалле арсенида галлия

Мы почти ничего не сказали о фактической конструкции «устройств», позволяющих увидеть фононы; не рассказали, как устроены источник фононов и их детектор (экран). Это не входит в

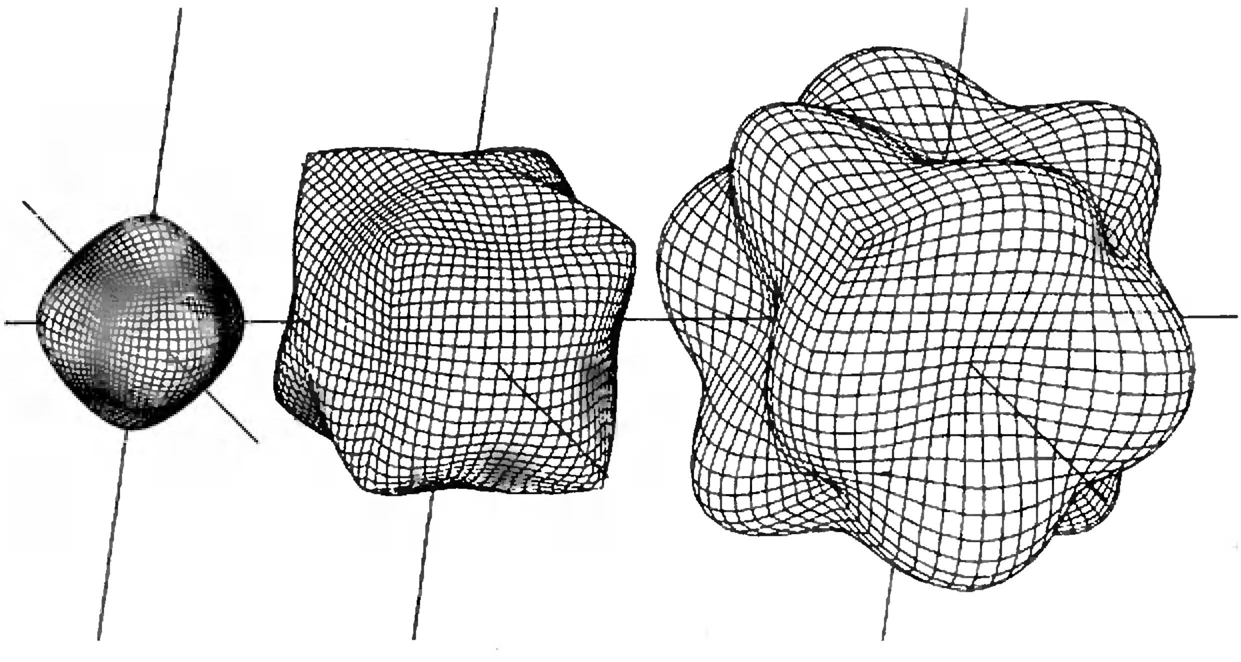


Рис. 8. Изоэнергетические поверхности фононов в кристалле меди

нашу задачу. И на Школе об этом почти не говорили. Ведь Школа — по теоретической физике. Отметим только: «устройства» разнообразны. Иногда источником фононов служит маленькое пятнышко на металлической пленке, разогретой лучом лазера, а детектором — сверхпроводящая проволочка. Но всегда главный элемент «устройства» — несомненно сам исследуемый кристалл, в котором рождаются и существуют (т.е. движутся) фононы. Источник фононов, как правило, расположен на одной стороне кристаллической пластины, а детектор — на другой. Кристалл должен быть таким совершенным, чтобы фононы не имели на своем пути никаких препятствий и непосредственно из источника попадали на детектор. Как пули — в цель. Их так и называют — баллистическими. Иначе не будет известно, откуда они прилетели, какой участок поверхности равной энергии представляют. По атомным масштабам фононам от источника до детектора надо пролетать огромное расстояние — несколько миллиметров. На своем пути они встретят более 10 миллионов атомных плоскостей. К счастью, если в кристалле нет никаких дефектов (чужеродных атомов и/или нарушений в расположении своих собственных атомов), если к тому же атомы кристалла колеблются не слишком интенсивно, то фонон пролетит этот «огромный» путь, как пуля в пустоте — без столкновений, ведущих к потере направления полета. Значит, кристалл не только должен быть идеального качества, но и очень холодным, чтобы уменьшить интенсивность колебаний. Эксперименты, позволяющие увидеть фононы, требуют температур, близких к абсолютному нулю.

О некоторых рисунках мы пока ничего не сказали. На рисунке 9 — результат наблюдения фононной фокусировки поверхностных фононов в кремнии (Si) и GaAs (фононы, двигающиеся только вдоль поверхности, есть в каждом твердом теле). Картина фононной фокусировки в данном случае исследовалась с помощью остроумной и идейно простой методики. Когда вдоль поверхности движется фонон, то поверхность колеблется, и если на нее что-то положить, колеблющаяся поверхность может это что-то сбросить. Авторы (Ал. Коломенский, А.А. Мазнев из Института общей физики РАН[5]) посыпали поверхность Si и GaAs частицами Al_2O_3 диаметром 1—2 микрона — запылили ее. На рисунке 9 приведена фотография запыленных поверхностей после возбуждения поверхностных фононов. Темные области на фотографии — участки, очищенные от микрочастиц.

Фокусировка фононов не случайно одна из тем Школы. Ее теоретическими аспектами занимаются в Институте теоретической физики Вроцлавского университета.[6]

Я не собираюсь рассказывать о всех лекциях, прочитанных на Школе, или даже их перечислять. Мне хочется, чтобы читатель, читая статью и разглядывая картинки, поверил, что на Школе было интересно. И лекторам, и слушателям. Особенно если учесть, что, прочитав лекцию, лектор становился слушателем. Обстановка на Школе свободная. Каждый может задать вопрос, не боясь перебить лектора. Непосредственно во время лекции может даже возникнуть дискуссия. Одежда участников подчеркивает демократичность обстановки. Официальные костюмы и галстуки были надеты только на время банкета. Одна из традиций Школы — костер, экскурсии по окрестностям; в Карпаче (было) — катание на горных лыжах. Но, пожалуй, интереснее не перечислять развлечения (они есть на всех конференциях, школах, съездах), а рассказать о действительно специфической традиции карпачских школ — о Киндергартене. Да, о детском саде (Kindergarten по-немецки — детский сад). Так называют идущую параллельно Школе теоретической физики студенческую Школу, организуемую для себя студентами физического факультета Вроцлавского университета. В Киндергартене те же лекторы, что и во взрослой Школе. Только лекции им приходится читать, учитывая уровень знаний своих слушателей. А студенты из первых рук узнают новости той науки, которой они решили посвятить свою жизнь.

а

б

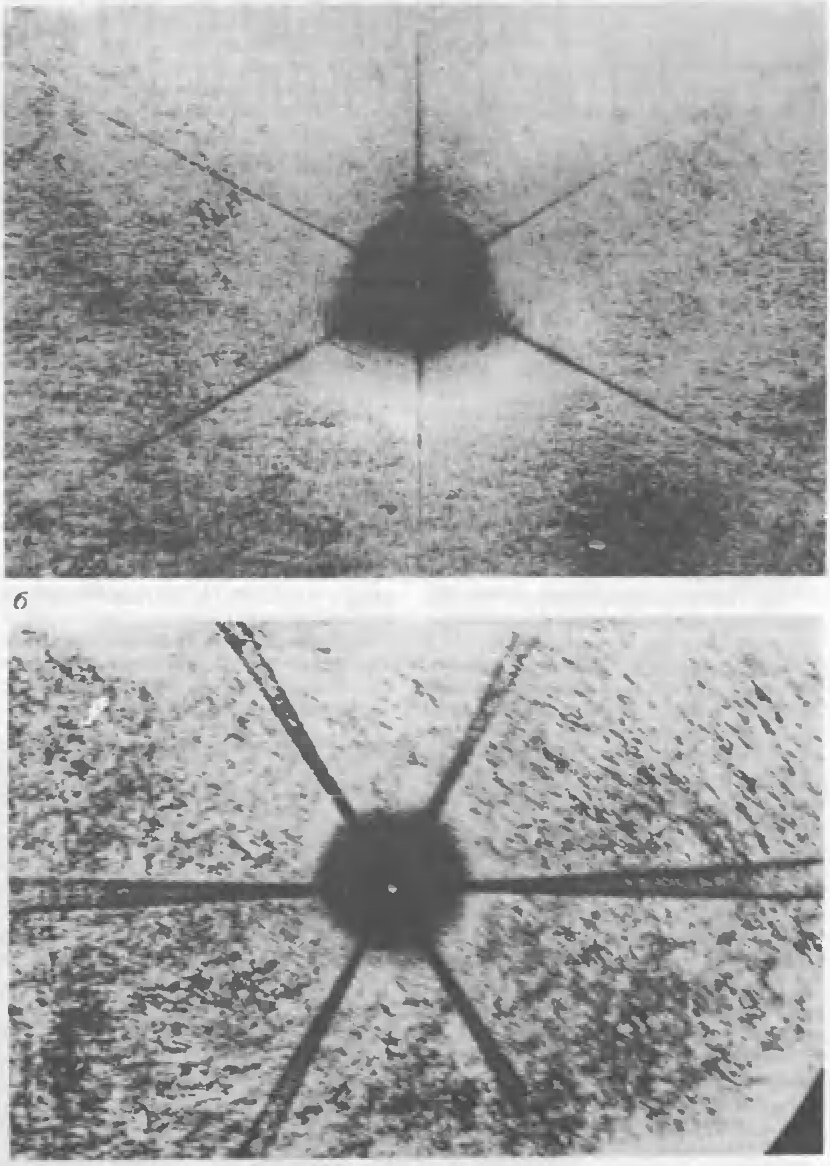


Рис. 9. Результат фокусировки поверхностных фононов, испущенных из белого пятнышка на поверхности кремния (а) и арсенида галлия (б). Темные участки — места на поверхности, где поток фононов особенно интенсивен

---

[5] *А.А. Мазнев выступил на школе со стендовым (постерским) докладом. Есть такая форма доклада: автор вывешивает на стенде плакат (POSTER) с кратким содержанием доклада и, стоя около стенда, отвечает на возникающие вопросы. Доклад А.А. Мазнева вызвал живой интерес участников школы.*

[6] *Если фокусировка фононов вас заинтересовала, прочтите статью М. Каганова и Т. Пашкевича «Картины, нарисованные фононами» («Природа», 1992, №2).*

Интервью с Михаилом Михайловичем Постниковым

Михаил Михайлович Постников — всемирно известный математик, лауреат Ленинской премии, один из основоположников алгебраической топологии — науки, бурно развивающейся в настоящее время. У Михаила Михайловича нестандартный взгляд на многие вопросы, как математики, так и обычной жизни, поэтому редакция журнала «Квант» попросила его дать интервью для своих читателей.

Михаил Михайлович Постников ходил по коридорам мехмата МГУ и довольно громко рассказывал нашим корреспондентам о своей жизни. Пробегавшие мимо студенты притормаживали и прислушивались. И было что послушать: ведь Михаил Михайлович — это живая легенда факультета, ему есть чем поделиться, и говорит он замечательно. Впрочем, об этом вы можете судить сами: беседа М.М.Постникова с А.П.Савиным и А.Б.Сосинским — перед вами.

А.Б. *Когда и как получилось, что Вы увлеклись математикой? Что повлияло: семья, школа, кружки?*

М.М. Ни кружки, ни школа, ни семья. Это произошло очень медленно. Я всегда был большой книгочей и интересовался разными вещами, читал книги по разным наукам, в том числе и по математике. Помню, в пятом-шестом классе мне попалась книга Комарова «Высшая математика», том 2, где начинается дифференцирование функций нескольких переменных. Я прочел несколько страниц и абсолютно ничего не понял, чем был несколько травмирован. Но в журнальчике «Математическое просвещение» мне было все понятно, можно читать. Позже мне попалась книжка Эйлера «Анализ бесконечно малых» (она, между прочим, хорошо написана), благодаря которой я понял, что такое анализ. Я заинтересовался, стал читать литературу по математике, решать задачки, но в провинции, в Перми, заниматься со мной было совершенно некому. После восьмого класса по некоторым причинам я был изгнан из всех школ, мне было некуда деваться, и я поступил в университет.

А.Б. *На мехмат МГУ?*

М.М. Нет, в Пермский университет. Я поступил в 1942 году, а в 1943-м перевелся в МГУ.

А.Б. *Есть легенда, что Вы не пропустили ни одного курса и спецкурса и не хватило зачетной книжки, чтобы проставить все экзамены.*

М.М. Здесь кое-что напутано. Я учился в МГУ с 1943 года: время было военное, голодное. У меня была карточка, по которой ежедневно давали один обед в столовой. На завтрак я выпивал горячей воды с кусочком оставшегося от обеда хлеба, таким же был и ужин. Поэтому жизнь моя протекала так: утром я вставал и ехал из общежития в университет слушать лекции. После обеда делать было абсолютно нечего, а есть хотелось. Но так как университет был разбомблен, лекции для третьего курса читались после обеда, и я шел туда. После лекций есть хотелось по-прежнему, а день все не кончался. К счастью, вечером начинались спецкурсы. Сами понимаете, если прослушал курс, то нужно сдать. Поэтому я все сдавал. Весной 1944 года я сдал экзамены за II и III курс и стал ходить на IV и V, а в 1945 году сдал и их. Сделал я это не из спортивного интереса, а исключительно чтобы заглушить чувство голода. Все, что читалось, я слушал и сдавал, начиная с математической логики и кончая теорией спецфункций, — всего 17 спецкурсов. В зачетке они уместились, а вот во вкладыше диплома действительно не хватило места.

А.Б. *Кого Вы считаете своим учителем? Кто из математиков старшего поколения оказал на Вас наибольшее влияние?*

М.М. Безусловно, это Лев Семенович Понтрягин. Существует легенда о том, как я стал его учеником, на самом деле — чистая правда.

Я слушал лекции П.С.Александрова, ходил на семинары к Л.А.Люстернику и Л.Э.Эльсгольцу, делал там доклады о топологических методах в вариационном исчислении. И вот за три месяца до окончания пятого курса Л.Э.Эльсгольц, который был в то время замдекана по учебной работе, подошел ко мне и говорит: «Постников, вам нужно иметь научного руководителя. Кого вы хотите — Лазаря Ароновича Люстерника или Павла Сергеевича Александрова?» Я человек в жизни очень удачливый, потому что в моменты, когда нужно было принимать ответственные решения, я никогда не колебался ни секунды и говорил не думая. Вот и тогда я ответил: «Лев Семенович Понтрягин», — хотя до этого с Понтрягиным никогда не говорил, а только слушал его лекции, даже вопросы ему никогда не задавал. Эльсгольц удивился, но записал. На следующий день я встречаю Понтрягина и говорю ему: «Здравствуйте, Лев Семенович, моя фамилия Постников. Я сказал в деканате, что Вы мой научный руководитель.» Лев Семенович был несколько удивлен, но ответил: «Приходите, поговорим.» Так я стал его учеником.

Он дал мне необыкновенно много. Лев Семенович был основательный математик, я не скажу гениальный (соображающих математиков много), а именно основательный — если он что-нибудь делал, он делал это, полностью продумав. Но у него был большой недостаток — он чересчур добросовестно относился к своим обязанностям научного руководителя и считал, что его ученик должен кончить аспирантуру с диссертацией и обязательно с хорошей диссертацией. Но как этого добиться? При его физическом недостатке (Лев Семенович в детстве потерял зрение) ему было тяжело изучать неизвестную тему. Поэтому он давал своим ученикам в качестве тем теоремы, доказательства которых он знал. Это полностью снимало все трудности, поскольку в результате диссертация была верная и хорошая. И вот он мне дал какую-то тему (уже забыл, какую именно). Каждую неделю я приходил к нему домой разговаривать часа на два...

А.Б. Это установили Вы?

М.М. Нет, это установил он. Поскольку я был руководимым, то обязан был отчитываться. Так вот, однажды во время беседы мне стало ясно, что он все знает о том, что я рассказываю. Я промолчал, вернулся домой, взял статью Уайтхеда, которую в это время читал, и сам выцарапал оттуда совсем другую задачу. За один вечер я понял, как ее решать. На следующей неделе прихожу к Понтрягину и рассказываю... Ой, боже мой, как он был тогда на меня зол!

А.П. Зол?

М.М. Конечно! Ведь ему теперь нужно было начать понимать, верно все это или неверно, хорошо это или нехорошо. Кроме того, работу придется прочесть, когда она будет написана. Это трудно. В конце концов все равно я написал и защитил диссертацию. Оппонентами у меня были Курош и Александров, но Лев Семенович сказал: «Пусть будет еще Рохлин, чтобы хотя бы один человек прочитал диссертацию и проверил ее.» Итак, на защите моей кандидатской диссертация было три оппонента-доктора.

Куроша я также считаю своим учителем. В 1942 году он читал замечательные лекции по линейной алгебре. Они мне дико понравились. Я записывал быстро, запишу, а он все повторяет, разъясняет. Мне было скучно, и я развлекался тем, что читал книгу — постороннюю, конечно. Потом прихожу к Курошу вместе с другими желающими досрочно сдать экзамен (чтобы уехать на экзаменационную сессию домой). Получаю вопрос и говорю: «Я готов.» «Погодите, пока я освобожусь», — отвечает Курош. Тогда я спрашиваю: «Можно пока почитать книжку?» — «Пожалуйста. Ведь вы у меня на лекции все время читаете.»

Потом недели через три-четыре я пришел к нему на семинар и вскоре стал его сверхактивным участником, т.е. всегда слушал, всегда выступал, всегда понимал, что говорят. Если вы бывали у меня на семинаре, то знаете, как я себя веду: пока не пойму, не отстану. То же самое было у Куроша. Ему это нравилось — хоть один человек на семинаре слушает, — и он меня очень ценил. Я там делал доклады по вещам, которые только что появились: категории, гомологическая алгебра. А в 1953 году, 10 декабря, защитил докторскую диссертацию.

А.Б. Именно на это время пришлись первые робкие попытки западных математиков проникнуть за «железный занавес»...

М.М. Да, первым посещением иностранными учеными Советского Союза после 1936 года был приезд делегации лондонского Королевского общества, которым руководил Дж. Бернал. В ее составе был Уайтхед (его также можно считать моим учителем, поскольку я все его работы знаю и неоднократно их развивал). Происходили разные доклады. Уайтхед начал свой доклад с заявления, что будет рассказывать о работах Постникова (в своей собственной интерпретации)...

Я уже говорил, что свою докторскую диссертацию я защитил 10 декабря 1953 года. Оппонентами были П.С.Александров, А.Г.Курош и М.Ф.Бокштейн. На этой защите Павел Сергеевич произнес: «Вот я читаю работы Хопфа. Трудно читать, очень трудно. Но когда дочитаешь, то оказываешься на высоком холме, откуда прекрасный вид. А когда читаешь работы Постникова, лезешь сквозь густой лес, покрытый лианами, и в конце концов оказываешься в глухой чаще, где ничего не видно.» Меня спасло то, что книжку Кагана о Лобачевском я прочел лишь через неделю после защиты. Там приведено мнение Бахмана о работах Лобачевского: «Когда читаешь работы Лобачевского, то это подобно пролезанию сквозь тяжелый лес, и когда кончаешь, то оказываешься в глухой чаще.» Павел Сергеевич просто сдул эту мысль. Если бы я это знал, не удержался бы и обязательно сказал, и был бы дикий скандал из-за того, что я сравниваю себя с Лобачевским.

А.Б. Я знаю, что Вы интересуетесь играми, но не математической теорией игр, а шахматами, го, бриджем и т.д. Связано ли это с Вашей профессией математика?

М.М. Не думаю, что это связано с математикой, просто с детства мне был свойствен широкий круг увлечений, в том числе и играми. Я с удовольствием читаю последнюю страницу вашего журнала, на которой помещаются головоломки, и сам собрал большую коллекцию головоломок. Я и историей интересуюсь, а как-то раз написал статью по философии.

А.П. О чем она? Где опубликована?

М.М. В «Литературной газете», лет десять назад. «В плену нечетких метафор». Я написал о том, что такое математика, какова ее роль и каково ее место в системе всех наук, и впервые объяснил, что же такое математика.

А.Б. Как Вы относитесь к отъезду за границу многих наших ученых? Не погибнет ли московская математическая школа?

М.М. На первый вопрос я отвечу так. Человек должен жить там, где он хочет, и так, как он хочет. Вопреки распространенной у нас в России точке зрения, я считаю, что государство должно заботиться о человеке, а человек о государстве заботиться не обязан — оно само о себе может позаботиться. Если кому-то хочется уехать, скажем, на Гаити и там жить, — почему бы и нет? Так что поездки математиков за границу для постоянной и временной работы я одобряю, если при этом они работают в силу своей квалификации, а не только зарабатывают деньги, рассказывая первокурсникам, что такое производная функции x^2. Я знаю молодых русских математиков за рубежом, которые жалуются на то, что там не с кем разговаривать. Например, на Мальте всего шесть математиков. Поговори-ка там о своей специальности!

А вот прогноз относительно московской математической школы. Ей предстоит бурное развитие. Этот вывод можно следать на основании индуктивного рассуждения. Ведь когда московская математическая школа получила мощный толчок к развитию?

А.П. В голодные годы.

М.М. Да-да. В голодные годы после гражданской войны. Ведь для занятий математикой ничего не нужно.

А в 1946 году был издан указ и постановление правительства о резком увеличении зарплаты научным работникам. До этого кандидат наук голодал, а потом он стал богатым человеком. Узнав об указе, один из моих приятелей сказал: «Все, через 20 лет математике конец». Через 20 лет был 1965 год, и математика была загублена: она стала карьерой, ею стали заниматься не для науки, а для себя. Сейчас беда московской школы не в том, что не хватает денег, а в том, что много людей занимаются математикой ради денег. Я помню, как-то Людмила Всеволодовна Келдыш предлагала резко уменьшить зарплату математикам, чтобы в науке остались только люди, готовые сидеть голодными, но заниматься любимым делом. С другой стороны, молодежь должна понимать, что занимающийся математикой как следует имеет гарантированный шанс получить хорошее место за границей.

А.П. Кого из своих учеников вы ставите на первое место?

М.М. Конечно, это академик Сергей Петрович Новиков.

А.П. Какой свой научный результат Вы цените выше всего?

М.М. Об этом трудно говорить, поскольку одни из результатов легко дались, но оказались важными, а те, которые трудно дались, и где я глубоко проник в существо проблемы, не привлекли широкого внимания.

А.Б. Михаил Михайлович, сейчас идут споры между учеными о предмете информатики, на сей счет существует множество мнений, но и предмет математики, как мне кажется, очерчен недостаточно четко. Определение — это наука о числах и фигурах, — явно устарело.

М.М. Чтобы понять, изучить и использовать какое-нибудь явление природы (или общества), имеется только один путь — создать в голове его модель (в широком смысле: любое словесное описание — это уже модель). Не слишком простую — иначе можно не уловить существенных черт явления. Но и не слишком сложную — иначе модель нельзя будет исследовать. Опыт показал, что при изучении различных проблем могут возникать сходные модели, результаты, полученные в одной модели, могут быть применены в другой. Поэтому необходима наука, изучающая схемы моделей безотносительно к их конкретному воплощению. Это и есть математика. Сначала математика занималась простейшими моделями — числовыми. Теперь центр ее тяжести переместился на модели более сложные — качественные.

А.П. Как вы относитесь к преподаванию математики в школе?

М.М. Сегодня она занимает пятую часть всей школьной программы. Кто-нибудь скажет мне: зачем? Кто из вас, математиков, решал в быту квадратные уравнения? Кто хоть раз воспользовался теоремой о внутренних углах треугольника? Почему же никто не спросит о тех потерях, которые несут одно за другим целые поколения, не имеющие времени изучить медицину, музыку, ремесло и т.д.? Сколько математики нужно для жизни — столько она и должна занимать детского времени, ни больше, ни меньше.

Только массовым гипнозом могу объяснить тот факт, что никто за десятилетия не взялся оспорить стереотип: математика-де развивает дедуктивное мышление, которое жизненно необходимо культурному человеку. Но ведь это не так! Дедуктивное мышление составляет лишь небольшую долю среди прочих его видов. И требуется оно исключительно ученым-теоретикам. Даже в прикладной математике дедуктивное мышление, как правило, мешает, а главную роль играет мышление рациональное — по «здравому смыслу».

Вот на такой неожиданной ноте и закончился этот весьма интересный разговор. Теперь мы пребываем в некоторой растерянности — не зря ли мы все печатаем и печатаем статьи по математике? Как вы думаете?

Видны ли звезды днем из глубокого колодца?

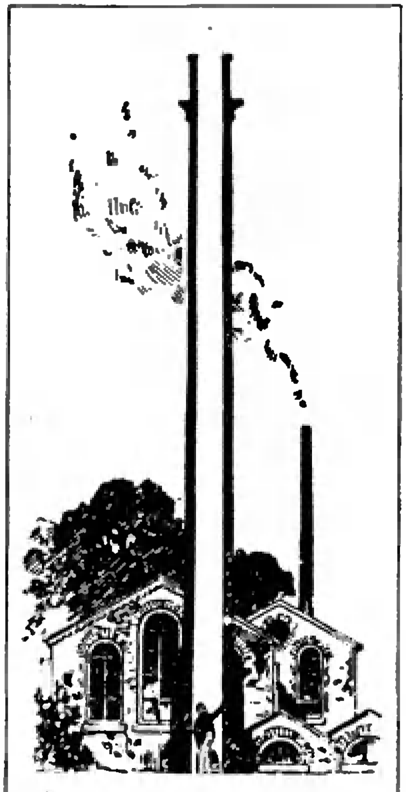
В. СУРДИН

Существует старое и довольно распространенное убеждение, что днем из глубокого колодца можно увидеть звезды. Время от времени это утверждают вполне авторитетные авторы. Так, более двух тысячелетий назад Аристотель писал, что звезды могут быть видны днем из глубокой пещеры. Несколько позже Плиний повторил то же самое, заменив пещеру колодцем. Немало писателей упоминало об этом в своих произведениях: помните, у Киплинга — звезды видны в полдень со дна глубокого ущелья. А сэр Роберт Болл в книге «Star-Land» (Бостон, 1889 г.) дает подробные рекомендации, как наблюдать днем звезды со дна высокой печной трубы (рис. 1), объясняя эту возможность тем, что в темной трубе зрение человека становится более острым.

Итак, видны ли звезды днем? Что говорит об этом эксперимент? Сознаюсь, у меня до сих пор не было возможности спуститься в очень глубокий колодец или залезть в высоченную трубу. Однако в разные времена находились любознательные граждане, пытавшиеся сами обнаружить «эффект колодца». Знаменитый немецкий естествоиспытатель и путешественник Александр Гумбольд, пытаясь увидеть звезды днем, опускался в глубокие шахты Сибири и Америки, но безрезультатно. В наши дни тоже есть беспокойные головы. Например, журналист «Комсомольской правды» Л.Репин в номере от 24 мая 1978 г. писал: «Говорят, что среди бела дня можно увидеть звезды на небе, если спуститься в глубокий колодец. Однажды я решил проверить, правда ли это, спустился в шестидесятиметровый колодец, а звезд так и не смог разглядеть. Только маленький квадратик ослепительно синего неба».

Еще одно свидетельство: опытный любитель астрономии из города Спрингфилд (штат Массачусетс, США) Ричард Сандерсон так описывает свои наблюдения в журнале «Skeptical Inquirer» (1992 г.):

«Как-то лет 20 назад, когда я работал практикантом в планетарии спрингфилдского Музея науки, мы с коллегами



This illustration appeared in the 1899 edition of Sir Robert Ball's 1889 book Star-Land with the caption "How the stars are to be seen in broad daylight."

Рис. 1

стали спорить об этом древнем поверии. Наш спор услышал директор музея Франк Коркош и предложил разрешить его экспериментально: он отвел нас в подвал музея, где начиналась высокая и узкая печная труба. В нее вела маленькая дверца, в которую мы смогли просунуть свои головы. Я помню чувство возбуждения от перспективы среди бела дня увидеть ночные светила.

Посмотрев вдоль дымохода наверх, я увидел сияющий кружок на фоне непроницаемой черноты печного нутра. От окружающей темноты зрачки моих глаз расширились и клочок неба заблестел еще ярче. Я сразу понял, что с помощью этого «прибора» мне не удастся увидеть днем звезды. Когда мы выбрались из музейного подвала, директор Коркош заметил, что только одну звезду удается наблюдать днем в хорошую погоду: это — Солнце».

Итак, ночные звезды не видны днем из глубокого колодца, равно как и из высокой трубы. Однако не будем торопиться с выводами: сквозь некоторые трубы звезды видны даже днем. Речь идет об астрономических трубах — телескопах. В чем же тут дело? Почему труба с линзами позволяет видеть звезды днем, а простая труба — нет?

Прежде всего давайте подумаем, почему звезды днем не видны? Да просто потому, что небо *яркое* от рассеянного солнечного света. Если по какой-то причине рассеянный свет ослабеет, например произойдет полное солнечное затмение, то яркие звезды и планеты станут прекрасно видимыми днем. Так же хорошо они видны в открытом космическом пространстве или с поверхности Луны. Почему же рассеянный в атмосфере солнечный свет скрывает их от нас? Ведь свет звезд при этом не ослабевает.

Чтобы понять это, нужно представлять себе механизм нашего зрения. Как известно, глазная линза — зрачок — создает изображение на задней поверхности глаза, покрытой светочувствительным слоем — сетчаткой, которая состоит из большого числа элементарных приемников света — колбочек и палочек. Они по-разному чувствительны к цвету, но для нас сейчас это не важно, поэтому будем для простоты все их называть колбочками. Важно же то, что каждая колбочка передает в мозг информацию о потоке падающего на нее света, а мозг синтезирует из этих отдельных сообщений (сигналов) цельную картину увиденного.

Глаз — очень сложный приемник информации, но в некотором роде он подобен «умному» электронному устройству, например радиоприемнику. У глаза также есть система автоматической регулировки усиления, которая снижает его чувствительность при ярком свете и повышает в темноте. Есть у него и система шумоподавления, которая сглаживает случайные флуктуации светового потока как по времени, так и по поверхности сетчатки. Эта система имеет определенные пороговые характеристики, поэтому глаз не замечает быстрых изменений изображения (принцип кино) и малых флуктуаций яркости.

Когда мы наблюдаем звезду ночью, поток света от нее на одну колбочку хотя и мал, но существенно превосходит поток от темного неба, падающий на соседние колбочки. Поэтому мозг фиксирует это как значимый сигнал. Но днем на все колбочки падает так много света от неба, что небольшая добавка в виде света звезды, приходящая на один из этих элементов, не ощущается мозгом как реальное различие потоков света, а «списывается на флуктуации».

Довольно легко убедиться, что яркий фон скрывает от нас светлые точки. Вот что советует по этому поводу Яков Перельман в «Занимательной астрономии» (М. – Л., Гостехиздат, 1949, с. 155):

«Несложный опыт может наглядно пояснить это исчезновение звезд при дневном свете. В боковой стенке картонного ящика пробивают несколько дырочек, расположенных наподобие какого-нибудь созвездия, а снаружи наклеивают лист белой бумаги. Ящик помещают в темную комнату и освещают изнутри: на пробитой стенке явственно выступают тогда освещенные изнутри дырочки – это звезды на ночном небе (рис. 2). Но стоит только, не прекращая освещения изнутри, зажечь в комнате достаточно яркую лампу – и искусственные звезды на листе бумаги бесследно исчезают: это «дневной свет» гасит звезды».

Что же делает телескоп, позволяя нам без труда наблюдать днем ночные светила? Разумеется, объектив телескопа собирает значительно больше света, чем зрачок глаза. Но в этом смысле изображение звезды и неба равноценны – при наблюдении в телескоп поток света от них в глаз увеличивается в одинаковое число раз, приблизительно равное отношению площади объектива к площади зрачка. Гораздо важнее другое – телескоп улучшает разрешающую способность глаза, ведь он увеличивает угловой размер наблюдаемых объектов. При этом та же площадка неба проецируется на большее число колбочек, и значит, на каждую из них приходится пропорционально меньше света. Например, если телескоп увеличивает угловой размер объектов в A раз, то наблюдаемая яркость неба уменьшается в A^2 раз. Однако звезда имеет очень малый угловой размер, и ее свет по-прежнему попадает на одну колбочку. Но теперь добавочный свет звезды может уже стать «солидным» на фоне уменьшенной яркости неба. Например, при 45-кратном увеличении телескопа яркость неба эффективно снижается в $45^2 \approx 2000$ раз, и на фоне неба становятся видны некоторые – самые яркие – звезды и планеты.

Что же получается: бери телескоп с большим увеличением и можешь рассматривать днем самые слабые звезды? Нет, это не так. Земная атмосфера неоднородна, поэтому изображение звезды размывается и имеет вполне определенный угловой размер, хотя и очень малый. Ночью, при хорошей погоде, высоко в горах он составляет около $1''$. А днем, на уровне моря – не менее $2''$ – $3''$. Поэтому, если телескоп увеличивает более чем в 30 – 60 раз, угловой размер звезды для наблюдателя превышает разрешающую способность глаза и ее изображение попадает на несколько колбочек. Поэтому в более сильном увеличении смысла нет: яркость изображения звезды будет ослабевать так же, как и яркость неба.

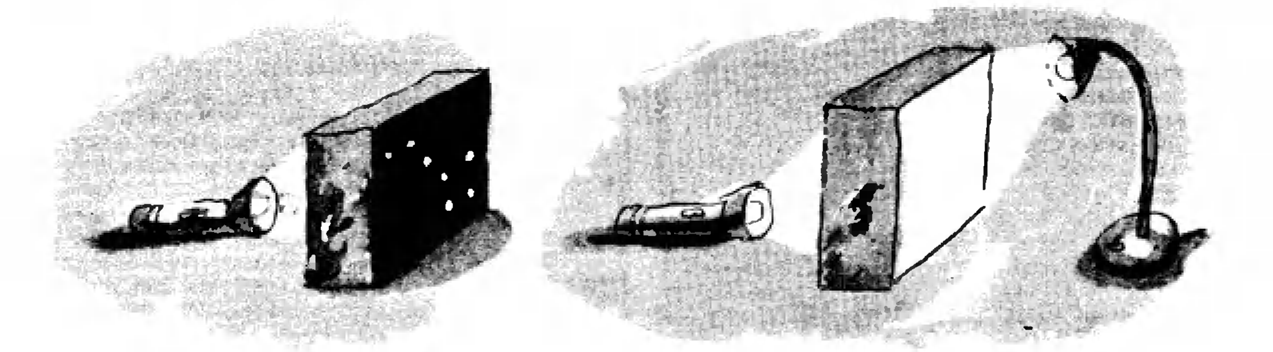


Рис. 2

Звезда может стать видимой на фоне дневного неба только в том случае, если поток света от нее сравним с потоком от площадки неба, которую зрачок проецирует на одну колбочку. Угловой размер этой площадки называется разрешающей способностью человеческого глаза и составляет около $1'$.

Из всех звездообразных объектов лишь Венера иногда видна на дневном небе. Увидеть ее очень непросто: небо должно быть идеально чистым и нужно хотя бы приблизительно знать, в каком месте на небе в данный момент находится Венера. Все остальные планеты и звезды имеют блеск значительно слабее, чем у Венеры, поэтому увидеть их без телескопа днем совершенно невозможно. Впрочем, некоторые астрономы утверждают, что при идеальных условиях им удавалось днем наблюдать Юпитер, который в несколько раз слабее Венеры. Но вот ярчайшую звезду нашего небосвода – Сириус – пока еще никому не удалось увидеть днем на уровне моря. Говорят, что его видели высоко в горах, на фоне темно-фиолетового неба.

Давайте оценим, какие звезды можно увидеть днем в телескоп. В ясную погоду дневное небо имеет яркость примерно -5^m на квадратную минуту дуги, т.е. приблизительно на одну колбочку.[1] Блеск Венеры около -4^m. Поэтому будем считать, что звезда становится видна, если ее блеск не более чем на 1^m меньше поверхностной яркости неба с квадратной минуты. Как мы выяснили, используя телескоп, мы можем понизить яркость неба не более чем в 2000 раз, т.е. примерно на 8^m. Значит, яркость неба снизится до $(-5^m + 8^m) = 3^m$

---

[1] *Астрономы измеряют блеск небесных тел в звездных величинах – Stellar Magnitudes, отсюда и обозначение величины, например -5^m. Уменьшение на 1^m означает увеличение блеска приблизительно в 2,5 раза.*

с квадратной минуты и станут видны звезды с блеском до 4^m. Опыт астрономических наблюдений показывает, что так оно и есть.

С телескопом мы разобрались, теперь вернемся к колодцу. Может ли колодец уменьшить яркость неба для находящегося в нем наблюдателя? В принципе, может, но не с помощью линз, а чисто геометрически, перекрыв все поле зрения за исключением маленькой области, поток света от которой будет сравним с потоком от звезды. Но для этого сидящему на дне колодца наблюдателю отверстие должно быть видно под углом менее $1'$. При диаметре колодца в 1 м его глубина должна быть более 1 м / sin $1' \approx 3{,}4$ км! Но даже при этом наблюдателю будет видна лишь светлая точка, яркость которой увеличится на мгновение, если какая-либо звезда пройдет точно через зенит. При всем желании трудно считать эту процедуру «наблюдением звездного неба». Да и колодец такой еще поискать надо! А что касается вероятности прохода яркой звезды точно через зенит ($\pm 0{,}5'$), то, предоставив это проверить расчетами читателю, могу заявить – не одно тысячелетие пришлось бы ожидать этой сокровенной секунды!

Вообще говоря, и высокая труба также может исполнить свою роль при дневных наблюдениях звезд. Ведь она создает нам воздушный канал, в котором практически нет рассеянного солнечного света. Если эта труба пройдет через всю толщу атмосферы, то сквозь нее мы в любое время суток увидим ночное небо! Почти вся масса воздуха заключена в приземном слое толщиной около 20 км. Однако длинная должна быть труба!

Таким образом, поверие о дневном наблюдении звезд из колодца оказалось мифом. Однако, откуда же он взялся? Об этом можно лишь догадываться. Возможно, находясь на дне колодца или шахты, кто-то действительно заметил проходящую по небу Венеру. Но это очень маловероятно и в принципе возможно лишь в тропических странах, где Венера бывает видна в зените. Более правдоподобно, что, опустившись в колодец или глубокую пещеру, люди замечали освещенные солнцем пылинки на фоне темных стен. Возможно, их и принимали за звезды?

И все же расследование этого мифа нельзя считать законченным. Необходимо повнимательнее присмотреться к иллюзиям человеческого зрения, к неожиданным сочетаниям природных условий, к редким физическим эффектам. В этом немалую помощь можете оказать и вы, уважаемые читатели.

Например, любитель астрономии Рамиро Круз из Хьюстона (штат Техас, США) решил сам проверить слухи о том, что Сириус можно увидеть на дневном небе. Он разыскивал звезду в юго-западной части неба в апреле 1992 г. незадолго до захода солнца. Заметим, он знал, где искать! Невооруженным глазом ему удавалось заметить Сириус не ранее чем за 21 минуту до захода солнца. А вооружившись полевым биноклем 7×50, он обнаруживал звезду за 43 минуты до захода (Sky and Telescope, vol. 85, N 2, Feb. 1993, p.112). Этих данных нам достаточно, чтобы оценить яркость неба в момент обнаружения звезды.

Хьюстон находится на 30° северной широты, значит, небесный экватор пересекает там горизонт под углом $90° - 30° = 60°$. Поскольку наблюдения проводились сразу после весеннего равноденствия, солнце было вблизи экватора и тоже заходило за горизонт под углом 60°. За минуту солнце проходит по небу дугу в $360° / (24 \cdot 60) = 0{,}25°$. Значит, высота солнца над горизонтом (a) за t минут до захода была

$$a \approx 0{,}25° \cdot \sin 60° \cdot t \approx 0{,}2 \cdot t .$$

Поэтому невооруженный глаз видит Сириус при высоте солнца не более $a_{\text{г}} \approx 0{,}2° \cdot 21 \approx 4{,}5°$, а с помощью бинокля при $a_{\text{б}} \approx 0{,}2° \cdot 43 \approx 9°$. При этом яркость неба в зените составляет, соответственно, 7% и 13% от ее яркости в полдень (Д.Я. Мартынов, «Курс практической астрофизики», М.: Наука, 1977, с.300). Вспомним, что блеск Сириуса как раз в 15 раз меньше блеска Венеры. Именно в тот момент, когда яркость неба перед заходом солнца уменьшается в 15 раз, Сириус становится видим глазом. Бинокль же помогает увидеть звезду при более ярком небе, поскольку усиливает яркость звезды, незначительно меняя поверхностную яркость неба. Вот такой полезный эксперимент проделал любитель астрономии из Хьюстона.

Теперь и вправду можно поверить, что днем в высокогорье или с борта самолета виден Сириус: ведь на высоте 5 – 7 км небо днем раз в 15 – 20 темнее, чем на уровне моря. Будете лететь на самолете, обратите внимание на небо: не видны ли Сириус, Юпитер или Венера.

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Рисунок из ежедневного информационного бюллетеня Chaos 16 July 1993, выпускавшегося на XXIV Международной физической олимпиаде школьников. Художник С.Харрис


π
f
π'_1

Подкова Смейла

Ю. ИЛЬЯШЕНКО, А. КОТОВА

В этой статье рассказывается о подкове Смейла, достижении, которое 30 лет назад составило сенсацию в теории дифференциальных уравнений. Тем не менее конструкция эта достаточно проста, чтобы ее можно было изложить, не выходя за рамки школьной элементарной программы по математике.

Символическая динамика

Одна из задач LVI Московской городской олимпиады по математике формулировалась так:

Для каждой пары действительных чисел a и b рассмотрим последовательность чисел

$$p_n = [2\{an+b\}].$$

Любые k подряд идущих членов этой последовательности назовем словом. Верно ли, что любой упорядоченный набор из нулей и единиц длиной k будет словом последовательности (p_n), заданной некоторыми a и b, при а) k = 4; б) k = 5?

Примечание. $[c]$ — *целая часть,* $\{c\}$ — *дробная часть числа c.*

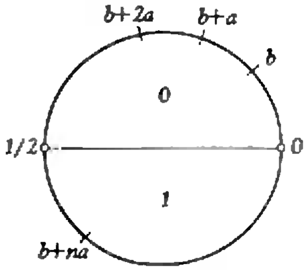


Рис. 1

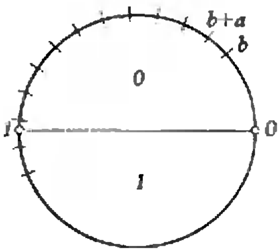


Рис. 2

Очевидно, что последовательность (p_n) состоит из нулей и единиц. Действительно, дробная часть меняется от 0 включительно до 1 исключительно, удвоенная дробная часть — от 0 включительно до 2 исключительно, и целая часть от удвоенной дробной части может быть либо равна 0, либо равна 1.

Дадим этой задаче геометрическую интерпретацию. Будем изображать точки прямой на единичной окружности. Каждой точке x соответствует точка на единичной окружности, получаемая из нулевой точки вращением против часовой стрелки на угол, равный $2\pi\{x\}$.

Оказывается, задача о последовательности (p_n) — это задача о *символической динамике* поворотов окружности.

Что это значит?

Возьмем точку b и рассмотрим ее образы под действием поворота на угол a (все углы в дальнейшем выражаются в частях полного оборота). На окружности появятся точки b, $a+b$, $2a+b$ и т.д. (рис. 1).

Если точка $na+b$ лежит на верхней половине окружности от 0 включительно до 1/2 исключительно, то ей соответствует значение $p_n = 0$. Если же точка лежит на нижней половине окружности, то $p_n = 1$.

Теперь можно объяснить слова «символическая динамика». Динамика — потому что речь идет о движении точки по окружности под действием повторяющихся (*итерируемых*) поворотов. Символическая — потому что вместо точного указания положения точки на окружности мы интересуемся только сведениями о том, лежит ли точка на верхней или на нижней половине окружности.

Символическая динамика позволяет легко решить нашу задачу. Если в последовательности встречаются рядом много нулей подряд, это значит, что угол поворота a мал (возможно, после вычета необходимого числа полных оборотов), поскольку точка b под действием нескольких подряд поворотов долго находилась в верхней половине окружности. Когда, наконец, после этого она попадет в нижнюю половину, то, поскольку угол a невелик, она должна достаточно долго пробыть там (рис. 2). Поэтому последовательность, в которой после длинной серии нулей вдруг быстро мелькнет единица и снова пойдут нули, не может встретиться как слово в нашей последовательности (p_n). В частности, при $k = 5$ слово 00010 встретиться не может.

Действительно, тот факт, что в последовательности встречаются три нуля подряд, означает, что $|a| < 1/4$ полного оборота. Отрезок же 010 показывает, что из верхней полуокружности мы попали в нижнюю, а затем снова в верхнюю. Это может быть только тогда, когда $|a| > 1/4$ полного оборота. Полученное противоречие показывает, что при $k = 5$ ответ — «нет».

Что касается $k = 4$, то любые 16 слов из четырех знаков 0 и 1 могут встретиться, и это доказывается с помощью простого перебора. Его мы оставляем в качестве упражнения.

Словарь

Нам удобно обзавестись некоторыми общими понятиями. Рассмотрим отображение некоторой области, — например, на плоскости, хотя это ограничение и не обязательно, — в другую область на плоскости. Область определения этого отображения будем называть его *фазовым пространством*. Результаты последовательного выполнения отображения будем называть *итерациями* этого отображения. Итерации бывают *положительными* (если мы повторяем само отображение) и *отрицательными* (если мы повторяем отображение, обратное к нему). Итерации определены в области, вообще говоря, более узкой, чем все фазовое пространство.

Определим теперь *орбиту точки под действием отображения f*. Если в точке x определены все итерации отображения f, положительные и отрицательные, ее орбиту под действием f составляют все результаты применения к точке x этих итераций:

$$O_f(x) = \{f^n(x) | n \in \mathbb{Z}\}.$$

(Здесь и далее $f^n(x)$ означает $f(f(\ldots(x))\ldots)$, где отображение f применено n раз.)

Разделим фазовое пространство на две части. Каждой точке x сопоставим ее *судьбу*. Судьба точки x — это последовательность из нулей и единиц, конструируемая по следующему правилу: $a_n = 0$, если точка $f^n(x)$ принадлежит первой части фазового пространства, и $a_n = 1$, если $f^n(x)$ принадлежит его второй части. Последовательность (a_n) обозначается $\omega(x)$ и называется *судьбой точки x*.

Символическая динамика интересуется только этой информацией об орбитах точек: ей не важно, каково точное положение точки $f^n(x)$, она спрашивает только, в какой части фазового пространства лежит эта точка. Естественны вопросы того же типа, что обсуждались в разобранной выше олимпиадной задаче: всякая ли последовательность из нулей и единиц может быть реализована как судьба некоторой точки? Если да, то сколько есть точек, имеющих данную судьбу? В предыдущей задаче мы выяснили, что не всякая последовательность может быть реализована как судьба. Вопрос о множестве точек с данной судьбой в предыдущей задаче не обсуждался и может быть также оставлен как очень полезная задача.

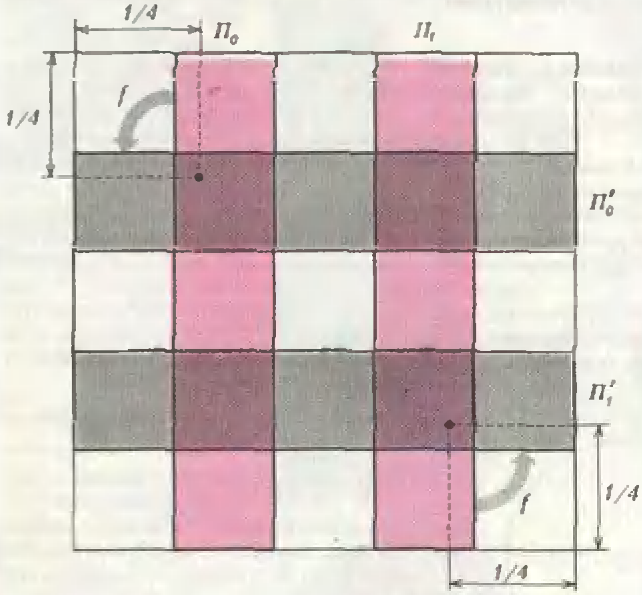


Рис. 3

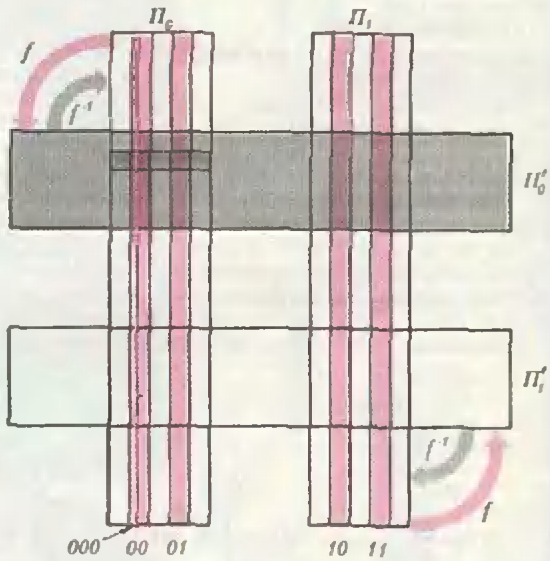


Рис. 4

Отображение подковы

Скажем сразу, что это отображение на подкову совсем не похоже. Происхождение названия будет объяснено позже.

Начнем с единичного квадрата. Разделим его на 5 равных вертикальных прямоугольников, а также на 5 равных горизонтальных прямоугольников (рис.3). Оставим только второй и четвертый вертикальные прямоугольники, *левый из них обозначим* $П_0$, правый — $П_1$, а также второй и четвертый горизонтальные прямоугольники, верхний обозначим $П'_0$, а нижний — $П'_1$.

Рассмотрим отображение, которое сжимает прямоугольник $П_0$ в пять раз по вертикали, растягивает его в пять раз по горизонтали и укладывает то, что получилось, на прямоугольник $П'_0$. Нетрудно подсчитать, что правая *нижняя вершина* квадратика со стороной $1/4$, левая верхняя вершина которого совпадает с левой верхней вершиной единичного квадрата, а стороны вертикальны и горизонтальны, остается при этом преобразовании неподвижной. Относительно нее и происходит сжатие и растяжение с коэффициентами $1/5$ по вертикали и 5 по горизонтали.

Так будет действовать наше *отображение f в прямоугольнике* $П_0$. Однако его область определения состоит из двух прямоугольников — $П_0$ и $П_1$. В прямоугольнике $П_1$ отображение определяется аналогично, только роль левой верхней вершины квадрата играет правая нижняя его вершина. Оно сжимает прямоугольник $П_1$ в пять раз по вертикали, растягивает его в 5 раз по горизонтали и укладывает на прямоугольник $П'_1$. При этом левая верхняя *вершина квадратика* со стороной $1/4$ остается неподвижной, если его правая нижняя вершина совпадает с правой нижней вершиной единичного квадрата, а стороны вертикальны и горизонтальны (см. рис.3).

Итак, отображение подковы — это отображение, показанное на рисунке 3. Его фазовое пространство — объединение прямоугольников $П_0$ и $П_1$, его область значений — объединение *прямоугольников* $П'_0$ и $П'_1$.

Оказывается, что множество точек, для которого определены полные орбиты этого отображения, гораздо беднее, чем само фазовое *пространство*. Чтобы его описать, понадобится конструкция *Канторова совершенного множества*.

Канторово совершенное множество

Мы дадим здесь не совсем обычное построение Канторова совершенного множества. Рассмотрим отрезок $[0,1]$. Разделим его на 5 частей, оставим второй и четвертый слева отрезки, а все остальное выбросим. Дальше с каждым из оставшихся отрезков проделаем ту же процедуру: разделим его на 5 частей, оставим второй и четвертый отрезки в каждом разбиении, а остальные выбросим, и *продолжим* далее это построение.[1]

Отрезки $[1/5;\ 2/5]$ и $[3/5;\ 4/5]$ назовем отрезками 1-го ранга. Далее по индукции строятся отрезки n-го ранга.

[1] *В классической конструкции отрезок делится на три части, средняя выбрасывается, а оставшиеся части подвергаются той же операции — середина выбрасывается, и так далее до бесконечности. Легко убедиться, что конструкция Канторова множества, приведенная в статье, эквивалентна классической.*

Предположим, что отрезки $(n-1)$-го ранга уже построены; каждый отрезок $(n-1)$-го ранга разделим на 5 частей, и отрезками n-го ранга назовем второй и четвертый слева отрезки полученного мелкого деления.

Обозначим через W_n объединение всех отрезков n-го ранга.

Наше Канторово совершенное множество K будет определено как пересечение всех множеств W_n при $n \to \infty$.

Будет ли это пересечение непусто и сколько в нем будет точек?

Оказывается, *в множестве K ровно столько же точек, сколько во всем отрезке* $[0;\ 1]$.

Чтобы доказать это замечательное утверждение, запишем сначала все числа от 0 до 1 в пятеричной системе счисления и рассмотрим отрезки 1-го ранга:

$$[1/5;\ 2/5] = [0{,}1;\ 0{,}2],$$

$$[3/5;\ 4/5] = [0{,}3;\ 0{,}4].$$

Видно, что в отрезки 1-го ранга попадают только числа, у которых на первом месте после запятой стоит 1 либо 3. (Исключение, казалось бы, составляют правые концы этих отрезков. Этой неприятности можно избежать, заметив, что $0{,}2 = 0{,}1(4)$ и $0{,}4 = 0{,}3(4)$, либо немного видоизменить доказательство, учитывая, что при выделении отрезков 2-го ранга из отрезков 1-го ранга эти точки отсекаются.)

Что происходит при дроблении отрезков 1-го ранга на отрезки 2-го ранга? От каждого из них остается по 2 отрезочка:

$$[1/5 + 1/25;\ 1/5 + 2/25],$$

$$[1/5 + 3/25;\ 1/5 + 4/25],$$

$$[3/5 + 1/25;\ 3/5 + 2/25],$$

$$[3/5 + 3/25;\ 3/5 + 4/25],$$

откуда, обозначив первую цифру в пятеричной записи чисел из W_2 через k_1, $k_1 = 1$ или $k_1 = 3$, получим, что если $x \in W_2$, то $x = 0{,}k_1k_2\ldots$, где $k_2 = 1$ или $k_2 = 3$.

По индукции, предположив, что $x = 0{,}k_1k_2\ldots k_{n-1}\ldots$, где $k_j = 1$ или $k_j = 3$ для всякого x из W_{n-1}, докажем, что и $k_n = 1$ или 3.

Разобьем отрезки $(n-1)$-го ранга так, как мы делали это выше. При этом из каждого отрезка разбиения W_{n-1}, имевшего вид

$$[\,0{,}k_1k_2\ldots k_{n-1};\ 0{,}k_1k_2\ldots k_{n-1}(4)],$$

окажутся выделенными два отрезочка

$$[0{,}k_1k_2\ldots k_{n-1} + 1/5^n;\quad 0{,}k_1k_2\ldots k_{n-1} + 2/5^n],$$

$$[0{,}k_1k_2\ldots k_{n-1} + 3/5^n;\quad 0{,}k_1k_2\ldots k_{n-1} + 4/5^n],$$

откуда ясно, что $k_n = 1$ для каждого левого из таких отрезочков и $k_n = 3$ для каждого правого из них.

Итак, все точки нашего Канторова совершенного множества представляются в виде бесконечных пятеричных дробей, все цифры которых — единицы и тройки.

Обратно, все такие бесконечные пятеричные дроби суть точки множества K. Действительно, если в пятеричной дроби после нуля на первом месте стоит единица, точка попадает в левый из отрезков 1-го ранга, если тройка — в правый из них; но на втором месте также стоит единица или тройка, следовательно, точка принадлежит и множеству отрезков второго ранга; далее по индукции получаем, что точка принадлежит всем отрезкам n-го ранга для любого n, а значит, и их пересечению — множеству K.

Теперь каждой точке множества K сопоставим двоичную бесконечную дробь по такому правилу: каждую единицу в соответствующей пятеричной дроби заменим на 0, каждую тройку — на 1. Мы получим всевозможные полубесконечные последовательности из нулей и единиц; но их столько же, сколько всех чисел от 0 до 1, представленных в двоичной системе счисления!

Интересное упражнение — убедиться, что длина всех интервалов, которые выкидываются из отрезка $[0;1]$, т.е. длина разности $[0;1] \setminus K$, равна 1. Таким образом на единичном отрезке мы выделили множество K, содержащее столько же точек, сколько и отрезок, которое на этом отрезке совсем не занимает места!

Символическая динамика отображения подковы

Прежде чем работать с точками, имеющими заданную бесконечную судьбу, займемся более простым вопросом: как выглядит множество точек, имеющих данный конкретный отрезок судьбы?

Например, пусть $a_0 = 0$ либо $a_0 = 1$. Как выглядит соответствующее множество всех точек фазового пространства? Ответ дается прямой расшифровкой определения. То, что $a_0 = 0$, означает по определению, что точка x, к которой применено отображение f в нулевой степени (это тождественное отображение), т.е. сама точка x, лежит в прямоугольнике Π_0; $a_0 = 1$ — соответствует прямоугольнику Π_1.

Рассмотрим теперь аналогичную задачу для отрезка судьбы длиной 2. Спрашивается, как выглядит множество точек, для которых $a_0\ a_1$ задано и равно одному из четырех возможных значений — 00, 01, 10 или 11?

Посмотрим на рисунок 4. Множество точек с отрезком будущей судьбы 00 — это множество точек, которые сами лежат в прямоугольнике Π_0 и их образ тоже лежит в прямоугольнике Π_0. Это значит, что образ точки лежит во втором из пяти равных квадратиков, на которые разделен прямоугольник Π_0'. Из каких фигур получаются эти квадратики при отображении f? Ответ очевиден: нужно разделить прямоугольник Π_0 на 5 одинаковых вертикальных прямоугольников; k-й слева из них при отображении f даст k-й слева квадратик прямоугольника Π_0'. Таким образом, множество точек с будущей судьбой 00 — это второй слева вертикальный прямоугольничек прямоугольника Π_0. Аналогично, множество точек с будущей судьбой 01 — это второй справа из прямоугольничков в Π_0.

Точно так же строятся множества точек с будущей судьбой 10 и 11. Это, соответственно, второй и четвертый слева из пяти вертикальных прямоугольников, на которые делится прямоугольник Π_1.

Теперь уже легко нарисовать точки, будущая судьба которых состоит из трех заданных символов $a_0\,a_1\,a_2$.

Например, рассмотрим множество точек с будущей судьбой 000. Все эти точки расположены в прямоугольнике, соответствующем будущей судьбе 00. Этот прямоугольник после двукратного применения отображения f переходит в горизонтальный прямоугольник, высота которого равна $1/25$, а ширина (по горизонтали) равна $1/5$ (на рисунке он выделен цветом). Все точки этого нового прямоугольника, которые после отображения f попадают в прямоугольник Π_0, расположены во втором слева из пяти равных квадратиков, на которые делится этот прямоугольник. Значит, их прообразы расположены во втором слева из тех вертикальных прямоугольников, на которые делится прямоугольник, соответствующий будущей судьбе 00.

С помощью этих рассуждений доказывается

Лемма 1. *Множество всех точек с данной бесконечной будущей судьбой $\omega^+ = a_0a_1\ldots a_n\ldots$ есть вертикальный отрезок, состоящий из всех точек с абсциссой $a(\omega^+) = 0{,}\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots$, (где $\alpha_n = 1$, если $a_n = 0$, и $\alpha_n = 3$, если $a_n = 1$),* *ординаты которых пробегают отрезок [0;1].*

Для доказательства достаточно заметить, что абсциссы точек с будущей судьбой длиной n лежат в отрезках n-го ранга, уже появлявшихся при построении Канторова совершенного множества.

Аккуратное проведение индукции оставляем читателям в качестве задачи.

Теперь мы подходим к основному результату нашего исследования.

Теорема. *Каждая последовательность ω из 0 и 1 реализуется как судьба одной и только одной точки.*

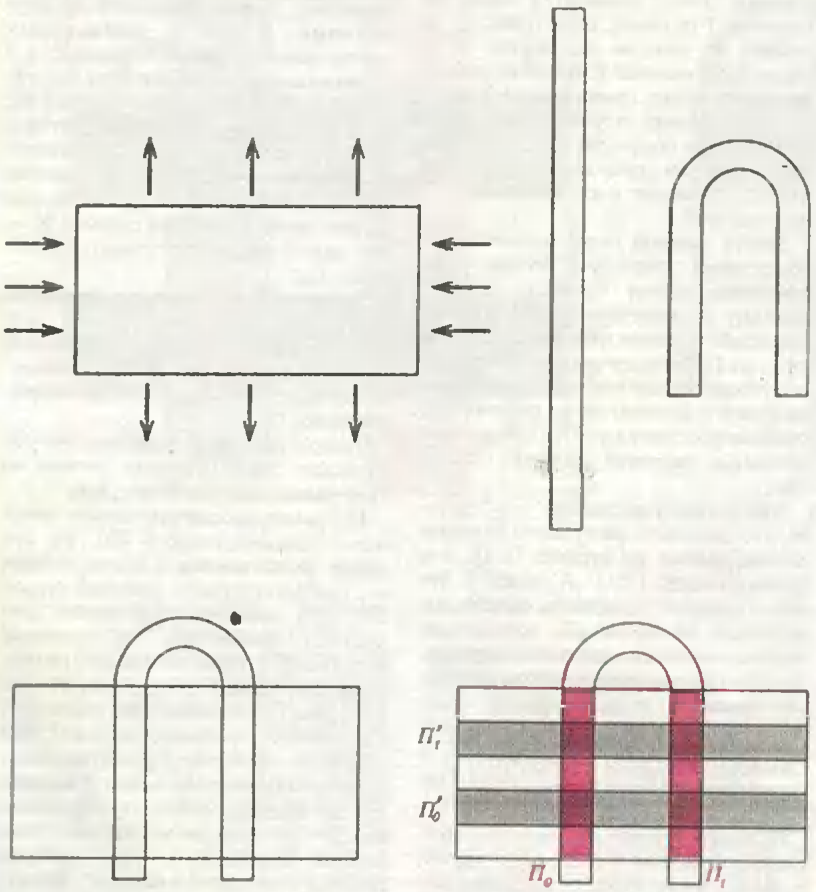


Рис. 5

Множество всех точек с бесконечной судьбой составляют те и только те точки, абсциссы которых принадлежат Канторову совершенному множеству К, расположенному на горизонтальной стороне квадрата, а ординаты — такому же множеству К, расположенному на вертикальной стороне квадрата.

Доказательство. Рассмотрим последовательность из нулей и единиц. Ее неограниченную справа подпоследовательность, начинающуюся с a_0, обозначим $a(\omega^+)$, неограниченную слева подпоследовательность обозначим $b(\omega^-)$. Точно так же, как лемма 1, доказывается

Лемма 2. *Множество всех точек с данным бесконечным прошлым $\omega^- = \ldots a_{-n}\ldots a_{-1}$ есть горизонтальный отрезок, состоящий из всех точек с ординатой $b(\omega^-) = 0,\beta_{-1}\beta_{-2}\ldots\beta_{-n}\ldots$ (где $\beta_{-n} = 1$, если $a_{-n} = 0$, и $\beta_{-n} = 3$, если $a_{-n} = 1$), абсциссы которых пробегают отрезок [0;1].*

Итак, мы нашли множество всех точек с будущей судьбой ω^+ (это вертикальный отрезок) и с прошлой судьбой ω^- (это горизонтальный отрезок). Как выглядит множество всех точек с судьбой ω? Ответ: это точка пересечения найденных нами вертикального и горизонтального отрезков! Такая точка существует и единственна.

Итак, теорема доказана, и мы можем переходить к сбору плодов.

Следствия

Рассмотрим сначала точки с самой простой судьбой, а именно — неподвижные точки.

Верхняя левая неподвижная точка на всем протяжении времени в прошлом и будущем остается на своем месте в прямоугольнике $П_0$. Ей соответствует судьба из одних нулей. Аналогично, правой нижней неподвижной точке соответствует судьба из одних единиц.

Кроме неподвижных точек, интересны еще точки периодические. Это такие точки, которые после нескольких итераций отображения f возвращаются на свое место. Много ли существует таких точек?

Оказывается, и это было неожиданным и замечательным свойством отображения f, таких точек существует бесконечно много.

Следствие 1. *Отображение f имеет бесконечно много периодических точек.*

Доказательство. Очевидно, что периодической точке соответствует периодическая судьба, т.е. периодическая последовательность из 0 и 1. Из нашей теоремы, однако, можно извлечь и обратное утверждение: если судьба точки периодична, то и сама точка периодична.

Действительно, предположим, что судьба точки обладает свойством

$$a_{n+p} = a_n$$

для всех $n \in Z$, т.е. она периодична с периодом p. Утверждается, что тогда и сама точка x после не более чем p итераций отображения f попадет на старое место. Действительно, точки x и $f^p(x)$ имеют одинаковую судьбу. По теореме единственности они совпадают.

Для формулировки второго следствия нам понадобятся понятия *гомоклинических* и *гетероклинических* орбит.

Орбита называется гомоклинической, если при $n \to +\infty$ и $n \to -\infty$ ее точки стремятся к одной и той же неподвижной точке, и гетероклинической, если при $n \to +\infty$ и $n \to -\infty$ ее точки стремятся к разным неподвижным точкам.

Следствие 2. *Отображение f имеет бесконечно много гомоклинических и гетероклинических орбит.*

Действительно, орбита точки является гомоклинической тогда и только тогда, когда начиная с некоторого места в прошлом и в будущем судьба точки состоит из одних нулей (если речь идет о гомоклинической орбите с неподвижной точкой в $П_0$) или из одних единиц (если неподвижная точка — в $П_1$).

Аналогично доказывается утверждение про гетероклиническую орбиту.

Более того, справедливо

Следствие 3. *Для любых двух точек x и y существует такая точка z, орбита которой в будущем приближается к орбите точки x, а в прошлом — к орбите точки y.*

Это утверждение предлагается доказать в качестве задачи.

Все эти следствия опираются на результат, полученный при доказательстве теоремы: *любая последовательность из нулей и единиц, состоящая из двух частей* ω^+ *и* ω^-, *реализуется как судьба точки с координатами* $(a(\omega^+), b(\omega^-))$ *(где a и b — из лемм 1 и 2).*

Отсюда же получается и такое замечательное следствие, которое тоже формулируется в качестве задачи.

Следствие 4. *Каждая периодическая точка с периодом p имеет окрестность, свободную от других периодических точек с периодом p, или, другими словами, каждая p-периодическая орбита изолирована в множестве всех p-периодических орбит.*

В чем же состояла сенсационность разобранного примера? Почему он изменил математическую философию, связанную с динамикой?

Чтобы это понять, нужно обратиться на 200 лет назад.

Лаплас и Смейл — детерминизм и хаос

Около двухсот лет назад в своем трактате «Опыт философии теории вероятностей» Лаплас писал: «Ум, которому были бы известны для какого-либо данного момента все силы, одушевляющие природу, и относительное положение всех ее составных частей, если бы вдобавок он оказался достаточно обширным, чтобы подчинить эти данные анализу, обнял бы в одной формуле движение величайших тел Вселенной наравне с движениями мельчайших атомов: не осталось бы ничего, что было бы для него недостоверно, но и будущее, также как и прошедшее, предстало бы перед его взором.»

В этих словах содержится грандиозное философское открытие, состоящее в том, что все эволюционные процессы во Вселенной описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, — может быть, в фазовом пространстве очень высокой размерности.

В основе этой концепции — математический факт, который лежал в то время даже не на переднем крае науки, а за ним. Это теорема существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения, доказанная только впоследствии Огюстеном Луи Коши.

Долгое время казалось, что философия, основанная на этой теореме, адекватно описывает окружающую нас реальность. Пример подковы Смейла мотивирует совершенно иную точку зрения. Предположим, что мы наблюдаем процесс, описываемый рассмотренным выше отображением f, и следим за орбитами точек под действием этого отображения. Нас интересует, как и раньше, не в точности сама орбита точки, а только ее судьба. Предположим, что мы дважды экспериментируем с одной и той же точкой: берем координаты точки и вычисляем положение ее образа.

Беда в том, что операция взятия координат всегда сопряжена с некоторыми ошибками. Если координаты выбирает экспериментатор, то при двух попытках он выберет не в точности совпадающие, а чуть-чуть отличающиеся друг от друга точки. При этом окажется, что чем меньше была его ошибка, тем дольше судьбы выбранных им точек будут совпадать. Однако наступит момент, когда их судьбы разойдутся.

Представим себе, что один эксперимент произведен, и для одной выбранной точки написана бесконечная судьба. Представим себе, что параллельно ставится другого рода эксперимент. Некто сидит и бросает монетку, и когда выпадает орел — пишет 0, а когда решка — 1. Затем из полученных двух последовательностей конструируется новая: до некоторого места в будущем выписывается первая последовательность, а с некоторого, скажем, с 1000-го, к ней приписывается последовательность, полученная при помощи монетки.

По теореме о реализации произвольной судьбы найдется точка, судьба которой совпадает с этой новой последовательностью. Две точки, одна — взятая в эксперименте, а другая — построенная так, как только что описано, будут находиться на расстоянии порядка $1/5^{1000}$ друг от друга, т.е. с точки зрения любого экспериментатора будут неразличимы. Тем не менее их судьбы, начиная с некоторого момента, различны, и это различие носит случайный характер.

Этот эффект проявляется и в более сложных процессах, описываемых дифференциальными уравнениями. Он носит название *невоспроизводимости эксперимента*. Мы можем ставить один и тот же эксперимент, точнейшим образом воспроизводить начальные условия, и начиная с некоторого момента наблюдения получать совершенно несхожие результаты. Это связано с явлением разбегания орбит, которое мы наблюдали в простейшем примере отображения подковы.

В последнее десятилетие исследования, связанные с хаотическим поведением детерминированных систем, сделались предметом живейшего интереса. Во многих реальных системах, описываемых дифференциальными уравнениями, детерминизм имеет место чисто теоретически. На практике из-за неизбежных ошибок эксперимента результаты двух, казалось бы, тождественных опытов начинают различаться хаотическим образом...

Вернемся к нашей исходной задаче. Нам остается сказать, почему все-таки в названии отображения участвует подкова.

Подкова Смейла

Исходное отображение, рассмотренное Смейлом, конструировалось следующим образом. Берется прямоугольник (рис.5), сильно сжимается по горизонтали, растягивается по вертикали так, что из длинного низкого горизонтального прямоугольника получается высокий и узкий вертикальный, затем этот полученный прямоугольник сгибается в подкову и накладывается на прямоугольник-прообраз так, как показано на рисунке.

Композиция этих отображений и есть отображение подковы. На первый взгляд, это отображение совсем не похоже на рассмотренное нами. Однако если область определения сузить, то мы легко заметим все требуемые детали.

Рассмотрим пересечение области определения и области значений отображения подковы: это два заштрихованных прямоугольника. Левый из них обозначим Π_0, правый — Π_1. Предположим, что обратное отображение на прямоугольниках Π_0 и Π_1 линейно (это отображение Смейл включал в свою конструкцию). Тогда полный прообраз прямоугольника Π_0 — это длинный узкий прямоугольник, близкий к нижнему основанию исходного прямоугольника, а для прямоугольника Π_1 — аналогичный прямоугольник, близкий к верхнему основанию исходного прямоугольника. И наше отображение переводит длинный нижний прямоугольник в Π_0, а длинный верхний — в Π_1. Это отображение похоже на рассмотренное выше отображение f, хотя и не совпадает с ним.

Полезная задача — сформулировать и доказать аналог предыдущей теоремы для такого линейного отображения.

Задачи по математике и физике

Наш журнал ежегодно проводит конкурс на лучшее решение задач из «Задачника «Кванта». Итоги конкурса подводятся в декабре.

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 апреля 1994 года по адресу: 103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1/2 — 94" и номера задач, решения которых Вы посылаете, например М1411 или Ф1418. В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1411–М1420, Ф1418–Ф1427

М1411. На острове Невезения каждый житель либо всегда говорит правду, либо всегда лжет, причем правдивых не менее четверти всех жителей. На выборах президента, в которых участвовали все невезенцы, было только два кандидата — Елкин и Палкин. На вопрос наблюдателя ООН «за кого Вы голосовали?» большинство невезенцев ответило: «за Палкина», — а на вопрос «кто победил?» большинство ответило: «Елкин».

а) Кто победил на выборах?

б) Можно ли это наверняка определить, если правдивых на острове — лишь одна пятая всех жителей?

Ф.Назаров

М1412. Натуральные числа x и y таковы, что сумма дробей

$$\frac{x^2-1}{y+1}+\frac{y^2-1}{x+1}$$

— целое число. Докажите, что каждая из дробей — целое число.

А.Перлин

М1413. Точка M — середина стороны BC выпуклого четырехугольника $ABCD$. Известно, что величина угла AMD равна 120°. Докажите неравенство

$$AB+\frac{1}{2}BC+CD\geq DA.$$

С.Берлов

М1414. Докажите, что существует функция $f(x)$, определенная при всех $x\geq 0$ и такая, что значение $f(f(f(\ldots(x))))$ (где функция f применяется n раз) равно:

$$\text{а) } \frac{x}{x+1}; \quad \text{б) } 1+x+2\sqrt{x}.$$

О.Ижболдин, К.Кохась

М1415. Дано два правильных 10-угольника. В каждой вершине того и другого написано натуральное число, причем сумма чисел на каждом 10-угольнике равна 99. Докажите, что можно отметить на том и другом 10-угольнике несколько подряд стоящих вершин (может быть, одну, но не все) так, что суммы отмеченных чисел будут одинаковы.

С. Берлов

М1416. Среди бесконечного количества гангстеров каждый охотится за каким-то одним из остальных. Докажите, что существует бесконечное подмножество этих гангстеров, в котором ни один не охотится за кем-либо из этого подмножества.

В.Уфнаровский

М1417. На сторонах AC и BC треугольника ABC выбраны точки D и E. Известно, что равны отношения величин углов:

$$\frac{\angle CDE}{\angle BDE}=\frac{\angle CED}{\angle AFD}.$$

Верно ли, что треугольник ABC равнобедренный, если AE и BD а) медианы, б) высоты, в) биссектрисы этого треугольника?
В.Сендеров

М1418. На плоскости задано конечное множество векторов с длинами не больше 1 и суммой S. Докажите, что для любого числа λ между 0 и 1 найдется некоторое подмножество этих векторов, сумма которых отличается от λS на вектор длиной не больше $1/\sqrt{2}$.
Д.Терешин

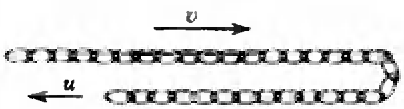
М1419. Пусть $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$, где $n>1$. Докажите, что многочлен $f(x)$ нельзя представить в виде произведения многочленов степени больше 1 с целыми коэффициентами.

М1420. Для любых трех точек P, Q, R плоскости обозначим через $m(PQR)$ наименьшую из высот треугольника PQR. (Если точки P, Q, R лежат на одной прямой, то $m(PQR)=0$.) Докажите, что для любых четырех точек A, B, C, X плоскости

$$m(ABC)\le m(ABX)+m(AXC)+m(XBC).$$

Ф1418. По окружности радиусом R с постоянной скоростью v бежит лошадь. На расстоянии r от центра окружности стоит человек. Чему равно максимальное значение скорости сближения лошади и человека?
А.Быцко

Ф1419. Длинная и гибкая однородная цепочка длиной L и массой m двигалась вдоль прямой со скоростью v. Передний конец цепочки «завернули» назад и тянут с постоянной скоростью u. С какой силой приходится действовать на передний конец цепочки, чтобы поддерживать такое движение?



З.Рафаилов

Ф1420.* Маленький тяжелый шарик лежит на верхнем конце легкого тонкого стержня длиной L, закрепленного шарнирно нижним концом на горизонтальной плоскости. Отклонив стержень на некоторый угол, отпустим шарик. Оцените значение начального угла отклонения, при котором падение продолжается две недели. Влиянием посторонних факторов пренебречь.
А.Зильберман

Ф1421.* В длинной трубе, заполненной азотом, находится легкий подвижный поршень. В начальный момент поршень закреплен, температуры газа слева и справа одинаковы и равны $T_1=T_2=300$ К, давления составляют $p_1=1{,}1$ атм и $p_2=1{,}0$ атм. Поршень отпускают. Найдите его установившуюся скорость. Стенки трубы и поршень теплонепроницаемы, газ идеальный.
С.Башинский

Ф1422. В прочный сосуд налили немного воды, закрыли герметично крышкой и медленно нагрели до 160 °С. При этой температуре давление в сосуде составило 3,7 атм. Определите температуру, при которой вся вода испарилась.
Е.Доннер

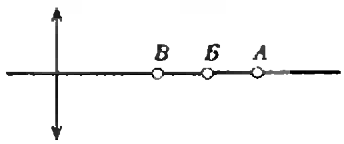
Ф1423. На тонкой непроводящей направляющей в форме окружности радиусом R может скользить без трения маленькая заряженная бусинка. Заряд Q расположен в плоскости направляющей на расстоянии r от центра окружности. Куда нужно поместить второй заряд и какой он должен быть величины, чтобы бусинка могла скользить по окружности с постоянной по модулю скоростью? Сила тяжести отсутствует.
А.Зильберман

Ф1424. Лампочка рассчитана на напряжение 2,5 В при токе 0,2 А. Мы подключаем ее к батарейке последовательно с резистором сопротивлением 5 Ом, и она горит полным накалом. Если изменить схему включения — присоединить к батарейке лампочку и резистор параллельно, то лампочка горит точно так же, как в первом случае. Найдите ЭДС и внутреннее сопротивление батарейки. При каком включении КПД такого «фонарика» больше и во сколько раз?
Р.Александров

Ф1425. Проволочный виток в форме окружности радиусом R, по которому течет ток I, помещен в сильное однородное магнитное поле, вектор индукции которого $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости витка. Найдите силу натяжения в витке.
А.Лузин

Ф1426. Катушка индуктивностью L с параллельно присоединенным к ней резистором сопротивлением R подключаются во внешнюю цепь, в которой поддерживается постоянный по величине ток I. Какое количество теплоты выделится в резисторе?
А.Зильберман

Ф1427. Действительное изображение точечного источника получено в точке A при помощи тонкой линзы. Заменив эту линзу другой, но расположив ее в том же месте, получили изображение в точке $Б$. После этого первую линзу придвинули вплотную ко второй, и изображение переместилось в точку $В$. Определите построением положение источника.



А.Дешковский

Решения задач М1386—М1390, Ф1398—Ф1407

М1386. Клетки квадрата 7×7 раскрашены в два цвета. Докажите, что найдется по крайней мере 21 прямоугольник с вершинами в центрах клеток одного цвета и со сторонами, параллельными сторонам квадрата.

Назовем «хорошей парой» пару клеток таблицы, расположенных в одной строке и окрашенных в один цвет. Пусть в данной строке таблицы k белых и $7-k$ черных клеток. Тогда из них можно образовать

$$\frac{k(k-1)}{2}+\frac{(7-k)(6-k)}{2}=k^2-7k+21$$

пар.
Это выражение минимально при $k=3$ и $k=4$ и равно 9. Итак, в каждой строке не менее 9 хороших пар, а всего в

таблице, стало быть, хороших пар не меньше, чем 63. Назовем две хороших пары согласованными, если их клетки покрашены в один цвет и лежат в одних и тех же столбцах. Ясно, что любые две такие пары как раз и образуют описанный в условии задачи прямоугольник.

Чтобы оценить количество согласованных пар, заметим, что существует всего $7 \cdot 6/2 = 21$ пара столбцов и два различных цвета, т.е. может существовать не более $2 \cdot 21 = 42$ несогласованных друг с другом хороших пар. Таким образом, рассматривая одну за другой 63 хорошие пары, мы получим, что не меньше чем $63 - 42 = 21$ из них будет согласована с одной из предыдущих.

Интересно, что оценка числа прямоугольников, данная в условии, точна. Понятно, что соответствующая таблица должна в каждой строке и каждом столбце иметь по три клетки одного цвета и четыре — другого. Именно такова матрица инциденций «проективной плоскости над полем Z_2». (См. решение задачи 208 а) в книге Н.Васильева и А.Егорова «Задачи Всесоюзных математических олимпиад» или решение задачи М335.)

Конечно, было бы интересно найти оценки для числа прямоугольников и в общем случае — для квадрата $n \times n$. Для некоторых n удается получить даже точную оценку (как сообщил нам И.Изместьев из МГУ, для простого $n = 4k+3$ это число равно $n(n-1)(n-3)^2/32$). Эта задача связана с интересными вопросами из теории чисел и теории графов, и мы надеемся рассказать о ней подробнее в отдельной заметке.

И.Рубанов

***М1387.** Окружность, вписанная в угол с вершиной O, касается его сторон в точках A и B. Луч OX пересекает эту окружность в двух точках C и D так, что OC = CD = 1. Если M — точка пересечения луча OX и отрезка AB, то чему равна длина отрезка OM?*

Ответ: $3/4$.

Докажем равенство

$$CM \cdot OD = MD \cdot OC. \qquad (1)$$

(При этом условие $OC = CD$ не используется.)

Заметим, что треугольники OAC и ODA подобны (углы OAC и ODA равны, поскольку и вписанный угол, и угол между касательной и хордой равен по величине половине дуги AC); поэтому

$$\frac{AC}{AD} = \frac{OC}{OA} = \frac{OA}{OD},$$

откуда

$$\frac{AC^2}{AD^2} = \frac{OC}{OD}. \qquad (2)$$

Аналогично

$$\frac{BC^2}{BD^2} = \frac{OC}{OD}. \qquad (3)$$

Теперь найдем отношение $CM:MD$. Оно равно отношению площадей треугольников ACB и ADB (достаточно опустить высоты на их общее основание AB), а синусы углов ACB и ADB равны (сумма этих углов равна π), поэтому, учитывая (2) и (3), получим (1):

$$\frac{CM}{MD} = \frac{AC \cdot BC}{AD \cdot BD} = \frac{OC}{OD}.$$

Обозначая $OM = x$ и используя условие $OC = 1$, $OD = 2$, находим x из уравнения (1):

$$2(x-1) = 2 - x, \text{ т.е. } 3x = 4.$$

У этой задачи есть и много других решений.

Например, для доказательства равенства (1) те, кто знаком с началами проективной геометрии, могут вспомнить, что «двойное отношение» четырех отрезков одной прямой равно двойному отношению синусов углов, под которыми эти отрезки видны из любой точки плоскости (это легко установить с помощью теоремы синусов или используя формулу площади треугольника):

$$\frac{MC}{MD} \cdot \frac{OC}{OD} = \frac{\sin\angle MAC}{\sin\angle MAD} \cdot \frac{\sin\angle OAC}{\sin\angle OAD} = \frac{BC}{BD} \cdot \frac{AC}{AD} = 1.$$

Здесь используется тот факт, что синусы вписанных углов пропорциональны хордам, на которые они опираются, а затем — формулы (2) и (3).

Впрочем, знаток проективной геометрии равенство (1), т.е. тот факт, что двойное отношение четверки точек O, C, M, D равно 1, докажет и без всяких вычислений: ведь рисунок 1 можно подвергнуть проективному преобразованию (центральной проекции), переводящей окружность снова в окружность, а точку O — в бесконечно удаленную

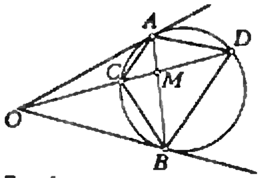


Рис. 1

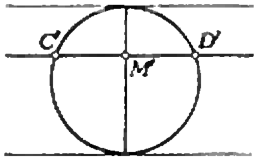


Рис. 2

точку O'; при этом двойное отношение не меняется, а для получающейся симметричной картинки (рис. 2) $C'M' = M'D'$ и отношение «бесконечных отрезков» $O'C'$ и $O'D'$ равно 1.

Н.Васильев, Д.Фомин

***М1388.** Даны различные квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$, старшие коэффициенты которых равны единице. Известно, что $f(1) + f(10) + f(100) = g(1) + g(10) + g(100)$. При каких x выполнено равенство $f(x) = g(x)$?*

Ответ: $x = 37$.

Пусть $f(x) = x^2 + ax + b$, а $g(x) = x^2 + px + q$. Из условия сразу следует, что $111a + 3b = 111p + 3q$, т.е. что $37a + b = 37p + q$. Но это и значит, что число 37 является корнем уравнения

$$f(x) = g(x).$$

А.Перлин

***М1389.** Во взводе национальной гвардии служат сержанты и рядовые, причем каждый рядовой подчинен одному или двум сержантам. Докажите, что можно уволить в запас не более половины взвода так, что каждым оставшимся рядовым будет командовать ровно один сержант.*

При решении этой задачи нам придется воспользоваться некоторыми сведениями из элементарной комбинаторики. Напомним, что через C_n^k $(k \le n)$ обозначается количество способов выбрать k предметов из n данных предметов. Известно, что

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Предположим сначала, что количество сержантов во взводе четно и равно $2n$. Уволить n из них можно C_{2n}^n способами.

Докажем, что хотя бы при одном из этих способов увольнения сержантов получится ситуация, удовлетворяющая условию задачи. Пусть x — количество рядовых, подчиненных ровно одному сержанту, а y — количество рядовых, подчиненных двум сержантам. Если мы увольняем n сержантов, то вместе с ними мы должны уволить а) всех

рядовых, подчиняющихся только этим сержантам;
б) всех рядовых, подчиненных каким-то двум из уволенных сержантов;
в) всех рядовых, подчиненных каким-то двум из оставшихся сержантов.

Предположим теперь, что количество уволенных рядовых для каждого способа увольнения n сержантов больше половины общего числа рядовых. Тогда каждый из x рядовых, подчиненных ровно одному сержанту, будет уволен в C_{2n-1}^{n-1} случаях — когда увольняется его командир (C_{2n-1}^{n-1} — количество способов выбора $(n-1)$ сержанта из $2n-1$).
Каждый из y рядовых, подчиненных двум сержантам, будет уволен в $C_{2n-2}^{n-2}+C_{2n-2}^{n}$ случаях (когда оба его командира либо уволены либо оставлены). Если во всех случаях увольняется больше рядовых, чем остается, то

$$xC_{2n-1}^{n-1}+y\left(C_{2n-2}^{n-2}+C_{2n-2}^{n}\right)>\frac{x+y}{2}C_{2n}^{n}. \qquad (\bullet)$$

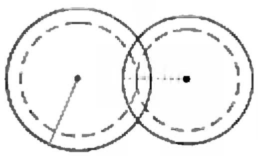
Но $\frac{1}{2}C_{2n}^{n}=C_{2n-1}^{n-1}$, а $C_{2n-2}^{n-2}+C_{2n-2}^{n}<\frac{1}{2}C_{2n}^{n}$, что явно противоречит неравенству $(\bullet)$.
Случай нечетного числа $2n+1$ сержантов рассматривается аналогично. Увольняется при этом n сержантов; каждый из x рядовых, подчиненных одному сержанту, увольняется в C_{2n}^{n-1} случаях, а каждый из y рядовых, подчиненных двум сержантам, увольняется в $C_{2n-1}^{n-2}+C_{2n-1}^{n}$ случаях, что приводит к невозможному неравенству

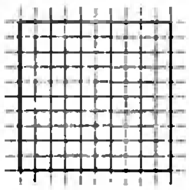
$$xC_{2n}^{n-1}+y\left(C_{2n-1}^{n-2}+C_{2n-1}^{n}\right)>\frac{1}{2}(x+y)C_{2n-1}^{n}.$$

А. Перлин

***М1390*.** На плоскости расположены несколько единичных кругов. Верно ли, что всегда можно отметить несколько точек так, что внутри каждого круга будет находиться ровно одна отмеченная точка?*

Ответ: нет, неверно.
Заметим, что если для некоторого набора кругов нужного множества точек не существует, то при добавлении к нему еще одного круга это свойство сохранится. Отсюда возникает идея: взять в качестве контрпримера множество из большого числа очень плотно расположенных кругов.
Пусть на клетчатой бумаге со стороной клетки $\varepsilon>0$ (где ε — маленькое число, которое мы выберем ниже) выбран достаточно большой квадрат $a\times a$ (скажем, $a>4$) и Q —





множество узлов клетчатой бумаги, лежащих в этом квадрате. Рассмотрим все круги радиусом 1 с центрами в точках множества Q.
Предположим, что существует некоторое конечное множество K точек такое, что в каждом из этих кругов лежит по одной точке из этого множества.
Условие, эквивалентное этому, можно сформулировать так: круги радиусом 1 с центрами в точках K (назовем их «красными») содержат все узлы в квадрате $a\times a$, причем каждый узел содержится только в одном красном круге.
Докажем, что это невозможно. В самом деле, никакие две точки из K не могут находиться друг от друга на расстоянии меньшем $2-2\varepsilon$ — иначе в пересечении соответствующих красных кругов содержится кружок радиусом ε, а в нем — хотя бы один узел. (Тот почти очевидный факт, что каждый кружок радиусом ε, даже $\varepsilon/\sqrt{2}$, содержит хотя бы один узел сетки с шагом ε, легко доказать с помощью такого перехода — замены точек на круги и обратно, — которым мы уже воспользовались: поскольку круги с радиусами $\varepsilon/\sqrt{2}$ и центрами во всех узлах покрывают квадрат, то для любой точки M квадрата найдется узел на расстоянии не большем $\varepsilon/\sqrt{2}$ от M, т.е. кружок с центром M обязательно содержит узел.) Таким образом, круги с радиусами $1-\varepsilon$ и центрами в красных точках *не пересекаются*.
Почти очевидно, что (при малом ε) красные круги при этом не могут покрыть все узлы внутри квадрата. Доказать это можно, например, так. Рассмотрим красный круг с центром O, покрывающий узел, ближайший к центру квадрата. Проведем пунктиром окружность радиуса $1+2\varepsilon$ с центром O. Выберем $\varepsilon<\pi/12$ столь малым, чтобы: (а) круг радиусом 1 с центром на расстоянии $2-2\varepsilon$ от O высекал на пунктирной окружности дугу MN, меньшую $\pi/12$ и (б) красный круг с центром на расстоянии $2+2\varepsilon$ от O был виден из центра O под углом $\alpha>2\pi/7$ (при ε близком к нулю α приближается к $2\pi/6$). Тогда не более 6 красных кругов будут пересекать пунктирную окружность; на ней покрытые кругами дуги в сумме составляют не более $\pi/2$, и останется не более 6 дуг суммарной величиной не менее $3\pi/2$. Значит, останется непокрытым достаточно большой (величиной $\beta>\pi/4$) участок кольца с центром O и радиусами 1 и $1+2\varepsilon$, в котором наверняка поместится кружок с радиусом ε и, тем самым, узел сетки.
Н. Васильев

***Ф1398.** Легкий самолет с выключенным мотором может планировать с минимальной горизонтальной скоростью $v=150$ км/ч под углом $\alpha=5°$ к горизонту (при попытке уменьшить скорость или угол самолет «сваливается в штопор»). Какую минимальную силу тяги должен развить движитель самолета для взлета с горизонтальной плоскости? Считайте, что скорость самолета во всех случаях направлена вдоль фюзеляжа. Масса самолета $m=2000$ кг.*

По условию задачи, движение планируемого самолета равномерное, значит, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила сопротивления $\vec{F}_{сопр}$ компенсируются силами, возникающими при взаимодействии самолета с потоком воздуха (рис. 1). Не

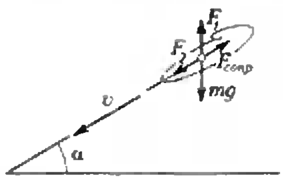


Рис. 1

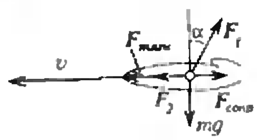


Рис. 2

вполне обычным способом мы можем представить эти силы в виде $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, причем $\vec{F}_1=-m\vec{g}$ и $\vec{F}_2=-\vec{F}_{сопр}$.
Силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ зависят от скорости самолета и характера обтекающего потока воздуха. Для оценки будем считать, что скорость взлетающего самолета практически равна v, т.е. силы $\vec{F}_{сопр}$, $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ «развернулись» на угол α вместе с вектором скорости (рис. 2). В этом случае условие равномерного движения самолета без давления на горизонтальную плоскость (во время взлета сила реакции равна нулю) можно записать в виде

$$F_{тяги}=F_1\sin\alpha,\ mg=F_1\cos\alpha.$$

Учитывая малость угла α, заменим $F_1\cos\alpha$ на F_1, т.е. для взлета и в самом деле скорость практически не придется увеличивать по сравнению с v.

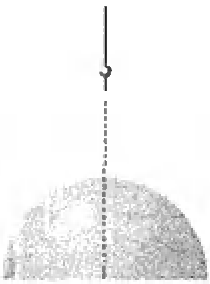
Итак,

$$F_{тяги} = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha \approx 1700\ \text{Н}.$$

Нет смысла уточнять эту оценку — характер обтекания самолета потоком у земли несколько отличается от случая свободного планирования, а мы этого учесть все равно не можем.

А.Андрианов

***Ф1399.** Палочка длиной $l = 1$ м с насаженной на нее бусинкой находится на расстоянии $r = 100\,000$ км от Земли. Бусинка вначале расположена на расстоянии $b = 1$ см от того конца палочки, который ближе к Земле (см. рисунок). Систему освобождают. Считая трение пренебрежимо малым, найдите время, через которое бусинка соскользнет с палочки. Какое расстояние за это время пролетит палочка? Радиус Земли $R = 6400$ км.*



После освобождения системы и палочка, и бусинка падают на Землю, причем их ускорения немного различаются — бусинка находится чуть ближе к центру Земли:

$$a_1 = g_0\frac{R^2}{r^2},\quad a_2 = g_0\frac{R^2}{(r - l/2 + b)^2},$$

где g_0 — ускорение свободного падения на поверхности Земли. Условие соскальзывания бусинки с палочки запишем в виде

$$\frac{a_2\tau^2}{2} - \frac{a_1\tau^2}{2} = b,$$

откуда для времени соскальзывания τ получаем

$$\tau = \sqrt{\frac{2b}{a_2 - a_1}} = \sqrt{\frac{2br^2(r - l/2 + b)^2}{g_0R^2\left(r^2 - (r - l/2 + b)^2\right)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2br^3}{g_0R^2(l - 2b)}} = \frac{r}{R}\sqrt{\frac{r}{g_0\left(l/(2b) - 1\right)}} \approx 2\ \text{ч}.$$

Скорость движения тел по орбите равна

$$v = \sqrt{g_0\frac{R^2}{r^2}r} = \frac{R}{r}\sqrt{g_0r}.$$

За время τ палочка пролетит

$$L = v\tau = \sqrt{g_0r}\sqrt{\frac{r}{g_0\left(l/(2b) - 1\right)}} = \frac{r}{7} \approx 14\cdot10^3\ \text{км}.$$

О.Шведов

***Ф1400.** Сосуд объемом $V = 10$ л с площадью поперечного сечения $S = 0{,}01$ м^2 разделен пополам тяжелым поршнем массой $m = 1$ кг, который может двигаться без трения. В каждой половине сосуда содержится $m = 5$ г воды, а воздух откачан. Температура сосуда и его содержимого поддерживается равной $T = 350$ К. Поршень сдвигают от середины на расстояние $d = 1$ см и отпускают. Как будет двигаться поршень? Как зависит характер движения поршня от температуры сосуда?*

Рассчитаем вспомогательную величину, а именно давление порции водяного пара массой $m = 5$ г при данных условиях:

$$p = \frac{mRT}{MV/2} \approx 1{,}6\cdot10^5\ \text{Па}.$$

Видно, что это значение превышает даже 1 атм — давление насыщенного пара при более высокой температуре $T_1 = 373$ К (т.е. + 100 °С). Значит, в обеих частях сосуда пар будет насыщенным (испарится не вся вода), давления с двух сторон поршня будут одинаковыми, а поршень так и останется в новом положении.

Если увеличить температуру до такой степени, что испарится вся вода, то получится стандартная задача «про колебания поршня».

Д.Островский

***Ф1401.** В сосуде под поршнем находится некоторое количество азота. Медленно отодвигая поршень, плавно уменьшим давление газа. Какова молярная теплоемкость газа на малом участке процесса, если при увеличении объема на 1% давление уменьшилось на 0,5%?*

Введем обозначения:

$$\Delta V = \frac{1}{100}V_0 \ \text{и}\ \Delta p = \frac{1}{200}p_0$$

— абсолютные значения изменений объема и давления. Запишем уравнения состояния одного моля газа для двух моментов:

$$p_0V_0 = RT_0,$$

$$(p_0 - \Delta p)(V_0 + \Delta V) = R(T_0 + \Delta T),$$

где ΔT — изменение температуры газа. Учтем, что $\Delta V/V_0$ и $\Delta p/p_0$ малы. Тогда

$$R\Delta T = p_0\Delta V - V_0\Delta p = p_0V_0\left(\frac{\Delta V}{V_0} - \frac{\Delta p}{p_0}\right).$$

Работа газа на данном участке процесса равна

$$A = p_{ср}\Delta V \approx p_0\Delta V = p_0V_0\frac{\Delta V}{V_0}.$$

Внутренняя энергия газа увеличилась на $\Delta U = \frac{5}{2}R\Delta T$, и газ получил количество теплоты

$$Q = A + \Delta U = p_0V_0\left(\frac{\Delta V}{V_0} + \frac{5}{2}\frac{\Delta V}{V_0} - \frac{5}{2}\frac{\Delta p}{p_0}\right) =$$

$$= p_0V_0\left(\frac{7}{2}\frac{\Delta V}{V_0} - \frac{5}{2}\frac{\Delta p}{p_0}\right).$$

По определению молярной теплоемкости,

$$C = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{p_0V_0\left(\frac{7}{2}\frac{\Delta V}{V_0} - \frac{5}{2}\frac{\Delta p}{p_0}\right)}{\frac{p_0V_0}{R}\left(\frac{\Delta V}{V_0} - \frac{\Delta p}{p_0}\right)} = \frac{9}{2}R.$$

А.Рафаилов

***Ф1402.** Газовая смесь состоит из равного числа молей гелия, азота и углекислого газа. Найдите показатель адиабаты для такого газа.*

Решение этой задачи довольно простое. Показатель адиабаты равен отношению молярных теплоемкостей газа при постоянном давлении и при постоянном объеме:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V},$$

поэтому остается найти величину C_V для такого газа. Гелий — одноатомный газ, его молярная теплоемкость при постоянном объеме равна $3/2\,R$. Азот — двухатомный газ, для него эта величина составляет $5/2\,R$, а для трехатомного углекислого газа (это уже многоатомный газ) C_V равна $3R$. В одном моле смеси по условию содержится по $1/3$ моля каждого газа, т.е.

$$C_V = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}R + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}R + \frac{1}{3}\cdot3R = \frac{7}{3}R.$$

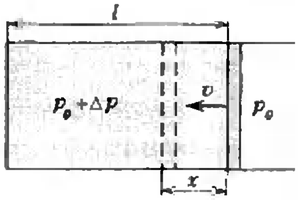
Тогда окончательно

$$\gamma = 1 + \frac{R}{C_V} = \frac{10}{7}.$$

О.Шпырко

Ф1403. *Между двумя тяжелыми поршнями в длинной горизонтальной трубе находится ν молей идеального газа. Система вначале пребывает в равновесии. Один из поршней начинают двигать по направлению к другому с постоянной скоростью v. При какой максимальной величине этой скорости расстояние между поршнями в процессе движения будет изменяться не более чем на 1%? Температура газа остается равной T_0, масса второго поршня M.*

Удобно перейти в систему отсчета, которая движется вместе с первым поршнем с постоянной скоростью v. Тогда задача выглядит так: труба закрыта с одной стороны «наглухо», а с другой стороны — поршнем массой M, которому мы в первый момент сообщаем скорость v (см. рисунок).



Температура газа по условию постоянна (это можно «оправдать» хорошим теплообменом между газом и массивными стенками трубы), а изменение объема мало (всего 1%) — это упростит вычисления.

Для данной порции газа запишем уравнения состояния в начальный момент:

$$p_0 lS = \nu RT_0$$

и после сдвига поршня на малую величину x:

$$(p_0 + \Delta p)(l - x)S = \nu RT_0 .$$

После пренебрежения совсем малыми величинами получим

$$p_0 x = \Delta p l , \text{ или } F = \Delta pS = \frac{p_0 S}{l} x .$$

Получаем обычное уравнение колебаний — «возвращающая» сила пропорциональна отклонению — с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{p_0 S}{lM}} = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{p_0 lS}{M}} = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{\nu RT_0}{M}} .$$

Для гармонических колебаний максимальное смещение x_m и максимальная скорость v_m связаны соотношением

$$v_m = \omega_0 x_m .$$

Отсюда получаем

$$v_m = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{\nu RT_0}{M}} \cdot 0{,}01 l = 0{,}01\sqrt{\frac{\nu RT_0}{M}} .$$

О.Шведов

Ф1404. *Два проводящих шарика радиусом r каждый соединены тонкой проволочкой длиной l. Шарики расположены на расстоянии R от точечного заряда Q, как показано на рисунке. С какой силой заряд действует на «гантельку»? Полный заряд системы шариков равен нулю. Считайте, что $R \gg l \gg r$.*

В поле заряда Q на шариках заряды перераспределятся так, что потенциалы шариков окажутся одинаковыми (если соединяющая шарики проволочка очень тонкая, влиянием ее поверхностных зарядов можно пренебречь). Потенциал ближнего шарика будет равен

$$\varphi_1 = k\frac{Q}{R - l/2} + k\frac{-q}{r} + k\frac{q}{l},$$

а дальнего —

$$\varphi_2 = k\frac{Q}{R + l/2} + k\frac{q}{r} + k\frac{-q}{l}.$$

Приравнивая потенциалы и пренебрегая малыми величинами, получим

$$\frac{2q}{r} = \frac{Ql}{R^2}, \text{ или } q = \frac{Qlr}{2R^2}.$$

(При расчете мы полагали, что заряды равномерно распределены по поверхностям удаленных шариков — распределение же «основного» заряда по поверхности может быть любым.)

Теперь силы. Сила, действующая на гантельку, складывается из сил, действующих на каждый ее заряд:

$$F = F_1 + F_2 = -k\frac{Qq}{(R - l/2)^2} + k\frac{Qq}{(R + l/2)^2} =$$

$$= -k\frac{2Qql}{R^3} = -k\frac{Q^2l^2r}{R^5}.$$

Знак «минус» в данном случае означает, что заряд притягивает гантельку.

А.Зильберман

Ф1405. *В наличии имеется три резистора, сопротивления которых составляют 1, 2 и 3 Ом. Каждый из них может рассеивать мощность не более 1 Вт. Как их нужно соединить и к какому напряжению подключить, чтобы получить нагреватель с максимальной суммарной мощностью?*

Задача эта решается довольно просто. Главное тут — рассмотреть все возможные схемы соединения резисторов и ничего не упустить. Итак:

Резисторы можно соединить последовательно — при этом максимальная мощность составит ровно 2 Вт (максимальный ток в этой схеме определяется резистором сопротивлением 3 Ом). При параллельном соединении всех резисторов мощность не превысит $(1 + 1/2 + 1/3)$ Вт $= 11/6$ Вт (максимальное напряжение задается резистором сопротивлением 1 Ом). Есть еще три схемы, соответствующие рисунку 1, и столько же — рисунку 2. Легко видеть, «чемпионом» является вариант схемы на рисунке 1, где соединены параллельно резисторы сопротивлениями 2 и 3 Ом, максимальная мощность при этом равна

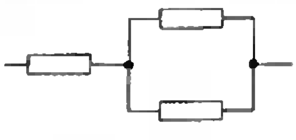


Рис. 1

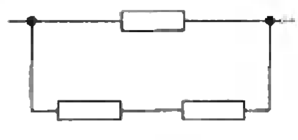


Рис. 2

$$P_{max} = (1 + 6/5) \text{ Вт} = 2{,}2 \text{ Вт}.$$

Р.Александров

Ф1406. *Известно, что максимальную мощность источник отдает при условии, что сопротивление нагрузки равно внутреннему сопротивлению источника. Генератор синусоидального напряжения имеет внутреннее со* *противление r, частота генератора ω, сопротивление нагрузки R, причем R≫r. Обычно в таких случаях применяют согласующий трансформатор, однако в нашем случае для согласования можно использовать простую схему, содержащую катушку и конденсатор. Предложите такую схему и рассчитайте величины L и C, при которых мощность, выделяющаяся в виде тепла в нагрузке, будет максимальной.*

Для согласования источника с нагрузкой воспользуемся явлением резонанса. Рассмотрим схему, изображенную на рисунке 1. Здесь выделен резистор r — он соответствует

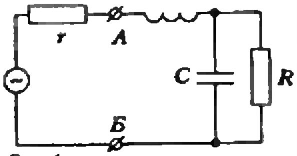


Рис. 1

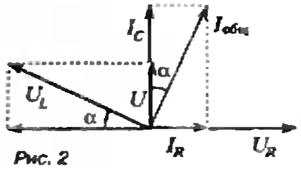


Рис. 2

внутреннему сопротивлению источника переменного напряжения.

Для оптимальной передачи мощности в нагрузку вся цепь справа от $АБ$ должна на рабочей частоте иметь чисто активное сопротивление, равное внутреннему сопротивлению источника r. Учитывая, что $r \ll R$ (по условию), можно сделать вывод: токи через катушку и конденсатор во много раз превышают ток через резистор R. Это существенно упростит расчет.

Колебательный контур представляет чисто активное сопротивление на частоте резонанса. В нашем случае, поскольку потери в контуре малы, эту частоту можно записать в виде

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

или

$$LC = \frac{1}{\omega^2}. \qquad (1)$$

Нужно получить еще одно соотношение между L и C. Для этого нарисуем векторную диаграмму (рис. 2). Начнем рисовать с вектора U_R — напряжения на параллельно соединенных конденсаторе и резисторе. Теперь изобразим ток конденсатора, равный,

$$I_C = \frac{U_R}{X_C} = U_R\omega C,$$

ток через резистор R, равный

$$I_R = \frac{U_R}{R},$$

и полный ток — он протекает через катушку (и источник) и равен

$$I_{общ} = \sqrt{I_C^2 + I_R^2} = U_R\sqrt{1/R^2 + \omega^2C^2}.$$

Напряжение на катушке при этом равно

$$U_L = X_L I_{общ} = U_R\omega L\sqrt{1/R^2 + \omega^2C^2}.$$

Если на диаграмме разложить вектор, изображающий U_L, на две составляющие — вдоль U_R и перпендикулярно ему, то сразу видно, что полное напряжение между точками A и $Б$ равно его перпендикулярной составляющей:

$$U = U_L\sin\alpha = U_R\omega L\sqrt{1/R^2 + \omega^2C^2} \times$$

$$\times \frac{U_R/R}{\sqrt{U_R^2\left(1/R^2 + \omega^2C^2\right)}} = \frac{U_R\omega L}{R}.$$

И наконец, соотношение между полным напряжением и общим током:

$$\frac{U}{I_{общ}} = \frac{U_R\omega L}{RU_R\sqrt{1/R^2 + \omega^2C^2}} = \frac{\omega L}{\sqrt{1 + \omega^2C^2R^2}} \approx \frac{L}{RC} = r,$$

или

$$\frac{L}{C} = Rr. \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) получаются выражения для L и C:

$$L = \frac{\sqrt{Rr}}{\omega}, \quad C = \frac{1}{\omega\sqrt{Rr}}.$$

Заметим, что эту задачу можно решить «в лоб», без использования свойств контура на резонансной частоте — методом «комплексных амплитуд» (см., например, «Квант», 1993, № 3, решение задачи Ф1382).

А.Зильберман

Ф1407. *Световод в форме усеченного конуса сделан из стекла, его боковая поверхность посеребрена (для хорошего отражения лучей, падающих изнутри). Плоскости оснований конуса перпендикулярны его оси, их диаметры D и d, высота конуса H (H≫D≫d). На большее основание падает световой пучок, параллельный оси. Все ли падающие лучи после многократных отражений выйдут через плоскость меньшего основания?*

Для построения хода луча при многократных отражениях от плоских поверхностей (в нашем случае отражающая поверхность коническая, но для тех лучей, которые нас интересуют, различия нет) хорошо подходит известный из геометрических задач «бильярдный» прием: шарик (луч) после столкновения со стенкой (отражающей поверхностью) «проскакивает» на зеркально отраженный стол A^* и продолжает двигаться по прямой (рис. 1).

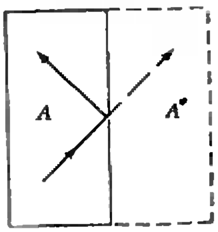


Рис. 1

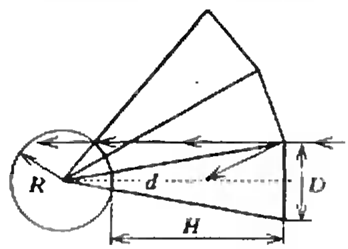


Рис. 2

В данной задаче достаточно рассмотреть ход «крайнего» луча — после первого отражения он переходит в соседний — «достроенный» конус и т.д. (рис. 2). Малые диаметры d оказываются сторонами правильного многоугольника, вписанного в окружность некоторого радиуса R. Учитывая условие задачи $d \ll D \ll H$, можно считать, что любой луч выйдет через плоскость меньшего основания, если

$$\frac{D}{2} < R.$$

Теперь немного геометрии:

$$R = \frac{d}{\alpha} = \frac{d}{D-d}H.$$

Отсюда

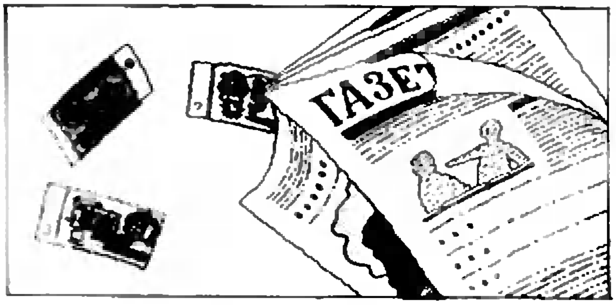
$$\frac{D}{2} < \frac{Hd}{D-d}, \text{ или } H > \frac{D(D-d)}{2d} \approx \frac{D^2}{2d}.$$

Итак, если $H > D^2/(2d)$, то все лучи нашего пучка выйдут через плоскость меньшего основания.

С.Панков

Задачи

1. В кошельке лежали купюры в 1, 3, 5 и 10 рублей, причем рублевые купюры составляли половину общей суммы денег. Когда я покупал газету за 16 рублей, ветром унесло 5 купюр. Хватит ли оставшихся на покупку? (*С.Манвелов*)



2. Проверьте следующие равенства:

$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$,

$1353 = 13 + 14 + \ldots + 52 + 53$,

$133533 = 133 + 134 + \ldots + 532 + 533$,

сформулируйте и докажите общую закономерность. (*П.Филевич*)

3. В ночь перед Рождеством Солоха принимает гостей и прячет их в мешки. Если бы она в каждый мешок прятала по одному гостю, то одного мешка не хватило бы. Если бы в каждый мешок она прятала по два гостя, то один мешок остался бы лишним. Сколько человек посадила Солоха в мешки?

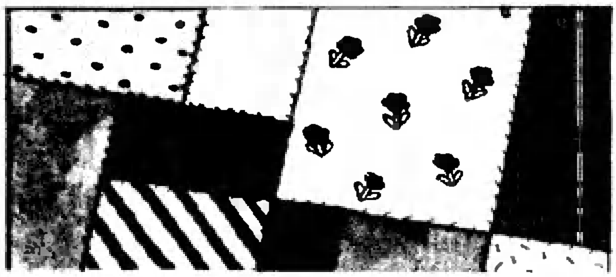
Примечание. Эта задача скорее по литературе, чем по математике. (*И.Акулич*)

4. Решите арифметический ребус.

$$\begin{cases} K^2 + B^2 = A^2 + H^2 + T^2, \\ K = B + A + H + T. \end{cases}$$

Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные. (*С.Баженов*)

5. Прямоугольник 5×9 разрезали на 10 прямоугольников с целочисленными сторонами. Докажите, что среди них обязательно найдутся два одинаковых. (*К.Кохась*)



Конкурс «Математика 6—8»

Мы продолжаем конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 20 задач и заканчивается в апреле. Победители будут награждены премиями журнала «Квант» и Российского благотворительного фонда «Интеллект». Решения задач из этого номера высылайте не позднее 15 апреля 1994 года по адресу: 103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, класс.

6. Квадрат 4×4 разделен на единичные квадраты. Можно ли представить полученную сетку их периметров как сумму восьми ломаных длины 5? А как сумму пяти ломаных длины 8? (*Н.Авилов*)

7. Чебурашка и Крокодил Гена делят одно и то же натуральное число с остатком. Чебурашка делит его на 8, а Гена — на 9. Частное, которое получил Чебурашка, и остаток, который получил Гена, в сумме дают 13. Какой остаток получился у Чебурашки? (*К.Кохась*)

8. Существует ли многочлен с целыми коэффициентами такой, что его свободный член равен 1995, числа 1 и 5 являются его корнями, при некотором целом значении x равный 1994? (*С.Азпецкий*)

9. В городе Подорожаевске регулярно изменяли цены на проезд в трамвае следующим образом: новая плата за проезд устанавливалась равной прежнему штрафу за безбилетный проезд, а новый штраф приравнивался десятикратной новой плате за проезд. Упрямый Фома принципиально не платил за проезд и в результате был 9 раз оштрафован, кроме того, однажды при уплате штрафа он потерял одну денежную купюру. В итоге он лишился 777 рублей. Какая купюра была утеряна? (*И.Акулич*)

10. В таблице 6×6 расставлено 36 чисел так, что сумма чисел по каждой из 22 диагоналей (диагональ может состоять из 1 (угловой), 2, 3, 4, 5 или 6 клеток) одна и та же. Какие значения может принимать эта сумма? (*С.Токарев*)

Волшебное зеркало мага

Л. ЛИХТАРНИКОВ

Эту историю сообщает в своих мемуарах досточтимый Бильбо Бэггинс, знаменитый Взломщик, о котором рассказал Джон Рональд Руэл Толкин в увлекательной повести «Хоббит, или Туда и обратно», а также в некоторых следующих книгах, повествующих о борьбе великого мага Гэндальфа (он же Митрандир, или Серый странник) со злым волшебником Сауроном. В конце концов Гэндальф победил, завершив бессонными трудами освобождение древней страны гномов, эльфов и хоббитов. О, это захватывающие истории, полные необыкновенных приключений! Если вы слыхали хотя бы четверть того, что рассказал об этом Толкин, а он говаривал, что знает лишь малую толику того, что рассказывают о Сером страннике, то вы подготовлены к любой, самой невероятной истории. Приключения вырастали как грибы всюду, где бы он ни появился.

Впрочем, вернемся к славному хоббиту Бильбо Бэггинсу. Мы не будем излагать здесь потрясающую историю его путешествия Туда и Обратно, но считаем своим долгом напомнить, что очень важная персона среди гномов, сам Торин Оукеншильд, Король под Горой, говорил, что мистер Бэггинс его друг и собрат, а также «превосходный и дерзновенный хоббит, да не выпадет никогда шерсть на его ногах!» Может быть, вы думаете, что Торин мог такое сказать о любом хоббите с толстеньким брюшком? Ну уж нет! Никакая хоббичья нора (а наша история случилась как раз в хоббичьей, а значит — благоустроенной, норе) со всеми припасами, заготовленными даже внуком Старого Тука, в котором, как известно, текла доля крови эльфов, не могла повлиять на мнение неимоверно важного Торина.

Все дело в той беседе, которая состоялась перед походом за сокровищами гномов между Гэндальфом, Торином, его двенадцатью подданными-гномами и, конечно, при участии нашего Бильбо. Собственно говоря, это была не простая беседа, а настоящий урок волшебства, преподанный гномам великим магом. И лучшим учеником оказался хоббит!

...Итак, после хорошего ужина и десерта из кексов, кофе и доброго эля, Бильбо пригласил гостей посидеть у камина. Никто из них позже не смог вспомнить, с чего начался урок. Возможно, Гэндальф, всегда хорошо читавший потаенные мысли окружающих, и на сей раз удивил гномов этой своей способностью, и пока он по своему обыкновению тихонько покатывался со смеху, Бильбо удивленно спросил его, как он это делает. Во всяком случае, Бильбо начинает свой рассказ с того, каким серьезным стал вдруг маг и как он пробурчал себе под нос: «...Ну что же, меня это развлечет, а вам будет полезно, а возможно, и выгодно, если вы хотите добраться до конца предстоящего приключения...»

— Прелестно! — сказал Гэндальф.

— Уважаемый Торин! В каких капюшонах прибыли сюда гномы?

— В лучших отстежных капюшонах для хождения в гости, разумеется! Самых разных цветов: красного, белого, фиолетового, зеленого, серого, желтого... Лично у меня — голубой, с длинной серебряной кистью! Да, еще в нашем багаже есть запасные капюшоны, к вашим услугам, — ответил Торин с некоторым удивлением.

— Несите их все сюда! — распорядился Гэндальф.

Молодые гномы Фили и Кили быстро принесли капюшоны. Целую кучу разноцветных капюшонов!

— К вашим услугам! — сказали Фили и Кили, вывалив эту кучу на стол.

Гэндальф выбрал из кучи шесть красных, два синих и три белых капюшона, а все остальные велел спрятать. Затем он усадил в кружок пятерых гномов: Фили, Кили, Дори, Нори и Ори.

— Сейчас Бильбо погасит лампу, а я в темноте надену пять капюшонов пятерым гномам, — сказал волшебник. — Гаси, Бильбо!

Когда через минуту лампу зажгли, то все увидели на Фили белый, на Кили — синий, на Дори, Ори и Нори — красные капюшоны. Правда, Гэндальф тут же спросил пятерых гномов, видят ли они сами, какого цвета капюшоны у них на головах, и выяснилось, что увидеть, какой капюшон у тебя на голове, невозможно.

— Ну и что дальше? — спросил Бильбо. Вопрос прозвучал, возможно, недостаточно вежливо, но смогли бы вы быть безукоризнено любезными, если бы в вашем доме орда гномов съела все припасы, а великий маг, который привел эту орду, затеял на ночь глядя непонятные игры с гномьими капюшонами?

— А дальше я попрошу этих гномов назвать цвет капюшонов, которые на них надеты, — объяснил маг. — И чтоб больше никто рот не открывал! Я думаю, что кто-то из них может решить эту задачу.

В полном молчании слышалось только обиженное сопение всех тринадцати гномов, которые, как известно, всегда сопят носом при значительном интеллектуальном напряжении. Прошло десять минут, но никто из пятерых не смог назвать цвета своего капюшона. Когда Гэндальф разрешил говорить, раздался общий возмущенный вопль гномов.

— Это нельзя сделать без зеркала! — кричали они.

— Вздор! — отрезал маг. — Вечно вам, гномам, нужны инструменты. Зеркала вам подай! Я утверждаю, что у каждого из вас уже есть замечательное, волшебное зеркало. Да не озирайтесь, Ори, зеркало не на капюшоне, а под вашим крепким черепом! Думаю, что придется обратиться за помощью к хоббиту. Что вы думаете об этой задаче, Бильбо?

— Я хотел бы узнать у вас, милейший сэр, так ли важно для нас, что гномов именно пять, а капюшоны на них трех цветов? — спросил Бильбо.

напуская на себя деловой вид (обычно предназначавшийся для тех, кто пытался занять у него денег).

— Внимание! Внимание! — воскликнул Гэндальф. — Хоббит задал себе правильный вопрос, хотя и несколько более общий, чем хотелось бы. Что бы вы хотели сказать, Бильбо?

— Я бы предпочел иметь поменьше всего этого: и гномов, и капюшонов, — обиженно заявил хоббит, считавший, что вопрос он задавал вовсе не себе. — Уж гномов-то точно хватило бы двоих, а капюшонов тоже не больше чем двух цветов, скажем, красные и синие.

— Хоббиты всегда хотят проблемы попроще, а припасов в кладовой — побольше, — прокомментировал Торин.

— Неплохо! — одобрил хоббита Гэндальф. — Вот вам два гнома — Балин и Двалин и три капюшона — два красных и один синий, дорогой Бильбо. Что будем делать?

— Н-ну... — протянул хоббит и глубоко задумался.

Через несколько минут он попросил погасить лампу, а когда ее зажгли, то на Балине был надет красный капюшон, а на Двалине — синий. Балин увидел на Двалине синий капюшон и сразу завопил:

— У Бильбо был один синий! Значит, на мне красный капюшон! Я понял, понял!

— Что бы ты понял, если бы на Двалине тоже был красный капюшон? — успокоил его Торин Оукеншильд. Балин замолчал.

— Вот это бы и понял, — солидно сказал Двалин. — Он бы тогда не орал как сумасшедший, а я бы знал, что на мне он не видит синего капюшона, то есть на мне красный!

— Что вы скажете, благороднейший? — спросил Гэндальф Торина. Торин принял величественный вид.

— Я думаю, что самый простой случай, когда гномов всего двое и капюшонов два. Как говорят, третий лишний!

— Неплохое замечание, — кивнул Гэндальф. — Если бы я показал нашим пяти умникам только пять капюшонов, то они давно уже все бы ответили на вопрос! Что-что, а арифметику гномы знают и отнимать для них не проблема.

Гномы снова обиделись, а Бильбо лукаво усмехнулся.

— Конечно, если бы вы, сэр, дали

бы мне много капюшонов... Ну, скажем, даже по два обоих цветов, то задача бы не имела решения! Так что не третий лишний, а четвертый, причем синий, глубокоуважаемый Торин!

— Да, — согласился Торин. — Три красных и один синий — не проблема, поэтому дело не в количестве всех капюшонов, а в том, чтобы синий был только один...

— Еще лучше, если ни одного... — пробурчал Двалин.

— Конечно, — сварливо откликнулся Гэндальф, — тогда и думать не о чем! И почему это вы не любите задач? Задачи с капюшонами трех цветов заведомо сложнее, чем двух, но даже для двух цветов эльф сообшонов, — сказал он. — Мне кажется, я смогу объяснить, в чем здесь дело.

— А дело здесь в том, сколько с самого начала будет синих капюшонов, — заметил Ори, который уже добрых полчаса разглядывал синий капюшон, надетый на Кили. — Если бы синий капюшон был только один... — Ори вздохнул. — Но их не может быть два!

— Да, если синих капюшонов будет три или больше, а красных тоже не меньше трех, то ни один гном не сможет сказать, какой на нем капюшон, — подтвердил Бильбо. — Нет, нет, — поспешил он предупредить обиду гномов, которые сразу насупились, — никто не сможет! Если я вижу только два капюшона из трех, нем красный капюшон! — заявил Торин. — Третьего-то синего нет.

— Верно! — обрадовался хоббит. — Осталось только два случая! Что же будет, если на Балине синий капюшон, на Двалине — красный и на мне тоже красный? Я вижу синий и красный, а Балин видит два красных. Балин уж точно не сможет ничего сказать (не обижайтесь, Балин, вашей вины тут нет!), а мы с Двалином можем подумать, что у нас синий капюшон...

— Лично я не знаю, — проворчал Двалин. — Может быть синий, а может быть красный...

— Нет, Двалин, если я представляю себе, что на мне синий капюшон, то тогда вы видите два синих — мой

разил бы все в две секунды!

Это прозвучало не только совершенно невежливо по отношению к гномам, которые недолюбливали эльфов, но и хоббита задело за живое. Опасаясь, что Торин опять примется за свои комментарии о проблемах попроще и припасах, Бильбо решил разобраться с капюшонами побыстрее.

— Я предлагаю, досточтимые гости, рассмотреть теперь трех гномов и взять сколько угодно красных капюто третий (мой) может быть и красным, и синим, ведь и тех и других хватает на всех! А вот два или один синий и много красных — это два разных случая, которые необходимо обдумать. Даже не два, а три случая: когда будут надеты только красные капюшоны, когда на одном гноме будет синий и, наконец, когда на двух гномах будут два синих капюшона!

— Ну уж если синих будет два, то третий гном сразу догадается, что на и Балина и, как сообразительный гном, сразу скажете, что ваш капюшон — красный!

Двалин вежливо поклонился, подтверждая, что хоббит не ошибается в оценке его несомненных достоинств.

— Если же вы молчите, — продолжал Бильбо, — то тем самым даете мне знать, что на мне не синий, а красный капюшон!

— Отлично, — сказал Гэндальф, — любой из тех, на ком красный капюшон, в этом случае может назвать цвет своего капюшона. Остался только один случай — когда надеты три красных капюшона.

— Это уже просто! — заявил Бильбо. — Главное сделано. Если в последнем случае я представляю себе, что на мне синий капюшон, то досточтимые гномы (поклон, к вашим услугам!) воспользуются нашими предыдущими рассуждениями и могут сказать, что на них надеты красные капюшоны.

Гномы удовлетворенно улыбнулись — хоббит явно относился к ним с надлежащим уважением.

— Итак, — подытожил волшебник, — если все трое относятся друг к другу с уважением и могут представить себя на месте другого, то единственное условие успеха — чтобы синих капюшонов было хотя бы на один меньше, чем участников игры.

— Я считаю, что игра нечестная, — выступил Торин. — Что-нибудь сказать правильно могут только те, на ком красные капюшоны, которых, как все поняли, должно быть больше, чем количество гномов. А те, на ком синие, ничего не говорят в любом из трех случаев!

— Вот что значит быть аристократом! — восхитился Гэндальф. — Права меньшинства у вас на первом месте, дорогой Торин Оукеншильд. Но здесь вы ошиблись. Те, кто молчат, — говорят своим молчанием!

Пятеро гномов, которые все еще не могли определить цвета своих капюшонов, возбужденно зашевелились. Гэндальф любил парадоксальные фразы.

— Что же получается, на нас всех синие капюшоны? — спросил Ори. — Я же вижу, что это не так!

— Постойте! — вмешался Бильбо. — Сейчас мы разберемся и с вашим случаем, и вы получите по кексу за ваше терпение. Но сначала мы должны закончить со случаем двух цветов. Мне еще не все ясно. Гномов в капюшонах двух цветов может быть сколько угодно — обозначим количество гномов буквой N. Пусть красных капюшонов будет R, а синих — B. Вы говорите по-английски, сэры? R — *red*, B — *blue*. Итак, или $R < N$, или $B < N$ — иначе все будут молчать как аристократы! Еще одно условие, чтобы капюшонов хватило на всех: $R + B \geq N$, причем если $R + B = N$, то задача решается вычислением, без лишних слов, как справедливо заметил высокочтимый Торин. Но здесь случаев бездна, если $R + B > N$, клянусь моим дедушкой Старым Туком!

— Стоит хоббиту ввести буквенные обозначения, как он уже пугается бездны, — насмешливо заметил Гэндальф. — У вас еще будет возможность опуститься на дно любой бездны. И вы убедитесь, что это дно существует!

— Хорошо, хорошо, — заторопился Бильбо, зная могущество Серого странника, которому не составит труда отправить нерадивого ученика в бездну, — сейчас все сделаем. Я полагаю, что есть один случай, когда все ясно. Пусть $B < N$ и все B синих капюшонов надеты. Тогда те $N - B$ гномов, на которых красные капюшоны, могут сразу сказать, что на них красные. А вот если надеты не все синие...

— Спускайтесь вниз! — подсказал волшебник.

— Так... если надето $B - 1$ синих капюшонов, — бормотал Бильбо, — я сижу в красном, а думаю, что на мне синий... Тогда снова кто-то из красных, например, Балин, скажет, что на нем... Он ведь будет видеть B синих! Значит, если эти, в красных капюшонах, молчат, то на мне тоже красный капюшон! Понятно... А если надето $B - 2$ синих и я их вижу, то предположив, что на мне синий капюшон, я могу утверждать, что теперь Балин, который сидит в красном капюшоне, может думать так, как я думал, когда я видел $B - 1$ синих капюшонов. Немного посидим, помолчим, и Балин догадается, что на нем красный капюшон. О, так я действительно спускаюсь: $B - 1$, $B - 2$, ... Неужели все случаи почти одинаковы до последнего, когда синих капюшонов не будет ни одного?

— Правильно, — подтвердил Гэндальф. — Теперь вы знаете главный секрет волшебства — Великое зеркало.

— Если число отложенных синих капюшонов равно 2, 1 или 0, то задача разрешима.

— А как же с тремя цветами? — закричали пятеро уставших гномов.

— Клянусь моим дедушкой, Старым Туком, — начал Бильбо, — теперь я знаю, что делать. Я думаю, что Дори, Нори и Ори могут определить цвет своих капюшонов! Скажи, Дори, на тебе может быть синий капюшон?

Дори подумал и ответил:

— Нет, не может, тогда Нори, Ори и Фили видели бы два синих капюшона (Кили, молчи!) и уже знали бы, что на них не синие капюшоны. Тогда они знали бы, что на них могут быть только красные и белые, и могли бы не обращать внимание на двоих в синих капюшонах... Ой, но это же задача, которую мы уже решили: три гнома в капюшонах двух цветов! Они молчат, значит, на мне не синий капюшон!

— Великая Редукция! — провозгласил Гэндальф. — Теперь вы знаете и второй секрет магов. Владельцы капюшонов двух цветов могут объединиться в одну партию «красно-белых», и задача сведется (редуцируется) к уже решенной.

Гномы ликовали. Теперь они знали настоящий волшебный секрет и, кроме того, наконец могли встать и размять ноги. Но маг несколько охладил их пыл, предложив каждому самостоятельно решить несколько более сложных задач. Вот они:

1. *Имеется 5 гномов. Им показали 3 красных и 4 синих капюшона. В темноте на них надели 5 капюшонов, а 3 спрятали. Кто из гномов может определить цвет своего капюшона, если надеты*

а) 3 красных и 2 синих капюшона;

б) 2 красных и 3 синих;

в) 1 красный и 4 синих?

2. *Имеется 8 гномов. Им показали 5 красных, 4 синих и 6 белых капюшонов. Кто из гномов сможет определить цвет надетого на него капюшона, если на них надели*

а) 4 красных, 2 синих и 2 белых капюшона;

б) 2 красных, 2 синих и 4 белых?

... Еще долго горели свечи в хоббичьей столовой, и если бы в столовой этой благоустроенной норы были окна, случайный прохожий мог бы увидеть, как гномы и хоббит увлеченно надевают друг на друга разноцветные капюшоны, смотрят, молчат, а потом весело смеются и снова надевают! А великий волшебник с отеческой улыбкой глядит на всю компанию сквозь причудливые кольца дыма из своей трубки...

А ТАК ЛИ ХОРОШО ЗНАКОМО ВАМ

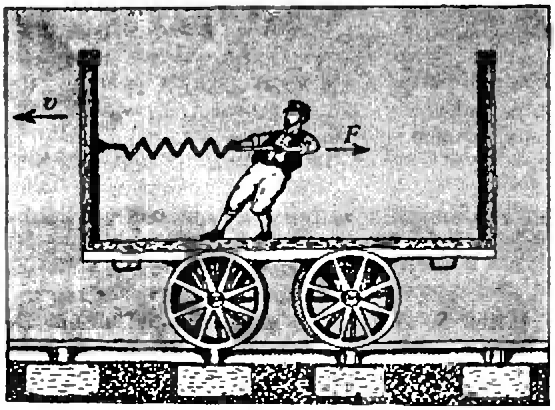
полезное действие?

> *Мы употребляем здесь выражение «движущая сила», чтобы обозначить полезное действие, которое может дать двигатель.*
>
> *Сади Карно*

Бурная техническая деятельность человека, особенно последние три столетия, постоянно побуждала его задумываться над тем, как бы заставить создаваемые им устройства «поменьше тратить, да побольше производить». Много бесплодных попыток было совершено, прежде чем наука установила границы произвольному изобретательству и указала пути совершенствования машин и двигателей. Для этого потребовалось основательно разобраться с такими понятиями, как работа, мощность, коэффициент полезного действия. Прочно заняв достойное место в арсенале ученых и инженеров, эти понятия демонстрируют удивительную универсальность. С какими бы процессами ни приходилось иметь дело — механическими, тепловыми, электромагнитными, можно быть уверенным, что они не подведут.

Вопросы и задачи

1. Совершается ли механическая работа над грузом, который равномерно переносят по горизонтальной прямой?



2. В вагоне равномерно движущегося поезда стоит человек, растягивающий пружину с силой F, как показано на рисунке. Поезд прошел путь s. Какую работу совершил человек в системе отсчета, связанной с землей?

3. Может ли механическую работу совершить сила трения покоя?

4. Со дна водоема поднимается пузырек газа. Совершает ли газ работу?

5. На скоростных автомобилях ставят двигатели значительно большей мощности, чем на обычных. Зачем?

6. Сила сопротивления воздуха и воды при движении корабля возрастает пропорционально квадрату его скорости. Во сколько раз падает нужная кораблю мощность при уменьшении его скорости в 3 раза?

7. Ракета с работающим двигателем «зависла» над поверхностью Земли. На что расходуется мощность ее двигателя?

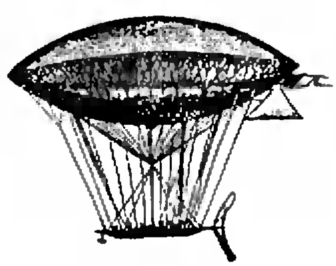
8. Изменится ли мощность, развиваемая двигателями эскалатора, если пассажир, стоящий на движущейся вверх лестнице, станет подниматься по эскалатору с постоянной скоростью?

9. Как должна измениться мощность насоса, чтобы он стал перегонять через узкое отверстие в единицу времени вдвое большее количество воды?

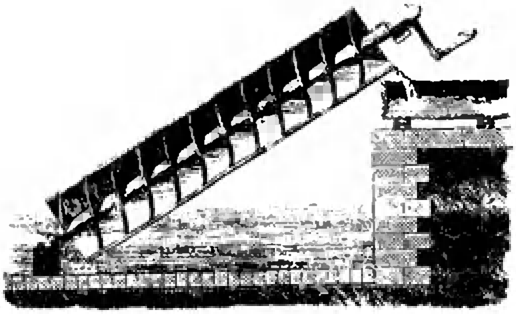
10. Для подъема грузов применяется как наклонная плоскость, так и наклонный транспортер — лента, движущаяся по роликам. Какое из этих устройств имеет больший КПД?

11. Будет ли работать гидравлический пресс, если его цилиндр заполнить не жидкостью, а газом?

12. Температура атмосферного воздуха, играющего для автомобильного двигателя роль холодильника, зимой заметно ниже, чем летом. Ведет ли это к увеличению КПД двигателя зимой?



13. Что является нагревателем, а что холодильником в ракетном двигателе?



14. Два потребителя подключают к электрической батарее: один раз последовательно, другой — параллельно. В каком случае КПД будет больше?

15. Может ли КПД аккумулятора равняться единице?

Микроопыт

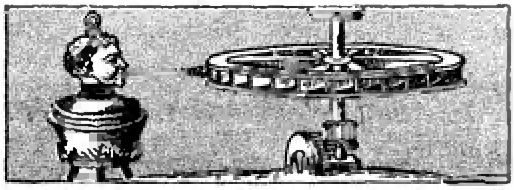
Понаблюдайте длительное время за включенной в сеть электроплиткой. Почему, несмотря на непрерывный расход электроэнергии, температура спирали не повышается безгранично?

Любопытно, что...

... французскому ученому Ж.Понселе принадлежит пусть не совсем научное, но весьма практичное определение: «Механическая работа — это то, что оплачивается деньгами».

... когда человек пытается только поддерживать постоянной развиваемую им силу даже в отсутствие перемещения, его мышцы испытывают постоянные сокращения и расслабления, приводящие к микроскопическим движениям. Поэтому-то мышцам и приходится совершать немалую работу в полном соответствии со стандартным ее определением.

... до сих пор используется введенная в конце 18 века Джеймсом Уаттом единица измерения мощности машин — «лошадиная сила». Она определялась как средняя работа за одну секунду, которую могла совершить сильная английская ломовая лошадь, равномерно работавшая целый день.



... КПД возможной тепловой машины, использующей разность температур поверхностных и глубинных вод океана, не превысит нескольких процентов.

... мощность, развиваемая при толчке жука-щелкуна, лежащего на спинке, примерно в сто раз больше мощности, которую может обеспечить какая-либо одна из его мышц.

... большая мощность отнюдь не означает большую силу тяги. Например, в проектируемых фотонных ракетах сила тяги предполагается равной лишь нескольким десяткам или сотням ньютонов — такая ракета даже не сможет самостоятельно стартовать с Земли.

... чрезвычайно заманчива возможность получать электроэнергию непосредственно из химической энергии топлива и окислителя без сгорания, в так называемом электрохимическом генераторе электроэнергии (ЭХГ), имеющем очень высокий КПД.

... сжигая в двигателе автомобиля миллиграмм бензина, мы высвобождаем примерно 40 джоулей тепловой энергии, из которых только малая доля переходит в кинетическую энергию машины. Миллиграмм же сахара сообщает организму человека те же 40 джоулей энергии, но используются они значительно эффективнее для поддержания температуры тела и другой жизнедеятельности организма.

Что читать в «Кванте» о полезном действии

(публикации последних лет)

1. *«Тепловой насос»* — 1986, №11, с. 19;
2. *«Работа, энергия, тепло»* — 1987, №8, с. 55;
3. *«Мощность в цепи постоянного тока»* — 1989, №8, с. 7;
4. *«О ледниках, скороварках и теореме Карно»* — 1991, №3, с. 39;
5. *«Работа сил трения»* — 1991, №5, с. 37;
6. *«Работа и изменение энергии идеального газа»* — 1991, №6, с. 45;
7. *«Вокруг колеса»* — 1992, №4, с. 50;
8. *«Кое-что о силе тяги»* — 1992, №5, с. 42.

Материал подготовил А.Леонович

ФИЗИКА 9—11

Публикуемая ниже заметка «Экономия топлива на Луне» предназначена девятиклассникам, заметка «Над далекою ртутной планетой» —десятиклассникам, «Пепельный свет Луны» — одиннадцатиклассникам.

Экономия топлива на Луне

А. СТАСЕНКО

«Просверление луны колоссальным буравом — вот что служило предметом речи мистера Лунда!.. Близко уже то время, когда луна украсится дырой. Дыра будет принадлежать англичанам» (Антон Чехов).

Не может быть, чтобы из такой грандиозной дыры и нам нельзя было бы извлечь какой-нибудь пользы. Для начала уроним (т.е. просто отпустим) какой-нибудь Предмет, например Утюг, в эту шахту, проходящую прямо через центр Луны (рис. 1). У самой поверхности, в точке N, сила, действующая на Утюг, будет равна $mg_л$, где m — масса Утюга, $g_л$ — ускорение тяготения на Луне (оно приблизительно в 6 раз меньше земного). Но когда Утюг будет пролетать центр Луны (точка 0), очевидно, что сила тяготения станет равной нулю (если, конечно, считать Луну строго сферически симметричной) — в этой точке уравновесятся силы тяготения, порожденные всеми элементами объема Луны. Значит, в момент прохождения центра скорость Утюга перестанет расти, а при дальнейшем движении начнет уменьшаться. Интуитивно ясно, что в точке S, диаметрально противоположной точке N, Утюг затормозится до нулевой скорости — ведь воздуха на Луне нет, а стенок шахты он пусть не касается, значит, нет никаких потерь энергии. Далее, если Утюг в точке S никто не схватит, то он снова начнет двигаться к центру, вновь вернется в точку N и т.д. Это колебательное движение может продолжаться вечно.

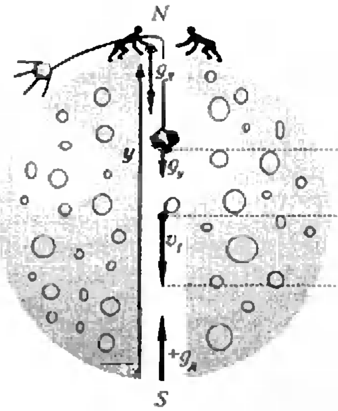


Рис. 1

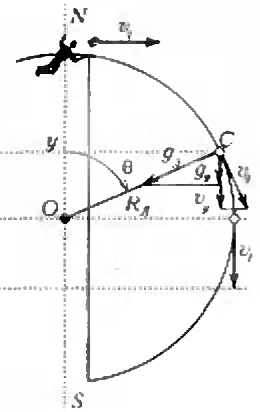


Рис. 2

Из всего сказанного отметим, что у поверхности Луны ускорение равно по модулю $g_л$, в центре — нулю; значит, оно как-то изменяется по радиусу. Но как? Простейшая зависимость — линейная, (это пока что только предположение), т.е.

$$g_y = -g_л \frac{y}{R_л}. \qquad (1)$$

Теперь бросим тот же Утюг вдоль поверхности (другими словами, горизонтально, тангенциально, или по касательной), но так, чтобы он снова смог попасть в точку S (рис. 2). Для этого ему нужно сообщить скорость спутника v_1. Напомним, что ее можно найти, приравняв ускорение тяготения (его значение постоянно во всех точках на поверхности сферического тела) центростремительному: $g_л = v_1^2/R_л$, откуда

$$v_1 = \sqrt{g_л R_л}. \qquad (2)$$

Это — первая космическая скорость, о чем и говорит индекс «1». Подчеркнем, что хотя величина скорости Утюга во всех точках траектории (окружности) одинакова, тем не менее это движение с ускорением, поскольку вектор скорости изменяется (поворачивается).

Пусть в некоторый момент времени t Утюг находится в точке C окружности, имеющей угловую координату θ (полярный угол) и, следовательно, отстоящей от точки бросания N (здесь $t = 0$, $\theta = 0$) на расстоянии $v_1 t$, измеренном по дуге. Спроектируем все кинематические характеристики Утюга в этой точке (радиус-вектор $\vec{R}_л$, скорость $\vec{v}_1$, ускорение $\vec{g}_л$) на ось шахты SN (ось Y). Получим (см. рис. 2)

$$y = R_л \cos\theta, \qquad (3)$$

$$v_y = -v_1 \sin\theta, \qquad (4)$$

$$g_y = -g_л \cos\theta. \qquad (5)$$

Заметим, что центральный угол θ измеряется длиной дуги окружности, деленной на ее радиус: $\theta = v_1 t/R_л$. Из равенств (3) и (5) получаем формулу для g_y, в точности совпадающую с (1). Но это опять-таки не доказательство, а лишь намек на действительное изменение тяжести тела внутри шахты.

Ясно, что если проекции ускорения, скорости и координаты тела, движущегося по окружности, на диаметр в точности равны соответствующим характеристикам движения вдоль самого диаметра, то оба Утюга (брошенный в N вдоль поверхности и уроненный в шахту) достигнут диаметрально противоположной точки S одновременно. Так же одновременно они и вернутся в начальную точку N. Но это если верна зависимость (1). В действительности она верна в случае однородной планеты, во всех точках которой плотность постоянна.

Над этим фактом в последние триста лет размышляли многие классики точных наук. Современный школьник, можно сказать, с детства знает, что шар массой M и радиусом r притягивает тело массой m, находящееся на его поверхности, с силой Ньютона $F = GMm/r^2$, т.е. так, как если бы вся масса шара была сосредоточена в его центре. Подставив сюда $M = (4/3)\pi r^3 \rho_0$ (ρ_0 — плотность, одинаковая по объему шара), получим

$$F = mg = mG(4/3)\pi\rho_0 r^3/r^2,$$

откуда

$$g(r) = G(4/3)\pi\rho_0 r,$$

т.е. ускорение действительно пропорционально расстоянию от центра. Самым важным здесь является то, что масса шарового слоя, лежащего «над» поверхностью r = const, не влияет на силу (и ускорение) тяготения. Вспомним, что великий Ньютон на девять лет задержал издание своих «Начал», пока не доказал эти факты.

Итак, выражение (3), а именно

$$y = R_Л \cos(v_1 t / R_Л)$$

является «расписанием» движения Утюга в лунной диаметральной шахте. Это — уравнение так называемого гармонического колебания (рис. 3, сплошная линия). А скорость, согласно равенству (4), будет изменяться по закону

$$v_y = -v_1 \sin(v_1 t / R_Л)$$

и, значит, будет достигать наибольшей величины в те моменты времени, в которые $y = 0$, т.е. в центре планеты (см. рис. 3, штриховая линия).

Нам важно, что в центре Луны оброненный в шахту Утюг достигнет скорости спутника. И тут вдумчивого школьника должна осенить мысль: зачем же Утюгу без дела болтаться от полюса к полюсу? Нельзя ли в связи с подорожанием топлива использовать для его экономии работу поля тяготения?

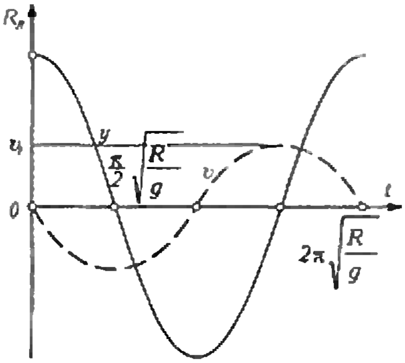


Рис. 3

Возьмем вместо Утюга Очень Большую Скалу и привяжем к ней невесомую нерастяжимую нить длиной $R_Л$, другой конец которой прикрепим к спутнику или космическому кораблю (см. рис. 1). Падая в шахту, Большая Скала будет ускорять вдоль поверхности Луны (пусть без трения) космический корабль. Когда Скала будет пролетать центр Луны, корабль окажется над шахтой и его можно отцепить от нити, а так как оба тела имеют одну и ту же скорость v_1, то корабль полетит дальше по орбите спутника, а Скала — к противоположному полюсу S, где к ней можно будет быстро (ее скорость на мгновение станет равной нулю) привязать нить другого спутника. И таким образом Скала будет колебаться в шахте не бесполезно, а запуская на орбиту все новые и новые тела, при этом экономя много топлива, которое на Луне особенно дорого.

Но это все в предположении о том, что масса Скалы много больше масс ускоряемых тел и нитей — чтобы подчеркнуть это, мы и пишем Очень Большую Скалу с заглавных букв.

Пойдем дальше. Из равенств (3) и (4) получим

$$\cos\theta = \frac{y}{R_Л}, \quad \sin\theta = -\frac{v_y}{v_1}.$$

Возведем в квадрат и сложим:

$$\left(\frac{v_y}{v_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{R_Л}\right)^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

Разделив последнее уравнение на 2 и учитывая выражение (2) для v_1, перепишем его в виде

$$\frac{v_y^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{g_Л y^2}{R_Л} = \frac{v_1^2}{2} = \frac{g_Л R_Л}{2}. \qquad (6)$$

Но ведь это не что иное как закон сохранения энергии, записанный, правда, для единичной массы. Первое слагаемое в левой части — кинетическая энергия на расстоянии y от центра, второе, следовательно, — потенциальная энергия. А их сумма — постоянная величина, которую можно записать либо в виде кинетической энергии в центре Луны (где потенциальная энергия принята за нуль), либо в виде потенциальной энергии у входа в шахту (где скорость, а значит, и кинетическая энергия, равна нулю).

Итак, потенциальная энергия тела массой m на расстоянии y от центра Луны записывается в виде $(1/2)mg_Л y^2/R_Л = (1/2)mg_y y$. Заметим, что для тела, брошенного вертикально над поверхностью Земли на высоту y, закон сохранения энергии мы записали бы в виде

$$\frac{mv^2}{2} + mg_0 y = \frac{mv_0^2}{2} = mg_0 y_{max},$$

где v_0 — скорость бросания, y_{max} — максимально достижимая высота. Здесь потенциальная энергия равна $mg_0 y$, т.е. работе, которую надо совершить против постоянной силы тяготения mg_0 на перемещении y. В случае же падения в шахту сила тяжести — переменная (см. выражение (1)), поэтому для получения работы надо не только умножить mg_y на y, но еще разделить на 2 — ведь работа это площадь заштрихованного треугольника на рисунке 4.

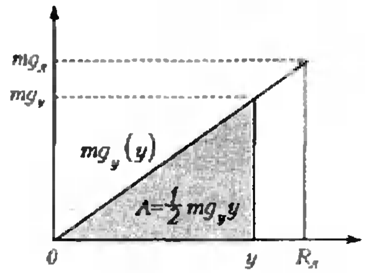


Рис. 4

Ну, а если скала не настолько Большая, чтоб ее писать с заглавной буквы, т.е. если ее масса сравнима с массой корабля и массой нити-троса? Тогда закон сохранения (6) нужно переписать с учетом энергий этих масс. Попробуйте это сделать сами перед сном. Нужно только иметь в виду, что по мере опускания Скалы к центру Луны в шахту будет свешиваться все больший кусок троса, и он тоже, будучи теперь весомым, будет способствовать ускорению.

Над далекою ртутной планетой

А. СТАСЕНКО

Почему обязательно далекой? А чтобы там было достаточно холодно, скажем, температура была бы не выше 4 градусов по Кельвину. А почему ртутной? Да потому что ртуть при таких температурах становится уже сверхпроводником, а из этого наверняка можно получить много удовольствий.

Например, давайте убедимся в том, что над такой планетой можно парить на витке с током — конечно, создающим магнитное поле. При этом будем параллельно проводить аналогию с более знакомыми примерами из электростатики.

Известно, что линии напряженности $\vec{E}$ электрического поля точечного заряда являются радиальными, а линии индукции $\vec{B}$ магнитного поля бесконечно прямого тока — концентрическими окружностями (рис. 1, *а*). Причем «количество» этих линий (мера «интенсивности» полей) пропорционально соответственно величинам заряда q и тока I.

Поднесем к заряду q такой же по величине заряд противоположного знака (рис. 1, *б*). Тогда все силовые линии поля $\vec{E}$, порожденного первым зарядом, замкнутся на втором. Легко видеть, что существует плоскость, проходящая на одинаковом расстоянии h от обоих зарядов, во всех точках которой вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ перпендикулярен этой плоскости (на рисунке 1, *б* слева такое построение показано для одной точки A).

Аналогично, к нашему прямому проводу с током поднесем провод с таким же по величине, но противоположно направленным током. Тогда картина линий индукции магнитного поля $\vec{B}$ примет вид, показанный на рисунке 1, *б* справа, а в плоскости между двумя токами возникнет *поле* $\vec{B}$, *параллельное этой плоскости*. При этом «количество» линий полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$, порожденных зарядом q и током I, не изменяется — эти линии лишь деформируются.

Теперь давайте к нашему исходному заряду вместо заряда q поднесем снизу на расстояние h плоский проводник, например металлический лист (рис. 1, *в*). Внутри проводника напряженность поля равна нулю — иначе тек бы ток до тех пор, пока заряды не перераспределились бы так, чтобы это поле все-таки исчезло. Вот и установилось такое распределение заряда на поверхности проводника, что все линии поля $\vec{E}$, порожденные исходным зарядом, *закончились на этой плоской поверхности*. Это означает, прежде всего, что этот поверхностный заряд отрицателен. Далее, касательной составляющей вектора $\vec{E}$ у поверхности проводника быть не должно, иначе опять-таки вдоль поверхности потек бы ток; *значит, поле должно подходить к проводнику по нормали, перпендикулярно*.

Эти рассуждения приводят к мысли о том, что поле над плоским проводником будет в точности такое, как и в предыдущем случае двух зарядов противоположных знаков, расположенных на расстоянии $2h$ друг от друга. В этом и состоит идея так называемого метода зеркального отражения: поле системы «заряд — плоский проводник» точно такое, как если бы оно было порождено самим зарядом q и его зеркальным (мнимым) отражением $-q$ относительно плоскости, ограничивающей проводник.

Аналогично, вместо тока $-I$ поднесем к нашему току I полубесконечный сверхпроводник (см. рис. 1, *в* справа). Сверхпроводник интересен не только тем, что созданный в нем ток течет сколь угодно

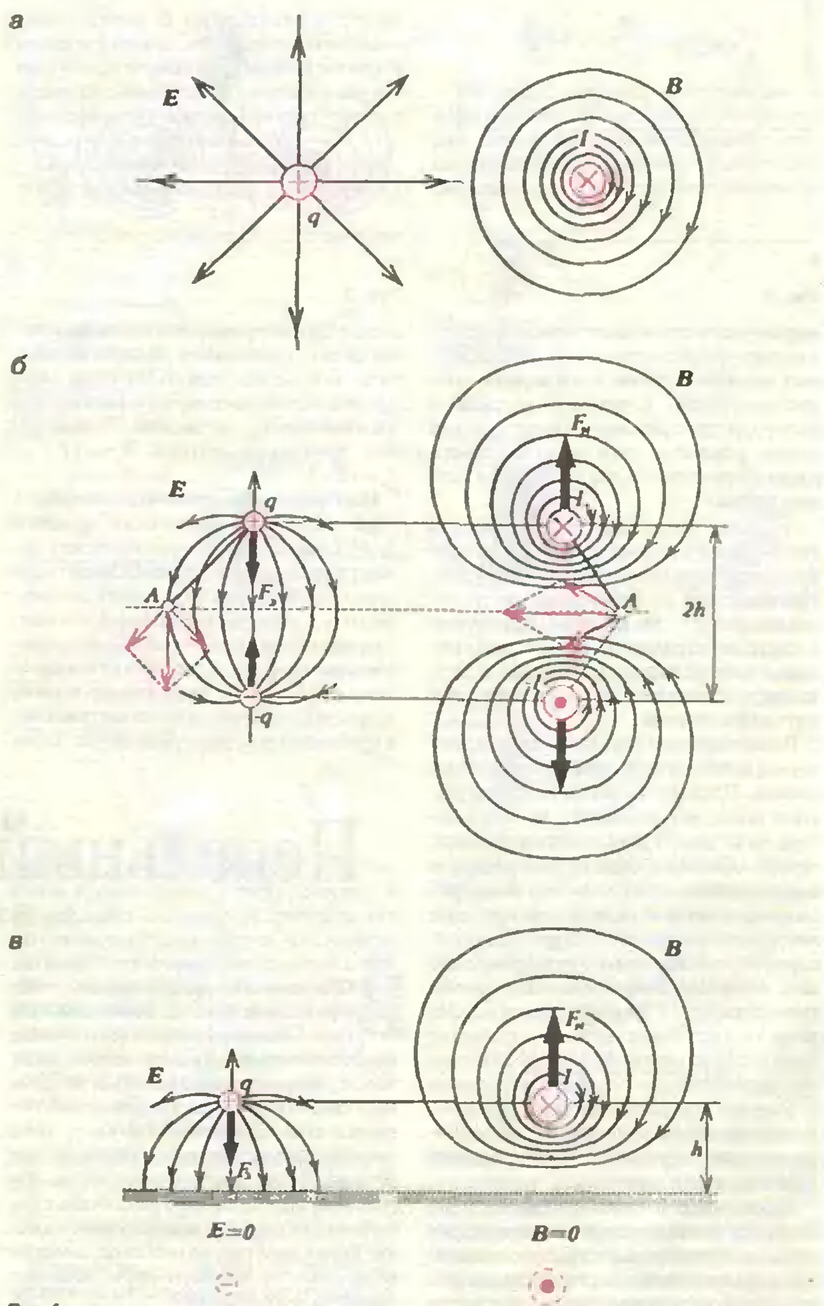


Рис. 1

долго без потерь на нагревание. Он обладает еще одним интересным свойством: при внесении его в магнитное поле на поверхности сверхпроводника возникает такая система токов, что магнитное поле в объеме самого сверхпроводника полностью отсутствует ($B = 0$). Иными словами, сверхпроводник вытесняет магнитное поле, что очень похоже на вытеснение электрического поля проводником (см. рис. 1, *в* слева).

Как это происходит — отдельный разговор, *мы же просто примем как данное*, что внутри сверхпроводника стационарного магнитного поля существовать не может, так же как проводник не терпит внутри себя стационарного электростатического поля.

Итак, к бесконечному прямому току поднесли на расстояние h сверхпроводник с плоской поверхностью. По аналогии с электростатикой, возникшее сум-

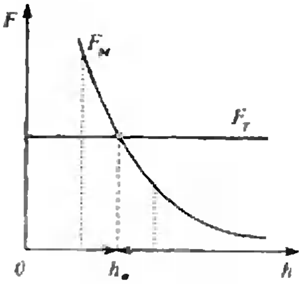


Рис. 2

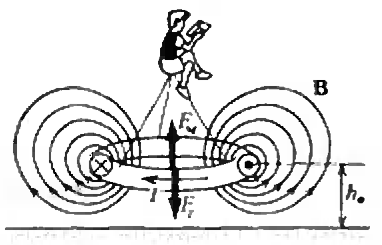


Рис. 3

марное магнитное поле можно построить как суперпозицию полей, порожденных исходным током и его зеркальным изображением $-I$, что мы уже и сделали выше для двух реальных токов. Правда теперь реальные токи текут по поверхности проводника, но их сумма в точности равна $-I$.

А какие силы действуют на заряд q и ток I? Нечего и говорить, что противоположные заряды притягиваются, а противоположно направленные токи отталкиваются — это показано на рисунке 1 жирными стрелками. Вот это отталкивание тока от сверхпроводника и дает надежду на возможность «парения» над ртутной планетой.

Возникновение этих сил можно попытаться понять и с энергетической точки зрения. Плотность энергии электрического поля, как известно, пропорциональна квадрату напряженности поля: $w_э \sim E^2$. Следовательно, она растет с возрастанием «густоты» линий напряженности поля $\vec{E}$, и в нашем примере энергия поля концентрируется в пространстве между зарядом и проводником. Но размерность плотности энергии совпадает с размерностью давления:

$$[w_э] = \frac{Дж}{м^3} = \frac{Н \cdot м}{м^3} = \frac{Н}{м^2}!$$

Уже это открывает возможность объяснения сил, возникающих в неоднородных полях, изменением в пространстве плотности энергии.

Аналогично и с магнитным полем. Если мы попытаемся провод приблизить к полупространству, заполненному сверхпроводником, то же самое число линий индукции станет пересекать отрезок h уже меньшей длины. Значит, возрастет «густота» этих линий на участке h, т.е. возрастут индукция магнитного поля B, плотность энергии магнитного поля $w_м \sim B^2$ (так же, как $w_э \sim E^2$.), «давление» поля и, в конце концов, сила отталкивания, действующая на провод вертикально вверх. Собственно, ради последнего утверждения и была сказана предыдущая длинная фраза. Но многим, вероятно, и без этой фразы понятно, что с уменьшением расстояния между двумя противоположными токами сила отталкивания должна возрастать, так же как при сближении двух противоположных зарядов растет сила их взаимного притяжения. Только закон изменения другой: $F_э \sim -1/h^2$, а $F_м \sim +1/h$.

Изобразим качественно зависимость этой силы отталкивания кривой $F_м(h)$, (рис. 2). Нарисуем еще силу тяжести проводника с током в виде горизонтальной линии $F_т$ (она ведь не зависит от h), которая пересечет $F_м$ в точке, соответствующей высоте h_0. Если уменьшить высоту: $h < h_0$, то сила отталкивания, связанная с магнитным полем, возрастет, станет больше силы тяжести, и провод будет двигаться вверх. Если увеличить высоту: $h > h_0$, то сила отталкивания станет меньше силы тяжести, и провод будет двигаться вниз. Значит, высота h_0 есть не только положение равновесия, но, что самое важное, положение *устойчивого* равновесия. Если увеличим ток в проводе — он поднимется вверх, плавно выключим ток — провод столь же плавно опустится на поверхность планеты.

Разумеется, бесконечно длинный провод — это очень неудобно. Сделаем замкнутый контур, например квадрат или кольцо, в котором течет ток, — его сечение изображено на рисунке 3. Там же дана картина магнитного поля в плоскости чертежа и указаны направления действующих сил.

Все эти рассуждения применимы, конечно, не только для далекой ртутной планеты, но и для не столь далекой свинцовой (температура перехода в сверхпроводящее состояние 7,2 К) и к случаю высокотемпературного сверхпроводника (~100 К), над которыми можно столь же успешно парить на витке с током, не затрачивая энергии. Эта же магнитная подвеска может быть применена, наконец, и для транспорта на Земле, что гораздо важнее, чем на далекой планете.

Пепельный свет Луны

А. БЯЛКО

Всем известно лунное сияние — отраженный лунной поверхностью свет Солнца. Но замечали ли вы слабое свечение Луны в ясные ночи новолуния — так называемый пепельный свет Луны? Оно уверенно наблюдается только в течение двух — трех ночей, близких к новолунию, когда серпик Луны достаточно узок и его свечение еще не мешает различить слабый свет остальной части лунного диска. Тогда диск слегка светится, заметно отличаясь от черного неба. Чем же вызвано это свечение?

Как вы, конечно, знаете, каждый месяц, а точнее через каждые 29,5 суток, взаимное положение Солнца, Земли и Луны почти повторяется. Слово «почти» связано с тем, что орбита Луны ненамного, всего на 6°, наклонена к плоскости земной орбиты и не является точно круговой. Но для нас эти неточности не будут иметь значения.

Посмотрите на рисунок — Солнце освещает Землю и обращающуюся вокруг нее Луну (вращение Земли и обращение Луны происходят в одном направлении). Солнце далеко, поэтому само оно не изображено, а его лучи показаны параллельными. Освещены половины земного и лунного шаров, на затемненной половине Земли — ночь. Конечно, лучше всего и наблюдать Луну ночью — если нет облаков, то свечение неба почти не мешает. Глядя на рисунок, легко понять, почему за месяц происходит смена фаз Луны: новолуния, первой четверти, полнолуния и последней четверти.

Кстати, знаете ли вы способ, как, поглядев на месяц, сразу сказать, в первой он четверти или в последней? (Разумеется, это детская задачка, но ведь труднее всего дать быстрый и правильный ответ, если есть всего две возможности. Наверное, многим известна такая «подсказка»: если к рожкам месяца мысленно приставить палочку и получится буква «Р», то месяц Растет (находится в первой четверти), а если буква «У», то он Убывает. А академик Ландау определял четверти Луны другим способом: «Если месяц хочется погладить, то он молодой» (ясно, что Ландау не был левшой).

Нелишне заметить, что оба эти правила не абсолютны: они придуманы людьми Северного полушария Земли, поэтому в Австралии, например, верны с точностью до наоборот, а в тропиках вообще не годятся — там месяц висит рогами вверх или вниз. Но есть способ, годящийся для всех широт Земли: если вы видите месяц Утром, то он Убывает, а если Вечером — то Возрастает. Посмотрите на рисунок, и вы поймете сами, почему это так. Рисунок дает вид системы «Земля — Луна» как бы с Северного полюса, или лучше сказать — от Полярной звезды, а чтобы представить вид с Южного полюса, от созвездия Южный Крест, надо посмотреть на рисунок в зеркало.

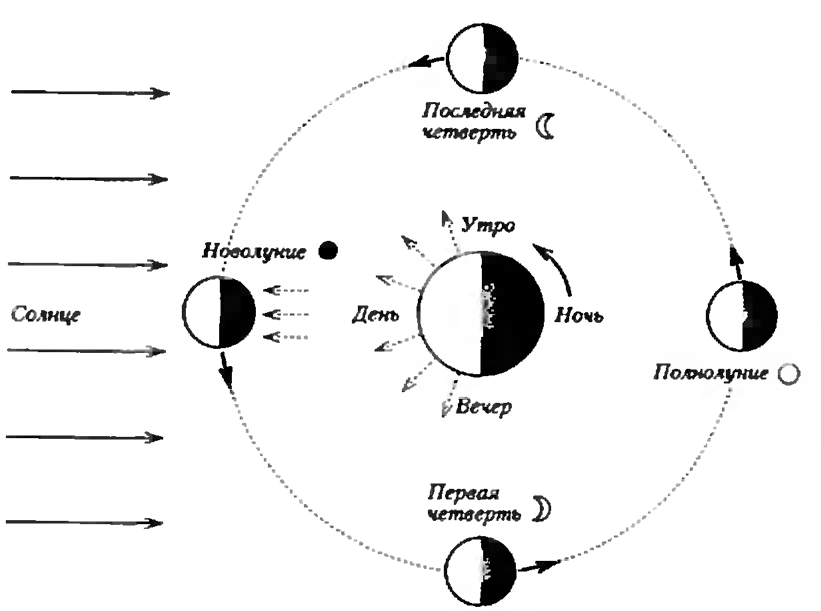
С помощью рисунка нетрудно также понять, что дополнительная подсветка Луны — ее пепельный свет — обусловлена светом Солнца, отраженным Землей. Свечение особенно эффективно в новолуние, когда Луна темна, а все земное полушарие, видимое с Луны, освещено Солнцем. Попробуем рассчитать, во сколько же раз пепельный свет Луны слабее ее обычного света.

Для этого нам понадобится знать, как отражают свет Земля и Луна. Их поверхности рассеивают падающий свет, но рассеивают его неравномерно по разным направлениям. Поэтому чтобы точно вычислить, каково отношение яркостей наблюдаемых одновременно пепельного света Луны и света тонкого рожка лунного месяца, надо знать, как именно рассеянный свет распределяется по направлениям. Эта задача очень трудная. Но можно довольно легко рассчитать отношение этих яркостей в полнолуние — в обоих случаях рассеяние происходит подобным образом, преимущественно назад, поэтому можно сравнивать не яркости, а полные потоки света.

Доля солнечного света, отраженная небесным телом обратно в космос, называется альбедо. От Земли свет отражается ее атмосферой, особенно сильно облаками, закрывающими около половины земной поверхности. В среднем альбедо Земли близко к $A_З = 30\%$, хотя и немного варьируется в зависимости от того, день или ночь над Тихим океаном, занимающим почти полушарие. У Луны атмосферы нет, а породы ее поверхности темные — они поглощают большую часть падающего на них света. В среднем альбедо Луны равно $A_Л \approx 8\%$.

Мощность лунного света, попадающая на Землю, конечно, зависит от фазы Луны. В полнолуние с Земли видна вся освещенная Солнцем половина Луны, в первой и последней четверти видна только ее часть, а в новолуние мы можем видеть только темную сторону Луны — ее пепельный свет.

От Солнца исходит излучение, поток энергии которого, падающий на



Землю, равен $S_0 = 1360$ Вт/м^2. Поскольку расстояние между Землей и Луной много меньше расстояний от них до Солнца, можно считать, что на Землю и на Луну падают одинаковые потоки солнечного света. Рассчитаем полные мощности солнечного света, отраженного Луной и Землей. Если $R_Л$ — радиус Луны, то на нее падает световая мощность $S_0 \pi R_Л^2$, а отражается

$$F_Л = A_Л S_0 \pi R_Л^2 .$$

Аналогично, полная мощность солнечного света, отраженного от Земли, равна

$$F_З = A_З S_0 \pi R_З^2 .$$

Примем теперь Землю за точечный источник, равномерно излучающий отраженный ею свет в полусферу (здесь есть небольшая неточность). Тогда поток энергии, падающий на Луну, будет равен $S_1 = F_З / \left(2\pi a_Л^2\right)$, где $a_Л$ - расстояние от Земли до Луны, а полная мощность пепельного света Луны будет равна

$$F_{ЛЗ} = A_Л S_1 \pi R_Л^2 = \frac{A_Л A_З S_0 \pi R_З^2 R_Л^2}{2a_Л^2}$$

Теперь вычислим ее отношение к мощности света Луны в полнолуние и получим простую формулу:

$$\frac{F_{ЛЗ}}{F_Л} = A_З \frac{R_З^2}{2a_Л^2} \approx \frac{1}{24000}$$

Поскольку геометрия отражения в обоих случаях одинакова, то соотношение, выведенное для мощностей света, справедливо и для яркостей света: пепельный свет Луны слабее ее отраженного света примерно в 24 тысячи раз. Наш глаз устроен так, что он может, прищурясь, недолго смотреть на ослепительный диск Солнца, рассматривать освещенную Солнцем Луну, световая мощность которой меньше в 2,5 миллиона раз $\left(A_Л R_Л^2 / 2a_З^2\right)$, и даже различать ее пепельный свет, ослабленный еще в 24 тысячи раз. И это еще далеко до предела чувствительности глаза!

Но почему же мы так редко замечаем пепельный свет Луны? Дело в том, что его мешает различить на фоне неба свечение земной атмосферы. Если наблюдение ведется под утро или не очень поздно, свет атмосферы вызван рассеянием на больших высотах солнечного света, а глубокой ночью небо светится из-за уличного освещения городов. Свой вклад вносит и сам серпик месяца — при толстом месяце в первой или последней четверти он достаточно велик, чтобы затмить пепельный свет темной, неосвещенной Солнцем, части Луны. Легко понять, что свечение неба резко возрастает даже при легкой облачности или дымке. Поэтому наблюдать пепельный свет Луны можно только в очень ясные ночи и при очень узеньком серпике месяца.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТРАНИЧКА

Этой публикацией мы начинаем серию подборок задач по геометрии, предназначенных в первую очередь для использования на заключительном этапе изучения курса геометрии, на этапе, систематизирующем и обобщающем этот курс.

Диапазон сложности задач очень широк. Вначале идут задачи довольно простые, дополняющие и расширяющие основной курс. Постепенно сложность возрастает, и в конце появляются достаточно трудные задачи, приближающиеся к уровню «Задачника «Кванта».

Некоторые задачи хорошо известны и имеются в школьных учебниках. Здесь мы ни в коей мере не стремились к оригинальности. Самое главное — это сформулировать и зафиксировать определенный набор фактов и теорем, которым должен овладеть любой школьник, претендующий на хорошее знание геометрии.

К сожалению, мы не можем дать здесь достаточное количество задач для отработки основных, можно сказать, опорных фактов, и вынуждены ограничиться одной-двумя. Конечно, опытный учитель сможет без труда пополнить предложенный нами список задач. Что же касается ученика, самостоятельно работающего с журналом, то мы рекомендуем ему не ограничиваться этой подборкой и пополнять ее соответствующими по теме задачами из пособий для школьников и абитуриентов.

Указания, ответы и решения будут опубликованы в следующем номере нашего журнала.

Углы и окружности

1. Мы знаем, что угол, вписанный в окружность (это значит, что его вершина лежит на окружности, а стороны пересекают окружность), измеряется половиной дуги, заключенной внутри угла, или, как говорят, дуги, на которую он опирается (т.е. он равен половине соответствующего этой дуге центрального угла). Исходя из этого утверждения, докажите, что

а) угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой дуг, расположенных внутри угла и угла, вертикального к нему;

б) угол с вершиной вне круга, стороны которого пересекают окружность, измеряется полуразностью дуг, заключенных внутри угла;

в) угол между касательной и хордой, проходящей через точку касания, измеряется половиной дуги, заключенной внутри угла.

2. На плоскости даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек M плоскости, для которых $\angle AMB = \alpha$, где α — данный угол. (Говорят также, что *отрезок AB виден из M под углом* α.)

3. Докажите, что треугольник будет остроугольным, прямоугольным или тупоугольным в зависимости от того, где расположен центр описанной около него окружности: внутри, на границе или вне треугольника.

4. На плоскости дан квадрат. Найдите геометрическое место точек плоскости, из которых квадрат виден под углом 60°.

5. Докажите, что если a — хорда окружности, α — величина угла, вписанного в окружность и опирающегося на эту хорду, то $a = 2R\sin\alpha$, где R — радиус окружности. (Иногда это равенство записывают в виде $a / \sin\alpha = 2R$.)

6. В треугольнике ABC угол A равен 30°, угол B равен 70°. На стороне BC построен равносторонний треугольник BMC так, что точка M расположена по ту же сторону от BC, что и A. Найдите угол MAC.

7. Найдите радиус окружности, проходящей через вершину A квадрата $ABCD$, через его центр и середину BC, если сторона квадрата равна a.

8. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K. Известно, что $\angle ABC = 76°$, $\angle BCD = 82°$, $\angle AKD = 100°$. Найдите $\angle ABD$.

9. Известно, что центры окружностей, описанных около треугольников ABD и BDC, лежат на диагонали AC параллелограмма $ABCD$. Найдите $\angle ACD$, если $\angle ACB = 40°$.

10. Три прямые, принадлежащие одной плоскости, пересекаются в одной точке. Углы между прямыми равны 40°, 65° и 75°. Из произвольной точки плоскости на эти прямые опущены перпендикуляры. Найдите углы треугольника с вершинами в основаниях этих перпендикуляров.

11. На боковой стороне AB трапеции $ABCD$ взята точка K. Докажите, что вторая точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AKD и BKC, лежит на прямой CD.

12. На окружности, описанной около треугольника ABC, взяты точки K, P и M, отличные от его вершин, так, что $AK = AB$, $BP = BC$, $CM = CA$. Найдите углы треугольника KPM, если в треугольнике ABC угол A равен 32°, а угол B равен 72°.

13. Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ — выпуклый семиугольник. Найдите суммы углов каждой из двух семиконечных «звездочек» $A_1A_4A_7A_3A_6A_2A_5$ и $A_1A_3A_5A_7A_2A_4A_6$.

Указание. Рассмотрите окружность, содержащую внутри себя семиугольник, и продолжите звенья «звездочки» до пересечения с окружностью. Затем подсчитайте суммы дуг, соответствующих рассматриваемым углам.

14. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1, отличные от его вершин. Докажите, что окружности, описанные около треугольников A_1B_1C, A_1BC_1 и AB_1C_1, имеют общую точку. (Эта точка называется *точкой Микеля*.)

Замечание. Утверждение остается верным, если точки A_1, B_1 и C_1 расположены как угодно на прямых BC, CA и AB.

15. Четыре прямые на плоскости, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке, образуют четыре треугольника. (Рассматриваются треугольники, образованные любыми тремя из этих прямых. Такая конфигурация называется *полным четырехсторонником*.) Докажите, что четыре окружности, описанные около этих треугольников, имеют общую точку.

16. Из произвольной точки, лежащей на окружности, описанной около треугольника, опущены перпендикуляры на его стороны (или на продолжения сторон). Докажите, что основания этих перпендикуляров лежат на одной прямой. (Эта прямая называется *прямой Симпсона*.)

17. На плоскости даны две точки — A и B. Найдите геометрическое место точек C таких, что ABC — остроугольный треугольник с наименьшим углом при вершине A и наибольшим при вершине C.

18. На плоскости даны две точки — A и B. Найдите геометрическое место точек C таких, что прямая, проходящая через B перпендикулярно BC, пересекает AC и делит AC в отношении 2:1, считая от вершины A.

19. Две окружности пересекаются в точках A и B. Прямая, проходящая через A, вторично пересекает окружность в точках C и D. Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольников BCD.

20. Сторона BC треугольника ABC равна a. Через вершину A проходит прямая, пересекающая BC в точке D и образующая с BC угол α. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABD и ACD.

21. Через вершины A и B, B и C, C и A треугольника ABC соответственно проходят три окружности. Докажите, что если сумма угловых величин дуг этих окружностей, расположенных во внешней по отношению к треугольнику части плоскости, равна 2π, или 4π, то эти окружности пересекаются в одной точке.

22. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K. Докажите, что если $\angle AKB = \angle BCK + \angle KDA$, то окружности, описанные около треугольников BCK и DAK, касаются между собой.

Публикацию подготовил И.Шарыгин

Неравенства и оценки в текстовых задачах

А. КОРЖУЕВ

Мы привыкли, что в большинстве случаев текстовые задачи решаются с использованием уравнений и систем уравнений. Однако на конкурсных экзаменах иногда попадаются задачи, которые не удается решить с помощью одних лишь уравнений.

О таких задачах и пойдет речь.

Задача 1 (МИФИ, 1975). *Прибывших на парад солдат планировали построить так, чтобы в каждом ряду стояло по 24 человека. По прибытии оказалось, что не все солдаты смогут участвовать в параде, и их перестроили так, что число рядов стало на 2 меньше, а число человек в ряду — на 26 больше нового числа рядов. Сколько солдат прибыло на парад, если известно, что если бы все они участвовали, роту можно было бы перестроить так, чтобы число рядов было равно числу человек в ряду?*

Решение. Начнем решение обычно — обозначим первоначально предполагавшееся число рядов за N, тогда число прибывших солдат будет равно $24N$. После перестройки число рядов стало равным $N-2$, а число человек в ряду, большее числа рядов на 26, соответственно $N+24$. И вот тут-то возникает вопрос: как составить уравнение, ведь неизвестно число выбывших солдат? И имеет ли вообще задача однозначное решение? Имеет!

Начнем с очевидного: число солдат после перестановки явно меньше, чем число прибывших первоначально.

Зная, что число солдат после перестроения будет $(N-2)(N+24)$, запишем неравенство

$$24N > (N-2)(N+24),$$

равносильное следующему:

$$N^2 - 2N - 48 < 0.$$

Решая его, получим, что число рядов, очевидно, лежит в интервале $(-6; 8)$.

И что же дальше? Внимательно вчитаемся в условие. Мы еще не все использовали. Во-первых, число рядов N может быть лишь целым и положительным. Уже это ограничивает круг решений интервалом $(0; 8)$, т.е. всего семью целыми числами от 1 до 7.

А если учесть еще и сообщение о построении роты «квадратом» (число человек равно числу рядов), то нетрудно сообразить, что первоначальное число солдат $24N$ должно быть полным квадратом. Но из чисел от 1 до 7 последнему условию удовлетворяет лишь $N = 6$. При этом число солдат равно 144.

Ответ: 144.

Так, внимательно вчитываясь в условие, находим единственное решение, не составляя уравнений.

Задача 2 (МИФИ, 1976). *Для перевозки скота было выделено некоторое количество вагонов из расчета разместить по 12 животных в каждом. Часть животных сдали, а оставшихся разместили так, что два вагона оказались лишними, а число животных в каждом вагоне стало простым и на 14 большим нового числа вагонов. Найдите первоначальное количество животных и вагонов.*

Решение. Пусть N — число вагонов, тогда первоначальное число животных равно $12N$. Новое число вагонов, как это следует из условия, равно $N-2$ (т.е. $N \geq 3$), а новое число животных в каждом из вагонов $N+12$. И опять неизвестно число сданных животных. Как и в предыдущей задаче, составляем неравенство

$$12N > (N-2)(N+12),$$

равносильное следующему:

$$N^2 - 2N - 24 < 0.$$

Его натуральные решения, не меньшие трех, — это числа 3, 4, 5. Учитывая, что $N+12$ — простое, получаем, что новое число животных равно 17.

Ответ: 5 вагонов, 60 животных.

Задача 3. *Бригады рабочих получали одежду для работы на складе: по 2 комплекта на каждого человека. Каждая бригада получила на 20 комплектов больше, чем было бригад. Известно также, что если бы бригад было на 4 больше и каждой бригаде выдавали бы по 12 комплектов, то одежды на всех не хватило бы. Сколько комплектов одежды было на складе?*

Решение. Пусть число бригад было x, а в каждой бригаде — N рабочих. Тогда число комплектов на бригаду $(2N)$ на 20 больше числа бригад x, т.е. $2N = x + 20$.

Если бы бригад было на 4 больше, т.е. $x+4$, и каждая получала бы по 12 комплектов, то общее количество комплектов $12(x+4)$ превысило бы их количество на складе:

$$12(x+4) > 2Nx.$$

Тогда $12(x+4) > (x+20)x$, что равносильно неравенству

$$x^2 + 8x - 48 < 0,$$

натуральные решения которого — это числа 1, 2, 3. Вспомнив, что $2N = x + 20$, видим, что $x = 2N - 20 = 2(N-10)$, т.е. x — четное число, значит, $x = 2$; тогда $N = 11$, а общее число комплектов на складе $2Nx = 44$.

Ответ: 44.

Задача 4. *Сумма в 95 копеек составлена из пятикопеечных и десятикопеечных монет общим числом не более 14. Если все десятикопеечные монеты заменить пятачками, все пятачки десятикопеечными монетами, общая сумма уменьшится более чем в 1,5 раза. Сколько пятачков и десятикопеечных монет было первоначально?*

Решение. Пусть n и m — количества пятикопеечных и десятикопеечных монет соответственно. Условие задачи приводит к системе

$$\begin{cases} 5n + 10m = 95, \\ m + n \leq 14, \\ 1{,}5(10n + 5m) \leq 95. \end{cases}$$

Сразу же заметим, что $m \leq 9$ (если $m \geq 10$, то $10m \geq 100 > 95$). После упрощений имеем равносильную систему

$$\begin{cases} n + 2m = 19, \\ m + n \leq 14, \\ 6n + 3m \leq 38. \end{cases}$$

Из уравнения получаем $n = 19 - 2m$. Подстановка в неравенства приводит к системе

$$\begin{cases} m + 19 - 2m \leq 14, \\ 6(19 - 2m) + 3m \leq 38, \\ m \leq 9, \end{cases} \qquad (*)$$

равносильной системе

$$\begin{cases} m \geq 5, \\ 9m \geq 76, \\ m \leq 9. \end{cases}$$

Единственное натуральное число, удовлетворяющее системе $(*)$, — это $m = 9$.

Ответ: 1 пятикопеечная и 9 десятикопеечных монет.

Задача 5. *Имеется дробь (отношение двух целых чисел), знаменатель которой на 1 меньше квадрата числителя. Если числитель и знаменатель одновременно увеличить на 2, то дробь будет больше 1/3, а если из числителя и знаменателя одновременно вычесть 3, дробь станет меньше 1/10, но неотрицательной. Найдите эту дробь.*

Решение. Если $m > 0$ — числитель искомой дроби, то она имеет вид

$$\frac{m}{m^2 - 1}.$$

Прибавляя 2 к числителю и знаменателю, получаем

$$\frac{m+2}{m^2+1} > \frac{1}{3},$$

или

$$m^2 - 3m - 5 < 0.$$

Аналогично, вычитая тройку из числителя и знаменателя, имеем:

$$0 < \frac{m-3}{m^2-4} < \frac{1}{10}. \qquad (**)$$

Первому неравенству удовлетворяют

лишь $m = 1, 2, 3, 4$, а из них только $m = 4$ удовлетворяет условию (**).

Ответ: 4/15.

Следующие две задачи приводят к системам уравнений и неравенств.

Задача 6. *Токарю было поручено сделать 90 деталей, а ученику — 35. Первые 30 деталей токарь делал с производительностью вдвое большей, чем ученик. Известно также, что изготовляя остальные 60 деталей, он делал еще на 2 детали в час больше и закончил свою работу более чем на 1 час позже ученика. Однако если бы токарь и первые 30 деталей делал с такой же производительностью, что и оставшиеся 60, то он закончил бы работу не ранее чем через 30 минут после ученика. Какова производительность ученика?*

Решение. Пусть $x > 0$ — производительность ученика. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{30}{2x} + \dfrac{60}{2x+2} \ge \dfrac{35}{x} + 1, \\ \dfrac{90}{2x+2} \ge \dfrac{35}{x} + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Первое неравенство приведем к виду

$$\frac{x^2 - 9x + 20}{x(x+1)} \le 0$$

и получим, что $4 \le x \le 5$.

Второе неравенство приводится к виду

$$\frac{(x-5)(x-14)}{2x(x+1)} \le 0,$$

что дает $5 \le x \le 14$.

Итак, $x = 5$.

Ответ: 5 деталей в час.

Задача 7. *Из Москвы в Киев в 8 часов утра отправляется скорый поезд. В это же время из Брянска (расположенного между Киевом и Москвой) выходят с равными скоростями одновременно два пассажирских поезда, первый из которых следует в Москву, второй — в Киев. Идущий из Москвы скорый встречает первый пассажирский не позже 11 часов, затем проходит Брянск после 13 часов и прибывает в Киев, догоняя там пассажирский из Брянска ровно через 12 часов после встречи с пассажирским, двигавшимся из Брянска в Москву. Когда прибудет в Москву пассажирский из Брянска?*

Решение. Если x и y — скорости скорого и пассажирского поездов соответственно, а расстояние между Москвой и Брянском равно z, то

$$\frac{z}{x+y} \le 3.$$

Так как скорый поезд прошел Брянск не раньше, чем через 5 часов после своего отправления, то

$$\frac{z}{x} \ge 5.$$

Время движения поездов до Киева равно

$$12 + \frac{z}{x+y},$$

а так как скорый поезд прошел за это время расстояние, большее на z, чем пассажирский, то

$$(x-y)\left(12 + \frac{z}{x+y}\right) = z.$$

Мы получили систему из двух неравенств и одного уравнения, из которой необходимо найти время прибытия в Москву пассажирского поезда из Брянска, т.е. $t = x/y$.

Подставим вместо z его выражение через t и y в уравнение и неравенства и обозначим отношение x/y через β. Получим следующую систему:

$$\begin{cases} 3(\beta+1) \ge t, \\ t \ge 5\beta, \\ t = 6(\beta^2 - 1). \end{cases}$$

Подставляя теперь выражение для t из третьего уравнения в неравенства, приходим к системе

$$\begin{cases} \beta > 0, \\ 2\beta^2 - \beta - 3 \le 0, \\ 6\beta^2 - 5\beta - 6 \ge 0, \end{cases}$$

единственным решением которой является $\beta = 3/2$. Тогда $t = 6(\beta^2 - 1) = 7{,}5$ часов, т.е. первый пассажирский прибывает в Москву в 15 ч 30 мин.

Ответ: 15 ч 30 мин.

Рассмотрим, наконец, еще один тип задач — на поиск оптимального решения, к примеру, каким образом возможно на некоторую сумму денег купить наибольшее количество единиц продукции разного типа. При решении таких задач наряду с использованием уравнений и неравенств необходимо провести так называемую оценку наилучшего варианта. Вот, например, такая задача.

Задача 8 (МГУ, экономический ф-т, 1975). *В продажу поступили путевки трех типов стоимостью по 4, 6, 9 рублей соответственно. По путевке 1-го типа можно отдыхать 8 дней, по путевке 2-го типа — 14 дней, и, наконец, 3-го — 20 дней. Сколько путевок каждого типа надо купить, чтобы общее число дней отдыха было наибольшим, а сумма, израсходованная на приобретение всех путевок, составляла 100 рублей?*

Решение. Пусть x, y, z — количества путевок 1, 2 и 3-го типов соответственно, которые необходимо купить для того, чтобы общее число дней отдыха было наибольшим. Тогда

$$4x + 6y + 9z = 100.$$

Это уравнение можно решать методом подбора, учитывая, что x, y, z — неотрицательные целые числа, и так, чтобы количество дней отдыха, т.е. $8x + 14y + 20z$, было максимальным.

Однако проведем вначале несложную оценку.

Например, на 12 рублей можно купить 3 путевки первого типа или 2 путевки второго. Но при этом в первом случае будет 24 дня отдыха, во втором — 28. Таким образом, ясно, что число путевок 1-го типа не должно превышать 2. Делая аналогичные «экономические» оценки для путевок второго и третьего типов, получим, что число путевок третьего типа должно быть не большим 1. Данная оценка позволяет записать систему уравнений и неравенств для решения задачи.

$$\begin{cases} 4x + 6y + 9z = 100, \\ x \le 2, \\ z \le 1. \end{cases}$$

При $x = 0$ получаем уравнение

$$6y + 9z = 100,$$

не имеющее целых решений (докажите это самостоятельно).

При $x = 1$ получаем систему

$$\begin{cases} 2y + 3z = 32, \\ z \le 1, z \ge 0, y \ge 0, \end{cases}$$

имеющую единственное целочисленное решение $z = 0$, $y = 16$.

При $x = 2$ снова приходим к системе

$$\begin{cases} 6y + 9z = 92, \\ z \le 1, z \ge 0, y \ge 0, \end{cases}$$

не имеющей целочисленных решений.

Ответ: 1 путевка 1-го типа, 16 путевок 2-го типа, 0 путевок 3-го типа.

Попытайтесь теперь решить несколько задач самостоятельно.

Упражнения

1. При доставке со склада детали планировали погрузить в машины по 20 штук в каждую. Однако при погрузке обнаружилось, что некоторые из них — бракованные. В результате 3 машины были отправлены назад, а число деталей в каждой машине оказалось на 20 штук больше числа первоначально прибывших машин. Сколько деталей было на складе, если известно, что первоначально их можно было бы погрузить так, чтобы число деталей в машине равнялось числу прибывших машин?

2. Даны два целых положительных числа, причем второе меньше половины первого. Если из обоих чисел вычесть четыре, результаты возвести в квадрат и сложить, то сумма будет меньше 9. Найдите эти числа.

3. (МГУ, факультет ВМК, 1975). По дороге из пункта A в B находится пункт C. Из пункта A по этой дороге вышли два пешехода, причем второй на 12 мин позже, хотя и прибыл в пункт B на 18 мин раньше первого. При этом через пункт C они прошли с интервалом не более 6 мин.

Если бы второй вышел на 15 минут позже первого и увеличил свою скорость на 1/5 от первоначальной величины, а первый двигался бы с прежней скоростью, то второй прибыл бы в пункт B на 35 минут раньше первого, а пункт C они прошли бы с интервалом более 5 минут.

Если бы первый уменьшил свою скорость на 1 км/ч, а второй двигался с первоначальной скоростью, то первый потратил бы на путь от A до C в 3 раза меньше времени, чем второй на весь путь от A до B. Найдите длину пути AC.

4. (МГУ, экономический факультет, 1968). Из лесхоза в город необходимо вывезти 1590 деревьев. Для их перевозки имеются полуторатонки, трехтонки и пятитонки. На полуторатонке перевозят за 1 рейс 26 деревьев, на остальных машинах — по 45 и 75 деревьев соответственно. Стоимости одного рейса равны соответственно 9, 15 и 24 рублям. Как лесхозу распределить перевозки, чтобы общая их стоимость была наименьшей? Недогрузка машины не допускается.

Простые опыты с переменным током

Н. ПАРАВЯН

Цветная прерывистая линия

Все знают, что переменный ток — ток, периодически изменяющийся по величине и направлению. Вы хотите на опыте убедиться в том, что он и в самом деле «периодически изменяющийся по направлению»? Оказывается, это возможно и не очень сложно.

Соберите установку, схематически изображенную на рисунке 1. К деревянной доске или листу фанеры прикрепите обычными канцелярскими кнопками кусок алюминиевой фольги. К одной кнопке припаяйте медный изолированный провод. Другой такой же провод присоедините (например, пластмассовой или деревянной бельевой прищепкой) к железному «жалу» обыкновенного шила. Оба провода соедините с клеммами вторичной обмотки понижающего — (220/6–10) В — трансформатора. Не вздумайте включать установку прямо в сеть, без трансформатора: неизбежно произойдет короткое замыкание со всеми вытекающими отсюда неприятностями!

Возьмите полоску фильтровальной бумаги (в крайнем случае — полоску газетной бумаги), смочите ее 10%-ным раствором хлорида аммония (нашатыря), в котором растворено 0,3 г роданистой либо желтой кровяной соли, и наложите бумагу на фольгу. Включите установку в цепь переменного тока (напоминаем — через трансформатор) и быстро, но не очень сильно нажимая, проведите шилом вдоль листа бумаги. На бумаге появится отчетливо видимая цветная прерывистая линия — розово-красная в случае роданистой соли или синяя в случае желтой кровяной соли. Почему прерывистая?

Дело в том, что в растворе, которым

смочена фильтровальная бумага, имеются ионы, прежде всего NH_4^+ и Cl^-. Когда включают ток, в течение одного полупериода шило становится анодом, на котором разряжаются ионы хлора: $2Cl^- - 2e^- \to Cl_2$. Тут же хлор образует с железом хлорид железа: $2Fe + 3Cl_2 = 2FeCl_3$. А хлорид железа дает с роданидом или желтой кровяной солью окрашенные продукты розово-красного или синего цвета.

Когда же ток проходит в обратном направлении, анодом становится алюминиевая фольга и образуется бесцветный

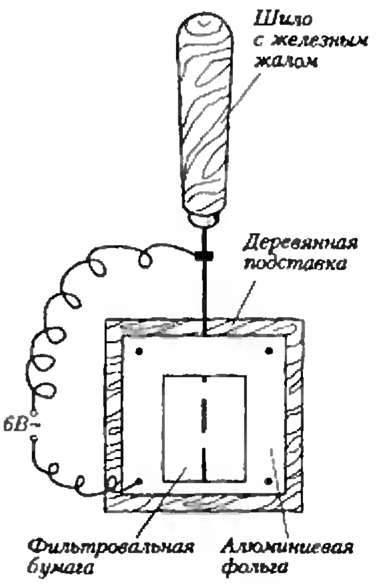


Рис. 1

хлорид алюминия: $2Al + 3Cl_2 = 2AlCl_3$, не дающий цветных реакций с находящимися в растворе ионами. Значит, на нашей линии будет «пробел». Потом направление тока опять изменяется — анодом становится железо и снова появляется окрашенная линия и, т.д. Вот и получается прерывистая линия с правильно чередующимися черточками и пробелами между ними.

Электролитические часы

Известно множество различных «часовых механизмов», созданных самой природой. Бывают геологические часы, биологические, химические. А можно сделать и электролитические часы. И вот как.

Возьмите небольшой сосуд, лучше всего — прямоугольную плоскую кювету (рис. 2). Налейте в сосуд на 2/3 его высоты насыщенный раствор поваренной соли. Вырежьте из куска жести, например от железной, но не алюминиевой! консервной банки, два электрода почти такой же высоты, как и сосуд, и с помощью деревянных палочек погрузите электроды в раствор. К обоим электродам припаяйте изолированные медные проводки. Один проводок соедините с клеммой понижающего — (220/6–10) В — трансформатора. Второй проводок соедините с одной клеммой амперметра переменного тока на 5 А, а другую его клемму соедините со второй клеммой трансформатора.

Итак, наша установка состоит из последовательно включенных источника переменного тока, сосуда с раствором поваренной соли, в который опущены два электрода, и амперметра. Включите установку в сеть и внимательно следите за происходящими в банке явлениями, а также за показаниями амперметра.

Вы увидите, что сила тока в цепи постепенно растет, а жидкость возле поверхности электродов начинает закипать — появляется самый настоящий водяной пар (точнее — туман). Через некоторое время кипение усиливается до бурного, сила тока достигает максимума и... вдруг резко падает почти до нуля. Одновременно прекращается и кипение. Вскоре ток снова начинает расти, кипение усиливается до бурного, вслед за чем процесс опять почти полностью приостанавливается. Так продолжается до тех пор, пока вы не выключите установку из сети. И в самом деле — настоящие часы, только электролитические. Как же объяснить это периодическое кипение жидкости и одновременное периодическое изменение силы тока в цепи?

Раствор поваренной соли имеет значительное сопротивление и при пропускании через него электрического тока разогревается. Да так сильно, что закипает. Из-за все увеличивающегося количества пузырьков пара электроды через некоторое время (определенный временной интервал) практически полностью изолируются от жидкости (пар — диэлектрик). Тогда цепь размыкается, кипение прекращается — электроды снова начинают контактировать с раствором. И опять начинается кипение, и т.д.

Ну, а почему увеличиваются показания амперметра? При нагревании раствора уменьшается его электрическое сопротивление, что, по закону Ома, естественно влечет за собой увеличение силы тока в цепи.

А теперь продолжите ваш эксперимент. Выключите трансформатор из сети, оставьте в растворе один жестяной электрод, а второй совсем удалите. Вместо него к клемме трансформатора присоедините очень тонкую голую медную или железную проволочку диаметром 0,5 мм или даже еще меньше. Оберните проволочку липкой изоляционной лентой и, придерживая за нее проволочку, включите трансформатор в сеть. Коснитесь свободным концом проволочки поверхности электролита и постепенно опустите его на глубину порядка сантиметра.

То, что начинается в растворе, даже нельзя назвать кипением — процесс сопровождается свечением раскаленного конца проволочки, эффектными вспышками желтого пламени и резким периодически повторяющимся трескучим звуком. И это нетрудно объяснить.

Во-первых, из-за того что проволочка тонкая, она сильно раскаляется. Правда периодичность накала глазу незаметна, так как частота прерывания тока в этом случае очень большая. Во-вторых, в нашей системе, состоящей из одного очень большого электрода и другого очень маленького, возникает как бы односторонняя проводимость электрического тока, т.е. происходит частичное выпрямление переменного тока. В результате начинается электролиз раствора поваренной соли. При этом водород, выделяющийся на маленьком электроде (проволочке), сме-

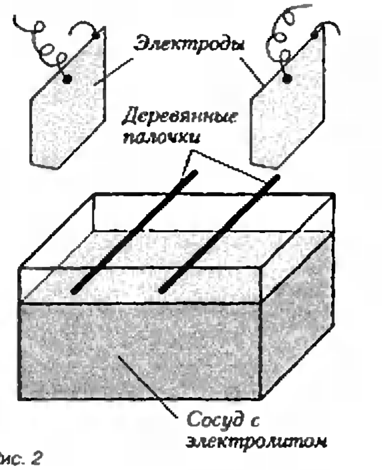


Рис. 2

шивается с мельчайшими капельками раствора хлорида натрия и вспыхивает желтым пламенем с резким звуком. Кроме того, на поверхности раскаленной проволочки при высокой температуре водяной пар разлагается: $2H_2O = 2H_2 + O_2$. Образующаяся смесь водорода и кислорода (гремучий газ) от малейшей искры также вспыхивает, точнее — взрывается с сильным звуком.

А можно ли будет наблюдать все эти эффекты, если воспользоваться не переменным, а постоянным электрическим током? Взяв выпрямитель электрического тока, дающий постоянное напряжение 6–10 В, вы можете убедиться в том, что все эти явления будут еще более эффективными — ведь параллельно будет происходить еще и электролиз водного раствора хлорида натрия.

И последнее. Если у вас не окажется амперметра переменного тока — не беда. Возьмите вместо него электрическую лампочку, например на 6–10 В и 5–10 Вт. С ее помощью вы обнаружите не меньший эффект.

XXIV Международная физическая олимпиада

В 1993 году олимпиада по физике проходила с 10 по 18 июля в США, в городе Вильямсбурге (штат Вирджиния). Команду России представляли Степан Андреенко *(Москва, с.ш. № 57),* Роман Беленов *(Нижний Новгород, с.ш. № 40),* Денис Кисловский *(Санкт-Петербург, ФМШ № 239),* Василий Ларькин *(Нижний Новгород, с.ш.№ 14),* Денис Чигирев *(Санкт-Петербург, ФМШ № 566).*

По традиции, участникам олимпиады предлагалось решить три теоретические задачи и выполнить два экспериментальных задания. В результате Р.Беленов, В.Ларькин и С.Андреенко получили золотые медали, а Д.Чигирев и Д.Кисловский — серебряные.

Поздравляем ребят с достигнутыми успехами!

А теперь предлагаем вниманию читателей условия олимпиадных задач.

INTERNATIONAL PHYSICS OLYMPIAD XXIV WILLIAMSBURG VIRGINIA · USA

Теоретический тур

Задача 1. Атмосферное электричество

С точки зрения электростатики поверхность Земли можно рассматривать как хороший проводник, имеющий полный заряд Q_0 и среднюю поверхностную плотность заряда σ_0.

1) При благоприятных погодных условиях направленное вниз электрическое поле E_0 на поверхности Земли равно приблизительно 150 В/м. Найдите величины σ_0 и Q_0.

2) Электрическое поле Земли убывает с высотой и на высоте 100 м равно приблизительно 100 В/м. Вычислите средний заряд в 1 м^3 атмосферы в слое между поверхностью Земли и высотой 100 м.

3) Плотность заряда, которую Вы вычислили в пункте 2, в действительности обусловлена наличием почти равных количеств положительных и отрицательных единично заряженных ионов (n_+ и n_-). Вблизи земной поверхности при благоприятных погодных условиях $n_+ = n_- = 6 \cdot 10^8$ м$^{-3}$. Эти ионы двигаются под действием вертикального электрического поля. Их скорость пропорциональна напряженности поля: $v \approx 1{,}5 \cdot 10^{-4} E$, где v выражено в м/с, а E — в В/м. Сколько времени потребуется, чтобы половина поверхностного заряда Земли была нейтрализована вследствие движения атмосферных ионов, если нет других процессов (например, молнии), поддерживающих величину этого заряда?

4) Атмосферное электрическое поле и, следовательно, плотность σ_0 можно измерить с помощью установки, показанной на рисунке 1. Пара металлических квадрантов, изолированных от земли, но соединенных один с другим, расположены под заземленным вращающимся диском с двумя отверстиями в форме квадрантов. (На рисунке расстояние между квадрантами и диском для наглядности увеличено.) Дважды при каждом обороте изолированные квадранты попадают в электрическое поле, а потом (через 1/4 периода) полностью экранируются от него. Пусть T период вращения, а внутренний и наружный радиусы изолированных квадрантов равны r_1 и r_2 соответственно. Пусть $t = 0$ — момент времени, когда изолированные квадранты полностью заэкранированы. Получите выражения для полного заряда q, индуцированного на верхней поверхности изолированных квадрантов, как функцию времени t между $t = 0$ и $t = T/2$. Нарисуйте график этой зависимости. Эффектом от потока атмосферных ионов в этой ситуации можно пренебречь.

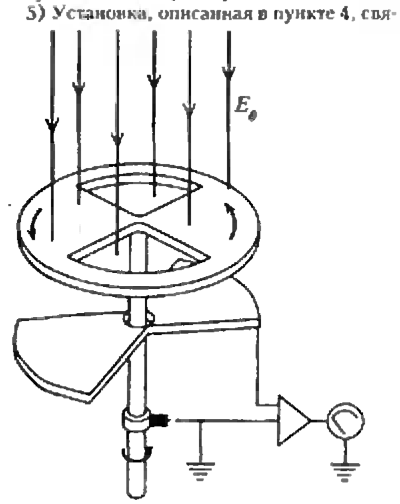


Рис. 1

5) Установка, описанная в пункте 4, связана с усилителем, входной контур которого эквивалентен конденсатору емкостью C и резистору сопротивлением R, соединенным параллельно (рис. 2). Вы можете предположить, что емкостью системы квадрантов можно пренебречь по сравнению с C. Нарисуйте график зависимости разности потенциалов U между точками M и N от времени t в течение одного оборота диска сразу после начала вращения с периодом T, если а) $T \ll CR$, б) $T \gg CR$. (Предположите, что C и R имеют фиксированные значения, только периоды T отличаются в случаях а) и б).) Получите приблизительное выражение для отношения $U_а/U_б$ наибольших значений $U(t)$ в случаях а) и б).

6) Пусть $E_0 = 150$ В/м, $r_1 = 1$ см, $r_2 = 7$ см, $C = 0{,}01$ мкФ, $R = 20$ МОм и пусть диск совершает 50 оборотов в секунду. Чему равно, приблизительно, наибольшее значение U в течение одного оборота в этом случае?

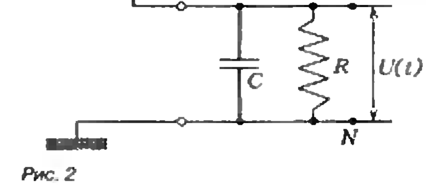


Рис. 2

Задача 2. Лазерные силы, действующие на прозрачную призму

Преломляясь, мощный лазерный луч может вызывать значительные силы, действующие на малые прозрачные объекты. Чтобы увидеть это, рассмотрим маленькую стеклянную треугольную призму с углом при вершине $A = \pi - 2\alpha$, длиной основания $2h$ и шириной b (рис. 3). Призма имеет показатель преломления n и плотность ρ.

Призма расположена на пути лазерного луча, идущего горизонтально вдоль оси X. (В этой задаче предполагается, что призма

Kvant! A wonderful magazine for our kids. Congratulations & continue forever!

Leon Lederman

Квант! Прекрасный журнал для наших детей. Приветствуем и пусть он существует всегда!

Леон Ледерман -
Председатель Оргкомитета
XXIV Международной физической олимпиады,
Нобелевский лауреат по физике, 1988 г.

не поворачивается, т.е. вершина всегда расположена навстречу направлению луча, основание призмы параллельно плоскости YZ, а треугольные грани параллельны плоскости XY.) Пусть показатель преломления окружающего воздуха равен единице, а грани призмы покрыты антиотражающим покрытием, так что отражение отсутствует.

Интенсивность лазерного луча однородна по его ширине в направлении оси Z, но убывает линейно с расстоянием y от оси X (рис. 4), так что интенсивность достигает своего максимального значения I_0 при $y=0$ и падает до нуля при $y=\pm 4h$. (Интенсивность — это мощность, приходящаяся на единицу площади, выраженная, например, в $\text{Вт}\cdot\text{м}^{-2}$.)

1) Напишите уравнения, из которых можно определить угол θ (рис. 5) через величины α и n в случае, когда лазерный луч падает на верхнюю грань призмы.

2) Выразите x- и y-компоненты силы, действующей на призму при лазерном облучении, через I_0, θ, h, b и y_0, если вершина призмы смещена на расстояние y_0 от оси X, где $|y_0| \le 3h$ (см. рис. 4). Постройте графики зависимости вертикальной и горизонтальной компонент силы от вертикального смещения y_0.

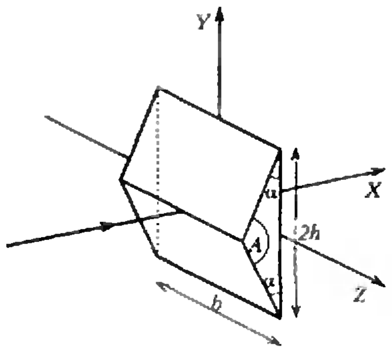


Рис. 3

3) Пусть ширина лазерного луча в направлении оси Z равна 1 мм, а в направлении оси Y — 80 мкм. Призма имеет параметры: $\alpha=30°$, $h=10$ мкм, $n=1{,}5$, $b=1$ мм и $\rho=2{,}5$ г·см-3. Какая мощность требуется, чтобы удерживать призму в равновесии в поле силы тяготения (в направлении оси Y), если вершина призмы расположена ниже оси лазерного луча на $y_0=h/2=5$ мкм)?

4) Пусть этот эксперимент проводится в состоянии невесомости с теми же призмой и лазерным лучом, имеющими такие же параметры, как и в пункте 3, но с $I_0=10\ \text{Вт}\cdot\text{м}^{-2}$. Каким будет период возникающих колебаний, если призма смещена и отпущена на расстоянии $y=h/20$ от оси лазерного луча?

Задача 3. Электронный пучок

Ускоряющее напряжение U_0 создает однородный параллельный пучок электронов с высокой энергией. Электроны проходят вблизи длинной тонкой положительно заряженной медной проволоки, расположенной под прямым углом к первоначальному направлению пучка, как показано на рисунке 6 (b — это расстояние от проволоки, на котором прошел бы электрон, если бы проволока не была заряжена). После этого электроны попадают на экран (плоскость

Рис. 4

наблюдения), расположенный на расстоянии L ($\gg b$) за проволокой. Первоначально пучок имеет размеры $\pm b_{max}$ относительно оси проволоки. Как ширину пучка, так и длину проволоки можно считать бесконечными в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка. Некоторые численные значения параметров таковы: радиус проволоки $r_0=10^{-6}$ м, $b_{max}=10^{-4}$ м, электрический заряд на единицу длины проволоки $q_l=4{,}4\cdot10^{-11}\ \text{Кл}\cdot\text{м}^{-1}$, $U_0=2\cdot10^4$ В, $L=0{,}3$ м.

1) Вычислите электрическое поле E, создаваемое проволокой. Нарисуйте график зависимости величины E от расстояния до оси проволоки.

2) Используйте классическую физику для вычисления углового отклонения электрона. Сделайте это для таких значений параметра b, при которых электрон не сталкивается с проволокой. Пусть θ — угол (малый) между первоначальной скоростью электрона и его скоростью, когда он попадает на экран наблюдения. Вычислите θ.

3) Найдите и изобразите графически зависимость интенсивности рассеянного пучка электронов от координаты в плоскости наблюдения (диаграмма рассеяния), которую предсказывает классическая физика.

4) Квантовая физика предсказывает существенное отличие в распределении интенсивности (относительно того, что дает классическая физика). Изобразите графически квантовый результат и сделайте количественные оценки.

Замечание. В пунктах 2 — 4 сделайте разумные приближения, необходимые для получения аналитических и числовых результатов.

Экспериментальный тур

Наверное, не имеет смысла приводить полностью условия экспериментальных заданий, поскольку они рассчитаны на конкретные приборы и устройства, которых у читателя нет. Ограничимся лишь краткими формулировками цели эксперимента.

Задание 1. Теплота парообразования азота

Цель этого эксперимента — измерить удельную теплоту парообразования азота, используя два различных метода. В первом случае вы опускаете кусок алюминия в сосуд с жидким азотом и измеряете количество испаряющегося азота по мере остывания алюминия. Во втором вы с известной скоростью подводите к сосуду с жидким азотом энергию в виде тепла и измеряете скорость испарения жидкого азота.

Задание 2. Магнитные моменты и поля

Этот эксперимент состоит из двух частей.

Часть 1. Определите абсолютную величину магнитного момента небольшого цилиндрического магнита, находящегося в пакете 1.

Часть 2. Исследуйте магнитное поле заданной конфигурации магнитов, находящейся в пакете 2.

Публикацию подготовил С.Кротов

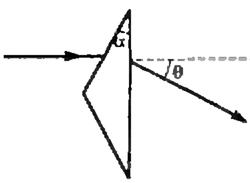


Рис. 5

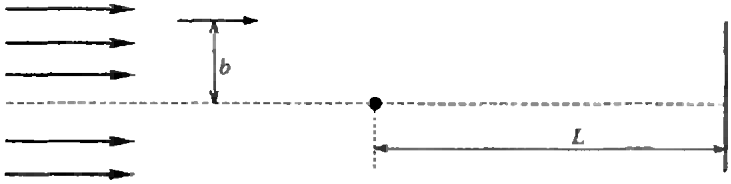


Рис. 6

XXXIV Международная математическая олимпиада

С 16 по 24 июля 1993 года в Стамбуле прошла XXXIV Международная математическая олимпиада, в которой приняли участие 352 школьника из 67 стран. Россию представляли Бондарко Михаил *(Санкт-Петербург, ФМЛ №239, 10 кл.),* Поздняков Антон *(Санкт-Петербург, ФМШ №292, 11 кл.),* Розенблюм Елизавета *(Санкт-Петербург, ФМЛ №239, 11кл.),* Федоров Роман *(Москва, с.ш. №57, 11 кл.), получившие золотые медали;* Бирюк Андрей *(Краснодар, с.ш. №4, 11 кл.), получивший серебряную медаль, и* Панов Дмитрий *(Москва, с.ш. №57, 11 кл.), получивший бронзовую медаль.*

В неофициальном командном зачете первые 10 мест среди 74 команд-участниц распределились так: 1 — Китай (215 баллов), 2 — Германия (189), 3 — Болгария (178), 4 — Россия (177), 5 — Тайвань (162), 6 — Иран (153), 7 — США (151), 8 — Венгрия (143), 9 — Вьетнам (138), 10 — Чехия (132).

Первый день

1. Пусть $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$, где $n>1$ — целое число. Докажите, что $f(x)$ не может быть представлен в виде произведения двух многочленов, каждый из которых степени не меньшей 1 и все коэффициенты которых — целые числа.

2. Дан остроугольный треугольник ABC и точка D внутри него, такая что

$$\angle ADB=\angle ACB+90^\circ$$

и

$$AC\cdot BD=AD\cdot BC.$$

а) Вычислите значение отношения

$$\frac{AB\cdot CD}{AC\cdot BD}.$$

б) Докажите, что касательные, проведенные в точке C к окружностям, описанным около треугольников ACD и BCD, перпендикулярны.

3.[1] На бесконечной шахматной доске играется следующая игра. В начале n^2 фишек занимают квадратное поле $n\times n$, по одной фишке в каждой клетке. Ход заключается в том, что какая-то фишка перепрыгивает в горизонтальном или вертикальном направлении через одну соседнюю занятую клетку на свободную клетку сразу за ней. При этом фишка, через которую перепрыгнули, снимается с доски. Найдите все значения n, для которых в такой игре можно оставить на доске только одну фишку.

[1] *См. также «Квант» № 11 за 1992 г., с. 59, задача 4 для 9 класса.*

Второй день

4. Для трех точек P, Q, R на плоскости через $m(PQR)$ обозначим наименьшую из длин высот треугольника PQR (если точки P, Q, R лежат на одной прямой, то $m(PQR)=0$). Пусть на плоскости даны точки A, B, C. Докажите, что для любой точки X этой плоскости

$$m(ABC)\le m(ABX)+m(AXC)+m(XBC).$$

5. Пусть $N=\{1,2,3,\ldots\}$. Выясните, существует ли функция $f:N\to N$ такая, что $f(1)=2$, $f(f(n))=f(n)+n$ для всех $n\in N$ и $f(n)<f(n+1)$ для всех $n\in N$.

6. Пусть n — целое число, большее 1. По окружности расположены n ламп $L_0,\ldots,L_{n-1}$. Каждая лампа может быть в состоянии «включена» или «выключена». Последовательность шагов $S_0, S_1,\ldots,S_i,\ldots$ определяется следующим образом. Шаг S_j влияет только на состояние лампы L_j (и не влияет на состояние остальных ламп) так, что если L_{j-1} включена, то S_j изменяет состояние L_j:

если L_j была включена, то станет выключена;

если L_j была выключена, то станет включена;

если L_{j-1} выключена, то S_j ничего не меняет. (Лампы пронумерованы по модулю n, т.е. $L_{-1}=L_{n-1}$, $L_0=L_n$, $L_1=L_{n+1}$ и т.д.)

Сначала все лампы включены. Докажите, что

а) существует положительное целое число $M(n)$ такое, что после $M(n)$ шагов опять все лампы будут включены;

б) если n — число вида 2^k, то после n^2-1 шагов все лампы будут включены;

в) если n — число вида 2^k+1, то после n^2-n+1 шагов все лампы будут включены.

Варианты вступительных экзаменов

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\cos 3x + |\cos x| = \sin 2x.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{1/2}\left(3 - \sqrt{2^{-x} - 1}\right) > x.$$

3. Биссектриса AD и высота BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O. Окружность с радиусом R и центром в точке O проходит через вершину A, середину стороны AC и пересекает сторону AB в точке K такой, что $AK:KB = 1:3$. Найдите длину стороны BC.

4. На сторонах BC и AD правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина) взяты точки P и Q. Сечения пирамиды $SABCD$ двумя взаимно перпендикулярными плоскостями α и β, проходящими через прямую PQ, — трапеции с равными основаниями. Грань SAB образует угол $\pi/4$ с пересекающей ее плоскостью сечения, а угол между гранями SAB и $ABCD$ равен $\operatorname{arctg} 2$. Найдите площади сечений пирамиды плоскостями α и β, если $PQ = 13$.

5. На координатной плоскости изображена фигура M, состоящая из точек, координаты $(x; y)$ которых таковы, что выражение

$$4 + p^2\left(2y - x^2 + 14\right) - p^{-2}\left(x^2 + 4x + 2y\right)$$

неотрицательно при всех $p \neq 0$. Из точки A проведены лучи a_1 и a_2, а из точки C — лучи c_1 и c_2, каждый из которых касается границы множества M. Лучи a_1 и c_1 пересекаются в точке B, а лучи a_2 и c_2 — в точке D, причем $ABCD$ — прямоугольник, одна из диагоналей которого параллельна оси Ox. Изобразите на координатной плоскости фигуру M, найдите координаты центра прямоугольника $ABCD$ и его площадь.

Вариант 2

1. Найдите все решения уравнения

$$\frac{\sin 6x}{\sin x + \cos x} = \frac{\cos 6x}{\cos x - \sin x},$$

принадлежащие интервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\log_4(1 + 6x) + \left|\log_{1/8}(1 + 7x)\right|}.$$

3. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята точка K так, что треугольник CKD равносторонний. Известно, что расстояния от точки K до прямых AD, AB и BC равны соответственно 3, 6 и 5. Найдите периметр параллелограмма.

4. Числа $x \le 0$, $y > 0$ — решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 8xy - 3y^2 = \dfrac{10p - p^2}{4p^2 + 9}, \\ x^2 - 5xy + 6y^2 = \dfrac{10 - p}{4p^2 + 9}, \end{cases}$$

p — параметр. При каких p выражение $f = x^2 + y^2$ принимает а) наибольшее значение, б) наименьшее значение? Вычислите эти значения.

5. Основание прямой призмы $KLMNK'L'M'N'$ — ромб $KLMN$ с углом 60° при вершине K. Точки E и F — середины ребер LL' и LM призмы. Ребро SA правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина) лежит на прямой LN, вершины D и B — на прямых MM' и EF соответственно. Найдите отношение объемов призмы и пирамиды, если $SA = 2AB$.

Вариант 3

1. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{7}{2} - 3\sin^2 x} = \sin x + \cos x.$$

2. Две параллельные касательные к графику функции $y = x^3 - 6$ пересекают оси координат: первая — в точках A и B, вторая — в точках C и D. Найдите площадь треугольника AOB, если известно, что она в 4 раза меньше площади треугольника COD.

3. Продолжения медиан AM и BK треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках E и F соответственно, причем $AE:AM = 2:1$, $BF:BK = 3:2$. Найдите углы треугольника ABC.

4. При каких значениях p каждое решение неравенства

$$\log_{x+1}(3 - px) > 0$$

удовлетворяет также неравенству

$$x^2 + \frac{2p - 5}{2p}x - \frac{5}{2p} > 0?$$

5. Внутри правильной треугольной пирамиды расположена прямая призма, в основании которой лежит ромб. Одна из граней призмы принадлежит основанию пирамиды, другая грань — боковой грани пирамиды. Какой наибольший объем может иметь призма, если ребро основания пирамиды равно 2, а высота пирамиды равна $2\sqrt{2}$?

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1[1]

1. Брусок, двигавшийся по горизонтальной поверхности стола со скоростью v_0, сталкивается с неподвижным бруском вдвое большей массы. На какое расстояние разъедутся бруски после столкновения? Удар упругий, нейтральный. Коэффициенты трения брусков о стол одинаковы и равны μ.

2. В модели «адиабатической» атмосферы температура воздуха меняется с высотой h по линейному закону $T(h) = T(0) - 2Mgh/(7R)$, где $T(0)$ — температура у поверхности Земли, $M = 29$ г/моль — средняя молярная масса воздуха, $g = 9{,}8$ м/с^2 — ускорение свободного падения, $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) — газовая постоянная. В той же модели температура $T(h)$ и плотность $\rho(h)$ на высоте h связаны с температурой $T(0)$ и плотностью $\rho(0)$ у поверхности Земли формулой $T^5(h)/\rho^2(h) = T^5(0)/\rho^2(0)$. Найдите массу воздуха, содержащегося в объеме 1 литр на высоте Эльбруса $h = 5{,}5$ км. Воздух у поверхности Земли находится при нормальных условиях. *Указание:* для $x \ll 1$ справедлива формула $(1 - x)^\alpha = 1 - \alpha x$.

4. В схеме, изображенной на рисунке 1, в начальный момент ключ K разомкнут, а в замкнутом контуре схемы течет уста-

[1] *Этот вариант предлагался на пробных экзаменах в МФТИ в марте 1993 г.*

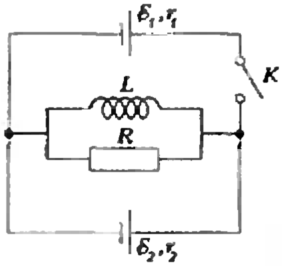


Рис. 1

новившийся ток. Определите величину и направление тока через резистор R сразу после замыкания ключа K. Параметры схемы: ЭДС первой батареи $\mathcal{E}_1 = 10$ В, внутреннее сопротивление $r_1 = 5$ Ом, внутреннее сопротивление второй батареи $r_2 = 20$ Ом, сопротивление резистора $R = 4$ Ом.

4. Точечный источник S монохроматического света с длиной

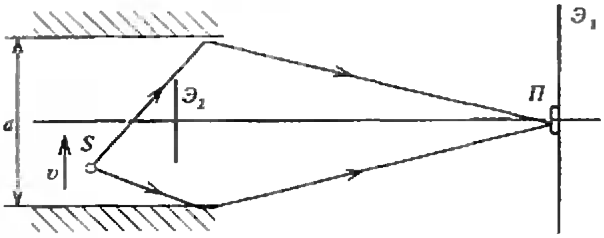


Рис. 2

волны $\lambda = 6000$ Å расположен между двумя неподвижными плоскопараллельными зеркалами, расстояние между которыми $a = 3$ см (рис. 2). На большом расстоянии $L = 1$ м от источника расположен экран $Э_1$, на котором наблюдается интерференционная картина, создаваемая двумя пучками света, отраженными от зеркал. Прямой пучок света от источника перекрывается экраном $Э_2$. В плоскости экрана $Э_1$ (симметрично относительно зеркал) расположен приемник П, который регистрирует сигнал, пропорциональный интенсивности падающего света. Размер приемника мал по сравнению с шириной интерференционных полос на экране. Учитывая только однократные отражения света от зеркал, определите частоту переменного сигнала, регистрируемого приемником, который возникает при движении источника перпендикулярно зеркалам со скоростью $v = 0,1$ мм/с. *Указание:* при $\beta \ll 1$ справедлива формула $\sqrt{1+\beta} = 1 + 1/2\beta$.

Вариант 2

1. Во сколько раз отличаются минимальные периоды обращения спутников для Марса и Земли? Масса Марса составляет $\alpha = 0,11$ массы Земли, а радиус — $\beta = 0,53$ радиуса Земли.

2. Мыльный пузырь надувается воздухом, температура которого выше комнатной. При диаметре пузыря $d = 0,3$ мм он начинает всплывать (в комнате). На сколько процентов температура воздуха в пузыре выше комнатной? Коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора $\sigma = 0,038$ Н/м. Силой тяжести пленки пренебречь.

3. Квадратную проволочную рамку со стороной a и сопротивлением R протягивают с постоянной скоростью v через зазор электромагнита(рис. 3). Магнитное поле в зазоре однородно, и его индукции равна B и перпендикулярна плоскости рамки. Пренебрегая краевыми эффектами, определите, какое количество теплоты выделится в рамке. Сторона рамки a меньше и продольного размера зазора b, и его поперечного размера l.

4. На стеклянную плоскопараллельную пластинку толщиной $H = 3$ мм падает узкий пучок монохроматического света (рис. 4). Пучок параллелен оси OO', которая перпендикулярна к пластине и проходит через ее центр. Расстояние между пучком и осью $R = 3$ см. Показатель преломления стекла для падающего на пластинку света изменяется в зависимости от расстояния r до оси OO' по закону

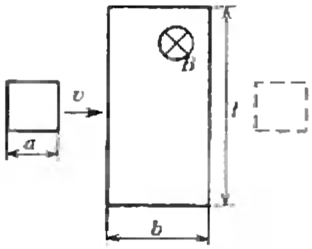


Рис. 3

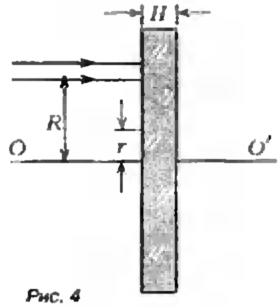


Рис. 4

$$n(r) = n_0\left(1 - \left(r/r_0\right)^2\right),$$

где $n_0 = 1,5$ и $r_0 = 9$ см — константы. Определите угол между выходящим пучком и осью OO'.

Вариант 3

1. Груз прикрепляют к нити и подвешивают — опыт проводится в Москве. При какой продолжительности суток нить расположилась бы параллельно оси вращения Земли? Радиус

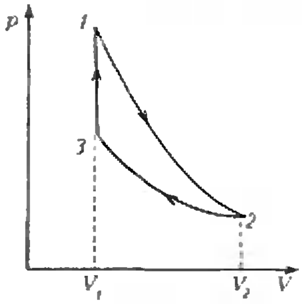


Рис. 5

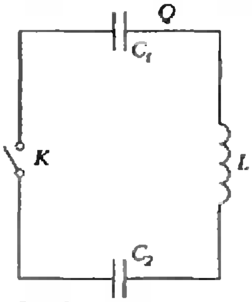


Рис. 6

Земли $R = 6400$ км.

2. Внутренняя энергия U неидеального газа зависит от температуры T и объема V по формуле $U = cT - a/V$, где c и a — заданные константы. Над таким газом из состояния с объемом V_1 совершают замкнутый процесс (цикл), состоящий из адиабаты $1 - 2$, изотермы $2 - 3$ и изохоры $3 - 1$ (рис. 5). Найдите разность конечной и начальной температур газа в изохорическом процессе, если работа газа в адиабатическом

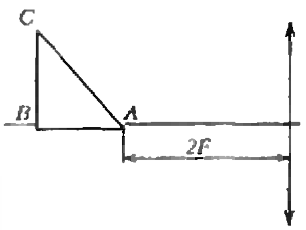


Рис. 7

процессе оказалась в β раз больше работы изотермического сжатия. Известно, что $V_2 = \alpha V_1$, а суммарное количество теплоты, подведенное к газу за цикл, равно Q.

4. В цепи, изображенной на рисунке 6, при разомкнутом

ключе K заряд на конденсаторе емкостью C_1 равен Q, а конденсатор емкостью $C_2 = 4C_1$ не заряжен. Определите максимальный ток в цепи после замыкания ключа. Омическими потерями в катушке индуктивностью L пренебречь.

4. Линза создает изображение прямоугольного треугольника, катет AB которого лежит на главной оптической оси (рис. 7). Площадь изображения треугольника в 9 раз меньше площади самого треугольника. С каким увеличением изображается катет BC, если точка A лежит на двойном фокусном расстоянии от линзы?

Публикацию подготовили Н.Агаханов, А.Шеронов

Московский государственный институт электроники и математики (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(досрочный экзамен факультета прикладной математики и экономико-математического факультета)

1. Автомобиль выезжает из пункта A в пункт B и, доехав до B, сразу же возвращается обратно в A. Через 2 часа после выезда автомобиль находился на расстоянии 100 км от B, а еще через 3 часа — в 150 км от A. Найдите расстояния между пунктами A и B, если известно, что на весь путь было затрачено менее 10 часов.

2. Решите неравенство

$$\log_{2x-1} 2 > \log_4(2x-1) - \frac{1}{2}.$$

3. Двугранный угол при боковом ребре правильной треугольной пирамиды равен 2α. Высота пирамиды равна h. Найдите объем конуса, описанного около пирамиды.

4. Постройте график функции

$$y = \frac{\sqrt{9x^2+6x+1} - 1}{|x|}.$$

5. Найдите все решения уравнения

$$5\sin 2x - 6\sin x \sin 3x + \sin x = 0,$$

принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

Вариант 2

(основной экзамен факультета прикладной математики и экономико-математического факультета)

1. Решите уравнение

$$\frac{x+2}{3x-a} + \frac{3-x}{3x^2+2ax-a^2} = \frac{3x+2}{x+a}.$$

2. Решите уравнение

$$3\cos 2x + 2\sin^2 x + 4\sin|x| = 0$$

и определите, сколько корней оно имеет на отрезке $[-12;12]$.

3. Расстояние между двумя городами скорый поезд проходит на 30 минут быстрее, чем пассажирский поезд, и на 1 час 20 минут быстрее, чем товарный. Скорость пассажирского поезда составляет 4/3 скорости товарного и на 18 км/ч меньше скорости скорого поезда. Найдите скорость товарного поезда.

4. Одна из сторон равностороннего треугольника образует с некоторой плоскостью p угол α, другая — с той же плоскостью угол β. Найдите угол между плоскостью треугольника и плоскостью p.

5. При $a = -\frac{1}{3}$ решите уравнение

$$\log_{3x-1}(x+a) = \frac{1}{2}$$

и найдите все значения a, при которых это уравнение имеет единственное решение.

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. Два тела с одинаковыми массами движутся перпендикулярно друг другу со скоростями $v_1 = 6$ м/с и $v_2 = 8$ м/с. Определите величину и направление скорости тел после абсолютно неупругого соударения.

2. Однородная балка массой $m = 60$ кг упирается одним концом в угол между стеной и полом. Угол наклона балки к полу $\alpha = 30°$. К другому концу балки со стороны стены привязан канат. Угол между балкой и канатом $\beta = 60°$. Определите силы нормального давления балки на стену и пол.

3. Пружинный маятник совершает колебания, уравнение которых $x = 4{,}0\cos(\pi t + \pi/3)$(см). Определите скорость и ускорение маятника через $t = 20$ с после начала движения. Масса маятника $m = 200$ г.

4. Идеальный одноатомный газ находится в баллоне емкостью $V = 10$ л под давлением $p = 10^5$ Па. На сколько изменится внутренняя энергия газа при уменьшении его массы вдвое?

5. Один моль идеального одноатомного газа находится при нормальных условиях. Какое количество теплоты надо сообщить газу, чтобы провести процесс, показанный на рисунке 1 (здесь $n = 1{,}2$)?

6. Шарик массой $m = 10$ мг, несущий электрический заряд $q = 0{,}50$ мкКл, влетает в горизонтальное однородное электри-

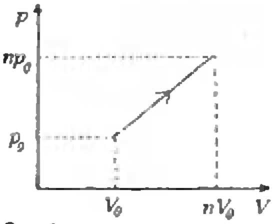


Рис. 1

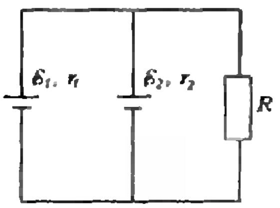


Рис. 2

ческое поле напряженностью $E = 2{,}0$ В/см вдоль силовых линий. При прохождении тормозящей разности потенциалов $U = 10$ В горизонтальная составляющая скорости шарика становится равной нулю. Найдите работу, которую совершила над шариком сила тяжести за это время.

7. Определите ток, текущий через резистор сопротивлением $R = 10$ Ом (рис. 2). В схеме $\mathscr{E}_1 = 2{,}0$ В, $r_1 = 2{,}0$ Ом, $\mathscr{E}_2 = 3{,}0$ В, $r_2 = 1{,}0$ Ом.

8. Протон, ускоренный разностью потенциалов $U = 272$ В, влетая в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1{,}7$ мТл, движется по окружности. Определите изменение импульса протона при повороте его на угол $\varphi = \pi/2$. Через какое время это произойдет? Заряд протона $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса $m = 1{,}7 \cdot 10^{-27}$ кг.

9. Определите минимально возможное расстояние между предметом и его действительным изображением, полученном с помощью линзы с фокусным расстоянием $F = 10$ см. Каково при этом увеличение линзы?

10. Серебряная пластинка ($A = 4{,}7$ эВ) освещена монохроматическим излучением с длиной волны $\lambda = 180$ нм. Определите максимальный импульс, передаваемый поверхности пластинки при вырывании фотоэлектрона.

Публикацию подготовили Ю.Сезонов, В.Тонян

Московский педагогический государственный университет им. В.И. Ленина

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Решите уравнение
$$\sqrt{x+6}-m=\sqrt{x-3}$$
для всех $m \in \boldsymbol{R}$.

2. Решите уравнение
$$2^{\sin 2x}+2^{2+(\sin x-\cos x)^2}=9^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\sin x-\cos x}$$

3. Запишите уравнения тех касательных к графику функции
$$f(x)=x^3-2x^2+\frac{4}{3}x,$$
которые параллельны прямой $x-3y=1$.

4. Через 2 часа после того, как первый трактор начал пахать, к нему присоединился второй, и они вместе закончили вспашку поля. Если бы тракторы поменялись ролями, то они закончили бы вспашку на 24 минуты позднее. Какое время тракторы работали вместе, если известно, что первый может вспахать четверть поля на 3 часа быстрее, чем второй — треть поля?

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между плоскостью грани $ABCD$ и плоскостью, проходящей через вершину B и середины ребер AD и CC_1.

Вариант 2

(математический факультет)

1. Решите неравенство
$$2^x+2^{|x|}\geq 2\sqrt{2}.$$

2. Решите уравнение
$$\log_3(2\sin x\sin 2x)+\log_{1/3}(5\cos x+4\sin 2x)=0.$$

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции
$$y=\frac{x}{x-x^2-1}$$
на отрезке $[-2;-2]$.

4. Города A и B расположены на берегу реки (B — ниже по течению). В 9 часов утра из A в B отправляется плот и из B в A — лодка, которая встречается с плотом через 5 часов. Доплыв до A, лодка сразу отправляется обратно и прибывает в B одновременно с плотом. Успевают ли они прибыть в B в 9 часов вечера того же дня?

5. В основании пирамиды $DABC$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB=17$, $AC=8$, $BC=15$. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом $30°$. Найдите $\angle BDC$.

Вариант 3

(физический факультет)

1. Диагональ длиной d основания прямоугольного параллелепипеда образует со стороной основания угол φ. Угол между этой стороной и диагональю параллелепипеда равен β. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

2. Решите уравнение
$$x^{\lg x}=100x.$$

3. Решите уравнение
$$2\cos^2 x+\cos x-1=0.$$

4. Решите неравенство
$$(x-1)(x-2)(x-3)^2<0.$$

5. Найдите угол, образуемый касательной к кривой $y=5-0{,}5x^2$ в точке с абсциссой $x_0=-\sqrt{3}$ с осью Ox.

Вариант 4

(индустриально-педагогический факультет)

1. Центр грани куба с ребром a соединен с серединами сторон противоположной грани, которые также соединены в последовательном порядке. Вычислите площадь поверхности пирамиды, ребрами которой являются проведенные отрезки.

2. Решите уравнение
$$\left(\sqrt{x}\right)^{\log_x 7-1}=7.$$

3. Решите уравнение
$$\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

4. Решите неравенство
$$\left|x^2-2x\right|<3.$$

5. Найдите значение угла касательной к кривой $y=\frac{1}{2}x^2$ с осью Ox в точке с абсциссой $x_0=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Вариант 5

(химический факультет)

1. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведено сечение, составляющее угол β с высотой конуса. Найдите объем конуса, если его высота равна h.

2. Решите уравнение
$$\sin^2 x=\sqrt{3}\sin x\cos x.$$

3. Два велосипедиста выехали одновременно из двух городов, находящихся на расстоянии 300 км, и едут навстречу друг другу. Первый проезжает в час 12 км, второй 13 км. Когда они встретятся?

4. Решите неравенство
$$|x+2|-|x-1|+|x-3|<4.$$

5. Решите уравнение
$$\lg\left(2x^2+21x+9\right)-\lg(2x+1)=1.$$

МАТЕМАТИКА

Задачи устного экзамена

(математический факультет)

1. Решите неравенство
$$3^{x^2+1}>16^{x/2}.$$

2. Постройте график функции
$$y=\frac{\left(x^2-4\right)(x-3)}{\sqrt{x^2-4x+4}}.$$

3. Боковая сторона неравнобедренной трапеции равна 12 и образует с ее основанием угол $60°$. Основания трапеции равны 16 и 40. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.

4. Решите неравенство
$$\log_x 2>\log_{x/2}4.$$

5. При каких a оба корня уравнения
$$x^2-6ax+2-2a+9a^2=0$$
больше 3?

6. Вычислите
$$\frac{1}{\sqrt{10}}\cos\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$
если $\operatorname{tg}\alpha=3/4$, $\pi<\alpha<3\pi/2$.

7. Постройте график функции

$$y = \sin\left(\arcsin \log_{1/4} x\right).$$

8. Криволинейная трапеция ограничена параболой $y = -0,5x^2 + 6$ и осью абсцисс. Рассмотрите множество прямоугольников, вписанных в эту трапецию, у которых две вершины лежат на оси абсцисс, а две другие — на параболе. Какой из этих прямоугольников имеет наибольшую площадь?

9. Докажите, что если

$$\left(x^2 + 5x + 6\right)\left(x^2 + 11x + 30\right) < 0,$$

то $\sin 2x > 0$.

10. Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые при делении на 33 дают в остатке 5.

11. Что больше: $\operatorname{ctg} 3,1$ или $\operatorname{ctg} 6,2$?

12. Диагональ равнобедренной трапеции равна 5, а ее площадь равна 12. Найдите высоту трапеции.

13. Основания трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка, параллельного основаниям и делящего трапецию на две равновеликие части.

14. Сумма четырех первых членов арифметической прогрессии равна 56, а сумма четырех последних 112. Первый член равен 11. Найдите все члены этой прогрессии.

15. Постройте график функции

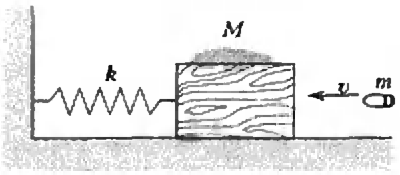
ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 3$ м/с. Когда оно достигло верхней точки полета, из того же пункта с такой же начальной скоростью брошено второе тело. На каком расстоянии от точки бросания встретятся тела?

2. Тело массой $m = 10$ кг, двигаясь под действием постоянной силы, увеличивает свою скорость с $v_1 = 5$ м/с до $v_2 = 25$ м/с за время $t = 5$ с. Определите работу действующей на тело силы.

3. Пуля попадает в ящик с песком и застревает в нем (см. рисунок). На сколько сожмется пружина жесткостью k,



удерживающая ящик, если пуля имеет массу m и движется со скоростью v, а масса ящика с песком равна M? Трение отсутствует.

4. Давление азота, находящегося в сосуде объемом $V = 3\cdot10^{-3}$ м^3, после нагревания возросло на $\Delta p = 2,2$ МПа. Определите количество теплоты, сообщенное газу. Удельная теплоемкость азота при постоянном давлении равна $C_p = 745$ Дж/(кг·К), его молярная масса $M = 0,028$ кг/моль.

5. В вертикально направленном однородном электрическом поле находится пылинка массой $m = 2\cdot10^{-9}$ г и зарядом $q = 3,2\cdot10^{-17}$ Кл. Какова напряженность поля, если пылинка находится в равновесии?

6. К источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 1,2$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,3$ Ом присоединена лампочка сопротивлением $R = 15$ Ом. Напряжение на ее клеммах $U = 1$ В. Определите напряжение на подводящих проводах и их сопротивление.

7. Источник тока с внутренним сопротивлением $r = 1,2$ Ом соединен с нагрузкой сопротивлением $R = 6$ Ом. Во сколько раз изменится мощность, выделяемая во внешней части цепи, если последовательно к первому подключить еще одно такое же нагрузочное сопротивление?

8. Нагревательная спираль электроаппарата для кипячения воды при температуре 100°С имеет сопротивление $R = 10$ Ом. Какой ток нужно пропустить через спираль, чтобы аппарат испарил $m = 60$ г воды за $\tau = 0,5$ мин? Удельная теплота парообразования воды $L = 2,3$ МДж/кг.

9. Электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов $U = 500$ В, влетел в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,2$ Тл перпендикулярно линиям индукции и начал двигаться по окружности. Найдите радиус окружности. Масса электрона $m = 9,1\cdot10^{-31}$ кг, заряд $e = 1,6\cdot10^{-31}$ Кл.

10. Луч света падает на поверхность воды под углом $\alpha_1 = 30°$. Под каким углом луч должен упасть на поверхность стекла с показателем преломления $n_2 = 1,8$, чтобы угол преломления оказался таким же? Показатель преломления воды $n_1 = 1,33$.

Публикацию подготовили Б.Кукушкин, О.Овчинников, М.Чернецов

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

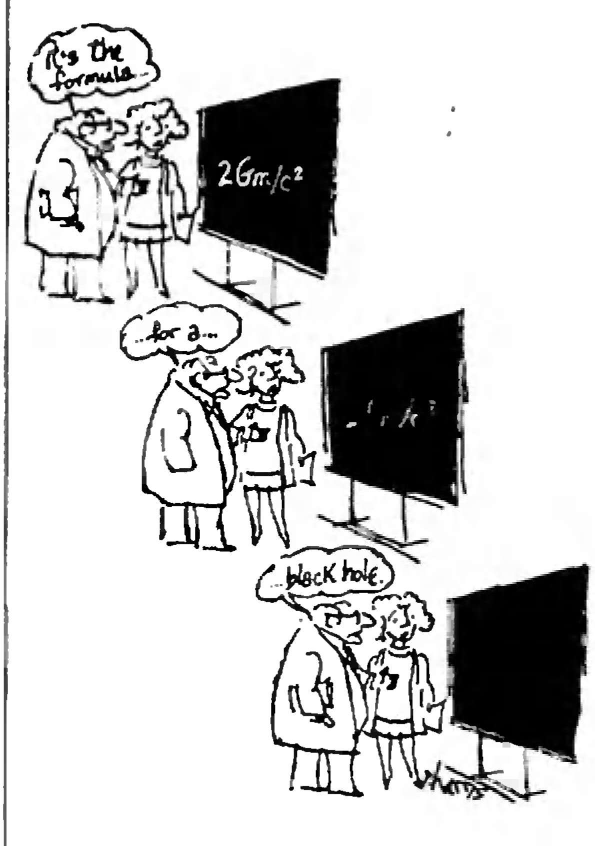


Рисунок из ежедневного информационного бюллетеня Chaos 13 July 1993, выпускавшегося на XXIV Международной физической олимпиаде школьников. Художник С.Харрис

ИГРЫ И ГОЛОВОЛОМКИ

Крестики и нолики

Е.ГИК

ВСЕМ знакома детская игра крестики-нолики: на поля доски 3×3 двое по очереди ставят крестики и нолики, и выигрывает тот, кто первым выстроит три своих знака в ряд. Если никому не удастся добиться этой цели, партия заканчивается вничью. Инициатива принадлежит крестикам, но простой анализ показывает, что правильная игра всегда приводит к ничьей. Поэтому обычные крестики-нолики быстро надоедают, и возникает естественное желание придумать что-нибудь новенькое.

Можно, например, играть в поддавки (доска 3×3 позволяет и это): здесь, наоборот, тому, кто первым выставит ряд из трех своих знаков, засчитывается поражение. В такой игре инициатива — у ноликов, но теперь у крестиков есть надежная ничейная стратегия: на первом ходу они могут занять центральное поле и затем симметрично повторять ходы партнера.

Куда интереснее другой вариант крестиков-ноликов (А.Остин назвал его «безумными крестиками-ноликами»). Каждый игрок при своем ходе ставит либо крестик, либо нолик — что ему заблагорассудится. Побеждает тот, кто первым закончит ряд из одинаковых знаков, безразлично каких. Однако здесь игроки оказываются в неравном положении: начинающий форсированно выигрывает (убедитесь в этом сами). Забавно, но можно играть и в «безумные поддавки»: ходят по-прежнему любыми знаками, но тот, кто первым образует ряд из трех одинаковых знаков, проигрывает. Как и в обычных поддавках, пользуясь симметрией, первый игрок гарантирует себе ничью.

Вот еще одни крестики-нолики (все на той же маленькой доске!), предложенные Д.Силверманом. Играть можно любыми знаками, как в уже описанном «безумном» варианте. Но теперь один из противников считается выигравшим, если он сможет свести игру к обычной ничьей (когда ни у кого не получается ряда из трех одинаковых значков), а другой — если на доске образуется ряд из трех знаков. Докажите сами, что играющий «по-нормальному» побеждает независимо от того, кто ходит первым.

Следующий вариант можно рассматривать как вступление в целый класс «гибридных» игр — помесей крестиков-ноликов и шашек. Партнеры по очереди ставят три своих крестика и нолика. Если никто не выстроил три знака в ряд, игра продолжается. Теперь каждым ходом игрок может передвигать свой значок на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Выигрывает тот, кто сумеет первым расположить три своих знака в ряд. Конечно, удобнее не рисовать крестики и нолики карандашом, а пользоваться шашками — белыми и черными. Нетрудно убедиться, что в такой игре право первого хода дает решающее преимущество.

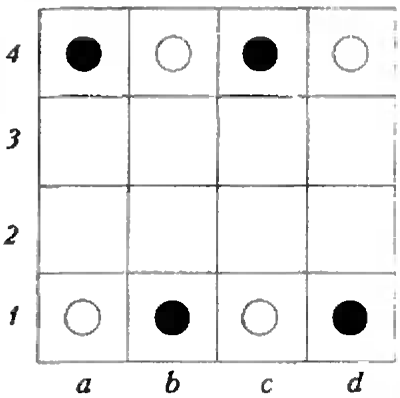


Рис. 1

Как видите, даже такая маленькая доска может служить неиссякаемым источником для изобретения игр.

Так-тиль — простейшая гибридная игра на доске 4×4. У каждого из противников по четыре шашки (рис.1), и игроки по очереди перемещают их по горизонтали и вертикали. Выигрывает тот, кто первым расположит три своих шашки в ряд.

Вот пример партии в так-тиль. 1.c1 – c2 d1 – c1 2.b4 – b3 b1 – b2 3.b3 – a3 (иначе, встав на поле a3, черные сразу выиграли бы) 3...a4 – b4 4.a1 – b1 — белые выиграли, так как черные не в силах помешать маневру 5.d4 – d3.

С помощью компьютера доказано, что так-тиль — игра ничейная: ни одному из партнеров не удается поставить три шашки в ряд (если нет ошибочных ходов).

К подобным играм относятся различные варианты «мельницы», болотуду и т.д.

До сих пор во всех рассмотренных играх партия сразу кончалась с первым выстроенным рядом. Для тех, кому это покажется слишком скучным, придумана еще одна вариация все тех же крестиков-ноликов. На доске 6×6 партнеры по очереди ставят свои значки, получая очко за каждую построенную тройку крестиков или ноликов (по горизонтали или вертикали). Каждое поле доски учитывается дважды — один раз по вертикали и один раз по горизонтали. Выигрывает тот, кто наберет больше очков. Игра заканчивается, когда ходить больше некуда — вся доска заполнена.

Более увлекательны игры в крестики-нолики, в которых победу приносят не три знака, поставленные в ряд, а четыре или пять. В игре «4 в ряд» на доске 4×4 ноликам сделать ничью еще проще, чем на доске 3×3. Для доски 5×5 крестики-нолики давно запрограммированы на компьютере. Машина действует безукоризненно: ничьей добивается любыми значками, а при невнимательной игре человека побеждает. Доказано, впрочем, что на доске 5×5 игра ничейна.

Теперь настала пора рассказать о самых популярных крестиках-ноликах — на бесконечном поле. Двое по очереди ставят свои знаки на клетчатой бумаге, стремясь поставить в ряд (по вертикали, горизонтали или диагонали) пять своих знаков. Реально, конечно, поле ограниченно — обычно это просто тетрадный листок. В эту игру охотно играют и школьники, и студенты, и доктора наук; а придумана она была четыре тысячи лет назад, задолго до появления тетрадей в клетку (вместо крестиков и ноликов использовались камушки двух цветов)... Кстати, старинные игры гобанк и гомоку отличаются от бесконечных крестиков-ноликов только наличием специальных досок 19×19 или 15×15, а роль значков играют фишки.

В большинстве рассмотренных игр нолики борются за ничью, а крестики (начинающая сторона) всегда могут ее достичь. Это интуитивно подмеченное правило подтверждает следующая теорема: *при правильной игре в крестики-нолики «n в ряд» на произвольной доске $n \times n$ начинающему гарантирована ничья при любом n.*

Это легко доказать от противного. Предположим, что как бы ни играли крестики, нолики применяют некую выигрышную стратегию и побеждают. Тогда начинающему достаточно поставить на любое место свой первый крестик, а дальше применять стратегию партнера, мысленно поменяв знаки. *Если в какой-то момент* эта стратегия потребует от него поставить крестик на поле, занятое поставленным ранее крестиком, он ставит свой значок на произвольное поле — лишний крестик никогда не помешает. По предположению, нолики должны выиграть. Но ведь крестики как бы играют ноликами, да еще имеют лишний значок, значит, они тоже должны выиграть. Получили противоречие.

Итак, в игре «5 в ряд» на бесконечной доске крестикам гарантирована *ничья. А могут ли они* форсированно выиграть? На практике инициатива обычно принадлежит крестикам, но и нолики часто берут верх. Однако в японских книжках по рэндзю (об этой самой популярной в мире модификации крестиков-ноликов мы поговорим как-нибудь в другой раз) приводится исчерпывающий анализ, из которого следует, что крестики форсированно выигрывают. *Решающий перевес они получают к десятому ходу, а к* пятнадцатому завершают построение необходимого ряда из пяти своих знаков.

Хотя эти теоретические рассуждения вряд ли отпугнут любителей крестиков-ноликов, все же не приходится говорить о серьезных состязаниях, если доказан выигрыш одной из сторон. Поэтому и были придуманы некоторые дополнительные правила, при которых результат игры не так очевиден, *принятые в шашках* рэндзю.

Посмотрим, как обстоит дело в крестиках-ноликах «n в ряд» при n, больших пяти.

Еще в 1954 году Г.Поллак и К.Шеннон доказали, что при любом $n \geq 9$ у ноликов есть гарантированная ничья. Позже А.Хэйли и Р.Джуитт придумали простой и эффективный алгоритм ее достижения. Всю бесконечную доску надо мысленно разбить на квадраты 8×8 и в каждом из них провести линии, как показано на рисунке 2. В результате все поля доски оказываются разбитыми на пары. *Теперь после хода крестиков на некоторое поле противник должен поставить свой нолик на «парное» поле.*

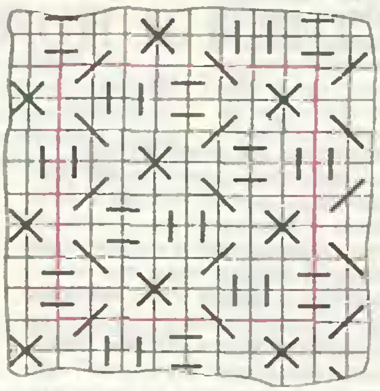


Рис. 2

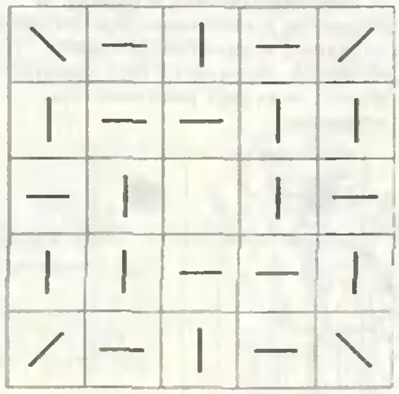


Рис. 3а

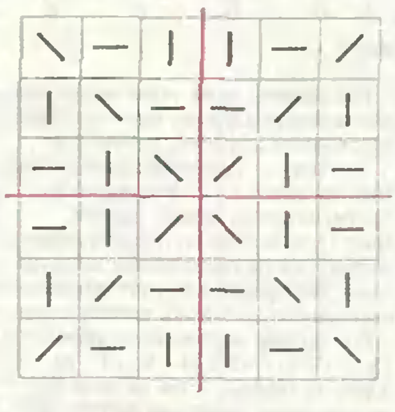


Рис. 3б

Такая стратегия гарантирует ноликам ничью. Действительно, наше покрытие плоскости квадратами 8×8 обладает тем свойством, что в произвольном ряду из девяти соседних полей обязательно найдутся два связанных между собой линией. Это значит, что если одно поле данной пары занято крестиком, то на другом об*язательно стоит нолик. Итак,* никакие девять полей в одном ряду (а тем более больше) не могут быть заполнены одними крестиками, и партия заканчивается вничью.

К сожалению, эта изящная стратегия неприменима для $n<9$. Правда, более сложным способом доказано, что игра «8 в ряд» тоже ничейна. Что же касается игр «7 в ряд» и «6 в ряд», то вопрос остается *открытым. Впрочем,* А.Давлицаров и О.Степанов доказали ничейность придуманных ими экваториальных крестиков-ноликов «7 в ряд» (на плоскости выбирают определенное направление — это и есть экватор, — параллельно которому семь одинаковых знаков в ряд не считаются выигрышем).

Для $n=5$ на поле 5×5 срабатывает метод Хэйла и Джуитта. Все поля доски (кроме центрального) разбиваются на пары так, как показано на рисунке 3, *а*. Теперь после каждого хода крестиков вне центра доски нолики занимают парное ему поле — с той же пометкой и в напрвлении, указанном линией на поле крестиков. При такой игре нолики даже могут дать крестикам фору — позволить им занять центральное поле и еще одно какое-нибудь. В конце концов в каждом ряду из пяти полей будет стоять хотя бы один нолик, и ничья обеспечена.

Аналогично достигается и ничья в игре «6 в ряд» на доске 6×6 (рисунок 3, *б*). Здесь ответный ход ноликов по диагоналям квадрата может быть любым. Покрытие Хэйлса и Джуитта в этом случае зеркально симметрично относительно двух выделенных линий.

Путешествие в топологические головоломки

Д. ВАКАРЕЛОВ

Головоломки, о которых пойдет речь, обычно называют шнурковыми, или веревочными. Мартин Гарднер, автор классических книг по занимательной математике, называет их топологическими, потому что решение таких головоломок тесно связано с топологией, разделом математики, в котором изучаются свойства тел, сохраняющиеся при непрерывных деформациях. Например, если веревка завязана в узел и ее свободные концы соединены, то, как ни изгибай такую веревку, узел развязать невозможно. В этом случае говорят, что веревка «заузлена», и заузленность является топологическим свойством веревки.

Кроме основного элемента — веревки, топологическая головоломка обычно содержит кольца, шарики, различные фигурки с одним или несколькими отверстиями, замысловато переплетенные веревкой. Задача состоит в том, чтобы отцепить определенную деталь или переместить ее на другое место, не разрывая веревки и не деформируя другие детали.

Существует множество разных топологических головоломок. Я выделяю пять основных типов, различающихся по принципу решения: путешествие петли; обход малой дырки; переход через большое препятствие, следуя его форме; удваивание веревки; топологические меледы. Изложенное выглядит пока очень туманно, поэтому перейдем к конкретным примерам.[1]

Рис. 1

Путешествие петли и принцип распрямления

Посмотрим на рисунок 1. Цель этой головоломки — отделить большое кольцо от других деталей. Она достигается, если отцепить петлю от нижней части веревки. Для этого протянем петлю вдоль веревки, просунем ее через маленькое кольцо и, дойдя до конца веревки, обогнем бусинки. Затем вернемся обратно. В результате петля окажется по другую сторону веревки. Значит, она уже отцепилась, и, таким образом, освободилось большое кольцо. Задача решена.

Головоломка 1 принадлежит к самому распространенному классу топологических головоломок, который основан на принципе «путешествия петли»: все подобные головоломки решаются при помощи движения петли вдоль веревки, которая проходит через одно или несколько отверстий, обходит закрепленную на конце веревки деталь головоломки и затем возвращается обратно.

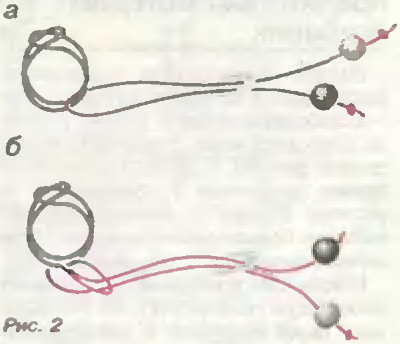


Рис. 2

А теперь перейдем к головоломке, показанной на рисунке *2,а*. Лучше, если вы на самодельной модели убедитесь, что, манипулируя веревкой, можно перейти в состояние *2,б*. А в этом состоянии она становится очень похожей на головоломку 1. Однако при решении из исходного положения она существенно сложнее головоломки 1, потому что в ней принцип путешествия петли хорошо замаскирован — ведь у нее вообще нет петель. Можно сказать, что головоломка 2 получена из головоломки 1 методом маскировки.

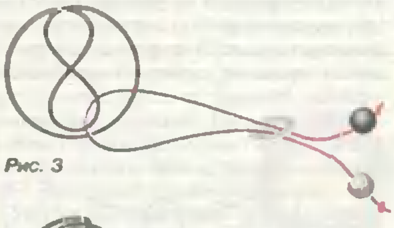


Рис. 3

Рис. 4

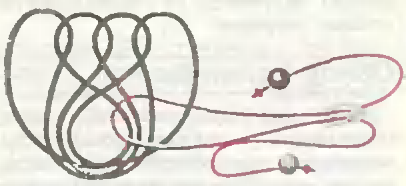


Рис. 5

Метод маскировки использован и в головоломках 3–5. В отличие от головоломок, сконструированных на принципе путешествия петли, у которых, как правило, сложность измеряется запутанностью веревки, здесь, наоборот, веревка распрямлена. Поэтому новый принцип, на основе которого построены эти головоломки, назовем принципом распрямленной веревки. Чтобы решить такую головоломку, надо сначала как бы «запутать» веревку, а потом методом путешествия петли довести решение до конца.

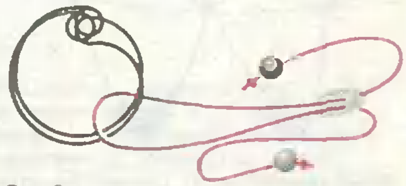


Рис. 6

Рис. 7

Головоломка 6 также основана на принципе распрямленной веревки, но она не получается из головоломки 1 методом маскировки. Это модифицированный и упрощенный вариант головоломки 4, для получения которого применен метод модификации.

Головоломка 7 отличается от головоломки 6 наличием двух петель в нижней части проволочной фигуры. Их количес-

[1] *Для удобства будем обозначать головоломки номерами рисунков, на которых они изображены. Так, «головоломка 1» — это головоломка, показанная на рисунке 1.*

тво можно произвольно увеличивать. Следовательно, головоломка 7 (а также ее варианты с увеличенным количеством

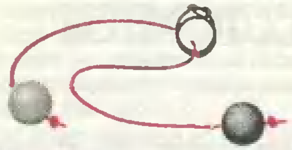


Рис. 8

петель) получается из головоломки 6 методом итерации.

Обход малой дырки

На рисунке 8 показан новый вариант головоломки 2: в ней нет малого кольца, но увеличен размер шариков так, чтобы они не проходили через внутренность проволочной фигуры. На первый взгляд, эта головоломка выглядит весьма пара-

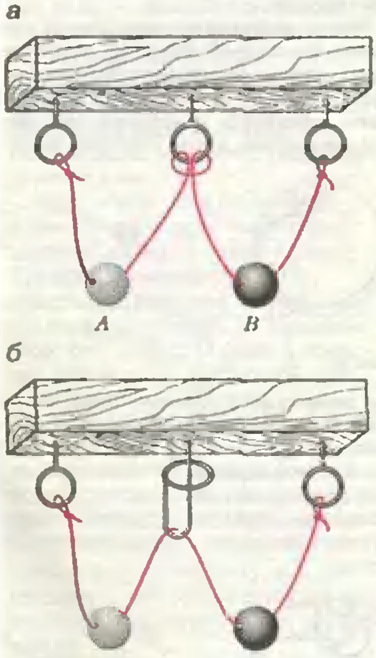


Рис. 9

доксальной — чтобы отделить веревку с шариками от проволочной фигуры, один из шариков должен вроде бы пролезть сквозь дырку меньшего размера. На самом деле шарик «обходит» эту дырку. Отсюда основной принцип этой головоломки назовем «обход малой дырки».

Классическим примером головоломки, основанной на принципе обхода малой дырки, является древняя «африканская головоломка» (рис.9,*а*). Ее цель состоит в том, чтобы переместить шарик *A* на другую сторону центрального узла, в зону шарика *B*. На рисунке 9,*б* изображен вариант «африканской головоломки», в котором методом маскировки устранена центральная петля.

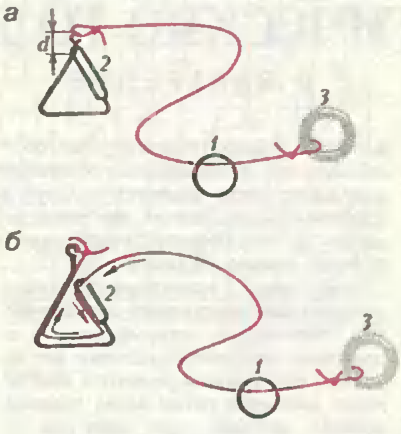


Рис. 10

Преодоление большого препятствия методом огибания

Начнем с классической головоломки, изображенной на рисунке 10,*а*. Цель ее — освободить кольцо 1. Кольцо 1 должно проходить через отверстие 2 проволочной фигуры, а диаметр его немного больше расстояния *d*, отмеченного на рисунке. Кольцо 3, внешний диаметр которого больше диаметра кольца 1, не должен проходить через отверстие 2.

Неизвестно, кто первым придумал эту прекрасную головоломку, но она поражает своей простотой и одновременно сложностью решения. Чтобы разобраться в ней, предварительно проделаем следующее эвристическое рассуждение. Допустим, что проволочная фигура слегка деформирована: из треугольника вынута петля 2 (рис.10,*б*). Тогда освободить кольцо не представляет труда: надеваем его на отверстие 2 и, обходя треугольник, выводим кольцо в том месте, где завязана веревка. Эта процедура оправдывает название основного принципа

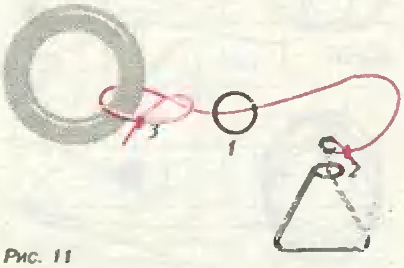


Рис. 11

решения головоломки — «преодоление большого препятствия методом огибания». Конечно, это не настоящее решение головоломки, потому что деформация проволочной фигуры не разрешена, но проведенное топологическое рассуждение уже подсказывает путь к решению, которое оставляем читателю.

Завершает раздел головоломка 11, которая получается из головоломки 10

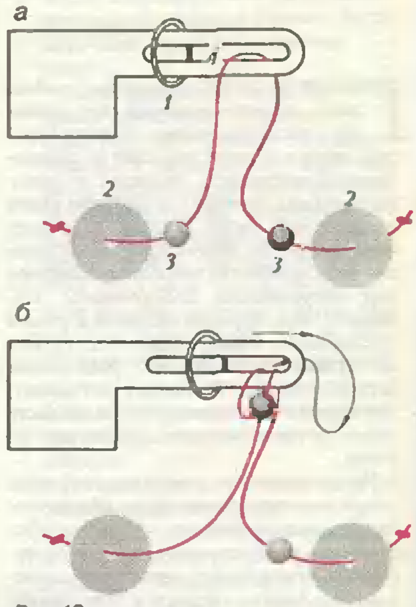


Рис. 12

методом маскировки. Цель осталась прежней — освободить кольцо 1, которое в этом случае уже не проходит через отверстие 2. Петля 3 должна пропускать сквозь себя кольцо 1, но не пропускать проволочную фигуру.

Удваивание веревки

Головоломка, основанная на принципе удваивания веревки, изображена на рисунке 12,*а*. Ее автор — Рик Квитек, учитель из Сан-Франциско. В США она известна как «головоломка дровосека». Цель — освободить кольцо 1. Его размер таков, что оно проходит через отверстие 4. Бусинки 3 проходят через внутренность кольца 1, но не проходят через отверстие 4, а диски 2 проходят через

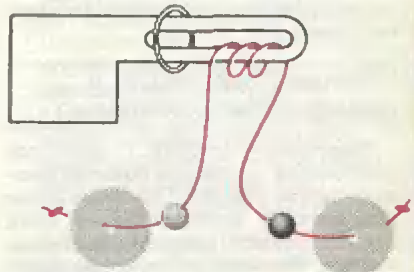


Рис. 13

отверстие 4, но не проходят через кольцо 1.

Решение показано на рисунке 12,*б*.

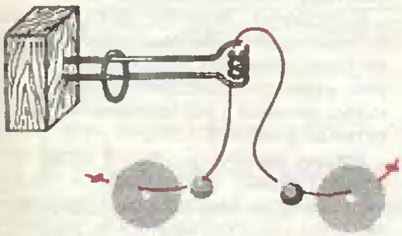


Рис. 14

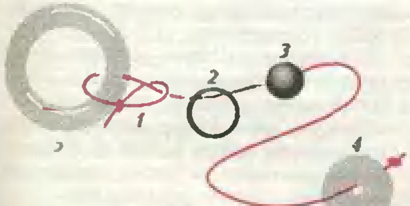


Рис. 15

Вначале один из дисков пропускается в отверстие 4 — веревка сдваивается, что и оправдывает название основного принципа головоломки. Далее кольцо сдвигается сначала вниз по направлению стрелки, а затем — вверх по сдвоенной веревке и пропускается в отверстие 4. Кольцо снимается с веревки, пропуская сквозь себя бусинку.

Головоломка 13 получена из головоломки дровосека методом итерации. На рисунке 14 показано, как можно замаскировать эту итерацию. Головоломка 15 получена методом маскировки. Предлагаем читателю подумать над тем, что здесь замаскировано. Цель головоломки — освободить кольцо 2. Соотношения размеров следующие: кольцо 2 и диск 4 проходят через петлю 1; диск 4 не проходит через кольцо 2; бусина 3 проходит через кольцо 2, но не проходит через петлю 1; петля 1 не проходит через отверстие бусины; кольцо 2 проходит через отверстие кольца 5.

а

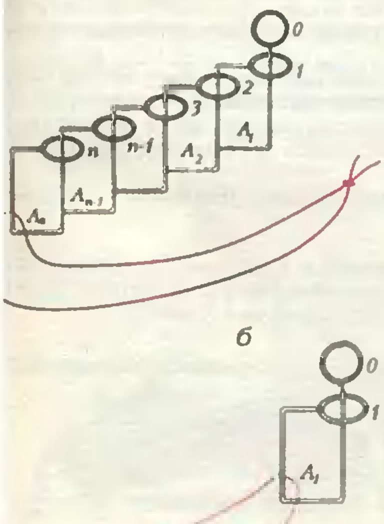


Рис. 16

Топологические меледы

Меледа — одна из самых замечательных головоломок древности. На рисунке 16,а изображен топологический вариант меледы, которая состоит из n (на рисунке $n = 5$) секций, изготовленных из проволоки и обозначенных $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Самая простая меледа содержит только одну секцию (рис.16,б). Очевидно, меледа 16,а является итерацией этой простой головоломки. Цель головоломки — снять с проволочной конструкции веревочную петлю.

Проведем одно несложное топологическое рассуждение, которое подсказывает, как искать решение головоломок рассматриваемого типа. Для определенности обратимся к головоломке 16,а и допустим, что она сделана не из жесткой

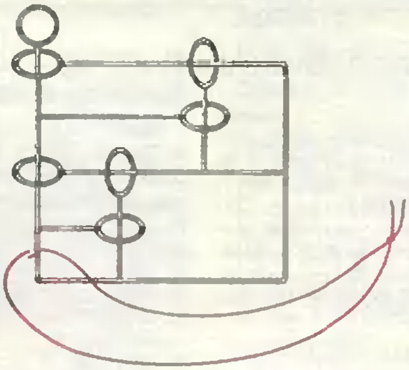


Рис. 17

проволоки, а из резины. Тогда кольцо 0 можно просунуть сквозь кольцо 1, затем кольцо 1 сквозь кольцо 2 и т.д. В конце концов получится фигура, напоминающая дерево, с крайнего «сучка» которого веревка элементарно снимается. Такого рода топологическое рассуждение подходит для всех мелед. Оно подсказывает, что решение получится, если процедуру деформации удастся заменить манипулированием веревкой. Покажем, как это можно сделать для меледы 16,а, а решение остальных мелед оставим читателям для самостоятельного поиска.

Рассуждение, которое будет проведено, имеет так называемый рекурсивный характер, поэтому и сама меледа — одна из типичных рекурсивных головоломок. Отметим, что слово «рекурсия» применительно к процедуре каких-либо действий (в нашем случае — решению головоломки) означает возвращение назад, к одним из тех действий, которые уже выполнялись ранее.

Если меледа имеет только одну секцию (рис.16,б), то решение тривиально: веревка просовывается сквозь кольцо 1, обводится вокруг кольца 0 и освобождается. Обозначим эту процедуру a_1. Требуется найти процедуру a_n для меледы с

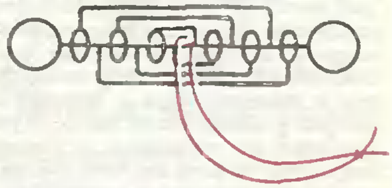


Рис. 18

n секциями. Допустим вначале, что процедура a_{n-1} уже найдена. Пусть веревка находится в секции A_n головоломки. Секция A_n устроена так же, как и секция A_1, поэтому начнем решать головоломку, как если бы имелась только одна эта секция. Просунем веревку сквозь кольцо

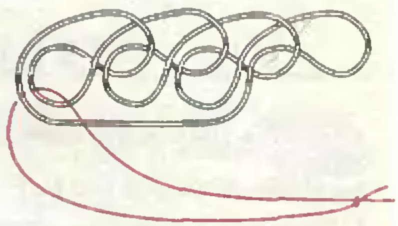


Рис. 19

цо n, стремясь обойти кольцо $n-1$. Этому мешает секция A_{n-1}. Но, согласно только что сделанному предположению, процедура a_{n-1} решения меледы с $n-1$ секциями известна. Воспользуемся процедурой, обратной a_{n-1}, т.е. $\bar{a}_{n-1}$, с помощью которой можно поместить веревку в секцию A_{n-1}. Однако это означает, что с помощью процедуры $\bar{a}_{n-1}$ можно сделать обход кольца $n-1$. В результате веревка попадает в зону секции A_{n-1}. Теперь все сводится к решению меледы с $n-1$ секциями, которая, согласно сделанному предположению, решается с помощью процедуры a_n.

Так как процедура a_1 описана явно, то проведенное рассуждение показывает, как получить процедуру a_2. Зная a_2, тем же способом находим a_3 и т.д. Подобные рекурсивные процедуры можно найти и для мелед 17–19.

Как придумать новую головоломку

Составить новую головоломку на основе уже известного принципа не так уж и сложно: можно изменить форму деталей, добавить новые или иначе их скомбинировать, сохраняя все их функции. В лучшем случае получатся новые версии старых головоломок. Но как создать поистине новую головоломку? В связи с этим поразмышляем, что означают слова «поистине новая»? Проследим, как человек подходит к решению новой топологической головоломки. Предположим, что он уже имеет некоторый опыт и не начнет сразу, как новичок, делать хаотичные бессмысленные движения деталями головоломки. В соответствии со своим опытом он приступит к изучению форм и функций ее деталей, а также к поиску одного из уже известных ему принципов, на котором она построена. Если аналогия найдена, то решение строится в соответствии с найденным принципом. Не исключено, однако, что все попытки открыть основной принцип остались безуспешными — головоломка упорно сопротивляется. Тогда она либо основана на некотором новом, неизвестном игроку принципе, либо принцип известен, но хорошо замаскирован или спрятан. Стоп! Остановимся на последней фразе: «принцип хорошо замаскирован или спрятан». Ведь это и есть метод для создания новых головоломок! Метод маскировки. При помощи метода маскировки иногда можно создавать и новые основные принципы, поэтому очень часто новый принцип — это хорошо замаскированный и измененный старый принцип.

Другой, более частный метод для создания новых головоломок — удачное сочетание нескольких принципов (не обязательно новых) и известных конструкций таким образом, чтобы получилась не простая сумма двух или более головоломок, а нечто целое, которое трудно разделить на составные части. Назовем этот метод методом композиции. Очень часто композиция используется для маскировки: например, головоломка построена на некотором основном принципе, но для его раскрытия надо проделать ряд предварительных действий, которые маскируют принцип.

В некоторых головоломках одна и та же конструкция или деталь периодически повторяется несколько раз. Примером является классическая меледа, а метод, который в ней использован — это метод итерации.

Весьма распространенный метод получения новых головоломок — метод модификации. Модификация часто проявляется как упрощение или усложнение известной конструкции.

После всего вышесказанного читателю нетрудно будет самому придумать новую головоломку.

От редакции: *Всем желающим мы предлагаем обмениваться идеями новых головоломок. На каждую присланную в редакцию модель (или рисунок) новой головоломки автору будет в ответ послана модель (или рисунок) незнакомой ему оригинальной головоломки.*

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

Задачи

(см. «Квант» № 11/12 за 1993 год)

1. Пусть Захар в первый раз заплатил $10x+y$ рублей, а во второй раз $10y+x$ рублей, тогда $11x+11y=99$, т.е. $x+y=9$. Но $10y+x=1{,}75(10x+y)$, откуда $8{,}25y=16{,}5x$, т.е. $y=2x$. Подставляя это значение в первое уравнение, получаем $3x=$ $=9$, или $x=3$, $y=6$. Итак, порция мороженого стоила 36 рублей.
2. Случай, указанный в задаче, невозможен. Действительно, раскрасим вершины куба в красный и серый цвета так, как

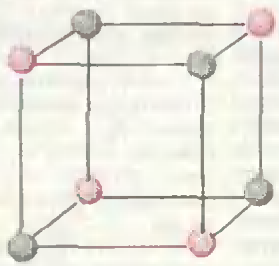


Рис. 1

указано на рисунке 1, тогда при движении муравья цвета проходимых им вершин должны чередоваться, и количество посещений им красных вершин должно отличаться не более чем на 1 от количества посещений синих вершин, а в нашем случае эта разность равна 5.
3. $21=7\times3=84\times3^2/6^2$.
4. Обозначим восьмую часть стаи через x, тогда по условию $x^2+16=8x$ или $x^2-8x++16=0$, но $x^2-8x+16=(x-4)^2$, поэтому $x=4$ и в стае $4\times8=32$ обезьяны.
5. Выберем на плоскости точку O и проведем через нее прямые, параллельные сторонам 19-ти угольника. Поскольку все углы многоугольника кратны $10°$, то и углы между прямыми кратны $10°$. Однако через точку O можно провести не более 18 таких прямых; значит, некоторым двум сторонам соответствует одна и та же прямая; следовательно, эти две стороны параллельны.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Нет.
2. Полная работа, совершенная человеком, равна нулю как в системе отсчета, связанной с землей, так и в системе отсчета, связанной с поездом.
3. Да. Например, при ее действии на груз, лежащий на движущейся железнодорожной платформе.
4. Да — по мере подъема уменьшается давление воды на пузырек и газ совершает работу по расширению пузырька.
5. При больших скоростях значительно возрастает сопротивление воздуха.
6. В 27 раз.
7. На сообщение выбрасываемых из сопла ракеты газам кинетической энергии.
8. Нет — меньшую работу двигатели эскалатора совершат соответственно за меньшее время.
9. Увеличиться в 8 раз.
10. При небольших углах наклона транспортер экономичнее, так как коэффициент трения качения меньше коэффициента трения скольжения.
11. Да, но КПД будет очень малым, поскольку большая часть совершаемой работы пойдет на сжатие самого газа.
12. Нет, так как возрастают потери энергии, связанные с загустением смазки и разогревом двигателя и воздуха в салоне при запуске.
13. Нагреватель — камера сгорания, холодильник — окружающая среда.
14. В первом случае.
15. Нет — КПД стремится к единице при бесконечном увеличении внешнего сопротивления, но при этом полезная мощность (как и полная) стремится к нулю.

Микроопыт

При повышении температуры увеличивается излучение энергии.

НЕРАВЕНСТВА И ОЦЕНКИ В ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧАХ

1. 100. **2.** (6; 2), (5; 2). **3.** 2 км. **4.** 2 трехтонки и 20 пятитонок.

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\pi n;\ n\in Z$. 2. $-\log_2 10 < x < -1$.

3. $BC=\frac{9}{\sqrt{2}}R$. *Указание.* Точка O равноудалена от прямых AC и AB, $AO=OK$, поэтому $AE=\frac{1}{2}AK$, $\cos\angle BAC=\frac{1}{8}$.

4. $\frac{23}{2}\sqrt{10}$, $\frac{69}{2}\sqrt{10}$. *Решение.* Если бы плоскость α пересекала грани SBC и SAD по параллельным прямым, то она была бы параллельна линии их пересечения, т.е. совпадала бы с плоскостью ABC. Поэтому $KL\parallel PQ$ (рис.2), откуда $PQ\parallel AB\parallel RT$, $AB=PQ=13$. Плоскости α и β пересекают сечение SEF пирамиды (E и F — середины ребер AB и CD) по высотам NM и GM трапеций $PKLQ$ и $PRTQ$. По условию $KL=RT$, поэтому $EN=FG$ (см.рис.2). Из треугольника EMN (рис.3), так как $\operatorname{tg}\angle EMN=1$, $\operatorname{tg}\angle NEM=2$, получаем, что $\operatorname{tg}\angle NME=3$. Поэтому если $NM_1=x$, где MM_1 — высота треугольника NMG, то $MM_1=3x$, $M_1G=9x$, $SU=2NU=10x$, $SO==13x$. Но $SO=2EO=EF=13$, значит, $x=1$, $KL=RT=NG=10$, $MN=\sqrt{10}$, $MG=\sqrt{10}$.

5. Фигура M изображена на рис.4; центр прямоугольника — точка $P\left(-1;-\frac{5}{2}\right)$; его площадь $S=\frac{25}{2}\sqrt{17}$.

Решение. Обозначим коэффициенты при p^2 и p^{-2} через a и c соответственно. Пусть $t=p^2$. По условию множество M состоит из точек, для которых $f(t)=4+at+\frac{c}{t}\ge 0$ при всех $t>0$. Но $tf(t)=at^2+4t+c$ и $\frac{f(t)}{t}=c\left(\frac{1}{t}\right)^2+4\frac{1}{t}+a$ — квадратные трехчлены относительно t и $\frac{1}{t}$ соответственно, для неотрицательности которых необходимо, чтобы было $a\ge 0$, $c\ge 0$. Эти условия и достаточны, так как при их выполнении $f(t)\ge 4$ для положительных t. Итак, M — множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases}2y-x^2+14\ge 0,\\ -\left(x^2+4x+2y\right)\ge 0,\end{cases}$$

т.е. является фигурой, ограниченной параболами Π_1: $y=\frac{x^2}{2}-7$, Π_2: $y=-\frac{(x+2)^2}{2}+2$ (см. рис. 4). Парабола Π_1 получена из параболы $y=\frac{x^2}{2}$ смещением на 7 вниз, а парабола Π_2 — из симметричной ей относительно начала координат параболы $y=-\frac{x^2}{2}$ смещением ее на 2 влево и на 2 вверх, поэтому множество M имеет центр симметрии — точку $P\left(-1;-\frac{5}{2}\right)$ (точку P можно найти и как середину отрезка, соединяющего вершины парабол Π_1 и Π_2). Из центральной симметрии множества M следует, что центр прямоугольника $ABCD$ совпадает с точкой P. По условию $BD\parallel Ox$ и $AB\perp CD$, поэтому точки B и D имеют координаты $B\left(x_0;-\frac{5}{2}\right)$, $D\left(-2-x_0;-\frac{5}{2}\right)$, а прямые CB и AB имеют уравнения $y=k(x-x_0)-\frac{5}{2}$ и $y=-\frac{1}{k}(x-x_0)-\frac{5}{2}$. Прямая CB касается параболы Π_1, а прямая AB — параболы Π_2, поэтому дискриминанты квадратных уравнений $k(x-x_0)-\frac{5}{2}=\frac{x^2}{2}-7$ и $-\frac{1}{k}(x-x_0)-\frac{5}{2}=-\frac{(x+2)^2}{2}+2$ равны нулю, т.е.

$$D_1=k^2-2kx_0+9=0,\ D_2=\frac{1}{k^2}-\frac{4}{k}-\frac{2x_0}{k}+9=0.$$

Решив эту систему, получаем

$$k=\frac{1+\sqrt{17}}{4}\ (k>0),\quad x_0=\frac{5}{4}\sqrt{17}-1.$$

Отсюда $BD=\frac{5}{2}\sqrt{17}$, $S=AB\cdot BC=BD^2\sin\alpha\cos\alpha$, где $\alpha=\angle DBC$, $\operatorname{tg}\alpha=k$, т.е.

$$S=BD^2\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha=BD^2k\frac{1}{k^2+1}=\frac{25}{2}\sqrt{17}.$$

Вариант 2

1. $\frac{\pi}{20}$, $\frac{9\pi}{20}$. 2. $-\frac{1}{7}<x\le-\frac{1}{18}$, $x\ge 0$. 3. $\frac{49\sqrt{3}}{2}$. *Указание.* Сумма углов KCB и KDA равна $60°$, а отношение их синусов равно 5:3. 4. $f_{max}=7/40$, $p=-1/2$; $f_{min}=1/7$, $p=1$.

Решение. Данная система имеет вид

$$\begin{cases}(3x+y)(x-3y)=\frac{10-p}{4p^2+9}p,\\ (x-2y)(x-3y)=\frac{10-p}{4p^2+9}.\end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе (это можно сделать, так как $x\le 0$, $y>0$, следовательно, $x-2y<0$ и $x-3y<0$), получим $(3x+y):(x-2y)=p$, откуда $\frac{x}{y}=\frac{2p+1}{p-3}$, где $-\frac{1}{2}\le p<3$, так как $\frac{x}{y}\le 0$. Теперь без труда находим, что

$$x^2=\frac{(2p+1)^2}{7\left(4p^2+9\right)},\ y^2=\frac{(p-3)^2}{7\left(4p^2+9\right)},$$

откуда

$$x^2+y^2=f(p)=\frac{5p^2-2p+10}{7\left(4p^2+9\right)}.$$

Осталось исследовать функцию $f(p)$ на максимум и минимум при $p\in[-1/2;3)$.

5. $\sqrt{21}/4$. *Решение.* Пусть P — основание перпендикуляра,

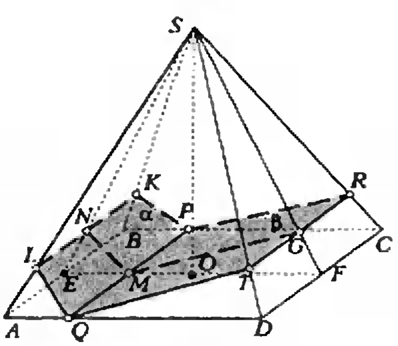


Рис. 2

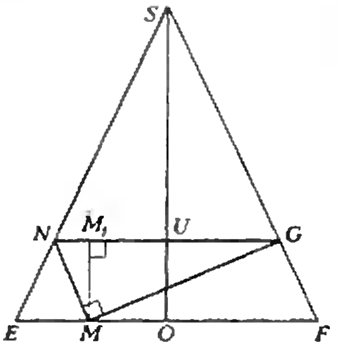


Рис. 3

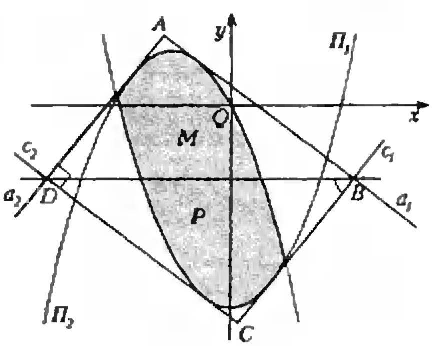


Рис. 4

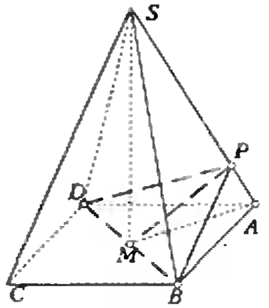


Рис. 5

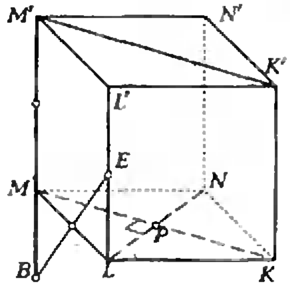


Рис. 6

опущенного из точки B на ребро SA (рис. 5). Тогда плоскость PBD перпендикулярна прямой SA, совпадающей, по условию, с прямой LN, и, значит, точки B и D лежат в плоскости, перпендикулярной прямой LN. Этой плоскостью является плоскость KMM' (рис. 6), в силу того что D лежит на прямой MM', а прямая LN перпендикулярна пересекающимся прямым MM' и MK этой плоскости. Таким образом, точка B является точкой пересечения прямой EF и плоскости KMM', следовательно, точка B лежит на продолжении отрезка MM' за точку M и $BM = \frac{1}{2}MM'$. Далее, точка P равноудалена от точек B и D, поэтому D — середина ребра MM'. Кроме того, точка M — середина отрезка BD — является центром основания $ABCD$ пирамиды.

Теперь искомое отношение находится несложными вычислениями. Пусть $AB = a$. Тогда $SA = 2a$, $AM = a/\sqrt{2}$, $SM = a\sqrt{7/2}$ и объем пирамиды равен $\frac{\sqrt{14}}{6}a^3$. Далее, из треугольника SMA (см. рис.5) $MP = (SM \cdot AM):SA = a\sqrt{7}/4$. Отсюда следует, что $MK = 2MP = a\sqrt{7}/2$, $KN = a\frac{\sqrt{21}}{6}$ (угол NKL равен 60°), площадь основания призмы равна $\frac{7\sqrt{3}}{24}a$, а ее высота $MM'=2MD=BD=a\sqrt{2}$. Таким образом, объем призмы равен $\frac{7\sqrt{6}}{24}a^3$.

Вариант 3

1. $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $\pi - \operatorname{arctg} 5 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2. $S=8/3$ (уравнение прямой AB: $y = 3x - 4$); $S = \frac{8}{3}\sqrt[3]{9}$ (уравнение прямой AB: $y = 9\sqrt[3]{3}x + 12$).

3. $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} 2$, $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2$.
Указание. Докажите, что точка M — центр окружности, затем воспользуйтесь тем, что $AP \cdot PE = BP \cdot PF$, где P — точка пересечения медиан треугольника ABC.

4. $-\frac{5}{2} \le p < 0$. *Решение.* Из первого неравенства следует, что $x + 1 > 0$, а так как левая часть второго неравенства приводится к виду $(x+1)(x - 5/(2p)) > 0$, его можно заменить неравенством $x > 5/(2p)$. Первое неравенство равносильно совокупности из двух систем:

$$\begin{cases} 0 < x+1 < 1, \\ 0 < 3 - px < 1, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+1 > 1, \\ 3 - px > 1, \end{cases}$$

решения которой таковы: $(0; 2/p)$ при $p>0$; $(0; +\infty)$ при $-2 \le p < 0$; $(-1; 2/p) \cup (0; +\infty)$ при $-3 \le p < -2$; $(3/p; 2/p) \cup (0; +\infty)$ при $p < -3$.

Теперь видно, что при $p > 0$ ни одно из решений первого неравенства не удовлетворяет второму ($2/p < 5/(2p)$), а поскольку $3/p < 5/(2p) < 2/p$ при $p < 0$, должно выполняться условие $5/(2p) \le -1$.

5. $\frac{5\sqrt{6}}{36}$. *Решение.* Пусть $SABC$ — данная пирамида, а $KLMNK'L'M'N'$ — искомая призма наибольшего объема. В силу того, что плоскость основания и плоскость боковой грани пирамиды не параллельны и не перпендикулярны, ее основанию и боковой грани могут принадлежать только две соседние боковые грани призмы. В этом случае общее ребро KK' этих граней призмы принадлежит ребру основания пирамиды (рис.7). Кроме того, из перпендикулярности прямой KK' и

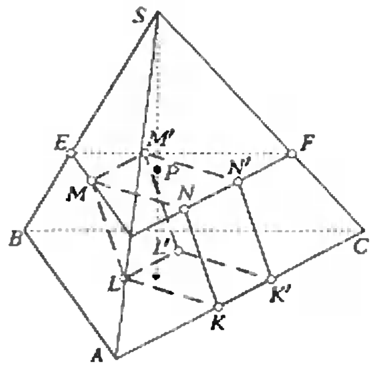


Рис. 7

плоскости LKN следует, что $\angle NKL$ — это угол α между гранями ABC и ASC, равный $\operatorname{arctg} 2\sqrt{6}$.
Призма имеет максимальный объем, когда вершины M и M' принадлежит граням SAB и SCB. Пусть DEF — сечение пирамиды плоскостью $M'MN$, $KL=x$, $SE=ySB$.
Плоскость DEF делит высоту SO пирамиды в отношении $y:(1-y)$, считая от вершины S, поэтому $PO = 2\sqrt{2}(1-y)$. С другой стороны, $PO = KN\sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}x$, следовательно, $y = 1 - \frac{\sqrt{3}}{5}x$. Далее, $DF = yAC = 2y$, $MN = x$, поэтому $DN = N'E = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ и, значит, $NN' = 2y - \frac{2\sqrt{3}}{3}x = 2 - \frac{16\sqrt{3}}{15}x$.
Объем призмы:

$$V = KL \cdot KN\sin\alpha \cdot NN' = \frac{4\sqrt{2}}{25}\left(5\sqrt{3}x^2 - 8x^3\right).$$

Эта функция при $x>0$ принимает наибольшее значение, когда $x = x_0 = \frac{5}{4\sqrt{3}}$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Брусок меньшей массы после столкновения отскочит назад, а брусок большей массы получит скорость, направленную вперед. Их скорости v_1 и v_2 находятся из законов сохранения импульса

$$mv_0 = -mv_1 + 2mv_2$$

и энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{2mv_2^2}{2}.$$

После столкновения бруски движутся равнозамедленно с ускорением μg и проходят до остановки пути

$$l_1 = \frac{v_1^2}{2\mu g} \text{ и } l_2 = \frac{v_2^2}{2\mu g}$$

При этом расстояние между брусками после остановки будет

$$l = l_1 + l_2 = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2\mu g} = \frac{5v_0^2}{18\mu g}$$

2. Из условия следует, что $\rho(h)$ и $\rho(0)$ связаны формулой

$$\rho(h) = \rho(0)\left(1 - \frac{2Mgh}{7RT(0)}\right)^{5/2}.$$

Численная оценка показывает, что величина $2Mgh/(7RT(0)) \approx 0{,}2$ — мала, так что можно воспользоваться указанным приближением. Окончательно получим

$$\rho(h) = \rho(0)\left(1 - \frac{5}{2}\cdot 0{,}2\right) = 0{,}65 \text{ г/л},$$

где $\rho(0) = 1{,}29$ г/л.

3. До замыкания ключа через катушку индуктивности течет ток $I_L = \mathscr{E}_2/r_2$, так как в установившемся режиме индуктивное сопротивление равно нулю. Сразу после замыкания ключа ток через катушку сохраняется, а через резистор и батарейки текут токи I_R, I_1 и I_2 (рис. 8). По закону Ома, имеют место следующие равенства:

$$\mathscr{E}_1 = I_1 r_1 + I_R R,\ \mathscr{E}_2 = I_2 r_2 + I_R R.$$

При этом

$$I_1 + I_2 = I_R + I_L.$$

Отсюда для тока, текущего через резистор сразу после замыкания ключа, находим

$$I_R = \frac{\mathscr{E}_1 r_2}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)} = 1\text{А}.$$

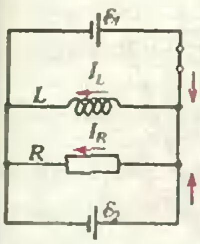


Рис. 8

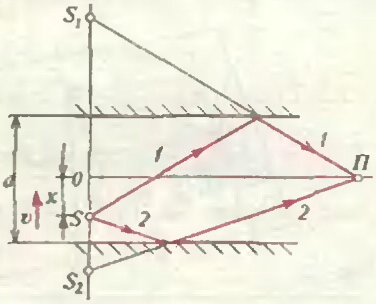


Рис. 9

4. Пусть источник в некоторый момент находится на расстоянии x от оси симметрии системы (рис. 9). Найдем разность хода Δ лучей *1* и *2*, испытавших по одному отражению от зеркал и дошедших до приемника. Для этого построим мнимые изображения источника S_1 и S_2 в плоских зеркалах. Тогда разность хода равна разности длин отрезков $S_1П$ и $S_2П$, которые, в свою очередь, равны

$$S_1П = \sqrt{L^2 + (a+x)^2} = L\sqrt{1 + (a+x)^2/L^2},$$

$$S_2П = \sqrt{L^2 + (a-x)^2} = L\sqrt{1 + (a-x)^2/L^2}.$$

Для удаленного экрана ($L \gg a > x$) можно воспользоваться указанным в условии задачи разложением, так что

$$\Delta = S_1П - S_2П = \frac{(a+x)^2 - (a-x)^2}{2L} = \frac{2ax}{L}.$$

Максимум интенсивности приемник будет регистрировать при условии

$$\Delta = m\lambda,$$

где m — целое число. Так как $x = vt$, между соседними максимумами пройдет время T, определяемое условием

$$\frac{2avT}{L} = \lambda.$$

Это время и есть период регистрируемого приемником переменного сигнала. Поэтому искомая частота

$$f = \frac{1}{T} = \frac{2av}{L\lambda} = 10 \text{ Гц}.$$

Вариант 2

1. Периоды обращения спутников T минимальны, если они движутся вблизи поверхности планет. Движение спутника массой m по круговой орбите радиусом R обеспечивает сила притяжения к планете массой M:

$$m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = G\frac{mM}{R^2}.$$

Таким образом, периоды обращения спутников вокруг Марса и Земли связаны соотношением

$$\frac{T_М}{T_З} = \sqrt{\frac{M_З R_М^3}{M_М R_З^3}} = \beta\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} = 1{,}16.$$

2. Если диаметр пузыря d, то давление в нем больше окружающего p_0 на величину $8\sigma/d$ (у пленки две поверхности). Поэтому по уравнению состояния масса воздуха в пузыре при температуре T равна

$$m = \frac{\mathrm{M}(p_0 + 8\sigma/d)\pi d^3/6}{RT},$$

где M — молярная масса воздуха. Если пренебречь силой тяжести пленки, то по закону Архимеда условие всплытия пузыря имеет вид

$$mg \le F_А = \frac{\mathrm{M}p_0\pi d^3/6}{RT_0}g,$$

где T_0 — температура окружающего пузырь воздуха. Отсюда находим

$$\frac{T - T_0}{T_0} \ge \frac{8\sigma}{p_0 d} = 0{,}01 = 1\%,$$

где $p_0 = 10^5$ Па.

3. Ток в рамке, а следовательно, и сила, действующая на нее со стороны магнитного поля, возникают только при въезде рамки в зазор и при выезде из него. Когда рамка целиком находится в зазоре, поток магнитного поля через рамку не меняется и ЭДС индукции в ней не возникает. Так как скорость изменения потока при въезде и выезде одинакова и равна aBv, то одинакова и величина индукционного тока, возникающего в рамке: $I = aBv/R$. Но в одном случае поток возрастает, в другом убывает, поэтому токи через рамку текут в разных направлениях. Однако сила, действующая на рамку, в обоих случаях равна IBa и имеет одно направление — тормозит рамку. Работа этой силы на пути $2a$ при въезде и выезде рамки из зазора и превращается в тепло. Таким образом, выделяющееся в рамке количество теплоты равно

$$Q = 2IBa^2 = \frac{2B^2va^3}{R}.$$

4. При прохождении пластинки толщиной H (рис. 10) крайние лучи в пучке диаметром d приобретают оптическую разность хода, равную $Hn(R) - Hn(R+d)$. Она должна быть скомпенсирована дополнительной геометрической разностью хода $d\sin\alpha$, возникающей из-за поворота фронта пучка на угол α. Таким образом,

$$Hn(R) - Hn(R+d) = d\sin\alpha.$$

При малой толщине пучка можно считать, что

$$n(R+d) = n(R) + d\left.\frac{dn}{dr}\right|_{r=R}.$$

Тогда

$$\sin\alpha = -H\frac{dn}{dr}\Big|_{r=R} = \frac{2Hn_0R}{r_0^2} = \frac{1}{30},$$

и угол поворота фронта

$\alpha = 2°$.

Таким образом, указанная в условии задачи пластинка должна действовать на тонкий луч света как положительная длиннофокусная линза.

Вариант 3

1. Для широты φ сила притяжения $m\vec{g}$ направлена по радиу-

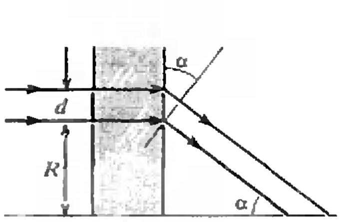


Рис. 10

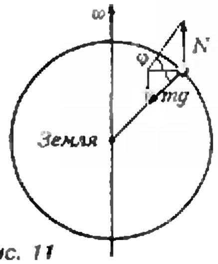


Рис. 11

су к центру Земли под углом φ к горизонту, а реакция нити N по условию параллельна оси вращения Земли (рис. 11). Условие движения груза по окружности радиусом $R\cos\varphi$ запишется в виде

$$m(2\pi/T)^2 R\cos\varphi = mg\cos\varphi.$$

Отсюда получаем, что период обращения равен

$$T = 2\pi\sqrt{R/g} \approx 84 \text{ мин}$$

и не зависит от широты местности.

2. Работа на адиабате равна изменению внутренней энергии газа:

$$A_{12} = -\Delta U_{21} = -(\Delta U_{13} + \Delta U_{32}) = c(T_1 - T_3) - \frac{\alpha-1}{\alpha}\frac{a}{V_1}.$$

К газу за цикл подводится количество теплоты

$$Q = A_{23} + \Delta U_{23} + \Delta U_{31} = -\frac{A_{12}}{\beta} + A_{12}.$$

Из этих равенств находим

$$T_1 - T_3 = \frac{1}{c}\left(\frac{\beta Q}{\beta-1} + \frac{\alpha-1}{\alpha}\frac{a}{V_1}\right).$$

3. Если ток в цепи максимален, то напряжение на катушке равно нулю и, следовательно, напряжения на конденсаторах одинаковы. Пусть Q_1 и Q_2 — заряды на конденсаторах в этот момент, тогда

$$Q_1 + Q_2 = Q \text{ и } \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}.$$

По закону сохранения энергии имеем

$$\frac{LI_{\max}^2}{2} + \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} = \frac{Q^2}{2C_1}.$$

Отсюда получаем

$$I_{\max} = \frac{2Q}{\sqrt{5LC_1}}.$$

4. Пусть $AB = a$ и $BC = b$. Тогда величина изображения стороны AB равна $aF/(F+a)$, а стороны BC равна $\Gamma b = bF/(F+a)$, где Γ — искомое увеличение катета BC. По условию

$$\frac{1}{2}ab = \frac{9}{2}\cdot\frac{aF}{F+a}\cdot\frac{bF}{F+a}.$$

Тогда

$$\Gamma = \frac{F}{F+a} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}.$$

Московский государственный институт электроники и математики (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 200 км. *Указание.* Рассмотрите три случая: когда автомобиль прибывает в B менее чем через 2 часа после выезда из A, более чем через 5 часов после выезда из A и более чем через 2, но менее чем через 5 часов.

2. $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right) \cup \left(1; \frac{5}{2}\right)$. 3. $V = \frac{1}{3}\pi h^3\left(3\operatorname{tg}^2\alpha - 1\right)$.

5. 0. *Указание.* Приведите уравнение к виду $10\cos x + 1 = 6\sin 3x$ и убедитесь, что максимальное значение правой части и минимальное значение левой на $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ совпадают, но достигаются при разных значениях аргумента.

Вариант 2

1. $x_1 = -1$, $x_2 = (4a+3)/8$ при $a \ne -3, -1\frac{1}{4}, -\frac{9}{4}, -\frac{1}{4}, 1$; $x = -1$ при $a = -1\frac{1}{4}, -\frac{9}{4}, -\frac{1}{4}$; $x = -\frac{9}{8}$ при $a = -3$; $x = \frac{7}{8}$ при $a = 1$. 2. $\pm\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k\right)$, $k \in N$; 6 корней. *Указание.*

Левая часть уравнения — четная функция от x, поэтому достаточно решить его при $x \ge 0$ и полученное множество решений симметрично отобразить относительно 0.

3. 54 км/ч.

4. $\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin\alpha\sin\beta}\right)$.

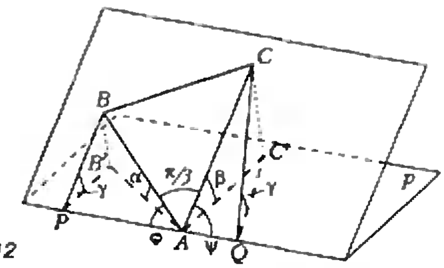


Рис. 12

Решение. Пусть сторона AB треугольника ABC образует с плоскостью p угол α, а сторона AC — угол β. Без ограничения общности можно считать, что точка A лежит на ребре двугранного угла величиной γ, образованного плоскостями p и ABC. Пусть P и Q — проекции вершин B и C на ребро двугранного угла, $\angle BAP = \varphi$, $\angle CAQ = \psi$, B_1, C_1 — проекции вершин B и C на плоскость p (рис. 12). Тогда

$BB_1 = AB\sin\alpha = BP\sin\gamma = AB\sin\varphi\sin\gamma$, откуда $\sin\alpha = \sin\varphi\sin\gamma$ (следовательно, $\sin\varphi = \sin\alpha/\sin\gamma$). Аналогично, $\sin\beta = \sin\psi\sin\gamma$.

Кроме того, $\varphi + \psi + \frac{\pi}{3} = \pi$, откуда

$$\sin\psi = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\gamma}} + \frac{1}{2}\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

Приходим к уравнению относительно $\sin\gamma$:

$$\sin\beta = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\gamma}} + \frac{1}{2}\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right)\sin\gamma.$$

из которого находим

$$\sin\gamma = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

5. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left\{\frac{1}{3}\right\} \cup \left\{\frac{5}{12}\right\}$.

Указание. Разрешая уравнение относительно a, получим $a = -x + \sqrt{3x-1}$, $x > \frac{1}{3}$, $x \neq \frac{2}{3}$. Искомые значения a — это ординаты тех точек на графике функции $a(x)$ (рис. 13), в которых горизонтальные прямые пересекают график в одной точке.

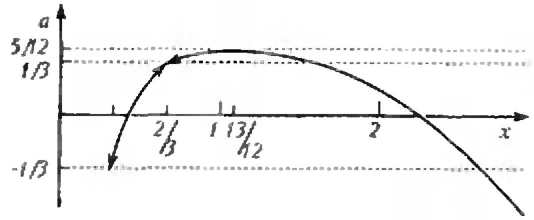


Рис. 13

ФИЗИКА

1. $v = 1/2\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 5$ м/с, $\alpha = \mathrm{arctg}(4/3) = 53°$ (относительно скорости первого тела).

2. $F_1 = \dfrac{mg\cos\alpha\cos(\beta-\alpha)}{2\sin\beta} = 260$ Н,

$$F_2 = mg - \frac{mg\cos\alpha\sin(\beta-\alpha)}{2\sin\beta} = 450 \text{ Н}.$$

3. $v = -10{,}9\cdot10^{-2}$ м/с, $a = -19{,}7\cdot10^{-2}$ м/с^2.

4. $\Delta U = 3/4pV = 750$ Дж. 5. $Q = 2(n^2-1)p_0V_0 = 2\cdot10^{-3}$ Дж.

6. $A = (mg/E)^2U/q = 5$ Дж. 7. $I = \dfrac{\mathcal{E}_1r_2 + \mathcal{E}_2r_1}{r_1r_2 + R(r_1+r_2)} = 0{,}25$ А.

8. $\Delta P = 2\sqrt{qmU} = 5{,}4\cdot10^{-22}$ кг·м/с, $t = \pi m/(2qB) = 9{,}8$ мкс.

9. $l_{min} = 4F = 40$ см, $\Gamma = 1$.

Московский педагогический государственный университет им.В.И.Ленина

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. При $m \le 0$, $m > 3$ решений нет;

$$x = \left(\frac{9+m^2}{2m}\right)^2 - 6$$

при $0 < m < 3$. *Указание.* Поскольку $\sqrt{x+6} > \sqrt{x-3}$, то $m > 0$. Выполняя замену $y = \sqrt{x-3}$, т.е. $x = y^2 + 3$, приходим к уравнению $\sqrt{y^2+9} = m + y$, а затем к системе

$$\begin{cases} m + y \ge 0, \\ y \ge 0, \\ y = (9-m^2)/(2m). \end{cases}$$

2. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \pi + 2\pi n$, $k, n \in \mathbf{Z}$.

Указание. Упростив показатели, получим при $x \neq 2\pi n$ уравнение $t + \frac{8}{t} = 9$, где $t = 2^{\sin x}$. 3. $y = \frac{x}{3}$, $y = \frac{x}{3} + \frac{4}{27}$.

4. 6 ч. 5. $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{5}}{4}$. *Указание.* Пусть P — середина CC_1, Q — середина AD, а PR перпендикулярно BQ (рис. 14). Искомый угол $\beta = \angle CRP$ найдем из формулы $\mathrm{tg}\beta = PC/CR$, а отрезок CR — из треугольника BCR (рис. 15): $CR = BC\cos\alpha$, где $\mathrm{tg}\alpha = \frac{AQ}{AB} = \frac{1}{2}$.

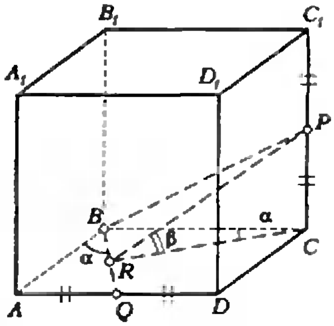


Рис. 14

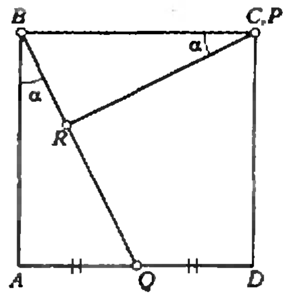


Рис. 15

Вариант 2

1. $x \le \log_2(\sqrt{2}-1)$, $x \ge \frac{1}{2}$. 2. $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Указание. Уравнение равносильно системе $2\sin x\sin 2x = 5\cos x + 4\sin 2x > 0$.

3. $y_{max} = y(-1) = \frac{1}{3}$, $y_{min} = y(1) = -1$.

4. Не успеют. *Указание.* Пусть $AB = l$, u — скорость течения реки, v — скорость лодки в стоячей воде. Тогда

$$\begin{cases} 5v = l, \\ l/(v-u) + l/(v+u) = l/u. \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем $\frac{v}{u} = \sqrt{2} + 1$, откуда $t = \frac{l}{u} = \frac{5v}{u} = 5(\sqrt{2}+1) > 12$.

5. В зависимости от того, где находится проекция D_1 вершины D, угол $\alpha = \angle BDC$ имеет значение

$$\alpha_1 = \mathrm{arctg}\,2\sqrt{3} + \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2},\ \alpha_2 = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{8} + \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\alpha_3 = \mathrm{arctg}\,2\sqrt{3} - \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2},\ \alpha_4 = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Указание. Так как боковые грани наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, то проекция D_1 вершины D есть точка, одинаково удаленная от прямых AB, BC, CA, т.е. D_1 является центром либо вписанной, либо одной из вневписанных окружностей (рис. 16). Заметьте, что ΔABC — прямоугольный. В каждом из случаев найдите радиус соответству-

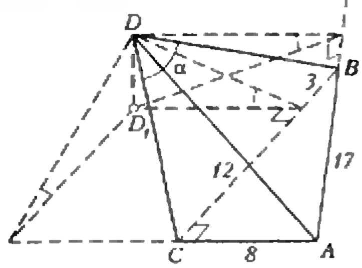


Рис. 16

ющей окружности и воспользуйтесь тем, что α является либо суммой, либо разностью двух острых углов, тангенсы которых легко вычисляются.

Вариант 3

1. $2d^2(\sin\varphi+\cos\varphi)\sqrt{\cos^2\varphi\,\mathrm{tg}^2\beta-\sin^2\varphi}=$

$=\dfrac{2d(\sin\varphi+\cos\varphi)}{\cos\beta}\sqrt{\sin(\beta-\varphi)\sin(\beta+\varphi)}.$

Указание. Найдите a и b (рис.17). 2. $x_1=100$, $x_2=0{,}1$.

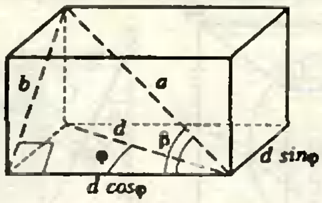


Рис. 17

Указание. Прологарифмируйте уравнение и выполните замену $y=\lg x$. 3. $x=\frac{\pi}{3}(2k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$.

4. $1<x<2$. 5. $\frac{\pi}{3}$.

Вариант 4

1. $a^2 2$. 2. $x=\frac{1}{7}$. 3. $x=-\frac{\pi}{36}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$. 4. $-1<x<3$.

5. $\frac{\pi}{6}$.

Вариант 5

1. $V=\dfrac{\pi h^3}{3\cos^2\beta}\left(\sin^2\beta+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$. 2. $x=\pi k$, $x=\frac{\pi}{3}+\pi n$, $k,\ n\in\mathbf{Z}$. 3. Через 12 часов. 4. $(-4;0)\cup(2;4)$. 5. $\frac{1}{2}$.

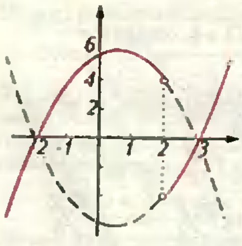


Рис. 18

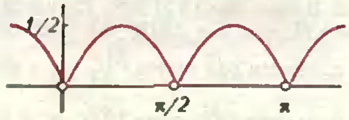


Рис. 19

МАТЕМАТИКА

Задачи устного экзамена

1. $x\in\mathbf{R}$. *Указание.* Данное неравенство равносильно неравенству $x^2-x\log_3 4+1>0$, причем $D=\log_3^2 4-4<0$. Можно также воспользоваться неравенством $x^2+1\ge 2x$.
2. См. рис. 18. 3. 12 или $6\sqrt{13}$. *Указание.* Угол 60° может быть углом между боковой стороной и каждым из оснований. 4. $\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup(1;2)$. 5. $a>\frac{11}{9}$. *Указание.* Меньший корень уравнения больше 3. 6. $-3{,}1$. *Указание.* Сначала найдите $\cos\alpha$. 7. $y=\log_{1/4}x$ при $\frac{1}{4}\le x\le 4$. *Указание.* Воспользуйтесь тождеством $\sin\arcsin z=z$ при $-1\le z\le 1$.
8. Квадрат. 9. *Указание.* Рассмотрите функцию $y=\sin 2x$ на множестве $(-6;-5)\cup(-3;-2)$ решений данного неравенства.
10. 15386. *Указание.* Данные числа образуют арифметическую прогрессию. 11. $\mathrm{ctg}\,6{,}2>\mathrm{ctg}\,3{,}1$. *Указание.* Воспользуйтесь неравенствами $0<6{,}2-\pi<3{,}1<\pi$ и убыванием функции $y=\mathrm{ctg}\,x$ на $(0;\pi)$. 12. 4; 3. 13. $\sqrt{\left(a^2+b^2\right)/2}$. 14. 11, 13, 15, …, 31. 15. См. рис. 19. *Указание.* $y=\frac{1}{2}|\sin 2x|$, $x\ne\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

ФИЗИКА

1. $h=3v_0^2/(8g)=0{,}34$ м. 2. $A=m\left(v_2^2-v_1^2\right)/2=3\cdot 10^3$ Дж.
3. $x=mv/\sqrt{k(m+M)}$. 4. $Q=C_pMV\Delta p/R=1{,}66\cdot 10^4$ Дж.
5. $E=mg/q=6{,}25\cdot 10^5$ В/м. 6. $U_{\text{пр}}=\mathcal{E}-U(1+r/R)=0{,}18$ В; $R_{\text{пр}}=RU_{\text{пр}}/U=2{,}7$ Ом. 7. $\dfrac{P_2}{P_1}=\dfrac{2(R+r)^2}{(2R+r)^2}=0{,}6$.
8. $I=\sqrt{mL/(R\tau)}=21{,}4$ А.
9. $R=\sqrt{2mU/\left(eB^2\right)}=3{,}8\cdot 10^{-4}$ м.
10. $\alpha_2=\arcsin\dfrac{n_2\sin\alpha_1}{n_1}=42{,}5°$.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.М.Давыдова, А.А.Егоров, А.Т.Калинин, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, А.П.Савин, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

С.Ф.Лухин, А.О.Хоменко, Д.А.Крымов, М.М.Константинов, Л.А.Тишков, О.М.Войтенко

ГЛАВНЫЙ ХУДОЖНИК

С.А.Стулов

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

С.В.Вакуленко, Е.В.Титова

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Н.И.Лямина

Адрес редакции:

103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант», тел. 250-33-54, 251-55-57

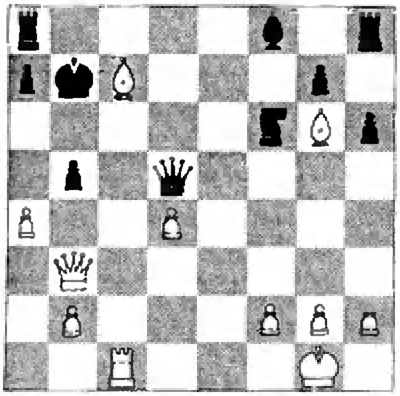
Отпечатано в Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате 142300, г. Чехов Московской области

Зак. 2192

Геометрические законы

Многие тактические приемы в шахматной игре основаны на различных геометрических мотивах. В этом читатели «Кванта» неоднократно имели возможность убедиться. Вот и еще одна «страничка» посвящается этой теме. Присутствие элементов геометрии в шахматах не вызывает удивления, ведь все шахматные фигуры, кроме коня, ходят по прямым линиям, и в точках их пересечения то и дело происходят конфликты... Предлагаем вашему вниманию несколько примеров из партий гроссмейстеров, сыгранных в самые последние годы.

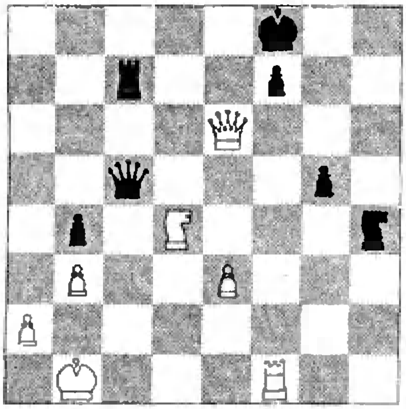
Голубев — Шер
Германия, 1993



Белые пожертвовали ладью, но кажется, что их атака зашла в тупик, тем более, что грозит размен ферзей. Но у белых находится красивый отвлекающий маневр.

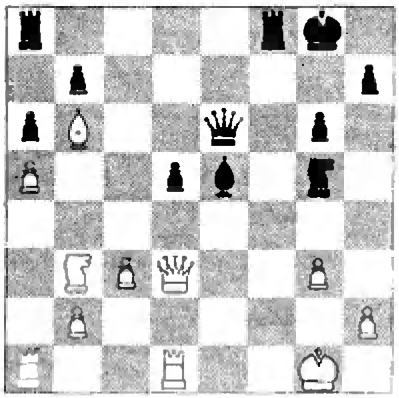
1. Се4!! Тема отвлечения. На поле е4 слон отвлекает одну из черных фигур от своих обязанностей. После 1...Ф:е4 черные получают мат: 2. Ф:b5+ Крс8 3. Са5+, а после 1...К:е4 просто остаются без ферзя.

Лоброн — Гуревич
Мюнхен, 1992



Позиция белых не выглядит опасной, ведь их ладья и конь надежно защищают своего короля. Однако последовало **1...Kf3!** — и неожиданно сработали сразу два тактических приема геометрического характера. Перекрытие — ладья f1 перекрыта, и ферзь белых повис в воздухе; отвлечение — отвлекается либо ладья с первой горизонтали — 2. Л:f3 Фс1×, либо конь от поля с2 — 2. К:f3 Фс2+ 3. Кра1 Фс3+ 4. Крb1 Фd3+ 5. Кра1 Ф:f1+. После **2. Фh6+ Кре7** белые сдались ввиду угрозы 3...Kd2+ 4. Крb2 Фс3×.

Долматов — Разуваев
Ростов-на-Дону, 1993

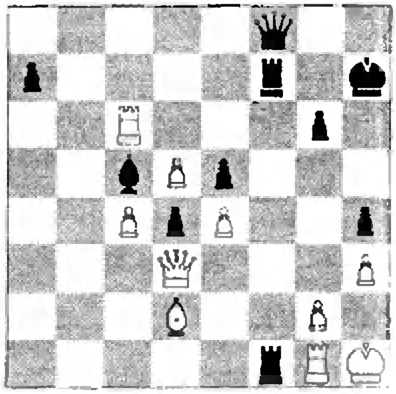


Последним ходом Разуваев отступил конем с е4 на g5. Теперь белый король чувствует себя не очень уютно — грозит d5 – d4, а затем Фе6 – d5. Кажется, однако, что черные просмотрели потерю пешки — **1. Ф:d5**, к тому же с разменом ферзей. Однако в ответ на это взятие неожиданно последовало весьма эффектное **1...Cd4+!!** Редчайший случай перекрытия! Белые могут побить слона пятью способами, но ни одно из взятий не спасает. Если ферзя берет слон, конь или пешка, то перекрывается дорога между ладьей и ферзем, и он просто гибнет, как, впрочем, и при 2. Ф:d4 Kf8+. Остается **2. Л:d4**, и после 2...Kf3+ 3. Крg2 К:d4 4. Ф:е6+ К:е6 черные уверенно реализовали материальный перевес.

И еще два примера из двух последних матчей за шахматную корону между Карповым и Каспаровым.

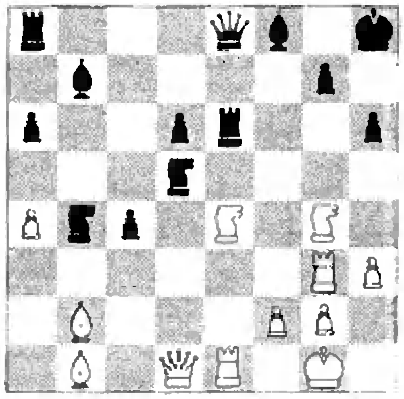
Карпов — Каспаров
Севилья, 1987

Наиболее вероятен ничейный исход, но Каспаров затеял ошибочную комбинацию. **50...Л7f3? 51. gf Л:f3.** Кажется, что черные перешли к решающим действиям, но... **52. Лс7+ Крh8 53. Сh6!!** Контркомбинация на темы отвлечения и перегрузки. Ситуация на доске пол-



ностью проясняется. **53...Л:d3 54. С:f8 Л:h3 55. Крg2 Лg3+ 56. Крh2 Л:g1 57. С:е5**, и черные сдались.

Каспаров — Карпов
Лион, 1990



26. К:h6! Комбинация на тему рентгена — под лучами белой ладьи е1 находится черный ферзь е8. После **26...Л:h6 27. К:d6!** противостояние ладьи и ферзя обнажается. У ферзя три хода, но ни один из них не помогает: 27...Фd7 28. Фg4! Ф:g4 29. Кf7+ Крg8 30. К:h6+ gh 31. Л:g4+ Крf7 32. Сg6+ Крg8 33. Сf5+ Крf7 34. Се6+; 27...Фh5 28. Лg5! Ф:d1 29. Кf7+ Крg8 30. К:h6+ Крh8 31. Л:d1 с3 32. Кf7+ Крg8 33. Сg6! cb 34. Лh5; и наконец 27...Ф:е1+ 28. Ф:е1 Л:d6 29. Фе4 Кd3 30. Фh4+ Крg8 31. С:g7! С:g7 32. Фg4, и белые берут верх.

Карпов не решился взять на h6, сыграв 26...с3 и после 27. Кf5 cb 28. Фg4 Сс8 29. Фh4+ Лh6 30. К:h6 gh 31. Крh2 Фе5 32. Кg5 Фf6 33. Ле8 Сf5 34. Ф:h6 также остался у разбитого корыта.

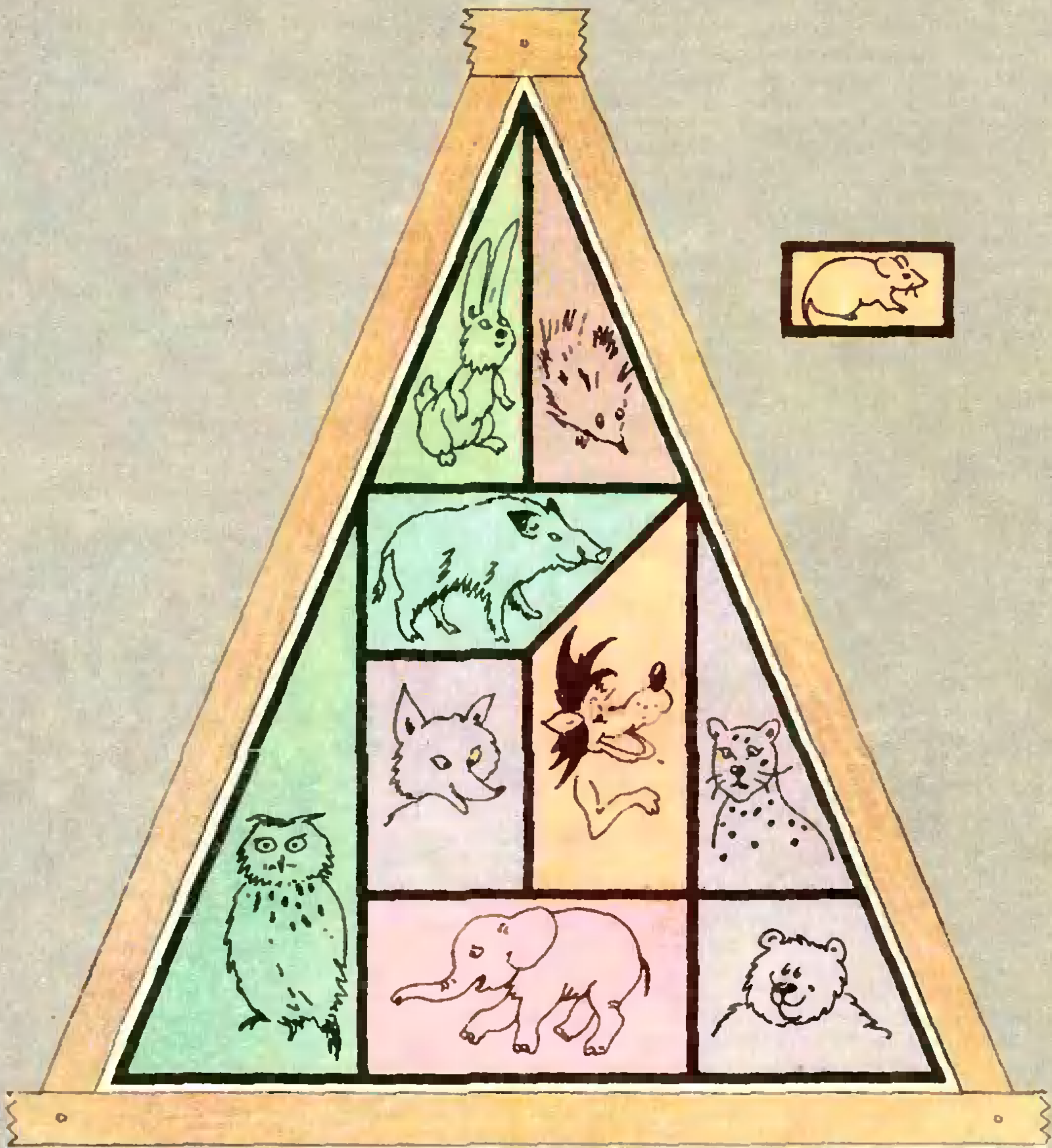
Эта была последняя победа Каспарова в матчах с Карповым, которая и решила судьбу единоборства.

Таким образом, благодаря геометрическому мотиву — рентгену, Каспаров поставил точку в их марафонской борьбе за шахматную корону.

Е. Гик

Индекс 70465

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК



ТЕРЕМОК

На нашем рисунке вы видите треугольный теремок, разрезанный на 9 «комнат». Головоломка кажется неразрешимой: требуется переложить 9 частей головоломки так, чтобы освободить место еще для одного кусочка — комнатки мышки.

Вырежьте из картона 10 деталей головоломки по размерам рисунка, а затем попробуйте уложить их прямо в теремок на нашей обложке двумя способами — с мышкой и без.

Результаты вы сможете сравнить с ответом, который будет опубликован в следующем номере.