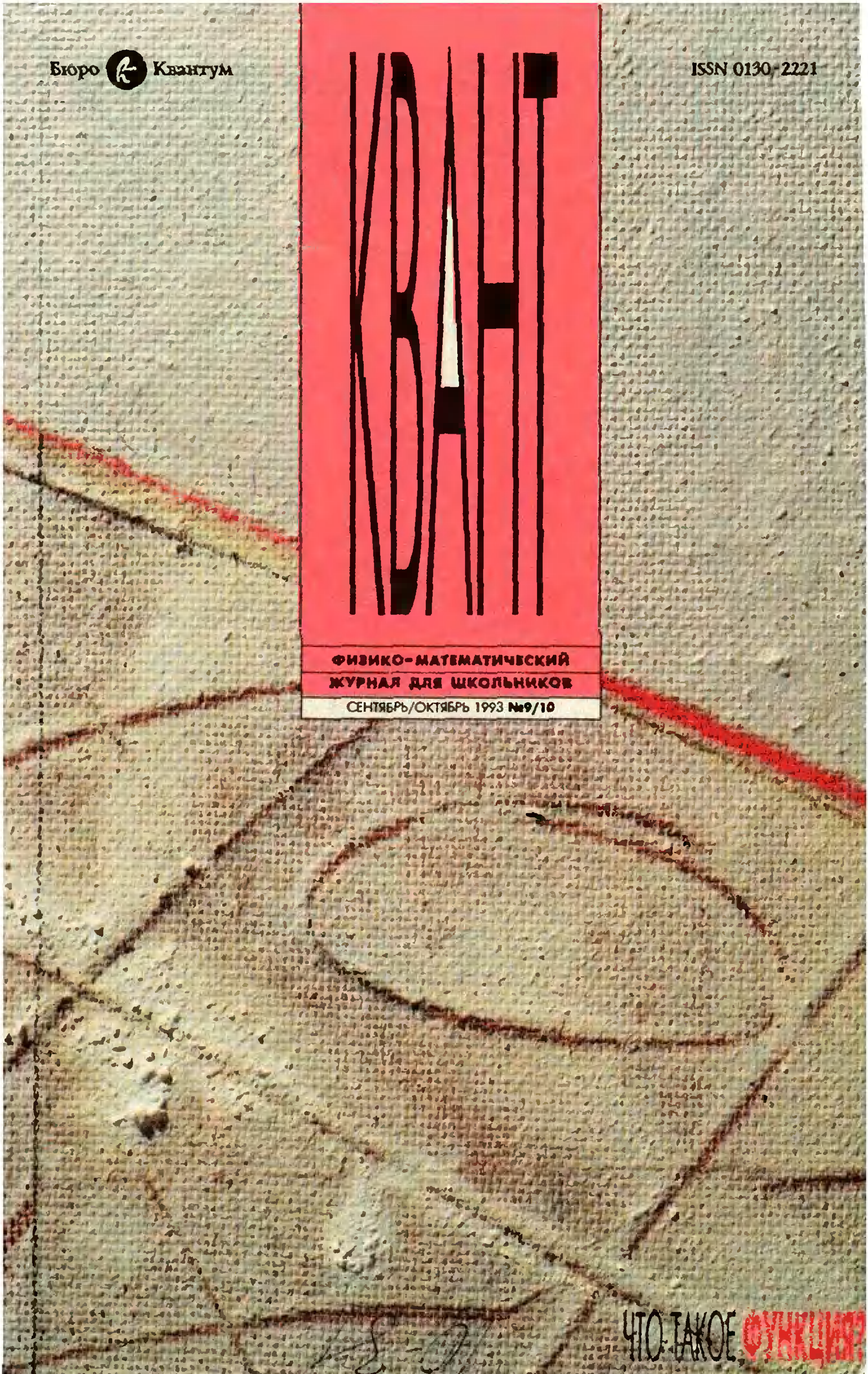


Бюро Квантум

ISSN 0130-2221

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

СЕНТЯБРЬ/ОКТЯБРЬ 1993 №9/10

ЧТО ТАКОЕ ФУНКЦИЯ?

Раннее Возрождение. Что же происходило с образами пространства, с перспективой в XV веке в Италии? Эту эпоху назвали по-итальянски кватроченто, или Раннее Возрождение. Именно тогда появляется интерес к научной перспективе со стороны художников, архитекторов, и они начинают наперебой сочинять трактаты по перспективе. Среди авторов Филиппо Брунеллески, Паоло Учелло, Леон Баттиста Альберти и другие.

Но очень скоро живописцы начинают убеждаться в том, что прямая перспектива хороша лишь тогда, когда действие картины происходит на большом расстоянии (например, в глубине площади или храма), а по мере приближения предмета, когда не учитывается бинокулярность и боковое зрение, неизбежно искажение. И художники, едва открывшие прямую перспективу, стали тут же ее нарушать. Приведем в качестве примера творчество замечательного мастера падуанской школы Андреа Мантеньи (1431-1506). В ранний период своего творчества -он неистовый перспективист. Такова роспись брачной комнаты герцогов Гонзаго в Мантуе. Плафон ...вода, где на фоне уходящего в бесконечность неба изображены в смелых ракурсах фигуры, ...ящие через круговые перила вниз, - одна из ранних попыток создать иллюзию простран... ...нове знаний перспективы.

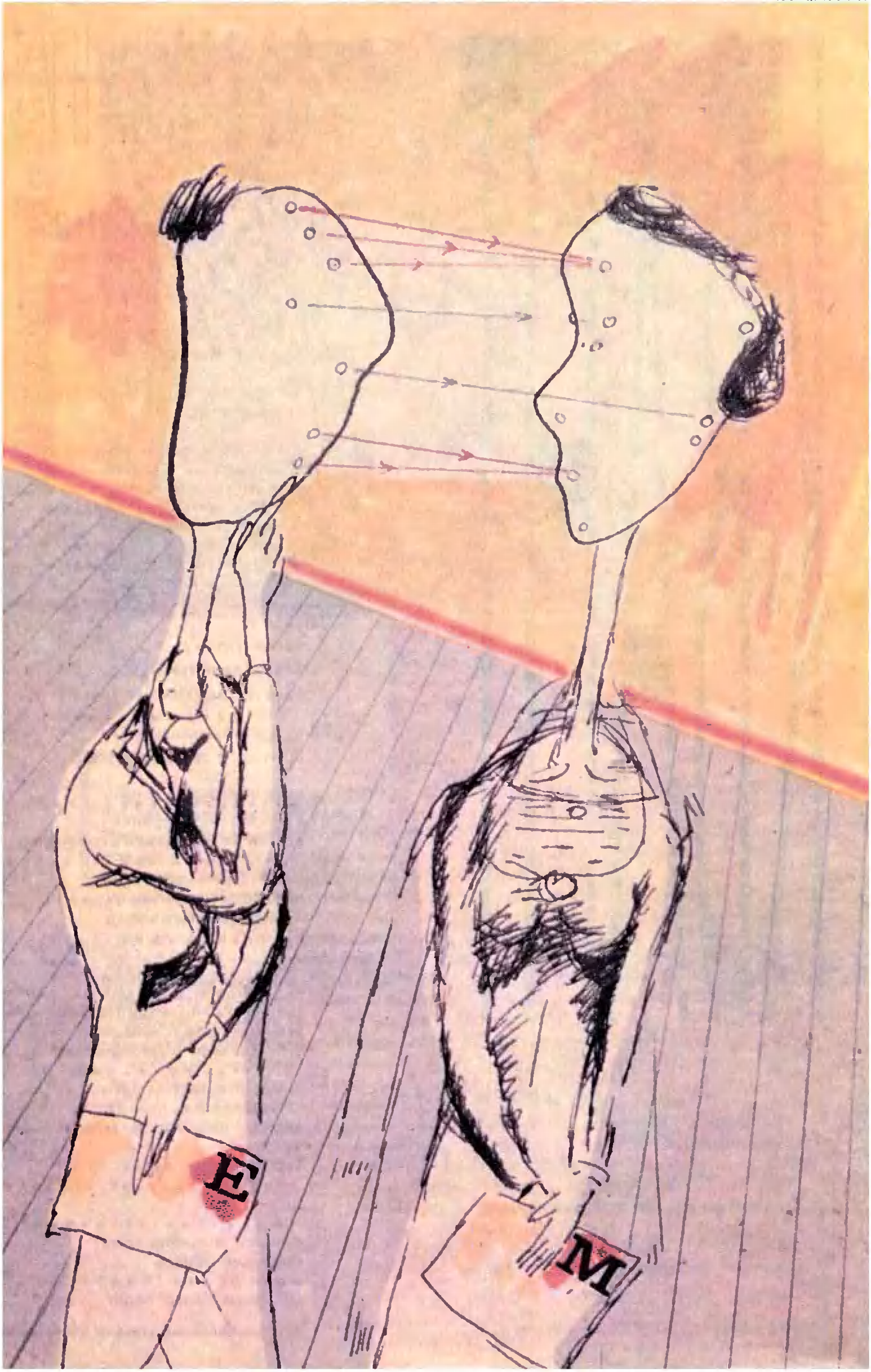
... Мантенья ставит перед собой смелую задачу изобразить мертвого Христа, лежа... ...ед. И если следовать законам прямой перспективы, то ноги, и прежде всего ...ми, должны были бы быть колоссальными, а голова маленькой. Ничего ... знаменитой картине «Мертвый Христос» (датируется около 1500 г. и ...теке Брера). Здесь у Мантеньи происходит борьба с перспекти... ...ушений были бы невозможны тот суровый драматизм и эк... ... произведении. И мы не замечаем, что его тело слегка ... ...нейшие деформации пространства и перспективы ... ...менуемого Высоким Возрождением.

КВАНТ

Научно-популярный
физико-математический журнал
Выходит с января 1970 года
Учредители - Президиум РАН, «Бюро Квантум»
Издатель — НПП «Бюро Квантум» РАН

СОДЕРЖАНИЕ

На I странице обложки — графика *Юрия Ващенко*


E
M

3

Что такое функция?

Андрей Николаевич
Колмогоров

Введение

На вопрос «Что такое функция?» школьники часто отвечают: «Функцию можно задать таблицей, графиком или формулой». Ясно, что это не определение. Но школьники, которые уклоняются от формулировки явного определения и сразу переходят к описанию того, как задают функции, и не совсем не правы. Математика не может начинаться с определений. Формулируя определение некоторого понятия, мы неизбежно в самом этом определении употребляем какие-либо другие понятия. Пока мы не понимаем смысла каких-либо понятий, мы не сдвинемся с места и не сможем сформулировать ни одного определения. Поэтому изложение любой математической теории начинается с того, что какие-либо *основные понятия* принимаются без определения. Пользуясь ими, уже возможно бывает формулировать определения дальнейших *производных понятий.*

Каким же способом люди объясняют друг другу свое понимание смысла основных понятий? Для этого не существует другого способа, как разъяснение *на примерах* и при помощи подробного описания характерных свойств определяемых вещей. Эти описания могут быть в деталях не вполне ясными и сначала не исчерпывающими. Но постепенно из них смысл понятия вырисовывается с достаточной ясностью. Так мы подойдем к понятию *функции*, считая его одним из основных математических понятий, не подлежащих формальному определению.

Правда, далее будет сказано, что функция есть не что иное, как *отображение* одного множества на другое (*области определения* функции на *множество ее значений*). Но здесь слово *отображение* явится просто синонимом слова *функция*. Это — два названия для одного и того же понятия. Пояснение одного слова другим, равнозначащим, не может заменить определения выражаемого им понятия.

Пример 1. Будем считать, что буквы x и y обозначают действительные числа. Знак $\sqrt{\ }$ бу-

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 1 за 1970 год.

Графика Юрия Ващенко

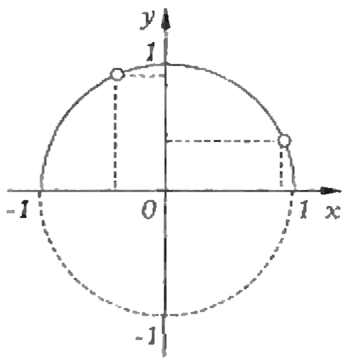


Рисунок 1

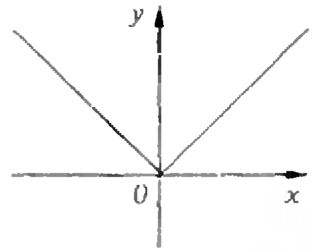


Рисунок 2

дем считать знаком извлечения арифметического квадратного корня. Равенство

$$y = \sqrt{1-x} \qquad (1)$$

обозначает, что выполнены условия

$$x^2 \le 1, \quad y \ge 0, \quad x^2 + y^2 = 1. \qquad (2)$$

Точки, координаты которых удовлетворяют этим условиям, образуют полуокружность, изображенную на рисунке 1.

Рисунок 1 делает наглядными следующие факты, которые вы можете доказать и чисто алгебраическим путем:

1) формула (1) позволяет для любого x, удовлетворяющего условиям

$$-1 \le x \le 1, \qquad (3)$$

вычислить соответствующее ему y, которое удовлетворяет неравенствам

$$0 \le y \le 1; \qquad (4)$$

2) каждому y, удовлетворяющему неравенствам (4), соответствует хотя бы одно такое x, которому по формуле (1) соответствует это заданное y.

Можно сказать, что формула (1) задает отображение множества чисел x, удовлетворяющих неравенствам (3), на множество чисел, подчиненных неравенствам (4). Математики часто (особенно в последнее время) для обозначения отображений употребляют стрелку. Занимающее нас отображение можно записать при помощи стрелки так:

$$x \to \sqrt{1-x^2}. \qquad (5)$$

Заметьте: *отображение полностью определено, если а) задано множество E, которое отображается; б) для каждого элемента x этого множества E задан элемент y, на который элемент x отображается.*

Множество всех значений y обозначим буквой M. В первом примере E — множество чисел, удовлетворяющих условию (3), а M — множество чисел, удовлетворяющих условию (4).

Пример 2. Правила

1) $x \to \sqrt{x^2}$,

2) $x \to \begin{cases} x, & \text{если } x \ge 0, \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$

определяют одно и то же отображение

$$x \to |x| \qquad (6)$$

действительных чисел x на их модули (абсолютные величины) (рис. 2).

Отображение (6) отображает множество всех действительных чисел

$$\mathbf{R} = (-\infty; +\infty)$$

на множество

$$\mathbf{R}_+ = [0; +\infty)$$

неотрицательных действительных чисел.

Вместо слова *отображение* можно говорить *функция* и записать отображение (5) так:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \qquad (7)$$

а отображение (6) так:

$$f(x) = |x|. \qquad (8)$$

Областью определения функции (8) является множество всех действительных чисел $\mathbf{R}$. Множеством ее значений является множество $\mathbf{R}_+$ неотрицательных действительных чисел.

Пример 3. Петя, Коля, Саша и Володя живут в комнате общежития. На февраль они установили такой график дежурств:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	28
Петя	■				■				■				
Коля		■				■				■			
Саша			■				■				■		
Володя				■				■					■

Сразу бросается в глаза сходство этой таблицы с привычными вам из школьного курса алгебры графиками функций. Имеет ли эта аналогия точный логический смысл? Установили ли здесь мальчики *отображение* одного множества на другое, т.е. определили ли некоторую *функцию*? И не начертили ли они *график* этой функции? (Обратите внимание на житейское выражение «установили *график* дежурств»!).

Общее понятие функции

Нетрудно видеть, что в примере 3 на каждый из 28 дней февраля назначен определенный дежурный. Иначе говоря, множество дней февраля *отображено* на множество мальчиков, распределивших между собой дежурства. Можно условиться, что буква x обозначает любой день февраля, а $y = f(x)$ — дежурного в день x. Нет никаких оснований отказывать отображению

день $x \to y =$ дежурный на день x

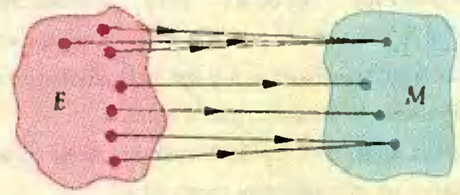
в праве называться *функцией*; можно записать это отображение так:

$$y = f(x).$$

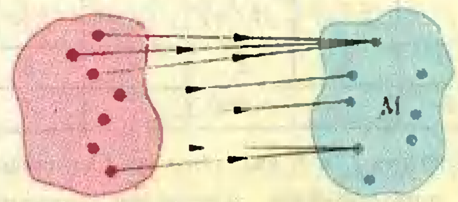
Любое отображение f множества E на множество M мы будем называть функцией с областью определения E и множеством значений M.

Не забудьте, что, говоря об отображении f множества E на множество M, мы имеем в виду, что $y = f(x)$ определено для *любого* x из E и *только* для x из этого множества, а значение y функции f непременно принадлежит множеству M, и каждое y из этого множества M является значением функции f *хотя бы при одном значении аргумента x*.

Если известно только, что значения функции f непременно принадлежат множеству



отображение E на M



отображение E в M

Рисунок 3

M, но не утверждается, что *любой* элемент этого множества является значением функции f, то говорят, что функция отображает свою область определения E в множество M или что отображение f есть отображение множества E в множество M (рис. 3).

Таким образом, надо строго различать смысла выражений

«*отображение* на *множество* M»,

«*отображение* в *множество* M»[1].

Например, про отображение

$$x \to |x|$$

можно сказать, что оно является отображением $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, но нельзя сказать, что это отображение $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$.

С чисто логической точки зрения наиболее простым случаем является случай, когда область определения функции конечна. Ясно, что функция, область определения которой состоит из n элементов, не может принимать более n различных значений. Таким образом, функции, определенные на конечных множествах, осуществляют отображения конечных множеств на конечные множества. Такие отображения являются одним из предметов изучения важной части математики — *комбинаторики*.

Пример 4. Рассмотрим функции, область

[1] *Заметьте еще, что каждое отображение «на» можно назвать и отображением «в», но не наоборот.*

определения которых есть множество $M = \{A, B\}$ из двух букв A и B и значения которых принадлежат тому же множеству, т.е. отображения множества M в себя.

Таких функций существует всего четыре. Зададим их табличным способом:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
A	A	B	A	B
B	A	B	B	A

Функции f_1 и f_2 являются *константами*, т.е. *постоянными*: множество значений каждой из этих функций состоит из одного-единственного элемента.

Функции f_3 и f_4 отображают множество M *на* себя. Функция f_3 может быть задана формулой

$$f_3(x) = x.$$

Это — *тождественное* отображение: каждый элемент множества E отображается в самого себя.

Чтобы закончить выяснение смысла самого понятия «функция», остается обратить внимание на то, что выбор букв для обозначения «независимого переменного», т.е. произвольного элемента области определения, и «зависимого переменного», т.е. произвольного элемента множества значений, совершенно несуществен. Записи

$$x \xrightarrow{f} \sqrt{x}, \quad \xi \xrightarrow{f} \sqrt{\xi}, \quad y \to \sqrt{y},$$

$$f(x) = y = \sqrt{x}, \quad f(\xi) = \eta = \sqrt{\xi}, \quad f(y) = x = \sqrt{y}$$

определяют *одну и ту же функцию* f, которая отображает неотрицательное число в арифметический квадратный корень из него. Пользуясь любой из этих записей, мы получим $f(1)=1, f(4)=2, f(9)=3$ и т.д.

Обратимая функция

Функция

$$y = f(x)$$

называется *обратимой* [2], если каждое свое значение она принимает один-единственный раз. Таковы функции $f_3(x)$ и $f_4(x)$ из примера 4. Функции же $f_1(x)$ и $f_2(x)$ из примера 4 и функции из примеров 1, 2, и 3 *необратимы*.

Чтобы доказать, что какая-либо функция необратима, достаточно указать какие-либо два значения аргумента $x_1 \neq x_2$, для которых

$$f(x_1) = f(x_2).$$

В примере 3 достаточно заметить, что Петя дежурит как 1-го, так и 5-го февраля. Поэтому функция примера 3 необратима.

Пример 5. Функция

$$x \xrightarrow{f} y = -\sqrt{x}$$

обратима. Она определена на множестве R_+ неотрицательных чисел. Множеством ее значений является множество

$$R_- = (-\infty\,; 0]$$

всех неположительных чисел. Задав любое y из множества R_-, можно найти соответствующее x по формуле $x = y^2$.

Функция g

$$y \xrightarrow{g} x = y^2 \quad \text{при} \quad y \le 0$$

есть функция, *обратная* к функции f. Она отображает множество R_- на множество R_+. Как уже говорилось, выбор букв для обозначения независимого и зависимого переменного несуществен.

Функции f и g можно записать в виде

$$f(x) = -\sqrt{x} \quad \text{при} \quad x \ge 0,$$

$$g(x) = x^2 \quad \text{при} \quad x \le 0.$$

На рисунке 4 изображены графики взаимно обратных функций f и g.

Пример 6. Функция f, заданная таблицей

x	А	Б	В	Г	Д
y	3	1	2	5	4

определена на множестве первых пяти букв русского алфавита, а множество ее значений естьмножество первых пяти натуральных чи-

[2] *Происхождение названия выяснится дальше: функция обратима, если для нее существует обратная ей функция.*

сел. Обратная функция g задается таблицей

x	1	2	3	4	5
$y = g(x)$	Б	В	А	Д	Г

На рисунке 5 даны графики этих функций.

Дадим точные определения. Пусть f — отображение множества E на множество M. *Если для любого элемента y из множества M существует один-единственный элемент*

$$x = g(y)$$

множества E, для которого

$$f(x) = y,$$

то отображение f является обратимым, а

$$y \xrightarrow{g} x$$

называется отображением, *обратным* к отображению f.

Таким образом, обратимость отображения f означает, что у него есть обратное отображение g. Отображение, обратное к f, принято обозначать знаком f^{-1}. Например, если

$$f(x) = x^3,$$

то

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Так как слово «функция» есть просто синоним слова «отображение», то тем самым мы определили и смысл выражения «обратная функция». Попробуйте сами повторить сказанное выше, употребляя вместо слова «отображение» слово «функция».

Ясно, что областью определения обратной

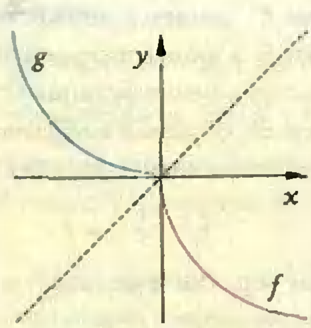


Рисунок 4

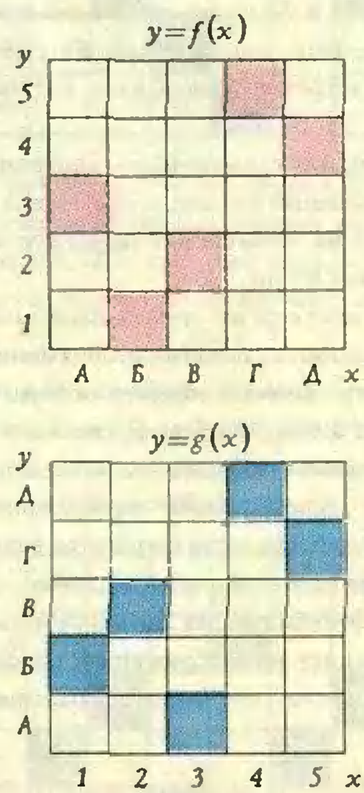


Рисунок 5

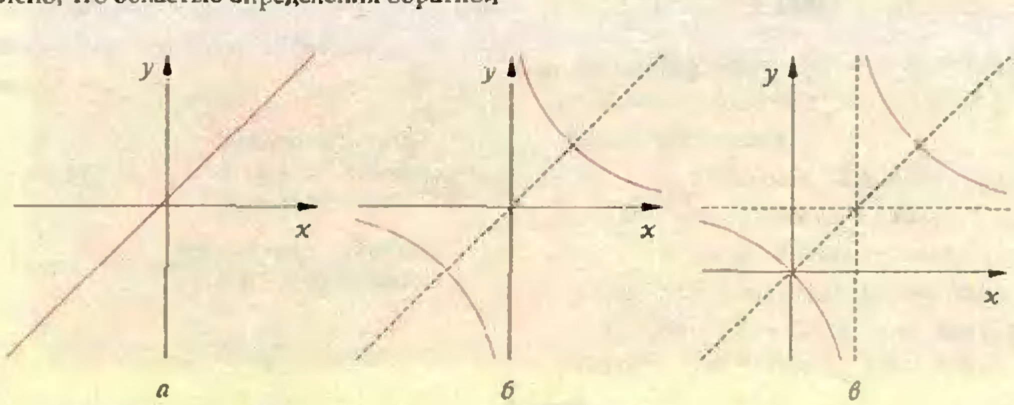


Рисунок 6

функции f^{-1} является множество значений функции f, а множество значений f^{-1} есть область определения функции f.

Функцией, обратной к обратной функции f^{-1}, является исходная функция f:

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f.$$

Таким образом, функции f и f^{-1} всегда *взаимно обратны.*

Пример 7. Существуют функции, которые сами себе обратны. Таковы функции

а) $f(x) = x$, б) $f(x) = \frac{1}{x}$, в) $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

Проверьте! Графики этих функций даны *на рисунке 6. Заметьте, что все эти графики симметричны* относительно биссектрисы первого и третьего квадрантов, т.е. прямой $y = x$.

Изобразим схематически соотношения между разными видами отображения множества A на множество B и множества A в множество B (рис. 7).

Напомним еще раз, что самым общим понятием является понятие отображения A в B. Если при таком отображении образ A совпадает с B, говорят об отображении A на B.

Обратимые отображения называют еще *взаимно однозначными* отображениями. Этот термин вам часто встретится в книгах. Но не принято говорить о «взаимно однозначных функциях». Так как мы считаем слова «функция» и «отображение» синонимами, то вместо слов «взаимно однозначная функция» мы предпочли применять слова «обратимая функция» или, что то же самое, «обратимое отображение».

В последнее время в нашей литературе получила еще распространение французская терминология:

1) отображения A на B называются «сюръективными» или «сюръекциями»;

2) взаимно однозначные отображения A в B называют «инъективными» или «инъекциями»;

3) взаимно однозначные отображения A на B называют «биективными» или «биекциями».

Обратите внимание на то, что при внимательном отношении к употреблению предлогов «в» и «на» такое обилие терминов излишне.

Некоторые замечания

В школе вы привыкли иметь дело только с числовыми функциями, область определения которых состоит из чисел и значения которых являются числами. *Смысл* выражения «числовая функция числового аргумента» не вполне определен. Ведь само понятие числа в школе постепенно обобщается. Мы остановимся на системе всех действительных чисел, с которой школьники знакомятся в девятом классе. Действительные функции действительного аргумента и изучаются по преимуществу в старших классах средней школы. Их графики вы умеете вычерчивать на «числовой плоскости».

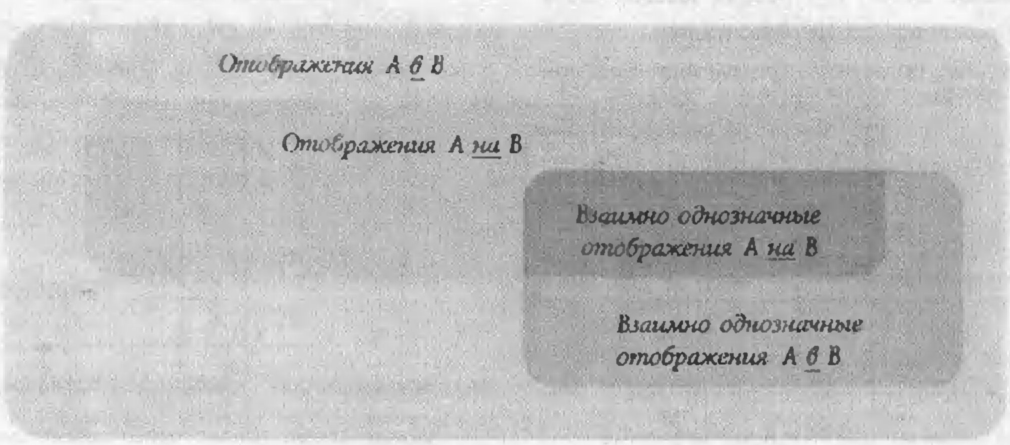


Рисунок 7

В школьных учебниках пишут, что «числовая плоскость» — это такая плоскость, на которой некоторым определенным образом введены координаты. Если верить учебникам буквально, то числовых плоскостей очень много. Проводя на классной доске оси координат, учитель превращает в «числовую плоскость» плоскость этой доски; ученики на страницах своих тетрадок изготовляют все новые и новые «числовые плоскости», иногда по нескольку на одной странице!

В школьном курсе алгебры чаще всего имеют дело с функциями, заданными «аналитически» при помощи формулы. Областью определения такой функции, если не сказано ничего другого, считается множество всех тех значений аргумента, для которых все предписанные формулой операции над числами выполнимы. Будем, например, как это принято в школе, считать знак $\sqrt{}$ знаком «арифметического» квадратного корня. Ясно, что формула

$$y = f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2 \qquad (9)$$

позволяет вычислить по заданному x соответствующее ему значение y лишь при неотрицательном x (иначе квадратный корень «не извлекается»).

При неотрицательном x

$$y = f(x) = x. \qquad (10)$$

Формула (10) проще, чем формула (9), и хотелось бы ее считать формулой, определяющей нашу функцию. Но область определения функции, заданной формулой (10), состоит не из одних неотрицательных чисел x, а из *всех* чисел x. Если мы хотим дать новое определение *той самой* функции, которая определена формулой (1), надо написать

$$y = f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0, \\ \text{не определена} & \text{при } x < 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Подобным же образом функцию

$$g(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

можно записать так:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{при } x \neq 1, \\ \text{не определена} & \text{при } x = 1. \end{cases} \qquad (12)$$

На школьных и вузовских экзаменах требуют полной точности в подобных вопросах.

График функции

Рассмотрим следующий график дежурств:

	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
Петя	■				■		
Коля		■				■	
Саша			■				■
Володя				■			

Мы уже знаем, что это график функции: имя дежурного можно считать функцией дня недели. Так как дней недели семь, а мальчиков четверо, то мы нарисовали

$$7 \times 4 = 28$$

клеточек, но отметили только семь из этих клеточек. Если бы мальчики решили расположить свои имена по алфавиту, то получилась бы следующая табличка:

	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
Володя				■			
Коля		■				■	
Петя	■				■		
Саша			■				■

Выглядит она по-другому, но изображает то же самое распределение дежурств — ту же самую функцию.

В обеих табличках 28 клеточек соответствуют 28-ми возможным парам

(*день недели, мальчик*).

Из этих 28 пар выделены семь пар

(пн, Петя), (вт, Коля), (ср, Саша), (чт, Володя), (пт, Петя), (сб, Коля), (вс, Саша), т.е. все пары, в которых день недели соединен с дежурным на этот день:

(день недели, дежурный на этот день),

или абстрактно: пары вида

$$(x, f(x)).$$

Только выбор этих пар и существен для задания функции.

После этого примера вам, быть может, не покажется неожиданным такое определение: *графиком функции f называется множество всех таких пар*[3]

$$(x,y),$$

что: 1) первый элемент пары x принадлежит области определения функции, 2) второй элемент пары $y = f(x)$.

В нашем примере график функции f:

Γ_f={(пн, Петя), (вт, Коля), (ср, Саша), (чт, Володя), (пт, Петя), (сб, Коля), (вс, Саша)}.

Для функций, заданных таблицей

x	f_1	f_2	f_3	f_4
A	A	B	A	B
B	A	B	B	A

в соответствии с данным определением получим графики

Γ_1={(A, A), (B, A)}, Γ_2={(A, B), (B, B)},

Γ_3={(A, A), (B, B)}, Γ_4={(A, B), (B, A)}.

Ясно, что для функций с конечной областью определения число элементов графика (т.е. число входящих в график пар) равно числу элементов области определения функции. Для функций с бесконечной областью определения все пары

$$(x, f(x))$$

выписать нельзя. Приходится описывать эти пары при помощи их свойств.

Например, для функции

$$y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

график состоит из всевозможных пар чисел вида

$$\left(x, \sqrt{1-x^2}\right),$$

т.е. из всех пар (x,y), для которых выполнены два условия:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{и} \quad y \geq 0.$$

Это определение графика функции можно записать в виде

$$\Gamma_f = \left\{(x,y) \middle| x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\right\}.$$

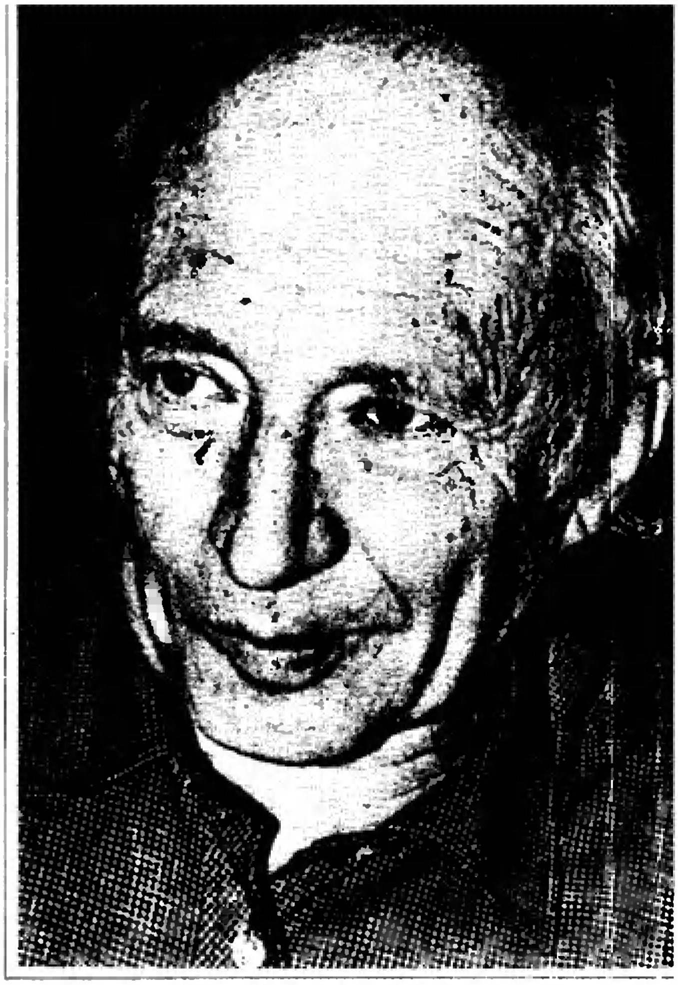
Самое общее определение графика функции f можно записать в виде такой формулы[4]:

$$\Gamma_f = \left\{(x,y) \middle| y^2 = f(x)\right\}.$$

Определив график функции как множество пар, каждая из которых состоит из значения аргумента и значения функции, соответствующего этому значению аргумента, мы освободили понятие графика от всего случайного. В этом абстрактном понимании у каждой функции имеется один-единственный график.

[3] *Всюду в этой статье имеются в виду «упорядоченные пары». Пара (1, 2) отличается от пары (2, 1). Первый и второй элементы пары могут и совпадать: (1, 1) или (2, 2) — тоже пары.*

[4] *Мы воспользуемся стандартным обозначением, принятым в теории множеств. Запись $\{x | A(x)\}$ обозначает множество всех объектов x, удовлетворяющих условию $A(x)$. Например, $\{x | x^2 = 1\}$ — множество всех x, для которых $x^2 = 1$, т.е. множество из двух чисел: $\{+1, -1\}$.*



Поздравляем!

2 сентября 1993 года исполнилось 80 лет *Израилю Моисеевичу Гельфанду*, академику РАН, профессору МГУ, почетному члену многих зарубежных академий. Один из крупнейших современных математиков, определивших развитие функционального анализа, автор многих работ по теоретической и прикладной математике и биологии, на протяжении многих лет — начиная с 30-х годов — *И.М.Гельфанд* много сил вкладывает в воспитание молодых математиков, читает лекции для школьников, участвует в проведении московских олимпиад. В 60-е годы он был одним из основных организаторов и преподавателей 2-й школы — одной из лучших математических школ в Москве. По его замыслу и под его руководством с 1964 года работает Заочная математическая школа при МГУ (сейчас подобная школа организована и при Ратгерском университете в США, где *Израиль Моисеевич* работает в настоящее время). Знаменитый гельфандовский семинар, происходящий на мехмате МГУ по понедельникам уже почти 50 лет, — один из ведущих в мире центров математической жизни. Через него прошли несколько поколений учеников *Израиля Моисеевича*; например, среди его постоянных участников были оба молодых российских математика — А.Гончаров и М.Концевич, получившие награды на Первом европейском математическом конгрессе прошлым летом в Париже, где *И.М.Гельфанду* было поручено председательствовать на заключительном заседании. О том, как нестандартно начинался путь *Израиля Моисеевича* в математику, читатели "Кванта" могли узнать из интервью с ним в 1-м номере 1989 года.

Мы желаем *Израилю Моисеевичу* доброго здоровья и надеемся, что его статьи появятся в нашем журнале, а по его книгам будут с увлечением изучать математику новые поколения учеников.

ПОВЕСТЬ О ТОМ, КАК СТОЛКНУЛИСЬ ДВА ШАРА, ИЛИ ЧТО ТАКОЕ МАЛЫЙ ПАРАМЕТР

АЛЕКСАНДР ГРОСБЕРГ

В этой статье мы будем обсуждать столкновение упругих шаров — вполне, казалось бы, классическую школьную задачу. Но цель наша — на этом знакомом примере показать, как рассуждают физики-теоретики, как они делают качественные оценки. В частности, мы познакомимся с очень важным инструментом для оценок, любимой игрушкой теоретиков — малым параметром.

Позвольте начать с примеров. Со времен Коперника все знают, что планеты Солнечной системы обращаются вокруг Солнца по замкнутым траекториям — орбитам. Однако само понятие траектории имеет определенный смысл только в той мере, в какой можно пренебречь размером планеты r по сравнению с характерным расстоянием от планеты до Солнца R. В Солнечной системе отношение r/R действительно весьма мало: от примерно 10^{-4} для Юпитера до $5 \cdot 10^{-7}$ для Плутона. Поэтому представление о планетах-точках полностью оправданно. Однако в других системах обращающихся небесных тел, например двойных звездах, отношение r/R может быть и не мало, и в этом случае недостаточно говорить только о вращении пары тел (звезд) вокруг их общего центра масс, принципиально важное значение приобретают совсем новые явления (типа приливных деформаций тел и соответствующего трения).

Физик напишет, что в Солнечной системе имеет место неравенство $r/R \ll 1$. Значок $\ll$ читается как «гораздо меньше» или «много меньше»; соответственно, $\gg$ означает «много больше». Такие неравенства называют обычно сильными.

Второй пример — совсем простой, он относится к обыкновенной грозе. Известный способ определения расстояния от наблюдателя до очага грозы связан с качественно правильным представлением о том, что молния наблюдается одновременно с грозовым разрядом, а гром слышен с задержкой, пропорциональной искомому расстоянию. Само же это представление основано на неравенстве $c \gg s$, где c —

Графика Сергея Бархина

скорость света, а s — скорость звука в воздухе. Действительно, $c/s \sim 10^6 \gg 1$. (Значок ~ читается в таком контексте «того же порядка» и означает «не намного больше и не намного меньше».)

Наш третий пример снова из астрономии. Известно, что Кеплеру было очень трудно обнаружить факт эллиптической формы планетных орбит, потому что они мало вытянуты, близки к круговым. Это значит, что отношение длинной оси эллипса a к короткой b близко к единице.

Во всех примерах качественная картина явления основана на специфических значениях параметров: r/R мало, c/s велико, a/b близко к единице. Для удобства и единообразия в таких случаях говорят обычно о малых параметрах ε. В наших примерах малые параметры такие: $r/R \ll 1$, $s/c \ll 1$, $a/b - 1 \ll 1$.

Важно понимать, что все упомянутые параметры — безразмерные. Малость численного значения размерной величины характеризует не столько Природу, сколько систему единиц. Например, размер атома в сантиметрах выражается очень маленьким числом 10^{-8}. Но это свидетельствует только о том, что сантиметры — не очень удобная единица для атомной физики[1]; в более подходящих единицах — ангстремах — размер атома изображается числом порядка единицы. В то же время параметры r/R, s/c, a/b и т.п. безразмерны, т.е. их численные значения не зависят от выбранной системы единиц. Поэтому малость безразмерного параметра всегда отражает важное внутреннее свойство изучаемого явления. Больше того, когда физик приступает к изучению какого-нибудь явления или процесса, он обычно начинает с поисков каких-то безразмерных малых параметров, характеризующих систему. Именно это позволяет найти разумные качественные модели изучаемого предмета.

Сказанное, конечно, слишком абстрактно и мало понятно. Нужно разобраться. Прежде всего: что все-таки значит, что $\varepsilon \ll 1$? Наверное, можно сказать, что $10^{-6} \ll 1$. А 1/10? А 1/2? А 2/3? Позвольте оставить пока эти вопросы без ответов, я постараюсь ответить на них чуть позже.

Классическая теория абсолютно упругого удара

Рассмотрим лобовой удар двух одинаковых шаров, скажем бильярдных. Лобовой — это означает, что до и после соударения оба тела движутся вдоль одной и той же прямой. Классическая теория лобового удара известна, я думаю, каждому школьнику, и основана она на представлении об абсолютной упругости. (Сразу скажу, что всякие «абсолютные» и «идеальные» означают обычно, что какой-то параметр не просто мал, а предполагается равным нулю.) Напомню, что абсолютно упругим называют такой удар, в результате которого не меняются внутренние состояния сталкивающихся тел и, соответственно, их внутренние энергии. Тогда наряду с суммарным импульсом тел сохраняется также их суммарная кинетическая энергия. Эти два закона сохранения и позволяют однозначно определить скорости тел после лобового удара по известным значениям скоростей до него. В дальнейшем мы будем рассматривать одинаковые шары, налета-

[1] *Здесь есть вот какой интересный аспект: такие единицы измерения, как метры и сантиметры, появились, разумеется, потому, что они более или менее соразмерны человеческому телу, поэтому малость размера атома в сантиметрах означает на самом деле, что атом гораздо меньше человеческого тела или что человек состоит из большого числа атомов — без чего упорядоченные организованные процессы жизнедеятельности были бы уничтожены флуктуациями. Вот как все в природе удивительно связано!*

ющие друг на друга с одинаковыми скоростями v. Если бы мы могли считать удар абсолютно упругим, то шары просто разлетелись бы с такими же точно скоростями. А как обстоит дело в действительности?

Отклонения от абсолютной упругости

Абсолютно упругий удар — идеал, в реальной жизни идеалы не встречаются. При реальном ударе некоторая часть δW начальной кинетической энергии $W = mv^2$ двух тел переходит в тепло и теряется. Следовательно, упругость удара можно было бы считать абсолютной при $\delta W / W = 0$, а при $\delta W / W \ll 1$ разумно надеяться, что удар можно считать абсолютно упругим приближенно.

Оценить потерю энергии при ударе δW — довольно хлопотное дело. Если теория абсолютно упругого удара была вполне ясна уже Ньютону (хотя в его время еще не сформировались четко понятия энергии и импульса), то более полную теорию удара построил только Генрих Герц (тот самый немецкий физик, который первым наблюдал электромагнитные волны и в честь которого названа единица измерения частоты).

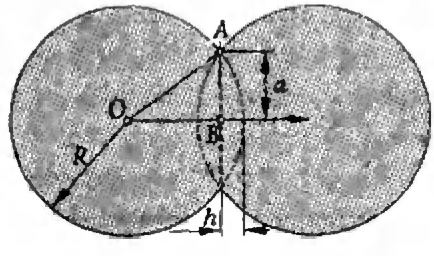
Качественную картину удара представить себе несложно: при столкновении шары сначала приходят в соприкосновение в одной точке, затем, продолжая по инерции сближаться, они все больше деформируют друг друга, соответствующая упругая сила растет и сообщает каждому из шаров растущее по абсолютной величине отрицательное ускорение — и так до остановки; после этого скорости меняют знаки, т.е. шары начинают расходиться, упругие деформации их уменьшаются, и в конце концов тела разлетаются в разные стороны. А какова же причина потерь энергии? Если материал, из которого изготовлены шары, не является абсолютно упругим, то при его деформации происходит выделение тепла, т.е. уменьшается механическая энергия. Но оказывается, это еще не все. Даже если бы шары были сделаны из абсолютно упругого материала, удар все равно не был бы абсолютно упругим. Почему? Каким образом, если не в виде тепла, может еще теряться энергия? Оказывается, в виде колебаний, которые происходят внутри шаров после их разлета. Или, более точно, в виде звуковых волн, которые возбуждаются при ударе и продолжают бегать по каждому шару, отражаясь от его границ, даже когда сам удар закончится.

Разобраться в сложной картине нестационарной (меняющейся) упругой деформации очень трудно. На помощь нам придет то очевидное обстоятельство, что скорости шаров обычно гораздо меньше скорости звука s (имеется в виду, конечно, скорость звука в материале, из которого сделаны шары). Можно предположить, что параметр $\delta W / W$ как-то связан с отношением v / s. В частности, если мы хотим проанализировать предельный случай почти упругого удара с $\delta W / W \ll 1$, то должны считать, что $v / s \ll 1$. Это значит, что начать нужно со случая нулевой скорости, когда шары статически деформируют друг друга.

Статическая деформация упругого шара

Итак, допустим, что два шара одного и того же радиуса R сдавлены друг с другом некоторой постоянной силой F так, что их центры сближены до расстояния $2(R - h)$. Какова сдавливающая сила $F(h)$?

Картина сдавленных друг с другом шаров имеет очевидную плоскость симметрии (см. рисунок). Следовательно, шары контактируют друг с другом по некоторой плоской площадке — участку плоскости симметрии. Далее, система имеет и ось симметрии — прямую, соединяющую центры шаров. Поэтому площадка контакта представляет собой круг. Обозначим его радиус через a.



Поскольку речь идет о слабой деформации (сталкиваясь с маленькой скоростью, тела не деформируются сильно), можно сначала грубо предположить, что вся поверхность каждого из тел (в деформированном состоянии их шарами уже не назовешь), за исключением плоской площадки контакта, остается сферической. Тогда применение теоремы Пифагора к треугольнику OAB дает $(R-h)^2 + a^2 = R^2$, или $a^2 - 2Rh + h^2 = 0$, т.е. для слабого сжатия, когда $h \ll R$ и членом h^2 можно пренебречь по сравнению с $2Rh$, имеем $a = (2Rh)^{1/2}$. На самом деле вблизи площадки контакта поверхности отклоняются от сферических, поэтому наш ответ для a несколько завышенный — расчет показывает, что ровно вдвое. Но поскольку нас все равно интересуют только оценки с точностью до численных коэффициентов, то можно написать:

$$a \sim (Rh)^{1/2}. \qquad (1)$$

Важно уже здесь запомнить, что для $h \ll R$ получается $a \gg h$.

Правдоподобно предположение, что вдали от площадки контакта материал остается недеформированным, а деформация проходит в глубь тела на расстояние $\sim a$ (напоминаю: $\sim$ значит не гораздо больше и не гораздо меньше). Область, где локализованы все деформации, не имеет, конечно, четкой границы, но она осесимметрична и зеркально-симмметрична, имеет площадь поперечного сечения $\sim a^2$ и длину $\sim a$. Следовательно, искомую силу можно оценить по закону Гука: $F = k\Delta l / l$. Абсолютная деформация $\Delta l \sim h$; недеформированный размер $l \sim a$; постоянная упругости пропорциональна поперечному сечению деформированного тела, т.е. $k \sim Ea^2$, где E — модуль упругости материала, из которого сделаны шары. Следовательно,

$$F \sim Ea^2(h/a) \sim Eh^{3/2}R^{1/2}. \qquad (2)$$

Эта формула (вместе с соответствующим численным коэффициентом $\sqrt{2}/3$) была найдена Герцем в 1887 году. Интересная особенность формулы Герца в том, что сила упругости не пропорциональна деформации. С ростом h сила растет как $h^{3/2}$, т.е. быстрее, чем по линейному закону. Это, конечно, вполне понятно — ведь с ростом h деформированию сопротивляется все более широкий участок каждого из шаров.

Зная выражение для силы $F(h)$, легко оценить потенциальную энергию деформации $U(h)$. Она равна в точности работе, которую сила F производит над телами, увеличивая деформацию от нуля до h, т.е.

$$U(h) \sim F(h)h \sim Eh^{5/2}R^{1/2}. \qquad (3)$$

(Умеющие могут проинтегрировать:

$$U(h) = \int_0^h F(x)dx.$$

Квазистатическое представление об ударе

От неподвижных сдавленных тел вернемся к сталкивающимся и рассмотрим момент максимальной деформации, когда тела остановились на мгновение перед тем, как начать разгон в обратную сторону. В этот момент вся кинетическая энергия двух шаров mv^2 превращена в потенциальную энергию деформации. Следовательно, максимальное сближение шаров при ударе можно оценить с помощью формулы (3): так как для одного шара $U(h_{макс}) = mv^2/2$, то

$$h_{макс} \sim v^{4/5} m^{2/5} R^{-1/5} E^{-2/5}. \qquad (4)$$

Эту формулу можно записать в более красивом виде, если заметить, что величина

$$s \sim E^{1/2} \left(m / R^3\right)^{-1/2} \qquad (5)$$

есть скорость звука в материале шаров. Подтвердим это простейшим способом, из соображений размерности. Подобно тому, как частота колебаний груза на пружине $(k/m)^{1/2}$ зависит от жесткости k и массы m, скорость звука s должна зависеть от «жесткости» (модуля упругости) материала E и его плотности ρ. E имеет размерность давления — силы, деленной на площадь, или массы, деленной на длину и квадрат времени; плотность равна массе, деленной на объем. Размерность скорости можно «состряпать» из таких ингредиентов единственным способом: $s \sim (E/\rho)^{1/2}$. Но для шара $\rho = m / \left(4/3 \pi R^3\right) \sim m / R^3$, откуда и получается наша оценка (5). Используя эту оценку, можем теперь написать вместо (4)

$$h_{макс} \sim R (v / s)^{4/5}. \qquad (6)$$

Получившаяся простая формула хороша своим прозрачным физическим смыслом: мы видим, что при медленном столкновении, когда $v / s \ll 1$, т.е. скорости шаров малы по сравнению со скоростью звука, деформация, даже максимальная, остается маленькой во все время столкновения: $h \le h_{макс} \ll R$. Это вполне отвечает упоминавшимся качественным соображениям о том, что удар может быть близок к абсолютно упругому при $v \ll s$.

Легко оценить и время столкновения τ: это время, в течение которого тела остаются в контакте, успевая пройти путь $\sim h_{макс}$. Поскольку средняя скорость на пути от первого соприкосновения до остановки $\sim v$, то получается

$$\tau \sim h_{макс} / v \sim R v^{-1/5} s^{-4/5}. \qquad (7)$$

Формулы (6) и (7), как и (2) и (3), принадлежат Герцу.

Внимательный читатель, я надеюсь, уже давно негодует: длинное вступление про то, что нестационарное деформирование связано со звуковыми волнами — и после этого применить результат *статической* формулы (3) для оценки *динамических* величин $h_{макс}$ и τ?! Куда это годится? Действительно, максимальная деформация $h_{макс}$ достигается за сравнительно короткое время τ. Быстрое деформирование создает в телах звуковые волны, и можно сказать, что эти волны несут каждой точке шара «сообщение» о том, какие деформации и напряжения должны в ней устанавливаться. В упругом теле с малым внутренним трением звуковые волны очень медленно затухают. Поэтому статическое распределение деформаций и напряжений в материале может установиться только после того, как звук успеет много раз обежать всю внутренность шара, отражаясь от поверхности; в частности, такое время должно пройти, чтобы упругая сила, действующая со стороны шара на партнера, приблизилась к своему статическому значению (2). Следовательно, наши оценки имеют шанс быть правильными только при условии $\tau \gg R/s$, где R/s — время, необходимое звуку, чтобы пройти сквозь шар один раз. Вспоминая нашу оценку (7) величины τ, получаем из нее же условие ее применимости: $v^{-1/5} s^{1/5} \gg 1$, или $v / s \ll 1$.

Нет ли здесь логического порока — из самой формулы выводить условия ее применимости? Нет, здесь все в порядке: если $v / s \ll 1$, то заложенное в основу формулы (7) предположение о многократном обегании шара звуком ей не противоречит и, значит, формула применима.

Вот теперь у нас все стало хорошо и красиво! Условие $v / s \ll 1$ — единственное условие применимости всех наших построений: оно гарантирует малость деформаций $h \ll R$ в течение всего процесса, и оно же обеспечивает применимость квазистатического подхода, т.е. использования статических формул для упругой силы или потенциальной энергии.

Какой же параметр можно считать малым?

Мы можем теперь вернуться ненадолго к общим рассуждениям и вспомнить оставленный без ответа вопрос — насколько мал должен быть параметр, чтобы считаться малым? Ответ кроется в том, какие изменения случаются при изменении величины нашего претендента на роль малого параметра. Посмотрите: чем меньше параметр v/s, тем меньше погрешность, связанная с отбрасыванием члена h^2 по сравнению с $2Rh$ при выводе формулы (1), и вместе с тем точнее применимость закона Гука для вывода формулы (2), и вместе с тем меньше отличие статической силы (2) или потенциальной энергии (3) от соответствующих нестационарных величин. Значит, чем меньшее значение имеет величина v/s, т.е. чем медленнее летят шары до удара или чем жестче их материал (больше скорость звука), тем точнее вся наша (правильнее сказать, не наша, а Герца) теория, т.е. тем меньше погрешность формул (6) и (7).

Итак, если вы в книге по физике или в физическом журнале встретите утверждения типа «данная формула (например, (6)) применима при условии $\varepsilon \ll 1$» (в нашем примере $\varepsilon = v/s$) или «формула справедлива в предельном случае малого ε», то понимать это надо так: погрешность данной формулы уменьшается с уменьшением ε и может стать сколь угодно малой, если взять достаточно маленькое значение ε. А уж какая вас устроит погрешность и, соответственно, до каких пор вы можете считать свой параметр малым — это зависит целиком и полностью от ваших целей. Одно дело, если вас интересует порядок величины — тогда формула (6) вам подойдет и при $\varepsilon = 2/3$; но совсем иначе может обернуться дело, если вы инженер и конструируете какой-нибудь очень точный механизм...

Из сказанного, между прочим, вытекает, что если вы работаете с какой-либо формулой или теорией и исследуете ее применимость в некотором предельном случае, то очень полезно как-то, хотя бы грубо, оценить поправки к вашей теории. Если без знания поправок к формулам (6) и (7) мы можем сказать только, что эти формулы станут очень точными для достаточно медленного столкновения, то поправки позволили бы нам придать этому утверждению количественный характер. А в нашем случае поправки связаны как раз с оценкой потери энергии δW. К сожалению, оценка потери энергии требует более глубоких знаний о звуковых волнах и поэтому выходит за рамки нашего «школьного» рассмотрения.

Заключение

После рассмотрения конкретного примера мне бы хотелось вернуться к общему разговору о малых параметрах.

Здесь мы должны извлечь такие уроки. Во-первых, если бы мы стали искать поправки к теории Герца, т.е. оценивать потерю энергии δW, то это потребовало бы выхода в совсем новую область физики — колебания вместо простой статической упругости. Во-вторых, если бы речь зашла о противоположном предельном случае $v/s \gg 1$ (или $s/v \ll 1$), то это была бы уж вовсе другая наука — разрушение, хрупкость, пластичность и пр.[2] И вот эти то выводы совершенно общие.

Между прочим, надо иметь в виду, что малостью тех или иных параметров определяются не только качественные представления об отдельных явлениях, но и условия применимости великих физических теорий. Так, ньютонова механика применима при условии $v / c \ll 1$, где v и c — соответственно характерная скорость изучаемых тел и скорость света; условие применимости геометрической оптики имеет вид $\lambda / a \ll 1$, где λ — длина волны света, а a — характерный размер тел (линз, диафрагм и пр.). Примеры можно привести еще, но всюду смысл знаков $\ll$ будет тот же самый: чем меньше v / c, тем меньше погрешности формул механики Ньютона, чем меньше λ / a, тем точнее представления геометрической оптики. И всякие поправки всегда приводят нас в новый физический мир: поправки по параметру v / c — в мир релятивистской механики Эйнштейна с парадоксами близнецов и прочими, которые потому и парадоксальны, что отсутствуют при $v / c \to 0$; поправки по λ / a — путь в мир волновой оптики с явлениями интерференции и дифракции, которых при $\lambda / a \to 0$ нет и в помине, и т.д.

Наконец, последнее. Параметры, о которых говорилось, могут меняться. При одном ударе v / s достаточно мало, а ударим посильнее — будет велико; если электрон движется в проводе настольной лампы, то для него v / c очень мало, а если в ускорителе — то вовсе не мало, и т.д. Но есть и такие параметры, которые от случая к случаю не меняются — мировые постоянные. Притом безразмерные мировые постоянные! Примеры? Пожалуйста: отношение длины окружности к диаметру — всем известное число π; так называемая постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2 / hc$, где e — заряд электрона, h — постоянная Планка и c — скорость света; наконец, отношение энергии гравитационного притяжения двух протонов к энергии их электростатического отталкивания $\delta = Gm^2 / e^2$, где m — масса протона и G — гравитационная постоянная. Число π порядка единицы (не мало и не велико), $\alpha = 1 / 137$—довольно мало, $\delta \sim 10^{-42}$ — чрезвычайно мало. Такие параметры, как α и δ, играют очень важную роль в нашем понимании Природы. Мы ничего не знаем о том, как выглядел бы мир, в котором, например, число δ было бы порядка единицы; ведь чтобы это узнать, надо выйти к какой-то другой физике, а откуда нам знать, какова она? И мы ничего не знаем о том, почему в нашем мире δ так мало.

Построение безразмерных малых параметров — необходимый шаг в решении почти любой сколько-нибудь трудной задачи в любой области физики. Именно этот шаг позволяет плодотворно согласовать физическую интуицию и математическую технику, в единстве которых кроется львиная доля привлекательности теоретической физики. А вообще-то, возможно, самый маленький параметр в мире — это отношение числа решенных задач к числу нерешенных и непонятных...

[2] *Говорят, одна из работ по советскому проекту атомной бомбы состояла в том, что в каком-то сарае поставили две пушки дулами навстречу и, стреляя одновременно, снимали скоростной кинокамерой, как металлические болванки при сверхзвуковом ударе слипались будто пластилиновые; это была, конечно, модель столкновения двух урановых половинок бомбовой начинки.*

Джордж Гамов и Большой Взрыв

Знаменитый физик Джордж Гамов (1904 – 1968) был родом из России. В возрасте 28 лет он стал членом Советской Академии наук. Раннее академическое признание принесли ему пионерские работы по ядерной физике, которая делала тогда свои первые шаги. А 15 лет спустя он оказался среди теоретиков, работавших в Лос-Аламосе над американской водородной бомбой. Как же русский физик очутился в Америке?

А Р Т У Р Ч Е Р Н И Н

Первый успех

Джордж (Георгий Антонович) Гамов родился в прекрасном южном городе Одессе на берегу Черного моря. Его родители были преподавателями средней школы — гимназии, как это тогда называлось в России. Учился сначала в родном городе, а в 1923 году уехал в Ленинград. Среди его учителей в университете был профессор-математик Александр Фридман, «отец» теории расширяющейся Вселенной. Гамов мечтал специализироваться по космологии под его руководством, но неожиданная смерть Фридмана в 1925 году (в возрасте 37 лет) заставила Гамова изменить область научных занятий. Он взялся за изучение квантовой механики, новейшей в те годы физической науки, которой, как мы теперь знаем, предстояло огромное будущее.

Гамов первым сделал попытку применить идеи квантовой физики к атомному ядру — и сразу же добился блестящего успеха. Ему удалось объяснить загадочное явление альфа-распада атомных ядер. Гамов смог разгадать природу этого явления как одного из проявлений эффекта квантового туннелирования, «просачивания» элементарных частиц сквозь потенциальный барьер. В случае альфа-распада барьер создают ядерные силы, и альфа-частицы (которые представляют собой ядра гелия и состоят из двух протонов и двух нейтронов) способны преодолевать его, даже если их энергия ниже высоты барьера в энергетическом пространстве.

Эта идея пришла к Гамову в 1928 году, когда в качестве аспиранта Ленинградского университета он был на научной стажировке в Германии, в Гёттингенском университете, и сразу же получила признание самых авторитетных физиков — Бора в Копенгагене и Резерфорда в Кембридже, у которых Гамов побывал после Гёттингена. Впрочем, идея эта, как видно, носилась тогда в воздухе, и независимо от Гамова и почти одновременно с ним ее высказали англичанин Р.Герни и американец Э.Кондон.

Побег

В 1929 году молодой физик вернулся в Ленинград из своей поездки по научным центрам Европы. Успех за рубежом, восторженный прием дома... Но близкие друзья спрашивали, чего ради он, собственно, вернулся. Ему объяснили, а вскоре он и сам это сообразил, что за два года, пока он путешествовал, ситуация в стране сильно изменилась. Надвигался Большой Террор.

Графика Юрия Ващенко

Гамова вновь приглашали на Запад — на конгресс по ядерной физике в Рим, на летнюю школу Мичиганского университета в США, в Копенгаген, где его ждал Бор. Но власти в Москве сворачивали научные контакты с Западом, и Гамову было отказано в этих поездках. Он же не представлял себе жизни и научной работы без свободы путешествовать по свету, без постоянных дискуссий с зарубежными коллегами. А дома атмосфера сгущалась на глазах. И тогда он решил во что бы то ни стало уехать из страны.

В 1933 году Гамова неожиданно включают в состав официальной советской делегации, которую направляют на научный Сольвеевский конгресс в Брюссель. С большим трудом он добивается разрешения взять с собой жену. В октябре они уехали из России и уже больше не вернулись назад.

Бомба

Вырвавшись, наконец, на свободу, они были счастливы. Их не очень огорчило, что Сольвеевский конгресс, как оказалось, не стал большим событием в науке. Кажется, Гамов больше жалел, что не смог доставить светского удовольствия своей красавице-жене — повести ее на обед к королю Альберту. В полученном им приглашении значилось «в белом галстуке», а у него не было никакого, как не было и необходимого черного пиджака. Он пытался было взять костюм напрокат, но во всем Брюсселе не нашлось нужного размера — все были малы (190,5 сантиметров росту!).

После года работы в научных институтах Европы, где его опекали Мария Кюри и Поль Ланжевен, Гамов получает приглашение в США, в Университет Джорджа Вашингтона. В 1934 году он занимает должность профессора, заведующего кафедрой физики в этом университете. Жизнерадостность, неистощимая доброжелательность, неисчерпаемый запас шуток и анекдотов, а главное огромная любовь к физике, обилие самых неожиданных и оригинальных идей в науке привлекали к нему новых и старых друзей, коллег, учеников. Друзья в США звали его Джио — по первым буквам его имени в английском написании. С ним было легко и приятно работать и известным ученым, и начинающим физикам. Среди соавторов его статей — нобелевские лауреаты Л.Ландау в России, Х.Бете, Ф.Блох, М.Дельбрюк, С.Чандрасекар на Западе.

Одним из его ближайших друзей и коллег был Эдвард Теллер, которому вскоре предстояло стать «отцом» американской водородной бомбы. Когда Гамов приступал к работе в Университете Джорджа Вашингтона, он поставил два условия: ежегодно собирать в Вашингтоне конференции по теоретической физике и пригласить на постоянную работу на его кафедру еще одного теоретика, с которым он мог бы вместе работать на новом месте. Теллер, 27-летний венгерский физик, скитавшийся по Европе в поисках достойного места работы и уже известный коллегам как хороший ученый и лектор,был тем товарищем по работе, которого Гамов в 1935 году пригласил на свою кафедру. До этого научные интересы Теллера лежали преимущественно в области молекулярной физики. Сотрудничество с Гамовым в Вашингтоне привело к тому, что они сместились в сторону физики атомного ядра. В результате, как сказано в одной недавно опубликованной научной биографии Теллера, он ступил на тропу, которая вела к применению ядерной энергии для целей войны и мира. Гамов шутил, что его главным вкладом в разработку американской водородной бомбы было приглашение в США Теллера.

В 1937 году Гамов и Теллер опубликовали первую совместную работу по теории термоядерных реакций, сразу вызвавшую в научном сообществе значительный интерес. Она была в центре внимания физиков и весной 1938 года на очередной гамовской конференции по теоретической физике в Вашингтоне. В этой работе Гамов и Теллер впервые пришли к заключению, что именно водород, легчайший из элементов, является самым многообещающим материалом для термоядерной реакции. Хотя в работе имелись в виду главным образом реакции, протекающие в недрах Солнца и звезд, это был важнейший шаг к водородной бомбе.

Когда началась война, Гамов был привлечен к исследовательским работам по военной тематике в одном из научных учреждений Военно-морского флота США в Вашингтоне. Среди его служебных обязанностей были регулярные встречи с Эйнштейном. Великий физик был приглашен на работу в качестве научного консультанта того же ведомства, и Гамов должен был обсуждать с ним различные предложения военно-технического характера, поступавшие от промышленных фирм и отдельных лиц. К работе над американской атомной бомбой Гамов не был допущен — вероятно, из-за русского происхождения. Но он все же стал участником испытания атомной бомбы на Бикини — Гамов изучал воздействие взрывной ударной волны на военные корабли, служившие испытательной мишенью.

В июле 1948 года Гамов получает приглашение директора Лос-Аламосской научной лаборатории включиться в работу над проектом водородной бомбы. Работал Гамов всегда легко и азартно, играючи; в этом стиле протекала и его деятельность в Лос-Аламосе. Теллер и другие коллеги-теоретики исключительно высоко ценили выдвигавшиеся Гамовым идеи. Пусть они не каждый раз «срабатывали», но всегда были стимулирующими. Между прочим, Теллер еще в 1938 году называл работу над теорией ядерных реакций «гамовскими играми».

В 50 — 60-е годы Гамов немало работал над проблемами мирного использования управляемых термоядерных реакций. Думать об управляемом реакторе он начинал еще в России — в 1932 году ему было обещано, что для целей ядерного эксперимента в его распоряжении раз в неделю на несколько минут будет весь запас электроэнергии Московского промышленного района.

Широкому читателю Гамов больше всего известен как автор прекрасных научно-популярных книг. Он написал их добрых два десятка, и каждая была настоящим бестселлером. Когда у него спрашивали, как ему удается так удачно писать, он отвечал, что это секрет, большой секрет, такой секрет, что он и сам его не знает. У Гамова был счастливый талант видеть самое главное, принципиальное в сложных физических явлениях и легко отсеивать внешние, второстепенные детали. Так он понимал науку для себя, так он писал о ней для читателей-непрофессионалов. И делал он это к тому же непринужденно и весело. «Солнце очень большое, оно гораздо больше, чем даже слон», — так говорилось, например, в одной из его книг для юных читателей. В 1956 году Гамову была присуждена весьма почетная премия, учрежденная ЮНЕСКО за популяризацию науки.

Гамов писал в своих книгах о том, что он сам делал в науке, о своих открытиях в ядерной физике, космологии, генетике. А это были открытия «нобелевского» ранга. Особенно значительны три его научных достижения — объяснение явления радиоактивности (о чем мы уже рассказали), выдвижение гипотезы «горячей Вселенной» и первый расчет генетического кода. Его ум вольно простирался над обширными областями знания. От элементарных частиц, самых малых тел природы, он легко переходил к самому большому по размеру объекту науки — к Вселенной, рассматриваемой как единое целое.

Большой Взрыв

Современная наука о Вселенной — космология — родилась, можно сказать, на его глазах в стенах его родного университета. В Ленинграде в 1922—24 годах его учитель Александр Фридман построил теорию расширяющейся Вселенной, которая вскоре нашла убедительное подтверждение в астрономических открытиях, сделанных в США Эдвином Хабблом. Гамов вернулся к космологии в конце 40-х годов, будучи уже многоопытным и авторитетным теоретиком. Вместе со своими молодыми учениками Р.Альфером и Р.Херманом (кстати, оба они из семей с российскими корнями) Гамов разработал теорию происхождения химических элементов на ранних стадиях расширения Вселенной. Удивительным «побочным продуктом» этой теории было предсказание космического фона микроволнового излучения (реликтовое излучение). Оно действительно было обнаружено в 1965 году в наблюдениях американских радиоастрономов А.Пензиаса и Р.Вилсона. Позднее, уже после смерти Гамова, это открытие было удостоено Нобелевской премии.

Космология Большого Взрыва — так Гамов назвал свою концепцию. По Гамову, вначале был взрыв. Он произошел одновременно и повсюду во Вселенной, заполнив пространство горячим веществом, из которого через миллиарды лет образовались все наблюдаемые тела Вселенной — Солнце, звезды, галактики, планеты и мы сами. Ключевым — и новым — словом в этой теории было слово «горячее», относящееся к космическому веществу.

Вещество наблюдаемой Вселенной — это почти на три четверти (по массе) водород, около одной четверти приходится на гелий и совсем мало — до двух процентов — на все более тяжелые элементы: углерод, кислород, кальций, кремний, железо и т.д.[1] Таков химический состав Солнца и других «обычных» звезд, составляющих подавляющее большинство тел нашей и других галактик. Как сложился универсальный химический состав космического вещества, как возникло прежде всего «стандартное» соотношение между водородом и гелием, двумя первыми элементами таблицы Менделеева, — вот проблема, в поисках решения которой физики обратились сначала к звездным недрам, где, как уже тогда было известно, интенсивно протекают реакции превращения атомных ядер. Вскоре, однако, выяснилось, что при «обычных» условиях, которые осуществляются в центральных областях звезд, подобных Солнцу, никакие элементы тяжелее гелия не могут образоваться в сколько-нибудь существенных количествах. Таково было заключение, к которому пришли крупнейшие физики тех лет — Чандрасекар, Бете, Вейцзеккер и другие.

А что если элементы образовались не в звездах, а сразу во всей Вселенной на первых этапах космологического расширения? Универсальность химического состава при этом автоматически обеспечивается. Что же касается физических условий, то в ранней Вселенной вещество несомненно было очень плотным, во всяком случае плотнее, чем в недрах звезд. Высокая плотность, гарантируемая космологией Фридмана, — непременное условие эффективного протекания ядерных реакций синтеза элементов нуклеосинтеза. Для этих реакций необходима также и высокая температура вещества. Потому-то Гамов и выдвигает предложение о том, что вещество ранней Вселенной было не только плотным, но и очень горячим. В этом все дело: ранняя Вселенная была, по его идее, тем «котлом», в котором при известной плотности и гигантской температуре произошел синтез всех химических элементов.

Следует сказать, что трактовка ранней Вселенной в духе общих законов термодинамики и ядерной физики была тогда для большинства физиков и астрономов немалой неожиданностью. Поиск в гипотетических космологических теориях ответа на конкретные вопросы о реальном составе космического вещества представлялся дерзкой и рискованной затеей. Впрочем, для физика и человека такого ранга, как Гамов, общие умонастроения значили, конечно, не слишком много.

Гамов выделял в своей космологической теории два главных аспекта: синтез элементов и космическое излучение. Они тес-

[1] *В 40—50-е годы считалось, что водород и гелий присутствуют примерно в равных количествах.*

но связаны: синтез элементов возможен, как уже говорилось, лишь при высокой температуре, но в разогретом веществе, согласно общим законам термодинамики, всегда должно иметься и излучение, находящееся с ним в тепловом равновесии. После эпохи нуклеосинтеза, которая длилась всего несколько минут, излучение никуда не исчезает и продолжает движение вместе с веществом в ходе общей эволюции расширяющейся Вселенной. Оно должно сохраниться и к настоящей эпохе, только его температура должна быть — из-за значительного расширения — гораздо ниже, чем вначале.

Такова качественная сторона дела. Количественное решение проблемы предполагает объяснение и предсказание конкретных величин — космической распространенности атомных ядер и современной температуры остаточного излучения. Говоря совсем грубо, теоретик должен так «подогнать» в своей расчетной модели температуру к плотности, чтобы в итоге вычислений получился как раз наблюдаемый химический состав вещества. Если это удается, то современная температура излучения вычисляется очень легко, ибо остывание излучения от эпохи нуклеосинтеза до нашей эпохи описывается простым и давно уже известным в физике правилом адиабатического охлаждения.

В целом же теория потребовала трудоемких и весьма громоздких расчетов: надлежало проанализировать и просчитать сложную кинетику термоядерных превращений в нестационарном, расширяющемся веществе с учетом целого ряда обстоятельств и условий, каждое из которых могло быть в принципе существенным или даже решающим для искомого результата. Работа велась в течение почти десяти лет, причем Гамов пользовался консультациями таких экспертов-ядерщиков, как Э.Ферми и его сотрудник А.Туркевич (о последнем Гамов в одной из своих научно-популярных книг говорит как о физике русского происхождения — ему явно приятно это отметить).

Первая публикация, подготовленная Гамовым и Альфером, появилась в печати в 1948 году за тремя именами: Альфер, Бете, Гамов. Это была очередная проделка Гамова: он вписал имя Бете в уже готовый текст с пометкой «in absentia» (которая при дальнейшей обработке в редакции почему-то пропала). Так возникла ставшая знаменитой $\alpha\beta\gamma$-теория. Гамов с одобрением отмечал, что исходная фамилия Альфера (Ильферович) была своевременно, т.е. задолго до этого, изменена должным образом, и советовал Херману (бывшему Герману) для пущей эвфонии переменить свою фамилию, например на Дельтер (и однажды именно так сослался на него в одном из обзоров).

В последовавшей затем серии статей группы Гамова первоначальная теория совершенствовалась и разрабатывалась от года к году с учетом, в частности, критических замечаний, высказывавшихся по ходу дела в ее адрес многими крупными физиками. В дальнейшем процесс космологического нуклеосинтеза заново изучали в более строгой постановке задачи, ставшей возможной благодаря уточнению данных ядерной физики, Я.Б.Зельдович и его сотрудник В.М.Якубов в СССР в 1964—1965 годах, чуть позже американский теоретик Дж.Пиблс. Вместе с тем шло уточнение наблюдательных астрономических данных о химическом составе вещества Вселенной.

В итоге этой большой многолетней коллективной деятельности ученых разных стран, инициированной Гамовым, стало очевидным, что космическая распространенность двух главных элементов — водорода и гелия — действительно может быть объяснена ядерными реакциями в горячем веществе ранней Вселенной. Более тяжелые элементы должны, по-видимому, синтезироваться иным путем, например при вспышках сверхновых звезд. Что же касается фонового излучения, то оно должно иметь в нашу эпоху температуру, весьма близкую к абсолютному нулю

— в пределах от 1 до 10 кельвинов.

О космическом фоновом излучении, этом удивительном космическом феномене, предсказанном Гамовым, стоит сказать еще несколько слов.

В сложных расчетах космологического нуклеосинтеза, о которых мы упоминали, фигурируют температуры вещества и излучения, близкие к миллиарду градусов. Для сравнения напомним, что в недрах Солнца, где тоже происходят термоядерные реакции превращения водорода в гелий, температура составляет 14 миллионов градусов. «Ядерный котел» ранней Вселенной много горячее солнечных недр, так что имеются все основания называть гамовскую космологию «горячей». За 15—18 миллиардов лет, протекших от эпохи образования первичного гелия до современной эпохи, температура излучения упала от миллиарда до нескольких градусов Кельвина. Это уже не очень высокие, а, напротив, очень низкие температуры. Согласно современным наблюдательным данным, температура сегодняшнего космического излучения близка к 3 К, точнее, это 2,73± 0,05 К (эта температура лежит внутри теоретически предсказанного для нее интервала, о котором сказано чуть выше).

Крупнейшим событием во всей науке о природе и вместе с тем триумфом гамовской космологии стало открытие реликтового излучения в 1965 году. Это было самое существенное наблюдательное открытие в космологии со времени обнаружения общего разбегания галактик (1929 г.). Оно коренным образом изменило статус этой науки, общее отношение к трудам Фридмана, к теории Гамова.

В космологии начался настоящий расцвет. Интенсивная работа, в которой участвовали фактически чуть ли все ведущие космологи и астрофизики, а также и молодые активно работающие теоретики и наблюдатели во всем мире, быстро привела к созданию надежной, полностью проверенной и подтвержденной астрономическими наблюдениями глубокой космологической концепции. В ней исходные идеи Гамова обрели полное воплощение и развитие, а его имя по праву заняло в космологии место рядом с именем его учителя Фридмана.

Самая большая удача

Третье из упомянутых выше крупнейших достижений Гамова относится к генетике, которой он заинтересовался в начале 50-х годов. Только что была выяснена структура и функция дезоксирибонуклеиновой кислоты (ДНК), и стало ясно, что генетическая информация записана, закодирована в молекулах нуклеиновых кислот. Гамов быстро освоился с проблемой генетического кода и очень скоро угадал, что все слова «языка жизни» должны состоять из трех букв, тогда как алфавит этого языка содержит четыре буквы. Комбинациями по три буквы из четырех записывается и передается генетическая информация на всех уровнях живого — от простейших микроорганизмов и растений до высших животных и человека. Вскоре точные эксперименты в молекулярной биологии принесли идеям Гамова полное и надежное доказательство. Разгадку «языка жизни» Гамов считал своей самой большой удачей в науке. «Потому что это принесло мне так много удовольствия и радости», — сказал он в 1968 году в своем последнем интервью.

* * *

У этого русского физика был веселый, моцартовский дар, редкий вообще, а в науке редчайший. Истории и судьбе угодно было распорядиться так, что этот прекрасный дар послужил и высоким целям чистой науки, и созданию самого грозного и разрушительного, самого ужасного из всего, когда-либо сделанного человеком.

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 декабря 1993 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5/6 — 93» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1391» или «Ф1398». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

ЗАДАЧИ М1391 — М1400

М1391. а) На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1; A_2, B_2, C_2 — середины отрезков B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке или параллельны.

б) Докажите аналогичное утверждение, если ABC_1, BCA_1, CAB_1 — подобные равнобедренные треугольники (с основаниями AB, BC, CA).

Н.Седракян, С.Ткачев

М1392. На плоскости задан четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = CD = 1$. Положение точек B и C фиксировано, точки же A и D подвергаются следующим преобразованиям (сохраняющим длины отрезков AB, CD и AD). Новое положение точки A получается из старого симметрией относительно прямой BD, затем новое положение точки D получается из старого симметрией относительно прямой AC (где A уже занимает новое положение), затем опять A отражается относительно BD (D уже новое), затем вновь отражается D и так далее. Докажите, что после нескольких отражений положение всех точек совпадает с первоначальным.

М.Концевич

М1393*. В таблице m строк, n столбцов. «Горизонтальным ходом» называется такая перестановка элементов таблицы, при которой каждый элемент остается в той строке, в которой он был и до перестановки; аналогично определяется «вертикальный ход» («строка» в предыдущем определении заменяется на «столбец»). Укажите такое k, что за k ходов (любых) можно получить любую перестановку элементов матрицы, но существует такая перестановка, которую нельзя получить за меньшее число ходов.

А. Анджанс

М1394*. Число ребер многогранника равно 100.

а) Какое наибольшее число ребер может пересечь плоскость, не проходящая через его вершины, если многогранник выпуклый?

б) Докажите, что для невыпуклого многогранника это число может быть больше 96,

в) но не может равняться 100.

А.Анджанс

М1395. Назовем человека малообщительным, если у него менее 10 знакомых. Назовем человека чудаком, если все его знакомые малообщительны. Докажите, что количество чудаков не больше количества малообщительных.
Ф.Назаров

М1396. Докажите, что для любых положительных чисел a_k, b_k $(k=1,2,\ldots,n)$ выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k}{a_k + b_k} \le \frac{AB}{A+B},$$

где $A = a_1 + \ldots + a_n$, $B = b_1 + \ldots + b_n$.
С.Драгомир, Ш.Арсланажич

*М1397**. По контуру каждой грани выпуклого многогранника ползает муравей (таким образом, муравьев столько же, сколько граней), и все они движутся, обходя свою грань по часовой стрелке. Известно, что их скорости в любой момент времени не меньше 1 мм/ч. Докажите, что рано или поздно какие-то два муравья столкнутся.
А.Клячко

М1398. На множестве M натуральных чисел от 1 до 1993 определена операция $*$, которая каждым двум числам a и b из множества M ставит в соответствие некоторое число $a*b$, также принадлежащее M. Известно, что для любых чисел a и b из M выполнено равенство $(a*b)*a=b$. Докажите, что найдется число a такое, что $a*a=a$.
Ф.Назаров

М1399. Какой может быть период суммы двух бесконечных периодических дробей, имеющих периоды: а) 6 и 12; б) 12 и 20?
С.Гашков

*М1400**. Внутри правильного тетраэдра с ребром a летает муха. Какой наименьший замкнутый путь должна пролететь муха, чтобы побывать на всех гранях тетраэдра?
И.Шарыгин

ЗАДАЧИ Ф1398 — Ф1407

Ф1398. Легкий самолет с выключенным мотором может планировать с минимальной горизонтальной скоростью $v = 150$ км/ч под углом $\alpha = 5°$ к горизонту (при попытке уменьшить скорость или угол самолет «сваливается в штопор»). Какую минимальную силу тяги должен развивать движитель самолета для взлета с горизонтальной плоскости? Считайте, что скорость самолета во всех случаях направлена вдоль фюзеляжа. Масса самолета $m = 2000$ кг.
А.Андрианов

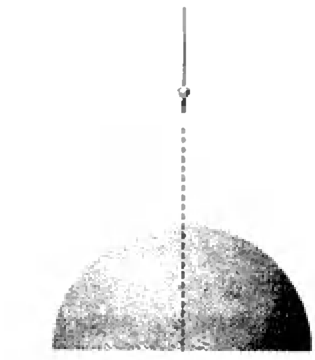


Рисунок 1

Ф1399. Палочка длиной $l = 1$ м с насаженной на нее бусинкой находится на расстоянии $r = 100000$ км от Земли. Бусинка вначале расположена на расстоянии $b = 1$ см от того конца палочки, который ближе к Земле (рис. 1). Систему освобождают. Считая трение пренебрежимо малым, найдите время, через которое бусинка соскользнет с палочки. Какое расстояние за это время пролетит палочка? Радиус Земли $R = 6400$ км.
О.Шведов

Ф1400. Сосуд объемом $V = 10$ л с площадью поперечного сечения $S = 0{,}01$ м^2 разделен пополам тяжелым поршнем массой $M = 1$ кг, который может двигаться без трения. В каждой половине сосуда содержится $m = 5$ г воды, а воздух откачан. Температура сосуда и его содержимого поддерживается равной $T = 350$ К. Поршень сдвигают от середины на расстояние $d = 1$ см и отпускают. Как будет двигаться поршень? Как зависит характер движения поршня от температуры сосуда?
Д.Островский

Ф1401. В сосуде под поршнем находится некоторое количество азота. Медленно отодвигая поршень, плавно уменьшим давление газа. Какова молярная теплоемкость газа на малом участке процесса, если при увеличении объема на 1% давление уменьшилось на 0,5%?
З.Рафаилов

Ф1402. Газовая смесь состоит из равного числа молей гелия, азота и углекислого газа. Найдите показатель адиабаты для такого газа.
О.Шпырко

Ф1403. Между двумя тяжелыми поршнями в длинной горизонтальной трубе находится ν молей идеального газа. Система вначале пребывает в равновесии. Один из поршней начинают двигать по направлению к другому с постоянной скоростью v. При какой максимальной величине этой скорости расстояние между поршнями в процессе движения будет изменяться не более чем на 1%? Температура газа остается равной T_0, масса второго поршня M.
О.Шведов

Рисунок 2

Ф1404. Два проводящих шарика радиусом r каждый соединены тонкой проволочкой длиной l. Шарики расположены на расстоянии R от точечного заряда Q, как показано на рисунке 2. С какой силой заряд действует на «гантельку»? Полный заряд системы шариков равен нулю. Считайте, что $R \gg l \gg r$.

Ф1405. В наличии имеется три резистора, сопротивления которых составляют 1,2 и 3 Ом. Каждый из них может рассеивать мощность не более 1 Вт. Как их нужно соединить и к какому напряжению подключить, чтобы получить нагреватель с максимальной суммарной мощностью?

Р.Александров

Ф1406. Известно, что максимальную мощность источник отдает при условии, что сопротивление нагрузки равно внутреннему сопротивлению источника. Генератор синусоидального напряжения имеет внутреннее сопротивление r, частота генератора ω, сопротивление нагрузки R, причем $R \gg r$. Обычно в таких случаях применяют согласующий трансформатор, однако в нашем случае для согласования можно использовать простую схему, содержащую катушку и конденсатор. Предложите такую схему и рассчитайте величины L и C, при которых мощность, выделяющаяся в виде тепла в нагрузке, будет максимальной.

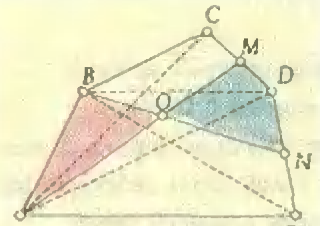
А.Зильберман

Ф1407. Световод в форме усеченного конуса сделан из стекла, его боковая поверхность посеребрена (для хорошего отражения лучей, падающих изнутри). Плоскости оснований конуса перпендикулярны его оси, их диаметры D и d, высота конуса H ($H \gg D > d$). На большее основание падает световой пучок, параллельный оси. Все ли падающие лучи после многократных отражений выйдут через плоскость меньшего основания?

С.Панков

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ М1366–М1380

М1366. Точки M и N — середины сторон CD и DE пятиугольника $ABCDE$, в котором $BC \parallel AD$ и $BD \parallel AE$. Докажите, что площади четырехугольника $MDNO$ и треугольника ABO равны (O — точка пересечения отрезков BN и AM).



Заметим прежде всего, что

$S_{ABD} = S_{BDE}$

(см. рисунок), так как $AE \parallel BD$. Поэтому

$S_{ABCD} = S_{BCDE}$.

Кроме того,

$S_{ABC} = S_{BCD}$ ($BC \parallel AD$!).

Поэтому

$S_{ACD} = S_{ABCD} - S_{ABC} = S_{BCDE} - S_{BCD} = S_{DBE}$.

Отсюда следует, что

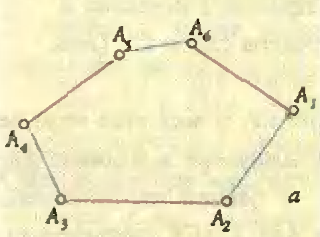
$S_{AMD} = S_{BNE}$ и $S_{ABCM} = S_{BCDN}$.

Вычитая из последнего равенства S_{BCMO}, получаем, что

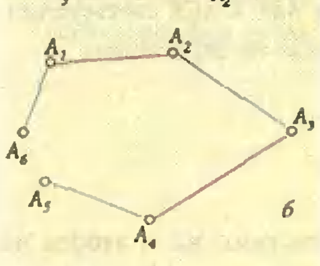
$S_{AOB} = S_{OMDN}$.

Б. Кукушкин

M1367. В некоторой стране между городами существует авиационное сообщение. В стране $2k+1$ авиакомпания, причем первая осуществляет один рейс, вторая — два рейса и т.д. (каждый рейс связывает между собой два города). В стране существует закон, согласно которому из каждого города не может выполняться более одного рейса каждой авиакомпании. Компании решили по-новому поделить между собой все рейсы так, чтобы каждая авиакомпания осуществляла одинаковое число рейсов. Докажите, что это можно сделать, не нарушая закона.



а



б

Мы должны доказать, что без нарушения закона можно осуществить перераспределение рейсов так, чтобы каждая компания совершала ровно $k+1$ рейс. Возьмем авиакомпанию A, совершающую $l<k+1$ рейсов и авиакомпанию B, совершающую $2k-l+2$ рейсов (эти количества рейсов симметричны относительно числа $k+1$). Города, из которых выполняются рейсы этих компаний, будем изображать точками на плоскости. Два города будем соединять красной дугой, если из них выполняются рейсы компании A, и синей дугой, если из них выполняются рейсы компании B. Полученный граф, ребра которого покрашены двумя цветами, распадается на циклы $A_0 A_1 \ldots A_0$ (см. рисунок, *а*), состоящие из чередующихся красных и синих звеньев, и цепочки, в том числе и цепочки, состоящие из одного звена (см. рисунок, *б*). В каждом цикле числа красных и синих звеньев равны, а среди цепочек могут быть такие, в которых эти числа равны, и такие, где они не равны. Но каждая такая цепочка состоит либо из одного звена, либо из нечетного числа звеньев, причем первое и последнее звенья такой цепочки окрашены одинаково. Поскольку $2k-l+2>l$, такие цепочки заведомо есть. Возьмем любую такую цепочку и перекрасим все ее синие звенья в красный цвет и, наоборот, все красные звенья — в синий цвет. В результате количество красных звеньев увеличится на 1, а количество синих — на 1 уменьшится. Будем продолжать такие перекрашивания, пока количества синих и красных звеньев не станут равными. Ясно, что мы всегда можем этого добиться.

Б.Кукушкин

M1368. а) На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D. Пусть O, O_1, O_2 — центры окружностей,

Пусть l и m — прямые, проведенные через точку O перпендикулярно AB и AC соответственно. Обозначим через E и F точки пересечения прямых l и m с перпендикулярами к прямой BC, восставленными *описанных около треугольников ABC, ABD и ADC соответственно. Докажите, что точки O, O_1, O_2 и A лежат на одной окружности.*

б) На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D, не являющаяся ее серединой. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников ABD и ADC соответственно. Докажите, что серединный перпендикуляр к медиане AK треугольника ABC делит отрезок O_1O_2 пополам.

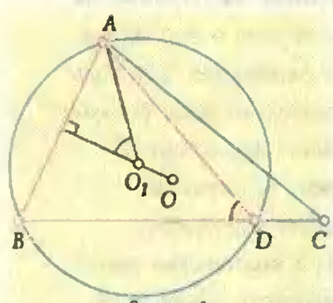


Рисунок 1

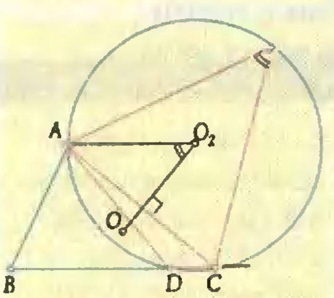


Рисунок 2

из точек B и C соответственно. Очевидно, точки O_1 и O_2 лежат на отрезках OE и OF соответственно.

а) Случай $AD \perp BC$ очевиден. Пусть один из углов ADB и ADC (например, угол ADB) острый. Имеем:
$\angle AO_1O = \pi - \angle ADB$ (см. рисунок 1),
$\angle AO_2O = \pi - \angle ADC$ (см. рисунок 2).
Следовательно, $\angle AO_1O + \angle AO_2O = \pi$.
Отсюда следует, что четырехугольник AO_1OO_2 вписан в окружность.

б) Пусть D — точка на BC такая, что $BD:DC = p:q$, $p + q = 1$. Тогда центры O_1 и O_2 описанных окружностей треугольников ABD и ACD проецируются на BC в середины отрезков BD и DC соответственно. Когда p равномерно увеличивается от 0 до 1 (соответственно $q = 1 - p$ равномерно уменьшается от 1 до 0), точка O_1 равномерно пробегает отрезок EO от E до O, а точка O_2 — отрезок OF от O до F. Поэтому

$$\vec{OO_1} = q\vec{OE}, \quad \vec{OO_2} = p\vec{OF}.$$

Тем самым, середина отрезка O_1O_2 лежит в точке M такой, что

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}\left(q\vec{OE} + p\vec{OF}\right) = \frac{1}{2}q\vec{OE} + \frac{1}{2}p\vec{OF}.$$

Эта точка M пробегает отрезок прямой с концами в точках E_1 и F_1 — серединах отрезков OE и OF (они соответствуют значениям $p = 0$ и $p = 1$).

Докажем, что точки E_1 и F_1, а значит, и весь этот отрезок E_1F_1 лежат на серединном перпендикуляре к медиане AK. Точки E_1 и F_1, как легко видеть, — центры окружностей, описанных около треугольников ABK и ACK соответственно, а значит, оба эти центра лежат на серединном перпендикуляре к медиане AK.

Утверждение задачи доказано.

Н.Васильев, В.Сендеров

М1369. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x} - \dfrac{b}{z} = c - zx, \\ \dfrac{b}{y} - \dfrac{c}{x} = a - xy, \\ \dfrac{c}{z} - \dfrac{a}{y} = b - yz, \end{cases}$$

где a, b, c — положительные параметры.

Умножим первое уравнение системы на c, второе на a, а третье на b (a, b и c по условию отличны от нуля) и сложим полученные уравнения:

$$0 = \left(a^2 + b^2 + c^2\right) - \left(axy + byz + czx\right). \tag{1}$$

Теперь, учитывая, что x, y и z не могут принимать нулевые значения, умножим первое уравнение исходной системы на zx, второе — на xy, третье — на yz и сложим полученные уравнения:

$$0 = \left(axy + byz + czx\right) - \left((xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2\right). \tag{2}$$

Вычитая из (1) (2), получим:

$$\left((xy)^2+(yz)^2+(zx)^2\right)-2(axy+byz+czx)+$$
$$+\left(a^2+b^2+c^2\right)=0,$$

или, после выделения полных квадратов:

$$(xy-a)^2+(yz-b)^2+(zx-c)^2=0,$$

откуда

$$xy=a,\quad yz=b,\quad zx=c. \qquad (3)$$

Из первого уравнения системы (3) $y=\frac{a}{x}$, из последнего — $z=\frac{c}{x}$. Подставим эти соотношения во второе уравнение системы (3), получим:

$$\frac{ac}{x^2}=b,$$
$$x=\pm\sqrt{\frac{ac}{b}}.$$

Тогда

$$y=\pm\sqrt{\frac{ab}{c}},\quad z=\pm\sqrt{\frac{bc}{a}}.$$

Подстановкой в исходные уравнения убеждаемся, что эти значения действительно являются решениями системы.

Замечание. К системе (3) можно прийти, решая исходную систему как линейную относительно a, b, c.

Б.Кукушкин

М1370. Рассматриваются наборы из n различных гирек. Масса каждой гирьки — целое число граммов, не превосходящее 21 г. При каком наименьшем n в любом таком наборе найдутся две пары гирек, уравновешивающие друг друга?

Ответ. При $n=8$.

Нетрудно проверить, что для набора из семи гирек 1 г, 2 г, 3 г, 5 г, 8 г, 13 г и 21 г нельзя выделить две пары гирек, уравновешивающих друг друга.

Пусть набор из n гирек, массы которых — целые числа, не превосходящие k, не содержит двух пар различных гирек с одинаковой суммой, и $k(n)$ — наименьшее возможное значение k в таком наборе.

Очевидную оценку для $k=k(n)$ можно получить так. Все $\frac{n(n-1)}{2}$ пар гирек должны иметь различные суммы масс, не меньшие 3 и не большие $2k-1$, т.е. не более $2k-3$ различных значений. Поэтому $n^2-n\le 2(2k-3)$.

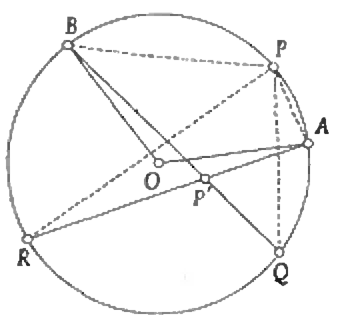
Если $k\le 21$, то получаем, что $n\le 9$ (так как $n^2-n\le$ $\le 2\cdot 39=78$, а при $n\ge 10$ всегда $n^2-n=n(n-1)\ge 90$).

Следующее рассуждение «с разностями» дает более точную оценку, чем рассуждение с «суммами в парах». Разность масс между большей и меньшей гирьками в каждой паре принимает одно из $k-1$ значений — от 1 до $k-1$. Правда, некоторая разность d может встретиться дважды, но только в «пересекающихся» парах: $(c-d;\ c)$ и $(c;\ c+d)$. При этом наименьшая и наибольшая из n гирек не могут быть «центральными» ни в какой прогрессии $c-d$, c, $c+d$, а остальные могут содержаться в центре лишь одной прогрессии: среди гирек $c-d_1$, $c-d_2$, c, $c+d_2$, $c+d_1$ есть две пары с суммой $2c$. Итак, все $n(n-1)/2$ пар гирек могут дать не более $k-1+n-2$ разностей. Поэтому $n^2-n\le 2k-6+2n$, или

$$k=k(n)\ge\frac{n^2-3n}{2}+3. \qquad (*)$$

При $k\le 21$ отсюда следует, что $n\le 7$ (тогда $\left(n^2-3n\right)/2\le 14$, а при $n\ge 8$ будет $\left(n^2-3n\right)/2\ge 0$).
Один из примеров 7 гирек, для которых выполнено условие задачи, можно построить, исходя из такого очевидного утверждения: если к набору из n гирек, удовлетворяющих условию, добавить еще одну гирьку, равную по массе сумме двух наибольших, то новый набор также удовлетворяет условию. Так получается пример 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21.
Заметим, что такой пример — начальный отрезок ряда Фибоначчи — при больших n дает оценку сверху для $k(n)$, сильно отличающуюся от оценки снизу $(*)$: в этой серии примеров масса наибольшей гирьки k растет как геометрическая прогрессия. Было бы интересно построить серию примеров, показывающию, что $k(n)\le cn^2$ (или хотя бы $k(n)=cn^\alpha$ при некотором α).
Н.Васильев

М1371. *На окружности с центром O расположены точки A и B. Точка P находится на меньшей из дуг AB, точки Q и R симметричны точке P относительно прямых OA и OB соответственно, P′ — точка пересечения отрезков AR и BQ. Докажите, что точки P и P′ симметричны относительно прямой AB.*



Углы PAB и BAR опираются на равные дуги BP и BR и поэтому равны. Аналогично $\angle PBA=\angle QBA$ (см. рисунок). Следовательно, равны треугольники APB и $AP'B$, а так как точки P и P' лежат по разные стороны от AB, то они симметричны относительно AB.
В.Произволов, Б.Кукушкин

M1372. *Имеется прибор, позволяющий находить все действительные корни любого кубического многочлена* $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\ a\neq 0$. *Придумайте, как с помощью этого прибора решить систему*

$$\begin{cases} x=P(y), \\ y=P(x). \end{cases}$$

Сумма и разность уравнений исходной системы дают систему

$$\begin{cases} a\left(x^3+y^3\right)+b\left(x^2+y^2\right)+(c-1)(x+y)+2d=0, \\ (x-y)\left(a\left(x^2+xy+y^2\right)+b(x+y)+(c+1)\right)=0. \end{cases}$$

Решения, удовлетворяющие условию $x=y$, находятся из кубического уравнения $P(x)-x=0$. Остальные решения находятся так. Пусть

$x+y=u$, $xy=v$.

Поскольку

$x^2+y^2=u^2-2v,\quad x^3+y^3=u^3-3uv$,

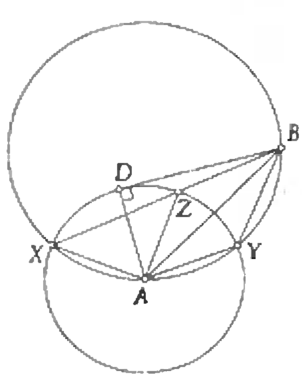
выполнив замену, приходим к системе

$$\begin{cases} a\left(u^3-3uv\right)+b\left(u^2-2v\right)+(c-1)u+2d=0, \\ a\left(u^2-v\right)+bu+(c+1)=0. \end{cases}$$

Если выразить v через u из второго уравнения и подставить в первое, то получится кубическое уравнение. Решив его, найдем все пары (u,v), а по ним — все пары (x,y).

Д.Туляков

M1373. *Дана плоскость, пересекающая сферу с центром O по окружности. На сфере по разные стороны от плоскости взяты точки A и B, причем радиус OA перпендикулярен данной плоскости. Через прямую AB проводится произвольная плоскость. Она пересекает окружность в точках X и Y. Докажите, что произведение* $BX\cdot BY$ *не зависит от выбора такой плоскости.*



Сечением сферы плоскостью, проходящей через AB, является окружность, содержащая точки A, B, X, Y, причем величины $AB=a$, $AX=AY=b$ не зависят от выбора плоскости и $\angle ABX=\angle ABY$ (см. рисунок). Проведем окружность с центром A и радиусом b. Она пересечет больший из отрезков BX, BY, скажем BX, в некоторой точке Z, удовлетворяющей равенству $BZ=BY$ (если $BX=BY$, то $Z=X$). Пусть BD — касательная к этой окружности. Тогда

$BX\cdot BY=BX\cdot BZ=BD^2=AB^2-AD^2=a^2-b^2$

— величина постоянная.

Б.Чиник

M1374. Найдите все натуральные числа k, $k>1$, удовлетворяющие условию: для некоторых натуральных m и n, $m \neq n$, числа k^m+1 и k^n+1 получаются друг из друга перестановкой в обратном порядке цифр десятичной записи этих чисел.

Ответ: $k=3$. Если числа k^m+1 и k^n+1, где $m<n$, удовлетворяют условию задачи, то они имеют одинаковое количество цифр. Следовательно, $k \neq 10$, причем

$$10\left(k^m+1\right)>k^n+1. \qquad (1)$$

Случай $2m<n$ невозможен, поскольку тогда $n \geq 2m+1$ и $k^n+1 \geq k^{2m+1}+1>k^{2m+1}>k^{2m}+k^m=k^m\left(k^m+1\right)$, так что $k^m<10$ и, значит, $k^m+1=k^n+1$, что противоречит неравенству $m<n$.

Следовательно, $2m \geq n$, $m \geq n-m$ и поэтому

$$k^n+1>k^{n-m}k^m>\left(k^{n-m}-1\right)\left(k^m+1\right). \qquad (2)$$

Отсюда и из неравенства (1) следует, что $k^{n-m}-1<10$, а так как $k^{n-m} \neq 10$, то

$$k^{n-m}-1<9. \qquad (3)$$

Так как число $\left(k^n+1\right)-\left(k^m+1\right)=\left(k^{n-m}-1\right)k^m$ кратно 9, то из (3) получаем, что km, а значит, и само число k кратно 3.

В случае $k \geq 6$ из (3) получаем, что $n-m=1$ и, следовательно, $k<10$. Из (2) следуют неравенства $k^n+1>(k-1)\left(k^m+1\right) \geq k^m+1$, показывающие, что число $(k-1)\left(k^m+1\right)$ имеет столько же цифр, сколько и число k^m+1. Поскольку $k \geq 6$, последнее возможно только тогда, когда число k^m+1 начинается с цифры 1. Но в таком случае число k^n+1 оканчивается цифрой 1, что невозможно, поскольку $k<10$.

Остается единственная возможность $k=3$, которая реализуется при $m=3$ и $n=4$.

А.Скопенков

M1375. В кинотеатре m рядов по n мест в каждом. Рассеянный кассир продал mn билетов, не следя за тем, чтобы они были проданы на разные места. Оказалось, что зрителей можно рассадить в зале так, чтобы у каждого в билете был правильно указан хотя бы один из номеров — ряда или места.

а) Докажите, что зрителей можно рассадить так, чтобы хотя бы у одного

а) Пусть зрители рассажены так, что у каждого в билете правильно указан хотя бы один из номеров. Припишем произвольному человеку номер 1. Человеку, сидящему на том месте, на которое продан билет первого, припишем номер 2, и так далее: номер k припишем человеку, сидящему на месте $(k-1)$-го. Так как людей в зале конечное число, то в конце концов появится человек, пронумерованный дважды. Возьмем первого такого человека. Пусть он получил номера k_1 и k_2 $(k_1<k_2)$. Тогда все люди с номерами от k_1 до k_2-1 различны. Пересадим их следующим образом: человека с номером k_1 посадим на место, где сидит (k_1+1)-й, (k_1+1)-го — на место, где сидит (k_1+2)-й, и так далее. Человека с номером k_2-1 посадим туда, где сидит k_1-й. Всех остальных зрителей оставим на их прежних местах. Тогда все пересаженные (их $k_2-k_1 \geq 1$) будут сидеть на своих

из них были правильно указаны оба номера, а для остальных выполнялось прежнее условие.

б) Какое наибольшее количество зрителей можно заведомо посадить на свои места с сохранением условия для остальных?

местах (т.е. на местах, указанных в их билетах), а у остальных в билетах по-прежнему будет правильно указан хотя бы один из номеров.

б) Ответ: 1. Согласно пункту а), хотя бы одного из зрителей можно посадить на его место в соответствии с требованием задачи. Рассмотрим ситуацию, когда все билеты проданы на место № 1, причем $m+n-1$ из них — в первый ряд и по $n-1$ билетов — в каждый из оставшихся рядов. Тогда, чтобы выполнялось условие задачи, обладатели билетов в первый ряд должны занять целиком весь первый ряд и все первые места в других рядах. Обладателям билетов в k-й ряд при $k>1$ придется сесть на оставшиеся места своего ряда. Тогда и номер ряда, и номер места будут правильно указаны только у зрителя, занимающего первое место в первом ряду.

Е.Малинникова

М1376. В пространстве даны 9 точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Все эти точки попарно соединены отрезками. Отрезок может быть закрашен в синий или красный цвет, или остаться незакрашенным. Найдите наименьшее значение n такое, что при любом закрашивании любых n отрезков найдется треугольник, все стороны которого будут закрашены в один цвет.

Полный граф с девятью вершинами имеет $C_9^2=36$ ребер. Пусть какие-то 33 его ребра закрашены. Выберем 3 вершины так, чтобы каждое из трех незакрашенных ребер имело хотя бы одну из выбранных вершин в качестве своей вершины. Все оставшиеся 6 вершин попарно соединены только закрашенными ребрами (т.е. образуют полный двухцветный граф). В этом графе имеется хотя бы один одноцветный треугольник[1], откуда следует, что $n \le 33$.

С другой стороны, можно привести пример графа, имеющего 9 вершин и 32 ребра двух цветов (незакрашенные ребра не проводим вовсе). Построим такой граф, используя следующий прием: пусть имеется двухцветный граф G без одноцветных треугольников. Выберем в нем какую-нибудь вершину A и добавим новую вершину B (рис. 1). Соединим вершину B со всеми вершинами

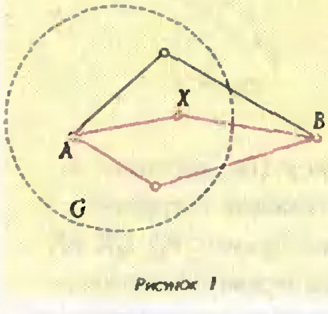


Рисунок 1

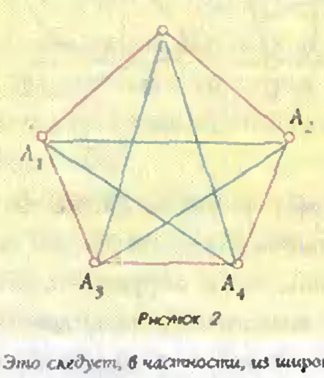


Рисунок 2

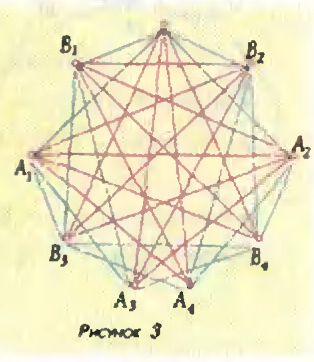


Рисунок 3

[1] Это следует, в частности, из широко известной задачи о том, что среди любых 6 людей найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

графа G, кроме A. При этом любое новое ребро BX окрасим в тот же цвет, в который окрашено ребро AX. Очевидно, что одноцветные треугольники при таком расширении графа не появятся.

Теперь возьмем полный двухцветный граф на 5 вершинах, не содержащий одноцветных треугольников (рис. 2). Применяя описанный прием, будем последовательно его расширять, выбирая вершины A_1, A_2, A_3, A_4 и добавляя вершины B_1, B_2, B_3, B_4 (рис. 3).

Этот пример показывает, что $n>32$.

Полученные неравенства $n \le 33$, $n>32$ дают ответ: $n=33$.

Б.Кукушкин

M1377. *На плоскости даны окружность C, прямая l, касающаяся C, и точка M на l. Найдите множество всех точек P, удовлетворяющих следующему условию: существуют две точки Q, R, лежащие на l, такие, что M — середина QR, и окружность C вписана в треугольник PQR.*

Пусть A — точка касания окружности C с прямой l, O — центр окружности C, AB — ее диаметр, P — точка искомого множества (рис. 1). Рассмотрим гомотетию с центром в точке P, переводящую вписанную в треугольник PQR окружность C во вневписанную окружность треугольника PQR.

Пусть B_1 — образ точки B. Как известно, $QB_1=AR$ (эти отрезки легко выражаются через стороны треугольника PQR), а так как M — середина QR, то $B_1M=MA$. Отсюда $B_1B \parallel MO$ и $BP \parallel MO$. Итак, точка P лежит на луче p с вершиной в точке B, параллельном отрезку MO (луч лежит во внешности C).

Обращая рассуждения, убеждаемся, что любая точка P луча p (за исключением его вершины) удовлетворяет условию задачи.

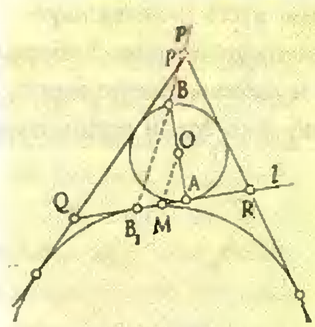


Рисунок 1

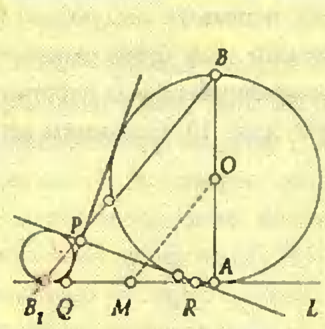


Рисунок 2

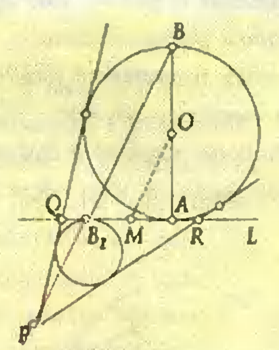


Рисунок 3

Ответ. Искомое множество — луч p (без вершины B).

Замечание. Если условие задачи ослабить и требовать лишь, чтобы окружность C касалась прямых PQ, QR, RP, то аналогично можно доказать, что искомым множеством является луч p (без B) и часть луча, дополнительного к p (рис. 2 и 3).

Б.Кукушкин

M1378. *Пусть Oxyz — прямоугольная система координат в пространстве, S — конечное множество точек пространства и S_x, S_y, S_z — множество ортогональных проекций S на плоскости Oyz, Ozx, Oxy соответственно. Докажите, что*

$$|S|^2 \le |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|.$$

(Через $|A|$ обозначается количество элементов конечного множества A. Ортогональная проекция точки на плоскость есть основание перпендикуляра, проведенного из этой точки на плоскость.)

Обозначим $|S_x| = a$, $|S_y| = b$, $|S_z| = c$. Доказательство проведем индукцией по числу $|S|$:

1) для одноточечного множества S утверждение верно.

2) предположим, что для $|S|<n$ утверждение справедливо. Пусть данное множество S таково, что $|S|=n$. Очевидно, существует плоскость, параллельная одной из координатных плоскостей, не проходящая через точки множества S, которая разбивает S на два непустых подмножества S_1 и S_2 (она перпендикулярна той координатной оси, на которую проекция множества S содержит более одной точки). Тогда

$$|S_1| + |S_2| = n, \quad |S_1| < n, \quad |S_2| < n.$$

Обозначим

$$a_1 = |S_{1,x}|, \quad b_1 = |S_{1,y}|, \quad c_1 = |S_{1,z}|,$$

$$a_2 = |S_{2,x}|, \quad b_1 = |S_{2,y}|, \quad c_1 = |S_{2,z}|.$$

Тогда по предположению индукции

$$|S_1|^2 \le a_1 b_1 c_1, \quad |S_2|^2 \le a_2 b_2 c_2.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что разбивающая S плоскость перпендикулярна оси Oz. Тогда $a_1 + a_2 = a$, $b_1 + b_2 = b$, $c_1 \le c$, $c_2 \le c$. Теперь оценим $|S|^2$:

$$|S|^2 = \left(|S_1| + |S_2|\right)^2 \le$$

$$\le \left(\sqrt{a_1b_1c_1} + \sqrt{a_2b_2c_2}\right)^2 \le \left(\sqrt{a_1b_1} + \sqrt{a_2b_2}\right)^2 c =$$

$$= \left(a_1b_1 + 2\sqrt{a_1b_1a_2b_2} + a_2b_2\right)c \le$$

$$\le \left(a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + a_2b_2\right)c =$$

$$= (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)c = abc,$$

т.е. утверждение доказано при $|S| = n$.

Замечания. 1. Неравенство нельзя заменить на строгое, так как, например, для множества S, расположенного на оси Oz,

$$|S| = n, \quad |S_x| = n, \quad |S_y| = n, \quad |S_z| = 1.$$

2. Справедливы родственные утверждения:

1) На плоскости xOy: пусть l_x, l_y — длины проекций фигуры на координатные оси Ox и Oy, σ — ее площадь. Тогда $\sigma \le l_x l_y$.

2) В пространстве: пусть σ_x, σ_y, σ_z — площади проекций тела на плоскости Oyz, Ozx, Oxy, V — его объем. Тогда

$$V^2 \le \sigma_x \sigma_y \sigma_z.$$

Б.Кукушкин

М1379. Для любого положительного целого числа n через $S(n)$ обозначим наибольшее целое число такое, что при любом целом k, $1 \le k \le S(n)$, число n^2 может быть представлено в виде суммы k квадратов целых положительных чисел.

а) Докажите, что $S(n) \le n^2 - 14$ при любом $n \ge 4$.

б) Найдите целое число n такое, что $S(n) = n^2 - 14$.

в) Докажите, что существует бесконечно много целых чисел n таких, что $S(n) = n^2 - 14$.

а) Допустим, что n^2 может быть представлено в виде суммы $k = n^2 - 13$ квадратов: $n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2$. Вычитая k единиц, получим равенство $13 = \left(a_1^2 - 1\right) + \left(a_2^2 - 1\right) + \ldots + \left(a_k^2 - 1\right)$, которое означает, что число 13 является суммой каких-то чисел вида $x^2 - 1$, т.е. чисел 0, 3, 8, 15, ... (слагаемые могут повторяться). Но это не так. Поэтому $S(n) \le n^2 - 14$.

б) Так как $n \ge 4$, то $n^2 - 14 \ge 2$, т.е. необходимо, чтобы n^2 было представимо в виде суммы двух квадратов. Хорошо известно, что в этом случае n само должно быть суммой двух неравных квадратов. Несколько первых таких n: 5, 10, 13, 17. Значения $n = 5$ и $n = 10$ не годятся, так как 5^2 и 10^2 не представимы в виде суммы трех квадратов.

Докажем, что $S(13) = 13^2 - 14 = 155$. Сначала заметим, что если n^2 представлено в виде суммы k квадратов, хотя бы один из которых четен, то мы можем записать n^2 и в виде суммы $k+3$ квадратов, расщепляя четный квадрат: $(2m)^2 = m^2 + m^2 + m^2 + m^2$. Если таким образом последовательно расщеплять четные квадраты в равенстве $13^2 = 8^2 + 8^2 + 4^2 + 4^2 + 3^2$, то можно получить представления 13^2 в виде суммы k квадратов для $k =$ 5, 8, 11, 14,..., 155 (получается и дальше, но это не нужно).

Аналогично, из равенства $13^2 = 8^2 + 8^2 + 4^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2$ получаем представления для $k =$ 7, 10, 13, 16,...,154, а из равенства $13^2 = 8^2 + 8^2 + 4^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$ — представления для $k =$ 9, 12, 15,..., 153 (именно здесь цепочка не продолжается, так как $k \ne 156$). И, наконец, приведем представления для оставшихся значений k:

$k = 1$: $13^2 = 13^2$; $k = 2$: $13^2 = 12^2 + 5^2$;

$k = 3$: $13^2 = 12^2 + 4^2 + 3^2$;

$k = 4$: $13^2 = 10^2 + 8^2 + 2^2 + 1^2$;

$k = 6$: $13^2 = 12^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2$.

в) Заметим сначала, что любое $m \ge 14$ представимо в виде суммы чисел вида $x^2 - 1$, т.е. чисел 0, 3, 8, 15, ... (слагаемые могут повторяться).

Докажем теперь, что если $N \ge 28$, $N/2 \le k \le N - 14$, то число N можно представить в виде суммы k ненулевых квадратов. Действительно, условие $N = a_1^2 + \ldots + a_k^2$ эквивалентно условию $N - k = \left(a_1^2 - 1\right) + \ldots + \left(a_k^2 - 1\right)$, а неравенства $N/2 \le k \le N - 14$ — неравенствам $14 \le N - k \le k$. Так как $N - k \ge 14$, то $N - k$ можно представить в виде суммы чисел вида $x^2 - 1$, при этом число слагаемых будет не больше $N - k$; а так как $N - k \le k$, то можно, добавляя слагаемые $0 = 1^2 - 1$, сделать число слагаемых в точности равным k.

Докажем, наконец, что если $S(n) = n^2 - 14$ (значит, $n \ge 13$), то $S(2n) = (2n)^2 - 14$. Действительно, если n^2 представимо в виде суммы k квадратов: $n^2 = a_1^2 + \ldots + a_k^2$, то, расщепляя представление $(2n)^2 = (2a_1)^2 + \ldots + (2a_k)^2$, получим представления $(2n)^2$ в виде суммы k, $k+3$, $k+6, \ldots, 4k$ квадратов. Отправляясь таким образом от представлений числа n^2 в виде суммы 1, 2, ..., $S(n)$ квадратов, получаем представление числа $(2n)^2$ в виде суммы $k=1, 2, \ldots, 4S(n)-6=4n2-62$ слагаемых ($4n-61$ таким способом уже не получается).

Теперь «сцепим» полученные две цепочки значений k. Это можно сделать при выполнении условий:

$n \ge 13$; $4n^2 \ge 28$; $4n^2 - 61 \ge 4n^2/2$. Все эти условия выполняются при $n \ge 13$.

Из доказанного следует, что равенство $S(n) = n^2 - 14$ выполняется для $n = 13,\ 2\cdot 13,\ 2^2\cdot 13, \ldots$

Замечание. Равенство $S(n) = n^2 - 14$ выполняется не только при $n = 2^m \cdot 13$. Например, $S(17) = 17^2 - 14$, как это следует из равенств

$$17^2 = 16^2 + 4^2 + 4^2 + 1^2,$$

$$17^2 = 16^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2,$$

$$17^2 = 16^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2;$$

$$17^2 = 15^2 + 8^2,$$

$$17^2 = 12^2 + 9^2 + 8^2,$$

$$17^2 = 12^2 + 9^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2.$$

Приведем значения тех $n \le 20$, для которых $S(n) > 1$:

$S(5) = S(10) = S(20) = 2$, $S(13) = 13^2 - 14$,

$S(17) = 17^2 - 14$.

Б.Кукушкин

М1380. Докажите, что число $\dfrac{5^{125}-1}{5^{25}-1}$ является составным.

Воспользуемся тождеством

$$\frac{x^5 - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4.$$

Преобразуем правую часть этого тождества так:

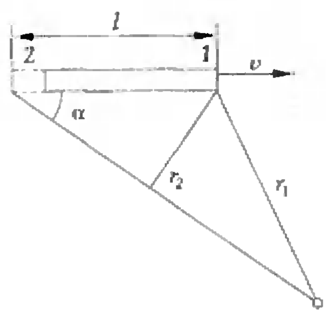
$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \left(x^2 + 3x + 1\right)^2 - 5x(x + 1)^2.$$

При $x = 5^5$ правая часть последнего тождества является разностью квадратов, т.е. раскладывается на 2 множителя, ни один из которых не равен 1.

Б.Кукушкин

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ Ф1378 — Ф1387

Ф1378. Тонкий длинный стержень движется с постоянной скоростью вдоль своей оси. Наблюдатель находится на большом расстоянии от оси. В тот момент, когда луч, направленный на середину стержня, составил угол α с направлением движения, видимая длина стержня оказалась равной его длине в состоянии покоя. С какой скоростью движется стержень?



Пусть l_0 — длина покоящегося стержня. Тогда длина стержня в системе координат, где он движется со скоростью v параллельно своей оси, будет

$$l^* = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

где c — скорость света. А какова видимая длина стержня? Предположим, что в какой-то момент времени наблюдатель видит свет, испущенный концом 1 стержня при $t = t_1$ и концом 2 при $t = t_2$. Тогда, очевидно (см. рисунок),

$$t_1 + r_1/c = t_2 + r_2/c.$$

Видимая длина при этом равна

$$l = l^* + v(t_1 - t_2) = l^* + v(r_2 - r_1)/c.$$

Вспомним теперь, что $r_1,\ r_2 \gg l$, так как наблюдатель находится далеко. Поэтому

$$r_2 - r_1 = l\cos\alpha,$$

и следовательно,

$$l = \frac{l^*}{1 - (v\cos\alpha)/c} = l_0\frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v\cos\alpha)/c}.$$

Полагая $l = l_0$ и выражая отсюда скорость стержня, получаем окончательный ответ:

$$v = c\frac{2\cos\alpha}{1 + \cos^2\alpha}.$$

И.Мартин

Ф1379. Шар массой M падает с высоты H без начальной скорости. В тот момент, когда он оказывается на высоте $H/2$, в него попадает горизонтально летящая пуля массой m, имевшая перед ударом скорость v_0, и застревает в шаре. Изменится ли в этом случае время падения шара? На какую высоту он подпрыгнет после абсолютно упругого удара о пол? Какое количество теплоты выделится в системе?

После того как в шар попала пуля, у него появилась горизонтальная составляющая скорости

$$v_г = m v_0/(m + M).$$

Изменилась также и вертикальная составляющая его скорости. Действительно, до попадания пули шар успел опуститься на $H/2$, и его вертикальная скорость достигла величины

$$\sqrt{2gH/2} = \sqrt{gH}.$$

После того как шар «разгонит» пулю до своей новой вертикальной скорости, их общая вертикальная составляющая скорости составит

$$v_в = M\sqrt{gH}/(m + M).$$

Отсюда ясно, что время падения шара должно увеличиться. Для расчета высоты подъема после упругого удара о пол нужна только вертикальная составляющая скорости. Обозначим эту высоту h, тогда в соответствии с законом сохранения энергии имеем

$$v_в^2/2 + gH/2 = gh,$$

откуда

$h = H\left(1 + M^2/(m+M)^2\right)/2.$

Тепло выделяется только при торможении пули. Найдем его опять же из закона сохранения энергии:

$$Q = m\,v_0^2/2 + Mg\,H/2 - (m+M)\left(v_г^2 + v_в^2\right)/2 =$$
$$= mM\left(v_0^2 + gH\right)/\left(2(m+M)\right).$$

При расчетах мы считали, что время торможения пули очень мало.

Р.Александров

Ф1380. *Возьмем короткую трубочку небольшого диаметра D и выдуем мыльный пузырь радиусом $R_0 \gg D$. Откроем теперь конец трубочки и подождем, пока пузырь сдуется. Оцените время жизни такого пузыря от начала сдувания, если $D = 2$ мм, $R_0 = 2$ см. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 0{,}07$ Н/м.*

Сначала — качественные соображения. Очевидно, что искомое время T тем больше, чем больше радиус R_0 пузыря и плотность ρ газа в нем (если, например, автомат надует пузырь водородом, то он сдуется быстрее воздушного). С другой стороны, это время тем меньше, чем больше коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки σ (могут быть разные сорта мыла) и чем меньше радиус r трубки.

Теперь попробуем сделать количественные оценки. По закону сохранения энергии, в процессе уменьшения пузыря его потенциальная поверхностная энергия переходит в кинетическую энергию выходящего воздуха (кинетической энергией самого пузыря пренебрегаем, правомерность чего подтвердят следующие ниже расчеты). Итак, можно записать

$$d(2\sigma S) = -\frac{dmv^2}{2},$$

где $dm = \rho_в dV$ — масса воздуха, вышедшая из пузыря за малое время dt, $\rho_в$ - плотность воздуха, dV — уменьшение объема пузыря. Наличие в формуле множителя «два» объясняется тем, что пузырь имеет две поверхности, а поверхностная энергия каждой поверхности равна σS (естественно, мы пренебрегаем толщиной мыльной пленки и считаем радиусы этих поверхностей равными). Поскольку, с одной стороны, $dV = 4\pi R^2 dR$, а с другой, $dV = \pi r^2 v dt$, получаем

$$\frac{dR}{dt} = -\sqrt{\frac{\sigma}{2\rho_в}}\frac{r^2}{R^{5/2}}. \qquad (*)$$

А теперь сравним кинетическую энергию пузыря $E_к = M\left(\frac{dR}{dt}\right)^2\Big/2$ с его поверхностной энергией $E_п = 2\sigma S = 8\pi\sigma R^2$, например, в момент времени, когда радиус пузыря уменьшился вдвое. Так как масса оболочки пузыря равна $M = \rho_{\text{воды}} 4\pi R^2 h$, где $\rho_{\text{воды}}$ — плотность воды и h — толщина мыльной пленки, то

$$\frac{E_к}{E_п} = \frac{\rho_{\text{воды}}}{8\rho_в} \frac{r^4 h}{R^5}.$$

При $r = 1$ мм, $R = R_0/2 = 10$ мм, $h = 0{,}01$ мм, $\rho_{\text{воды}} = 10^3$ кг/м³ и $\rho_в = 1{,}29$ кг/м³ получим, что

$$E_к/E_п = 10^{-5} \ll 1,$$

т.е. наше предположение подтвердилось. Вернемся к вопросу задачи. Разделим в формуле (*) переменные R и t и проинтегрируем, учитывая что $0 \le R \le R_0$:

$$dt = -\sqrt{\frac{2\rho_в}{\sigma}} \frac{1}{r^2} R^{5/2} dR,$$

$$T = \frac{2}{7}\sqrt{\frac{2\rho_в}{\sigma}} \frac{R_0^{7/2}}{r^2} = 4 \text{ с.}$$

Полученный результат подтверждает первоначальные качественные соображения и неплохо согласуется с опытом.

В.Дроздов

Ф1381*. *Два кольца из тонкого провода расположены на одной оси на расстоянии H друг от друга (рис. 1). Радиусы колец r и R, причем $r \ll R$. По кольцам протекают токи I_1 и I_2. С какой силой одно из колец действует на другое? Для решения задачи вам понадобится выражение для магнитной индукции на оси кольца с током:*

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2 + H^2\right)^{3/2}},$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная.

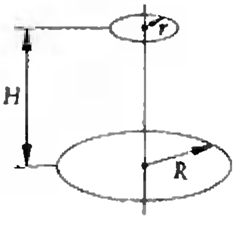


Рисунок 1

Это довольно трудная задача — ее решение требует сложных вычислений. Вначале обсудим общий путь решения. Расчет сил взаимодействия удобно провести, вычисляя магнитное поле от большого кольца (так как по условию $r \ll R$, то придется вычислять поле почти на оси — это сделать проще) и находя силу, которая действует на ток, текущий по малому кольцу. Трудность состоит в том, что нас интересует только та составляющая вектора магнитной индукции, которая перпендикулярна оси (составляющая вдоль оси только деформирует кольцо). Эту составляющую мы будем рассчитывать приближенно, считая ее малой (в случае малого кольца это вполне разумное предположение).

Рассмотрим магнитный поток через маленький цилиндр диаметром, равным диаметру малого кольца, и высотой $h \ll H$ (рис. 2). Поток вектора магнитной индукции, выходящий через боковую поверхность цилиндра, найдем как разность магнитных потоков через его торцы. А зная магнитный поток через боковую поверхность цилиндра, мы определим и нужную нам перпендикулярную составляющую поля, разделив этот поток на площадь боковой поверхности цилиндра.

Итак,

$$\Phi_\perp = 2\pi r h B_\perp = \Phi_1 - \Phi_2 = \pi r^2 \left(B_1 - B_2\right) =$$
$$= \pi r^2 \Delta B = \pi r^2 \left(dB/dH\right) h,$$

откуда

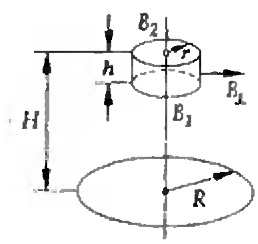


Рисунок 2

$$B_\perp = \frac{r}{2}\left(\frac{dB}{dH}\right) = \frac{r}{2}\frac{\mu_0 I_1 R^2}{2}\frac{(-3/2)2H}{\left(R^2+H^2\right)^{5/2}} =$$

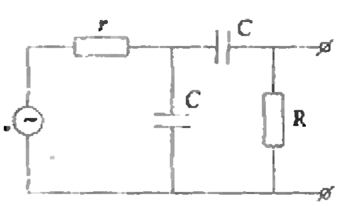
$$= -\frac{3\mu_0 I_1 R^2 rH}{4\left(R^2+H^2\right)^{5/2}}.$$

Теперь можно найти и силу взаимодействия:

$$F = 2\pi r I_2 \left|B_\perp\right| = \frac{3\pi\mu_0 I_1 I_2 r^2 R^2 H}{2\left(R^2+H^2\right)^{5/2}}.$$

А.Зильберман

Ф1382. *К генератору звуковой частоты подключена цепь из двух резисторов и двух конденсаторов (см. рисунок). При какой частоте генератора сдвиг фаз между его напряжением и током через резистор сопротивлением R окажется равным нулю? Во сколько раз при этом напряжение на этом резисторе будет меньше выходного напряжения генератора?*



Эту задачу можно решить при помощи обычного метода векторных диаграмм — решение получится довольно громоздкое, но никаких особенных сложностей не будет. Воспользуемся, однако, удобным случаем и расскажем немного о довольно полезном способе расчета цепей переменного тока при помощи комплексных чисел. Известно, что при перемножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Например, при умножении числа на мнимую единицу i его модуль остается прежним, а к аргументу добавляется $\pi/2$. Это свойство комплексных чисел оказывается очень удобным. Если, например, индуктивное сопротивление катушки принять равным $X_L = i\,\omega L$, то при расчете напряжения по закону Ома

$U_L = IX_L = I\,i\,\omega L$

нам удается сразу учесть и сдвиг фаз на $\pi/2$ между напряжением и током. Для конденсатора емкостное сопротивление можно принять равным

$X_C = -i/(\omega C)$,

а сопротивление резистора R изменять не надо. При таком подходе можно пользоваться всеми «хитростями», характерными для анализа цепей постоянного тока — замыкать точки с одинаковыми потенциалами, пользоваться эквивалентными заменами, применять метод узловых потенциалов и т.д.

Перейдем к нашей задаче. Обозначим ток через резистор R буквой I, сопротивление конденсатора C пока обозначим буквой X_C, чтобы не возиться с мнимыми единицами — значение X_C подставим потом. Тогда напряжение на последовательно соединенных резисторе и конденсаторе будет равно

$U = I\left(R + X_C\right)$.

Ток через второй конденсатор при этом составляет U/X_C, через резистор r течет сумма токов этого конденсатора и цепочки RC, а сумма напряжения на резисторе и U равна напряжению источника U_0:

$$U_0 = U + r\left(I + U/X_C\right) =$$

$$= I(R + X_C) + rI + rI\left(R + X_C\right)/X_C.$$

Отсюда можно получить соотношение между I и U_0:

$$I = U_0/\left(R + 2r + X_C + rR/X_C\right).$$

Если мнимая часть в знаменателе не равна нулю, то между током I и напряжением U_0 будет сдвиг фаз. Значит, чтобы сдвига фаз не было, должно выполняться равенство

$$X_C + rR/X_C = -i/(\omega C) + rR\,\omega C/(-i) =$$

$$= -i\left(1/(\omega C) - rR\,\omega C\right) = 0,$$

отсюда получаем условие

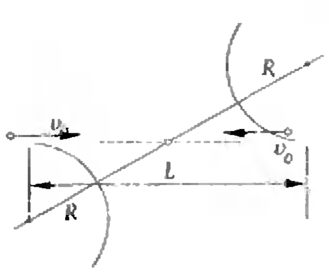
$$\omega^2 = 1/\left(rRC^2\right).$$

При этом напряжение на резисторе R меньше выходного напряжения генератора в $(1 + 2r/R)$ раз.

Обратите внимание на то, что просто складывать емкостные, индуктивные и обычные сопротивления без учета сдвигов фаз было бы неправильно — но наш подход позволяет учесть сдвиги фаз. Более подробно об этом методе расчета электрических цепей переменного тока (его называют методом комплексных амплитуд) мы обязательно расскажем в отдельной заметке.

З.Рафаилов

Ф1383. *Самолеты летят навстречу друг другу вдоль одной прямой с одинаковыми скоростями v_0. Завидев друг друга на расстоянии L, пилоты начинают разворот по окружностям, оставаясь в горизонтальной плоскости и не меняя величины скоростей. Найдите минимальное расстояние между самолетами, если повороты выполняются с одинаковыми ускорениями a.*



Ясно, что «разлетаться» нужно так, как показано на рисунке. Наименьшее расстояние между самолетами будет в тот момент, когда они окажутся на линии, соединяющей центры окружностей:

$$l_{\min} = 2\left(\sqrt{R^2 + L^2/4} - R\right) = \sqrt{4R^2 + L^2} - 2R.$$

Радиус каждой окружности найдем из условия

$$v_0^2/R = a \Rightarrow R = v_0^2/a.$$

Тогда окончательно

$$l_{\min} = \sqrt{4v_0^2/a^2 + L^2} - 2v_0^2/a.$$

А.Ершов

Ф1384. *В насыщенные пары воды при температуре $t = 100$ °C поместили металлическую пластину, охлажденную до температуры жидкого азота. Оцените начальную скорость роста толщины слоя намерзающего льда.*

В начальный момент времени на пластину падает поток молекул воды такой же, как поток молекул из насыщенного пара в жидкость при динамическом равновесии в системе «вода — пар». Поток I массы молекул пара через единицу площади, т.е. массу молекул, падающих на единицу площади за единицу времени, можно рассчитать по формуле

$$I = nm\overline{|v_x|}/2,$$

где n — концентрация молекул пара, m — масса одной молекулы, а $\overline{|v_x|}$ — среднее значение модуля составляющей скорости молекул по оси, перпендикулярной поверхности жидкости (в нашем случае — пластине).

Поскольку для насыщенных паров воды при температуре 100 °C известно давление — $p = 1$ атм $= 10^5$ Па, то для расчета величины I можно воспользоваться формулой

$$p = nm\overline{v_x^2}.$$

Считая для оценки, что $\overline{v_x^2} = \overline{|v_x|}^2$, имеем

$$I = \sqrt{pnm}/2.$$

Использование уравнения Менделеева—Клапейрона в виде

$$p = \frac{nm}{M}RT$$

позволяет выразить поток через известные величины:

$$I = \frac{p}{2}\sqrt{\frac{M}{RT}}.$$

Так как конденсирующаяся на поверхности пластины вода образует лед, согласно закону сохранения массы вещества, можно записать

$$I = v\rho_л,$$

где v — искомая скорость роста толщины слоя льда, а $\rho_л$ — плотность льда.

Таким образом, имеем

$$v = \frac{p}{2\rho_л}\sqrt{\frac{M}{RT}}.$$

Для оценки считаем, что $\rho_л = 10^3$, $M = 20 \cdot 10^{-3}$, $R = 8$, $T = 400$ (все величины в единицах СИ). В результате получаем

$$v \sim 10^{-1} \text{ м/с} = 10 \text{ см/с}.$$

Замечание. Столь большая величина скорости роста толщины льда показывает, что на практике начальная стадия очень быстро уступает место другой стадии, а именно диффузии, которая определяется достаточно медленными процессами переноса вещества на макроскопические расстояния.

А.Киприянов

А так ли хорошо знакомы вам

АТОМ И АТОМНОЕ ЯДРО ?

Эти первоначальные частицы... несравнимо тверже, чем всякое твердое тело, составленное из них, настолько тверже, что они никогда не изнашиваются и не разбиваются на куски.

И.Ньютон

... рассеяние назад ... невозможно получить ..., если не считать, что основная часть массы атома сконцентрирована в небольшом ядре. Именно тогда у меня возникла идея атома с крохотным тяжелым центром, несущим заряд.

Э.Резерфорд

Наверное, справедливо полагать, что идея атомарного строения вещества возникла из давнего стремления человека как-то упорядочить окружающий его мир. Поиски вечной и неизменной материи, из элементов которой состоят все тела, начались в глубокой древности, продолжались столетиями, не прекращаются и сегодня. Окончательного ответа нет до сих пор, но какие находки обнаружились на этом пути! Сложное строение атома, ядро которого, в свою очередь, оказалось составным, причем из таких частиц, которые сами по себе, вне ядра, не способны существовать продолжительное время. Радиоактивность, взаимопревращаемость частиц, цепные и термоядерные реакции...

Несколько последних десятилетий ознаменовались потоком открытий, радикально изменивших взгляды ученых на строение материи и поставивших массу новых проблем. Принципиально преобразился физический эксперимент, осуществление которого зачастую требует усилий сотен и тысяч людей. Необыкновенно разнообразными оказались практические приложения методов атомной и ядерной физики.

Маленькая мозаика сегодняшнего «Калейдоскопа» лишь очерчивает контуры огромного мира, скрытого в мельчайших частицах материи.

Вопросы и задачи

1. Сколько квантов с различной энергией может испустить атом водорода, если его электрон находится на третьем энергетическом уровне?

2. Каким образом в электронной оболочке атома проявляется стремление к минимуму потенциальной энергии?

3. Имеется ли связь между частотой обращения электрона вокруг ядра атома водорода и частотой его излучения?

4. Бомбардируя атомы бора $^{11}_{5}B$ быстрыми протонами, в камере Вильсона получили три почти одинаковых следа частиц, направленных в разные стороны. Какие это частицы?

5. Почему не все виды радиоактивности сопровождаются изменением химических свойств вещества?

6. В каких случаях активность радиоактивного препарата можно считать постоянной величиной?

7. Что продолжительнее — три периода полураспада или два средних времени жизни ядер одного и того же радиоактивного элемента?

8. Альфа-частицы, испускаемые радиоактивным веществом, могут иметь только дискретные значения энергии. Какой отсюда можно сделать вывод о возможных значениях энергии атомного ядра?

9. Почему альфа-частицы, испускаемые радиоактивными препаратами, не могут вызвать ядерных реакций в тяжелых элементах?

10. Отчего при альфа-распаде одинаковых ядер энергии альфа-частиц одинаковы, а при бета-распаде одинаковых ядер энергии бета-частиц различны?

11. На рисунке приведен фотоснимок, сделанный в камере Вильсона в момент расщепления ядра азота нейтроном с вылетом альфа-частицы. Чему принадлежат тонкий и толстый треки, видимые на фотографии?

12. Если нуклоны способны притягиваться друг к другу, то почему же все ядра до сих пор не слились в одно гигантское ядро?

13. Почему вещества, занимающие места в середине и конце таблицы Менделеева, не применяются в качестве замедлителей нейтронов?

14. Масса покоя атомного ядра всегда меньше суммы масс покоя нуклонов, из которых оно образовалось. Можно ли на этом основании считать, что при образовании ядра нарушается закон сохранения массы?

Микроопыт

Накалите, например на газовой горелке, железный гвоздь до «белого каления». Удастся ли вам так же накалить кусок стекла?

Любопытно, что...

... Фалес Милетский, родоначальник античной философии и науки, возводил все многообразие явлений и вещей к единой первостихии — воде. Анаксимен, представитель той же милетской школы, первоначалом всего считал воздух, из сгущения и разрежения которого возникают все вещи. Современник Фалеса Гераклит Эфесский же отдавал предпочтение огню, который есть также душа и разум.

... планетарную модель атома, названную после опытов Резерфорда его именем, теоретически разработал еще в 1901 году французский физик Перрен, прославившийся экспериментальным исследованием броуновского движения. Статья Перрена так и называлась: «Ядерно-планетарное строение атома».

... еще в 1815 году эдинбургский медик Уильям Проут высказал гипотезу о том, что все химические элементы состоят из атомов водорода. А в 1911 году Резерфорд не удержался от предположения, что атомные ядра состоят из альфа-частиц.

... Резерфорд считал, что величина заряда ядра пропорциональна атомному весу элемента. Верную же идею о пропорциональности заряда номеру элемента в периодической таблице выдвинул голландский физик-любитель Ван дер Брук. Резерфорд отнесся к этому скептически: «...забавный домысел, не имеющий под собой достаточного обоснования».

... если бы Энрико Ферми удалось полностью объяснить результаты своих опытов по искусственной радиоактивности, вызванной нейтронами, то весь мир уже в 1934 году узнал бы о возможности создания атомной бомбы. В то время был еще жив Резерфорд, категорически отрицавший использование ядерных реакций для практических целей.

... ядерно-физические методы успешно используются в криминалистике, позволяя исследовать вещества массой менее 10^{-10} грамма, например для идентификации людей по крохотным остаткам их волос.

... для внутреннего обогрева «Лунохода» при его многомесячной работе на поверхности Луны на нем был установлен тепловой блок, состоящий из герметичных ампул с радиоактивными веществами.

... естественная радиоактивность мужчин и женщин различна — из-за разного содержания в их организмах радиоактивного изотопа калия-40.

Что читать в «Кванте» об атоме и ядре
(публикации последних лет)

1. «Капельная модель ядра» — 1986, № 5, с. 23;
2. «Атомная физика в задачах» — 1986, № 12, с. 43;
3. «Ядерные спектры» — 1987, №3, с. 42;
4. «Супервытянутые ядра» — 1988, № 11–12, с. 32;
5. «Альфа-частицы и опыты Резерфорда» — 1989, № 3, с. 49;
6. «Нейтроны ищут убийцу» — 1989, №9, с. 44;
7. «За пределы таблицы» — 1991, №1, с. 38;
8. «Недостающие элементы» — 1991, № 5, с. 43;
9. «Физика против мошенников» — 1991, № 8, с. 7;
10. «Нейтрон и ядерная энергия» — 1992, № 8, с. 2

Материал подготовил А.Леонович

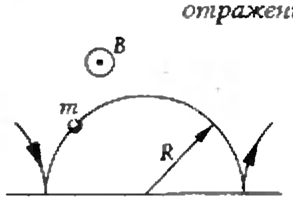
Ф1385. Система неподвижных зарядов симметрична относительно некоторой оси OO_1(см. рисунок). На большом расстоянии от зарядов, в точке А на этой оси напряженность поля составляет $E_1=100$ В/м, а в точке В, находящейся на расстоянии $L=1$ м от точки А, напряженность поля равна $E_2=99$ В/м. Отойдем от точки А на $l=1$ см в направлении от оси. Чему будет равна перпендикулярная составляющая напряженности поля в этой точке?

Если правильно нарисовать картину силовых линий электростатического поля, то число линий, пересекающих единицу площади поверхности, пропорционально перпендикулярной составляющей напряженности поля. Возьмем длинный тонкий цилиндр и расположим его вдоль оси поля. Пусть его длина равна $L=1$ м, а радиус боковой поверхнхости $r=l=1$ см — именно на этой боковой поверхности нам и нужно найти перпендикулярную составляющую электрического поля. Число силовых линий, входящих в ближний торец, равно $kE_1\pi r^2$, а через дальний торец — $kE_2\pi r^2$ (k — коэффициент пропорциональности). Значит, через боковую поверхность цилиндра выходит $k(E_1-E_2)\pi r^2$ линий, и теперь мы можем выразить перпендикулярную составляющую поля:

$$E_\perp=\frac{k(E_1-E_2)\pi r^2}{k\cdot 2\pi rL}=\frac{(E_1-E_2)r}{2L}=0{,}005\ \text{В/м}$$

А.Зильберман

Ф1386. Частица массой m, несущая заряд Q и движущаяся со скоростью v, налетает на неподвижную стенку перпендикулярно ее поверхности. В этот момент включается однородное магнитное поле индукцией B, параллельное плоскости стенки. Стенка отражает частицу, увеличивая ее скорость при каждом отражении на величину u. Найдите расстояние между точками 1-го и k-го отражений.



Магнитные силы не изменяют величины скорости, значит, в промежутках между ударами о стенку частица движется по полуокружностям (см. рисунок).

После отражения номер n скорость частицы равна $v+nu$, а радиус полуокружности —

$$R_n=\frac{m(v+nu)}{QB}.$$

Перед последним из интересующих нас ударом скорость частицы равна $v+(k-1)u$, а после первого она была $v+u$.

Таким образом, расстояние между точками 1-го и k-го отражений равно

$$l=\frac{2m}{QB}\left(v+u+v+2u+\ldots+v+(k-1)u\right)=$$

$$=\frac{2m}{QB}(k-1)\left(v+\frac{ku}{2}\right).$$

В.Миронов

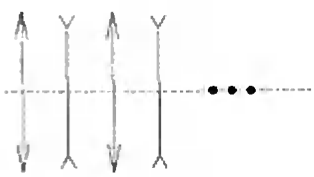


Рисунок 1

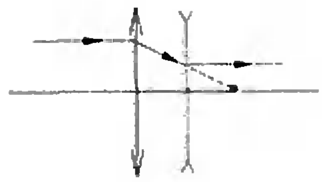


Рисунок 2

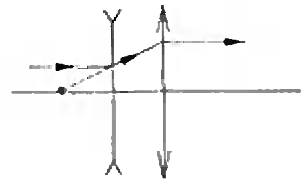


Рисунок 3

Ф1387. Имеется набор из N собирающих линз с фокусным расстоянием 2F и N рассеивающих линз с фокусным расстоянием —F. Линзы установили поочередно вдоль одной оси на расстоянии F друг от друга, как показано на рисунке 1. Вдоль оси в систему входит параллельный пучок света диаметром D. Найдите диаметр выходящего пучка.

У такой системы линз с одного края будет собирающая линза, а с другого — рассеивающая. Ответ в задаче будет зависеть от того, с какой стороны на систему падает пучок света.

Если пучок попадает вначале на собирающую линзу, то после преломления в ней и следующей за ней рассеивающей линзе пучок снова станет параллельным, но его диаметр уменьшится в 2 раза (рис. 2). После преломления в N таких парах диаметр пучка будет равным

$$d_1 = D/2^N.$$

Если пучок попадает вначале на рассеивающую линзу, то после каждой пары линз он снова будет параллельным оси, но теперь его диаметр будет увеличиваться в 2 раза (рис.3). Если он не достигнет диаметра линзы, то станет равным

$$d_2 = D \cdot 2^N.$$

А.Ершов

СПИСОК

читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1336 — М1380 — 1343 — Ф1387, справились с задачами М1339, М1341, М1351, М1356, М1371, М1376, Ф1358, Ф1360, Ф1379, Ф1383, Ф1387.

Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии - последние цифры номеров решенных задач).

МАТЕМАТИКА

С.Алексеев (Киев) 53; *Ю.Алексеенко* (Киев) 36—38, 40, 44, 45, 47, 48, 50, 52—54, 57, 58, 60— 62, 66—70, 72, 73; *М.Алехнович* (Москва) 52, 53, 55; *А.Ахмедов* (Баку) 36—38, 42, 45, 48—50, 52—55, 57, 61, 62, 64, 66, 68, 72—75; *С.Балахонов* (Обнинск) 37, 38; *Ю.Бахтин* (Волгоград) 38, 45; *А.Бикмуллина* (Казань) 74; *А.Благоразумов* (п. Черноголовка Московской обл.) 53; *Е.Бравый* (Пермь) 61—65; *И.Бурбан* (Киев) 52, 53; *О.Бурд* (Киев) 36—38, 42, 45, 47—50, 52, 53, 55, 57, 58, 60—62, 64—67, 70, 72, 74, 75; *Н.Бурыкина* (Киев) 37, 38, 40, 44, 45, 47—49, 52—54, 57, 60, 61, 64, 65; *Б.Вайнер* (Киев) 36— 38, 40, 42, 45, 47—50, 52—55, 57—62, 64—67, 69, 70, 72, 74, 75; *А.Гетманенко* (Ярославль) 53; *А.Голынский* (Москва) 46—50, 53, 54, 57, 60; *Б.Григоренко* (Москва) 36; *А.Гурбанов* (Баку) 36; *Н.Добринская* (Саратов) 52, 53, 57, 62, 64, 72, 74; *Д.Дудко* (Киев) 37, 38, 40; *М.Ершов* (Троицк Московской обл.) 77, 79, 80; *В.Замятин* (Вятка) 36,38; *П.Земский* (Донецк) 57; *В.Ивлев* (Жезказган) 69; *А.Капитульский* (Мурманск) 66, 68, 73; *А.Капустин* (Павлодар) 52, 53, 73; *И.Карабаш* (Донецк) 36,38, 42, 45—49, 52—55, 57, 60—62, 64—70, 72—75, 77, 79; *А. Карпицкий* (Обнинск) 37, 38; *Т.Кириченко* (Киев) 48, 52; *Т.Колесникова* (Вишневое) 47, 48, 53; *О.Коробкин* (Днепропетровск) 53; *С.Костин* (Москва) 53; *А.Кравцов* (Старый Оскол) 67, 69, 72—75; *Р.Кривень* (Павлодар) 38, 52, 53, 72, 74; *К.Кудайбергенов* (Ташкент) 53—54, 57; *М.Куликов* (п.Черноголовка Московской обл.) 57, 60—62, 65, 66, 68, 72, 73, 75; *Д.Кулин* (Санкт-Петербург) 36, 38; *М.Куркина* (Москва) 61, 66, 68, 70; *А.Кутько* (Минск) 73; *П.Левин* (Москва) 52—55, 61, 62, 64, 73, 74; *М.Людомирский* (Протвино) 53; *И.Малашкин* (Москва) 52—54, 72, 73; *Н.Мамедов* (Баку) 36, 52, 53; *В.Маневич* (Евпатория) 57; *Е.Матюшин* (Москва) 52; *В.Мозгин* (п.Черноголовка Московской обл.) 73; *И.Павловский* (Омск) 44, 52—55, 57, 58, 61, 66—70, 72—75, 77, 69; *Е.Перельман* (Санкт-Петербург) 37, 38, 40; *В.Пойманов* (Донецк) 53; *С.Попов* (Якутск) 61; *Е.Порошенко* (Алма-Ата) 36—38; *А.Прокофьев* (Донецк) 49, 66, 69, 72—75; *С.Пфлюк* (Алма-Ата) 53, 66; *З.Сабиров* (к/з Коммунар Хорезмской обл.) 52, 53; *А.Савин* (Самара) 69, 70; *С.Саприкин* (Одесса) 43, 45, 49, 52, 53, 57, 60, 72—75; *Ю.Сенцов* (Калуга) 52—54; *С.Сикорский* (с.Вузловая Львовской обл.) 53, 57, 62, 66, 69; *И.Сихарулидзе* (Тбилиси) 57; *Е.Сиюнкова* (Вятка) 52, 53; *А.Солодушкин* (Степногорск) 36, 38, 44, 45, 47, 48, 52—55, 57, 58, 61, 62, 64, 73, 74, 77, 79; *Д.Спрысков* (Кострома) 57, 67, 70, 80; *А.Степанов* (Новомосковск) 73; *В.Сушков* (Винница) 36, 52, 53, 55, 57, 59, 66—69, 72, 73, 75, 77; *А.Топчий* (Омск) 36, 38, 40, 42, 45, 47, 48, 50, 52, 53, 57, 58, 60—62, 64—69, 74, 75; *М.Тройников* (Ижевск) 36—38, 45, 48, 50, 52—55, 57, 58, 61, 62, 64—70, 72—75, 77—79; *Е.Турчин* (Днепропетровск) 45, 61, 68, 69, 73; *А.Шныр* (Львов) 36—38, 48, 52, 53, 57; *А.Шубович* (Волгоград) 72, 74; *Т.Шульман* (Вологда) 69, 73; *А.Эвнин* (Челябинск) 52— 55; *Е.Яковлев* (Алма-Ата) 36, 72, 74, 75, 79; *С.Янович* (Минск) 78.

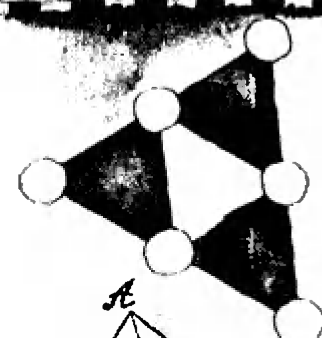
(Окончание на странице 71)

ЗАДАЧИ

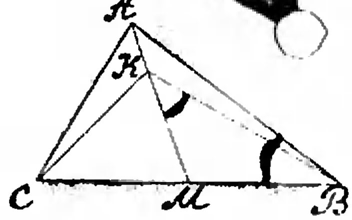
1/***И.Акулич.*** После образования на острове Чунга-Чанга двух суверенных государств Чунга и Чанга были изданы «Большая чунгийская» и «Большая чангийская» энциклопедии. Первая содержала столько томов с простыми номерами, сколько и с непростыми, а вторая — столько томов с составными номерами, сколько и с несоставными. В какой энциклопедии больше томов?

2/***С.Баженов.*** Решите числовой ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

3/***А.Блюфштейн*** **(Чили).** Один рыболов собрался в отпуск, решив взять с собой неразборную четырехметровую удочку. Железнодорожные правила запрещают провозить предметы длиной более трех метров. Рыболову тем не менее удалось сдать в багаж удочку, не ломая и не сгибая ее. Как?



4/***Н.Антонович.*** Разместите в кружочках числа 1,2,3,4,5,6 так, чтобы сумма чисел в вершинах каждого голубого треугольника была простым числом.



5/***А.Акопян.*** На медиане AM треугольника ABC взята точка K так, чтобы угол BKM был равен углу ABC. Покажите, что тогда угол CKM равен углу ACB.

Алиса и нуль

Лев Генденштейн

—Почему ты вверх ногами? — повторила Алиса свой вопрос, потому что Кошка попрежнему висела вверх ногами, и разговаривать с ней было не очень удобно.

—На этот вопрос нет ответа, — сказала Кошка, продолжая умываться.

—По-моему, ответ есть на *любой* вопрос, — возразила Алиса.

Кошка перестала умываться.

—На любой, говоришь? — прищурившись, спросила она. — Ну тогда скажи: где здесь «*верх*», а где — «*низ*»?

—*Кому* сказать? — растерялась Алиса, потому что Кошка вдруг исчезла.

—Было бы что сказать, — заметила Кошка, на секунду появившись снова.

—«*Верх*», конечно, *вверху*, — уверенно сказала Алиса. Она подняла глаза и посмотрела на далекие звезды. Потом она опустила глаза и увидела, что в противоположной стороне мерцают такие же звезды. У Алисы зародилось сомнение:

—А может быть, «*верх*» *внизу*? — спросила она себя. Посмотрев по сторонам, она нерешительно добавила:

—Или *справа*? Или *слева*?

Дело в том, что Алиса иногда путала «лево» и «право»: уж очень они похожи друг на друга, но «верх» и «низ» Алиса не путала никогда!

—По крайней мере, до сих пор, — честно призналась Алиса. И тут ей в голову пришла прекрасная мысль: она решила поступить так же, как поступала, когда играла сама с собою в крокет или давала себе полезные советы, — представить вместо себя одной сразу двух девочек.

—Ты, — сказала она одной из них, — стань,

Начало этой удивительной истории о приключениях Алисы в Математической стране было опубликовано в «Кванте» в 1992 году.

Графика Павла Чернуского

пожалуйста, вверх головой, а ты, — обратилась она ко второй, — стань вниз головой.

Однако (впервые!) девочки не послушались Алису: они кувыркались, как акробаты в цирке.

—Это еще что такое? — рассердилась Алиса (у нее закружилась голова и она, наверное, представила себя классной дамой).

—Сию же минуту станьте так, как я сказала!

Кувырканье прекратилось, и до Алисы донесся разговор:

—Нам сейчас попадет. Становись скорее вверх головой!

—Сначала *ты* становись вниз головой!

—Нет, сначала ты!

—Нет, ты!

Между девочками началась небольшая возня: опять замелькали руки-ноги. Алиса собралась было снова прикрикнуть на девочек, но возня вдруг прекратилась.

—Так ты тоже не знаешь, где «верх», а где «низ»?— удивленно спросилапервая девочка.

—И ты не знаешь? — не меньше нее удивилась вторая.

Первая девочка немного подумала и сказала:

—«Низ» — это куда все падает. Давай что-нибудь уроним и посмотрим, куда оно будет падать.

Девочки пошарили в карманах, но ничего, наверно, не нашли. Тогда первая девочка сняла туфельку и выпустила ее из рук.

—Что ты делаешь? — воскликнула вторая, но... туфелька осталась неподвижной!

—Она *никуда* не падает! — удивленно сказала первая.

—Может быть, здесь вообще нет «низа»? — предположила вторая.

—Конечно! — воскликнула Алиса. — Здесь просто нет ни «верха», ни «низа» — как я сразу не догадалась? Поэтому нет ответа и на вопрос, почему Кошка вверх ногами!

Тут Алиса заметила, что обе девочки с интересом ее слушают.

—Вы можете идти, — сказала им Алиса.

—*Идти* мы не можем, — хором сказали девочки и сделали реверанс. — Здесь не от чего отталкиваться!

—Но я хочу побыть одна, — сказала Алиса. (Она собиралась обдумать сделанное открытие: есть вопросы, на которые нет ответа!)

Тогда девочки взялись за руки, сняли по туфельке и бросили их в сторону Алисы — она еле увернулась! Когда Алиса снова посмотрела на девочек, то увидела, что они удаляются — они летели в сторону, противоположную туфелькам. Бедной Алисе ничего не оставалось, как погрозить девочкам кулаком. В ответ они показали ей языки.

—Когда я представлю вас в следующий раз, вы у меня получите за все! — пообещала Алиса.

Она попробовала отвлечься от невоспитанных девочек и сосредоточиться. «Что же получается — если ничего не падает, то нет ни «низа», ни «верха»... — Тут Алиса вспомнила, как она падала в кроличью нору и как из ее рук выскользнула банка из-под варенья, но не полетела вниз, а осталась рядом с ней. «Это очень похоже на то, что было здесь с туфелькой, — подумала Алиса. — Но там я точно знала, что падаю *вниз*...»

—Я все время падала вниз, вниз, вниз... И боялась, что вылечу с другой стороны Земли, где все ходят на головах! Интересно, как же они тогда *ходят*? И как растут там деревья — неужели вверх корнями? А как стоят дома — на крышах, что ли? И куда идет дым из труб? — Алиса задумалась. — И где это бывает? Не помню — в Австралии или в Новой Зеландии?

—Где бы это ни было, — решила Алиса, — туда, наверное, понаехало столько любопытных, что сейчас там негде повернуться!

—Но тогда, — немного погодя продолжала Алиса, — о такой удивительной стране обязательно было бы написано в учебнике географии!

Конечно, Алиса помнила не *все*, что было написано в учебнике географии, но если бы там был параграф о стране, где люди ходят на головах — уж этого она бы не забыла!

—Значит, даже в Австралии люди ходят вверх головой, — заключила Алиса. — И если бы я вылетела к ним, пролетев Землю насквозь, это я бы оказалась вниз головой!.. Выходит, во время падения «верх» и «низ» *перевернулись* бы для меня!

—Да, но *когда* бы они перевернулись? — спросила себя Алиса. Наконец ей показалось, что она нашла ответ. — Наверное, когда я пролетала бы центр Земли... Как жалко, что нора кончилась раньше — я бы почувствовала, как переворачиваются «верх» и «низ»!

И вдруг она поняла, что даже не заметила бы этого момента: она бы все время чувствовала себя точно так же, как сейчас, и банка из-под варенья все так же находилась бы рядом с ней!

—Значит, во время падения для меня тоже не было ни «верха», ни «низа»... Вот интересно: «верха» и «низа» нет тогда, когда *ничего* не падает или, наоборот, когда падает *все*...

Алиса была очень довольна, что разгадала Кошкину загадку. Правда, при этом она открыла, что существуют вопросы, на которые нет ответа, и это ее немного беспокоило. Но скоро она перестала об этом думать, потому что ей захотелось есть.

Алиса осмотрелась: не окажется ли поблизости бутылочки с надписью «ВЫПЕЙ МЕНЯ» или пирожка с надписью «СЪЕШЬ МЕНЯ»? (Сейчас она съела бы пирожок даже *без* такой надписи!) Когда она съедала или выпивала что-нибудь в Стране Чудес, то обычно увеличивалась или уменьшалась. Может быть, так произойдет и здесь?

—Здесь я этого даже не замечу, — подумала Алиса, осмотревшись кругом, — мне просто не с чем будет себя сравнить!

Поскольку ничего съестного возле нее не было (и несъестного тоже!), Алиса сунула руку в карман: может быть, найдется хотя бы одна конфета? Но увы! Карман был совершенно пуст.

—Вот еще один вопрос, на который нет ответа, — сказала Алиса, выворачивая единственный карман. — «Сколько конфет у меня в кармане?»

—На этот вопрос ответ *есть*! — уверенно произнес кто-то рядом с Алисой.

Она в испуге обернулась. Возле нее витало странное существо. Оно было совершенно круглым — у него были круглые глаза, уши, нос, руки и даже ноги!

—Конфет у тебя в кармане *нуль*! — важно сказало существо. — И не только конфет, — добавило оно и попыталось выпятить грудь, но из этого ничего не вышло, потому что она *уже* была совершенно круглой.

—А чего еще? — спросила Алиса, с трудом сдерживая смех: она никогда не видела, чтобы кто-нибудь так важничал.

—*Нуль вишневых пирогов,*
Нуль ореховых тортов,
Нуль коробок шоколада,
Нуль бутылок лимонада... —

с восторгом начало перечислять существо, загибая круглые пальцы.

У Алисы от голода засосало под ложечкой, и она прервала незнакомца.

—Кто вы? — спросила она не очень вежливо.

—Я и есть *Нуль*! — ударяя себя в грудь, воскликнуло существо. При этом оно не удержалось на ногах и покатилось.

Алиса не могла больше сдерживаться и рассмеялась.

—А кто ты? — как ни в чем не бывало спросил Нуль Алису.

—Я — девочка Алиса, — ответила она.

—А-ли-са... — с расстановкой произнес Нуль, как бы вспоминая, закатил глаза вверх и замолчал. Наконец, Алиса сказала:

—Мы с вами встречались: я часто видела вас в разных числах.

—Я так и знал! — снова оживился Нуль. — Я так и знал, что ты меня знаешь. Нас, нулей, знают все!

Алиса быстро посчитала в уме и сказала:

—В миллионе, например, целых шесть нулей. (Она была рада случаю показать свои знания и к тому же порадовать старого знакомого.)

—Вот-вот! — подхватил Нуль. — именно мы, нули, и делаем единицы миллионами! Единица без нулей — что король без свиты.

Алиса представила себе короля-единичку, и за ним — длинную свиту сплошных нулей. Нули-придворные важно переговаривались между собой, а король-единичка шествовал впереди, даже не оглядываясь.

—Так вот почему у короля всегда большая свита! — подумала Алиса. — Чем больше в свите нулей, тем важнее кажется король! — но тут она вспомнила Короля Червей из Страны Чудес и сказала:

—Я знала короля, который, кажется, тоже был нулем...

—Некоторые думают, — сказал Нуль, многозначительно посмотрев на Алису, — что нуль — это ничто.

—А разве это не так? — удивилась Алиса.

—Нули бывают разные, — загадочно произнес Нуль.

—По-моему, все нули одинаковы, — махнула рукой Алиса.

—Не скажи, — возразил Нуль. — Нуль-*число* — это действительно ничто, а нули-*цифры* все время работают — они показывают, что чего-то нет.

—Тоже мне работа, — пренебрежительно сказала Алиса, — Вот другие цифры действительно работают — они показывают, что что-то *есть*!

—Показывать, что чего-то нет, гораздо труднее, — серьезно возразил Нуль.

—Почему? — спросила Алиса: она видела, что Нуль ждет этого вопроса.

—Ты когда-нибудь пробовала держать пустое место? — ответил Нуль вопросом на вопрос и, не дождавшись ответа, продолжал:

—Соседи так и норовят занять это место, и каждому надо говорить: «*Занято*! *Занято*!», а некоторых приходится даже отпихивать! За день так накричишься и натолкаешься, что к вечеру с ног падаешь...

—Мне кажется, вы можете работать и *лежа*, — заметила Алиса, рассматривая своего круглого собеседника.

—Случается, — подтвердил Нуль. — Бывает, работаем даже во сне! — он вздохнул. — Но самое обидное, что нашу работу никто не замечает. И ты вот...

Алиса попыталась что-то сказать, но Нуль продолжал:

—Ты только представь себе, что было бы, если бы мы, нули, ушли со своих мест. На эти места тут же скатились бы соседние цифры! И многие числа изменились бы до неузнаваемости — даже от миллиона ничего не осталось бы!

—Ну, не совсем *ничего*, — мягко возразила Алиса, — единица все-таки осталась бы! А вот если бы ушла единица, от миллиона действительно не осталось бы ничего: если перед нулями никого другого *нет*... — Алиса вовремя остановилась, потому что боялась снова обидеть Нуля.

—Мы, нули, самые вежливые из всех цифр, вот мы и пропускаем всегда кого-нибудь вперед, — пояснил Нуль, и не подумав обижаться. — И потом, мы, нули, любим быть вместе, не то что другие цифры. А собираться вместе удобнее всего в конце числа. Бывает, соберемся там большой компанией, ух и число тогда получается!!! — и Нуль снова начал пытаться выпятить грудь.

—Неужели для больших чисел обязательно нужно много нулей? — подумала Алиса. — Может быть, кто-нибудь додумался, как записывать большие числа без нулей? Но как бы мне познакомиться с кем-нибудь еще? — Она уже не надеялась узнать от Нуля ничего нового.

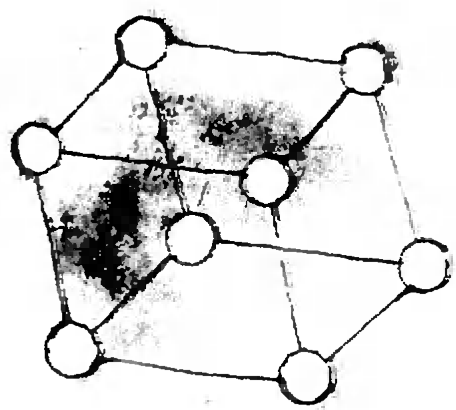
—Не могли бы вы представить меня своим друзьям? — как можно вежливей попросила Алиса.

Нуль глубоко-глубоко вздохнул и посмотрел на Алису круглыми глазами. Потом он вздохнул *еще* глубже и... превратился в круглую дыру!

Минуту назад Алиса не могла бы представить себе, что *в пустоте* может появиться дыра. Но сейчас она видела эту дыру прямо перед собой. Там было светло и куда-то вилась приветливая тропинка.

И Алиса шагнула в дыру.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»



Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6 — 8 классов. Конкурс состоит из 20 задач и заканчивается в апреле. Победители будут награждены премиями журнала «Квант» и Российского благотворительного фонда «Интеллект».

Решения задач из этого номера высылайте не позднее 1 января 1994 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6 — 8»). Не забудьте указать фамилию, имя, класс.

1/*С.Токарев.* Докажите, что $1993 \cdot 1995^3 - 1994 \cdot 1992^3$ — куб целого числа. 3987

2/*И.Акулич.* Имеется 8 маленьких грузов массами 1, 2,..., 8 граммов. Можно ли их разместить в восьми вершинах куба так, чтобы их общий центр масс совпал с центром куба?

3/*В.Чичин.* С помощью циркуля и линейки постройте треугольник, если известны точка пересечения его медиан, центр описанной окружности и точка ее пересечения с одной из биссектрис.

4/*П.Филевич.* Два последовательных числа являются суммами кубов своих цифр. Какие это числа?

5/*М.Кохась.* Знаком $[a]$ обозначают целую часть числа a, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a. Знаком $\{a\}$ обозначают дробную часть числа a, а именно, $\{a\} = a - [a]$.
Найдите наименьшее положительное число x, такое, что

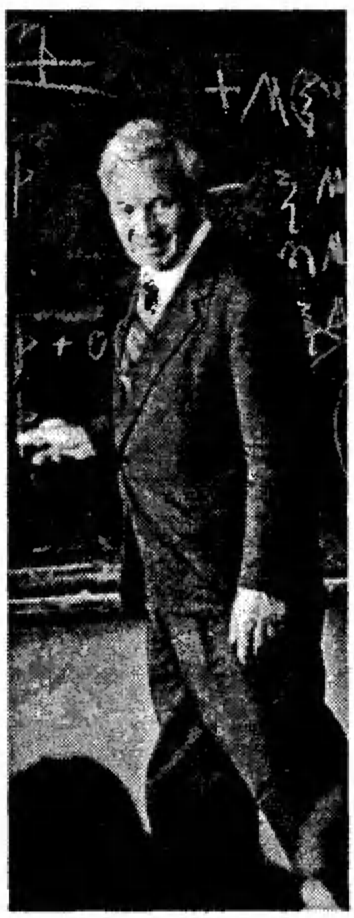
а) $\{x^2\} - \{x\}^2 = 1/1993$,

б) $[x^2] - [x]^2 = 1993$.

Графика Эдуарда Назарова

Мы продолжаем публикацию материалов, цель которых — расширять школьные знания по математике и физике. Правда, предлагаемые в этом номере заметки не совсем традиционны — они не посвящены конкретным учебным вопросам.

Путь в математику открыт



Эта заметка была написана Андреем Николаевичем Колмогоровым для газеты «Московский университет», напечатана там 8 апреля 1975 года и никогда больше не переиздавалась. За прошедшие 18 лет в стране многое изменилось, но и сегодняшнему школьнику, решающему, быть или не быть ему математиком, полезно узнать мнение великого ученого о том, кто может стать математиком, чему можно научиться на механико-математическом факультете МГУ и чем занимаются после мехмата его выпускники.

Велико число школьников, с увлечением решающих трудные математические задачи. Школьные математические кружки, кажется, по числу участников превосходят кружки других специальностей. Тем не менее, число школьников, которые после школы решаются выбрать математику своей специальностью, в частности попробовать поступить на математическое отделение Московского государственного университета, недостаточно. По-видимому, это объясняется разными причинами. Одни думают, что для профессиональной работы математика нужны какие-то совсем необычайные способности и считают свои недостаточными.

Другие не совсем ясно представляют себе, что делают математики по окончании университета. Наконец, некоторых смущают разговоры о том, что математиков чуть ли уже не заменили вычислительные машины, что если уж заниматься математикой, то только «вычислительной».

Убедиться в том, что ваше увлечение математикой достаточно серьезно и длительно, конечно, важно. Я бы особенно подчеркнул необходимость того, чтобы изучение математических рассуждений и выводов и работа над решением математических задач доставляли вам непосредственное удовольствие. Чтобы вы были чувствительны к красоте математических теорем или их доказательств. Законно радоваться своему собственному остроумию в решении олимпиадных задач, но более глубокой должна быть радость от постижения объективных математических закономерностей, кем бы они ни были найдены.

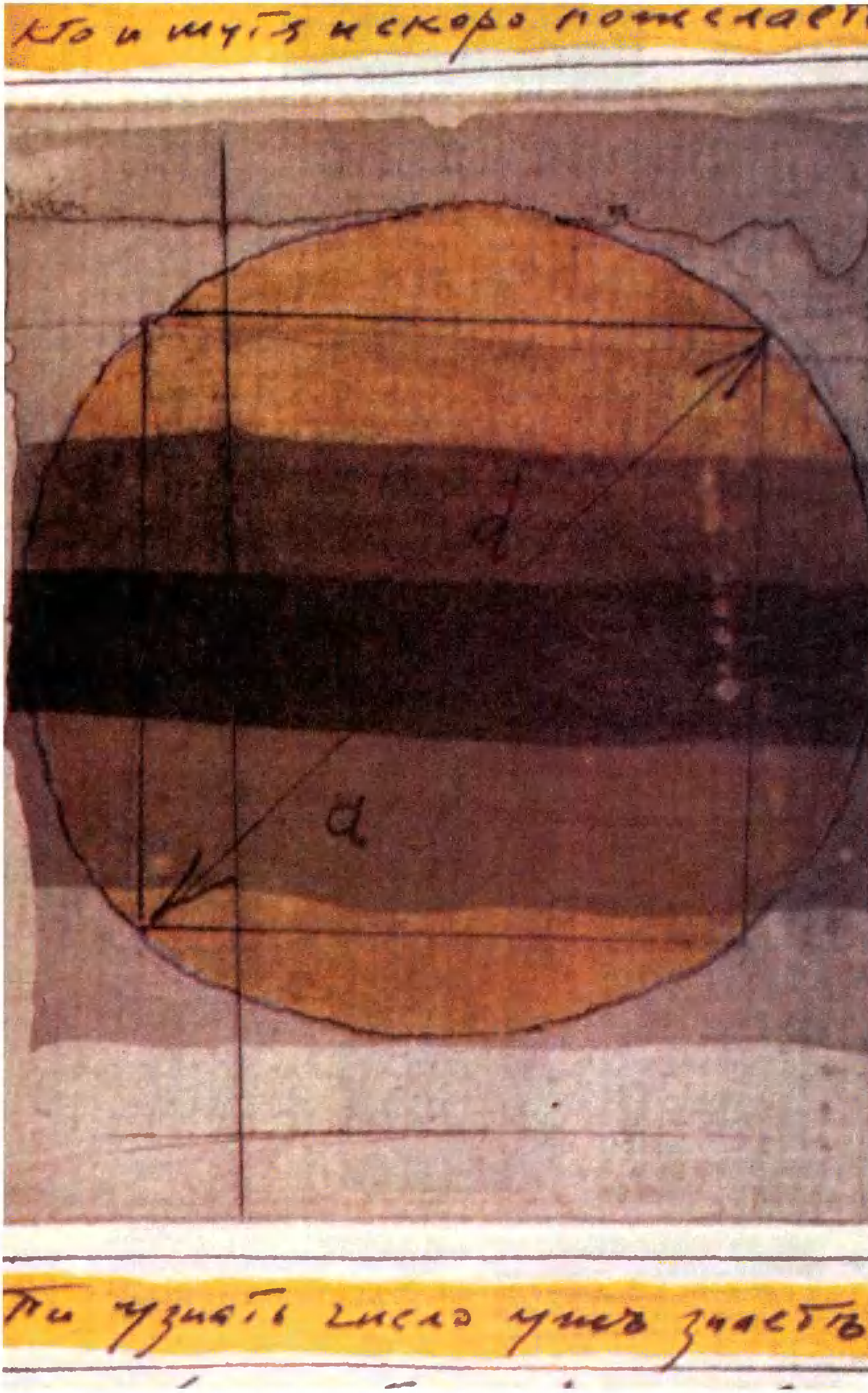
Успехи на математических олимпиадах, конечно, должны подкреплять ваше желание сделаться математиком. Но даже полное отсутствие таких успехов не должно чрезмерно обескураживать любящего серьезно математику и чувствующего свою способность в ней много и серьезно работать. Многие из самых крупных математиков (академик П.С.Александров, академик А.П.Мальцев и другие), познакомившись с современными олимпиадными задачами, говорили, что в своей юности решить их в ограниченный срок не смогли бы, более того, что они их совсем не увлекали бы, так как чаще всего искусственны и требуют для решения остроумия, а не глубины мысли.

Большинство выпускников математического отделения занимается не «чистой математикой», а прикладной. А работа по приложениям математики в большинстве случаев требует уменья обращаться к помощи вычислительных машин. Этому уменью на математическом отделении обучают всех студентов, хотя и в меньших размерах, чем на специальном факультете вычислительной математики и кибернетики. Так что различие между двумя факультетами для тех студентов, которые идут по окончании в научно-технические институты, оказывается не столь значительным. Дело скорее в порядке овладения разными сторонами будущей профессии. На математическом отделении студент идет от изучения математики к пониманию путей ее применения в естествознании и технике и лишь за этим — к овладению вспомогательными средствами машинных вычислений, которое, кроме принципиальных основ, частично переходит уже на период работы после окончания. Но математическое отделение, как менее специализированное, оставляет большую свободу выбора дальнейшего пути.

Замечу уже в качестве своего личного мнения, что при всей важности вычислительной техники и необходимости знакомства с ней для всех молодых математиков самым увлекательным мне представляется другое. Именно настоящее глубокое вхождение в смежные науки — физику, механику и т.д., возможность самому ставить и решать в этих науках серьезные задачи. Можно было бы привести много примеров, когда такая программа выпускникам нашего отделения удавалась. Таков был путь академика М.А.Лаврентьева. Замечу еще, что сейчас в АН СССР как работами по изучению атмосферы, так и работами по океанологии руководят директора соответствующих институтов академик А.М.Обухов и член-корреспондент АН СССР А.С.Монин, кончавшие университет по специальности математика.

Я думаю, что мысль о том, что математика открывает путь к работе в самых различных смежных науках, вполне актуальна и для нового поколения поступающих в университет.

Академик Андрей Николаевич Колмогоров


кто и шутя и скоро пожелает
d
a
Пи узнать число ужъ знаетъ

Бог что-то скрывает от нас, *или* О принципах неопределенности

Боги людям открыли не все.

В поиск пустившись, люди сами познали немало.

Ксенофан

Я погружаюсь в глубину и становлюсь перед

тайной мира, тайной всего, что существует.

И каждый раз с проникающей меня остротой

я ощущаю, что существование мира не может

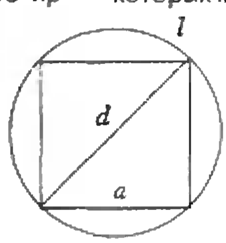
быть самодостаточным, не может не иметь за

собой в еще большей глубине Тайны,

таинственного смысла.

Николай Бердяев

Казалось бы, что может быть проще квадрата с диагональю или окружности с диаметром — любой ребенок начертит их от руки (рис. 1). Однако же, обо всем этом написано столько, что можно составить отдельную энциклопедию, например, об иррациональности чисел π и $\sqrt{2}$. Ну, что стоило Создателю устроить природу так, чтобы отношение длины окружности к ее диаметру было равно точно трем; ну, пусть точно 3,14 или даже 3 с сотней (или пусть миллионом!) знаков после запятой — но чтобы *точно*!? Ан нет — ученые доказали, что число π содержит бесконечное число знаков после запятой (и назвали это свойство несоизмеримостью длины окружности и диаметра); придумали стихи, чтобы запомнить хотя бы десяток этих знаков; указали процедуры, при помощи которых можно найти любое заданное число знаков, научили этим процедурам современные вычислительные машины, а некоторые подвижники еще до появления машин потратили всю свою жизнь, чтобы найти несколько сотен знаков, — столь жгуче было их желание узнать, что же там дальше. Но сколько ни вы-



$$\frac{l}{d} = \pi = 3{,}1415926536\ldots ?$$

$$\frac{d}{a} = \sqrt{2} = 1{,}414\ldots ?$$

Рисунок 1

Графика Юрия Ващенко

числяй — хоть в течение всего времени, отпущенного на существование человечества, — все равно конца у числа π не будет.

Для чего же так устроен мир? Какая тайна спрятана в круглом сечении соснового бревна или коринфской колонны? И разве не возмутительно, что при всей мощи современной науки мы так и не можем точно сказать, во сколько же раз окружность длиннее своего диаметра? (Удивительно, что математики при этом могут спокойно спать.)

Но может быть, в физике все точно? Конечно, теперь все понимают, что физика — всегда приближенная модель мира. Конечно, любое измерение делается с ошибкой, но проходят годы, столетия, и измерения становятся все более точными. Так, может быть, есть надежда, что пусть не скоро, но хотя бы когда-то *в принципе* можно будет точно сказать, например, где в данный момент на оси X находится материальная точка и какова ее скорость v? Ведь это же самые азы кинематики.

Оказалось, именно принципиально это и невозможно — и тут запрет!, о чем говорит принцип неопределенности Гейзенберга:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h. \qquad (1)$$

Здесь Δx — неопределенность координаты (в м), Δp — неопределенность импульса (в Н · с), $h \sim 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка.

Таким образом, согласно принципу неопределенности, нельзя абсолютно точно указать в плоскости p, x (импульс, координата) положение центра масс C тела, движение которого мы исследуем. Чем точнее вы хотите измерить координату x точки (т.е. $\Delta x \to 0$), тем хуже вы знаете ее импульс ($\Delta p \to \infty$), и наоборот. Можно лишь сказать, что p и x для точки C находятся где-то внутри фигуры с площадью не меньшей чем постоянная Планка h (рис. 2). Да, эта площадь мала, что «не мешает нам жить», когда речь идет о самолетах, снарядах, метательных дисках и шариках для пинг-понга. Но разве не настораживает, не волнует вас то, что такое ограничение существует *принципиально*? Кто-то сказал как-то: «Я, по-видимому, никогда не побываю в Австралии; но если вы мне запретите бывать там, я немедленно почувствую себя несчастным».

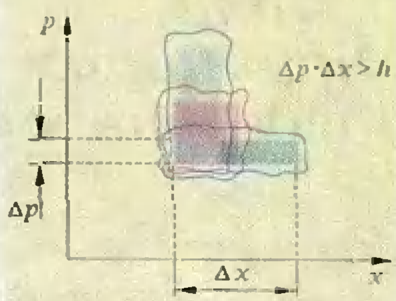


Рисунок 2

Давайте перепишем неравенство (1) для фотона в другом виде. Поскольку для него $p = h\nu / c$, где c — скорость света, а ν — частота, характеризующая «цвет» фотона, то $\Delta p = h\Delta\nu / c$ (ведь h и c — постоянные, так что неопределенность импульса фотона может быть связана только с неопределенностью его частоты). Теперь сократим обе части на h и получим

$$\frac{\Delta x}{c}\Delta\nu \geq 1, \text{ или } \Delta t \cdot \Delta\nu \geq 1. \qquad (2)$$

Здесь мы учли еще, что $\Delta x = c\Delta t$.

Итак, получается, что чем меньше время излучения фотона ($\Delta t \to 0$), тем больше неопределенность его частоты ($\Delta\nu \to \infty$). Например, мы видим красный свет рекламы, получающийся в результате излучения возбужденных атомов неона. Частота его квантов $\nu_0 \sim 5 \cdot 10^{14}$ Гц, а время излучения каждого атома $\Delta t \sim 10^{-9}$ с, поэтому неопределенность частоты не меньше чем $\Delta\nu \sim 1 / \Delta t \sim 10^9$ Гц — миллиарды герц! Это, конечно, не так много — всего порядка миллионных долей от самой частоты: $\Delta\nu / \nu_0 \sim 10^{-6}$. И все же оказывается, что этот свет не совсем красный, а содержит бесконечный набор других частот, в основ-

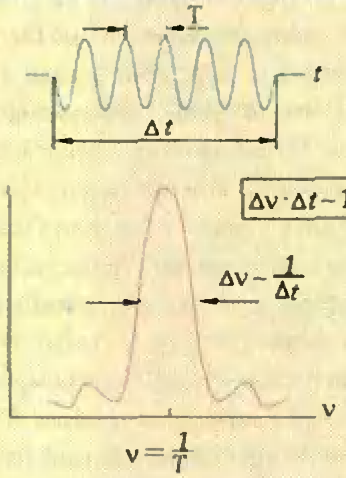


Рисунок 3

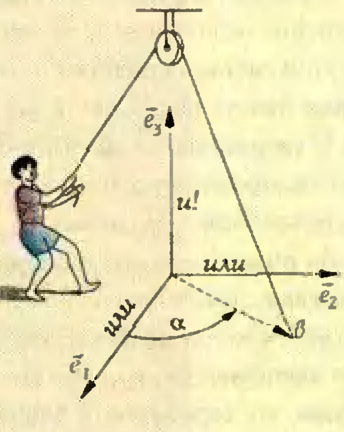


Рисунок 4

ном из найденного интервала $\Delta\nu$ (рис. 3).

То же самое соотношение (2) верно и для музыкальных нот (только теперь под c нужно понимать скорость звука в воздухе): как бы музыкант ни старался получить совершенно чистый звук, например ноту «ля», все равно выйдет нечто не совсем совершенное — в принципе получится целый набор частот, даже если музыканту удастся заставить струну звучать целые сутки или год.

А геометрия Евклида? Казалось бы, вот где классически непорочный, почти мраморный образец строгости! Так нет же — и тут оказалась своеобразная неопределенность. И дело даже не в том, что люди, строившие эту геометрию, сформулировали пятый постулат (о параллельности прямых) как-то раздражающе неуклюже, что и привело к появлению неевклидовых геометрий (Лобачевского, Римана,...). Тут дело в том, что по образцу евклидовой геометрии стали пытаться строить и другие дедуктивные науки, стараясь придать им ту же «строгость».

Казалось, что можно сформулировать такой набор нескольких высказываний (систему аксиом), что все остальные высказывания (в тех же терминах, в которых сформулированы сами аксиомы) можно или подтвердить или опровергнуть. Тогда такая хорошая система аксиом называлась бы *полной* и *непротиворечивой* (два качества «хорошести»).

Чтобы пояснить эти качества, прибегнем к простенькой аналогии. Известно, что на плоскости любой вектор $\vec{a}$ можно представить в виде двух составляющих по осям координат:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2, \qquad (3)$$

где векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину. Если вы попытаетесь расширить эту систему векторов, именуемую *базисом*, добавив к ним еще один вектор $\vec{e}_3$, то вам скажут: извините, в двухмерном пространстве это невозможно (рис. 4). Предлагаемый вами вектор $\vec{e}_3$ можно разложить по уже заданному правилу (3), и в этом смысле набор векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ является *полным*. Если же вы будете очень настаивать, то, пожалуйста, добавляйте ваш $\vec{e}_3$, но это будет означать, что вы переходите уже в другое, трехмерное, пространство (или, аналогично, строите другую систему аксиом).

Итак, что же оказалось в пространстве высказываний (если можете, вообразите себе такое пространство)? В 1931 году была доказана теорема Гёделя, смысл которой (очень неточно, но, возможно, понятно) можно передать так: не существует одновременно полной и непротиворечивой системы аксиом. (Не напоминает ли это принцип неопределенности (1) — только не в пространстве p, x, а в пространстве «полнота — непротиворечивость»?!) Если вы зафиксируете число аксиом, то рано или поздно в этой системе придете к утверждению, которое нельзя ни доказать, ни опровергнуть. И уж если очень захотите справиться с этим высказыванием, то придется расширить первоначальную систему аксиом.

Чтобы развлечься, можно вспомнить старый анекдот. Иван привел Романа к мировому судье с жалобой на то, что Роман увел у него единственную корову. «Ты помнишь, г-н Судья, эту корову, — ты еще пил от нее молоко», — сказал Иван. «Да, ты прав, корова твоя», — сказал Судья. «Но, г-н Судья, ты знаешь, у меня четырнадцать детей, им нужно молоко, корова моя», — сказал Роман. «И ты прав», — сказал, подумав, судья. Присутствовавший при этом Секретарь возразил: «Но, господин Судья, они не могут быть правы оба — ведь корова одна». Судья крепко подумал и сказал Секретарю: «И ты прав».

Это иллюстрация того, как Судья допустил выход в другое пространство (построил вектор $\vec{e}_3$, или расширил систему аксиом), уйдя от привычной формальной логики, где действует закон исключенного третьего (или—или; кто не с нами, тот против нас), от диалектики в триалектику, где нет противопоставления черное—белое[1], друг—враг и, следовательно, не нужны судьи, «революционная непримиримость», концлагеря, — туда, где торжествует древневедическая Троица (Агни, Вайю, Сурья), индуистская Тримурти (Кришна, Шива, Вишну) или христианская святая Троица.

Но при чем здесь число π, принцип неопределенности и теорема Гёделя? А при том, что в них (и, конечно, во многое другое) вложен, кажется, какой-то сокровенный смысл, освобождающий от железной необходимости, но освобождающий не совсем (при полной неопределенности был бы, по-видимому, хаос), а чуть-чуть, в виде какого-то намека. Что-то вроде того «оконца», через которое П.Флоренский пытался заглянуть по ту сторону нашего мира. Или тех же обещаний у святого Апостола Павла: «Теперь мы видим как бы сквозь *тусклое* стекло, гадательно, тогда же лицом к лицу; теперь я знаю отчасти, а тогда познаю...» (Первое послание к коринфянам, 13:12).

«Расчеты теоретиков говорят о том, что Вселенная, возможно, состоит из двух наложенных один на другой, очень слабо связанных, почти прозрачных друг для друга миров... вполне возможно, что по соседству с нами, в том же пространстве — времени, существует «параллельный» мир-невидимка, в точности такой же, как наш, а может быть, и совсем не похожий...» (В.А.Барашенков — см. А.С.Кузовкин. «Взгляд ниоткуда». МНПП «Янга-центр», 1991, с. 31).

«... мир то и дело расщепляется на громадное число копий его самого.... Согласно теории Эверетта, наблюдаемая Вселенная — это лишь один пример бесконечного многообразия реально существующих вселенных» (П.Девис. «Случайная Вселенная». М.: Мир, 1985, с. 149).

Итак, что же получается — теперь всякий способный школьник, опираясь на принципы неопределенности, имеет право изучать предметы весьма приблизительно, дескать, сам Бог велел? «Отнюдь!», — как сказал один литературный герой. Наоборот, нашему способному читателю нужно попытаться узнать что-либо как можно более точно — и тогда будет достигнут некий Порог, перед которым возникает ощущение таинственного чуда. И вдуматься — зачем поставлен этот Порог и что скрыто за ним: возможность дальнейшего шага или непреодолимый принцип запрета.

Альберт Стасенко

[1] *Например, Солнце — светило, дающее нам белый день, — с точки зрения термодинамики и квантовой механики является почти идеальным образцом абсолютно черного тела! — и это не игра слов.*

УВАЖАЕМЫЕ ЧИТАТЕЛИ!

Продолжается подписка на журнал «Квант». В первом полугодии 1994 года подписчики получат три номера журнала, один выпуск серии «Библиотечка «Квант» и два выпуска новой серии «Приложение к журналу «Квант». В книжках этой серии будут собраны лучшие материалы со страниц «Кванта» за 23 года его существования. Первый выпуск «Приложений» («Материалы вступительных экзаменов») уже поступил подписчикам 1993 года и распространяется в розницу. В настоящее время редакция работает над следующими выпусками (названия условные):

1. Физический калейдоскоп

(сборник «физических клипов»)

2. Задачи городских и областных олимпиад по математике

3. Школа в «Кванте»

(физика)

4. Школа в «Кванте»

(математика)

5. Практикум абитуриента

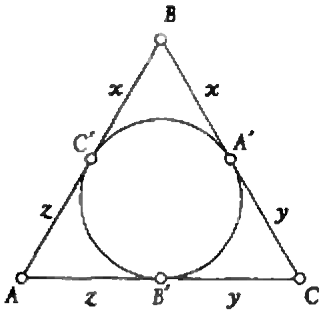
(математика и физика)


B
A
C
A'
C'
Крозмов

Стороны треугольника

РОМАН АЛЕКСЕЕВ, ЛЕВ КУРЛЯНДЧИК

В этой заметке мы расскажем о доказательстве неравенств, связывающих стороны треугольника. Начнем со следующего примера.



Задача 1. *Пусть a, b, c — стороны треугольника. Докажите неравенство*

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3.$$

Решение. Достаточно заметить, что

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}-3=$$

$$=\frac{2\big((a+b-c)(a-b)^2+(a+c-b)(a-c)^2}{(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}+$$

$$+\frac{(b+c-a)(b-c)^2\big)}{(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}\geq 0.$$

Конечно, решение это очень эффектно. Только откуда же взялось это тождество? Такое доказательство скорее напоминает действия фокусника, извлекающего кролика из пустой шляпы...

Но дело в том, что шляпа вовсе не так пуста, как кажется с первого взгляда. В условии сказано, что a, b и c — стороны треугольника. А для доказательства неравенств, связывающих стороны треугольника, существует общий метод, позволяющий довольно просто решать подобные задачи и заодно получать тождества вроде приведенного нами.

Основная идея метода такова. Впишем в треугольник ABC со сторонами a, b, c окружность (см. рисунок). Пусть A', B', C' — точки ее касания с соответствующими сторонами, $AC'=z$, $BA'=x$, $CB'=y$.

Тогда

$$a=x+y,\ b=y+z,\ c=z+x. \qquad (*)$$

Таким образом, если a, b, c — длины сторон треугольника, то существуют положительные числа x, y, z, удовлетворяющие соотношениям $(*)$.

Обратно, если $a=x+y$, $b=y+z$, $c=z+x$, где $x>0$, $y>0$, $z>0$, то очевидно существует треугольник со сторонами a, b, c, причем x, y, z — это длины отрезков, на которые делятся его стороны точками касания с ними вписанной окружности.

При этом, конечно, ясно, что

$$x=\frac{a+c-b}{2},\quad y=\frac{a+b-c}{2},$$

$$z=\frac{b+c-a}{2},$$

или

$$x=p-b,\ y=p-c,\ z=p-a,$$

где $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника.

При помощи подстановки $(*)$ неравенства для сторон треугольника сводятся к неравенствам для произвольных положительных чисел. Часто при этом получаемые неравенства доказываются значительно проще исходных.

Рассмотрим теперь несколько конкретных примеров.

Задача 2. a, b, c — *стороны треугольника. Докажите неравенство*

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leq abc.$$

Решение. Полагая

$$a=x+y,\ b=y+z,\ c=z+x,$$

имеем

$$(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8xyz.$$

Полученное неравенство доказывается совсем просто — для этого достаточно перемножить три очевидных неравенства

$$x+y\geq 2\sqrt{xy},\quad y+z\geq 2\sqrt{yz},$$

$$z+x\geq 2\sqrt{zx}.$$

А можно ли в этой задаче получить тождество, из которого, как и в задаче 1, сразу же будет следовать доказываемое неравенство? Оказывается, можно. Такое тождество сразу же следует из приведенного решения. Действительно,

Графика Дмитрия Крымова

$$abc-(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=$$
$$=(x+y)(y+z)(z+x)-8xyz=$$
$$=x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2y+z^2x-$$
$$-6xyz=x(y-z)^2+y(z-x)^2+$$
$$+z(x-y)^2=\frac{1}{2}\Big((a+c-b)(a-c)^2+$$
$$+(a+b-c)(b-a)^2+(b+c-a)(c-b)^2\Big).$$

Найти это тождество без выполненной нами подстановки значительно сложнее.

Решим теперь задачу М1107 из «Задачника «Кванта».

Задача 3. *a, b, c — стороны треугольника. Докажите неравенство*

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+3.$$

Решение. Пусть по-прежнему $a=x+y$, $b=y+z$, $c=z+x$.

После подстановки приходим к неравенству

$$x^3+y^3+z^3+x^2y+y^2z+z^2x\ge$$
$$\ge 2x^2z+2y^2x+2z^2y.$$

Но

$$x^3+y^3+z^3+x^2y+y^2z+z^2x-$$
$$-2x^2z-2y^2x-2z^2y=$$
$$=x(x-z)^2+y(y-x)^2+z(z-y)^2\ge 0.$$

И из решения этой задачи ясно, что она тоже могла быть решена при помощи тождества. Выпишите его самостоятельно.

Следующая задача предлагалась на XXIV Международной математической олимпиаде. Забавно, но, насколько нам известно, ее не смог решить ни один член жюри.

Задача 4. *a, b, c — стороны треугольника. Докажите неравенство*

$$a^3b+b^3c+c^3a\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2.$$

Решение. Как обычно, обозначим

$$a=x+y,\ b=y+z,\ c=z+x.$$

Тогда

$$a^3b+b^3c+c^3a-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2=$$
$$=(x+y)^2(y+z)(x-z)+(y+z)^2(z+x)\times$$
$$\times(y-x)+(z+x)^2(x+y)(z-y)=$$
$$=2x^3z+2y^3x+2z^3y-2x^2yz-2y^2xz-$$
$$-2z^2xy=2\Big(xz(x-y)^2+xy(y-z)^2+$$
$$+yz(z-x)^2\Big)\ge 0.$$

Вернемся теперь к примеру, с которого мы начали. В соответствии с нашим методом имеем

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}=$$
$$=\frac{x+y}{2z}+\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}.$$

Складывая теперь три очевидных неравенства

$$\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\ge 2,\quad \frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2,\quad \frac{y}{z}+\frac{z}{y}\ge 2,$$

получаем требуемое.

Из этого рассуждения ясно, откуда взялось приведенное нами решение этой задачи. Действительно,

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}-3=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}-2\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}-2\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)\right)=\frac{1}{2xyz}\Big(x(y-z)^2+$$
$$+y(z-x)^2+z(x-y)^2\Big)=$$
$$=\frac{2\Big((a+b-c)(a-b)^2+(a+c-b)(a-c)^2}{(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}+$$
$$+\frac{(b+c-a)(b-c)^2\Big)}{(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}\ge 0.$$

В заключение предлагаем несколько упражнений.

Упражнения

Пусть a, b, c — стороны треугольника, S — его площадь, p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности. Докажите неравенства:

1. $2(ab+bc+ca)>a^2+b^2+c^2$.
2. а) $a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S$;
   б) $ab+bc+ca\ge 4\sqrt{3}S$;
   в) $a^2+b^2+c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2\ge$ $\ge 4\sqrt{3}S$.
3. $\dfrac{1}{(p-a)^2}+\dfrac{1}{(p-b)^2}+\dfrac{1}{(p-c)^2}\ge\dfrac{1}{r^2}$.
4. $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc>$ $>a^3+b^3+c^3$.
5. $a^2(2b+2c-a)+b^2(2a+2c-b)+$ $+c^2(2a+2b-c)\ge 9abc$.

Список читателей, приславших правильные решения (Начало на странице 52)

ФИЗИКА

А.Аграновский (Воткинск) 80, 84, 86; *Ю.Адамов* (Минск) 64, 70, 71; *К.Алкалаев* (Улан-Удэ) 70; *Д.Апальков* (Харьков) 43—87; *Ю.Арбузов* (Старый Оскол) 80; *Г.Асадова* (Имишли) 64; *С.Бабенкова* (Тамбов) 50, 64; *Ю.Баскаков* (Москва) 80, 82, 84—86; *В.Беляев* (Старый Оскол) 80; *А.Бикмуллина* (Казань) 80; *А.Боднарь* (Винница) 62—66; *А.Болтасева* (Канаш) 53—57, 86; *В.Бородко* (Минск) 64; *В.Борохов* (Керчь) 54, 55, 57; *Е.Буравцов* (Уфа) 63; *А.Быстров* (Нижний Новгород) 54, 55; *А.Ващилко* (Барановичи) 43—83; *А.Ветров* (Северодвинск) 44, 45, 49, 53, 57, 59, 66; *А.Волозин* (Севастополь) 45, 47, 51, 54, 55, 64, 66, 69, 78; *А.Галушко* (Борисов) 43; *В.Горгадзе* (Нальчик) 45, 47, 53—57, 59, 62; *О.Горшенюк* (Киев) 69, 71, 72; *С.Гращенко* (Барнаул) 43—87; *П.Гребенев* (Кузнецовск) 55, 57, 62; *В.Ежергин* (Москва) 84—86; *М.Емеленко* (Ижевск) 86; *А.Ефимов* (Алма-Ата) 51, 59, 62; *С.Жак* (Тернополь) 43—87; *В.Жукова* (Кузнецовск) 62, 64—66; *Б.Иманов* (Алма-Ата) 43—87; *Д.Иринич* (Новгород) 54; *А.Итин* (Калининград) 54—57, 65, 73, 75, 80, 84, 86; *Н.Кащеева* (Новосибирск) 55, 57, 62; *А.Кильдяков* (Волгоград) 64, 74, 75, 86; *А.Кирилюк* (Одесса) 43—81; *Т.Кириченко* (Киев) 63, 64, 70; *С.Кныш* (Каменец-Подольский) 68—71, 73—77; *М.Коваленко* (Черкассы) 84, 86; *А.Ковалев* (Вятка) 44, 45, 64, 66, 69, 70, 73; *К.Коваль* (Запорожье) 64—66; *Н.Козачок* (п. Червоноармейск Житомирской обл.) 86; *Б.Койчубаев* (Алма-Ата) 43—87; *А.Колесников* (Воронеж) 52, 62—64; *М.Конаков* (Алатырь) 59, 66; *А.Кононенко* (Киев) 78, 80; *М.Косицин* (Тольятти) 48—87; *С.Костин* (Москва) 53, 54; *А.Кравцов* (Старый Оскол) 69; *М.Кузнецов* (Волгоград) 86; *Р.Лазаускас* (Вильнюс) 74, 76, 84, 86; *П.Левин* (Москва) 43—46, 48—50, 62, 68—71; *В.Леонов* (Старый Оскол) 48; *Р.Липский* (Винница) 62; *А.Ломака* (с. Шпаковское Ставропольского кр.) 54, 55, 57; *О.Ломакин* (п. Новый Городок Московской обл.) 64; *А.Мазалов* (Старый Оскол) 80; *С.Макаров* (Усинск) 66; *О.Маслаков* (Старый Оскол) 80; *В.Матусевич* (Минск) 70; *П.Мелентьев* (Старый Оскол) 48—77; *В.Мушик* (Кузнецовск) 48—87; *А.Мясоед* (Старый Оскол) 59— 67, 77, 80, 82; *Т.Назарова* (Желтые Воды) 80, 82; *А.Наливайко* (Старый Оскол) 59—87; *А.Нарыжный* (п. Африканда Мурманской обл.) 64; *С.Нечаев* (Борисов) 43; *Д.Новиков* (Минск) 55—57, 69; *С.Носенко* (п. Черноголовка Московской обл.) 48, 54, 57, 59, 63, 64, 66; *А.Носиков* (Винница) 62—65, 75; *К.Нурматов* (Наманган) 84; *А.Памфилов* (Киев) 57; *Д.Пастухов* (Витебск) 62, 64—69, 71, 84—86; *В.Перетятькин* (Алма-Ата) 63; *А.Пикалов* (Канаш) 49, 53—57, 70, 80, 81; *В.Понамарев* (Уфа) 48, 51, 56, 64, 66; *В.Понкратов* (Старый Оскол) 47, 53—87; *Е.Постников* (Курск) 53, 54, 57; *С.Пфлюк* (Алма-Ата) 43—87; *В.Регельман* (Баку) 47, 64, 66, 72, 80, 84, 86; *Н.Рогачев* (Алма-Ата) 44, 50— 87; *А.Романченко* (Минск) 86; *В.Рыбачук* (Винница) 54—57, 63—67, 75; *В.Садртдинов* (Старый Оскол) 80; *Н.Семичев* (Тамбов) 86; *А.Серафимович* (Борисов) 43; *А.Сиксаренко* (Киев) 54—57, 62, 63, 66, 67; *А.Синицын* (Тула) 55, 57; *Н.Синицын* (Минск) 69, 70, 84; *И.Сихарулидзе* (Тбилиси) 63; *Д.Смирнов* (Кузнецовск) 43—87; *В.Сушков* (Винница) 64, 67, 75; *И.Тимощук* (с. Черница Ровенской обл.) 53, 57, 66, 71, 86; *М.Титов* (Киев) 53—55, 57; *Д.Тищенко* (Старый Оскол) 80; *Б.Ткаченко* (Запорожье) 86; *М.Трусов* (п. Андреевка Московской обл.) 84, 86; *С.Тумаха* (Киев) 43—87; *М.Федин* (Алма-Ата) 55; *Д.Федорец* (Харьков) 43, 45, 54; *Д.Федотов* (Алма-Ата) 43; *А.Хамхидько* (Старый Оскол) 80; *Р.Хапков* (Старый Оскол) 53—87; *М.Химич* (Кузнецовск) 49—87; *П.Хрущ* (Брест) 55; *В.Худяков* (Пенза) 48, 49, 51, 53—57, 59; *Е.Цыпин* (Северодвинск) 55; *Р.Шевяков* (Волгоград) 64, 74, 75, 86; *А.Шелудько* (Киев) 55, 84, 86; *А.Шеншин* (Винница) 62; *И.Ширяев* (Кузнецовск) 43—87; *О.Шпырко* (Киев) 43—67; *А.Шувалов* (Москва) 49; *Т.Шульман* (Вологда) 86; *А.Юзвик* (Кустанай) 63; *Р.Якупов* (Кузнецовск) 43—82; *Р.Янченко* (Кузнецовск) 43—81.

обратимые и необратимые процессы в термодинамике

Александр Шеронов

В термодинамике для описания состояния систем, состоящих из большого числа атомов и молекул, используются макроскопические величины, например давление, температура, объем, внутренняя энергия и др. Эти понятия вводятся на основе физического эксперимента, он же является основой всех закономерностей, обуславливающих их связь между собой для конкретных макроскопических систем — газов, жидкостей или твердых тел.

Одна из важнейших задач теории и эксперимента — нахождение уравнения состояния вещества. В школьном курсе физики хорошо известно уравнение состояния идеального газа

$$pV = \frac{m}{M} RT,$$

связывающее его давление p и объем V с массой m, молярной массой M, абсолютной температурой T и универсальной газовой постоянной R. Важно подчеркнуть, что это уравнение справедливо для газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия, когда давление и температура по всему объему одинаковы. Для смеси разных газов, содержащихся в некотором объеме, давление определяется суммой парциальных давлений газов — закон Дальтона. Этот закон выполняется при условии не только равенства температур газов, но и однородности смеси по всему объему.

С известными ограничениями — не очень большая плотность, не очень низкие или высокие, по сравнению с «нормальными», температуры — уравнение состояния идеального газа используется для описания реальных газов, в том числе многоатомных. Часто оно же применяется и для типично неравновесных систем — таких, например, как земная атмосфера. Хотя в реальной атмосфере с высотой сложным образом изменяются давление, температура и химический состав газов, уравнение состояния достаточно точно описывает ее поведение на какой-то высоте или в небольшом объеме — например, в пределах одной комнаты.

Отметим, наконец, что уравнение состояния идеального газа используют для описания поведения паров, в том числе и насыщенных. При этом необходимо отчетливо понимать, чем ограничены возможности такого описания. Так, для насыщенного пара, если он таковым остается в течение всего процесса, давление определяется только температурой, причем для разных жидкостей величины давлений при одних и тех же температурах могут сильно отличаться. Однако с помощью уравнения состояния можно найти, например, массу пара в данном объеме, если известны давление и температура.

Важное значение в термодинамике имеет понятие квазистатического, или обратимого процесса изменения состояния макроскопической системы. В ходе такого процесса

Графика Дмитрия Крымова

состояние системы должно изменяться так медленно, чтобы каждое промежуточное состояние было равновесным. Обратимый процесс допускает возможность возвращения системы в первоначальное состояние через ту же последовательность промежуточных состояний, что и в прямом процессе.

Основным законом, описывающим обратимые процессы, является закон сохранения энергии — первое начало термодинамики

$$Q = \Delta U + A.$$

Здесь Q — подведенное в процессе количество теплоты, ΔU — изменение внутренней энергии системы и A — работа системы против внешнего давления.

Внутренняя энергия системы — функция состояния, так что если начальное и конечное состояния системы равновесны, то изменение внутренней энергии не зависит от процесса перехода системы между ними. Для идеального газа внутренняя энергия зависит только от температуры:

$$U = \frac{m}{M} C_V T.$$

Коэффициент C_V называют молярной теплоемкостью при постоянном объеме. Для одноатомного газа он равен $3R/2$, а для двухатомного $5R/2$.

Работа и подведенное количество теплоты существенно зависят от способов перевода системы из начального состояния в конечное. Более того, изобразить процесс наглядно, например в виде графика зависимости давления от объема системы, и вычислить работу по известным формулам возможно только для обратимых процессов.

В школьном курсе достаточно подробно обсуждаются простейшие так называемые частные процессы — изохорический, изобарический и изотермический. Все они — обратимы. Широко используется в технике и нередко встречается в жизни еще один частный процесс изменения состояния макроскопических систем — адиабатический, происходящий без подвода либо отвода тепла. Так, адиабатическое расширение газов используется при их сжижении, в работе пневматических молотков, для получения пересыщенного пара в камере Вильсона — приборе для наблюдения следов заряженных частиц в ядерной физике. Близким к адиабатическому оказывается процесс распространения звуковых волн в различных средах. Теплоемкость в адиабатическом процессе по определению равна нулю, а работа, совершенная газом, равна изменению внутренней энергии, взятому с обратным знаком.

Ввиду важности адиабатического процесса приведем вывод его уравнения для идеального газа.

Закон сохранения энергии в адиабатическом процессе, записанный для двух близких состояний, отличающихся по температуре и объему на малые величины dT и dV, имеет вид

$$dQ = dU + dA = C_V dT + p dV = 0.$$

Используя уравнение состояния для моля газа $pV = RT$, имеем

$$C_V \frac{dT}{T} + R\frac{dV}{V} = 0.$$

Вспомним формулу для производной логарифмической функции:

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

и проинтегрируем наше равенство:

$$\ln\left(T^{C_V} V^R\right) = \text{const}.$$

Отсюда получаем

$$T^{C_V} V^R = \text{const},$$

или

$$pV^{\frac{C_V + R}{C_V}} = pV^{\gamma} = \text{const}.$$

Коэффициент $\gamma = (C_V + R)/C_V$ называется показателем адиабаты. Для одноатомного газа $\gamma = 5/3$, а для двухатомного $\gamma = 7/5$.

Рассмотрим теперь несколько конкретных задач.

Задача 1. *Спустя некоторое время после включения нагревателя в комнате установилась более высокая температура. Как изменилась внутренняя энергия воздуха, содержащегося в комнате? Вследствие негерметичности давление воздуха в комнате сохраняется равным наружному.*

Для решения задачи будем считать, что начальное и конечное состояния воздуха в комнате равновесные, хотя сам процесс нагрева и не является обратимым.

Внутренняя энергия воздуха, масса которого m, молярная масса M и температура T, есть

$$U = \frac{m}{M} C_V T.$$

Уравнение состояния воздуха имеет вид

$$pV = \frac{m}{M} RT.$$

Если давление p и объем V воздуха в комнате не меняются, то очевидно, что сохраняется неизменным произведение массы воздуха на его температуру. А это, в свою очередь, означает, что внутренняя энергия воздуха, остающегося в комнате, постоянна и не зависит от его температуры. Понятно, что это происходит потому, что часть нагретого воздуха выходит из комнаты наружу.

Задача 2. *Найдите массу и внутреннюю энергию воздуха, находящегося между двойными рамами окна. Считайте, что температура воздуха там меняется по линейному закону от наружной $T_н$ до внутренней $T_в$, а давление всюду одно и то же и равно наружному p_0. Толщина воздушной прослойки L, площадь рамы S.*

В тонком слое сечением S и толщиной dx, находящемся на расстоянии x от наружного стекла, воздух будем считать равновесным с температурой

$$T_x = T_н + \frac{T_в - T_н}{L} x.$$

Уравнение состояния массы dm воздуха, содержащегося в этом слое, запишем в виде

$$p_0 S dx = \frac{dm}{M} RT_x.$$

Полную массу воздуха найдем по формуле

$$m = \int_0^L \frac{M p_0 S dx}{R\left(T_н + \left(T_в - T_н\right) x/L\right)} =$$

$$= \frac{M p_0 SL}{R\left(T_в - T_н\right)} \ln\left(T_н + \frac{T_в - T_н}{L} x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=L} =$$

$$= \frac{M p_0 SL}{R\left(T_в - T_н\right)} \ln\frac{T_в}{T_н}.$$

Аналогично, для внутренней энергии воздуха получим

$$dU = \frac{dm}{M} C_V T_x = \frac{C_V}{R} p_0 S dx$$

и

$$U = \int_0^L \frac{C_V}{R} p_0 S dx = \frac{5}{2} p_0 SL.$$

Видно, что если давление остается постоянным, то полная внутренняя энергия воздуха, содержащегося между двойными рамами окна, не зависит от распределения температуры по толщине слоя.

Задача 3. *Тонкая U-образная трубка с открытыми концами заполнена жидкостью плотностью ρ и поставлена вертикально (рис. 1). Период малых колебаний уровня жидкости в трубке в поле тяжести оказался равным T_1. Если на концы трубки плотно насадить два полых шара, заполненных воздухом при атмосферном давлении p_0, то период малых колебаний жидкости в трубке уменьшается и становится равным T_2. Считая процесс сжатия и разрежения воздуха в шарах при колебаниях жидкости адиабатическим, найдите величину показателя адиабаты. Объем каждого шара равен объему налитой в трубку жидкости. Объемом незаполненной части трубки при колебаниях жидкости можно пренебречь.*

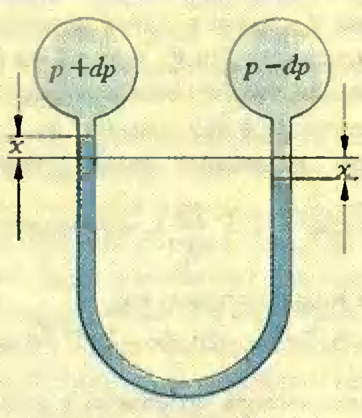


Рисунок 1

Пусть x — смещение уровня жидкости в каждом колене от положения равновесия. Тогда сила, возвращающая жидкость в положение равновесия, в первом случае равна $2\rho g S x$, где S — сечение трубки. Уравнение колебаний жидкости имеет вид

$$\rho L S x'' = -2\rho g S x,$$

и для круговой частоты колебаний получаем

$$\omega_1^2 = 4\pi^2/T_1^2 = 2g/L,$$

где L — длина части трубки, заполненной жидкостью.

Во втором случае, когда трубка закрыта шарами, изменение объема воздуха в них на $dV = Sx$ вызывает изменение давления на dp. Поэтому при колебаниях уровня жидкости возникает добавочная возвращающая сила $2Sdp$. Связь между dp и dV найдем, используя уравнение адиабаты $pV^\gamma = \text{const}$. Продифференцировав это равенство по объему (или давлению), находим

$$dp = -\gamma\frac{p}{V}dV = -\gamma\frac{p_0}{V_0}dV.$$

Здесь учтено, что при колебаниях давление p и объем V воздуха в шарах меняются мало по сравнению с p_0 и V_0; знак «—» в равенстве означает, что увеличение объема шара на dV уменьшает в нем давление на dp. Таким образом, добавочная возвращающая сила равна $2Sdp = 2\gamma S^2\frac{p_0}{V_0}x$, и уравнение колебаний жидкости имеет вид

$$\rho LSx'' = -2\rho gSx - 2\gamma S^2\frac{p_0}{V_0}x.$$

Круговая частота колебаний в этом случае определяется формулой

$$\omega_2^2 = 4\pi^2/T_2^2 = 2g/L + 2\gamma S p_0/(V_0L).$$

Сравнив ω_1^2 и ω_2^2, при условии $V_0 = SL$ имеем окончательно

$$\gamma = \frac{\rho g^2}{2\pi^2 p_0}\frac{T_1^2}{T_2^2}\left(T_1^2 - T_2^2\right).$$

Задача 4. *Найдите зависимость температуры от высоты в так называемой адиабатической атмосфере, когда давление и температура порции воздуха, взятой у поверхности земли, связаны с давлением и температурой на высоте h уравнением адиабаты.*

На высоте h давление $p(h)$, плотность воздуха $\rho(h)$ и температура $T(h)$ связаны уравнением состояния

$$p(h) = \rho(h)RT(h)/M.$$

Уравнение адиабаты в переменных p и T имеет вид

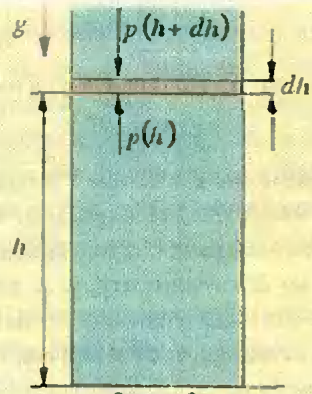


Рисунок 2

$$p(h)T(h)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{const}.$$

Рассмотрим условие механического равновесия слоя воздуха единичного сечения толщиной dh с плотностью $\rho(h)$, находящегося на высоте h (рис. 2). Очевидно, что разность сил давления на верхнюю и нижнюю поверхности слоя уравновешивается силой тяжести:

$$p(h + dh) - p(h) = dp = -\rho(h)gdh.$$

Знак «—» в этом выражении означает, что давление уменьшается с высотой; ускорение свободного падения g можно считать не зависящем от высоты, так как толщина атмосферы мала по сравнению с радиусом Земли.

Найдем связь между изменением давления dp и изменением температуры dT в слое воздуха dh, для чего продифференцируем уравнение адиабаты по температуре (или давлению):

$$dp = \frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{p}{T}dT.$$

Подставив это выражение и уравнение состояния в условие механического равновесия, получим

$$dT = -\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{Mg}{R}dh.$$

Формула показывает, что градиент температуры в адиабатической атмосфере постоянен и равен

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{Mg}{R} = -10\cdot10^{-3}\quad\text{К/м}.$$

Таким образом, температура в «адиабатической» атмосфере должна уменьшаться на 10 градусов на каждый километр высоты, так что вся атмосфера должна быть высотой порядка 30 км.

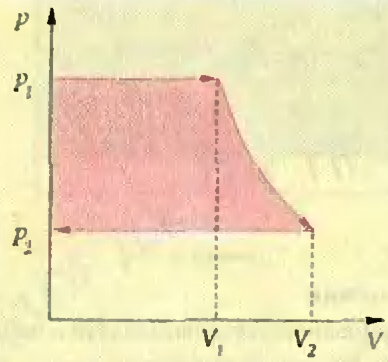


Рисунок 3

Заметим, что существует более известная модель так называемой изотермической атмосферы, в которой зависимость давления от высоты описывается барометрической формулой

$$p(h) = p(0)e^{-h/7,5},$$

где h отсчитывается от поверхности Земли и измеряется в километрах. Попробуйте самостоятельно сравнить эти модели, хотя, конечно, реальная атмосфера не укладывается ни в ту, ни в другую.

Задача 5. *Модель пневматического молотка работает от резервуара со сжатым воздухом по следующей схеме (рис. 3). Вначале воздух из резервуара с некоторым давлением p_1 и температурой T_1 заполняет часть объема V_1 рабочего цилиндра молотка. Затем эта порция воздуха совершает работу, адиабатически расширяясь до атмосферного давления p_2, большего объема V_2 и меньшей температуры T_2. На последнем этапе, при обратном ходе поршня, этот воздух вытесняется из рабочего цилиндра при постоянном давлении p_2 и температуре T_2. Затем цикл повторяется. Найдите работу, совершаемую за цикл молотком, если расход воздуха равен одному молю, а разность температур T_1 и T_2 равна ΔT.*

Работа за цикл численно равна площади фигуры, заштрихованной на рисунке 3. На первом этапе совершается работа

$$A_1 = p_1V_1 = RT_1.$$

На этапе адиабатического расширения совершается работа, равная изменению внутренней энергии, взятому с обратным знаком:

$$A_{12} = -(U_2 - U_1) = C_V(T_1 - T_2) = C_V\Delta T.$$

На последнем этапе молотком совершается отрицательная работа

$$A_2 = -p_2V_2 = -RT_2.$$

Полная работа за цикл равна

$$A = A_1 + A_{12} + A_2 = (C_V + R)\Delta T.$$

Теперь рассмотрим несколько простых задач, в которых встречаются необратимые процессы. При решении таких задач требуется предварительный анализ начального и конечного состояний.

Задача 6. *В вертикально стоящем цилиндре под поршнем заперт идеальный газ. Наружное давление равно атмосферному p_0. Если на поршень поставить гирю, масса которой равна массе поршня, то через некоторое время объем, занимаемый газом, уменьшается в 1,5 раза. Какое начальное давление было в цилиндре? Стенки цилиндра проводят тепло.*

При скачкообразном увеличении нагрузки процесс сжатия газа будет необратимым. Если трение поршня о стенки мало, то возникнут колебания поршня. Энергия этих колебаний будет постепенно уменьшаться — частично рассеиваться в виде тепла, уходящего через стенки цилиндра, а частично передаваться молекулам наружного воздуха при их соударениях с поршнем.

В нашем случае понятно, что начальное и конечное состояния газа в цилиндре будут характеризоваться одной и той же температурой, однако сам процесс перехода не будет изотермическим. Не привлекая дополнительных условий, невозможно, например, найти работу, совершенную внешними силами над газом в цилиндре.

Для начального и конечного состояний имеем

$$(p_0 + p_1)V_1 = (p_0 + 2p_1)V_2.$$

По условию

$$V_1 = 1,5V_2.$$

Отсюда находим

$$p_1 = p_0.$$

Таким образом, начальное давление в цилиндре было $2p_0$.

Задача 7. *Моль идеального одноатомного газа из начального состояния 1 с температурой $T_1 = 100$ К, расширяясь через турби-*

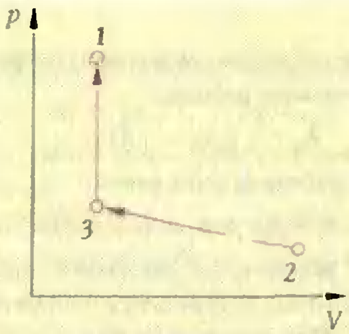


Рисунок 4

ну в пустой сосуд, совершает некоторую работу и переходит в состояние 2. Этот процесс происходит без подвода либо отвода тепла. Затем газ сжимают в процессе 2—3 линейной зависимости давления от объема и, наконец, по изохоре 1—3 возвращают в исходное состояние (рис. 4). Найдите работу, совершенную газом при расширении через турбину в переходе 1—2, если в процессах 2—3—1 к газу в итоге подведено количество теплоты $Q = 72$ Дж. Известно, что $T_2 = T_3$, $V_2 = 3V_1$.

Процесс расширения газа через турбину в пустой сосуд необратим. Однако, если начальное и конечное состояния газа равновесны, то на основании закона сохранения энергии можно утверждать, что газ совершает работу за счет своей внутренней энергии:

$$A_{12} = -C_V\left(T_2 - T_1\right).$$

На участке 2—3 внутренняя энергия в начале и в конце одна и та же, поэтому отведенное тепло равно совершенной над газом работе:

$$Q_{23} = A_{23} = \frac{p_2 + p_3}{2}\left(V_2 - V_3\right) = \frac{4}{3}RT_2.$$

Работа на участке 3—1 не совершается, поэтому подведенное на этом участке тепло равно увеличению внутренней энергии:

$$U_{23} = C_V\left(T_1 - T_2\right) = A_{12}.$$

По условию

$$Q = Q_{31} - \left|Q_{23}\right| = A_{12} - \frac{4}{3}RT_2.$$

Из этого равенства находим T_2 и затем работу A_{12}:

$$A_{12} = \frac{3}{2}R\left(T_1 - T_2\right) = \frac{9}{17}Q + \frac{12}{17}RT_1 \approx 628 \text{ Дж.}$$

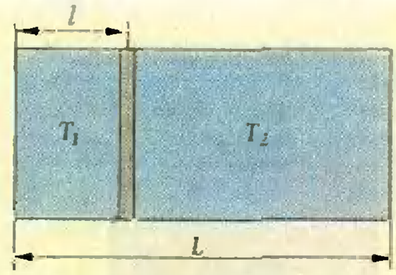


Рисунок 5

Упражнения

1. При выполнении условий задачи 2 найдите среднюю внутреннюю энергию, приходящуюся на одну молекулу воздуха. Наружная температура $T_н = -50$ °С, внутренняя $T_в = +50$ °С.

2. Тонкая подвижная теплопроводящая перегородка делит герметичный горизонтально расположенный цилиндр длиной L на две части, в которых находится по 1 молю идеального газа (рис. 5). Торцы цилиндра поддерживаются при разных температурах T_1 и T_2, так что внутри в газе устанавливается линейная зависимость температуры от расстояния $T(l) = T_1 + \left(T_2 - T_1\right)l/L$. Найдите равновесное положение подвижной перегородки.

3. С помощью интегрирования уравнения адиабаты, не вычисляя работы на изобарических участках (см. рис. 3), покажите справедливость приведенной в решении задачи 5 формулы для работы, совершаемой газом за цикл.

4. Два теплоизолированных сосуда соединены трубкой с краном. Первый сосуд содержит ν_1 молей газа с теплоемкостью C_{V_1} и температурой T_1, второй — ν_2 молей газа с теплоемкостью C_{V_2} и температурой T_2. Какое давление установится в сосудах, если открыть кран? Общий объем сосудов V_0.

5. Теплоизолированный цилиндр, поставленный вертикально, содержит моль одноатомного газа под тяжелым теплонепроницаемым поршнем. Во сколько раз изменится температура в газе, если на поршень поставить гирю, удваивающую его вес? Внешнее давление отсутствует. Потери на трение поршня о стенки цилиндра и теплоемкость стенок и поршня считать малыми. Сравните найденное изменение температуры с изменением температуры в адиабатическом обратимом процессе увеличения внешнего давления вдвое. ■

(РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ДЕТЕКТИВ) ПРОДОЛЖЕНИЕ. НАЧАЛО СМОТРИ РАНЕЕ

ИНСПЕКТОР ДЖОНС ПРОТИВ НЕГОЛОНОМНОГО СЭМА

ИНСПЕКТОР ДЖОНС ПРОТИВ НЕГОЛОНОМНОГО СЭМА
ИНСПЕКТОР ДЖОНС ПРОТИВ НЕГОЛОНОМНОГО СЭМА
ИНСПЕКТОР ДЖОНС ПРОТИВ НЕГОЛОНОМНОГО СЭМА

$$= B_k\left(\Delta A^k + \frac{1}{2} A^i R^k_{ilm} \Delta f^{lm}\right) = 0$$

Краткое содержание предыдущих глав:

$$\Delta\left(A^k B_k\right) = A^k \Delta B_k + B_k \Delta A^k =$$
$$= -\frac{1}{2} A^k B_i R^i_{klm} \Delta f^{lm} + B_k \Delta A^k =$$
$$= B_k\left(\Delta A^k + \frac{1}{2} A^i R^k_{ilm} \Delta f^{lm}\right) = 0.$$

Глава ... дцать седьмая

Как и каждое утро, инспектор Джонс делал зарядку.

—Сориентируйте ноги вдоль оси Z! — гремело радио. —Руки вдоль X! Вдоль Y! Вдоль X! Зарядка окончена. Прослушайте информацию из пространства событий. В особой точке изотропного пространства вновь объявился Неголономный Сэм.

Через несколько минут инспектор Джонс и сержант Спецкурс уже мчались вдоль мировой линии.

* * *

Машина остановилась. Инспектор, крякнув, распрямился после лоренцева сокращения и открыл дверцу. Выйдя из машины, он очутился перед закрытой изотропной моделью пространства.

—Откройте, полиция! — закричал Джонс.

Кривизна пространства плавно изменила знак, и глазам инспектора предстал Неголономный Сэм, лениво жонглировавший индексами, покачиваясь на гравитационных волнах в роскошном бассейне.

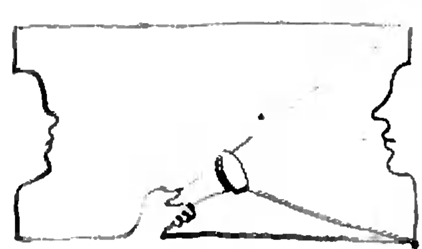
—Руки вверх! — приказал инспектор Джонс и направил на гангстера луч своего фонаря.

—А я нерелятивистский! — мягко улыбнулся Сэм, вышел из светового конуса и скрылся в абсолютном прошлом.

Раздался отчаянный крик. Это подручные Неголономного Сэма квантовали сержанта Спецкурса.

Продолжение следует написать

В.Зеленков



Задачи Московской математической олимпиады 1993 года

8 класс

1. Обозначим через $s(x)$ сумму цифр натурального числа x. Решите уравнения:
а) $x + s(x) + s(s(x)) = 1993$;
б) $x + s(x) + s(s(x)) + s(s(s(x))) = 1993$.
Б. Кукушкин, А. Спивак

2. Известно, что число n является суммой квадратов трех натуральных чисел. Докажите, что n^2 тоже является суммой квадратов трех натуральных чисел.
В. Слитинский

3. На прямой стоят две фишки, слева красная, а справа — синяя. Разрешается производить одну из двух операций: вставку двух фишек одного цвета подряд в любом месте прямой и удаление любых двух соседних одноцветных фишек. Можно ли за конечное число операций оставить на прямой ровно две фишки: красную справа, а синюю слева?
А. Белов, Н. Константинов

4. Придворный астролог царя Гороха называет время суток хорошим, если на часах с центральной секундной стрелкой при мгновенном обходе циферблата по ходу часов минутная стрелка встречается после часовой и перед секундной. Какого времени больше — хорошего или плохого?
Д. Ботин

5. Существует ли конечное слово из букв русского алфавита, в котором нет двух соседних одинаковых подслов, но таковые появляются при приписывании (как слева, так и справа) любой буквы русского алфавита?
фольклор, сообщил А. Спивак

6. Окружность с центром D проходит через точки A, B и центр O вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся его стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.
И. Акулич

9 класс

1. Для двух данных различных точек плоскости A и B найдите геометрическое место таких точек C, что треугольник ABC остроугольный, а его угол A — средний по величине.
И. Шарыгин

2. Найдите x_{1000}, если $x_1 = 4$, $x_2 = 6$ и x_n — наименьшее составное число, большее $2x_{n-1} - x_n$ при любом натуральном $n>2$.
С. Конягин

3. Бумажный треугольник с углами 20°, 20° и 140° разрезают по одной из биссектрис на два треугольника, один из которых также разрезают по биссектрисе и т.д. Может ли после нескольких разрезов получиться треугольник, подобный исходному?
А. Галочкин

4. У Пети всего 28 одноклассников. У каждых двух из 28 различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети?
С. Токарев

5. Каждой паре чисел x и y поставлено в соответствие число $x*y$. Найдите $1993*1935$, если известно, что для любых трех чисел x, y и z выполнены тождества $x*x = 0$ и $x*(y*z) = (x*y)*z$.
Г. Гальперин

6. Дан выпуклый четырехугольник $ABMC$, в котором $AB = BC$, $\angle BAM = 30°$, $\angle ACM = 150°$. Докажите, что AM — биссектриса угла BMC.
И. Шарыгин

10 класс

1. При разложении чисел A и B в бесконечные десятичные дроби длины минимальных периодов этих дробей равны 6 и 12 соответственно. Чему может быть равна длина минимального периода числа $A + B$?
С. Гашков

2. Дед барона К.Ф.И. фон Мюнхгаузена, построив квадратный замок, разделил его на 9 равных квадратных залов и в центральном зале разместил арсенал. Отец барона разделил каждый из оставшихся 8 залов на 9 равных квадратных холлов и во всех центральных холлах строил зимние сады. Сам барон разделил каждый из 64 свободных холлов на 9 равных комнат и в каждой из центральных комнат устроил бассейн, а остальные сделал жилыми. Барон хвастается, что ему удалось обойти все жилые комнаты по одному разу и вернуться в исходную. (В каждой стене между двумя соседними жилыми комнатами проделана дверь). Могут ли слова барона быть правдой?

С.Гашков

3. Река соединяет два круглых озера радиусом 10 километров каждое, а береговые линии состоят из отрезков и дуг окружностей. От любой точки на любом из двух берегов реки можно доплыть до другого берега, проплыв не более одного километра. Всегда ли лоцман может провести корабль вдоль реки так, чтобы находиться все время на расстоянии не более, чем а) 700 метров, б) 800 метров от каждого из берегов? (Корабль следует считать точкой.)

Г.Кондаков

4. Для каждой пары действительных чисел a и b рассмотрим последовательность чисел $p_n = [2\{an+b\}]$ (здесь $[c]$ — целая часть, а $\{c\}$ — дробная часть числа c). Любые k подряд идущих членов этой последовательности назовем словом. Верно ли, что любой упорядоченный набор из нулей и единиц длины k будет словом последовательности, заданной некоторыми a и b:

а) при $k=4$; б) при $k=5$?

А.Владимиров, Р.Измайлов

5. В ботаническом определителе растения описываются ста признаками. Каждый из признаков может либо присутствовать, либо отсутствовать. Определитель считается хорошим, если любые два растения различаются более чем по половине признаков. Докажите, что в хорошем определителе не может быть описано более пятидесяти растений.

Д.Терешин, М.Вилый

6. На стороне AB треугольника ABC внешним образом построен квадрат с центром O. Точки M и N — середины сторон AC и BC соответственно, а длины этих сторон равны соответственно a и b. Найдите максимум суммы $OM+ON$, когда угол ACB меняется.

И.Шарыгин

11 класс

1. Известно, что $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = p$, $\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta = q$. Найдите $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$.

А.Белов

2. Единичный квадрат разбит на конечное число квадратиков (размеры которых могут различаться). Может ли сумма периметров квадратиков, пересекающихся с главной диагональю, быть больше 1993?

А.Белов

3. Даны n точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Через каждую пару точек проведена прямая. Какое минимальное число попарно непараллельных прямых может быть среди них?

А.Анджанс

4. В ящиках лежат камни. За один ход выбирается число n, затем камни в ящиках делятся на группы по n штук и остаток менее чем n штук. Оставляют по одному камню из каждой группы и весь остаток. Можно ли за 5 ходов добиться, чтобы в ящиках осталось ровно по одному камню, если в каждом из них изначально было а) не более 460 камней; б) не более 461 камня?

С.Гусейн-Заде, А.Белов

5. а) Известно, что область определения функции $f(x)$ — отрезок $[-1, 1]$ и $f(f(x))=-x$ при всех x, а ее график является объединением конечного числа точек и интервалов. Нарисуйте график функции $f(x)$.

б) Можно ли это сделать, если область определения функции— интервал $(-1,1)$? Вся числовая ось?

А.Белов

6. Муха летает внутри правильного тетраэдра с ребром a. Какое наименьшее расстояние она может пролететь, чтобы побывать на каждой грани и вернуться в исходную точку?

И.Шарыгин

Публикацию подготовил В.Тихомиров

Избранные задачи Московской физической олимпиады

Перед условием каждой задачи в скобках указано, учащимся каких классов она предлагалась.

I тур

1(9,10,11). Альпинистская капроновая веревка подчиняется закону Гука, пока не разрывается при натяжении $F = 22000$ Н, будучи растянутой на $k=25\%$ от своей первоначальной длины. Стандартный способ испытания веревки такой (рис.1): конец веревки длиной L закрепляют на стене и с высоты L сбрасывают груз массой M, привязанный к другому концу. При какой максимальной массе груза веревка обязана выдержать рывок?

Рисунок 1

2(9,10). Лестница состоит из одинаковых ступенек, ширина и высота которых равны. Некто с размаху бросает в эту лестницу маленький упругий тяжелый мяч («супербол») сверху вниз под углом 30° к горизонту (рис. 2). В каком направлении отскочит мяч? Силой тяжести можно пренебречь.

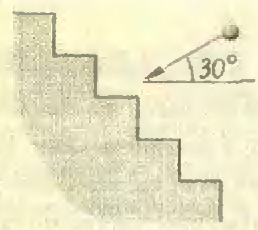


Рисунок 2

3(9,10,11). Средневековые лучники натягивали тетиву от вытянутой левой руки «до уха» (правого; рис. 3). Причем это требовало всей физической силы воина, и не каждому это удавалось. Оцените скорость стрелы, выпущенной таким образом, и дальность прицельной стрельбы (можно сравнить с литературой: «Айвенго», «Робин Гуд»). Массу стрелы оценить трудно, но поскольку десяток таких стрел успешно таскали в колчане на боку, считайте $m = 200$ г.

Рисунок 3

4(11). Открытый с обоих концов шланг на длину L опущен в воду и жестко закреплен (рис. 4). Из воды он торчит под углом α к горизонту. Найдите период малых колебаний воды в шланге.

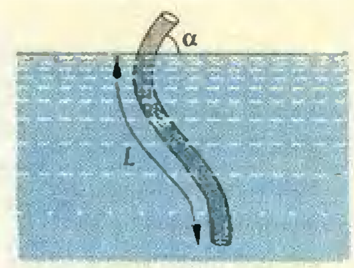


Рисунок 4

5(10,11). Многопредельный амперметр представляет собой миллиамперметр с набором сменных шунтов. Им измеряют ток в некоторой цепи. На пределе «1 мА» прибор показал 1 мА; когда его переключили на предел «3 мА», он показал 1,5 мА. Тем не менее, прибор исправный — он точно показывает величину протекающего через него тока. Каков истинный ток в цепи (без амперметра)?

6(11). Киноаппаратом с частотой смены кадров 24 кадра в секунду снимают колебания математического маятника. Одно полное колебание занимает 48 кадров. Длина маятника на пленке 10 мм, фокусное расстояние объектива 70 мм. С какого расстояния производили съемку?

II тур

7(9,10). В системе, изображенной на рисунке 5, массы грузов равны. В начальный момент грузы неподвижны и система в равновесии. Затем, удерживая левый груз, правый смещают вниз на расстояние a, после чего оба груза отпускают без начальной скорости. Найдите максимальную скорость левого груза в процессе колебаний. Жесткость пружины k, мас-

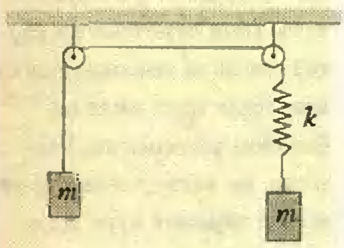


Рисунок 5

сы грузов m. Пружина и нить невесомы, трения нет.

8(9). Три одинаковых троса соединены в точке A (рис. 6). Все они прямые, ненатянутые и находятся в одной плоскости. Угол между крайними и средним α. К точке A подвешивают груз массой m. Найдите натяжение среднего троса. Удлинение тросов мало.

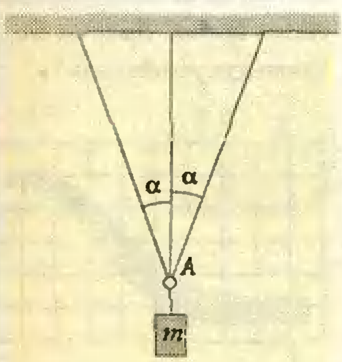


Рисунок 6

9(10,11). По двум пересекающимся под углом 30° дорогам движутся к перекрестку два автомобиля: один со скоростью 10 м/с, второй — 17,3 м/с. Когда расстояние между автомобилями было минимальным, первый из них находился на расстоянии 200 м от перекрестка. На каком расстоянии от перекрестка в это время находился второй автомобиль?

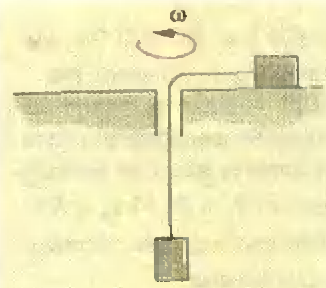


Рисунок 7

10(11). Два одинаковых кубика прикреплены к концам нерастяжимой невесомой нити (рис. 7). Верхний кубик движется по поверхности по круговой траектории с угловой скоростью ω так, что нижний кубик неподвижен. Трения нет. Если слегка дернуть за нижний кубик, возникнут малые колебания. Найдите их частоту.

11(11). Двигатель современного истребителя развивает силу тяги, равную весу истребителя. За сколько минут полета в таком режиме истребитель истратит все топливо? Запас топлива составляет треть массы самолета, топливо — керосин с удельной теплотой сгорания $4{,}5\cdot10^7$ Дж/кг, скорость реактивной струи 1500 м/с, практически вся энергия топлива переходит в кинетическую энергию реактивной струи.

12(10). В цилиндр объемом 4 л, содержащий некоторое количество воздуха, впрыснули 1 г воды, а затем нагрели смесь до 100°С. Какой оказалась влажность воздуха в цилиндре?

13(10,11). На холодном потолке ванной комнаты,

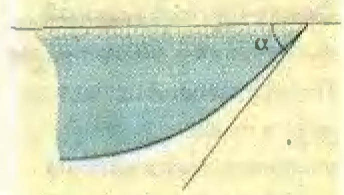


Рисунок 8

наполненной влажным воздухом, конденсируется вода (рис. 8). Спустя некоторое время с потолка начинает капать. Оцените массу капли. Выпуклую поверхность капли можно считать сферической. Угол смачивания потолка водой α определяется материалом потолка и может быть любым! Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 0{,}072$ Н/м.

14(10). Два одинаковых электрических чайника довели до кипения. После выключения первый остыл до $t_0 = 50$°С за $\tau_1 = 20$ мин. После этого его включили, и он снова вскипел за $\tau_2 = 4$ мин. Со вторым чайником проделали то же самое, и он остыл до t_0 за $\tau_1' = 30$ мин. За какое время он вскипит снова? Теплопередача в окружающую среду зависит только от температуры чайника (но заведомо не пропорциональна разности температур!) и не зависит от количества воды в нем. Испаряется пренебрежимо малая часть воды.

Публикацию подготовил А.Андрианов

Избранные задачи Санкт-Петербургской физической олимпиады

Перед условием каждой задачи в скобках указано, учащимся каких классов она предлагалась.

Районный тур

1(10). С воздушного шара, парящего на некоторой высоте, сбрасывают балласт, в результате чего шар становится на 20% легче. Определите расстояние между шаром и падающим балластом через 10 с. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

2(11). Маятник состоит из жесткого невесомого стержня длиной l и груза массой M на его конце. Маятник отклонили от вертикали на угол 90° и отпустили. Когда он проходил положение равновесия, в груз попала и застряла в нем горизонтально летевшая со скоростью v пуля массой m. На какой максимальный угол отклонится маятник от вертикали?

3(11). Бусинка с зарядом q и массой m может свободно скользить по спице. На расстоянии R от спицы расположен шар с зарядом Q. Определите период малых колебаний спицы относительно положения равновесия.

4(11). В схеме, изображенной на рисунке 1, $r_1 = r_2 = 100$ Ом, $R = 200$ Ом, амперметр показывает ток 0,25 А. Какими станут показания амперметра, если поменять местами резисторы: а) r_1 и R, б) r_2 и R? Элементы схемы считайте идеальными.

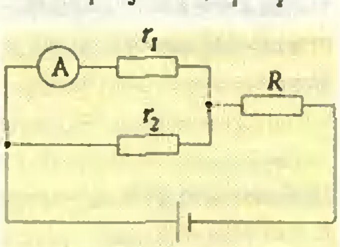


Рисунок 1

Городской тур

5(9,10,11). Два одинаковых маленьких шарика, связанных невесомой нерастяжимой нитью длиной 1 м, покоятся на гладкой плоскости на расстоянии 50 см друг от друга. Одному из них сообщают скорость $v_0 = 0{,}1$ м/с в направлении, перпендикулярном линии, соединяющей их центры (рис.2). Определите скорости шариков через 3 мин.

Рисунок 2

6(9). Капитану яхты необходимо достичь берега, избежав встречи с катером (см. карту на рисунке 3). Капитан знает первоначальные координаты катера и яхты (они отмечены на карте), но из-за непогоды суда не видят друг друга даже на близком расстоянии. Укажите, на какие точки берега может держать курс капитан, чтобы заведомо не встретиться с катером. Скорость яхты равна 15 км/ч, катера — 30 км/ч.

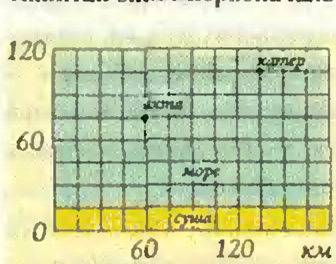


Рисунок 3

7(9). Маленький шарик движется по окружности по внутренней поверхности миски. Скорость шарика равна 0,45 м/с. На рисунке 4 изображена правая часть сечения миски в масштабе 1:2; SS' — ось симметрии. Определите радиусы окружностей, по которым мог двигаться шарик. Было ли его движение устойчивым?

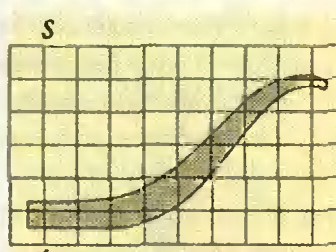


Рисунок 4

8(9). В центр гладкого плоского прямоугольного листа с основанием s и боковой кромкой $2s$, наклоненного под углом 45° к вертикали, положили маленький камешек (рис. 5). Мы можем перемещать лист в пространстве с постоянным ускорением $\vec{a}$, выбрав его направление произвольно, но так, чтобы камешек перестал соприкасаться с листом. Требуется, чтобы промежуток времени, по исте-

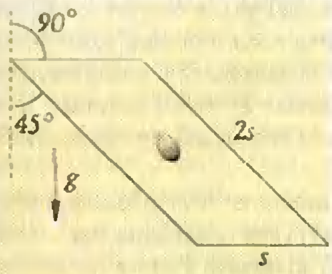


Рисунок 5

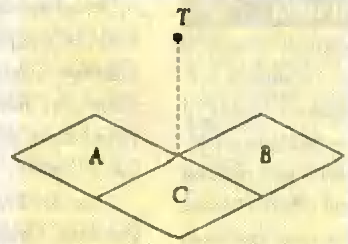


Рисунок 8

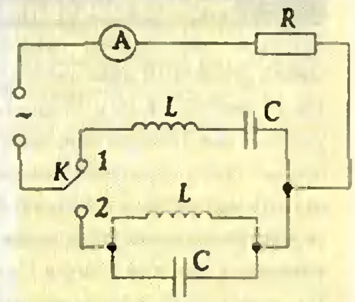


Рисунок 9

чении которого камешек перестанет соприкасаться с листом, был минимальным. Определите его длительность и обоснуйте ответ.

9(9). В гладком желобе лежат гладкие цилиндры (рис. 6). Угол при основании желоба равен α. Найдите угол β.

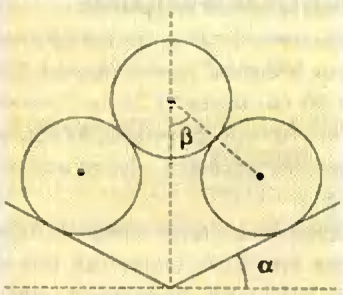


Рисунок 6

10(10). Брусок шириной L кладут поочередно в два равных желоба с гладкими

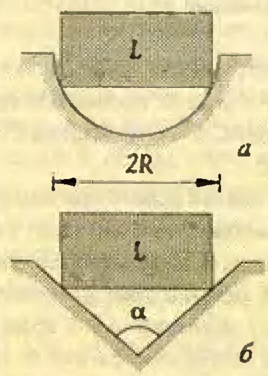


Рисунок 7

стенками, параметры которых указаны на рисунке 7. При какой высоте бруска равновесие будет устойчивым?

11(10). Три одинаковые квадратные равномерно заряженные пластины из диэлектрика сложены вместе так, как показано на рисунке 8. Плотности заряда на всех пластинах одинаковы. При этом значение напряженности электрического поля в некоторой точке T, расположенной над местом соприкосновения пластин, равно E_1. Когда пластину A убрали, напряженность в этой точке стала равной E_2. Чему будет равна напряженность в точке T после того, как уберут и пластину B?

12(11). В цепь переменного тока включены амперметр, резистор сопротивлением R, два конденсатора емкостью C, две катушки с индуктивностью L и двухполюсный ключ K (рис. 9). В начальный момент ключ находится в положении *1*. При этом амперметр показывает ток, равный $U_0/(\sqrt{2}R)$, где U_0 — амплитуда подаваемого на схему напряжения. Что покажет амперметр, если ключ перевести в положение *2*?

13(11). При помощи идеального источника тока снимают вольт-амперную характеристику «черного ящика» с двумя выводами, изображенную на рисунке 10. Какая электрическая схема может находиться в «черном ящике»? Пользуясь графиком, рассчитайте ее параметры.

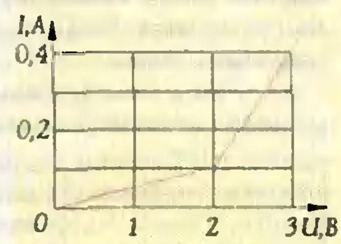


Рисунок 10

Публикацию подготовили Д.Волченков, Д.Ковалевский

ЗИФМШ ОБЪЯВЛЯЕТ ПРИЕМ

Заочная инженерная физико-математическая школа (ЗИФМШ) объявляет прием учащихся в 9, 10, 11 классы и в 10 и 11 спецклассы на 1993/94 учебный год. Главная цель школы — развить инженерный склад мышления, помочь учащимся глубже изучить математику и физику, лучше подготовиться к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения, прежде всего в Петербургский институт инженеров железнодорожного транспорта им. акад. В.Н.Образцова (ПИИТ).

Прием в ЗИФМШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. После номера каждой задачи в скобках указано, для какого класса она предназначена (например, задача 4 входит в конкурсное задание для 9 и 10 классов). Задание для каждого класса состоит из 6 задач, но для зачисления в ЗИФМШ достаточно решить большую их часть.

Выпускники 11 спецкласса рекомендуются для поступления в Группы целевой инженерной подготовки студентов, готовящие инженеров-исследователей для проектирования скоростных железнодорожных магистралей (со скоростью движения до 500 км/ч). Для поступления в спецкласс необходимо решить 6 основных задач (для 10 или 11 классов) и 2 дополнительных задачи (отмеченные в скобках как 10 с. кл. или 11 с. кл.).

Решения вступительного задания необходимо прислать до 1 ноября по адресу: 190031, Санкт-Петербург, Московский пр., д. 9, ПИИТ, ЗИФМШ, на конкурс. В письмо вложите два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 9×12 см и заполненной по следующему образцу:

Если у вас в семье есть железнодорожники или вы учитесь в железнодорожной школе, отметьте это.

Фамилия, имя, отчество	Сидоров Иван Петрович
Класс (номер класса указывается на 1 сентября 1993 года)	9
Подробный домашний адрес	524806, г. Тверь, ул. Садовая, д. 5, кв. 7
Номер и адрес школы или СПТУ	школа № 5, г.Тверь, ул. Зеленая, д. 7
ФИО и профессия родителей	мать: Сидорова Анна Ивановна, врач отец: Сидоров Петр Ильич, электромонтер

Зачисленным в ЗИФМШ в течение года высылаются разработки и контрольные задания, решенные задания оцениваются и рецензируются. Успешно закончившие ЗИФМШ получают удостоверение и имеют преимущество при поступлении в ПИИТ.

При ЗИФМШ действуют группы «Коллективный ученик». Прием в группы проводится без конкурса — достаточно заявления учителя математики или физики, руководящего кружком, с указанием списка учащихся и класса, в котором они будут учиться. Заявление должно быть заверено директором школы (или СПТУ) и печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик» может оплачиваться школами по представлению ЗИФМШ как факультативные занятия.

Несколько слов о ПИИТ. Институт готовит инженеров-экономистов, инженеров-строителей, инженеров-электромехаников, инженеров-механиков, инженеров-системотехников (по специальности ЭВМ и программное обеспечение ЭВТ) для работы на железнодорожном транспорте и в других отраслях народного хозяйства.

ВСТУПИТЕЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

1 (9 кл.). Плот состоит из сухих еловых брусьев, плотность которых 500 кг/м^3. Длина каждого бруса 4 м, ширина 30 см, толщина 25 см. Сколько нужно брусьев, чтобы переправить через водную преграду автомашину массой 1 т (вода морская или пресная)?

2 (9 кл.). До просушки влажность зерна составляла 23%, а после просушки оказалась равной 12%. На сколько процентов уменьшилась масса зерна после просушки?

3 (9, 10 кл.). Из лампочек для карманного фонаря собрана гирлянда, рассчитанная на включение в сеть с напряжением 220 В. На каждую из лампочек приходится напряжение всего около 3 В, однако если вы вывинтите одну из лампочек из патрона и замкнете контакты пальцем, то почувствуете сильный электрический удар. Объясните, почему.

4 (9, 10 кл.). В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CK, а в треугольнике ACK — биссектриса CE. Докажите, что $CB = BE$.

5 (9, 10, 11 кл.). На зимней дороге при температуре снега $-10°C$ автомобиль в течение 1 мин 6 с буксует, развивая мощность 12 кВт. Считая, что вся энергия буксующей машины идет на плавление снега, найдите массу образовавшейся воды.

6 (9, 10, 11 кл.). Два спортсмена бегают по одной замкнутой дорожке стадиона. Скорость каждого постоянно, и на пробег всей дорожки один тратит на 5 с меньше другого. Если они начинают пробег с общего старта одновременно и в одном направлении, то оказываются рядом через 30 с. Через какое время они встретятся, если побегут одновременно с общего старта, но в противоположных направлениях?

7 (10, 11 кл.). Радиус одного из астероидов составляет 5 км. Допустив, что астероид имеет форму шара и его плотность ровно 5,5 г/см^3, а) найдите ускорение силы тяжести на его поверхности; б) определите, на какую высоту поднялся бы человек, находящийся на астероиде и подпрыгнувший с усилием, достаточным для прыжка на высоту 5 см на Земле.

8 (10, 11 кл.). Найдите область определения выражения и упростите его, выделив полный квадрат:

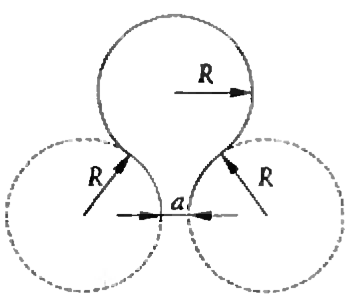
$$\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}-\frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}.$$

9 (11 кл.). Имеется 5 электрических лампочек на 110 В с мощностями 40, 40, 40, 60, 60 Вт. Как следует включить все эти лампочки одновременно в сеть с напряжением 220 В, чтобы они горели нормальным накалом?

10 (11 кл.). Вычислите длину грушевидного петлевого заезда трамвая, если ширина заезда a и радиус поворота R (см. рисунок).

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СПЕЦКЛАССОВ

11 (10 с. кл.). От поезда, идущего по горизонтальному участку пути с постоянной скоростью, самопроизвольно отцепилась 1/3 состава. Через некоторое время скорость отцепившихся вагонов уменьшилась в 2 раза. Считая, что сила тяги при разрыве не изменилась, определите скорость головной части поезда в этот момент. Сила трения пропорциональна массе и не зависит от скорости.



12 (10 с. кл.). Разложите на множители следующие выражения:

а) $x^4-x^2\left(a^2+1\right)+a^2$;

б) x^5+x+1.

13 (11 с. кл.). С какой скоростью капля воды должна ударить в такую же неподвижную каплю, чтобы в результате взаимодействия они испарились? Начальная температура капель 20 °С.

14 (11 с. кл.). Пользуясь графиком, решите уравнение

$$|x-a|=|x-1|+1$$

для всех действительных значений параметра a.

ЗАОЧНАЯ ШКОЛА ПРИ НГУ

При Новосибирском государственном университете работает Заочная школа (ЗШ) для учащихся 9—11 классов общеобразовательных школ любого государства, входившего раньше в состав СССР.

В ЗШ 5 отделений: математическое, физическое, химическое, биологическое и экономическое. На математическое, физическое и химическое отделения принимаются учащиеся 9—11 классов, на биологическое — только учащиеся 10 классов, на экономическое — только учащиеся 11 классов.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ могут быть приняты также математические, физические, химические, биологические и экономические кружки и факультативы, которые работают в школах под руководством учителя. Руководитель кружка набирает и зачисляет в них учащихся, успешно выполнивших первое задание по соответствующему предмету. Кружок принимается в ЗШ, если руководитель сообщает в ЗШ свою фамилию, имя, отчество и высылает поименный список членов кружка (с указанием итоговых оценок за первое задание), подписанный директором школы и заверенный печатью. После этого члены кружка считаются учащимися ЗШ.

Учащиеся, принятые в ЗШ, и руководители кружков будут получать задания ЗШ и дополнительные материалы. Работы учащихся-заочников проверяются в ЗШ, а работы членов кружка проверяет руководитель (по желанию руководителя часть работ членов кружка может быть проверено и в ЗШ).

Ежегодно часть учащихся 10—11 классов ЗШ (тех, кто будет учиться в этих классах в следующем учебном году) приглашается в Летнюю школу при НГУ. Здесь они вместе с победителями Всесибирской олимпиады слушают лекции крупных ученых, решают интересные задачи на семинарах, знакомятся с университетом и научно-исследовательскими институтами Академгородка, отдыхают и развлекаются. Во время зимних каникул учащиеся ЗШ из близлежащих областей приглашаются в Зимнюю школу при НГУ.

Чтобы стать учеником Заочной школы при НГУ, необходимо до *1 ноября* прислать на имя директора ЗШ заявление, оформленное по приведенному здесь образцу.

Фамилия, имя, отчество (полностью, печатными буквами)	НЕДЕЛИН ИГОРЬ ИВАНОВИЧ
Класс, в котором вы учитесь в своей школе	9
Отделение ЗШ, на котором вы желаете учиться (можно указать два отделения)	математическое (математическое и физическое)
Подробный домашний адрес с обязательным указанием индекса почтового отделения	632149, Новосибирская обл., с.Мезениха, ул. Андрианова, д. 28 «а», кв. 5

Руководитель кружка должен прислать на имя директора ЗШ письмо с просьбой выслать первое задание и дополнительные материалы к нему.

Заявление о приеме на математическое или физическое отделение ЗШ можно выслать вместе с решениями соответствующего первого задания, публикуемого ниже, *не позднее 1 ноября*.

Для получения ответа вложите конверт с маркой, с написанным на нем вашим домашним адресом.

Решения задач запишите в простую ученическую тетрадь в клетку, оставляя поля для замечаний преподавателя. На обложке тетради укажите те же сведения о себе, что и в заявлении. Работу отошлите вместе с заявлением, причем только простой бандеролью (тетрадь не перегибайте и не сворачивайте в трубочку; тетрадь должна быть тонкой, так как средства на почтовые расходы в ЗШ ограничены). В тетрадь с решениями вложите листок бумаги размером 6x10 см с написанным на нем вашим адресом (его наклеят на конверт, когда будут отсылать ответ).

За обучение в течение одного года на одном отделении нужно заплатить 500 рублей (не исключено, что по мере развития инфляции эта сумма возрастет). Бесплатное обучение в ЗШ сохраняется для детей-сирот, обучающихся в школах-интернатах и детей из многодетных семей (в которых пять и более детей до 18 лет, находящихся на иждивении родителей).

Оплату следует производить почтовым переводом на р/с № 000141504 в Советском РКЦ г. Новосибирска. В графе «Вид платежа» напишите: «За обучение в ЗШ при НГУ». Квитанцию об оплате вклейте в тетрадь с первым заданием. Тетради без квитанции проверяться и возвращаться не будут.

Наш адрес: 630090, г. Новосибирск-90, ул. Пирогова, 11, Заочная школа при НГУ

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ

После разбора задач своего класса полезно (и мы вам рекомендуем) ознакомиться с задачами для других классов, а понравившиеся задачи — попробовать решить.

9 класс

1. При уменьшении длины спирали электроплитки в 2 раза ее мощность увеличилась в 1,5 раза. Во сколько раз изменилось удельное сопротивление материала спирали? Почему оно изменилось?

2. В U-образную трубку налита вода. В одном колене плавает кусочек льда. Как изменится уровень воды после того, как лед растает?

3. Луч света, пущенный параллельно плоскому зеркалу *2*, отразившись сначала от первого, потом от второго зеркала, идет параллельно плоскому зеркалу *1* (рис. 1). Найдите угол (α) между зеркалами.

4. У равноплечных весов (рис. 2; $AO=OB$) в положении равновесия плечо OB горизонтально, а плечо AO составляет с ним угол $\alpha = 30°$. Из-за этого при подвешивании груза в точке A он уравновешивается набором гирек массой m_1, а при подвешивании в точке B — набором гирек массой m_2. Определите массу груза.

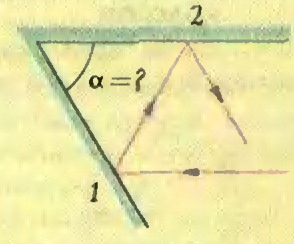


Рисунок 1

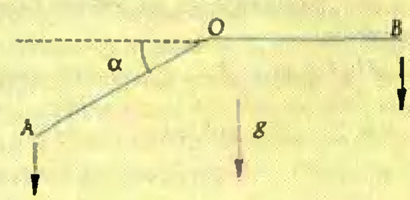


Рисунок 2

10 класс

1. Решите задачу 1 для 9 класса.

2. Решите задачу 3 для 9 класса.

3. Провожающий находился в начале первого вагона, когда поезд тронулся и стал двигаться с постоянным ускорением. Во сколько раз время движения мимо провожающего десятого вагона меньше времени движения первого вагона?

4. Две одинаковые квадратные шайбы лежат на гладком столе, соприкоясь вершинами (рис. 3). На них вдоль линии OO' симметрично налетает такая же по массе, но вдвое большая по размеру шайба, движущаяся со скоростью v. Найдите скорости всех шайб после упругого соударения.

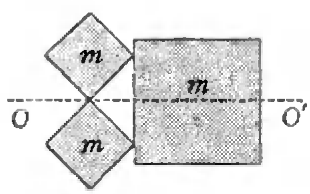


Рисунок 3

5. Определите максимальную скорость груза массой m, движущегося по наклонной плоскости с углом α, если груз связан с неподвижной стенкой пружиной жесткостью k (рис. 4). В момент, когда груз отпустили, пружина была недеформированной. Коэффициент трения между грузом и плоскостью μ.

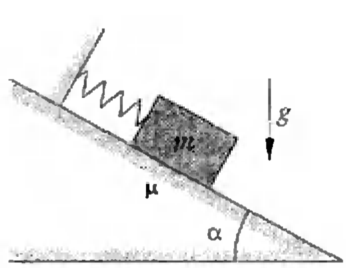


Рисунок 4

11 класс

1. Решите задачу 3 для 9 класса.

2. Решите задачу 5 для 10 класса.

3. Математический маятник длиной $l = 1$ м отклонили на 90° и отпустили. Во сколько раз медленне маятник пройдет первый сантиметр своего пути, чем последний сантиметр перед положением равновесия?

4. Коэффициент полезного действия электростанции $\eta = 30\%$. Во сколько раз уменьшатся потери тепла, выбрасываемого при этом в окружающую среду, если увеличить η до 50%?

5. В двух одинаковых соединенных между собой сосудах находится газ. Вначале температура в сосудах одинакова. Во сколько раз необходимо увеличить температуру в одном сосуде, чтобы половина газа перешла из него в другой сосуд?

6. Плоский конденсатор емкостью C подсоединен к батарее с ЭДС $\mathcal{E}$. Какой заряд пройдет через батарею, если в конденсатор параллельно его обкладкам вставить проводящую пластину толщиной $d/2$? Расстояние между обкладками d.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

1. Извлеките квадратный корень из числа

$$a = \underbrace{0,999\ldots9}_{1993\text{ раза}}$$

с точностью до 1993 десятичных знаков.

2. Найдите все натуральные числа n, при которых можно сократить дробь

$$\frac{39n+4}{52n+27}.$$

3. Решите уравнение $x^3 + [x] = 3$, где $[x]$ — целая часть числа x (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, $[-3,14] = -4$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[5] = 5$).

4. Изобразите множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$y^2 = |x| + |y|.$$

5. Дан прямоугольный треугольник, a и b — его катеты, r — радиус вписанной окружности, c — гипотенуза. Докажите, что $a + b = c + 2r$.

6. Середины сторон AB и CD, BC и DE выпуклого пятиугольника $ABCDE$ соединены отрезками. Докажите, что отрезок, соединяющий середины полученных отрезков, параллелен AE и равен $\frac{1}{4}AE$.

10 класс

1. Найдите сумму

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}.$$

2. Даны 1993 положительных числа $a_1, a_2, \ldots, a_{1993}$, произведение которых равно 1. Докажите, что

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_{1993}) \geq 2^{1993}$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy + x + y = 11, \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases}$$

4. Изобразите множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $y^2 = |x + y|$.

5. При каких x выполнено неравенство

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)>\frac{1}{x}?$$

6. Постройте треугольник по центром вневписанных окружностей. (Окружность называется вневписанной, если она касается стороны треугольника и продолжений двух других его сторон.)

11 класс

1. Составим таблицу

1
2 3 4
3 4 5 6 7
4 5 6 7 8 9 10
....

Докажите, что сумма членов каждой горизонтальной строки таблицы равна квадрату нечетного числа.

2. Из трех свечей одинаковой длины одновременно зажгли вторую и третью. В тот момент, когда третья свеча уменьшилась на a см, а вторая уменьшилась на $a/2$ см, зажгли первую свечу. В момент, когда первая и вторая свечи сравнялись по длине, третья свеча стала на b см короче каждой из них. На сколько сантиметров вторая свеча будет длиннее первой и третьей, когда те станут одинаковой длины?

3. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=2.$$

4. Решите уравнение

$$\sin^2 x+\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}=\cos^2 3x.$$

5. Постройте график функции $y=x+1/x^2$.
Найдите число решений уравнения

$$x^3-ax^2+1=0$$

в зависимости от параметра a.

6. Даны окружности O_1 и O_2, пересекающиеся в точках P и Q. Найдите такую точку M на окружности O_2, чтобы треугольник KLM, стороны которого проходят через точки P и Q, а вершины K и L лежат на окружности O_1, имел наибольшую площадь.

ЗАОЧНАЯ ШКОЛА ПРОГРАММИСТОВ ПРИ ВКИ НГУ

Высший колледж информатики Новосибирского государственного университета (ВКИ НГУ) проводит набор в заочную школу учащихся 9 классов школ Российской Федерации.

В заочной школе два отделения:
— программирования
— компьютерной техники.

Для зачисления в школу необходимо *до 15 ноября* прислать на имя директора ВКИ НГУ заявление по форме, указанной для Заочной школы при НГУ.

Обучение в школе платное. Первоначальный взнос — 300 рублей. Оплату следует производить почтовым переводом на р/с № 141009 в Советском РКЦ г. Новосибирска (МФО 224916). В графе «Вид платежа» напишите: «За обучение в заочной школе». Квитанцию об оплате подклейте к заявлению. Вместе с заявлением вышлите конверт с вашим домашним адресом.

Наш адрес: 630058, г. Новосибирск-58, ул. Русская, 35, ВКИ НГУ, Заочная школа

ЗАОЧНАЯ ОЛИМПИАДА ВКИ НГУ

Высший колледж информатики Новосибирского государственного университета (ВКИ НГУ) проводит заочную олимпиаду для учащихся 7—9 классов. Олимпиада проходит в два тура. Победители награждаются призами и дипломами, а получившие высокую оценку приглашаются в Летнюю школу информатики и программирования в Новосибирском академгородке. Для девятиклассников, поступающих в ВКИ НГУ, успешное участие в олимпиаде будет учитываться при приеме в колледж.

Олимпиада проводится по двум разделам: информатика и компьютерная техника (физические основы) — в соответствии с двумя потоками, по которым происходит обучение в колледже: систем информатики (с продолжением обучения на механико-математическом факультете НГУ) и компьютерной техники (с продолжением обучения на физическом факультете НГУ).

Решения задач первого тура необходимо выслать не позднее *1 января 1994 года*. Не забудьте также указать класс, в котором вы учитесь, и вложить пустой конверт с маркой и обратным адресом. Успешно прошедшим первый тур будут высланы задачи второго тура в марте 1994 года.

Наш адрес : 630058, г. Новосибирск-58, ул. Русская, 35, ВКИ НГУ, Заочная олимпиада (с указанием раздела)

ЗАДАЧИ ПЕРВОГО ТУРА
Информатика

1. «Вычисление расстояний на сфере». Первая часть входных данных — множество S из 5 тыс. точек на поверхности шара. Каждая точка представляется своей широтой и долготой. После ввода этих данных программа читает вторую часть входных данных: последовательность D из 20 тыс. точек, каждая из которых представляется широтой и долготой. Для каждой точки последовательности D программа должно сообщать, какая точка множества S к ней ближе всего.

2. Один начинающий программист написал на языке Бейсик следующую программу:

```
100 INPUT S
200 N=1000: M=0
300 N=N-1: goto 1100
350 X=N: K=S
400 GOTO 800
500 X1=INT(X/10):K=K+X1*10-X
600 IF K<0 THEN 300
700 X=X1
800 IF X>0 THEN 500
900 IF K>0 THEN 300
1000 M=M+1: N=N-1
1100 IF N>=S  THEN 350
1200 PRINT M
```

Перепишите ее в виде функции от одного параметра, используя Паскаль или СИ без операторов goto и break.

3. Напишите программу, играющую «наилучшим образом» в камни по следующим правилам:

а) вначале человек-игрок задает начальное количество камней (ненулевое);

б) игроки (программа и человек) ходят по очереди. За один ход игрок может забрать себе некоторое количество камней, но не более половины оставшихся и не менее одного;

в) выигрывает тот, кто забирает последний камень;

г) первых ход делает человек.

Требования к диалогу с программой:

а) должно быть понятно, как делать ходы, так чтобы с программой мог сыграть посторонний человек (например, член жюри) в отсутствие разработчика;

б) после каждого хода (своего или человека) программа должна выводить на экран информацию о сделанном ходе и об оставшихся камнях;

в) программа должна дружелюбно относиться к ошибочным ходам игрока — выдавать диагностическое предупреждение и продолжать игру.

4. Умеете ли вы умножать число «столбиком»? Попробуйте тогда восстановить пропущенные цифры в следующей записи умножения двух трехзначных чисел в шестнадцатиричной системе счисления (цифры в которой, как известно, обозначаются символами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F):

```
     ***
     ***
 --------
    7*7*
   612*
  *0*A
 --------
  **863*
```

```
     819
 --------
   612C
  50FA
 --------
  578637
```

Компьютерная техника (физические основы)

Задачи 1, 2, 4 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 2, 3, 4, 5 — для восьмых классов, 3, 4, 6, 7 — для девятых классов.

1. N футболистов расположились по кругу на одинаковых расстояниях друг от друга. Одновременно они начинают бежать в центр круга к мячу со скоростью Nv. С какой скоростью сокращается расстояние между соседними спортсменами, если N велико?

2. Мышь бежит по кругу радиусом R (уверена, что не поймают). Кот всегда бежит по направлению на мышь (есть хочется). Скорость кота вдвое меньше скорости мыши (обленился). Какой будет траектория кота через большое время? Каким будет угол между векторами скорости кота и мыши? Кот начинает движение вне круга.

3. Сопротивление проволочки пропорционально температуре: $R \sim T$, а потеря энергии определяется излучением в вакуум $q \sim T^4$. Во сколько раз возрастет температура проволочки, если напряжение увеличить вдвое?

4. Вы хотите проехать от пункта A через пункты B, C, D, E до пункта F за минимальное время на автомобиле, который может либо стоять, либо двигаться со скоростью 1 км/мин. В пунктах B, C, D, E имеются светофоры, которые в момент времени $t = 0$ зажигаются красным светом, а затем зеленым. Красный свет на всех светофорах горит 1 мин, а зеленый в B горит 1 мин, в C — 3 мин, в D — 2 мин и в E — 7 мин. В какой момент времени вы должны стартовать? Условие: если в момент проезда светофора на нем зажегся красный свет, то надо остановиться. Все участки пути длиной по 1 км.

5. Две батареи с ЭДС $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ и внутренними сопротивлениями r_1 и r_2 подключены к конденсатору емкостью C. Каким может быть заряд конденсатора?

6. Проволочное кольцо расположено в вертикальной плоскости. В центре кольца закреплена пружина, а на ней — бусинка массой m, которая перемещается по кольцу со скоростью v с помощью мотора, вращающего пружину в плоскости кольца. Какова средняя мощность мотора, если в верхней точке бусинка не давит на кольцо? Коэффициент трения бусинки о кольцо μ, ускорение свободного падения g.

7. Автомобиль находится внутри конической ледяной воронки большого размера. Глубина воронки H, а диаметр вдвое больше. Какова должна быть скорость автомобиля, чтобы он смог выбраться из воронки, если коэффициент трения колес о лед очень мал?

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

Задачи *(см. «Квант» № 3/4)*

1. Пусть исходные затраты составляли: x рублей — гонорары, y — типографские расходы, z — почтовые расходы. Получаем

$x + y + z = 1{,}1.$

После первого подорожания

$x + 10y + 7z = 7{,}7,$

а после второго

$0{,}5x + 22{,}5y + 12{,}6z = 15{,}4.$

Из этих трех уравнений получаем $x = 0{,}2$, $y = 0{,}4$, $z = 0{,}5$. Отсюда цена номера после последнего повышения равняется 37 рублям. Коэффициент 0,5 при x в последнем уравнении означает, что величина гонорара вдвое сократилась из-за сокращения объема журнала. Те, кто решал систему с коэффициентом 1 при x в последнем уравнении, получили ответ 37 рублей 37 копеек, что свидетельствует о том, что удвоение авторских гонораров весьма мало влияет на цену журнала.

2. См. рис. 1.

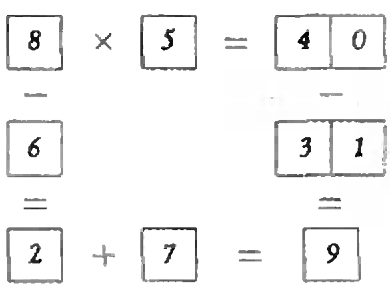


Рисунок 1

3. Проведем медиану из вершины прямого угла (рис. 2). Она вдвое короче гипотенузы AC и вдвое длиннее высоты BH, поэтому в прямоугольном треугольнике BHM угол BMH равен 30°. Поэтому в равнобедренном треугольнике BMC: $\angle B = \angle C = 75°$, значит, $\angle A = 15°$.

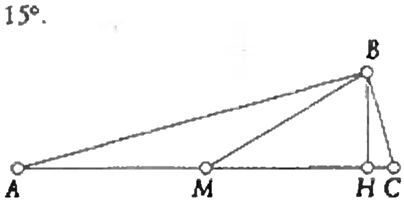


Рисунок 2

4. См. рис. 3.

5. Приводим некоторые возможные решения: 2 буквы: еж; 3 буквы: кий; 4 буквы: трус; 5 букв: порт; 6 букв: ступор.

Л	Ш	У	Т	И
У	Т	И	Л	Ш
И	Л	Ш	У	Т
Ш	У	Т	И	Л
Т	И	Л	Ш	У

Рисунок 3

Конкурс «Математика 6—8»
(см. «Квант» № 12 за 1992 г.)

10. Утверждение формулируется так: число $A_n = (n+1)(n+2)\ldots(2n-1)2n$ делится на 2^n, но не делится на 2^{n+1}.

Доказательство. Умножим A_n на число $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ и разделим его на $n!2^n$. Получим

$$\frac{A_n}{2^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2n}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-1).$$

Итак, число $A_n / 2^n$ — целое и нечетное, поскольку оно равно произведению нечетных чисел. Утверждение доказано.

11. Требуемое заполнение клеток числами можно сделать, например, так. Сначала раскрасим таблицу в шахматном порядке, а затем в белые клетки начнем записывать последовательно числа 1,2,..., 677, притом слева направо: сначала в первой строке, потом во второй и т.д. Остальные числа от 687 до 1353 будем записывать в черных клетках справа налево, начиная с последней строки и далее вверх. Нетрудно проверить, что во всех квадратиках 2×2 суммы будут одинаковы.

12. Пусть сначала приехало x «Волг» и y «Рафиков». Тогда количество школьников выразится числом $N = 7x + 12y$. Если из трех дополнительно приехавших машин z «Волг», тогда всего «Волг» $x + z$, а «Рафиков» $y + 3 - z$, что соответствует количеству школьников $N = 6(x+z) + 11(y+3-z)$. Приравняв полученные выражения, $N = 7x + 12y = 6(x+z) + 11(y+3-z)$, получаем, что $x = 33 - 5z - y$. Подставляя это значение x в первую формулу для N, получаем, что $N = 231 + 5y - 35z$. Это число не делится на 5, поэтому рассадить школьников по 5 в «Волги» и по 10 в «Рафики» невозможно.

13. В обоих случаях выигрывает тот игрок, который берет спички первым. Второй игрок выигрывает лишь в случаях, когда в кучке 3, 7, 11, 15 и т.д. спичек, т.е. когда число спичек имеет остаток 3 при делении на 4.

14. Три первых квадрата — одноцифровые, поэтому запоминаем число $3 = 1 \cdot 3$. Следующие шесть квадратов — двухцифровые, поэтому запоминаем число $12 = 2 \cdot 6$. По три цифры у квадратов двадцати двух чисел от 10 до 31, т.е. у чисел от 100 до 961, запоминаем число $66 = 3 \cdot 22$. По четыре цифры содержат квадраты чисел от 32 до 99, т.е. числа от 1032 до 9801. Запоминаем число $272 = 4 \cdot 68$. По пять цифр содержат квадраты чисел от 100 до 316, т.е. числа от 10000 до 99856. Запоминаем число $1085 = 5 \cdot 217$. Всего набралось $3+12+66+272+1085=1438$ цифр. Осталось набрать $1993-1438=555$ цифр, которые содержатся в шестицифровых квадратах. Но $555=92 \cdot 6+3$, значит, следует добавить еще 92 квадрата и три цифры из следующего, который есть $409^2=167281$. Таким образом, на 1993 месте стоит цифра 7.

15. Скорость конца стрелки пропорциональна ее длине и угловой скорости вращения. Обозначим длины часовой и минутной стрелок через r и R, тогда скорость конца часовой стрелки равна kr, а скорость минутной $12kR$. Относительная скорость концов стрелок минимальна, если они движутся в одинаковом направлении, и максимальна, если они движутся в противоположных направлениях, например, в 12 и в 6 часов. Запишем отношение минимальной скорости к максимальной:

$$\frac{12kR - kr}{12kR + kr} = 1 - \frac{2}{12\frac{R}{r} + 1}.$$

Эта величина меньше 1, но больше $1 - \frac{2}{12+1} = 11/13$, так как $R > r$. Поскольку указанные в задаче скорости относятся как 8/10 и 10/12 и эти числа меньше 11/13, то такого случиться не может.

16. Сначала заметим, что если точки A и B являются узлами клетчатой бумаги, а точка M такова, что $BM = AB$ и эти отрезки перпендикулярны, то точка M также лежит в узле. Пусть в треугольнике ABC сторона AB не превосходит стороны AC. Возьмем на прямой AC точку M такую, что угол MBA — прямой (рисунок 4). Поскольку в точке M находится узел, а на отрезке AC узлов нет, то точка C лежит на отрезке AM. Но AM меньше, чем $2AB$, значит меньше и $2AC$, поэтому отрезок CM меньше отрезка AC. Осталось заметить, что на любой прямой соседние узлы находятся на равных расстояниях, а это противоречит установленному неравенству $CM < AC$, если точка C не совпадает с точкой M. Значит, точки C и M совпадают и треугольник ABC — прямоугольный.

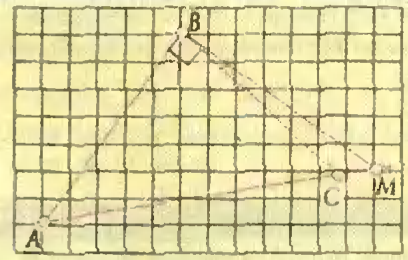


Рисунок 4

17. В связи с продлением срока присылки решений из-за опечатки в условии задачи решение будет опубликовано в следующем номере.

18. Да, можно. Пусть большее число $\overline{abcde}$, тогда меньшее — $\overline{edcba}$, их разность обозначим $\overline{xyfgh}$, где цифры f, g и h известны, а x и y следует определить. Очевидно, что $a \ge e$. Если $a = e$, то $h = x = 0$ и $b \ge d$. Если при этом и $b = d$, то $g = y = f = 0$, т.е. разность состоит из нулей. Если же $b > d$, то $g = 10 + d - b$, $f = 9$ и $y = b - d - 1$. Но $b - d = 10 - g$, поэтому $y = 9 - g$. Итак, $x = 0$, $y = 9 - g$.

Если $a > e$, то $h = 10 + e - a$, откуда $a - e = 10 - h$. Число f может равняться либо 0, либо 9. Если $f = 0$, то $d > b$ и $g = d - 1 - b$, при этом $x = a - 1 - e$, $y = 9 + b - d$. Теперь нетрудно получить, что $x = 9 - h$, а $y = 8 - g$.

Остался случай $f = 9$, т.е. $d \le b$. Теперь, если $b = d$, то $a = 9$, откуда $y = 9$ и $x = a - e - 1 = 9 - h$. Если же $d < b$, то $x = 10 - h$, $y = 8 - g$.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Три.
2. При испускании фотона возбужденным атомом потенциальная энергия атома уменьшается.
3. Нет.
4. Альфа-частицы:

$${}^{11}_{5}\mathrm{B} + {}^{1}_{1}p = 3\,{}^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

5. Химические свойства вещества предопределяет заряд ядра. А при гамма-излучении, например, заряд ядра не изменяется.
6. Когда время наблюдения мало по сравнению с периодом полураспада препарата.
7. Три периода полураспада.
8. Энергия ядра может принимать только дискретные значения.
9. Энергии частицы недостаточно, чтобы преодолеть силу отталкивания ядра тяжелого элемента.
10. При бета-распадах кроме электронов вылетают еще и нейтрино, уносящие часть энергии, причем энергия эта может изменяться в очень широких пределах.
11. Частицы с большим зарядом оставляют трек большей толщины. В нашем случае тонкий след образует альфа-частица, а жирный — ядро полученного в реакции бора.
12. Уже у первых трансурановых элементов действие кулоновских сил отталкивания протонов приводит к неустойчивости ядер.
13. При столкновении нейтрона с атомом последнему передается тем больше энергии, чем меньше его масса.
14. Нет, нельзя. Недостающую массу уносят излучаемые при образовании ядра γ -кванты.

Микроопыт

В металлах валентные электроны легко переходят в возбужденное состояние, поглощая тепловую энергию, и так же легко возвращаются в нормальное, отдавая энергию в виде света. В стекле все электроны прочно связаны с ядрами атомов и с большим трудом меняют свое энергетическое состояние. Чтобы получить заметное свечение стекла, нужна значительно более высокая температура.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Стороны треугольника

1. $2(ab+bc+ca)-\left(a^2+b^2+c^2\right)=$

$=2\big((x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)\big)-$

$-\left((x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\right)=$

$=4(xy+yz+zx)>0.$

2. Так как $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca\ge$

$\ge a^2+b^2+c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2,$

достаточно доказать неравенство пункта в). Имеем

$$a^2+b^2+c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2=$$

$=4(xy+yz+zx),$

$$4\sqrt{3}S=4\sqrt{3}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$$

$=4\sqrt{3xyz(x+y+z)}.$

Остается доказать неравенство

$xy+yz+zx\ge\sqrt{3xyz(x+y+z)}.$

Возводя в квадрат, получаем

$x^2(y-z)^2+y^2(z-x)^2+z^2(x-y)^2\ge 0.$

3. Так как $\dfrac{1}{r^2}=\dfrac{p^2}{S^2}=\dfrac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}=$

$=\dfrac{x+y+z}{xyz}=\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}$, то мы приходим к неравенству

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\ge\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}.$$

4. $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc-$

$-a^3-b^3-c^3=(x+y)(x-y)^2+(y+z)(y-z)^2+$

$+(z+x)(z-x)^2+4(x+y)(y+z)(z+x)-$

$-(x+y)^3-(y+z)^3-(z+x)^3=8xyz>0.$

5. $a^2(2b+2c-a)+b^2(2a+2c-b)+$

$+c^2(2a+2b-c)-9abc=(x+y)^2(x+y+4z)+$

$+(y+z)^2(y+z+4x)+(z+x)(z+x+4y)-$

$-9(x+y)(y+z)(z+x)=2\big(x^3+y^3+z^3-$

$-x^2y-y^2z-z^2x-x^2z-y^2x-z^2y+3xyz\big).$

Итак, нам надо доказать неравенство

$3xyz\ge x^2(y+z-x)+y^2(x+z-y)+z^2(x+y-z).$

Предположим сначала, что x, y, z являются сторонами треугольника. Тогда найдутся положительные числа m, n, k такие, что

$x=m+n,\quad y=n+k,\quad z=k+m.$

В таком случае

$3xyz - x^2(y+z-x) - y^2(x+z-y) -$

$-z^2(x+y-z) = 3(m+n)(n+k)(k+m) -$

$-(m+n)^2 2k - (n+k)^2 2m - (k+m)^2 2n =$

$= m^2 n + m^2 k + n^2 k + n^2 m + k^2 m + k^2 n - 6mnk =$

$= m(n-k)^2 + n(m-k)^2 + k(m-n)^2 \ge 0.$

Пусть теперь x, y, z не являются сторонами треугольника, причем $x \ge y + z$. Обозначим $h = x - y - z$. Имеем

$3xyz - x^2(y+z-x) - y^2(x+z-y) -$

$-z^2(x+y-z) = 3yz(y+z+h) + (y+z+h)^2 h -$

$-y^2(2z+h) - z^2(2y+h) = y^2 z + yz^2 +$

$+5yzh + 2yh^2 + 2zh^2 + h^3 \ge 0.$

См. также решение задачи М1333 из «Задачника «Кванта» (1992 г.)

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Обратимые и необратимые процессы в термодинамике

1. $U_{\text{ср}} = \dfrac{5}{2} k \dfrac{T_{\text{в}} - T_{\text{н}}}{\ln(T_{\text{в}}/T_{\text{н}})} \approx 9{,}3 \cdot 10^{-22}$ Дж.

2. $l_{\text{р}} = L\sqrt{T_1}/\left(\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}\right)$.

4. $p = \dfrac{(\nu_1 + \nu_2)R}{V_0} \dfrac{\nu_1 C_{V_1} T_1 + \nu_2 C_{V_2} T_2}{\nu_1 C_{V_1} + \nu_2 C_{V_2}}$.

5. $\dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{R}{C_V + R}\dfrac{P_2}{P_1} + \dfrac{C_V}{C_V + R} = \dfrac{7}{5}$;

$\left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)_{\text{ад}} = 2^{2/5} \approx 1{,}32.$

ОЛИМПИАДЫ

Избранные задачи Московской физической олимпиады

1. $M_{\max} = Fk/\left(2(2+k)g\right) = 125$ кг.

2. а) Под углом 30° к горизонту вниз; б) под углом 30° к горизонту вверх; в) в произвольном направлении (если мяч ударяется об угол).

3. $v \sim 40$ м/с; $L \sim 100$ м.

4. $T = 2\pi\sqrt{L/(g\sin\alpha)}$.

5. $I = 2$ мА.

6. $L = 7$ м.

7. $v_{\max} = a\sqrt{k/(2m)}$.

8. $T_{\text{ср}} = mg/\left(1 + 2\cos^3\alpha\right)$.

9. $l_2 \approx 115$ м.

10. $\Omega = \sqrt{3/2}\,\omega$.

11. $t \approx 2000$ с ≈ 30 мин.

12. $f = 43\%$.

13. Если $\alpha < 90°$, то $m = \dfrac{2\pi}{3}\rho\left(\dfrac{3\sigma}{\rho g}\right)^{3/2} \approx 0{,}2$ г;

если $\alpha > 90°$, то

$$m = \frac{\pi}{3}\rho\left(\frac{6\sigma}{\rho g}\right)^{3/2} \frac{\sin^3\alpha}{\left(2 - 3\cos\alpha + \cos^3\alpha\right)^{3/2}}.$$

14. $\tau_2' = \tau_1'\tau_2/\tau_1 = 6$ мин.

Избранные задачи Санкт-Петербургской физической олимпиады

1. $l = 612{,}5$ м.

2. $\beta = \arccos\left(1 - \dfrac{1}{2gl}\left(\dfrac{M\sqrt{2gl} - mu}{M+m}\right)^2\right)$,

причем $u > 0$, если пуля и маятник двигались навстречу друг другу.

3. $T = 4\sqrt{m\varepsilon_0(\pi R)^3/(Qq)}$, где ε_0 — электрическая постоянная.

4. а) $I = 0{,}5$ А; б) показания амперметра не изменятся.

5. $v_1 = 1/2\,v_0 = 5$ см/с; $v_2 = \sqrt{3}/2\,v_0 \approx 8{,}7$ см/с.

6. На точки береговой линии с координатами от 15 до 55 км.

7. При $r = 3$ см движение устойчиво, при $r = 7$ см — неустойчиво.

8. При $a > \sqrt{2}/2\,g$ $\tau = 0$ при $a \le \sqrt{2}/2\,g$

$\tau = 2\sqrt{s/\left(2a + \sqrt{2}g\right)}$

9. $\beta = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\alpha)$.

10. а) $h < \sqrt{4R^2 - L^2}$; б) равновесие неустойчивое при любой высоте бруска.

11. $E = \sqrt{\left(4E_2^2 - E_1^2\right)/7}$.

12. $I = 0$.

13. См. рис. 5, где $\mathcal{E} = 2$ В, $R = 20$ Ом, $r = 4$ Ом.

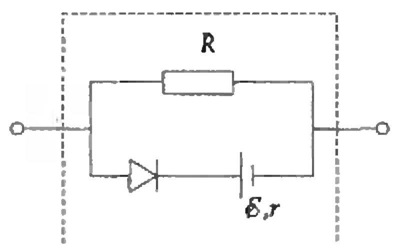


Рисунок 5

КВАНТ

Главный редактор академик Юрий Осипьян

Первый заместитель главного редактора академик Сергей Новиков

Главный художник Кирилл Ильющенко

Номер подготовили Светлана Давыдова, Андрей Егоров, Анатолий Калинин, Людмила Кардасевич, Сергей Коновалов, Анна Котова, Елена Потапенкова, Анатолий Савин, Валерия Тихомирова, Алексей Черноуцан

Номер оформили Александра Хоменко, Вадим Юдин (фото)

Компьютерная группа Сергей Вакуленко, Вадим Виниченко, Екатерина Титова

Заведующая редакцией Людмила Винюкова

Адрес редакции 103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант», тел. 250-33-54, 251-55-57

Типография Ордена Трудового Красного Знамени Чеховский полиграфический комбинат Министерства печати и информации Российской Федерации 142300 г. Чехов Московской области

СЕДЬМОЙ ЧЕМПИОНАТ МИРА СРЕДИ КОМПЬЮТЕРОВ

Вскоре после шестого первенство, состоявшегося три года назад, создатели компьютерного чемпиона «Дип сот» приступили к разработке новой модификации своего детища. И все участники нынешнего, мадридского чемпионата с нетерпением ждали, какие сюрпризы преподнесет им «Дип сот». Увы, подобно своему соотечественнику Роберту Фишеру, американская программа отказалась отстаивать свой титул. Наверное, ее создатели решили сосредоточить внимание на усовершенствовании «Дип сот», ориентируя ее на игру против людей. Не приехал в Испанию и многократный микрочемпион мира «Мефисто», правда, Р.Лэнг, его автор, привез в Мадрид новую программу «Chess Genius». Но пока этот «Шахматный гений» не совсем оправдал свое название, выступив достаточно скромно.

В седьмом чемпионате приняли участие 23 программы, которые, как обычно, сражались по швейцарской системе в пять туров. Хотя считается, что в чемпионатах соревнуются суперкомпьютеры, но сей раз таких роботов набралось лишь около трети — восемь, а остальными участниками были шахматные микрокомпьютеры (два) и программы, записанные на обычных дискетах для персональных компьютеров (PC), среди них и две из Москвы — «Кентавр» и «Мираж».

Фаворитами были три известные программы: «Хайтек», «Шахматная машина» и «М-Чесс». Первая из них имеет в своем активе немало побед над гроссмейстерами. «Шахматная машина», которая также выступает под названием «Гидеон», в прошлом году заняла первое место в чемпионате мира среди микрокомпьютеров, а «М-Чесс» в том же чемпионате микрокомпьютеров была первой среди программ для PC.

«Шахматная машина» не подвела: набрав 4,5 очка из 5, она завоевала звание чемпионки мира. Впервые голландская программа добивается столь внушительного успеха, обогнав ранее доминировавших американских и немецких роботов. 2—3 места — 4 очка из 5 — разделили менее известные программы «Цугцванг» и «Кумулус». Наш «Кентавр» (авторы В.Вихрев и А.Манякин) набрал 2 очка, а «Мираж» (Ю.Шпеер и В.Рыбинкин) — 1 очко.

Посмотрите партию чемпиона с микрокомпьютером «Каспаров», разделившим 4—5 место. В этой встрече белых подвело недостаточное внимание к гроссмейстерским поединкам последнего времени.

«Каспаров» — «Шахматная машина»
Русская партия

1. e4 e5 2. Кf3 Кf6 3. d4 К:e4 4. Сd3 d5 5. К:e5 Сd6 6. 0-0 0-0 7. c4 С:e5 8. de Кc6 9. cd Ф:d5 10. Фc2 Кb4 11. С:e4 К:c2 12. С:d5 Сf5 13. g4 С:g4 14. Сf4 К:a1 15. Лc1

В шестой партии полуфинального матча претендентов Тимман — Юсупов (Линарес, 1992) после 15. Сe4 f5 16. Сd5+ Крh8 17. Лc1 c6 18. Сg2 Лfd8 19. Кd2 h6 20. h4 Лd3 белые вместо напрашивающегося взятия на a1 применили ценную новинку — 21. Сf1! Лd4 22. Сe3 Лd5. Только теперь, улучшив расположение фигур, белые берут коня — 23. Л:a1 Л:e5 24. Кc4 Лd5 25. Сg2 Лb5 26. Лe1 Лd8 27. С:a7 Лd1+ 28. Л:d1 С:d1 29. Сd4! Положение черных безнадежно, и Тимман одержал победу. К сожалению, эта важная партия не успела попасть в поле зрения «Каспарова».

15...c6 16. Сe4 f6 17. Кc3? Следовало взять на f6, теперь же черные перехватывают инициативу.

17...fe 18. С:e5 Лad8 19. Л:a1 Лd2. Вот и сказалось отсутствие слона на диагонали c1 — h6.

20. b3 Лf:f2 21. Сg3 Лf7 22. Лf1 g6 23. Л:f7 Кр:f7. Формально на доске материальное равенство. Но легкие фигуры белых разрознены, а черные пешки на ферзевом фланге скоро придут в движение.

24. Сf4 Лd7 25. Крf2 Сf5 26. С:f5 gf 27. Кa4 b6 28. Кb2 c5 29. Крf3 Крf6 30. Кc4 Крe6 31. Кa3 a6 32. Кc4 Лd3+ 33. Крe2 Лd4 34. Крe3 b5 35. Кb2 Крd5 36. Кd3 a5 37. Сg3 Лe4+ 38. Крd2 Лe8 39. Сc7 a4 40. Крc3 b4+ 41. Крd2 ab 42. ab c4 43. К:b4+ Крc5 44. Крc3 Лe3+ 45. Крd2 Лf3 46. Кc2 cb 47. Кa3 Крd5 48. Сb6 f4 49. Сa7 Крe4 50. Крc1 Лh3 51. Кb1 Крd3 52. Крb2 Л:h2+ 53. Кр:b3 f3 54. Кa3 f2 55. С:f2 Л:f2. Белые сдались.

Чистая победа!

Е.Гик

ГОЛОВОЛОМКА «ХОРОВОД»

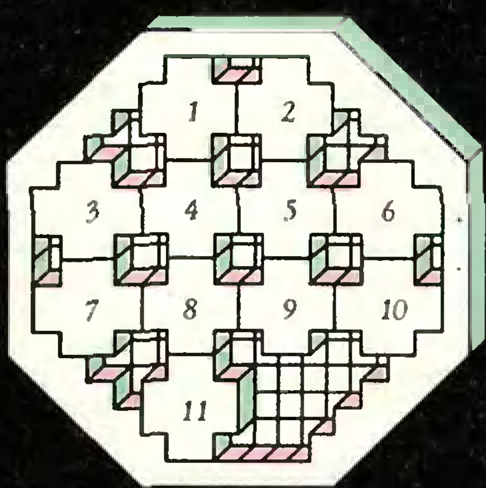
Новую оригинальную головоломку придумал известный изобретатель занимательных математических задач и головоломок Леонид Мочалов. Головоломка относится к тому же типу, что и игра «15», но решить ее гораздо труднее.

На клетчатом поле 11 крестообразных фишек размещены по порядку так, что первый ход возможен только фишками 9 или 11. Задача состоит в том, чтобы, передвигая фишки по полю, но не вынимая их из коробочки, поменять местами фишки 1 и 2, а остальные вернуть в исходное положение.

На сегодняшний день лучшее (т.е. самое короткое) решение неизвестно, и если вам удастся решить задачу менее чем за 70 ходов, пришлите ваш вариант в редакцию. Ходы записываются так: номер фишки, стрелка или буква, указывающая направление движения, количество клеток, на которое перемещается фишка в указанном направлении. Например, первый ход: 9Н4.

Фишки можно вырезать из картона, оклеить цветной бумагой и закруглить углы. Из плотной бумаги вырезают и расчерчивают игровое поле. По краям его приклеивают борта, сделанные из того же картона, что и фишки.

Ждем от вас рекордных решений новой головоломки!



НОМЕР ПОДГОТОВЛЕН ПРИ ПОДДЕРЖКЕ АКБ ЛЕФКО-БАНК