Квант

ISSN 0130-

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Параболы в фейерверке

1992

Квант

1992

12

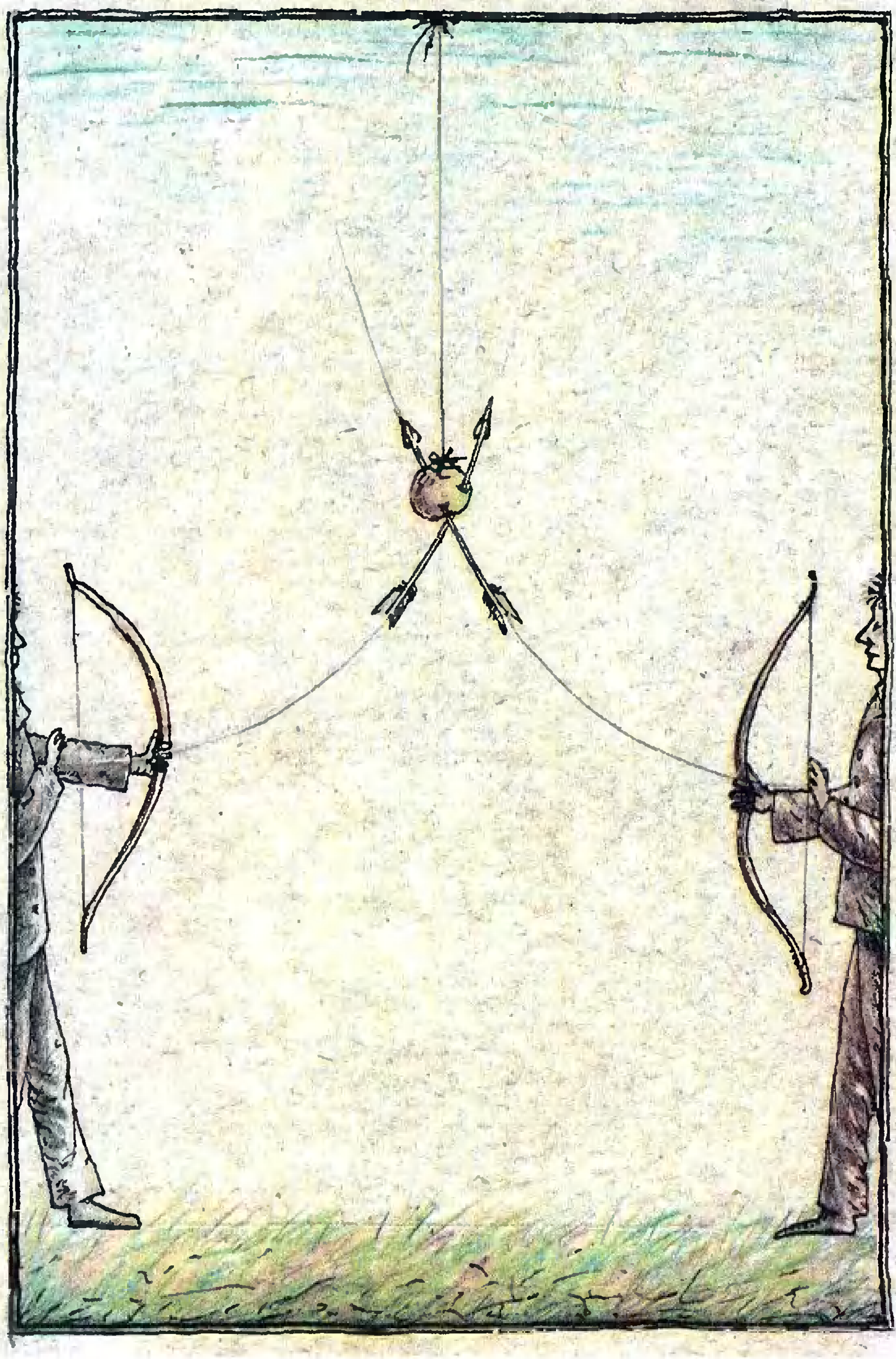
Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал

Учредители — Президиум Российской Академии наук, Президиум Российской Академии образования и коллектив редакции журнала «Квант»

Москва, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы

В номере:



В этом номере журнала мы публикуем первую часть знаменитого сочинения Н. И. Лобачевского «Геометрические исследования по теории параллельных линий», содержащего элементарное изложение начал неевклидовой геометрии. Оно было издано Лобачевским в 1840 году на немецком языке и вышло в свет в Берлине в виде небольшой книжки. По этой книжке с идеями Лобачевского познакомились многие европейские математики; достаточно сказать, что в библиотеке великого немецкого математика К. Ф. Гаусса находилось два экземпляра этой книги, один из которых, по всей вероятности, был прислан самим Лобачевским. Позже с этого немецкого издания были сделаны французский и английский переводы.

По содержанию «Геометрические исследования» Лобачевского естественно разбиваются на три части. Первая часть начинается с краткого перечня предложений, не зависящих от постулата о параллельных линиях. Этот перечень, конечно, не охватывает всех таких предложений — Лобачевский ограничивается теми, которые необходимы ему в дальнейшем изложении.

Основное содержание первой части составляют десять теорем, в которых излагается теория параллельных Лобачевского. Здесь устанавливаются две гипотезы, одна из которых ведет к евклидовой (по Лобачевскому — к «употребительной») геометрии, другая — к созданной им новой геометрии, называемой в книге «воображаемой». Устанавливается понятие об угле параллельности и связанной с ним функцией $\Pi(x)$; изучается зависимость между суммой углов треугольника и постулатом о параллельных линиях.

Во второй части вводятся понятия о предельной линии и предельной поверхности и доказывается теорема, что геометрия предельной поверхности совпадает с евклидовой планиметрией. Третья часть содержит неевклидову тригонометрию и вывод основного соотношения

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)=e^{-x/k}.$$

Предлагаем вашему вниманию первую часть «Геометрических исследований» Лобачевского. Мы сохранили стиль и обозначения автора, сделав лишь следующие изменения. Для удобства мы разделили текст на параграфы, опустили некоторые из упомянутых выше предложений, не использующиеся в этой части книги, а основу ее — предложения 16—25 — перенумеровали как теоремы 1—10.

Весь остальной текст оставлен без изменений.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ

Н. ЛОБАЧЕВСКИЙ

Введение

В геометрии я нашел некоторые несовершенства, которые я считаю причиной того, что эта наука, поскольку она не переходит в анализ, до настоящего времени не вышла ни на один шаг за пределы того состояния, в каком она к нам перешла от Евклида. К этим несовершенствам я отношу неясность в первых понятиях о геометрических величинах, способы, которыми мы себе представляем измерение этих величин, и, наконец, важный пробел в теории параллельных линий, к восполнению которого все усилия математиков до настоящего времени были тщетными.

Чтобы не утомлять читателей множеством предложений, коих доказательства не представляют затруднений, я привожу здесь наперед только те из них, знание которых необходимо для последующего.

1) *Прямая линия покрывает себя самое во всех положениях.* Под этим я разумею, что при вращении поверхности прямая линия не меняет своего места, если она проходит через две неподвижные точки поверхности.

2) Две прямые не могут пересекаться в двух точках.

3) Прямая линия, будучи достаточ-

но продолжена в обе стороны, должна уходить за всякие пределы и таким образом делит ограниченную плоскость на две части.

4) Две прямые, перпендикулярные к одной и той же третьей прямой, никогда не пересекаются, сколько бы мы их ни продолжали.

5) Прямая линия всегда пересекает другую прямую, если переходит с одной ее стороны на другую.

6) Вертикальные углы, у которых стороны одного составляют продолжения сторон другого, равны. Это справедливо как в применении к плоским прямолинейным углам, так и в применении к плоскостным двугранным углам.

7) Две прямые не могут пересечься, если какая-либо третья прямая пересекает их под равными углами.

8) В прямолинейном треугольнике равным углам противолежат равные стороны, и обратно.

9) В прямолинейном треугольнике большей стороне противолежит также большой угол. В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше каждого из катетов, и прилежащие к ней углы острые.

10) Прямолинейные треугольники конгруэнтны, если у них равны сторона и два угла или две стороны и заключенный между ними угол, или две стороны и угол, противолежащий большей стороне, или три стороны.

11) Прямая линия, перпендикулярная к двум другим прямым, не лежащим с нею в одной плоскости, перпендикулярна ко всем прямым, проведенным через точку их общего пересечения в плоскости двух последних прямых.

Параллельные линии

Начиная отсюда, дальнейшие предложения уже сопровождаются пояснениями и доказательствами.

Теорема 1. *Все прямые линии, выходящие в некоторой плоскости из одной точки, могут быть по отношению к некоторой заданной прямой той же плоскости разделены на два класса, именно на* ***пересекающие*** *ее и* ***непересекающие. Граничная линия одного и другого класса этих прямых линий называется параллельной заданной линии.***

Из точки A (рис. 1) опустим на заданную линию BC перпендикуляр AD, к которому, в свою очередь, восставим перпендикуляр AE. В прямом угле EAD прямые, выходящие из точки A, либо все встречают линию DC, как, например, AF, либо же некоторые, подобно перпендикуляру AE, не встречают линии DC. Не зная, есть ли перпендикуляр AE единственная линия, которая не встречается с DC, будем считать возможным, что существуют и другие линии, например AG, которые не встречают DC, сколько бы мы их ни продолжали. При переходе от пересекающих линий AF к непересекающим AG мы должны встретить линию AH, параллельную DC,— граничную линию,— по одну сторону которой ни одна линия AG не встречает DC, между тем как по другую сторону каждая линия AF пересекает линию DC. Угол HAD между параллелью AH и перпендикуляром AD называется *углом параллели* (углом параллельности); мы будем здесь обозначать его через $\Pi(p)$ при $AD=p$.

Если $\Pi(p)$ есть прямой угол, то продолжение AE' перпендикуляра AE также будет параллельно продолжению DB линии DC; к этому еще

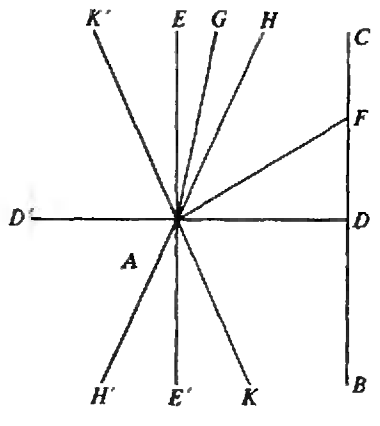


Рис. 1.

заметим, что в отношении четырех прямых углов, которые при точке A образуют перпендикуляры AE и AD и их продолжения AE' и AD', каждая прямая линия, выходящая из точки A, либо сама, либо по крайней мере своим продолжением расположена в одном из тех двух прямых углов, которые обращены к линии BC, так что, кроме параллели EE', все другие прямые по достаточном продолжении в обе стороны должны пересекать линию BC.

Если $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$, то по другую сторону перпендикуляра AD, под тем же углом $DAK = \Pi(p)$, будет проходить еще одна линия AK, параллельная продолжению DB линии DC; таким образом, при этом допущении мы должны отличать еще *сторону параллельности*. Все остальные линии или их продолжения внутри двух прямых углов, обращенных к BC, принадлежат к пересекающим, если они лежат внутри угла $HAK = 2\Pi(p)$ между параллелями; напротив того, они принадлежат к непересекающим AG, если они расположены по другую сторону параллелей AH и AK в отверстии двух углов $EAH = \frac{1}{2}\pi - \Pi(p)$, $E'AK = \frac{1}{2}\pi - \Pi(p)$ между параллелями и перпендикуляром EE' к AD. Подобным же образом по другую сторону перпендикуляра EE' продолжения AH' и AK' параллелей AH и AK также будут параллельны BC; остальные линии принадлежат в угле $K'AH'$ к пересекающим, а в углах $K'AE$ и $H'AE'$ — к непересекающим.

Сообразно этому при предположении $\Pi(p) = \frac{1}{2}\pi$ линии могут быть только пересекающими или параллельными; если же принять, что $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$, то нужно допустить две параллели, одну по одну сторону перпендикуляра, другую по другую его сторону; кроме того, между остальными линиями нужно различать пересекающие и непересекающие. Как при одном, так и при другом предположении признаком параллелизма служит то, что линия становится пересекающей при малейшем отклонении в ту сторону, где лежит параллель; таким образом, если AH параллельна DC, то каждая линия AF, сколь бы мал ни был угол HAF, пересекает DC.

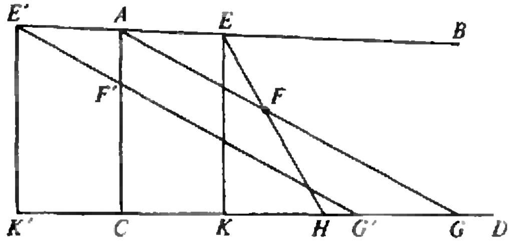


Рис. 2.

Теорема 2. *Прямая линия сохраняет признак параллельности во всех своих точках.*

Пусть прямая AB (рис. 2) будет параллельна CD и пусть AC будет перпендикуляр к последней. Мы рассмотрим две точки, которые расположены произвольно; одна на линии AB и другая на ее продолжении по другую сторону перпендикуляра. Положим, что точка E лежит по ту сторону перпендикуляра, с которой AB рассматривается как параллельная CD. Из точки E опустим перпендикуляр EK на CD, затем проведем EF так, чтобы она проходила внутри угла BEK. Точки A и F соединим прямой линией, продолжение которой должно встретить CD где-либо в G (теорема 1). Вместе с тем мы получим треугольник ACG, внутрь которого входит линия EF; так как эта последняя не может пересечь AC в силу самого построения, а также не может вторично встретить ни AG, ни EK (предложение 2), то она должна встретить CD в какой-либо точке H (предложение 3).

Пусть теперь E' будет точка на продолжении линии AB и пусть $E'K'$ будет перпендикуляр на продолжении линии CD; проведем линию $E'F'$ под столь малым углом $AE'F'$, чтобы она пересекла AC где-либо в F'; затем

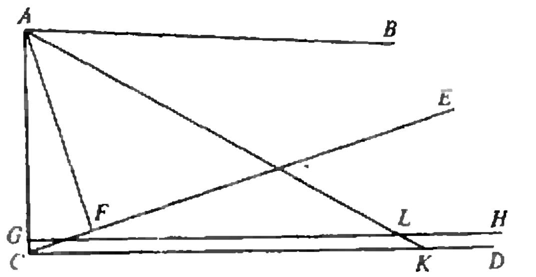


Рис. 3.

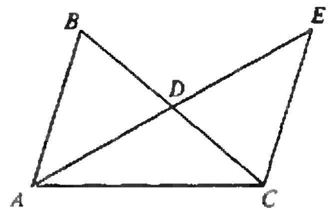


Рис. 4.

из A проведем под тем же углом с AB линию AF, продолжение которой встретит CD в G (теорема 1). Таким образом мы получаем треугольник AGC, в который входит продолжение линии $E'F'$; так как эта линия не может вторично пересечь AE, а также не может пересечь AG, ибо угол $BAG = BE'G'$ (предложение 7), то она должна встретить CD где-либо в G'.

Таким образом, из каких бы точек E и E' прямой AB ни выходили линии EF и $E'F'$ и как бы мало они ни отклонялись от линии AB, они всегда пересекут линию CD, которой AB параллельна.

Теорема 3. *Две линии всегда взаимно параллельны.*

Пусть AC будет перпендикуляр к линии CD (рис. 3), которой AB параллельна; из C проведем линию CE под каким угодно острым углом ECD к CD и из A опустим перпендикуляр AF на CE; получим прямоугольный треугольник ACF, в котором гипотенуза AC больше катета AF (предложение 9). Отложим $AG = AF$ и наложим AF на AG; тогда AB и FE займут положение AK и GH, причем угол $BAK = FAC$; следовательно, AK должна пересечь линию DC где-либо в точке K (теорема 1); таким образом получится треугольник AKC, внутрь которого входит перпендикуляр GH; он встречает линию AK в L (предложение 3) и тем определяет на линии AB расстояние AL точки пересечения линий AB и CE от точки A.

Отсюда следует, что CE всегда встретит AB, сколь бы мал ни был угол ECD; поэтому CD параллельна AB (теорема 1).

Сумма углов прямолинейного треугольника

Теорема 4. *В прямолинейном треугольнике сумма трех углов не может превышать двух прямых.*

Допустим, что в треугольнике ABC (рис. 4) сумма трех углов равна $\pi + \alpha$; если его стороны не равны, возьмем наименьшую из них BC, разделим ее пополам в D, проведем из A через D линию AD и на ее продолжении сделаем DE равным AD; затем соединим точку E с точкой C прямой EC. В равных треугольниках ADB и CDE угол $ABD = DCE$ и $BAD = DEC$ (предложения 6 и 10); отсюда следует, что в треугольнике ACE сумма углов также должна быть равна $\pi + \alpha$; кроме того, наименьший угол BAC треугольника ABC (пред-

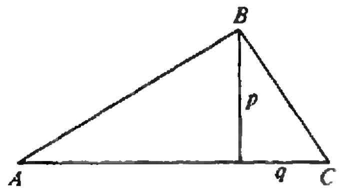


Рис. 5.

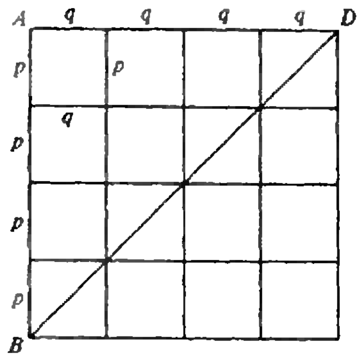


Рис. 6.

ложение 9) перешел в новый треугольник ACE, причем он разбился на две части EAC и AEC. Продолжая таким же образом, разделяя при этом пополам каждый раз ту сторону, которая противолежит наименьшему углу, мы необходимо придем к треугольнику, сумма трех углов которого равна $\pi+\alpha$, но в котором окажутся два угла, каждый из которых по абсолютной величине меньше $\frac{1}{2}\alpha$; так как, однако, третий угол не может быть больше π, то α должно быть либо нулем, либо отрицательным.

Теорема 5. *Если в каком-либо прямолинейном треугольнике сумма трех углов равна двум прямым, то это имеет место и во всяком другом треугольнике.*

Положим, что в прямолинейном треугольнике ABC (рис. 5) сумма трех углов $=\pi$; в таком случае по крайней мере два его угла должны быть острые. Из вершины B третьего угла опустим на противоположную сторону перпендикуляр p; тогда треугольник ABC разобьется на два прямоугольных треугольника, в каждом из которых сумма трех углов также должна быть равна π, ибо ни в одном из них она не может превышать π, а в составленном из них треугольнике она не должна быть меньше π. Таким образом мы получаем прямоугольный треугольник с катетами p и q, а из него получаем четырехугольник, в котором противоположные стороны равны, а прилежащие друг к другу стороны p и q взаимно перпендикулярны (рис. 6). Повторно прикладывая тот же четырехугольник, можно получить подобный же четырехугольник со сторонами np и q и, наконец, четырехугольник $ABCD$ со взаимно перпендикулярными сторонами, в котором $AB=np$, $AD=mq$, $DC=np$, $BC=mq$, где m и n суть произвольные целые числа. Такой четырехугольник делится диагональю BD на два равных прямоугольных треугольника BAD и BCD, в каждом из которых сумма трех углов равна π. Числа m и n могут быть выбраны так, чтобы прямоугольный треугольник ABC (рис. 7), катеты которого $AB=np$, $BC=mq$, охватил другой заданный прямоугольный треугольник DBE, коль скоро их прямые углы будут приведены в совмещение. Если проведем линию DC, то получим еще прямоугольные треугольники, из которых каждые два последовательно имеют общую сторону. Треугольник ABC получается путем соединения двух треугольников ACD и DCB, ни в одном из которых сумма трех углов не может быть больше π; она должна быть поэтому равна π, поскольку в составленном треугольнике эта сумма должна быть равна π. Таким же образом треугольник BDC состоит из двух треугольников DEC и BDE; поэтому и в треугольнике DBE сумма трех углов должна быть равна π; и вообще это должно иметь место во всяком треугольнике, так как всякий треугольник разбивается на два прямоугольных треугольника.

Отсюда следует, что возможны только два допущения: либо сумма трех углов во всех прямолинейных треугольниках равна π, либо же она во всех треугольниках меньше π.

Теорема 6. *Из данной точки всегда можно провести прямую линию таким образом, чтобы она образовала с данной прямой сколь угодно малый угол.*

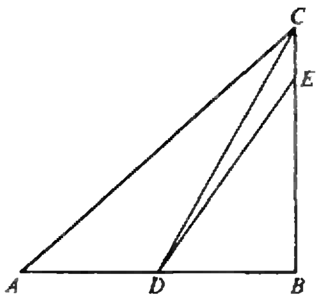


Рис. 7.

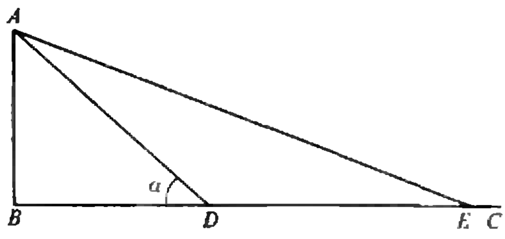


Рис. 8

Из данной точки A (рис. 8) опустим на данную прямую BC перпендикуляр AB; на BC возьмем произвольную точку D и проведем линию AD; далее, сделаем $DE=AD$ и проведем AE. Пусть в прямоугольном треугольнике ABD угол $ADB=\alpha$. В таком случае в равнобедренном треугольнике ADE угол AED должен быть либо равен $\frac{1}{2}\alpha$, либо меньше (предложение 8 и теорема 5). Продолжая таким образом, мы, наконец, придем к такому углу AEB, который меньше любого заданного угла.

Теорема 7. *Если два перпендикуляра к одной и той же прямой линии параллельны между собой, то в прямолинейных треугольниках сумма трех углов равна π.*

Положим, что линии AB и CD (рис. 9) параллельны между собой и перпендикулярны к AC. Из A проведем линии AE и AF к точкам E и F, взятым на линии CD на любых расстояниях $FC>EC$ от точки C. Допустим, что в прямоугольном треугольнике ACE сумма трех углов равна $\pi-\alpha$, а в треугольнике AEF она равна $\pi-\beta$; в таком случае в треугольнике ACF сумма углов будет равна $\pi-\alpha-\beta$, причем ни α, ни β не могут быть отрицательными. Пусть, далее, угол $BAF=a$, $AFC=b$; в таком случае $\alpha+\beta=a-b$; теперь, удаляя линию AF от перпендикуляра AC, можно сделать угол a между AF и параллелью AB сколь угодно малым; так же можно уменьшать и угол b; следовательно, два угла α и β не могут иметь никакой другой величины, кроме $\alpha=0$ и $\beta=0$.

Отсюда следует, что во всех прямолинейных треугольниках сумма трех углов либо равна π, и тогда угол параллельности $\Pi(p)=\frac{1}{2}\pi$ для любой линии p, либо во всех треугольниках эта сумма $<\pi$, и тогда также $\Pi(p)<\frac{1}{2}\pi$.

Первое предположение служит основой *обыкновенной геометрии и плоской тригонометрии*. Второе предположение также может быть допущено, не приводя ни к какому противоречию в результатах; оно обосновывает новое геометрическое учение, которому я дал название *«воображаемая геометрия»* и которое я здесь намерен изложить вплоть до вывода уравнений между сторонами и углами прямолинейных и сферических треугольников.

Исследование угла параллельности

Теорема 8. *Для любого заданного угла α можно найти такую линию p, что $\Pi(p)=\alpha$.*

Пусть AB и AC (рис. 10) — две прямые линии, образующие при пересечении острый угол α; на AB возьмем произвольно точку B' и из этой точки опустим на AC перпендикуляр $B'A'$, сделаем $A'A''=AA'$, восставим в A'' перпендикуляр $A''B''$ и так будем продолжать до тех пор, пока придем к перпендикуляру CD, который уже не встречает AB. Это необходимо должно иметь место, ибо если в треугольнике $AA'B'$ сумма всех трех углов равна $\pi-a$, то в треугольнике $AB'A''$ она равна $\pi-2a$, в треугольнике $AA''B''$ она меньше

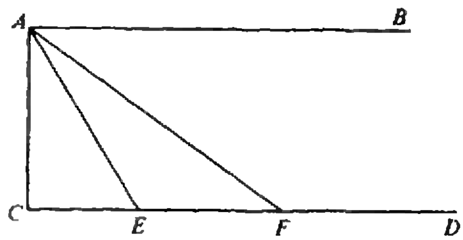


Рис. 9.

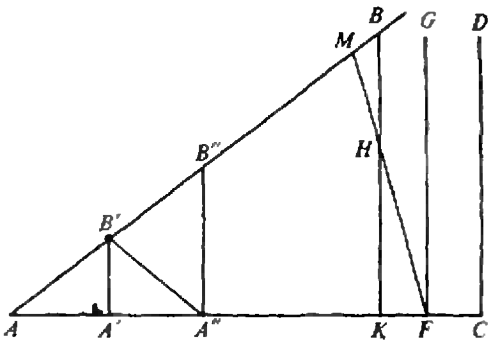


Рис. 10.

$\pi-2\alpha$ (теорема 5) и т. п., пока она, наконец, не станет отрицательной и при этом обнаружит невозможность образования треугольника. Перпендикуляр CD может оказаться именно тем, до которого все перпендикуляры из точек, лежащих ближе к A, пересекают AB; во всяком случае при переходе от пересекающих к непересекающим такой перпендикуляр должен существовать. Теперь из точки F проведем линию FH, образующую с FG острый угол HFG и именно с той стороны, с которой лежит точка A. Из какой-либо точки H линии FH опустим на AC перпендикуляр HK, продолжение которого, следовательно, должно пересечь AB где-либо в B; он образует, таким образом, треугольник AKB, внутрь которого входит продолжение линии FH, и потому оно должно встретить гипотенузу AB где-либо в M. Так как GFH есть произвольный угол и может быть взят сколь угодно малым, то линия FG параллельна AB и $AF=p$ (теоремы 1 и 3).

Легко усмотреть, что с уменьшением p угол α возрастает, приближаясь при $p=0$ к $\frac{1}{2}\pi$; с возрастанием p угол α уменьшается, все более приближаясь к нулю при $p=\infty$. Так как совершенно произвольно, какой угол разуметь под символом $\Pi(p)$, когда линия p выражается отрицательным числом, то мы примем

$$\Pi(p)+\Pi(-p)=\pi,$$

каковое равенство должно иметь место для всех значений p, как положительных, так и отрицательных, а также для $p=0$.

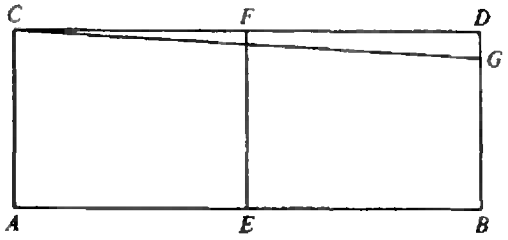


Рис. 11.

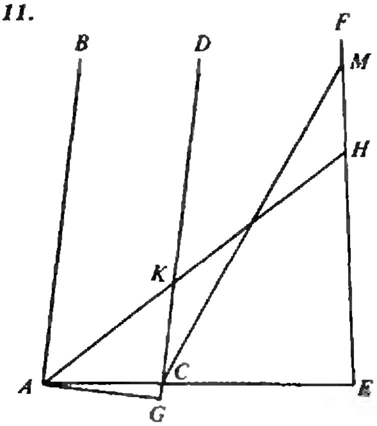


Рис. 12.

Взаимное расположение параллельных линий

Теорема 9. *Чем далее параллельные линии продолжаются в сторону параллельности, тем более они друг к другу приближаются.*

К прямой AB (рис. 11) восставим два перпендикуляра $AC=BD$ и конечные их точки соединим прямой линией CD. Тогда четырехугольник $CABD$ будет иметь два прямых угла при A и B, а при C и D — два острых угла (теорема 7), которые равны между собой, как в этом легко убедиться, налагая этот четырехугольник на самого себя так, чтобы линия BD упала на AC, а AC — на BD. Разделим AB пополам и в точке деления E восставим перпендикуляр EF к AB. Он должен быть также перпендикулярен к CD, потому что четырехугольники $CAEF$ и $FEBD$ покрывают друг друга, если наложим их друг на друга так, чтобы линия FE осталась в том же положении. Вследствие этого линия CD не может быть параллельна AB, параллель же к последней в точке C, именно CG, должна быть наклонена в сторону AB (теорема 1) и отсечет от перпендикуляра BD часть $BG<CA$. Так как точка C выбрана на линии CG произвольно, то отсюда следует, что CG тем более приближается к AB, чем далее мы ее продолжаем.

Теорема 10. *Две прямые линии, параллельные третьей, параллельны между собой.*

Примем сначала, что три линии AB, CD и EF (рис. 12) лежат в одной

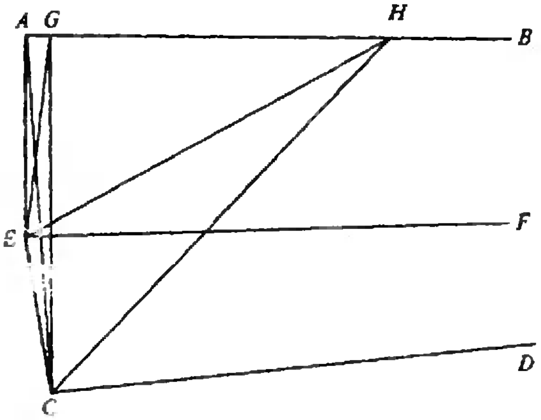


Рис. 13.

плоскости. Если две из них по порядку AB и CD параллельны крайней линии EF, то AB и CD также параллельны между собой. Чтобы это обнаружить, опустим из произвольной точки A крайней линии AB на другую крайнюю FE перпендикуляр AE, который пересечет среднюю линию CD в некоторой точке C (предложение 3) под углом $DCE < \frac{1}{2}\pi$ со стороны параллели CD к EF (теорема 7). Перпендикуляр AG, опущенный из той же точки A на CD, должен упасть внутри отверстия острого угла ACG (предложение 9); всякая другая линия AH, проведенная из A внутри угла BAC, должна пересечь линию EF, параллельную AB, где-либо в H, сколь бы мал ни был угол BAH; следовательно, CD пересечет в треугольнике AEH линию AH где-либо в K, так как она не может встретиться с EF. Если бы AH проходила из точки A внутри угла CAG, то она должна была бы в треугольнике CAG пересечь продолжение CD где-либо между точками C и G. Отсюда следует, что AB и CD параллельны (теоремы 1 и 3).

Если примем, что обе внешние линии AB и EF параллельны средней CD, то каждая линия AK, проведенная из точки A внутри угла BAE, пересечет линию CD где-либо в точке K, сколь бы мал ни был угол BAK. На продолжении AK возьмем произвольно точку L и соединим ее с C линией CL, которая пересечет EF где-либо в M, вследствие чего образуется треугольник MCE. Продолжение линии AL внутрь треугольника MCE не может вторично пересечь ни AC, ни CM; следовательно, оно должно встретить EF где-либо в H; поэтому AB и EF взаимно параллельны.

Пусть теперь параллели AB и CD (рис. 13) лежат в двух плоскостях, пересечение которых есть линия EF. Из произвольной точки E последней опустим перпендикуляр EA на одну из двух параллелей, например на AB; затем из основания A перпендикуляра EA опустим вновь перпендикуляр AC на вторую параллель CD и соединим концы E и C обоих перпендикуляров линией EC. Угол BAC должен быть острым (теорема 7); следовательно, перпендикуляр CG, опущенный из C на AB, падает в точку G по ту сторону от CA, в которой считаем линии AB и CD параллельными. Каждая линия EH, сколь бы мало она ни отклонялась от EF, лежит с EC в плоскости, которая должна пересечь плоскость двух параллелей AB и CD вдоль некоторой линии CH. Эта последняя линия пересекает где-либо AB и именно в той же точке H, которая принадлежит всем трем плоскостям и через которую необходимо проходит также линия EH; следовательно, EF параллельна AB. Подобным же образом можно обнаружить параллельность линий EF и CD.

Сообразно этому предположение, что линия EF параллельна одной из двух других параллельных между собой линий AB и CD, означает не что иное, как то, что EF рассматривается как пересечение двух плоскостей, в которых лежат параллели AB и CD. Поэтому две линии параллельны между собой, если они параллельны одной и той же третьей линии, хотя бы они лежали и в различных плоскостях. Последнее предложение можно выразить также следующим образом: *три плоскости пересекаются по линиям, которые все между собой параллельны, поскольку предполагается параллельность двух из них.*

МИКРОЭЛЕКТРОНИКА ОБРЕТАЕТ ЗРЕНИЕ

Доктор физико-математических наук
Ю. НОСОВ

Тому, кто умеет,— дело найдется

Неудивительно, что с таким «джентльменским набором» превосходных качеств ПЗС уверенно шагнули в непростой мир видеоинформации. Первые же образцы линеек и матриц стали использоваться в фототелеграфии, для счета деталей на конвейере, в ряде технологических установок — там, где было яркое освещение и не требовалась высокая разрешающая способность. А в 1974 году появились уже ПЗС-камеры телевизионного типа, пока еще «черно-белые» (вернее, монохромные) и малоформатные. Объемом чуть больше пары спичечных коробков, эти камеры по мере удешевления приобретали все больше профессий: входное читающее устройство ЭВМ; электронный глаз промышленных роботов; электронная «сиделка», наблюдающая больного или ребенка; электронный дверной глазок, демонстрирующий хозяину квартиры его посетителей на экране телевизора; электронное зеркало заднего вида громоздких автомобилей, перевозящих особо ответственные грузы, и многое другое в том же роде.

Вот, например, одна из ПЗС-систем идентификации личности по отпечаткам пальцев: при расшифровке папиллярных линий она способна различить до 256 градаций яркости, тогда как оператору под силу лишь 30. Достоверность, быстрота, исключение ошибок, обусловленных утомляемостью. Еще конкретный пример. При оценке состояния и сохранности старинных архивных документов исследуют контраст чернил и пергамента, степень покоробленности страниц, наличие следов бактериального или химического воздействия. Во избежание гибели исследуемый документ должен находиться под колпаком в среде гелия. Много ли найдется желающих заниматься этой рутинной, монотонной деятельностью? Использование «ПЗС-архивиста» раз в 10 повышает скорость анализа материалов, причем он не требует отпуска за вредность, не ввязывается в забастовки.

Но все это пока еще не телевидение — для этого ПЗС-камеры первого поколения (конец 70-х — начало 80-х годов) имеют слишком низкую разрешающую способность, а полноформатные матрицы чересчур дороги.

Однако кое-кто мог позволить себе роскошь не считаться с затратами, первая среди них — космонавтика. Для этой «капризной дамы» изготовили уникальные матрицы — с числом элементов разложения около миллиона, разработали охлаждаемые устройства с исключительно низким уровнем шумов и фоновой засветки. Но потрудились не зря. В 1986 году ПЗС-камеры позволили получить снимки ядра кометы Галлея, а чуть позже — передать на Землю из трагически оборвавшейся космической экспедиции рельефные фотографии Фобоса (крошечного спутника Марса) — фотографии, обошедшие журналы всего мира. Способность ПЗС к длительному накоплению светового потока (в некоторых охлаждаемых образцах генерируемые электроны способны «прожить» десятки минут) позволяет им почувствовать почти невидимые объекты с блеском в 24 звездные величины (24^m). За-

Окончание. Начало см. в «Кванте» № 11.

метим, что лучшие из гигантских наземных телескопов имеют проницающую способность 25^m, а космические — 29^m. Астронавигация, ориентация по звездам стала надежным «куском хлеба» ПЗС.

Спустимся, однако, с небес на землю. Широчайшей сферой применения ПЗС становится измерительная техника. Благодаря жесткой геометрии растра, о чем уже говорилось (в первой части статьи), эти приборы не только видят предмет, но одновременно измеряют его. Надо лишь выудить результаты этих измерений, и провести их математическую обработку. В одной из систем при испытании самолета в аэродинамической трубе удается фиксировать смещение реперных меток на 0,1 мкм. ПЗС-контролер на станках с ЧПУ позволяет измерять обрабатываемые детали с точностью до 0,01 мкм — это всего лишь 15 моноатомных слоев металла! «Эка невидаль,— укоротит наш восклицательный знак кто-нибудь из любознательных читателей,— туннельный микроскоп (Нобелевская премия 1986 г.), скользя тончайшим зондом вдоль поверхности, чувствует ее шероховатости в полатома». Верно, но эти устройства очень дороги, сложны в эксплуатации, работают с образцами, помещенными в вакуум. Так что стоит ли сопоставлять экзотику с «ПЗС-штангенциркулем», который имеет все основания не сегодня-завтра появиться в цехах и на участках.

Особый раздел послужного списка ПЗС — медицина. В эндоскопии уже давно развиваются телевизионные методы исследования, для чего окуляр фиброскопа стыкуется с видиконом. Удобно вывести увеличенное цветное изображение внутренностей пациента на экран монитора — и консилиум становится достоверней, и лекции для студентов содержательнее. Можно записывать увиденное на магнитную ленту и создавать банки изображений — это позволяет следить за динамикой болезни и компьютеризировать обработку снимков, что особенно существенно при массовой диспансеризации. Все это обеспечивает и ПЗС-техника (в чем-то лучше видиконов), но она открывает и принципиально новые возможности. Миниатюрность и низковольтовое возбуждение ПЗС-кристалла позволяют монтировать его на дистальном конце фиброскопа, при этом световод заменяется тонкими проводниками. Увеличивается угол обзора (при использовании световодов он мал), повышается надежность эндоскопа (световоды ломаются), заглатываемая пациентом трубка становится тоньше. Специальные ПЗС-структуры, восприимчивые к рентгеновским лучам, позволят рентгенологам просматривать наши легкие на телеэкране, избавят их от вредного облучения и неудобств затемненных комнат.

Проекты искусственного зрения — не робота или компьютера, а человека — обсуждаются давно, но лишь с появлением ПЗС они обрели реальный технический базис. Похоже, что тема «ПЗС-медицина» не скоро будет исчерпана.

И все-таки самый невероятный бум ожидается (в ряде стран он уже начался) при внедрении ПЗС в телевидение, видео, кино, фотографию. Если подтвердятся прогнозы резкого снижения цен (а они подтвердятся), волна этого бума окажется под стать той, которую вызвало распространение персональных компьютеров, а может быть еще выше и продолжительнее. Типичная ПЗС-видеокамера массой 1—1,5 кг кроме электронного глаза содержит видеокассету на 1—1,5 часа работы и маленький жидкокристаллический экран для оперативного просмотра отснятого. Качество съемок таких любительских камер, выпускаемых миллионными тиражами (конечно же, японцами), не уступает кинокамерам с 8-миллиметровой пленкой. Профессиональные ТВ-камеры с ПЗС-матрицами пока еще очень сложны, громоздки, дороги; твердотельные передатчики для ТВЧ (телевидение высокой четкости) находятся в стадии разработки. Для этого потребуются фоточувствительные матрицы нового поколения, которые при трехцветности растра будут содержать не менее 1100—1400 строк (таковы ТВЧ-стандарты) и обеспечивать сканирование с тактовой частотой 40—100 МГц. Технологические трудности огромны (это несомненно), но, когда их удается преодолеть (и это несомненно), качество ПЗС-съемок сравняется с тем, которое обеспечивает 36-миллиметровая пленка,— последний бастион «киношников» будет взят электроникой. Три музы — телевидение, кино, видео — станут близнецами.

И все-таки опять не точка, за этой далью уже явственно проступает следующая — восприятие объемных изображений.

Если электронное кино пока еще в перспективе, то фотография становится объемной на наших глазах. ПЗС-фотоаппарат внешне ничем не отличается от обычного «Зенита» или «Кодака», но начинка иная: сразу за объективом расположена кремниевая матрица с сервисными интегральными схемами, в боковинах — миниатюрные аккумуляторы, в остальном объеме — магнитное дисковое запоминающее устройство. Точь-в-точь старинный особняк, перепланированный внутри под современные квартиры. На миниатюрном диске диаметром 48 мм записывается до 50 слайдов, которые можно и просмотреть на экране телевизора, и отпечатать на лазерном принтере. По-видимому, вскоре диск заменит полупроводниковая память, и из конструкции будут окончательно исключены механически подвижные элементы (электронные жидкокристаллические затворы известны уже давно). Сегодня пока микросхемы запоминают лишь 4—8 снимков, но лиха беда начало — ведь бурный прогресс полупроводниковой памяти одна из самых характерных черт развития микроэлектроники. Если все это будет, если удастся исключить из обращения фотоматериалы, мы получим колоссальную экономию серебра, а многомиллионная армия фотографов избавится от унижающей человека необходимости «химичить» в потемках фотолабораторий и ванных комнат.

Кто-то заметил, что в истории цивилизации можно выделить три равновеликих вехи: изобретение письменности, книгопечатания, персональных компьютеров — с каждым из них люди обретали новый язык общения. Похоже, что изобретение и развитие ПЗС-видеотехники приблизило нас к четвертой ступени той лестницы, по которой человечество поднимается к вершинам покорения многообразного мира информации.

Вместо заключения

Если вам доводилось видеть камкордеры (так частенько называют портативные видеокамеры), то несомненно запомнились и их визитные карточки: Sharp, Panasonic, Philips... А где же наши? Глумиться над отечественной электроникой стало модой, этим пробавляются многие — не станем уподобляться.

Приборы с зарядовой связью относятся к сверхбольшим интегральным схемам, массовый выпуск которых требует создания фактически новой подотрасли со сверхчистыми производственными помещениями, уникальным оборудованием, специальными материалами. А это огромные, многомиллиардные инвестиции.

Заметим, что накопленный отечественными специалистами потенциал вполне в состоянии разрядиться созданием цветных ПЗС-видеокамер, однако вакханалия последних лет, разлагающая наукоемкую промышленность, по-видимому, притормозит этот процесс.

Не хотелось бы заканчивать на минорной ноте — поэтому еще два слова. Все, что сделано — сделано людьми. В этом повествовании явно или неявно они сопоставлялись с великими мира сего — правомерно ли? Возможно и нет, в большинстве своем это обычные, простые люди — автор знаком со многими из создателей ПЗС. Но дело, сработанное ими, переживет их.


IN GOD WE TRUST
LIBERTY 1970

КОСМИЧЕСКИЙ МИРАЖ

(рассказ о гравитационных линзах)

Доктор физико-математических наук
П. БЛИОХ

«Ни одного QSO*) — я плачу Дереку 25 центов. Один QSO — он платит мне 25 центов. Два QSO — он платит мне доллар.»

Такое пари заключили между собой весной 1979 года два астронома: Деннис Уолш и Дерек Уилс в г. Остине (США). Один из них (Д. Уилс) длительное время проводил систематический поиск двойных (расположенных близко друг к другу) квазаров. К моменту заключения пари он исследовал уже около 100 пар и не нашел ни одного QSO — все «двойники» оказались звездами. Поэтому, когда Д. Уолш сообщил ему, что обнаружил два близких звездообразных объекта, он был уверен, что это звезды, а не квазары.

Речь идет о двух слабых (невооруженным глазом они не видны) «звездочках» в созвездии Большой Медведицы, почти сливающихся друг с другом (угол между ними равен 6″). Их сфотографировали еще в 1950 году, но спектры были получены только весной 1979 года Уолшем с коллегами. Именно по спектрам отличают квазары от звезд, и, заключая пари, Уолш уже знал, что он обнаружил двойной квазар. Уилс сам проверил тщательным образом спектры двойников на 107-дюймовом телескопе, убедился, что проиграл и уплатил доллар.

Как оказалось, доллар можно было и не платить, потому что эта пара представляет собой всего лишь космический мираж — двойное изображение одного квазара.

*) QSO — Quasy Stellar Object (Quasar). Так называют звездообразные космические источники, излучающие огромные мощности. Квазары были открыты в 1961 году. Они находятся так далеко, что видны с Земли как звезды, что и отражает их название. Расстояние до квазаров в миллионы раз превышает расстояние до самых далеких звезд нашей Галактики.

Близнецы родились 29 марта 1979 года

«Очевидно, мы допустили ошибку и сняли дважды спектр одного и того же источника»,— подумал Д. Уолш, когда, определив спектр одного из квазаров, перешел через несколько минут к его соседу. Астрономы вернулись назад, потом еще раз повторили всю процедуру. Сомнений не было: оба спектра походили друг на друга, как близнецы (в дальнейшем их так и стали называть). Такого совпадения спектров у двух объектов ранее никто не наблюдал (рис. 1). Невозможно было представить, чтобы два разных квазара имели столь одинаковые спектры. Тут-то и появилась мысль о *гравитационной линзе* (ГЛ), которая расщепила изображение источника на два близких компонента. Как это происходит, мы объясним чуть позже, а сначала расскажем немного о предыстории открытия ГЛ.

Свет и радиоволны тоже подчиняются закону всемирного тяготения

Термин «гравитационная линза» появился впервые в работе английского астронома О. Лоджа (1919 г.), хотя об отклонении лучей света в гравитационных полях небесных тел (из-за этого и возникает эффект ГЛ) речь шла значительно раньше. Почти 200 лет назад, в 1801 году, немец-

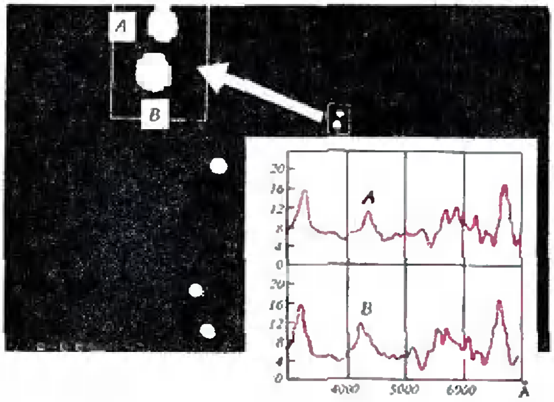


Рис. 1. «Двойной» квазар в созвездии Большой Медведицы и спектры его компонентов A и B. Остальные объекты на снимке — звезды.

кий астроном И. Зольднер рассчитал угол преломления световых лучей в поле тяготения Солнца. Его расчет основывался на теории Ньютона, и результат свелся к следующей простой формуле:

$$\theta_g^{(N)} = r_g / p. \qquad (1)$$

Здесь введены следующие обозначения (рис. 2): θ_g — угол преломления светового луча (индекс «N» указывает на расчет по теории Ньютона); r_g — так называемый гравитационный радиус притягивающего тела, пропорциональный его массе M: r_g[км]$=1{,}5\cdot10^{-27}$ M [кг]; p — прицельный параметр луча, т. е. наименьшее расстояние до центра притяжения, на котором прошел бы луч, если бы он шел по прямой линии.

В 1915 году расчет угла преломления выполнил, основываясь на общей теории относительности (ОТО), ее создатель А. Эйнштейн. Предположив, что в поле тяжести меняются законы геометрии и ход времени (искривление пространства-времени), А. Эйнштейн пришел к выводу, что правильная формула отличается от формулы (1) коэффициентом 2:

$$\theta_g^{(E)} = 2r_g / p. \qquad (2)$$

Масса Солнца $M_\odot \approx 2\cdot10^{30}$ кг, поэтому его гравитационный радиус $r_g \approx 3$ км. Если луч света проходит вблизи диска Солнца, почти касаясь его, то p в формулах (1) и (2) будет равен радиусу Солнца $R_\odot \approx 7\times\times10^5$ км. При этом получаются следующие значения угла преломления, которые были известны к 1915 году: $\theta_g^{(N)} \approx 0{,}87''$ — по Ньютону; $\theta_g^{(E)} \approx \approx 1{,}75''$ — по Эйнштейну. Понятно, насколько важно было измерить эту величину, которая должна была подтвердить (или опровергнуть) выводы ОТО об искривлении пространства-времени.

Первые измерения удалось осуществить во время полного солнечного затмения 29 мая 1919 года английским астрономам А. Эддингтону и Ф. Дайсону, которые организовали экспедиции в Бразилию и к берегам Африки. Сфотографировав звезды вблизи закрытого Луной Солнца, они измерили их смещения и рассчитали угол преломления лучей. Он оказался равным $1{,}98'' \pm 0{,}18''$ в полном согласии с выводами А. Эйнштейна. С тех пор ОТО стала такой знаменитой не только среди физиков. В наше время угол θ_g измерен намного точнее путем радиоастрономических наблюдений (свет и радиоволны распространяются по тем же законам), не связанных с солнечными затмениями. Результаты измерений еще надежней подтверждают формулу (2).

Как появляются «близнецы», или Что видно сквозь ГЛ

Итак, луч света, проходя вблизи массивного небесного тела, немного искривляется, но... причем тут двойной квазар? Для того чтобы понять, как рождаются «близнецы», взгляните на рисунок 3. На нем показан

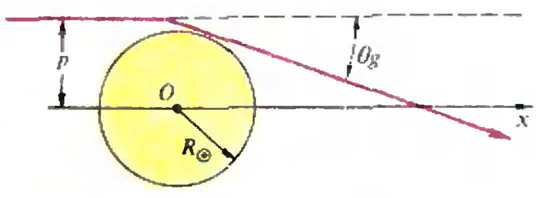


Рис. 2. Преломление светового луча в гравитационном поле Солнца.

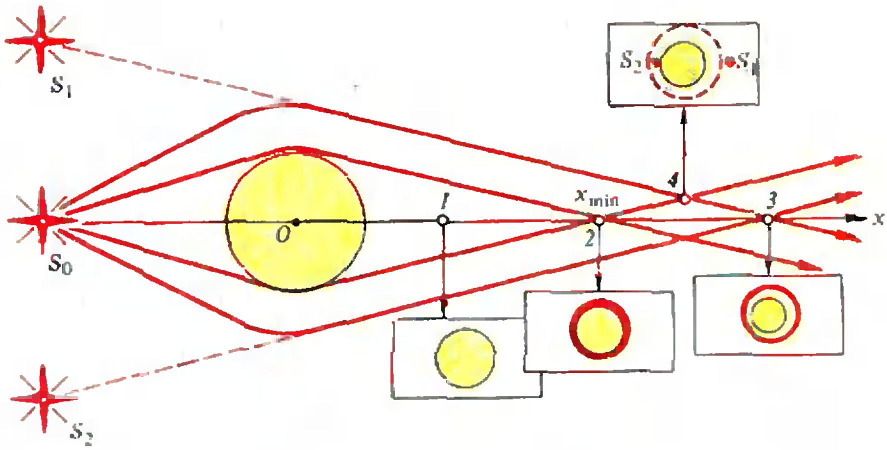


Рис. 3. Так виден точечный источник, наблюдаемый сквозь гравитационную линзу.

источник излучения S_0 и ход лучей в гравитационном поле. Лучи огибают массу M со всех сторон и пересекаются на оси x, проходящей от источника через центр ГЛ. В обычной линзе все преломленные лучи, на каком бы расстоянии от центра они ни проходили, собираются в одной точке — фокусе линзы. В ГЛ дело обстоит не так: чем ближе к притягивающему телу проходит луч, тем сильнее он преломляется и тем меньше расстояние от центра до точки пересечения лучей. Вместо одного фокуса в ГЛ возникает *фокальная ось*.

Если ядро ГЛ не пропускает свет, пересечение лучей возможно только начиная с некоторого минимального расстояния x_{min}, которое легко рассчитать (сделайте это сами):

$$x_{min} \approx R^2/(2r_g),$$

где R — радиус непрозрачного ядра ГЛ, а r_g — гравитационный радиус. В этой точке начинается фокальная ось, которая простирается в область $x > x_{min}$.

Если взять для оценок данные, относящиеся к Солнцу ($R_\odot \approx 7 \cdot 10^5$ км, $r_g \approx 3$ км), получим $x_{min} \approx 8{,}3 \cdot 10^{10}$ км. Напомним, что расстояние от Земли до Солнца равно $1{,}5 \cdot 10^8$ км, т. е. в несколько сот раз меньше x_{min}. Это означает, что наблюдать с Земли линзовый эффект в поле тяготения Солнца нельзя. С другой стороны, ближайшая к нам звезда (Проксима в созвездии Центавра) удалена на расстояние $\sim 4 \cdot 10^{13}$ км, что в сотни раз превышает x_{min}. Поэтому любая из звезд может стать ГЛ, необходимо только, чтобы источник, звезда-линза и наблюдатель расположились примерно на одной прямой.

Попробуем представить себе, как выглядит «точечный» источник-квазар, если смотреть на него сквозь ГЛ (см. рис. 3). Допустим сначала, что наблюдатель находится на оси x в точке *1*, где $x < x_{min}$. Отсюда источник совсем не виден, так как он закрыт непрозрачным ядром ГЛ. В точке *2*, где $x = x_{min}$, изображение источника появляется со всех сторон от ядра. Поэтому здесь источник виден как светящееся кольцо, примыкающее к ядру. При увеличении расстояния (точка *3*) кольцо отрывается от ядра, между ними возникает зазор, который постепенно возрастает по мере удаления наблюдателя. Кольцевое изображение источника иногда называют кольцом Эйнштейна, который в 1936 году указал на возможность его возникновения.*)

Теперь представим себе, что достаточно удаленный наблюдатель ($x > x_{min}$) сместится на некоторое рас-

*) О кольцевом изображении еще раньше, в 1924 году, писал русский физик О. Хвольсон, но его работа оказалась не столь известной.

стояние от оси (точка 4). Картина становится совсем иной. Симметрия лучей нарушается, светящееся кольцо разрывается на две дуги, которые по мере удаления от оси стягиваются в маленькие кружки. Наблюдатель увидит вместо одной звезды S_0 два источника S_1 и S_2 — те самые «близнецы», о которых мы говорили.

Гравитационная линза усиливает блеск далеких источников

На фокальной оси и вблизи нее наблюдается еще один эффект — возрастание интенсивности (блеска) источника. Так же, как и в обычной линзе, искривление лучей приводит к перераспределению и концентрации потока энергии. Максимальное усиление соответствует случаю, когда угловые размеры источника $\Delta\psi_S$ малы по сравнению с дифракционным размывом лучей $\Delta\psi_d$. Максимально возможный коэффициент усиления ГЛ равен

$$q_{\max}\approx 4r_g/\lambda.$$

Чем меньше длина волны излучения λ, тем больше коэффициент усиления на фокальной оси.

Для звезды, подобной Солнцу ($r_g\approx\approx 3$ км), в видимом свете ($\lambda\approx 0{,}5$ мкм) получим $q_{\max}\approx 10^{11}$. Колоссальное усиление, которое на самом деле никогда не реализуется, так как в природе не существует идеально сферических ГЛ и точечных источников. Как правило, $\Delta\psi_S\gg\Delta\psi_d$ и $q\ll q_{\max}$. Тем не менее даже с учетом всех реальных факторов q может быть все же достаточно большим, и если Земля при своем движении пересечет ось источник — линза, наблюдатель зафиксирует вспышку излучения (рис. 4).

Звезды — это всего лишь «микролинзы», а «настоящие линзы» — это галактики

Вероятность наблюдения фокусировки в гравитационном поле звезды очень мала, так как необходимо, чтобы три точки (источник, звезда-линза, наблюдатель) выстроились точно вдоль одной прямой. В 1937 году швейцарский астроном Ф. Цвикки обратил внимание на то, что роль ГЛ могут играть целые галактики. В этом случае возникает сравнительно широкая область фокусировки, где можно обнаружить действие ГЛ.

Рис. 4. Когда Земля, двигаясь вместе с Солнцем, пересекает область фокусировки какой-нибудь гравитационной линзы, блеск источника возрастает.

Нередко бывает, что галактика-линза является прозрачной для электромагнитных волн. В этом случае лучи света и радиоволны пройдут сквозь галактику, и наблюдатель увидит дополнительное (по сравнению со звездой-линзой) изображение источника. Ход лучей в сферически симметричной линзе-галактике показан на рисунке 5. Гравитационное поле вне галактики совпадает с полем сосредоточенной в центре массы. Поэтому закон преломления внешних лучей (у них прицельный параметр p больше радиуса галактики R_G) не отличается от рассмотренного ранее. Иначе ведут себя внутренние (сквозные) лучи. Центральный луч вообще не преломляется, а лучи, проходящие на расстоянии $p\lesssim R_G$, преломляются тем сильнее, чем больше p. Поэтому центральная часть ГЛ действует подобно обычной собирающей линзе с фокусом в некоторой точке x_F. Из этой точки начинается и простирается в область $x>x_F$ фокальная полуось. Кроме того, внутренние лучи пересекаются, точнее соприкасаются, друг с другом на некоторой конической поверхности, называемой каустикой. Вершина каустики также совпадает с фокусом x_F. На рисунке 5 жирными линиями показана каустика, имеющая вид криволинейного конуса. Вследствие слияния лучей на каустике интенсивность излучения здесь сильно возрастает. Внутри каустического конуса расположена область фокусировки. Находящийся здесь наблюдатель видит три изображения: одно внутри линзы и два других — снаружи (точка *1*). На фокальной оси при $x > x_F$ внешние изображения сливаются в кольцо (точка *2*). Вне области фокусировки *видно только* одно изображение (точка *3*).

ГЛ превращаются в космические телескопы

История развития науки и техники показывает, что вновь *открытое явление* по мере его изучения само постепенно превращается в «инструмент», позволяющий делать новые открытия. Так *происходит и* с ГЛ, которые уже начали работать как гигантские космические телескопы с «объективами» в виде целых галактик. С их помощью можно обнаружить очень слабые источники, но не меньший интерес представляет изучение и самих ГЛ. На этом пути открываются заманчивые возможности решения фундаментальных астрофизических проблем, *связанных с определением* масс и расстояний до небесных объектов.

Поясним сначала, почему столь важен вопрос о *массе. Определяя* общую массу звезд и газопылевых облаков в галактиках или в более крупных масштабах — массу *множества галактик, мы учитываем* только видимую часть всей материи. Однако некоторые наблюдения указывают на присутствие какого-то *невидимого вещества* во Вселенной. Оно обнаруживает себя только косвенным образом, в частности, как источник гравитационного поля, предотвращающего разлет галактик из их скоплений. Кроме того, замечено, что звезды вращаются по мере удаления от центра галактик быстрее, чем это следует из оценки массы по видимому веществу, т. е. внутри галактики что-то создает дополнительную силу тяжести.

Поэтому астрономы говорят о *скрытой массе*, на долю которой приходится по современным представлениям более половины, а может быть

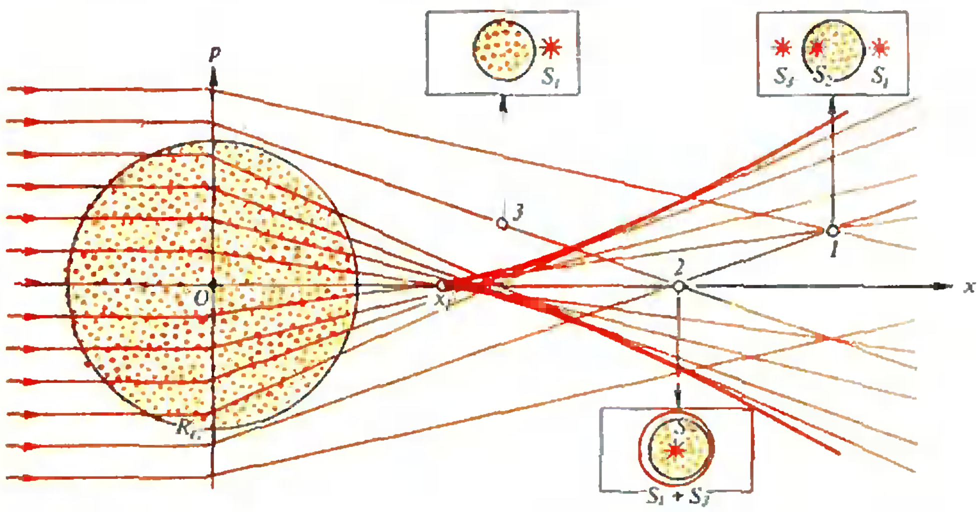


Рис. 5. Ход лучей и вид источника, наблюдаемого сквозь прозрачную линзу-галактику.

и более 90 % всей массы вещества во Вселенной. Вопрос о скрытой массе имеет первостепенное значение для космологии. Дело в том, что если средняя плотность вещества во Вселенной в нашу эпоху меньше или равна некоторому критическому значению $\rho_{кр} \approx 10^{-29}$ г · см$^{-3}$, то Вселенная будет расширяться неограниченно долго (открытая Вселенная). Плотность видимого вещества оценивается астрономами как $\rho_{вид} \approx 3 \cdot 10^{-31}$ г$\times$ $\times$см$^{-3}$, т. е. примерно в 30 раз меньше $\rho_{кр}$. Казалось бы, наблюдения говорят в пользу открытой Вселенной. Но что если скрытая масса доводит среднюю плотность до $\rho_{кр}$ или даже превышает ее? В этом случае расширение Вселенной через некоторое время прекратится и сменится сжатием. Конечно, наши повседневные планы не обязательно согласовывать с будущим Вселенной, но разве можно смириться с тем, что финал грандиозной драмы рождения и смерти всего сущего нам не известен!

ГЛ представляет собой в каком-то смысле идеальный инструмент для обнаружения скрытой массы. Ведь гравитационные поля создаются всеми видами материи. Линза может быть и светящейся, и темной, может даже состоять из неизвестного нам вещества, все равно лучи света будут отклоняться в ее поле тяжести на угол, пропорциональный полной массе ГЛ. Поэтому, наблюдая сквозь ГЛ изображения далеких источников, удается смоделировать распределение массы в линзе-галактике. Такая работа уже успешно выполнена для некоторых ГЛ.

Совершенно иную методику предполагается использовать для выяснения природы скрытой массы во внешней части нашей Галактики. Проблема здесь формулируется так: WIMP или MACHO? Первая аббревиатура означает Weakly Interacting Massive Particles, т. е. рассматривается возможность существования скрытой массы в виде слабо взаимодействующих элементарных частиц, включая нейтрино. Второе название расшифровывается как Massive Compact Halo Objects. Речь идет, например, о нейтронных звездах, черных дырах, коричневых карликах.*) Эти невидимые с Земли компактные небесные тела могут сыграть роль микролинз, если точно за ними расположатся светящиеся звезды нашей Галактики или ее ближайших соседей.

При прохождении Земли через фокальную ось микролинзы должно наблюдаться возрастание блеска более далекой звезды. Длительность «вспышек» оценивается в несколько недель, а для особенно малых и быстро движущихся микролинз (ими могут быть даже массивные, подобные Юпитеру, планеты иных звезд) это время сокращается до нескольких часов.

Начиная с октября 1991 года американские и австралийские ученые начали совместные наблюдения, рассчитанные на 4 года, по проекту MACHO. С этой целью используется 1,3-метровый телескоп на горе Маунт Стромбо (Австралия). Предполагается, что автоматическое измерение блеска миллионов звезд позволит выявить 10—20 микролинзовых «вспышек» в течение года. Отрицательный результат будет рассматриваться как свидетельство в пользу WIMP.

Второй вопрос — об определении расстояний — не менее важен, чем проблема скрытой массы. В астрономии нет единого способа определения расстояний. С тем, что находится в нашем собственном «доме» (Луна, планеты, Солнце, ближайшие звезды),— все в порядке. Здесь успешно реализуются прямые (геометрические) методы. Удаления ближайших галактик уже определяют косвенными ме-

*) Нейтронные звезды состоят в основном из нейтронов. Они были обнаружены в 1967 году в виде импульсных источников радиоизлучения — пульсаров. Черные дыры возникают в результате катастрофического сжатия звезды под действием собственной силы тяжести (гравитационный коллапс). Гравитационное поле непосредственно вблизи черной дыры столь сильное, что даже свет не выходит наружу из этой области. Коричневые карлики представляют собой звезды с массой около 20 % от массы Солнца, в недрах которых температура не столь велика, чтобы возбудить термоядерные реакции. Они излучают в основном в инфракрасном диапазоне и почти невидимы.

тодами, например по блеску их ярчайших звезд (чем дальше звезда, тем меньше ее блеск, наблюдаемый с Земли). Если же речь идет о самых далеких объектах, то пока единственным способом определения расстояний является измерение так называемого *красного смещения*.

Его обнаружил американский астроном Э. Хаббл, который в результате многолетних наблюдений заметил, что спектры звезд в удаленных галактиках отличаются от спектров звезд нашего Млечного Пути: они сдвинуты в сторону более длинных волн (в «красную» сторону). Природа красного смещения (оно обозначается буквой z и равно относительному изменению длины волны в спектре: $z=(\lambda_{набл}-\lambda_{ист}/\lambda_{ист})$ в настоящее время надежно установлена — она связана с расширением Вселенной. При удалении источника излучения наблюдаемая частота колебаний уменьшается, а длина волны соответственно увеличивается (эффект Доплера). Простая формула связывает красное смещение со скоростью удаления $v: z=v/c$ (c — скорость света). Хаббл установил, что z возрастает пропорционально расстоянию до галактик D, и, следовательно, $v=HD$. Это и есть знаменитый закон Хаббла, открытый им в 1929 году. В приведенной формуле коэффициент H носит название постоянной Хаббла. Первоначально ее величина считалась равной 500 км $\cdot$ с$^{-1}$ $\cdot$ Мпк$^{-1}$, а затем она много раз пересматривалась. В настоящее время наиболее вероятное значение H лежит в пределах 50—100 км $\cdot$ с$^{-1}$$\cdot$ Мпк$^{-1}$. Спрашивается, почему возникает такая большая неопределенность? Казалось бы определить постоянную Хаббла очень просто. Достаточно измерить красное смещение (а оно определяется по спектру очень точно) и, зная расстояние D, легко рассчитать H. Действительно, из формулы $z=v/c$ и закона Хаббла следует, что $z=HD/c$, откуда $H=zc/D$.

Формула в самом деле получилась совсем простой, но как определить расстояние до источника? Когда речь идет об очень удаленных объектах, то D оценивается только по красному смещению в их спектрах, т. е. величина H считается известной. Ясно, что чрезвычайно важно определить D каким-нибудь независимым способом.

Гравитационные линзы, по-видимому, дают такую возможность. Представим себе, что интенсивность источника, наблюдаемого сквозь ГЛ, резко изменилась — например, возросла на короткое время. Если, наблюдая квазар сквозь линзу, мы видим два его изображения, то изменения их интенсивностей будут происходить неодновременно. Сначала увеличится блеск того изображения, к которому ведет более короткий путь, а потом, спустя некоторое время Δt, изменение блеска повторится во втором изображении. Величина Δt зависит от того, на каком расстоянии расположены источник и линза. Поэтому, определив запаздывание путем длительных наблюдений, можно рассчитать D и найти H. Для первой ГЛ Δt оказалось близким к полутора годам, и найденное значение $H\approx75$ км $\cdot$ с$^{-1}$$\cdot$ Мпк$^{-1}$ с точностью до 20 %.

Нам хотелось бы закончить рассказ о гравитационных линзах, создающих космические миражи, словами известного физика-теоретика Т. Редже: «Мы находимся в преддверии новой эпохи в астрофизике, когда сведения о далеких галактиках будут получены путем исследования влияния их гравитации на свет, идущий от еще более далеких объектов». Эти слова были сказаны в 1981 году в связи с открытием первой ГЛ. Последующие события показали, что «новая эпоха» уже началась.

Задачник „Кванта"

Задачи
М1376—М1380, Ф1383—Ф1387

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 февраля 1993 г. по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 12 — 92» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1376» или «Ф1383». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М1376 — М1379 предлагались на XXXIII Международной олимпиаде по математике, задача М1380 взята из материалов ее жюри.

М1376. В пространстве даны 9 точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Все эти точки попарно соединены отрезками. Отрезок может быть закрашен в синий или красный цвет, или остаться незакрашенным. Найдите наименьшее значение n такое, что при любом закрашивании любых n отрезков найдется треугольник, все стороны которого будут закрашены в один цвет.

М1377. На плоскости даны окружность C, прямая l, касающаяся C, и точка M на l. Найдите множество всех точек P, удовлетворяющих следующему условию: существуют две точки Q, R, лежащие на l, такие, что M — середина QR, и окружность C вписана в треугольник PQR.

М1378*. Пусть $Oxyz$ — прямоугольная система координат в пространстве, S — конечное множество точек пространства и S_x, S_y, S_z — множество ортогональных проекций точек S на плоскости Oyz, Ozx, Oxy соответственно. Докажите, что

$$|S|^2 \leqslant |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|.$$

(Через $|A|$ обозначается количество элементов конечного множества A. Ортогональная проекция точки на плоскость есть основание перпендикуляра, проведенного из этой точки на плоскость.)

М1379. Для любого положительного целого числа n через $S(n)$ обозначим наибольшее целое число такое, что при любом целом k, $1 \leqslant k \leqslant S(n)$, число n^2 может быть представлено в виде суммы k квадратов целых положительных чисел.

а) Докажите, что $S(n) \leqslant n^2-14$ при любом $n \geqslant 4$.
б)* Найдите целое число n такое, что $S(n)=n^2-14$.
в) Докажите, что существует бесконечно много целых чисел n таких, что $S(n)=n^2-14$.

М1380*. Докажите, что число $\frac{5^{125}-1}{5^{25}-1}$ является составным.

Ф1383. Самолеты летят навстречу друг другу вдоль одной прямой с одинаковыми скоростями v_0. Завидев друг друга на расстоянии L, пилоты начинают разворот по окружностям, оставаясь в горизонтальной плоскости и не меняя величины скоростей. Найдите минимальное расстояние между самолетами, если повороты выполняются с одинаковыми ускорениями a.

А. Ершов

Задачник „Кванта"

Ф1384. В насыщенные пары воды при температуре $t=100$ °C поместили металлическую пластину, охлажденную до температуры жидкого азота. Оцените начальную скорость роста толщины слоя намерзающего льда.

А. Киприянов

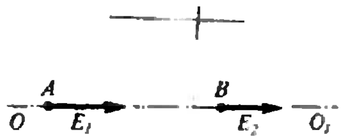


Рис. 1.

Ф1385. Система неподвижных зарядов симметрична относительно некоторой оси OO_1 (рис. 1). На большом расстоянии от зарядов в точке A на этой оси напряженность поля составляет $E_1=100$ В/м, а в точке B, находящейся на расстоянии $L=1$ м от точки A, напряженность поля равна $E_2=99$ В/м. Отойдем от точки A на $l=1$ см в направлении от оси. Чему будет равна перпендикулярная составляющая напряженности поля в этой точке?

А. Зильберман

Ф1386. Частица массой m несущая заряд Q и движущаяся со скоростью v, налетает на неподвижную стенку перпендикулярно ее поверхности. В этот момент включается однородное магнитное поле индукцией B, параллельное плоскости стенки. Стенка отражает частицу, увеличивая ее скорость при каждом отражении на величину u. Найдите расстояние между точками 1-го и k-го отражений.

В. Мирнов

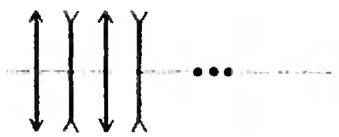


Рис. 2.

Ф1387. Имеется набор из N собирающих линз с фокусным расстоянием $2F$ и N рассеивающих линз с фокусным расстоянием $-F$. Линзы установили поочередно вдоль одной оси на расстоянии F друг от друга, как показано на рисунке 2. Вдоль оси в систему входит параллельный пучок света диаметром D. Найдите диаметр выходящего пучка.

А. Ершов

Решения задач

М1310, М1346 — М1354, Ф1363—Ф1367

Задачи по математике, решения которых публикуются ниже, предлагались в прошлые годы на международной математической олимпиаде «Турнир городов». Читатели, которые интересуются подробной информацией об этой олимпиаде и хотели бы получить сборник задач первых 13 турниров, могут написать в редакцию с пометкой «Турнир городов».

Решение задачи М1310 мы публикуем лишь в этом номере, поскольку срок присылки был продлен из-за неточностей в формулировке.

Задачник „Кванта"

***М1310.** В соревнованиях участвуют 2^k боксеров ($k>1$). Ежедневно встречаются 2^{k-1} пары боксеров (так что каждый проводит один бой). Все боксеры имеют разную силу, и в каждом бою побеждает сильнейший. Докажите, что за $k(k+1)/2$ дня можно определить место каждого боксера. (Расписания на каждый день составляются накануне вечером и в день соревнований не меняются.)*

Докажем сначала такую лемму.

Пусть $2N=2^n$ боксеров разбиты на две равные группы по $N=2^{n-1}$ боксеров, причем в каждой группе они уже упорядочены по силе; тогда упорядочить всех $2N$ боксеров можно за n дней.

Докажем это индукцией по n. Для $n=1$ это ясно. Пусть $n>1$. Предположим, что наше утверждение верно для $N=2^{n-1}$ боксеров, разбитых на две равные упорядоченные группы по $N/2$ в каждой, и докажем его для $2N$ боксеров, разбитых на две группы $X(1)<X(2)<\ldots<X(N)$ и $Y(1)<Y(2)<\ldots<Y(N)$ (знак $<$ означает здесь «слабее»). По предположению индукции, мы можем за $n-1$ дней упорядочить всех N боксеров, имеющих четные номера, а также — параллельно — всех N, имеющих нечетные номера в своих группах (см. рисунки 1 и 2). Теперь для каждого боксера — скажем, $X(i)$ — может существовать не более одного боксера, с которым его предстоит сравнить: если $Y(j-1)<X(i)<Y(j+1)$, то этот боксер — $Y(j)$, причем этот бой необходим лишь если $Y(j)$ попал в интервал между $X(i-1)$ и $X(i+1)$. Очевидно, такие пары $\{X(i), Y(j)\}$ не пересекаются. Тем самым, за один день можно все выяснить и упорядочить N боксеров.

Можно доказывать лемму и по-другому, без «фокуса с четностью». Чтобы найти место боксера $Y(j)$

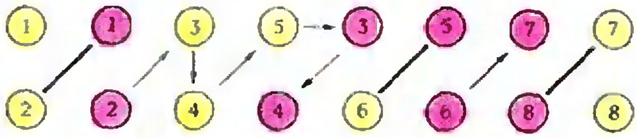


Рис. 1.

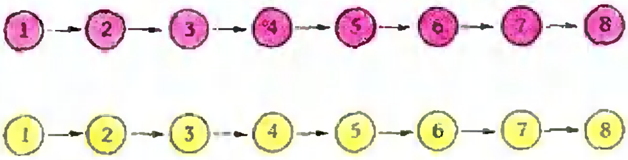


Рис. 2.

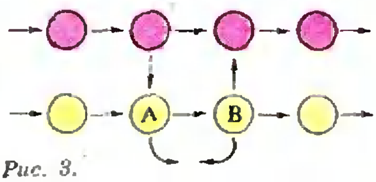


Рис. 3.

среди группы $X(1)<X(2)<\ldots<X(N)$, можно действовать так: сравнить его с $X(j)$, а затем сдвигаться влево, если он слабее, и вправо, если — сильнее, в первый день на 2^{n-1} номеров, во второй — на 2^{n-2},..., в последний (n-й) — на 1 номер. Это можно делать одновременно для всех j, поскольку если окажется, что $Y(j)$ нужно двигать вправо, а $Y(j+1)$, встречавшегося со следующим за ним по номеру X — влево (см. рис. 3), то положение этих боксеров уже полностью определено (и тем самым все боксеры разбиты на два класса — более сильных и более слабых, так что бои между боксерами одного и другого уже не нужны).

Теперь докажем по индукции, что упорядочить 2^k боксеров можно за $k(k+1)/2$ дней. Для $k=1$

это очевидно. 2^k боксеров можно как угодно разбить на две равные группы и по предположению индукции упорядочить каждую за $k(k-1)/2$ дней. Затем по лемме можно слить эти группы в одну за k дней — всего будет затрачено $k(k-1)/2+k=k(k+1)/2$ дней.

Заметим, что такой алгоритм позволяет упорядочить массив из N чисел примерно за $c(\lg N)^2$ тактов параллельных сравнений (c — некоторая константа). Очевидная оценка снизу — лишь $c(\lg N)$ тактов. (Поскольку всего имеется $N!$ перестановок, нужно получить $\lg(N!)$, т. е. примерно $N\lg N$ бит информации, а за один такт мы получаем не больше N бит.) По-видимому, алгоритмы для упорядочивая N чисел при параллельном сравнении с числом шагов, меньшим $c(\lg N)^2$, существуют, но никем еще не найдены.

Д. Бугаенко, Н. Васильев

M1346. *Внутри окружности радиусом 1 расположена замкнутая (самопересекающаяся) ломаная, содержащая 51 звено, причем длина каждого звена равна $\sqrt{3}$. Для каждого угла этой ломаной рассмотрим треугольник, двумя сторонами которого служат стороны этого угла (таких треугольников всего 51). Докажите, что сумма площадей этих треугольников не меньше, чем утроенная площадь правильного треугольника, вписанного в окружность.*

Легко доказать, что угол между двумя последовательными отрезками ломаной не превышает $\pi/3$: равнобедренный треугольник с боковым ребром $a=\sqrt{3}$, расположенный в круге радиуса 1, можно передвинуть так, чтобы вершины основания лежали на окружности; если угол 2α при вершине больше $\pi/3$, то $a/2\cos\alpha>1$ (рис. 1).

Проделав полный обход ломаной в каком-нибудь направлении, расставим на ее звеньях стрелки (рис. 2): каждое звено с нечетным номером будем считать вектором с этим направлением, каждое звено с четным номером — вектором с противоположным направлением. Затем все векторы отложим от фиксированной точки O (рис. 3). Поворот нашей ломаной от i-го звена до $(i+1)$-го считается положительным, если происходит против часовой стрелки, и отрицательным, если — по часовой стрелке (если $i=51$, то считаем, что $i+1=1$). Вращением всей ломаной назовем сумму всех поворотов. Из того, что звеньев нечетное число, следует, что направления 1-го и 52-го векторов противоположны (это один и тот же отрезок, который в одном случае имеет четный, в другом — нечетный номер). А отсюда следует, что вращение всей ломаной равно $(2n+1)\cdot\pi$, где n — некоторое целое число. Отсюда следует, что сумма углов поворота, взятых по абсолютной величине, не меньше π.

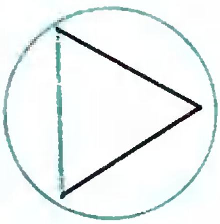


Рис. 1.

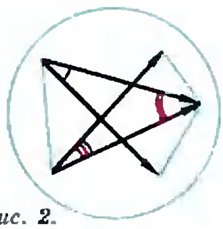


Рис. 2.

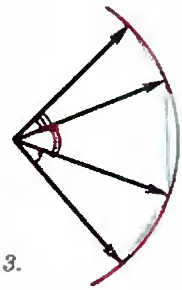


Рис. 3.

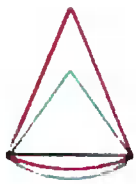


Рис. 4.

Задачник „Кванта"

Сравним площадь $T(\varphi)$ равнобедренного треугольника с вершиной O, углом 2φ при вершине и боковой стороной $\sqrt{3}$ с площадью $S(\varphi)$, содержащего его сектора с центром O, тем же углом 2φ и радиусом $\sqrt{3}$: $T(\varphi)=(3/2)\sin 2\varphi$, $S(\varphi)=3\varphi$ (φ измеряем в радианах). Отношение этих величин $T(\varphi)/S(\varphi)=\sin 2\varphi/(2\varphi)$ на отрезке $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/6$ — убывающая функция (это можно доказать с помощью производной или пользуясь тем, что синус на этом интервале — выпуклая вверх функция, а можно и чисто геометрически: на рисунке 4 красный треугольник больше голубого, а сегмент — меньше). На отрезке $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/6$ величина $K(\varphi)=S(\varphi)/T(\varphi)$ принимает максимальное значение при $\varphi=\pi/6$, то есть для равностороннего треугольника $K(\pi/6)=2\pi/(3\sqrt{3})$. Рассмотрим суммы величин $T(\varphi)$ и $S(\varphi)$ для всех треугольников, образованных соседними сторонами нашей ломаной. Из того, что сумма углов не меньше π, следует, что сумма всех величин $S(\varphi)$ не меньше $3\pi/2$. Если в этой сумме все $S(\varphi)$ заменить на соответствующие $T(\varphi)$, то сумма уменьшится не более чем в $K(\pi/6)$ раз, что дает оценку снизу $3a^2\sqrt{3}/4$ — как раз сумму площадей трех правильных треугольников со стороной $\sqrt{3}$.

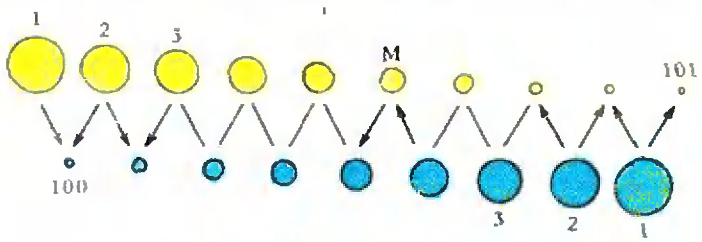
Н. Константинов

***М1347.** Имеется 100 серебряных монет, упорядоченных по весу, и 101 золотая монета, также упорядоченная по весу. Известно, что все монеты различны по весу. В нашем распоряжении — двухчашечные весы, позволяющие про каждые две монеты установить, какая тяжелее. Как за наименьшее число взвешиваний найти монету, занимающую по весу 101-е место? Укажите это число и докажите, что меньшим числом взвешиваний обойтись нельзя.*

Расположим золотые монеты в ряд по убыванию масс, серебряные под ними в другой ряд — по возрастанию, и соединим соседние монеты отрезками, как показано на рисунке (в первой строчке монеты золотые, во второй — серебряные).

Каждый отрезок соединяет две монеты. Придадим ему направление от тяжелой монеты к легкой, так чтобы каждый отрезок превратился в стрелочку. Эти стрелочки обладают тем свойством, что если какая-то направлена вниз, то и все слева от нее тоже направлены вниз, а если какая-то направлена вверх, то и все справа от нее тоже направлены вверх. Каждая монета в этой схеме обладает тем свойством, что число монет слева от нее в верхнем ряду плюс число монет справа от нее в нижнем ряду равно 100. Таким образом, 101-я «средняя» монета M характеризуется тем, что слева от нее все стрелки направлены вниз, а справа — вверх.

Найти это место можно с помощью 8 взвешиваний. Вначале перед нами 200 отрезков, на которых еще не расставлены стрелки. Испытываем какой-нибудь отрезок и ставим на нем стрелку. (Если она направ-



лена вниз, то дальше достаточно проверять отрезки справа от нее, а если вверх — то слева: по другую сторону стрелки расставляются автоматически.) Будем проверять каждый раз средний отрезок из непроверенного куска, а если средних два — то один из них. В результате первого испытания останется не больше 100 непроведенных стрелок, в результате 2-го — не более 50, в результате 3-го — не более 25, в результате 4-го — не более 12, в результате 5-го — не более 6, в результате 6-го — не более 3, в результате 7-го — не более 1. 8-е испытание устанавливает направление последней неизвестной стрелки.

Меньшим числом взвешиваний обойтись нельзя. Действительно, перед всеми взвешиваниями все монеты (201) были кандидатами на 101-е место. В результате одного взвешивания множество монет, которые были кандидатами перед этим взвешиванием, делится на два подмножества: те монеты, которые сохранили возможность занять 101-е место, и остальные. Результаты взвешиваний заранее не известны. Поэтому может случиться, что в результате первого взвешивания останется не менее чем 101 кандидат, в результате второго — 51, в результате 3-го — 26, в результате 4-го — 13, в результате 5-го — 7, в результате 6-го — 4, в результате 7-го — 2. Итак, нельзя гарантировать, что число кандидатов после 7 взвешиваний будет меньше 2, что означает, что 7 взвешиваний недостаточно.

Г. Кондаков, Н. Константинов

М1348. *Точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC. Построим треугольник $A_1B_1C_1$, стороны B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 которого параллельны отрезкам PA, PB, PC соответственно. Через точки A_1, B_1, C_1 проведены прямые, параллельные соответственно BC, CA и AB. Докажите, что эти прямые пересекаются в точке, лежащей на описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.*

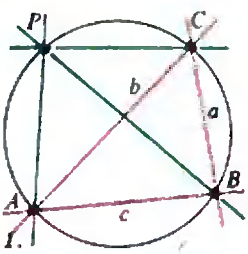


Рис. 1.

Нам будет удобно использовать понятие ориентированного (направленного) угла между прямыми a и b — мы будем обозначать его $\angle(a, b)$: это — угол, на который нужно повернуть прямую a вокруг точки пересечения с b против часовой стрелки, чтобы она совпала с b (если прямые совпадают или параллельны, то угол считается равным 0). Вращению по часовой стрелке соответствуют отрицательные величины углов.

Заметим, что при движении точки P по окружности, проходящей через две фиксированные точки A, B (рис. 1), величина угла $\angle(PA, PB)$ не меняется — даже когда точка P проходит сквозь одну из точек A или B и попадает на другую дугу AB той же окружности (в отличие от угла $\angle APB$, который превращается в дополнительный до π) — в этом одно из преимуществ направленных углов.

Будем обозначать через a, b, c прямые BC, CA, AB в условиях задачи, а через a_1, b_1, c_1 — прямые PA, PB, PC, или любые тройки соответственно параллельных им прямых. Тогда (если точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC)

$$\angle(PA, PB) = \angle(CA, CB) = \angle(b, a) = -\angle(a, b), \quad (*)$$

и аналогично $\angle(PB, PC) = -\angle(b, c)$, $\angle(PC, PA) = -\angle(c, a)$. Верно и обратное: если через вершины

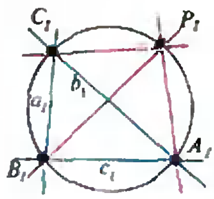


Рис. 2.

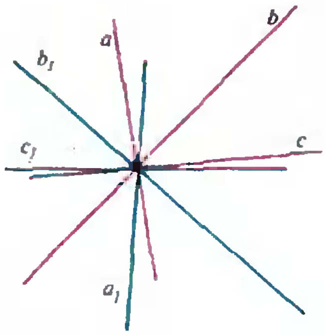


Рис. 3.

треугольника A, B, C проведены соответственно прямые a_1, b_1, c_1 так, что выполнены условия

$$\angle(a_1, b_1) = -\angle(a, b),\ \angle(b_1, c_1) = -(b, c),$$
$$\angle(c_1, a_1) = -\angle(c, a), \qquad (**)$$

то они пересекаются в одной точке, лежащей на описанной окружности этого треугольника. В самом деле, из условия (*) следует, что точка P лежит на описанной окружности ABC; таким образом, каждые две из прямых a_1, b_1, c_1 пересекают эту окружность в одной и той же точке (не считая вершин, через которые они проводятся), а значит, все они проходят через одну и ту же точку окружности.

Осталось заметить, что тройки (a, b, c) и (a_1, b_1, c_1) входят в условие (**) совершенно равноправным образом. Поэтому все сказанное о треугольнике ABC, стороны которого параллельны a, b, c, а через вершины проведены прямые, параллельные a_1, b_1, c_1, будет точно так же справедливо и для треугольника $A_1B_1C_1$, стороны которого параллельны a_1, b_1, c_1, а через вершины проведены прямые, параллельные a, b, c (рис. 2). (Две тройки голубых и красных прямых на наших рисунках можно назвать симметричными; они и правда будут симметричны друг другу, если провести все прямые через одну точку, как на рисунке 3.)

Н. Васильев

М1349. *Круг разбит на n секторов. В некоторых из них стоят фишки; всего фишек $n+1$. Затем позиция подвергается следующим преобразованиям: берутся какие-нибудь две фишки, стоящие в одном секторе, и переставляются в разные стороны в соседние секторы. Докажите, что после некоторого числа таких преобразований не менее половины секторов будет занято фишками.*

Всегда найдется сектор, содержащий больше одной фишки, следовательно, процесс преобразований никогда не закончится.

Докажем более сильное утверждение, а именно, что на некотором шагу не найдется пары соседних свободных секторов (из этого утверждения сразу следует, что занятых секторов не меньше половины); заметим, что если пара свободна, то она и на предыдущем шагу была свободна — следовательно, свободные пары не могут появиться.

Допустим противное, пусть при каждом n в результате n-го шага имеется пара (хотя бы одна) соседних свободных секторов, тем самым, одна из соседних свободных пар никогда не исчезает.

Разорвем окружность по радиусу, разделяющему секторы этой пары, и рассмотрим задачу для прямой — пусть роль секторов играют отрезки длины 1, расположенные на оси, а фишки будем располагать в центре отрезков. Рассмотрим сумму расстояний между всеми фишками. При каждом преобразовании она увеличивается по крайней мере на 2. Действительно, пусть перемещаются две фишки — A и $Б$, A — влево, $Б$ — вправо. Расстояния от A до всех фишек, стоящих слева от нее, уменьшаются, а расстояния от $Б$ до тех же фишек увеличиваются на ту же величину. Расстояния от A и $Б$ до тех фишек, которые остались в секторе, где находились A и $Б$ до преобразования, увеличиваются (или не изменяются, если там ничего не осталось). А расстояние между A и $Б$ увеличивается на 2. Так как шагов бесконечно много, то сумма расстояний будет увеличиваться до бесконечности, но она не может быть больше, чем длина всего отрезка, на котором расположились бывшие сектора, умноженная на число пар фишек. Полученное противоречие показывает, что пары свободных секторов должны исчезнуть.

Н. Константинов, Н. Васильев

***М1350.** Пусть n и b — натуральные числа. Через $V(n, b)$ обозначим число разложений n в произведение одного или нескольких сомножителей, каждый из которых больше b (например: $36=6\cdot 6=4\times 9=3\cdot 3\cdot 4=3\cdot 12$, так что $V(36,2)=5$). Докажите, что $V(n, b)<n/b$.*

При $n=1$ утверждение верно: $b\geqslant 1$, $V(1, b)=0<1/b$. При произвольном n утверждение верно для любого $b\geqslant n$: $V(n, b)=0<n/b$.

Докажем наше утверждение для произвольного $n=k$ и произвольного $b=i$, предполагая, что оно справедливо при всех $n<k$ (при любых b), а при $n=k$ оно справедливо при всех $b>i$. Это — вариант доказательства методом математической индукции (по n — как обычно, начиная с $n=1$ и двигаясь «вверх», по b — при каждом n, начиная с $b=n$ и двигаясь «вниз»).

Среди разложений k на сомножители, каждый из которых больше i, рассмотрим разложения на сомножители, каждый из которых больше $i+1$; таких разложений, по предположению индукции, меньше, чем $k/(i+1)$. Если n не делится на $i+1$, то этим все и ограничивается: $V(k, i)=V(k, i+1)<k/(i+1)<k/i$.

Если же k делится на $i+1$, то появляются разложения, в которых присутствует число $i+1$. Если в таком разложении зачеркнуть число $i+1$, то получится разложение числа $k/(i+1)$ на множители, каждый из которых больше i, причем так получаются все разложения числа $k/(i+1)$ на множители, каждый из которых больше i. Следовательно, их число равно $V(k/(i+1), i)$ и по предположению индукции меньше $k/((i+1)\cdot i)$, а общее число разложений оценивается так:

$$V(k, i)=V(k, i+1)+V(k/(i+1), i)<\frac{k}{i+1}+\frac{k}{(i+1)\cdot i}=\frac{k}{i}.$$

Н. Васильев

***М1351.** Пусть в прямоугольном треугольнике AB и AC — катеты, $AC>AB$. На AC выбрана точка E, а на гипотенузе BC — точка D так, что $AB=AE=BD$. Докажите, что треугольник ADE будет прямоугольным в том и только в том случае, если стороны треугольника ABC относятся как $3:4:5$.*

Пусть стороны треугольника ABC относятся как $3:4:5$. Выберем единицу измерения длин так, что $AB=3$, $AC=4$, $BC=5$. Тогда $AE=3$, $EC=1$, $BD=3$, $DC=2$. Рассмотрим треугольники ADC и DEC. $AC=2DC$, $DC=2EC$, и кроме того, у этих треугольников общий угол C. Поэтому они подобны, и $\angle DAC=\angle EDC$. Из равнобедренности треугольника $ABD (AB=DB)$ следует, что $\angle BAD=\angle BDA$. $\angle BAC+\angle DAC=\pi/2$, значит, $\angle BDA+\angle EDC=\pi/2$, отсюда $\angle ADE=\pi/2$.

Докажем обратное утверждение: пусть угол ADE — прямой (прямым может быть только угол ADE, так как угол DAE является частью прямого, а если бы угол DEA был прямой, то BD должно было бы быть больше AE). Единицу измерения длины выберем так, чтобы было $AC=4$.

Треугольники ADC и EDC подобны (треугольник ABD равнобедренный, $\angle BDA+\angle EDC=\pi/2$, следовательно, $\angle EDC=\angle DAC$, а угол C у этих треугольников — общий). Обозначим EC через a $(a<EC=4)$. Тогда $\frac{AC}{DC}=\frac{DC}{a}$; отсюда $DC=\sqrt{AC}\cdot\sqrt{a}=2\sqrt{a}$, $AE=AB=BD=4-a$. По теореме Пифагора $AC^2+AB^2=BC^2$. Подставляя в это равенство длины сторон, выраженные через a, получаем равенство: $4^2+(4-a)^2=(4-a+2\sqrt{a})^2$. Отсюда $(16-4a)=\sqrt{a}\cdot(16-4a)$. Поскольку $a<4$, на скобку можно сократить, и мы получаем: $a=1$, $AB=3$, $AC=5$.

А. Пароян, Н. Константинов

М1352. *Назовем n чисел близкими, если каждое из них меньше, чем сумма этих чисел, деленная на $n-1$. Пусть $a, b, c, \ldots$ — n близких чисел, S — их сумма. Докажите, что:*

а) все они положительны;

б) всегда $a+b>c$;

в) всегда $a+b\leqslant S/(n-1)$.

Докажем а). Допустим, что найдется неположительное число (отрицательное или 0). Заменим его нулем и выбросим. От этого сумма не уменьшится, и по-прежнему каждое из чисел (невыброшенных) будет меньше $S^*/n-1$, где S^* — новая сумма. Но не может быть, чтобы все числа некоторого набора были меньше их среднего арифметического.

Докажем б). Допустим, что $a+b\leqslant c$. Заменим в наборе два числа a и b на одно c. Чисел стало $n-1$, для оставшихся чисел требующиеся неравенства верны, так как сумма не уменьшилась; получается противоречие, как в пункте а).

Докажем в). Допустим, что $a+b<S/(n-1)$. Заменим в нашем наборе числа a и b на $a+b$. Получаем противоречие, как в предыдущих пунктах.

Н. Константинов

М1353. *Дана таблица $n\times n$, заполненная числами по следующему правилу: в клетке, стоящей в i-й строке и j-м столбце таблицы, записано число $1/(i+j-1)$. В таблице отметили n чисел таким образом, что никакие два отмеченных числа не находятся в одном столбце или в одной строке. Докажите, что сумма отмеченных чисел не меньше 1.*

Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним гармоническим n положительных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}>\frac{n}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+a_3^{-1}+\ldots+a_n^{-1}}.$$

Пусть в k-й строке отмечено число, стоящее на j_k месте, тогда для решения задачи достаточно показать, что для n различных чисел $j_1, j_2, \ldots, j_n$ таких, что $1\leqslant j_k\leqslant n$, выполнено неравенство:

$$S=\frac{1}{j_1}+\frac{1}{j_2+1}+\frac{1}{j_3+2}+\ldots+\frac{1}{j_n+n-1}\geqslant 1.$$

Из неравенства между средним гармоническим и средним арифметическим получаем:

$$S=\frac{1}{j_1}+\frac{1}{j_2+1}+\frac{1}{j_3+2}+\dots+\frac{1}{j_n+n-1}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{n^2}{j_1+j_2+1+j_3+2+\dots+j_n+n-1}=$$

$$=\frac{n^2}{j_1+j_2+j_3+\dots+j_n+(n-1)n/2}=\frac{n^2}{(n+1)n/2+(n-1)n/2}=1.$$

Г. Кондаков

M1354. *Даны три треугольника: $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$. Известно, что их центры тяжести (точки пересечения медиан) лежат на одной прямой, и никакие три из девяти вершин этих треугольников не лежат на одной прямой. Рассмотрим 27 треугольников вида $A_iB_jC_k$, где i, j, k независимо пробегают значения 1, 2, 3. Докажите, что эти 27 треугольников можно разбить на две группы так, что сумма площадей треугольников первой группы будет равна сумме площадей треугольников второй группы.*

Обозначим через M_A центр тяжести $\triangle A_1A_2A_3$, через M_B центр тяжести $\triangle B_1B_2B_3$, через M_C центр тяжести $\triangle C_1C_2C_3$. Покажем, что при некотором присвоении знаков сумма площадей треугольников окажется равной нулю — так что сумма «положительных» площадей будет равна по модулю сумме «отрицательных».

Для решения задачи удобно рассматривать ориентированные треугольники. Треугольники ABC и $A'B'C'$ имеют одинаковую ориентацию, если обход их контуров в порядке обозначения вершин соответствует для обоих треугольников движению по часовой стрелке или для обоих — против часовой стрелки. Одну из ориентаций («против часовой стрелки») будем считать положительной, другую — отрицательной. Площадью ориентированного треугольника ABC, если S — площадь обычного треугольника ABC, будем считать S для положительно ориентированного треугольника ABC и $-S$ — для отрицательно ориентированного. Ориентированную площадь можно выразить так:

$$S(\triangle ABC)=[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}]/2;$$

здесь $[\vec{x},\ \vec{y}]$ — псевдоскалярное произведение векторов,— т. е. произведение длин векторов на синус угла между ними (с учетом направления вращения от $\vec{x}$ к $\vec{y}$), другими словами, ориентированная площадь параллелограмма, построенного на этих векторах (рис. 1). Мы будем использовать основные свойства этого произведения (которое недавно встречалось в «Задачнике «Кванта»), главное из них — это дистрибутивность:

$$[\vec{x}+\vec{y},\ \vec{z}]=[\vec{x},\ \vec{y}]+[\vec{x},\ \vec{z}].$$

Пусть O — некоторая точка плоскости, и векторы, ведущие из O в вершины треугольников, обозначены соответствующими маленькими буквами: $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$, $\vec{c}_1$, $\vec{c}_2$, $\vec{c}_3$. Тогда ориентированная площадь треугольника $A_iB_jC_k$ выражается формулой

$$2S(\triangle A_iB_jC_k)=[\vec{a}_i\vec{b}_j]+[\vec{b}_j\vec{c}_k]+[\vec{c}_k\vec{a}_i],$$

— как легко проверить, выражение справа сохраняется, если ко всем векторам прибавить один и тот же вектор, а в случае когда один из векторов равен нулю, формула очевидна. Заметим, что алгебраическая сумма всех площадей 27 наших треугольников равна

$$3[(\vec a_1+\vec a_2+\vec a_3)(\vec b_1+\vec b_2+\vec b_3)]+3[(\vec b_1+\vec b_2+\vec b_3)\times$$
$$\times(\vec c_1+\vec c_2+\vec c_3)]+3[(\vec c_1+\vec c_2+\vec c_3)(\vec a_1+\vec a_2+\vec a_3)]=$$
$$=27([\overrightarrow{OM_A}\overrightarrow{OM_B}]+[\overrightarrow{OM_B}\overrightarrow{OM_C}]+[\overrightarrow{OM_C}\overrightarrow{OM_A}]),$$

а эта сумма равна нулю, так как по условию M_A, M_B, M_C лежат на одной прямой.

Теперь возвращаемся к обычным площадям. Сумма ориентированных площадей — это сумма обычных площадей, взятых с соответствующим знаком. Включая в одну группу треугольников треугольники с положительной ориентаций, в другую — с отрицательной, мы видим, что суммы площадей треугольников в каждой группе одинаковы.

Н. Васильев

Ф1363. *Масса Харона, недавно открытого спутника Плутона, в 8 раз меньше массы планеты. Плутон и Харон обращаются по круговым траекториям вокруг общего центра масс, причем они все время «смотрят друг на друга», т. е. система вращается как единое твердое тело. Расстояние между центрами тел $R=19640$ км, радиус Харона $r=593$ км. Определите относительное различие в ускорениях свободного падения для наиболее близкой к Плутону и наиболее удаленной от него точек Харона.*

Запишем условие стационарности орбиты Харона:

$$G\frac{Mm}{R^2}=m\omega^2x,$$

где M — масса Плутона, m — масса Харона, ω — угловая скорость вращения, x — радиус орбиты Харона. В наиболее близкой к Плутону точке Харона ускорение свободного падения равно

$$g_1=G\frac{m}{r^2}-G\frac{M}{(R-r)^2}+\omega^2(x-r),$$

а в наиболее отдаленной точке —

$$g_2=G\frac{m}{r^2}+G\frac{M}{(R+r)^2}-\omega^2(x+r).$$

Тогда абсолютное различие этих ускорений составляет

$$\Delta g=g_2-g_1\approx 2G\frac{M}{R^2}\left(\frac{1+(r/R)}{(1-(r/R))^2}-1\right)\approx 6G\frac{M}{R^2}\left(\frac{r}{R}\right)^2,$$

а относительное различие —

$$\frac{\Delta g}{g}=\frac{\Delta g}{Gm/r^2}\approx 6\frac{M}{m}\left(\frac{r}{R}\right)^4\approx 4\cdot 10^{-5}.$$

В. Белонучкин

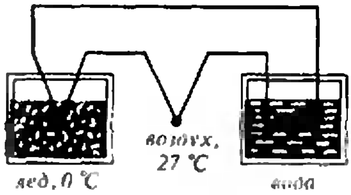
Ф1364. *Один из спаев термопары находится в комнате при температуре $t_1=27$ °C, а второй — в теплоизолированном сосуде со льдом, имеющим температуру $t_2=0$ °C (см. рисунок). Мощность, развиваемая термопарой, выде-*

Можно сказать, что между T_1 и T_2 работает тепловая машина. Считая эту машину идеальной, запишем ее КПД:

$$\eta=\frac{T_1-T_2}{T_1}=\frac{A}{Q_1}=\frac{A}{Q_2+A}=\frac{cm\Delta t}{m\lambda+cm\Delta t}.$$

Отсюда искомая величина повышения температуры ляется на сопротивлении нагревателя, который помещен в другой теплоизолированный сосуд, содержащий воду. Оцените, на сколько повысится температура воды к моменту окончания плавления льда. Считайте, что все сопротивление цепи сосредоточено в нагревателе. Массы воды и льда одинаковы. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг.

Задачник «Кванта»



равна

$$\Delta t = \frac{\lambda}{c}\,\frac{T_1 - T_2}{T_2} \approx 8K.$$

А. Шеронов

Ф1365. Заряженная частица с кинетической энергией W пролетает мимо длинного равномерно заряженного провода. Частица движется в плоскости, перпендикулярной проводу, и в результате отклоняется на небольшой угол α от первоначального направления полета (рис. 1). Найдите этот угол, если заряд частицы e, а заряд единицы длины провода q. На расстоянии R от длинного провода напряженность поля $E = q/(2\pi\varepsilon_0 R)$.

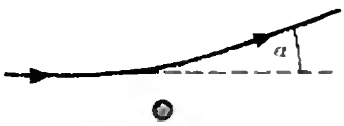


Рис. 1.

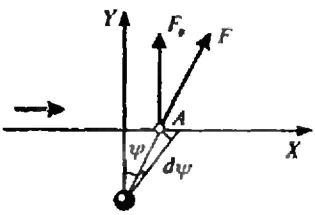


Рис. 2.

В произвольной точке A на расстоянии R от заряженного провода скорость частицы направлена под малым углом α к оси X, таким, что

$$\alpha = \frac{v_y}{v_x}.$$

Здесь v_y — вертикальная проекция скорости, а $v_x = \sqrt{2W/m}$ — ее горизонтальная проекция.

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на ось Y (рис. 2):

$$F_y dt = m dv_y,$$

где

$$F_y = eE\cos\psi = \frac{eq\cos\psi}{2\pi\varepsilon_0 R}.$$

Малый промежуток времени dt выразим из соотношения $v_x = dx/dt$:

$$dt = \frac{dx}{v_x} = \frac{R d\psi}{v_x \cos\psi}.$$

За это время вертикальная проекция скорости изменится на величину

$$dv_y = \frac{F}{m}dt = \frac{eq}{2\pi\varepsilon_0 m v_x}d\psi.$$

Полная проекция скорости вдоль оси Y складывается из приращений:

$$v_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dv_y = \frac{eq}{2\varepsilon_0 m v_x}.$$

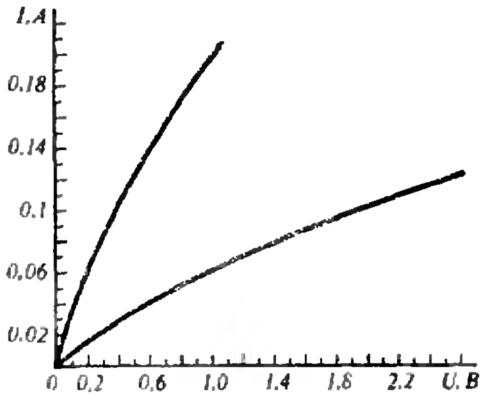
Итак, искомый угол α получается таким:

$$\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{eq}{2\varepsilon_0 m v_x^2} = \frac{eq}{4\varepsilon_0 W}.$$

В. Можаев

Ф1366. В «черном ящике» находятся постоянный резистор и нелинейный элемент, которые могут быть включены последовательно или параллельно. Вольт-амперные характеристики для обоих включений приведены на рисунке. Найдите по этим данным сопротивление резистора. Какой нелинейный элемент может находиться в «ящике»?

Один из способов решения этой задачи совсем прост (хотя и очень трудоемок) — можно задать какую-нибудь произвольную величину R сопротивления резистора и при помощи одного из графиков (например, для последовательного соединения) построить отдельно вольт-амперную характеристику нелинейного элемента, вычитая из общей (последовательной) характеристики напряжения выбранного резистора при различных значениях тока. После этого можно построить характеристику для параллельного соединения и посмотреть, похожа ли она на приведенную в условии. Если похожа (или совпадает «один к одному») — задача решена, если нет — нужно изменить R и пробовать еще.



Ясно, что такой способ не очень хорош (даже если у вас есть много свободного времени, его можно употребить с большей пользой, чем перебирая различные R). Однако подбор можно сильно упростить. Характеристика нелинейного элемента проходит через ноль и является довольно гладкой, поэтому можно считать, что при малых токах через нелинейный элемент напряжение на нем оказывается приблизительно пропорциональным току, т. е. начальные участки кривых для параллельного и последовательного соединений соответствуют просто параллельному и последовательному соединениям обычных резисторов, один из которых — искомый, а другой — эквивалент нелинейного элемента при малых токах через него.

Итак, используем начальные участки заданных кривых, проведем касательные к ним и найдем сопротивления, которым они соответствуют:

$$r_{пар} \approx 2{,}5 \text{ Ом}, \ r_{посл} \approx 14 \text{ Ом}.$$

Обозначим сопротивление нелинейного элемента (при малых напряжениях) r. Тогда

$$R + r = 14,$$

$$\frac{Rr}{R+r} = 2{,}5.$$

Для R получаем квадратное уравнение

$$R^2-14R+35=0,$$

откуда

$$R_1=7+\sqrt{14}\ \text{Ом}\approx 10{,}8\ \text{Ом},$$
$$R_2=7-\sqrt{14}\ \text{Ом}\approx 3{,}2\ \text{Ом}.$$

Второе значение явно не подходит, поэтому окончательно

$$R\approx 11\ \text{Ом}.$$

Теперь строим характеристику нелинейного элемента и получаем, что это — лампочка.

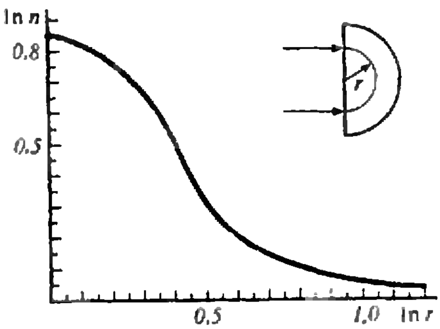
А. Зильберман

***Ф1367.** Полуцилиндр изготовлен из оптически прозрачных цилиндрических слоев с разными значениями показателя преломления n. Полученная зависимость n от радиуса слоя r изображена на рисунке в координатах ln n и ln r. Используя данную зависимость, найдите радиусы полуокружностей, по которым сможет распространяться тонкий пучок света при нормальном падении на плоскую поверхность полуцилиндра.*

Известно, что при распространении луча света между двумя точками в произвольной среде, в которой скорость света может быть различной в разных местах, он движется таким образом, что время его прохождения оказывается минимальным (принцип Ферма). Для случая движения луча по окружности радиусом R, где коэффициент преломления равен $n(R)$, время прохождения полуокружности равно

$$t=\pi R/v=\pi Rn(R)/c,$$

где v — скорость света в веществе, а c — в вакууме. Для радиуса R, при котором такое возможно, должно



выполняться условие минимальности времени:

$$(Rn)'=Rn'+R'n=0.$$

Вспоминая свойства функции $\ln x$, можно записать:

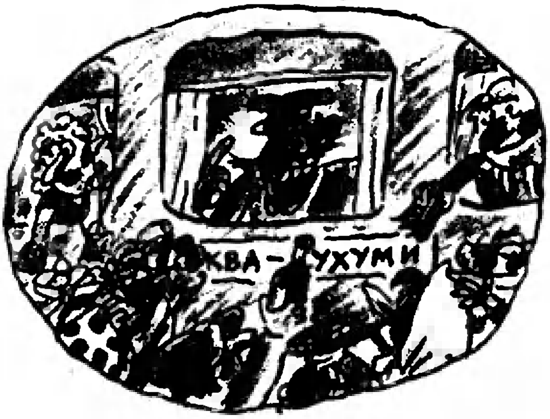
$$\ln R+\ln n=\text{const}.$$

Теперь можно найти возможные значения радиуса R, используя графический метод — находя на графике зависимости $\ln n$ от $\ln R$ точки с тем же углом наклона, что и у полученной нами прямой. Это две точки:

$$\ln R_1=0{,}27\pm 0{,}02\Rightarrow R_1=1{,}31\pm 0{,}03\ (\text{см}),$$
$$\ln R_2=0{,}54\pm 0{,}02\Rightarrow R_2=1{,}7\pm 0{,}02\ (\text{см}).$$

В. Можаев

„Квант" для младших школьников



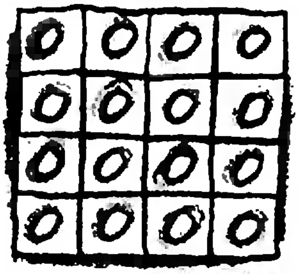
Задачи

1. В вагонах № 7, № 8, № 9 поезда Москва — Сухуми оказались свободные места. Ревизор (любитель математики) отметил, что если поменять местами цифры числа пассажиров вагона № 7, то получится число пассажиров вагона № 8, а сумма этих чисел равна квадрату числа пассажиров вагона № 9. Один из этих трех вагонов плацкартный, другой — купейный. Какой третий вагон?

2. Найдите два последовательных числа, каждое из которых равно сумме кубов своих цифр.

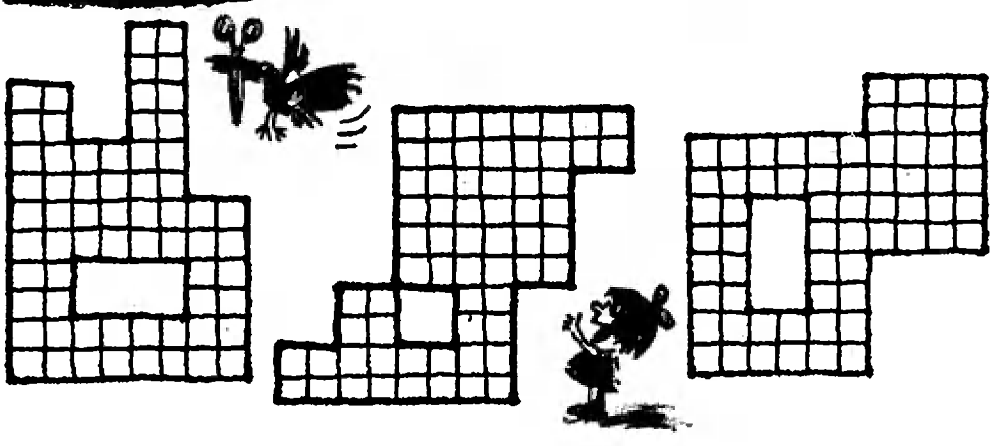
3. Решите арифметический ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

4. Если во всех клетках квадрата 4×4 расположить нули, то каждое записанное число будет равно сумме всех своих соседей по горизонтали и вертикали. Можно ли заменить часть нулей (или все) другими числами так, чтобы это свойство сохранилось?



5. Любую из трех фигур, изображенных на рисунке, можно разрезать на две части, из которых нетрудно сложить квадрат. Найдите такие разрезания.

Эти задачи нам предложили И. Акулич, П. Филевич, А. Циммерман, С. Токарев и Н. Антонович.



Алиса, кошка и задумчивый осел

Кандидат физико-математических наук
Л. ГЕНДЕНШТЕЙН

Когда Алиса обнаружила, что стоит на невидимой струне, а вокруг ничего нет, ее первой мыслью было:

— Долго я так не простою!

Однако посмотрев вверх, вниз и по сторонам, она немного успокоилась:

— Даже если я упаду, то не разобьюсь: здесь просто не обо что удариться!

И, балансируя на струне, Алиса пустилась в рассуждения о том, как она будет падать.

— Это будет *настоящее* падение,— с легким замиранием сердца думала Алиса,— по сравнению с этим падением в никуда мое падение в кроличью нору — все равно что прыжок с одной ступеньки!

— Может быть, я буду падать *бесконечно долго*? (Алиса была рада, что к месту вспомнила о бесконечности, и жалела, что ее сейчас никто не слышит.) И все-таки бесконечность — странная вещь! — продолжала Алиса.— Я, конечно, не против того, чтобы падать годик-другой, но падать бесконечно долго — это может, пожалуй, и надоесть!

— Стоять бесконечно долго не намного лучше,— возразила она самой себе и тут же ощутила удивительную легкость: она как бы парила в пространстве.

— Как легко стало! — обрадовалась Алиса.— Теперь я не упаду, даже если захочу! А, может быть, это я *уже* падаю?

Алиса расслабилась: она чувствовала себя так, будто лежит на мяг-

---

Начало этой удивительной истории о том, как Алиса попала в Математическую страну и что с ней там приключилось, вы могли прочесть в седьмом номере нашего журнала.

кой-мягкой (бесконечно мягкой!) перине.

— Все было бы совсем хорошо,— продолжала Алиса говорить сама с собою уже в полудреме,— если бы еще здесь кто-нибудь умел разговаривать... или хотя бы слушать...— глаза Алисы начинали слипаться,— вот если бы здесь была моя кошка Дина: она так хорошо слушает — склонит головку набок и слушает... а если бы она еще умела говорить...

Прямо перед Алисой возникла ее кошка Дина. Она сидела ни на чем вниз головой и преспокойно умывалась.

— Диночка, это ты? — воскликнула Алиса (у нее сразу пропал сон).— Но почему ты вниз головой?

— Ты задала сразу *два* вопроса,— сказала Кошка, оторвавшись от умывания.— С какого вопроса начнем?

— Мне все равно,— сказала Алиса.

— *Совсем* все равно? — уточнила почему-то Кошка.

— Совсем,— подтвердила Алиса.— Но почему ты так об этом спрашиваешь?

— Потому что мне тоже все равно,— вздохнула Кошка.— А у нас тут если уж равно, так это *действительно* равно...

— Ничего не понимаю! — сказала Алиса, начиная сердиться.— Если и тебе и мне все равно, начинай с любого вопроса!

— С *любого*? — воскликнула Кошка.— Но как же мы выберем этот «любой», если и тебе и мне *совершенно* все равно?

Алиса рассердилась по-настоящему:

— Если ты не хочешь отвечать на мои вопросы, так и скажи! И нечего придумывать всякую чепуху.

— Чепуху?! — вскричала Кошка, и зрачки ее расширились.— Сейчас я покажу тебе, что случается здесь из-за такой «чепухи».— Она протянула Алисе лапу.— Летим!

— Как же мы полетим? — удивилась Алиса, беря протянутую ей лапу.— Ведь у нас нет крыльев!

— Воображение лучше крыльев,— возразила Кошка.

Алиса посмотрела по сторонам и увидела, что они мчатся с безумной скоростью: мимо проносились неизвестно откуда взявшиеся египетские пирамиды, древнегреческие храмы с бесчисленными колоннами, города с островерхими башнями, толпы людей в самых разнообразных одеждах, причудливые звери, и всюду были какие-то фигуры, значки и буквы...

—... буквы тут тоже не складываются в слова,— успела заметить на лету Алиса.

Внезапно все остановилось и куда-то сразу исчезло. Впрочем, не совсем все: перед Алисой стоял невероятно худой осел. Несчастное животное еле держалось на ногах: казалось, оно вот-вот рухнет от истощения. Слева и справа от осла лежало по одной охапке сена; Алисе показалось, что она даже чувствует запах свежего сена. Осел косился левым глазом на одну охапку, а правым — на другую, но не трогался с места.

— Бедненький!— невольно вырвалось у Алисы.— Почему же ты не ешь? Разве ты не видишь, что рядом с тобой две охапки сена?

— В том-то и беда, что их *две*,— печально сказал Осел, с трудом переводя глаза на Алису.— Обе охапки *совершенно одинаковые*, и к тому же находятся на *совершенно одинаковых расстояниях* от меня! Вот я никак и не могу выбрать, с какой начать...

— Я помогу тебе выбрать! — воскликнула Алиса: она не в силах была выносить это душераздирающее зрелище.— *Совершенно* одинаковых охапок не бывает!

— Смотря каких,— возразил Осел, снова переводя глаза на охапки.— Настоящих, может быть, и не бывает, а *воображаемых* — сколько угодно! Эти охапки одинаковы *по определению*...

— Что это значит? — не поняла Алиса.

— Понимаешь,— грустно сказал Осел,— каждый воображает по-своему. Но иногда надо, чтобы разные люди вообразили *одно и то же*. И тогда приходится договариваться о том, что именно надо вообразить...

— Постой! — воскликнула Алиса, начиная кое о чем догадываться.

— Если охапки — воображаемые, то, может быть, этот осел — тоже воображаемый? — тихо спросила она у Кошки.

— Все равно его жалко по-настоящему! — всхлипнула Кошка.

— И давно он так стоит? — поинтересовалась Алиса.

— Больше шестисот лет, — ответила Кошка, — с тех пор, как его придумал французский ученый Жан Буридан. Этого осла так и зовут: «Буриданов осел»...

— Понятно, — сказала Алиса (у нее стало легче на душе). — Буридан *нарочно* придумал для своего осла такое дурацкое положение!

— Потому он и взял осла, — сказала Кошка.

— Ну да, — согласилась Алиса, — кошку в таком положении никто бы и представить не мог! Разве удержишь двух одинаковых мышей...

— Дело не в мышах, — перебила Кошка и почему-то обиделась. Алиса поспешила перевести разговор:

— Я выбрала, с какого вопроса начинать.

— С какого? — живо спросила Кошка, забыв про обиду.

— С первого, — сказал Алиса.

— Почему? — снова спросила Кошка.

— Потому что он *первый*! — решительно сказала Алиса. — Скажи: ты Дина или не Дина? Честно говоря, я ни за что бы вас с ней не различила, если бы... если бы Дина умела говорить!

— Ты и не могла бы нас различить! — воскликнула Кошка. — Ведь я — как раз та говорящая Дина, которую ты себе представила. — Кошка махнула лапой, и осел с двумя охапками куда-то провалился («Туда ему и дорога», — подумала Алиса: она уже не особенно жалела глупого осла). — Так что я — не совсем Дина, — заключила Кошка и снова удобно устроилась в пространстве вниз головой.

— «Не-совсем-Дина», — медленно повторила про себя Алиса, размышляя над ответом Кошки, а заодно и над всем тем, что она только что видела. — Куда же это я попала?

— В страну Математики, — сказала «Не-совсем-Дина», будто читая мысли Алисы. Заметив, что Алиса удивилась, Кошка добавила:

— Я просто представила себе, о чем ты сейчас подумала.

— Как много тут всего воображаемого! — снова попыталась подумать Алиса.

— Очень много, — сразу согласилась Кошка. — Ты даже не представляешь себе, *как* много!

— А что-нибудь настоящее тут есть? — спросила Алиса. — Или все только воображаемое?

— Разве ты умеешь отличать одно от другого? — удивилась «Не-совсем-Дина».

— Кто же этого не умеет? — в свою очередь удивилась Алиса. — Это умеет всякий, даже... даже тот, кто ничего больше не умеет!

— Гм, — усомнилась Кошка. — Сейчас мы это проверим. У нас тут довольно много разных чисел...

— Может быть, *бесконечно* много? — спросила Алиса, не упускавшая случая показать свои знания.

— Именно столько, — подтвердила «Не-совсем-Дина». — Так вот, скажи: числа — настоящие или воображаемые?

— Числа настоящие, — сразу ответила Алиса. — С помощью чисел можно считать настоящие предметы.

— А ты когда-нибудь видела хотя бы одно *число*? — прищурившись спросила Кошка.

— Я видела много чисел! — воскликнула Алиса. — Если бы здесь были карандаш и бумага...

— Давай их представим, — предложила «Не-совсем-Дина», и тут же появились большой белый лист бумаги и карандаш.

Алиса взяла карандаш и написала на листе бумаги большую цифру «5».

(Продолжение см. на с. 42)

Калейдоскоп „Кванта"

Взаимодействие атомов воздуха обусловлено только теплотою.

М. В. Ломоносов

...молекулы проявляют силы взаимодействия, лишь находясь в непосредственной близости друг от друга.

Р. Клаузиус

...теплота является... некоторым состоянием притяжения и отталкивания весомых частиц...

Дж. Джоуль

...каждая молекула идет своим собственным путем, несмотря на непрерывное взаимное влияние, ...каждая молекула существует некоторым образом как самостоятельно действующий индивидуум.

Л. Больцман

А так ли хорошо знакомо вам

взаимодействие молекул?

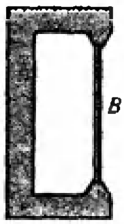
С высоты сегодняшнего уровня знаний многое в приведенных цитатах может показаться очевидным и даже наивным — неужели такие ясные вещи занимали умы выдающихся ученых? Увы, представления о молекулярном строении вещества еще в середине прошлого века разделялись отнюдь не всеми физиками, а молекулярно-кинетическая теория считалась бесперспективной. Приходилось с трудом пробивать дорогу новым воззрениям, порой возвращаясь к уже порядком забытым открытиям, создавать одну за другой теоретические модели, искать опытное их подтверждение.

Однако было бы опрометчиво полагать, что этот путь завершен и современная теория строения вещества классически совершенна. Да, на какое-то время в первой половине нашего столетия молекулярные изыскания оказались как бы на втором плане, но впоследствии практика вновь и вновь заставляла обращаться к ним, порождая новые вопросы и открывая неожиданные области исследований.

Мы же сегодня обсудим лишь несколько вопросов, в понимании которых так необходимы знания о взаимодействиях молекул,— в каких состояниях находятся вещества, как переходят из одного в другое, насколько и почему прочны тела, как ведут себя границы раздела сред и т. д. и т. п.

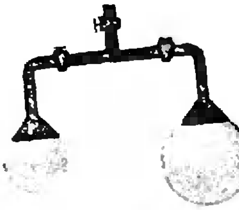
Вопросы и задачи

1. Известно, что кусок стекла можно разломить, прикладывая гораздо меньшее усилие, чем это необходимо для разрыва межмолекулярных связей. Как же удается «оторвать» молекулу от молекулы?
2. Почему проявление сил сцепления между двумя кусками металла демонстрируют со свинцом, а не со сталью?
3. Между выступами цинковой пластинки *A* вставлен железный стержень *B* такой длины, что он держится между выступами при очень малом трении.



Что произойдет, если всю конструкцию опустить в горячую воду?
4. В колбу с узким горлышком налили керосин, уровень его в горлышке отметили резиновым колечком, а затем колбу опустили в горячую воду. Оказалось, что в первый момент уровень керосина опустился, а потом начал повышаться. Как это объяснить?
5. Поверхностный слой жидкости часто уподобляют растянутой резиновой пленке. В каком отношении эта аналогия не соответствует действительности?
6. Если на молекулу, находящуюся на поверхности жидкости, действует со стороны ее «соседей» направленная вниз сила, то почему эта молекула не движется с ускорением в глубь жидкости?

7. На концах трубки выдувают два мыльных пузыря разных диаметров. Постепенно меньший пузырь начинает сжиматься, а больший расширяться. Почему?



8. Можно ли, имея в своем распоряжении тонкие проволочки из различных химически чистых металлов, оценить температуру пламени в его различных местах?

9. Шарообразный стеклянный сосуд, на три четверти заполненный водой, привели в состояние невесомости. Что произойдет с водой? А если вместо воды взять ртуть?

10. Больному прописали принимать определенное количество капель лекарства. Как нужно изменить их число, если капли отсчитываются в жарко натопленном помещении?

11. Можно ли налить воду из стакана в узкогорлый флакон с помощью тонкой проволоки?

12. Из нескольких сортов фильтровальной бумаги нужно выбрать тот, в котором пóры меньше. Как это сделать, не используя никаких приборов?

13. Почему при сушке дров на солнце на конце полена, обращенном в тень, выступают капельки воды?

14. Каким образом сок поднимается по стволам деревьев, особенно высоких?

Микроопыт

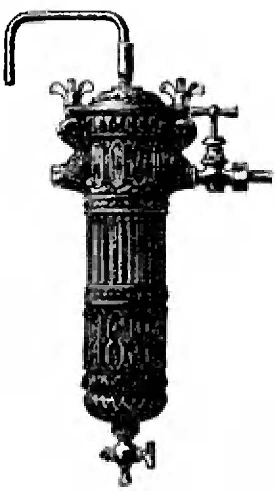
Налейте в хорошо вымытую тарелку чистую воду и набросайте на ее поверхность несколько спичек без головок. Коснитесь воды в промежутке между спичками кусочком сахара, а через некоторое время — кусочком мыла. Что произойдет? Почему?

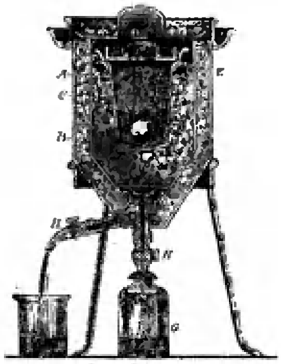
Любопытно, что...

...физику процесса полировки пытался прояснить еще И. Ньютон, однако лишь недавние исследования пролили на него свет. Оказывается, при сильном нажиме удаляются целые кусочки материала с полируемой поверхности, при слабом — лишь отдельные молекулы.

...выведенное в 1873 году Ван-дер-Ваальсом уравнение состояния реального газа применимо и к не очень плотной жидкости, например к воде. Это подтверждал и заголовок статьи Ван-дер-Ваальса — «О непрерывности состояния жидкости и газа».

...водомерка, опираясь на воду кончиками лапок, не смачиваемых водой, способна не только скользить по воде, но и делать громадные прыжки, не прорывая поверхностного слоя.





...длинный цилиндрический слой жидкости неустойчив. Об этом словно известно пауку, формирующему нить паутины: липкая жидкость образует цилиндрическую оболочку вокруг сердцевины нити и вскоре распадается на крошечные шарики, к которым и прилипают насекомые.

...молекулярные силы быстро изменяются с расстоянием. Притяжение молекул при увеличении расстояния между ними в 2 раза ослабевает в 128 раз!

...«растащить» молекулы кислорода по затратам энергии раз в 50 легче, чем «разорвать» саму молекулу.

...представления, разработанные в одной области физики, часто удачно «кочуют» в другие. Так, рассматривая ядро урана как жидкую заряженную каплю, Я. И. Френкель показал в 1939 году, что она должна обнаружить колоссальное поверхностное натяжение. Такая, капельная, модель ядра позволила объяснить, например, как происходит деление ядер урана.

...абсолютно чистые и гладкие поверхности при соприкосновении могут сами собой слипнуться. Когда только начались полеты космических кораблей с экипажами на борту, существовала реальная опасность, что металлическая подошва ботинка космонавта может самопроизвольно «приклеиться» к металлической обшивке корабля.

Что читать в «Кванте» о взаимодействии молекул

(публикации последних лет)

1. «Силы молекулярного взаимодействия» — 1987, № 1, с. 31;
2. «Ван-дер-Ваальс и его уравнение» — 1987, № 7, с. 34;
3. «Поверхностное натяжение и капиллярные явления» — 1988, № 4, с. 56;
4. «История росинки» — 1988, № 7, с. 25;
5. «Коротко о тепловом расширении» — 1988, № 8, с. 44;
6. «Реальный газ и его уравнение состояния» — 1988, № 11—12, с. 52;
7. «Сколько бывает состояний у вещества?» — 1989, № 1, с. 47;
8. «Пузыри в луже» — 1989, № 6, с. 22;
9. «За какое время сливаются капли?» — 1990, № 11, с. 42;
10. «Пока вода испаряется...» — 1991, № 11, с. 31.

— Вот,— сказала Алиса,— смотри! Это число «пять».

— Я вижу только *цифру* «пять»,— возразила Кошка.

— А разве цифра — это не число? — удивилась Алиса.

— Ни в коем случае! — заявила «Не-совсем-Дина».— С помощью цифр только *обозначают* числа, и то в разные века разные народы делали это по-разному. Та цифра, которую ты написала, называется арабской, хотя арабы переняли такие цифры у индийцев, да они и выглядели тогда по-другому... А древние римляне...

— Знаю, знаю! — не совсем вежливо перебила Алиса Кошку.— Римские цифры мы проходили. Число «пять» записывается так.— И Алиса нарисовала значок «V».

— Вот видишь,— сказала «Не-совсем-Дина».— Цифры разные, а число одно и то же! Значит, цифра — это не число.— Кошка немного помолчала и добавила:

— Даже *здесь* я не знаю никого, кто видел бы *число* «пять» или какое-нибудь другое число.

Но Алиса не сдавалась:

— Пять девочек можно не только вообразить, они есть и *на самом деле*! У меня как раз пять подружек...

— Как их зовут? — тут же спросила Кошка.

— Ада, Мейбл, Бетси, Джейн и Молли,— ответила Алиса.— Но зачем тебе их имена?

— Ты можешь представить себе девочек отдельно, а имена — отдельно? — неожиданно спросила Кошка.

— Девочек без имен не бывает! — решительно возразила Алиса.

— Да...— разочарованно протянула «Не-совсем-Дина»,— с воображением у тебя слабовато.

Алиса сдвинула брови и изо всех сил попыталась вообразить девочек и имена порознь. Наконец, это ей удалось: она представила, что видит девочек очень издалека, настолько издалека, что не видно даже — знакомы ей эти девочки или незнакомы. Девочек Алиса разместила в своем мозгу слева, а имена своих подружек — справа. И в этот момент Кошка спросила:

— Готово?

— Готово,— сказала Алиса, с трудом удерживая имена: они прямо-таки рвались к девочкам, среди которых Алиса начинала невольно узнавать своих подружек.

— А теперь скажи,— спросила «Не-совсем-Дина»,— есть что-нибудь общее у девочек и имен?

Алиса честно попыталась рассмотреть в своем мозгу девочек и имена и, наконец, сказала:

— По-моему, нет: девочки и имена совсем разные! Девочки живые, а имена — нет, и вообще — девочки — это девочки, а имена — это только имена...

— Не торопись,— сказала Кошка,— присмотрись внимательнее.

И тут Алису осенило:

— Девочек и имен *поровну*!!!

Кошка стала такой довольной, что даже замурлыкала. Однако через минуту, вспомнив, наверное, что она умеет говорить, Кошка вкрадчиво спросила:

— А как это можно проверить?

Алиса задумалась, но недолго: как только она перестала удерживать имена, они устремились к девочкам, и каждая из них превратилась в одну из Алисиных подружек!

— Если каждой девочке дать по одному имени,— сказала Алиса,— то не останется ни девочек без имени, ни имен без девочек.

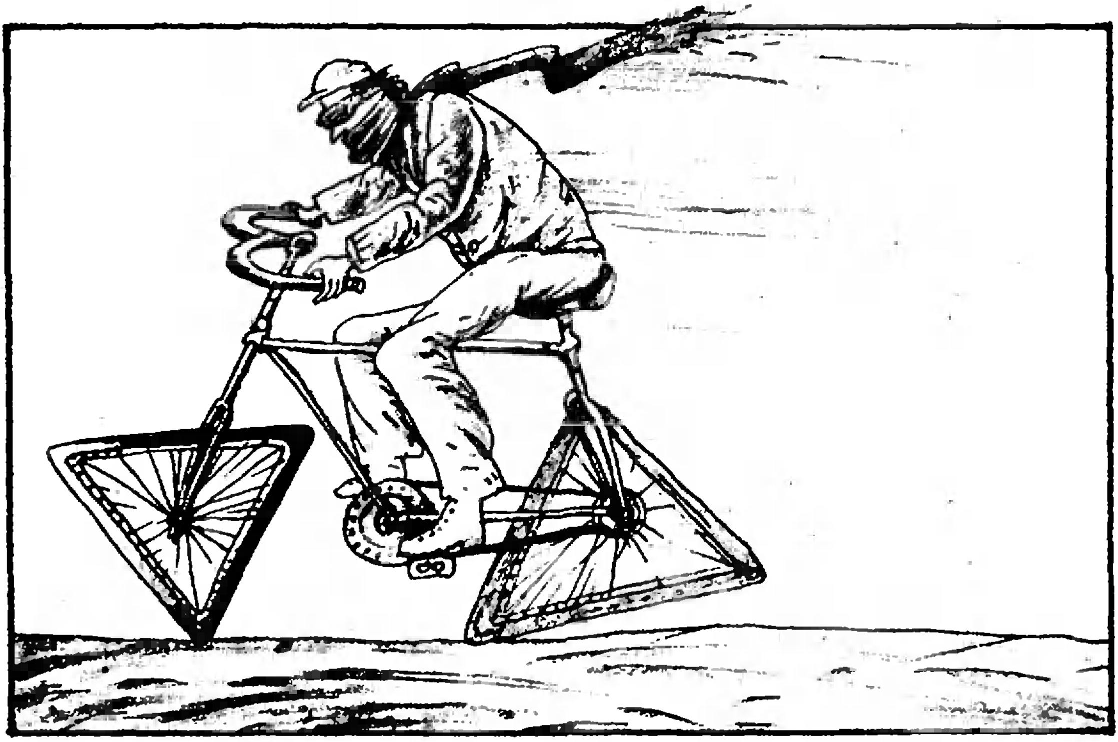
— Вот это и означает, что девочек и имен одинаковое число! — воскликнула «Не-совсем-Дина» и опять чуть не замурлыкала от удовольствия, но снова перешла на вкрадчивый тон:

— Как ты думаешь, то общее, что есть у имен и девочек,— настоящее или воображаемое?

— Да,— призналась Алиса,— про числа не так просто это сказать.

— А ведь те числа, которые получаются при счете, самые простые из

(Окончание см. на с. 46)



Математический кружок

О двух формулах Эйлера

И. КУШНИР

Меньше вершин, чем у треугольника, у многоугольников не бывает, так что в каком-то смысле он — простейший из многоугольников. Тем не менее треугольник, похоже, неисчерпаем: с какой стороны ни посмотришь, обязательно обнаружатся какие-нибудь полезные свойства. Формулы Эйлера, о которых здесь пойдет речь, описывают еще два факта из богатейшего набора свойств, связанных с этой геометрической фигурой.

Пусть X — произвольная точка плоскости, X_a, X_b, X_c — ее проекции на стороны BC, AC, AB треугольника ABC. Треугольник $X_aX_bX_c$ называется *педальным*.

Первая формула Эйлера устанавливает связь между площадью S треугольника ABC и площадью S_X педального треугольника:

$$S_X = \frac{1}{4} S\left|1 - \frac{OX^2}{R^2}\right|$$

(здесь O и R — центр и радиус окружности, описанной около треугольника ABC).

Для доказательства этой формулы нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. *Если продолжить отрезки AX, BX и CX до пересечения с окружностью, описанной около треугольника ABC, полученный треугольник $A'B'C'$ будет подобен педальному.*

Упражнение 1. Пусть точка X движется параллельно одной из сторон треугольника ABC. Как меняется взаимное расположение педального треугольника и треугольников ABC и $A'B'C'$?

Доказательство. Пусть сначала X лежит внутри этого треугольника (рис. 1). Точки X, X_b, A и X_c лежат на одной окружности, по-

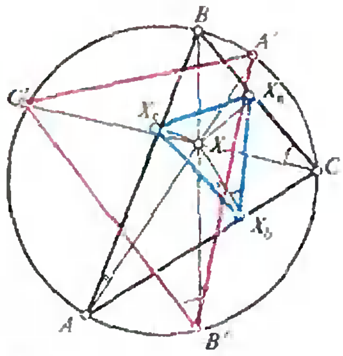


Рис. 1.

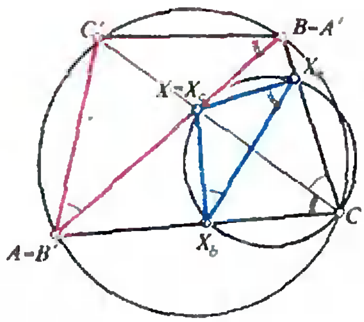


Рис. 2.

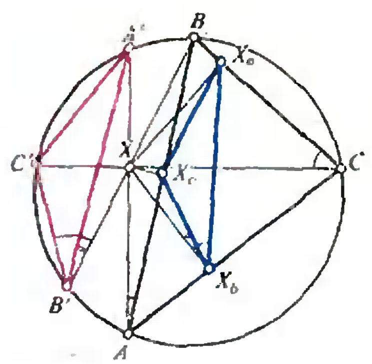


Рис. 3.

скольку образуют два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой. Поэтому углы XX_bX_c и XAX_c равны, как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Аналогично, точки X, X_b, C и X_a лежат на одной окружности, и углы X_aX_bX и X_aCX равны. Но угол $A'B'B$ равен углу $A'AB$, поскольку опирается на ту же дугу окружности, описанной около $\triangle ABC$, а угол $BB'C'$ по той же причине равен углу BCC'. Поэтому $\angle A'B'C' = \angle X_aX_bX_c$. Аналогично доказывается, что равны углы $X_bX_aX_c$ и $B'A'C'$. Тогда треугольники $X_aX_bX_c$ и $A'B'C'$ подобны по двум углам.

Те же соображения, что и в рассмотренном случае, позволяют убедиться в справедливости леммы 1, когда точка X лежит на стороне треугольника ABC (рис. 2) и когда точка X находится вне треугольника ABC, но внутри его описанной окружности (рис. 3).

Упражнение 2. Проведите доказательство для этих случаев самостоятельно.

Пусть теперь точка X лежит вне описанной окружности треугольника ABC (рис. 4). Точки X, X_a, C, X_b лежат на одной окружности; поэтому $\angle XX_bX_a = \angle XCX_a$. С другой стороны, точки X, X_c, X_b, A тоже лежат на одной окружности, поэтому $\angle XAB = \angle XX_bX_c$. Но $\angle XAB = \angle A'CB$, откуда $\angle A'B'C' = \angle A'CC' = \angle A'CB - \angle C'CB = \angle XX_bX_c - \angle XX_bX_a = \angle X_aX_bX_c$.

Осталось доказать равенство каких-нибудь других двух углов треугольника $A'B'C'$ и педального треугольника. Докажем, что $\angle X_bX_aX_c = \angle C'A'B'$.

Прямой угол XX_aC равен сумме трех углов — XX_aX_b, $X_bX_aX_c$ и X_cX_aC:

$$\pi/2 = \angle XX_aX_b + \angle X_bX_aX_c + \angle X_cX_aC. \qquad (*)$$

Из окружности, проходящей через точки X, X_a, C и X_b, видно, что $\angle XX_aX_b = \angle XCX_b$. С другой стороны, из окружности, проходящей через точки X, X_a, B и X_c, имеем $\angle X_cX_aB = \angle X_cXB$, а из прямоугольного треугольника XX_cB имеем $\angle X_cXB = \pi/2 - \angle B'BX_c$. Но $\angle B'BX_c = \angle B'BA = \angle B'CA = \angle B'CC' + \angle C'CA = \angle B'CC' + \angle XCX_b$. Подставляя в формулу (*), получаем

$$\pi/2 = \angle XCX_b + \angle X_bX_aX_c + \pi/2 - \angle B'CC' - \angle XCX_b,$$

откуда

$$\angle X_bX_aX_c = \angle B'CC',$$

но

$$\angle B'CC' = \angle C'A'B'.$$

Итак, и в этом случае лемма 1 верна.

Лемма 2. *Треугольники BXC и $B'XC'$ подобны.*

Доказательство. Пусть X лежит внутри треугольника ABC (рис. 1). Тогда углы $C'CB$ и $C'B'B$ равны, как вписанные, опирающиеся на одну дугу; аналогично равны углы $B'C'C$ и $B'BC$.

Если же X находится вне треугольника ABC, эти треугольники образованы двумя секущими и, следовательно, подобны (почему?).

Теперь можно доказать, наконец, первую формулу Эйлера.

Пусть R_X — радиус окружности, описанной около треугольника $X_aX_bX_c$. Выразив площади треугольника ABC и педального треугольника через их стороны и радиусы их описанных окружностей, получим:

$$\frac{S_X}{S}=\frac{R}{R_X}\cdot\frac{X_bX_c\cdot X_aX_c\cdot X_aX_b}{BC\cdot AC\cdot AB}.$$

По лемме 1 треугольники $A'B'C'$ и $X_aX_bX_c$ подобны, поэтому

$$R:R_X=B'C':X_bX_c$$

и

$$\frac{S_X}{S}=\frac{B'C'\cdot X_aX_b\cdot X_aX_c}{BC\cdot AC\cdot AB}.$$

Из окружности, проходящей через точки X_a, X, X_b, C, имеем

$$X_aX_b=CX\sin\angle X_bCX_a=CX\frac{AB}{2R}.$$

Аналогично

$$X_aX_c=BX\sin\angle X_aBX_c=BX\frac{AC}{2R}.$$

Подставляя в формулу для отношения площадей, получим

$$\frac{S_X}{S}=\frac{1}{4R^2}\cdot\frac{B'C'}{BC}\cdot BX\cdot CX.$$

По лемме 2 $B'C':BC=B'X:CX$, поэтому

$$\frac{S_X}{S}=\frac{1}{4R^2}B'X\cdot BX.$$

Но

$$B'X\cdot BX=|R-OX|\cdot(R+OX)=|R^2-OX^2|$$

(докажите это!). Следовательно,

$$S_X=\frac{S}{4}\left|1-\frac{OX^2}{R^2}\right|.$$

Итак, мы доказали первую формулу Эйлера.

Упражнение 3. Докажите, что если точка X лежит внутри описанной окружности треугольника ABC, то справедливы неравенства:

а) $S_X\leqslant S/4$,

б) $\frac{d_bd_c}{bc}+\frac{d_ad_c}{ac}+\frac{d_ad_b}{ab}\leqslant\frac{1}{4}$,

где a, b, c — длины сторон BC, AC, AB треугольника ABC, d_a, d_b, d_c — расстояния от X до этих сторон соответственно.

Из этой формулы следует также, что если точка X лежит на описанной окружности треугольника ABC, то точки X_a, X_b и X_c лежат на одной прямой (*прямая Симсона*). В самом деле, в этом случае $OX=R$, т. е. $S_X=0$.

Докажем теперь *вторую формулу Эйлера*, связывающую радиусы вписанной и описанной окружности треугольника. Пусть J — центр вписанной окружности треугольника ABC, r — ее радиус; O и R, как и раньше,— центр и радиус его описанной окружности. Тогда

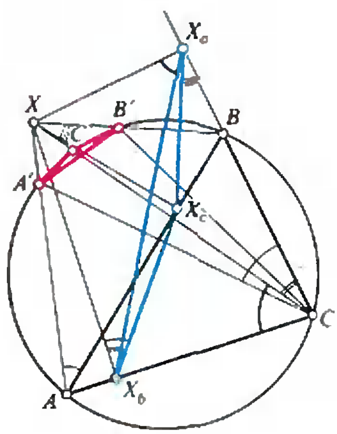


Рис. 4.

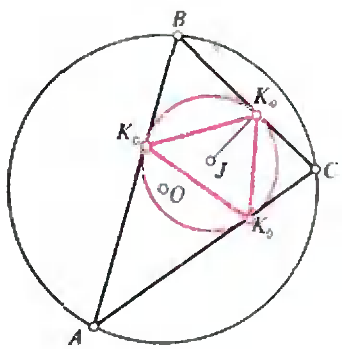


Рис. 5.

$$OJ^2=R^2-2Rr.$$

Лемма. *Пусть вписанная окружность касается сторон BC, AC и AB треугольника ABC в точках K_a, K_b, K_c соответственно (рис. 5). Тогда площадь треугольника $K_aK_bK_c$ относится к площади треугольника ABC как $r:2R$.*

В самом деле, для площади S_J треугольника $K_aK_bK_c$ имеем:

$$S_J=\frac{1}{2}r^2(\sin BAC+\sin ABC+$$
$$+\sin ACB)=\frac{r^2}{4R}(a+b+c).$$

Учитывая, что $S=r(a+b+c)/2$, получим искомое отношение:

$$\frac{S_J}{S}=\frac{2r^2(a+b+c)}{4Rr(a+b+c)}=\frac{r}{2R}.$$

Докажем теперь вторую формулу Эйлера. Запишем для этого первую формулу Эйлера для точки X, совпадающей с точкой J:

$$S_J=\frac{S}{4}\left(1-\frac{OJ^2}{R^2}\right).$$

Из только что доказанной леммы имеем

$$S_J=\frac{Sr}{2R},$$

поэтому

$$\frac{r}{R}=\frac{1}{2R^2}(R^2-OJ^2)$$

и

$$OJ^2=R^2-2Rr.$$

Упражнение 4. Докажите, что $R\geqslant 2r$.

Интересно, что для тетраэдра справедлива формула, аналогичная второй формуле Эйлера:

$$OJ_0^2=R^2-2R_0r_0,$$

где O — центр описанной сферы, R — ее радиус, J_0 — центр окружности, вписанной в одну из граней, r_0 — ее радиус, R_0 — радиус окружности, описанной около этой грани.

Упражнения

5. Докажите вторую формулу Эйлера для тетраэдра.

6. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его средней линии. Найдите угол BAC, если известно, что центр описанной окружности лежит на вписанной окружности.

7. Постройте треугольник по R, r, a.

8. Стороны треугольника составляют геометрическую прогрессию $b>a>c$. Докажите, что расстояние от вершины, противолежащей средней по величине стороне треугольника, есть среднее геометрическое между диаметром вписанной и радиусом описанной окружности.

9. Докажите, что если h и l — высота и биссектриса, проведенные из вершины A треугольника ABC, то $h/l\geqslant\sqrt{2r/R}$.

10. Докажите, что $S_X\leqslant(S_a+S_b+S_c)/3$, где S_a, S_b, S_c — площади треугольников AX_bX_c, BX_aX_c, CX_bX_a.

11. В прямоугольном треугольнике ABC точка X — центр тяжести треугольника $X_aX_bX_c$. Докажите, что $S_X=2S/9$.

(Начало см. на с. 37)

всех чисел,— сказала Кошка, снова принимаясь за умывание.— Они так и называются — «натуральные». Правда, среди них есть и по-настоящему *простые*...

Алиса собралась было спросить, какие же это «по-настоящему простые числа», но тут «Не-совсем-Дина» с неожиданной страстью заявила:

— Натуральные числа я просто обожаю! Каждое из них прекрасно по-своему!

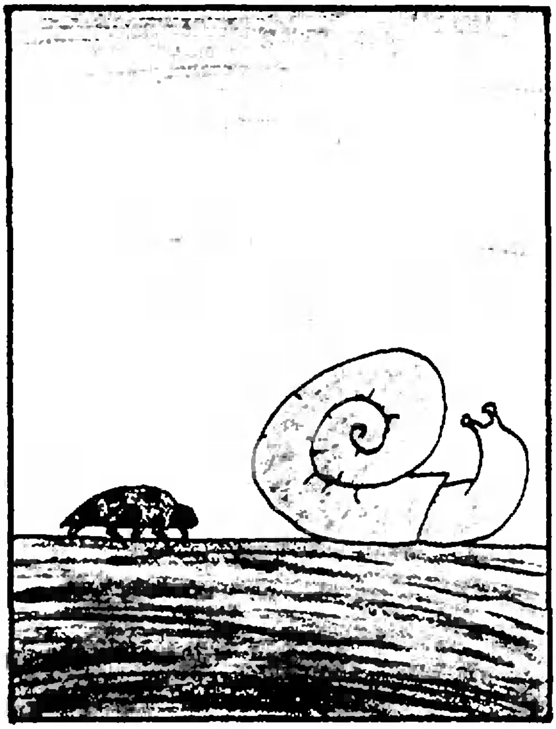
И медленно, в такт своим движениям при умывании, Кошка начала считать:

— Один, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, де...

— Хватит! — громко крикнула Алиса, догадавшись, что ей опять грозит бесконечность. И, поскольку «Не-совсем-Дина» по-прежнему сидела вниз головой, Алиса повторила свой второй вопрос:

— Почему ты вниз головой?

Алиса никогда не забывала, на какие вопросы она еще не получила ответа!..



Практикум абитуриента

Смотри в корень! И в дискриминант...

Б. КОРСУНСКИЙ

Как правило, решение физической задачи заканчивается составлением уравнения или системы уравнений. Когда это сделано, мы говорим себе: с физикой всё, начинается алгебра. Но всегда ли это так? Если, например, задача приводит к квадратному уравнению, то его анализ без физических соображений (или просто здравого смысла) невозможен.

Рассмотрим несколько конкретных примеров.

Задача 1. *Два тела одновременно начинают двигаться вдоль одной прямой. Первое — равномерно со скоростью v, второе, отстававшее вначале на l, — равноускоренно с ускорением a. Через какое время второе тело догонит первое?*

Запишем уравнения движения тел:

$$x_1 = vt,$$

$$x_2 = -l + \frac{at^2}{2}.$$

В момент встречи координаты тел равны: $x_1 = x_2$, откуда для времени t получаем квадратное уравнение

$$\frac{at^2}{2} - vt - l = 0.$$

Решив его, имеем

$$t = \frac{v \pm \sqrt{v^2 + 2al}}{a}.$$

Ясно, что по смыслу задачи решение должно быть одно. Исключить один из корней здесь легко: в самом деле, меньший корень отрицателен, чего быть не может.

Итак, ответ:

$$t = \frac{v + \sqrt{v^2 + 2al}}{a}.$$

Задача 2. *Трубку длиной l наполовину погружают в ртуть, затем закрывают сверху и вынимают. Какой длины столбик ртути останется в трубке? Атмосферному давлению соответствует высота столбика ртути, равная H.*

Из закона Бойля—Мариотта, записанного в виде

$$H\frac{l}{2} = (H-h)(l-h),$$

для искомой длины столбика ртути h получаем

$$h^2 - (H+l)h + \frac{Hl}{2} = 0,$$

или

$$h = \frac{H+l}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{H^2+l^2}.$$

Ну, а здесь как быть? Ответ явно единственный, но какой из двух? Нетрудно видеть, что оба корня больше нуля, но зато больший из корней *больше* l, что, конечно же, противоречит условию.

Таким образом, окончательно

$$h = \frac{H+l}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{H^2+l^2}.$$

Задача 3. *Фокусное расстояние собирающей линзы равно F. Каково*

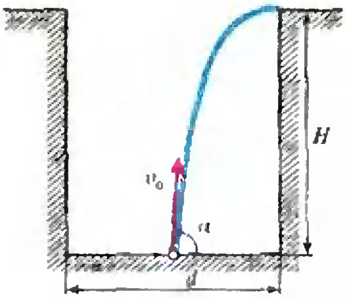


Рис. 1.

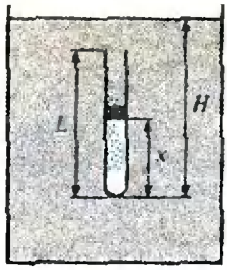


Рис. 2.

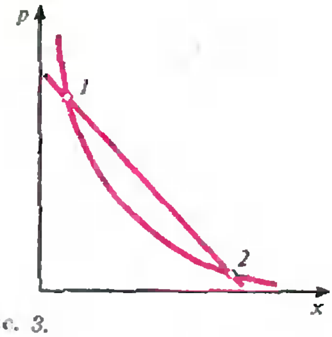


Рис. 3.

минимально возможное расстояние между предметом и его действительным изображением?

Обозначим расстояние от предмета до линзы d, расстояние между предметом и его изображением x и запишем формулу линзы:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{x-d}=\frac{1}{F},$$

или

$$d^2-dx+Fx=0.$$

Решая уравнение относительно d, получим, что дискриминант равен

$$D=x(x-4F).$$

Так как $x>0$, решение возможно только в том случае, если $x\geqslant 4F$. Отсюда находим

$$x_{\min}=4F.$$

Задача 4. *Испытание гранаты проводится в центре дна цилиндрической ямы глубиной H. Каким должен быть минимальный диаметр этой ямы, чтобы осколки, скорость которых не превышает v_0, не вылетели из нее?*

Рассмотрим «критический» осколок (рис. 1) и запишем для него уравнение движения в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления:

$$v_0\cos\alpha\cdot t=\frac{d}{2},$$

$$v_0\sin\alpha\cdot t-\frac{gt^2}{2}=H,$$

где d — диаметр ямы. Отсюда получаем уравнение

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\frac{4v_0^2}{gd}\operatorname{tg}\alpha+\left(\frac{8Hv_0^2}{gd^2}+1\right)=0.$$

Условие задачи выполняется, если это уравнение не имеет решений, т. е. если дискриминант отрицательный:

$$\left(\frac{4v_0^2}{gd}\right)^2-4\left(\frac{8Hv_0^2}{gd^2}+1\right)\leqslant 0,$$

или

$$d^2\geqslant\frac{4v_0^2}{g^2}(v_0^2-2gH).$$

Это означает, что если $v_0^2\leqslant 2gH$, то диаметр d может быть любым (действительно, даже вертикально летящий осколок не долетит до поверхности земли), если же $v_0^2>2gH$, то

$$d\geqslant\frac{2v_0}{g}\sqrt{v_0^2-2gH},$$

и

$$d_{\min}=\frac{2v_0}{g}\sqrt{v_0^2-2gH}.$$

Задача 5. *Пробирку длиной L заполнили водородом при давлении p_0, закрыли легким подвижным поршнем и погрузили в сосуд с ртутью на глубину H (рис. 2). Какой будет высота (x) столба водорода в новых условиях? Плотность ртути ρ, атмосферное давление p_a.*

Записав условие равновесия поршня —

$$p_a+\rho g(H-x)=p$$

и закон Бойля—Мариотта —

$$p_0L=px,$$

где p — новое давление водорода,

(Окончание см. на с. 69)

Вокруг «Тетриса»

Кажется, нет сейчас человека, ничего не слышавшего об одной из самых популярных в мире компьютерных игр — «Тетрисе». Говорят, московский программист Алексей Пажитнов придумал ее, держа в руках довольно древнюю головоломку «Пентамино». В ней требуется из данного набора плоских деталек, представляющих собой всевозможные конфигурации из 5 одинаковых квадратиков, сложить различные фигуры. Эта головоломка, рассчитанная на неспешное вдумчивое решение, превратилась в весьма динамичную игру «на скорость соображения», сначала двумерную (собственно «Тетрис»), потом трехмерную (например, «Блокаут»); потом пошли разнообразные варианты — младшие братья, племянники и даже внуки «Тетриса».

Для тех, кому не посчастливилось ни разу сразиться с компьютером в эту игру, вкратце опишем ее.

В плоский «стакан» по одной падают фигурки (всевозможные конструкции из четырех единичных квадратиков; кстати, поэтому игра называется «Тетрис» — от слова «тетра» — «четыре» по-гречески). Игрок может поворачивать летящую фигурку и сдвигать ее влево или вправо. Когда одна фигурка упала, машина сбрасывает следующую. Ваша задача — уложить эти фигурки так, чтобы заполнить какой-нибудь горизонтальный ряд. Если вам удастся это сделать, не оставив в ряду пустых клеток, весь заполненный ряд с радостным хрюканьем исчезает. Игра закончится победой машины, если весь стакан окажется доверху засыпан фигурками так, что в каждом горизонтальном ряду останутся пустоты и ни один ряд уже не сможет исчезнуть. «Победа» игрока означает бесконечную игру. Реально всегда игра заканчивается, ибо человеку свойственно ошибаться, а коварный чертик где-то внутри компьютера изощряется, кидая все быстрее именно те фигурки, которые не желают укладываться так, как бы вам хотелось.

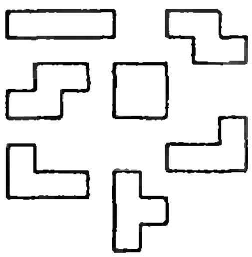


Рис. 1. Фигурки «Тетриса».

Поскольку «Тетрис» существует уже более 10 лет, он успел породить множество вопросов у самых дотошных из своих поклонников. Так, в газете МФТИ «За науку» мы нашли такую чисто математическую проблему, сформулированную Г. Геогджаевым:

«Играющие в «Тетрис» часто жалуются на невезение. А бывает ли в «Тетрисе» «фатальное» невезение? Конкретно:

а) Существует ли такая последовательность фигур «Тетриса», которую никакими действиями нельзя уложить по правилам?

б) Если ответ на пункт а) отрицательный, то, может быть, возможно «слабое» невезение? Представьте себе, что кто-то выбирает фигурки в зависимости от действий играющего с целью «засыпать» его. Всегда ли это удастся?»

Ответ на эти вопросы встретился нам... в английском журнале «Эврика». Вряд ли английские исследователи читали газету-многотиражку московского физтеха, поэтому напрашивается вывод: назрела необходимость изучить «Тетрис» всерьез!

Вот что пишет Ричард Такер в «Эврике»: «Мы демонстрируем здесь, что фактически чертик может объявлять заранее последовательность падающих фигурок, позволять игроку

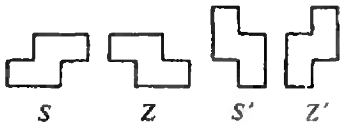


Рис. 2. Фигурки «S» и «Z».

выбирать размеры доски («стакана»), и все же победить». Для этого чертик использует фигурки только двух типов, для удобства названные S и Z (в повернутом состоянии — S' и Z').

«Назовем рядом 11 ряд, самые левые две клетки которого заполнены «кирпичиками», а дальше расположение «кирпичиков» и пустот произвольно. Аналогично, ряд 10 начинается с «кирпичика», затем идет дырка, а дальше — что угодно; 01-ряд начи-

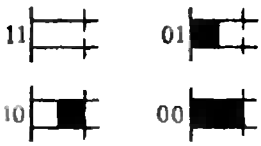


Рис. 3. Типы рядов по Р. Такеру.

нается с пустой клетки, затем стоит «кирпичик», затем — что угодно; в 00-ряду пусты обе первые слева клетки»,— пишет Р. Такер. Как видите, подход научный. И доказательство сформулированного выше утверждения — абсолютно строгое.

Допустим, в середине игры чертик начинает кидать только фигурки S и Z. Тогда количество 01-рядов не может уменьшиться, так как единственная возможность избавиться от такого ряда — поставить в левый край Z'; но тогда на месте прежнего возникает новый 01-ряд. Если предположить, что игрок знает выигрышную стратегию, т. е. может играть бесконечно, должен наступить такой момент, после которого количество 01-рядов останется постоянным.

Рассмотрим теперь следующий (выше этого) ряд, не являющийся 00-рядом. Если это 01-ряд, единственная фигурка, которую можно поставить в самую левую колонку, это Z'; поэтому придется выстраивать в двух левых столбцах «Z'-башню». Если это 11-ряд, в левые две колонки нельзя ставить ничего, чтобы не создать новый 01-ряд; если это 10-ряд, единственная возможность не создавать новых 01-рядов — поставить сюда фигурку S', тогда возникнет «S'-башня».

Выходит, две колонки у левой стенки стакана будут заполняться башней одного из этих двух типов. Рассмотрев следующие две колонки, видим, что и в них можно лишь строить S'- или Z'-башни. По индукции, всю ширину стакана придется застраивать такими башнями; причем удастся не проиграть, лишь если ширина стакана — четное число (в клетках) и если башни растут равномерно.

«Теперь я могу привести выигрышную для чертика стратегию»,— сообщает в заключении Р. Такер. Она такова.

Выбрав какое-нибудь иррациональное число от 0 до 1, чертик стремится кидать фигурки S и Z так, чтобы отношение количества фигурок S к количеству фигурок Z приближалось к этому иррациональному числу. Игрок ничего не может поделать, поскольку башни в таком случае растут неравномерно и горизонтальные ряды накапливаются...

Ответив на часть вопросов, Р. Такер немедленно поставил новые: 1) При заданной ширине стакана, для какого n чертик остановит игру, заполнив более n линий? 2) Для каких еще подмножеств множества фигурок «Тетриса» чертик может победить, используя лишь фигурки этого подмножества?

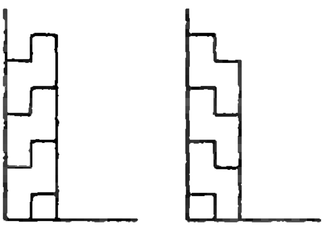


Рис. 4. S'-башня (слева) и Z'-башня (справа).

А вот еще одна проблема, по-видимому, никогда не возникавшая у западных «тетрисоведов», поголовно обеспеченных хорошими персональными компьютерами. Что делать человеку, который хочет играть в «Тетрис», но имеет доступ лишь к программируемому микрокалькулятору?

Очень упрощенный «Тетрис» реализовал на МК-85 Д. Демидов. Здесь подвижные элементы игры — палочки, т. е. знаки «—», которые движутся по экрану справа налево. После запуска программы она сначала спрашивает, какой сложности игру вы выберете: «Сколько линий?» В ответ нужно ввести число от 5 до 10. Затем на экране одна за другой начнут появляться и двигаться влево горизонтальные палочки. Их полетом можно управлять с помощью клавиш «1» (вверх) и «2» (вниз). Требуется построить из палочек вертикальную «стопку», при этом за каждую размещенную палочку начисляется одно очко. Когда вы построите у левого края индикатора полную стопку из семи палочек, она исчезнет, а все оставшееся справа от нее изображение сдвинется на одну позицию влево. Если же в горизонтальном ряду окажется столько палочек подряд, сколько вы выбрали линий в начале игры, вы проиграли.

Микрокалькулятор должен работать в режиме повышенного быстродействия.

Конечно, досадно, что палочки не поворачиваются, что нет каких-нибудь загогулин (вроде буквы «Г», например),— они усложнили бы игру, сделав ее интереснее. Следовательно, тут есть большой простор для воображения.

«Тетрис» Д. Демидова

```
10 VAC: PRINT «СКОЛЬКО ЛИНИИ?»;: «INPUT V:V=V—1
20 FOR Z=0 TO V: A$(2)=«0000000»: NEXT Z
30 S=INT(RAN#*7): X=7—S
40 FOR Z=V TO 0 STEP —1: $=KEY: P=S
50 IF $=«1»; IF X≠7; Q=X+1: GOSUB 160
60 IF $=«2»; IF X≠1; Q= X—1: GOSUB 160
70 FOR Y=Z*5+4 TO Z*5 STEP —1
80 DRAWC Y+5, P: DRAW Y,S: NEXT Y
90 IF Z≠0; IF GETC(AS(Z—1), X)=«V» THEN 110
100 NEXT Z: Z=Z+1
110 IF Z>U; U=Z: IF U=V; PRINT «GAME OVER»;:END
120 $=AS(Z): A$(Z)= MID(1, X—1) +«V» + MID(X+1,
7—X)
130 CSR 8: PRINT CHR 96;: NEXT R: GOTO 30
160 IF CETC (A$(Z), Q) = «0»; X=Q
170 S= 7—X: RETURN
```

Попробуйте, возможно, вам удастся усложнить «Тетрис» Демидова, составив соответствующие программы.

Совсем на другой идее основан микрокалькуляторный вариант «Тетриса», реализованный И. Майковым. В его игре справа налево движутся не фигурки, а двузначные числа. Их можно «накладывать» одно на другое, при этом цифры, оказавшиеся в одном разряде, складываются. Вы проигрываете, если хотя бы в одном из разрядов получающегося числа сумма переваливает за 9. Если все цифры в этом числе больше 1, избыток «проваливается»: из каждого разряда вычитается минимальная из имеющихся цифр.

В одном из следующих номеров мы намерены опубликовать программу И. Майкова; а пока — идею вы получили, попробуйте составить подобную программу сами.

Материал подготовила
А. Котова

„Квант" для младших школьников

Конкурс «Математика 6—8»

Журнал «Квант» продолжает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 24 задач (по 3 в каждом номере) и заканчивается в апреле будущего года. Победители будут награждены премиями журнала «Квант» и Российского благотворительного фонда «Интеллект».
Решения задач из этого номера высылайте не позднее 1 марта 1993 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

Задачи

10. Нетрудно проверить, что

$$2 \text{ делится на } 2^1,$$
$$3\cdot 4 \text{ делится на } 2^2,$$
$$4\cdot 5\cdot 6 \text{ делится на } 2^3,$$
$$5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 \text{ делится на } 2^4.$$

Сформулируйте общее утверждение и докажите его.

А. Савин

11. Тетрадный лист имеет размеры 33×41 клеток. Можно ли в его клетки записать все числа от 1 до 33·41=1353 так, чтобы в каждом квадратике 2×2 сумма записанных в нем четырех чисел была одна и та же?

С. Токарев

12. Таксомоторный парк решил устроить ученикам подшефной школы экскурсию. Когда к дверям школы подъехала колонна микроавтобусов и «Волг», то ребята быстро расселись по 12 человек в каждом «Рафике» и по 7 человек в каждой «Волге». Когда подъехало еще три машины, то школьники пересели так, что в каждой «Волге» стало по 6 человек, а в каждом «Рафике» по 11. Можно ли заказать еще несколько машин так, чтобы в каждой «Волге» было по 5 школьников, а в каждом «Рафике» по 10?

И. Акулич

XXIII Международная физическая олимпиада

А. ЗИЛЬБЕРМАН,
доктор физико-математических наук
С. КРОТОВ

В этом году олимпиада проходила с 5 по 12 июля в Финляндии, в маленьком городке Эспоо около Хельсинки. В ней приняли участие 177 школьников из 37 стран (команда могла включать 5 человек, но некоторые страны прислали неполные команды). Из бывшего СССР на олимпиаде были представлены команды России, Украины, Литвы и Эстонии. В принципе, могли принять участие и другие — но не случилось.

Цикл отбора команды на МФО начался еще тогда, когда предполагалось послать объединенную команду — из всех стран-участниц Межреспубликанской физической олимпиады имели формальное право выставить свои команды только Россия и Литва, однако Оргкомитет проявил готовность принять уже в этом году Украину и Эстонию в качестве полноправных участников. Для нас это означало, что вместо одной сильной команды — в нее попали бы ребята из России и Украины — получилось две, тоже довольно сильные.

Итак, после трехнедельных сборов в путь отправилась команда России, в которую вошли: москвичи *Андрей Фролов* — выпускник с. ш. 303 и *Федор Безруков* — выпускник с. ш. 1232, *Николай Гуляев* — выпускник с. ш. 82 г. Нижнего Новгорода, *Сергей Панков* — выпускник с. ш. 73 г. Тулы и *Дмитрий Арбатский* — выпускник школы 239 г. Санкт-Петербурга.

Торжественное открытие олимпиады состоялось 6 июля в Технологическом университете Хельсинки. Участников олимпиады приветствовали профессор Антти Сиивола — председатель Оргкомитета олимпиады и Риитта Уосукайнен — министр просвещения страны. После короткой официальной церемонии и концерта ребята отправились на экскурсию по городу, а руководители команд начали обсуждение задач теоретического тура. Задачи эти составляются заранее хозяевами олимпиады, окончательные же варианты условий получаются в результате долгого и серьезного обсуждения (после которого задачи часто изменяются, и порой довольно сильно). Как выглядит это обсуждение, читатели могут себе представить, если обладают хорошим воображением. Скажем только, что в беседе принимают участие представители трех десятков стран, каждый из которых лучше всех знает, что такое олимпиадные задачи по физике и как они должны быть сформулированы. Мнение автора задачи решающим не является, хотя и принимается во внимание, а длительность и результативность обсуждения во многом зависят от искусства председателя Оргкомитета, которого участники обсуждения внимательно выслушивают. В общем, это совершенно не похоже на заседания Верховного Совета, которые все мы неоднократно наблюдали по ТВ.

В результате обсуждения получились такие условия задач:

Задачи теоретического тура

Задача 1

Вокруг Земли по круговой орбите заданного радиуса R, лежащей в плоскости экватора, движется спутник, состоящий из нескольких тел (рис. 1). Тяжелое центральное тело P соединено легкими нерастяжимыми нитями с четырьмя симметрично расположенными телами B, масса каждого из которых m. Эта система все время находится в плоскости орбиты и вращается с заданной угловой скоростью ω (относительно неподвижных звезд) вокруг центра P. Для того чтобы взаимное расположение тел не менялось без необходимости, радиальные нити скреплены между собой дополнительными тонкими нитями так, чтобы углы между ними составляли 90 градусов, а вся система тел двигалась как одно твердое тело.

1) Определите величину силы, с которой прикрепленная к телу нить действует на это тело. Рассмотрите случаи, когда векторы $\vec{R}$ и $\vec{r}$ параллельны, антипараллельны, перпендикулярны (возможно, именно в этих положениях силы становятся максимальными или минимальными).

2) В каждом из тел B находится механизм, получающий энергию от солнечных батарей.

Этот механизм быстро втягивает нить внутрь в тот момент, когда сила натяжения максимальна, и выпускает в тот момент, когда сила минимальна, причем изменение длины нити составляет 1 % от ее длины — среднего расстояния между B и P. Все остальное время длина нити неизменна. Рассчитайте «чистую» среднюю мощность такого механизма за время одного оборота тел B относительно центра P (мощность определяется суммарной работой силы натяжения с учетом знаков, отнесенной ко времени одного оборота).

3) Опишите изменения в движении спутника, которые вызываются работой указанных механизмов. А именно — как меняются орбитальная скорость, радиус орбиты, угловая скорость и гравитационная потенциальная энергия спутника? Можно ли переместить спутник дальше заданной орбиты? на очень большое расстояние?

Указания: Рассмотрите оба возможных знака угловой скорости ω. Не принимайте во внимание притяжение Солнца и Луны — достаточно рассмотреть взаимодействие спутника и Земли. Не старайтесь получить совершенно точные решения — вполне достаточны приближения, которые обеспечат точность 5 %.

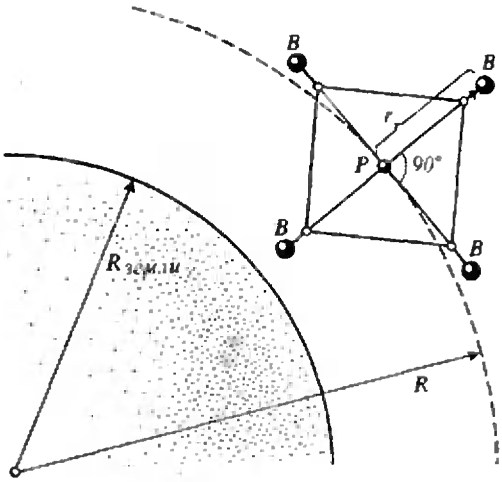


Рис. 1.

Задача 2

В этой задаче рассматривается осевое (продольное) движение атомов линейной молекулы вдоль ее оси, при котором все атомы в процессе движения остаются на одной прямой. Предполагается, что молекула состоит из N атомов массами $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_N$ соответственно и каждый атом связан со своими ближайшими соседями химическими связями, которые моделируются невесомыми пружинами, подчиняющимися закону Гука, с коэффициентами упругости (упругими константами) $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{N-1}$ (рис. 2). Известно, что свободное продольное колебательное движение линейной молекулы является суперпозицией отдельных колебательных движений атомов. Такие движения называют нормальными колебаниями, или нормальными модами, и представляют собой движение, при котором все атомы совершают гармонические колебания одной и той же частоты, проходя при этом одновременно через свои положения равновесия.

1) Пусть x_i — координата смещения i-го атома от его положения равновесия. Выразите силу F_i, действующую на этот атом, как функцию мгновенных смещений $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$ и упругих констант $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{N-1}$. Какое соотношение имеет место между силами $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_N$? Используя это соотношение, установите зависимость между смещениями $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$ и дайте ей физическую интепретацию.

2) Проанализируйте движение двухатомной молекулы AB (рис. 3). Получите выражения для сил, действующих на атомы A и B, через смещения x_A и x_B и константу k. Опишите возможные типы движения атомов в молекуле и определите соответствующие частоты колебаний. Объясните полученный результат и, в частности, тот факт, что атомы могут колебаться с одинаковой частотой, хотя их массы различны (что и представляет собой нормальную моду).

3) Проанализируйте возможные движения трехатомной молекулы ABA (рис. 4). Выразите силы, действующие на каждый атом молекулы, через смещения x_1, x_2, x_3. Определите нормальные моды данной молекулы и соответствующие значения частот.

4) Частоты двух продольных колебательных мод молекулы CO_2 равны $3{,}998 \cdot 10^{13}$ и $7{,}042 \cdot 10^{13}$ Гц. Вычислите упругую константу для связи С—О. Оцените, насколько хорошо использованное приближение (упругие силы) согласуется с приведенными численными данными. Масса атома углерода равна 12 а. е. м., атома кислорода — 16 а. е. м. (1 а. е. м.$=$ $=1{,}660 \cdot 10^{-27}$ кг).

Задача 3

Спутник представляет собой равномерно нагретый шар радиусом $R=1$ м. Вся поверхность спутника имеет одинаковое покрытие. Спутник находится недалеко от Земли, но не в ее тени. Температура поверхности Солнца, рассматриваемого как абсолютно черное тело, $T_0=$ $=6000$ К, его радиус $R_0=6{,}96 \cdot 10^8$ м. Расстояние между Солнцем и Землей $L=1{,}5\times$ $\times 10^{11}$ м. Спутник нагревается солнечным из-

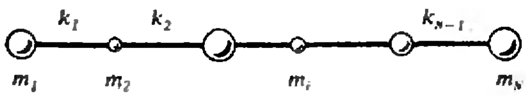


Рис. 2.

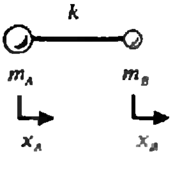


Рис. 3.

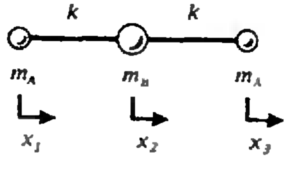


Рис. 4.

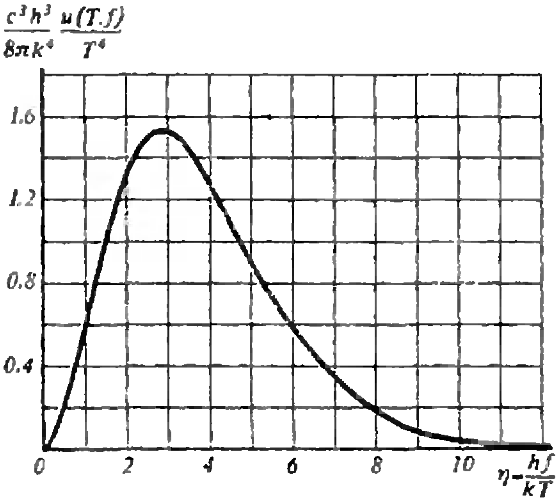


Рис. 5.

лучением до температуры, при которой мощность излучения спутника (его мы также рассматриваем как абсолютно черное тело) равна поглощаемой им мощности. Известно, что мощность, излучаемая с единицы поверхности абсолютно черного тела, подчиняется закону Стефана — Больцмана:

$$P=\sigma T^4,\ \text{где}\ \sigma=5{,}67\cdot10^{-8}\ \text{Вт}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{К}^{-4}.$$

В первом приближении можно считать, что Солнце и спутник поглощают всю падающую на них мощность излучения.

1) Найдите выражение для температуры T спутника и вычислите ее значение.

2) Спектр излучения абсолютно черного тела описывается так называемой спектральной функцией $u(T,f)$, заданной в виде

$$u(T,f)df=\frac{8\pi k^4T^4}{c^3h^3}\frac{\eta^3d\eta}{e^\eta-1},$$

где $u(T,f)df$ — плотность энергии электромагнитного излучения, частоты которого лежат в интервале $[f, f+df]$, $h=6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка, $k=1{,}4\cdot10^{-23}$ Дж·К$^{-1}$ — постоянная Больцмана, $c=3\cdot10^8$ м/с — скорость света, $\eta=hf/(kT)$. Если проинтегрировать функцию $u(T,f)$ по всем частотам и всевозможным направлениям, то получится закон Стефана — Больцмана для мощности излучения с единицы поверхности. На рисунке 5 приведен так называемый нормированный спектр, описываемый функцией

$$\frac{c^3h^3}{8\pi k^4}\frac{u(T,f)}{T^4}.$$

На практике стремятся поддерживать спутник при возможно более низкой температуре. С этой целью применяют соответствующее покрытие, которое отражает излучение всех частот, превышающих некоторую граничную частоту, но пропускает без ослабления излучение на более низких частотах. Пусть предельная частота удовлетворяет соотношению $hf/k=1200$ К. Оцените, какую температуру будет иметь спутник в этом случае.

Внимание! Не старайтесь получить совершенно точный ответ, воспользуйтесь приближенной формулой, справедливой при малых x:

$$e^x=\exp(x)\approx1+x.$$

Величина интеграла

$$\int\limits_0^\infty\frac{\eta^3d\eta}{e^\eta-1}=\frac{\pi^4}{15},$$

максимум функции $\eta^3/(e^\eta-1)$ достигается при $\eta=2{,}82$.

3) В реальном спутнике обычно устанавливается электронная аппаратура, которая питается от солнечной батареи. Будем считать, что мощность 1 кВт, которую потребляет аппаратура, рассеивается внутри спутника в виде тепла. Какая температура установится в этом случае на поверхности спутника?

4) Некая фирма рекламирует специальную краску следующим образом: «Эта краска будет отражать более 90 % падающего излучения (как в видимой, так и в инфракрасной области), при этом она будет излучать на всех частотах (в видимой и инфракрасной области) как абсолютно черное тело, избавляя таким образом спутник от лишнего тепла. Итак, краска обеспечит охлаждение спутника до наиболее низких температур.» Может ли существовать в природе такая краска? Ответ обоснуйте.

5) Какими свойствами должно обладать покрытие для того, чтобы поднять температуру сферического тела, подобного рассматриваемому в задаче спутнику, выше величины, вычисленной в пункте 1?

Теоретический тур оказался не слишком простым. Наши ребята хуже всего справились с первой задачей, гораздо лучше — со второй и третьей. В общем, после этого тура впереди с большим отрывом оказались ребята из Китая, за ними — из Великобритании, сразу вслед за ними — из России, потом шли команды Украины, США и др.

После дня отдыха состоялся экспериментальный тур. Нет смысла приводить официальные условия задач — они рассчитаны на определенные приборы и устройства, которых у читателей нет. Поэтому мы расскажем о них лишь в общих чертах. Участникам были предложены две задачи, на выполнение каждой отводилось 2,5 часа — за это время нужно было не только провести измерения, но и полностью оформить работу.

В первой задаче необходимо было исследовать зависимость напряжения пробоя воздуха от расстояния между электродами. Необходимое для пробоя высокое напряжение получалось при ударе грузика о пьезоэлемент (на этом принципе основаны разного рода зажигалки) — грузик съезжал вдоль наклонной плоскости и перед ударом приобретал определенную скорость, которую можно было рассчитать (с учетом трения!). Известна была доля энергии деформации, переходящая в энергию электрического поля, и электрическая емкость образца — все это позволяло провести расчеты по результатам измерений. Дополнительная тонкость — нужно было учесть, что не вся кинетическая энергия груза переходит в энергию деформации, и воспользоваться законом сохранения импульса для вычисления скорости центра масс сразу после удара. Задача эта требовала проведения множества измерений и грамотной статистической обработки результатов.

Вторая задача относилась к физической оптике. Каждому участнику дали отражательную дифракционную решетку — устроители разрезали на небольшие кусочки несколько дисков для лазерных проигрывателей. У этих дисков расстояние между соседними дорожками составляет 1,5—2 микрона. Нужно было определить это расстояние, пользуясь миниатюрным фонариком, линейкой, транспортиром, миллиметровкой и карандашом (в условии задачи был задан диапазон длин волн видимого света — некоторая подсказка). Но это была только первая часть задачи. Участникам выдали также по семь слайдов — пять из них были цветными светофильтрами — и требовалось для каждого из них определить полосы частот (длин волн) пропускания и поглощения. Причем у двух светофильтров хитрые хозяева олимпиады сделали узкий диапазон поглощения внутри довольно широкого диапазона пропускания, и это нужно было заметить и измерить. Шестой слайд был невзрачным кусочком пленки серого цвета, и нужно было определить, что он собой представляет. В действительности это был поляризатор — доказать это можно было, используя тот факт, что при отражении света от проводящей поверхности в нем появляется поляризованная компонента. Впрочем, догадаться можно было и проще — с помощью часов или калькулятора с индикаторами на жидких кристаллах, но это не могло быть признано решением задачи, так как требовало использования «приборов», не включенных в список. И, наконец, седьмой слайд, тоже кусочек мутноватой серой пленки, был по условию «двумерной дифракционной решеткой», а на самом деле — просто фотографией «в клеточку», только эти клеточки были совсем маленькими — примерно 70 черточек на миллиметр. Требовалось определить именно эту величи-

ну — расстояние между соседними черточками. Сделать это можно было, наблюдая дифракцию от точечного источника на этой решетке — сделать маленькую дырку в листе бумаги, расположить за ним фонарик (получится точечный источник) и посмотреть на него через слайд, расположив рядом с ним миллиметровку. И все это — за 2,5 часа!

Наши ребята прекрасно справились с экспериментальным туром, обогнав всех, а Сергей Панков получил специальный приз за лучший результат в экспериментальном туре.

По результатам двух туров в неофициальном командном зачете команда России оказалась второй. Первой была команда Китая, которая блестяще выступает уже второй год,— опять все участники получили золотые медали, у них же первый и третий общие результаты. В нашей команде золотые медали получили Андрей Фролов — у него второй абсолютный результат, Николай Гуляев и Федор Безруков. Серебряную медаль получил Сергей Панков, бронзовую — Дмитрий Арбатский. Андрей Фролов получил также специальный приз Европейского физического общества — при присуждении этого приза баллы за теоретический и экспериментальный тур суммируются с «весом» в пользу эксперимента, поэтому его сумма и оказалась наибольшей. Команда Украины оказалась на третьем месте (одна золотая медаль, три серебряных и одна бронзовая), за ней — команды Великобритании (четыре серебряных и одна бронзовая медали) и США (две золотых и одна серебряная медали).

Хозяева олимпиады сделали все, чтобы олимпийцы остались довольны. Были организованы интересные экскурсии в крепость Свеаборг, на предприятие знаменитой фирмы Несте, в Центр науки «Эврика». Участники могли испробовать на себе воздействие знаменитой финской сауны, увидеть своими глазами охраняемую природу (в отличие от известной в нашей стране «окружающей среды»), побывать на приеме у городских властей Эспоо и, главное, пообщаться со сверстниками из других стран (мы искренне надеемся, что наши ребята подавали только положительные примеры). Специально для участников и гостей олимпиады издавалась газета с приятным названием «Спин», которая выходила каждый день (всего вышло семь выпусков) и содержала массу интересных и полезных сведений, относящихся к олимпиаде. В ней были напечатаны, кроме всего прочего, и адреса всех участников из всех стран с перечислением их увлечений — особенно интересно смотрелись увлечения конструированием космических кораблей (кажется, это не шутка), рыбной ловлей и чтением книг.

Следующую Международную физическую олимпиаду принимают Соединенные Штаты Америки. Надеемся, что политические и экономические временные трудности не помешают нашей стране принять участие в этой олимпиаде.

Мы поздравляем участников прошедшей олимпиады с достигнутыми успехами и желаем еще больших успехов участникам будущих олимпиад.

IV Международная олимпиада по информатике

Кандидат технических наук
В. КИРЮХИН

В этом году Международную олимпиаду по информатике (МОИ—92) принимала Германия. Олимпиада проходила с 12 по 21 июля в Бонне и собрала рекордное число участников. В общей сложности в ней приняли участие представители 50 стран со всех континентов. Непосредственно в соревнованиях участвовало 166 школьников из 45 стран мира, причем в состав каждой команды могло входить не более четырех человек.

Вовлечение в олимпиадную орбиту большого количества участников свидетельствует о дальнейшем росте популярности Международной олимпиады по информатике и о том внимании, которое оказывается во многих странах мира поиску и подготовке молодых талантов в области информатики и компьютерной технологии. Участие в МОИ—92 команд США, Южной Кореи, Австралии, Южной Африки значительно усилило состав участников и повысило и без того высокую конкуренцию за право быть победителями олимпиады.

На нынешней олимпиаде Россия, Украина, Беларусь и государства Прибалтики были представлены отдельными командами. В состав сборной России по результатам национальной олимпиады, олимпиады стран СНГ и Прибалтики, а также отборочных сборов вошли выпускник с. ш. 82 п. Черноголовка Московской области *Сергей Иоффе*, выпускники СУНЦ МГУ *Дмитрий Жуков* и *Евгений Кузне-*

цов, а также *Дмитрий Давыдок*, выпускник с. ш. 239 Санкт-Петербурга.

Национальный подготовительный комитет МОИ—92 во главе с профессором Ф. Крюкебергом и доктором П. Хейдерхоффом сделал все возможное для успешного проведения олимпиады. По случаю открытия МОИ—92 мэр Бонна устроил торжественный прием в городской ратуше. Само открытие олимпиады состоялось в резиденции совета директоров национального исследовательского центра по информатике и информационным технологиям (GMD). Много добрых слов и напутствий услышали ребята на церемонии открытия, однако все мысли у них были связаны с будущими соревнованиями. Каждый пытался ответить на вопрос — удастся ли ему стать победителем олимпиады или нет.

Традиционно МОИ—92 проходила в два тура. По сравнению с прошлыми международными олимпиадами длительность каждого тура на этой олимпиаде была увеличена до пяти часов. На обоих турах участникам олимпиады предлагалось по одной задаче, которые выбирались членами международного жюри непосредственно перед началом тура из пакета задач, подготовленного научным комитетом. В результате голосования были выбраны следующие задачи.

Задача I тура «Острова в море»

Расположение островов в море представлено с помощью сетки размером $N \times N$. Каждый остров обозначается символом «*» в узле этой сетки. Задача заключается в том, чтобы восстановить карту морских островов по закодированной информации о распределении островов по горизонталям и вертикалям. Для иллюстрации принципа кодирования рассмотрим следующую карту и соответствующие ей коды:

```
*   * *           1 2
  * * *   *       3 1
*   *   *         1 1 1
  * * * * *       5
* *   *   *       2 1 1
      *           1

1 1 4 2 2 1
1 2   3   2
1
```

Числа справа от карты на этом рисунке являются кодами и представляют порядок и размер групп островов в соответствующих горизонталях сетки. Например, цифры «1 2» в первой строке означают, что первая горизонталь содержит группу из одного острова, за которой следует группа из двух островов. Слева и справа от каждой группы островов расположено море произвольной протяженности. Аналогично, последовательность «1 1 1» в первом столбце под картой островов означает, что первая вертикаль содержит три группы островов, в каждой из которых один остров, и т. д.

Постановка задачи

Написать программу, которая выполняет следующие действия (шаги) до тех пор, пока данный входной файл, содержащий несколько независимых блоков информации, не будет прочитан полностью:

1. Считывает очередной блок информации из входного ASCII файла (структура этого файла приведена в примере 1) и отображает его на экране.

Пример 1

```
6
1 2 0     ← строка для первой горизонтали
3 1 0
1 1 1 0
5 0
2 1 1 0
1 0
1 1 1 0   ← строка для первого столбца
1 2 0
4 0
2 3 0
2 0
1 2 0
```

Пример 2

```
Блок входной        Решение:
информации
4                   Столбцы 1 2 3 4
0                   Строка  1
1 0                 Строка  2     *
2 0                 Строка  3   * *
0                   Строка  4
0
1 0
2 0
0
```

Пример 3

```
2
0
0
2 0
2 0
```

Для этих данных не существует карты.

Пример 4

```
2
1 0
1 0
1 0
1 0
```

Этим данным удовлетворяют две различные карты.

Каждый блок информации начинается с размеров квадратной сетки, за которыми следует кодовая информация о горизонтальном и вертикальном распределении островов. Код для каждой отдельной горизонтали и вертикали является отдельной строкой файла и представляет собой последовательность чисел, разделенных пробелами. Заканчивается каждая строка нулем. При этом сначала идет информация о всех горизонталях, а затем — о вертикалях.

2. Восстанавливает карту (или все карты в случае не единственного решения, как в примере 4) и отображает ее (их) на экране.

3. Добавляет карту (карты) в конец выходного ASCII файла. Каждое пустое место в сетке должно быть представлено двумя пробелами, а каждый остров — символом «* » (звездочка и пробел). В случае неоднозначного решения различные карты должны быть отделены друг от друга пустой строкой. Если карту восстановить невозможно, в соответствующей строке выходного файла написать «no map». Решения, относящиеся к различным блокам информации входного файла, должны быть отделены в выходном файле строкой с надписью «next problem».

Технические ограничения

1. *N* должно быть не меньше 1 и не больше 8.

2. Результирующая программа должна быть помещена в текстовый ASCII файл с именем «C:\IOI\DAY—1\413—PROG.xxx» Расширение .xxx для PASCAL—.PAS, для C—.C, для BASIC —.BAS, для LOGO —.LOG.

3. Имя входного ASCII файла должно быть «C:\IOI\DAY—1\413—SEAS.IN».

Задача II тура «Покорение вершины»

Клуб альпинистов состоит из P членов, с номерами от 1 до P. Каждый альпинист поднимается в гору с одной и той же скоростью, а скорость подъема не отличается от скорости спуска. Альпинист с номером i расходует C(i) единиц ресурсов в день как при подъеме, так и при спуске, и может нести в каждый момент времени не больше S(i) таких единиц.

Предполагается, что альпинист может достичь вершины за N дней при полной обеспеченности ресурсами как для подъема, так и для спуска. Гора может быть так высока, что один альпинист не может изначально нести все необходимые для подъема и спуска ресурсы. Поэтому группа альпинистов стартует в одном и том же месте и в одно и то же время, чтобы обеспечить восхождение. Альпинист может начать спускаться, не достигнув вершины, отдав при этом все ненужные ему для спуска ресурсы другим альпинистам, которые должны быть в состоянии их взять. Альпинисты не отдыхают в течение экспедиции.

Задача состоит в составлении расписания восхождения для клуба альпинистов. По крайней мере один альпинист должен достичь вершины горы и все альпинисты, включенные в группу восхождения, должны возвратиться в начальную точку, израсходовав все ресурсы.

Постановка задачи

Написать программу, которая выполняет следующее:

1. Вводит с клавиатуры число дней N, требуемое для достижения вершины горы, число P членов клуба и числа S(i), C(i) для всех i от 1 до P.

Все входные данные целочисленные, вещественные данные вводиться не будут. Повторить запрос на ввод данных, не имеющих смысла.

2. Определяет расписание для восхождения, а также номера альпинистов a(1), a(2), ... a(k), образующих группу для восхождения, и числа M(j) (для всех j от 1 до k), которые обозначают количество единиц ресурсов, взятых каждым альпинистом на старте.

Сообщает, если нельзя составить такого расписания для заданных N, S(i) и C(i).

3. Выводит следующую информацию на экран:

а) число k альпинистов, участвующих в восхождении (размер группы восхождения);

б) необходимое для этого общее количество единиц ресурсов;

в) номера участвующих в восхождении альпинистов a(1), a(2), ..., a(k).

г) для каждого a(j) — какое количество единиц ресурсов он возьмет с собой со старта;

д) для каждого a(j) — количество дней, через которое он начнет спускаться.

4. Найденное расписание должно быть близким к оптимальному. Расписание является оптимальным, если:

а) число участвующих в восхождении альпинистов, необходимое для достижения вершины одним из них, минимально;

б) среди всех расписаний для групп, удовлетворяющих условию а), общее количество единиц ресурсов, взятых с собой со старта, минимальное.

Технические ограничения

1. Поместите вашу результирующую программу в текстовый ASCII файл с именем «C:\IOI\DAY—2\422—PROG.xxx». Расширение .xxx для PASCAL — .PAS, для C — .C, для BASIC — .BAS, для LOGO — .LOG.

2. Программа не должна воспринимать входные данные, если N<1 или N>100, а также P<1 или P>20.

П р и м е р:

Возможен следующий диалог с вашей программой:

Число дней, необходимое для достижения вершины — 4
Число альпинистов в клубе — 5
Максимальный ресурс для альпиниста 1 — 7

Ежедневный расход ресурса для альпиниста 1 — 1
Максимальный ресурс для альпиниста 2 — 8
Ежедневный расход ресурсов для альпиниста 2 — 2
Максимальный ресурс для альпиниста 3 — 12
Ежедневный расход ресурса для альпиниста 3 — 2
Максимальный ресурс для альпиниста 4 — 15
Ежедневный расход ресурса для альпиниста 4 — 3
Максимальный ресурс для альпиниста 5 — 7
Ежедневный расход ресурса для альпиниста 5 — 1
2 альпиниста требуется для покорения вершины.
10 единиц ресурса в целом для этого необходимо.
Взбираться будут альпинисты 1, 5.
Альпинист 1 возьмет 7 единиц ресурса и начнет спускаться через 4 дня.
Альпинист 5 возьмет 3 единицы ресурса и начнет спускаться через 1 день.
Хотите спланировать восхождение для другого альпинистского клуба? (Y/N)—↓.
Число дней, необходимое для достижения вершины — 2
Число альпинистов в клубе — 1
Максимальный ресурс для альпиниста 1 — 3
Ежедневный расход ресурса для альпиниста 1 — 1
Восхождение невозможно.
Хотите спланировать восхождение для другого альпинистского клуба (Y/N) — N.
До свидания.

На время олимпиады за каждым участником был закреплен персональный компьютер IBM PC AT (286). Все компьютеры были объединены локальной сетью. Для решения предложенных задач допускалось использование только одной из установленных на компьютере систем программирования: Turbo Pascal v. 5.5 и v. 6.0, Borland C++ v. 2.0 и Microsoft C v. 5, Quick C, Quick Basic v. 4.5 и GWBasic, LCN Logo v. 2.

Большинство участников олимпиады из предложенных систем программирования выбрало Turbo Pascal, причем 69 использовали версию 6.0 и 42 — версию 5.5. В среде программирования C++ работало 14 человек. Одиннадцать олимпийцев использовали Quick Basic. На долю остальных систем пришлось небольшое количество участников.

На рассмотрение международного жюри и координационного комитета все программы представлялись участниками в исполняемом виде. Правильность их работы оценивалась по тестам с учетом спецификаций ввода—вывода, приведенных в условиях задач. Критерии оценки также содержались в условиях задач, и проверка осуществлялась в строгом соответствии с ними. В таблицах 1, 2 представлена разбалловка по каждой задаче.

Задачи обоих туров оказались для ребят примерно одинаковыми по сложности, хотя задача второго тура содержала несколько более сложных моментов. Об этом говорят и результаты олимпиады. Многие участники выполнили задания обоих туров полностью, набрав максимальное количество баллов.

В итоге двенадцать олимпийцев получили по 200 баллов. Международное жюри долго совещалось, как распределить призы между ними, так как главных призов, компьютеров различного типа (в том числе блокнотных), оказалось меньше этого числа. В результате было принято решение определить счастливых обладателей дорогих призов путем жребия. Кроме того, все они получили золотые медали. Среди них — трое школьников из Китая, по два школьника из США и Таиланда, и по одному из Венгрии, Вьетнама, Чехо-Словакии, Швеции и Южной Кореи. Участника из Швеции, набравшего 198 баллов, также было решено наградить золотой медалью.

Таблица 1

Оцениваемое решение	Баллы
1. Чтение блока информации из входного файла и отображение его на экране	5
2. Обработка всех информационных блоков один за другим, пока входной файл не будет считан полностью	10
3. Восстановление одной карты для каждого блока информации (если решение существует) и отображение его на экране)	35
4. Запись карты решения в выходной файл	5
5. Восстановление всех возможных карт (если существует несколько решений) и отображение их на экране	20
6. Запись корректно разделенных карт решений в выходной файл	10
7. Идентификация блоков информации, для которых решения не существует	5
8. Выполнение всех технических требований	10

Таблица 2

Оцениваемое решение	Баллы
1. Организация диалога с пользователем как указано в условии	10
2. Найдено решение для частного случая, когда все $C(i)=1$ и все $S(i)$ равны между собой	20
3. Найдено правильное решение для общего случая	20
4. Найдено наиболее близкое к оптимальному решение для общего случая	30
5. Определены ситуации, которые не имеют решения	10
6. Выполнены все технические ограничения	10

Серебряные медали получили все, кто набрал 175—195 баллов. В их числе оказались: *Дмитрий Жуков* (187 баллов) из команды России, *Алексей Скворцов* (186 баллов) с Украины, *Гиртс Карнитис* (185 баллов) из Латвии и *Владимир Белый* (185 баллов) из Беларуси.

Бронзовыми медалями были награждены школьники, получившие 123—172 балла. Наибольшее количество бронзовых медалей — по три — в копилке команд России, Германии, Украины и Литвы. Их получили *Сергей Иоффе* (170 баллов), *Евгений Кузнецов* (165 баллов) и *Дмитрий Давыдок* (131 балл) из команды России, *Павел Матлаш* (158 баллов), *Денис Филипенко* (155 баллов) и *Виталий Бондаренко* (124 балла) из команды Украины, *Гидриус Мейнориус* (170 баллов), *Валдас Амбразиунас* (160 баллов) и *Мариус Алабурда* (140 баллов) из команды Литвы. Из стран ближнего зарубежья бронзовыми медалями награждены также *Сергей Гафуров* (150 баллов) из Беларуси, *Андрис Галванс* (139 баллов) из Латвии и *Петер Лауд* (125 баллов) из Эстонии.

Наилучших результатов на этой олимпиаде, как и ожидалось, добились школьники из Китая. Они получили три золотые и одну серебряную медали, набрав в общей сложности 785 баллов. За ними идут команды Таиланда (743 балла), Швеции (731 балл) и Южной Кореи (728 баллов).

Увеличение числа участников существенно обострило борьбу за призовые места. Отрадным является тот факт, что несмотря на существующие трудности команда России подтвердила свой высокий авторитет. По числу завоеванных медалей наша команда заняла шестое место (652 балла), совсем немного проиграв хозяевам олимпиады, объединенной команде Германии (671 балл) и опередив очень сильные команды Чехо-Словакии, США, Болгарии, Аргентины, Польши, Румынии, Великобритании.

Нашим ребятам немного не хватило, чтобы получить золотые медали. Как и в прошлые годы, при высоком уровне теоретической подготовки сказалось отсутствие устойчивых навыков в технике программирования. Конечно, можно говорить об отсутствии опыта международных соревнований и излишнем волнении ребят. Однако допущенных небольших технических погрешностей могло бы и не быть, если бы наши участники имели большую практику программирования. К сожалению, кратковременных сборов здесь явно недостаточно. Да и невозможно в течение нескольких недель сделать требуемые навыки «автоматическими». Для этого необходимо длительное время и интенсивная работа за компьютером под руководством опытных наставников. Только постоянная работа с одаренными школьниками может принести более высокие результаты, и к этому нужно стремиться.

Интересно отметить также результаты соревнования команд из бывших советских республик: Беларуси, Латвии, Литвы, России, Украины и Эстонии. Первое место здесь заняла команда России. Сильная команда Украины уступила команде России 31 балл. Вслед за ними идут команды Литвы и Беларуси. Если бы названные государства, как прежде, выступали единой командой, то, набрав 742 балла, эта команда заняла бы третье место вслед за Китаем и Таиландом, и в ее копилке было бы четыре серебряные медали, как в прошлом году.

Быстро пролетели дни МОИ—92. Помимо соревнований участники имели возможность увидеть достопримечательности Германии, познакомиться с новейшими разработками в области информатики и компьютерной техники и встретиться с ведущими специалистами в этой области. В холле олимпийской гостиницы была представлена интересная экспозиция фирмы Сименс Никсдорф, являвшейся спонсором МОИ—92 и много сделавшей для успешного проведения этих соревнований. Запомнились встречи с представителями различных компьютерных фирм в издательстве «Шпрингер—Верлаг» в Гейдельберге и посещение телецентра в Кельне. Особый интерес вызвала лекция доктора Н. Тельманн, посвященная синтезу компьютерных фильмов на основе трехмерного представления актеров, по окончании которой был показан один из таких фильмов, а все участники получили в подарок аналогичного содержания книгу с автографами авторов.

Закрытие МОИ—92 состоялось также в резиденции фирмы GMD. Победители получили завоеванные ими в трудной борьбе призы и медали. Побежденным на память были вручены подарки. И несмотря на то, что большая часть участников осталась без медалей, тем не менее улыбка не сходила с лица как тех, так и других. Как правильно заметил в своем выступлении федеральный министр образования и науки Германии профессор Р. Ортлеб, «МОИ—92 — это всего лишь одно соревнование, хотя и трудное, а в жизни таких соревнований будет много, и победит в них тот, кто сумеет правильно распределить свои силы и научиться преодолевать возникающие при этом трудности.»

Следующая международная олимпиада по информатике состоится в Аргентине в октябре 1993 года. Международный комитет в основном сохранил правила проведения соревнования в будущем году. Изменения коснулись лишь рабочих систем программирования, в качестве которых утверждены Turbo Pascal v. 6.0, Borland C++ v. 2.0, а также Quick Basic или GWBasic.

Как показал опыт МОИ—92, чтобы достичь успехов в таких соревнованиях, необходимо одинаково хорошо владеть техникой программирования и методами решения нестандартных задач, какими являются олимпиадные задачи. Хочется надеяться, что следующее поколение олимпийцев сумеет учесть опыт своих предшественников и будет достойно представлять нашу страну в Аргентине.

Информация

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся средних школ, расположенных на территории России, в 9, 10 и 11 классы на 1993/94 учебный год.

Цель школы — помочь учащимся, интересующимся физикой и математикой, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам. При приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности, рабочих поселках и небольших городах, где такая помощь особенно необходима.

Обучение в школе *бесплатное*.

Кроме отдельных учащихся, в ЗФТШ принимаются физико-технические кружки и факультативы, которые могут быть организованы в любой общеобразовательной школе (лицее, гимназии) двумя преподавателями — физики и математики.

Руководители кружков или факультативов набирают и зачисляют в них учащихся (не менее 8—10 человек), успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Группа принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии, имена, отчества ее руководителей и поименный список учащихся (с указанием класса в 1993/94 учебном году и итоговых оценок за вступительное задание по физике и математике). Все эти материалы и конверт для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом на имя одного из руководителей следует выслать до 25 мая 1993 года по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, ЗФТШ, с указанием «Кружок» или «Факультатив» (тетради с работами учащихся в ЗФТШ не высылаются). Работа руководителей заочных физико - технических кружков и факультативов может оплачиваться школой по представлению ЗФТШ при МФТИ как факультативные занятия.

Учащиеся ЗФТШ, руководители физико-технических кружков и факультативов будут получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ (6—7 заданий по каждому предмету в течение учебного года), а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по соответствующей теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Задания ЗФТШ составляют преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ. Эти задания рассчитаны на любознательных, желающих учиться школьников, которые хотят выработать навыки систематической, продуктивной, самостоятельной работы. Работы учащихся-заочников проверяют аспиранты и студенты МФТИ, СПбГУ и КрГУ (часто — выпускники ЗФТШ). Работы членов физико-технических кружков или факультативов оценивают их руководители.

С учащимися Москвы проводятся занятия по физике и математике два раза в неделю по программе ЗФТШ в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ), набор в которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам собеседования по физике и математике. Справки по телефону: 408-51-45.

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу сделайте на русском языке и аккуратно перепишите в одну школьную тетрадь. Порядок задач сохраните тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно пришлите справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. На лицевую сторону обложки наклейте лист бумаги, заполненный четко, желательно печатными буквами, по образцу:

1. Область (край или республика)	Оренбургская обл.
2. Фамилия, имя, отчество	Смирнов Сергей Николаевич
3. Класс, в котором Вы учитесь	девятый
4. Номер, адрес и телефон школы (обычная, спецшкола, спецкласс, с каким уклоном)	№ 17, ул. Пушкина, 50, г. *Новотроицк, тел.:* 2-30-18, обычная
5. Фамилия, имя, отчество Вашего преподавателя	
по физике	Макарова Ольга Васильевна
по математике	Ильина Галина Анатольевна
6. Место работы и должность родителей:	
отец	п/о *«Стрела»*, электрик
мать	д/с «Ромашка», воспитатель
7. Подробный домашний адрес	462359, г. Новотроицк Оренбургской обл., ул. Комарова, д. 7, кв. 11, тел.: 4-52-64
8. Ваши любимые учебные предметы и увлечения	
9. Цель поступления в ЗФТШ при МФТИ	

Внизу под заполненной анкетой начертите таблицу для оценок за вступительное задание:

№ п/п									
Ф.									
М.									

Для получения ответа на вступительное задание обязательно вложите в тетрадь конверт с написанным на нем Вашим адресом.

Срок отправления решения — *не позднее 1 марта 1993 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1993 года.

Тетрадь с выполненным заданием (обязательно и по физике, и по математике) присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининградской, Кировской, Костромской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской, Пермской, Тверской, Ярославской областей, Карелии, Удмуртии и Коми высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, СПбГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Кемеровской, Камчатской, Магаданской, Новосибирской, Омской, Сахалинской, Томской, Тюменской, Читинской областей, Алтайского, Красноярского, Приморского, Хабаровского краев, Бурятии, Тувы и Якутии высылают работы по адресу: 660062, г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79, Госуниверситет, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Для учащихся Украины работает Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Желающим поступить следует присылать работы по адресу: 252680, г. Киев, пр. Вернадского, д. 36, Институт металлофизики, Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Телефон: 444-95-24.

Ниже приводится вступительное задание по физике и математике. В задании по физике задачи 1—7 предназначены для учащихся восьмых классов, 4—10 — для девятых классов, 8—14 — для десятых классов. В задании по математике задачи 1—6 предназначены для учащихся восьмых классов, 4—9 — для девятых классов, 6—12 — для десятых классов. Номера классов указаны для текущего, т. е. 1992/93 учебного года.

Вступительное задание

Физика

1. Бегун, стартовавший на дистанцию длиной $L=5$ км, первый километр пробежал за время $t_0=200$ с, а каждый следующий километр он пробегал на t секунд дольше. Определите t, если известно, что средняя скорость бегуна оказалась такой, как если бы он каждый километр пробегал за $t_1=202$ с.

2. Машины едут на спуске колонной длиной L с одной и той же скоростью v. В начале подъема скорость каждой машины уменьшается на треть. Какова будет длина колонны, когда все машины окажутся на подъеме?

3. Деревянная доска плавает в воде таким образом, что под водой находится 3/4 ее объема. Какой минимальной величины груз нужно закрепить сверху на доске, чтобы она полностью погрузилась в воду?

4. В сообщающиеся сосуды, диаметры которых d_1 и d_2, налита жидкость плотностью ρ. В один сосуд опускают тело массой m, которое плавает в жидкости. Как и на сколько изменится уровень жидкости в сосудах?

5. В теплоизолированном сосуде находится $m_л=1$ кг льда при температуре $t_л=0$ °С. В сосуд вливают кипяток, имеющий температуру $t_к=100$ °С. Определите массу кипятка, если известно, что в сосуде установилась температура $t=20$ °С. Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг·°С), удельная теплота плавления льда $\lambda=335$ кДж/кг.

6. В холодильную камеру поставили сосуд с водой объемом $V=1$ л при температуре $t_1=80$ °С. Через $\tau=2$ ч температура воды понизилась до $t_2=10$ °С. Через какое время это количество воды превратится в лед при температуре $t_3=-5$ °С? Удельная теплоемкость воды $c_в=4{,}2$ кДж/(кг·°С), льда $c_л=2{,}1$ кДж/(кг·°С), удельная теплота плавления льда $\lambda=335$ кДж/кг. Теплоемкостью сосуда можно пренебречь. Мощность холодильной установки считайте постоянной.

7 (экспериментальная). Определите (приближенно) Ваш вес, не пользуясь медицинскими или иными весами. Опишите метод измерения, которым Вы пользовались, и полученные результаты.

8. При параллельном включении в сеть с напряжением U_1 двух нагревателей на них выделяются мощности P_1 и P_2. Какая мощность будет выделяться на каждом из нагревателей, если их включить последовательно в сеть с напряжением U_2? Считайте, что сопротивление нагревателей не зависит от температуры.

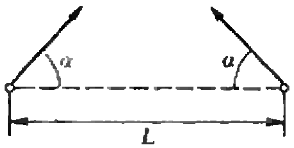
9. Два кубика, массы которых m_1 и m_2, покоятся на горизонтальной шероховатой поверхности. Коэффициенты трения скольжения кубиков о поверхность μ_1 и μ_2 соответственно. Кубикам сообщается одна и та же по величине горизонтальная скорость v_0 так, что они начинают двигаться навстречу друг другу. При каком минимальном значении v_0 кубики столкнутся? Начальное расстояние между кубиками L.

10. Покоящийся атом распадается на две части, отношение кинетических энергий которых равно β. Определите отношение масс этих частей.

11. В цилиндрическом сосуде, разделенном легкоподвижным поршнем на две части, объемы которых $V_1=100$ см^3 и $V_2=200$ см^3, находится газ при температуре $T=300$ К и давлении $p=1013$ гПа. Какое установится давление в сосуде, если газ в меньшем объеме охладить до $T_1=273$ К, а в большем нагреть до $T_2=373$ К?

12. Некоторое количество газа нагревается от температуры $T_1=300$ К до $T_2=400$ К. При этом объем газа изменяется пропорционально температуре. Начальный объем газа $V_1=3$ л. Давление, измеренное в конце процесса, оказалось равным $p_2=1$ атм. Какую работу совершил газ в этом процессе?

13. В цилиндре под невесомым поршнем находится $m_1=1$ кг воды при температуре $t_1=0$ °С. В воду помещают кусок железа массой $m_2=1$ кг, нагретый до температуры $t_2=1100$ °С. На какую высоту поднимется пор-



шень? Атмосферное давление $p_0=10^5$ Па, удельная теплоемкость железа $c_ж=500$ Дж/(кг·К), площадь сечения поршня $S=1000$ см^2. Теплоемкостью цилиндра и теплоотдачей можно пренебречь.

14. Векторы начальных скоростей двух электронов лежат в одной плоскости и образуют углы α с соединяющей их прямой (см. рисунок). На какое минимальное расстояние сблизятся электроны, если их начальные скорости по модулю одинаковы, а расстояние между ними равно L?

Математика

1. Верно ли неравенство

$$\sqrt{1991}+\sqrt{1993}\leqslant 2\sqrt{1992}?$$

Обоснуйте ваш ответ.

2. Дана трапеция $ABCD$. Точка M лежит на основании BC, а точка N — на боковой стороне CD. Отрезки AM и BN делятся точкой пересечения в отношении 3:1 и 2:1. Чему равно отношение $CN:CD$?

3. Учащийся получал стипендию в размере 200 рублей. После двух последовательных одинаковых процентных повышений она составила 233 рубля 28 копеек. Определите, на сколько процентов повышалась стипендия.

4. На координатной плоскости задан четырехугольник с вершинами в точках (0; 6), (8; 12), (11; 8) и (3; 2). Вычислите площади фигур, на которые его разбивает прямая $x+7y-67=0$.

5. Докажите, что число $n^3-6n^2+12n+117$ является составным.

6. Поезд был задержан в пути на 12 минут, а затем на расстоянии 60 км наверстал потерянное время, увеличив скорость на 15 км/ч. Найдите первоначальную скорость поезда.

7. Длины сторон треугольника равны 6 и 8, а две его медианы пересекаются под прямым углом. Найдите длину третьей стороны треугольника.

8. Четвертый член арифметической прогрессии равен 4. При каком значении разности этой прогрессии сумма попарных произведений ее первых трех членов будет наименьшей?

9. Решите уравнение

$$x+\sqrt{x^2(1+x\sqrt{x^2-4x+4})}=x^2.$$

10. Найдите абсциссы точек графика функции

$$y=5(2\cos 6x+3\sin 4x)+6\cos 10x-56x,$$

в которых касательная к нему образует с положительным направлением оси угол, равный $\operatorname{arctg} 4$.

11. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 8. Точка K является серединой ребра AA_1. Точка L лежит на ребре BB_1, а точка M — на ребре BC, причем $LB_1=7\ BL$ и $MC=3\ BM$. Найдите площадь сечения куба плоскостью KLM.

12. На координатной плоскости в момент времени $t=0$ начинают движение две точки, одна по оси Ox, вторая — по оси Oy. Первая точка движется по закону $x(t)=t-2$, вторая — $y(t)=\sqrt{2t^4-4t^3+t^2+4t}$. Найдите максимальное и минимальное расстояние между точками за время $t\in[0;\ 2]$.

Заочная аэрокосмическая школа

Заочная аэрокосмическая школа (ЗАКШ), организованная Всероссийским молодежным аэрокосмическим обществом (ВАКО) «Союз» и Московским физико-техническим институтом (МФТИ), проводит конкурсный набор учащихся в 10 и 11 классы на 1993/94 учебный год.

Пособия ЗАКШ подготовлены сотрудниками и аспирантами МФТИ и призваны помочь всем, кто собирается поступать в вузы, особенно аэрокосмического профиля. Программа школы охватывает следующие разделы науки и техники: движение космических аппаратов, ракетная техника, движение в атмосфере, исследования Земли из космоса, исследования космоса, перспективная космонавтика.

В течение года учащиеся ЗАКШ получают шесть заданий школы, включающих теоретический материал, список литературы для дальнейшего знакомства с направлениями аэрокосмической физики и задачи для самостоятельного решения, а также «Космическую хронику ЗАКШ», состоящую из дневника наиболее значительных событий в космонавтике текущего года и информационных материалов по истории и современному состоянию космических исследований.

Полный курс обучения в ЗАКШ — 2 года. Учащиеся, поступающие в 11 класс, имеют возможность окончить школу по ускоренной программе. В конце обучения выпускники получат варианты вступительных экзаменов в МФТИ и рекламный проспект с правилами приема в институт. Ученикам, успешно окончившим курс обучения, будет выдан диплом ЗАКШ.

Конкурсный набор в школу проводится с целью зачисления учащихся на бесплатную форму обучения. Не прошедшие по конкурсу могут быть зачислены на платную форму — все необходимые сведения по этому вопросу будут сообщены при условии получения приемной комиссией решения вступительного задания.

Вступительное задание для участия в конкурсе необходимо выполнить на русском языке и оформить в отдельной школьной тетради — по одной задаче на листе, с сохранением порядка задач в задании. На обложку тетради наклейте белый лист, оформленный следующим образом:

1. Фамилия, имя, отчество
2. Подробный домашний адрес (с индексом)
3. Номер школы и класс, в котором Вы учитесь
4. Любые дополнительные сведения о себе

Для получения решения приемной комиссии вложите в тетрадь конверт с вашим домашним адресом.

Тетрадь с выполненным заданием вышлите не позднее 25 марта 1993 года простой бандеролью по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, факультет аэрофизики и космических исследований, «Школа».

Вступительное задание обратно не высылается. Решение приемной комиссии будет сообщено в июне 1993 года.

Ниже приводятся условия задач вступительного задания в ЗАКШ. Задачи 1—6 предназначены поступающим в 10 класс, задачи 3—8 — в 11 класс. Для участия в конкурсе не обязательно решать все предлагаемые задачи.

Вступительное задание

1. Небольшой шарик из пенопласта погрузили в воду на глубину h и отпустили. На какую высоту над водой он подпрыгнет? Силы трения и поверхностного натяжения не учитывайте.

2. Два одинаковых шара массой m каждый покоятся, касаясь друг друга. Третий шар массой $M=2m$ двигается по прямой, проходящей через точку касания первых двух шаров перпендикулярно к линии, соединяющей их центры, и налетает на них со скоростью v_0. С какой скоростью будет двигаться налетавший шар после столкновения? Удар считайте упругим, радиусы всех шаров — одинаковыми.

3. Человек, стоящий на Земле, согнув колени опускает свой центр тяжести на $l=50$ см, а затем прыгает вертикально вверх, поднимая центр тяжести на $h=60$ см выше естественного уровня. На какую высоту можно подпрыгнуть таким образом на Луне? Радиус Луны $R_Л=0{,}27\ R_З$, а ее плотность $\varrho_Л=0{,}6\ \varrho_З$, где $R_З$ и $\varrho_З$ — радиус и плотность Земли.

4. На двух вращающихся навстречу друг другу цилиндрах горизонтально лежит однородная доска массой M. Коэффициент трения между цилиндрами и доской μ, расстояние между цилиндрами L. Найдите период колебаний доски в горизонтальной плоскости.

5. Однородная медная проволока длиной $l=1{,}4$ м имеет радиус $r=1$ мм. На какие два отрезка нужно разрезать эту проволоку, чтобы, соединив их параллельно, получить сопротивление $R=1/700$ Ом? Удельное сопротивление меди $\rho=1{,}8\cdot10^{-8}$ Ом·м.

6. На кусок льда массой $M=100$ г, находящийся в калориметре при температуре $t_0=-2$ °С, положили железный шарик массой $m=50$ г, разогретый до температуры $t_1=800$ °С. Найдите температуру, которая установится в калориметре. Удельная теплоемкость железа $c_ж=450$ Дж/(кг·°С), льда — $c_л=2100$ Дж/(кг·°С).

7. Определите плотность смеси, состоящей из водорода и кислорода, при температуре $t=7$ °С и давлении $p=9{,}3\cdot10^4$ Па. Масса водорода в смеси $m_в=0{,}5$ г, кислорода $m_к=32$ г.

8. Для исследования верхних слоев атмосферы Венеры в проекте «Вега» использовался аэростатный зонд. Определите объем зонда, если давление на исследуемых высотах $p\approx50000$ Па, а температура $t\approx10$ °С. Можно считать, что атмосфера целиком состоит из двуокиси углерода CO_2, а зонд заполнен гелием. Масса зонда $m=20$ кг.

Новый прием в СУНЦ МГУ и НГУ

Московский и Новосибирский государственные университеты объявляют набор учащихся в специализированные учебно-научные центры МГУ и НГУ, созданные на базе школ-интернатов при этих университетах. Первый тур вступительных экзаменов — заочный письменный вступительный экзамен по математике и физике для учащихся 9 и 10 классов 11-летней школы, интересующихся математикой и физикой. Успешно выдержавшие заочный экзамен по решению приемной комиссии будут в апреле — мае приглашены в областные центры Российской Федерации (РФ) на устные экзамены.

Работа должна быть выполнена в обычной ученической тетради. На первой странице укажите свои анкетные данные:

1. Фамилия, имя, отчество (полностью)
2. Домашний адрес (подробный), индекс
3. Подробное название школы, класс.

Работы отправляйте простыми бандеролями (обязательно вложите в работу конверт с вашим домашним адресом). Если вы проживаете в Европейской части РФ или в Беларуси, высылайте вашу работу по адресу: *121357, Москва, Кременчугская ул., 11, СУНЦ МГУ, Приемная комиссия*. Внимание: с 1992 г. в учебный центр МГУ без предоставления общежития принимаются жители г. Москвы.

Если вы живете на Дальнем Востоке или в Средней Азии, пишите по адресу: *630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 6, учебно-научный центр НГУ, Олимпиадный комитет*.

Срок отправки работ — не позднее 14 февраля 1993 года (по почтовому штемпелю). Работы, высланные позже этого срока, рассматриваться не будут.

Если вы не сможете решить все задачи, не отчаивайтесь — комиссия рассмотрит работы с любым числом решенных задач. Желаем успеха!

Вступительное задание

9 класс

1. Найдите натуральные числа a, b, c, d такие, что $a+b+c+d=30$, $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$, а произведение $abcd$ наибольшее из возможных.

2. Решите систему уравнений

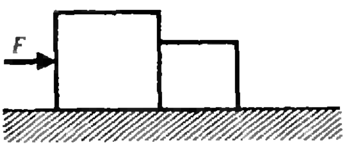
$$\begin{cases} x^2+xy+y^2+3x+3y=0, \\ x^2y-xy^2+x^2-y^2=9. \end{cases}$$

3. В неравнобедренном треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Известно, что около четырехугольника A_1CB_1O можно описать окружность радиусом R. Найдите A_1B_1.

4. а) Докажите, что сумма квадратов никаких десяти последовательных натуральных чисел не является полным квадратом.

б) Найдите 11 последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых — полный квадрат.

5. Два тела, массы которых $m_1=3$ кг и $m_2=2$ кг, движутся по гладкой горизонтальной плоскости под действием силы $F=10$ Н, приложенной к первому телу (см. рисунок). Найдите сумму сил, действующих на второе тело.



6. Камень брошен с поверхности земли под углом $\alpha=\pi/6$ к горизонту. В наивысшей точке траектории кинетическая энергия камня равна $E_k=30$ Дж. Найдите значение потенциальной энергии в этой же точке.

7. По идеально гладкой горизонтальной плоскости движутся навстречу друг другу два шара с одинаковыми по величине скоростями v. В результате абсолютно упругого центрального удара один из шаров останавливается. Найдите скорость второго шара после соударения.

8. Когда в цилиндрический сосуд с водой опустили кусок пенопласта массой $m_1=1$ кг, уровень воды повысился на h. На какую величину возрастет уровень воды, если под действием груза массой $m_2=5$ кг пенопласт полностью погрузится в воду?

10 класс

1. Решите уравнение

$$(x^2-x-1)^3+(x^2-3x+2)^3=(2x^2-4x+1)^3.$$

2. Медианы BM и CN треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что в четырехугольник $ANOM$ можно вписать окружность. Найдите AC, если $BC=a$, $BM=m$.

3. При каких значениях a наименьшее значение функции $y=x^2+ax-a-2$ на отрезке $[1; 3]$ равно -4?

4. См. задачу 4 для 9 класса.

5. В сосуде объемом $V=100$ дм^3 при температуре $t=30$ °С находится воздух с относительной влажностью $\varphi=40$ %. В сосуд вводят

$m=10$ г воды. Какой станет теперь относительная влажность воздуха, если давление насыщенного пара при 30 °С равно $p_н=4{,}24$ кПа?

6. Поверхностная плотность зарядов параллельных плоскостей, расположенных на расстоянии d друг от друга, одинакова и равна σ. Найдите величину напряженности электрического поля снаружи и между пластинами.

7. К батарее с ЭДС $\mathscr{E}=5$ В и внутренним сопротивлением $r=1$ Ом подключают последовательно соединенные конденсаторы, емкости которых $C_1=0{,}1$ мкФ и $C_2=0{,}2$ мкФ. Какое количество теплоты выделится в батарее в процессе зарядки конденсаторов?

8. Квадратная рамка из однородного провода плотностью ρ и сечением S лежит на горизонтальной плоскости. Вектор магнитной индукции $\vec{B}$ однородного магнитного поля параллелен двум сторонам рамки. Какой силы ток должен течь по рамке, чтобы она начала поворачиваться вокруг одной из своих сторон?

Внимание! Объявляется также набор на химическое и экономическое отделения учебно-научного центра Московского государственного университета учащихся 9 классов (в анкетных данных на 1 странице работы укажите профиль обучения: физико-математический, экономический, химический). Для поступающих на химическое отделение необходимо вместо задач по физике решить задачи по химии. Поступающие на экономическое отделение решают 2 дополнительные задачи по математике.

Кроме того, при учебно-научном центре МГУ открываются заочные подготовительные курсы по подготовке в МГУ и СУНЦ МГУ (обучение планируется платным). Все желающие могут направлять свои заявки в Приемную комиссию СУНЦ МГУ (обязательно вложите конверт, заполненный на свой домашний адрес).

Вступительное задание по химии

1. В городской водозабор стекают стоки из двух цехов химического предприятия. В первом цехе на 1 т производимой продукции образуется 8 м^3 водных стоков, содержащих 1,5 г/м^3 сульфата магния. Во втором цехе на 1 т продукции образуется 16 м^3 стоков с содержанием 3,56 г/м^3 гидроксида бария. Определите оптимальное соотношение производительностей этих цехов (в тоннах продукции), при котором загрязнение воды было бы минимальным.

2. Имеется A граммов смеси бромидов стронция и бария. Предложите простейший химический способ определения содержания каждой из солей в смеси. Используйте минимальное количество реактивов. В ответе приведите уравнения реакций и схему расчета.

3. Масса колбы, заполненной смесью метана и кислорода, равна 57,5 г. Та же колба, заполненная метаном, имеет массу 57,0 г, а заполненная кислородом — 59,0 г (н. у.). Сгорит ли полностью метан при поджигании смеси электрической искрой? Ответ подтвердите расчетом и уравнениями реакций.

Дополнительные задачи по математике для поступающих на экономическое отделение

1. Используя геометрические соображения, найдите среди чисел x, y, удовлетворяющих линейным неравенствам

$$x+3y\leqslant 9, \qquad (1)$$

$$4x+3y\leqslant 18, \qquad (2)$$

$$y\leqslant 2{,}5, \qquad (3)$$

$$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0 \qquad (4)$$

такие v, w, что $5v+6w\geqslant 5x+6y$ для всех x, y, удовлетворяющих линейным неравенствам (1) — (4). Обоснуйте полученный ответ.

2. Используя геометрические соображения, найдите среди чисел x, y, удовлетворяющих уравнению $x^2+y^2-5=0$, такие числа v, w, чтобы неравенство $2v+w\leqslant 2x+y$ выполнялось для всех x, y, удовлетворяющих указанному выше уравнению. Обоснуйте полученный ответ.

Игры и головоломки

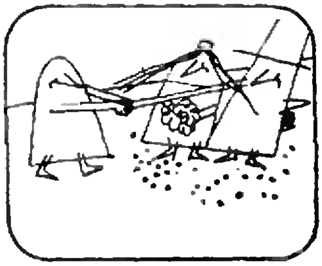
В 9 номере нашего журнала за прошлый год вы могли прочитать отрывок из книги Мартина Гарднера «Aha!» («Есть идея!», М.: Мир, 1982). Сегодня мы предлагаем вам еще одну небольшую главу из этой книги.

In vino veritas

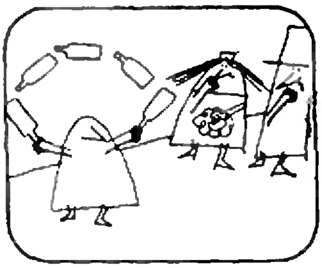
М. ГАРДНЕР

В последний день каникул Боб и Элен сообщили дядюшке Генри, что решили пожениться.

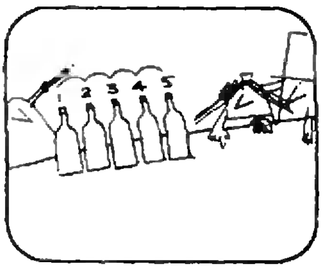
Дядюшка Генри. Рад за вас, мои милые. Нужно отметить этот знаменательный день!



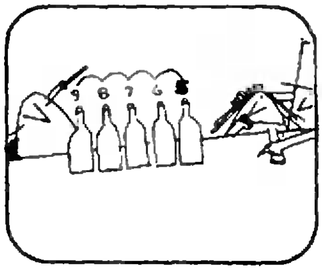
Дядюшка Генри достал из погреба 5 бутылок вина, припасенных для торжественного случая, но тут возникло непредвиденное затруднение: трое обитателей хижины никак не могли прийти к единому мнению относительно того, какую бутылку откупорить первой.



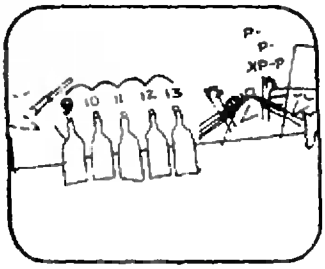
Дядюшка Генри. Постойте, я знаю, как решить спор! Выстроим все бутылки в ряд и пересчитаем их по разработанной мной системе. Вот как это делается: раз, два, три, четыре, пять...



Дядюшка Генри. ...шесть, семь, восемь, девять...



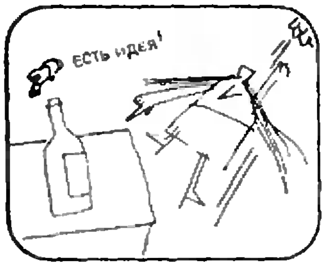
Дядюшка Генри. ...десять, одиннадцать, двенадцать, тринадцать... Понятно?



Боб. Понятно-то понятно, но сколько вы еще собираетесь считать?

Дядюшка Генри. Как вы помните, в 1976 году мы праздновали 200-летие независимости. Вот я и досчитаю до 1976.

Элен (со стоном). Милый дядюшка, на это у вас уйдет еще 200 лет. Впрочем, минутку... Есть идея! Считать по бутылкам совсем не обязательно! Я могу вам сразу сказать, на какой бутылке окончится счет.



Элен. Число 1976 придется на вторую бутылку.

Дядюшка Генри не поверил Элен и упрямо продолжал пересчитывать бутылки. Через 15 минут он досчитал до 1976 и убедился, что счет, как и предсказывала Элен, окончился на второй бутылке.

Дядюшка Генри. Как это тебе удалось, Элен? Не могли бы и вы предложить способ, позволяющий безошибочно определить, на какой бутылке закончится счет, независимо от того, до какого числа мы будем считать?

Элен догадалась, что утомительного счета на бутылках от 1 до 1976 можно избежать, если воспользоваться так называемой арифметикой вычетов, или теорией сравнений. Два числа a и b называются сравнимыми по модулю c, если при делении на c они дают одинаковые остатки. Число c называется модулем сравнения, а остаток от деления любого числа на c — вычетом этого числа по модулю c.

Обычные часы могут служить прекрасным примером конечной арифметики вычетов по модулю 12, содержащей 12 чисел. Действительно, вычет числа 12 по модулю 12 равен 0 (т. е. число 12 сравнимо с нулем по модулю 12). Предположим, что на ваших часах сейчас 12 часов. Сколько будет на ваших часах через 100 часов? Разделив 100 на 12, вы узнаете, что остаток от деления равен 4 (число 100 сравнимо с числом 4 по модулю 12). Значит, через 100 часов на ваших часах будет 4 часа.

Теперь вам ясно, что «метод дядюшки Генри» эквивалентен арифметике вычетов? Единственное отличие состоит в том, что каждая из 3 бутылок, стоящих в середине, соответствует двум числам, поскольку эти бутылки приходится считать и слева направо, и справа налево. Счет 8 приходится на вторую бутылку, после чего весь цикл повторяется. Следовательно, метод дядюшки Генри эквивалентен арифметике вычетов по модулю 8.

Элен оставалось лишь найти вычет числа 1976 по модулю 8, т. е. разделить 1976 на 8 и найти остаток. Проделав вычисления, Элен получила остаток 0. В арифметике вычетов по модулю 8 число 8 имеет нулевой вычет. Следовательно, счет до 1976 должен окончиться на второй бутылке.

Предположим, что вам захотелось узнать, на какой бутылке кончит считать дядюшка Генри, если вздумает дойти, например, до 12 345 678 987 654 321. Нужно ли для этого делить гигантское число на 8? Нет, если вы сообразите, как избежать утомительной процедуры. Так как число 1000 сравнимо с 0 по модулю 8, то необходимо делить на 8 только три последних знака — число 321. Проделав деление, вы узнаете, что интересующее вас семнадцатизначное число сравнимо с 1 по модулю 8. Следовательно, вздумай дядюшка Генри считать до этого числа, он бы закончил счет на первой бутылке.

Варьируя число бутылок, вы будете получать модели конечных арифметик вычетов по другим четным модулям. Если бутылки считать, как обычно, только слева направо, то вы получите модель конечной арифметики вычетов по любому модулю, как четному, так и нечетному.

Перевод с английского Ю. Данилова
Иллюстрации канадского графика Дж. Глена

(Начало см. на с. 47)

приходим к уравнению

$$x^2-\left(H+\frac{p_a}{\rho g}\right)x+\frac{p_0L}{\rho g}=0.$$

Отсюда

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\left(H+\frac{p_a}{\rho g}\right)\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(H+\frac{p_a}{\rho g}\right)^2-\frac{p_0L}{\rho g}}.$$

Получается, что оба корня имеют смысл, если конечно, дискриминант не отрицательный (заметим, кстати, что не при любом H решение вообще есть). И все же один из двух корней — «плохой». Почему?

На рисунке 3 (см. с. 48) представлены графики двух функций:

$$px=\text{const} \text{ и } p=p_a+\rho g(H-x).$$

Точки пересечения этих графиков — точки *1* и *2* — соответствуют положениям равновесия. Но оказывается, что их двух этих положений лишь одно является устойчивым — а именно точка *1* (проверьте это сами).

Итак, остается единственный ответ:

$$x=\frac{1}{2}\left(H+\frac{p_a}{\rho g}\right)-\sqrt{\frac{1}{4}\left(H+\frac{p_a}{\rho g}\right)^2-\frac{p_0L}{\rho g}}.$$

Упражнения

1. На концах горизонтальной трубы длиной l закреплены положительные заряды q_1 и q_2. Найдите положение равновесия положительного заряда q, помещенного в трубу.

2. Пикирующий бомбардировщик сбрасывает бомбу с высоты H, находясь на расстоянии L от цели. Скорость бомбардировщика равна v. Под каким углом к горизонту он должен пикировать?

3. Пункт A находится от пункта B на расстоянии l. Из A в B выехал автомобиль, который двигался с постоянной скоростью v. Одновременно из B в A выехал второй автомобиль с начальной скоростью v_0 и ускорением a, направленным так же, как и скорость первого автомобиля. Известно, что в пути автомобили дважды обгоняли друг друга. В каких пределах лежит скорость v?

Все наверх!

Библиотечка Фантастики «Кванта»

Б. КРУНА

«Самое странное,— часто думал он потом,— что все казалось очень просто и естественно». Он ни чуточки не испугался, не поразился, хотя и несколько удивился, увидев того человека на опушке. Вообще-то первым обнаружил незнакомца Бустер, бульдог. Залаял, подбежал и начал обнюхивать. Человек улыбнулся собаке.

— Не бойтесь,— крикнул владелец бульдога.— Собака не укусит.

Теперь человек улыбнулся уже ему.

— ... не боюсь,— заверил он.

Дул холодный ветер, под лучами мартовского солнца растаяла лишь небольшая часть снежного одеяла на опушке. Тем не менее на человеке не было ничего, кроме голубых плавок. Он сидел, прислонившись к валуну, и, казалось, наслаждался солнцем, больше всего напоминая туриста, расположившегося на солнечном берегу.

— Вам не холодно? — не удержался от вопроса хозяин собаки.

Ему самому показалось, что это прозвучало глупо, и, чтобы скрыть неловкость, он продолжил:

— Вы живете здесь поблизости? У меня небольшой домик по ту сторону холма.

— Мне не холодно,— услышал он в ответ.— И я не живу здесь поблизости.

Собака спокойно улеглась у ног незнакомца. Тот наклонился и почесал ее за ухом, но продолжал смотреть на хозяина, как бы ожидая дальнейших вопросов.

— Вы понравились Бустеру. Обычно он с подозрением относится к незнакомым. По-моему, он вообще раньше никогда так себя не вел. Может, у вас тоже есть собака?

Человек по-прежнему улыбался. Это внушало какое-то необъяснимое к нему доверие.

— Нет, у меня нет собаки. У меня есть...

Незнакомец замолчал и развел руками. Может быть, иностранец? Во всяком случае он не мог подобрать слова для обозначения своего домашнего животного.

— Кошка?

— Нет, не кошка.

Даже голос внушал доверие. Только много недель спустя он понял причину. Голос незнакомца был просто-напросто точной копией его собственного.

— Мне следовало бы представиться. Инженер Лундберг. Мы с Бустером совершали воскресную прогулку и сейчас направляемся домой. Не хотите ли составить нам компанию и перекусить?

Слова вырвались у инженера прежде, чем он успел подумать. У Лундберга не было привычки приглашать домой незнакомых, а с полуголыми мужчинами, сидящими в сугробе, следовало бы быть особенно осторожным. Но парень небось замерз, хотя и отрицает это, а то, как воспринял незнакомца Бустер, явно говорило в его пользу, так же как его улыбка и голос.

Человек встал.

— Меня зовут Сири,— сказал он.— Я хочу составить вам компанию.

Сири?

Инженер ждал, что Сири достанет свою одежду, он ведь мог, скажем, быть «моржом», поэтому и сидел в сугробе, наслаждаясь солнцем. Но Сири —Сири? — тут же подошел к нему, и инженер, удержавшись от комментариев, направился к дому.

— Простите за навязчивость, вы швед или приехали из какой-нибудь другой страны?

Лундберг не заметил в речи незнакомца ни малейшего акцента, но то, как тот искал слова, посеяло в нем сомнения. Да еще краткие ответы Сири, за которыми ни разу не последовало ни одного вопроса.

— Я не швед. Я приехал из...

Опять жест руками, но на этот раз он устремил взгляд в небо.

— Сверху?

— Сверху.

Перепечатывается из сборника «Цвет надежд зеленый» (М.: Мир, 1982). Перевод со шведского А. Афиногеновой.

Абсолютно уверенно. Без тени сомнения или попытки объяснить.

Если когда Лундберг и должен был бы испугаться и попытаться улизнуть, чтобы предупредить полицию или вызвать «скорую», так именно сейчас. Но вместо этого он разразился хохотом.

— Понимаю,— фыркнул он.— Ты, конечно, прилетел на летающем блюдце. Но как же ты научился говорить по-шведски? Заочно? Или на Марсе все говорят по-шведски?

— Я не говорю по-шведски,— поправил инженера незнакомец.— Ты говоришь. Я понимаю.

Бустер заметил белку и залаял. В следующую секунду раздался еще один лай, на этот раз он исходил от Сири. Собака тут же кинулась к нему и приглушенно заворчала. Самое смешное, что в ворчании ее слышался явный вопрос. Незнакомец ответил новым ворчанием, и этот странный разговор продолжался еще с минуту. Бустера словно околдовали. Огромный бульдог прыгал и танцевал, не отрывая от Сири взгляда, полного восхищения. Короткий лай Сири, и бульдог остановился.

— Бустер говорит,— сказал Сири.— Я понимаю. Я говорю. Бустер понимает.

Инженер Лундберг взглянул на своего гостя.

— Да, но... это невозможно,— запротестовал он.— Ты хочешь сказать, что у Бустера есть свой язык, и ты выучил его, как только услышал?

Он замолчал и попытался припомнить, что говорилось до сих пор. Сири действительно не произнес ни одного слова, которого бы сначала не употребил он сам, отметил Лундберг. А словарный запас Сири за время разговора явно расширился.

Чтобы проверить свое предположение, инженер сказал:

— Если я правильно понял, ты прибыл на космическом корабле. Это заставляет сделать ряд допущений, одинаково невероятных. Либо ты прилетел с соседней планеты, несмотря на заверения астрономов в том, что они необитаемы, либо из другой солнечной системы. Но так как скорость света превысить нельзя... я читал, что нашим самым современным ракетам понадобились бы сотни лет...

Лундберг вдруг потерял нить разговора, поразившись парадоксальности ситуации: морозным мартовским воскресным днем он обсуждал космические путешествия с совершенно незнакомым человеком в плавках. Человек хоть, слава богу, на вид безобидный. Даже симпатичный.

Сири, внимательно его слушавший, семенил рядом по узкой лесной тропинке. Он возразил:

— Ты неправильно меня понял. Я прибыл, но не на космическом корабле. И скорость света можно превысить, если у тебя есть...

И вновь жест, означавший, что у него не хватает слов.

— Ладно, как хочешь. Поговорим об этом после обеда. Вот здесь я и живу. Входи и чувствуй себя как дома...

...Сири отказался от предложенного Лундбергом обеда — жареной картошки и вареной колбасы.

В конце концов Сири удалось объяснить, почему он не ест.

Он получает энергию непосредственно из солнечного света. Поскольку этот свет должен быть профильтрован через воздушный слой, а Земля оказалась как раз на его пути, он воспользовался случаем, чтобы здесь «перекусить». Космический корабль ему не нужен. Его народ уже многие тысячелетия путешествует в космосе с помощью телепортации. На более дальние расстояния телепортация осуществляется поэтапно, но все равно происходит практически мгновенно.

— Внизу, на поверхности планеты, конечно, другое дело,— уточнил он.— Там мы вынуждены использовать машины, если очень спешим.

— Автомобили?

В первый раз с момента их встречи Сири, казалось, не понял вопроса. Его хозяин достал газету и словарь и показал ему изображение автомобилей и двигателей внутреннего сгорания.

— Но это же неразумно,— прокомментировал Сири.— Подумать только, какими примитивными методами вы пользуетесь. Судя по всему остальному, что я у тебя видел, мне казалось, что вы достигли гораздо большего. Ты хочешь сказать, что вы используете нефть, чтобы привести в движение эти чудовища? Разве они не загрязняют воздух?

— Еще как,— мрачно кивнул инженер Лундберг.— Но что же нам делать, если нет другого выхода?

— Выход есть. Машина, которой пользуемся мы и которая есть почти на всех цивилизованных планетах, намного лучше. Хочешь узнать, как она работает?

— Ты и мысли читать умеешь?

Сири улыбнулся.

— Нет, не умею. Наша способность инстинктивно понимать чужие языки врожденная, как и наш способ перемещения на другие небесные тела. Но это во всяком случае не телепатия. Не знаю даже, можно ли этому научить. Если бы у меня было побольше времени...

Эта реплика Сири вызвала беспокойный вопрос со стороны Лундберга.

— Я надеюсь, ты не собираешься сейчас уходить? Мне нужно задать тебе миллион вопросов.

— Понимаю. Но не успею тебе больше ничего рассказать. Мне надо попасть на собрание, я и так задержался здесь слишком долго.

Подняв руку, Сири приостановил поток протестов.

— Знаешь что,— сказал он,— дай-ка мне бумагу и карандаш. Пожалуй, я успею сделать чертеж нашей машины. Если тебе этот чертеж покажется слишком сложным, у вас наверняка найдутся ученые, которые помогут тебе разобраться в конструкции.

Лундберг вытащил из ящика стола письменные принадлежности. Поискал в кармане сигареты, вспомнил, что оставил их на столе в кухне, и вышел.

Пока он чиркал спичкой о коробок, он услышал, как хлопнула входная дверь. Гость ушел, но на столе остался лист бумаги. Лундберг, дрожа от нетерпения, склонился над ним.

На бумаге был тщательно нарисован велосипед.

Эх, не очень-то здорово получилось. Столько слов, а результат ничтожный. Меня начинает брать сомнение, правду ли говорил Сири. Я имею в виду велосипед. Неужели это и есть эпохальное изобретение? А что они делают там, на его родной планете, когда им нужно перевезти рояль? Или они играют только на контрабасе и флейте?

Тут и Лундберг начал приходить в себя. Он вспомнил целый ряд неприятных фактов — например, то, что хотя поблизости и нет сумасшедшего дома, зато есть приют для алкоголиков. А ведь хорошо известно, какими очаровательными людьми могут быть некоторые алкоголики, если постараются. Хотя Сири вообще-то даже от пива отказался, но он, наверное, надеялся, что ему предложат что-нибудь покрепче.

Нет, так закончить нельзя. Вся история повисла в воздухе. Давайте продолжим еще немного.

Второй раз за день инженер Лундберг разразился хохотом. Ну и основательно же его надули. Его, который всегда бывает так сдержан, даже подозрителен по отношению к незнакомым.

Внезапно он поддался какому-то импульсу и прошел в столярную мастерскую, где еще осенью поставил свой старый велик. Все еще улыбаясь, он перекинул ногу через раму, оперся рукой о стену и уселся на неудобное седло. Потом закрыл глаза, стараясь отвлечься от сугробов на маленьком дворике и инструментов на верстаке в полумраке мастерской.

Вот так все и началось, фантазировал он. Народ Сири сосредоточил свои способности на духовных упражнениях, а не на технических. Велосипед явился кульминацией их технического развития. Для того чтобы попасть на другую планету, они просто начинали думать о том месте, куда хотели переместиться.

Как оно может выглядеть, это место? Воздух там должен быть непременно, хорошо бы и тепло было — для разнообразия. Скажем, пустыня — и два солнца для верности. Если сосредоточиться как следует...

Падение на песок заставило его открыть глаза. В полном зимнем облачении он сидел на вершине холма и смотрел на простиравшуюся перед ним пустынную местность. Он заметил, что отбрасывает две тени.

По тропинке у подножия холма шел человек в набедренной повязке. Рядом с ним ковыляло шестиногое лохматое существо. Пораженный открывшимся перед ним видом на вершине холма, человек крикнул:

— Кууланг матьянгаба вева?

Значение слов было совершенно понятно инженеру Лундбергу.

— Матьянгаба вева,— заверил он дружелюбно.

Ответы, указания, решения

«Квант» для младших школьников

1. Сначала вспомним, что в любом вагоне поезда не более 100 мест, в плацкартном не более 60, а в купейном и мягком еще меньше. Поэтому количества пассажиров в вагонах № 7 и № 8 являются двузначными числами, отличающимися лишь порядком цифр, следовательно их сумма делится на 11, а поскольку эта сумма является еще и квадратом целого числа, то она равна 121. Но в этом случае одно из чисел не меньше 65, а другое не больше 56. Заметим также, что в вагоне № 9 находится 11 пассажиров. Вагон, в котором не меньше 65 пассажиров, может быть только общим, при условии, что все рассмотренные вагоны имеют свободные места, как и указано в задаче.

2. Искомые пары чисел: 0 и 1, а также 370 и 371.

3. $235193+235193=470386$.

4. Несколько нулей можно заменить, например, таким способом:

$$\begin{array}{rrrr} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

5. См. рис. 1.

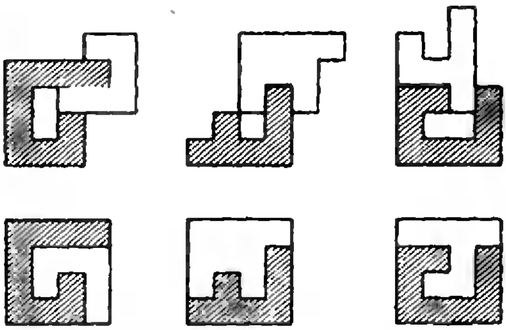


Рис. 1.

[redacted]доскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Напряжения, которые сами по себе недостаточны, чтобы нарушить целостность материала, могут, например, способствовать продвижению имеющейся в стекле трещины в глубь (или вдоль) поверхности материала. В результате в трещину могут проникнуть инородные молекулы, которые и нарушат связи между молекулами стекла.

2. Свинец мягче стали, поэтому поверхности двух его кусков легче сблизить до расстояния, на котором проявляются силы молекулярного сцепления.

3. Стержень выскочит, так как температурный коэффициент линейного расширения у железа меньше, чем у цинка.

4. Температурный коэффициент объемного расширения у керосина много больше, чем у стекла, однако в первый момент после опускания в горячую воду керосин еще не успевает прогреться.

5. При растяжении упругой резиновой пленки сила натяжения зависит от степени деформации пленки. Сила же поверхностного натяжения жидкости определяется только свойствами самой жидкости и не меняется с увеличением ее поверхности.

6. Молекулярные силы притяжения действительно тянут находящиеся на поверхности молекулы в глубь жидкости, но эти силы уравновешиваются силами отталкивания со стороны молекул, находящихся непосредственно под поверхностным слоем.

7. Чем меньше радиус шара, тем сильнее поверхностная пленка сжимает воздух внутри него.

8. Проволочки из разных металлов необходимо поочередно помещать в нужное место пламени и следить за появлением шарика на конце одной из них. Зная температуру плавления металла, из которого сделана проволочка, можно оценить температуру участка пламени.

9. Вода растечется по всей внутренней поверхности колбы, а в центре колбы образуется пузырек воздуха. Ртуть же образует в центре большую сферическую каплю.

10. Коэффициент поверхностного натяжения убывает при повышении температуры вещества. Поэтому масса капли, отрывающейся в жарко натопленной комнате, меньше, чем в прохладной; значит, нужно увеличить число капель.

11. Один конец проволоки нужно опустить во флакон, а другой конец приложить к краю стакана. Вода стечет по проволоке во флакон, так как ее «удержит» поверхностная пленка.

12. Вырезав из всех сортов бумаги узкие полоски, следует погрузить их концы в воду. В той полоске, где по́ры меньше, вода поднимется на бо́льшую высоту.

13. Часть полена в тени холоднее. Поэтому капиллярные силы перемещают воду в этом направлении.

14. По мере того как молекулы воды испаряются с поверхности листьев, на их место приходят другие молекулы. Так мощные межмолекулярные силы поднимают по тонким капиллярам сок по стволу от корней вверх.

Микроопыт

Раствор сахара в воде имеет больший коэффициент поверхностного натяжения, чем чистая вода. Поэтому поверхность, занимаемая раствором сахара, стремится сократиться, увлекая за собой спички по направлению к кусочку сахара. При растворении мыла натяжение воды уменьшается, поверхность, занятая мыльным раствором, увеличивается, и спички уходят вслед за границей с чистой водой к краям тарелки.

[redacted]три в корень! И в дискриминант...

1. Обозначим через x расстояние от заряда q до q_1. Тогда из закона Кулона получаем

$$\frac{q_1}{x^2}=\frac{q_2}{(l-x)^2},$$

или

$$x^2(q_1-q_2)-2lq_1x+q_1l^2=0,$$

откуда

$$x_{1,2}=l\,\frac{q_1\pm\sqrt{q_1q_2}}{q_1-q_2}.$$

Корень со знаком «+» не годится: $x>l$, поэтому

$$x=l\,\frac{q_1-\sqrt{q_1q_2}}{q_1-q_2}.$$

2. Из кинематики имеем

$$s=\sqrt{L^2-H^2}=v\cos\alpha\cdot t,$$
$$H=v\sin\alpha\cdot t+\frac{gt^2}{2}.$$

Исключая t, получаем

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{v^2}{gs}\pm\sqrt{\left(\frac{v^2}{gs}\right)^2+\frac{2Hv^2}{gs^2}-1}.$$

Имеет смысл ответ со знаком «+» — второй ответ соответствует «пикированию вверх».

3. Очевидно, что условие задачи выполняется, если обе встречи автомобилей происходят позже, чем через v_0/a. Это означает, что оба корня уравнения

$$vt=l-v_0t+\frac{at^2}{2}$$

должны быть больше v_0/a. Расчет дает

$$\sqrt{2al}-v_0<v<\frac{al}{v_0}-\frac{v_0}{2}.$$

[redacted]нт» для младших школьников
(см. «Квант» № 11)

1. Пусть стакан чая стоил x рублей, а калач — y рублей, тогда из условий покупки Фомы получаем $4x+7y=17k$, где k — количество 17-рублевых купюр, уплаченных Фомой. Стоимость покупки Еремы равна $x+6y$. Если учетверить эту сумму и вычесть из нее сумму, уплаченную Фомой, то получим $17y-17k$ — число, делящееся на 17, значит, и сумма, уплаченная Фомой, делится на 17.

2. Если число КУ — простое, то получаем $83\cdot8\cdot3=1992$, если составное, то имеем $72\cdot7\cdot2=1008$.

3. Из условий задачи следует, что число дней в указанном году делится на 3. Следовательно, этот год високосный, и его номер делится на 4. В указанный промежуток времени было два таких года: 1900 и 1904, но 1900 год не был високосным в Париже (в России был). Итак, это был 1904 год.

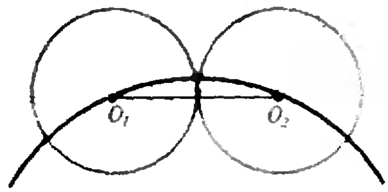


Рис. 2.

4. Соединим центры O_1 и O_2 двух соседних окружностей (рис. 2). Очевидно, что отрезок O_1O_2 короче дуги O_1O_2. Но этот отрезок равен диаметру каждой из касающихся окружностей, откуда следует, что сумма дуг между центрами окружностей — длина первоначальной окружности — больше суммы диаметров касающихся окружностей.

5. Приводим фрагмент русско-ам-ямского словаря, составленный по переводу стишка:

видит	—бу;
гулять	—му;
кошка	—ля;
мышка	—ту;
ночью	—ам;
поймать	—гу;
пошла	—ям.

[redacted]онометрические задачи
(см. «Квант» № 11)

1. а) $\sin 5<\sin 6$; б) $\cos 7>0>\cos 8$; в) $\operatorname{tg}3<0<\operatorname{tg}3°$; г) $\sin 3>\sin 3°$. Указание. $\sin 3=\sin(\pi-3)$, $\sin 3°=\sin(\pi/60)$, но $\pi/2>\pi-3>\pi/60$. д) первое число больше; е) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}<\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{5}$; ж), з) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}<\frac{\pi}{5}<\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. Указание. Пусть $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$, $\beta=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. Тогда (проведите вычисление!) $\operatorname{tg}5\alpha<0$, $\operatorname{tg}5\beta>0$, откуда следует, что $5\beta>\pi>5\alpha$. Для вычисления $\operatorname{tg}5\alpha$ найдите сначала $\operatorname{tg}2\alpha$, затем $\operatorname{tg}4\alpha=\operatorname{tg}2(2\alpha)$ и, наконец, $\operatorname{tg}5\alpha=\operatorname{tg}(\alpha+4\alpha)$.

2. а) $3\pi-10$; б) $4\pi-10$; в), г) $10-3\pi$; д) $4\sqrt{2}/9$; е) $\pi/9$; ж) $1/\sqrt{26}$; з) $\frac{8-6(a^2-1)^2}{(a^2-1)^3}$. Указание. Если $\sin x+\cos x=a$, то $\sin 2x=a^2-1$.

3. е) Указание. Пусть $\alpha=\arcsin x$, $\beta=\pi/2-\arccos x$. Тогда $\sin\alpha=\sin\beta=x$, причем $\alpha,\beta\in[-\pi/2;\ \pi/2]$. Поэтому $\alpha=\beta$.
ж) См. указание к п. е).

4.*) а) $k\pi$; $\pi(3k+1)/3$; б) $\pi(24k+1)/36$, $\pi(24k+5)/36$; в) $\pi(24k-7)/120$; г) $2k\pi$; д) $\pi(2k+1)/2$; е) $\varnothing$; ж) $\pi(2k+1)/18$, $k\neq 9l+4$; з) $(-1)^{k+1}\pi/6+k\pi$, $(-1)^k\arcsin\pi/12+k\pi$; и) $\pm\arccos\pi/4+(2k+1)\pi$, $\pm\arccos\pi/12+2k\pi$; к) $k\pi/2$; $\pi(6k\pm1)/9$; л) $\pi(2k+1)/8$, $\pi(2k+1)/4$, $\pi(2k+1)/2$; м) $\pi(2k+1)/10$, $\pi(2k+1)/4$, $\pi(2k+1)/2$; н) $\pi(4k+1)/4$, $-\operatorname{arctg}7+$

---

*) В пунктах 4 и 5 числа k, l, m, n — целые.

$+k\pi$; о) $\pi k/3$, п) $2\,\mathrm{arctg}\,1/3+2k\pi$; р) $\pi k/5$, $\pi k/7$; с) $(6k\pm 1)\pi/6$; т) $(6k\pm 1)\pi/6$; у) $(6k\pm\pm 1)\pi/6$; ф) $\pi(4k+1)/4$; х) $2k\pi$, $\pi/2+2k\pi$. Указание. $\sin 2x=1-y^2$, где $y=\cos x-\sin x$.
ц) $\pi(2k+1)/7$, $k\neq 7l+3$; ч) $k\pi$,
$\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+2k\pi$.

5. а) $\pm\pi/6+k\pi$; б) $\pi(6k\pm 1)/3$; в) $\pi k/2$; г) $(-1)^k\pi/3+2k\pi$; д) $\pm 2\pi/3+2k\pi$; е) $\pi/2+2k\pi$, $k\pi$, $2\pi(3k+1)/3$, $\pi(6k-1)/3$.

Указание. Уравнение равносильно такому:

$$\sin 2x(\sin x-1)=|\sin x|(1-\sin x),$$

откуда либо $\sin x=1$, либо $|\sin x|=-\sin 2x$.
ж) $-\pi/4+(-1)^{k+1}\arcsin 5/8+\pi k$. Указание. Замена $y=\sin x+\cos x$.

з) $x=-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+\pi k$. Указание. Из корней уравнения $\cos 2x=-1/3$ следует выбрать те, при которых подкоренное выражение неотрицательно. Уравнение же

$$\sqrt{8-16t-10t^2}=-4t-1,$$

где $t=\sin x$, не имеет корней на промежутке $[-1;\,1]$.

5. а) $(\sqrt{17}-3)/4$. Указание. $\cos(2\arcsin x)=1-2x^2$, $\cos\arccos 3x=3x$, так что следствием данного уравнения будет уравнение $1-2x^2=3x$. Один из его корней меньше -1, а второй удовлетворяет исходному уравнению.
б) -1. Указание. $\arcsin^2 x+\arccos^2 x\leqslant 5\pi/4$ при любом $-1\leqslant x\leqslant 1$. Равенство возможно лишь при $x=-1$.
в) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+1}\right)$. Указание. Воспользуйтесь задачей 3.
ж), г) $-\sqrt{2}$. Указание. Приравнивая тангенсы левой и правой частей, получаем после упрощений уравнение относительно x с корнями $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{2}$. Проверкой убеждаемся, что исходному уравнению удовлетворяет лишь $x=-\sqrt{2}$.
д) 0; е) 0, 1, -1; ж) $-\sqrt{2}/2\leqslant x\leqslant\sqrt{2}/2$. Указание. Поскольку $\sin(2\arcsin x)=2x\sqrt{1-x^2}$, синусы левой и правой частей равны. Уравнению удовлетворяют те x, для которых $2\arcsin x$ принадлежит области значений арксинуса, т. е. те x, для которых $-\pi/2\leqslant 2\arcsin x\leqslant\pi/2$.
з) $0\leqslant x\leqslant 1$. Указание. См. указание к предыдущей задаче.
и) 0, 1. Указание. Воспользуйтесь задачей 2, ж) и выполните замену $t=2/(\pi\arcsin x)$, в результате уравнение приведется к виду $\arccos(1-t)=\arcsin t$.

[redacted] самым коричневейшим-
[redacted]ерекоричневейшим был Эфиоп»
(см. «Квант» № 4)

Конечно, и в биологии законы физики те же, что и для неживой природы: черные тела хуже отражают солнечные лучи, чем белые. Но одновременно и лучше поглощают — в этом и кроется разгадка. Оказывается, для живого организма важно, чтобы пигментированный слой кожи, поглощая бо́льшую часть солнечных лучей, предохранял внутренние, жизненно важные органы: мозг, сердце, красные кровяные шарики, печень. Так что черная кожа действительно защищает от жаркого африканского солнца. Но не с помощью отражения, как солнечный зонтик, а — поглощением. Безусловно, оптимальной в качестве защиты была бы кожа, поглощающая как черная и отражающая как белая, но «нет в мире совершенства» (Антуан де Сент-Экзюпери).

Напечатано в 1992 году

Математический кружок

Информатика

Практикум абитуриента

Тематические подборки задач

Варианты вступительных экзаменов

Олимпиады

АНКЕТА 12—92

Мы благодарим всех, кто прислал нам ответы на предыдущую анкету. Нам очень важно знать Ваше мнение о журнале. Чем больше ответов, тем легче нам ориентироваться в Ваших интересах.

А теперь, дорогой читатель, ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите: «Анкета 12—92».

Обзор Ваших ответов читайте в одном из ближайших номеров нового, 1993 года.

1. Класс, в котором Вы учитесь: ______

Ваша профессия (если Вы работаете): ______

круг интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните).

2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? ______

Короткая жизнь рекордов	3	•
Слоны-хамелеоны	4	•
Всем рекордам рекорд!	5	•
Путешествие в прошлое	6	•
Заглядывая в прошлое	7	•
Алгоритм обратного мата	8	•
В обезьяньем питомнике	9	•
По проторенной дорожке	10	•
Филигранный анализ компьютера	11	•
«Мефисто» — международный мастер	12	•
Наша анкета	**6, 12**	
Читатель↔журнал	6	79

3. Какие статьи (из любого раздела) и задачи из номеров 7—12 Вам понравились (не понравились)? ______

Вы использовали при подготовке к уроку? ______

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»? ______

5. Какая обложка из номеров 7—12 Вам понравилась (не понравилась)? ______

6. Если бы редактором «Кванта» были Вы... ______

Квант

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Номер подготовили:
Л. Винюкова, А. Егоров, А. Калинин, Л. Кардасевич, С. Коновалов, А. Котова, А. Савин, В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили
Г. Антонов, Н. Кузьмина, Т. Макарова, А. Малышев, Э. Назаров, И. Перевезенцев, П. Чернуский, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
П. Чернуский

Художественный редактор Е. Потапенкова

Зав редакцией С. Давыдова

Корректор В. Сорокина

103006, Москва, К-6, ул. 1 я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант», тел. 250 33-54, факс 251-55 57

Сдано в набор 29.09.92. Подписано к печати 12.11.92. Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр. отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,55. Тираж 50641 экз. Заказ 1215. Цена 1 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени Чеховский полиграфический комбинат Министерства печати и информации Российской Федерации
142300, г. Чехов Московской обл.

Шахматная страничка

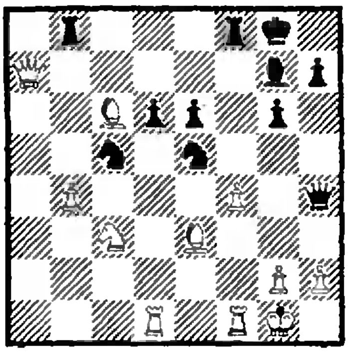
«МЕФИСТО» — МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАСТЕР

Ведущий рубрики побывал летом этого года в Германии, где участвовал в традиционном международном турнире «Берлинское лето». Турниры эти проводятся по швейцарской системе, и на них съезжаются мастера и гроссмейстеры со всего света, в последние годы около 500 человек. Состязания в Берлине проводятся уже десятый год подряд, и всегда в них играет чемпион мира среди микрокомпьютеров «Мефисто». На сей раз «Мефисто» превзошел самого себя. Набрав 6 очков в девяти партиях, машина попала в число 50 сильнейших игроков и выполнила норму международного мастера. Посмотрите несколько образцов игры электронного чемпиона.

«Мефисто» — Грузман
Дебют ферзевой пешки

1. d4 Kf6 2. c4 d6 3. Kc3 Cf5 4. f3 e5 5. e4 ed 6. Ф:d4 Kc6 7. Фd1 Ce6 8. Cd3 Ce7 9. Kge2 0—0 10. 0—0 Kd7 11. Ce3 Kde5 12. Kd5. Черные разыграли начало партии так, чтобы машина не могла воспользоваться своей дебютной библиотекой, но «Мефисто» не растерялся и захватил инициативу.

12... Лe8 13. Kef4 Cf8 14. Ce2 a5 15. Фh3 b6 16. Kc3 g6 17. Лad1 Cg7 18. K:e6 fe 19. f4 Kf7 20. e5 Лb8 21. Cf3 Kb4 22. a3 Ka6 23. Cc6 Лf8 24. Фb5 Kc5 25. b4 ab 26. ab Kb7 27. c5 Фh4 28. cd cd 29. Ф:b6 Kc5 30. Фa7 K:e5.



Забавная позиция. Оба коня черных под боем, но ни одного из них нельзя брать, на 31. bc следует 31...Kg4, а на 31. fe — 31...C:e5. Однако компьютер делает тихий ход, который сразу ставит все точки над i.

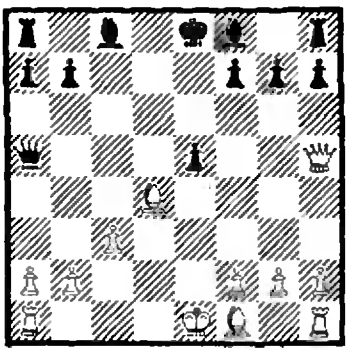
31. Cd4! Л:b4 31. C:e5 de 33. Ф:c5 Лb:f4 34. Лf3 Лc4 35. Фd6 Л:f3 36. C:f3 Л:c3 37. Ф:e6+ Kpf8 38. Cd5 Фf6 39. Лf1. Черные сдались.

Во время игры «Мефисто» немного гудит, как холодильник, к тому же вокруг него всегда много народа. Поэтому организаторы решили выделить машине специальное помещение. Человек сидит за обычной шахматной доской, а компьютер находится рядом, за соседним столом. Когда человек делает ход, ассистент переставляет фигуры на компьютерной доске. «Мефисто» отвечает (мигают лампочки на соответствующих полях), и ассистент передвигает фигуры сразу на двух досках, одновременно переключая часы. Так игра и идет... Вот еще два образца творчества «Мефисто» в «Берлинском лете».

«Мефисто» — Фритш
Сицилианская защита

1. e4 c5 2. Kf3 Kf6 3. Kc3 Kc6 4. d4 d5 5. ed K:d5 6. K:d5 Ф:d5 7. Ce3 cd 8. K:d4 Фa5+ 9. c3. Дебютное сражение привело к упрощениям и примерному равенству. Однако черные решили проявить активность и тут же попались на тактический трюк.

9...K:d4 10. C:d4 e5? 11. Фh5!



Ферзь не только напал на пешку e5, но одновременно помешал ее соседке «f» прийти на помощь. В результате черные остаются без пешки (11...Cd6 12. f4).

11...Ce7 12. Ф:e5 Ф:e5+ 13. C:e5. Дальнейшее просто. Упорное сопротивление человека лишь оттягивает неизбежное. Техника реализации у машины достаточно высокая.

13...0—0 14. Cc4 Cd7 15. 0—0 Лac8 16. Cd5 Cc6 17. C:c6 Л:c6 18. Лfe1 f6 19. Cd4 Kpf7 20. Лe2 a6 21. Лae1 Cd6 22. g3 Лfc8 23. f4 b5 24. Kpg2 Cf8 25. Kpf3 Cd6 26. g4 g6 27. Лe6 Cc5 28. f5 Л:e6 29. Л:e6 C:d4 30. cd Лc2 31. Л:a6 Л:h2 32. Лa7+ Kpe8 33. Kpe4 Л:b2 34. Л:h7 Л:a2 35. fg b4 36. Лh8+. Черные сдались.

Увлекательно протекала следующая партия, в которой против машины играл международный мастер из Германии.

Тиннус — «Мефисто»
Каталонское начало

1. d4 Kf6 2. c4 e6 3. Kf3 d5 4. g3 Ce7 5. Cg2 0—0 6. Kc3 dc 7. Ke5 c5 8. dc C:c5 9. 0—0 Фc7. Белые не торопятся отыгрывать пешку, и черные косвенно защищают ее.

10. K:c4 C:f2+ 11. Л:f2 Ф:c4 12. Л:f6! Видимо, на этот удар и рассчитывали белые: вслед за пешкой они жертвуют и качество, но черный король теперь в опасности.

12...gf 13. Ch6 Kc6 14. e3 Лd8 15. Фh5 e5 16. Ke4 Фe6 17. Фh4 Kph8 18. K:f6 Ke7 19. Лf1. После 19. Cf8! машина попадала в безвыходное положение. Но белые делают напрашивающийся ход, и «Мефисто» отбивает атаку.

19...Kg6 20. Фh5 Лg8 21. Cg5. Кажется, что черным несдобровать, но «Мефисто» умело разбирается в тактических осложнениях и берет верх.

21...Лg7 22. Фh6 Kf8 23. Лd1 Фf5 24. Лd8 Фb1+ 25. Kpf2 Ф:b2+ 26. Kpg1 Фb1+ 27. Kpf2 Ф:a2+ 28. Kpg1 Фb1+ 29. Kpf2 Фc2+ 30. Kpg1 Ch3! 31. Л:f8+ Л:f8 32. C:h3 Лd8. Белые сдались.

Е. Гик

1 р. 10 к.
Индекс 70465

НОВОГОДНЕЕ ПОЗДРАВЛЕНИЕ

На открытке, которую вы видите на рисунке, не хватает четырех букв. Но зато на карточке, которая расположена внизу, этих букв более чем достаточно. Задача головоломки — совместить отверстия на открытке и карточку с буквами так, чтобы полностью прочитать новогоднее поздравление.

Прежде чем вырезать открытку, ответьте на вопрос: сколько существует вариантов взаимного расположения открытки и карточки, таких, чтобы во всех отверстиях были видны буквы, хотя бы и неправильные?

Не в наших правилах подсказывать, но ради праздника сделаем исключение. Если вы думаете, что таких вариантов 20, вам никогда не справиться с этой головоломкой.

Желаем удачи!

А. Калачин