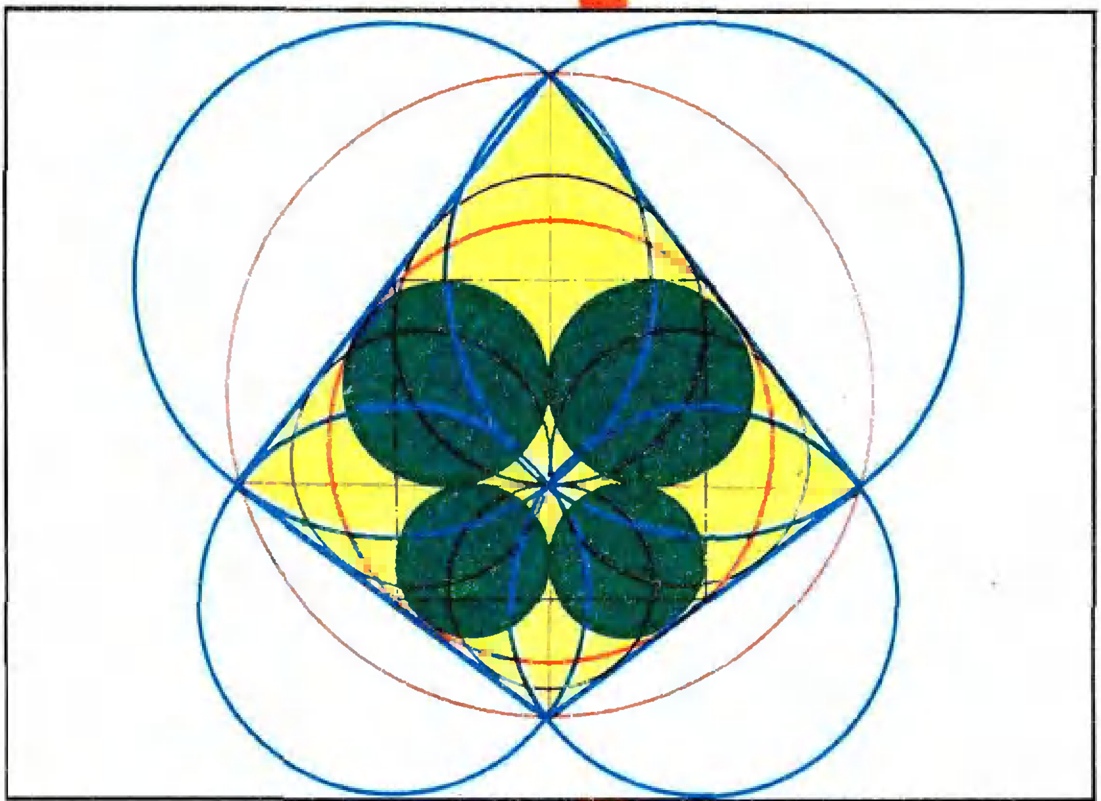
ISSN 0130-222

Квант

*Научно-популярный
физико-математический журнал*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Удивительный четырехугольник

1992


TYCHONIS
INSTRUMENTORUM
ORUM STRUCTORIS
DOMINI ÆTATIS SUÆ 40

Квант

7 1992

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал

Учредители — Президиум Российской академии наук, Президиум Академии педагогических наук и коллектив редакции журнала «Квант»

Москва, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 *Ю. Соловьев.* Творцы новой астрономии
8 *В. Сурдин.* Чернильное колечко и космическая физика
14 *Я. Стюарт.* Топология
21 *Г. Литинский.* Корабельные пушки и волны в упругих стержнях

Задачник «Кванта»
26 Задачи М1351—М1355, Ф1358—Ф1362
27 Решения задач М1321—М1325, Ф1338—Ф1342
37 Список читателей, приславших правильные решения

«Квант» для младших школьников
39 Задачи
42 *Л. Генденштейн.* Алиса и Точка

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Математический кружок
46 *Е. Куланин.* Об одной трудной геометрической задаче

Практикум абитуриента
51 *Б. Корсунский.* Внимание: ловушка!

Информация
53 Заочная школа при НГУ
55 Заочная школа программистов

Р — значит ракета
56 Есть ли жизнь на Европе?

Информатика
60 *А. Котова.* Машина Тьюринга

Олимпиады
63 Канадские математические соревнования
65 Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Фантастика
68 *Т. Томас.* Сломанная линейка

Игры и головоломки
73 Игра го

77 **Ответы, указания, решения**

«Квант» улыбается *(52)*

Нам пишут *(13, 72)*

Наша обложка
1 *Четырехугольник с целочисленными сторонами, диагоналями, радиусами различных окружностей... (см. с. 7).*
2 *Рисунок обсерватории Тихо Браге, сделанный его современником. О Тихо Браге, Кеплере и других астрономах читайте в статье на с. 2.*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Две новые родственные головоломки: одна из Англии, другая с Урала.*

ТВОРЦЫ НОВОЙ АСТРОНОМИИ

Доктор физико-математических наук
Ю. СОЛОВЬЕВ

Геологическая история показывает нам, что жизнь есть лишь беглый эпизод между двумя вечностями смерти и что в этом эпизоде прошедшая и будущая деятельность сознательной мысли — не более, как мгновение. Мысль — только вспышка света посреди долгой ночи. Но эта вспышка — все.

А. Пуанкаре

На рубеже 17-го столетия две личности, обе грандиозной творческой силы и огромного темперамента, вступают на арену борьбы за коперниканское учение — немец Иоганн Кеплер (1571—1630) и итальянец Галилео Галилей (1564—1642). Их работы являются гранью, разделяющей всю историю астрономии: от трактатов Кеплера и Галилея ведет начало все современное научное миросозерцание. Честь создания новой астрономии разделяет с ними датчанин Тихо Браге (1546—1601), «феникс астрономии», как назвал его Кеплер, человек, который впервые за четырнадцать с половиной столетий после Птолемея внес в наблюдательную астрономию существенно новый и весьма обширный материал. О их судьбах и научном творчестве наш рассказ.

«Я жил не даром!»

Тихо Браге родился в 1546 году. Его отец, датский дворянин, был комендантом Гельсинборга и умер в 1571 году. В 1560 году Тихо по желанию семьи отправился в Копенгагенский университет изучать право. Но юриспруденция, по-видимому, была ему не по душе, и в 1562 году он переселился в Лейпциг, где занимался астрономией. В августе 1563 года он наблюдал противостояние Юпитера и Сатурна. Семья его не сочувствовала таким недворянским затеям и, вероятно, положила бы им конец, если бы на сторону молодого человека не перешел его дядя Стен Билле. Когда Тихо после нескольких лет странствий вернулся в 1571 году на родину, его дядя устроил для него в своем имении маленькую обсерваторию и химическую лабораторию. Наблюдения Тихо над новой звездой, которая появилась в 1572 году, сияла ярче Венеры, а в 1574 году исчезла, обратили общее внимание на молодого астронома. В 1574 году он читал лекции по астрономии в Копенгагене и был представлен датскому королю Фридриху II, который подарил ему остров Хвен в проливе Каттегат и построил для него обсерваторию Ураниенбург, сделавшуюся впоследствии столь знаменитой. В продолжение 21 года (1576—1597) Браге производил наблюдения в Ураниенбурге в кругу многочисленных ассистентов и учеников. Он был последним великим астрономом, жившим до той поры, когда Галилей направил на звездное небо зрительную трубу. Его астрономические приборы, по-существу, были известны еще в древности, однако большая изобретательность Браге и развившееся искусство ремесленников позволили сделать их очень точными.

В 1597 году положение Тихо Браге резко изменилось. Его покровитель Фридрих II умер, и, за малолетством его наследника Христиана IV, государством стали править четыре советника. С одним из них, Валькендорпом, Тихо имел столкновение из-за имущества обсерватории, и враги воспользовались этим случаем, чтобы его выжить. Сначала Браге отправился в Копенгаген, когда же Валькендорп запретил ему производить наблюдения своими прежними инструментами, он переселился в Росток. В 1599 году окончились его переговоры с императором Рудольфом II, и он отправился в Прагу в качестве императорского астронома, астролога и алхимика. Он получил замок Бенах близ города для научных занятий и — что всего важнее — ассистента в лице молодого астронома Кеплера. Браге не удалось, однако, долго поработать на новом поприще: он внезапно заболел и скоропостижно скончался 23 октября 1601 года.

Браге был непревзойденным наблюдателем — даже с нашей современной точки зрения его наблюдения являются очень точными и тщательно выполненными. Однако иронией судьбы, весь этот нечеловеческий труд длиною в жизнь был проделан им для того, чтобы опровергнуть теорию Коперника. Против теории движения Земли Браге приводит следующие возражения. 1) Непонятно, каким образом при вращении Земли камень, брошенный с высокой башни, может упасть у ее подножья,— возражение весьма веское в то время, когда закон инерции был еще неизвестен. Коперник пытался опровергнуть подобные доводы допущением, что всем земным телам присуще совместно с Землей круговое движение. 2) Если Земля пробегает такое огромное расстояние по своей орбите, то неподвижные звезды должны изменять свое кажущееся положение. Коперник, предвидя это возражение, заранее опроверг его указанием на громадность расстояния до неподвижных звезд. 3) Нельзя указать силу, которая поддерживала бы параллельность земной оси,— довод весьма веский и получивший правильное объяснение только в конце семнадцатого столетия Ньютоном. 4) Библия в книге Иисуса Навина («Солнце, остановись в Гидеоне!») прямо опровергает учение о движении Земли. Последний аргумент, по-видимому, окончательно убедил Браге в несостоятельности системы Коперника. Он придумал промежуточную систему, согласно которой, как и у Птолемея, Земля находится в покое, а Солнце и Луна вращаются вокруг нее; прочие же планеты двигаются вокруг Солнца, как у Коперника.

Сейчас система мира Тихо Браге кажется довольно наивной, но в свое время она сделала полезное дело. Так или иначе, но Браге ниспроверг систему Птолемея и тем самым подготовил окончательную и решительную победу Коперника. И конечно же, главным вкладом, определившим эту победу, были уникальные наблюдения Тихо Браге. Ему не пришлось вкусить теоретических плодов своей долголетней работы. Впоследствии мы увидим, как плохооплачиваемый

Николай Коперник.

Тихо Браге.

Иоганн Кеплер.

Галилео Галилей.

и многострадальный его ассистент Кеплер выведет из его данных истинные орбиты планет и исправит, таким образом, систему Коперника в одном из ее самых слабых мест.

Научный подвиг Тихо Браге оказался не напрасным — из его наблюдений выросли основы нового миропонимания, оправдав гордое восклицание умиравшего Браге: «Я жил не даром!»

Гармония мира

Через двадцать восемь лет после выхода в свет знаменитой книги Коперника «Об обращении небесных сфер» 27 декабря 1571 года в городке Вейль-дер-Штадт в Вюртемберге увидело свет слабое дитя, которому было суждено завершить дело Коперника и разгадать законы неба. Это был Иоганн Кеплер, сын трактирщика, одного из тех отчаянных людей, которых было так много в то время. Отец Кеплера после рождения сына отправился искать военного счастья у герцога Альбы в Бельгии. Потеряв в военных походах все свое немудреное состояние, он вернулся в Германию и поселился с семьей в городке Леонберге. Здесь юный Иоганн шести лет от роду поступил в местную школу. Он должен был научиться лишь тому, что необходимо было знать швабскому крестьянину. Однако судьба предназначила этому слабому ребенку более высокое жизненное поприще. Благодаря своему прилежанию, мальчик поступил в 1586 году в протестантскую монастырскую школу в Маульбронне, где его ожидали всяческие неприятности и лишения. Здесь-то он и заложил основу своим обширным познаниям древних классиков и латинского языка.

Уже в это время Кеплер обнаружил интерес к наблюдениям над небесными телами. Он отметил в своем дневнике тот замечательный факт, что при наступившем 3 марта 1588 года лунном затмении совершенно не было видно покрытого земной тенью диска Луны. Сдав блестяще экзамен на бакалавра, Кеплер получил осенью 1589 года место в Тюбингенской духовной академии, которая была известна своей богословской ученостью и нетерпимостью. Оба первых года ушли у него здесь на изучение естественных наук. Учителем математики и астрономии у Иоганна был знаменитый в свое время профессор Местлин. Он-то впервые и посвятил молодого Кеплера в учение Коперника. Но делалось это тайком, так как Местлин опасался гнева фанатиков и публично излагал лишь птолемееву систему мира. Последние три года занятий в Тюбингене были посвящены богословию.

После окончания академии Кеплер получил место учителя математики и морали в гимназии австрийского города Граца. Во многих отношениях это было не очень удачное место, но Кеплер получил образование за казенный счет и поэтому полагал, что должен повиноваться сделанному ему указанию. 13 марта 1594 года он отправился в Грац.

Помимо собственных специальных занятий, Кеплеру было поручено также составить календарь для Штирии и снабдить его астрологическими предсказаниями на новый год. При этих предсказаниях Кеплер больше полагался на свой здравый взгляд на вещи, нежели на расположение светил, и в нескольких случаях довольно точно предугадал будущие события. Таким образом, реформатор астрономии начал свой жизненный путь, окруженный ореолом великого астролога. Сам он, конечно, прекрасно знал цену своим предсказаниям и как-то в личной переписке заметил, что все такого рода занятия «являются очень сомнительными и мало полезными в житейских делах».

В один из зимних дней 1595 года, пока он набрасывал на доске перед своими учениками чертеж, ему вдруг пришла в голову мысль, определившая всю его дальнейшую жизнь. Кеплер начертил равносторонний треугольник с вписанной и описанной окружностями (рис. 1) и неожиданно осознал, что эти окружности можно связать с орбитами планет. Довольно быстро он понял, что плоские геометрические фигуры не позволяют найти разумный ответ и обратился к геометрическим телам — правильным многогранникам.

В математике известно пять правильных многогранников (рис. 2): тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. С другой стороны, Кеплер знал вычисленные Коперником расстояния от Солнца до шести известных в то время планет.

Кеплер предположил, что поскольку в мире должна существовать полная математическая гармония, пять планетных сфер должны располагаться вокруг Солнца таким образом, чтобы между ними вписывались правильные многогранники. Проделанная Кеплером вычислительная работа была под силу только незаурядному математику. Между самыми далекими сферами Сатурна и Юпитера он поместил куб так, чтобы вершинами он касался сферы Сатурна, а гранями — сферы Юпитера. Между Юпитером и Марсом Кеплер поместил тетраэдр и т. д. с тем же расчетом, чтобы гранями каждый многогранник касался внутренней, меньшей сферы, а вершинами был вписан во внешнюю, большую сферу.

Результаты своих вычислений Кеплер опубликовал в 1596 году в книге под названием «Mysterium cosmographicum» («Тайна Вселенной»). Кеплер не сомневался, что тайна Вселенной раскрыта: ведь он не только объяснил основу устройства Солнечной системы, но и открыл, почему

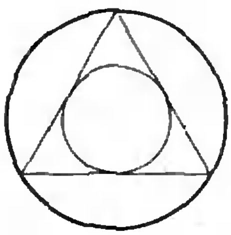


Рис. 1.

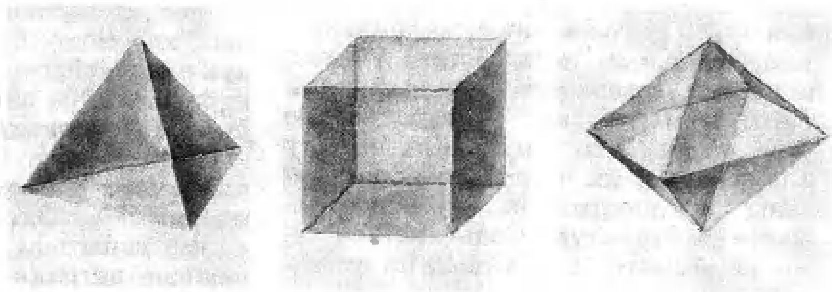
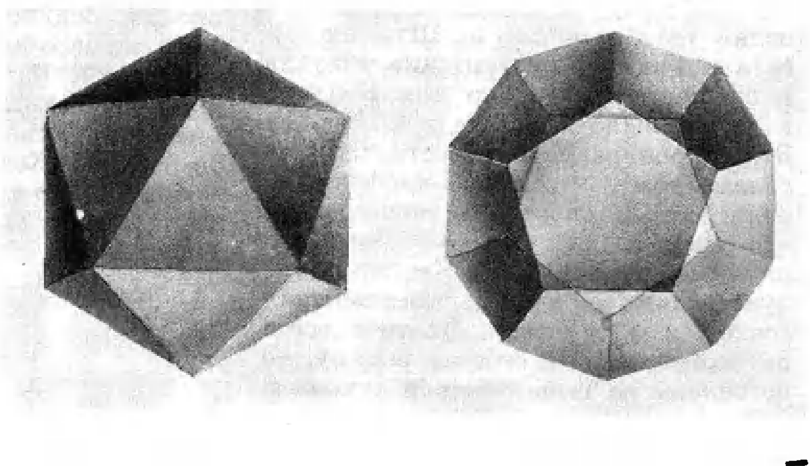
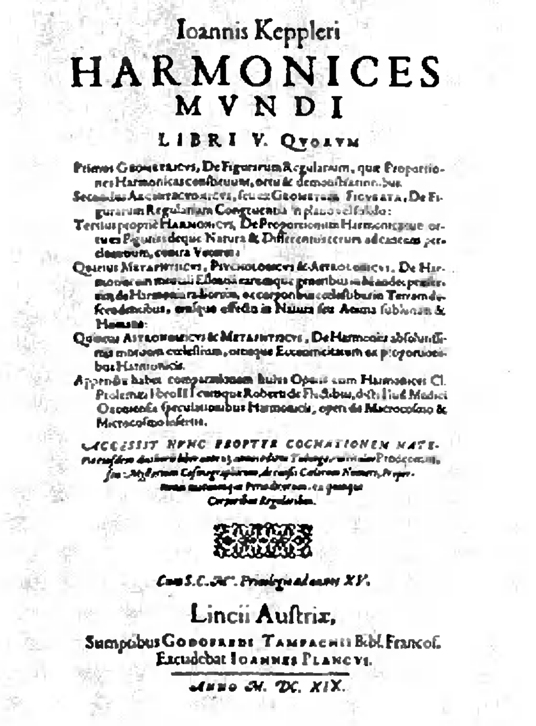


Рис. 2.




Ioannis Keppleri
HARMONICES
MVNDI
LIBRI V. QVORVM
Lincii Austriæ,
ANNO M. DC. XIX.

Титульный лист книги Иоганна Кеплера «Гармония мира».

планет именно шесть, а не «двадцать или сто». К сожалению, склонный к умозрительным построениям ученый попал на совершенно ложный путь. Сегодня мы можем с уверенностью утверждать, что расстояния между планетами и их число никак не связаны ни с какими многогранниками. Конечно, структура Солнечной системы не является случайной, но истинные причины, по которым она устроена так, а не иначе, до сих пор не известны.

В 1598 году эрцгерцог Фердинанд издал указ, которым из Штирии выселялись все протестантские учителя и священники. Только для Кеплера в указе было сделано исключение. Этим проявлением милости он был обязан тому, что воздерживался от религиозных споров, а также тому, что Фердинанд высоко ценил его научные сочинения. Но Кеплер плохо чувствовал себя в Граце, где гимназия совершенно опустела. Охотнее всего он вернулся бы к себе на родину, но богословы из Тюбингенской духовной академии и слышать о нем не хотели. Это оказалось счастьем для молодого астронома, поскольку Кеплер решил принять предложение Тихо Браге и стать его сотрудником в Праге. В виде особой милости ему было позволено сдать в аренду свое недвижимое имущество в Граце. В октябре 1600 года семья Кеплера переселилась в Прагу, где Кеплер должен был работать под руководством Тихо Браге в качестве его помощника.

Очень быстро отношения между Кеплером и Тихо Браге стали чрезвычайно натянутыми. Тихо Браге занимался усовершенствованием системы Коперника, в которой он находил много недостатков, Кеплер же был ее решительным сторонником. Научные споры переходили порой в жестокие оскорбления со стороны патрона. Кроме того, несмотря на то, что Тихо Браге обладал княжескими богатствами, Кеплеру стоило больших трудов получать от него свое жалованье. Сам Кеплер вспоминал, что ему приходилось почти вымаливать себе содержание. Трения эти прекратились лишь после неожиданной смерти Тихо, последовавшей 23 октября 1601 года. Тихо Браге оставил Кеплеру сундук с бесценными результатами своих наблюдений и завещал опровергнуть учение Коперника.

После смерти Браге Кеплер получил место и звание императорского математика. Однако император Рудольф испытывал очень большие денежные затруднения, поэтому положение Кеплера в Праге было очень тяжелым. Восемь лет он не получал ни гроша за свою работу и жил в вопиющей бедности, перебиваясь случайными заработками и составлением гороскопов. И все эти годы он напряженно занимался анализом наблюдений Тихо Браге над Марсом. По словам Кеплера, размышляя и соображая, он чуть ли не сошел с ума. Но он нашел то, что искал.

(Окончание следует)

Удивительный четырехугольник

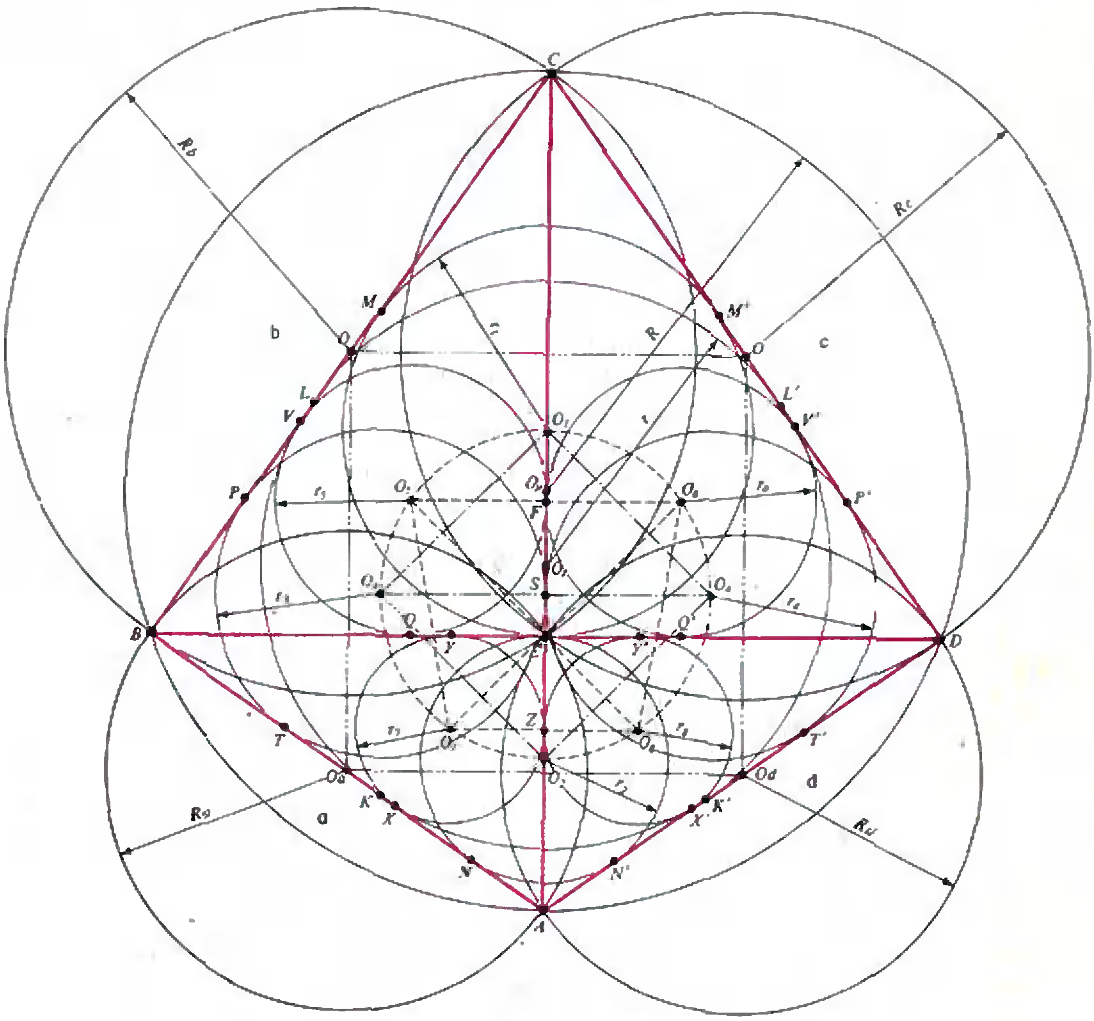
Четырехугольник, изображенный на рисунке и на первой странице обложки, обладает массой любопытных свойств. Все его стороны, диагонали, радиусы различных вписанных и описанных окружностей, расстояния между центрами этих окружностей, между точками касания окружностей со сторонами и диагоналями — целые числа. Приведем эти числа. Система обозначений центров и радиусов, а также точек касания, понятна из рисунка. Отрезки AB, BC, CD, и AD удобно обозначить через a, b, c и d. Итак, $a=d=210$, $b=c=280$, $AC=350$, $BD=336$, $AE=126$, $EC=224$, $R=175$, $r=120$, $O_rO_R=25$, $R_a=R_d=105$, $R_b=R_c=140$, $O_aO_d=O_bO_c=168$, $O_aO_b=O_cO_d=175$, $r_1=84$, $r_2=56$, $r_3=r_4=70$, $O_1O_2=O_3O_4=140$, $r_5=r_6=56$, $r_7=r_8=42$, $O_5O_6=112$, $O_7O_8=84$, $AN=AN'=42$, $NX=NX'=42$, $XK=X'K'=6$, $KO_a=K'O_d=15$, $O_aT=O_dT'=35$, $TB=T'D=70$, $CM=CM'=112$, $MO_b=M'O_c=28$, $O_bL=O_cL'=20$, $LV=L'V'=8$, $VP=V'P'=42$, $PB=P'D=70$, $CO_1=140$, $O_1F=28$, $FO_R=7$, $O_rS=10$, $SE=14$, $EZ=42$, $ZO_2=14$, $O_2A=70$, $BQ=Q'D=112$, $QY=Y'Q'=14$, $YE=EY'=42$. И еще одно замечательное свойство: точка S касания окружностей с радиусами r_3 и r_4 является центром окружности радиуса 70, на которой лежат точки O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, O_7 и O_8.

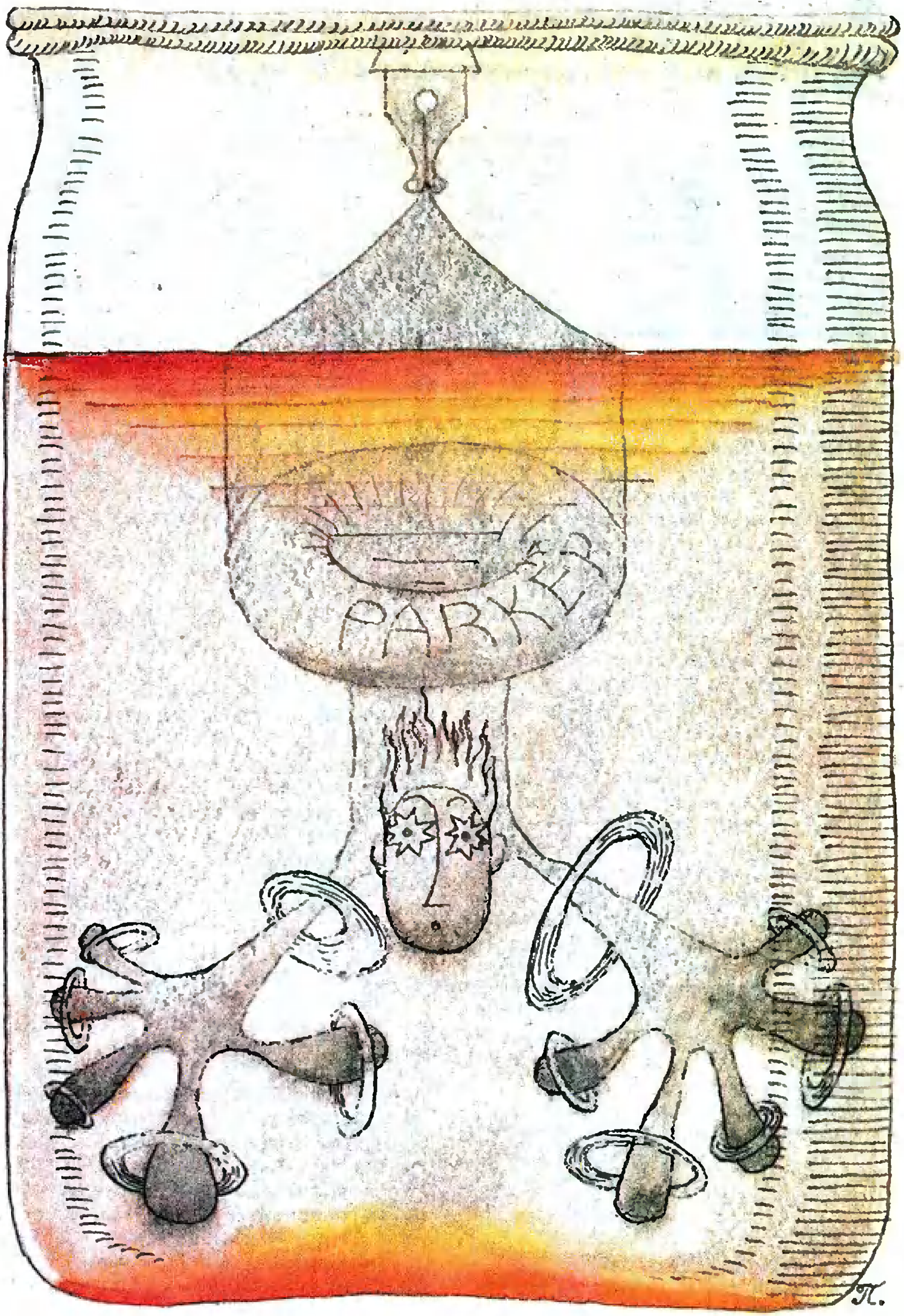
Р. Сарбаш

От редакции

Рассмотренный здесь четырехугольник действительно замечателен, но не

(Окончание см. на с. 20)




PARKER

ЧЕРНИЛЬНОЕ КОЛЕЧКО И КОСМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Кандидат физико-математических наук
В. СУРДИН

Не люблю шариковых ручек. Предпочитаю «вечное перо» и отношусь к нему с большим уважением. Пишет оно легко, разумеется, когда привыкнет к руке хозяина. Зато чужими самописками писать — сплошное мучение: не любят они случайную руку. Это вам не какой-нибудь безродный шарик, со всех сторон одинаковый, к любой руке безразличный, который можно без особого сожаления взять — отдать — потерять. Настоящая перьевая авторучка — это удобный в работе инструмент, да к тому же и предмет изящный. Им владеют годами, а то и десятилетиями. Если судьба подарила вам благородный «Паркер» или безотказный «Пеликан», то вы будете заботиться о нем, как ковбой о своем кольте.

Признаюсь, у меня никогда не было настоящего «Паркера» и даже «Пеликана». Когда я учился в 9 классе, отец подарил мне свою китайскую авторучку, и она стала моим надежным спутником на многие годы. В университете почти у всех моих однокашников тоже были перьевые авторучки: в те годы отечественные шарики писали туго, и угнаться в конспекте за лектором можно было только пером. Нередко мы сообща промывали наши авторучки и заправляли их свежими чернилами. Вот тогда-то и подметили мы один любопытный эффект, подтолкнувший нас — будущих астрофизиков — к постановке специального эксперимента. О нем я и хочу вам рассказать.

Эволюция чернильной капли

Когда капля чернил падает на твердую поверхность, например на лист тетради, то известно, что́ получается — клякса. А что будет, если чернильная капля упадет на поверхность жидкости? Тут все зависит от плотности жидкости и от скорости капли. Если жидкость плотная (например, раствор поваренной соли) или капля падает с большой высоты и ударяется о поверхность жидкости с большой скоростью, то она разбивается на части и глубоко в жидкость не проникает. Но если плотность жидкости немного меньше, чем у чернил, и капля падает с высоты в несколько сантиметров, то с ней происходят удивительные превращения.

Давайте сделаем эксперимент; для него потребуется стеклянная банка объемом не менее 2—3 литров (а еще лучше небольшой аквариум) и перьевая авторучка (или пипетка). Налейте полную банку воды, поставьте ее на удобное для наблюдений место и не трогайте в течение получаса. Это выжидание необходимо для того, чтобы вода в банке успокоилась, чтобы затихли остаточные слабые и невидимые глазу движения жидкости. Затем начнем опыт.

Двигая поршень авторучки (или нажимая на пипетку), добейтесь того, чтобы на кончике пера повисла капля чернил (рис. 1). Теперь можно аккуратно уронить эту каплю на поверхность воды, но опыт будет еще интереснее, если вы осторожно поднесете каплю к самой поверхности и коснетесь ее. Капля будет моментально втянута в воду и начнет с большой скоростью двигаться вниз. Эту скорость капля приобрела под действием взаимного притяжения молекул жидкости. Возникающие при этом силы физики называют силами поверхност-

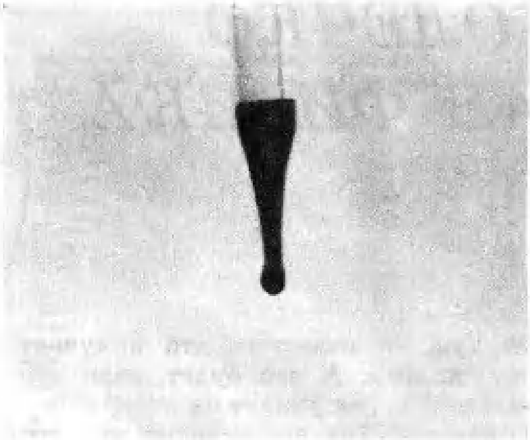


Рис. 1.

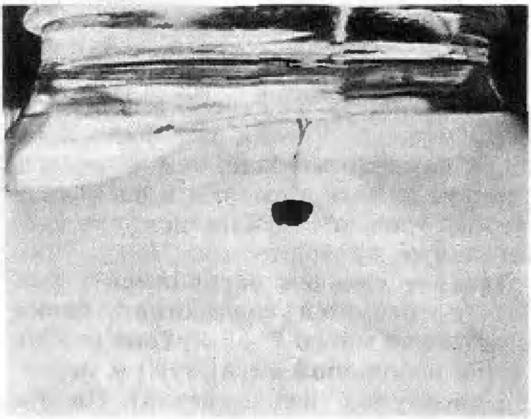


Рис. 2.

ного натяжения потому, что они всегда стремятся уменьшить свободную поверхность жидкости, втягивая ее внутрь и выравнивая любую неровность на ней.

Кое-кто мог бы мне возразить, что капля и без всякой силы поверхностного натяжения будет погружаться в воду. Конечно, под действием тяготения капля устремляется вниз. Но расчеты показывают, что силы поверхностного натяжения втягивают каплю в воду значительно энергичнее, чем это делает сила тяжести. Да вы в этом и сами только что убедились: капля висела на кончике пера, удерживаемая все теми же молекулярными силами.

Итак, сначала чернильная капля с большой скоростью погружается в воду, но затем движение ее замедляется. Виноваты в этом архимедова сила, почти уравновешивающая силу тяжести, и сила трения между каплей и неподвижной водой. Поскольку сила трения действует лишь на внешнюю поверхность капли, то, пройдя несколько сантиметров, капля превращается... во вращающееся кольцо (рис. 2). Механизм образования вихревого кольца довольно прост: боковая поверхность капли тормозится о неподвижную воду и начинает отставать от внутренней части. Место провалившейся серединки занимает чистая вода — вот и готов бублик. Конечно, в деталях этот процесс не такто прост, и если рассмотреть строение кольца подробно, то можно обнаружить чередующиеся слои чернил и воды, но эти тонкости нас сейчас не интересуют. Главное, что вихревое кольцо родилось и под действием небольшой разницы в плотности чернил и воды оно медленно движется вниз.

Кольцо недолго остается идеально круглым: его вращение замедляется и на нем появляются вздутия и впадины. Физики называют это явление неустойчивостью Рэлея — Тейлора. Суть его проста. Слой тяжелой жидкости (чернила), лежащий на слое более легкой жидкости (вода), вообще говоря, может пребывать в равновесии, но равновесие это будет неустойчивым. Стоит поверхности раздела жидкостей немного искривиться, как тяжелая жидкость устремится во впадины, а легкая начнет всплывать, усиливая вздутия. Это совершенно естественно: жидкости стремятся занять положение устойчивого равновесия, когда легкая находится наверху, а тяжелая — внизу. В нашем случае на кольце возникает 2—3 впадины, в которые стекают чернила и, прорывая в этих местах кольцо, начинают струйками двигаться вниз, ко дну сосуда (рис. 3).

Движение струи в неподвижной жидкости во многом напоминает движение отдельной капли: под действием вязких сил на конце струи опятьтаки образуется вихревое кольцо, которое через несколько секунд под действием рэлей-тейлоровской не-

Рис. 3.

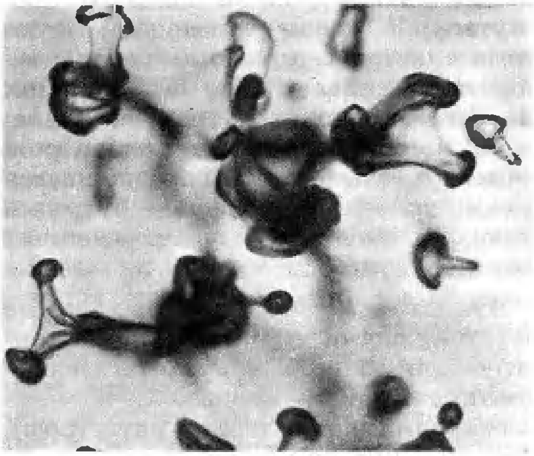


Рис. 4.

устойчивости само породит 2—3 струи (рис. 4). Такой процесс «почкования» повторяется несколько раз, пока чернила не достигнут дна банки, оставляя за собой голубой след. Кто бы мог подумать, что упавшая в воду одна-единственная капля чернил претерпевает такую удивительную метаморфозу. Еще несколько минут вы сможете любоваться ветвистым «деревом», растущим от поверхности воды вниз и имеющим на конце каждой ветви крохотное чернильное колечко (рис. 5).

Довольно легко можно зафиксировать все этапы эволюции капли с помощью фотоаппарата. Для этого поместите позади сосуда чистый лист белой бумаги и осветите сосуд сбоку с помощью настольной лампы. Важно, чтобы наружная поверхность сосуда была чистой, а также чтобы на внутренней поверхности не было пузырьков воздуха. Если вы используете банку, то от пузырьков легко освободиться: возьмите банку за горлышко и резко поверните ее на пол-оборота (вокруг вертикальной оси). Затем подождите минут пять, чтобы вода успокоилась, и начинайте опыт. Движение колец в воде происходит достаточно медленно, так что при фотографировании можно делать сравнительно длительные экспозиции, вплоть до 1/15—1/30 с. Но аппарат должен стоять на твердой подставке, и для спуска затвора вы должны пользоваться тросиком.

Итак, простая капля чернил продемонстрировала нам сразу три физических явления: поверхностное натяжение жидкости, образование вихревых колец и неустойчивость тяжелой жидкости над легкой, описанную в 1900 году английским физиком Дж. Рэлеем и более детально изученную в 1950 году другим английским физиком Дж. Тейлором. А где еще в природе встречаются эти физические явления?

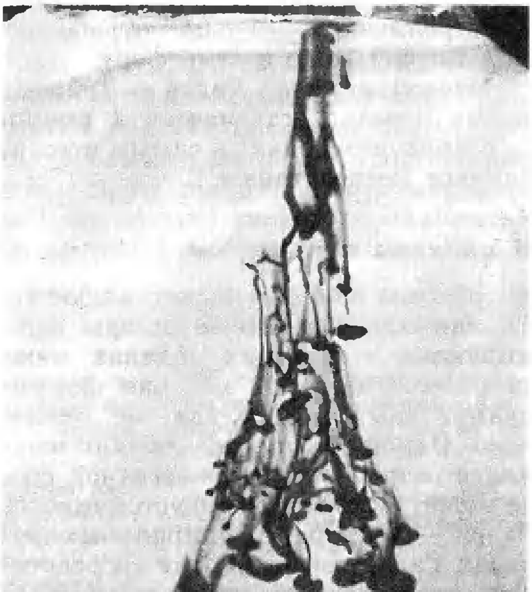


Рис. 5.

Примеры земные...

Поверхностное натяжение лучше всего проявляется в процессах и в объектах малого масштаба. Падающие из крана капли воды становятся круглыми под действием сил поверхностного натяжения. Эти же силы поддерживают рябь на поверхности воды и поднимают горячий воск или стеарин по фитилю свечи.

Вихревые кольца мы часто видим вылетающими изо рта курильщика или из выхлопной трубы автомобиля. Иногда это явление происходит и в больших масштабах: например, гигантское вихревое кольцо возникает после мощного взрыва в атмосфере. Вспомните фотографии печально известного «атомного гриба»: его «шляпка» — это гигантское вихревое кольцо, возникшее из-за быстрого подъема струи горячего воздуха. Важное свойство вихревого кольца — его устойчивость, прочность. Кольцо газа или жидкости не разрушается, пролетая такое расстояние, на котором обычная струя непременно разрушилась бы и перемешалась с окружающим веществом. Эту особенность вихревых колец используют в специальных дымовых трубах, которые «выстреливают» кольца отработанных газов высоко в атмосферу.

Неустойчивость Рэлея — Тейлора также нередко встречается в природе и приводит подчас к самым неожиданным последствиям.

И примеры космические

Астрономы неплохо представляют себе, как новорожденные звезды формируются в плотных облаках межзвездного газа*). А вот как формируются сами эти облака, не совсем ясно. Одной из причин их образования в разреженной межзвездной среде может быть как раз неустойчивость Рэлея — Тейлора. В спиральных рукавах Галактики, там, где сосредоточен межзвездный газ, существует магнитное поле с явно выраженным основным направлением, параллельным галактической плоскости. Горячий ионизованный газ, т. е. плазма, как известно, не может двигаться поперек силовых линий магнитного поля — оно сильно искривляет траектории заряженных частиц, отклоняет их в сторону. Поэтому иногда возникает ситуация, когда газ лежит на своего рода «магнитной подушке» и не может опуститься к плоскости Галактики. Магнитное поле упруго, но, по существу, невесомо: оно играет роль легкой жидкости. А находящийся над ним газ — роль тяжелой. Значит, их равновесие неустойчиво: стоит магнитному полю немного прогнуться в одном месте, как туда устремляется газ, который своим весом продавливает поле еще сильнее. В конце концов весь газ скапливается в образовавшейся магнитной «яме» и, уплотняясь, превращается в самостоятельное облако — будущий «инкубатор» для новорожденных звезд.

Нужно заметить, что различные неустойчивости играют большую конструктивную роль в природе (исследованием таких процессов, в частности, занимается теория катастроф). Именно неустойчивости, усиливая небольшие начальные флуктуации параметров системы, приводят к рождению качественно новых объектов и явлений. В нашем опыте с чернильной каплей неустойчивость Рэлея — Тейлора приводила к рождению струек чернил и к размножению колечек. В Галактике эта же неустойчивость приводит к рождению газовых облаков, а неустойчивость другого типа — гравитационная неустойчивость Дж. Джинса (тоже, между прочим, английского физика, изучившего ее в 1902 году) — приводит к рождению звезд в этих облаках.

Сразу после рождения звезды в облаке она начинает интенсивно разогревать окружающий газ. Давление в нем повышается, и, расширяясь, он, как поршень, расталкивает и уплотняет окружающий звезду холодный газ. Узнаете ситуацию —

*) См., например, статью «Формула рождения звезд» в «Кванте» № 11 за 1991 год.

разреженное вещество подпирает более плотное. Разумеется, рэлей-тейлоровская неустойчивость тут как тут: холодный газ дробится на куски и проваливается внутрь расширяющегося горячего «пузыря», надолго оставаясь там в виде плотных темных облачков. Самые мелкие из них со временем испарятся, но наиболее массивные могут сжаться и превратиться в звезды.

Не только рождение, но и смерть звезды может сопровождаться неустойчивостью Рэлея — Тейлора. Как известно, в конце жизни массивные звезды взрываются — это явление называют вспышкой сверхновой. В момент взрыва звезда с огромной скоростью сбрасывает свои наружные слои, которые, расширяясь и сгребая окружающий звезду межзвездный газ, формируют оболочку сверхновой. В чем-то это явление напоминает описанное выше расширение горячего «пузыря» вокруг молодой звезды, но имеет значительно больший масштаб и энергию. За счет знакомой нам неустойчивости уплотненный в оболочке газ проваливается отдельными потоками в горячий «пузырь», возникают мощные турбулентные движения, которые усиливают существующее в межзвездном газе магнитное поле. А это приводит к ускорению свободных электронов плазмы и к рождению мощного синхротронного излучения — самого характерного признака оболочек сверхновых.

Любопытно, что даже на этом не оканчивается связь рэлей-тейлоровской неустойчивости с эволюцией звезд. После вспышки сверхновой и сброса оболочки на месте массивной звезды иногда остается ее сильно сжавшееся ядро — нейтронная звезда. При сжатии существенно усиливается ее магнитное поле. Если такая нейтронная звезда вращается в паре с нормальной звездой, то своим притяжением она может захватывать часть вещества, постоянно теряемого этой звездой (ему дано красивое название «звездный ветер»). Но захваченное вещество не сразу падает на поверхность нейтронной звезды, а останавливается вблизи нее давлением магнитного поля. Пока газа немного, он устойчиво лежит на магнитной подушке, но с увеличением массы газа такое равновесие нарушается: под действием рэлей-тейлоровской неустойчивости газ пробивает брешь в магнитном поле и прорывается вниз к поверхности звезды. Ударяясь о поверхность нейтронной звезды, газовая струя разогревается до температуры в миллионы градусов и на некоторое время становится источником мощнейшего рентгеновского излучения. Такие вспыхивающие время от времени рентгеновские источники хорошо знакомы астрофизикам.

Вот, оказывается, с какими сложными космическими явлениями состоит в родстве поведение капли чернил в банке с водой — простейший, казалось бы, процесс, с которым каждый желающий может познакомиться, проделав нехитрый опыт.

Наши письма

Наш читатель В. Грачёв из Новокузнецка предлагает простой метод решения некоторых задач механики, где рассматривается равноускоренное движение тел. Вот его рассуждения.

Рассмотрим известную задачу:

Свободно падающее тело за последнюю секунду своего движения пролетело 35 м. Сколько времени падало тело? Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

Из того, что ускорение движения равно 10 м/с^2, следует, что каждую секунду скорость тела увеличивается на 10 м/с. Значит, за каждую предыдущую секунду тело пролетает на 10 м меньше, чем за последующую.

На основании этого можно утверждать, что в нашем случае тело за предпоследнюю секунду своего движения пролетело 35 м — 10 м=25 м, секундой раньше оно опустилось на 25 м — 10 м=15 м, еще секундой раньше — на 15 м — 10 м=5 м. Таким образом, легко видеть, что падение нашего тела продолжалось 4 секунды. Это и есть ответ задачи.

Такие же рассуждения справедливы и в других подобных ситуациях.

ТОПОЛОГИЯ

Я. СТЮАРТ

Тополог — это тот,
кто набивает чучела?
Из разговоров

Одним из самых неожиданных явлений в развитии математики XX в. стал головокружительный взлет науки, известной под названием *топология*. Желая пояснить, что такое топология, иногда говорят, что это «геометрия на резиновой поверхности». Это малопонятное и туманное описание позволяет тем не менее уловить суть предмета. *Топология изучает те свойства геометрических объектов, которые сохраняются при непрерывных преобразованиях.* Непрерывные преобразования характеризуются тем, что точки, расположенные «близко одна к другой» до преобразования, остаются такими и после того, как преобразование закончено. При топологических преобразованиях разрешается растягивать и изгибать, но не разрешается рвать и ломать. (Однако, с одной оговоркой: когда речь идет о преобразованиях, нас не интересует, что происходит в процессе этих преобразований, важны только начальное положение и конечный результат. Поэтому допускаются, скажем, разрезы по каким-то линиям, которые потом склеиваются по тем же линиям. Например, если шнурок завязан узлом и его концы соединены, можно разрезать его где-то, развязать узел и снова соединить на месте разреза. В этом смысле выражение «геометрия на резиновой поверхности» не слишком удачно.) Можно было бы дать строгое определение «непрерывности», однако пока мы ограничимся интуитивным представлением о ней.

Какого рода свойства являются топологическими? Ясно, что не те, которые изучаются в обычной евклидовой геометрии. Прямолинейность не есть топологическое свойство, потому что прямую линию можно изогнуть, и она станет волнистой. Треугольность — тоже не является топологическим свойством, ибо треугольник можно непрерывно деформировать в окружность (рисунок 1).

Итак, в топологии треугольник и окружность — одно и то же. Длины отрезков, величины углов, площади — все эти понятия изменяются при непрерывных преобразованиях, и о них следует забыть. Очень немногие привычные понятия геометрии годятся для топологии, поэтому приходится искать новые. Этим топология трудна для начинающего, пока он не постигнет сути дела.

Образцом топологического свойства объекта служит наличие дырки у бублика (причем довольно тонкая сторона этого дела — тот факт, что дырка *не является* частью бублика). Какую бы непрерывную деформацию ни претерпел бублик, дырка останется. Другое топологическое свойство — наличие *края*. Поверхность сферы не имеет края, а пустая полусфера имеет, и никакое непрерывное преобразование не в состоянии это изменить.

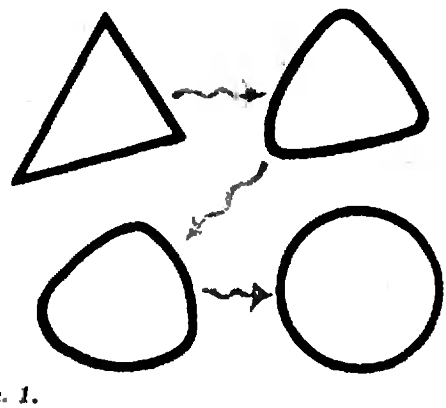


Рис. 1.

Из книги: Стюарт Я. Концепции современной математики (Минск: Вышэйшая школа, 1980).

Существует очень много различных непрерывных преобразований, поэтому топологам что бублик, что какая-нибудь другая штука с одной дыркой — все едино (в этом мы убедимся в следующем разделе). У тополога меньше объектов изучения, и в этом смысле предмет изучения в топологии *проще*, чем в большинстве других разделов математики (хотя сама топология как предмет отнюдь не проще других). В этом одна из причин того, что топология превратилась в мощный инструмент математики в целом: ее простота и общность обеспечили ей широкий круг применений.

Топологическая эквивалентность

Основные объекты изучения в топологии называются *топологическими пространствами*. Интуитивно их можно представлять себе как геометрические фигуры. Математически это — *множества* (иногда — подмножества евклидова пространства), наделенные дополнительной структурой под названием *топология*, которая позволяет формализовать понятие непрерывности. Поверхность сферы, бублика (правильнее — *тора*) или двойного тора — это примеры топологических пространств (рисунок 2).

Два топологических пространства *топологически эквивалентны*, если можно непрерывным образом перейти от одного из них к другому и непрерывным же образом вернуться обратно. Часто говорят, что тополог не отличает бублика от кофейной чашки.

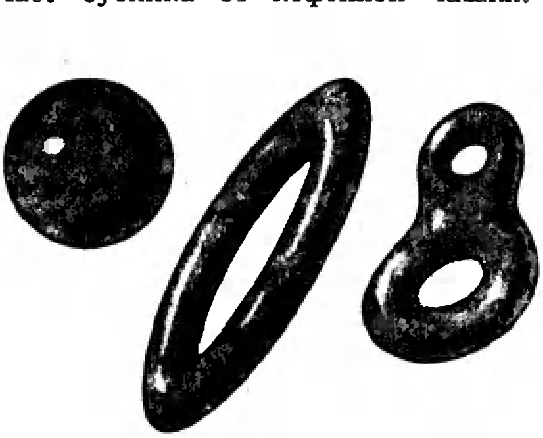


Рис. 2.

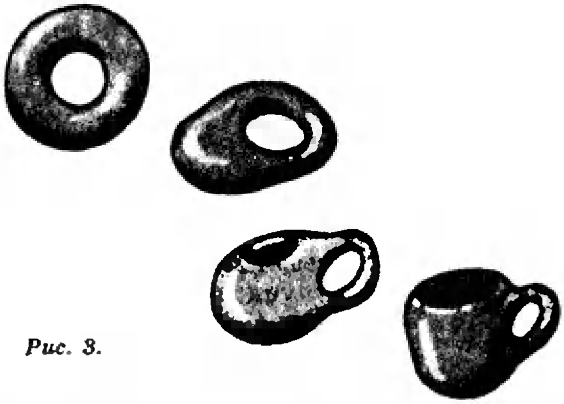


Рис. 3.

Рис. 4.

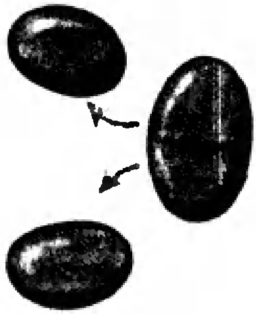


Рис. 5.

Это как раз и есть пример топологической эквивалентности (рисунок 3).

Нам приходится вводить требование непрерывности как прямого отображения, так и обратного к нему, по следующей причине. Возьмем два куска глины и слепим их вместе. Такое преобразование непрерывно, поскольку близкие друг к другу точки останутся таковыми (рисунок 4). Однако при обратном преобразовании один кусок распадается на два (рисунок 5), и, следовательно, близкие точки по разные стороны от линии раздела окажутся далеко друг от друга, т. е. обратное преобразование не будет непрерывным. Такие преобразования нам не подходят.

В качестве упражнения попытайтесь разбить топологические пространства, изображенные на рисунке 6, на классы топологически эквивалентных.

Некоторые необычные пространства

Если бы все топологические пространства были такими удобными, как сфе-

Рис. 6.

ра или тор, вряд ли стоило бы заниматься топологией. Несколько более экзотических примеров, возможно, помогут разбудить вашу интуицию.

Вы, наверное, слышали о *ленте* (или листе) *Мёбиуса**), которую можно получить из бумажной полоски, склеив ее края после поворота на 180° (рисунок 7).

Лента Мёбиуса топологически не то же самое, что цилиндрическая лента, склеенная из той же полоски. Она имеет только один край (посчитайте!). Поскольку количество краев — топологическое свойство, а цилиндрическая лента имеет два края, эти две ленты топологически неэквивалентны.

Известно еще одно свойство ленты Мёбиуса — то, что она имеет лишь одну сторону. Цилиндрическую ленту можно раскрасить двумя цветами — одну сторону красным, другую синим. Проделать то же самое с лентой Мёбиуса не удастся.

К сожалению, свойство односторонности трудно описать математически строго и в то же время достаточно наглядно. Ведь наша лента не имеет толщины, и каждая ее точка находится «на» обеих сторонах, подобно тому как каждая точка плоскости лежит «на» обеих ее сторонах. В топологии мы должны рассматривать эту ленту как некое пространство, а не подмножество евклидова пространства, и тогда не совсем очевидно, является ли количество сторон топологическим свойством.

Чтобы пояснить эту мысль, позвольте мне задать вопрос: сколько сторон у трехмерного евклидова пространства?

Думаю, большинство ответит: «ни одной». Ведь наше пространство продолжается до бесконечности в любом направлении, какие же у него могут быть стороны?

Но представьте себе, что вы плоское существо, живущее на двумерной плоскости и не имеющее больше ни о чем понятия. Сколько сторон у вашего «пространства»? Если вы раньше ответили «ни одной», вы непременно должны повторить тот же ответ и теперь: ведь плоскость тоже продолжается и продолжается во всех направлениях.

Иначе говоря, количество сторон зависит от того, рассматривать ли плоскость саму по себе или как часть трехмерного пространства. То же самое относится и к трехмерному пространству: если в качестве четвертого измерения ввести время, то окажется, что наше пространство имеет две стороны — прошлое и будущее.

Надеюсь, теперь понятно, насколько

*) О листе Мёбиуса «Квант» писал неоднократно (см., например, № 1 за 1990 год, а также «Калейдоскоп» в № 11 за 1991 год). *(Прим. ред.)*

трудно даже объяснить, что понимается под числом сторон, не говоря уж о том, чтобы понять, топологическое это свойство или нет.

Однако существует все-таки одно явление, которое могут наблюдать воображаемые жители ленты Мёбиуса, не выходя за пределы своего «пространства», и которое позволяет дать математическое описание «односторонности». Предположим, что эти создания имеют две руки, причем их большие пальцы направлены в разные стороны. Тогда им доступны понятия «правый» и «левый». Кроме того, допустим, что они носят варежки (рисунок 8).

Однажды просыпается такое существо и видит, что все его правые варежки куда-то подевались и остались одни левые. Проявив находчивость, оно берет одну варежку и переносит ее вдоль ленты, как показано на рисунке 9.

К большому нашему (но не его!) удивлению, левая варежка превратилась в правую. Правда, при этом и левая рука воображаемого существа превратилась в правую, а правая — в левую, но зато оно получило годную пару варежек.

Можете сами убедиться в этом, склеив ленту Мёбиуса из бумаги (и тогда, чтобы увидеть, что делается

Рис. 7.

Рис. 8.

Рис. 9.

«на другой стороне» бумаги, придется смотреть на свет *сквозь* нее), а лучше из прозрачной пленки. Вместо этого можете воспользоваться своими двумя руками и воображаемой лентой Мёбиуса. Поскольку руки не двумерны, следите только за их *очертаниями*. Держите руки перед собой ладонями наружу, пальцы вверх, большие пальцы прижаты друг к другу. Левую руку оставьте на месте, а правую двигайте вдоль воображаемой ленты Мёбиуса следующим образом. Поднимите правый локоть, чтобы ладонь наклонилась, затем поворачивайте ее вниз от себя, поднимайте локоть еще выше, пока рука не окажется в положении тыльной стороной к вам, пальцами вниз. Теперь сдвиньте ее влево на уровень левой руки и отведите от себя большой палец, чтобы ладонь стала к вам ребром. В идеале следовало бы поворачивать и дальше правую руку, но анатомия не позволяет, поэтому повернните левую руку большим пальцем к себе и соедините ладони ребром к ребру, левая вниз, правая вверх.

Вот это неудобное положение и получается после того, как ваша правая рука опишет ленту Мёбиуса (а левая немного продвинется ей навстречу). Чтобы стало полегче, держите руки в том же положении одну относительно другой, но передвиньте правую немного вправо, а левую за ней следом. Теперь нужно перевернуть правую руку снизу вверх на поверхности ленты Мёбиуса. Для этого опустите правый локоть, продолжая держать руку ладонью наружу. Теперь обе кисти направлены вверх, левая ладонью внутрь, правая — наружу. Сложите их вместе. Вы убедились в том, как точно они совпали. Если говорить только об очертаниях, то ваша правая рука, описав ленту Мёбиуса, стала левой (а заодно вы получили превосходный пример стиля рассуждений, известного у математиков под названием «размахивание руками»).

Жители двустороннего мира (к которым относимся и мы с вами, согласно современным представлениям науки) не смогли бы проделать этот фо-

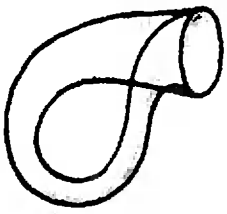


Рис. 10.

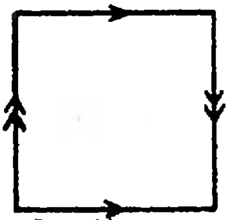


Рис. 11.

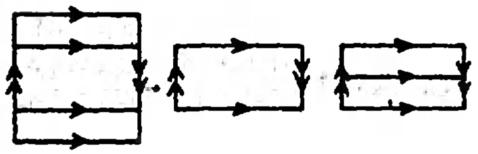


Рис. 12.

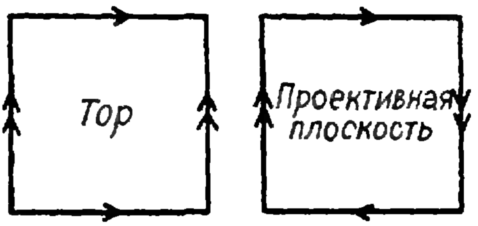


Рис. 13.

кус с варежками: для них правая останется правой, а левая — левой. Для существа с ленты Мёбиуса понятие правого и левого имеет смысл лишь до тех пор, пока предметы не передвигаются, и невозможно дать определение правого и левого, которое годилось бы для всей поверхности в целом. В таком случае говорят, что эта поверхность *неориентируема*. А пространство вроде нашего, в котором можно дать глобальное определение правого и левого, называется *ориентируемым*. Ориентируемость соответствует двусторонности, а неориентируемость — односторонности, и оба этих свойства являются внутренними топологическими свойствами, не зависящими ни от какого внешнего пространства.

Если соединить края двух лент Мёбиуса, получится поверхность, называемая *бутылкой Клейна* (рисунок 10). У нее нет краев, и она неориентируема, потому что неориентируемы ленты Мёбиуса. Кроме того, ее нельзя вложить в трехмерное пространство так, чтобы не было самопересечений.

Бутылку Клейна можно описать по-другому: представьте себе квадрат, стороны которого склеены так, как показывают стрелки на рисунке 11. (Сначала верхняя сторона склеивается с нижней и получается цилиндр. Затем, чтобы правильно склеить края цилиндра, его надо согнуть и протолкнуть сквозь самого себя.) При помощи этой же диаграммы можно убедиться в том, что бутылка Клейна действительно получается из двух лент Мёбиуса: разрежем ее, как показано на рисунке 12.

Иногда можно услышать какие-то утверждения о внутренней и наружной стороне бутылки Клейна. Они бессмысленны: в трехмерном пространстве ее построить нельзя, а в четырехмерном, где ее можно сделать без самопересечений, говорить о внутренности бутылки Клейна — все равно, что говорить о внутренности окружности в трехмерном пространстве,— можно в нее войти и из нее выйти без всяких препятствий.

Склеиванием сторон квадрата можно получить еще два интересных пространства: тор и *проективную плоскость* (называемую так из-за ее связи с проективной геометрией) (рис. 13).

О торе мы уже говорили — это ориентируемая поверхность. Проективная плоскость, подобно бутылке Клейна, не имеет края, неориентируема и не допускает вложения в трехмерное пространство.

Проективная плоскость представляет собой ленту Мёбиуса, приклеенную край в край к кругу. Чтобы построить ее в трехмерном пространстве, надо превратить край ленты Мёбиуса в окружность. Лента при этом будет перекручиваться и самопересекаться, образуя так называемый *скрещенный колпак* (рисунок 14). Закрыв его отверстие, получим проективную плоскость (рисунок 15).

Наконец, познакомимся еще с одним занятным пространством — *рогатой сферой Александера* (рисунок 16)*). Оно строится так. Вытя-

*) О ней вы можете прочитать в «Кванте» № 6 за 1990 год. (*Прим. ред.*)

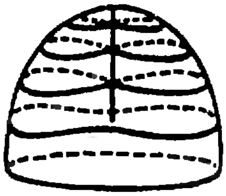


Рис. 14.

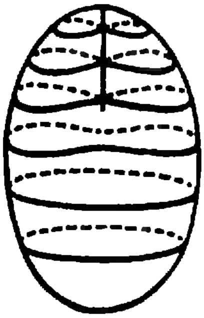


Рис. 15.

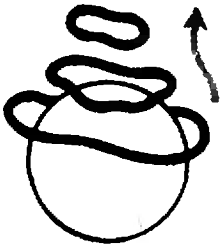


Рис. 17.

Рис. 18.

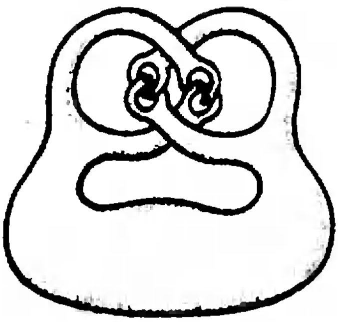


Рис. 16.

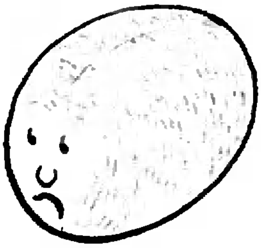


Рис. 19.

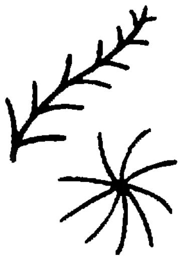


Рис. 20.

нем из сферы два рога, расщепим надвое их концы и переплетем их между собой, расщепим надвое новые концы и снова переплетем их, и так далее до бесконечности. Хотите — верьте, хотите — нет, но то, что получается, топологически эквивалентно сфере: способ вытягивания рогов можно задать при помощи подходящей функции, которая определяет топологическую эквивалентность. Однако наружное пространство рогатой сферы уже не будет топологически эквивалентно пространству вне обычной сферы.

В самом деле, с обычной сферы соскакивает любая надетая на нее петля (рисунок 17), а на рогатой сфере она может запутаться в рогах (рисунок 18). И здесь снова заботы причиняет не сама поверхность, а окружающее ее пространство.

Теорема о волосатом шаре

Мы немного поговорили о понятиях, которые вводятся в топологии, и объектах, которые в ней изучаются. Теперь приведем пример топологической теоремы.

Если внимательно посмотреть, как растет шерсть у собаки, можно обнаружить, что вдоль спины она разделяется «на пробор», а другой «пробор» идет вдоль живота. С точки зрения топологии собака — это шар (если считать, что пасть у нее закрыта, и пренебречь внутренними органами); чтобы в этом убедиться, достаточно «втянуть» ей ноги и немного ее «раздуть» (рисунок 19).

Можно задаться таким вопросом: удастся ли так «причесать» собаку, чтобы не стало «проборов». В результате получился бы волосатый шар, не имеющий ни «проборов», ни «макушек», изображенных на рисунке 20.

Этот вопрос относится к топологии, ибо при любой непрерывной деформации такого шара гладкая шерсть останется гладкой, а «пробор» останется «пробором». Топологические методы позволяют установить (хотя это нелегко), что гладко причесать шар невозможно. (В правильной формулировке задачи говорится о «векторных

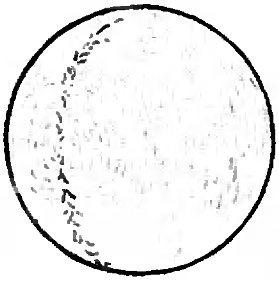


Рис. 21.

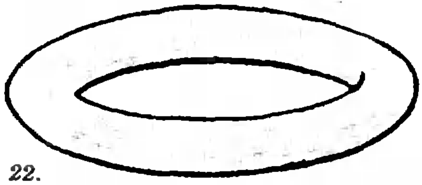


Рис. 22.

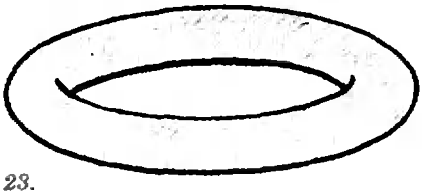


Рис. 23.

полях» на сфере, но этому вполне соответствует интуитивное представление о волосатом шаре.)

Лучшее, чего можно добиться,— причесать волосы так, что останется лишь одна «макушка» — точка, в которой нарушается гладкость (рис. 21).

Не будем углубляться здесь в доказательство этой теоремы, однако заметим, что ее значение выходит за рамки причудливых применений к воображаемым гладким собакам.

Поверхность Земли представляет собой сферу. Если для какого-то момента времени изобразить на сфере направления воздушных потоков в атмосфере Земли, т. е. направления всех ветров, дующих над поверхностью Земли, то получится своего рода «прическа» на этой сфере, где роль волос будут играть линии, изображающие потоки. Наша теорема утверждает, что не существует гладкой системы ветров (за исключением случая полного безветрия, что, однако, невозможно, но по другим причинам), т. е. где-то всегда есть циклон.

Таким образом, зная только *форму* Земли, мы уже можем делать заключения о поведении ветров без всяких сведений о том, куда они дуют на самом деле.

А вот на тороидальной планете возможен постоянный ветер без циклонов, поскольку волосатый тор можно причесать требуемым образом (рисунок 22).

Дальнейшее изучение, основанное уже на более подробных сведениях о ветрах, показывает, что гладкий поток скорее будет обвиваться вокруг тора, как на рисунке 23.

Известны и многие другие приложения теоремы о волосатом шаре. Например, в алгебре она применяется для доказательства теоремы о том, что каждое уравнение, левая часть которого — многочлен, имеет корни в поле комплексных чисел (так называемая «основная теорема алгебры»).

Наша обложка

(Начало см. на с. 7)

уникален. Если взять два одинаковых прямоугольных треугольника с целыми сторонами (их называют *пифагоровыми*) и сложить их гипотенузами так, чтобы получился четырехугольник, симметричный относительно одной из его диагоналей (он называется *дельтоидом*), то длины радиусов и отрезков, соответствующих рассмотренным, окажутся рациональными числами. Теперь найдем наименьшее общее кратное знаменателей и увеличим стороны четырехугольника в это число раз. Тогда в полученном четырехугольнике длины всех рассматриваемых радиусов и отрезков окажутся целыми числами. Центры восьми окружностей вновь будут лежать на окружности с центром в точке касания двух из них. Попробуйте доказать все эти утверждения самостоятельно.

Известно, что все пифагоровы треугольники со взаимно простыми длинами сторон описываются формулой $a=m^2-n^2$, $b=2mn$, $c=m^2+n^2$, где m и n — взаимно простые числа различной четности. Если увеличить стороны этого треугольника в $2c(a+b)$ раз, то у дельтоида, составленного из двух таких треугольников, длины всех указанных радиусов и отрезков будут целыми числами.

КОРАБЕЛЬНЫЕ ПУШКИ И ВОЛНЫ В УПРУГИХ СТЕРЖНЯХ

Кандидат технических наук
Г. ЛИТИНСКИЙ

В 1914 году в Петербурге при полигонных испытаниях пробной установки двенадцатидюймовых корабельных орудий было обнаружено, что давление, развиваемое в их стволах, составляет 450 атмосфер, вместо ожидаемых 250 атмосфер, для которых были выполнены расчеты прочности. Казалось, что все построенные орудия придется забраковать из-за их несоответствия неожиданно большим нагрузкам. Замена орудий обошлась бы в 2,5 млн. рублей, и, кроме того, корабли не были бы готовы в срок.

Экспертный анализ ситуации был поручен А. Н. Крылову*), который установил, что прибор, регистрирующий давление в стволах,— индикатор Виккерса — дает сильно искаженные показания, а истинное максимальное давление примерно вдвое меньше записанного. Из заключения Крылова следовало, что замена орудий совершенно не нужна.

Исследование работы индикатора Виккерса, проведенное Крыловым, имеет не только практическое, но и большое принципиальное значение.

Индикатор Виккерса представляет собой вариант пружинного динамометра. Схема индикатора приведена на рисунке 1. Под действием давления поршень перемещается, деформируя при этом пружину. По перемещению поршня судят об изменении давления. Для снятия показаний индикатора служит шток, соединяющий поршень индикатора с регистрирующим устройством (оно на рисунке не показано).

Простое объяснение работы индикатора можно получить, предположив, что вся масса подвижной части индикатора сосредоточена в поршне, а пружина индикатора идеальная — абсолютно упругая и невесомая.

Статическая деформация пружины (т. е. смещение поршня при медленном приложении силы F) равна

$$x_0 = \frac{F}{k},$$

где k — жесткость пружины. Максимальную же деформацию пружины при мгновенном приложении силы (поршень разгонится, проскочит положение равновесия, потом остановится) можно найти, приравняв работу силы F к изменению потенциальной энергии пружины:

$$Fx_м = \frac{kx_м^2}{2}, \quad x_м = \frac{2F}{k}.$$

Получаем, что максимальная динамическая деформация пружины в два

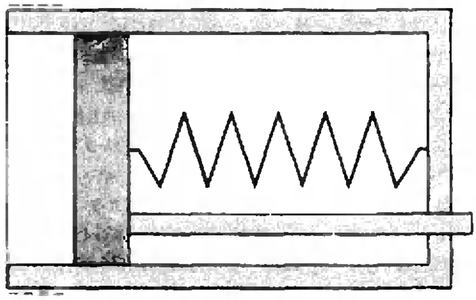


Рис. 1. Схема индикатора Виккерса.

*) Алексей Николаевич Крылов (1863—1945) — механик, математик, кораблестроитель и историк науки. Помимо множества специальных трудов, перу А. Н. Крылова принадлежат перевод на русский язык работы И. Ньютона «Математические начала натуральной философии» и очень интересная книга мемуаров «Мои воспоминания».

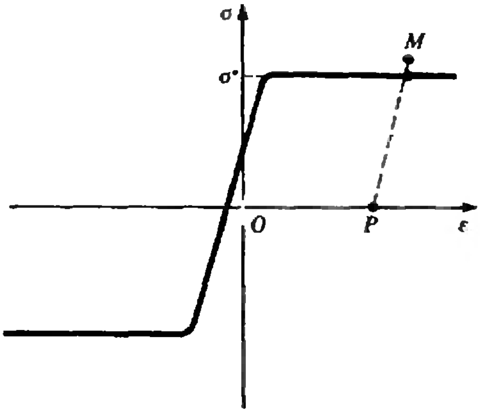


Рис. 2. График зависимости между напряжением и деформацией. При напряжениях $|\sigma|<\sigma^*$ металл упруг, при бо́льших напряжениях — пластичен. Если нагрузить образец до напряжения, соответствующего точке M, и после этого уменьшать напряжения до нуля, деформации будут изменяться так, как показано пунктиром. OP соответствует остаточной пластической деформации.

раза больше статической. А так как время действия газов на индикатор Виккерса мало́, то он фиксирует именно максимальное смещение поршня.

Однако анализ, проведенный Крыловым, показал, что картина явления значительно сложнее. В реальных условиях массой пружины пренебрегать нельзя, и главную роль начинают играть распространяющиеся в пружине упругие волны. Поэтому для того, чтобы разобраться в работе индикатора, надо изучить распространение звуковых волн в упругих стержнях.

Упругие свойства твердых тел

Напомним сначала некоторые понятия, известные из школы.

Пусть имеется стержень с поперечным сечением S, перпендикулярно концам которого приложена сила F, равномерно распределенная по торцам. Отношение

$$\sigma=\frac{F}{S}$$

называется напряжением. Растягивающей силе мы приписываем положительное значение, сжимающей — отрицательное.

Относительной деформацией (в дальнейшем слово «относительная» будем опускать) называется отношение удлинения стержня ΔL к его начальной длине L:

$$\varepsilon=\frac{\Delta L}{L}.$$

В случае, когда длина стержня уменьшается, деформация будет отрицательной.

Деформация называется упругой, если ε зависит только от σ и при снятии напряжения она исчезает. Оказывается, деформация будет упругой до тех пор, пока ε пропорциональна σ (закон Гука):

$$\sigma=E\varepsilon.$$

Коэффициент пропорциональности E в этом соотношении называется модулем Юнга.

Большинство материалов являются упругими лишь при малых деформациях. Сталь, например, упруга только при деформациях, не превышающих десятые доли процента. График зависимости напряжений от деформаций для металлов представлен на рисунке 2.

Возможны и другие отклонения свойств реальных материалов от упругих. Например, бутилкаучук (разновидность синтетического каучука), из которого изготавливают камеры автомобильных шин,— при медленном деформировании он ведет себя как упругое тело, но если уронить шарик, сделанный из него, на пол, то он практически не отскочит — почти вся кинетическая энергия шарика перейдет в тепло.

Противоположный пример — «глупая замазка» — один из видов каучукосодержащей столярной замазки. В руках она ведет себя подобно пластилину, но если уронить шарик, сделанный из нее, на пол, он отскочит почти до первоначальной высоты.

Распространение возмущений в упругих стержнях

Пусть к концу достаточно длинного стержня в момент времени $t=0$ внезапно приложена сила F, которая в дальнейшем остается постоянной. Если сила F не очень велика, то возникающие в стержне деформации будут упругими. В этом случае возмущения будут распространяться в стержне посредством упругих звуковых волн. Обозначим их скорость буквой c. Через промежуток времени t возмущения успевают распространиться лишь на участке стержня AB (рис. 3). Остальная часть стержня еще «не знает», что к точке A приложена сила.

Граница B, отделяющая возмущенную часть стержня от невозмущенной, называется фронтом упругой волны. Справа от фронта возмущений нет, т. е. напряжения, деформации и скорости всех точек равны нулю, как и до приложения силы. Слева от фронта, на участке AB, напряжение в любом сечении равно F/S, деформация всюду равна ε и все точки движутся с одной и той же скоростью v.

Найдем связь между скоростью v и деформацией ε (здесь и далее полагаем $v \ll c$, или $\varepsilon \ll 1$). Точки на фронте волны еще не успели сместиться из своего начального положения, а смещение левого конца равно vt. Значит, деформация участка AB, начальная длина которого равна ct, составляет

$$\varepsilon = \frac{vt}{ct} = \frac{v}{c}.$$

Определим теперь скорость звука c в стержне, исходя из закона сохранения импульса. Импульс участка AB стержня, равный $mv = \varrho(ct)Sv$, приобретается под действием силы F, которая действует в течение времени t:

$$Ft = \varrho ctSv.$$

Подставляя $F = \sigma S = E\varepsilon S$ и $v = \varepsilon c$, найдем выражение для скорости распространения упругих волн:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}.$$

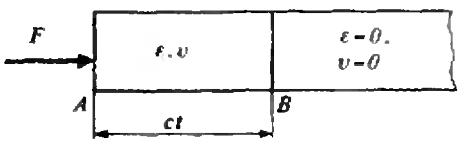


Рис. 3. Распространение упругой волны в стержне.

Приведем значения c для некоторых материалов:

сталь	4900 м/с
алюминий	5100 м/с
медь	3500 м/с
стекло	5200 м/с
резина	40 м/с

Теперь рассмотрим два конкретных примера, после чего перейдем к анализу работы индикатора Виккерса.

Удар упругого стержня о жесткую преграду

Пусть до соударения стержень длиной L имел скорость v (рис. 4, *а*). В момент удара $t=0$ скорость точки A мгновенно изменилась от v до 0. От точки A в момент времени $t=0$ пошла упругая волна.

Перед фронтом волны все точки движутся со скоростью v, напряжения и деформации отсутствуют, как и до удара (рис. 4, *б*). За фронтом упругой волны скорости всех точек одинаковы и равны скорости точки A, т. е. нулю. Деформации во всех сечениях стержня, через которые уже прошла упругая волна, равны v/c; следовательно, напряжение равно Ev/c.

В момент времени $t=L/c$ волна дойдет до конца стержня (рис. 4, *в*). Теперь все точки стержня покоятся. Напряжение во всех сечениях стержня равно Ev/c. Чтобы понять, что будет происходить дальше, представим, что мы теперь мгновенно приложили к точке B сжимающую силу $F_1 = EvS/c$. Напряжения, созданные силой F_1, уравновесят напряжения, «принесенные» упругой волной, и стержень окажется в состоянии равновесия.

Но на самом деле конец B стержня свободен от нагрузки. Что же произойдет, если освободить конец B стержня, находящегося в сжатом состоянии? По стержню справа налево начнет распространяться упругая волна (ее называют отраженной от сечения B). Перед фронтом отраженной волны все точки покоятся (рис. 4, *г*), напряжение равно Ev/c, деформация $\varepsilon = v/c$. За фронтом отраженной волны напряжения равны нулю, как в точке B. Значит, равна нулю и деформация стержня за фронтом отраженной волны.

При прохождении отраженной волны через любое сечение стержня деформация изменяется от v/c до 0. Скорости точек стержня за фронтом отраженной волны равны v и направлены вправо.

В момент времени $t=2L/c$ отраженная волна дойдет до сечения A. Начиная с этого момента времени весь стержень перейдет в недеформированное состояние, все его точки будут иметь направленную вправо скорость v (рис. 4, *д*). В следующий момент стержень отскочит от преграды (рис. 4, *е*).

Итак, для отскока стержня от преграды требуется время, которое не зависит от скорости движения стержня перед ударом, а определяется лишь длиной стержня и скоростью распространения в нем упругих волн.

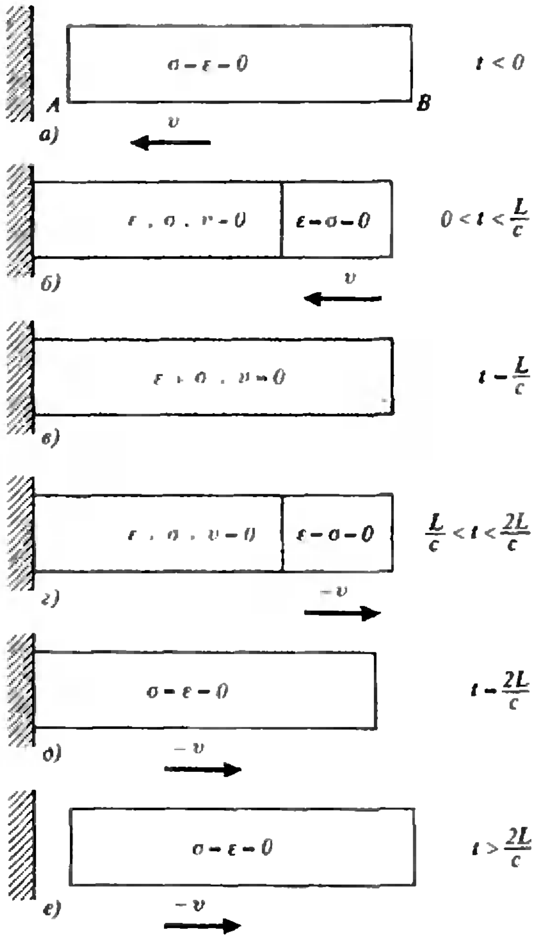


Рис. 4. Соударение стержня с жесткой преградой.

Соударение упругих стержней

В школьном задачнике часто встречаются слова «удар считать абсолютно упругим». Это означает, что кинетическая энергия соударяющихся тел до удара равна их кинетической энергии после удара. Выясним, всегда ли соударение упругих стержней будет абсолютно упругим.

Если стержни сделаны из одного материала, имеют одинаковые сечения и длину, то процессы, происходящие в каждом из стержней при ударе, будут такими же, как и при ударе стержня о жесткую преграду (это понятно из соображений симметрии). Если до удара оба стержня имели скорость v, то после удара их скорости изменят свои значения на противоположные. Кинетическая энергия при этом сохраняется, т. е. удар является абсолютно упругим.

Рассмотрим теперь случай, когда длина одного стержня L, а другого $2L$. После соударения в момент времени $t=L/c$ волна дойдет до конца короткого стержня и отразится от него. При $t=2L/c$ короткий стержень отделится от длинного. В этот момент времени волна, возникшая в длинном стержне, дойдет до его конца.

Мы получили следующую картину: после соударения короткий стержень отлетел со скоростью v, длинный остался неподвижен. Действительно, в момент времени $t=2L/c$ центр тяжести длинного стержня неподвижен. При $t\geqslant 2L/c$ на стержень не действуют внешние силы, следовательно, его центр тяжести будет неподвижен и в дальнейшем. Кинетическая энергия обоих стержней до удара была равна $mv^2/2+2mv^2/2$, после удара она стала равна $mv^2/2$. Две трети кинетической энергии перешли в энергию колебаний в длинном стержне.

Таким образом, мы видим, что удар упругих стержней различной длины не является абсолютно упругим.

Анализ работы индикатора Виккерса

Выясним теперь, почему индикатор давал искаженные показания. Для простоты массой поршня индикатора будем пренебрегать. Пружину для удобства будем рассматривать как упругий стержень длиной L, сечением S и модулем упругости E. Модуль E зависит не только от свойств материала, но и от конструкции пружины.

Если к поршню медленно приложить силу F, то деформация пружины составит $F/(SE)$. Смещение поршня x_0 будет равно

$$x_0 = \frac{FL}{SE}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда силу F прикладывают мгновенно. В момент приложения силы от точки A начнет распространяться упругая волна. Перед фронтом этой волны пружина не деформирована, скорости всех ее точек равны нулю, за фронтом волны деформация пружины составляет $\varepsilon = F/(SE)$, следовательно, скорости всех этих точек за фронтом волны равны (рис. 5, *а*)

$$v = \frac{Fc}{SE}.$$

В момент времени $t = L/c$ волна дойдет до точки B (рис. 5, *б*) и отразится от нее. За фронтом отраженной волны скорости всех точек равны нулю, деформация за фронтом будет в 2 раза больше, чем перед фронтом (рис. 5, *в*). Отраженная волна дойдет до точки A в момент времени $t = 2L/c$ (рис. 5, *г*). В течение промежутка времени $t = 2L/c$ поршень двигался со скоростью v; следовательно, за это время он сместился на расстояние

$$x_м = \frac{v2L}{c} = \frac{2LF}{SE} = 2x_0.$$

Итак, при мгновенном приложении силы максимальное отклонение поршня индикатора вдвое больше, чем при медленном. Ответ получился таким же, как в упрощенной модели с невесомой пружиной!

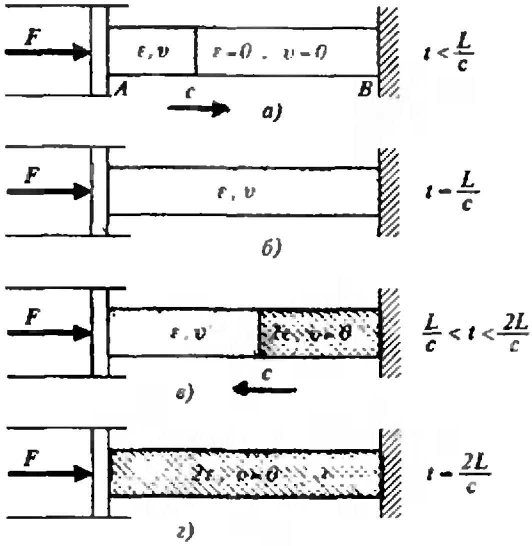


Рис. 5. Мгновенная нагрузка на стержень с закрепленным противоположным концом (модель индикатора Виккерса).

Мы видим, что статический и динамический расчеты упругих систем могут приводить к сильно различающимся результатам. Для многих практических вопросов важно знать, когда применим статический расчет, а когда необходим динамический. А. Н. Крылов предложил следующий критерий применимости статического расчета:

Статический расчет применим, если время нарастания нагрузки много больше периода свободных колебаний системы.

Для упругого стержня период свободных колебаний равен $2L/c$. При выстреле в стволе орудия давление изменяется так, что время нарастания давления приблизительно равно 0,01 с. Если длина пружины индикатора 0,1 м и скорость распространения возмущений в пружине 20 м/с, то статический расчет индикатора недопустим.

А. Н. Крылов решил более общую задачу, учитывая массы поршня и пружины. Для решения задачи он использовал довольно сложный математический аппарат, однако для того чтобы получить качественные выводы, оказалось вполне достаточно нашей упрощенной модели индикатора.

Задачник „Кванта"

Задачи

М1351 — М1355, Ф1358 — Ф1362

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 сентября 1992 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7—92» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1351» или «Ф1358». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задача Ф1358 предлагалась на Московской городской олимпиаде по физике, а задачи Ф1359, Ф1360 и Ф1362 — на Межреспубликанской физической олимпиаде 1992 года.

М1351. Пусть в прямоугольном треугольнике AB и AC — катеты, $AC>AB$. На AC выбрана точка E, а на BC — точка D так, что $AB=AE=BD$. Докажите, что треугольник ADE будет прямоугольным в том и только в том случае, если стороны треугольника ABC относятся как $3:4:5$.

А. Паровян

М1352. n чисел ($n>1$) называются близкими, если каждое из них меньше, чем сумма этих чисел, деленная на $n-1$. Пусть a, b, c, ...— n близких чисел, S — их сумма. Докажите, что

а) все они положительны;

б) всегда $a+b>c$;

в) всегда $a+b\leqslant S/(n-1)$.

Р. Шлейфер

М1353. Дана таблица $n\times n$, заполненная числами по следующему правилу: в клетке, стоящей в i-й строке и j-м столбце таблицы, записано число $1/(i+j-1)$. В таблице отметили n чисел таким образом, что никакие два отмеченных числа не находятся в одном столбце или в одной строке. Докажите, что сумма отмеченных чисел не меньше 1.

С. Иванов

М1354. Даны три треугольника: $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$. Известно, что их центры тяжести (точки пересечения медиан) лежат на одной прямой и никакие три из девяти вершин этих треугольников не лежат на одной прямой. Рассмотрим 27 треугольников вида $A_iB_jC_k$, где i, j, k независимо пробегают значения 1, 2, 3. Докажите, что эти 27 треугольников можно разбить на две группы так, что сумма площадей треугольников первой группы будет равна сумме площадей треугольников второй группы.

А. Анджанс

М1355. Докажите, что если число $a=2^{2k}+2^k+1$ не является делителем числа $2^{2^k+1}-1$, то a — составное.

Г. Карнаух

Ф1358. При каких значениях коэффициента трения жесткая палочка длиной l с резиновыми наконечниками сможет удерживаться в горизонтальном положении под куполом радиусом R (рис. 1)?

Д. Григорьев

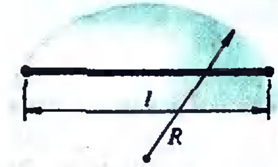


Рис. 1.

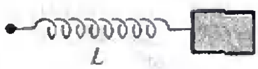


Рис. 2.

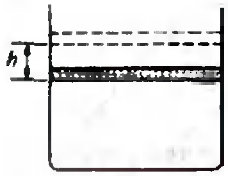


Рис. 3.

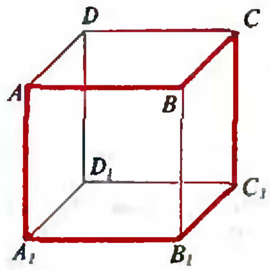


Рис. 4.

Задачник „Кванта"

Ф1359. На гладком горизонтальном столе расположен пружинный маятник — тяжелый груз на легкой пружине, длина которой в свободном состоянии $L=50$ см (рис. 2). Из-за небольшого вязкого трения о воздух колебания маятника медленно затухают — амплитуда уменьшается в 2 раза за 10 полных колебаний. Для поддержания амплитуды неизменной поступают следующим образом: свободный конец пружины быстро сдвигают на $l=1$ мм навстречу грузу в тот момент, когда длина пружины минимальна, и возвращают в прежнее положение, когда она максимальна. Определите установившуюся амплитуду таких колебаний.

З. Рафаилов

Ф1360. В цилиндрическом сосуде под тяжелым поршнем находится кислород (рис. 3). Поршень поднимают на высоту h от положения равновесия, дожидаются установления температуры, затем сосуд теплоизолируют и поршень отпускают. На каком расстоянии от прежнего положения равновесия установится поршень, когда система вновь придет в равновесие? Теплоемкостью стенок и поршня пренебречь.

А. Зильберман

Ф1361. Несколько заряженных проводников расположены вдали от других тел. Потенциал одного из них равен φ_1 и становится равным нулю после того, как заряды всех остальных тел изменяют на противоположные. Каким станет потенциал первого проводника, если его заряд увеличить теперь в 4 раза?

Р. Александров

Ф1362. Виток в форме квадрата $ABCD$, сделанный из тонкого провода, имеет индуктивность L_1. Виток более сложной формы $ABCC_1B_1A_1A$ (рис. 4) из того же провода имеет индуктивность L_2. Чему равна индуктивность еще более сложного витка $ABB_1C_1D_1DA$? Фигура $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — это куб.

М. Цыпин

Решения задач

М1321—М1325, Ф1338—Ф1342

М1321. Ладья побывала во всех клетках шахматной доски размером $n\times n$ клеток. Докажите, что она должна была при этом изменить направление движения не менее $2n-2$ раза. (Ладья движется параллельно сторонам квадрата.)

Заметим, что каждый из концов вертикального (горизонтального) отрезка траектории является либо началом ее, либо концом, либо точкой, где происходит смена направления движения.

Поэтому, если на каждой из n горизонталей имеется отрезок траектории, то общее количество поворотов ладьи не меньше, чем $2n-2$. При этом нетрудно построить пример траектории с $2n-2$ поворотами.

Если же есть горизонталь, не содержащая ни одного отрезка, то траектория ладьи пересекает все ее клетки по вертикальным отрезкам. Но тогда есть n вертикальных отрезков и к ним применимы уже проведенные рассуждения.

Ю. Ходзинский

М1322. Три отрезка, выходящие из разных вершин треугольника ABC и пересекающиеся в одной точке M, делят его на шесть треугольников. В каждый из них вписана окружность. Оказалось, что четыре из этих шести окружностей равны. Следует ли отсюда, что треугольник ABC — правильный, если M — точка пересечения а) медиан, б) высот, в) биссектрис, г) M — произвольная точка внутри треугольника?

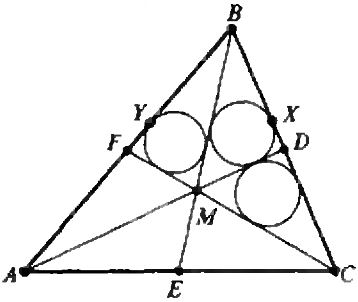


Рис. 1.

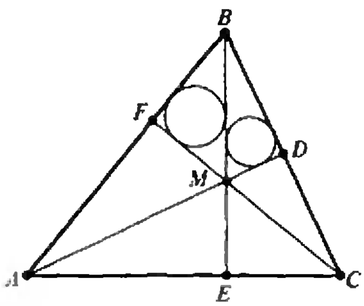


Рис. 2.

Ответ: а), б), в) да; г) нет.

Назовем треугольники, в которые вписаны окружности равных радиусов, отмеченными. Заметим, что какие-то два из отмеченных треугольников примыкают к одной из сторон треугольника ABC. Пусть, для определенности, это будут треугольники BMD и DMC.

а) Поскольку равны площади и радиусы вписанных окружностей отмеченных треугольников, равны и их периметры. Поэтому (рис. 1) $BM=MC$, и, следовательно, $AB=AC$. Пусть $AD=m$, $BE=CF=n$, $AB=AC=l$, $BC=a$, а треугольник BMF — отмеченный. Тогда из равенства периметров треугольников BMF и BMD получаем

$$\frac{l}{2}+\frac{n}{3}+\frac{2n}{3}=\frac{a}{2}+\frac{2n}{3}+\frac{m}{3},$$

т. е.

$$\frac{l}{2}+\frac{n}{3}=\frac{a}{2}+\frac{m}{3}. \qquad (*)$$

Пусть X и Y — точки касания вписанных окружностей (см. рис. 1) со сторонами BD и BF, $DX=x$, $FY=y$. Из свойств отрезков касательной следует, что

$$BM=\frac{l}{2}-y+\frac{n}{3}-y=\frac{a}{2}-x+\frac{m}{3}-x,$$

и с учетом (*) получаем

$$x=y.$$

Поскольку $\angle ADB$ — прямой, $\angle CFB$ — тоже прямой, т. е. медиана CF является высотой, и треугольник ABC — правильный.

Если отмечен треугольник AME, то, как и раньше, получаем из равенства периметров

$$\frac{l}{2}+\frac{2m}{3}+\frac{n}{3}=\frac{a}{2}+\frac{2n}{3}+\frac{m}{3},$$

т. е.

$$\frac{l-a}{2}=\frac{n-m}{3}. \qquad (**)$$

Однако, во всяком треугольнике *большей* стороне соответствует *меньшая* медиана. Поэтому, если $l>a$, то $n<m$, наоборот, при $l<a$ будет $n>m$, так что равенство (**) возможно лишь при $a=l$. Итак, и в этом случае утверждение доказано.

Остальные ситуации совпадают с разобранными с точностью до обозначений.

б) И в этом случае треугольники BMD и CMD равны (рис. 2), поскольку $\angle BMD=\angle CMD$ (эти углы равны, так как окружности одинаковых радиусов касаются отрезка MD в одной точке). Значит, $BD=DC$, $AB=AC$, $MF=ME$, $BF=EC$, так что равны треугольники MBF и MEC. Если они отмеченные, то равны и треугольники MBF и MBD (у них общая гипотенуза BM и равные радиусы вписанных окружностей, при этом $\angle FBM=\angle MBD$ — в противном случае, фигура $MFBD$ окажется прямоугольником).

Если отмечены равные треугольники AMF и AME, то равны и треугольники AME и BMD (они подобны и имеют одинаковые радиусы вписанных окружностей). Но тогда $AD=BE$, что и завершает доказательство.

в) Мы можем считать отмеченными треугольники AMF и AME (рис. 3). Но тогда окружности, вписанные в эти треугольники, касаются отрезка AM в общей точке. Отсюда следует, что $\angle AME=\angle AMF$ и $\angle ABE=\angle ACF$, т. е. $\angle B=\angle C$ и $AB=AC$. Если отмечен треугольник BMF, то, пользуясь формулой для площади $S=rp$ применительно к треугольникам AMF и FMB, получаем

$$\frac{AM+MF+AF}{AF}=\frac{MF+BF+BM}{BF}. \qquad (***)$$

Применяя к этим треугольникам теорему синусов, перепишем (***) так:

$$\frac{\sin\alpha+\sin(2\alpha+\beta)}{\cos\beta}=\frac{\sin\beta+\sin(2\alpha+\beta)}{\sin 2\beta},$$

откуда получаем после преобразований (пользуясь тем, что $\alpha+2\beta=\pi/2$), что

$$\sin 3\beta=1, \text{ т. е. } \beta=\pi/6,$$

т. е. ABC — правильный треугольник.

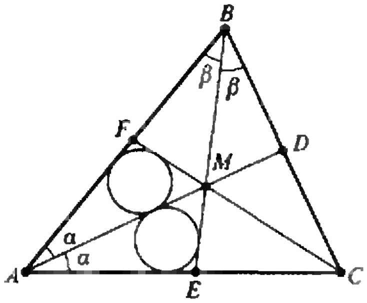


Рис. 3.

Если отмечены треугольники BMD и CMD, то, так как точка M — центр вписанной в треугольник ABC окружности, получаем

$$\frac{S_{AME}}{AE}=\frac{S_{CMD}}{CD},$$

что дает (формула $S=rp$)

$$\frac{AE+EM+MA}{AE}=\frac{CM+MD+DC}{CD},$$

после чего, рассуждая как и раньше, приходим к равенству

$$\cos 2\beta+\sin 3\beta=1+\sin\beta,$$

из которого находим без труда $\beta=\pi/6$.

И в этом случае ABC — правильный треугольник.

г) Треугольник ABC может и не быть равносторонним. Для его построения (рис. 4) проведем прямую, перпендикулярную AF, и выберем на ней точку M так, что $\frac{\pi}{2}>\angle MAF>\frac{\pi}{3}$. В построенные на рисунке 4 углы впишем *равные* окружности с центрами O_1 и O_2, затем из точки A проведем касательную к окружности O_2. Эта касательная пересечет прямую MF в некоторой точке C. Симметрично отразив картинку относительно прямой MF, получим неправильный равнобедренный треугольник ABC ($AC=BC$), удовлетворяющий условию задачи.

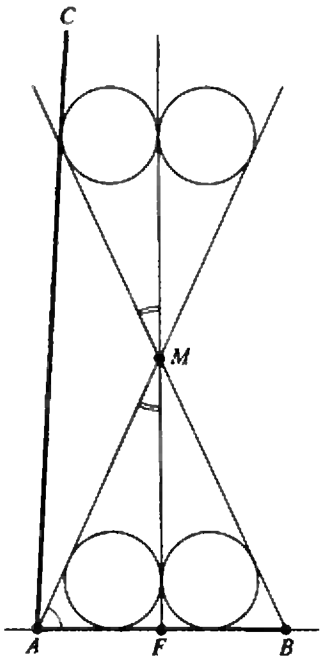
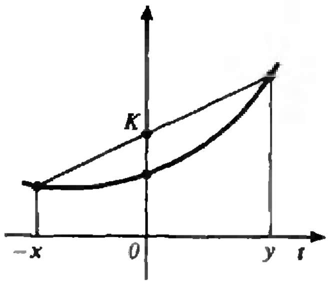


Рис. 4.

В. Сендеров

М1323. Докажите для любых положительных чисел x и y неравенство

$$x\cdot 2^y+y\cdot 2^{-x}\geqslant x+y.$$



Первое решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x^a b+x^{-b}a$, где $a>0$, $b>0$, $x\geqslant 1$. Поскольку

$$f'(x)=ab(x^{a-1}-x^{-b-1})>0 \text{ при } x>1,$$

функция $f(x)$ возрастает и, следовательно,

$$f(2)\geqslant f(1).$$

Осталось в полученном неравенстве

$$b\cdot 2^a+a\cdot 2^{-b}\geqslant a+b$$

изменить обозначения.

Второе решение. Зафиксируем $y>0$ и рассмотрим функцию от x (y — параметр):

$$\varphi(x)=x\cdot 2^y+y\cdot 2^{-x}-x-y.$$

Заметим, что $\varphi(0)=0$, и продифференцируем функцию φ:

$$\varphi'(x)=2^y-y\cdot 2^{-x}\ln 2-1.$$

Теперь докажем, что $\varphi'(x)>0$, отсюда и будет следовать, что $\varphi(x)>0$ при всех $x>0$.

Поскольку

$$(\varphi'(x))'=y\cdot 2^{-x}\ln^2 2,$$

функция $\varphi'(x)$ возрастает. Остается заметить, что

$$\varphi'(0)=2^y-y\ln 2-1>0 \text{ при } y>0.$$

(Это доказывается аналогично предыдущему. Значение функции $\Psi(y)=\varphi'(0)$ при $y=0$ равно 0, а производная

$$\Psi'(y)=(2^y-y\ln 2-1)'=2^y\ln 2-\ln 2$$

положительна.)

Третье решение (для знатоков анализа). Поскольку функция $f(t)=2^t$ выпукла вниз (ее производная возрастает), любая хорда, соединяющая две точки ее графика, лежит над графиком (см. рисунок).

В частности, справедливо неравенство

$$1=f(0)<OK=\frac{f(-x)y+f(y)x}{x+y}.$$

Н. Васильев, В. Прасолов, В. Сендеров

М1324. Докажите, что ни при каком целом k число k^2+k+1 не делится а) на 5, на 11 и на 17; б) на число вида $6m-1$ (m — произвольное натуральное число).

Остатки от деления на 5

k	k^2	k^2+k+1
0	0	1
1	1	3
2	4	2
3	4	3
4	1	1

Утверждение а) можно доказать, рассматривая остатки от деления чисел $b=k^2+k+1$ на 5, 11 и 17 (см. таблицы на полях).

Общая задача б) связана с различными методами и теоремами теории чисел.

Первое решение (*метод спуска*). Без ограничения общности можем считать, что $k>0$. Число k^2+k всегда четно, поэтому $b=k^2+k+1$ — нечетно; при $k=3i$ и $k=3i-1$ число b дает при делении на 6 остаток 1, т. е. $b=6j+1$, а при $k=3i+1$ оно имеет вид $b=3(6j+1)$.

Итак, при всех k число $b=e(6j+1)$, где $e=1$ или 3.

Теперь предположим, что утверждение б) неверно. Пусть $b=k^2+k+1$ — наименьшее число требуемого вида, имеющее делители вида $6m-1$, и $q=6i-1$ — наименьший из таких делителей числа b. Тогда $b=eqr$,

Остатки от деления на 11		
k	k^2	k^2+k+1
0	0	1
1	1	3
2	4	7
3	9	2
4	5	10
5	3	9
6	3	10
7	5	2
8	9	7
9	4	3
10	1	1

Остатки от деления на 17		
k	k^2	k^2+k+1
0	0	1
1	1	3
2	4	7
3	9	13
4	16	4
5	8	14
6	2	9
7	15	6
8	13	5
9	13	6
...	...	...

где $r=6j-1$, а $e=1$ или $e=3$, причем $q\leqslant r$. При этом $q\leqslant k$, так как при $q\geqslant k+1$ имеем: $qr\geqslant(k+1)^2>k^2+k+1\geqslant qr$, что невозможно.

Рассмотрим число $b_1=(k-q)^2+(k-q)+1=b-q(2k-q+1)$. Это число делится на q и, очевидно, меньше b. Противоречие. Тем самым утверждение задачи доказано.

Второе решение. Воспользуемся малой теоремой Ферма: *для всякого простого p и a, не делящегося на p, число $a^{p-1}-1$ делится на p*, или, прибегая к языку сравнений*), $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$.

Пусть p — простое и $k^2+k+1\equiv 0 \pmod p$. Умножив это сравнение на $k-1$, получаем

$$k^3\equiv 1 \pmod p. \qquad (*)$$

Если $p=6m-1$, то (по малой теореме Ферма)

$$k^{6m-2}\equiv 1 \pmod p,$$

откуда следует, что $k^2\equiv 1 \pmod p$, но из этого сравнения и сравнения (*) следует, что

$$k\equiv 1 \pmod p,$$

т. е.

$k^2+k+1\equiv 3 \pmod p$ — противоречие, ибо $3\not\equiv 0 \pmod p$.

Н. Васильев, С. Масич, В. Сендеров

М1325. *а) На плоскости даны три точки A, B, C. Пусть O — их центр тяжести (точка пересечения медиан треугольника ABC). При повороте на угол 120° вокруг O точка B переходит в точку P, при повороте на 240° вокруг O (в том же направлении) точка C переходит в точку Q. Докажите, что треугольник APQ правильный (либо точки A, P и Q совпадают).*

б) Для произвольного набора q точек A_0, A_1, ..., A_{q-1} на плоскости ($q\geq 1$) определим следующую операцию: строим центр тяжести O данных точек и поворачиваем каждую точку A_k вокруг O на угол $2\pi k/q$ в новое положение A'_k ($k=0, 1, ..., q-1$). С полученным набором q точек $A'_0=A_0$, A'_1, ..., A'_{q-1} проделаем такую же*

а) Пусть a, b, c — векторы, идущие из точки O в точки A, B, C соответственно. Поскольку O — центр тяжести, $a+b+c=0$. Пусть Φ означает операцию поворота на 120° вокруг центра O, Φ^2 — это поворот на 240°, а $\Phi^3 z=z$ и $z+\Phi z+\Phi^2 z=0$ для любого вектора z (рис. 1). Докажем, что $\Phi(PQ)=AP$ — это как раз и означает, что треугольник APQ равносторонний:

$$AP=OP-OA=\Phi(OB)-OA=\Phi b-a;$$

$$\Phi(PQ)=\Phi(OQ-OP)=\Phi(\Phi^2c-\Phi^2b)=\Phi^3c-\Phi^3b=$$
$$=c-\Phi^3b=-a-b-\Phi^2b=-a+\Phi b.$$

б) Решение этой задачи, в принципе, аналогично: мы введем операцию ε поворота вектора на угол $2\pi/q$ и воспользуемся тем, что для любого вектора z векторы z, εz, $\varepsilon^2 z$, ..., $\varepsilon^{q-1}z$ — стороны правильного q-угольника — в сумме дают 0 (рис. 2).

Здесь удобно использовать язык комплексных чисел: рассматривать ε как комплексное число — корень q-й степени из 1: $\varepsilon=\cos(2\pi/q)+i\sin(2\pi/q)$ (напомним, что умножение на ε как раз означает поворот на угол $2\pi/q$).

Для любого набора z из q векторов (комплексных чисел) z_0, z_1, ..., z_{q-1} рассмотрим следующий набор F из q

*) Напомним, что обозначения $a\equiv b \pmod m$ означает, что $a-b$ делится на m. См. статью А. Егорова «Сравнения по модулю» («Квант», 1991, № 6).

операцию еще раз, и т. д. Докажите, что через $q-1$ повторений получится набор из q совпадающих точек.

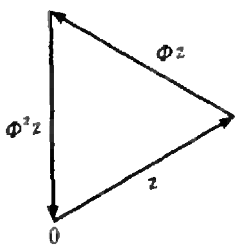


Рис. 1.

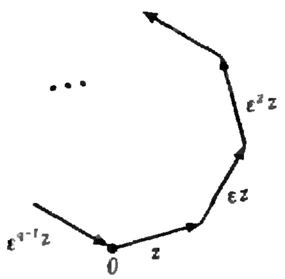


Рис. 2.

f_0,	f_1, f_2, ...,	f_{q-2},	f_{q-1},
f_1,	f_2, f_3, ...,	f_{q-1},	0,
f_2,	f_3, f_4, ...,	0,	0,
...	...	...	...
f_{q-1},	0, 0, ...,	0,	0.

векторов f_0, f_1, ..., f_{q-1}:

$$f_0=z_0+z_1+z_2+\dots+z_{q-1},$$
$$f_1=z_0+\varepsilon z_1+\varepsilon^2 z_2+\dots+\varepsilon^{q-1}z_{q-1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_k=z_0+\varepsilon^k z_1+\varepsilon^{2k} z_2+\dots+\varepsilon^{k(q-1)}z_{q-1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

здесь $k=0, 1, \dots, q-1$. Этот набор F называется *преобразованием Фурье*, или *спектром*, набора Z. Заметим, что по спектру F можно узнать исходный набор Z, и определяется он очень похожими формулами: если умножить k-ю строчку на ε^{-jk} (j — одно из чисел 0, 1, ..., $q-1$) и сложить все строки, получим такую «формулу обращения»

$$f_0+\varepsilon^{-j}f_1+\varepsilon^{-2j}f_2+\dots+\varepsilon^{-j(q-1)}f_{q-1}=qz_j.$$

Мы воспользовались тем, что

$$1+\varepsilon^{m-j}+\varepsilon^{2(m-j)}+\dots+\varepsilon^{(q-1)(m-j)}=0 \text{ при } m\neq j.$$

Описанную в условии операцию можно выполнить в два этапа. Сначала от заданных q комплексных чисел (векторов) $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{q-1}$ отнимается их среднее арифметическое $(z_0+z_1+z_2+\dots+z_{q-1})/q$, отчего сумма полученных векторов становится равной нулю*). Затем j-е по счету число ($j=0, 1, \dots, q-1$) умножается на ε^j — так получается новый набор $(z_0', z_1', \dots, z_{q-1}')$.

Пусть у исходного набора спектр был равен $f_0, f_1, \dots, f_{q-1}$. Тогда после первого этапа (добавления ко всем числам постоянной — f_0/q) все коэффициенты Фурье — числа f_k — не меняются, кроме f_0, которое становится равным 0. Затем все коэффициенты сдвигаются на один номер: спектр полученного набора $(z_0', z_1', \dots, z_{q-1}')$ будет равен $f_0'=f_1$, $f_1'=f_2$, $f_2'=f_3$, ..., $f_{q-2}'=f_{q-1}$, а последний коэффициент $f_{q-1}'=0$.

Итак, наборы коэффициентов Фурье после каждой операции будут оканчиваться все бо́льшим количеством нулей (см. таблицу на полях), так что после $q-1$ шагов все, кроме нулевого, коэффициенты Фурье равны 0, значит сам набор (как видно, например, из формулы обращения) состоит из q совпадающих чисел.

Б. Быковский, Н. Васильев

Ф1338. *На горизонтальной поверхности стола покоится клин массой M с углом наклона α к горизонту (рис. 1). Со скоростью v_0 на него наезжает маленькая тележка массой m. Через какое время тележка съедет с клина? Какое расстояние проедет за это время клин? Въезд на клин*

Решение этой, несложной на вид, задачи весьма громоздко. Разберемся вначале, что происходит при въезде тележки на клин. После того как тележка попадет на прямолинейный участок, все будет просто — она будет двигаться с постоянным ускорением.

Введем обозначения: u — вертикальная составляющая скорости тележки, v_1 — ее горизонтальная составляющая, v_2 — скорость клина (она горизонтальна). Все

*) Можно сказать иначе: мы переносим начало отсчета — нуль — в центр тяжести точек $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{q-1}$.

сделан так, что тележка движется плавно, без толчков.

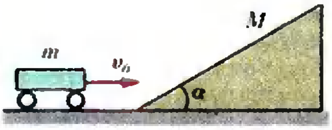


Рис. 1.

эти скорости измерены *относительно стола* и относятся к моменту окончания движения тележки по криволинейному участку (въезду на клин). Считая время движения по этому участку малым, а его размеры небольшими (как фактически и сказано в условии), воспользуемся законами сохранения импульса и энергии:

$$mv_0=Mv_2+mv_1,$$

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{Mv_2^2}{2}+\frac{m(v_1^2+u^2)}{2}.$$

Из простых кинематических соображений (относительно клина скорость тележки направлена под углом α к горизонту) легко получить

$$\frac{u}{v_1-v_2}=\operatorname{tg}\alpha,\quad \text{или}\quad v_1=v_2+u\operatorname{ctg}\alpha.$$

Обозначим $M/m=\gamma$. Тогда законы сохранения можно переписать так:

$$v_0=\gamma v_2+v_2+u\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$v_0^2=(\gamma+1)v_2^2+2v_2u\operatorname{ctg}\alpha+u^2/\sin^2\alpha.$$

Выразим из первого уравнения v_2 и подставим во второе уравнение — нас интересует только вертикальная составляющая u скорости тележки, через нее легко найти время «путешествия» по клину. Мы получим

$$v_0^2=\frac{v_0^2}{\gamma+1}+\frac{u^2}{\sin^2\alpha}-\frac{u^2\operatorname{ctg}^2\alpha}{\gamma+1},$$

откуда

$$u=v_0\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+(\sin^2\alpha)/\gamma}}.$$

Осталось найти ускорение тележки по вертикали. Займемся динамикой (рис. 2). Горизонтальное ускорение клина $a=(N\sin\alpha)/M$, ускорение тележки по вертикали $a_в=g-(N\cos\alpha)/m$, по горизонтали (влево) — $a_г=(N\sin\alpha)/m$, где N — сила нормального давления тележки на клин, равная силе нормальной реакции клина на тележку. Из кинематики $a_в/(a_г+a)=\operatorname{tg}\alpha$. Отсюда найдем

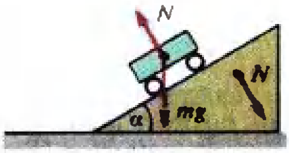


Рис. 2.

$$N=\frac{mg\cos\alpha}{1+(\sin^2\alpha)/\gamma},$$

и ускорение тележки по вертикали —

$$a_в=g-\frac{N\cos\alpha}{m}=g\frac{\gamma\sin^2\alpha}{\gamma+\sin^2\alpha}.$$

Итак, время движения тележки вверх — вниз по прямолинейному участку клина равно

$$\tau=\frac{2u}{a_в}=\frac{2v_0}{g\sin\alpha}\sqrt{1+(\sin^2\alpha)/\gamma}.$$

Теперь о перемещении клина. Центр масс системы движется по горизонтали равномерно со скоростью

$$v_ц=\frac{mv_0}{M+m}=\frac{v_0}{1+\gamma}.$$

Взаимное расположение тележки и клина в начальный и конечный моменты одно и то же, значит, клин за время τ сдвинулся так же, как и центр масс системы:

$$l = v_ц \tau = \frac{2v_0^2}{(g \sin\alpha)(1+\gamma)}\sqrt{1+(\sin^2\alpha)/\gamma}.$$

З. Рафаилов

Ф1339. *Внутри большого мыльного пузыря находится маленький, радиус которого в 10 раз меньше. Воздух снаружи откачивают, после чего радиус большого пузыря увеличивается в 2 раза. Во сколько раз увеличится радиус внутреннего пузыря? Температуру считайте постоянной, влиянием силы тяжести можно пренебречь.*

Обозначим коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки σ. Тогда при атмосферном давлении $p_а$ для давлений внутри большого и маленького пузырей можно записать

$$p_1 = p_а + \frac{2\sigma}{R},$$

$$p_2 = p_1 + \frac{2\sigma}{r} = p_а + \frac{22\sigma}{R}.$$

(Вообще говоря, мыльный пузырь состоит из двух жидких пленок, так что при расчете давления нужно удваивать коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора, но в нашем случае это несущественно — через σ обозначен результирующий коэффициент, в ответ в явном виде он войти не должен.)

После того как воздух откачали, давление снаружи упало до нуля, и внутри нового большого пузыря оно стало

$$p_1^* = \frac{2\sigma}{R^*} = \frac{\sigma}{R}.$$

Ясно, что объем внутреннего пузыря составляет ничтожную часть объема внешнего, поэтому можно записать $p_1^* = p_1 V/V^* = 1/8 p_1$. Отсюда получаем $\sigma/R = 1/6 p_а$, и

$$p_1 = \frac{4}{3}p_а, \ \ p_2 = \frac{14}{8}\ p_а.$$

Пусть радиус внутреннего пузыря теперь равен r^*, тогда

$$p_2^* = p_2\frac{r^3}{r^{*3}} = p_1^* + \frac{2\sigma}{r^*} = \frac{1}{6}p_а + \frac{10}{3}p_а\frac{r}{r^*}.$$

Обозначив $r/r^* = x$, получаем уравнение

$$28x^3 - 20x + 1 = 0.$$

Это уравнение легко решить подбором, тем более что особая точность тут не нужна: $x \approx 0{,}87$ и $r^* \approx 1{,}15r$.

Итак, радиус внутреннего пузыря увеличится примерно в 1,15 раза.

А. Зильберман

Задачник „Кванта"

Ф1340. В схеме, изображенной на рисунке 1, ключ очень быстро перебрасывают из положения A в положение B и обратно. Найдите среднее значение тока через резистор сопротивлением 2R. Какой ток течет через батарею? В каждом положении ключ находится одинаковое время.

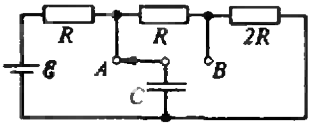


Рис. 1.

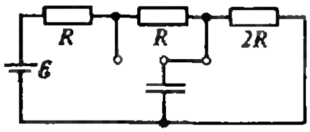


Рис. 2.

Эту задачу довольно легко решить при условии, что за время подключения τ конденсатор не успевает сильно подзарядиться или разрядиться, т. е. в том случае, когда напряжение конденсатора можно считать практически неизменным, а токи в цепи — постоянными. Мы рассмотрим именно такой случай.

Пусть установившееся напряжение конденсатора равно U. Тогда в схеме, изображенной на рисунке 1, ток через батарею равен $I_б=(\mathscr{E}-U)/R$, а ток, утекающий по резисторам сопротивлениями R и $2R$, составляет $I=U/(3R)$. Следовательно, за время τ заряд конденсатора возрастет на

$$\Delta q_1=(I_б-I)\tau=\left(\frac{\mathscr{E}-U}{R}-\frac{U}{3R}\right)\tau.$$

Аналогично, в схеме, изображенной на рисунке 2, заряд конденсатора за это же время уменьшится на

$$\Delta q_2=\left(\frac{U}{2R}-\frac{\mathscr{E}-U}{2R}\right)\tau.$$

В установившемся режиме

$$\Delta q_1=\Delta q_2, \quad и \quad U=\frac{9}{14}\mathscr{E}.$$

Ток, текущий через резистор сопротивлением $2R$, половину всего времени равен $U/(3R)$, а половину — $U/(2R)$, поэтому среднее значение тока через этот резистор

$$I_{2R\,ср}=\frac{5}{12}\frac{U}{R}=\frac{15}{56}\frac{\mathscr{E}}{R}.$$

Средний ток через батарею можно, конечно, вычислить аналогично. Однако ясно, что весь заряд, прошедший через батарею, проходит и через резистор сопротивлением $2R$ — заряд конденсатора остается в среднем неизменным. Таким образом,

$$I_{б\,ср}=I_{2R\,ср}=\frac{15}{56}\frac{\mathscr{E}}{R}.$$

А. Зильберман

Ф1341. В однополупериодном выпрямителе для зарядки аккумулятора A (рис. 1) «высох» электролитический конденсатор большой емкости — его емкость упала во много раз. Во сколько раз увеличится время, необходимое для зарядки аккумулятора? Действующее значение напряжения источника переменного напряжения $U=15$ В, напряжение аккумулятора $\mathscr{E}=12$ В. Диод считайте идеальным.

Если конденсатор на выходе выпрямителя еще не «высох» и имеет большую емкость, то напряжение в нем можно считать неизменным и равным $U\sqrt{2}\approx21{,}2$ В. За один период T через аккумулятор протечет заряд

$$q_0=\frac{U\sqrt{2}-\mathscr{E}}{r}T=2\pi\frac{U\sqrt{2}-\mathscr{E}}{r\omega},$$

где r — внутреннее сопротивление аккумулятора, ω — частота колебаний тока.

Если емкость конденсатора станет совсем малой, то напряжение на выходе выпрямителя будет пульсирующим (рис. 2), и за период ток через аккумулятор будет протекать лишь в течение промежутка времени от $-t_1$ до t_1. Время t_1 можно найти из условия

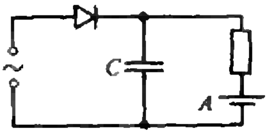


Рис. 1.

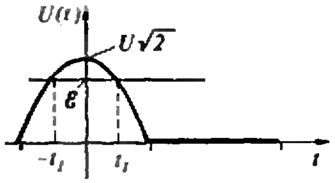


Рис. 2.

$$U\sqrt{2}\cos\omega t_1=\mathscr{E}\Rightarrow t_1=\frac{1}{\omega}\arccos\frac{\mathscr{E}}{U\sqrt{2}}.$$

Для расчета заряда, прошедшего через аккумулятор, в этом случае придется интегрировать:

$$q_1=\int_{-t_1}^{t_1}\frac{U\sqrt{2}\cos\omega t-\mathscr{E}}{r}dt=\frac{2U\sqrt{2}}{r\omega}\sin\omega t_1-\frac{2t_1\mathscr{E}}{r}.$$

Таким образом, время зарядки аккумулятора увеличится в $n=q_0/q_1$ раз:

$$n=\frac{2\pi(U\sqrt{2}-\mathscr{E})}{r\omega}\left(\frac{2U\sqrt{2}}{r\omega}\sqrt{1-\frac{\mathscr{E}^2}{2U^2}}-\frac{2\mathscr{E}}{r\omega}\arccos\frac{\mathscr{E}}{U\sqrt{2}}\right)^{-1}=$$
$$=\pi\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-x\arccos x},$$

где $x=\mathscr{E}/(U\sqrt{2})\approx 0{,}566$.

Окончательно

$$n\approx 4{,}94\approx 5,$$

т. е. время зарядки возрастет примерно в 5 раз.

Р. Александров

***Ф1342.** Если объектив фотоаппарата, имеющий фокусное расстояние $F=58$ мм и наведенный на бесконечность, направить на Солнце, то при диаметре входного отверстия (диафрагмы) объектива больше чем $d=11$ мм, прожигается шторка затвора фотоаппарата. На какое расстояние нужно навести объектив, чтобы даже при существенно большем диаметре входного отверстия его можно было без опаски направлять на Солнце? Видимый с Земли угловой размер Солнца $\alpha=9{,}3\cdot10^{-3}$ рад. Считайте, что при наведении на бесконечность шторка затвора находится в фокальной плоскости объектива.*

Если объектив фотоаппарата наведен на бесконечность и направлен на Солнце, то диаметр изображения Солнца равен

$$\delta_0=\alpha F=0{,}54\text{ мм}.$$

При этом шторка затвора прожигается лишь при диаметре диафрагмы большем чем $d=11$ мм. Таким образом, о шторке можно не беспокоиться, если диаметр диафрагмы превышает диаметр пятна на шторке не более чем в

$$n=d/\delta_0=20\text{ раз}.$$

Соответственно, если диаметр диафрагмы существенно больше — обозначим его D, то шторка не прожжется при диаметре пятна от Солнца на ней большем чем

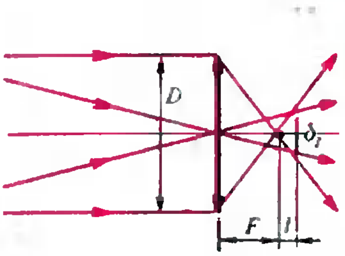
$$\delta_1=\delta_0D/d=\alpha FD/d.$$

Пренебрегая неравномерностью освещения вблизи границ этого пятна (т. е. считая в данном случае Солнце точечным источником, поскольку получаемое пятно существенно больше изображения Солнца*)), из простого геометрического построения (см. рисунок) получаем, что шторка должна отстоять от фокальной плоскости больше чем на

$$l=\delta_1F/D=(\alpha FD/d)(F/D)=\alpha F^2/d=2{,}84\text{ мм}.$$

Следовательно, фотоаппарат должен быть наведен на расстояние меньшее, чем критическое расстояние L,

*) Здесь возможно более точное решение, учитывающее угловой размер Солнца. Однако оно дает тот же самый результат.



соответствующее условию

$$\frac{1}{L}+\frac{1}{F+l}=\frac{1}{F},$$

откуда

$$L=\frac{F(F+l)}{l}=1{,}24 \text{ м.}$$

М. Гаврилов

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1306—М1320, Ф1313—Ф1327, справились с задачей М1311. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

О. Авдеев (Днепропетровск) **06, 08, 13, 15;** *Ю. Алексеенко* (Киев) **06—08, 10, 13, 15;** *А. Алиев* (Баку) **06, 07, 13, 17;** *Г. Асатрян* (Ереван) **17, 19;** *А. Ахмедов* (Баку) **06, 07, 13, 15—20;** *В. Бринюк* (Донецк) **12, 13, 15;** *О. Бурд* (Киев) **06, 07;** *Б. Вайнер* (Киев) **06, 07;** *А. Васильев* (п. Даниловка Киевской обл.) **06, 17, 19;** *В. Войков* (Астрахань) **17;** *А. Габибов* (с. Тюкла, Азербайджан) **13;** *О. Гайдай* (Львов) **06, 07, 13, 15;** *Д. Гайдунько* (Алма-Ата) **06;** *С. Гетун* (Киев) **06, 07;** *Ю. Горенбургов* (Санкт-Петербург) **06, 07, 17—19;** *Б. Григоренко* (Москва) **17, 19;** *П. Григорьев* (Самара) **06, 12—14, 19;** *С. Гудзенко* (Павлоград) **13;** *Р. Гулиев* (с. Говлар, Азербайджан) **13;** *И. Доманов* (Донецк) **06, 07;** *А. Доценко* (Киев) **13;** *Д. Дудко* (Киев) **06—08, 12, 13, 15, 17—20;** *М. Завьялов* (Омск) **06, 07;** *В. Замятин* (Киров) **07, 17—20;** *М. Ибрагимов* (Ташкент) **06, 07;** *И. Изместьев* (п. Суна Кировской обл.) **06, 07;** *А. Ильиня* (Новгород) **06, 07, 13, 15;** *С. Иоффе* (п. Черноголовка Московской обл.) **06—09, 13, 17, 19, 20;** *А. Исаев* (Баку) **13, 15;** *С. Клейман* (Запорожье) **06;** *С. Климов* (Ижевск) **06, 07, 09, 12, 13, 15, 17—20;** *Н. Когабаев* (Усть-Каменогорск) **06, 07;** *П. Кожевников* (Калуга) **06—09, 12, 13, 15, 17—20;** *О. Коробкин* (Днепропетровск) **06;** *К. Кудайбергенов* (Ташкент) **06, 07, 13, 17, 19, 20;** *С. Кузьмич* (Минск) **06—09, 12, 13, 17—20;** *А. Кукушкин* (Москва) **06, 12, 13;** *В. Кулагин* (Харьков) **06;** *В. Левин* (Гомель) **06, 07, 13;** *И. Левин* (Москва) **13;** *П. Левин* (Москва) **06, 07, 09, 13, 19;** *Н. Лисицын* (Ижевск) **06, 07, 09, 10, 13, 15, 17—19;** *М. Магеррамов* (Баку) **06, 07, 13, 17;** *Э. Магеррамов* (Баку) **06, 07, 17;** *И. Макаров* (Киев) **06;** *Н. Мамедов* (Баку) **06;** *В. Мустафаев* (Баку) **06, 07, 13;** *Т. Назарова* (Желтые Воды) **06;** *А. Назарян* (Тбилиси) **06;** *Б. Насыпанный* (Гайворон) **06, 07;** *С. Одрибец* (Переяслав-Хмельницкий) **06, 07, 13, 15, 17, 19;** *Д. Панов* (Москва) **06—09, 13, 17, 19;** *С. Панферов* (Москва) **06;** *Т. Пашаева* (Баку) **06, 07;** *Е. Перельман* (Санкт-Петербург) **18, 19;** *А. Петросян* (Ереван) **06, 07, 12, 13, 15;** *В. Пиковский* (Киев) **06, 07;** *М. Плетюхов* (Брест) **06, 13;** *Е. Порошенко* (Алма-Ата) **06, 07, 13, 15;** *А. Поталинин* (Киев) **17;** *О. Потапов* (Москва) **06, 07, 13, 17;** *А. Поташник* (Киев) **06;** *А. Рымов* (Талды-Курган) **06, 07, 13;** *З. Сабиров* (к/з Коммунар Хорезмской обл.) **06, 07;** *А. Сарсембаев* (Аркалык) **06, 07, 13, 15;** *А. Свердлов* (Москва) **07;** *В. Севериновский* (Москва) **06;** *С. Сефибеков* (Ташкент) **13;** *С. Сикорский* (с. Вузловая Львовской обл.) **06, 12;** *Т. Симонова* (Северодвинск) **13;** *А. Солодушкин* (Степногорск) **06, 07, 13, 17, 19;** *И. Сороко* (Минск) **19;** *А. Таратин* (Северодвинск) **06, 07, 13;** *О. Тейтельбойм* (п. Черноголовка Московской обл.) **17;** *А. Теплинский* (Каменец-Подольский) **06, 07;** *М. Тройников* (Ижевск) **13, 17, 19, 20;** *Б. Турешбаев* (Кзыл-Орда) **06, 17, 19, 20;** *Е. Турчин* (Днепропетровск) **06, 07, 13, 17—20;** *А. Уханов* (Евпатория) **06, 07;** *М. Хасин* (Донецк) **06, 07;** *К. Хвенкин* (Минск) **06, 07, 09, 13, 15, 17, 19, 20;** *Р. Ходжаниязов* (пгт Хазарасп Хорезмской обл.) **06, 17;** *А. Шамрук* (д. Новый Двор Гродненской обл.) **13, 17—19;** *А. Швецова* (Донецк) **13;** *В. Шипунов* (Желтые Воды) **06, 17;** *В. Яновский* (Харьков) **06, 07.**

Физика

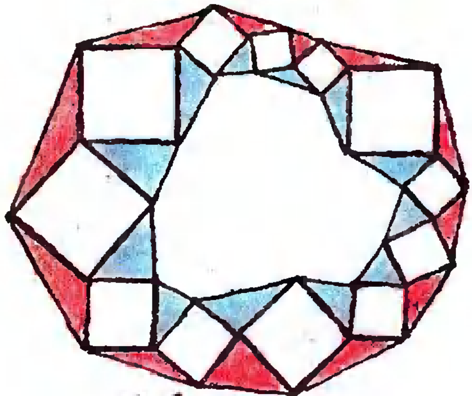
Р. Авезов (Ургенч) **13, 20;** *Ю. Адамов* (Минск) **23, 24, 26;** *А. Айкынбаев* (Алма-Ата) **23, 25;** *М. Аллаберганов* (Ургенч) **13, 16, 19, 20, 23, 24;** *Д. Антипов* (Киев) **13, 15, 17;** *Д. Апальков* (Харьков) **13, 14, 19, 20;** *Д. Асадов* (Имишли) **16, 23;** *С. Бабенкова* (Тамбов) **23;** *И. Бейбалиев* (с. Чиликар Хивского р-на) **20, 23, 24;** *О. Белиловский* (Алма-Ата) **13, 15—17, 20, 22, 23, 25, 27;** *К. Блиох* (Харьков) **13, 15—17, 20, 23, 25, 27;** *В. Богак* (Донецк) **16;** *Д. Боднарь* (Винница) **20;** *Д. Бокий* (п. Черноголовка Московской обл.) 13; *Н. Боронбаев* (с. Ак-Жол, Кыргызстан) 23; *В. Борохов* (Керчь) 21, 23, 25, 27; *С. Борщев* (Алма-Ата) 19, 20, 22, 23, 25; *С. Босак* (п. Юзофо-Николаев Винницкой обл.) 13; *Т. Бретман* (п. Черноголовка Московской обл.) 14, 15, 20; *В. Васев* (Николаев) 13, 14, 16, 17; *С. Васильев* (Горловка) 20, 23, 24, 26; *А. Ветров* (Северодвинск) 13, 19, 22—24; *И. Воскобойник* (Киев) 13—20, 22—27; *В. Воскобойников* (п. Черноголовка Московской обл.) 13, 20; *А. Вылугин* (Донецк) 13, 16, 23—25, 27; *О. Гайдай* (Львов) 13; *Д. Гайдунько* (Алма-Ата) 13, 14, 16, 20, 23—27; *А. Галанин* (Сергиев Посад) 13, 16—20, 22—25, 27; *С. Галиев* (Благовещенск) 23; *Т. Гасанов* (Киев) 20; *П. Гвоздев* (Котельнич) 13, 19, 20, 23, 24; *А. Георгадзе* (Нальчик) 13, 14, 16; *В. Глазков* (Коломна) 13, 16, 18—21, 23—25, 27; *С. Головченко* (Алма-Ата) 20; *В. Горгадзе* (Нальчик) 23—25, 27; *П. Гребенев* (Кузнецовск) 13, 14, 16, 17, 19—22; *А. Гревцев* (Москва) 13, 16, 19, 20, 22—25, 27; *Б. Григоренко* (Москва) 23, 25; *Т. Григорян* (Ереван) 13, 16, 18—20, 22—24; *Я. Грода* (Брест) 23; *Ю. Гройсман* (Ташкент) 23, 25; *Р. Гулгазарян* (Ереван) 23—25; *Н. Гуляев* (Нижний Новгород) 13—20, 22—27; *Т. Даniяров* (Павлодар) 20; *Э. Девятов* (Тула) 13, 15, 16, 19, 20, 23—25; *С. Диброва* (Киев) 13—18, 20, 22—27; *И. Дмитриев* (п. Черноголовка Московской обл.) 23; *С. Дубровина* (Владимир) 16, 20, 23, 24; *С. Дудий* (п. Комсомольский Харьковской обл.) 19, 20, 23, 25; *А. Ельников* (Донецк) 13, 15—17, 19, 20, 22—27; *Е. Ерхов* (Аркалык) 20, 23; *А. Ефимов* (Алма-Ата) 13, 16, 17; *С. Жак* (Тернополь) 13, 16, 19, 20, 22; *С. Залюбовский* (Винница) 20—22; *С. Занкович* (Николаев) 13—17, 19—21, 23—25, 27; *А. Иванов* (Пинск) 23—25, 27; *С. Ивленков* (Тольятти) 13, 14, 20, 22—25, 27; *Н. Ивченко* (Киев) 13—16, 19, 20; *Б. Иманов* (Алма-Ата) 23; *Ш. Исмоилов* (Ургенч) 13, 20, 23, 24; *Б. Кайчубаев* (Алма-Ата) 23; *Д. Калинин* (Тамбов) 23, 24; *А. Касаткин* (Тольятти) 13, 19, 20, 22—25, 27; *Н. Keберле* (Запорожье) 14, 19; *А. Кирилюк* (Одесса) 23—25; *Б. Кисельман* (Нижний Новгород) 23, 24; *С. Клейман* (Запорожье) 13, 23; *М. Клембовский* (Николаев) 13—17, 19, 20, 22—25, 27; *Д. Климов* (Мурманск) 14; *В. Кмецинский* (Камень-Каширский) 13, 16; *К. Коваль* (Запорожье) 13, 16, 18—20, 23, 24; *К. Кожухов* (Кузнецовск) 16, 17; *В. Козлов* (Старый Оскол) 13, 15, 16; *А. Колесников* (Воронеж) 13, 16, 19, 20, 22, 23; *И. Коробов* (Москва) 20, 22; *М. Косицин* (Тольятти) 13, 23, 24; *С. Костин* (Москва) 23, 24; *А. Кравцов* (Старый Оскол) 23; *Д. Кример* (Брест) 23—25, 27; *Э. Крицун* (Богородчаны) 13, 14, 16, 19, 20; *Е. Круглая* (Бердянск) 23—25; *А. Крючков* (Москва) 23, 25; *А. Кузмич* (Старый Оскол) 23, 27; *В. Кулагин* (Харьков) 13, 16; *Ю. Кулик* (Канев) 13, 15, 16, 18—20, 22—25; *П. Куприн* (Северодвинск) 23—27; *П. Левин* (Москва) 13, 20, 22—24; *И. Линчевский* (Брест) 13, 20, 23; *С. Макаров* (Усинск) 13, 16, 20, 23, 25; *Н. Махкамов* (Чертакский р-н Наманганской обл.) 20; *С. Малащицкая* (Кузнецовск) 19, 22, 24, 25, 27; *Ю. Маравин* (Евпатория) 13—16, 19, 20, 22—25, 27; *В. Матусевич* (Минск) 23; *М. Махмудов* (Исфара) 20, 23—27; *П. Мелентьев* (Старый Оскол) 16, 19—24; *Р. Михеенко* (Могилев) 14; *В. Мушик* (Кузнецовск) 16, 19, 20, 22, 24, 25, 27; *А. Нежуренко* (Киев) 15, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 27; *М. Немировский* (Одесса) 13, 16, 20, 22—24, 27; *И. Ненько* (Александрия) 23; *Д. Новиков* (Минск) 20; *А. Носиков* (Винница) 20; *А. Ольховец* (Киев) 13—17, 20, 22, 23, 25, 27; *А. Ордабаев* (Алма-Ата) 13, 15—17, 23, 25, 27; *Д. Островский* (Санкт-Петербург) 13, 15—17, 19, 20, 23—25, 27; *Х. Отожонов* (Ургенч) 13, 20, 23, 24; *А. Павлик* (Новая Ушица) 16, 23—25, 27; *Д. Пастухов* (Витебск) 13—17, 19, 20, 23—27; *В. Паульс* (Чимкент) 23—25, 27; *Д. Петрайтис* (Вольск) 15, 20, 23—25, 27; *А. Пикалов* (Канаш) 19, 20, 23—25, 27; *М. Плетюхов* (Брест) 13, 16, 20, 23—25, 27; *В. Понкратов* (Старый Оскол) 13, 19, 20, 22, 23; *С. Рассадин* (Минск) 13, 15, 16, 20, 23, 27; *В. Регельман* (Баку) 13; *Р. Реймбердиев* (Фарабский р-н Чарджоуской обл.) 21; *М. Ризванов* (Баку) 16; *Е. Рослый* (Омск) 16, 17, 20, 23, 26; *Д. Рузметов* (Ургенч) 13, 20; *Ш. Рузметов* (Хивинский р-н Хорезмской обл.) 23; *В. Рыбачук* (Винница) 20, 23, 24, 27; *А. Рыженко* (Целиноград) 20; *Р. Сабиров* (Хорезмская обл.) 23; *А. Свириденков* (Троицк Московской обл.) 20, 23, 24; *И. Секержицкий* (Брест) 23; *Ц. Семичев* (Тамбов) 20; *И. Сихарулидзе* (Тбилиси) 23; *А. Солодушкин* (п. Степногорск Целиноградской обл.) 20, 23; *О. Сорока* (с. Верба Ровенской обл.) 13, 15, 17; *А. Сорокин* (Москва) 20; *И. Сороко* (Минск) 27; *О. Тейтельбойм* (п. Черноголовка Московской обл.) 13; *А. Терентьев* (Канаш) 13, 16, 17, 19, 20, 22—25, 27; *С. Тимощук* (с. Черница Ровенской обл.) 13, 14, 17; *В. Толпекин* (Одесса) 13, 15—17, 20; *В. Третьяков* (Алма-Ата) 23—25, 27; *С. Тумаха* (Киев) 13—16, 19, 20, 23—26; *А. Тумашевский* (Северодвинск) 13, 14, 16, 17, 20, 23—25, 27; *Д. Федорец* (Харьков) 13, 16, 20, 22—25, 27; *А. Хадарцев* (Санкт-Петербург) 23, 25, 27; *А. Хамета* (Пружаны) 20; *А. Хамхидько* (Старый Оскол) 22, 23; *Р. Хапков* (Старый Оскол) 13, 19, 20, 22—24; *А. Хренков* (Москва) 19; *П. Хрущ* (Брест) 23; *Д. Чигирев* (Санкт-Петербург) 13, 15—17, 23, 25; *А. Чистый* (Брест) 13, 14, 16, 23—25, 27; *Д. Чичкан* (Барановичи) 17, 19, 20, 23—27; *Н. Чумерин* (Брест) 23; *И. Ширяев* (Кузнецовск) 16, 19, 20, 22; *А. Шишлянников* (Воронеж) 23; *А. Шпагин* (Мариуполь) 13, 15—17, 19, 20, 22—25, 27; *В. Шпырко* (Киев) 20; *И. Шпырко* (Киев) 20; *О. Шпырко* (Киев) 13—17, 19, 20, 23—27; *Д. Шумский* (Брест) 23; *Т. Шутенко* (Мариуполь) 13—17, 19, 20, 23, 24; *Д. Юдин* (Самара) 13, 15—17; *Р. Якупов* (Кузнецовск) 13, 14, 16, 17, 19—27; *А. Ямилов* (Донецк) 16, 20, 23—25, 27; *Р. Янченко* (Кузнецовск) 13, 16, 17, 19, 20.

„Квант" для младших школьников.

Задачи

1. Укажите все целые числа, которые увеличиваются на 20 %, если их цифры записать в обратном порядке.

2. В мензурке с водой плавает деревянный цилиндр высотой 12 см. Он выступает над поверхностью на 3 см. Какое давление он окажет на стол, если его туда поставить?



3. В цепочке квадратов соединили вершины, как показано на рисунке. Что больше: сумма площадей внешних треугольников или внутренних?

4. Цена на туфли ежемесячно увеличивалась в одно и то же число раз. Полгода назад они стоили не меньше 150 рублей. Сейчас они стоят пока еще меньше 500 рублей. А сколько они стоят?

5. В двух кошельках находится по 98 копеек, причем в одном кошельке лежит 49 монет, а в другом — 50 монет. Можно ли уверенно утверждать, что деньги из первого кошелька можно разделить на две равные части? А деньги из второго кошелька?

Эти задачи нам предложили Г. Щеголихин, В. Пидора, С. Дворянинов, И. Акулич и В. Произволов.

Ребусы, ребусы, ребусы...

В своих письмах многие читатели просят публиковать побольше ребусов, поэтому редакция решила в этот каникулярный номер дать кучу таких задач, посвятив им наш «Калейдоскоп». Мы надеемся, что в решении этих задач вам поможет статья И. Акулича «Решение ребусов на чашечных весах», опубликованная в предыдущем номере журнала.

Эти задачи нам предложили: *А. Кругляк* (1), *С. Баженов* (3, 4, 15, 16, 26, 29), *М. Штернберг* (2), *Л. Мочалов* (5, 23), *В. Радунский* (6, 7, 10, 11), *А. Акопян* (8, 9), *Р. Шиханян* (12, 13, 14), *И. Акулич* (17), *В. Чичин* (18), *М. Сафаралиев* (19, 27), *Н. Антонович* (20, 21, 22), *А. Горнов* (24), *А. Кючуков* (Болгария) (25), *С. Измалков* (28), *А. Швецов* (30).

Напоминаем, что в каждой задаче одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

14. $ГАВ = АН^{А}$

15. ПЛОМБА × 5 = АПЛОМБ

16. НИКЕЛЬ × 6 = ЕЛЬНИК

17. КВАНТ × 30 = ЖУРНАЛ

18. $\frac{Ц}{Д} + \frac{И}{ЕС} = \frac{ФР}{ЯТЬ}$

19. капля + капля + капля = озерко

20.
$$\begin{array}{r} РАДИУС \\ +\ АДИУС \\ ДИУС \\ ИУС \\ УС \\ С \\ \hline ЗАДАЧА \end{array}$$

21.
$$\begin{array}{r} ИКС \\ \times\ ИКС \\ \hline РИС \\ ДАР \\ ИКС \\ \hline ***** \end{array}$$

22.
$$\begin{array}{r} СЛАВА \\ \times\ ВЛАС \\ \hline ****0 \\ ****** \\ ***** \\ ****0 \\ \hline ********* \end{array}$$

23.
$$\begin{array}{r} РЕШИ \\ \times\ ЕСЛИ \\ \hline СИЛЕН \\ ***** \\ **** \\ ***** \\ \hline ******** \end{array}$$

24. SIX × TWO = TWELVE

25. $СССР = Р^{Ф}$

26. сорок × 5 = двести

27. ДВЕСТИ × 5 = ТЫСЯЧА

28. НАТАША + ТОНЯ = СЁСТРЫ

29.
$$\begin{array}{r} Д \\ +\ АД \\ ЛАД \\ КЛАД \\ ОКЛАД \\ ДОКЛАД \\ \hline 987654 \end{array}$$

30. $БРА^2 = БОМДОР$

АЛИСА И ТОЧКА

Кандидат физико-математических наук
Л. ГЕНДЕНШТЕЙН

Девочку, изображенную на этой фотографии столетней давности, зовут Алиса Лиддел. Фотографом был ее взрослый друг, учитель математики Чарлз Лютвидж Доджсон, посвятивший ей ставшие всемирно известными книги «Алиса в стране чудес» и «Алиса в Зазеркалье». Известен он более под псевдонимом Льюис Кэрролл. Наш журнал в 1984—1986 годах опубликовал сказку «Алиса в стране чудес» с добавлением множества математических и физических вопросов и задач, возникающих по ходу приключений Алисы. В скором времени мы предполагаем познакомить читателей с письмами Л. Кэрролла к Алисе, ранее у нас еще не публиковавшимися, а сейчас представляем новые приключения Алисы, происходящие в математической стране, описанные Л. Генденштейном в стиле сказок Л. Кэрролла.

Алисе наскучило сидеть на пригорке рядом с сестрой; она устала от ничегонеделанья и разок-другой заглянула в книжку, которую читала сестра. Но там были только чертежи, отдельные буквы и какие-то значки.

— Что толку в книге,— подумала Алиса,— в которой буквы не складываются в слова?

И тут ей показалось, будто из одного чертежа выкатился кружок и покатился по дороге. Ничего удивительного в этом, конечно, не было (на то он и кружок, чтобы катиться, подумалось Алисе), но когда он остановился и подмигнул (вы представляете себе, как кружок может подмигнуть?), Алиса вскочила и побежала за ним. Она уже почти догнала кружок, но он вдруг превратился в восьмерку, лежащую на боку, оторвался от дороги и улетел, как мотылек.

Алиса остановилась и осмотрелась. Дорога, по которой она бежала, шла через огромное поле: оно расстилалось до самого горизонта.

— Может быть, мне лучше вернуться назад? — подумала Алиса.— Но в какую сторону будет вперед, а в какую назад?

Дело в том, что пока Алиса осматривалась, она несколько раз повернулась кругом, и узнать теперь, откуда она пришла, было невозможно: дорога шла в обе стороны совершенно одинаковая.

— Никогда еще я не попадала в такое глупое положение! — огорчилась Алиса.— Заблудиться посреди одной-единственной дороги — я ни за что бы не поверила, что такое возможно!

Но надо было решать, куда идти, потому что стоять было совершенно бесполезно.

— Куда-нибудь я обязательно дойду,— решила Алиса, вспомнив совет Чеширского Кота,— если только буду идти достаточно долго.

Девочка закрыла глаза, несколько раз повернулась и, снова открыв глаза, пустилась в путь.

Алиса шла очень долго, и ноги у нее уже подгибались от усталости. Но присесть было негде: дорога шла ровная, как стрела, на обочине не было ни деревца, ни кустика, а для того, чтобы присесть у дороги, непременно надо, чтобы глаз хоть за что-нибудь зацепился.

— Сколько же я прошла? — спросила себя Алиса.— И сколько мне еще осталось идти? Это, пожалуй, еще более важный вопрос!

Хотя Алиса и устала, она продолжала разговаривать сама с собой: на это у нее всегда хватало сил.

— А вдруг эта дорога никогда не кончится? — сказала Алиса и тут же испугалась: она никогда не задумывалась над словом «никогда».

И тут Алиса заметила на обочине крошечный столбик и бросилась к нему в надежде, что прочитает на нем какую-нибудь полезную надпись, например, что до ближайшего города 100 миль (сейчас она была бы рада даже и этому).

На столбике действительно было написано: «100». Алиса вовсе не удивилась тому, что угадала число; она сразу решила, что это и есть расстояние до ближайшего города. Конечно, она не надеялась пройти сто миль без передышки, но все-таки пошла быстрее, внимательно глядя по сторонам, чтобы не пропустить следующий столбик.

И он действительно вскоре появился. Алиса ожидала увидеть на нем число 99 (ей так хотелось к чему-нибудь *приближаться!*), но, увы, на столбике очень четко и красиво было написано «101».

— Я не приближаюсь, а *удаляюсь*! — в отчаянии воскликнула Алиса.

Ей подумалось, что сейчас самое время немного всплакнуть. Она села на землю, набрала воздуха, но вовремя спохватилась.

— Во-первых, меня здесь никто не видит и поэтому не сможет пожалеть,— рассудила вслух Алиса,— а во-вторых, надо беречь силы, потому что теперь мне придется идти обратно еще больше, чем я уже прошла... а прошла я очень много! — и слезы опять навернулись ей на глаза.

— А разве бывает *больше*, чем *много?* — раздался пискливый голосок. Алиса вздрогнула и оглянулась, но нигде никого не было.

— Кто со мной говорит? — спросила Алиса.— Я вас не вижу.

— Видеть совсем не обязательно! — сказал тот же голос.— Достаточно того, что ты меня слышишь.

— Для *меня*, по крайней мере, этого недостаточно! — возразила Алиса и решила прекратить этот разговор.

Пискливый голосок тоже замолчал, и минуты через две Алиса уже начала жалеть, что ответила так невежливо.

— Меня увидеть невозможно,— вдруг произнес голос.

— Значит, вы,— невидимка? — живо спросила Алиса, радуясь продолжению разговора.— Вот интересно: я никогда еще не видела невидимок! То есть... я хотела сказать, что я никогда раньше их *не встречала!*

— Меня не только нельзя увидеть, меня и *вообразить* трудно,— продолжал голос.

— Так кто же вы? — сгорая от любопытства, спросила Алиса.— Надеюсь, имя хотя бы у вас есть?

— Я — Точка,— сказал голос.

— Точка? — удивленно переспросила Алиса.— Но точки я видела много раз. Они стоят в конце каждого предложения! (Алиса была рада, что представился случай показать свои знания.)

— Я — *Геометрическая* Точка,— уточнил голос.

— Вы хотите сказать, что вы точка из учебника геометрии?— спросила Алиса, довольная тем, что вовремя вспомнила, как называлась книга, которую читала сестра.

— Нет,— сказал голосок.— Я точка без размеров.

— Без размеров? — удивилась Алиса.— Вы хотите сказать, что вы очень маленькая? Я тоже когда-то была очень маленькая...

— Я *бесконечно* маленькая,— сказала Точка.

— Бесконечно *маленькая?* — переспросила Алиса.— Мне казалось, что бесконечность всегда *большая*!

— Бесконечно малое можно понять с помощью бесконечно большого,—

после недолгого молчания сказала Точка.— Сейчас я попробую объяснить тебе...

Алиса вытерла наполовину высохшие слезы и устроилась поудобнее: она догадывалась, что разговор о бесконечном не может быть коротким.

— Ты помнишь, как быстро ты уменьшалась, когда обмахивалась веером Белого Кролика? — спросила Точка.

— Еще бы! — ответила Алиса.— Я уменьшалась вдвое каждую секунду! Хорошо, что я успела бросить веер: еще чуть-чуть, и я бы исчезла совсем!

— Совсем ты бы не исчезла! — важно сказала Точка (по крайней мере, это звучало бы важно, если бы не ее писклявый голосок).— Правда, через десять секунд ты уменьшилась бы больше чем в тысячу раз, через двадцать секунд — больше чем в миллион раз, через полминуты — больше чем в миллиард раз...

— Подождите, пожалуйста,— взмолилась Алиса,— я не успеваю!

— Не успеваешь *слушать*? — удивилась Точка.

— Я не просто слушаю,— сказала Алиса,— я пытаюсь *представить* себе то, что вы рассказываете. А представить, что ты уменьшилась в миллион раз, не так-то просто! У меня, по крайней мере, это не получается быстро...

— Ну конечно,— заметила Точка,— я и забыла, что ты еще незнакома с большими числами!

Алису это замечание обидело.

— С большими числами я знакома: я знаю, что миллион — это тысяча тысяч, а миллиард — это тысяча миллионов, а потом... потом...

Алиса надеялась, что Точка ее перебьет и тогда ей не придется вспоминать, как называется тысяча миллиардов (честно говоря, Алиса этого не только не помнила, но даже и не знала), но Точка продолжала молчать.

— Наверное, у нее сейчас очень вредное выражение лица,— подумала Алиса,— да, впрочем у нее и лица-то нет!

Точка по-прежнему молчала, и Алиса решила обидеться на нее по-настоящему. Это нечестно: замолчать, когда другому нечего сказать.

Алиса собралась подняться, чтобы идти дальше (нет, *обратно*!), но тут снова услышала знакомый голосок:

— Во мне только что пересеклись две прямые, и я еле оправилась от этого потрясения. Давай продолжим: раз ты знаешь, что миллион — это тысяча тысяч, что мешает тебе представить, что ты уменьшилась в миллион раз?

— Мне хотелось бы знать, какой бы я тогда стала,— с готовностью ответила Алиса, мысленно ругая себя за то, что обиделась на Точку.

— Ровно в миллион раз меньше, чем сейчас,— сразу же сказала Точка.— Что же тут непонятного?

Алиса и вправду перестала понимать, что тут непонятного, а это — она знала — очень плохо! Ее учитель говорил ей, что когда она чего-то не понимает, это не страшно, но при одном условии: если она понимает, что именно ей непонятно. Поэтому Алиса взяла себя в руки и спросила себя:

— Что мне непонятно? Мне непонятно, что значит уменьшиться в тысячу тысяч раз. А просто в тысячу раз — понятно?

Алиса немного подумала и честно призналась себе:

— Тоже не очень. А в десять раз? Это, кажется, понятно: я стану ростом со свою ладошку.

Мысли Алисы побежали быстрее.

— Значит, если я уменьшусь еще в десять раз, я буду ростом с вишенку, а еще в десять — с булавочную головку! Вот что значит — уменьшиться в *тысячу* раз!

Алисе стало очень интересно, и она продолжала:

— А если я уменьшусь еще в десять раз, что тогда? Что в десять раз меньше булавочной головки? Вот что: толщина волоса! Это уже уменьшение в десять тысяч раз! До миллиона осталось совсем немного... Попробуем дальше... что в десять раз меньше толщины волоса?

— Поняла, поняла! — закричала Алиса.— Я поняла, чего я не понимала: я не могла представить себя такой маленькой, потому что никогда в жизни не видела таких маленьких предметов.

— Это еще не значит, что их не существует,— сказала Точка.— Но теперь ты, наконец, представляешь себе, что ты уменьшилась в миллион раз?

— Да... то есть нет! Почти представила,— выговорила, немного путаясь, Алиса,— я стала бы в сто раз меньше толщины волоса. Но это тоже очень трудно представить, — призналась она.

— Ну, если тебе даже это трудно представить...— сказала Точка и снова замолчала.

Алиса подождала немного: а вдруг опять в точке пересекаются какие-то загадочные прямые? Выждав пару минут, Алиса заботливо спросила:

— У вас все в порядке, Точка? Вы хотели объяснить мне бесконечно малое с помощью бесконечно большого,— напомнила Алиса.— Может быть, тогда мне легче будет вообразить вас.

— Ладно,— после недолгого молчания согласилась Точка.— У меня времени бесконечно много, поэтому я думаю, что успею... А тебе не жаль своего времени? — вдруг спросила Точка.

— Для вас — не жаль! — ответила Алиса. Так в книжках говорили самые благородные рыцари и, хотя Алиса никогда не мечтала сама стать рыцарем, они ей очень нравились.

— Тогда слушай,— начала Точка, и ее голосок стал мягче (может быть, ее тоже тронули слова Алисы).— Я продолжаю: через полминуты ты уменьшишься в миллиард раз, через сорок секунд — в триллион раз, через пятьдесят секунд — в квадриллион раз...

— Это надо запомнить! — быстро подумала Алиса,— за миллиардом идет триллион, а потом — квадриллион...

— ...а через одну минуту ты уменьшишься в квинтиллион раз. Ты меня слушаешь?

— Да, конечно, милая Точка. Вы дошли до квинтиллиона, и я пыталась его себе представить...

— Это все пустяки! — заорала вдруг Точка.— Не засоряй свое воображение, главное впереди! Слушай внимательно!

Алиса затаила дыхание: она чувствовала, что вот-вот перед ней откроется какая-то великая тайна.

— Представь себе,— продолжала Точка, и голос ее зазвенел,— что ты уменьшаешься с такой скоростью минута за минутой, час за часом, день за днем, месяц за месяцем, год за годом... Каждые двадцать секунд — в миллион раз!

Бедной Алисе никогда еще не приходилось так напрягать свое воображение: все сказки про зверей и драконов показались ей бледной выдумкой по сравнению с тем, о чем говорила Точка.

— Я продолжаю! — загремел (так показалось Алисе) голос Точки.— Проходят века и тысячелетия, гаснут и зажигаются звезды, а ты все уменьшаешься и уменьшаешься... И только через *бесконечно большое* число тысячелетий ты сможешь стать точкой!

Точка помолчала и потом добавила, но уже значительно тише:

— *Сможешь* стать, но *никогда не станешь!* Прощай, мы еще встретимся...

У Алисы голова пошла кругом: в ней перемешались звезды и тысячелетия, и Алисе почудилось, будто она увидела бездну звездного неба. Алиса тряхнула головой, но видение не исчезло: не было уже ни дороги, ни столбика с числом 101.

Алиса, балансируя, стояла на какой-то туго натянутой струне, которую, сколько ни силилась, не могла увидеть.

А над Алисой, и по сторонам, и под ней было бесконечное звездное небо.

Продолжение приключений Алисы в математической стране читайте в следующих номерах журнала.

Математический кружок

Об одной трудной геометрической задаче

Кандидат физико-математических наук
Е. КУЛАНИН

Среди заданий по математике, предложенных на всесоюзном конкурсе «Абитуриент—91» газетой «Поиск» (4—10 января 1991 г.), была и такая геометрическая задача: «Окружность, проходящая через основания биссектрис внутренних углов треугольника, касается одной из его сторон. Верно ли, что этот треугольник равнобедренный?»

Ответ на вопрос задачи отрицательный. Пример неравнобедренного треугольника, удовлетворяющего указанному условию, приведен в статье И. Шарыгина «Откуда берутся задачи?» («Квант» № 9, 1991 г.). В этом примере окружность, проходящая через основания биссектрис AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC, пересекает продолжения его сторон. Оказывается, это не случайно. Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Если окружность, проходящая через основания A_1, B_1, C_1 биссектрис треугольника ABC, касается одной из его сторон и пересекает остальные стороны (а не их продолжения!), то такой треугольник — равнобедренный.*

Утверждение этой теоремы является обратным очевидному утверждению, что окружность, проходящая через точки A_1, B_1, C_1 и пересекающая боковые стороны равнобедренного треугольника ABC, касается основания этого треугольника. Так что она может пополнить небольшую коллекцию обратных утверждений, приведенную в статье «Неожиданность обратной задачи» («Квант» № 2, 1991). Доказательство ее, по-видимому, не менее сложно, чем доказательство знаменитой теоремы Штейнера-Лемуса о том, что если две биссектрисы треугольника равны, то он равнобедренный.

Подготовительные результаты

Прежде чем начать доказывать нашу теорему, напомним некоторые факты, известные внимательному читателю нашего журнала.

Теорема Чевы. *Пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC (рис. 1). Для того чтобы отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

(Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 называются *чевианами*.)

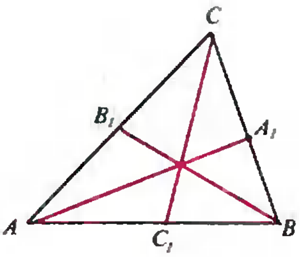


Рис. 1.

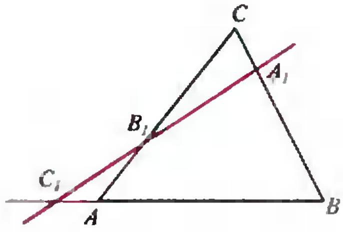


Рис. 2.

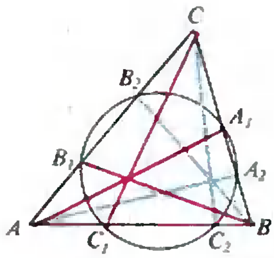


Рис. 3.

Теорема Менелая.*) *Пусть точки A_1 и B_1 лежат на сторонах BC и CA треугольника ABC (рис. 2), а точка C_1 — на продолжении стороны AB этого треугольника. Для того чтобы точки A_1, B_1, C_1 лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

В дальнейшем нам также понадобятся следующие леммы (заметим, что каждая из них имеет и самостоятельное значение).

Лемма 1. *Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — чевианы треугольника ABC, A_2, B_2, C_2 — вторые точки пересечения окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, соответственно со сторонами BC, CA, AB треугольника ABC (рис. 3). Тогда отрезки AA_2, BB_2, CC_2 также являются чевианами треугольника ABC, т. е. пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Так как AA_1, BB_1, CC_1 — чевианы треугольника ABC, то по теореме Чевы

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1 \qquad (1)$$

и, поскольку произведения секущих, проведенных к окружности из одной точки, на их внешние части равны, то $AC_2\cdot AC_1=AB_2\cdot AB_1$, $BA_2\times BA_1=BC_2\cdot BC_1$, $CB_2\cdot CB_1=CA_2\times CA_1$. Перемножив почленно эти равенства, получим

$$AC_2\cdot AC_1\cdot BA_2\cdot BA_1\cdot CB_2\cdot CB_1=AB_2\cdot AB_1\cdot BC_2\cdot BC_1\cdot CA_2\cdot CA_1,$$

или

$$\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}\times\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1,$$

откуда, учитывая (1), найдем, что

$$\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}=1.$$

Лемма 2. *Пусть CC_1 — биссектриса внутреннего, а CD — внешнего угла при вершине C треугольника ABC (рис. 4). Тогда*

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC}{CB}, \qquad (2)$$

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{CB}. \qquad (3)$$

Доказательство этого факта можно найти, например, в школьном учебнике геометрии (или провести самостоятельно).

Лемма 3. *Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — чевианы треугольника ABC (рис. 5), D — точка пересечения прямых B_1A_1 и AB. Тогда*

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AD}{DB}.$$

Доказательство. Поскольку точки A_1, B_1, D лежат на одной прямой, то по теореме Менелая

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BD}{DA}=1 \qquad (4)$$

и по теореме Чевы

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad (5)$$

*) С доказательствами и некоторыми применениями теорем Чевы и Менелая к решению задач можно ознакомиться, прочитав, например, статьи П. Эрднієва и Н. Манцаева («Квант» № 3, 1990) и В. Орача («Квант» № 2, 1991). (*Прим. ред.*)

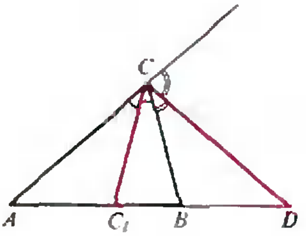


Рис. 4.

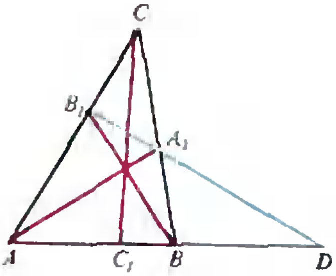


Рис. 5.

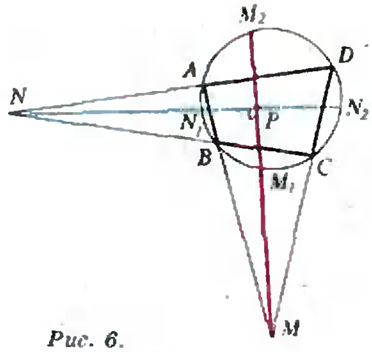


Рис. 6.

Перемножив почленно (4) и (5), найдем, что

$$\frac{AD_1}{C_1B}\cdot\frac{BD}{DA}=1 \text{ или } \frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AD}{DB}. \qquad (6)$$

Лемма 4. *Пусть прямые AB и CD, AD и BC, содержащие стороны описанного четырехугольника $ABCD$, пересекаются соответственно в точках M и N (рис. 6). Тогда биссектрисы углов BMC и ANB перпендикулярны.*

Доказательство. Обозначим точки пересечения биссектрис углов BMC и ANB с описанной окружностью четырехугольника $ABCD$ соответственно через M_1, M_2, N_1, N_2 (см. рис. 6), и пусть угловые меры дуг BM_1, M_1C, CN_2, N_2D, DM_2, M_2A, AN_1, N_1B равны соответственно α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6, α_7, α_8. Если P — точка пересечения прямых MM_1 и NN_1, то $\angle MPN=(\alpha_1+\alpha_8+\alpha_4+\alpha_5)/2$, но $\angle PNB=(\alpha_3-\alpha_8)/2=\angle PNA=(\alpha_4-\alpha_7)/2$, т. е. $\alpha_3-\alpha_8=\alpha_4-\alpha_7$ или $\alpha_3+\alpha_7=\alpha_4+\alpha_8$. Аналогично, $\alpha_6+\alpha_2=\alpha_5+\alpha_4$.
Сложив эти равенства, получим, что $\alpha_3+\alpha_7+\alpha_6+\alpha_2=\alpha_4+\alpha_8+\alpha_5+\alpha_1$. Итак, $\alpha_4+\alpha_8+\alpha_5+\alpha_1=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8)/2=360°/2=180°$, откуда $\angle MPN=90°$.

Доказательство теоремы 1

Приступим наконец к доказательству нашей теоремы. Пусть окружность, проходящая через точки A_1, B_1, C_1 пересекает стороны AC и BC неравнобедренного треугольника ABC в точках B_2 и A_2 и касается основания AC (рис. 7). Тогда из леммы 1 следует, что отрезки AA_2, BB_2, CC_1 — чевианы треугольника ABC, а из лемм 2 и 3 — что B_1A_1, B_2A_2 и AB пересекаются в одной точке D, совпадающей с основанием биссектрисы внешнего угла при вершине C (поэтому отрезки B_1A_1 и B_2A_2 не могут пересекаться внутри треугольника ABC, и точки B_1, B_2 на стороне AC расположены в том же порядке, что и точки A_1, A_2 на стороне BC). Проведем биссектрису DP угла B_1DB_2 и применим лемму 4 к вписанному четырехугольнику $A_1A_2B_2B_1$. Получим, что $\angle CPD=90°$, но $\angle PCD=90°$, как угол между биссектрисами CC_1 и CD смежных углов. Итак, оказалось, что из одной точки D на прямую CC_1 опущены два перпендикуляра. Полученное противоречие доказывает теорему.

Фактически мы доказали следующее более сильное утверждение: *пусть в треугольнике ABC отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются на биссектрисе CC_1, тогда, если окружность, проходящая через точки A_1, B_1, C_1, касается стороны AB и пересекает остальные стороны треугольника ABC (а не их продолжения), то этот треугольник — равнобедренный.*

Когда выполнены условия теоремы?

Выясним теперь, для каких треугольников окружность, описанная около оснований биссектрис, не пересекает продолжений их сторон. Покажем сначала, что если все углы треугольника ABC меньше 120°, то треугольник $A_1B_1C_1$, вершинами которого являются основания биссектрис тре-

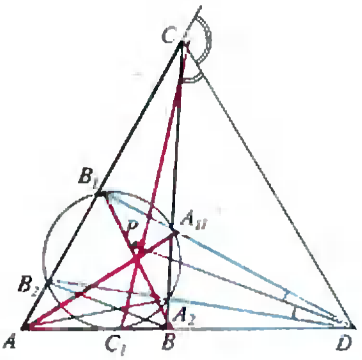


Рис. 7.

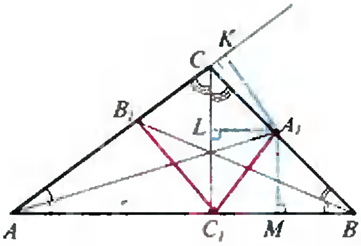


Рис. 8.

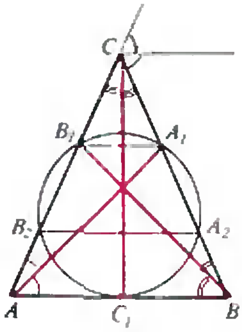


Рис. 9.

угольника ABC, остроугольный. Действительно, пусть в треугольнике ABC $\angle ACB<120°$, K, L, M — основания перпендикуляров, опущенных из точки A_1 соответственно на прямые AC, CC_1, AB (рис. 8). Тогда, поскольку $\angle KCB>60°$, а $\angle C_1CB<60°$, то $\angle KCB>\angle C_1CB$ и $KA_1>LA_1$, но $KA_1=MA_1$, так как AA_1 — биссектриса угла CAB, поэтому $MA_1>LA_1$ и $\angle CC_1A_1<\frac{1}{2}\angle CC_1B$. Аналогично, $\angle CC_1B_1<\frac{1}{2}\angle CC_1A$, откуда $\angle B_1C_1A_1<\frac{1}{2}(\angle CC_1B+\angle CC_1A)=180°/2=90°$. Итак, против угла треугольника ABC, меньшего $120°$, лежит острый угол треугольника $A_1B_1C_1$.

Поскольку для нетупоугольного треугольника ABC попарные суммы его углов с одноименными углами треугольника $A_1B_1C_1$ меньше $180°$, то вершины треугольника ABC лежат вне описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$, т. е. эта окружность не пересекает продолжений сторон треугольника ABC. Из этого факта и из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Если окружность, проходящая через основания биссектрис внутренних углов нетупоугольного треугольника, касается одной из его сторон, то этот треугольник — равнобедренный.*

Таким образом, неравнобедренный треугольник, у которого указанная окружность касается одной из его сторон, обязательно тупоугольный, причем точка касания лежит на большей стороне.

Окончательно прояснить ситуацию поможет следующий интересный факт, который мы приведем без доказательства*): окружность, описанная около оснований биссектрис некоторого треугольника, высекает на прямых, содержащих стороны этого треугольника, такие хорды, что одна из них равна сумме двух других.

Поскольку в нашем случае окружность, описанная около оснований биссектрис треугольника ABC, касается одной из его сторон, то хорды, высекаемые этой окружностью на двух других сторонах, равны. Предположим сперва, что рассматриваемая окружность *не пересекает продолжений* сторон треугольника ABC. Тогда $A_2A_1=B_2B_1$ (см. рис. 7) и вписанный четырехугольник $A_2A_1B_1B_2$ будет равнобочной трапецией.

С другой стороны, из леммы 3 вытекает, что если одна из прямых A_1B_1 и A_2B_2 пересекает прямую AB в точке D, то и вторая пересекает AB в той же точке. Прямые A_1B_1 и A_2B_2 параллельны, это означает, что каждая из них в свою очередь параллельна основанию AB треугольника ABC. Итак, мы получили, что биссектриса CC_1 проходит через точку пересечения диагоналей трапеции ABA_1B_1, поэтому точка C_1 совпадает с серединой стороны AB и треугольник ABC — равнобедренный (рис. 9).

В этом случае биссектриса CC_1 внутреннего угла при вершине C является осью симметрии равнобочной тра-

*) Идея доказательства содержится в указании к задаче 198 на с. 153 книги И. Шарыгина «Задачи по геометрии. Планиметрия» (М.: Наука, 1986).

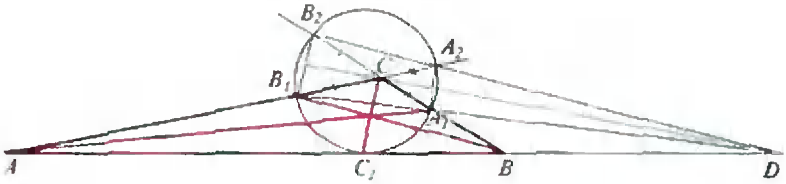


Рис. 10.

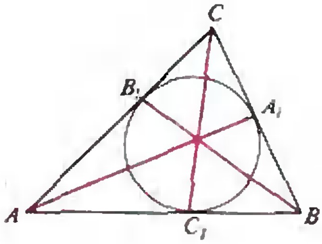


Рис. 11.

пеции $A_2A_1B_1B_2$, основания которой параллельны биссектрисе внешнего угла при этой вершине.

В случае, когда описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ пересекает продолжения сторон треугольника ABC, картина меняется: хотя вписанный четырехугольник $A_1A_2B_2B_1$ также будет равнобочной трапецией (в силу равенства диагоналей A_1B_2 и B_1A_2), основания этой трапеции параллельны внутренней биссектрисе CC_1, а осью симметрии трапеции $A_1A_2B_2B_1$ является внешняя биссектриса CD. В этом случае внешняя биссектриса CD может быть непараллельна основанию AB и поэтому треугольник ABC не обязательно равнобедренный (рис. 10).

Таким образом, из того, что окружность, описанная около оснований биссектрис нетупоугольного треугольника ABC, касается одной из его сторон, следует, что этот треугольник равнобедренный. Если же точки A_1, B_1, C_1 совпадают с основаниями медиан или высот произвольного треугольника ABC, то из факта касания описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ одной из сторон треугольника ABC вытекает, что треугольник ABC равнобедренный (как известно, основания медиан и основания высот произвольного треугольника лежат на одной окружности — так называемой окружности девяти точек этого треугольника, поэтому, если эта окружность касается одной из сторон треугольника, то одна из его высот совпадает с медианой, т. е. треугольник оказывается равнобедренным).

В связи с этим естественно поставить следующий вопрос. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — произвольные чевианы треугольника ABC и окружность, проходящая через точки A_1, B_1, C_1, касается одной из сторон этого треугольника. Для каких треугольников ABC из выполнения данного условия будет следовать их равнобедренность? Мы уже установили, что если точки A_1, B_1, C_1 совпадают с основаниями высот или медиан произвольного треугольника ABC, то выполнение указанного условия влечет равнобедренность треугольника. Если же точки A_1, B_1, C_1 являются основаниями биссектрис треугольника ABC, то при выполнении данного условия равнобедренными будут по крайней мере нетупоугольные треугольники ABC.

Рассмотрим теперь вписанную окружность треугольника ABC, касающуюся его сторон в точках A_1, B_1, C_1. Поскольку $AB_1=AC_1$, $BC_1=BA_1$, $CA_1=CB_1$, то

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1,$$

и по теореме Чевы отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке (рис. 11). Итак, вписанная окружность треугольника ABC проходит через основания A_1, B_1, C_1 чевиан AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC и касается всех его сторон в тех же точках A_1, B_1, C_1. Так как вписать окружность можно в любой треугольник, то касание окружности, описанной около оснований чевиан треугольника ABC, со сторонами этого треугольника может в общем случае не накладывать никаких ограничений на треугольник ABC.

Практикум абитуриента

Внимание: ловушка!

Б. КОРСУНСКИЙ

Абитуриент (лат.) — тот, кто должен уйти.

Все чаще в последнее время на устных экзаменах или собеседованиях по физике абитуриентам предлагаются нестандартные, парадоксальные задачи, где ответ, казалось бы, очевиден, но... неверен. Чтобы добраться до верного ответа, нужно вспомнить о таких физических эффектах, которые обычно не играют роли в «похожих» (в кавычках!) ситуациях. Вот несколько примеров.

Задача 1. *С воздушного шара, находящегося на большой высоте, отпускают без начальной скорости мяч для большого тенниса. Мяч падает на землю и упруго отскакивает. Найдите его ускорение сразу после отскока.*

Здесь надо вспомнить о том, что тела при падении не испытывают сопротивления воздуха только в вакууме или... в школьном задачнике по физике. Конечно же, «волосатый» и не слишком тяжелый теннисный мячик довольно быстро перестанет ускоряться — ведь сила сопротивления в этом случае пропорциональна скорости. Другими словами, при падении с «большой» высоты сила сопротивления воздуха около земли будет равна по модулю силе тяжести. А после отскока эти силы будут одинаковыми не только по модулю, но и по направлению. Тогда ответ становится очевидным: $a=2g$. (Это ровно вдвое больше вашего первоначального «очевидного» ответа, не так ли?)

Задача 2. *Плоский конденсатор заряжен до разности потенциалов U и отключен от источника. Небольшой заряд Δq берется с края одной обкладки и переносится на другую так, как это показано на рисунке 1. Найдите совершенную при этом работу.*

Известно, что напряженность электрического поля *снаружи* конденсатора равна 0, а значит, очевиден ответ: $A=0$. Теперь, не дожидаясь вопроса экзаменатора, спросите себя сами: а если заряд пронести *внутри* конденсатора (рис. 2)? Казалось бы, работа измениться не должна — ведь электрическое поле потенциально, т. е. работа по переносу заряда *не зависит* от траектории. Но тогда получается... второй очевидный ответ: $A=U\Delta q$. Он-то и верен!

К ошибке (в первом ответе) нас привело стандартное предположение об отсутствии силовых линий снаружи.

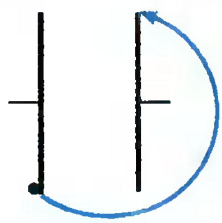


Рис. 1.

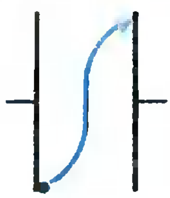


Рис. 2

Заметим, что в обеих рассмотренных задачах эффект, которым «хочется» пренебречь, отнюдь не мал. Но иногда и действительно малый эффект может оказаться определяющим.

Задача 3. *На край абсолютно гладкого горизонтального круглого стола осторожно положили гладкий шарик так, чтобы он не упал. Останется ли шарик в покое?*

Наученные горьким опытом, вы сразу скажете: «Нет!» А потом подумаете: «А почему, собственно?» Но если вы вспомните, что Земля — шар, то станет ясно, что положение равновесия нашего шарика находится в центре стола. Следовательно, шарик будет совершать колебания около этого положения.

Кстати, несложно рассчитать их период (проделайте это самостоятельно) и получить результат: $T=84$ мин. Как видно, ускорение здесь очень мало, но в «гладких» условиях вполне способно себя проявить.

В заключение — несколько «ловушек» для самостоятельного решения.

1. Мяч бросают вертикально вверх. Какое время больше: подъема или спуска?

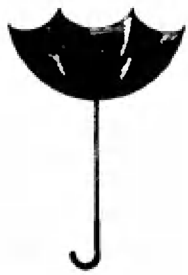
2. Два автомобиля едут рядом по шоссе со скоростью v. Затем один из них удваивает скорость. В результате стоящий на шоссе наблюдатель считает, что кинетическая энергия первого автомобиля выросла на $^3/_2\ mv^2$, а отставший шофер уверен, что эта энергия выросла только на $^1/_2\ mv^2$. Рассудите их: ведь не может же быть так, чтобы из-за смены системы отсчета топливо стало гореть втрое «хуже» (а тем более — втрое «лучше»).

3. Гладкая однородная веревка длиной l и массой m переброшена через небольшой блок так, что вначале система находится в равновесии. Веревку немного смещают, и она начинает соскальзывать с блока. С какой силой действует веревка на блок в тот момент, когда длина веревки с одной стороны равна $l/3$? Подсказка: ответ $^8/_9\ mg$ — неверен.

„Квант" улыбается

Из «Каталога невозможных объектов» Карельмана

Зонтик-обсерватория. Раздвигается, как купол астрономической обсерватории, позволяя просунуть подзорную трубу и продолжать наблюдение.



Зонтик для сухого климата. Благодаря вогнутой форме, позволяет собирать столь редкую в этих краях дождевую воду.

Солнечный зонтик для сада. Благодаря полной прозрачности, он не мешает любоваться окружающим пейзажем.

Перевод с французского

Информация

Заочная школа при НГУ

При Новосибирском государственном университете работает Заочная школа (ЗШ) для учащихся 9—11 классов общеобразовательных школ любого государства, входившего в состав бывшего СССР.

В ЗШ 5 отделений: математическое, физическое, химическое, биологическое и экономическое. На математическое, физическое и химическое отделения принимаются учащиеся 9—11 классов, на биологическое — только учащиеся 10 классов, на экономическое — только учащиеся 11 классов.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ могут быть приняты также математические, физические, химические, биологические и экономические кружки и факультативы, которые работают в школах под руководством учителей. Руководитель кружка набирает и зачисляет в них учащихся, успешно выполнивших первое задание по соответствующему предмету. Кружок принимается в ЗШ, если руководитель сообщает в ЗШ свою фамилию, имя, отчество и высылает поименный список членов кружка (с указанием итоговых оценок за первое задание), подписанный директором школы и заверенный печатью. После этого члены кружка считаются учащимися ЗШ.

Учащиеся, принятые в ЗШ, и руководители кружков будут получать задания ЗШ и дополнительные материалы. Работы учащихся-заочников проверяют в ЗШ, а работы членов кружка проверяет руководитель (по желанию руководителя часть работ членов кружка может быть проверена и в ЗШ).

Ежегодно часть учащихся 10—11 классов ЗШ (тех, кто будет учиться в этих классах в следующем учебном году) приглашается в Летнюю школу при НГУ. Здесь они вместе с победителями Всесибирской олимпиады слушают лекции крупных ученых, решают интересные задачи на семинарах, знакомятся с университетом и научно - исследовательскими институтами Академгородка, отдыхают и развлекаются. На период зимних каникул учащиеся ЗШ из близлежащих областей приглашаются в Зимнюю школу при НГУ.

Чтобы стать учеником Заочной школы при НГУ, необходимо *до 30 сентября* прислать на имя директора ЗШ заявление, оформленное по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество (полностью, печатными буквами)	НИКОЛАЕВ ИГОРЬ ИВАНОВИЧ
Класс, в котором вы учитесь в своей школе	9
Отделение ЗШ, на котором вы хотите учиться (можно указать два отделения)	математическое (математическое и физическое)
Подробный домашний адрес с обязательным указанием почтового индекса	632149, Новосибирская обл., с. Мезениха, ул. Андрианова, д. 28 «а», кв. 5

Руководитель кружка должен прислать на имя директора ЗШ письмо с просьбой выслать первое задание и дополнительные материалы к нему.

Заявление о приеме на математическое или физическое отделение ЗШ можно выслать вместе с решениями соответствующего первого задания, публикуемого ниже, *не позднее 15 октября*.

Для получения ответа вложите конверт с маркой с написанным на нем вашим домашним адресом.

Решения задач запишите в простую ученическую тетрадь в клетку, оставляя поля для замечаний преподавателя. На обложке тетради укажите те же сведения о себе, что и в заявлении. Работу отошлите вместе с заявлением, причем *только простой бандеролью* (тетрадь не перегибайте и не сворачивайте в трубочку, тетрадь должна быть тонкой, так как средства на почтовые расходы в ЗШ ограничены). В тетрадь с решениями вложите листок бумаги размером 6×10 см с написанным на нем вашим адресом (его наклеят на конверт, когда будут отсылать ответ).

За обучение в течение одного года на одном отделении необходимо заплатить 45 рублей. Бесплатное обучение в ЗШ сохраняется для детей-сирот, обучающихся в школах-интернатах, и детей из многодетных семей (в которых пять и более детей до 18 лет, находящихся на иждивении родителей).

Оплату следует производить почтовым переводом на р/с № 000141504 в Советском РКЦ г. Новосибирска. В графе «Вид платежа» напишите: «за обучение в ЗШ при НГУ». Квитанцию об оплате *вклейте в тетрадь с первым заданием.* Тетради без квитанции проверяться и возвращаться не будут.

Наш адрес: 630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 11, Заочная школа при НГУ.

Первое задание по физике

После разбора задач своего класса полезно (и мы вам рекомендуем) ознакомиться с задачами для других классов, а понравившиеся задачи — попробовать решить.

Экспериментальная задача (одна для поступающих во все классы).

Длинную палку (желательно более метра) положите горизонтально на указательные пальцы рук, затем руки медленно сводите. Проделайте этот эксперимент и объясните наблюдаемое явление поочередного проскальзывания пальцев относительно линейки.

Теоретические задачи

9 класс

1. Две лампочки (одна мощностью 60 Вт, другая — 150 Вт) включены в сеть последовательно. Какая из них горит ярче?

2. Гантелька, состоящая из двух шариков, которые сделаны из одного и того же материала и соединены невесомым стержнем, находится внутри жидкости (рис. 1). Гантелька уравновешена так, что расстояния между центрами шариков и опорой равны l_1 и l_2. Объем одного из шариков V_1. Найдите объем V_2 другого шарика, если равновесие гантельки не нарушается и в отсутствие жидкости.

3. Снаряд разрывается на высоте h на множество мелких осколков. Определите радиус поверхности, которую покроют осколки к моменту времени t после взрыва, если они разлетаются во все стороны с одной и той же скоростью v. Считайте, что поле тяжести отсутствует.

4. Оцените, на каком расстоянии от вас находится человек, если его рост и диаметр заходящего Солнца кажутся вам одинаковыми.

10 класс

1. Решите задачу 4 для 9 класса.

2. Определите минимальное время движения автобуса от одной остановки до другой, если расстояние между остановками l. При разгоне автобус может развивать максимальное ускорение a_1, а при торможении — двигаться с ускорением $-a_2$.

3. С каким горизонтальным ускорением надо двигать кирпич, чтобы шайба, прислоненная к его вертикальной поверхности, не падала вниз (рис. 2)? Коэффициент трения скольжения между шайбой и поверхностью кирпича μ.

4. Два груза, массы которых одинаковы, связаны нитью, переброшенной через блок (рис. 3). Определите ускорение грузов, если наклонная плоскость составляет угол α с горизонтом. Трения нет.

5. Груз массой m, соединенный с невесомым тросом пружинной жесткостью k, опускают с постоянной скоростью v (рис. 4). Определите максимальное натяжение троса при его мгновенной остановке.

11 класс

1. Решите задачу 4 для 9 класса.

2. Решите задачу 2 для 10 класса.

3. Найдите ускорение длинной гусеницы, съезжающей по наклонной плоскости без проскальзывания (рис. 5). Массой рамы и колес можно пренебречь. Угол наклона плоскости к горизонту α.

4. Закрытый поршнем цилиндр объемом $V=1$ м^3, заполненный идеальным газом, находится на большой глубине в океане. Какое количество теплоты будет отведено от газа, если цилиндр опустить еще на $\Delta h=1$ м?

5. В замкнутом сосуде находятся порошок и газ. Когда температуру сосуда увеличили в 1,1 раза, давление газа увеличилось в 11 раз. Во сколько раз уменьшится давление газа, если температуру уменьшить в 1,1 раза? Объем порошка при увеличении температуры увеличивался, а при уменьшении уменьшался на одну и ту же величину. Объем сосуда не менялся.

6. Стержень массой m и длиной l висит на легких спицах длиной h в вертикальном однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ и может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси

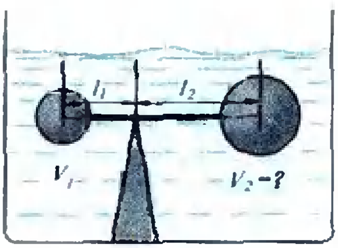


Рис. 1

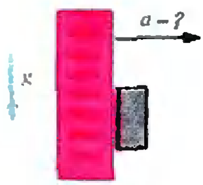


Рис. 2

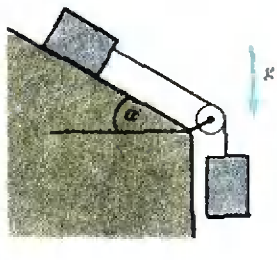


Рис. 3.

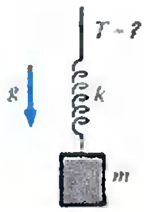


Рис. 4.

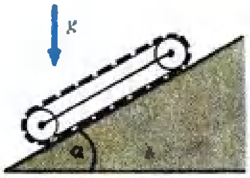


Рис. 5.

Рис. 6.

вместе со спицами как одно целое (рис. 6). Определите максимальную высоту подъема стержня после того, как по нему пропустили постоянный ток I.

Первое задание по математике

9 класс

1. У продавца имеется 2 мешка леденцов — в одном леденцы по 10 рублей за килограмм, другом — по 15 рублей за килограмм. Стоимости мешков одинаковые. Леденцы равномерно перемешали. По какой цене нужно продавать полученную смесь?

2. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 17°. Найдите угол между высотой и медианой, проведенными в этом треугольнике из вершины прямого угла.

3. Решите уравнение

$$|x-3|+|x-5|=2.$$

4. Решите уравнение

$$(9-x^2)\cdot\sqrt{2-x}=0.$$

5. Внутри окружности с центром O задана точка M. С помощью циркуля и линейки впишите в эту окружность равносторонний треугольник так, чтобы одна из его сторон проходила через точку M.

10 класс

1. Первая и вторая бригады вместе изготовили в два раза больше деталей, чем третья, а первая и третья вместе — в три раза больше, чем вторая. Какая бригада изготовила наибольшее количество деталей?

2. Решите уравнение

$$|x-|4-x||-2x=4.$$

3. Решите уравнение

$$2\sqrt{1-x^2}-x+2=0.$$

4. Каждая диагональ выпуклого четырехугольника делит его на два равных по площади треугольника. Докажите, что этот четырехугольник — параллелограмм.

5. Решите задачу 5 для 9 класса.

11 класс

1. Решите уравнение

$$\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8.$$

2. Найдите угол между непересекающимися диагональю куба и диагональю грани.

3. В треугольнике две медианы пересекаются под прямым углом. Их длины равны n и m соответственно. Найдите площадь треугольника.

4. Постройте параллелограмм по одному углу и диагоналям.

5. При каких значениях параметра c уравнение $x-2\sqrt{x}+c=0$ имеет единственное решение?

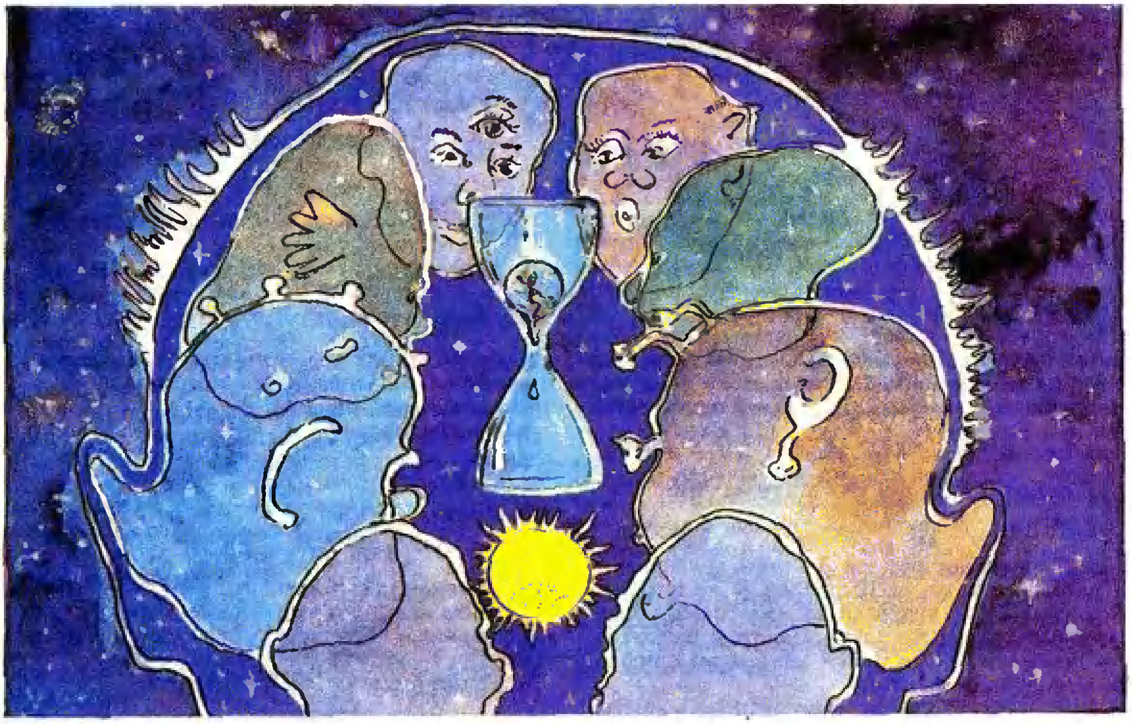
Заочная школа программистов

При Высшем колледже информатики Новосибирского государственного университета (ВКИ НГУ) работает Заочная школа программистов (ЗШП) для учащихся 9 классов.

Чтобы стать учеником ЗШП, необходимо *до 30 сентября* прислать на имя директора ВКИ НГУ заявление с просьбой выслать первое задание.

Обучение в течение одного года стоит 30 рублей. Оплату следует производить почтовым переводом на р/с № 141009 в Советском РКЦ г. Новосибирска (МФО 224916). В графе «Вид платежа» напишите «За обучение в ЗШП при ВКИ НГУ». Квитанцию об оплате подклейте к заявлению. Вместе с заявлением вышлите конверт с вашим домашним адресом.

Наш адрес: 630058, Новосибирск-58, ул. Русская, 35, ВКИ НГУ, Заочная школа.



Ф-значит ракета

Есть ли жизнь на Европе?

(интервью с членом-корреспондентом Российской академии наук Н. Кардашевым)

Каков сегодняшний взгляд ученых на проблему поиска внеземных цивилизаций (ВЦ) и каковы перспективы? С этими вопросами наш корреспондент В. Николаев обратился к одному из учеников и ближайших соратников И. Шкловского, директору Астрокосмического центра Физического института им. П. Н. Лебедева, участнику и разработчику международной программы поиска ВЦ, члену-корреспонденту РАН Н. Кардашеву.

Ровно 30 лет назад вышла книга известного советского ученого-астрофизика И. Шкловского. Называется она «Вселенная, жизнь, разум». И хотя с тех пор книга эта неоднократно переиздавалась, резонанс, который был вызван тем первым выпуском, забыть невозможно. И это понятно. В то время звезды открылись нам всем совершенно под другим углом: ведь только что человек впервые вырвался в космос! Казалось, еще несколько лет и — начнется освоение планет, а затем — других звездных систем. Ну и, конечно, не за горами и встреча с внеземными цивилизациями.

Но шли годы. Все пристальнее изучали звездное небо ученые, все мощнее становились их приборы, постепенно ушли из жизни многие энтузиасты поиска внеземных цивилизаций, в том числе и сам автор книги, а результата все нет и нет... В чем причина этой «неудачи»?

В. Н.: Николай Семенович, вы, конечно, помните ту тридцатилетней давности презентацию книги «Вселенная, жизнь, разум»?

Н. К.: Да, только я не знал, что это была презентация...

В. Н.: Действительно, тогда это звучало значительно скромнее. Просто в Доме ученых собрались соратники автора, ученые и энтузиасты космических исследований. Обсуждалась книга, но всех особенно волновала одна из центральных идей — теория множественности разумной жизни во Вселенной, приверженцем которой был сам Шкловский. Прошло, однако, не так много времени и, как мне кажется, автор не просто пересмотрел некоторые свои взгляды. Он стал сугубо скептически относиться к самой возможности существования ВЦ не только в окрестностях Солнечной системы, но и далеко за ее пределами.

Н. К.: Насколько я знаю, это не совсем так. В последние годы своей жизни, а умер Шкловский в 1985 году, он был слишком озабочен тенденциями развития нашей цивилизации. Именно размышления над политическими, экономическими и экологическими проблемами сделали его исключительно пессимистичным. Он предвидел большие потрясения, которые ожидают нашу цивилизацию, и полагал, что с подобными проблемами должны столкнуться и другие. Отсюда он делал вывод, что ВЦ, прошедших путь до стадии очень высокого развития, не должно быть много. В то же время он не исключал, что во Вселенной мы все же не одни.

В. Н.: Надо полагать, что уж вы-то точно не считаете нашу цивилизацию уникальной?

Н. К.: Нет, нет, появление ВЦ — это закон природы. Такой же, как закон тяготения. Нет никаких научных данных, заставляющих считать нашу цивилизацию уникальной.

В. Н.: Так же, как нет фактов и того, что мы не одни, а ведь поиски продолжаются уже десятки лет. Но, может быть, найдены «сомнительные» места в пространстве или явления, с ними связанные, которые дают надежды?

Н. К.: Нет, но ведь и больших капиталовложений в эти исследования не делалось. Использовались только те средства, которыми располагали астрономы, а не созданные специально для такого поиска. Причем применялись даже не лучшие телескопы, а рядовые, рядовая аппаратура. Поэтому и изучение идет не так быстро, как хотелось бы, ну и соответственно результаты... Но по мере развития техники астрономических исследований, я думаю, положение будет меняться.

Мы столкнулись с новыми объектами, которые, возможно, окажутся тесно связанными с проблемой ВЦ. Нам необходимо разобраться со многими вопросами, например с проблемой скрытой массы. Можно ли двигаться дальше, если 90 % материи Вселенной мы просто не видим и не представляем, что это такое...

В. Н.: Чтобы ее обнаружить, наверное, нужны принципиально новые приборы?

Н. К.: Так как неизвестно, что это такое, трудно сказать, какими должны быть приборы. Поэтому перебираются разные возможности. Используются телескопы всех диапазонов. Эксперименты, которые планируются на ближайшие 10 лет, может быть, позволят получить ответ, но пока, кроме того, что скрытая масса оказывает существенное влияние на тяготение в нашей галактике, в межгалактическом пространстве, мы ничего не можем сказать.

В. Н.: Ищем вдали, а со страниц газет и из телевизионных передач все больше «узнаем» о контактах с другими цивилизациями, о наблюдениях НЛО. Вот и полтергейст относят к «шуткам» представителей других форм жизни...

Н. К.: Я думаю, что здесь мы имеем дело с некой болезнью, типа массового психоза. И это психическое заболевание, как ни странно, связано, в основном, с нашей страной. Вызвано оно тяжелым экономическим положением, социальным разладом. За рубежом и раньше были люди, интересовавшиеся и увлекавшиеся «летающими тарелочками», но их количество не велико. Отношение же ученых к этим вещам всегда было крайне скептическим. Никаких фактических данных, зарегистрированных и научно подтвержденных, нет.

В. Н.: Но говорить об этом только как о сегодняшнем явлении, наверное, нельзя. Вам, безусловно, известна работа Циолковского «Воля Вселенной», в которой он пишет: «Есть еще ряд явлений, правда, в большинстве случаев столь же сомнительных... Они говорят нам о проникновении каких-то разумных сил в наш мозг и вмешательстве их в человеческие дела. Я сам два раза в жизни был свидетелем таких явлений и потому не могу их отрицать. ...На этом основании я допускаю, что некоторая часть такого рода явлений не иллюзия, а действительное доказательство пребывания в космосе неизвестных разумных сил, каких-то существ, устроенных не так, как мы, по крайней мере, из несравненно более разреженной материи. Может быть, это наследие убежавших дециллионов лет прошедшего времени, создавших эти существа. Последние, как видно, сохранились до сих пор»...

Н. К.: Для уровня науки того времени это были смелые идеи. Современная наука не исключает совершенно новых видов вещества, новых типов взаимодействий, неизвестных сегодня, и ученые работают над этим. Но одной из задач науки является и борьба с суевериями всякого рода. А вера в чертовщину отражает уровень грамотности, а вернее, неграмотности населения.

В. Н.: Вернемся снова в далекий космос. Чем сегодня отличается стратегия поиска ВЦ?

Н. К.: Исчезла эйфория первых лет, когда казалось, сто́ит включить чувствительный приемник и... радиопослания от ВЦ так и хлынут. Сегодня эту проблему наскоком никто не надеется решить. Мы перестали рассчитывать только на сигналы ВЦ, а ищем проявления их деятельности, например большие космические конструкции. Среди технических «новинок» — миллиметровый диапазон. С ним мы связываем большие надежды.

В. Н.: Ограничено ли расстояние, на котором ведутся поиски?

Н. К.: Практически нет, ведь уже сегодня мы можем заглянуть на 10 миллиардов световых лет. И скорее всего, это не предел.

В. Н.: Каким образом вы рассчитываете отличить искусственный объект от естественного образования?

Н. К.: Действительно, это весьма непросто. По-видимому, сначала надо обнаружить очень крупные образования твердого тела, соизмеримые, скажем, с Солнечной системой, что, по нашему мнению, является предпосылкой для возможности длительного хранения информации. Но это не единственный признак. Такие объекты должны иметь исключительно сложную конструкцию, выделяющую их среди других небесных тел.

В. Н.: А сохранился ли какой-нибудь шанс обнаружить жизнь (пусть хоть простейшие ее формы) в пределах нашей планетной системы? Тем более что результаты эксперимента, проведенного на поверхности Марса с помощью космического аппарата «Викинг», положительными не назовешь.

Н. К.: Я полагаю, программа «Викинга» когда-нибудь получит свое продолжение. Ведь эксперимент, который представляется очевидным, технически тогда не был еще возможен. Я имею в виду изучение структуры почвы с помощью чувствительного микроскопа. Это позволило бы провести поиски не только живых, но и умерших в далеком прошлом микроорганизмов.

Среди других объектов Солнечной системы очень интересным представляется спутник Юпитера — Европа. Она практически вся покрыта огромным слоем льда, в котором имеется множество трещин. Не исключено, что подо льдом находится вода, а в ней могут оказаться какие-то необычные живые организмы. К сожалению, такие исследования пока не планируются.

В. Н.: А исследование Марса?

Н. К.: В этом году намечается запуск американского аппарата «Марс орбитер», в 1994-м — наших космических аппаратов.

В. Н.: А существует ли космический аппарат или технический проект, основной целью которого был бы поиск ВЦ?

Н. К.: Специальных космических аппаратов пока нет, а вот наземные сооружения создаются. В частности, крупнейший в мире радиотелескоп, который строится в горах Узбекистана, на высоте 2500 метров над уровнем моря. Диаметр его антенны — 70 метров. В 1994 году телескоп должен начать работу в диапазоне коротких миллиметровых волн. Этот телескоп будет лучшим в мире. Несмотря на нашу бедность, хорошо подумав и все взвесив, мы решили его строить. С его помощью, в частности, будут осуществляться программы поиска жизни во Вселенной. Кстати, на нашем телескопе выразили желание работать и американские ученые.

Одновременно и в США создаются инструменты для наблюдения с поверхности Земли. Надо сказать, что в Соединенных Штатах даже создан институт по поиску ВЦ. Он финансируется, и очень прилично, Национальным управлением по космонавтике и аэронавтике (НАСА). У нас с этим институтом весьма неплохие отношения. Сейчас мы разрабатываем совместную программу.

Что касается космических аппаратов, то в начале 95 года планируется осуществить международный проект. На орбиту искусственного спутника Земли будет запущен «Радиоастрон» — спутник с 10-метровым радиотелескопом на борту. Спутник создается в НПО им. С. А. Лавочкина, но в его разработке принимают участие и узбекские конструкторы, и специалисты из Российской академии наук, и из НАСА, а также из многих крупнейших обсерваторий мира. Сам спутник хоть и не связан напрямую с поиском ВЦ, а ориентирован на поиск скрытой массы во Вселенной, позволит, надеюсь, продвинуться и в поисках ВЦ.

Эти два радиотелескопа, работая как единая система, позволят получать изображения небесных объектов с недостижимым на Земле разрешением — до миллионной доли угловой секунды.

В. Н.: Мы проводим эксперименты по обнаружению жизни на других планетах, а в будущем, вероятно, будем проводить эксперименты и по заселению планет земными формами. Наверное, поэтому можно предположить, что и на Земле жизнь появилась искусственным путем, в результате какого-то внеземного эксперимента?

Н. К.: Такая гипотеза существует. Но никакими данными, способными подтвердить ее, мы не располагаем.

В. Н.: Ну а какое определение понятия «жизнь» вам кажется наиболее точным? Ведь грань между живым и неживым весьма хрупкая.

Н. К.: Хороших определений много. Среди них я бы отметил такое: живым является то, что способно целенаправлено собирать информацию об окружающем мире и о самом себе. Правда, между живым организмом и вычислительной машиной есть много общего — в сборе информации, ее кодировании. Возможно, ученые и смогут создать искусственный разум. Вообще это очень интересная область исследований. Их предметом, например, является определение на научном уровне понятия души.

В. Н.: Отсюда один шаг к вечному вопросу о бессмертии души.

Н. К.: Никаких фактов об этом, к сожалению, нет. Хотелось бы верить в бессмертие, но, думаю, что говорить можно о «реализации» бессмертия лишь в далеком будущем. Может быть, успехи в создании искусственного разума приведут лет через 100 или 200 к возможности бессмертия для каждого индивидуума. Во всяком случае, никаким физическим законам это не противоречит...

В. Н.: Представим себе, что ВЦ обнаружена. Что это даст человечеству, не остановится ли оно в своем развитии?

Н. К.: Сам факт существования ВЦ, находящейся на очень высоком уровне развития, даст человечеству надежду на преодоление имеющихся сегодня трудностей, а более подробная информация, возможно, подскажет, как вести себя, укажет оптимальное направление.

Информатика

Машина Тьюринга

А. КОТОВА

Героиня этого повествования родилась в мае 1936 года в статье «О вычислимых числах с приложением к проблеме разрешения» английского логика Алана Мэтисона Тьюринга. По-видимому, идея носилась в воздухе, поскольку аналогичная работа американского математика Э. Поста появилась на свет всего лишь четырьмя месяцами позже.

Все современные вычислительные машины могут считать себя духовными наследницами нашей героини. Духовными потому, что она — персонаж вымышленный. Ее отец, Тьюринг, объяснив, как должно работать его детище, не стал вдаваться в технические подробности, а углубился в создание теории алгоритмов вообще и для своей машины в частности. (Строго говоря, «алгоритм для машины Тьюринга» — выражение неточное. По Тьюрингу, под каждую конкретную задачу изготовляется своя машина со всеми необходимыми для данной задачи атрибутами. По сути дела, эта машина — в некотором роде синоним понятия «алгоритм».)

Оставшись на бумаге и потеряв надежду воплотиться «в железе», машина Тьюринга начала странную жизнь воображаемого инструмента для изучения разрешимости математических проблем. На этом поприще она и прославилась, заняв прочное место в новом разделе математики — теории конечных автоматов.

Элементарные действия вычислителя

Представьте себе, что вам нужно вычислить значение некоторой функции, например $f(x, y, z)=(x+y)^2-\sqrt{z-(x+y)}$, для заданного множества значений аргументов, например $\{(1, 2, 3), (2, 3, 9)\}$. Выполняя это пустяковое задание, следите за своими действиями.

Итак, в вашем распоряжении конечный набор символов: буквы, цифры, скобки. Перед вами предписание, содержащее конечное число указаний: сложить, вычесть, возвести в степень, извлечь корень. Вы начинаете с того, что складываете 1 и 2, т. е. рассматриваете конечное число вхождений этих символов. Вычислив первое слагаемое, вы временно забываете о нем и переходите ко второму. Добравшись до подкоренного выражения, вы вспоминаете, что значение $x+y$ уже подсчитано, и используете его в вычислении. В конце концов, по прошествии какого-то времени, вы получаете некоторое выражение, представляющее собой значение функции для данного значения аргумента.

Тьюринг задался вопросом: нельзя ли действия вычислителя разложить на некоторые элементарные действия, так что каждый шаг, предпринимаемый им, был бы их комбинацией? Эти элементарные действия могли бы быть следующими: распознавание символа, стирание его, выписывание символа, перемещение из точки наблюдения символа в соседнюю точку и изменение имеющейся в памяти информации.

Вот тут-то и выходит на сцену машина, умеющая выполнять такие элементарные шаги.

Устройство машины Тьюринга

Машина состоит из бесконечной ленты, разделенной на клеточки, и считывающе-записывающей головки. Математики говорят, что лента «потенциально бесконечна». Это значит, что она, вообще говоря, может быть и конечной, но при необходимости к ней подклеиваются дополнительные куски. (Тот, кто все любит пощупать, даже теоретическую модель, может построить себе небольшую машинку Тьюринга из полоски клетчатой бумаги.) Клетка может находиться в одном из двух состояний: либо она пуста, либо в ней записан один из заданного конечного списка символов $s_1, ..., s_n$. Если обозначить пустую клетку символом Λ, то каждая ячейка ленты будет удовлетворять одному из $n+1$ условий (набор $\{\Lambda, s_1, ..., s_n\}$, называют *алфавитом* машины).

Считывающая головка в каждый момент времени видит ровно одну клетку, находящуюся в ее поле зрения, поэтому, чтобы приблизиться к условиям ее работы, вы можете сделать окошко соответствующего размера в куске картона и глядеть через него. Она может прочесть символ, содержащийся в данной ячейке, стереть его или впечатать на его место другой символ из алфавита, в том числе и тот же самый (тогда содержимое клетки не изменится). Ранее записанный символ при этом стирается. Кроме того, головка может переместиться на одну клетку вправо, влево или остаться на месте. Машина может находиться в одном из конечного числа *состояний* $q_0, q_1, ..., q_m$.

Информацию о том, что записано на ленте, какая клетка ленты в данный момент находится в поле зрения головки и какое следующее действие надо предпринять, Тьюринг называет «полной конфигурацией» машины.

Получив «на входе» символ из обозреваемой клетки, машина однозначно реагирует на него, сообразуясь со своим состоянием, и совершает элементарное действие (впечатывает в клетку какой-либо символ, перемещает или не перемещает головку, переходит в следующее состояние или останавливается).

Работа машины Тьюринга

Итак, по заданному набору символов на ленте наша машина должна выдать результат, состоящий из тех же символов (в том числе пустых), и остановиться.

Договоримся, что в начальный момент в поле зрения всякой машины Тьюринга находится самая левая непустая ячейка ленты.

Рассмотрим сначала простейшую машину Тьюринга, имеющую всего один непустой символ в алфавите (например, $s_1 = |$) и всего одно «активное» состояние q (второе ее состояние «пассивное», остановка). В начальный момент времени машина находится в состоянии q, т. е. работает. Предпишем ей при виде символа s_1 напечатать его в обозреваемую клетку (при этом ее содержимое не изменится), сдвинуться вправо и продолжать работать, т. е. оставаться в состоянии q. Будем записывать эту комбинацию элементарных действий так: $s_1Пq$. Если же обозреваемая клетка пуста, пускай машина напечатает в ней символ s_1 и, не сдвигаясь, остановится: s_1Нстоп.

Такая машина полностью задается простой таблицей:

Состояние машины	Обозреваемый символ	
	Λ	s_1
q	s_1Н стоп	$s_1Пq$

Проследим теперь, что будет делать машина, получив такие начальные данные, как на рисунке 1, *а*. В начале работы в поле зрения головки — отмеченная клетка, поэтому головка сдвигается вправо, не изменив содержимое клетки (рис. 1, *б*), снова видит отмеченную клетку и сдвигается вправо (рисунки 1, *б* и *в*). Но на четвертом шаге перед ней оказывается пустая клетка (рис. 1, *г*), и в действие вступает другое предписание: машина ставит метку в обозреваемую ячейку и останавливается (рис. 1, *д*).

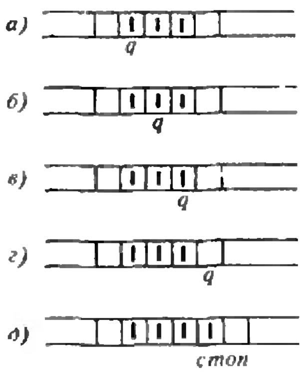


Рис. 1.

Теперь нетрудно построить машину Тьюринга, осуществляющую сложение двух натуральных чисел. Договоримся записывать число n в виде $n+1$ подряд идущих единиц и отделять на ленте два числа пробелом.

Пусть есть два числа m и n, записанные на ленте в начальный момент (рис. 2). По окончании работы мы должны получить последовательность из $m+n+1$ подряд идущих единиц. Одним активным состоянием тут не обойтись. Мне их понадобилось три:

Состояние машины	Обозреваемый символ	
	Λ	1
q_0		Λ П q_1
q_1	Λ П q_1	Λ П q_2
q_2	1 Н стоп	1 П q_2

Эта машина, видя в начальный момент единицу, стирает ее и передвигается вправо, переходя в состояние q_1 (рис. 3). Если в поле зрения головки снова стоит единица, она стирает и ее, сдвигаясь вправо и переходя в состояние q_2. При виде же пробела она сдвигается вправо, не меняя состояния. В состоянии q_2 машина движется вдоль ленты до первого пробела, заполняет его единицей и останавливается. Убедитесь самостоятельно, что эта машина правильно находит сумму любых двух натуральных чисел.

Упражнение. Постройте машину Тьюринга, осуществляющую а) сложение трех чисел; б) умножение на 2; в) вычитание из большего числа меньшего.

Тезис Тьюринга

В той же статье «О вычислимых числах...» Тьюринг высказал гипотезу, что каждая функция, вычислимая в естественном смысле, вычислима и посредством некоторой машины Тьюринга. Эта гипотеза, конечно, не может быть формально доказана, ибо *невозможно формально определить* интуитивное понятие «вычислимости в естественном смысле». Однако в каждом конкретном случае, если установлена некая «эффективная процедура» вычисления данной функции, то удается построить и машину Тьюринга, осуществляющую эту процедуру.

Рис. 2

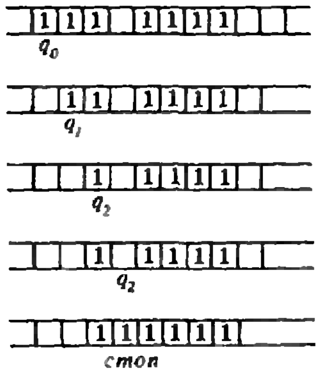


Рис. 3.

Те примеры, которые мы разобрали, не дают, конечно, твердой уверенности в этом. Уже для осуществления машины Тьюринга для операции вычитания нужен некий «буфер», чтобы учитывать в нем длину вычитаемого числа. Однако можно существенно расширить возможности машин Тьюринга, введя на ленте естественную систему координат (занумеровав ячейки целыми числами). Можно допустить, чтобы часть рассмотрения составляла запись на некоторых специально отмеченных клетках (конечном числе), если эти клетки расположены так, что вычислитель может найти их и вернуться (в частности, тот самый «буфер»). Можно разрешить специальные пометки, дополняющие данный символ; если есть n обыкновенных символов и k пометок, каждое подмножество которых может быть помещено на данную клетку, нужно лишь увеличить число условий, которым подчиняется каждая клетка, с $n+1$ до $(n+1)\cdot 2^k$. Число условий, разумеется, от этого не станет бесконечным. Эти «вольности», уравнивая до некоторой степени машину Тьюринга с живым вычислителем, не нарушают тем не менее математической строгости модели.

Канадские математические соревнования

Мы заканчиваем публикацию задач школьной математической олимпиады Канады (см. «Квант» № 3 и № 4, 1992). Здесь предлагаются задания для 12 и 13 классов канадской школы, что соответствует нашему 11 классу и старшим курсам техникума или первому курсу втуза. На решение каждого из заданий отводилось по 2,5 часа.

Euclid Contest (Grade 12)*)

Вопросы с выбором ответа
(по 3 очка за каждую задачу)

1. Если $x=1/6$, то $(2-1/2x)(3-1/3x)$ равняется

(A) -12; (B) -1; (C) $25/6$; (D) 1; (E) 12.

2. График функции $y=10(x+1)(x-3)$ пересекает ось x в двух точках — P и Q. Длина отрезка PQ равна

(A) 20; (B) 2; (C) 40; (D) 4; (E) 2/5.

3. В треугольнике ABC (рис. 1) $AB=AC=10$ и $BC=12$. Косинус угла C равен

(A) 5/6; (B) 3/5; (C) 4/5; (D) 3/2; (E) 5/12.

4. В кубе, изображенном на рисунке 2, острый угол между отрезками AB и BC равен

(A) 60°; (B) 90°; (C) 30°; (D) 45°; (E) 75°.

5. Через точки пересечения кривых $x^2+y^2=4$ и $y=x^2/3$ проходит прямая, уравнение которой

(A) $y=4$; (B) $y=-4$; (C) $y=\sqrt{3}$; (D) $y=1$; (E) $y=-\sqrt{3}$.

6. Сумма 51 члена последовательности $\sin \pi/2+\sin 2\pi/2+\sin 3\pi/2+\ldots+\sin 51\pi/2$ равна

(A) -1; (B) 1; (C) 0; (D) 51; (E) 26.

7. Функция $f(x)$ определена следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x \text{ — рациональное число,}\\ 1, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.}\end{cases}$$

Значение выражения $2f(\sqrt{2})-3f(f(\sqrt{2}))$ равно
(A) -2; (B) -1; (C) 0; (D) 1; (E) 26.

*) Евклидовы соревнования (12 класс).

8. Если $\log_x 2=a$ и $\log_x 3=b$, то $\log_x(9x^2/2)$ равен

(A) b^2-a+2; (B) $2b+a+2$; (C) $2b-a+2$; (D) $a-2b-2$; (E) $2b^2/a$.

9. Если $f(x)=(3x-7)/(x+1)$ и $g(x)$ — функция, обратная к $f(x)$, то значение $g(2)$ равно

(A) -7; (B) -3; (C) $-1/3$; (D) 2; (E) 9.

10. Если вершина параболы $y=-2x^2-4ax+k$ находится в точке $(-2;\ 7)$, то коэффициент k равен

(A) 15; (B) -1; (C) $-1/3$; (D) 11; (E) 3.

11. Агент по продаже автомобилей (автомобильный дилер) продал два автомобиля. За один он получил прибыль в размере 40 %, а за другой — в размере 60 %. Его общая прибыль составила 54 % от первоначальной стоимости автомобилей. Цена, уплаченная дилером за первый автомобиль, относится к цене, уплаченной им за второй автомобиль, как

(A) 10:13; (B) 35:38; (C) 3:7; (D) 7:12; (E) 2:3.

12. Три квадрата, длины сторон которого выражаются целыми числами, положены друг на друга так, как показано на рисунке 3. Если $BC=CD$ и заштрихованная площадь равна 31, то площадь наибольшего из квадратов равна

(A) 289; (B) 225; (C) 961; (D) 256; (E) 324.

Задачи для полного решения

Часть A
(по 10 очков за каждую задачу)

1. (a) Точка A имеет координаты $(4;\ 2)$. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно к прямой $y=x$.

(b) Найдите точку в первом квадранте, в которой прямая $y=3$ пересекает параболу $y=x^2-x+2$.

2. (a) В одной и той же координатной системе нарисуйте графики функций $y=\sin\theta$ и $y=\cos\theta$ для $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. Проведите оси и проградуируйте их.

(b) Используя графики из пункта (a), отметьте общую часть областей $y\leqslant\sin\theta$ и $y\geqslant\cos\theta$.

(c) Укажите границы изменения θ в области, описанной в пункте (b).

3. (a) У многочлена ax^3+bx^2+cx+d сумма коэффициентов равна нулю (т. е. $a+b+c+d=0$). Покажите, что этот многочлен делится на $x-1$.

(b) Решите уравнение $2x^3-3x^2+1=0$.

(c) Найдите сумму коэффициентов многочлена $g(x)=(x+2)(x^2+2x+1)$ после раскрытия скобок.

4. (a) Два крана наполняют водой некоторый бак. Кран B наполняет бак водой в три раза дольше, чем кран A. Если включить оба

крана, то бак наполнится за 24 часа. За какое время наполнит бак кран A?

(*b*) Найдите значения θ из промежутка $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, для которых косинус, тангенс и косеканс, взятые в этом порядке, образуют геометрическую прогрессию.

Часть B

(по 8 очков за каждую задачу)

5. Найдите x из уравнения $\log_2 (9-2^x)=3-x$.

6. При каком значении числа a уравнение $4x^2+4(a-2)-8a^2+14a+31=0$ имеет вещественные корни с минимальной их суммой?

7. Точки A, B, C и D расположены на окружности в таком порядке, как на рисунке 4. Если E — произвольная точка на отрезке AB, то угол DEC меньше 180°. Покажите, что угол DEC максимален в том и только том случае, когда углы ADE и ECB равны.

Descartes Contest (Grade 13)

(по 10 очков за каждую задачу)

1. В задачах этого пункта достаточно указать ответ.

(*a*) Найдите $f'(0)$, если $f(x)=e^x-e^{-x}$.

(*b*) Определите значения h, при которых уравнение $3x^2+hx+2$ имеет два равных корня.

(*c*) Выразите $(3+i)/(1+i)$ в виде $a+bi$, где $i^2=-1$.

(*d*) Найдите $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin 2\theta \operatorname{ctg} \theta}{\theta}$.

(*e*) Определите наибольший коэффициент в разложении многочлена $(1+x)^6$.

2. (*a*) Покажите, что при $0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$ выполнено равенство

$$\frac{\sin \theta + \sin 2\theta}{1+\cos \theta + \cos 2\theta} = \operatorname{tg} \theta.$$

(*b*) Для каких θ из интервала $\left(\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right)$ это равенство неверно?

3. Оси симметрии эллипса совпадают с осями координат, причем большая полуось длиной 3 лежит на оси Ox, а меньшая, длиной 2,— на оси Oy. Касательная к эллипсу имеет тангенс угла наклона 1 и пересекает координатные оси в точках P и Q. Найдите длину отрезка PQ.

4. (*a*) Найдите все геометрические прогрессии, у которых сумма двух первых членов равна 2, а сумма первых трех членов равна 3.

(*b*) Для каждой из прогрессий, определенных в пункте (*a*), вычислите сумму всех членов, величина которых меньше 1.

5. Дано преобразование T: $(x, y) \to (x+2y,\ y)$.

(*a*) Покажите, что при этом преобразовании образ любой прямой является снова прямой линией.

(*b*) Найдите площадь фигуры, полученной в результате преобразования T из четырехугольника $ABCD$, показанного на рисунке 5.

6. Семейство плоскостей задано уравнением $rx+y+z=4$, где r — вещественное число.

(*a*) Найдите уравнения всех плоскостей из этого семейства, наклоненных к плоскости $x+y-z=13$ под углом 60°.

(*b*) На плоскости $x+y-z=13$ существует точка, принадлежащая всем плоскостям данного семейства. Найдите ее.

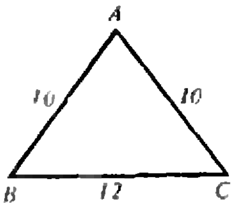


Рис. 1

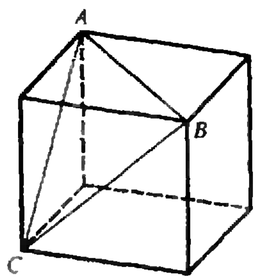


Рис. 2

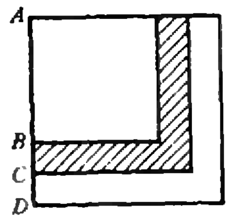


Рис. 3

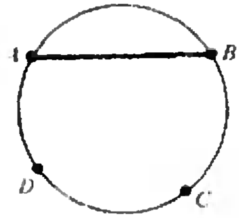


Рис. 4

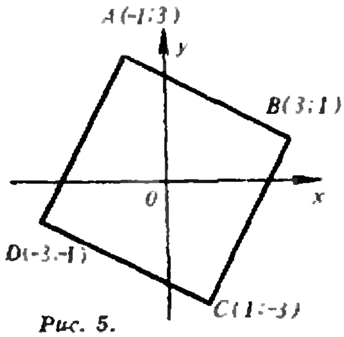


Рис. 5.

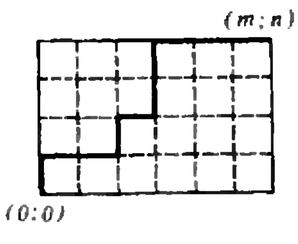


Рис. 6.

7. Даны четыре ненулевых числа: a, b, c, d.

(a) Докажите, что если $a/b+c/d=(a+c)/(b+d)$, то $ac<0$.

(b) Докажите, что если $a/b+c/d=(a+c)/(b+d)=0$, то $b=d$.

8. Найдите максимальное значение функции

$$f(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{x}{x+k}$$

для $x>0$. Число $k>0$ — параметр.

9. В треугольнике ABC выполнены соотношения: $ab^2\cos A=bc^2\cos B=ca^2\cos C$. Докажите, что этот треугольник равносторонний.

10. (a) Прямоугольник $m\times n$ разбит на mn квадратов. Путь, проложенный по линиям разбиения, ведет из точки (0; 0) в точку (m; n) так, что при движении координаты точки не уменьшаются (рис. 6). Докажите, что количество различных таких путей равно C^m_{m+n}.

(b) В кубе $n\times n\times n$ каждая грань разделена на n^2 квадратов. Путь, определенный в пункте (a), ведет по граням из точки (0, 0, 0) в точку (n, n, n). Найдите количество различных таких путей.

Публикацию подготовили А. Котова, А. Савин

Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

С 10 по 19 октября 1991 года в живописном поселке Фирюза под Ашхабадом проходило соревнование школьников с довольно замысловатым наименованием — Международная тест-рейтинговая олимпиада «Интеллектуальный марафон».

Это был эксперимент, причем эксперимент очень удачный, и мы надеемся, что такие олимпиады станут традиционными.

Организаторы олимпиады — московский клуб «Глюон», Академия наук Туркмении и Туркменский государственный университет — при активной поддержке Президентского совета Туркмении провели весьма необычное соревнование.

Прибегая к спортивной терминологии, эту олимпиаду можно назвать личнокомандным троеборьем по английскому языку, математике и физике.

Олимпиада состояла из трех туров. В первом — английском туре — ее участники состязались в умении читать, переводить и говорить по-английски. Второй — физический и третий — математический туры состояли из двух частей. Утром проводилась письменная индивидуальная олимпиада, задачи приводятся ниже (в скобках указано количество баллов, присуждавшихся за полное решение задачи), а вечером того же дня проводились устные командные соревнования. На устной части физического тура командам предлагалось за ограниченное время изучить подлинные старинные приборы, любезно предоставленные Московским политехническим музеем, выяснить, как и какие физические явления изучались с их помощью. Среди продемонстрированных приборов были «Электрометр Томсона», «Воздушные элементы Столетова», «Вольтов столб» и т. д.

Устная часть математического тура выглядела так. Команды-участницы сидели за отдельными столами в большой аудитории и решали сравнительно несложные задачи, которые им последовательно предлагались жюри. За каждую решенную задачу команда получала определенное количество очков. На обдумывание задач отпускалось, в зависимости от их трудности, от 5 до 15 минут

Результаты выступления участников оценивались в баллах. На индивидуальных турах каждый участник мог получить максимум 100 баллов. Максимальное количество баллов, набираемых командой в командных состязаниях, также было равно 100.

По количеству баллов определялось место участника в каждом туре, а затем сумма мест по всем турам. При равенстве этих чисел предпочтение отдавалось участнику, набравшему больше баллов

Командное первенство определялось по итогам командных туров, а также сумме мест и сумме баллов всех участников команды.

Участниками олимпиады стали 19 команд по три человека в каждой, из разных городов и ведущих физико-математических школ бывшего СССР. Приглашенные иностранные участники не приехали из-за нестабильности обстановки в стране.

Абсолютным победителем в личном зачете стал Недиков Николай, ученик 11 класса ФМШ при МГУ.

По английскому языку первое место разделили Н. Недиков, Дмитрий Потишко (Харьков, ФМШ № 27) и Иван Самохин (школа-лицей при МЭИ).

В физическом туре победил Андрей Малютин (академическая гимназия при СПбГУ).

В математическом туре одержал победу Михаил Дынин (физико-техническая школа-лицей, СПб).

В командном зачете победили школьники физико-технической школы-лицея Санкт-Петербурга.

Победители были награждены ценными призами. Были присуждены также специальные призы самым юным участникам. Ими стали Игорь Павловский из Омска и Саша Лебедев из Ашхабада.

Почетный приз «Мисс Олимпиада» получила Инна Гнездилова из Москвы (школа № 542) за лучший результат среди девушек-участниц.

Обширной была и культурная программа. В нее вошли посещения театров и музеев Ашхабада, экскурсии по городу и к подземному озеру в Бахардене и многое другое.

В целом это новое по форме соревнование прошло очень успешно, вызвало самый живой интерес участников, азартно боровшихся за победу.

Огромную работу провели гостеприимные хозяева олимпиады, сделавшие все возможное для ее успешного проведения. Особенно хочется отметить роль помощника Президента Туркмении М. И. Бродского и учителя физики ашхабадской школы № 17 В. Ф. Сухомлина.

Клуб «Глюон» планирует провести следующую олимпиаду в октябре 1992 года в Калининграде и приглашает команды школ с углубленным изучением математики и физики принять в ней участие.

Заявки об участии в олимпиаде просим присылать по адресу: 115580, Москва, а/я № 10, клуб «Глюон».

Задачи

Математика

1. Докажите, что число $53\cdot 83\cdot 109+40\times 96\cdot 66$ является составным. (5)

2. Найдите сумму:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{n}}}}}}+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{n}}}}}}$$

(5)

3. В треугольнике ABC расстояние от центра описанной окружности до стороны AB равно d, а $\angle ABC=60^\circ$. Точка D на стороне BC такова, что $BD=AB/2$. Найдите длину отрезка CD. (5)

4. Решите уравнение

$$(4x^3-8)(3^{\sin x}-1)+(2^{x^3}-4)\sin x=0.$$

(10)

5. Решите в целых числах уравнение

$$19x^3-91y^2=1991. \qquad (8)$$

6. Докажите, что если положительные числа a, b, k, n удовлетворяют неравенству

$$ab>ka+nb,$$

то

$$a+b>(\sqrt{k}+\sqrt{n})^2. \qquad (8)$$

7. На катете AC прямоугольного треугольника ABC отложен отрезок $AD=BC$, а на катете BC — отрезок $BE=CD$. Найдите угол между прямыми BD и AE. (9)

8. Рассматриваются всевозможные параболы $y=x^2+px+q$, пересекающиеся с осями координат в трех различных точках. Докажите, что окружности, описанные около всевозможных треугольников с вершинами в этих точках имеют общую точку. (8)

9. Каждая грань кубика разделена на 9 квадратов и в каждый квадрат вписано некоторое число. Известно, что сумма пяти чисел, вписанных в любой квадрат и в четыре соседних с ним, равна 17. Могут ли все вписанные числа быть целыми? (6)

10. Числа a, b, c — корни уравнения $x^3-3x+1=0$, причем $a<b<c$. Докажите, что $b^2-a=c^2-b=a^2-c=2$. (12)

11. На сторонах AB, BC и AC данного остроугольного треугольника ABC во внешнюю от него сторону построены как на основаниях попарно подобные равнобедренные треугольники $A'BC$, $AB'C$, ABC'. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке. (12)

12. Докажите, что из любых четырех положительных чисел можно выбрать два — x и y так, чтобы выполнялись неравенства

$$0\leqslant\frac{x-y}{1+x+y+2xy}<2-\sqrt{3}. \qquad (12)$$

Физика

1. При какой величине M_x груз массой $2m$ может оставаться в покое (рис. 1)? (6)

2. При каком ускорении блока груз массой $2m$ будет иметь ускорение, равное $g/10$ (рис. 2)? (8)

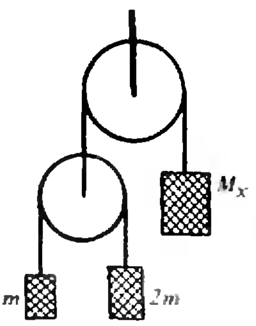


Рис. 1.

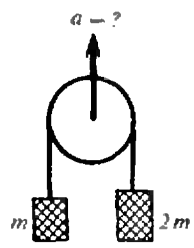


Рис. 2.

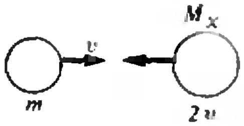


Рис. 3.

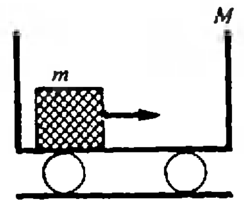


Рис. 4.

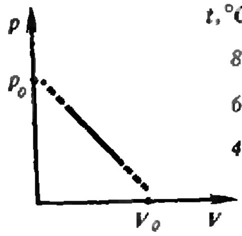


Рис. 5.

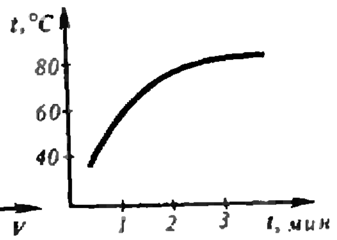


Рис. 6.

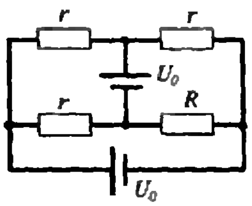


Рис. 7.

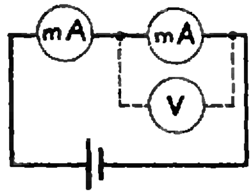


Рис. 8.

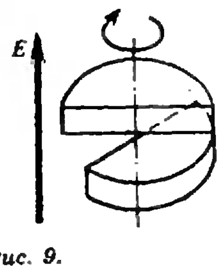


Рис. 9.

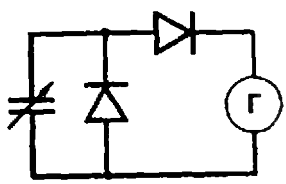


Рис. 10.

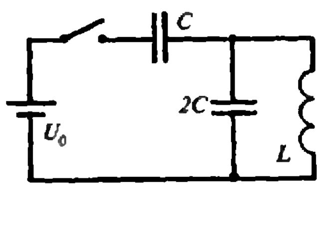


Рис. 11.

3. При какой массе груза, летящего со скоростью $2v$, он сможет остановиться после удара (рис. 3)? (8)

4. Кубик вначале находится у левого края тележки длиной $L=0,5$ м (рис. 4). Ему толчком сообщают скорость $v=1$ м/с вправо. На каком расстоянии от левого края тележки он остановится, если коэффициент трения $\mu=0,3$, $m=0,3$ кг, $M=1$ кг? (6)

5. Оцените размер молекулы воды, используя известные табличные данные о воде. Оцените среднее расстояние между молекулами насыщенного водяного пара при температуре 100 градусов по шкале Цельсия. Оцените также среднее число ударов между молекулами в 1 литре такого пара за 1 секунду. (10)

6. 1 моль идеального одноатомного газа расширяется по закону, изображенному на графике зависимости давления от объема прямой линией (рис. 5). Найдите максимальную температуру газа в этом процессе. На каком участке газ получает тепло, а на каком отдает? (12)

7. В стакан опустили нагреватель мощностью 200 Вт и включили в сеть. График изменения температуры со временем приведен на рисунке 6. Каким был бы график при мощности нагревателя 100 Вт? (8)

8. Найдите токи, текущие через каждый резистор в схеме, изображенной на рисунке 7. Батарейки считайте идеальными. (8)

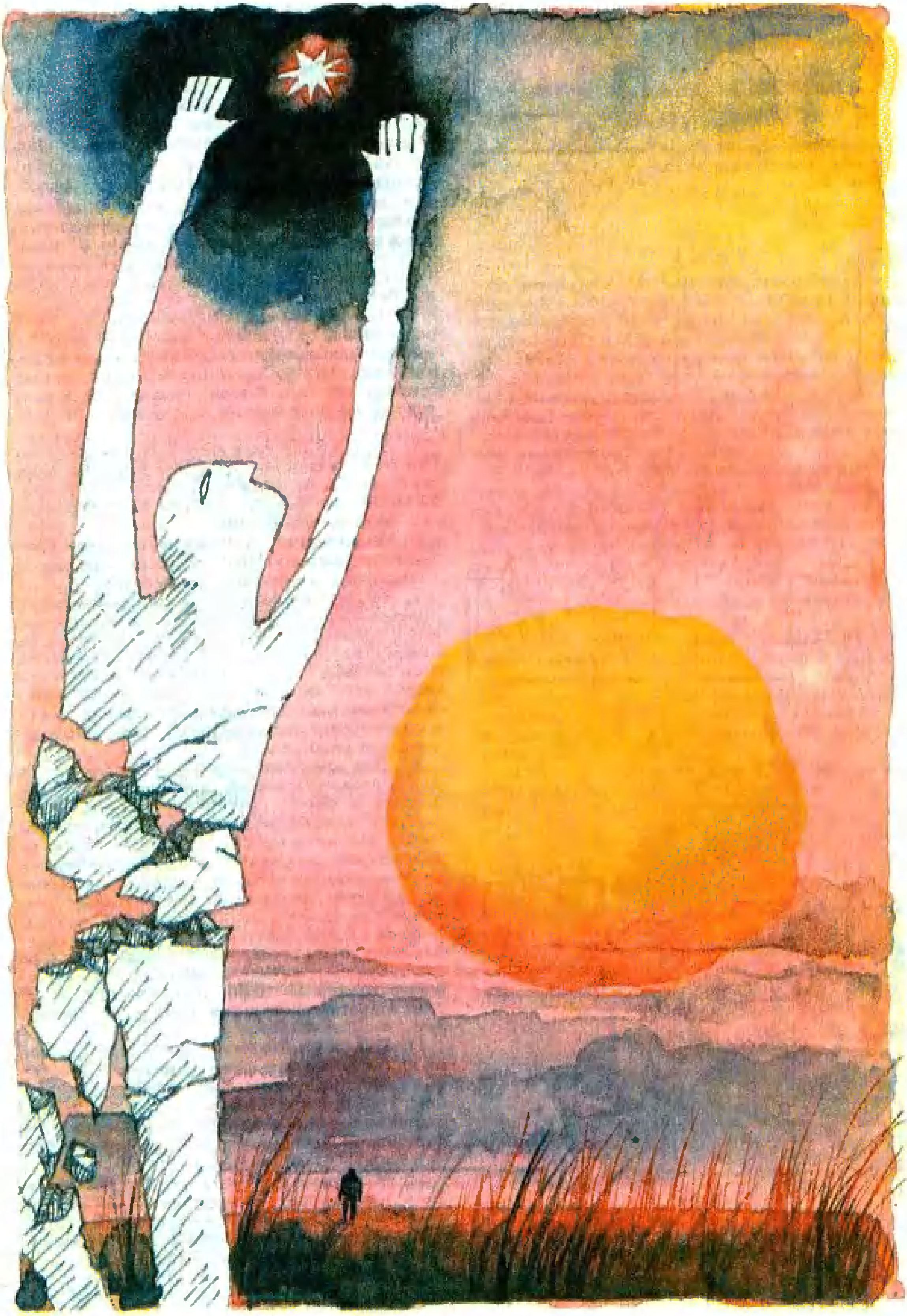
9. К идеальной батарейке подключили последовательно два одинаковых миллиамперметра, и они показали по 1 мА (рис. 8). Параллельно одному из приборов подключили вольтметр, и он показал 0,3 В, а показания миллиамперметра при этом уменьшились до 0,8 мА. Что показывает второй миллиамперметр? Чему равно напряжение батарейки? Найдите сопротивления приборов. (6)

10. Для измерения электростатического поля применяют конденсатор, состоящий из двух обкладок, в форме полукругов площадью $S=10$ см^2 каждый, находящихся на расстоянии $d=0,1$ см друг от друга (рис. 9). Один из полукругов неподвижен, а другой вращается со скоростью $n=100$ об/с так, что емкость конденсатора меняется от максимального значения практически до нуля. Собрана измерительная схема, включающая два диода и гальванометр с сопротивлением рамки $r=1$ кОм (рис. 10). Какой ток он покажет при напряженности поля $E=10\,000$ В/м? Что изменится, если сопротивление рамки прибора уменьшить или увеличить? (10)

11. Найдите максимальный ток через катушку и ток через батарейку в момент достижения максимального тока через катушку (рис. 11). Найдите также максимальное напряжение на верхнем конденсаторе. Сопротивление батарейки и проводов считайте небольшим, $C=1$ мкФ, $L=1$ Гн, $U_0=10$ В. (12)

12. На тонкую линзу падает луч под углом $\alpha=4°$ к главной оптической оси. Он пересекает ось на расстоянии $L=12$ см от линзы и выходит после преломления под углом $\beta=8°$. Найдите фокусное расстояние линзы. (6)

В. Альминдеров, А. Егоров



СЛОМАННАЯ ЛИНЕЙКА

(фантастический рассказ)

Т. ТОМАС

Под пальцами Картера логарифмическая линейка треснула и развалилась надвое. Он уронил обломки на стол и, подняв голову, встретился глазами с Сесилом Харди. Картер сказал одними губами:

— Я так хочу этого, Сесил, так хочу!

Харди медленно наклонил голову.

— Я знаю, Уолтер. Я понимаю тебя.

— Понимаешь? Я растил его чуть ли не с пеленок. Я сделал из него человека. Я сделал из него лучшего человека, который когда-либо учился в Академии. Я видел, на что он способен, и потому отдал ему все, что у меня было, и он впитал это как губка. Глубокий Космос у него в крови. Он...— Картер помолчал, потом добавил: — Если бы мой Уолт не погиб, он стал бы таким, как Лайтнер. Теперь ты знаешь, каково мне...

Харди поднялся со стула и положил руку на плечо Картеру.

— Я знал все эти годы, Уолтер.

— Ты хочешь сказать, что это было заметно?

Харди улыбнулся и покачал головой.

— Нет, не заметно в том смысле, в каком ты это понимаешь. Я знал, потому что в мои обязанности входит знать и потому что мы с тобою старые друзья. Я видел выражение твоих глаз, когда ты смотрел на Лайтнера. Но никто больше не замечал.

Картер выдохнул воздух и провел рукой по ежику стальных волос.

— Я старался не показывать...

— Ты и не показывал. Ты хорошо держал себя в руках. Может быть, даже слишком хорошо. Лайтнер думает о тебе совсем не так, как ты о нем.

Перепечатывается по изданию «Библиотека современной фантастики. Том 10» (М., Молодая гвардия, 1967).

— Я знаю, я не мог позволить ему догадаться о моих чувствах. Это было бы невыносимо. И он должен попасть в Глубокий Космос, хотя бы в награду за все эти годы. В один прекрасный день парень станет Начальником Космонавтов. И когда этот день наступит, Лайтнер будет лучше меня. Он обязан выдержать испытание — для меня, для себя, для всей Земли. Такие люди встречаются редко. Они нам нужны.

Харди взглянул на хронометр и сказал:

— Что ж, скоро все выяснится. Он сейчас спускается на автолете к городу. Мне пора к приборам.

Он повернулся к пульту.

Картер подошел к нему, остановился рядом и прошептал:

— Сесил...

Харди вопросительно взглянул на него.

— Зачем испытывать Лайтнера? Он все эти годы настолько превосходил остальных. Мы можем спокойно обойтись и без испытания.

Глаза Харди расширились.

— Уолтер, не может быть, чтобы ты говорил это всерьез. Последнее испытание — единственный способ заглянуть в душу человека. Чувства, испытанные им при возвращении домой, скажут нам, настоящий ли он разведчик Глубокого Космоса, или просто еще один искусный космонавт. У нас нет другого пути, чтобы узнать это. И ты знаешь, что мы обязаны провести испытание.— Он помолчал и добавил: — Почему ты боишься, Уолтер? Может, ты знаешь что-нибудь неизвестное мне? Ты опасаешься, что Лайтнер может не выдержать?

— Разумеется, нет. Давай начинать испытание. Мальчик его выдержит.

За тысячу миль от них Лайтнер опустился на автолете на небольшую поляну. Он не выключил двигателя, пока не осмотрелся. Вечерело. Ветерок угас, и воздух был спокоен. Лайтнет откинул голову назад и вдыхал запах нагретой солнцем травы. Он посмотрел на юго-восток, на садящееся солнце и увидел дуб. Дуб совсем не изменился. Какой это был сук? Третий сверху? Прикрыв глаза ладонью от солнца, он внимательно присмотрелся к суку, но на нем не осталось никаких следов воздушного змея, висевшего там несколько лет назад. Сейчас Лайтнер снова пережил размытые временем страдания мальчика, который увидел, как погибает воздушный змей. Он улыбнулся, вспомнив мягкий голос отца, его руку на своем плече, вспомнив, как они сделали новый змей, лучше старого, и он летал много дней подряд.

Лайтнер пошел к городку. Сначала быстро, но постепенно воспоминания заставили его замедлить шаги. Изгороди, по которой он когда-то пробегал целую четверть мили, не коснувшись земли, уже не было. Где это было? Здесь? Нет, вон там, там еще рос колючий кустарник, в котором он и Джо Нобб гонялись друг за другом. В конце концов они отправились домой вместе, сплошь покрытые царапинами и ссадинами. Лайтнер хмыкнул. Старик Картер не пришел бы в восторг от его доблести в том бою.

Впереди последний поворот, и над ним, как и раньше, нависая над дорогой, стояла старая ива. Лайтнер прошел под ней, по туннелю, прорубленному в ее ветвях для автомобилей. Ствол ивы окружали кусты, и сквозь них виднелось кладбище. Лайтнер различал могильные плиты, белые на фоне зелени. Он поглядел в ту сторону, где были похоронены отец с матерью, и свернул было с дороги, но передумал. За поворотом дорога превратилась в широкую полосу бетона, которая и была Главной улицей. Лайтнер остановился и посмотрел вдоль нее.

Солнце садилось за спиной, и косые лучи окрашивали улицу в красноватый цвет. Редкие прохожие виднелись на тротуаре, да изредка проезжала машина и исчезала за углом. Негромкие звуки голосов и урчание моторов доносились сквозь пелену теплого воздуха. Лайтнер покачал головой. Ничего не изменилось. Вот он, его город. В то время, когда люди стремятся к звездам, он остался таким же, каким был сто лет назад. Изменят ли его следующие сто лет? Латнер снова покачал головой и ступил на тротуар.

Он миновал гараж Мэрфи, примостившийся под деревьями на краю городка. Потом прошел мимо группы людей, одного из которых он узнал, но не стал останавливаться. Они вопросительно смотрели на высокого стройного человека в форме старшего кадета-космонавта. Но никто не сказал ни слова, пока он не поравнялся с аптекой Мартина.

Мистер Мартин отделился от группы людей, стоявших у двери, подошел к нему и спросил:

— Уж не сын ли ты Лайтнера?

Лайтнер улыбнулся, протянул руку и сказал:

— Здравствуйте, мистер Мартин.

Мартин пожал руку и, не выпуская ее, обернулся к остальным:

— Посмотрите, кто к нам приехал. Это же сынишка Джона Лайтнера.

Многих из них Лайтнер узнал. Он пожимал им руки и говорил, что у него все в порядке.

Потом наступил момент, когда приглашения зайти в гости были сделаны, а новости исчерпаны. Наступило молчание. Они стояли, улыбаясь ему и поглядывая вдоль улицы. Они понимали, что Лайтнер хочет увидеть свой дом, и не стали его задерживать. Он помахал на прощание рукой и пошел дальше.

Он прошел мимо фуражной лавки, подле которой фермер грузил на машину мешки с концентратом. До Лайтнера донесся сухой сенной запах концентрата. Он повернул за угол, прошел два квартала и понял, что перед ним дом Энгесс Мур. Он поглядел на темный портик и вспомнил тот давнишний вечер, когда портик тоже был темным.

На прежнем месте стояла и лавочка, на которой они сидели тогда, не говоря ни слова, ощущая только громовые удары крови в сердце. Круглое плечо прилегало к его руке, и наступил момент, когда дыхание их оборвалось, чтобы вернуться через мгновение уже прерывистым и быстрым. И в этот момент на дорожке неожиданно появился ее отец и обнаружил их сидящими на разных концах лавочки. Если он что-нибудь и заподозрил, то не подал виду, только кивнул им и прошел в дом.

Лайтнер улыбнулся, вспомнив об этом. Он не чувствовал волнения. Только слегка удивился тому, что когда-то такие вещи представлялись ему значительными. В доме Муров горел свет, но он не стал сворачивать к их двери.

Он пошел дальше и через квартал остановился перед своим домом. Дом не был освещен: очевидно, его нынешние хозяева сейчас отсутствовали. В нем мало что изменилось. Живая изгородь была подстрижена ниже, чем раньше, и вдоль дорожки перед входом выросли новые кусты. Дом недавно перекрасили. Это был его дом. Космонавт стоял перед ним в сгущающейся темноте. Воспоминания заполнили его сердце и завладели умом.

В тысяче миль отсюда два человека напряженно всматривались в кривые, выписываемые приборами на бумажных лентах.

Лайтнер поглядел на деревья, окружавшие дом. Сквозь их ветви проглядывали звезды. Лайтнер отошел на середину улицы, откуда он мог видеть вечернее небо. Он стоял, широко расставив ноги, запрокинув голову, и смотрел на звезды. И звезды, казалось, смотрели на него.

Далекие солнца улыбались ему и маняще подмигивали. Как женщина, подумал он, далекая, холодная, но зовущая прийти и познать неведомое. У Лайтнера перехватило дыхание.

Это была его жизнь. Для нее он был создан. Долгие годы учебы, напряженные занятия, труд, отказ от всего ради того, чтобы стать существом этих далеких солнц. Многое старалось помешать ему, но он победил. Картер, старик Картер наказывал его так, как не наказывал никого в Акамедии,— длинными часами работы, когда все отдыхали, постоянной практикой, направленной к совершенству, которого не смог достичь никто, кроме Лайтнера. Но он-то им показал. Он не отказывался ни от чего, он все впитывал как губка. Теперь его не остановить. Он готов к Голубокому Космосу.

Руки Лайтнера медленно поднимались, пока не вытянулись кверху. Так он и стоял — широко расставленные ноги, откинутая назад голова и руки, протянутые к звездам.

Воздух бился у него в горле. И этот звук вернул его к действительности. Он уронил руки, обернулся и побрел к дому, улыбаясь ему сдержанной сухой улыбкой. Приятно снова увидеть дом. Но что ему здесь делать? Он не принадлежит этому дому. Он снова взглянул вверх. Там его судьба. В Глубоком Космосе. Он громко рассмеялся и почувствовал, как к нему приходит спокойствие. С поющим сердцем космонавт возвратился к автолету. Он шел быстро, не глядя по сторонам.

Покончив с графиками, Харди откинулся на стуле. Но Картер уже знал о его решении, прежде чем Харди заговорил, и Харди понял, что Картер знает. Он перегнулся через стол и накрыл своей ладонью руки Картера.

— Уолтер, мне очень жаль. Мне в самом деле очень и очень жаль.

Картер не ответил.

Харди сказал:

— Ты же понимаешь. Человек должен верить в нечто большее, чем собственные стремления. У него должны быть корни.

Картер ничего не ответил.

— Этому мальчику ни к чему возвращаться, у него нет настоящей связи с Землей. В глубине сердца он не думает ни о нас, ни о своей планете. Ему ничего не нужно, кроме Глубокого Космоса, он ставит космос превыше всего.

Картер ничего не ответил.

Харди сжал руки Картера и потряс их.

— Уолтер, послушай, этот мальчик — фанатик. И мы не можем допустить таких людей в Глубокий Космос. Лайтнер не годится ни для тебя, ни для космонавтики, ни для Земли. Неужели ты этого не видишь?

Картер поднял голову, и Харди увидел его глаза. В них горела ярость, которой Харди никогда прежде не видел.

Картер хотел заговорить, но Харди перебил его:

— Не говори этого, Уолтер. Пойми, что когда Лайтнеру придется попасть в необычные обстоятельства, он может принять неразумное решение. Он может действовать и нормально, но есть шанс, что это окажется не так. Он настолько любит Космос, что неуравновешен: человек должен любить что-то больше, чем то, чему он посвящает жизнь. Иначе он становится фанатиком, и ему нельзя доверять. То же самое, что творится сейчас с тобой. Ты же любишь этого парня, но... как это говорится?

Ты не была бы мне так дорога,
Не будь мне честь дороже.

Это и есть ответ на все.

Картер опустил голову. Он сидел неподвижно, но потом руки его дрогнули, пальцы побелели от напряжения. Он нагнулся и подобрал половинки сломанной линейки. Подержал их на ладони, разглядывая, а затем поднял на Харди глаза. Ярость ушла из них. Он сказал:

— Все в порядке, Сесил. Спасибо тебе. Большое спасибо.

И он выкинул обломки линейки в мусорную корзину.

Перевел с английского Кир Булычев

Нам пишут

О построении 17-угольника

В одном из писем в редакцию нас просили опубликовать метод построения Гауссом правильного 17-угольника. Такое построение с помощью циркуля и линейки может совершить каждый из читателей, воспользовавшись формулой, полученной одним из учеников Гаусса:

$$\cos(360°/17) = -1/16 + \sqrt{17}/16 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}/16 + \sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}/8.$$

Еще раз о числе π

Нам пишет Фирдаус Шафигуллин:

«Высылаю Вам два бесконечных ряда, сочиненных мной интуитивно. Вычисляя ряды на калькуляторе МК-51, *я доходил до погрешности* 10^{-7} *для обоих рядов и получал число* π. *Однако, прошу проверить результат на ЭВМ.*

$$\pi = 2 + \left(\ln\sqrt{e^{1/e} + \sqrt{e^{1/e} + \sqrt{e^{1/e} + \ldots}}}\right)^{-1/4},$$

$$\pi = 2 + \left(\ln\left(1 + \sqrt{e^{1/e} - \sqrt{e^{1/e} - \sqrt{e^{1/e} - \ldots}}}\right)\right)^{-1/4}.$$

Первое, что мы сделали в редакции, — это освободились от необходимости рассматривать бесконечную последовательность под знаком логарифма. Обозначив это число через x, получаем очевидное уравнение: $x = \sqrt{e^{1/e} + x}$, из которого $x = (\sqrt{4e^{1/e} + 1} + 1)/2$. Последовательность корней во втором выражении вычисляется таким же образом и равняется $y = (\sqrt{4e^{1/e} + 1} - 1)/2$. Нетрудно видеть, что $y + 1 = x$, т. е. в обоих выражениях под знаком логарифма стоят одинаковые числа. Итак, осталось сравнить числа π и $2 + (\ln((\sqrt{4e^{1/e} + 1} + 1)/2))^{-1/4}$. Первое равно 3,141592653589..., а второе равно 3,141592758733... . Таким образом число, полученное Фирдаусом Шафигуллиным, не равно π, но приближает его с большой точностью.

Игры и головоломки

Игра го

Живые и мертвые группы

Наряду с правилами игры, одним из самых важных моментов, необходимых для понимания го, является умение разобраться, какие группы *живут*, а какие *умирают*. Для этого введем понятие *глаз* и дадим его определение.

Глазом (недоступным пунктом) называется свободный пункт группы, который не может быть занят противником, пока у этой группы существует еще хотя бы один свободный пункт.

На рисунке 1 приведена группа, у которой имеется один глаз в пункте «а». Эта точка не может быть занята, так как в противном случае ход будет самоубийственным, т. е. запрещенным правилами. Но после того, как будут закрыты все свободные пункты, ход в точку «а» будет возможен — теперь группа черных уничтожается (рис. 2). Следовательно, можно сделать важный вывод, что группа с одним глазом не живет.

Два глаза — жизнь! Группа, имеющая два глаза, не погибает, даже полностью окруженная противником. Это один из самых главных принципов го. На рисунке 3 приведена группа с двумя глазами в пунктах «а» и «в». Ход в любой из этих пунктов является запрещенным, и следовательно, группа живет.

Начинающих следует предостеречь от одной распространенной ошибки: они часто не могут отличить настоящего глаза от ложного.

Рассмотрим позицию на рисунке 4. Здесь показана конфигурация камней, которая очень похожа на единую группу с двумя глазами. Однако на самом деле это не так. На диаграмме — две отдельные группы. Одна группа, имеющая один глаз, состоит из восьми камней, вторая группа, состоящая из трех камней, глаза не имеет совсем. Пункт в точке «а» глазом не является, так как в него можно пойти и уничтожить группу черных, состоящую из трех камней. В данном случае пункт «а» является последним свободным пунктом группы из трех камней и внешним свободным пунктом группы из восьми камней. Такой свободный пункт называется *ложным глазом*.

Продолжение. См. «Квант» № 6.

Есть ли связь между глазом и территорией?

На рисунке 5 черные камни огораживают территорию, состоящую из 15 очков. Но если быть точным, то этот участок можно считать территорией только в том случае, если черные камни, при атаке их белыми, смогут построить два глаза. В данной позиции это, без всяких сомнений, территория черных, поскольку, куда бы белые ни пошли, они не могут помешать черным построить два глаза.

Часто бывает, что группа имеет территорию из нескольких пунктов, но построить на ней можно всего один глаз. Глаз, имеющий территорию из нескольких пунктов, называется *большим*.

Большой глаз легко свести к простому — из одного пункта территории. Для

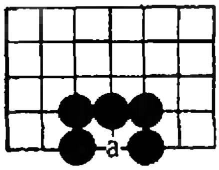


Рис. 1.

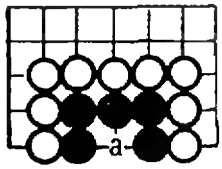


Рис. 2.

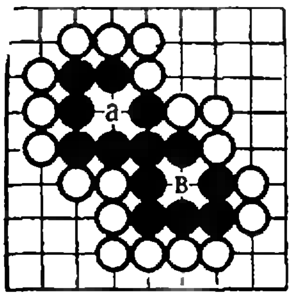


Рис. 3.

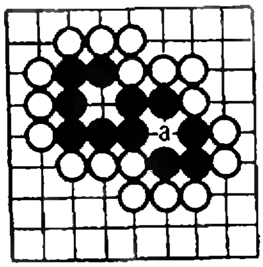


Рис. 4.

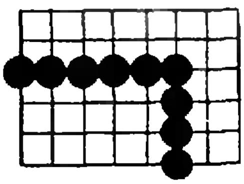


Рис. 5.

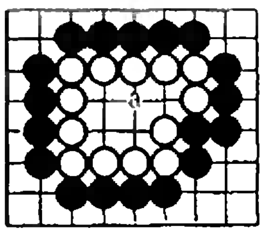


Рис. 6.

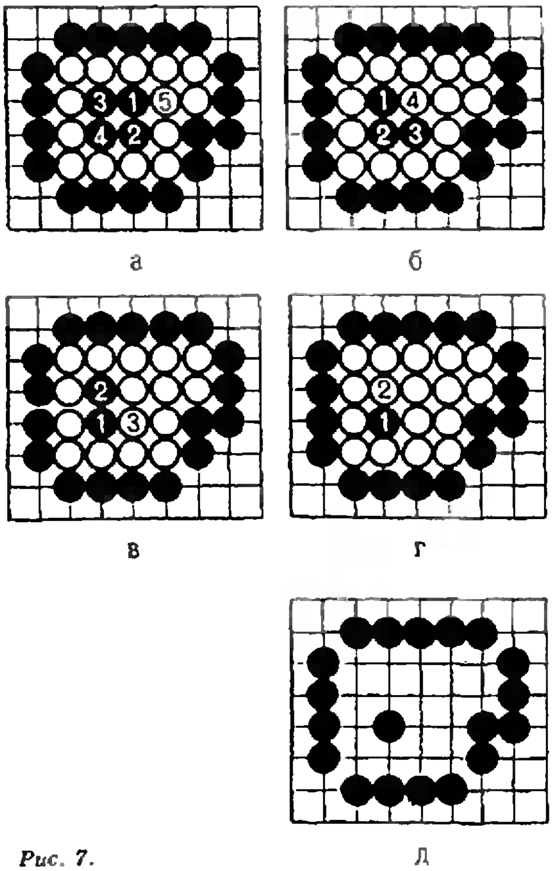


Рис. 7.

того чтобы понять, как это делается, разберем следующий пример.

На рисунке 6 приведена часто встречающаяся конфигурация большого глаза, которая обычно называется *автомобиль*. Судьба этой группы зависит от того, кто первым займет критический пункт «а». Если первыми пойдут туда белые, то они построят два глаза, если же черные, то группа белых гибнет.

Разберем, как это происходит. На рисунке 7, *а* черные продолжают занимать территорию противника камнями 2—4. После хода 4 белые камни оказываются в положении *атари*, т. е. под угрозой захвата. Поэтому они вынуждены сделать ход 5, и сами захватывают четыре черных камня. Но черные ходом 1 (рис. 7, *б*) продолжают последовательно занимать остальные пункты территории. В конце концов они поставят белые камни в положение атари, вынуждая белых ходить в свою территорию (ход 4), тем самым уменьшая ее. Постепенно она сведется к одному пункту (рис. 7, *в*, *г*). На рисунке 7, *д* приведена заключительная позиция: после того как был сделан последний ход и все камни белых сняты с доски. В реальной партии, если нет угрозы уничтожения камней игрока, такая операция по снятию камней противника не проводится, в этом нет необходимости. Группа, не имеющая возможности построить два глаза, считается пленной и снимается с доски лишь после окончания партии.

В го существует еще и другой вид жизни. На рисунке 8, *а* приведена группа, состоящая из семи пунктов территории. Если черные попытаются уничтожить белых, сыграв в критический пункт ходом 1, то им это не удастся, так как белые, противодействуя ходами 2 и 4, построят позицию *сэки* (рис. 8, *б*). В этой позиции ни одному из партнеров не выгодно ходить, так как в противном случае его камни погибнут. Территория, расположенная между камнями, считается *нейтральной*: никто из играющих не может претендовать на ее захват. На рисунке 9 приведены другие часто встречающиеся в игре ситуации сэки.

После всего сказанного можно дать один практический совет: не надо стремиться строить группы с двумя глазами. Как правило, это невыгодно — надо тратить лишние ходы, да еще занимать свою территорию. Правильным в этой ситуации будет создание таких групп, которые при атаке на них всегда смогут выжить.

Начало игры

Начальная стадия называется *фусэки*, она продолжается в среднем от 20 до 50 ходов.

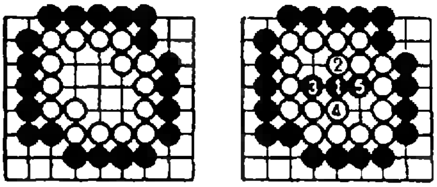
Один из главных принципов фусэки — экономия ходов.

На рисунке 10 хорошо видно, что для получения одной и той же территории из 9 пунктов в углу доски требуется 6 камней, на стороне — 9 камней и в центре — 12 камней. Отсюда делаем вывод, что выгоднее всего занимать углы, затем стороны и только после этого начинать борьбу за остальную часть доски.

Следующий основной принцип фусэки — игра по третьей и четвертой линиям.

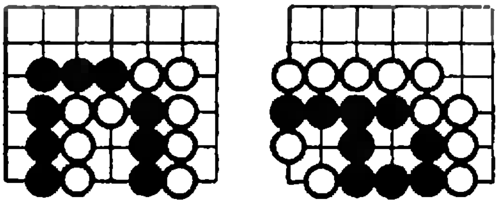
Почему? Вторая от края доски линия не дает большой территории, поэтому ставить свои камни на нее в начале партии невыгодно. Вторую линию иногда называют *линией поражения*.

Пятая линия с первого взгляда кажется очень выгодной, так как намечает для захвата большую территорию, но го — это игра гармонии и баланса. В ней нельзя



а б

Рис. 8.



а б

Рис. 9.

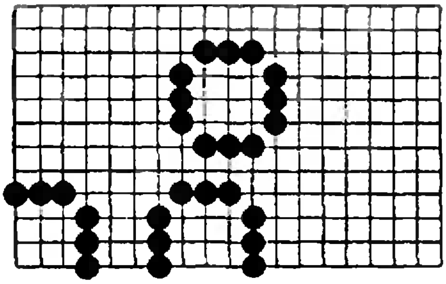


Рис. 10.

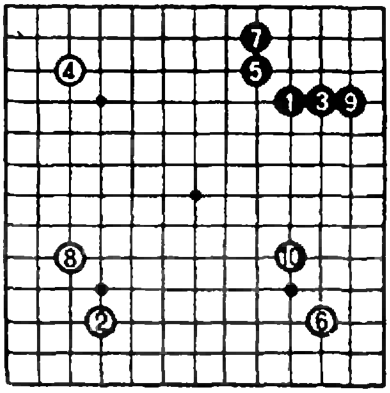


Рис. 11.

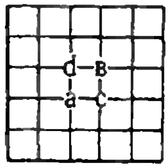


Рис. 12.

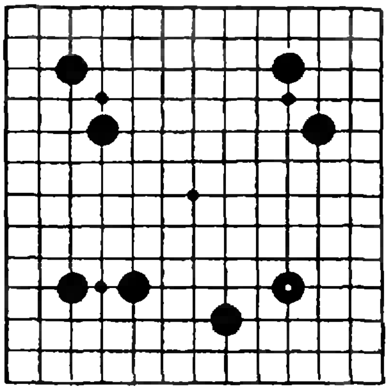


Рис. 13.

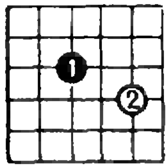


Рис. 14.

быть слишком азартным. Ход по пятой линии не может удержать намеченной территории. Еще хуже играть по шестой, седьмой и более высоким линиям. Поэтому основными для игры в начальной стадии партии являются, повторяем, третья и четвертая линии. Однако они имеют разные характеристики. Легче всего для создания территории использовать третью линию — ее называют «территориальной». Но играть все время только на третьей линии также нецелесообразно, и надо стремиться сочетать игру на третьей линии с игрой на четвертой.

Часто начинающие делают одну распространенную ошибку, пытаясь с самого начала строить прочную территорию. На рисунке 11 показано фусэки из партии двух начинающих игроков. Один из них стал с самого начала выгораживать себе территорию в углу, а второй расставлял камни по всей доске, намечая только контуры будущих территорий. В итоге второй игрок обогнал первого в развитии и одержал легкую победу.

Игра в углах

Существует несколько стандартных точек для игры в углах. На рисунке 12 показаны четыре наиболее распространенные — «a», «в», «c» и «d». Камень, поставленный в точку «a» (*сан-сан*), надежно удерживает угловую территорию, но его недостаток — слабое влияние на другие части доски. Камень в точке «в» (*хоси*), наоборот, имеет превосходное влияние, но недостаточно прочно удерживает территорию в углу. Точки «c» и «d» (*комоку*) обеспечивают контроль над частью угла и воздействуют на одну из сторон. При ходе в комоку возможность создания территории более велика в том месте, где камень находится ближе к краю доски (т. е. на третьей линии).

Для более эффективного контроля над углами применяются построения, которые называются *симари* (закрытые). На рисунке 13 приведены несколько различных типов симари. Однако симари служат не только для контроля над территорией в углу, они являются хорошей базой

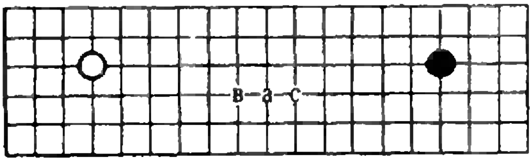


Рис. 15.

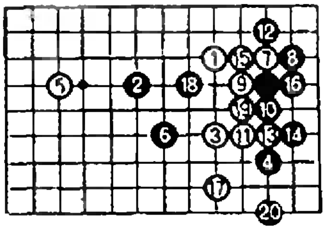


Рис. 16.

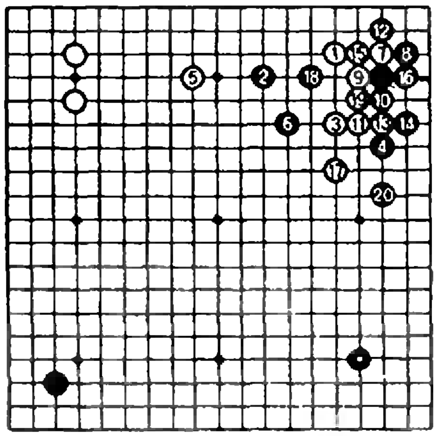


Рис. 18.

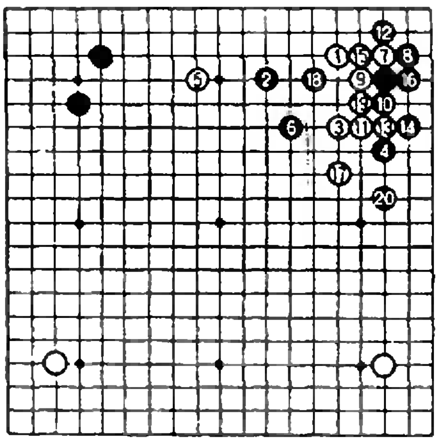


Рис. 17.

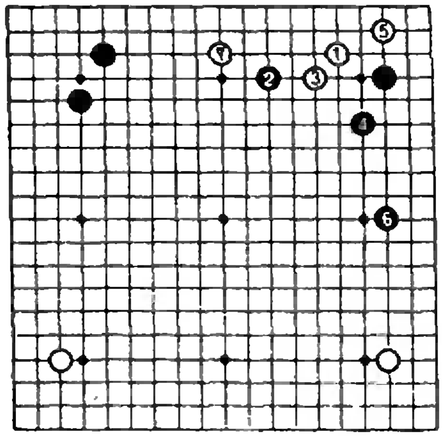


Рис. 19.

для распространения на стороны и центр доски.

Учитывая сложность борьбы против симари, противник часто не дожидается постановки второго камня в углу, а сам занимает эту точку (рис. 14). Такой ход называется *какари* (нападение). В результате атаки ходом какари часто возникает сражение, которое приводит иногда к очень сложной борьбе.

Хираки

После того как партнеры разыграли углы, их внимание переключается на стороны. Они вступают в стадию *хираки* (распространение). Лучшим и наиболее естественным является занятие центральной точки на стороне. На рисунке 15 показаны лучшие точки для развертывания от камня хоси. Трудно точно сказать, какая из этих точек лучшая, так как каждая из них имеет свои плюсы и минусы.

Ход в точку «а» является наиболее стандартным и часто встречающимся, поскольку занимает центр симметрии. Неплохо выглядит и ход в точку «в». С одной стороны, он очень эффективен — расширяет сферу влияния, но вместе с тем слабее связь со своим камнем в хоси, и ее легче разорвать.

Ход в точку «с» на один пункт ближе к своему камню в хоси, и поэтому связь гораздо прочнее, но эффективность в расширении сферы влияния слабее.

Дзесэки

Слово *дзесэки* в Японии используется для описания любой принятой нормы поведения. Однако в словаре про дзесэки написано, что это «камни, расположенные наилучшим образом в игре го»!

Розыгрыш дзесэки начинается всегда с угла, поэтому дзесэки дают и такое определение: «стандартный розыгрыш в углу».

В настоящее время существует огромное множество дзесэки — порядка 20 тысяч, причем каждый год эта цифра растет. Узнав о таком обилии дзесэки, которые надо изучать, многие начинающие приходят в ужас. Но пугаться не надо: механическое заучивание дзесэки может даже помешать росту мастерства, отучивая от самостоятельного мышления.

Возникает вопрос: а зачем же они нужны? Изучение дзесэки избавляет от бесполезной траты энергии на нахождение известных вариантов, а также помогает овладеть техническим мастерством и обрести навыки в нахождении *тэсудзи* (лучший ход).

Разберем несколько примеров.

На рисунке 16 приведено часто встречающееся дзесэки. Если рассматривать его на пустой доске, то розыгрыш за обе стороны является абсолютно равным. Однако для каждой конкретной позиции это дзесэки может оказаться как хорошим, так и плохим.

Сравним рисунки 17 и 18. На них приведены позиции из разных партий, но в обеих встречается наше дзесэки. После небольшого анализа можно сказать, что если на рисунке 18 позиция белых перспективнее, то на рисунке 17 результат для них крайне неудачен. Эта ситуация возникла из-за того, что в первой партии (см. рис. 17) белые неправильно выбрали дзесэки ходом 3. В результате у них образовались две слабые группы: камень 5 и камни 1, 3, 7, 9, 11, 13, 15, 17. В позиции на рисунке 18 у белых только одна слабая группа (камни 1, 3, 7, 9, 11, 13, 15, 17), которая уравновешивается слабостью черных камней 2, 6 и 18. Камень 5 здесь не только сильный, но имеет идеальное распространение от своего симари. Вместо хода 3 на рисунке 17 белым лучше было сыграть, как на рисунке 19, с равными шансами.

Е. Гик, А. Попов

(Окончание следует)

Ответы, указания, решения

Калейдоскоп «Кванта»

1. 48605 + 48605 = 97210.
2. 1991 + 11 = 2002.
3. КУБ = 512 = 8^3.
4. КУБИК = 79507 = 43^3.
5. МАТЕМАТИКА = 8692869536.
6. 2832 × 3 = 8496.
7. 8238 × 3 = 2746.
8. МОСКВА = 390625.
9. 74325 + 74325 = 148470.
10. 367 × 2 = 734.
11. 852 : 3 = 284.
12. 87^2 = 7569.
13. 31^2 = 961.
14. 529 = 23^2.
15. 142857 × 5 = 714285.
16. 142857 × 6 = 857142.
17. 18749 × 30 = 562470.
18. 2/5 + 6/34 = 98/170.
19. 67954 + 67954 + 67954 = 203862.
20. РАДИУС = 489713, ЗАДАЧА = 589868.
21. ИКС = 136, ДАР = 408.
22. СЛАВА = 21545, ВЛАС = 4152.
23. РЕШИ = 4623, ЕСЛИ = 6183.
24. 986 × 345 = 340170.
25. 7776 = 6^5.
26. 87172 × 5 = 453860.
27. 135964 × 5 = 679820.
28. 497919 + 7843 = 505762.
29. ДОКЛАД = 942389.
30. 897^2 = 804609.

Внимание: ловушка!

1. Здесь надо, конечно, учесть сопротивление воздуха. Тогда получим, что кинетическая энергия в конце полета меньше, чем в начале. И вообще, на любой высоте скорость при спуске меньше, чем при подъеме. Отсюда ясно, что время подъема меньше времени спуска.

2. В этой ситуации вступает в игру такое обычно малозаметное в задачах тело, как Земля. Оказывается, не всегда можно пренебречь ее влиянием. Действительно, в системе отсчета, где Земля — массу ее обозначим M — вначале покоилась, по закону сохранения импульса имеем

$$2mv = m(2v-u) + m(v-u) + Mu,$$

где u — скорость, приобретенная Землей. Отсюда для этой скорости получаем

$$u = -v\frac{m}{M-2m} \text{ (видно, что } u < v).$$

Работа двигателя за время ускорения равна

$$A = \frac{m(2v-u)^2}{2} + \frac{m(v-u)^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} - \frac{2mv^2}{2}.$$

Но

$$\frac{Mu^2}{2}\approx\frac{m}{M}\frac{mv^2}{2}<\frac{mv^2}{2},$$

значит,

$$A\approx\frac{3}{2}mv^2.$$

Рассмотрим теперь систему отсчета, движущуюся со скоростью v. Закон сохранения импульса в этой системе запишется так:

$$-Mv=mv+Mu',$$

где u' — новая скорость Земли. Отсюда получаем, что эта скорость равна

$$u'=-\frac{M+m}{M}v,$$

а работа двигателя —

$$A'=\frac{Mu'^2}{2}+\frac{mv^2}{2}-\frac{Mv^2}{2}.$$

Но теперь изменение кинетической энергии Земли отнюдь не мало́:

$$\frac{Mu'^2}{2}-\frac{Mv^2}{2}=\frac{mv^2}{2}\frac{m}{M}+mv^2\approx mv^2,$$

и

$$A'=\frac{3}{2}mv^2,$$

как и в первом случае.

3. Неправильный ответ получить легко. Запишем уравнения движения частей веревки:

$$\frac{2}{3}mg-T=\frac{2}{3}ma,$$

$$T-\frac{1}{3}mg=\frac{1}{3}ma,$$

откуда для силы натяжения веревки T и силы давления веревки на блок F получаем

$$T=\frac{4}{9}mg,\ F=2T=\frac{8}{9}mg.$$

Почему же этот ответ неверен? Оказывается, небольшой блок может сыграть дурную шутку: ведь часть веревки, которая находится на блоке, обладает центростремительным ускорением и таким образом «съедает» часть силы давления. Кажется, что эта часть очень мала (ведь блок мал), но это не так. Обозначим радиус блока r, тогда масса веревки на блоке $\Delta m\sim r$, а ее центростремительное ускорение $a_ц\sim 1/r$. Найдем силу ΔF, обеспечивающую это ускорение. Пусть в некоторый момент скорость веревки равна v. Рассмотрим малый промежуток времени Δt. За это время участок веревки массой $mv\Delta t/l$, перейдя через блок, поменял скорость с v на $-v$. В соответствии с законом сохранения импульса, можно записать

$$\Delta F\Delta t=2m\frac{v^2\Delta t}{l},$$

откуда получаем $\Delta F=2mv^2/l$. Найдя v^2 из закона сохранения энергии

$$-2\frac{m}{2}g\frac{l}{4}=-\frac{m}{3}g\frac{l}{6}-\frac{2m}{3}g\frac{l}{3}+\frac{mv^2}{2},$$

имеем $\Delta F=1/9mg$, а

$$F=\frac{8}{9}mg-\frac{1}{9}mg=\frac{7}{9}mg.$$

Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Математика

1. $53+96=109+40=83+66=149$. Поэтому данное число делится на 149.

2. Ответ: 1. Исходное выражение равно

$$\frac{1}{1+1/(1+x)}+\frac{1}{2+x},$$

где x — дробь в знаменателе второго слагаемого.

3. Ответ: $d\sqrt{3}$. Пусть O — центр, а R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC, OE — перпендикуляр, опущенный из точки O на AB. Воспользуйтесь подобием прямоугольных треугольников AOE и ADC.

4. Ответ: $x=\sqrt[3]{2}$ и $x=\pi n$, $n\in Z$. Если слагаемые в левой части уравнения не равны 0, то они имеют одинаковые знаки.

5. Ответ: Решений нет. Представим уравнение в виде

$$19(x^3-100)=91(y^2+1),$$

правая часть делится на 7, а левая — нет.

6. Сложите неравенства $a>k+nb/a$ и $b>n+ka/b$ и воспользуйтесь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим.

7. Ответ: 45°.

8. Все такие окружности проходят через точку (0; 1).

9. Ответ: Не могут. Подсчитайте двумя способами сумму всех чисел.

10. Докажите, что если a — корень данного уравнения, то a^2-2 — тоже его корень.

11. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки пересечения прямых AA', BB' и CC' со сторонами BC, AC и AB треугольника ABC. Докажите, что

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

и воспользуйтесь теоремой Чевы (накануне олимпиады на консультации для участников теорема Чевы была доказана).

12. Пусть $x_1<x_2<x_3<x_4$ — данные положительные числа. Можно считать, что они попарно различны. Воспользуемся тем, что

$$\frac{x-y}{1+x+y+2xy}=\frac{(1+1/y)-(1+1/x)}{(1+1/x)(1+1/y)+1}=$$
$$=\operatorname{tg}(\alpha-\beta),$$

где $\alpha=\operatorname{arctg}(1+1/y)$, $\beta=\operatorname{arctg}(1+1/x)$, причем числа α и β принадлежат интервалу $(\pi/4;\ \pi/2)$, так что среди чисел $\operatorname{arctg}(1+1/x_i)$, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$ найдутся два, разность которых меньше, чем $\pi/12$ $(\operatorname{tg}\pi/12=2-\sqrt{3})$.

Физика

1. $M_x=8m$.

2. $a=7/20g$, если ускорение груза массой $2m$ направлено вверх, и $a=13/20\,g$, если его ускорение направлено вниз.

3. $m/2<M_x<2\,m$, при этом левый груз движется влево и его энергия не больше первоначальной энергии системы.

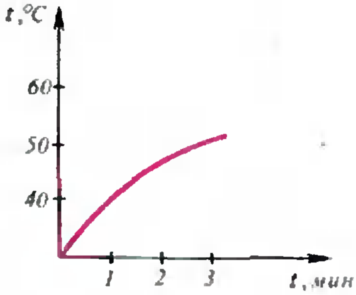


Рис. 1.

4. $x = Mv^2/(2\mu g(M+m)) \approx 0{,}13$ м.
5. $d_в \approx 3{,}11\cdot 10^{-10}$ м; $d_{нп} \approx 3{,}72\cdot 10^{-9}$ м; $\alpha \approx 5{,}4\cdot 10^{28}$ м$^{-3}\cdot$с$^{-1}$. Указание. Давление насыщенного пара воды при 100 °C составляет 1 атм.
6. Максимальная температура $T_{max} = p_0V_0/(4R)$ достигается при объеме $V^* = 5/8\,V_0$; на участке $V < V^*$ газ получает тепло, на участке $V > V^*$ — отдает.
7. См. рис. 1.
8. $I_2 = I_3 = U_0/r$; $I_1 = I_4 = 0$.
9. $I_2 = 1{,}2$ мА; $U_0 = 0{,}75$ В; $R_V = 0{,}75$ кОм; $R_A = 0{,}375$ кОм.
10. $I = EdSn \approx 8{,}85\cdot 10^{-6}$ А; от сопротивления рамки прибора показания практически не зависят.
11. $I_{mL} = U_0\sqrt{C/(3L)}$; $I_6 = U_0\sqrt{C/(27L)}$; $U_{mC} = 4/3\,U_0$.
12. $F = 4$ см, если линза собирающая, и $F = -12$ см, если линза рассеивающая.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 6)

1. Подсчитаем число танцевавших пар. С одной стороны, оно равно утроенному числу кавалеров, а с другой — утроенному числу дам, поэтому число кавалеров равно числу дам.
2. См. рис. 2.
3. Нетрудно понять, что в задаче фигурируют не арабские, а римские цифры. Небольшим перебором убеждаемся, что единственно возможным вариантом является 1091 год XI века. Этот год записывается римскими цифрами как MXCI.
4. 77 копеек.
5. Если обозначить радиус одной из вписанных окружностей через x, а другой — через y, то искомая площадь равна

$$S = \pi(x+y)^2 - \pi x^2 - \pi y^2 = 2\pi xy.$$

Но t является высотой в прямоугольном треугольнике (рис. 3), откуда $t^2 = 4xy$, следовательно, $S = \pi t^2/2$.

17	24	3	32	11	26
2	31	18	25	4	33
23	16	1	10	27	12
30	9	28	19	34	5
15	22	7	36	13	20
8	29	14	21	6	35

Рис. 2.

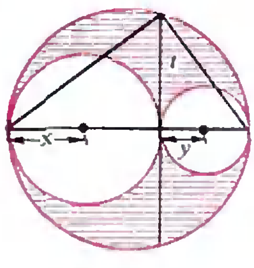


Рис. 3.

Калейдоскоп «Кванта»

(см. «Квант» № 6)

Вопросы и задачи

1. Когда человек станет на матрац, его вес распределится на меньшую площадь, чем когда он ляжет. Поэтому состояние равновесия наступит в первом случае при большем давлении.
2. Давление уменьшается.
3. Форма котла должна быть такой, чтобы сила давления, приходящаяся на единицу длины периметра сечения котла, была наименьшей. Это условие обеспечивает сферическая форма котла.
4. Сила давления жидкости на дно в два раза больше, чем на каждую из боковых граней.
5. Давление в трубке на уровне крана A меньше давления атмосферы. Поэтому при открывании крана атмосферное давление не позволит воде выливаться. Через кран в трубку будет поступать воздух до тех пор, пока внутри трубки не установится атмосферное давление и вода не опустится до первоначального уровня.
6. В исходном состоянии давление воздуха в пузырьке совпадает с давлением воды у дна сосуда. При подъеме пузырька вверх объем его практически не меняется (так как жидкость несжимаема), а следовательно, не меняется и давление воздуха в пузырьке. Значит, когда пузырек поднимется, давление воды у крышки будет равно давлению у дна в исходном положении, т. е. давление у дна увеличится.
7. Если бутылка подвергнется с наружной и внутренней сторон давлению, то вместимость ее уменьшится.
8. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то барометр будет находиться практически в состоянии невесомости. Под действием атмосферного давления трубка целиком заполнится ртутью, поэтому барометр будет показывать давление, соответствующее давлению высоты столбика ртути в трубке.
9. Динамометр показывает сумму веса трубки и силы атмосферного давления, равной весу ртути в трубке. При изменении атмосферного давления показания будут изменяться.
10. Когда бьет струя, на доску кроме силы гидростатического давления действует еще сила, обусловленная движением жидкости. Когда доска прижата, то вода неподвижна и на доску действует лишь сила гидростатического давления.
11. Когда мы пьем, под губами над поверхностью воды создаем область пониженного давления воздуха. Благодаря атмосферному давлению вода устремляется в эту область и попадает к нам в рот.
12. Поскольку высота башен одинакова, одинаковым будет и создаваемый ими напор воды. Однако предпочтительнее более вместительная башня, поскольку чем больше ее резервуар, тем ближе к постоянному будет оставаться давление в магистрали.
13. Сила светового давления убывает пропорционально квадрату расстояния до Солнца.
14. За счет большой скорости движения воздуха или воды давление внутри струи меньше атмосферного. Снизу шарик поддерживается

напором струи, а с боков — статическим атмосферным давлением.

15. Диаметр мячика увеличится, так как скорость воды в узкой части трубы больше, а давление соответственно меньше, чем в широкой части трубы.

Микроопыт

Через трубку, пропущенную сквозь пробку внутрь бутылки, надо вдуть воздух. При этом давление воздуха в бутылке увеличится, и он выдавит часть воды наружу через ту же трубку.

Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» № 3)

19. Когда играют 15 команд, такое случиться может. Это может произойти, например, следующим образом. Разобьем команды на пять троек, в каждой тройке пусть первая и вторая команды сыграют между собой вничью и обе обыграют третью команду. Во встречах команд из разных троек первые, вторые и третьи команды сыграют между собой вничью, первые команды выиграют у вторых, но проиграют третьим, вторые проиграют первым и выиграют у третьих, а третьи выиграют у первых, но проиграют вторым.

Если в турнире участвуют 16 команд, то такой результат также возможен. Расставим команды по кругу, и пусть каждая команда выиграет у 5 команд, идущих за ней по часовой стрелке, сыграет вничью со следующими пятью командами и проиграет остальным пяти командам.

В случае 17-ти команд такой результат невозможен. Действительно, всего сыграно $17 \times 16 : 2 = 136$ матчей и набрано 272 очка. Каждая команда набрала количество очков, кратное трем, поэтому и общая сумма очков должна делиться на 3, но число 272 на 3 не делится.

20. Условию задачи удовлетворяют только два числа: $1122250000 = 33500^2$ и $4422250000 = 66500^2$. Любопытно, что при этом все значки, кроме креста, определяются однозначно.

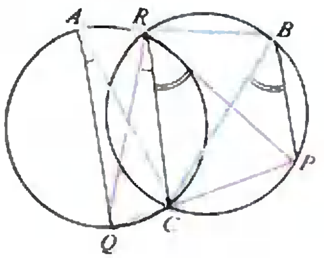


Рис. 4.

21. Так как $\angle RAC = \angle RQC$, то около четырехугольника $ARCQ$ (рис. 4) можно описать окружность. Но тогда $\angle CRQ = \angle CAQ$. Аналогично, $\angle CBP = \angle CRP$. Значит, $\angle CAQ + \angle CBP = 60^\circ$. Отсюда $\angle PBR + \angle RAQ = 180^\circ$, и следовательно, $BP \parallel AQ$.

Номер подготовили:
Л. Винюкова, А. Егоров, А. Калинин,
Л. Кардасевич, С. Коновалов, А. Котова,
А. Савин, В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили:
Г. Антонов, Н. Кузьмина, Э. Назаров,
А. Хоменко, П. Чернуский, Г. Шиф, О. Шмелев,
В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
Г. Шиф

Художественный редактор Е. Потапенкова

Зав. редакцией С. Давыдова

Корректор В. Сорокина

103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант»
тел. 250-33-54, факс 251-55-57

Сдано в набор 29.04.92. Подписано к печати 18.06.92.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,76.
Тираж 80865 экз. Заказ 496. Цена 1 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Министерства печати и информации
Российской Федерации
142300, г. Чехов Московской обл.

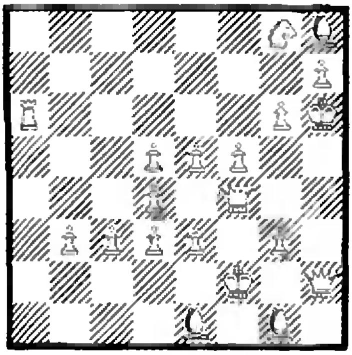
Шахматная страничка

ЗАГЛЯДЫВАЯ В ПРОШЛОЕ

В прошлый раз мы изучили одну классическую задачу ретроанализа. Рассмотрим еще две интересные задачи, для решения которых требуется заглянуть в прошлое позиции.

Раскрасить фигуры

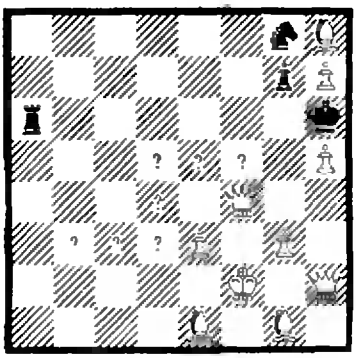
На рисунке все фигуры одного цвета. На самом деле некоторые из них — белые, а некоторые — черные, просто их «забыли» раскрасить. В этом и состоит задание.



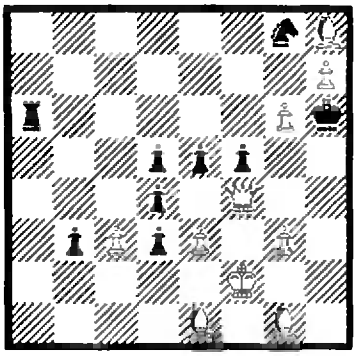
Займемся исследованием позиции. Два ферзя одновременно нападают на двух королей. Чтобы положение было законным, очевидно, ферзи должны быть одного цвета. При это возможен единственный вариант: ферзи и пешка g6 — белые, а король h6 — черный. Только в этом случае возможен двойной шах — последним ходом белые сыграли h5:g6++ (на проходе). Поскольку взятие на проходе возможно только сразу после хода пешки на два поля, предыдущий ход черных g7—g5. Теперь фиксируем, что слон h8 — белый: черному слону при черной пешке g7 на поле h8 не проникнуть. Поскольку белый слон h8 — превращенный, то пешка h7 — тоже белая: при черных пешках h7 и g7 положение даже превращенного слона на поле h8 невозможно.

Окраска остальных фигур, удары которых действуют на королей, такова: конь g8 — черный, слоны e1 и g1 и пешки e3 и g3 — белые. Снова заглянем в прошлое позиции. Вернем назад последний ход белых h5:g6++ и предыдущий ход черных g7—g5.

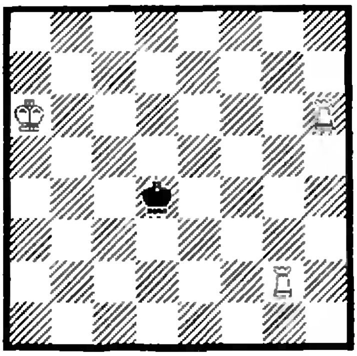
Только что был дан шах ферзем с f4, поэтому ладья a6 — черная; иначе король на h6 оказался бы под невозможным двойным шахом. Цвет семи пешек, еще не раскрашенных, пока под вопросом.



Подведем промежуточный итог. На три превращенные белые фигуры — один из ферзей и два из трех чернопольных слонов — затрачено три белых пешки. Кроме того, еще четыре пешки уже раскрашены в белый цвет. Всего пока учтено семь белых пешек. Теперь обратим внимание на расположение белых пешек королевского фланга. Вот примерная схема их движения: h2—h5, g2—g6:h7—h8С, f2:g3, e2—e4:f5:g6:h7 и d2:h3. Конечно, возможны и другие маршруты, но в любом случае белые пешки должны были взять минимум шесть черных фигур. Значит, всего в позиции на втором рисунке может остаться не более десяти (10=16—6) черных фигур. Четыре уже раскрашены в черный цвет. Поэтому одна из еще не раскрашенных пешек — белая, и это пешка c3. Только в этом случае белые пешки a2 и b2 могли превратиться в ферзя и в чернопольного слона, пройдя на a8 и b8 (черное поле!) без взятий. Наконец, перед нами искомая раскраска фигур.



Следующая позиция более проста, но не менее изящна. **Белые начинают и выигрывают, но сделано уже 47 ходов без взятий.** В течение трех ходов белые должны объявить мат, иначе грозит ничья по правилу 50-ти ходов. Но заматовать так быстро неприятельского короля они не в состоянии. Что же делать? Разгадка состоит в том, что белым нужно временно забыть о мате и заставить черных за три хода взять одну из ладей. Правило 50-ти ходов прекратит свое действие, и тогда уже можно будет спокойно заняться матованием.



48. Лd6+! Крe4 49. Лf2! Крe5 50. Лf4!, и черные вынуждены взять одну из ладей. Если 49...Крe3, то 50. Лd4 с тем же итогом. Не спасают и другие отступления короля: 48...Крc4 49. Лb2! Крc5 50. Лb4 если 49...Крc3, то 50. Лd4!; 48...Крe3 49. Лd4! Крf3 50. Лe4; 48...Крe5 49. Лg4! Крf5 50. Лe6; 48...Крc5 49. Лg4! А на 48...Крc3 вообще следует 49. Крb5 Крb3 и 50. Лd3×.

Е. Гик

1 р. 10 к.

Индекс 70465

ИГРЫ С «ДЫРКОЙ»

Известная всем «игра 15» или «пятнашки», имеет множество «родственников». Объединяет их общее свойство: на игровом поле есть свободное место — «дырка», и за счет этого фишки можно менять местами, не вынимая из коробочки.

В большинстве случаев «родственников» отличает от «игры 15» бóльшая трудность решения. Это относится и к двум головоломкам, которые вы видите на рисунке. Та, что имеет треугольное поле, придумана в начале века. В ней требуется переставить фишки так, чтобы номера шли не по часовой стрелке, а против. Можно рассмотреть вариант этой головоломки, в котором отсутствуют цифры. В этом случае задача состоит в том, чтобы слева оказался розовый цвет, а справа — фиолетовый.

Головоломку на треугольном поле удается решить за 68 ходов, а вот лучшее решение для второй игры — на шестиугольном поле, пока не знает даже ее автор — Л. Мочалов. В ней требуется поменять местами все фишки так, чтобы порядок нумерации сменился на обратный, т. е. чтобы на место фишки с номером n встала фишки с номером 23—n. За сколько ходов вам удастся решить эту задачу?

А. К.