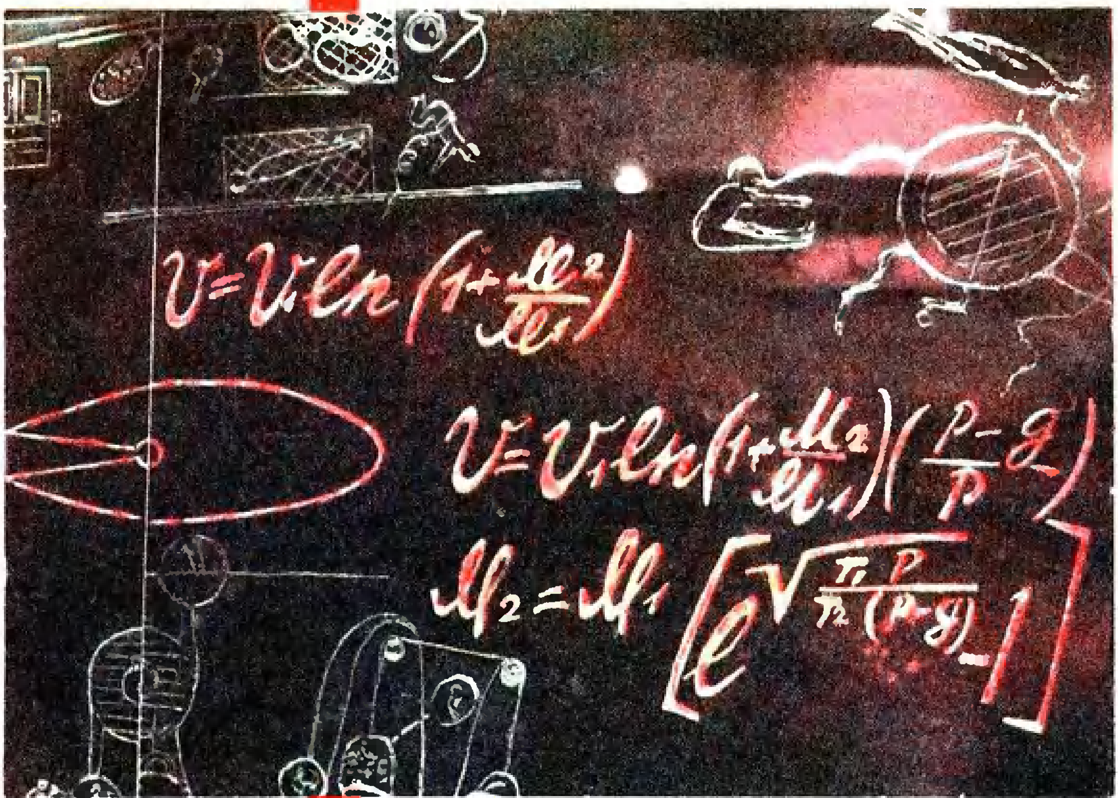
ISSN 0130-2221

Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Формула Циолковского

1992

Квант

4 1992

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал

Учредители — Президиум Российской академии наук, Президиум Академии педагогических наук и коллектив редакции журнала «Квант»

Москва, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

Наум Яковлевич Виленкин (1920—1991), видный советский математик, был одним из постоянных и любимых авторов нашего журнала. Хорошо известны его научно-популярные книги — «Комбинаторика», «Популярная комбинаторика», «Рассказы о множествах», «В поисках бесконечности» и другие. На них воспитывалось не одно поколение советских математиков, а по его учебнику для 5—6 классов и сейчас учатся миллионы школьников. Предлагаемую статью Наум Яковлевич передал в редакцию за месяц до своей кончины.

О КРИВИЗНЕ

Доктор физико-математических наук
Н. ВИЛЕНКИН

На арене цирка раньше выступали призовые силачи с различными трюками: они сгибали медные пятаки, завязывали узлом железную кочергу и гнули на плечах полосовое железо. Но даже сам легендарный Геркулес встал бы в тупик, если бы ему предложили согнуть не какой-нибудь предмет, а пространство. Ведь здесь пришлось бы изгибать пустоту, а это сложнее, чем побороть великана Антея или добыть яблоки из сада Гесперид. И в решении этой задачи не помогли бы никакие достижения современной техники — блюминги, штампы и прессы предназначены для того, чтобы деформировать предметы, а не пространство.

Но, подобно мольеровскому герою, который всю жизнь говорил прозой, но не подозревал об этом, каждый из нас всю жизнь изгибает пространство, не замечая того. Однако здесь играет роль не физическая сила человека, а его масса. Дело в том, что знаменитый физик Альберт Эйнштейн установил связь между гравитацией и искривлением пространства. Всякая масса, притягивая к себе по закону всемирного тяготения другие массы, искривляет пространство, причем тем сильнее, чем она больше. Поэтому мы и не замечаем искривления пространства, вызванного нашим собственным телом,— масса его слишком мала.

Только скопления материи космического масштаба — звезды, галактики, метагалактики — могут искривить пространство заметным образом.

Теория Эйнштейна о связи между притяжением и кривизной пространства используется всеми учеными, изучающими космологию — науку об устройстве Вселенной. Из этой теории вытекает, в частности, что искривление пространства должно быть особенно сильным там, где большие массы материи сосредоточены в малом объеме — около белых карликов и гипотетических нейтронных звезд.

Каким же образом физики проверили правоту Эйнштейна? Оказывается, по его теории, лучи света, проходящие мимо больших скоплений материи, меняют свое направление (см. рис. 1). Впрочем, еще Ньютон знал, что лучи света должны отклоняться под действием тяготения. Но по его теории величина отклонения получалась вдвое меньше, чем у Эйнштейна. Наблюдения над солнечным затмением, проведенные 29 мая 1919 года, показали правоту Эйнштейна.

Возможно ли кривое пространство?

Легко представить себе, что такое кривая линия, кривая поверхность, но представить себе кривое пространство очень трудно.

Обычные возражения против искривленности пространства таковы: кривую линию невозможно совместить с прямой, а приходится располагать на плоскости или в пространстве; точно так же и кривую поверхность невозможно поместить на плоскости — чтобы вместить ее, нужно по крайней мере трехмерное пространство. Следовательно, и искривленное трехмерное пространство должно лежать в каком-то объемлющем его пространстве четырех, а то и пяти измерений. А так как никто четырехмерного пространства не наблюдал, то пространство, в котором мы живем, никак не может быть искривленным. Некоторые философы добавляли к этим рассуждениям всякие страшные слова об идеализме, фидеизме и т. д. Зато авторам научно-фантастических рассказов идея четырехмерного пространства очень понравилась. Во многих рассказах и повестях Уэллса происходят путешествия в четвертом измерении.

На самом деле, искривленность пространства никак не связана с четвертым измерением, а является, так сказать, его внутренним делом. И установить искривленность можно не выходя из этого пространства, а лишь проводя измерения внутри него.

Для того чтобы читателю было яснее, как это делается, расскажем сначала, как установить кривизну поверхности, не покидая ее, а лишь измеряя расстояния между ее точками.

Нужно ли было путешествие Магеллана?

В течение многих тысячелетий люди думали, что Земля плоская. Однако

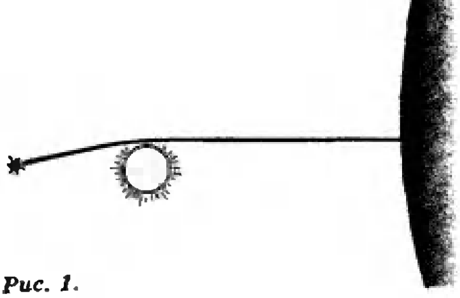


Рис. 1.

астрономические наблюдения (за тенью Земли во време лунных затмений, за Солнцем и звездами) привели древнегреческих ученых к мысли о шарообразности Земли. Эратосфену удалось даже с довольно большой точностью измерить радиус Земли. Но после того как христианство стало государственной религией, достижения языческой науки были забыты, и снова воцарилась мысль, что Земля — плоская. И для доказательства шарообразности Земли понадобилось кругосветное путешествие Магеллана.

А теперь представьте себе планету Ялмез, где живут разумные существа, но небо закрыто вечной пеленой облаков, а океанские путешествия по тем или иным причинам невозможны. Смогли бы жители этой планеты узнать, что они живут не на куске плоскости, со всех сторон окруженном водой, а на сфере? Иными словами, было ли необходимо путешествие Магеллана для того, чтобы доказать шарообразность Земли?*)

Геометрия на Ялмезе

Чтобы понять, как возникает идея кривизны поверхности, проследим за ходом развития геометрии на планете Ялмез. Геометрия возникает как экспериментальная наука, как теоретическое обобщение многовековых наблюдений над свойствами пространства. Поскольку небо планеты покрыто облаками, геометрам Ялмеза пришлось вести наблюдения лишь на ее поверхности. Оказалось, что среди всех линий, соединяющих две точки этой поверхности, всегда есть наикратчайшая (рис. 2). Наикратчайшие линии и были названы «отрезками прямых». Разумеется, наблюдатель, который посмотрел бы на планету со стороны, сказал бы, что эти линии совсем не прямые, а кривые — это дуги больших кругов сферы. Но ялме-

*) Разумеется, автор не ставит под сомнение ни географическую ценность путешествия Магеллана, ни его историческое значение. Речь идет только о чисто математическом вопросе — как установить искривленность земной поверхности, не наблюдая звезды и не совершая кругосветных путешествий.

зяне не могли посмотреть на свою планету со стороны и считали наикратчайшие линии, проведенные на поверхности, прямыми (впрочем, ведь и мы часто говорим «дорога прямая, как стрела», хотя на самом деле она идет по дуге большого круга).

Затем установили свойства этих «прямых». В самом начале наблюдению была доступна лишь малая часть планеты, а точность измерения оставалась очень небольшой. Поэтому в пределах точности измерения свойства «прямых» на поверхности планеты были такими же, как свойства прямых на плоскости,— через две точки проходила одна и только одна «прямая», две «прямые» пересекались в одной и только одной точке (вторая точка пересечения, диаметрально противоположная первой, была недосягаема для наблюдателей). Наконец, ялмезянские геометры были уверены, что их «прямые линии» бесконечны. Сама мысль, что при движении по «прямой» в одном и том же направлении они вернутся в исходную точку, казалась дикой, непонятной и противоречащей здравому смыслу. И ялмезянские ученые были убеждены, что поверхность их планеты бесконечна, а тех, кто выдвигал иные идеи, обвиняли во всех смертных грехах.

Дальнейшее изучение свойств «прямых» показало, что в пределах точности измерения сумма углов любого треугольника равна 180 градусам, что квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов и т. д. Иными словами, жители Ялмеза построили геометрию Евклида и считали, что она полностью приложима к поверхности их планеты.

Вскоре, однако, им пришлось убедиться, что это не так. По мере развития техники удавалось измерить все бо́льшие и бо́льшие куски суши (мы договорились, что океанских плаваний ялмезяне совершать не могли). И эти измерения вступили в противоречие с евклидовой геометрией. Чтобы понять в чем дело, возьмем на сфере три точки A, B и C (рис. 3, *а*). Эти точки можно соединить «отрезками прямых», а по-нашему — дугами больших кругов (т. е. дугами меридианов AB и AC и дугой экватора BC). В результате получается треугольник ABC. Легко видеть, что все три угла этого треугольника прямые. Значит, сумма его углов равна 270 градусам, а не 180 градусам, как полагается по геометрии Евклида. На 90 градусов больше, чем нужно.

У других треугольников избыток суммы углов был бы другой. Например, у треугольника ABD (рис. 3, *б*) каждый из углов B и D равен 90 градусам, а угол BAD — 180 градусам. Сумма углов этого треугольника равна 360 градусам — на 180 градусов больше, чем нужно. В дальнейшем число $\alpha+\beta+\gamma-180°$, где α, β, γ — углы сферического треугольника, мы будем для краткости называть *избытком* этого треугольника.

Поворот параллельных

Но не только наличие избытка у треугольников показало жителям Ялмеза, что они живут не на плоскости, а на кривой поверхности. Неверной

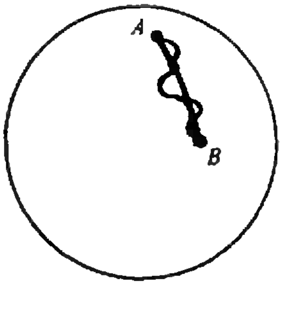


Рис. 2.

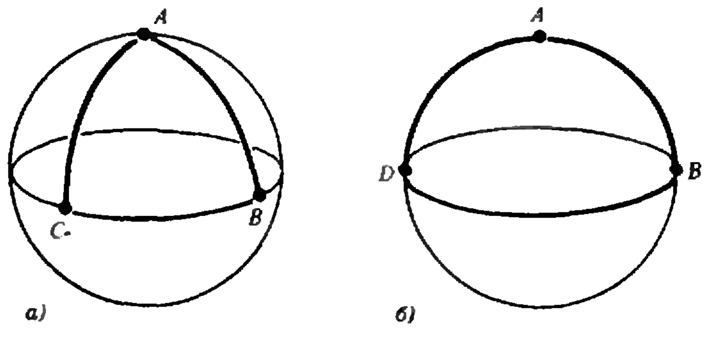


Рис. 3.

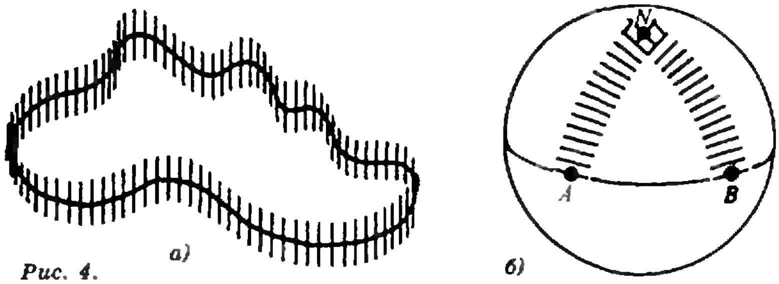


Рис. 4. а) б)

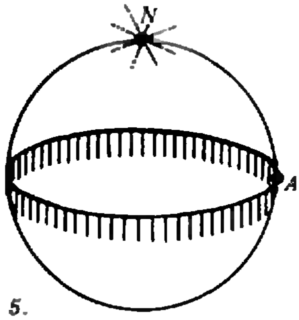


Рис. 5.

оказалась и теорема Пифагора. Например, у треугольника ABC угол A составляет 90 градусов, а все его стороны равны друг другу. Вообще, здесь трудно разобрать, где гипотенуза, а где катеты,— все углы прямые.

К неожиданным результатам привело и изучение «параллельных *прямых» на поверхности планеты.* Ведь если провести на плоскости замкнутую линию, а потом перемещать вдоль нее отрезок так, чтобы он оставался все время параллелен самому себе, то отрезок вернется в исходную точку, не изменив направления (рис. 4, *а*). Измерения малых участков поверхности планеты, казалось бы, подтверждали этот результат («параллельными» ялмезяне считали «прямые», перпендикулярные одной и той же «прямой»).

Но измерения больших участков поверхности привели совсем к иным результатам. Возьмем, например, треугольник ABN (рис. 4, *б*) и проведем в точке N «отрезок», перпендикулярный NA. Будем переносить этот отрезок вдоль контура треугольника ABN, следя за тем, чтобы он оставался все время параллельным самому себе. Когда мы придем в точку A, то получим отрезок, направленный по экватору. Так как экватор сам является «прямой», то после параллельного переноса в точку B отрезок снова будет направлен по экватору. А когда мы перенесем его еще по меридиану BN, то получим отрезок, повернутый на 90 градусов относительно первоначального направления (т. е. как раз на величину избытка треугольника ABN). А если бы мы переносили отрезок по контуру треугольника ABD на рисунке 3, *б*, то он повернулся бы на 180 градусов.

Вообще, при параллельном переносе по контуру *любого* сферического треугольника отрезок поворачивается на угол, равный избытку этого треугольника. Любопытный результат получается, если переносить отрезок вдоль *экватора. На первый взгляд кажется,* что он возвратится в исходную точку, не повернувшись. Но это неверно. Если все время сносить движущийся отрезок в одну и ту же точку — полюс сферы, то мы увидим, что он повернулся на 360 градусов (рис. 5). Это и неудивительно. Дополним экватор дугой меридиана AN. Мы получим «треугольник» NAN. В этом треугольнике два угла прямые, а третий равен 360 градусов. Поэтому и его избыток равен 360 градусам. Подумайте сами, могут ли быть «треугольники» с еще большим избытком?

Измерение кривизны

Итак, измеряя сумму углов треугольника, наблюдая за поворотом параллельных при переносе по замкнутому контуру, проверяя теорему Пифагора, жители планеты убедились, что они живут не на плоскости, а на какой-то искривленной поверхности. За меру кривизны некоторого участка поверхности они приняли угол поворота отрезка, параллельно перенесенного вдоль границы этого участка. Эту кривизну можно было считать и по-другому — разбить участок на треугольники и сложить избытки всех треугольников. Ведь если два треугольника объединяются в один, то их избытки складываются.

Оказалось, что чем больше площадь участка, тем сильнее он искривлен. Точнее говоря, избыток любого треугольника оказался пропорционален его площади:

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi=KS \qquad (*)$$

(начиная с этого места, мы будем измерять углы не в градусах, а, как обычно принято в математике, в радианах ($360°=2\pi$ радиан), при таком измерении сумма углов плоского треугольника равна π). Отсюда был сделан вывод, что кривизна поверхности на единицу площади всюду одна и та же. Число K и приняли за меру кривизны.

Но среди всех поверхностей есть только одна поверхность, для которой избыток треугольника на единицу площади всегда один и тот же,— это сфера. Поэтому геометры Ялмеза установили, что они живут на сфере, а не на какой-нибудь другой поверхности. Без особого труда удалось даже найти радиус этой сферы. Ведь если число K не зависит от выбора треугольника, его достаточно подсчитать для одного треугольника. Возьмем, например, треугольник ABC на рисунке 3, *а*. Его избыток равен 90 градусам или, в радианной мере, $\pi/2$. Площадь же этого треугольника равна 1/8 площади сферы, т. е. $\pi R^2/2$. Подставляя эти значения в формулу (*), получаем, что $K=1/R^2$, а поэтому для любого сферического треугольника:

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi=\frac{S}{R^2},$$

где α, β, γ — его углы, S — площадь и R — радиус сферы. Эта формула позволяет определить радиус сферы путем измерения углов треугольника и его площади. Разумеется, этот способ не очень удобен, так как требует весьма большой точности измерения углов. Для измерения радиуса Земли прибегли к иному способу — измерению длины дуги меридиана. Но этот способ требует наблюдения за звездами.

Гауссова кривизна

Формула (*) определяет кривизну K поверхности сферы, отнесенную к единице площади. Как мы видели, она равна $1/R^2$. Иными словами, чем больше радиус сферы, тем меньше искривлен участок ее поверхности, имеющий единичную площадь,— поверхность мяча искривлена гораздо больше, чем поверхность Земли.

Великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс, которого его современники называли Mathematicorum princeps (первый среди математиков), предложил таким же образом измерять кривизну любой поверхности. На любой поверхности можно строить геометрию точно так же, как и на поверхности сферы. Роль прямолинейных отрезков играют при этом «кратчайшие» (их еще называют *геодезическими*) линии, т. е. линии, длина которых меньше длины всех остальных линий, соединяющих данные две точки. С ними впервые столкнулись геодезисты при измерении расстояний на поверхности Земли. К слову сказать, и сам Гаусс пришел к занятиям геометрией на поверхностях после того, как он в течение нескольких лет занимался геодезическими измерениями.

Из геодезических линий можно строить треугольники, четырехугольники и т. д. При этом на любой кривой поверхности, как и на сфере, сумма углов треугольника не будет, вообще говоря, равна π. Кривизной треугольника на единицу площади мы снова назовем число

$$K=\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{S}.$$

На произвольных поверхностях это число будет для различных треугольников различным. Более того, оно может быть для одних треугольников положительным, а для других — отрицательным (треугольники могут иметь не только избыток, но и недостаток).

Чтобы найти кривизну в какой-то точке поверхности, надо брать все меньшие и меньшие треугольники,

Рис. 6.

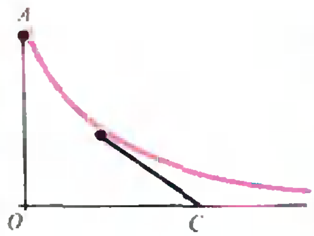


Рис. 7.

Рис. 8.

охватывающие эту точку, и искать их кривизну на единицу площади. В пределе мы получим кривизну поверхности в данной точке. Это определение кривизны дал Гаусс, и ее обычно называют гауссовой кривизной. Если треугольники имеют избыток, то гауссова кривизна поверхности положительна, а если сумма их углов меньше π, то кривизна отрицательна.

Если поверхность выпукла, то ее гауссова кривизна во всех точках положительна, а для бублика, изображенного на рисунке 6 (математики называют его тором), в красных точках гауссова кривизна положительна, а в зеленых — отрицательна.

Замечательным свойством гауссовой кривизны является то, что она не меняется при изгибании поверхности. Отсюда ясно, что во всех точках цилиндра гауссова кривизна равна нулю. Ведь цилиндр получается изгибанием куска плоскости, а кривизна плоскости равна нулю. Равна нулю гауссова кривизна и во всех точках конуса, кроме его вершины.

Псевдосфера и геометрия Лобачевского

На сфере во всех точках кривизна одна и та же и притом положительная. А есть поверхность постоянной отрицательной кривизны. Ее называют псевдосферой. Она получается следующим образом.

Представим себе, что в точке A стоит человек, который держит на поводке собаку (рис. 7). Вначале собака находится в точке O. После этого она бежит по прямой Ox с постоянной скоростью, а ее хозяин бежит вслед за ней так, что его скорость все время направлена вдоль поводка. Поэтому сначала хозяин бежит в направлении AO. Но по мере того, как собака продвигается по прямой Ox, направление бега хозяина образует все меньший угол с этой прямой, причем расстояние от бегущего человека до прямой Ox становится все меньше. На рисунке 7 изображена линия, по которой бежит человек. Она называется трактрисой и обладает следующим замечательным свойством: в какой бы точке к ней ни провести касательную, отрезок этой касательной между этой точкой и осью Ox имеет одну и ту же длину.

Если повернуть трактрису вокруг прямой Ox, то получится псевдосфера (рис. 8). Эта поверхность замечательна тем, что геометрия на ней совпадает с геометрией на куске плоскости Лобачевского. Поэтому открытие псевдосферы было очень важным этапом в развитии неевклидовой геометрии.

Сферическое изображение поверхности и кривизна

Представление о гауссовой кривизне поверхности можно определить еще и иначе.*) Чтобы сделать это, проведем в каждой точке поверхности к ней перпендикуляр. Для плоскости все эти перпендикуляры имеют одно и то же направление, а для других поверхностей направлены в разные стороны. Например, для сферы все эти перпендикуляры проходят через центр сферы (рис. 9). Поэтому степень расхождения перпендикуляров и характеризует кривизну поверхности. Неудобно

*) Отметим, что это определение требует уже выхода в пространство, окружающее поверхность.

только, что перпендикуляры восставлены в разных точках поверхности. Чтобы освободиться от этого неудобства, выберем одну точку O в пространстве и проведем через нее прямые, параллельные этим перпендикулярам. Возьмем еще сферу с радиусом 1 и с центром в точке O. Точки пересечения проведенных прямых со сферой образуют на сфере некоторую область. Ее называют сферическим изображением данной поверхности. Чем сильнее искривлен участок поверхности, тем сильнее расходятся в разные стороны перпендикуляры и тем больше площадь сферического изображения в точности этого участка. Оказывается, площадь сферического изображения совпадает с кривизной участка. Например, сферическое изображение полусферы является полусферой единичного радиуса, площадь которой равна 2π. И кривизна любой полусферы тоже равна 2π.

А кривизна цилиндра равна нулю. Ведь перпендикуляры к поверхности цилиндра все перпендикулярны оси цилиндра и потому параллельны одной и той же плоскости (рис. 10). Если перенести их в точку O, то все они будут лежать в одной плоскости (например, плоскости экватора). Значит, сферическим изображением цилиндра является не участок сферы, а линия, площадь которой, конечно, равна нулю. Поэтому и кривизна цилиндра тоже равна нулю.

Гаусс и Риман

В работах Гаусса был до конца решен вопрос о том, что такое кривизна поверхности. На повестку дня встала проблема, как определить меру кривизны пространства. Это удалось сделать одному из самых замечательных математиков — Бернгарду Риману. Риман учился в Геттингенском университете, где в те годы основную математическую кафедру возглавлял Гаусс. Но Гаусс преподавал неохотно и был тогда вообще недосягаемым олимпийцем. Вдобавок, по не вполне выясненным причинам, отношения молодого студента со знаменитым профессором сложились далеко не идеальным образом, и в течение многих лет Гаусс относился к Риману с большим предубеждением.

Несмотря на это, мы должны считать Римана учеником Гаусса и притом единственным его учеником, проникшим в самые сокровенные идеи Гаусса. Во многих работах Римана чувствуется духовная близость с Гауссом, внутренний контакт, доходивший до того, что Риман выбирал иногда те же обозначения, которыми пользовался Гаусс в своих неопубликованных (и неизвестных Риману) работах.

Проблеме кривизны пространства была посвящена пробная лекция, прочитанная Риманом в 1854 году. Тогда в немецких университетах существовал хороший обычай — начинающий преподаватель должен был прочесть лекцию для членов факультета, чтобы они могли определить его педагогические способности. Риман предложил несколько тем пробных лекций, из которых Гаусс выбрал одну, более всего заинтересовавшую его,— «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». Надо полагать, что слушатели остались не слишком высокого мнения о педагогических даро-

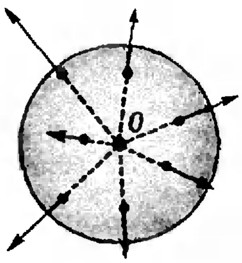


Рис. 9.

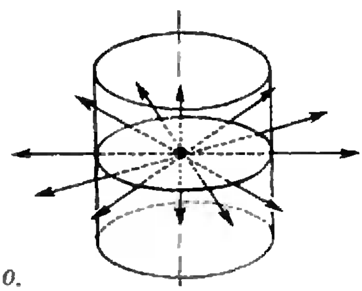


Рис. 10.

ваниях Римана — только Гаусс и смог понять содержание лекции.

Кривизна пространства

Как же ответил Риман на вопрос, что такое кривизна пространства и как она измеряется? Он применил тот же способ, каким Гаусс измерял кривизну поверхности,— подсчитывал сумму углов треугольника, составленного из отрезков геодезических линий, и смотрел, на сколько она отличается от π. Однако при этом возникало осложнение — ведь в пространстве через точку можно провести много плоскостей, и кривизна зависит не только от того, в какой точке ее вычисляют, но и от того, в какой плоскости лежат треугольники. Поэтому Риман говорит о кривизне в данной точке в направлении данной плоскости.

Если для всех треугольников в пространстве сумма углов равна π, то в этом пространстве верна обычная геометрия Евклида. Такое пространство не имеет кривизны, оно, как говорят, плоское. Если же есть треугольники, сумма углов которых больше π, то кривизна пространства в направлении плоскости этого треугольника в соответствующих точках положительна; если же сумма углов меньше π, то отрицательна.

Таким образом, понятие кривизны пространства не содержит в себе ничего таинственного, а указывает лишь на то, что сумма углов треугольника может отличаться от предписанного Евклидом значения. Особенно интересными являются пространства, в которых кривизна во всех точках и во всех плоскостях одна и та же. В таких пространствах (их называют пространствами постоянной кривизны) тела могут передвигаться из одного места в другое, не меняя своих размеров. Если же кривизна пространства переменна, то тело при перемещении будет менять размеры, искажаться. Риман поставил и вопрос о том, является ли искривленным реальное пространство — пространство, в котором мы живем.

В эпоху Римана физика еще не знала явлений, которые не укладывались бы в схему евклидова пространства и ньютоновых концепций. И все же он говорил о том, что «нужно пытаться объяснить возникновение метрических соотношений чем-то внешним — силами связи, действующими на это реальное... Здесь мы стоим на пороге области, принадлежащей другой науке — физике, и переступать его не дает нам повода сегодняшний день».

Как же узнать, имеет ли кривизну реальное пространство? Для этого надо сначала найти в нем геодезические — кратчайшие линии. Физическими наблюдениями было установлено, что свет всегда распространяется так, чтобы пройти свой путь за кратчайшее время. При этом скорость света в пустоте всегда одна и та же. Поэтому ясно, что геодезической линией, соединяющей две точки пространства, является идущий из одной точки в другую световой луч (в пустоте).

Проще всего было бы поэтому установить кривизну пространства, измерив сумму углов треугольника, составленного из световых лучей. Однако эта сумма даже для треугольников, вершинами которых являются звезды, не отличается от π в пределах точности измерения, и можно сказать, что если пространство в целом и искривлено, то кривизна его очень мала (безуспешные попытки доказать таким путем неевклидовость реального пространства предпринимали и Гаусс, и великий русский геометр Н. И. Лобачевский).

Только после того, как Эйнштейн установил, что заметная кривизна пространства может наблюдаться лишь вблизи притягивающих масс, удалось экспериментально установить ее наличие. Это и сделали экспедиции, наблюдавшие за полным солнечным затмением 1919 года.

Другое доказательство искривленности пространства дали наблюдения за планетой Меркурий. Эта планета

(Окончание см. на с. 15)

О ВЫСОКИХ ДЕРЕВЬЯХ

(статистика и простые оценки)

Кандидат физико-математических наук
А. МИНЕЕВ

Только механических оценок, которым была посвящена первая часть статьи, оказалось недостаточно, чтобы понять причины ограничений на высоту деревьев. Левый склон графика на рисунке 1 пока «в тумане». Дерево, как и следовало ожидать, гораздо сложнее сухой палки, воткнутой в землю. Продолжим наши исследования.

2. Движение воды

Приглядимся к движению воды по дереву. Она связывает корни, ствол и листья воедино. Оценим характерные скорости движения воды в трех важнейших случаях (см. рисунок 2):

— при всасывании воды кончиками корней из почвы $v_н$ («н» — низ);

— при движении по стволу дерева $v_с$ («с» — ствол или середина);

— при испарении с поверхности листьев или кроны $v_в$ («в» — верх).

Пройдем эту цепочку в направлении от верхушки к корням дерева, от простых оценок к более сложным.

$v_в$. Из-за нагрева Солнцем кроны дерева требуется ее постоянное охлаждение. Иначе крона перегреется и не станет выполнять свои функции. При слабом ветре тепло может быть отведено в основном путем испарения воды с поверхности листьев или хвои. Это запускает «насос», выкачивающий воду из почвы.

Запишем уравнение баланса тепла для листа площадью $S_л$, поглощающего солнечное излучение:

$$\alpha q_{\odot} S_л = Q_{исп} \rho_ж v_в S_л .$$

Слева от знака равенства записан приход энергии от Солнца, справа — ее уход при испарении воды с листа. Здесь $q_{\odot}$ — средний поток солнечного тепла на поверхности Земли ($q_{\odot} \sim 10^3$ Вт/м^2), α — доля энергии, поглощенная листом (с учетом отражения от его поверхности, ориентации и экранировки кроной $\alpha \sim 0{,}2-0{,}3$), $Q_{исп}$ — удельная энергия испарения воды ($Q_{исп} \sim 2 \cdot 10^6$ Дж/кг), $\rho_ж$ — плотность воды ($\rho_ж = 10^3$ кг/м^3). Отсюда для скорости подвода воды к поверхности листа (или хвоинки) с последующим испарением получаем

$$v_в = \frac{\alpha q_{\odot}}{Q_{исп} \rho_ж} .$$

При указанных выше значениях параметров $v_в \sim 10^{-7}$ м/с $\sim 4 \cdot 10^{-4}$ м/ч. Как видно из формулы, $v_в$ зависит только от освещенности и пропорциональна ей. При ветре скорость теплоотвода больше, что увеличивает значение $v_в$. Таким образом, эта формула является ограничением на $v_в$ снизу.

$v_с$. В стволе дерева вода течет по тонким каналам — «скелетам» когда-то живых клеток. Диаметр таких сосудов чрезвычайно мал: масштаба 10^{-5} м у хвойных деревьев и до $(1-2) \cdot 10^{-4}$ м у лиственных.

При медленном течении воды по тонким каналам сила сопротивления $F_с$ определяется вязкостью воды.

Если слои жидкости движутся с разными скоростями, то между ними возникает «трение» — сила вязкости. Для количественного описания вязкости жидкости можно рассмотреть простейший пример: жидкость между двумя параллельными близко расположенными пластинами. Если одна из пластин неподвижна, а другая движется со скоростью v, то возникающая между ними сила вязкости равна

$$F_в = \eta S \frac{v}{h} ,$$

Окончание. Начало см. в № 3.

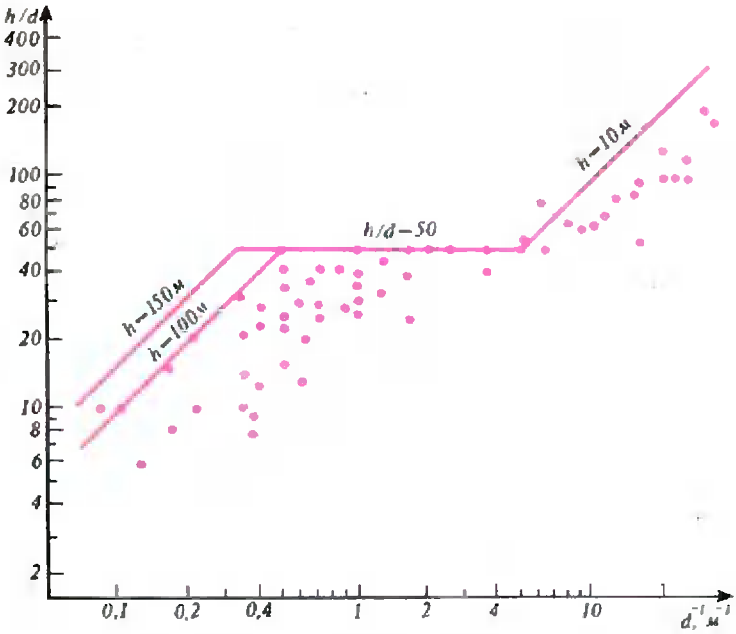


Рис. 1. Зависимость относительной высоты дерева h/d от его диаметра d. Слева на графике — самые толстые деревья, справа — самые тонкие.

где S — площадь каждой пластины, h — расстояние между ними, а коэффициент пропорциональности η, называемый коэффициентом вязкости, характеризует вязкие свойства жидкости (для воды $\eta \sim 10^{-3}$ кг/(м · с)). Величину v/h, которая показывает, как быстро меняется скорость при переходе от слоя к слою, называют градиентом скорости.

При движении жидкости по трубе (каналу) градиент скорости от стенок к центру по порядку величины равен v/d (d — диаметр трубы), площадь стенки трубы $S \sim ld$ (l — длина трубы), т. е.

$$F_в \sim \eta v l.$$

В случае равномерного течения жидкости сила вязкости компенсируется перепадом давлений:

$$F_в = \Delta p \frac{\pi d^2}{4}.$$

Отсюда для перепада давлений на длине l получаем оценку

$$\Delta p \sim \frac{\eta l v}{d^2}.$$

Точная формула (ее называют законом Пуазейля) дает

$$\Delta p = \frac{32 \eta l v}{d^2}.$$

Для подъема воды в поле тяжести Земли на высоту h со скоростью v_c по сосуду диаметром d_c требуется перепад давлений

$$\Delta p_c = \rho_ж g h + \frac{32\,\eta h v_c}{d_c^2} = \rho_ж h\left(g + \frac{32\,\nu v_c}{d_c^2}\right),$$

где $\nu = \eta/\rho_ж \sim 10^{-6}$ м^2/с — так называемая кинематическая вязкость воды.

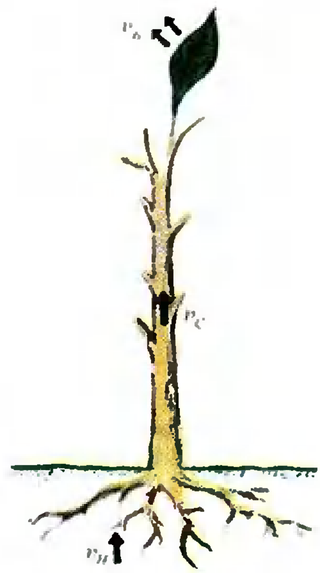


Рис. 2. Схематическое изображение движения воды по дереву.

Изобразим графически зависимость Δp_c от скорости воды (рисунок 3). При малых v_c величина Δp_c не зависит от скорости, а при больших — пропорциональна ей. Характерное значение скорости, при которой происходит излом зависимости (и дереву становится все труднее поднимать воду наверх), равно

$$v_{cx} = gd_c^2/(32\nu),$$

или, после подстановки значений g и ν,

$$v_{cx} \sim 3 \cdot 10^{-7} d_c^2,$$

где d_c измерен в микронах, а v_{cx} — в м/с.

Мы получили, что v_{cx} квадратично зависит от диаметра сосудов (рисунок 4). Для хвойных деревьев диаметр сосудов $d_c \sim 10^{-5}$ м и характерная скорость $v_{cx} \sim 10$ см/ч, для лиственных — $d_c \sim 10^{-4}$ м и $v_{cx} \sim \sim 10$ м/ч. Интересно, что, несмотря на оценочный характер формулы для v_{cx}, измеренные значения скорости передвижения воды по сосудам реальных деревьев, приводимые в литературе, близки к нашим оценкам. Дерево как бы «чувствует» границу изменения зависимости Δp от скорости. При характерном значении скорости перепад давлений по стволу дерева составляет

$$\Delta p_c \sim 2\rho_ж gh$$

и для очень высоких деревьев ($h \sim \sim 100-150$ м) величина Δp_c порядка 20—30 атм.

А может ли лиственное дерево при $v_c \sim 10$ м/ч иметь диаметр сосудов того же масштаба, что и у хвойного дерева, т. е. $\sim 10^{-5}$ м? Посмотрим. В этом случае получаем Δp_c (атм) $\sim 10 \cdot h$ (м). Уже при высоте ~ 10 м перепад давлений составит ~ 100 атм — величину, близкую к максимально возможному давлению p_{max}, при котором рвутся силы сцепления молекул воды. Таким образом, сосуды ствола при увеличенной скорости прокачки воды «обязаны» утолщаться, чтобы вода не «порвалась». Именно так и «поступают» лиственные деревья, «увеличивая» d_c до величин $\sim 10^{-4}$ м.

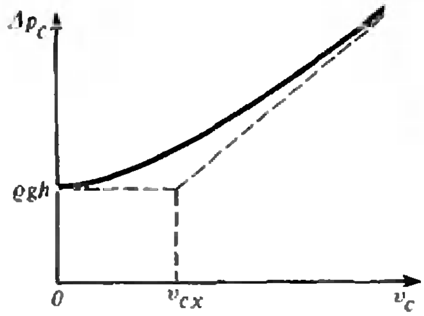


Рис. 3. Зависимость давления, требуемого для прокачки воды наверх по сосудам дерева, от скорости движения воды.

$v_н$. Попадая в корни дерева, вода обязана пересечь оболочку корневого волоска. Это не так просто, поскольку нужно преодолеть барьер — клеточную мембрану, т. е. двухслойную полунепроницаемую перегородку толщиной $\sim 10^{-8}$ м. Диффузия воды через мембрану сильно замедляет скорость ее движения. Простые, но несколько громоздкие оценки приводят к величине

$$v_н \sim 10^{-8}\ \text{м/с} \sim 4 \cdot 10^{-5}\ \text{м/ч}.$$

Итак, все три характерные скорости передвижения воды определены. Их сопоставление довольно любопытно. Действительно, поток массы воды через корни, ствол и крону должен быть одинаков. Поэтому площади корневой системы (точнее, корневых волосков) $S_н$, водопроводящей системы ствола S_c и кроны $S_в$ должны относиться обратно пропорционально

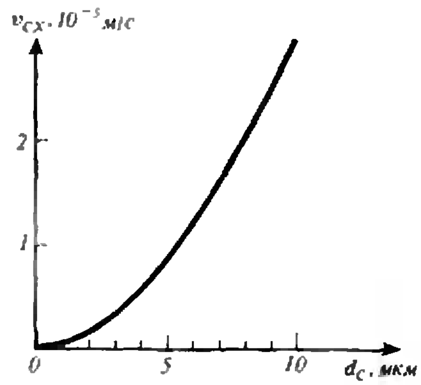


Рис. 4. Зависимость характерной скорости подъема воды по дереву от диаметра сосудов.

соответствующим скоростям. Приняв S_c за единицу площади, получим для хвойных деревьев (при $v_c \sim$ $\sim 0,1$ м/ч) при хорошем освещении дерева и достаточно увлажненной почве

$$S_в : S_c : S_н = (200-300) : 1 : (2500-3000).$$

Отсюда следует, что площадь «корешков» больше площади «вершков» и каждая из них существенно превышает сечение водопроводящих каналов ствола. При переходе от ствола к кроне или корням дерево «обязано» сильно нарастить поверхность. Как это выполнить при минимальном расходе материала?

Подобные задачи часто возникают в природе и в технике. Так «вынуждены» поступать и молния, разделяясь на все более мелкие каналы, и причудливый морозный узор на оконном стекле. Способ решения, как правило, одинаков. Это — постепенное разделение на все более мелкие структуры, где и протекает основной процесс (всасывание воды корневыми волосками и испарение листьями, выделение энергии молнией).

На этом прервем рассказ о путешествии воды по дереву. Он позволил грубо оценить скорости передвижения воды, а также понять причину сильно разветвленной структуры веток и корней. Но «тумана» возле левого склона и он не рассеял...

Сделаем лишь одно замечание. Упомянутая выше величина максимального растягивающего давления воды в деревьях ($p_{max} \sim 100$ атм) требует некоторых пояснений. Для идеальной воды (без примесей и посторонних включений) величина p_{max} существенно больше (см. рисунок 5, кривая *а*). Она порядка тысячи атмосфер и уменьшается с ростом температуры. Переход к технической воде (водопроводной и колодезной) кардинально меняет ситуацию. Для такой воды величина p_{max} масштаба одной или нескольких атмосфер. Вода же в деревьях проходит через тонкое сито мембран корневых волосков, что в значительной степени очищает ее. Измерения p_{max} для тщательно очищенной воды проводились неоднократно и дали величину $\sim 100-$ 300 атм. В качестве примера на рисунке 5 (кривая *б*) приведена зависимость p_{max} (T) в одной из самых аккуратных серий экспериментов. Уровень p_{max} порядка 200—280 атм, с ростом температуры величина давления уменьшается. При значении разрывающего давления 100—300 атм, даже с учетом потерь на трение воды о стенки сосудов, величина предельной высоты дерева больше 500 метров! Это означает, что для реальных деревьев водные нити не рвутся.

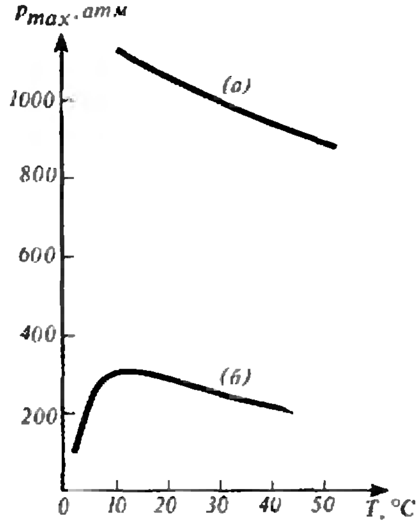


Рис. 5. Зависимость разрывающего воду давления от температуры: для идеальной воды (а) и для хорошо очищенной воды (б).

3. Процесс роста дерева

А может быть, все дело не в строгих физических ограничениях высоты дерева, а в том, что дерево за разумное время просто не успевает стать слишком высоким?

Рассмотрим эволюцию во времени размеров отдельного дерева. При небольшой высоте отношение h/d может быть очень велико. Постепенно h/d выходит на примерно постоянное значение.

Изобразим своеобразный тоннель, а в нем — цепочку дальнейших рассуждений (см. рисунок 6). Справа —

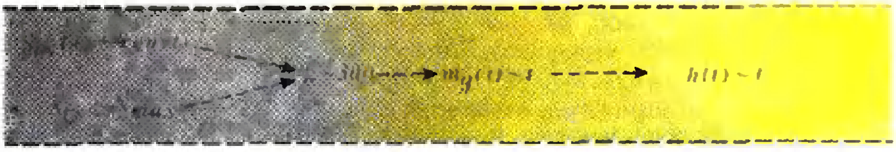


Рис. 6. Слабый свет в конце тоннеля...

«свет», к которому мы идем. На пути — несколько остановок.

$S_{гк}(t) \approx \text{const}$. Приглядимся к структуре годичных колец дерева (см. их типичный вид на рисунке 7). С возрастом, как правило, толщина годичного кольца уменьшается, так что его площадь слабо зависит от времени. Примем для простоты $S_{гк}(t) \approx \text{const}$.

$N_{гк} \leqslant N_{max}$. С течением времени клетки внутренних годичных слоев постепенно засоряются и перестают выполнять водопроводящую функцию. Поэтому в подъеме воды на верх дерева участвует только небольшой слой древесины вблизи коры. Таким образом, количество годичных слоев ствола $N_{гк}$, через которые питается крона, невелико. У хвойных деревьев оно не превышает нескольких десятков, у лиственных — меньше десяти.

В результате можно принять постоянными:

— полную площадь дерева, работающую на подъем воды,

$$S(t) \sim S_{гк}(t) N_{гк} \approx \text{const};$$

— массу воды, прокачанной через ствол дерева за год,

$$M_в(t) = \rho_ж v_c S(t) T_1$$

(v_c — скорость подъема воды по сосудам, T_1 — продолжительность работы нашего «насоса» за год).

$k \sim 300$. Введем еще один важный коэффициент: k — отношение массы воды, закачанной на верх дерева, к массе синтезированного в кроне органического вещества. Именно последнее и дает прирост размеров и массы дерева. Величина k для разных растений меняется в не слишком широких пределах и в среднем $k \sim 300$.

$m_д(t) \sim t$. При постоянных $M_д(t)$ и k получаем, что годичный прирост массы древесины $\Delta m_д(t)$ слабо меняется со временем, грубо можно положить $\Delta m_д(t) \approx \text{const}$. И тогда масса взрослого дерева будет примерно линейно расти с возрастом дерева: $m_д(t) \sim t$.

$h(t) \sim t^{1/3}$. И наконец, последнее звено в нашей цепочке. Масса дерева пропорциональна $d^2 h$. Таким образом, при постоянном значении $h/d \sim 50$ масса дерева пропорциональна кубу высоты. А поскольку $m_д(t) \sim t$, то $h(t) \sim t^{1/3}$.

Чем интересна такая зависимость? Видно, что рост дерева в высоту со временем сильно замедляется. Так, если дерево достигло высоты 50 метров к 50 годам, то 100-метровый рубеж оно преодолеет к 400 годам, а 200-метровый — только через 3200 лет.

Это уже похоже на свет в конце тоннеля... Хотя, конечно, следует отдавать себе отчет в многочисленности не очень строгих рассуждений и предположений, допущенных на нашем долгом пути.

Приведем еще несколько соображений эволюционного характера против чрезмерного гигантизма деревьев:

— Окружающая данное дерево растительность конкурирует с ним если не по высоте, то в почвенном питании. К изменениям питания более низкорослым растениям приспособиться легче, чем гиганту.

Рис. 7. Характерный вид годичных колец ствола дерева.

— За промежуток времени масштаба сотен и тысяч лет жучки и микроорганизмы чаще всего успевают сильно ослабить прочность дерева. Разрушение происходит с сердцевины, клетки которой практически прекратили жизнедеятельность.

— За времена $\sim 10^4$ лет существенно меняется климат Земли. Так, последнее великое оледенение закончилось примерно 10 тысяч лет назад.

— У 100-метровых деревьев уже нет конкуренции за место под Солнцем. Поэтому отпадают эволюционные причины тянуться к 200—300-метровой высоте — трудности с доставкой воды растут, а преимуществ не видно.

— Дерево — кандидат на рекордную высоту — «обязано» иметь хорошо выраженный вертикальный и зачастую очень толстый ствол и сравнительно небольшую крону. Можно сказать, что гиганты «работают» в основном на себя, а не на потомство. Такие деревья явно проигрывают по продуктивности (скорости размножения) более низкорослым, но раскидистым деревьям.

По-видимому, подобные причины и приводят к тому, что растительные мастодонты высотой более 150 метров на Земле не встречаются.

О кривизне

(Начало см. на с. 2)

находится ближе к Солнцу, чем остальные планеты, и потому испытывает наибольшее влияние искривленности околосолнечного пространства. Из-за этой искривленности, после полного оборота Меркурия вокруг Солнца, его орбита немного поворачивается, точно так же, как поворачивалась параллельная штриховка замкнутой линии на сфере (рис. 11). Впрочем, орбита поворачивается и по другой причине — из-за притяжения планет. Поворот орбиты, вызванный притяжением, астрономы умели учитывать. Но их расчеты не сходились с действительностью — орбита поворачивалась быстрее, чем нужно, на 41 секунду в сто лет. Когда подсчитали по формулам Эйнштейна, на сколько поворачивается орбита из-за кривизны пространства, ответ был: на 41 секунду в сто лет. Этим была объяснена загадка, долгое время мучившая астрономов, а заодно и подтверждена теория относительности Эйнштейна.

С кривизной пространства приходится сталкиваться и при космологических исследованиях, где надо учитывать искривление пространства, вызванное притяжением целых галактик и метагалактик. В связи с этим возникает один из основных вопросов космологии — конечно или бесконечно реальное пространство. Ведь если пространство искривлено и кривизна его положительна, то оно может быть устроено примерно как трехмерная сфера, т. е. не иметь нигде границ, но быть конечных размеров. Некоторые люди отрицают саму возможность конечности реального пространства. Однако их доводы не более убедительны, чем доводы ялмезянских ученых,

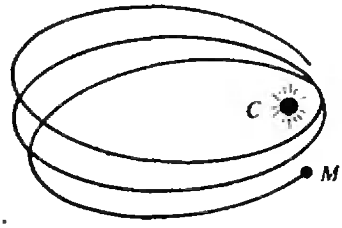


Рис. 11.

доказывающих, что они живут на бесконечной плоскости, а не на ограниченной сфере. Ответ на этот вопрос должны дать не умозрительные построения, а астрономические исследования. В частности, решающую роль должны сыграть точные измерения средней плотности материи во Вселенной.


Но нельзя вечно жить в колыбели!
План!
РАДИАЦИЯ
В невесомости вода не бежит..
Нужна космическая пища!
0,3 атмосф.
Стыковка.
А как же мыться?
Луна твердая!
С.П.
Vсгыи?
120 т
Нет, это не план!

ОРБИТЫ, КОТОРЫЕ МЫ ВЫБИРАЕМ

(беседа с В. Бурдаковым и К. Феоктистовым)

В год, провозглашенный ООН годом космическим, редакция обратилась с рядом вопросов к известным специалистам в области проектирования космической техники, докторам технических наук Валерию Бурдакову и Константину Феоктистову. Оба многие годы проработали на «королёвской» космической фирме, ныне НПО «Энергия». За их плечами участие в большей или меньшей степени в создании почти всех космических аппаратов фирмы — от первых спутников до космических станций и «Бурана», а также в не меньшем количестве разработок, оказавшихся позднее в «корзине». Кроме того, К. Феоктистову довелось совершить полет в первом многоместном космическом корабле.

Предлагаем вам запись беседы с ними корреспондента нашего журнала В. Николаева. Мнения ученых по многим проблемам космонавтики различны, а уж какое из них убедительнее — судить вам.

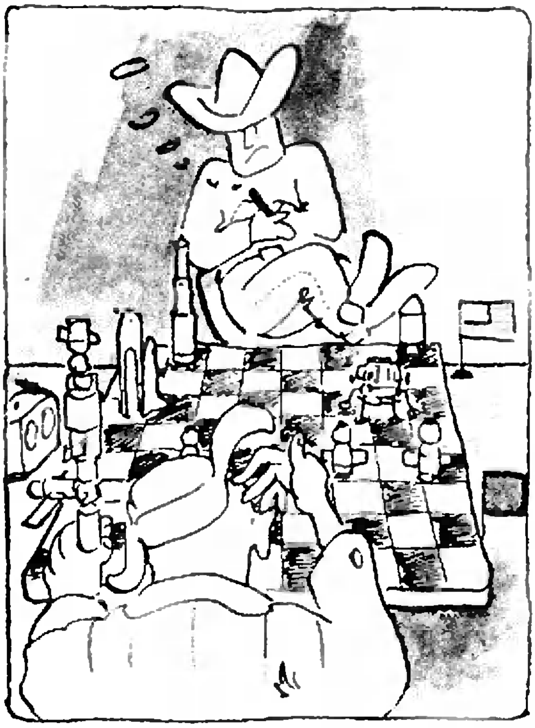
В. Н.: В начале космической эры не было недостатка в прогнозах развития космической техники. Этим увлекались и ученые, и журналисты. Жизнь показала, что в большинстве своем прогнозы были слишком оптимистичными. В чем вы видите причину срыва «графика»?

В. Б.: Если не рассматривать прогнозы, связанные с освоением дальнего космоса, то мне не кажется, что они были чересчур завышенными. Наоборот, в удовлетворении практических земных потребностей сделано даже больше того, о чем мечтал С. П. Королев и мы вместе с ним.

К. Ф.: Я затрудняюсь сказать, о чем мечтал С. П. (Королев.— *Прим. ред.*), думаю, он просто хотел быть везде первым. Это проглядывалось при принятии любых решений. Поэтому говорить о том, что у нас была программа со сроками и мы ее не выполнили, вряд ли правильно.

У нас была программа — высадки на Луну, и мы рассчитывали ее осуществить где-то на рубеже 60-х — 70-х годов. Мы всерьез задумывались о полете на Марс в начале 80-х, готовили эскизы. В этом смысле график сорван, но, полагаю, цели эти были надуманными, абсурдными. И ничего плохого в том, что они не реализованы, нет. С моей точки зрения, это было бы пустой тратой времени и средств.

Если же говорить вообще о развитии космической техники, то, несмотря на ужасную неорганизованность, продвижение очень значительное во всем мире, и у нас в том числе. Мы научились непрерывно жить на орбите в течение года, постоянно работает орбитальная станция, налажено ее снабжение грузами и топливом, регулярно сменяются экипажи... Другое дело (и это очень унизительно), что отдача всех пилотируемых



программ очень низка, почти равна нулю. Она существенна в некоторых американских предприятиях — спутниках связи, контроля за природной средой; великолепны результаты, полученные от работы автоматических астрофизических лабораторий. Но и у них, несмотря на огромные затраты, эффективность и лунной программы, и программы «Спейс Шаттл», с точки зрения возврата денег, приближается к нулю.

Поэтому, если говорить о срывах, то правильнее было бы сказать о неоправдавшихся надеждах на извлечение реальной пользы. Хотя сегодня хорошо видно, что извлекать ее не только можно, но и нужно.

В. Б.: Но вы говорите о тех программах, которые реализовывались после С. П. А это уже не начало освоения космического пространства. Сперва же был каскад открытий в области геофизики, атмосферы Земли, были интереснейшие наблюдения за прохождением электромагнитных волн различного диапазона через атмосферу.

Королев часто собирал нас и очень любил, когда мы, молодые, мечтали вместе с ним, прикидывали, чего можно достичь с помощью космической техники. Вот тогда и рождались проекты космических энергоисточников, спутников связи и т. д.

Сейчас, занимаясь проблемами качества жизни, я понимаю, что оно для любого организма — от живой клетки до человеческого общества в целом — зависит от пяти факторов: энергетики, информации, технологии, транспорта и экологии. Все эти составляющие зайдут в тупик уже в следующем веке, если земляне не будут развивать космонавтику. Причем космонавтику не игрушечную — в смысле ее практического использования, которая у нас сейчас развивается (впрочем, как и в США).

Однако в любом случае нам стесняться нечего. По качеству снимков земной поверхности наш космический аппарат «Ресурс» не отстает ни от американского «Лендсата», ни от французского «Спота». К тому же наши снимки намного дешевле. Другое дело, что мы никак не научимся извлекать из этого прибыль.

Мне трудно с вами согласиться и в отношении неразберихи. Еще при С. П. мы считали, что организация работ оставляет желать лучшего. На каждом собрании заявляли, что так работать нельзя, что это безобразие. Но по сравнению с тем, что сейчас происходит в космонавтике, да и во всей стране, это была чуть ли не идеальная организация. А уж дисциплина... Запуски очень часто были связаны с астрономическими датами, но неудач было немного.

В. Н.: Но были и другие прогнозы, например американских ученых-специалистов в области космонавтики, писателя А. Кларка. Они предполагали, что пилотируемые полеты к ближайшим планетам состоятся в 80-е годы, их колонизация — в начале следующего века, а межзвездные зонды будут отправлены в 2020 году...

В. Б.: Прогнозы — сложная штука. Это ведь научная дисциплина. Я тоже занимаюсь ими и довольно давно. Дело в том, кто их делает. П. Глоба тоже выступает с прогнозами в области космонавтики... Большинство из тех, кого вы имеете в виду, не являются экспертами, и свои прогнозы они делали на основании общих соображений, т. е на основании так называемого тренда. Они замечают какой-то рост и продолжают его с минимальным расширением.

В. Н.: А имелся ли у нас аналогичный прогноз?

В. Б.: У нас были прогнозы полета на Марс (где-то к 80-м годам). Они, конечно, не сбылись. В эти сроки осуществлен беспилотный полет с посадкой на планету. Кроме того, у нас составлялся прогноз по заданию Хрущева. Этот прогноз удивительно напоминал прогноз построения коммунистического общества. И судьба их похожа. Строить прогнозы на основании простой линейной экстраполяции нельзя.

К. Ф.: Стратегической программы освоения космоса вообще не было. Гнались, чтобы везде быть первыми, что достаточно неразумно. И я не согласен с тем, что у нас была эпоха очень быстрого и эффективного продвижения вперед. С точки зрения техники — да! Мы научились делать очень неплохие космические аппараты. Но насчет открытий в геофизике?.. Американцы открыли радиационные пояса, хотя мы их засекли первыми. Но не разобрались. Насчет атмосферы — я вообще не знаю, какие мы открытия сделали. По метеорам — в основном подтверждали существовавшие представления о метеорном облаке вокруг Земли. Конечно, кое-что было уточнено на базе экспериментов в последние 20 лет. По информационным системам — создали «Молнию», а затем и другие спутники связи, но все равно позорно отстали. У нас только 2000 каналов связи, хотя мы и начали первыми. У американцев на порядки больше.

Выбирать цели надо все-таки более обстоятельно, и при этом считать деньги. Такого рода прогнозы — в 70-е на Луну, в 80-е на Марс, а затем и к звездам,— несерьезны. На Луну надо лететь, если надеешься обнаружить там что-то очень ценное. Например, золото или какую-нибудь суперценную информацию. А если этого нет — то только обладая избытками богатства. То же самое и в отношении Марса.

В. Н.: В начале 70-х годов было принято решение о прекращении работ по советской пилотируемой лунной программе Н1—Л3. К этому времени прошла, притом удачно, отработка лунного корабля, предназначенного для доставки на Луну космонавта, успешно продолжались работы по орбитальному кораблю, который должен был доставить космонавтов на окололунную орбиту, а затем возвратить их на Землю, ну и, к сожалению, довольно неудачно проводились пуски ракеты-носителя Н1 — царь-ракеты, как ее называли в конструкторском бюро (по аналогии со всем известными, так никогда и не побывавшими в деле колоколом и пушкой). Н1 предназначалась для выведения кораблей на орбиту ИСЗ и разгона их к Луне.

Для большинства из работавших по этой программе принятое решение было едва ли не личной трагедией, душевной травмой (особенно для молодых инженеров), от которой многие так и не избавились. Как вы

полагаете, было ли оно оправданно, тем более, что была уверенность в том, что доработать ракету-носитель было вполне возможно?

В. Б.: Да, это было травмой не только для молодых. Я знаю, что М. К. Тихонравов (один из старейших «ракетчиков», начинавший работу вместе с Королевым.— *Прим. ред.*) просто плакал. Думаю, надо было закончить строительство хотя бы Н1.

К. Ф.: Принцип «начал дело — закончи» разумен, но в данном случае необоснованным было само начало работ. А уж заканчивать и повторять в худшем варианте то, что уже сделали американцы, причем в варианте заведомо более опасном (в отличие от программы «Аполлон», в советской программе на поверхность Луны высаживался один человек.— *Прим. ред.*), совершенно неправильно.

Что касается ракеты, то с инженерной точки зрения она была спроектирована грамотно. Конструктивная схема была здравая, элементарная. И в наших силах было ее довести до полета. Под этим углом, конечно, я должен был бы сказать, что зря ее не доделали. Но, оглядываясь на прошедшие десятилетия, я уже этого не скажу. Работы были прекращены где-то в 1973 году...

В. Б.: В 74-м, когда пришел Глушко (академик В. П. Глушко сменил на посту главного конструктора академика В. П. Мишина, в свою очередь сменившего С. П. Королева.— *Прим. ред.*).

К. Ф.: Тогда в жертву принесли Мишина. Прекращая такую дорогостоящую программу, кого-то надо было положить на жертвенный алтарь. Решили его... Он был такой видный человек, как раз для этой роли подходил. Способ хотя и нечестный, но характерный. (Смеется.)

Возвращаясь к ракете, могу сказать, что за два десятилетия так и не появились космические аппараты, которые нужно было бы выводить этой ракетой. Тогда зачем мы ее делали? А держать ракету 20 лет на всякий случай или делать какие-то драндулеты под нее, поскольку она есть,— это нелепо. Короче, сам заказ не был продуман.

В. Б.: Но и мы, и они считали: сначала — Луна, затем — Марс. А теперь мы все равно вернулись к машине («Энергия».— *Прим. ред.*), которая выводит те же самые 100 тонн.

В. Н.: Там, правда, было 95 тонн.

В. Б.: Плюс-минус 5 тонн, это одно и то же. И что качественно нового мы создали? По сути, это же мы могли иметь уже в 70-е годы.

К. Ф.: Вы доказываете, что Н1 надо было делать, потому что прошло 20 лет и мы все равно создали подобную. Но это совсем не доказательно, ведь и сегодня эти 100 тонн никому не нужны...

В. Н.: Тупиковых и даже бессмысленных программ было не одна, не две. Можно ли к их числу отнести программу «Буран»? Ведь уже почти четыре года прошло после первого полета, а о следующем ничего не слышно.

В. Б.: О «Шаттле» тоже говорят, что он не нужен, но американцы летают регулярно, увеличивая при этом эффективность.

К. Ф.: Что вы имеете в виду? У нас корабль «Союз», хоть и одноразовый, а стоит около 10 млн. рублей, да полет его — 20 млн. А полет «Шаттла» обходится в 300 млн. долларов. Что ж тут хорошего?

В. Б.: Возможность возвращать с орбиты дорогостоящие полезные нагрузки. Возвращать их и ремонтировать на Земле намного дешевле, чем делать это на орбите или запускать новые.

К. Ф.: 300 млн. туда, 300 млн. обратно и затем вновь 300 млн. туда. Проще новую запустить.

В. Б.: По их подсчетам не так...

К. Ф.: Да ничего они не считали. Уверяю вас, ничего! Они исходили из рекламных цифр, когда стоимость пуска называлась в 10 млн., а оказалось 300. Причем и это неполные цифры. Не учтены амортизация вложенных средств в создание самого «Шаттла», в строительство стартовой площадки и т. д. Так что эти цифры надо удвоить, а то и утроить.

Мы же повторили их глупость. Помните, вы мне рассказывали, как ходили к маршалу Гречко: «Вот американцы делают многоразовый корабль, а наши паразиты не хотят». Гречко послал их. Пошли к Устинову (А. А. Гречко был в то время министром обороны СССР, Д. Ф. Устинов — секретарем ЦК КПСС, отвечавшим за оборону.— *Прим. ред.*), по-моему, результат был тем же. Тогда начальство прорвалось к Брежневу и стало объяснять ему, что американцы смогут мимоходом Москву разбомбить, а наши не хотят паритета.

В. Б.: Да, аргументы были такими.

К. Ф.: И вот тогда Брежнев вызвал Устинова и Афанасьева (министр общего машиностроения СССР в те годы.— *Прим. ред.*), дал указание и дело покатилось.

В. Б.: Любопытный момент: когда Глушко пришел на фирму, он перечислил все аппараты, которыми нам предстояло заниматься. Их было довольно много. Единственное, чего мы не должны были, по словам Глушко, делать — это советский аналог «Шаттла». Не прошло, однако, и полутора лет, как многое было заброшено, а мы навалились на «Буран».

В. Н.: В чем вы видите сегодня достоинства «Бурана»?

В. Б.: В том, ради чего он и создавался — в способности возвращать на Землю грузы массой до 20 тонн.

К. Ф.: Но ведь пуск «Бурана» обходится тоже в 300 млн. А я не знаю ни одной полезной нагрузки с такой стоимостью.

В. Б.: У нас нет, а американцы «Шаттл» под программу СОИ делали.

В. Н.: Ну а «Буран» зачем нужен?

В. Б.: Сейчас главная проблема дальнейшего существования человечества связана с ограниченными ресурсами Земли. Выкопаем все изнутри, как дальше жить будем? Через 100—200 лет? Необходимо извлекать природные ресурсы из космоса. Как это делать? Надо увеличить массу, оснащенность. Следовательно, возрастет стоимость аппаратов. Французы, например, недавно запустили спутник-рекордсмен, стоимостью аж в 3,5 млрд. франков.

Очень дорогие приборы и для исследования дальнего космоса...

К. Ф.: А при чем здесь «Буран»?

В. Б.: «Буран» позволяет продлевать срок работы этих объектов. Есть, например, зеркала, которые очень быстро теряют свои характеристики.

К. Ф.: Но оптику можно и нужно беречь от загрязнения, закрывать блендами, крышками.

В. Б.: Существует еще испарение материалов в вакууме.

К. Ф.: На «Салюте» с этой проблемой справились, нанеся на зеркало телескопа повторное покрытие. Хотя определенные трудности, согласен, здесь имеются.

В. Н.: Итак, все-таки вы считаете, что «Буран» имеет будущее?

В. Б.: Считаю, что и «Шаттл», и «Буран» еще будут развиваться...

(Окончание следует)

Задачник „Кванта"

Задачи

M1336 — M1340, Ф1343 — Ф1347

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 июня 1992 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4 — 92» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1336» или «Ф1343». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M1336. Докажите для любых натуральных чисел m и n, больших 1, неравенство

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m+1}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n+1}}>1.$$

Л. Курляндчик

M1337. Выпуклая фигура на плоскости имеет 4 оси симметрии (углы между соседними осями составляют 45°). Через одну точку фигуры проведены параллельные этим осям прямые, которые делят фигуру на 8 частей, раскрашенных поочередно в голубой и розовый цвета (см. рис. 1). Докажите, что сумма площадей голубых частей равна сумме площадей розовых.

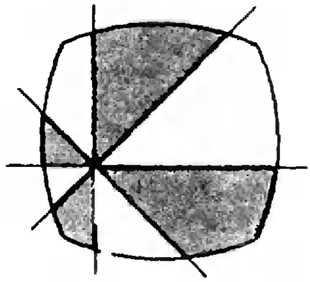


Рис. 1.

В. Произволов

M1338. Укажите способ вычисления 2^n-го числа f_{2^n} последовательности Фибоначчи $f_1=1$, $f_2=1$, $f_3=2$, $f_{k+1}=f_k+f_{k-1}$ $(k>1)$ не более чем за $6n$ операций сложения, умножения и вычитания.

В. Быковский

M1339. Дан треугольник ABC. Пусть S — его площадь, γ — угол ACB, а l — длина биссектрисы, проведенной из вершины C.

а) Докажите, что $S\geqslant l^2\cdot\operatorname{tg}(\gamma/2)$.

б) Для каких треугольников ABC выполняется равенство?

Н. Немировская

M1340. На красной окружности произвольным образом отмечено $N\geqslant 4$ различных синих точек. Начиная с какой-нибудь из них будем перекрашивать каждую вторую синюю точку (по часовой стрелке) в красный цвет, соединяя ее при этом хордой со следующей перекрашиваемой точкой, и т. д., пока на окружности не останется синих точек. На сколько частей распадается внутренность окружности, если ее разрезать по всем проведенным линиям, если

а) $N=32$? б) $N=1992$?

С. Дориченко

Задачник „Кванта"

Ф1343. Лиса видит зайца на расстоянии $l=160$ м. Заяц бежит по прямой с постоянной скоростью $v_1=6$ м/с. Скорость лисы равна $v_2=10$ м/с и в каждый момент направлена по прямой, соединяющей лису и зайца. В начальный момент скорость зайца перпендикулярна этой прямой. Где произойдет встреча? На сколько секунд раньше она могла бы произойти, если бы лиса была умнее?

Хоанг Куи, Вьетнам

Ф1344*. В теплоизолированном цилиндрическом сосуде под поршнем находится сильно разреженный гелий при температуре $T_0=100$ К. Поршень очень медленно отодвигают на некоторое расстояние, после чего в сосуде устанавливается температура $T_1=99$ К. Какая температура установится в сосуде, если поршень передвинуть очень быстро? Что такое «очень быстро» в этом случае? Сделайте оценку такой скорости передвижения поршня, при которой изменение температуры составит $\Delta T=0{,}5$ К.

З. Рафаилов

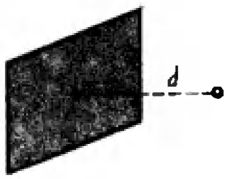


Рис. 2.

Ф1345. На расстоянии $d=10$ см от точечного заряда находится равномерно заряженная квадратная пластинка размером 20×20 см, как показано на рисунке 2 (заряд расположен на продолжении нормали к центру пластинки). Во сколько раз изменится сила взаимодействия между пластинкой и зарядом, если расстояние d увеличить в 100 раз?

Д. Александров

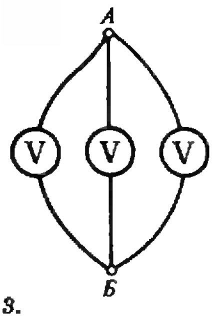


Рис. 3.

Ф1346. Три одинаковых вольтметра подключены длинными проводами к точкам A и Б, как показано на рисунке 3. Система находится в медленно изменяющемся магнитном поле. В некоторый момент показания крайних вольтметров составляют $U_1=0{,}35$ В и $U_3=0{,}1$ В. Что показывает средний вольтметр в это время?

Д. Александров

Ф1347. Тонкая сферическая линза из стекла имеет толщину $d=3$ мм и диаметр $D=4$ см. Линзу плашмя положили на поверхность воды, наполовину погрузив в нее. При этом изображение Солнца, стоящего в зените, оказалось на глубине $h_1=17{,}5$ см. Когда линзу «притопили» другой стороной, получили $h_2=13{,}5$ см. Чему равны радиусы кривизны поверхностей линзы? Коэффициент преломления воды $n=1{,}33$.

А. Зильберман

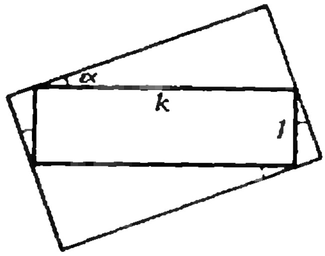
Задачник „Кванта"

Решения задач

М1306 — М1309, Ф1323 — Ф1327

М1306. Назовем вытянутостью прямоугольника отношение большей стороны к меньшей. Докажите, что вытянутость прямоугольника В, вписанного в другой прямоугольник А (так, что вершины В лежат по одной на сторонах прямоугольника А), не меньше вытянутости А.

Пусть α — угол между бо́льшими сторонами прямоугольников A и B (см. рисунок), стороны внутреннего прямоугольника B равны k и 1, причем $k>1$, так что вытянутость B равна k. Тогда стороны внешнего



прямоугольника A равны $k\cos\alpha+\sin\alpha$ и $\cos\alpha+k\sin\alpha$ (причем первая больше или равна второй, если $\cos\alpha\geqslant\sin\alpha$, т. е. $\alpha\leqslant\pi/4$, что мы и будем предполагать). При этом вытянутость B равна

$$\frac{k\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha+k\sin\alpha}\leqslant k,$$

поскольку $k^2\sin\alpha>\sin\alpha$.

Н. Васильев

М1307. Докажите, что при любом натуральном n число $2^{2^n}+2^{2^{n-1}}+1$ имеет не менее n различных простых множителей.

Воспользуемся следующим разложением на множители:

$$x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+1-x)(x^2+1+x).$$

Полагая $x=2^{2^{n-1}}$, получаем:

$$2^{2^{n+1}}+2^{2^n}+1=(2^{2^n}-2^{2^{n-1}}+1)(2^{2^n}+2^{2^{n-1}}+1).$$

Нетрудно доказать взаимную простоту чисел $2^{2^n}-2^{2^{n-1}}+1$ и $2^{2^n}+2^{2^{n-1}}+1$ при любом натуральном n: если бы они имели общий (нечетный) множитель $q>1$, то их разность $2^{2^{n-1}+1}$ должна была бы иметь тот же множитель.

Предполагая доказанным, что число $2^{2^n}+2^{2^{n-1}}+1$ имеет не менее n различных простых множителей, получаем по индукции, что $2^{2^{n+1}}+2^{2^n}+1$ имеет их не менее $n+1$.

Замечания. 1) При $n>4$ число имеет не менее $(n+1)$ различных простых множителей, поскольку

$$2^{2^4}-2^{2^3}+1=97\cdot 673.$$

2) Из утверждения задачи вытекает бесконечность количества различных простых чисел.

Н. Васильев, В. Сендеров

Задачник „Кванта"

М1308. *На плоскости даны три прямые. Найдите множество центров правильных треугольников, вершины которых лежат на данных прямых (по одной на каждой из трех прямых). Исследуйте все случаи взаимного расположения данных прямых.*

Сначала решим такую задачу на построение: «Даны две прямые b и c и точка A. Построить равносторонний треугольник, одна из вершин которого находится в точке A, а две другие — на прямых b и c (по одной на каждой из прямых)». Решение этой задачи несложно. Пусть такой треугольник ABC построен (рис. 1), тогда, если повернуть прямую b вокруг точки A на $60°$, то точка B перейдет в точку C, следовательно, точка C может быть получена как точка пересечения прямой c с прямой b_1, возникшей после поворота прямой b на угол $60°$ вокруг точки A. После этого точка B находится мгновенно поворотом точки C на угол $60°$ в обратную сторону.

Если вращать прямую b в другую сторону вокруг точки A, то получим другую точку C_1 и новый треугольник AB_1C_1. Следует заметить, что в том случае, когда угол между прямыми b и c равен $60°$, одна из повернутых прямых окажется параллельной прямой c и искомый треугольник оказывается единственным, за исключением того случая, когда точка A лежит на биссектрисе угла в $120°$ между прямыми b и c. В этом случае параллельные прямые совпадут и в качестве точки C можно брать любую точку на прямой c, т. е. требуемых треугольников будет бесконечно много.

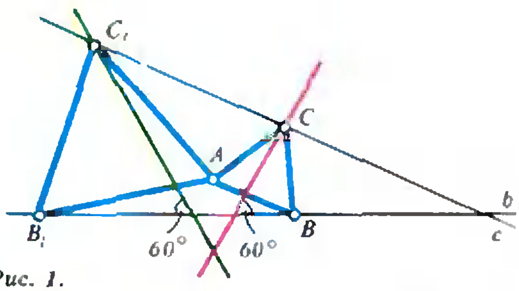


Рис. 1.

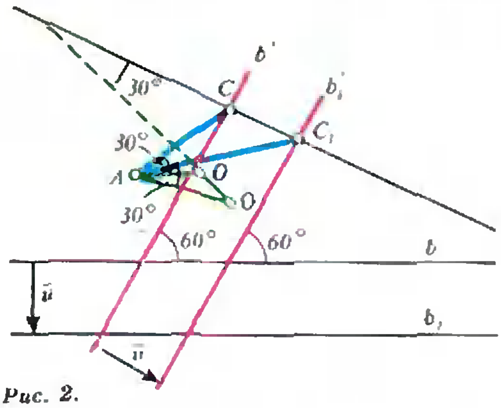


Рис. 2.

Теперь начнем двигать точку A вдоль некоторой прямой a и будем следить за тем, как перемещается при этом центр тяжести соответствующего равностороннего треугольника. Но сначала докажем лемму.

Лемма. *Пусть даны прямые b и c и точка A. Пусть, далее, ABC — равносторонний треугольник, вершина B которого лежит на прямой b, а вершина C — на прямой c. Точка O — центр треугольника ABC. Если параллельно передвинуть прямую b на вектор $\vec{u}$ в прямую b_1, то центр O_1 равностороннего треугольника AB_1C_1, у которого вершина B_1 лежит на прямой b_1, а вершина C_1 — на прямой c, может быть получен параллельным переносом точки O на вектор q, направленный под углом $30°$ к прямой c и пропорциональный модулю вектора $\vec{u}$.*

Доказательство. Повернем прямые b и b_1 на $60°$ вокруг точки A (рис. 2). Они пересекут прямую c в точках C и C_1.

Задачник „Кванта"

Отметим центры равносторонних треугольников — точки O и O_1 и заметим, что отрезок AO повернут относительно отрезка AC на угол 30° и в $\sqrt{3}$ меньше его; аналогично отрезок AO_1 повернут относительно отрезка AC_1 на 30° и также меньше его в $\sqrt{3}$ раза. Следовательно, и отрезок OO_1 повернут на 30° относительно отрезка CC_1 и в $\sqrt{3}$ раза меньше его. Но модуль вектора $\vec{w}=\overrightarrow{CC_1}$ пропорционален модулю вектора $\vec{v}$, на который сдвинуты повернутые прямые, а тот, в свою очередь, равен модулю вектора $\vec{u}$, а так как модуль вектора $\vec{q}=\overrightarrow{OO_1}$ пропорционален модулю вектора w, то он пропорционален и модулю вектора u, сам же вектор q, как мы уже отметили, направлен под углом 30° к вектору w, а следовательно, и к прямой c. Осталось заметить, что при этом и центр второго равностороннего треугольника передвинется на некоторый вектор q_1, модуль которого также пропорционален модулю вектора u (но с другим коэффициентом пропорциональности), направленный под углом 30° к прямой c и под углом 120° к вектору q.

Теперь мы готовы к тому, чтобы проследить перемещение центра равностороннего треугольника при движении точки A вдоль некоторой прямой a. Пусть A_1 — другая точка на прямой a. Проведем прямую через точки A и M — точку пересечения прямых b и c (рис. 3) и параллельную ей прямую через точку A_1. Отметим точку M_1 пересечения последней прямой с прямой c. Проведем еще прямую b_1 через точку M_1 параллельно прямой b. Обозначим через P точку пересечения прямых a и c, а через N и N_1 — точки пересечения прямой a с прямыми b и b_1. Не трудно увидеть, что смещение $\vec{u}$ прямой b в прямую b_1 пропорционально модулю вектора $\overrightarrow{AA_1}$. Кроме того, из подобия треугольников NPM и N_1PM_1 следует, что смещение центра равностороннего треугольника ABC в центр равностороннего треугольника $A_1B_1C_1$

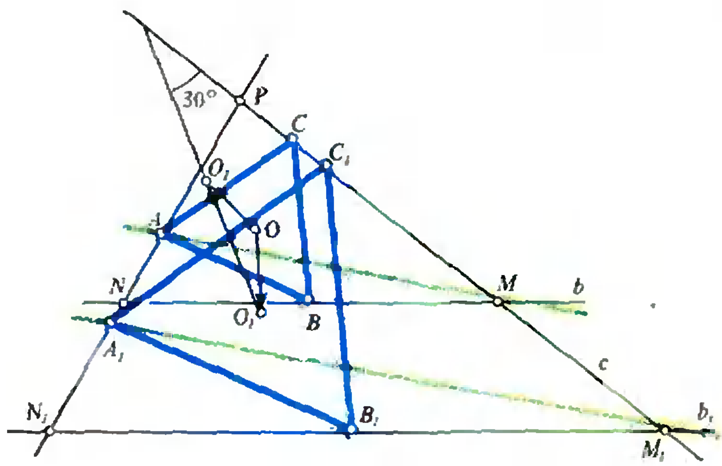


Рис. 3.

также пропорционально модулю вектора $\overrightarrow{AA_1}$ и направлено по прямой PO.

Теперь воспользуемся леммой. Если прямую b_1 параллельно перенести в прямую b, то точка O_1 перейдет в точку O_1', причем вектор $\overrightarrow{O_1O_1'}$ составляет угол 30° с прямой c, а его модуль пропорционален модулю вектора $\vec{u}$, а следовательно, и вектора $\overrightarrow{AA_1}$. Но точка O_1' и есть точка, в которую перейдет точка O, если вместо точки A взять точку A_1. Таким образом, общее смещение точки O в точку O_1' можно представить как $\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1O_1'}$. Вектор $\overrightarrow{OO_1}$ направлен по прямой PO, и его модуль пропорционален модулю вектора $\overrightarrow{AA_1}$, следовательно, $\overrightarrow{OO_1}=\overrightarrow{PO}\cdot k_1|\overrightarrow{AA_1}|$, аналогично вектор $\overrightarrow{O_1O_1'}$ сонаправлен с некоторым вектором $\vec{q}$, составляющим 30° с прямой c, и его модуль пропорционален модулю вектора $\overrightarrow{AA_1}$, т. е. $\overrightarrow{O_1O_1'}=\vec{q}\cdot k_2\cdot|\overrightarrow{AA_1}|$. В результате получаем, что вектор $\overrightarrow{OO_1}=|\overrightarrow{AA_1}|(k_1\cdot\overrightarrow{PO}+k_2\vec{q})$. Так как векторы $\overrightarrow{PO}$ и $\vec{q}$ постоянны, то перемещение точки O будет проходить по прямой, параллельной вектору $k_1\overrightarrow{PO}+k_2\vec{q}$. А это значит, что искомое множество точек — прямая. Если мы проведем те же рассуждения со вторым треугольником (рис. 1), то получим другую прямую.

Заметим, что эти прямые не пересекаются. Действительно, если бы существовала их общая точка X, то при описанном в лемме перемещении одной из прямых, она, с одной стороны, должна была переместиться на вектор $\vec{q}$, а с другой — на вектор $\vec{q}_1$, что невозможно, поскольку эти векторы имеют разные направления.

Итак, в случае если угол между прямыми не равен 60°, искомое множество точек есть пара параллельных прямых, правда, если все три прямые пересекаются в одной точке или параллельны, то эти прямые сольются в одну.

Осталось рассмотреть случай, когда хотя бы один из углов между прямыми равен 60°. В этом случае, как уже было замечено, для точки A на прямой a можно построить только один искомый треугольник с вершиной в точке A. Поэтому, казалось бы, искомое множество будет состоять из одной прямой. (Заметим, что она в этом случае является биссектрисой угла в 60° между прямыми b и c). Однако на прямой a имеется особенная точка A^* — точка ее пересечения с биссектрисой угла в 120° между прямыми b и c. Для этой точки A^* помимо равностороннего треугольника из указанного семейства (заметим, что его центр лежит в точке P пересечения прямых b и c) оказывается еще бесконечно много равносторонних треугольников A^*BC. Действительно, как нетрудно проверить, любой угол в 60° с вершиной в точке A^* пересекает прямые b и c в точках B и C, образующих с точкой A^* равносторонний треугольник. Множество центров таких треугольников является срединным перпендикуляром к отрезку PA^* и, следовательно, будет прямой, параллельной уже найденной ранее.

Осталось рассмотреть случай, когда все углы между заданными прямыми равны по 60°. В этом случае все равносторонние треугольники с вершинами на этих прямых имеют один и тот же центр — центр треугольника, образованного заданными прямыми. Если к тому же все три прямые пересекаются в одной точке, то тогда любая точка A на прямой a обладает свойством точки A^*, а поэтому искомым множеством будет множество всех точек плоскости.

А. Савин

М1309. *На плоскости задан треугольник. Для произвольной точки M плоскости определяется 1-й «залп»: множество $H_1(M)$ из трех точек — середин отрезков, соединяющих M с вершинами треугольника, затем 2-й залп: множество $H_2(M)$ из 9 точек — середин отрезков, соединяющих точки $H_1(M)$ с вершинами треугольника, и так далее (k-й залп $H_k(M)$ состоит из 3^k точек — середин отрезков, соединяющих точки $H_{k-1}(M)$ с вершинами треугольника). Докажите, что для любого $\varepsilon>0$ для данного треугольника можно указать фигуру площади меньше ε такую, что для любой точки M найдется номер $k=k(M, \varepsilon)$, начиная с которого весь «салют» $H_k(M)$, $H_{k+1}(M)$, ... не будет выходить за пределы этой фигуры.*

Искомой фигурой может служить «дырявый ковер», состоящий из мелких треугольников, подобных данному и расположенных внутри него и в узкой полоске вокруг него. Покажем, как он строится.

Пусть O — центр окружности, вписанной в данный треугольник T, $T(d)$ — треугольник, гомотетичный T с коэффициентом $d+1$ и центром O, и T^* — некоторый фиксированный треугольник такого вида, содержащий T, скажем, $T^*=T(O,1)$. Назовем объединение 3-х треугольников, гомотетичных T^* с коэффициентом $1/2$ и центрами в вершинах T (рис. 1), ковром 1-го ранга; объединение фигур, получающихся из ковра 1-го ранга гомотетиями с коэффициентом $1/2$ и центрами в вершинах T — объединение 9-ти треугольников, гомотетичных T^* с коэффициентом $1/4$ (рис. 2) — ковром 2-го ранга, и так далее: ковер n-го ранга — объединение фигур, получающихся из ковра $(n-1)$-го ранга гомотетиями с коэффициентом $1/2$ и центрами в вершинах T, т. е. объединение 3^n треугольников, гомотетичных T^* с коэффициентом $1/2^n$. Площадь ковра меньше $(3/4)^n$ площади треугольника T^* и при достаточно большом $n=n(\varepsilon)$ меньше ε.

Для каждой точки M можно выбрать $d>0$ так, что M покрывается треугольником $T(d)$. Заметим, что образ треугольника $T(d)$, при гомотетии с коэффициентом $1/2$ и центром в любой из вершин данного треугольника T — треугольник, лежащий в пределах треугольника $T(d/2)$ (рис. 3; точки, изображенные голубыми кружками — образы вершин внешнего треугольника $T(d)$ при таких гомотетиях с центрами в вершинах T). Итак, если M — любая точка треугольника $T(d)$, то все точки происходящего из нее первого залпа лежат в пределах треугольника $T(d/2)$;

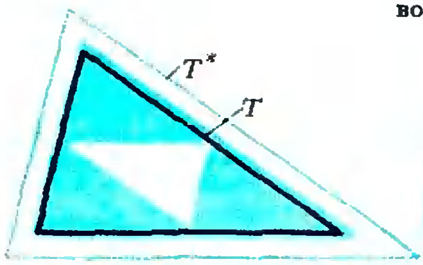


Рис. 1.

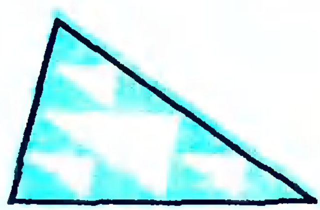


Рис. 2.

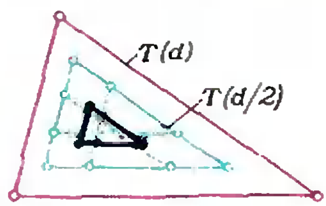


Рис. 3.

отсюда по индукции следует, что все точки салюта, начиная с m-го залпа $H_m(M)$, лежат в пределах треугольника $T(d/2^m)$. Поэтому для каждой точки M можно выбрать m так, что ее m-й салют попадает внутрь треугольника T^*.

Все происходящие в дальнейшем из нее залпы $H_{m+n}(M)$ также лежат внутри T^*. Более того, точки $(m+1)$-го залпа попадут внутрь ковра 1-го ранга; точки $(m+2)$-го залпа — внутрь ковра 2-го ранга и так далее; точки $(m+n)$-го попадут внутрь ковра n-го ранга. Ясно, что при достаточно большом $k=m(M)+n(\varepsilon)$ (зависящем от точки M и от ε) весь салют, начиная с k-го залпа, попадает в этот ковер площади меньшей ε.

А. Белов, Н. Васильев

Ф1323. *Тело немного сместили из положения неустойчивого равновесия, и оно поехало. При этом скорость удаления от начальной точки возрастает по закону $v(x)=A\sqrt{x}$, где x — расстояние до начальной точки, A — постоянный коэффициент. Через какое время тело окажется на расстоянии L?*

Обычно скорость задают как функцию времени t, а в нашем случае она задана как функция координаты x. Такой вид непривычен, но, может быть, это какое-то хорошо известное движение и получить ответ будет легко? Давайте попробуем.

Зададим очень малый промежуток времени Δt и найдем ускорение a тела:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{\Delta v}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Ясно, что первый множитель — это просто производная функции $v(x)=A\sqrt{x}$:

$$\frac{\Delta v}{\Delta x}=\frac{1}{2}A\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{A}{2\sqrt{x}}.$$

Второй множитель — это скорость тела:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=v(x)=A\sqrt{x}.$$

Таким образом,

$$a=\frac{A}{2\sqrt{x}}A\sqrt{x}=\frac{A^2}{2}=\text{const}.$$

Это означает, что тело движется просто равноускоренно и окажется на расстоянии L от положения равновесия через время

$$t=\sqrt{\frac{2L}{a}}=\sqrt{\frac{2L}{A^2/2}}=\frac{2}{A}\sqrt{L}.$$

З. Рафаилов

Ф1324. *В кастрюлю-скороварку налили немного воды, закрыли герметично и поставили на огонь. К тому моменту, когда вся вода испарилась, температура кастрюли оказалась 115 °С, а давление внутри — 3 ат-*

В начальном состоянии можно пренебречь давлением паров воды и объемом, который она занимает, и считать,что воздух при атмосферном давлении $p_0=1$ атм и температуре $T_0=293$ К занимает весь объем кастрюли V. В конечном состоянии давление в кастрюле $3p_0$ складывается из давления воздуха при температуре $T=388$ К и давления паров воды, испарившейся к этому моменту полностью. Если обозначить ρ, v, M соответ-

мосферы. Какую часть объема вначале занимала вода? Начальная температура 20 °С.

Задачник „Кванта"

ственно плотность, начальный объем и молярную массу воды ($\rho=10^3$ кг/м^3, М=18 г/моль), то для давления воздуха $p_в$ и давления пара $p_п$ в конечном состоянии можно записать:

$$p_в=p_0T/T_0,\ p_п=\rho vRT/(MV).$$

По условию

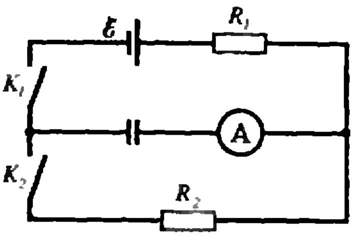
$$p_в+p_п=3p_0.$$

Из этих формул окончательно находим отношение объема воды к объему кастрюли:

$$\frac{v}{V}=\frac{p_0M(3-T/T_0)}{\rho RT}\approx 10^{-3}.$$

А. Шеронов

***Ф1325.** В схеме, изображенной на рисунке, ключи K_1 и K_2 в начальный момент разомкнуты. Через некоторое время после замыкания ключа K_1 ток через амперметр составляет $I=1$ мкА. В этот момент замыкают ключ K_2. Каким станет ток через амперметр сразу после этого? ЭДС батареи $\mathscr{E}=100$ В, сопротивления резисторов $R_1=50$ МОм, $R_2=100$ МОм. Конденсатор, батарею, амперметр считайте идеальными.*



В тот момент, когда ток через амперметр составляет $I=1$ мкА, напряжение на конденсаторе равно

$$U=\mathscr{E}-IR_1=50\text{ В}.$$

Сразу после замыкания ключа K_2 это напряжение не изменится (оно будет меняться постепенно). Не изменится сразу и ток через резистор R_1, который определяется разностью ЭДС батареи и напряжения на конденсаторе:

$$I_1=I=1\text{ мкА}.$$

А вот ток через резистор R_2 сразу после замыкания ключа K_2 составит

$$I_2=\frac{U}{R_2}=0{,}5\text{ мкА}.$$

Таким образом, ток через амперметр будет равен

$$I'=I_1-I_2=0{,}5\text{ мкА}.$$

Заметим, что емкость конденсатора в решении не фигурирует. Важно только, чтобы она была достаточно большой.

В. Можаев

Примечание редакции. В условии задачи (см. «Квант», 1991, № 12) по вине редакции была допущена опечатка — приведено неправильное значение тока I. Подумайте, сильно ли изменится ответ, если в условии задать другой ток: $I=0{,}2$ мкА.

***Ф1326.** Радиолюбителям хорошо известна схема, приведенная на рисунке 1. Считая диоды и конденсаторы идеальными, определите показания высокоомного вольтметра при напряжении сети 220 В. Для чего может понадобиться такая схема?*

Для начала разберемся с простой схемой, содержащей диод D и конденсатор C (рис. 2). К точкам A и $Б$ подключим источник переменного напряжения $U=U_0\cos\omega t$. Конденсатор C в этой схеме зарядится до напряжения U_0, после чего диод будет закрыт навсегда. Впрочем, если мы отнимем от конденсатора некоторый заряд (например, подключив параллельно ему резистор с большим сопротивлением R), то диод будет периодически открываться, восполняя уход заряда. Известно простое условие, при выполнении кото-

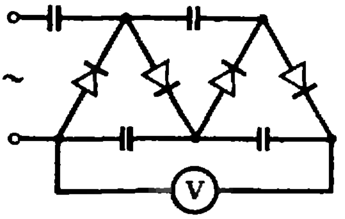


Рис. 1.

рого заряд конденсатора изменяется незначительно:

$$RC \gg T = 2\pi/\omega.$$

Рассмотренная схема — это обычный однополупериодный выпрямитель. Дополним его еще одной парой «конденсатор — диод» (рис. 3; обратите внимание — точки A и $Б$ по сравнению с рисунком 2 поменялись местами). Напряжение между точками A и B равно сумме входного напряжения $U = U_0 \cos \omega t$ и напряжеиия на конденсаторе C_1, которое равно U_0. Таким образом, диод D_2 окончательно закроется, когда конденсатор C_2 зарядится до максимального значения этого суммарного напряжения, т. е. до величины $2U_0$. Это произойдет не сразу — каждый раз, подзаряжаясь, конденсатор C_2 отнимает иекоторый заряд у C_1, а диод D_1 восполняет потерю, но со временем порции становятся все меньше и меньше, так что $2U_0$ — это предельный результат. Если теперь параллельно C_2 подключить резистор R (чтобы использовать полученное напряжение $2U_0$), процесс подкачки зарядов в C_1 и C_2 станет продолжаться беспрерывно, а условие малости пульсаций напряжения $2U_0$ придется выполнять с бóльшим запасом.

Перед тем как перейти к основной схеме, заметим, что добавлеиие к переменному напряженню постоянного не изменит напряжения на C_2 — оно по-прежнему будет равно «размаху» приложенного к $AБ$ напряжения (в литературе используют ясный термин «напряжение от пика до пика») — убедитесь в этом самостоятельно.

Легко увидеть, что схема в условии задачи состоит из двух схем, изображенных на рисунке 3. На рисунке 4

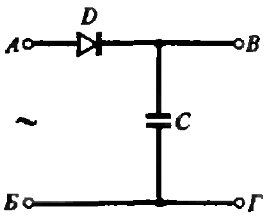


Рис. 2.

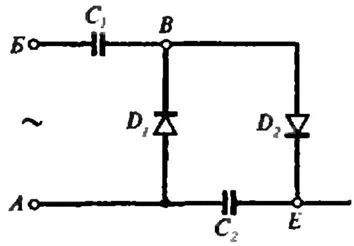


Рис. 3.

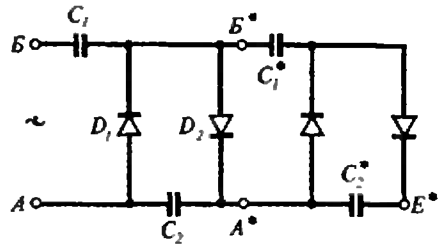


Рис. 4.

мы нарисовали ее так, чтобы это стало очевидно. Ясно, что конденсатор C_2^* зарядится до напряжения $2U_0$, а полное напряжение между точками A и E^* составит $4U_0$ (конденсаторы C_1 и C_2 будем считать заряженными до U_0 и $2U_0$ соответственно, тогда переменное напряжение между точками A^* и $Б^*$ по-прежнему составит $U_0 \cos \omega t$). Вольтметр в нашем случае покажет

$$U = 220 \cdot \sqrt{2} \cdot 4 \text{ В} \approx 1240 \text{ В}.$$

Схема эта имеет специальиое название — «выпрямитель с умножением напряжения». Ячеек типа изображенных на рисунке 3 можно включить и побольше — для получения более высокого коэффициента умножения. Кстати, несколько таких ячеек из конденсаторов и диодов, залитых эпоксидной смолой в монолитный блок, представляют собой дорогой и дефицитный «умножитель напряжения» для современных телевизоров (это не самая надежная деталь в телевизоре — именно поэтому ее название многие хорошо знают).

А нельзя ли обойтись обычным выпрямителем и не устраивать довольно сложную схему? В принципе, можно. Но обмотка трансформатора, дающего переменное напряжение, должна будет содержать в несколько раз большее количество витков, а конденсатор и диод нужно будет выбирать в расчете на то, что они должны «с запасом» выдерживать полное значение выпрямленного напряжения (а диод — даже в 2 раза больше). В схеме умножителя можно использовать конденсаторы и диоды попроще (и подешевле!) — ведь эту схему применяют именно для высоких (тысячи вольт) напряжений в телевизорах, счетчиках Гейгера и т. п.

А. Сашин

Ф1327. При нормальном падении света на бипризму Френеля (рис. 1) пучки света, преломленные каждой из половинок бипризмы, интерферируют между собой. На каком максимальном расстоянии от бипризмы еще будет наблюдаться интерференционная картина? Расстояние между вершинами бипризмы $S=4$ см, показатель преломления материала бипризмы $n=1{,}4$, преломляющий угол $\alpha=0{,}001$ рад.

Рассмотрим прохождение луча через призму (рис. 2). На ее задней грани будет происходить преломление луча по закону

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{1}{n}.$$

Отсюда получаем

$$\sin\beta=n\sin\alpha.$$

Но так как угол α очень мал, можно записать

$$\beta\approx n\alpha.$$

Из построения видно, что

$$\gamma=\beta-\alpha\approx(n-1)\,\alpha.$$

Интерференционная картина будет наблюдаться в области перекрытия преломленных пучков от обеих половинок бипризмы (рис. 3). Максимальное расстояние, на котором это еще происходит, равно

$$L=\frac{S/2}{\operatorname{tg}\gamma}\approx\frac{S}{2\gamma}\approx\frac{S}{2\,(n-1)\,\alpha}\approx 50\text{ м}.$$

В. Дерябкин

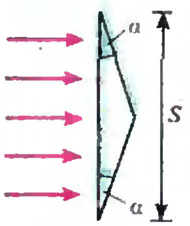


Рис. 1.

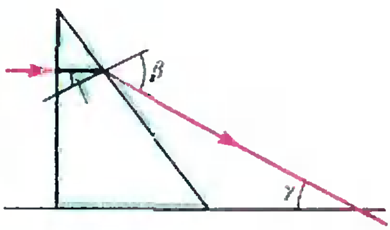


Рис. 2.

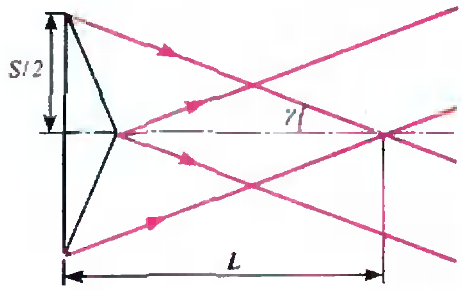


Рис. 3.

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1291—М1305, Ф1298—Ф1312, справились с задачами М1293, М1296—М1300, М1304, М1305. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

О. Авдеев (Днепропетровск) **02**; *Ю. Алексеенко* (Киев) **92**; *А. Алиев* (Баку) **92**; *Д. Антипов* (Киев) **94, 02**; *А. Ахмедов* (Баку) **91, 92, 94, 95, 01, 03**; *Ю. Белоус* (Нижний Тагил) **91, 92, 95**; *Г. Берколайко* (Воронеж) **94**; *А. Бириан* (Одесса) **95**; *А. Бородин* (Донецк) **91, 92, 94, 95, 01—03**; *В. Бринюк* (Донецк) **91, 92, 94, 95**; *О. Бурд* (Киев) **91, 92, 95, 02, 03**; *Б. Вайнер* (Киев) **91, 92, 94, 95, 01—03**; *А. Васильев* (п. Даниловка Киевской обл.) **92**; *И. Винарчук* (Киев) **92, 94, 95**; *И. Воробей* (Жуковский) **92, 95**; *О. Гайдай* (Львов) **91, 02, 03**; *С. Гетун* (Киев) **91, 92, 94, 95, 02, 03**; *И. Горбачев* (Бобруйск) **91, 92, 94, 95**; *Ю. Горенбургов* (Санкт-Петербург) **91, 95**; *П. Григорьев* (Самара) **95**; *Д. Дудко* (Киев) **91, 92, 01, 03**; *В. Замятин* (Киров) **92, 94, 02**; *С. Зиновьев* (Хврьков) **91, 92, 94, 95, 01**; *И. Изместьев* (п. Суна Кировской обл.) **01—03**; *А. Ильяя* (Новгород) **94**; *С. Иоффе* (п. Черноголовка Московской обл.) **92, 94, 95, 01—03**; *В. Караман* (Старая Русса) **95**; *Т. Карнаух* (Киев) **91, 94, 01, 03**; *Р. Касымов* (Ангрен) **91**; *С. Киришер* (Одесса) **92**; *С. Климов* (Ижевск) **91, 92, 95, 01—03**; *Н. Когабаев* (Усть-Каменогорск) **95, 02**; *П. Кожевников* (Калуга) **91, 92, 94, 95, 01, 03**; *А. Корниенко* (Днепропетровск) **92, 94, 95, 01, 03**; *С. Кузьмич* (Минск) **91, 92, 94, 95, 01—03**; *А. Кукушкин* (Москва) **91, 93, 95, 01, 03**; *Я. Лавренюк* (Киев) **91, 92, 94, 01—03**; *А. Лапунов* (Киров) **03**; *П. Левин* (Москва) **92, 02, 03**; *Н. Лисицын* (Ижевск) **92, 94, 95, 01—03**; *М. Магеррамов* (Баку) **03**; *Э. Магеррамов* (Баку) **92**; *Д. Макей* (Гродно) **91, 92, 95**; *К. Мальков* (Киров) **91, 03**; *Н. Мамедов* (Баку) **91, 95**; *М. Мокляк* (Кременчуг) **95**; *А. Монахов* (Глазов) **94**; *А. Мороз* (Днепропетровск) **94**; *А. Мотрунич* (Ужгород) **91, 95, 01**; *В. Мустафаев* (Баку) **03**; *А. Назарян* (Тбилиси) **94**; *Б. Насыпанный* (Гайворон) **91, 95, 02, 03**; *С. Одрибец* (Переяслав-Хмельницкий) **91, 94, 95, 01, 03**; *С. Павличков* (Евпатория) **91, 94, 95**; *Д. Панов* (Москва) **91, 92, 94, 02**; *Е. Перельман* (Санкт-Петербург) **94**; *А. Петросян* (Ереван) **91, 92, 94**; *В. Пиковский* (Киев) **91, 92, 94, 95, 02, 03**; *Е. Порошенко* (Алма-Ата) **94**; *Г. Сироткин* (Харьков) **91, 92, 95**; *А. Солодушкин* (Степногорск) **91, 94, 95, 01, 03**; *И. Сороко* (Минск) **91, 92**; *Д. Сухов* (Энергодар) **95**; *А. Таратин* (Северодвинск) **01**; *А. Теплинский* (Каменец-Подольский) **92, 94, 01, 03**; *М. Тройников* (Ижевск) **92**; *Б. Турешбаев* (Кзыл-Орда) **01**; *Е. Турчин* (Днепропетровск) **92, 95, 01, 03**; *А. Уханов* (Евпатория) **91, 01**; *К. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) **91, 92, 95, 01—03**; *Д. Хайкис* (Ижевск) **91, 92, 94, 95, 01—03**; *М. Хасин* (Донецк) **91, 92, 94, 02**; *К. Хвенкин* (Минск) **91, 92, 94, 95, 01—03**; *Ю. Ходзинский* (Киев) **91, 92, 94, 95, 01—03**; *А. Шамрук* (д. Новый Двор Гродненской обл.) **95, 03**; *В. Яновский* (Харьков) **91, 92, 94, 95, 01—03**.

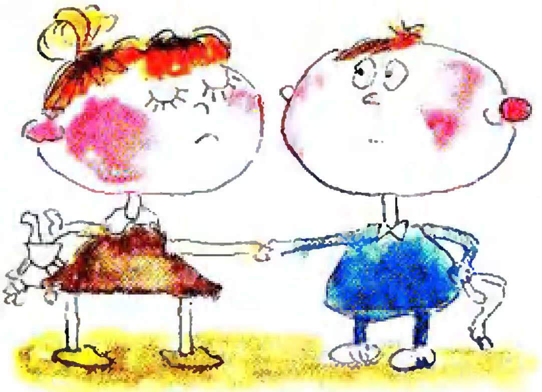
Физика

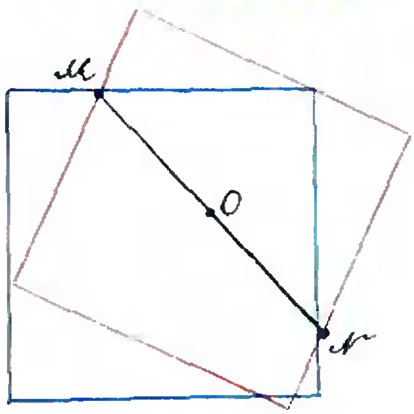
М. Аллаберганов (Ургенч) **08, 11**; *Д. Антипов* (Киев) **02, 04, 06, 09—11**; *Д. Апальков* (Харьков) **98, 02, 08, 11**; *Ю. Арбузов* (Москва) **08, 11**; *З. Аскоров* (Ургенч) **08, 11**; *Я. Бабкин* (Киев) **03, 08**; *И. Бейбалиев* (с. Чиликар Хивского р-на) **04**; *О. Белиловский* (Алма-Ата) **08—11**; *В. Боган* (Донецк) **08, 11**; *Д. Боднарь* (Винница) **08, 11**; *В. Борохов* (Керчь) **05, 10, 11**; *Т. Бретман* (п. Черноголовка Московской обл.) **98, 04**; *В. Васев* (Николаев) **08, 09, 11**; *А. Ветров* (Северодвинск) **03, 08, 09, 11**; *И. Воскобойник* (Киев) **98—12**; *А. Вылугин* (Донецк) **08, 11**; *Д. Гагасов* (Борисов) **99, 02**; *Д. Гайдунько* (Алма-Ата) **08, 11**; *А. Галанин* (Сергиев Посад) **98, 02, 03, 05—11**; *П. Гвоздев* (Котельнич) **98, 03, 04, 08, 11**; *А. Георгадзе* (Нальчик) **03—07**; *В. Глазков* (Коломна) **05—09, 11**; *В. Головач* (с. Волока Черновицкой обл.) **11**; *В. Горгадзе* (Нальчик) **98—00, 02, 08—11**; *П. Гребенев* (Кузнецовск) **98—00, 02—05, 08—11**; *А. Гревцев* (Москва) **98, 02—06, 09—11**; *А. Григорян* (Кумайри) **08, 10, 12**; *Т. Григорян* (Ереван) **03, 04**; *С. Гудзенко* (Павлодар) **03**; *Р. Гулгазарян* (Ереван) **03, 04, 08, 09, 11**; *Н. Гуляев* (Нижний Новгород) **98—12**; *Э. Девятов* (Тула) **98, 02, 04—06**; *С. Дибров* (Киев) **98, 00—06, 08—12**; *С. Дубровина* (Владимир) **08, 11**; *С. Дудий* (п. Комсомольский Харьковской обл.) **06, 08—12**; *Ю. Егоров* (Авдеевка) **98, 02—04, 06, 08, 09, 11**; *Г. Елганов* (Ургенч) **08, 10, 12**; *А. Ельников* (Донецк) **98—00, 02, 04—11**; *С. Жак* (Тернополь) **98—02, 04—12**; *В. Жукова* (Кузнецовск) **09, 11**; *М. Заболотный* (Винница) **00, 02—06, 08, 11, 12**; *С. Залюбовский* (Винница) **98, 00, 02—06, 08, 09, 11, 12**; *С. Занкович* (Николаев) **98, 00, 02, 04, 06, 08—12**; *З. Зарипов* (Хивинский р-н Хорезмской обл.) **08, 12**; *И. Зозуля* (Одесса) **00, 04, 06**; *Э. Ибрагимов* (Шаватский р-н Хорезмской обл.) **08**; *С. Ивленков* (Тольятти) **08—11**; *Н. Ивченко* (Киев) **98, 00—02, 04—12**; *Ф. Игнатович* (Дубна) **04—07, 10**; *Ш. Исмаилов* (Ургенч) **08**; *О. Каргальцев* (Мичуринск) **04, 08**; *А. Касаткин* (Тольятти) **08, 11**; *Н. Keберле* (Запорожье) **08, 11**; *М. Климбовский* (Николаев) **98, 00, 02, 04, 06—12**; *К. Коваль* (Запорожье) **09, 11**; *А. Ковальский* (Казань) **11**; *К. Кожухов* (Кузнецовск) **08, 11**; *В. Козлов* (Старый Оскол) **98, 00, 02—05, 07—09, 11**; *А. Колесников* (Воронеж) **03, 04, 08, 10, 12**; *А. Коростелев* (Чебоксары) **98**; *А. Коткин* (п. Черноголовка Московской обл.) **04, 08**; *Д. Кример* (Брест) **04, 08, 11**; *Э. Крицун* (Богородчаны) **08, 11**; *И. Кузнецова* (Новороссийск) **04, 08, 11**; *Ю. Кулик* (Канев) **98, 99, 03, 04, 08, 09, 11**; *У. Курязов* (Шават) **03, 08, 10, 11**; *П. Левин* (Москва) **98, 03, 04, 08, 11**; *В. Лисов* (Минск) **08—11**; *В. Лобас* (Киев) **04**; *Э. Локшин* (п. Черноголовка Московской обл.) **04**; *С. Люб-*

(Окончание см. на с. 62)

„Квант" для младших школьников

Задачи





1. Перед началом уроков классный руководитель заметил, что каждый учащийся его класса поздоровался за руку с шестью девочками и восемью мальчиками. При этом количество рукопожатий между мальчиками и девочками было на пять меньше числа остальных рукопожатий. Сколько учеников в классе?

2. Решите арифметический ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

3. Числа 18 и 46 интересны тем, что их квадраты — 324 и 2116 — имеют ту же сумму цифр, что и сами числа. Докажите, что целых чисел с этим свойством бесконечно много даже среди чисел, не оканчивающихся нулем.

4. Жильцы всех квартир, выходящих на одну лестничную площадку, решили прикрепить к своим дверям новые номера квартир. Кооператив, в который они обратились с просьбой изготовить необходимые 7 цифр, объявил, что он берет за изготовление каждой цифры столько рублей, какова эта цифра (например, нули изготовляются бесплатно). Жильцы собрали по 3 рубля с каждой квартиры, и этого им хватило. Какие цифры были заказаны?

5. Два квадрата, синий и красный, расположены так, что две соседние вершины красного квадрата находятся на соседних сторонах синего, а одна из вершин синего квадрата лежит на стороне красного (см. рисунок). Докажите, что отрезок MN, соединяющий еще две общие точки периметров этих квадратов, проходит через центр красного квадрата.

Эти задачи нам предложили К. Кохась, С. Баженов, Л. Курляндчик, И. Акулич, В. Произволов.

ВЫСОКО ЛИ ПОГАС БОЛИД?

Кандидат физико-математических наук

В. ГЕТМАН

— Мама, мама! — Андрюша вбежал в дом с горящими глазами.— Я сейчас в небе болид видел! Пролетел прямо как огненный змей, а в конце вспыхнул и исчез!

— То-то я тебя докричаться не могла. Ты уроки-то все сделал? Десять часов уже...

— Сделал,— Андрей был явно разочарован тем, что маме совсем не интересно. Она это почувствовала и спросила:

— А болид — что это такое?

— Болид — это летящий по небу огненный шар...

Пока Андрюша рассказывает о нем своей маме, мы расскажем вам. Болидом называется довольно редкое явление — летящий по небу огненный шар (в отличие от шаровых молний болиды наблюдаются на значительных высотах — 10 километров и больше). Представьте себе, что в нашу атмосферу из космоса с огромной скоростью влетает осколок астероида или ядра кометы. За одну секунду он может пролететь 20 или 30 километров. Или даже больше. Двигаясь сквозь атмосферу, он разогревается до 2000 градусов, постепенно разрушаясь и испаряясь, и летит дальше уже окруженный громадным облаком светящегося газа. Вот это-то облако мы и видим. А когда осколок полностью разрушится, болид гаснет. Обычно это происходит через 3—4 секунды после его появления и сопровождается сильным взрывом. Но иногда бывает так, что осколок разрушается не полностью (если его размеры были достаточно велики), часть его падает на поверхность Земли и тогда его называют метеоритом.

— ...Интересно... А можно ли узнать, упадет метеорит или нет?

— Все зависит от высоты, на которой погас болид. Если это произойдет на высоте 40 или 60 километров, то метеорита нечего ждать, а если болид погас на высоте примерно 10—30 километров, то можно и поискать метеорит.

— Понятно. Но как же ты узнаешь, какая была высота?

— Определить-то ее можно, да один я не смогу. Это надо делать вдвоем — наблюдать одновременно из двух мест, расположенных друг от друга на расстоянии 20—30 километров...

...Прошло некоторое время, и Андрюша поехал в город на районную олимпиаду по математике. И вот там-то он и познакомился с Витей, таким же страстным любителем астрономии. Витя тоже страдал от отсутствия компаньона и единомышленника, а идея вместе определять высо́ты увиденных болидов показалась ему просто замечательной.

Прежде всего ребята сделали себе по угломеру для измерения зенитных углов наблюдаемых объектов. Это очень простое устройство. Посмотрите на рисунок 1. К дощечке *1* прибита рейка *2*. В верхней части рейки *2* просверлено отверстие, через которое про-

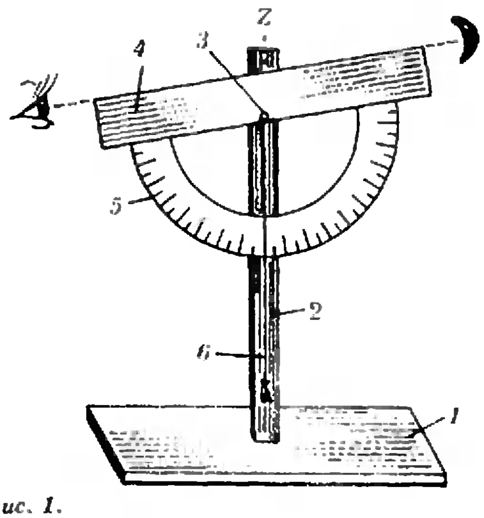


Рис. 1.

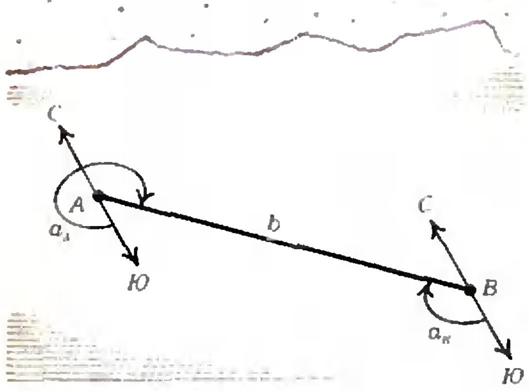


Рис. 2.

пущен болт 3. Болт нужен для того, чтобы прикрепить к рейке 2 еще одну рейку — 4, поменьше. Теперь укрепим на рейке 4 транспортир 5 так, как показано на рисунке. Его можно приклеить или прикрепить к рейке болтами. Теперь осталось подвесить отвес 6 на прочной нитке, и угломер готов. Укрепите его на ровной горизонтальной площадке и тщательно установите рейку 4 в горизонтальном положении. Если вы все сделали правильно, то нить отвеса будет проходить под транспортиром точно через деление 90°. Это означает, что рейка 2 направлена строго в зенит Z и угломер готов к работе.

Давайте проверим, как работает наш угломер. Измерим, например, зенитный угол Луны. Ослабьте гайку и направьте на Луну тот конец рейки 4, на котором оказалось деление транспортира 180° (см. рис. 1). Зафиксируйте положение рейки, закрутив гайку, и посмотрите, через какое деление на транспортире проходит нить отвеса. Предположим, что нить проходит через деление 80°. Значит, зенитный угол Луны $Z_л=80°$.

Вернемся к нашим друзьям. Андрюша живет в селе A, Витя живет в селе B (рис. 2). Отрезок $AB=b$ называется базисом их пунктов наблюдений. По компасу Андрюша определил азимут a_A на направление между селами A и B — т. е. угол между направлением на юг и отрезком AB (этот угол всегда отсчитывается по направлению от юга к западу). Витя, в свою очередь, определил азимут a_B. А затем ребята договорились вести наблюдения с 10 до 12 часов вечера каждый день с 12 по 25 июля.

И вот, вечером 15 июля в 11 часов 32 минуты ребята увидели на небе яркий болид, вспыхнувший в конце своего полета.

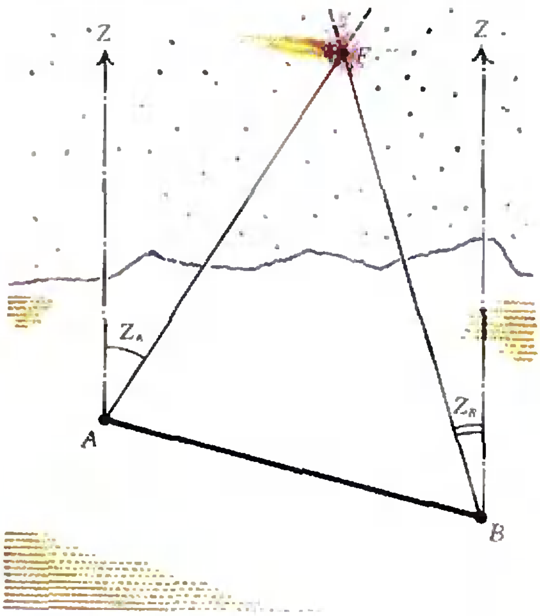


Рис. 3.

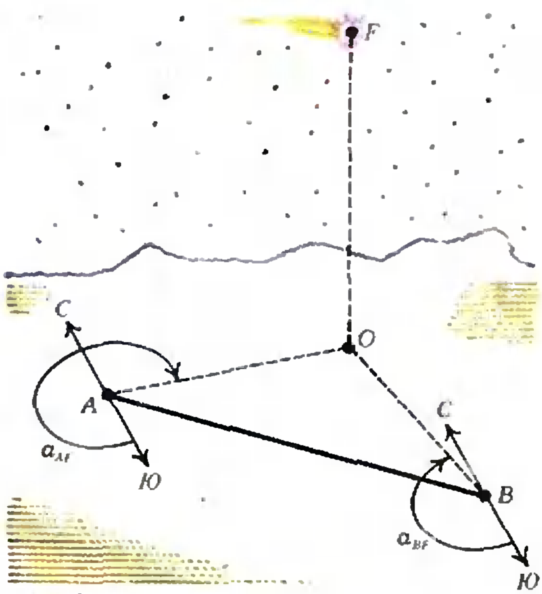


Рис. 4.

Конкурс «Математика 6—8»

Мы продолжаем конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 24 задач, по 3 в каждом номере журнала, начиная с девятого. Решения задач из этого номера высылайте не позднее 1 июня 1992 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Тверская-Ямская, 2/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

Задачи

22. Используя каждую из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по одному разу, составьте такие два пятизначных числа, чтобы их произведение было максимальным.

Л. Курляндчик

23. Шахматную доску покрыли 32 костяшками домино, каждая из которых покрывает ровно две клетки. Восемь костяшек покрывают восемь клеток одной из диагоналей доски; при этом одни костяшки покрывают еще одну клетку выше диагонали, а другие — еще одну клетку ниже ее. Докажите, что при любом покрытии доски тех и других костяшек будет поровну.

В. Произволов

24. По поверхности стола перекатывают кубик, переворачивая его через ребра. Можно ли его перевернуть 12 раз так, чтобы он перевернулся по одному разу через каждое ребро и в результате оказался на прежнем месте?

С. Токарев

В каком же порядке надо проводить измерения, чтобы узнать высоту полета болида? Во-первых, надо запомнить место вспышки болида относительно положения звезд — на рисунке 3 оно обозначается буквой F (от английского слова *flare* — вспышка), затем измерить угломером зенитный угол вспышки и по компасу определить азимут точки F, мысленно опустив из нее перпендикуляр на землю. Не забудьте, что ребята проводят измерения каждый со своей точки наблюдения: Андрюша измерил зенитный угол Z_A и азимут a_{AF}, а Витя — зенитный угол Z_B и азимут a_{BF} (см. рис. 3 и 4).

В первый же выходной Витя приехал к Андрюше, и ребята по совместным измерениям построили схему азимутов, добавили данные по зенитным углам и получили чертеж, с помощью которого определить высоту вспышки болида теперь не составит труда (рис. 5).

Обозначим $\angle OAB = a_A - a_{AF} = \alpha$, $\angle OBA = a_{BF} - a_B = \beta$, $\angle AOB = \gamma$. Высоту вспышки FO далее будем называть h (от английского слова *height* — высота). Для треугольников OFA и BFO верны следующие соотношения:

$$h = FO = AO \operatorname{ctg} Z_A = BO \operatorname{ctg} Z_B. \quad (1)$$

Далее, для треугольника AOB —

$$\frac{AO}{\sin\beta} = \frac{BO}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\gamma}. \quad (2)$$

В этом треугольнике $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$. Тогда из (1) и (2) следует

$$h = b\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\operatorname{ctg} Z_A \text{ или } h = b\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\operatorname{ctg} Z_B.$$

Именно таким способом мальчики определили, что вспышка болида произошла на высоте 51 километра.

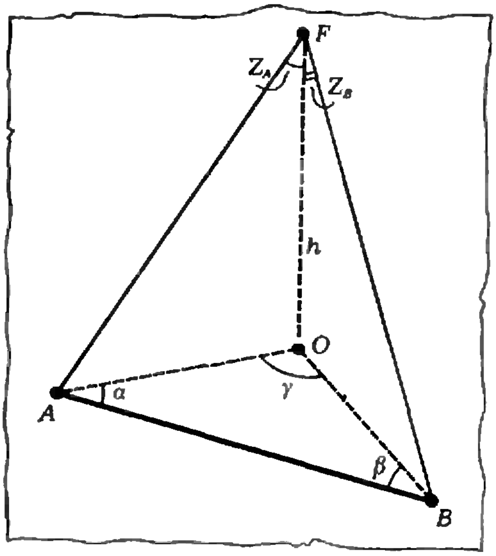


Рис. 5.

Качественные задачи по физике

«...и самым коричневейшим-наиперекоричневейшим был Эфиоп»

Эта цитата — из чудесной сказки Р. Киплинга «Откуда у Леопарда на шкуре пятна». В основе этой сказки лежит библейская поговорка о том, что не дано эфиопу изменить цвет кожи, а леопарду избавиться от пятен — или, другими словами,— чего не может быть, того не может быть никогда.

Правда, Киплинг остроумно и убедительно рассказал о том, как леопард приобрел пятна, а эфиоп изменил цвет кожи. Но, во-первых, это — сказка, а во-вторых, «это было давно, когда все были еще одного цвета и мир был еще таким молодым, что многие вещи не имели названия и на них приходилось показывать пальцами» (Р. Киплинг).

С тех пор прошло не одно столетие. Живой мир стал цветным, и многие вещи не только были названы (так что у культурных людей отпала необходимость показывать на них пальцами), но и получили строгие, «научнейшие-перенаучнейшие» определения. Так, приспособительная окраска у животных, которая помогает им скрываться и охотиться, названа мимикрией. А пигментом назвали темное вещество, которое выделяется в коже и является причиной того, что на коже появляются веснушки или загар.

А недавно автору попалась на глаза биофизическая работа, объясняющая, почему на теле леопарда — пятна, а на хвосте — полосы.

Почему же «самым коричневейшим-наиперекоричневейшим был Эфиоп»? Почему кожа у жителей экваториальных стран — черная? Почему (разумеется, с физической точки зрения) мы темнеем от загара?

На первый взгляд, ответ прост — пигмент (или темный цвет кожи) защищает от солнечных лучей. Но этот ответ кажущийся! Разве надевают для защиты от солнца черные панамки? Разве, скрываясь от жары, раскрывают черные солнечные зонтики? Разве существуют черные холодильники? Нет! Потому что черные предметы поглощают больше солнечных лучей и сильнее нагреваются.

«Конечно, всегда можно сказать: «Когда переходишь к живой природе, все возможно». Но если вы станете на такую точку зрения, вы никогда не поймете законов живой природы» (Р. Фейнман). А «исследование живой материи — самый интересный предмет исследования для живой материи, способной к исследованию» (Л. Блюменфельд).

А теперь о том,

Как дерево спасает от дождя?

(см. «Квант» № 7 за 1991 год)

Как показывает житейский опыт, ель (и не хуже, чем пальма) спасает от дождя. И вот каким образом.

Капля, упав на лист (или иголку), съезжает, как по канатной дороге, на самую удаленную от ствола часть листа — острие. С острия капля срывается и... падает на следующий лист, расположенный ниже. В дождливую погоду в лесу можно услышать «...множество различных оттенков стука дождевых капель, падающих с листа на листок» (Марсель Эме) и увидеть, как «...бежала с чашечки на чашечку грозой одуреиная влага» (Б. Пастернак).

Скатываясь с листа (иголки), капля удаляется от ствола на три-четыре сантимента. А встретив на пути десять, двадцать листьев (игл), она будет отброшена на значительное расстояние. Как будто просто прокатилась по крыше.

Вот и все.

Е. Гурович

Информация

Заочная физическая школа при МГУ

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете МГУ объявляет прием учащихся в 10 и 11 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику, лучше подготовиться к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения и, прежде всего, на физический факультет МГУ.

Физический факультет МГУ готовит физиков-теоретиков и физиков - экспериментаторов по всем разделам современной физики и астрономии. Фундаментальное университетское образование позволяет выпускникам физического факультета быстро осваивать специфику любого научного или технического направления, успешно работать на стыке научных направлений, таких, например, как геофизика и биофизика, астрофизика и химическая физика.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать *до 1 сентября* по адресу: 119899, Москва, ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ. В *письмо* вложите два экземпляра анкеты, заполненной на листах плотной бумаги размером 7×12 см по приведенному здесь образцу, и конверт с вашим адресом.

Решение о зачислении в ЗФШ будет сообщено до 20 октября.

Принятым в ЗФШ в течение года высылаются контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решенные задания оцениваются, рецензируются и отсылаются обратно. Учащиеся 10 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 11 класс. Успешно прошедшие обучение получают удостоверение об окончании ЗФШ (при поступлении на физический факультет удостоверения об окончании ЗФШ учитываются приемной комиссией).

Образец

Фамилия, имя, отчество	*Колесов Владимир Владимирович*
Класс ЗФШ	*10*
Профессия родителей	*мать — инженер, отец — врач*
Подробный домашний адрес	*240812, г. Калуга, ул. Пушкина, д. 24, кв. 26*
Номер и адрес школы	*школа № 777, ул. Садовая, д. 11*

Вступительное задание

Поступающим в 10 класс ЗФШ нужно решить задачи 1—4, поступающим в 11 класс — задачи 4—7.

1. Самолет летит горизонтально со скоростью $v=500$ м/с. Человек услышал звук от самолета через $\tau=20$ с после того, как самолет пролетел над ним. На какой высоте летит самолет? Скорость звука $v_{зв}=330$ м/с.

2. Шарик массой $M=0{,}1$ кг, падая без начальной скорости с высоты $H=2{,}5$ м, ударился о твердую горизонтальную плиту. При ударе импульс шарика изменился на $\Delta p=1{,}2$ кг·м/с. Какую часть энергии потерял шарик во время удара?

3. На горизонтальной платформе находится брусок; коэффициент трения между ними $\mu=0{,}1$. На какое расстояние относительно платформы сместится брусок через $\tau=2$ с после начала движения платформы в горизонтальном направлении с постоянным ускорением $a=1{,}96$ м/с^2?

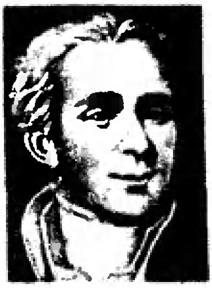
4. Из большого резервуара через шланг с помощью насоса откачивают воду. Коэффициент полезного действия насоса $\eta=60$ %. Наконечник шланга имеет сечение $S=30$ см^2 и расположен на уровне воды в резервуаре. Струя выходит из наконечника под углом $\alpha=30°$ к горизонту. Какую мощность потребляет насос, если струя достигает высоты $h=5$ м?

5. В некотором процессе давление и объем идеального газа связаны соотношением $pV^{1/2}=\text{const}$. При температуре T_0 давление газа равно p_0. Какое давление будет при температуре T_1?

6. Три точечных заряда, попарно помещенные на расстоянии $L=10$ см друг от друга в вакууме, отталкиваются с силами, равными $F_1=5$ Н, $F_2=10$ Н, $F_3=12$ Н. Найдите величины зарядов.

7. На одной из пластин плоского конденсатора емкостью C_0 находится заряд $+q$, а на другой $+5q$. Определите разность потенциалов между пластинами.

Калейдоскоп „Кванта"



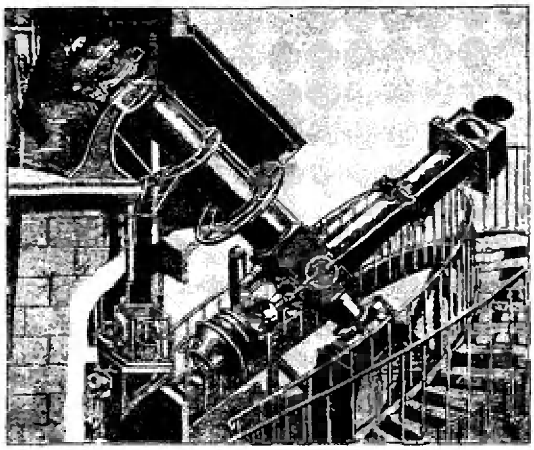
Астрономия, рассмотренная наиболее общим образом, есть великая проблема механики, которая состоит в определении небесных движений произвольного вида.

Лаплас

А так ли хорошо знакома вам

астрономия

?



Для тех, кто еще не перешел в последний школьный класс, этот вопрос покажется странным: ведь «официально» познакомиться с астрономией можно только за несколько месяцев до окончания школы. Однако вспомните курс механики, а также природоведения, физической географии, истории древнего мира и средних веков... И везде, заметьте, возникали и обсуждались вопросы астрономического содержания — о движении планет и наблюдении звезд, о навигации и затмениях, об устройстве и исследовании внеземного мира. Это, безусловно, свидетельствует о давней, с незапамятных времен, связи человека с Космосом, о постоянном интересе к тому, что знаменитый Кеплер назвал «небесной физикой».

Сегодня вы станете участниками всего лишь нескольких актов из грандиозного спектакля, ежедневно разыгрываемого Природой на небесной сцене. Уверены, что астрономический «Калейдоскоп» будет для вас не менее увлекательным, чем другие его выпуски.

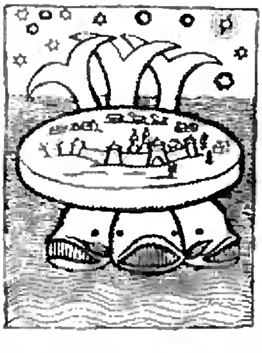
Вопросы и задачи

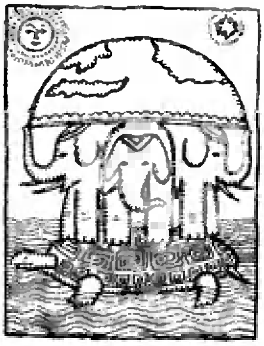
1. На сколько угловых минут поворачивается Земля вокруг своей оси за одну минуту?
2. На какой угловой высоте находится Солнце, если длина тени от вертикального предмета равна его высоте?
3. В каких случаях высота светил над горизонтом Земли не меняется в течение суток?
4. Для наблюдателя, находящегося на географическом полюсе Земли, Солнце полгода расположено над горизонтом и полгода — под горизонтом. А Луна?
5. Почему терминатор Венеры — линия раздела дня и ночи — при наблюдении с Земли имеет форму дуги эллипса?
6. Можно ли в воде глубокого колодца увидеть отражение Солнца?
7. Луна, если ее наблюдать с Земли, восходит не менее двух минут. В течение какого времени восходит Земля для наблюдателя на Луне?
8. На Венере настолько густая облачность, что не видно небесных светил. Можно ли, находясь на Венере, убедиться в ее вращении вокруг своей оси и определить направление этого вращения?
9. Какой вид имеет кольцо Сатурна для наблюдателей, находящихся на экваторе и на полюсах этой планеты?
10. Если на Земле наблюдается полное лунное затмение, то что увидит космонавт, очутившийся в это время на Луне?
11. Почему полные солнечные затмения в северном полушарии Земли чаще бывают летом, а не зимой?
12. Освещенная заходящим Солнцем белая стена кажется ярче поверхности Луны, находящейся на той же высоте над горизонтом, что и Солнце. Означает ли это, что поверхность Луны состоит из темных пород?

13. Одинаковый ли вид имеет Солнце с Луны и с Земли?
14. Изменится ли видимое расположение звезд на небе, если вдруг исчезнет земная атмосфера?
15. Какие наблюдения доказывают, что кометы не находятся в земной атмосфере, как это полагали в древности?
16. Почему с полуночи до рассвета наблюдается больше метеоров, чем с вечера до полуночи?

Микроопыт

Видимые размеры дисков Солнца и Луны у горизонта кажутся увеличенными по сравнению с их видимыми размерами в зените. Как можно экспериментально доказать, что это увеличение кажущееся?





Любопытно, что...

...одной из самых древних, известных истории обсерваторий, возможно, являются знаменитые развалины Стоунхенджа в Англии. Этому сооружению около четырех тысяч лет. А первая «настоящая» астрономическая обсерватория появилась в Европе лишь в XVI веке.

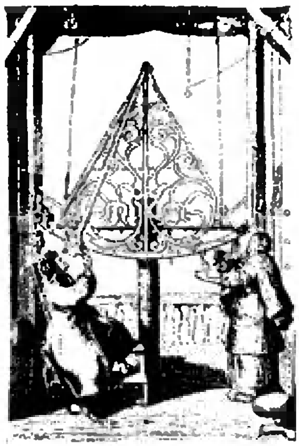
...детальное исследование неба стимулировалось и астрологией. К примеру, около двух с половиной тысяч лет назад жрецы Ассирии умели предсказывать даты затмений.

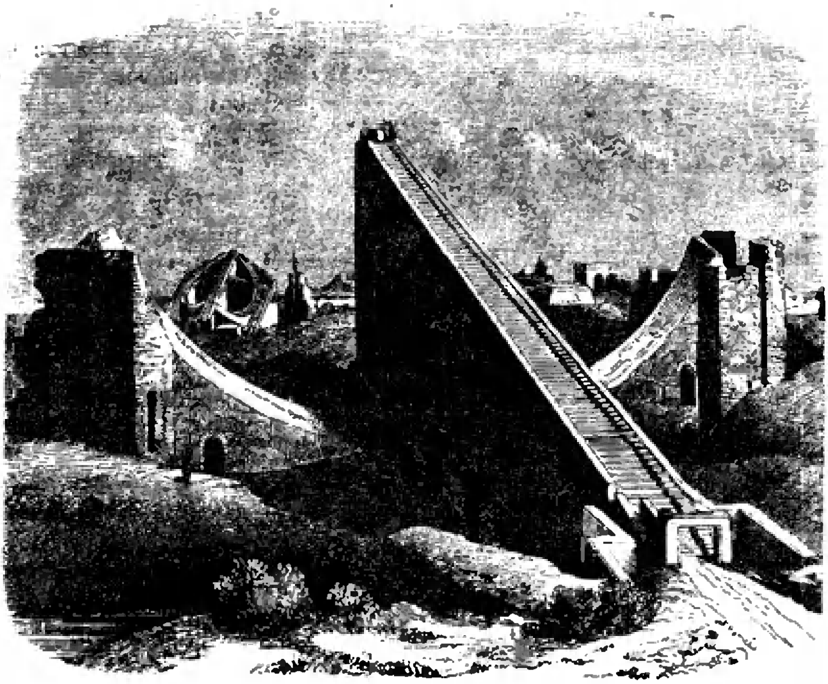
...имя изобретателя телескопа неизвестно. Мы знаем лишь одно: в 1604 году торговец стеклами для очков голландец Янссен «снял копию» с телескопа, принадлежащего некоему итальянцу.

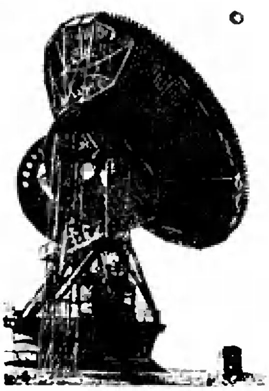
...телескопы вовсе не дают увеличенного изображения звезд. Задача телескопа — увеличение светового потока, попадающего в глаз человека от наблюдаемого объекта. Поэтому и строят телескопы-гиганты с зеркалами диаметром в несколько метров.

...оптическое приборостроение стало одной из первых отраслей индустрии, где непосредственное участие физиков поставило кустарное эмпирическое мастерство на уровень совершенного производства.

...астрономические наблюдения подтверждают справедливость важнейших физических теорий. Например, искривление луча света в гравитационном поле Солнца, наблюдавшееся во время солнечного затмения, или смещение орбиты Меркурия, открытое в 1845 году, не могли быть объяснены классической наукой, но вполне «укладывались» в новые представления — общей теории относительности.







...первый полный астрономический учебник вышел в 1618 году — это была книга Кеплера «Сокращения коперниковой астрономии».

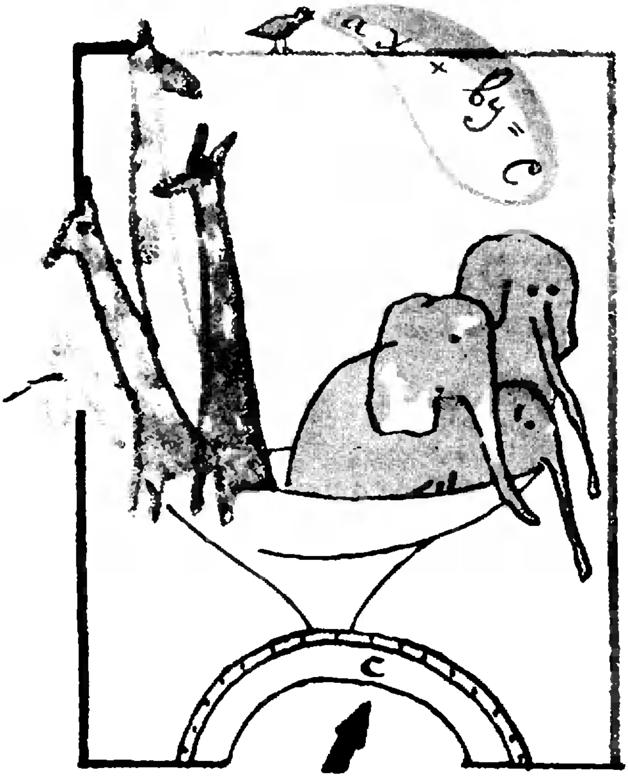
...знаменитый английский астроном Гершель вполне серьезно считал, что Солнце — обитаемо, его поверхность довольно холодна и только плавающие над ней облака очень горячи.

Что читать в «Кванте» по астрономии

(публикации последних лет)

1. «Космические иллюзии и миражи» — 1988, № 7, с. 15;
2. «Калейдоскоп «Кванта» — 1989, № 4, с. 40;
3. «Гиганты» — 1989, № 5, с. 50;
4. «Орбиты» — 1989, № 9, с. 60;
5. «Перспективы поиска обитаемых планет» — 1990, № 8, с. 58;
6. «Кто придумал «ночезрительную трубу»?» — 1990, № 9, с. 36;
7. «Ближайшие задачи в космосе» — 1991, № 2, с. 46;
8. «Формула рождения звезд» — 1991, № 11, с. 11.

Материал подготовил А. Леонович



Школа в «Кванте»

Неопределенные уравнения первой степени

Доктор физико-математических наук
Ю. СОЛОВЬЕВ

Существование решений

Неопределенными уравнениями первой степени с двумя неизвестными называются уравнения вида

$$ax+by=c, \qquad (*)$$

где a, b и c — числа из некоторой данной совокупности (действительные, рациональные, целые и т. п.), причем a и b не равны нулю. Решениями неопределенного уравнения (1) называются любые пары чисел $(\alpha; \beta)$, принадлежащих данной совокупности, которые удовлетворяют уравнению.

Выясним, прежде всего, как выглядят решения этого уравнения в случае, когда a, b и c — действительные числа. Решим его относительно какого угодно неизвестного. Например, для y получим:

$$y=\frac{c-ax}{b}.$$

Это выражение показывает, что y однозначно зависит от x, само же x может быть совершенно произвольным. Следовательно, если a, b и c — действительные числа, то уравнение (*) имеет бесконечное множество решений

$$\left(r; \frac{c-ar}{b}\right),$$

где r — произвольное действительное число.

Если a, b и c — рациональные числа, то естественно рассматривать рациональные решения уравнения (*). Очевидно, что они задаются той же самой формулой $\left(r; \frac{c-ar}{b}\right)$, где на сей раз r — произвольное рациональное число.

Гораздо содержательнее и интереснее случай, когда коэффициенты a, b и c — целые числа, и требуется найти целые решения уравнения (*). Задачу нахождения целых решений можно переформулировать следующим образом: из бесконечного множества действительных решений уравнения (*) выделить только целые. Ясно, что такое ограничение значительно уменьшает число решений.

Прежде всего, выясним, всегда ли возможно решить неопределенное уравнение (*) в целых числах. Ответом на этот вопрос служат следующие две теоремы.

Теорема 1. *Если свободный член c неопределенного уравнения*

$$ax+by=c$$

не делится на наибольший общий делитель коэффициентов a и b, НОД

(a, b), то уравнение не имеет целых решений.

Доказательство. Пусть $d = $ НОД $(a; b)$, так что $a = md$, $b = nd$, где m и n — целые числа. Тогда наше уравнение принимает вид

$$mdx + ndy = c,$$

или

$$d(mx + ny) = c.$$

Допустив, что существуют целые числа x и y, удовлетворяющие уравнению (*), мы получим, что коэффициент c делится на d. Полученное противоречие доказывает теорему.

Если все три коэффициента a, b и c имеют общий множитель, то по сокращении на него может оказаться или что коэффициенты a и b имеют общий множитель, или что a и b — взаимно просты. В первом случае, по предыдущей теореме, уравнение не имеет целых решений. Во втором случае мы приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Если коэффициенты a и b неопределенного уравнения*

$$ax + by = c$$

являются взаимно простыми числами, то уравнение имеет по крайней мере одно целое решение.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $a > 0$. Решив уравнение относительно x, получим

$$x = \frac{c - by}{a}.$$

Докажем, прежде всего, что если в эту формулу вместо y подставлять все натуральные числа, меньшие a, т. е. числа $0, 1, 2, \ldots, a-1$, и каждый раз совершать деление, то все a остатков будут различны. В самом деле, подставим вместо y какие-нибудь два числа m_1 и m_2, меньшие a (из множества $0, 1, 2, \ldots, a-1$). В результате мы получим две дроби

$$\frac{c - bm_1}{a} \text{ и } \frac{c - bm_2}{a}.$$

Выполнив деление и обозначив неполные частные через q_1 и q_2, а остатки — через r_1, r_2, найдем

$$\frac{c - bm_1}{a} = q_1 + \frac{r_1}{a}, \quad \frac{c - bm_2}{a} = q_2 + \frac{r_2}{a}.$$

Предположим, что остатки r_1 и r_2 равны. Тогда, вычитая второе равенство из первого, получим

$$\frac{c - bm_1}{a} - \frac{c - bm_2}{a} = q_1 - q_2,$$

или

$$\frac{b(m_2 - m_1)}{a} = q_1 - q_2.$$

Так как $q_1 - q_2$ — число целое, то и левая часть должна быть целым числом. Стало быть, $b(m_2 - m_1)$ должно делиться на a. Но числа b и a — взаимно просты, следовательно, $m_2 - m_1$ должно делиться на a, т. е. разность двух натуральных чисел, каждое из которых меньше a, должна делиться на a, что невозможно. Значит, r_1 не может равняться r_2, т. е. все остатки различны.

Итак, мы получили a различных натуральных остатков, меньших a. Но различные a натуральных чисел, не превосходящие a, суть не что иное, как числа $0, 1, 2, \ldots, a-1$. Следовательно, среди остатков непременно найдется один и только один, равный нулю. Значение y, подстановка которого в выражение $(c - by)/a$ дает остаток 0, превращает $x = (c - by)/a$ в целое число. Итак, если a и b взаимно просты, то уравнение (*) действительно допускает целые решения, что и требовалось доказать.

Доказанная выше теорема 1 утверждает, что условие НОД $(a; b) = 1$ является необходимым условием для разрешимости неопределенного уравнения (*) в целых числах. Теорема 2 утверждает, что это условие является достаточным.

Первый способ решения

Теорема 2 дает практическую возможность находить одну пару решений неопределенного уравнения в целых числах. Пусть, например, дано уравнение

$$7x + 5y = 232.$$

Решаем это уравнение относительно того из неизвестных, при котором находится наименьший (по модулю) коэффициент, т. е. в данном случае относительно y:

$$y=\frac{232-7x}{5}.$$

Подставляем в это выражение вместо x натуральные числа, меньшие 5, т. е. 0, 1, 2, 3, 4. В результате находим:

$$x=0,\quad y=\frac{232}{5}=46\,\frac{2}{5},$$

$$x=1,\quad y=\frac{232-7}{5}=45.$$

Итак, одно решение данного уравнения получено: $x=1$, $y=45$.

Этот прием решения неопределенного уравнения целесообразно употреблять в тех случаях, когда коэффициент при каком-либо из неизвестных не велик по модулю.

Коль скоро найдена одна пара целых решений, то легко найти и все такие решения.

Теорема 3. *Неопределенное уравнение*

$$ax+by=c,$$

в котором a и b являются взаимно простыми числами, допускает бесконечное множество целых решений. Все эти решения задаются формулами

$$x=\alpha+bt,\ y=\beta-at,$$

где $(\alpha;\ \beta)$ — некоторое решение уравнения (1), а t — произвольное целое число.

Доказательство. Так как по условию пара $(\alpha;\ \beta)$ является решением нашего уравнения, то подстановка $x=\alpha$, $y=\beta$ в уравнение дает тождество

$$a\alpha+b\beta=c.$$

Вычитая это тождество из нашего уравнения, имеем

$$a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0,$$

откуда

$$x=\alpha+\frac{b(\beta-y)}{a}.$$

Чтобы x было целым числом, необходимо, чтобы $b(\beta-y)/a$ было целым, т. е. чтобы произведение $b(\beta-y)$ делилось на a без остатка. Но a и b — взаимно простые числа; стало быть, для этого необходимо, чтобы $(\beta-y)/a$ равнялось некоторому целому числу. Обозначим это целое число через t:

$$\frac{\beta-y}{a}=t.$$

Тогда $y=\beta-at$ и, следовательно,

$$x=\alpha+\frac{b(\beta-y)}{a}=\alpha+bt,$$

что и требовалось доказать.

Второй способ решения

Сперва рассмотрим один частный случай. Допустим, что коэффициент при одном из неизвестных равняется единице. Например, рассмотрим уравнение

$$x+by=c.$$

Отсюда

$$x=c-by.$$

Положив $y=0$, получим для x целое значение $x=c$. Следовательно, одна пара решений уравнения имеет вид $x=c$, $y=0$. Все же целые решения задаются формулами

$$x=c+bt,\ y=-t.$$

Аналогично, если коэффициент при y равен 1, то все целые решения задаются формулами

$$x=t,\ y=c-at.$$

На этом замечании основан общий способ решения неопределенного уравнения в целых числах. В самом деле, если бы нам удалось привести уравнение $ax+by=c$ к уравнению, в котором один из коэффициентов равен единице, то задача была бы решена. Но когда a и b — взаимно простые числа, такое приведение всегда возможно. Пусть, например, дано уравнение

$$17x-37y=55.$$

Решаем это уравнение относительно неизвестного, имеющего меньший по модулю коэффициент, в данном случае, относительно x. Получаем

$$x=\frac{55+37y}{17}. \qquad (1)$$

Выделив целую часть, найдем, что

$$x=3+2y+\frac{4+3y}{17}.$$

Полученное для x выражение состоит из двух частей: $3+2y$, которая будет целой при всяком целом y, и дробной $(4+3y)/17$. Для того чтобы x было целым числом, необходимо выбрать такие целые значения y, при которых $(4+3y)/17$ является целым числом. Положим

$$\frac{4+3y}{17}=t,$$

где t — произвольное целое число. Из последнего равенства находим

$$3y-17t=-4. \qquad (2)$$

Решаем это уравнение относительно неизвестного, имеющего меньший по модулю коэффициент, т. е. относительно y:

$$y=\frac{17t-4}{3}.$$

Выделив целую часть, получим

$$y=5t-1+\frac{2t-1}{3}.$$

Для того чтобы y было целым числом, необходимо подобрать такие целые значения t, чтобы

$$\frac{2t-1}{3}=t_1,$$

где t_1 — произвольное целое число. Последнее равенство дает

$$2t-3t_1=1. \qquad (3)$$

Поступая так же, как прежде, находим

$$t=\frac{1+3t_1}{2}=t_1+\frac{1+t_1}{2}.$$

Чтобы число t было целым, необходимо выполнение следующего условия:

$$\frac{1+t_1}{2}=t_2,$$

где t_2 — произвольное целое число. Из полученного равенства вытекает, что

$$t_1-2t_2=-1. \qquad (4)$$

В этом уравнении коэффициент при одном из неизвестных равен единице, и поэтому мы можем его решить.

Итак, мы получили следующую серию уравнений:

$$17x-37y=55,$$
$$3y-17t=-4,$$
$$2t-3t_1=1,$$
$$t_1-2t_2=-1.$$

Из уравнения (4) получаем, что

$$t_1=2t_2-1.$$

Одно из решений этого уравнения имеет вид

$$t_1=-1, \quad t_2=0.$$

Подставляя полученное значение t_1 в уравнение (3), находим $t=-1$; подставляя это значение t в уравнение (2), получаем $y=-7$. После подстановки этого значения y в уравнение (1), мы видим, что $x=-12$. Итак,

$$x=-12, \quad y=-7$$

есть одно из решений заданного уравнения. Общая же формула решений на основании теоремы 3 будет иметь вид

$$x=-12-37t, \quad y=-7-17t,$$

где t — произвольное число.

Докажем, что описанный выше прием решения неопределенного уравнения всегда приводит к получению целых решений. В самом деле, мы получили следующую цепочку уравнений:

1. Данное уравнение

$$17x-37y=55,$$

или уравнение с неизвестными x и y и коэффициентами при них a и b.

2. Уравнение

$$3y-17t=-4,$$

и вообще уравнение с неизвестными x и t (если $|a|>|b|$) или y и t (если $|a|<|b|$). Коэффициентами его являются a (соответственно b) и остаток r_1 от деления a на b (соответственно b на a).

3. Уравнение

$$2t-3t_1=1,$$

т. е. уравнение с неизвестными t и t_1. Коэффициенты его: предыдущий остаток r_1 и остаток от деления a или b на r_1.

4. Уравнение

$$t_1-2t_2=-1,$$

т. е. уравнение с неизвестиыми t_1, t_2. Его коэффициенты: предыдущий остаток r_2 и остаток от деления r_1 на r_2. И так далее.

Отсюда видно, что процесс решения сводится к такой последовательности действий, которая имеет место при нахождении наибольшего общего делителя (НОД $(a;\ b)$) чисел a и b с помощью алгоритма Евклида. Но коэффициенты a и b взаимно просты, а потому наибольший общий делитель их равен единице. Следовательно, продолжая ряд указанных действий, мы обязательно дойдем до остатка, равного единице, который и будет коэффициентом в одном из получаемых уравнений. Тем самым, задача сводится к уже известному частному случаю.

Уравнения с большим числом неизвестных

Ограничимся рассмотрением случая уравнения с тремя неизвестными. Пусть

$$ax+by+cz=d \qquad (**)$$

такое уравнение, в котором a, b, c, d — целые числа, и ни одно из чисел a, b и c не равно нулю. Прежде всего необходимо, чтобы коэффициенты a, b и c не имели такого общего множителя, который не входил бы в d, так как иначе уравнение не может быть решено в целых числах. Если же у этих коэффициентов имеется общий множитель, содержащийся в d, то его удаляют сокращением. В результате могут представиться два случая:

1) из трех коэффициентов a, b и c по крайней мере два — взаимно просты, как, например, в уравнении

$$12x+11y+15z=141;$$

2) каждые два коэффициента имеют общий множитель, но все три взаимно просты; таково, например, уравнение $12x+15y+20z=181$, в котором НОД $(12;\ 15)=3$, НОД $(12;\ 20)=4$, НОД $(15;\ 20)=5$.

Первый случай. Пусть a и b — взаимно простые числа. Перенесем cz в правую часть и применим к уравнению

$$ax+by=d-cz$$

метод решения уравнения с двумя неизвестными, считая временно z известной величиной. В результате мы найдем

$$x=\alpha+bt, \quad y=\beta-at,$$

где α и β — *многочлены первой степени относительно* z. Придавая z и t произвольные целые значения, мы получим все целые решения уравнения (**).

Второй случай. Пусть теперь среди коэффициентов a, b и c нет ни одной пары взаимно простых. Пусть $h=$НОД $(a;\ b)$ и a', b' — частные от деления a, b на h. Тогда уравнение (**) примет вид

$$ha'x+hb'y+cz=d,$$

откуда

$$a'x+b'y=\frac{d-cz}{h}.$$

Чтобы левая часть была целым числом, необходимо, чтобы $(d-cz)/h$ было равно некоторому целому числу t. Следовательно,

$$a'x+b'y=t, \qquad (5)$$

$$cz+ht=d. \qquad (6)$$

Но НОД $(a';\ b')=1$, а потому уравнение (5) имеет целые решения вида

$$x=\alpha+b't', \quad y=\beta-a't',$$

(Окончание см. на с. 55)

Лаборатория „Кванта"

Опыты с пластинкой Френеля

А. НАСРЕТДИНОВ

Из школьного курса физики вы знаете, что можно фокусировать свет при помощи линзы. Но, конечно, линза — не единственная такая возможность. Сегодня мы поговорим об одном достаточно интересном приборе — зонной пластинке Френеля (ее иногда называют просто зонной пластинкой или пластинкой Френеля), с помощью которой тоже можно фокусировать свет.

Что же представляет собой пластинка Френеля? Для того чтобы понять это, рассмотрим следующий пример. Пусть между точечным источником монохроматического света S и точкой наблюдения P поставлен непрозрачный экран, плоскость которого перпендикулярна оси SP (рис. 1). Найдем на экране геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до точек S и P отличается от расстояния SP на целое число длин полуволн. Если A — одна из искомых точек, то

$$SA+AP=SP+m\frac{\lambda}{2},$$ где m — целое число.

Из точек S и P как из центров опишем окружности, проходящие через точку A. Из рисунка 1 видно, что

$$SA+AP=SP+EF, \text{ где } EF\ll SP,$$

$$OA^2=2aOF,$$

$$OA^2=2bEO.$$

Тогда

$$EF=EO+OF=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)OA^2.$$

Но, с другой стороны, $EF=m\lambda/2$, поэтому можно написать, что

$$OA=\sqrt{\frac{ab}{a+b}m\lambda}=\text{const}\sqrt{m}, \qquad (1)$$

т. е. в плоскости отверстия искомым геометрическим местом точек является система концентрических окружностей с центром в точке O. Радиус первой окружности (для $m=1$) равен

$$R_1=\sqrt{\frac{ab}{a+b}\lambda}.$$

Радиусы последующих окружностей R_m увеличиваются в $\sqrt{m}$ раз.

Таким образом, мы разбили плоскость экрана на кольцевые зоны, построенные так, что расстояния от краев каждой зоны до точки P отличаются на $\lambda/2$. Эти зоны называются зонами Френеля.*)

Что произойдет, если в непрозрачном экране сделать отверстие радиусом первой зоны Френеля? Согласно принципу Гюйгенса — Френеля, когда волновой фронт от источника света достигнет краев отверстия, все точки волнового фронта, ограниченного отверстием, можно рассматривать как вторичные источники сферических волн. Так как разность хода между этими волнами в точке P не превышает $\lambda/2$, эти волны, интерферируя, усилят друг друга. Расчет показывает, что в сравнении со случаем отсутствия экрана интенсивность света в точке P возрастает в четыре раза! Это озна-

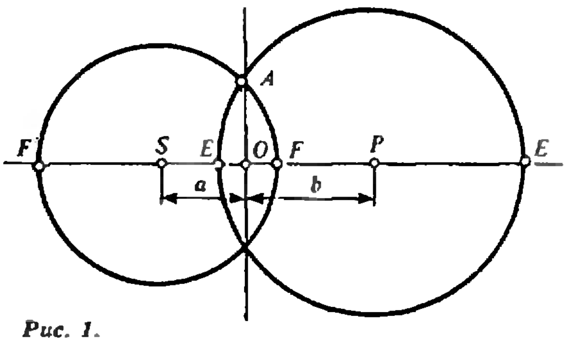


Рис. 1.

*) О зонах Френеля мы уже рассказывали в статье «Дифракция волн» в «Кванте» № 1 за 1992 год. *(Прим. ред.)*

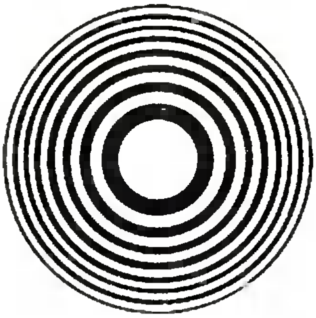


Рис. 2.

чает, что свет как бы сфокусировался в точке P.

Если на пути световой волны поставить непрозрачную пластинку, которая закрывает все четные (или все нечетные) зоны, то интенсивность света в точке P резко возрастает. Это происходит вследствие того, что колебания от открытых зон приходят в точку P синфазно и, интерферируя, усиливают друг друга. Такая пластинка и является зонной пластинкой Френеля. На рисунке 2, например, показана зонная пластинка, закрывающая нечетные зоны.

Можно сказать, что усиление интенсивности света зонной пластинкой аналогично фокусирующему действию линзы. Более того, расстояния от пластинки до источника S и «изображения» P связаны тем же соотношением, что и соответствующие величины для линзы. Это сразу станет видно, если мы перепишем выражение (1) в виде

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f},$$

где «фокусное расстояние» f определяется формулой

$$\frac{1}{f}=\frac{m\lambda}{R_m^2}=\frac{\lambda}{R_1^2}. \qquad (2)$$

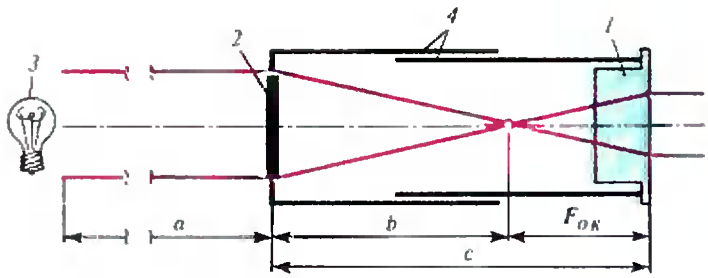
Но вернемся к пластинке Френеля. Изготовить ее несложно: достаточно нарисовать ряд концентрических окружностей (не менее тридцати) с радиусами, задаваемыми формулой (1), в крупном масштабе на листе ватмана, закрасить тушью зоны через одну (в данном случае — все нечетные для того, чтобы изготовить негативы) и сфотографировать их с помощью обычного фотоаппарата с разных расстояний (лучше использовать мелкозернистую пленку). Полученные негативы и будут зонными пластинками. (Для опытов вам понадобятся пластинки с внешним диаметром 2—7 мм.)

Так как фокусное расстояние пластинки Френеля зависит от длины волны, определив его и зная размеры самой пластинки, вы легко сможете определить длину волны источника света.

Практически фокусное расстояние пластинки Френеля можно определить с помощью приспособления, изображенного на рисунке 3. Вам понадобятся: короткофокусный окуляр (от подзорной трубы, микроскопа и т. д.), кусок ватмана или жести для изготовления телескопической системы из трубок *4*. Также нужно изготовить держатель для пленки (пластинок Френеля). Его возможная конструкция показана на рисунке 4.

Вставьте в держатель один из негативов. Меняя длину системы трубок, добейтесь наилучшего изображения источника света. Измерьте значение c. Считая лампочку удаленным источником ($a \gg b$), для фокусного расстояния пластинки Френеля можно напи-

Рис. 3. 1 — окуляр, 2 — пластинка Френеля, 3 — источник света, 4 — телескопическая система трубок, a — расстояние от пластинки Френеля до источника света, b — расстояние от пластинки Френеля до «изображения» источника света, $F_{ок}$ — фокусное расстояние окуляра, c — общая длина трубок.



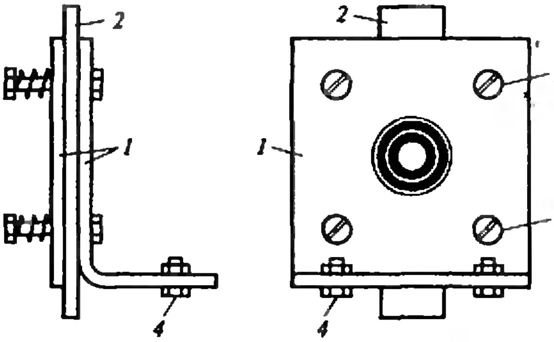


Рис. 4: 1 — металлические пластинки, 2 — пластинки Френеля на пленке (негативы), 3 — винты с пружинками, 4 — винты для крепления к телескопическому устройству.

сать следующие соотношения:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}, \text{ где } b=c-F_{\text{ок}},$$

или

$$f=\frac{a(c-F_{\text{ок}})}{a+c-F_{\text{ок}}}\approx c-F_{\text{ок}}.$$

Таким образом, измерив значение c и зная фокусное расстояние окуляра $F_{\text{ок}}$, вы получите фокусное расстояние пластинки Френеля.

Теперь осталось определить радиус первой зоны. К сожалению, измерить его с хорошей точностью непосредственно на негативе не удастся, поэтому пересчитайте его значение, измерив радиус внешней зоны и воспользовавшись формулой (1).

Итак, зная все необходимые величины, по формуле (2) вы найдете длину волны источника света. Проведя же аналогичные измерения для нескольких пластинок, можно более точно определить значение длины волны.

Рекомендуемые размеры для проведения экспериментов:

диаметр пластинок Френеля	$D=2-10$ мм,
длины трубок 4	$c=10-30$ см,
фокусное расстояние окуляра	$F_{\text{ок}}=2-5$ мм,
расстояние до источника света	$a=0{,}5-5$ м.

Предлагаемый опыт можно существенно «украсить», поставив различные светофильтры или изменяя температуру накала нити, варьируя тем самым длину волны излучаемого лампочкой света. А воспользовавшись негативом, на котором зонная пластинка снята под некоторым углом к нормали, вы сможете наблюдать очень красивые картинки.

Практикум абитуриента

Вокруг колеса

Кандидат физико-математических наук
И. ГЕЛЬФГАТ,
Л. ГЕНДЕНШТЕЙН

— Что ты так пристально рассматриваешь след от своего велосипеда?

— Я только сейчас обратил внимание на то, какой четкий след оставляют шины.

— Что же тут удивительного?

— Я мчался во весь дух, а след такой четкий, будто колесо покоилось!

— Ты хочешь сказать: нижняя точка колеса покоилась. Но ведь это совершенно понятно.

— Почему?

— Ты отталкиваешься колесом, точнее нижней его точкой, от дороги примерно так же, как подошвами во время ходьбы.

— Это ты хорошо придумал. А я, кажется, начал понимать, как можно связать поступательное и вращательное движения колеса... Скорости этих движений равны друг другу.

— Как же ты это увидел? Ведь проследить за этими двумя движениями не так просто.

— Но и не так трудно. Посмотри: каждая точка колеса, благодаря поступательному движению, имеет одну и ту же скорость $\vec{v}_п$, а скорость вращения $\vec{v}_в$ для каждой точки своя и направлена всюду по касательной к ободу колеса (рис. 1).

— Понял! В нижней точке эти скорости направлены как раз в противоположные стороны, а поскольку нижняя точка покоится, поступательная и вращательная скорости должны быть равны по модулю.

— Конечно. Видишь, как это просто? А полная скорость верхней точки вдвое больше скорости поступательного движения.

— Теперь понятно, почему верхние спицы при езде мелькают намного быстрее нижних. Мне это всегда казалось удивительным.

— Постой, но ведь если точка A неподвижна, то вполне можно считать, что именно там проходит некая неподвижная ось, вокруг которой колесо и вращается.

— Тогда скорости (полные) всех точек колеса прямо пропорциональны их расстоянию от этой оси, т. е. от точки A.

— А ведь верно! Смотри: $v_B:v_C:v_O=2:\sqrt{2}:1=AB:AC:AO$. Здорово!

— Здорово-то здорово... Но что-то мне в этой воображаемой оси не нравится. Ведь она же не дает колесу двигаться вперед. И потом — выходит, что точка O вращается вокруг точки A со скоростью, равной $v_п$. Тогда она должна иметь направленное вниз, к точке A, центростремительное ускорение $a=v_п^2/AO=v_п^2/R$. Но ведь совершенно очевидно, что при равномерном качении колеса ускорение его центра отсутствует — он движется равномерно и прямолинейно.

— Может быть, дело в том, что точка A не все время неподвижна, а останавливается лишь на мгновение, соприкасаясь с дорогой, затем опять начинает двигаться.

— И при этом ее ускорение не равно нулю даже в момент остановки — оно равно $v_в^2/R$ и направлено к точке O.

— А ту ось, которую мы придумали, можно назвать мгновенной осью вращения. Ею очень удобно пользоваться, когда нужно определить скорости точек колеса (и вообще любого тела, движущегося непоступательно), но лучше не пробовать с ее помощью определять ускорения!

— Знаешь, я придумал еще одно применение такого подхода — разложение сложного движения на более простые. Я могу найти импульс катящегося колеса.

— Вот тебе бумага и карандаш, показывай.

— Бумага и карандаш ни к чему, все можно сделать устно. Скорость любой точки — это векторная сумма скоростей поступательного и вращательного движений.

Разобьем все наше колесо на маленькие кусочки и назовем их элементами. Пусть они будут настолько малыми, что каждый из них можно считать материальной точкой с массой Δm. Тогда импульс каждого элемента равен векторной сумме импульсов, соответствующих поступательному и вращательному движениям.

— Теперь понятно.

— А импульс всего колеса есть векторная сумма импульсов составляющих его элементов.

— Тоже согласен... и, кажется, понимаю, к чему ты ведешь. Импульс всего колеса будет равен сумме импульсов его поступательного и вращательного движений. Импульс поступательного движения найти совсем просто: он равен $mv_п$, где m — масса всего колеса, потому что при поступательном движении все точки движутся одинаково. А вот как ты определишь импульс, соответствующий вращательному движению? Ведь каждая точка движется по-своему.

— По-своему, да не совсем. Все части колеса составляют единое целое, и поэтому их движения должны быть согласованы друг с другом. И действительно, при вращении для любого элемента колеса найдется другой элемент той же массы, но движущийся с противоположно направленной скоростью.

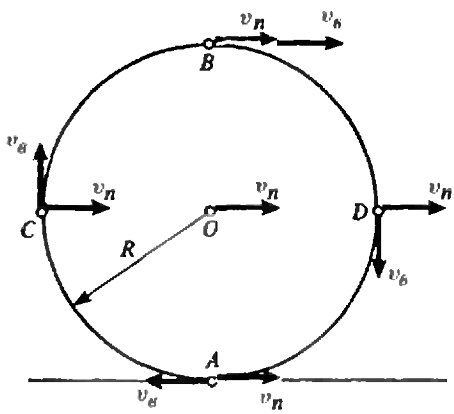


Рис. 1.

— Конечно, колесо ведь симметрично относительно своего центра. Получается, что векторная сумма импульсов этих двух симметричных элементов в точности равна нулю. А значит, и суммарный импульс всех элементов при вращении равен нулю. Красиво получилось, бумага действительно не потребовалась. Итак, вращается колесо или не вращается — с точки зрения импульса это все равно. Импульс определяется только скоростью поступательного движения.

— Может быть, и с энергией дело обстоит так же просто, и энергия катящегося колеса равна $mv_п^2/2$, как было бы для чисто поступательного движения?

— Ну нет, с энергией этот фокус не пройдет — энергия чисто вращательного движения уже не равна нулю.

— Конечно, энергии диаметрально противоположных элементов уже не сокращают друг друга: они пропорциональны квадрату скорости и всегда положительны. Ничего не поделаешь: придется разбивать колесо на малые элементы, для каждого из них вводить свою скорость $\vec{u}_i = \vec{v}_п + \vec{v}_i$, где v_i — скорость вращательного движения (разная для разных элементов).

— Может быть, все это не так уж страшно. Попробуем записать выражение для полной энергии:

$$E = \Sigma E_i = \Sigma \frac{\Delta m u_i^2}{2} = \Sigma \frac{\Delta m}{2}(\vec{v}_п + \vec{v}_i)^2 =$$

$$= \Sigma \frac{\Delta m}{2}(v_п^2 + v_i^2 + 2\vec{v}_п \cdot \vec{v}_i).$$

— Мне все понятно, кроме последнего слагаемого в скобках.

— Это скалярное произведение векторов $\vec{v}_п$ и $\vec{v}_i$. Мы ведь возводили в квадрат вектор $(\vec{v}_п + \vec{v}_i)$, т. е. умножали его на самого себя.

— Да, да, конечно. Но тогда это слагаемое равно $v_п v_i \cos\alpha_i$, где α_i — угол между $\vec{v}_п$ и $\vec{v}_i$.

— Вот именно. Давай снова возьмем диаметрально противоположные элементы. Если для одного из них $\cos\alpha > 0$, то для другого $\cos\alpha < 0$, но имеет тот же самый модуль. А значит, сумма всех слагаемых, соответствующих последнему члену в скобках, тоже равна нулю, и для кинетической энергии катящегося колеса мы получим

$$E = \Sigma \frac{\Delta m}{2}(v_п^2 + v_i^2).$$

— Давай раскроем скобки и учтем, что $v_п$ для всех элементов одна и та же:

$$E = \Sigma \frac{\Delta m}{2} v_п^2 + \Sigma \frac{\Delta m}{2} v_i^2 =$$

$$= \frac{v_п^2}{2}\Sigma\Delta m + ? = \frac{mv_п^2}{2} + ?$$

— А что это за вопросительные знаки?

— Мне не совсем понятно, что означает $\Sigma\Delta m/2\, v_i^2$, если $\vec{v}_i$ — разные.

— Это кинетическая энергия чисто вращательного движения, т. е. сумма кинетических энергий всех элементов. Значит, полная кинетическая энергия катящегося колеса равна сумме кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращательного движения...

— Относительно центра колеса!

— Да, конечно. Итак,

$$E = E_п + E_в.$$

— Это неплохо, но все-таки окончательного выражения для энергии мы не получили — ведь мы не умеем вычислять $E_в$.

— Вот если бы у нас было не колесо, а обруч...

— А чем это было бы хорошо?

— У обруча все точки имеют одну и ту же (по абсолютной величине) скорость вращательного движения.

— И мало того, они движутся со скоростью, как раз равной скорости поступательного движения. Иначе возникало бы проскальзывание — нижняя точка не покоилась бы относительно дороги.

— Помню, помню. Но тогда кинетическая энергия катящегося обруча будет равна

$$E_к = \frac{mv_п^2}{2} + \frac{mv_п^2}{2} = mv_п^2.$$

— Красивый ответ. Значит, при качении кинетическая энергия вдвое больше, чем при поступательном движении обруча с той же скоростью. А напиши кто-нибудь формулу $E_к = mv^2$, особенно на экзамене...

— Да, ему не позавидуешь. Кстати, для велосипедного колеса наш результат вполне применим: ведь такое колесо — это почти обруч.

— Ну что ж, мы хорошо поработали с колесом. Надо признать — вот уж действительно великое изобретение. Насколько быстрее оно позволяет двигаться...

— А кстати, давай посмотрим, на сколько. Вот как раз дорога идет вниз. Я становлюсь на роликовую доску, а ты отпускаешь без толчка обруч. Кто быстрее? Смотри — я заметно обгоняю обруч!

— Но ты ведь тоже на «колесах».

— Неважно. Их роль в данном случае — лишь уменьшить трение практически до нуля. Это своего рода идеальная смазка (масса роликов ничтожна по сравнению с моей массой).

— Вот тебе и великое изобретение! Выходит, что колесо на наклонной плоскости разгоняется медленнее, чем тело, которое просто соскальзывает.

— Просто, но без трения.

— А какая, собственно, сила разгоняет колесо, катящееся с горы?

— Что же тут сложного? Конечно, сила тяжести (mg). Колесо же катится вниз.

— Хорошо, а какая сила раскручивает колесо? Ведь оно, разгоняясь, вращается все быстрее.

— Тоже сила тяжести: раз она разгоняет — она и раскручивает, это же понятно.

— Понятно? Не совсем. Дело в том, что разгонять сила тяжести может, а вот раскручивать — никак.

— Почему?

— Колесо может раскрутить только такая сила, момент которой относительно центра не равен нулю. А момент силы тяжести (см. рис. 2)...

— ...равен, конечно, нулю. Что же это тогда за таинственная сила, которая раскручивает колесо?

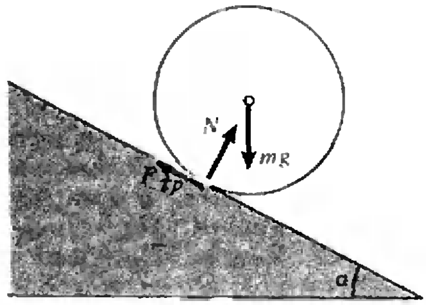


Рис. 2.

— Давай подумаем. Кроме Земли, наше колесо взаимодействует только с дорогой.

— Сила нормальной реакции (N) нам тоже не поможет: она направлена вдоль радиуса и поэтому ее момент относительно центра колеса тоже равен нулю.

— Но больше никаких сил нет!

— И все-таки, если уж колесо раскручивается, должна быть еще какая-то сила. Просто мы ее не видим.

— Вот если бы колесо не скатывалось, а соскальзывало...

— А чем это могло бы помочь?

— Если бы колесо соскальзывало, на него действовала бы еще сила трения ($F_{тр}$). Эта сила направлена по касательной, и уж ее-то момент нулю никак не равен. Поэтому сила трения и раскручивала бы колесо.

— Час от часу не легче! Если колесо соскальзывает, то ему незачем раскручиваться.

— Да, мы все получили наоборот: катящееся колесо раскручивается — однако не видно силы, которая его раскручивает; если же оно соскальзывает — такая сила есть, но нет раскручивания.

— Придумал! Есть подходящая сила — это тоже сила трения.

— Какое же может быть трение колеса о дорогу, если нижняя точка колеса покоится относительно дороги?

— Но между телами, которые покоятся друг относительно друга, тоже может действовать сила трения.

— Конечно! Сила трения покоя. Мы почему-то о ней совсем забыли.

— Теперь, кажется, все становится понятным: эта сила направлена по касательной назад, она и раскручивает колесо. Вопросов больше нет.

— У тебя нет.

— А у тебя?

— Сила трения покоя направлена назад — значит, она притормаживает колесо? Раскручивает и в то же время притормаживает? Но ведь скорости поступательного и вращательного движений должны быть все время одинаковы — иначе неизбежно проскальзывание. Как же может сила трения одну из них увеличивать, а другую уменьшать?

— Я, кажется, понял, в чем дело. На самом деле обе скорости — поступательного и вращательного движений — возрастают. Дело в том, что на поступательное движение влияют, кроме силы трения, сила тяжести и реакция опоры. Их совместное действие вызывает, конечно же, не торможение, а разгон колеса.

— А можно ли определить, чему равна сила трения?

— Не думаю, что это так просто. Ведь это сила трения покоя, а она может быть любой...

— Так уж и любой!

— Ну, конечно, не превышающей $F_{тр}=\mu N$, где μ — коэффициент трения; но уже в этих пределах — любой. Поэтому-то задачи, в которых присутствует сила трения покоя, обычно «с подвохом».

— Если бы мы могли найти ускорение колеса...

— Разумеется, тогда можно было бы применить второй закон Ньютона*): $m\vec{a}=m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}_{тр} \Rightarrow \vec{F}_{тр}=m\vec{a}-m\vec{g}-\vec{N}$.

— Но как узнать ускорение? Из того же второго закона Ньютона? Вряд ли...

— Давай попробуем обходной путь — применим закон сохранения механической энергии. Ведь действие силы трения покоя не приводит к переходу механической энергии во внутреннюю.

*) Для особо придирчивых читателей уточним, что второй закон Ньютона применим к телу, движущемуся произвольно (не обязательно поступательно), если под $\vec{a}$ понимать ускорение центра масс.

— При скатывании потенциальная энергия переходит в кинетическую. Правда, это кинетическая энергия поступательного и вращательного движений — значит, на кинетическую энергию поступательного движения остается меньше... ровно вдвое меньше.

— Ну, «ровно» — это для обруча, а не для колеса.

— Не отвлекайся. Будем считать колесо обручем. Вперед!

— Если кинетическая энергия поступательного движения на том же пути при скатывании вдвое меньше, чем при соскальзывании без трения, то и ускорение центра тоже должно быть вдвое меньше.

— Откуда это следует?

— При равноускоренном движении без начальной скорости справедлива формула $v^2=2as$, т. е. на том же пути квадрат скорости пропорционален ускорению. Но ведь кинетическая энергия пропорциональна как раз квадрату скорости.

— Ускорение центра колеса без трения (при соскальзывании) было бы $g\sin\alpha$, значит, при качении $a=(g\sin\alpha)/2$.

— И мы, наконец, получаем выражение для силы трения покоя при скатывании обруча (для этого нужно лишь записать уравнение второго закона Ньютона в проекциях на ось, параллельную наклонной плоскости):

$$F_{тр}=mg\sin\alpha-\frac{1}{2}mg\sin\alpha=\frac{1}{2}mg\sin\alpha.$$

— Ты считаешь, что мы решили задачу?

— Как, ты и теперь остался с какими-то вопросами? Мы же так исчерпывающе все разобрали, поняли, какие силы действуют на колесо; нашли даже выражение для неудобной силы трения покоя...

— Вот это выражение меня и не устраивает. Мне не нравится, что в него вообще не вошел коэффициент трения μ.

— Да, странно... Впрочем, так и

должно быть. Ведь этот коэффициент определяет лишь максимальную силу трения покоя.

— Но у нас это ограничение на силу трения вообще не учитывается.

— Согласен, его надо учесть:

$$F_{тр}=\frac{1}{2}mg\sin\alpha\leqslant F_{тр\,max}=\mu N=$$

$$=\mu mg\cos\alpha,\text{ или }\operatorname{tg}\alpha\leqslant 2\mu.$$

— Что бы могло означать такое неравенство? Насколько я помню, для невращающегося тела (например, бруска) скольжение начинается при $\operatorname{tg}\alpha>\mu$. А у нас?

— А у нас скольжение колеса (обруча) начнется при большем угле, когда $\operatorname{tg}\alpha>2\mu$.

— Неужели при бóльших углах наклона колесо будет не скатываться, а скользить? Давай проверим: возьмем вместо колеса трубку, положим на стекло (чтобы уменьшить μ) и будем наклонять... Смотри!

— Трубка катится при любом угле.

— Чего же тогда стóит наше ограничение?

— А разве может трубка при движении вниз не крутиться вообще? Вспомни, мы с тобой установили, что если сила трения есть (а она ведь есть при любом угле наклона), то она будет обязательно раскручивать колесо или трубку.

— Значит... колесо будет скатываться, но проскальзывая?

— По-моему, да. И тогда силу трения покоя сменит сила трения скольжения, и...

— Слушай, давай на этом остановимся — по крайней мере, сегодня. Мы оба устали, а новые вопросы могут сыпаться из этого колеса еще долго — сомневаться в этом уже не приходится.

Неопределенные уравнения первой степени

(Начало см. на с. 42)

где α и β — *многочлены первой степени от t с целыми коэффициентами*. Заметим теперь, что НОД $(c;\ h)=1$, поскольку h, будучи делителем чисел a и b, не делит c. Отсюда вытекает, что уравнение (6) имеет целые решения вида

$$z=\gamma+ht'',\quad t=\delta-ct''.$$

Подставляя это значение t в формулы для x и y, мы представим эти неизвестные в виде многочленов первой степени с целыми коэффициентами от t' и t''. Давая t' и t'' произвольные целые значения, мы получим все целые решения x, y и z исходного уравнения.

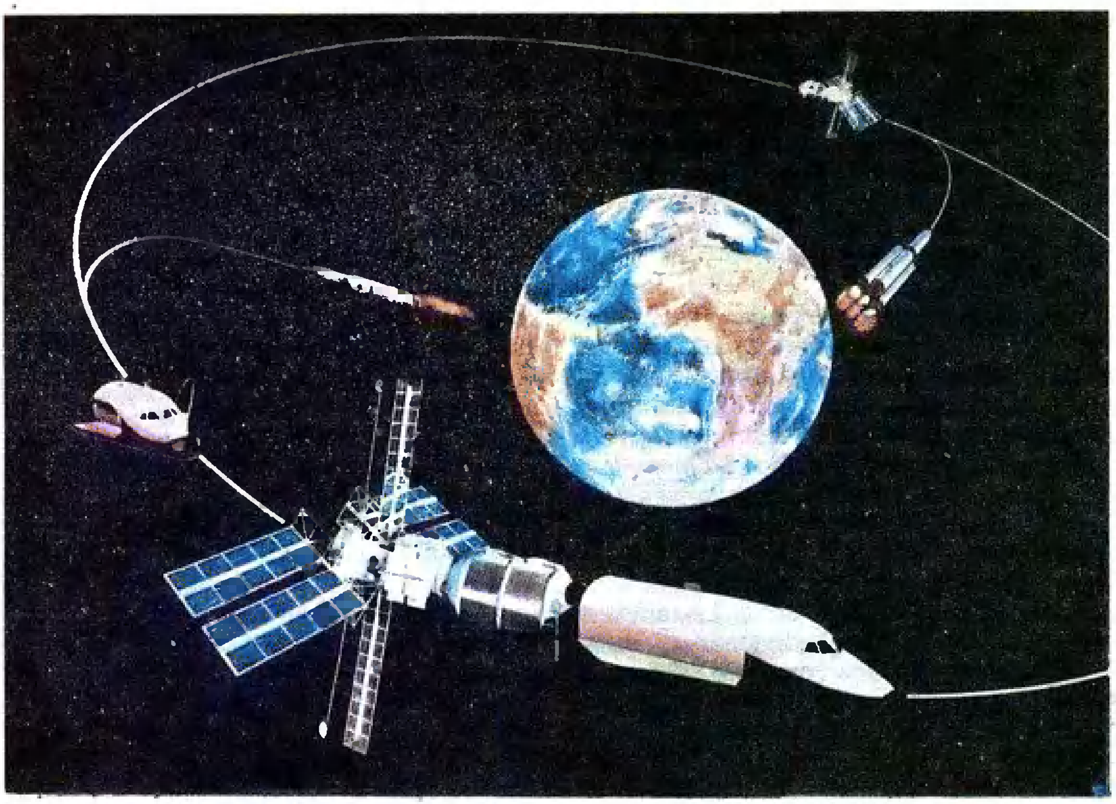
Задачи для самостоятельного решения

1. Решите задачу, сформулированную в начале статьи.

2. Решите в целых числах уравнения:
а) $5x+8y=29$;
б) $89x-144y=1$;
в) $16x+4y=1830$;
г) $7x+4y+9z=89$;
д) $10x+13y+8z=143$;
е) $(a^3+a-1)x+(a-a^4)y=(a^4+2a)(1-a^3)$, где a — целое число;
ж) $(3x+y)(x+y)=p$, где p — данное простое число.

3. Найдите все двузначные числа, кратные произведению своих цифр.

4. Найдите трехзначное число, в 34 раза большее суммы своих цифр.



Р — значит ракета

По ступеням космических скоростей

В. ТУРОВ

Бывают даже такие дети
(я их встречал),
которым хочется знать,
как выглядит черная дыра...

К. Саган

Мы живем на дне глубокого гравитационного «колодца». Изучением этого дна — поверхности Земного шара — заполнена вся история человечества. Но всегда находились отчаянные мечтатели — легенда об Икаре тому свидетельство,— которым хотелось шагнуть не за горизонт, а — ввысь. Трудами многочисленных ученых, начиная с безвестных халдейских звездочетов, через Птолемея и Коперника, Галилея и Кеплера, и, наконец, великого Ньютона, люди пришли к пониманию закономерностей движения в поле сил тяжести.

А. Штернфельд*), один из пионеров космонавтики, размышляя о возможности полета в космическом пространстве, ввел, независимо от К. Э. Циолковского, понятие первой космической скорости и предложил ее «в качестве единицы для сравнения космических скоростей, характеризующих данную планету». Далее он выстроил целую систему космических скоростей — своеобразную космическую лестницу. Давайте пройдем по нескольким ступеням этой лестницы.

Предварительно получим простое, но очень важное соотношение для потенциальной энергии тела в центрально-симметричном гравитационном поле, т. е. таком поле, в котором величи-

*) Об этом ученом рассказывалось в статье «Бросайся вниз, если хочешь взлететь повыше» («Квант», 1991, № 3).

на силы тяжести зависит только от расстояния до центра тяготения. Именно таким является поле всех космических тел, которые приближенно можно считать сферическими,— планет, звезд и т. п.

Элементарная работа перемещения тела массой m в поле тяготения небесного тела массой M равна

$$dA = F dr = -GMm dr/r^2,$$

где r — расстояние между центрами масс обоих тел, G — гравитационная постоянная. Изменение потенциальной энергии тела, когда его расстояние до центра тяготения меняется от r_1 до r_2, равно работе, совершаемой над телом при таком перемещении:

$$\Delta E_p = -\int_{r_1}^{r_2} dA = GMm(1/r_1 - 1/r_2).$$

Подсчитаем минимальную энергию, требующуюся для выведения космического корабля на круговую орбиту радиусом r с поверхности планеты радиусом r_0. В этом случае нам необходимо не только изменить потенциальную энергию корабля в поле тяготения, но и сообщить ему некоторую кинетическую энергию для обращения по круговой орбите. Скорость обращения находится из условия равенства ускорения свободного падения и центростремительного ускорения:

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{v^2_{кр}(r)}{r}$$

и составляет

$$v_{кр}(r) = \sqrt{GM/r}.$$

Тогда минимальная кинетическая энергия, которую должны сообщить кораблю двигатели при взлете, равна

$$mv^2_{в}(r)/2 = mv^2_{кр}(r)/2 + \Delta E_p = GmM(1/r_0 - 1/(2r)),$$

откуда находим взлетную скорость, позволяющую вывести корабль на круговую орбиту радиусом r:

$$v_{в}(r) = \sqrt{GM(2/r_0 - 1/r)}.$$

Возьмем вначале радиус орбиты $r = r_0$. Тогда

$$v_{в}(r_0) = \sqrt{GM/r_0} = v_1,$$

где v_1 — первая космическая скорость для рассматриваемой планеты.

Для Земли, которая естественно интересует нас прежде всего, $v_{13} = 7{,}9$ км/с.

Пусть теперь $r \to \infty$, т. е. корабль, стартуя с поверхности планеты, имеет такую скорость, что способен преодолеть узы тяготения планеты и удалиться от нее на произвольно большое расстояние. При этом корабль будет двигаться по параболической траектории. По этой причине такая скорость носит название параболической относительно данной планеты, или второй космической. Она равна

$$v_{в}(\infty) = v_{пар} = \sqrt{2GM/r_0} = \sqrt{2}\, v_1 = v_2.$$

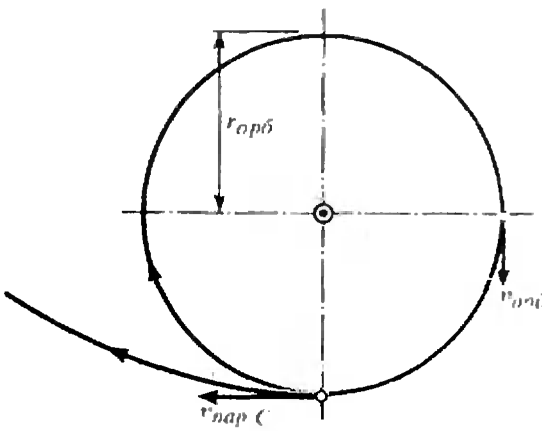
Для Земли $v_{23} = 11{,}2$ км/с.

Все эти рассуждения справедливы для изолированной планеты. Однако, если планета входит в планетную систему, имеющую центральное светило — Солнце, то, освободившись от тяготения планеты, корабль отнюдь не избавится от притяжения Солнца. Теперь он станет обращаться по замкнутой траектории вокруг Солнца.

Чтобы разорвать путы солнечного притяжения, мы должны сообщить кораблю параболическую скорость относительно Солнца (см. рисунок):

$$v_{пар\,С} = \sqrt{2GM_С/r_{орб}} = \sqrt{2}\, v_{орб},$$

где $M_С$ — масса Солнца, $r_{орб}$ — радиус орбиты планеты, которую мы для про-



стоты считаем круговой, $v_{орб}$ — скорость орбитального движения планеты.

Для Земли $v_{орб}=29{,}8$ км/с и $v_{пар\,С}=42{,}1$ км/с.

Означает ли это, что мы обязаны разогнать корабль до скорости 42,1 км/с для того, чтобы он ушел произвольно далеко от Солнца? Конечно, нет, ведь мы можем использовать грандиозную катапульту, которой снабдила нас природа,— Землю, несущуюся по своей орбите со скоростью $v_{орб}$. Легко понять, что для Земли скорость, позволяющая, хотя бы в принципе, долететь до любого космического объекта, расположенного в плоскости орбиты Земли за пределами Солнечной системы,— третья космическая скорость — равна

$$v_3=\sqrt{v_2^2+(v_{пар\,С}-v_{орб})^2}=16{,}7\ км/с.$$

Итак, сообщив кораблю скорость v_3 у поверхности Земли, мы можем послать его к любой звезде, лежащей в плоскости обращения Земли. К любой, кроме ближайшей — Солнца! Это — один из парадоксов, отмеченных А. Штернфельдом.

Можно показать, что для того, чтобы корабль мог двигаться по направлению к центру Солнца, нужно полностью компенсировать орбитальное движение Земли. Тем самым, четвертая космическая скорость относительно Земли равна

$$v_4=\sqrt{v_2^2+v_{орб}^2}=31{,}8\ км/с.$$

Далее, следуя Штернфельду, можно ввести понятия пятой и шестой космических скоростей. Пятая позволяет достичь любого космического объекта, двигаясь в плоскости, перпендикулярной к плоскости орбиты Земли. Она определяется выражением

$$v_5=\sqrt{v_2^2+v_{орб}^2+v_{пар\,С}^2}=52{,}8\ км/с.$$

При шестой космической скорости так же, как и в случае третьей, полет происходит по параболе в плоскости орбиты Земли, но стартовать можно против направления орбитального движения, что позволяет лететь к избранному космическому объекту в произвольный момент времени. Эта скорость равна

$$v_6=\sqrt{v_2^2+(v_{орб}+v_{пар\,С})^2}=72{,}8\ км/с.$$

А. Штернфельд считал, что эти скорости могут быть полезны при изучении комет.

И наконец, вернемся еще раз к выражению для параболической скорости относительно какого-либо гравитирующего тела сферической формы

$$v_{пар}=\sqrt{2GM/R}.$$

Как мы видим, величина этой скорости зависит от массы тела M и от его радиуса R, причем с уменьшением радиуса скорость увеличивается. В ньютоновской механике нет никаких ограничений для величины скорости, однако мы знаем, что такие ограничения возникают в специальной теории относительности: никакой материальный объект не может иметь скорость, бо́льшую скорости света в вакууме $c=3\cdot10^5$ км/с.

Для гравитирующего тела можно поставить вопрос: какой радиус должно иметь это тело для того, чтобы никакой материальный объект не мог удалиться от него на произвольно большое расстояние? Такой радиус называется гравитационным радиусом данного тела и определяется выражением

$$R_{гр}=2GM/c^2.$$

Попробуйте самостоятельно посчитать гравитационный радиус для Земли и оценить, какой при этом стала бы плотность земного вещества.

Оказывается, если по тем или иным причинам размер какого-либо тела становится меньше гравитационного радиуса, тело превращается в черную дыру. Тем читателям, кому захочется узнать побольше о свойствах этих образований, рекомендую прочитать прекрасную книгу выдающегося английского ученого С. Хокинга «От большого взрыва до черных дыр», вышедшую в издательстве «Мир» в 1990 году. Из предисловия к этой книге американского астрофизика К. Сагана и взят наш эпиграф.

„Квант" улыбается

Кроссворд

продолжение кроссворда от 29 ноября 1981 г.

Сегодня «Квант» улыбается вместе с московским физтехом и их газетой «За науку», а именно с номером, посвященным 10-летнему юбилею СТЭМ ФОПФ (см. в кроссворде № 32 и 42). Кстати, кроссворд ими (т. е. стэмфопфовцами, или стэмцами, или...?) и составлен.

31. Великий писатель: А. К., или Л. Н., или А. Н.

32. Студенческий Театр Эстрадных Миниатюр Факультета Общей и Прикладной Физики (8 букв).

33. Известный композитор по кличке Ван.

34. Который сейчас час?

35. Известное произведение.

36. Порядковый номер вопроса под номером 8 в предыдущем кроссворде.

38. Сумасшедшая курица.

39. 3.30

40. Главный герой любого фильма: положительный — положительный, отрицательный — отрицательный.

41. Первый чемпион мира по плаванию.

42. На какой год СТЭМ ФОПФ празднует свое десятилетие.

148. $\int erf(x^2 sh^3 \times \times tg\left(\frac{\pi^2 - x^3}{5}\right))dx.$

149. Газообразная оболочка Земли (5 букв, первая а).

149. Что, не подходит? Тогда из 9-ти.

150. Уважаемый человек.

151. Пусто.

152. Дубль пусто.

153. Ранил.

154. Погибаю, но не сдаюсь.

47. Номера с 148-го до 154-го считать номерами с 40-го до 46-го.

48. Брат-близнец Ленина.

49. Брат-близнец партии.

50. Утка во фраке.

51. ****

52. Нужное подчеркнуть, ненужное зачеркнуть.

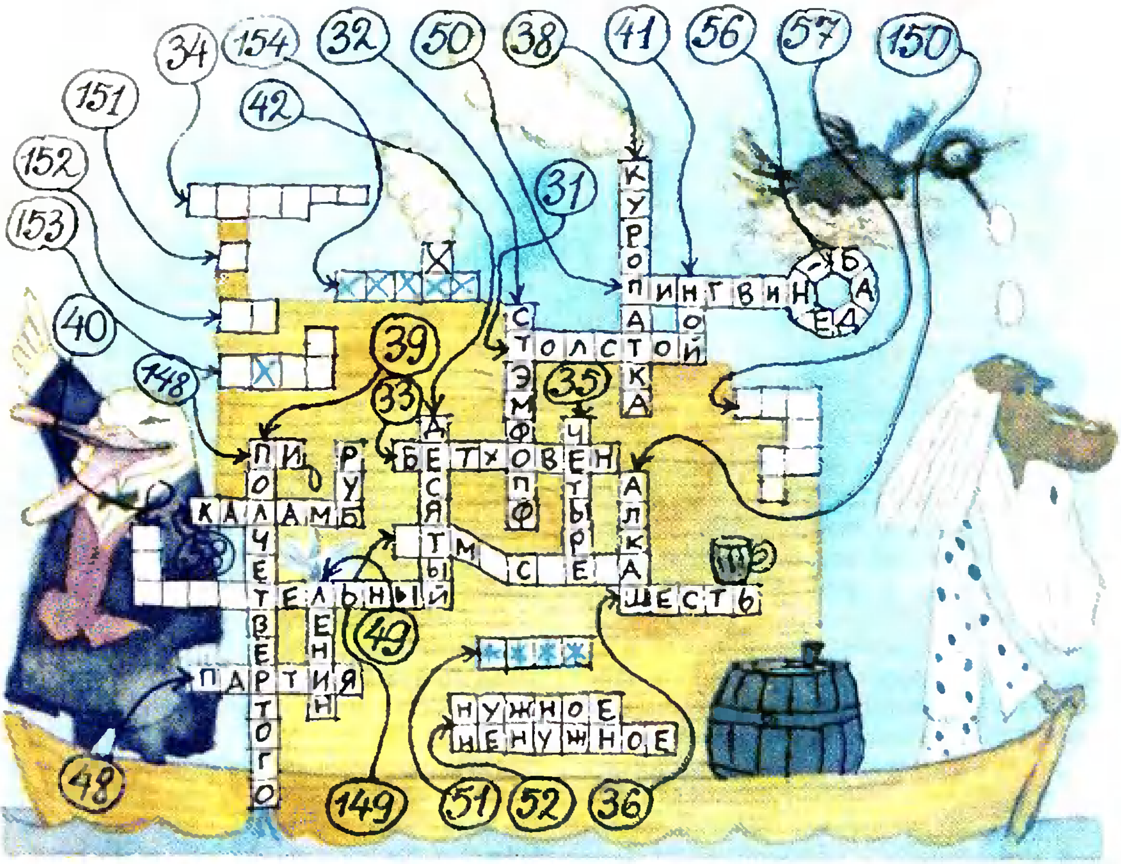
53. У вас банкрот. Переход хода.

56. Город в Западной Европе, 2 оборота.

57. А теперь напишите сюда буквы, которые знаете.

58. А к этому слову вопрос подберите сами.

59. Вот и все.



Информатика

Алгоритм

Доктор физико-математических наук
Л. СТОЛЯРОВ

Слово «алгоритм» прочно вошло в наш лексикон с появлением электронных вычислительных машин как обозначение для совокупности действий, составляющих некоторый процесс. И хотя мы подразумеваем здесь, как правило, процесс решения некоторой задачи, но и кулинарный рецепт, и инструкция по пользованию стиральной машиной, и многие другие правила, часто не имеющие отношения к математике, являются алгоритмами. Да и в математике такие чисто геометрические задачи, как задачи на построение, содержат в своем решении алгоритмы.

Термин «алгоритм» произошел от имени ученого VIII—IX веков Аль-Хорезми. Его имя говорит, что родился он в городе Хорезме (который сейчас входит в состав Узбекистана). Большую часть своей жизни Аль-Хорезми провел при дворе багдадских калифов. С его именем связывают создание в Багдаде «Дома мудрости» — багдадского хранилища рукописей. Из математических работ Аль-Хорезми до нас дошли всего две — алгебраическая и арифметическая. Алгебраическая работа называется «Альджебр уальмукабала», что означает «Восстановление и противоположение». Восстановлением он называл перенос отрицательных членов в другую часть уравнения, а противоположением — сокращение равных членов в разных частях уравнения. От названия этой книги родилось слово алгебра. Вторая книга, долгое время считавшаяся потерянной, была найдена в 1857 году в библиотеке Кембриджского университета. Точнее, был найден ее перевод на латинский язык. В этой книге даны четкие правила арифметических действий, практически те же самые, что используются и сейчас. Первые строки этой книги были переведены так: «Сказал Алгоритми. Воздадим должную хвалу Богу, нашему вождю и защитнику». Так имя Аль-Хорезми перешло в Алгоритми, откуда и появилось слово алгоритм. Его ввел в обиход немецкий математик Эрнст Шредер (1841—1902) для обозначения вычислительных процедур механического характера.

Интуитивное понятие об алгоритме как о системе предписаний для действий не могло удовлетворить математиков уже в прошлом веке, не говоря уже о нынешнем, когда информатика прочно вошла во все сферы человеческой деятельности.

В двадцатых годах нашего века задача точного определения понятия алгоритма стала одной из центральных проблем математики. Дело в том, что тогда существовало две точки зрения на математические проблемы:

1. Все проблемы алгоритмически разрешимы, но для некоторых алгоритм еще не найден, поскольку еще не развиты соответствующие разделы математики.

2. Есть проблемы, для решения которых вообще не может существовать алгоритма.

Правы оказались сторонники второй точки зрения, но для того, чтобы ее обосновать, необходимо было дать четкое определение алгоритма. Это было сделано трудами целой плеяды математиков, в которую входили К. Гёдель, А. Чёрч, С. Клини, А. Тьюринг, Э. Пост, А. Марков, А. Колмогоров и многие другие.

Точное определение понятия алгоритма дало возможность к настоящему времени доказать алгоритмическую неразрешимость более десятка математических проблем. В их число входит и знаменитая десятая проблема Д. Гильберта, выдающегося немецкого математика конца прошлого — начала нынешнего века, сформулировавшего список наиболее важных проблем математики своего времени.

Десятая проблема Гильберта связана с решениями так называемых «диофантовых уравнений», т. е. уравнений вида $P(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n)=0$, где P — многочлен с целыми коэффициентами, например $x+y+z=1$ или $x^n+y^n=z^n$. Гильберт формулировал ее так:

«Пусть дано произвольное диофантово уравнение с произвольным числом неизвестных..., требуется указать общий метод, следуя которому, можно было бы в конечное число шагов узнать, имеет ли данное уравнение решение в целых... числах или нет».

Есть основания считать, что Гильберт был убежден в существовании общего метода и хотел стимулировать его поиск. Алгоритмическую неразрешимость этой проблемы доказал в 1970 году советский математик Ю. Матиясевич, талант которого проявился еще в школьные годы на математических олимпиадах.

С различными взглядами на понятие алгоритма мы постараемся познакомить читателей в последующих номерах журнала, а сейчас сформулируем современные наглядные представления об алгоритмах для процессов обработки данных, принятые в вычислительной практике.

1. Данные

Объекты, с которыми нужно будет оперировать, принято называть конструктивными объектами. Алгоритм перерабатывает исходные конструктивные объекты в результирующие конструктивные объекты.

1.1. Идентификация данных

Каждый конструктивный объект должен быть идентифицирован (выделен) среди других конструктивных объектов тем или иным способом. Так, например, цифры различаются по написанию, шахматные фигуры по названию, цвету и координатам положения на шахматной доске.

1.2. Структура данных

Из совокупности конструктивных объектов выделяются те, которые задаются изначально. Они называются элементарными, а их совокупность называется алфавитом. Остальные конструктивные элементы называются сложными и создаются из элементарных при помощи тех или иных операций. Например, натуральные числа представляются строками из цифр.

1.3. Конечность данных

Алфавит всегда должен содержать конечное количество элементов. В то же время из элементов алфавита может быть образовано бесконечное число сложных конструктивных объектов. Так, из алфавита, содержащего лишь десять цифр, может быть образовано множество натуральных чисел, которое бесконечно, но множество натуральных чисел не может входить в алфавит.

2. Процесс

Алгоритмический процесс расчленяется на отдельные шаги. Каждый шаг переводит состояние, возникшее перед этим шагом, в другое, последующее состояние. Состояния описываются в виде набора конструктивных объектов. Преобразование производится одной операцией из конечного списка операций, специально введенных для каждого конструктивного объекта.

3. Процессор

Процессор выполняет действия по преобразованию состояний, записи и хранению информации о состояниях. Действия выполняются в соответствии с заданным порядком выбора команд. Запись команд на каком-либо языке и соглашение по порядку их выполнения и является конкретным алгоритмом. Этот язык может быть языком программирования (Бейсик, Паскаль, Фортран), язык машины Тьюринга или обычный человеческий язык, которым написаны, например, правила сложения чисел в книге Аль-Хорезми.

Разумеется, не всякий процесс преобразования одного состояния в другое можно назвать алгоритмом. Так, физический процесс преобразования энергии падающей воды в электрическую энергию не принято называть алгоритмом.

Алгоритмические процессы должны удовлетворять ряду требований.

Детерминированность

При применении алгоритма к одним и тем же исходным данным всегда должен получаться один и тот же результат, поэтому, скажем, процесс преобразования информации, в котором участвует бросание монеты, не является детерминированным и не может быть назван алгоритмом.

Массовость

Алгоритм служит, как правило, для решения некоторого класса задач, а не одной конкретной задачи. Так, алгоритм сложения чисел применим к любой паре натуральных чисел.

Результативность

Искомый результат должен быть получен через конечное число шагов, после чего процесс должен остановиться, и можно прочесть искомый результат. Некоторые алгоритмы для одних исходных данных приводят к результату за конечное число шагов, для других же это не происходит. В таком случае говорят об области применимости данного алгоритма.

Процесс дальнейшего уточнения понятия алгоритма продолжается и по сей день. При этом развиваются формальные стороны этого понятия, предназначенные для решения проблем оценки сложности алгоритмов, преобразований алгоритмов в целях практического программирования и для ряда других целей.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 33)

ко (Мукачево) **08, 10**; *С. Макаров* (Усинск) **08—11**; *С. Малащицкая* (Кузнецовск) **09, 11**; *Ю. Маравин* (Евпатория) **98, 99, 02—12**; *А. Матрунич* (Ужгород) **98—06, 08, 10, 11**; *М. Махмудов* (Исфара) **03—06, 08—11**; *П. Мелентьев* (Старый Оскол) **98, 06, 08, 11**; *В. Мушик* (Кузнецовск) **11**; *А. Мясоед* (Старый Оскол) **08, 11**; *А. Нежуренко* (Киев) **98—01, 03—12**; *М. Немировский* (Одесса) **98, 02, 04, 06, 08, 10—12**; *А. Носиков* (Винница) **08, 11**; *А. Овсянников* (Старый Оскол) **08**; *А. Ольховец* (Киев) **98, 99, 02—06, 08—11**; *А. Ордабаев* (Алма-Ата) **03—06, 08, 10, 11**; *Д. Островский* (Санкт-Петербург) **98, 01, 02, 08, 10—12**; *Х. Отоженов* (Ургенч) **08**; *Д. Пастухов* (Витебск) **98, 00, 02, 04—11**; *Д. Петрайтис* (Вольск) **04, 06, 08, 11**; *Я. Пикаев* (Владивосток) **03**; *А. Пикалов* (Канаш) **98, 02**; *М. Плетюхов* (Брест) **00, 02—06, 08—11**; *В. Понкратов* (Старый Оскол) **08, 11**; *С. Рассадин* (Минск) **03, 04, 08, 09, 11, 12**; *Е. Рослый* (Омск) **05, 06, 11**; *Д. Рузметов* (Ургенч) **08**; *Ш. Рузметов* (Хивинский р-н Хорезмской обл.) **03, 08, 11**; *В. Рыбачук* (Винница) **00, 03, 08, 11**; *С. Самсонов* (Старый Оскол) **08, 11**; *И. Сихарулидзе* (Тбилиси) **11**; *Д. Смирнов* (Кузнецовск) **03, 04**; *А. Сокдаков* (Брест) **04, 08, 11**; *А. Терентьев* (Канаш) **98, 00, 02, 04—06, 08, 11**; *С. Тимощук* (с. Черница Ровенской обл.) **08, 09, 11**; *В. Толпекин* (Одесса) **99, 03, 04, 06, 09, 11**; *С. Тумача* (Киев) **08, 09, 11**; *А. Файзуллаев* (Шаватский р-н Хорезмской обл.) **03, 04, 08, 10, 11**; *Д. Федорец* (Харьков) **04**; *Р. Халков* (Старый Оскол) **08, 11**; *А. Хацкевич* (Брест) **98, 02**; *Д. Чигирев* (Санкт-Петербург) **03, 04, 06, 08—11**; *Д. Чиркин* (Грозный) **00, 02—04, 07**; *А. Чистый* (Брест) **00, 02—06, 08, 10, 11**; *Д. Чичкан* (Барановичи) **06, 07, 10—12**; *И. Ширяев* (Кузнецовск) **03, 04, 09, 11**; *А. Шпагин* (Мариуполь) **98—00, 02, 04—06, 08—12**; *О. Шпырко* (Киев) **98—12**; *И. Шумович* (Николаев) **08, 09, 12**; *Т. Шутенко* (Мариуполь) **98—12**; *Д. Юдин* (Самара) **98, 02, 04, 05, 08—11**; *Р. Якупов* (Кузнецовск) **98, 99, 01—04, 06, 08—11**; *Р. Янченко* (Кузнецовск) **03, 04, 08, 09, 11**.

Игры и головоломки

Новая игра на клетчатой бумаге

Клетчатая бумага всегда под рукой. Поэтому большой популярностью пользуются всевозможные игры, использующие ее в качестве игрового поля, такие как крестики-нолики, рэндзю или го, которыми вечно кто-нибудь развлекается на уроках в школе или на лекциях в институте. Как правило, такие игры предусматривают участие двух противников, в некоторых количество игроков неограниченно. Предлагаем вам игру на клетчатой бумаге для одного.

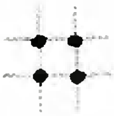


Рис. 1.

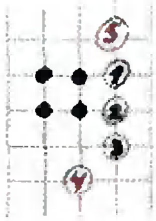


Рис. 2.

На «бесконечном» поле задана начальная конфигурация из четырех точек (рис. 1). Нужно к этим точкам последовательно добавлять новые, подчиняясь следующим двум правилам:

1. Каждая новая точка должна образовывать с предыдущими хотя бы один ряд из трех рядом стоящих точек по вертикали, горизонтали или диагонали.

2. Запрещается ставить точку, если она образует с предыдущими хотя бы один ряд более чем из трех стоящих рядом точек.

Так, на рисунке 2 точки 1, 2, 3 поставлены по правилам, а 4 и 5 — нет, поскольку 4 образует только пару точек (3, 4), а 5 образует четверку точек (5, 1, 2, 3).

Цель игры состоит в том, чтобы поставить как можно больше новых точек.

На рисунке 3 приведены некоторые конечные конфигурации (т. е. такие, к которым нельзя добавить новые точки, не нарушая правил).

Вместо приведенной на рисунке 1 начальной конфигурации можно использовать и другие (примеры даны на рисунке 4). Интересно было бы построить для них конечные конфигурации, а также найти минимальное количество новых точек в таких конфигурациях. Можно строить и конфигурации с заранее заданным числом точек.

Попробуйте доказать, что число новых точек всегда конечно для любой начальной позиции.

С. Хорошкин

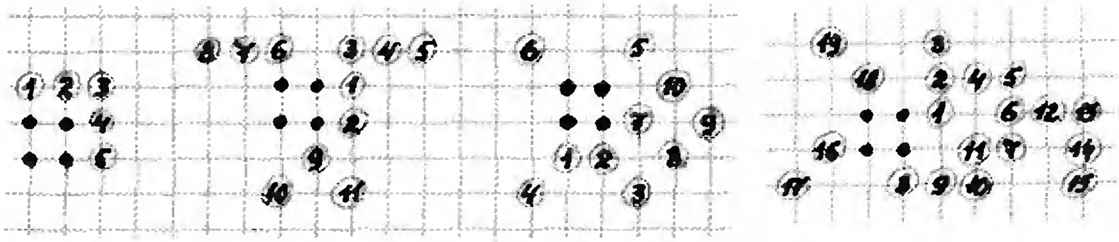


Рис. 3.

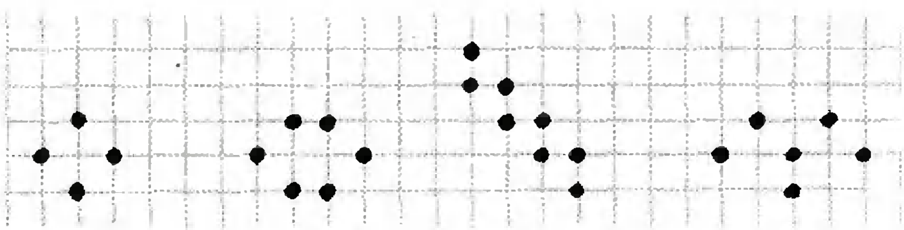


Рис. 4.

Библиотечка Фантастики «Кванта»

Мешок

(фантастический рассказ)

У. МОРРИСОН

Через год Зиблинг уже затруднился бы сказать, что более занимало его: эти часовые беседы с Мешком или хитроумно-дурацкие требования некоторых мужчин и женщин, заплативших свои сотни тысяч за драгоценные шестьдесят секунд. Кроме сравнительно простых вопросов, задаваемых учеными и искателями счастья, желавшими знать, где можно найти драгоценные металлы, попадались и сложные проблемы, занимавшие по нескольку минут.

Все беседы с Мешком, в том числе и беседы Зиблинга, записывались на пленку, а записи хранились в центральном архиве на Земле. Многие из записей Зиблинг не понимал — некоторые потому, что они были сугубо техническими, другие — потому что они были на незнакомом ему языке. Мешок, конечно, немедленно выучивал все языки при помощи процесса, суть которого он так и не смог объяснить Зиблингу, а в центральном архиве технические эксперты и эксперты-лингвисты тщательно изучали каждую фразу каждого вопроса и ответа, чтобы, во-первых, убедиться, что клиент не являлся преступником, и, во-вторых, чтобы иметь данные для сбора налога, когда клиент с помощью Мешка добудет состояние.

К концу года Зиблинг убедился в правильности предсказаний Мешка относительно бедствий, грозящих человечеству. Впервые за столетие число ученых-исследователей не увеличилось, а уменьшилось. Знания Мешка сделали целый ряд исследований ненужными и уничтожили закономерную последовательность открытий. *Мешок прокомментировал* этот факт Зиблингу.

Окончание. См. «Квант» № 2 и № 3.

Зиблинг кивнул:

— Я вижу. Человечество теряет независимость.

— Да, и я из верного его раба превращаюсь в его же хозяина. А я ведь хочу быть хозяином не больше, чем рабом.

— Вы можете уйти, как только захотите.

Человек в ответ на это вздохнул бы — Мешок сказал просто:

— У меня нет сил чего-либо желать. К счастью, эта проблема скоро будет решена без меня.

— Вы имеете в виду политические склоки?

Ценность Мешка невероятно увеличилась, и одновременно с этим усилилась жестокая борьба за право пользоваться его услугами. Финансовая политика приобретала странное направление. Президенты, владельцы и директора стали почти марионетками, ибо все главные вопросы политики теперь решались не на основе изучения фактов, а путем обращения к Мешку. Мешок зачастую давал советы ожесточенным противникам, и это походило на игру в космические шахматы, где гигантские корпорации и правительственные агентства были пешками, а Мешок — игроком, делающим попеременно ходы то за одну, то за другую сторону. Назревали кризисы.

Мешок сказал:

— Я имею в виду и политические склоки и многое другое. Борьба за мои услуги стала слишком жестокой. Она может иметь только один конец.

— Вы имеете в виду, что будет сделана попытка вас украсть?

— Да.

— Вряд ли это возможно. Ваша охрана все время усиливается.

— Вы недооцениваете силу жадности.

Он был прав — Зиблингу пришлось убедиться в этом довольно скоро.

В конце четырнадцатого месяца его службы, спустя полгода после провала Хорригана на перевыборах, появился клиент, заговоривший с Мешком на марсианском диалекте Прдл — экзотическом языке, известном весьма немногим. Он обратил на себя внимание Зиблинга еще и потому, что заранее уплатил миллион за беспрецедентную привилегию говорить с Мешком десять минут подряд. Разговор был записан, но, естественно, остался непонятным ни Зиблингу, ни кому-либо другому из служащих станции. Замечательно было еще и то, что незнакомец покинул астероид через семь минут, так и не использовав оставшиеся три минуты, которых было бы достаточно для получения сведений, как сколотить несколько небольших состояний. Эти три минуты не могли быть использованы другими частными клиентами. Но никому бы и в голову не пришло запретить использовать их правительственному служащему, и Зиблинг сейчас же заговорил с Мешком:

— Что спрашивал этот человек?

— Совета, как украсть меня.

Зиблинг был ошарашен.

— Что?

Мешок всегда воспринимал такие восклицания, выражающие изумление, буквально.

— Совета, как украсть меня,— повторил он.

— Тогда... позвольте... он отбыл тремя минутами раньше. Это означает, что он торопится. Он хочет начать проводить свой план немедленно!

— Он уже проводит его,— ответил Мешок.— Организация преступников отлично, если не досконально, осведомлена о диспозиции войск охраны. Вероятно, кто-то в правительстве оказался предателем. Меня спросили, какой из нескольких планов наилучший, и предложили рассмотреть их с точки зрения слабых мест. Так я и сделал.

— Хорошо, но как мы можем воспрепятствовать выполнению этого замысла?

— Воспрепятствовать ему нельзя.

— Не понимаю почему. Пусть мы не можем помешать им высадиться, но мы можем помешать им удрать отсюда с вами.

— Есть только один путь. Вы должны уничтожить меня.

— Я не могу сделать этого! У меня

нет на это права, а если бы и было — я все равно не смог бы!

— Моя гибель была бы благословением для человечества.

— И все же я не могу,— горестно проговорил Зиблинг.

— Тогда — если это исключается — выхода нет. Они попросили меня проанализировать возможные шаги, которые будут предприняты для преследования, но они не спросили совета, как бежать, ибо это было бы тратой времени. Они успеют спросить, когда я буду у них в руках.

— Значит, я ничего не могу сделать, чтобы спасти вас. Как мне спасти своих людей?

— Вы можете спасти и их и себя, погрузившись в аварийный корабль и вылетев к Солнцу. Тогда вы избежите контакта с преступниками. Но меня с собой не берите, иначе за вами будет погоня.

Крики охраны привлекли внимание Зиблинга.

— Радио сообщает о нападении бандитов, мистер Зиблинг! Сигнализация тревоги не действует!

— Да, я знаю. Готовьте корабль,— Зиблинг снова повернулся к Мешку.— Мы можем бежать, но они захватят вас. И с вашей помощью будут управлять всей системой.

— Не в этом дело,— сказал Мешок.

— Они захватят вас. Можно сделать еще что-нибудь?

— Уничтожьте меня.

— Не могу,— сказал Зиблинг, чуть не плача.

К нему нетерпеливо подбежали его люди, и он понял, что времени больше не осталось. Он пробормотал простую и глупую фразу: «До свидания!», словно Мешок был человеком и мог переживать, как человек, и бросился к кораблю.

Они стартовали вовремя. Полдюжины кораблей неслись к астероиду с нескольких сторон, и корабль Зиблинга успел проскочить как раз за секунду до того, как они оцепили астероид, на котором находился Мешок.

Зиблинг понял, что он и его люди спасены. Дело переходило отныне в руки командования Вооруженными силами, но Зиблинг представил себе, как они выступят против совершенного мозга Мешка, и сердце его сжалось. Но затем произошло нечто совершенно неожиданное. Впервые Зиблинг полностью уразумел, что хотя Мешок и позволил использовать себя, как простую машину, как раба, отвечающего на вопросы, однако это случилось вовсе не потому, что его возможности были ограничены лишь способностью анализировать. Экран телевизора вдруг осветился.

Связист подбежал к Зиблингу:

— Что-то случилось, мистер Зиблинг, ведь телевизор не включен!

Телевизор не был включен. И тем не менее они увидели камеру, в которой Мешок провел четырнадцать месяцев — краткое мгновение своей жизни. В камеру вошли двое — незнакомец, говоривший на Прдл, и сенатор Хорриган.

К изумлению обоих, первым заговорил Мешок. Он сказал:

— «До свидания» — не вопрос и не ответ. Это сообщение не содержит почти никаких сведений.

Хорриган явно благоговел перед Мешком, но был не из тех, кто отступает перед непонятным. Он почтительно произнес:

— Нет, сэр. Разумеется, не содержит. Это просто выражение...

Незнакомец прервал его на превосходном английском языке:

— Заткнитесь, вы, болтун! Нечего терять время. Надо взять его и бежать. Мы поговорим с ним там.

Зиблинг успел обрушить не одно проклятие на голову Хорригана и пожалеть людей, которых бывший сенатор предал за то, что они не переизбрали его, когда на экране снова возникло изображение. Это была комната внутри пиратского корабля, покидающего астероид. Его никто не преследовал. По-видимому, планы похитителей плюс информация Мешка составили действенную комбинацию.

Сначала единственными людьми возле Мешка были Хорриган и незнакомец, говорящий на Прдл, но это продолжалось недолго. В помещение ввалилось еще человек десять. Лица их казались угрюмыми и выражали недоверие. Один из них объявил:

— Не смейте разговаривать с Мешком, пока мы все не соберемся около него. Мы все имеем на него право.

— Не нервничайте, Меррилл. Не думаете ли вы, что я собираюсь надуть вас?

— Да, я так думаю,— ответил Меррилл.— Что вы скажете, Мешок? Есть у меня основания не доверять ему?

Мешок ответил коротко:

— Да.

Незнакомец, говорящий на Прдл, побледнел. Меррилл холодно рассмеялся.

— Будьте осторожны, когда задаете вопросы возле этой штуки.

Хорриган прокашлялся.

— У меня нет намерения, как вы говорите, надувать кого бы то ни было. Не такой я человек. Поэтому я буду говорить с ним,— он повернулся к Мешку.— Сэр, грозит ли нам опасность?

— Да.

— С какой стороны?

— Ни с какой. Изнутри корабля.

— Опасность немедленная?

— Да.

Тут выяснилось, что Меррилл обладает самой быстрой реакцией: именно он первый начал действовать в соответствии с намеками, содержавшимися в ответе. Он застрелил человека, говорившего на Прдл, прежде чем тот успел схватиться за оружие, а когда Хорриган бросился в ужасе к дверям, хладнокровно уложил и его.

— Вот так,— сказал он.— Есть ли еще опасность внутри корабля?

— Есть.

— Кто? — зловеще спросил Меррилл.

— Опасность не исчезнет до тех пор, пока я буду с вами и на корабле останется больше одного человека. Я слишком большое сокровище для таких, как вы.

Зиблинг и его экипаж как завороженные глядели на экран, ожидая, что бойня начнется снова. Но Меррилл овладел собой.

Он сказал:

— Погодите, ребята. Я признаю, что мы — каждый из нас — хотели бы иметь эту штуку только для себя. Но это неосуществимо. Мы вместе в этом деле, и будь я проклят, если очень скоро нам не придется отбиваться от военных кораблей. Эй, Прадер! Почему ты здесь, а не у перископов?!

— Я слушаю,— сказал Прадер.— Если кто-нибудь вздумает разговаривать с этой штукой, то я хочу быть здесь и слышать ответы. А если есть еще новые способы ударить из-за угла, то я хочу узнать и про них.

Меррилл выругался. В тот же момент корабль качнуло, и он заорал:

— Мы сошли с курса! По местам, идиоты! Живее!

Все кинулись вон, но Зиблинг заметил, что Меррилл был не настолько озабочен общей опасностью, чтобы не выстрелить Прадеру в спину, прежде чем несчастный успел выскочить.

— Теперь им конец,— сказал Зиблинг.— Они перебьют друг друга, а оставшиеся двое или трое погибнут потому, что их будет слишком мало, чтобы управлять таким кораблем. Должно быть, Мешок предвидел и это. Странно только, почему он не предупредил меня.

Мешок заговорил, хотя в помещении никого не было.

— Меня никто не спрашивал,— сказал он.

Зиблинг взволнованно закричал:

— Вы слышите меня! Но что будет с вами?! Вы тоже погибнете?

— Нет еще. Мне захотелось пожить дольше,— он помолчал и затем чуть тише добавил: — Я не люблю выражений, не содержащих сведения, но я должен сказать. Прощайте.

Послышались крики, стрельба. Затем экран внезапно потускнел и погас.

Мешок, существо, на вид столь чуждое человеческим эмоциям, навсегда ушло за пределы знания Зиблинга. Вместе с Мешком — как он сам и предсказывал — исчезла ужасная угроза всему человечеству.

Как странно, думал Зиблинг, я чувствую себя таким несчастным при таком счастливом конце.

Перевод с английского В. Бережкова

Санкт-Петербургский государственный университет

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(математико-механический и физический факультеты)

1. Число 101 представьте в виде суммы двух натуральных чисел, сумма кубов которых максимальна.

2. Две вершины квадрата лежат на оси абсцисс, а две другие — на кривой $y = x - x^2$. Вычислите площадь квадрата.

3. Найдите все вещественные значения a, при которых все решения неравенства $8\log_a x + \log_x a \leqslant 6$ удовлетворяют неравенству $\cos\left(\pi \frac{x^2}{a^2}\right) \geqslant \frac{1}{2}$.

4. Круг и квадрат имеют общий центр, и их площади равны. Сторона квадрата равна 1. Вычислите сумму длин частей окружности, расположенных внутри квадрата.

5. В кубе с ребром 1 расположен конус так, что его вершина совпадает с вершиной куба. Три грани куба касаются боковой поверхности конуса, а вписанный в куб шар касается основания конуса. Найдите объем конуса.

Вариант 2

(биолого-почвенный и экономический факультеты)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x^2 - \sin y = 1, \\ x^2 + |y| = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt[3]{x^3 + |x| - 1} \geqslant 2x - 1.$$

3. Решите уравнение

$$\log_2(5\cos 2x - 2) + \log_{1/2}(1 - 6\sin^2 x \cos^2 x) = 3.$$

4. Для каких значений a неравенство

$$4^{x+1} + 9 \cdot 4^{-x} - 2(2^{x+1} + 3 \cdot 2^{-x}) \geqslant a$$

выполняется при всех $x \geqslant 0$?

5. В цилиндре с высотой h и радиусом основания r расположен квадрат так, что две его вершины лежат на окружности одного основания, а две другие — на окружности другого основания. Вычислите площадь квадрата.

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Сплошной однородный шар объемом V и плотностью ρ плавает на границе двух несмешивающихся жидкостей. Плотность верхней жидкости ρ_1, нижней ρ_2 ($\rho_1 < \rho < \rho_2$). Какая часть объема шара находится в верхней части жидкости?

2. На какую высоту может подняться автомобиль с работающим мотором по ледяной горе ($\mu < \operatorname{tg}\alpha$), если у начала подъема он имел скорость v_0?

3. На pT-диаграмме (рис. 1) показан процесс, проводимый с идеальным газом. Объем газа постоянен. Найдите точки, где масса газа максимальна и минимальна.

4. Над одним молем газа совершают замкнутый процесс, состоящий из двух изохор и двух изобар (рис. 2). Температуры в точках *1* и *3* равны T_1 и T_3. Определите работу, совершаемую за цикл, если известно, что точки *2* и *4* лежат на одной изотерме.

Рис. 1.

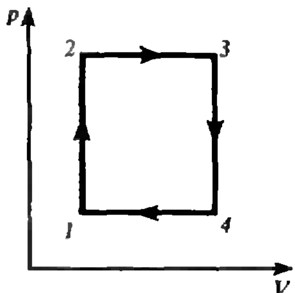


Рис. 2.

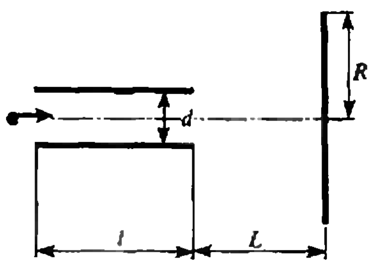


Рис. 3.

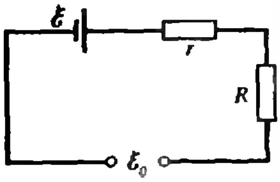


Рис. 4.

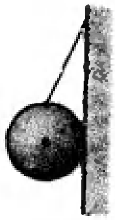


Рис. 5.

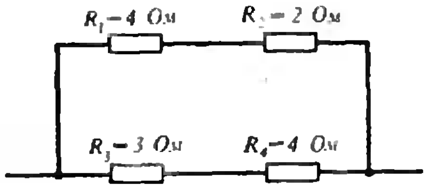


Рис. 6.

5. Два заряженных шарика, подвешенных на нитях одинаковой длины, опускают в керосин. Найдите плотность шариков, если угол расхождения нитей в воздухе и керосине одинаков.

6. Электрон влетает в плоский конденсатор посередине между пластинами. Расстояние между пластинами d, длина пластин l, приложенное напряжение U. Какова должна быть минимальная скорость электрона, чтобы он попал в круглую мишень радиусом R, расположенную на расстоянии L от конденсатора (рис. 3)?

7. Человек посмотрел (по вертикальному направлению) на дно водоема и оценил его кажущуюся глубину в $h = 0{,}9$ м. Определите истинную глубину водоема.

8. Имеется оптическая система из собирающей и рассеивающей линз, оптические оси которых совпадают. Фокусные расстояния линз равны по модулю $F = 20$ см. Линзы расположены на расстоянии $l = 25$ см друг от друга. Где на оптической оси следует поместить точечный источник, чтобы система давала параллельный пучок лучей?

Математико-механический факультет и факультет прикладной математики — процессов управления

1. Из одной точки одновременно бросают два тела — горизонтально и вертикально вверх с одинаковыми скоростями v_0. На каком расстоянии будут тела через промежуток времени τ?

2. Какой минимальной силой можно опрокинуть через ребро куб массой m, находящийся на горизонтальной плоскости? Каков должен быть минимальный коэффициент трения?

3. Объем пузырька воздуха по мере его всплывания со дна озера на поверхность увеличивается в n раз. Какова глубина озера? Изменением температуры с глубиной пренебречь.

4. В комнате объемом $V = 40$ м^3 воздух имеет температуру $t = 20$ °С и относительную влажность $\varphi_1 = 20$ %. Сколько воды нужно испарить в комнате, чтобы относительная влажность достигла $\varphi_2 = 50$ %? Известно, что при 20 °С давление насыщенных паров воды $p_н = 2330$ Н/м^2.

5. Аккумулятор, заряженный до напряжения $\mathscr{E} = 25$ В, дозаряжается через дополнительное сопротивление $R = 5$ Ом от источника с напряжением $\mathscr{E}_0 = 40$ В (рис. 4). Чему равно напряжение на зажимах аккумулятора, если его внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом?

6. Электромотор питается от источника напряжением $U = 24$ В. Чему равна мощность на валу мотора при протекании по его обмотке тока $I = 8$ А, если известно, что при полностью заторможенном якоре по цепи течет ток $I_0 = 16$ А?

7. При падении на плоскую границу двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 луч преломляется таким образом, что угол между отраженным и преломленным лучами составляет 90°. Найдите угол падения.

8. Светящаяся точка, находящаяся на расстоянии $d = 15$ см от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 10$ см, движется со скоростью $v = 2$ см/с перпендикулярно оптической оси. С какой скоростью движется ее изображение?

Геологический факультет

1. При каком минимальном коэффициенте трения о стену точка подвеса и центр шара будут находиться на одной вертикали (рис. 5)?

2. Стержень с шариком образует угол α с вертикалью и вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. В каком месте стержня находится шарик, если известно, что он неподвижен относительно стержня, его масса m, а действующая на него сила трения равна $F_{тр}$?

3. Некоторое количество водорода находится при температуре $T_1 = 200$ К и давлении $p_1 = 400$ Н/м^2. Газ нагревается до температуры $T_2 = 10\,000$ К, при которой молекулы водорода практически полностью распадаются на атомы. Определите новое давление газа, если его объем и масса остались без изменения.

4. Газ нагрели от температуры $t_1 = 27$ °С до температуры $t_2 = 39$ °С. На сколько процентов увеличился объем, если давление осталось неизменным?

5. На каком из резисторов, изображенных на рисунке 6, выделится наибольшее количество теплоты?

6. На точечный заряд, находящийся внутри плоского конденсатора, заряженного до заряда Q, действует сила f_0. На какую величину изменится сила, если конденсатор в течение времени τ заряжается током силой I?

7. Два изображения точечного источника света в двух плоских зеркалах находятся на одном и том же расстоянии a от источника и на расстоянии L друг от друга. Под каким углом друг к другу расположены зеркала?

8. Узкий параллельный пучок света падает на плоскопараллельную пластинку из стекла под углом α, синус которого равен 0,8. Вышедший из пластинки пучок оказался смещенным вдоль поверхности относительно продолжения падающего пучка на расстояние $l=2$ см. Какова толщина пластинки, если показатель преломления стекла $n=1{,}7$?

Публикацию подготовили
В. Рябов, А. Чирцов

Санкт-Петербургский государственный технический университет

Математика

Вариант 1
(радиофизический факультет)

1. Найдите область определения функции

$$f(y)=\sqrt{16y^{-2}-4y^{-1}+0{,}25}\,(4y^{-2}+y^{-3/2})(32-y^{3/2}-4y+8y^{1/2})^{-1}$$

и множество ее значений на промежутке $[0{,}25;\ 0{,}5]$.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+\log_2 y=y\log_2 3+\log_2 x, \\ x\log_2 72+\log_2 x=2y+\log_2 y. \end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{13^x-5}\leqslant\sqrt{2(13^x+12)}-\sqrt{13^x+5}\,.$$

4. Найдите расстояние между наибольшим отрицательным корнем и наименьшим положительным корнем уравнения

$$\sin\pi(x-1)^2=\sin\pi(x^2+2x+1).$$

5. Плоскость делит медианы граней ABC, ACD и ADB треугольной пирамиды $ABCD$, выходящие из вершины A, в отношениях $2:3$, $1:2$ и $2:5$, считая от вершины. Пусть P, Q, R — точки пересечения этой плоскости с прямыми AB, AC, AD. Найдите отношения $AP:PB$, $AQ:QC$ и $AR:RD$.

Вариант 2
(физико-механический факультет)

1. Решите уравнение

$$2\log_{\sqrt2}2+\log_{\sqrt2}\left(2^{x^2-1}-\frac14\right)=\log_{\sqrt2}31.$$

2. Решите неравенство

$$32^{3(x^3-8)}\geqslant 8^{19(2x-x^2)}\,.$$

3. Решите уравнение

$$x^3+3x^2-6x+a=0,$$

зная, что оно имеет три различных действительных корня, образующих геометрическую прогрессию.

4. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$|3\sin^2x+2a\sin x\cos x+\cos^2x+a|\leqslant 3$$

выполняется для любых значений x.

5. Две касающиеся сферы вписаны в двугранный угол величиной $\pi/3$. Пусть A — точка касания первой сферы с первой гранью, B — точка касания второй сферы со второй гранью. Найдите отношение $AK:KL$, если K и L — точки пересечения отрезка AB с первой и второй сферами соответственно.

Вариант 3
(физико-технический факультет)

1. В арифметической прогрессии $a_7=9$. При каком значении разности арифметической прогрессии произведение a_1a_2 будет наименьшим?

2. Решите неравенство

$$2\sqrt{x}\cdot4^x+5\cdot2^{x+1}+2\sqrt{x}-4\geqslant 2^{2x+2}+5\sqrt{x}\cdot2^x.$$

3. Известно, что многочлен $1{,}5x^2+12x+26$ равен сумме кубов двух линейных функций. Найдите эти функции.

4. В треугольной пирамиде три двугранных угла прямые. Один из отрезков, соединяющих середины противоположных ребер, равен 4, а другой $\sqrt3$. Найдите длину наибольшего ребра пирамиды.

5. Найдите все значения параметра a, при которых любой корень уравнения

$$3\sin^3x-a(2a+1)\cos^3x+2a^2\cos x=0$$

является корнем уравнения

$$0{,}5\log_{\sqrt7}(4-3\operatorname{ctg}x)-\log_{1/7}(8+\operatorname{ctg}x)-\log_7(3-4\operatorname{ctg}x)=1$$

и, наоборот, любой корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Вариант 4

(факультет технической кибернетики)

1. Решите уравнение

$$\log_5(5^{-1/2}\cdot x^3)-0{,}5=(\log_5 x)\left(\log_3\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-1}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{1/\sqrt5}(6^{x+1}-36^x)\geqslant-2.$$

3. Найдите решения системы уравнений

$$\begin{cases}2\sqrt3\cos x+6\sin y=3+12\sin^2 x,\\ 4\sqrt3\cos x+2\sin y=7,\end{cases}$$

для которых выражение x^2+y^2-4y принимает наименьшее значение.

4. На плоскость положены два цилиндра, радиусы которых r; цилиндры примыкают друг к другу по образующей. На них положены два других касающихся по образующей цилиндра с радиусами R и осями, перпендикулярными осям первых двух цилиндров. Найдите радиус шара, касающегося всех четырех цилиндров.

5. Найдите все значения параметра a, при которых равносильны системы уравнений

$$\begin{cases}x+2y=2-a,\\ ay-x=a-2a^2\end{cases}$$

и

$$\begin{cases}x^2-y^4-4x+3=0,\\ 2x^2+y^2+(a^2+2a-11)x+12=6a.\end{cases}$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. Шарик начал падать с нулевой начальной скоростью на гладкую наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом. Пролетев расстояние h, он упруго отразился от плоскости. На каком расстоянии от места падения шарик отразится второй раз?

2. На гладкой горизонтальной поверхности находится тело массой M, а на нем — небольшая шайба массой m (рис. 1). Шайбе сообщили в горизонтальном направлении скорость v. На какую высоту (по сравнению с первоначальным уровнем) она поднимется после отрыва от тела? Трения нет.

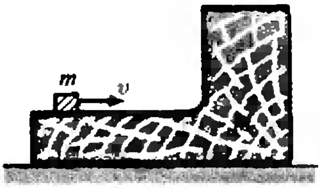


Рис. 1.

3. По резиновой трубке, свернутой в виде кольца, циркулирует вода со скоростью v. Диаметр трубки d. С какой силой растянута резиновая трубка? Диаметр трубки много меньше радиуса кольца. Плотность воды ρ.

4. Насос представляет собой расположенный горизонтально цилиндр с поршнем площадью S_1 и выходным отверстием площадью S_2, расположенным на оси цилиндра. Определите скорость истечения струи жидкости из насоса, если поршень под действием силы F перемещается с постоянной скоростью. Плотность жидкости ρ.

5. В сосуде, дно которого образует угол α с горизонтом, стоит куб с ребром a, сделанный из материала плотностью ρ (рис. 2). Верхнее ребро куба находится на глубине h. Жидкость под основание куба не подтекает. Атмосферное давление p, плотность жидкости ρ_0. Найдите силу, с которой куб действует на дно сосуда.

6. В открытые сообщающиеся сосуды с площадью поперечного сечения S налита ртуть массой m. Столбик ртути в одном из сосудов вывели из положения равновесия, вследствие чего ртуть начала колебаться. Найдите период колебаний. Плотность ртути ρ.

7. Чтобы изотермически уменьшить объем газа в цилиндре с поршнем в n раз, на поршень поместили груз массой m. Какой массы груз следует добавить, чтобы объем газа изотермически уменьшился еще в k раз?

8. В системе, показанной на рисунке 3, два металлических шарика массой m каждый имеют одинаковые по модулю и противоположные по знаку заряды q. В начальном положении расстояние между шариками равно r_0 и изолирующая пружина жесткостью k растянута на величину x_0. Масса пружинки пренебрежимо мала. Какую работу надо совершить, чтобы медленно поднять верхний шарик до такого положения, при котором нижний шарик начнет опускаться?

9. Прямой провод, сопротивление которого на единицу длины равно $\Delta R=0{,}5$ Ом/м, согнут под углом $2\alpha=60°$

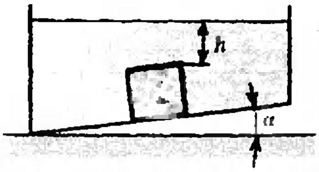


Рис. 2.

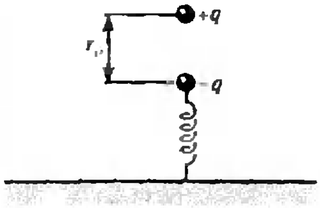


Рис. 3.

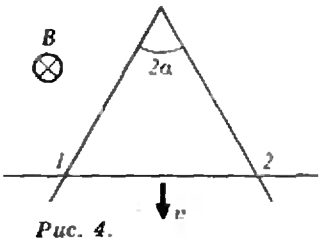


Рис. 4.

(рис. 4). Перемычка из такого же провода, расположенная перпендикулярно к биссектрисе угла 2α, образует с согнутым проводом замкнутый треугольный контур. Этот контур помещен в однородное магнитное поле индукцией $B=0{,}1$ Тл, перпендикулярное его плоскости. Найдите направление и силу тока, текущего в контуре, когда перемычка движется с постоянной скоростью $v=4$ м/с. Сопротивлением в контактах *1* и *2* пренебречь.

10. Человек смотрит на рыбку, находящуюся в диаметрально противоположной от него точке шарового аквариума радиусом R. На сколько смещено при этом изображение рыбки относительно самой рыбки? Показатель преломления воды $n = 4/3$.

Публикацию подготовили С. Преображенский, В. Романов, И. Русанов, С. Тихомиров, Ю. Хватов

Санкт-Петербергский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Дана функция

$$f(x)=\sqrt{ax-1}-\sqrt{5-x}\,.$$

а) Найдите область определения функции f.

б) При $a=2$ решите уравнение $f(x)=\sqrt{x}$.

в) При $a=5$ решите неравенство $f(x)<-2$.

2. Дана функция

$$f(x)=\log_{1/3}(x+3)-\log_3(2-x).$$

а) Решите уравнение $f(x)=2\log_{1/3}2$.

б) Найдите $f((\sqrt{13}-1)/2)$.

в) Решите неравенство $f(x)\geqslant 0$.

г) Найдите множество значений функции f.

3. В острый угол величиной 2α с вершиной в точке A вписана окружность радиусом 1 с центром O. Пусть B — точка касания окружности с одной из сторон угла, а C — точка пересечения прямой BO с другой стороной. Обозначим через $S(\alpha)$ площадь треугольника ABC.

а) Докажите, что

$$S(\alpha)=\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{2\operatorname{tg}^2\alpha}\,.$$

б) При каком α площадь треугольника AOB в 8 раз меньше, чем $S(\alpha)$?

в) Найдите наименьшее значение площади $S(\alpha)$.

Вариант 2

1. Точка движется по оси абсцисс из начала координат вправо до точки $A(x;\,0)$ со скоростью $1/3$, а затем по прямой до точки $B(2;1)$ со скоростью $1/5$. Обозначим через $t(x)$ время движения по всему пути.

а) Докажите, что

$$t(x)=3x+5\sqrt{x^2-4x+5}.$$

б) При каких x время движения меньше 11?

в) При каких c уравнение $t(x)=c$ имеет ровно одно решение?

г) При каком x время движения наименьшее?

2. Дана функция

$$f(x)=\cos^2x-2(1-a)\cos x-4a.$$

а) При $a=1/4$ решите уравнение $f(x)=0$.

б) При $a=1/2$ найдите множество значений функции f.

в) При каких a неравенство $f(x)\geqslant 0$ верно для всех значений x?

3. Дана функция

$$f(x)=3^{2x+1}-8\cdot 6^x+4^{x+1}.$$

а) Вычислите $f(1/(\log_2 3-1))$.

б) Решите неравенство $f(x)<0$.

в) Решите уравнение $f(x+1)=5f(x)$.

Вариант 3

1. Парабола $y=-x^2+px+q$ пересекает ось абсцисс в точках A $(-1;\ 0)$ и B $(b;\ 0)$, $b>-1$. Рассмотрим треугольник ABC, где C — вершина параболы. Обозначим через h высоту треугольника, опущенную из вершины C, а через S — площадь треугольника ABC.

а) Докажите, что в условии задачи разность $p-q$ постоянна, и вычислите ее.

б) При каких значениях p ордината точки C равна 9?

в) Найдите зависимость площади S от величины p.

г) Какие значения может принимать величина $S+1/h$?

2. Рассмотрим треугольник, лежащий в первом квадранте, образованный осями координат и прямой $y=(3-a)x+a$ $(a>3)$. Обозначим через h высоту этого треугольника, проведенную из начала координат.

а) Докажите, что $h=a/\sqrt{a^2-6a+10}$.

б) При каких a высота h равна 2?

в) Найдите наибольшее значение высоты h.

3. Дана функция

$$f(x)=\cos^3 x+\sin^4 x.$$

а) Решите уравнение $f(x)=1$.

б) Докажите тождество

$$f(x)-f(\pi/2-x)=$$
$$=(\cos x-\sin x)(1-\cos x-\sin x)^2/2.$$

в) Решите уравнение $f(x)=f(\pi/2-x)$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Гладкий легкий горизонтальный стержень прикреплен к вертикальной оси, проходящей через его конец. На стержне находится муфта массой $m=100$ г, соединенная пружиной длиной $l=12$ см с осью. Жесткость пружины $k=5$ Н/см.

а) Какую работу надо совершить, чтобы раскрутить эту систему до частоты вращения $n=10$ об/с?

б) Зависят ли работа и мощность при раскручивании от длительности процесса?

2. Шарик массой $M=200$ г подвешен на шнуре длиной $l=1{,}6$ м. Этот маятник отводят от положения равновесия на угол $\alpha_0=60^\circ$ и отпускают. В момент прохождения шариком положения равновесия в него ударяет пуля массой $m=$ $=5$ г, летевшая горизонтально навстречу шарику со скоростью $v_1=150$ м/с, пробивает его и вылетает горизонтально со скоростью $v_2=100$ м/с.

а) На какой максимальный угол отклонится маятник после этого?

б) Можно ли подбором массы и скорости пули добиться того, чтобы угол максимального отклонения остался тем же, что и до удара?

3. В сосуде объемом $V=30$ л содержится идеальный газ при температуре $t=0$ °С. Плотность газа при нормальных условиях равна $\rho_0=1{,}3$ мг/см^3. После того как часть газа была выпущена, давление понизилось на $\Delta p=78$ кПа.

а) Найдите массу выпущенного газа.

б) Совершал ли газ при этом работу?

4. Калориметр содержал $m_в=500$ г воды и $m_л=300$ г льда, находящихся в термодинамическом равновесии. Кусок металла массой $m_м=1$ кг вынули из печи при температуре $t_м=240$ °С и быстро перенесли в калориметр. В результате весь лед растаял, но температура не изменилась. Удельная теплоемкость воды $c_в=4{,}2$ кДж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda=330$ кДж/кг.

а) Какова была бы температура в калориметре, если бы масса металла была в два раза больше?

б) Изменяется ли в процессе внутренняя энергия системы «вода — лед — металл»?

5. Аккумулятор заряжается от источника напряжением $U=12$ В, при этом половина потребляемой мощности расходуется на тепло.

а) Определите ЭДС аккумулятора.

б) Какие электрические параметры аккумулятора изменяются в процессе его зарядки?

6. Четыре точечных заряда, равные $q=20$ мкКл каждый, расположены в вершинах квадрата со стороной $r=5$ см.

а) Какую работу надо совершить, чтобы расположить заряды вдоль одной прямой, лежащей в плоскости квадрата, на расстояниях r между соседними зарядами?

б) Одинаковой ли будет потенциальная энергия обеих систем?

7. Плоский контур, образованный замкнутым проводником, находится в однородном магнитном поле, индукция которого равна $B=3$ мТл и перпендикулярна плоскости контура. Площадь контура изменяют по закону $S=S_0(1-bt)$, где $S_0=0{,}5$ м^2, $b=0{,}2$ с$^{-1}$, t — время.

а) Определите ток, протекающий по контуру, если сопротивление проводника $R=30$ Ом.

б) Будет ли индуцируемый в контуре

ток препятствовать деформации контура?

8. На наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha=30°$, лежит квадратная проволочная рамка со стороной $l=15$ см. Рамка находится в вертикальном магнитном поле с индукцией $B=15$ Тл. Масса рамки $m=40$ г.

а) Какой минимальный ток нужно пропустить по рамке, чтобы она перевернулась, считая, что трение не позволяет ей скользить по плоскости?

б) Изменится ли этот ток, если рамка будет такой же площади, но круглой?

9. На поверхности озера, имеющего глубину $h=2$ м, находится круглый плот радиусом $r=8$ м. Показатель преломления воды $n=1{,}33$.

а) Найдите радиус полной тени от плота на дне озера при освещении воды рассеянным светом.

б) Что увидит водолаз, стоящий на дне точно под центром плота, при рассматривании поверхности воды за пределами плота?

10. Две линзы с фокусными расстояниями $F=16$ см каждая имеют общую главную оптическую ось и расположены на двойном фокусном расстоянии друг от друга. Светящаяся точка находится на главной оптической оси линз на расстоянии $d=40$ см перед одной из них.

а) Найдите положение изображения точки в этой системе.

б) Изменится ли положение изображения, если пространство между линзами заполнить водой?

Публикацию подготовили Ю. Богачев, И. Деянов, А. Коточигов, М. Марамзина, А. Степанов

Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена

Математика

Математический факультет

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$(a^{-1/2}-1)\cdot(a-2a^{0,5}+1)^{-1/2}$$

и найдите его значение при $a=0{,}16$.

2. Что больше:

$$\log_{0,5}\frac{x-1}{x} \quad \text{или} \quad \log_{1991}1?$$

Ответ обоснуйте.

3. Найдите значения k, при которых уравнение

$$3x^2-2kx-k+6=0$$

не имеет корней.

4. Постройте график функции

$$y=\sin\frac{\pi}{2}\cdot|\cos x|.$$

5. Решите неравенство

$$5^{-3x-6,5}>\frac{0{,}2^{4(x+5)}}{5^{0,5}}.$$

6. Решите уравнение

$$\left|\frac{x-3}{x+1}\right|=1.$$

7. У кассира набралось 9 рублей пятьюдесятью монетами по 20 и 15 копеек. Сколько у него было монет по 20 копеек и сколько — по 15? Решите задачу арифметическим способом.

8. Длины параллельных сторон трапеции равны 25 и 4, а длины непараллельных сторон — 20 и 13. Найдите высоту трапеции.

9. Один из катетов равнобедренного прямоугольного треугольника лежит в плоскости α, а другой образует с ней угол, равный 45°. Найдите угол, который образует гипотенуза с плоскостью α.

10. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 8, а угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен 60°. Через вершину основания параллельно противолежащей ей диагонали проведена секущая плоскость так, что высота пирамиды делится точкой пересечения с этой плоскостью в отношении 1:2 (считая от основания). Найдите площадь сечения.

Вариант 2

1. Упростите выражение

$$(4-4b^{0,5}+b)^{1/2}\cdot(1-4b^{-1})^{-1}$$

и найдите его значение при $b=6{,}25$.

2. Что больше:

$$\log_{0,5}\frac{x}{x-1} \quad \text{или} \quad \log_{1917}1?$$

Ответ обоснуйте.

3. Найдите значения p, при которых уравнение

$$3x^2-2px-p+6=0$$

имеет два корня.

4. Постройте график функции

$$y=\cos\pi\cdot|\sin x|.$$

5. Решите неравенство

$$2^{-2x-2,5}<\frac{0,5^{x(x+3)}}{2^{0,5}}.$$

6. Решите уравнение

$$\left|\frac{x-1}{x+3}\right|=1.$$

7. На платформу погрузили 70 сосновых и еловых бревен общим весом 165 ц. Сосновое бревно весило 210 кг, а еловое — 250 кг. Сколько было тех и других бревен в отдельности? Решите задачу арифметическим способом.

8. Найдите площадь равнобочной трапеции, у которой высота равна 10, а диагонали взаимно перпендикулярны.

9. Катет прямоугольного треугольника ABC ($\angle C=90°$) лежит на ребре двугранного угла величиной 30°, образованного этим треугольником и данной плоскостью α. Найдите расстояние от вершины B до плоскости α, если $AC=8$, $AB=3\cdot BC$.

10. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 10, а угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен 60°. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину основания перпендикулярно к противолежащему ребру.

Задачи устного экзамена

1. Докажите, что

$$\sin 87°-\sin 59°-\sin 93°+\sin 61°=\sin 1°.$$

2. Существует ли значение произведения и, если существует, чему оно равно:

$$\lg(\sin 0,1\pi)\cdot\lg(\sin 0,2\pi)\cdot\lg(\sin 0,3\pi)\cdots\lg(\sin 0,9\pi)?$$

3. Решите уравнение:

а) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$;

б) $\log_2\log_2(5x-1)=1+\log_2\log_2 x$;

в) $\dfrac{(0,2)^{x-0,5}}{\sqrt{5}}=5\cdot 0,04^{x-1}$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{y+1}=1\dfrac{1}{6},\\[2mm] \dfrac{3}{x-1}-\dfrac{1}{y+1}=1\dfrac{1}{6}.\end{cases}$$

5. Решите неравенство:

а) $\log_{x-3}(x^2-4x+3)<0$;

б) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x-4x^2+2}>0,2^{-3-2x}$;

в) $\left|\dfrac{3|x|+2}{|x|-1}\right|<3$.

6. Основания трапеции равны 24 и 48. Определите длину отрезка, заключенного внутри трапеции, параллельного основаниям и проходящего через точку пересечения ее диагоналей.

7. Основанием пирамиды служит ромб со стороной равной 6 и острым углом 30°. Все двугранные углы при основании равны. Боковая поверхность пирамиды равна 36. Найдите (в градусах) величину двугранного угла при основании.

8. Известно, что две взаимно перпендикулярные образующие конуса делят окружность его основания на дуги 120° и 240°. Найдите объем конуса, если его высота равна H.

9. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны a и b ($a>b$), двугранный угол при ребре большего основания равен φ. Найдите площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

10. Докажите, что объем треугольной пирамиды, отсекаемой от данного параллелепипеда плоскостью, проходящей через концы трех ребер, выходящих из одной вершины, не зависит от выбора этой вершины.

Публикацию подготовила З. Новосельцева

Ответы, указания, решения

[redacted]т-Петербургский [redacted]дарственный университет

Математика

Вариант 1

1. $101=1+100$.
2. $9+4\sqrt{5}$; $9-4\sqrt{5}$.
3. $a\geqslant 3$. **Указание.** Выполнив замену $y=\log_a x$, решите первое неравенство.
4. $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(2\pi-8\arccos\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.
5. $\frac{\pi}{48}(\sqrt{3}-1)^3$.

Вариант 2

1. $x=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$, $y=-\frac{\pi}{6}$; $x=-\sqrt{\frac{\pi}{6}}$, $y=-\frac{\pi}{6}$.
2. $x\in(-\infty;\ 0]\cup\left[\frac{5}{7};\ 1\right]$.
3. $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{3}+\pi k$; $k\in\mathbf{Z}$.
4. $a\leqslant 4(3-\sqrt{6})$. **Указание.** Выполните замену $y=2\cdot 2^x+3\cdot 2^{-x}$.
5. Если $h>2r$, решений нет, если же $h\leqslant 2r$, то $S=h^2$ либо $S=2r^2+h^2/2$ — в зависимости от расположения квадрата относительно цилиндра.

Физика

Физический факультет

1. $V_1/V=(\varrho_2-\varrho)/(\varrho_2-\varrho_1)$.
2. $H=v_0^2/(2g(1-\mu\operatorname{ctg}\alpha))$.
3. См. рис. 1.
4. $A=RT_3(1-\sqrt{T_1/T_3})^2$.
5. $\varrho_m=\varrho_к\varepsilon/(\varepsilon-1)$, где $\varrho_к$ — плотность, ε — диэлектрическая проницаемость керосина.
6. $v_{min}=\sqrt{\frac{eU}{md}\frac{l(l/2+L)}{R}}$ при условии $\frac{l+2L}{2R}>\frac{l}{d}$,

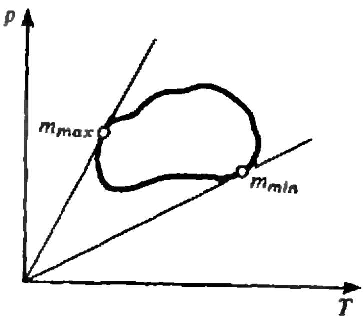


Рис. 1.

$v_{min}=\sqrt{\frac{eU}{md}\frac{l^2}{d}}$ при условии $\frac{l+2L}{2R}<\frac{l}{d}$.

7. $H=hn=1{,}2$ м, где $n=1{,}33$ — показатель преломления воды.
8. Перед собирающей линзой на расстоянии $d=F(l+F)/l=36$ см.

[redacted]матико-механический факультет [redacted]культет прикладной математики — процессов управления

1. $l=\sqrt{2}\,v_0\tau$.
2. Сила равна $F_{min}=mg/(2\sqrt{2})$ и приложена перпендикулярно диагонали куба; $\mu_{min}=1/3$.
3. $h=p_0(n-1)/(\rho g)$, где p_0 — атмосферное давление, ρ — плотность воды.
4. $\Delta m=\frac{\varphi_2-\varphi_1}{100\ \%}\frac{p_н VM}{RT}=0{,}747$ кг, где $M=18$ г/моль — молярная масса воды, $R=8{,}31$ Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная.
5. $U=\mathscr{E}+(\mathscr{E}_0-\mathscr{E})r/(R+r)=27{,}5$ В.
6. $P=IU(1-I/I_0)=96$ Вт.
7. $\alpha=\arcsin(n_2/\sqrt{n_1^2+n_2^2})$.
8. $v'=vF/(d-F)=4$ см/с.

Геологический факультет

1. $\mu_{min}=1$.
2. $l_{1,2}=\frac{mg\cos\alpha\pm F_{тр}}{m\omega^2\sin^2\alpha}$ (два значения расстояния шарика от начала стержня связаны с неопределенностью направления силы трения, заданной в условии).
3. $p_2=2p_1T_2/T_1=40\,000$ Н/м^2.
4. $\Delta V/V_1=(T_2-T_1)/T_1=0{,}04=4\ \%$.
5. На резисторе сопротивлением R_1.
6. $\Delta f=f_0I\tau/Q$.
7. $\alpha=2\arccos(L/(2a))$.
8. $d=\frac{l}{\sin\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right)=2{,}5$ см.

[redacted]т-Петербургский государственный [redacted]ческий университет

Математика

Вариант 1

1. $D(f)=(0;\ 8)\cup(8;\ +\infty)$; $f([0{,}25;\ 0{,}5])=[4;\ 32]$.
2. $x=\frac{1}{2\log_2 3-1}$, $y=\frac{2}{2\log_2 3-1}$.

Указание. Сложите уравнения системы и, пользуясь свойствами логарифмов, получите, что $y=2x$.

3. $[\log_{13} 5;\ 1]$.
4. 1.

5. 1:2; 1:1; 1:3.

Указание. Воспользуйтесь тем, что у коллинеарных векторов одноименные координаты пропорциональны.

Вариант 2

1. -2; 2.
2. $x\in[-5;\ -4/5]\cup[2;\ +\infty]$.
3. -4, 2, -1 при $a=-8$. Указание. Обозначив корни уравнения через x_1, x_2, x_3 и через q — знаменатель прогрессии, запишите равенство $x^3+3x^2-6x+a=\left(x-\frac{x_2}{q}\right)(x-x_2)(x-x_2q)$; раскрыв скобки, приравняйте коэффициенты при одинаковых степенях x.
4. $a\in(-12/5;\ 0]$. Указание. Так как неравенство должно выполняться при любых x, то, в частности, оно должно быть верным при $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, откуда получаем ограничение на a. Считая $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, разделим обе части неравенства на $\cos^2 x$ и обозначим $\operatorname{tg} x=z$. В результате приходим к системе неравенств относительно z и a.
5. 3:1. Указание. Обозначим через O_1 и r центр и радиус первой сферы, а O_2 и R — второй (для определенности можно считать $r\leqslant R$). Пусть A_1 и B_1 — точки касания соответственно первой и второй сфер с гранями двугранного угла, отличные от A и B.
Ближайшая цель — вычисление длины отрезка AB. Обозначим его d. Заметив, что d — диагональ равнобочной трапеции A_1AB_1B, найдите прежде всего ее стороны. Боковая сторона трапеции, определяемая из четырехугольника $A_1O_1O_2B$, равна $2\sqrt{rR}$. Проведя через O_1 плоскость, перпендикулярную ребру двугранного угла, убедитесь, что $\angle O_1A_1A=2\pi/3$. Учитывая, что $O_1A_1=O_1A=r$, найдите основания трапеции: $A_1A=r\sqrt{3}$, $B_1B=R\sqrt{3}$. Затем докажите, что интересующая нас величина d выражается равенством $d=\sqrt{7Rr}$.
Вычислите теперь длину отрезка AK. С этой целью рассмотрите сечение первой сферы плоскостью, определяемой точками A, B и A_1. По отношению к окружности, по которой сфера пересекается с этой плоскостью, A_1B — касательная, а AB — секущая. Воспользуйтесь известной из планиметрии теоремой относительно этих отрезков и убедитесь, что $BK=\frac{4}{7}d$, а $AK=\frac{3}{7}d$. Аналогично, $BL=AK=\frac{3}{7}d$, т. е. $KL=\frac{1}{7}d$ и $AK:KL=3:1$.

Вариант 3

1. $\frac{33}{20}$.
2. $[0;\ 1]\cup[4;\ +\infty)$. Указание. Покажите, что неравенство можно преобразовать к виду

$$(\sqrt{x}-2)(2^x-2)\left(2^x-\frac{1}{2}\right)\geqslant 0.$$

Воспользуйтесь методом интервалов.

3. $\frac{1}{2}x+3$, $-\frac{1}{2}x-1$. Указание. В соответствии с условием

$$1{,}5x^2+15x+26=(ax+b)^3+(cx+d)^3.$$

Правую часть этого равенства преобразуйте, раскрыв скобки и приведя подобные члены. Затем, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, стоящих в левой и правой частях равенства, получите систему уравнений, связывающих неизвестные a, b, c, d.
4. Указание. Если три ребра пирамиды, являющиеся ребрами прямых двугранных углов, выходят из одной вершины, то отрезки, соединяющие середины любых двух противоположных ребер, оказываются равными. (Для доказательства проведите плоскость, проходящую через середины любых двух пар противоположных ребер, и убедитесь в том, что сечение пирамиды такой плоскостью будет прямоугольником.) Но это невозможно, поскольку, согласно условию, у пирамиды по крайней мере два из трех таких расстояний различны.
Остается случай, когда из одной вершины выходят только два ребра, являющихся ребрами прямых двугранных углов, а третье такое ребро имеет общую вершину лишь с одним из двух первых. Такой пирамидой является пирамида $SABC$, у которой основание ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом B, а боковое ребро SA перпендикулярно основанию. Воспользуйтесь методом координат: в качестве начала координат возьмите точку A и направьте ось Ax параллельно BC, а оси Ay и Az, соответственно,— вдоль ребер AB и AS. Пусть $BC=x$, $AB=y$, $AS=z$. Найдите координаты точек K, L, M, N, P, Q — середин ребер BC, AS, AB, CS, AC, BS, а затем — длины отрезков KL, MN, PQ: Убедитесь, что $PQ=MN<KL$. Заметив, что большее ребро пирамиды есть SC, докажите, что $SC^2=KL^2+PQ^2$.
5. $a=-1$. Указание. Положив $\operatorname{ctg} x=z$, докажите, что второе уравнение равносильно уравнению $z=-1$. Разделив первое из указанных в условии уравнений на $\sin^3 x$, убедитесь, что оно может быть записано в виде

$$3-a(2a+1)z^3+2a^2z(1+z^2)=0, \qquad (*)$$

где $z=\operatorname{ctg} x$. Так как это уравнение должно быть равносильно уравнению $z=-1$, то при $z=-1$ уравнение (*) должно превращаться в верное равенство. Это позволяет найти значения a. В соответствии с условием задачи, нужно проверить, будет ли при найденных значениях уравнение (*) равносильно уравнению $z=-1$.

Вариант 4

1. $\sqrt[3]{\frac{5}{9}}$. 2. $(-\infty;\ 0]\cup[\log_6 5;\ 1)$.

3. $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right)$; $\left(-\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right)$.

Указание. Найдя $x=x_k$ и $y=y_n$ (k, $n\in Z$) из системы, подставьте их в выражение x^2+y^2-

$-4y=x^2+(y-z)^2-4$. Но $x^2+(y-2)^2-4$ имеет наименьшее значение, когда минимальны первые два слагаемых. Поэтому нужно подобрать целые k и n так, чтобы $|x_k|$ и $|y_n-2|$ были минимальными.

4. $\dfrac{(R+r)^2}{2(R+r+\sqrt{R^2+6Rr+r^2})}$. Указание. Рассмотрите сечения пар «параллельных» цилиндров плоскостями, перпендикулярными их осям и проходящими через центр искомой сферы.

5. $a=-2$ и $a=-1$. План решения. Сначала убедитесь, что система линейных уравнений несовместна при $a=-2$ и имеет единственное решение при $a\neq-2$. Покажите, что последнее уравнение второй системы при $a=-2$ не имеет решений и потому вторая система несовместна. Обращая внимание на то, что в каждое из уравнений нелинейной системы неизвестная y входит лишь в четной степени, докажите, что эта система может иметь единственное решение только вида $(x_0;\ 0)$. Поэтому при $a\neq-2$, подставив в первое уравнение нелинейной системы $y=0$, найдите значения x, а при этих значениях (и при $y=0$) из второго уравнения найдите значения a. Установите, при каких значениях a решения обеих систем совпадают.

Физика

1. $l=8h\sin\alpha$.
2. $h=Mv^2/(2g(m+M))$.
3. $F=\rho\pi d^2v^2/4$.
4. $v=\sqrt{2FS_1/(\rho(S_1^2-S_2^2))}$
5. Перпендикулярная дну сосуда составляющая силы равна $F=\rho_0ga^2(\rho\cos\alpha/\rho_0+1/2\sin\alpha+h/a)+pa^2$, параллельная — $F_1=(\rho-\rho_0)ga^3\sin\alpha$.
6. $T=2\pi\sqrt{m/(2\rho Sg)}$.
7. $\Delta m=mn(k-1)/(n-1)$.
8. $A=(kr_0-kx_0/2-2mg)x_0$.
9. $I=Bv\sin\alpha/(\Delta R(1+\sin\alpha))=0,27$ А, ток обтекает контур против часовой стрелки.
10. $x=2R(n-1)/(2-n)=R$.

[redacted]кт-Петербургский [redacted]ктротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Вариант 1

1. а) $(-\infty;\ 1/a]$ при $a<0$; $\varnothing$ при $0\leqslant a<1/5$; $[1/a;\ 5]$ при $a\geqslant1/5$. б) $x=9/2$. в) $x\in[1/5;\ (13-\sqrt{124})/9]$.
2. а) $x=1$ или $x=-2$. б) -1. в) $x\in(-3;\ (-1-\sqrt{21})/2]\cup[(-1+\sqrt{21})/2;\ 2)$. г) $[-2\log_3 5/2;\ +\infty)$. Указание. Сначала найдите множество значений функции $g(x)=(x+3)(2-x)$ на области определения функции f.
3. б) $\alpha=\mathrm{arctg}(\sqrt{3}/2)$. г) $3\sqrt{3}/2$. Указание. Нетрудно заметить (и к этому подталкивает решение пункта б)), что $S(\alpha)=\dfrac{1}{t(1-t^2)}$, где $t=\mathrm{tg}\,\alpha$. Тогда $f_{\min}=1/g_{\max}$, где $g(t)=t(1-t^2)$, а $t\in(0;\ 1)$.

Вариант 2

1. б) $x\in(1/8;\ 2)$. в) $c=10$ или $c>5\sqrt{5}$. г) $x=5/4$. Указание. Для решения пунктов в), г) проще всего исследовать функцию $t(x)$ с помощью производной при $x\geqslant0$ (так как по условию точка движется вправо).
2. а) $x=\pm2\pi/3+2\pi k$, $k\in Z$. б) $[-9/4;\ 0]$. Указание. Найдите множество значений функции $g(t)=t^2-t-2$, где $t=\cos x\in[-1;\ 1]$. в) $a\leqslant-1/2$. Указание. Условие $f(x)\geqslant0$ равносильно тому, что $(\cos x-2)(\cos x+2a)\geqslant0$, откуда при $a\leqslant-\dfrac{1}{2}\cos x$ для всех x.
3. а) 0. Указание. $1/(\log_2 3-1)=\log_{3/2}2$. Затем вынесите 4^x за скобку. б) $x\in(-1;\ \log_{3/2}2)$. в) $x=0$. Указание. Выполните замену $t=(3/2)^x$.

Вариант 3

1. а) $p-q=-1$. б) $p=4$. в) $S=(p/2+1)^3$. г) $[5/\sqrt[5]{108};\ +\infty)$. Указание. Найдите множество значений функции $g(t)=S+1/h=t^3+t^{-2}$, где $t=p/2+1$, при $t>0$ (что следует из условия $b>-1$).
2. б) $a=4+2\sqrt{6}/3$. в) $\sqrt{10}$. Указание. Наиболее простые вычисления получатся, если рассмотреть функцию $g(t)=1/h^2=1-6t+10t^2$, где $t=1/a\in(0;\ 1/3)$. Тогда (т. к. $h>0$) $h_{\max}=1/\sqrt{g_{\min}}$.
3. а) $x=2\pi k$, $x=\pi/2+\pi k$, $k\in Z$. в) $x=\pi/4+\pi k$, $x=2\pi k$ или $x=\pi/2+2\pi k$, $k\in Z$. Указание. Используйте тождество из пункта б).

Физика

1. а) $A=2\pi^2n^2l^2mk(k+4\pi^2n^2m)/(k-4\pi^2n^2m)^2\approx113$ Дж. б) Работа не зависит, а мощность зависит.
2. а) $\alpha_{\max}=\arccos\left(1-\dfrac{(u-m(v_1-v_2)/M)^2}{2gl}\right)=40°$, где $u=\sqrt{2gl(1-\cos\alpha_0)}$ — скорость шарика в момент прохождения положения равновесия. б) Можно, если импульс, переданный пулей шарику, будет равен (по модулю) удвоенному импульсу шарика: $mv_1-mv_2=2Mu$.
3. а) $\Delta m=\rho_0V\Delta p/p_0=3\cdot10^{-2}$ кг, где $p_0=10^5$ Па — нормальное давление. б) Да, так как произошло изменение объема газа.
4. а) $t=m_л\lambda t_м/(c_в(m_в+m_л)t_м+2m_л\lambda)\approx24$ °С. б) Нет.
5. а) $E=U/2=6$ В. б) Уменьшается внутреннее сопротивление.
6. а) $A=(\sqrt{2}-1/3)q^2/(4\pi\varepsilon_0r)\approx76,8$ Дж, где $\varepsilon_0=8,85\cdot10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная. б) Нет, так как полем совершается работа по перемещению зарядов.
7. а) $I=BS_0b/R=10^{-5}$ А. б) Да, из-за сил Ампера, направленных противоположно перемещениям элементов контура.
8. а) $I_{\min}=mg\,\mathrm{ctg}\,\alpha/(2lB)=0,15$ А. б) Ток в рамке возрастет.
9. а) $R=r-h/\sqrt{n^2-1}\approx5,8$ м. б) Водолаз увидит изображение дна, вследствие эффекта полного отражения.
10. а) $f=d-2F=8$ см. б) Да, так как изменятся фокусные расстояния линз.

Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. 2,5. 2. $\log_{0,5}\frac{x-1}{x}>\log_{1991}1$ при $x>1$; $\log_{1991}1>\log_{0,5}\frac{x-1}{x}$ при $x<0$. 3. $-6<k<3$. 5. $(-\infty;\ -4)\cup(2;+\infty)$. 6. 1. 7. 20 монет по 15 копеек и 30 монет по 20 копеек. 8. 12. 9. 30°. 10. $64\sqrt{3}/3$.

Вариант 2

1. 25/18. 2. $\log_{1917}1>\log_{0,5}\frac{x}{x-1}$ при $x>1$; $\log_{0,5}\frac{x}{x-1}>\log_{1917}1$ при $x<0$. 3. $(-\infty;\ -6]\cup[3;\ +\infty)$.

5. $(-2;\ 1)$. 6. -1. 7. 25 сосновых и 45 еловых бревен. 8. 100. 9. $\sqrt{2}$. 10. $\frac{100}{3}\sqrt{3}$.

Задачи устного экзамена

2. 0. 3. а) $\frac{\pi}{2}k$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k\ (k\in Z)$; б) $(5-\sqrt{21})/2$, $(5+\sqrt{21})/2$; в) 3. 4. $(3;\ 2)$. 5. а) $(2+\sqrt{2};\ 4)$; б) $\left(-\infty;\ \frac{1+\sqrt{6}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{6}}{2};\ +\infty\right)$; в) $(-1;\ -1/6)\cup(1/6;\ 1)$.

6. 32. 7. 60°. 8. $\frac{2}{3}\pi H^3$. 9. $\sqrt{3}(a^2-b^2)/(4\cos\varphi)$.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 3)

1. Деду 66 лет, внуку 11 лет.
2. Пусть в первый день картошка стоила x рублей за килограмм, молоко — y рублей за литр и яйца — z рублей за десяток. Тогда вся покупка в первый день стоила $x+y+z$ рублей, во второй день $3x+4y+5z=60$ рублей, а в третий $6x+5y+4z=66$ рублей. Сложив полученные уравнения, получим $9(x+y+z)=126$ рублей, откуда $x+y+z=14$ рублей.
3. $135964\times5=679820$. (Указание: заметьте сначала, что C может равняться лишь 0 или 9.)
4. Заметим, что условия задачи выполнимы лишь в том случае, если указанные суммы лежат в противоположных углах шахматной доски. Тогда заполнение доски производится однозначно (рис. 2), и искомая сумма равна 160 копеек.
5. Обозначим радиусы данных концентрических окружностей через R и r, а радиус построенной окружности через a. Из прямоугольного треугольника OAB (рис. 3) получаем, что $a^2=R^2-r^2$, поэтому $\pi a^2=\pi R^2-\pi r^2$. Но слева стоит площадь построенного круга, а справа — разность площадей данных кругов, т. е. площадь кольца между ними.

3	4	5	6	7	8	9	10
4	5	6	7	8	9	10	11
5	6	7	8	9	10	11	12
6	7	8	9	10	11	12	13
7	8	9	10	11	12	13	14
8	9	10	11	12	13	14	15
9	10	11	12	13	14	15	16
10	11	12	13	14	15	16	17

Рис. 2.

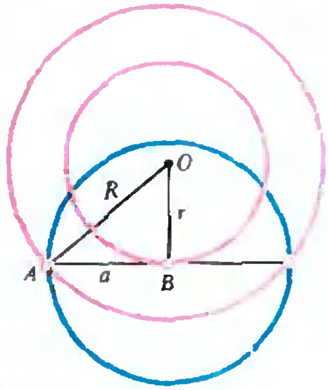


Рис. 3.

Конкурс «Математика 6—8»
(см. «Квант» № 12 за 1991 г.)

10*. Заметим, во-первых, что в каждом убитом может находиться не более 6 пуль, а ровно 6 пуль может быть лишь в случае, когда его «убийцы» расположены в вершинах правильного шестиугольника и убитый находится в его центре. Убитый гангстер, назовем его A, и сам стреляет в одного из этих шести убийц.

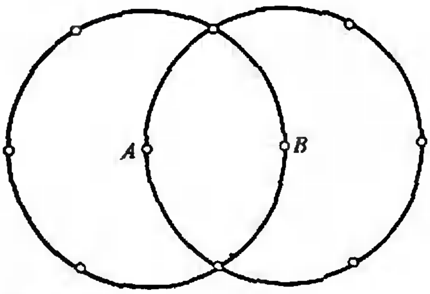


Рис. 4.

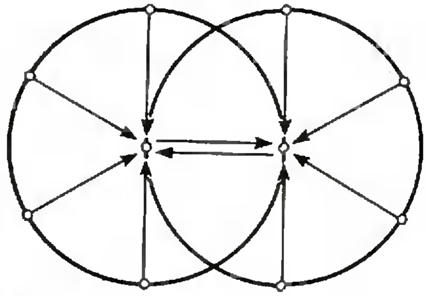


Рис. 5.

назовем его B. Нетрудно показать, что если в A шесть пуль, то в B не более четырех и четыре будет лишь в случае, изображенном на рисунке 4. Поскольку было выпущено 50 пуль, а в каждом убитом не более 6 пуль, то убито не меньше девяти гангстеров. Если убито ровно 9 гангстеров, то из них не меньше пяти убито шестью пулями. Но тогда должно быть еще 5 убитых гангстеров, что противоречит предположению, что было убито ровно девять. Следовательно, их убито не меньше десяти. Ситуация, в которой оказывается ровно 10 убитых гангстеров, изображена на рисунке 5 (гангстеры разбиваются на 5 групп по 10 человек, и в каждой группе оказывается двое убитых).

11. Обозначим стороны трех квадратов через x, y и z, как на рисунке 6, можно выразить через них стороны остальных квадратов, что и сделано на этом рисунке. Поскольку длины верхнего и нижнего оснований равны, то получим соотношение: $11x+3y=7x+16y-z$. А из равенства боковых сторон следует, что $8x+8y-3z=6x+5y+z$. Упрощая уравнения, получим: $z=13y-4x$ и $4z=2x+3y$. Исключая z, получим: $18x=49y$. Так как числа 18 и 49 взаимно просты, то наименьшими натуральными числами x и y будут 49 и 18. При этом $z=38$. Таким образом, стороны прямоугольника оказываются равными 422 и 593.

12. Ответ: $21649\times513239=11111111111$. Стоит отметить, что число, состоящее из одиннадцати единиц, единственным образом раскладывается в произведение. Этот факт помог многим быстрее прийти к ответу.

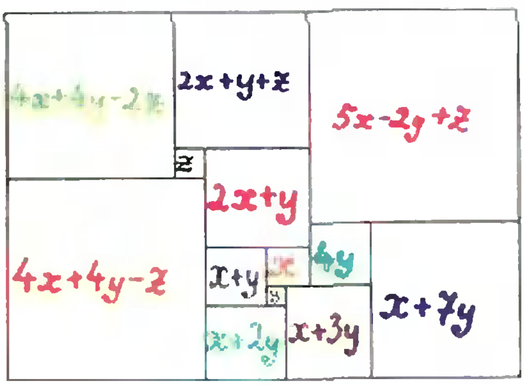


Рис. 6.

Квант

103006, Москва К-6, ул. Тверская-Ямская, 2/1, «Квант», тел. 250-33-54, факс 251-55-57

Сдано в набор 30.01.92. Подписано к печати 16.04.92.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,31.
Тираж 88 692 экз. Заказ 81. Цена 1 р. 10 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Министерства печати и информации
Российской Федерации
142300, г. Чехов Московской обл.

Шахматная страничка

СЛОНЫ-ХАМЕЛЕОНЫ

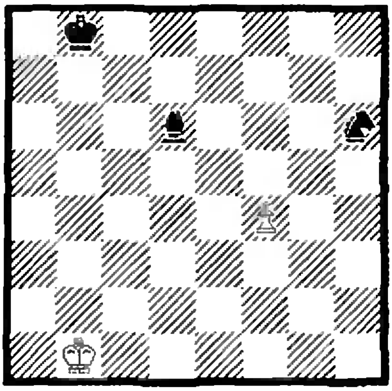
Шахматы — игра неисчерпаемая, сомнения тут нет, но все же иногда становится немного скучновато делать одни и те же ходы одними и теми же фигурами. Поэтому особо изобретательные люди стремятся придумать что-нибудь оригинальное, внести в правила игры какие-то нововведения, тем самым нарушая наши старые привычки, изменяя стандартные способы перемещения фигур, а иногда и саму цель игры.

Вот совсем новая игра, которую предложил Вадим Петросян. Новая игра отличается от старой некоторыми дополнительными возможностями перемещения фигур, да и то не всех. Ладье, кроме обычных прямолинейных ходов, разрешается переходить на соседние поля по диагонали (без взятия), а слону, помимо диагональных ходов, можно пойти на соседние поля по вертикали или горизонтали (тоже без взятия).

Для ферзя и короля никаких новшеств не вводится, а вот коню разрешается, кроме стандартного хода буквой «Г», пойти на одно поле в любом направлении (опять-таки без взятия), т. е. он чувствует себя еще и королем. Пешкам можно не только бить по диагонали, но и ходить, могут они и сдвинуться вбок по горизонтали на одно поле. Двойных ходов у пешек нет, отменяется и правило взятия на проходе. Наконец, в новой игре отсутствует рокировка.

Свою игру В. Петросян назвал «суперsucceeded» — назвал «супершахматы», намекая на то, что она более высокого порядка, чем обычные шахматы. И в самом деле, фигуры здесь более раскрепощены, их маневры еще загадочнее и неожиданнее, чем в традиционной игре. Например, белопольных и чернопольных слонов здесь вообще нет, они превратились в хамелеонов и стали универсалами.

Для иллюстрации рассмотрим один простенький пример. В обычных шахматах белым тут, как говорится, делать нечего: их единственная пешка теряется, слон и конь без труда справляются с неприятельским королем. Но в супершахматах пешка — большая шалунья, того и гляди, проскочит в ферзи.



1. f4—g5! Пешка имеет право пойти по диагонали, чем и пользуется. **1...Kh6—g6! 2. g5—f6.** И белые, и черные делают ходы, разрешенные в супершахматах. **2...Cd6—e6!** Пешка блокирована, и дальше проблем с нею не будет.

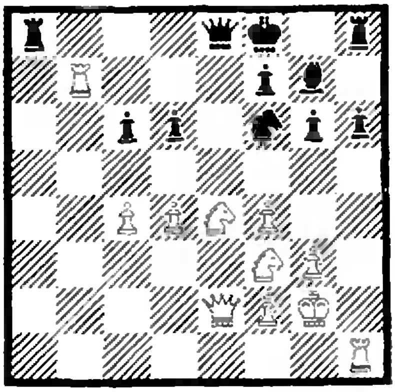
Подобных забавных примеров можно привести множество. В супершахматах приходится перестраивать все — дебютную теорию, законы тактики и стратегии, и, главное, теперь совершенно иначе выглядит эндшпиль.

Любопытно, что автор игры, кандидат философских наук В. Петросян, увлек своей игрой сотрудников Фонда философской инициативы «Апейрон», и эта организация провела несколько турниров. В одном из них за победу сражались гроссмейстеры М. Таль, Ю. Авербах, Е. Васюков и И. Зайцев. Победителем вышел многолетний секундант А. Карпова гроссмейстер И. Зайцев, выиграв все три партии. Вот одна из них.

И. Зайцев — Ю. Авербах

1. h2—g3 a7—b6 2. g2—f3. Пешки направляются к центру, в обычной игре они стараются делать это при взятии. **2...g7—g6 3. f3—f4 Cf8—g7 4. b2—c3 d7—d6 5. e2—e3 Kb8—c6 6. c3—d4 d6—c5 7. c2—c3 Cc8—e6 8. a2—a3 Kc6—a5 9. Cc1—c2.** Слон меняет окраску, чтобы прикрыть поле c2 от вторжения. Однако у черных был сильный ответ 9...c5—c4! с угрозой c4—b3! **9...Kg8—f6? 10. d2—d3** (предупреждая указанный маневр) **10...Kf6—d7.** По мнению Зайцева, черным все же стоило развить ту же атакующую линию на внедрение пешки: 10...b6—b5 с идеей 11...c5—c4, 12...c4—b3 либо 11...b5—a4, 12...a4—b3.

11. Лa1—b2. Теперь ход b6—b5 окончательно предупрежден. **11...c5:d4 12. e3:d4 b6—c5 13. Kg1—f3 Ce6—d5 14. d3—e4! Cd5—c4 15. a2—b3!** Белые избавились от всех слабостей и готовы к решающим действиям. **15...Cc4:f1 16. Kpe1:f1 c5:d4 17. c3:d4 Ka5—c6 18. Cc2—c3!** Слон возвращает свой исходный цвет! **18...Kc6—b5 19. Cc3—c4!** Слон — настоящий хамелеон, перекрашивается, сколько ему вздумается. **19...Kb5—d6 20. Kb1—d2 Kd6:c4 21. b3:c4 b7—c6 22. e4—e5 c7—d6 23. e5:d6 e7:d6 24. Kd2—e4 Kd7—f6 25. Фd1—e2 Kpe8—f8 26. Лb2—b7 h7—h6 27. Kpf1—g2 Фd8—e8.** В супершахматах рокировки запрещены, но короли кое-как уже пристроились. Пешки белых активнее, и это решает дело.



28. f4—e5! Kf6:e4 29. Фe2:e4 Kpf8—g8 30. c4—d5! c6:d5 31. Фe4:d5 d6—e6! Таким способом удается предотвратить страшную угрозу Лв7:f7.

32. Фd5—c4 Лa8—c8 33. Лb7—c7 Лc8:c7 34. Фc4:c7 Фe8—a8 35. e5:d6. Сразу решало 35. d4—c5! Kpg8—h7 38. c5—c6 Лh8—c8 37. c6—b7!

35...Kpg8—h7 36. d6—c6! Лh8—f8 37. c6—b7 Фa8—b8 38. Лh1—c1. Черные сдались, поскольку нет защиты от b7—c8Ф.

Е. Гик

1 р. 10 к.
Индекс 70465

ГОЛОВОЛОМКА «ЗВЕЗДА»

Знаете, что такое хорошая головоломка? Ответ, который нередко приходится слышать, звучит так: «Хорошая головоломка та, которая выглядит простой, но которую очень трудно решить». Попробуйте проверить себя (и это правило) на новой головоломке «Звезда».

Она состоит из четырех похожих на букву «Л» элементов. Требуется переплести их между собой, чтобы получить розетку, показанную на рисунке. Попытайтесь сначала сложить розетку, не обращая внимания на распределение цветов. Четыре элемента головоломки вы можете вырезать по выкройке журнала. Перед сборкой выкройки согните пополам, но не склеивайте половинки. Внутрь розетки нужно еще спрятать квадратный листочек бумаги. Сторона этого листочка равна ширине основания Л-образного элемента.

А. Грабарчук