ISSN 0130-2221

Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Каникулы на Луне

1992

Квант

1 1992

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал

Учредители — Президиум Российской академии наук, Президиум Академии педагогических наук и коллектив редакции журнала «Квант»

Москва, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

ДОРОГИЕ ДРУЗЬЯ!

Наступил 1992 год. Все стремительнее преобразуется окружающий нас мир. Рушатся старые представления, уходят вчерашние кумиры, сменяются ценности. Непреходящим капиталом остаются знания. Точные науки занимают здесь особое место. Помочь вам в овладении их основами — задача нашего журнала.

Что же ждет вас в «Кванте»?

Рассказы об истории и достижениях науки, о проблемах, над которыми работают физики и математики, о современных открытиях, интервью с крупными учеными, их размышления о науке и о путях ее развития. Эти материалы помещаются на первых страницах журнала.

Наш «Задачник» — это раздел, который ведется из номера в номер. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Ежегодно мы проводим конкурс на лучшее решение этих задач. Победители получают право участвовать в республиканских турах физико-математической олимпиады школьников.

Материалы, разъясняющие наиболее трудные вопросы школьного курса, помещаются в разделе «Школа в «Кванте».

Те, кто собирается поступать в вузы, смогут воспользоваться материалами в рубриках «Практикум абитуриента» и «Варианты вступительных экзаменов».

В разделе «Квант» для младших школьников» публикуются занимательные задачи, требующие не столько конкретных знаний, сколько умения мыслить логически. Статьи этого раздела, мы надеемся, доступны и интересны всем школьникам. Здесь же вы найдете задачи конкурса «Математика 6—8» — конкурса для школьников средних классов.

Любителей физических опытов мы адресуем к материалам рубрики «Лаборатория «Кванта». Они не только научат вас ставить эксперименты, но и помогут развить наблюдательность.

Название раздела «Математический кружок» говорит само за себя. Материалы в нем — для любителей заглянуть в школьный курс глубже.

Тем, кто мечтает о звездах, предназначена рубрика «Р — значит ракета». В этой рубрике — статьи по теории космических полетов, о развитии и проблемах космонавтики.

Что еще? «Калейдоскоп», «Игры и головоломки», «Шахматная страничка», «Олимпиады», «Вузы мира», «Фантастика»... Всего и не перечислишь... Каждый год мы вводим что-то новое в содержание и оформление журнала, хотя и стараемся сохранить в нем главное — его научность и доступность.

Только предупреждаем: «Квант» — журнал особый. Читать его лучше всего с ручкой или карандашом в руках.

Итак, с Новым годом! Желаем вам успехов и ждем ваших писем!

БЕСПОРЯДОК В МАГНИТНОМ МИРЕ

Доктор физико-математических наук
И. КОРЕНБЛИТ,
доктор физико-математических наук
Е. ШЕНДЕР

Если бы еще лет пятнадцать назад спросить специалистов в любой области науки и техники, есть ли какая-либо связь между магнитными свойствами нержавеющей стали, с одной стороны, и оптимальным расположением блоков в компьютере, составлением наилучшего маршрута для путешественника, работой мозга при распознавании образов...— с другой, то специалисты очень удивились бы и ответили отрицательно. Действительно, что же может быть общего между такими, казалось бы, совершенно разными вещами? Конечно, ни компьютер, ни экипаж для путешествия без стали не сделаешь, но ведь не в этом же дело!

Оказывается, несмотря на все внешнее различие, решение проблем, о которых мы упомянули, основано на одних и тех же идеях и принципах. Поэтому физические явления, происходящие в нержавеющей стали и похожих материалах, моделируют и способ распределения блоков в компьютерах, и составление маршрута для путешественника.

Когда физики начали исследовать эти явления, они и не подозревали об их связи с таким широким кругом проблем. Интересным казалось то, что в большом количестве твердых тел самого разного состава магнитные явления по непонятным причинам протекают совсем не «по правилам», т. е. не так, как следовало ожидать, исходя из всего предыдущего опыта и накопленных знаний. О каких «правилах» идет речь?

Постоянные магниты есть в любой школьной лаборатории. Вещества, из которых они сделаны, называют ферромагнетиками, потому что первым магнитом, с которым познакомилось человечество, было железо (лат. ferrum). Атомы этих веществ представляют из себя элементарные магнитики. Про такие атомы говорят, что они обладают магнитным моментом. Одновременно они обладают и механическим вращательным моментом —

спином. Спин атома можно представить схематично в виде стрелочки. Его происхождение связано со свойствами электронов и структурой электронной оболочки атомов.

Мы не будем сейчас обсуждать вопрос, почему атомы одних веществ имеют спин, а других — нет. Речь пойдет только о веществах, у атомов которых спин есть. Магнитные свойства таких веществ определяются взаимной ориентацией спинов разных атомов, которая зависит от взаимодействия между спинами. Спины стремятся ориентироваться так, чтобы потенциальная энергия, связанная с их взаимодействием, была минимальной. В некоторых веществах взаимодействие ориентирует спины параллельно (это взаимодействие мы будем называть положительным), в других веществах — антипараллельно (такое взаимодействие — отрицательным). В то же время магнитные стрелки испытывают беспорядочные тепловые колебания подобно тому, как колеблются атомы в твердых телах или беспорядочно движутся атомы в газах. Тепловые колебания мешают ориентации спинов, поэтому при высоких температурах, когда эти колебания сильные, спины не имеют определенной ориентации.

Для каждого магнитного вещества есть своя температура (ее называют температурой Кюри), ниже которой устанавливается вполне определенная взаимная ориентация спинов. Если взаимодействие положительно, то спины ориентируются параллельно. В результате сложения магнитных моментов атомов все вещество в целом приобретает магнитный момент (рис. 1, *а*). Такие вещества и называют ферромагнетиками. Если взаимодействие спинов отрицательно, то в простейших случаях возникает шахматный порядок в ориентации спинов (рис. 1, *б*). Такие вещества не обладают магнитным моментом и называются антиферромагнетиками.

До недавнего времени исследовались, в основном, магнитные кристаллы, т. е. вещества, в которых магнитные атомы образуют регулярные

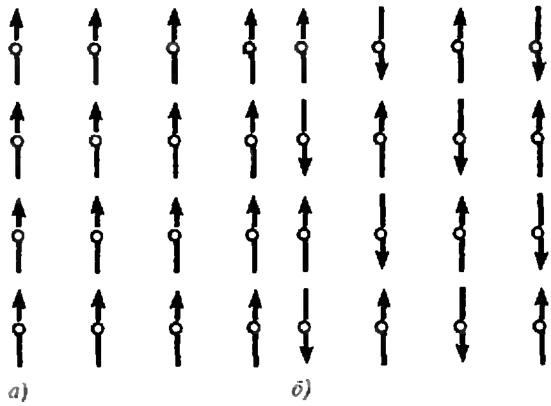


Рис. 1. Ориентация спинов: а) в кристаллическом ферромагнетике, б) в антиферромагнетике. Кружки изображают атомы, стрелки — спины.

периодические структуры. Они, например, могут занимать места в вершинах периодически повторяющихся кубов или в вершинах и центрах граней кубов.

В реально существующих магнитных кристаллах спиновые структуры бывают гораздо сложнее, чем изображенные на рисунке 1. Например, магнитные моменты разных атомов могут не быть направленными вдоль одной прямой, а меняться регулярным образом от атома к атому. Существование таких структур связано с тем, что энергии взаимодействия различных групп спинов — например, спинов, расположенных вдоль ребра куба и вдоль пространственной диагонали,— имеют разную величину и знак. Однако, за исключением некоторых очень специальных случаев, всегда существует одна спиновая конфигурация, соответствующая минимуму потенциальной энергии всей системы. Как бы ни была сложна эта спиновая конфигурация, в кристалле всегда можно выделить сравнительно небольшую группу спинов — которая называется элементарной магнитной ячейкой — и, перенося ее параллельно самой себе, получить всю магнитную структуру кристалла. Выделение элементарной ячейки аналогично тому, как для построения графика периодической функции $y=\cos x$ достаточно построить ее в интервале

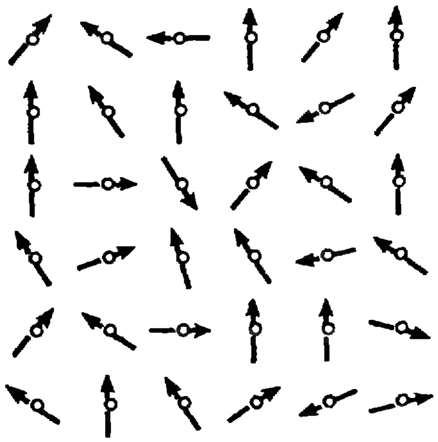


Рис. 2. Хаотичная ориентация спинов в спиновом стекле.

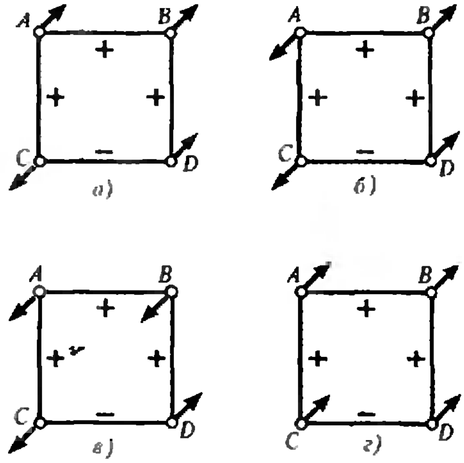


Рис. 3. Возможные направления спинов четырех атомов, расположенных по углам квадрата. Знаки энергий взаимодействия указаны на сторонах квадрата.

$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, а затем параллельно переносить построенный на этом интервале график.

Ну а какая спиновая конфигурация возникнет, если магнитные атомы не образуют правильной кристаллической решетки? Такой вопрос возник в связи с развитием техники. Появились новые, широко используемые в технике материалы, так называемые металлические стекла, в которых все атомы, включая магнитные, расположены в беспорядке, как атомы в обычном стекле. (О металлических стеклах уже рассказывалось в «Кванте» № 11 за 1986 г.) Да и во многих давно известных сплавах (нержавеющая сталь, нихром и т. д.) атомы разных элементов хоть и занимают узлы кристаллической решетки, но распределены по этим узлам случайным образом, так что периодической структуры не образуют.

Случайное распределение атомов приводит к тому, что величина и знак энергии взаимодействия спинов также случайны. Хаотичными оказываются и ориентации спинов, соответствующие минимуму суммарной потенциальной энергии взаимодействия спинов (рис. 2). По этой причине такие вещества называют спиновыми стеклами. Вследствие хаотической ориентации спинов суммарный магнитный момент в спиновом стекле равен нулю. Хаотическая ориентация спинов возникает ниже некоторой температуры, характерной для каждого вещества, аналогично тому, как возникает магнитный момент в ферромагнетике.

Очень важное отличие спиновых стекол от магнитных кристаллов заключается в том, что в них имеется очень много наборов ориентаций спинов, соответствующих одной и той же минимальной полной энергии. Мы поясним это на примере четверки спинов, изображенной на рисунке 3. Будем считать, что взаимодействуют только спины, расположенные в ближайших вершинах квадрата, причем все четыре энергии взаимодействия одинаковы по абсолютной величине, но три из них положительны, а одна — между спинами в вершинах C и D — отрицательна. Кроме того, мы для наглядности будем рассматривать наиболее простые спиновые конфигурации, когда все магнитные моменты направлены вдоль какой-то оси. Тогда сразу видно, что невозможно ориентировать спины так, чтобы в каждой паре взаимная ориентация спинов соответствовала взаимодействию между ними. Например, если спины C и D, в соответствии с их энергией взаимодействия, антипараллельны, то в одной из других пар спинов взаимная ориентация тоже должна быть антипараллельной, хотя взаимодействие в этой паре положительно (см.

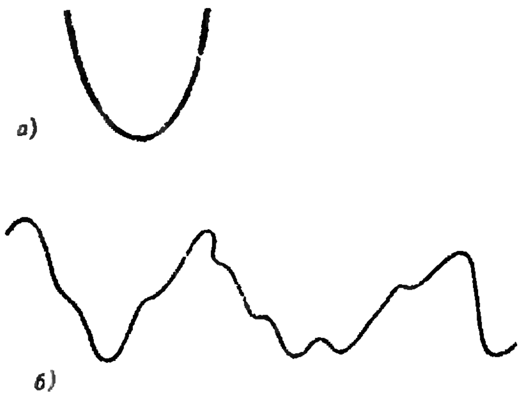


Рис. 4. Рельеф потенциальной энергии: а) в упорядоченных магнетиках, б) в спиновом стекле.

рис. 3, *а—в*). Если же во всех парах с положительной энергией спины параллельны, то параллельными оказываются отрицательно взаимодействующие спины *C* и *D* (см. рис. 3, *г*).

Таким образом, для одной из пар — или, как говорят, на одной из связей — ориентация спинов не соответствует минимуму парной энергии, хотя суммарная энергия всей четверки является минимально возможной. Такую связь называют фрустрированной (от английского слова frustration — разочарование). Все четыре рисунка, соответствующие разным положениям фрустрированной связи и поэтому разным наборам ориентаций спинов, дают одну и ту же суммарную энергию. Подчеркнем еще раз, что если все четыре энергии одного знака, то минимуму полной энергии соответствует только одна спиновая конфигурация из изображенных на рисунке 1.

Полушутя-полусерьезно задачу о нахождении равновесного состояния спиновых стекол можно уподобить задаче формирования по возможности дружного коллектива из претендентов, у которых непростые отношения друг с другом: кого ни выбирай, всегда в коллективе будут не симпатизирующие друг другу люди.

Наборы ориентаций спинов, дающие разные равновесные состояния спиновых стекол, сильно различаются между собой. Если перевести систему из одного такого состояния в другое, то надо переориентировать много спинов. Изменяя направления спинов, мы неизбежно проходим через состояния, энергия которых много больше равновесной. Процесс перехода из одного равновесного состояния в другое напоминает движение шарика из одной ямы в другую через гору (рис. 4). Для перехода между любыми равновесными состояниями в спиновых стеклах требуется преодолеть очень высокие энергетические «горы» (их обычно называют барьерами, а равновесные состояния — долинами).

Большое число равновесных состояний с одинаковой или почти одинаковой энергией — основное отличие спиновых стекол от магнитных кристаллов, и оно ярко проявляется уже в очень простых опытах. Поместим вещество со свойствами спинового стекла во внешнее магнитное поле, которое может быть создано внутри соленоида с током или между полюсами постоянного магнита. Как вы знаете из школьного курса физики, магнитное поле ориентирует магнитные моменты. Спины поворачиваются, в их хаотической ориентации возникает преимущественное направление, и, значит, вещество приобретает магнитный момент.

В антиферромагнетиках величина этого момента зависит только от величины магнитной индукции и от температуры вещества, но не зависит от предыстории образца. Мы, например, можем сначала охладить антиферромагнетик до нужной нам температуры T_0 и потом включить поле, а можем включить поле при более высокой температуре и потом охладить до T_0 — магнитный момент в обоих случаях будет один и тот же. В спиновых стеклах два эти способа «приготовления» образца дают разные результаты. При охлаждении в поле магнитный момент всегда больше, чем если охлаждать без поля. Спиновое стекло «помнит», что с ним было до момента измерения.

При включении поля магнитные моменты атомов не сразу следуют за полем, они имеют своеобразную инерцию, связанную с тем, что магнитный момент испытывает нечто похожее на трение об атомы и электроны проводимости. Время, за которое устанавливается ориентация спина вдоль поля, зависит от вещества, но в обычных магнетиках оно очень мало́ — сравнимо с миллиардной долей секунды или даже меньше. В спиновых стеклах дело обстоит совершенно иначе, хотя «трение» спина об атомы и электроны проводимости такое же, как в обычных магнетиках. Измерения проводились в течение часов или даже суток, и все равно процесс ориентации спинов вдоль магнитного поля продолжался. Более того, и без магнитного поля спиновое стекло все время меняется, причем его внутренняя жизнь не затухает даже через очень большие времена — порядка дней (может быть, лет? или еще больше? мы пока не имеем данных о «времени жизни» спинового стекла).

Свидетельством такой внутренней жизни являются эффекты старения. Охладим спиновое стекло без поля, подождем некоторое время и будем наблюдать за процессом ориентации спинов. Оказывается, что этот процесс существенно зависит от времени ожидания, т. е. от «возраста» спинового стекла. Старение спинового стекла — эффект очень тонкий. Он сказывается на так называемых динамических явлениях, в которых физические величины меняются во времени, например на только что рассмотренном процессе ориентации спинов в поле. Но на статических явлениях, в которых время роли не играет, эффект старения не сказывается. Например, если включить поле при высокой температуре, а потом медленно охладить образец, то магнитный момент не зависит от времени, прошедшего после охлаждения. Если же теперь поле выключить, то процесс уменьшения момента от этого времени зависит.

Необычные свойства спиновых стекол могут быть объяснены с помощью энергетических гор и долин — магнитная система, предоставленная самой себе, медленно переползает из долины в долину, аналогично тому, как движется шарик в рельефе, изображенном на рисунке 4, *б*, под влиянием слабых случайных толчков. Толчки слабые, и одного толчка мало, чтобы перепрыгнуть через гору. Направления толчков случайны, так что чаще всего они друг друга компенсируют и бо́льшую часть времени шарик находится в какой-то одной яме. Но если терпеливо ждать, то в конце концов может произойти такое маловероятное событие, что толчки в течение длительного времени будут направлены в одну сторону и шарик перепрыгнет в другую яму. Роль толчков для спинов играют тепловые колебания атомов или взаимодействие с электронами проводимости, если спиновое стекло является металлом. Такие междолинные переходы и объясняют эффекты старения и долговременные динамические явления в спиновых стеклах. В обычных же упорядоченных магнетиках потенциальная энергия взаимодействия имеет только одну яму.

Аналогичным образом можно понять и зависимость момента от предыстории. Равновесное состояние в поле сильно отличается от равновесного состояния без поля. Вот почему после включения поля система не остается в долине, соответствующей минимуму энергии без поля; она медленно переползает в нужную долину, и поэтому магнитный момент оказывается сначала меньше равновесного, но потом медленно возрастает, приближаясь к равновесному значению. Иначе обстоит дело, если поле включено при высоких температурах, когда состояния спинового стекла еще нет, нет долин и гор и спины очень быстро принимают равновесную ориентацию. Если теперь температуру медленно уменьшать, то ориентация спинов всегда соответствует равновесной, и потому магнитный момент максимален.

Оставим теперь на время спиновое стекло и рассмотрим классическую задачу теорем оптимизации — задачу коммивояжера. Коммивояжеру, живущему в пункте *O* (рис. 5), надо составить самый короткий маршрут для

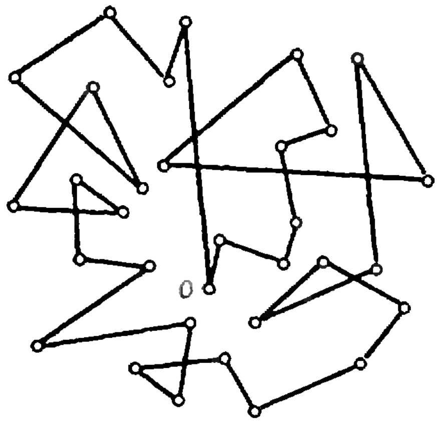


Рис. 5. Возможный маршрут коммивояжера, отправляющегося из города О.

того, чтобы посетить соседние города, изображенные на рисунке точками, и вернуться обратно. Как ни выбирай маршрут, между некоторыми городами придется двигаться не по прямой, а по ломаной, т. е. не оптимальным образом. Где же выгоднее проиграть, а где выиграть, чтобы в целом был все же кратчайший маршрут?

Сразу чувствуется, что эта задача очень похожа на нахождение равновесной ориентации спинов, дающей минимум суммарной потенциальной энергии спинового стекла. Ведь и в спиновом стекле, несмотря на то, что суммарная энергия минимальна, во взаимодействии некоторых пар мы выигрываем, а некоторых — проигрываем. Поэтому если длине маршрута коммивояжера удастся сопоставить энергию взаимодействия спинов в стекле, а конкретному маршруту — конкретный набор ориентаций спинов, то задачи будут эквивалентны.

Задача коммивояжера (как и задача о нахождении равновесного состояния спинового стекла) может быть решена на ЭВМ путем перебора всех маршрутов (всех возможных спиновых ориентаций), если число городов (спинов) мало́. Время, необходимое для такого перебора, катастрофически растет с увеличением числа объектов перебора (городов, спинов); и когда их число достигает сотен, оказываются бесполезными даже самые быстродействующие ЭВМ.

Эквивалентность задачи коммивояжера и спинового стекла открыла другой путь для нахождения оптимальных маршрутов (их много, как и равновесных конфигураций в спиновом стекле). Можно с помощью ЭВМ смоделировать спиновое стекло. Для этого в память ЭВМ записывают набор энергий взаимодействия спинов и выбирают произвольным образом начальную спиновую конфигурацию. Такая конфигурация, конечно, не соответствует минимуму энергии всей системы. В реальной ситуации спины, испытывая случайные толчки со стороны тепловых колебаний атомов, приходят постепенно в равновесное положение, т. е. в одну из долин. Записывая в памяти ЭВМ физические законы, по которым меняют свою ориентацию спины под действием толчков, можно воспроизвести этот процесс на ЭВМ и тем самым найти оптимальную конфигурацию спинов, а значит, и оптимальный маршрут коммивояжера. Оказалось, что такой способ нахождения оптимального маршрута гораздо эффективнее всех способов перебора. Физическая аналогия позволяет лучшим способом решить задачу оптимизации!

Аналогия со спиновым стеклом прослеживается и в другой задаче по оптимизации, имеющей непосредственное отношение к конструированию сложных электронных систем, например компьютеров. Начинка компьютеров состоит из электронных сетей, распределенных по отдельным блокам. Желательно, чтобы число соединительных проводов между блоками было поменьше, так как большая длина проводов увеличивает время прохождения сигнала и, значит, уменьшает быстродействие компьютера. С другой стороны, нельзя все элементы поместить в один блок, так как это приводит к паразитным шумам, искажающим сигнал. Число соединительных проводов различно для различных элементов. Задача состоит в том, чтобы разместить элементы по блокам оптимальным образом, так, чтобы число их в каждом блоке было примерно одинаково, а количество проводов, пересекающих границы блоков,— минимально. Если сопоставить положению конкретного элемента в том или ином блоке ориентацию одного из спинов, то сразу станет ясной аналогия этой задачи оптимизации с проблемой определения устойчивой конфигурации спинов в спиновом стекле.

Мы уже говорили, что спиновое стекло обладает своего рода памятью. Если его намагнитить, а потом выключить поле, то система переходит в ближайшую долину, т. е. в ту из них, в которой ориентации спинов наиболее похожи на ориентации спинов в намагниченном состоянии (также ведет себя шарик, который поднят на склон одной из гор, а затем отпущен). Это и значит, что спиновое стекло запомнило ту ориентацию спинов, которая была в магнитном поле.

Конкретный набор ориентаций спинов, соответствующий какой-либо долине, можно рассматривать как образ, который система запомнила. Тогда переход из начального состояния в долину естественно рассматривать как отождествление образа, поданного на вход системы, с образом, хранящимся в памяти. При этом образ, поданный на вход системы, будет отождествляться с тем из образов, хранящихся в памяти системы, который мало отличается от входного. Это означает, что если долины соответствуют, например, образам разных зверей, а на вход будет подан образ зайца без ноги, то система отождествит его с зайцем, а не с волком, несмотря на то, что в памяти хранится образ зайца со всеми четырьмя ногами.

Говорят, что система обладает ассоциативной памятью (по ассоциации). Эта память, в отличие от памяти ЭВМ, хранится не в отдельных ячейках, а является коллективным свойством всей системы в целом. Поэтому он обладает важным преимуществом — отсутствием чувствительности к дефектам. Выключение или порча части системы приведет лишь к менее качественному распознаванию образов, но память остается.

Полагают, что точно так же «работает» и система нейронных сетей головного мозга, обеспечивающая человеческую память.

Интенсивное изучение спиновых стекол продолжается. И кто знает, сколько неожиданного и интересного таят в себе эти прозаические на первый взгляд материалы.

ДВЕ ИГРЫ СО СПИЧКАМИ

Доктор физико-математических наук
И. ЯГЛОМ

В этой статье мы расскажем вам об играх «ним» и «цзяньшицзы». И «ним» и «цзяньшицзы» — китайские народные игры. «Цзяньшицзы» в переводе означает «выбирание камней» (разумеется, замена в условиях игр камней спичками ничего не меняет в ее существе). Впоследствии эти игры проникли в Европу; одно время игра «ним» была популярна в Западной Европе.

Приведем правила этих игр.

Игра «ним».

На столе лежат три кучки спичек. Двое играющих поочередно берут спички из этих кучек, причем за один раз играющий может взять любое число спичек из одной (обязательно только из одной!) кучки. Выигравшим считается тот, кто заберет последнюю спичку.

Игра «цзяньшицзы»

На столе лежат две кучки спичек. Двое играющих поочередно берут спички из этих кучек, причем за один раз играющий может либо взять любое число спичек из одной кучки, либо поровну (но тоже любое число!) спичек из каждой кучки. Выигравшим считается тот, кто заберет последнюю спичку.

Задача состоит в том, чтобы определить, при каких начальных положениях (т. е. количествах спичек в каждой из кучек) начинающий может выиграть, а при каких нет, и указать метод правильной (беспроигрышной) игры.

Практически играть в «ним» или «цзяньшицзы» очень удобно у классной доски — без всяких спичек, но с мелом и тряпкой в руке. На доске можно нарисовать, скажем, три ряда полей, оканчивающихся у правого края доски, и три шашки — по одной в каждом ряду полей (рис. 1). Каждый играющий в свой ход стирает одну из шашек и «передвигает» ее на любое число полей вправо (здесь речь идет об игре «ним»); выигрывшим считается тот, кто сделает последний ход. Также можно играть и в «цзяньшицзы» — только теперь доска для игры содержит два ряда полей и каждый играющий своим ходом подвигает либо одну шашку, либо одновременно обе шашки на одно и то же число полей.

Начинаем играть в «ним»

Предположим, что в трех кучках спичек лежат соответственно a, b и c спичек, где $a \leqslant b \leqslant c$; тройка чисел $(a;\ b;\ c)$ — это *положение* или *позиция* в игре *в данный момент*. Ясно, что позиция (0; 1; 1) является *проигрышной* для начинающего; своим ходом он обязан взять одну из двух имеющихся спичек, но после этого его соперник забирает вторую спичку и выигрывает. Все остальные начальные положения $(0;\ 1;\ c)$, где $c \geqslant 2$, *выигрышны* для начинающего: своим первым ходом он забирает $c-1$ спичку из третьей кучки, оставляя тем самым своему противнику заведомо проигрышную позицию (0; 1; 1). Следующее *проигрышное* для начинающего положение задается тройкой чисел (0; 2; 2): ведь если в этой позиции он заберет одну спичку, то следующим ходом противник оставит ему позицию (0; 1; 1), а если заберет две спички, то противник следующим ходом кончит игру (т. е. выиграет). Все остальные позиции $(0;\ 2;\ c)$, где $c \geqslant 3$, *выигрышны* для начинающего, который может своим первым ходом забрать $c-2$ спички, оставив противнику (проигрышную!) позицию (0; 2; 2). Следующие положения, *проигрышные* для начинающего, будут иметь вид (1; 2; 3) и (0; 3; 3): здесь после каждого хода начинающего противник либо сразу выигрывает, либо сводит игру к одной из рассмотренных выше позиций (0; 1; 1) и (0; 2; 2) (см. рисунок 2, где красными цифрами обозначены проигрышные для начинающего позиции и стрелки обозначают ходы).

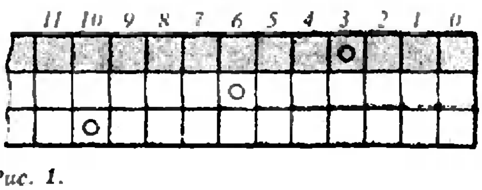


Рис. 1.

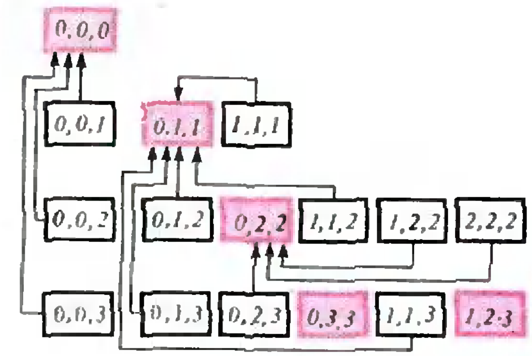


Рис. 2.

Продолжая рассуждать таким же образом, мы можем составить таблицу начальных положений, проигрышных для начинающего: игрок, вынужденный сделать ход, исходя из такой позиции, неминуемо должен перейти к позиции, выигрышной для начинающего (т. е. не входящей в составленную нами таблицу): напротив, если позиция не является проигрышной, то игрок своим ходом может либо сразу выиграть, либо перейти к проигрышной позиции, «подставив» тем самым ее своему противнику. Первые 15 из этих позиций собраны в следующей таблице:

Игра «цзяньшицзы»

Пусть в наших двух кучках лежат соответственно a и b спичек, где $a \leqslant b$; пара чисел $(a;\ b)$ — это *положение* или *позиция в данный момент игры*. Будем и здесь искать те положения, которые *проигрышны* для начинающего. Первое такое положение — это (1; 2); возможных ходов всего четыре: можно взять 1 спичку из 1-й кучки, или 1 спичку из 2-й кучки, или 2 спички из 2-й кучки, или, наконец, по 1 спичке из каждой кучки. Очевидно, что при любом возможном ходе начинающего противник следующим ходом заканчивает игру, т. е. выигрывает. Все остальные положения, где одно из двух чисел a и b равно 1 или 2 или где разность $b-a$ равна 1, *выигрышны* для начинающего: если в этом положении нельзя окончить игру одним ходом (т. е. сразу выиграть), то можно свести игру к положению (1; 2), проигрышному для начинающего. Следующей *проигрышной* позицией является позиция (3; 5): здесь после каждого хода начинающего противник или сразу выигрывает, или сводит игру к положению (1; 2). Все остальные позиции $(a;\ b)$, где одно из чисел a и b равно 3 или 5 или где $b-a=2$, *выигрышны* для начинающего. Следующее *проигрышное* для начинающего положение — это (4; 7). Продолжая рассуждать таким же образом, мы можем составить таблицу проигрышных для начинающего позиций.

Таблица I *(проигрышные позиции в игре «ним»)*

№№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	0	0	1	0	0	1	0	2	0	3	2	1	0	0	1
b	1	2	2	3	4	4	5	4	6	4	5	6	7	8	8
c	1	2	3	3	4	5	5	6	6	7	7	7	7	8	9

Попытаемся вглядеться в составленную таблицу с тем, чтобы усмотреть в ней общую закономерность, закон ее составления. Однако на первый взгляд никакого определенного закона, диктующего правила составления этой таблицы, заметить нельзя...

Таблица II *(проигрышные позиции в игре «цзяньшицзы»)*

№№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24
b	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39

К сожалению, и здесь не видно никакого определенного закона составления этой таблицы.

А нельзя ли таблицы I и II записать по-другому?

Нам не удалось понять, как составлены таблицы I и II, образованные в первом случае тремя, а во втором — двумя строчками чисел. Подумаем теперь над возможными причинами постигшей нас неудачи.

Мы уже говорили о том, что таблицы I и II — это числовые таблицы, *они образованы рядами чисел. Фигу*рирующие в этих таблицах числа мы, естественно, записывали обычным образом, используя общепринятую десятичную систему счисления, так, например, составляющие последний столбец таблицы II числа 24 и 39 означают: «2 десятка и 4 единицы» и «3 десятка и 9 единиц». Однако сама по себе десятичная система счисления, происхождение которой связано с тем случайным обстоятельством, что человек имеет на руках 10 пальцев, никак не связана с рассматриваемыми нами играми, поэтому уместной представляется попытка записать наши таблицы по-другому.

Дальнейшее содержание этой *статьи связано со статьей* «Системы счисления» («Квант» № 12, 1991). Нам потребуются следующие сведения из этой статьи.

Систем записи целых положительных чисел с помощью небольшого числа символов (цифр) можно предложить много. *Позиционные системы счисления* (точнее было бы сказать — *позиционные системы записи чисел*) строятся следующим образом. Задается некоторый базис, или *система ключевых чисел*, представляющий собой бесконечную возрастающую последовательность целых чисел:

$$1=q_0<q_1<q_2<q_3\ldots \qquad (*)$$

После этого каждое число N представляется в виде суммы чисел нашего базиса, взятых с теми или иными целыми коэффициентами:

$$N=a_mq_m+a_{m-1}q_{m-1}+\ldots$$
$$\ldots+a_2q_2+a_1q_1+a_0q_0;$$

это выражение записывается так:

$$N=a_ma_{m-1}\ldots a_2a_1a_0,$$

где $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0$ — «цифры» записи числа N.

Например, если система базисных чисел такова:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,...

то число 27 запишется следующим образом:

$$27=1\cdot 23+0\cdot 19+0\cdot 17+0\cdot 13+$$
$$+0\cdot 11+0\cdot 7+0\cdot 5+1\cdot 3+0\cdot 2+$$
$$+1\cdot 1=«1000000101».$$

При этом k-я цифра a_k в записи любого числа N в системе счисления с базисом (*) всегда будет меньше отношения q_{k+1}/q_k.

Если базис системы счисления имеет вид

$$1=q_0,\ q=q^1,\ q^2,\ q^3,\ q^4,\ \ldots,$$

где q — некоторое целое число, то система счисления называется «q-ичной», *в ней все числа представляются сум*мами степеней числа q и все цифры в записи числа N меньше q (меньше 10 в случае общепринятой десятичной системы счисления).

Самой простой из всех систем записи целых чисел является *двоичная* система счисления, в которой все числа представляются суммами степеней числа 2. Если использовать эту систему счисления, то наши таблицы I и II примут совсем другой вид (числа в двоичной системе счисления мы будем записывать красными цифрами):

Таблица 1*a*

№№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	0	0	1	0	0	1	0	10	0	11	10	1	0	0	1
b	1	10	10	11	100	100	101	100	110	101	101	110	111	1000	1000
c	1	10	11	11	100	101	101	110	110	111	111	111	111	1000	1001

Таблица II*a*

№№	1	2	3	4	5	6	7	8
a	1	11	100	110	1 000	1 001	1 011	1 100
b	10	101	111	1010	1 101	1 111	10 010	10 100

9	10	11	12	13	14	15
1 110	10 000	10 001	10 011	10 101	10 110	11 000
10 111	11 010	11 100	11 111	100 010	100 100	100 111

Внимательное изучение таблицы I*a* позволяет усмотреть в ней вполне определенную закономерность: да, конечно, *проигрышные позиции* (*a*; *b*; *c*) *в игре «ним» — это те позиции, где сумма цифр каждого разряда в двоичной записи чисел a, b, c четна* (т. е. равна 0 или 2)! Однако таблица II*a* оказывается более коварной: она ничем не лучше таблицы II, и никакой определенной закономерности составления проигрышных пар (*a*; *b*) из нее усмотреть нельзя.

Но почему именно двоичная система счисления должна дать нам ключ к отысканию системы беспроигрышной игры в «цзяньшицзы»? Правда, мы видели, что эта система помогает как будто при разработке теории игры «ним»: но ведь «цзяньшицзы» — это совсем другая игра, а ключ, открывающий одну дверь, совсем не обязан подходить к другой. Нельзя ли переписать таблицу II по-иному: может быть, другая система записи образующих эту систему чисел прольет больше света на ее строение?

Внимательное изучение таблицы II позволяет подметить, что в ней часто фигурируют *числа Фибоначчи* (см., например, 1-й, 2-й, 5-й и 13-й столбцы таблицы)*). А это в свою очередь может навести нас на мысль о целесообразности попытки записать таблицу II в «фибоначчиевой системе счисления», в которой все числа представляются суммами чисел последовательности Фибоначчи (числа в этой системе счисления мы будем записывать синими цифрами). Например, число 100 в фибоначчиевой системе счисления записывается так:

$$100 = 1000010100$$

ибо $100 = 1 \cdot 89 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 3$.

Перепишем теперь таблицу II в фибоначчиевой системе счисления:

Таблица II*б*

№№	1	2	3	4	5	6	7	8
a	1	100	101	1 001	10 000	10 001	10 100	10 101
b	10	1 000	1 010	10 010	100 000	100 010	101 000	101 010

9	10	11	12	13	14	15
100 001	100 100	100 101	101 001	1 000 000	1 000 001	1 000 100
1 000 010	1 001 000	1 001 010	1 010 010	10 000 000	10 000 010	10 001 000

*) Числа Фибоначчи — последовательность чисел, начинающаяся с 1 и 2 и далее строящаяся по следующему закону: *каждое число последовательности Фибоначчи равно сумме двух предыдущих*. Первые ее члены таковы: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 114, 233, 377, ... Числам Фибоначчи посвящена хорошая брошюра Н. Н. Воробьева «Числа Фибоначчи» (М.: Наука, 1969).

Вот тут уж закон составления «проигрышных» пар не вызывает никакого сомнения: *записанная в фибоначчиевой системе счисления пара чисел $(a;\ b)$, где $a<b$, определяет в игре «цзяньшицзы» проигрышную позицию, если a оканчивается четным числом нулей**), а b получается из a приписыванием одного нуля в конце.*

Догадка? Нет, теорема!

Мы уже почти достигли цели: мы как будто знаем, какие позиции в играх «ним» и «цзяньшицзы» являются проигрышными для начинающего, а какие выигрышны для него. Однако математика не признает выражения «как будто»; в математике решить задачу — это не только (и не столько!) догадаться, каким будет ответ задачи, но и доказать, что твоя догадка правильна.

Доказательство того, что подмеченная нами закономерность составления проигрышных позиций правильна, состоит в следующем: *требуется показать, что в каждой из игр «ним» и «цзяньшицзы» существует такая система позиций* (их можно называть выделенными или проигрышными позициями), *что*

а) *для каждой позиции, не являющейся проигрышной, существует такой ход, после которого позиция становится проигрышной;*

б) *каждая проигрышная позиция после любого хода играющего перестает быть таковой.*

Эти свойства проигрышных позиций определяют и «метод беспроигрышной игры» (применимый, разумеется, только в том случае, когда начальная позиция не является проигрышной):

*играющий должен каждым своим ходом добиваться того, чтобы позиция стала проигрышной**).*

*) a может оканчиваться «нулем нулей», т. е. вовсе не содержать нулей в конце, ведь нуль — четное число.

**) При этом позицию (0; 0; 0), соответственно (0; 0), мы также причисляем к числу «проигрышных»; ведь если игрок может свести игру к этой позиции, то значит, он уже выиграл.

Сформулируем теперь те две теоремы, которые нам предстоит доказать.

Теорема 1. *Проигрышными* (т. е. удовлетворяющими сформулированным выше условиям а) и б)) *в игре «ним» являются те и только те позиции $(a;\ b;\ c)$, для которых суммы всех цифр, отвечающих одному разряду в записи чисел a, b, c в двоичной системе счисления, для всех разрядов четны.*

Теорема 2. *Проигрышными в игре «цзяньшицзы» являются те и только те позиции $(a;\ b)$, для которых числа a, будучи записанным в фибоначчиевой системе счисления, кончается четным числом нулей, а число b получается из числа a приписыванием еще одного нуля в конце.*

Замечание. Из теорем 1 и 2 следует, что обе игры — «ним» и «цзяньшицзы» — в определенном смысле выгоды для начинающего: проигрышных для начинающего позиций (см. таблицы I и II) в них довольно мало, т. е. они встречаются гораздо реже, чем все остальные (выигрышные для начинающего) позиции.

Доказательства этих теорем составляют содержание приводимых ниже упражнений. Ответы к ним даны в конце номера (попробуйте, однако, найти решения самостоятельно). Советуем вам сначала разобраться с упражнениями 1—4, так как упражнения 5—7 гораздо сложнее.

Упражнения

1. Докажите, что если позиция $(a;\ b;\ c)$ в игре «ним» не является проигрышной, т. е. не удовлетворяет указанным в формулировке теоремы 1 условиям, то играющий своим ходом может сделать ее проигрышной.

2. Докажите, что если позиция $(a;\ b;\ c)$ в игре «ним» является проигрышной, то после любого хода игрока она перестает быть таковой.

3. Укажите правила беспроигрышной игры в игру «ним» в том случае, если число кучек спичек есть любое наперед заданное целое число $n\geqslant 2$ (прочие правила игры мы оставляем прежними). К чему сводится стратегия беспроигрышной игры в случае $n=2$?

4. Опишите проигрышные позиции $(a;\ b;\ c)$ в игре «ним», записывая числа a, b, c не в двоичной, а в четверичной системе счисления (т. е.

(Окончание см. на с. 31)

ПОЧЕМУ ДРОЖИТ ОСИНОВЫЙ ЛИСТ?

Т. БАРАБАШ

Всем известна народная поговорка: «Дрожать как осиновый лист». Мне показалось интересным узнать, справедлива ли она. Результатом моих размышлений и стала эта статья.

Листья осины и в самом деле «дрожащие». Небольшое дуновение ветерка — и вся листва на дереве приходит в движение. Да и латинское название осины в переводе на русский язык означает «тополь дрожащий». В чем же причина этого явления?

Черешок осинового листа — длинный, тонкий, закрученный и возле листа сплюснутый с боков — не оказывает почти никакого сопротивления движению листа, а жесткость черешка на изгиб и кручение пренебрежимо мала в отличие от черешков листьев других деревьев (рис. 1.). Поэтому, чтобы понять природу движения реального осинового листа, можно проанализировать поведение простой модели, например — вырезанного из бумаги листа, подвешенного на нити.

Но сначала рассмотрим, как ведет себя твердая пластинка в потоке воздуха. В образовании аэродинамической силы, которая состоит из силы лобового сопротивления и подъемной силы, наиболее важную роль играет понижение давления над пластинкой в ее передней части и повышение давления под ней. В результате точка приложения силы смещается от геометрического центра пластинки к ее переднему краю, что подтверждается экспериментально (рис. 2). Причем при увеличении так называемого угла атаки — угла между вектором скорости потока и плоскостью пластинки — смещение становится все заметнее.

Автор этой статьи Таня Барабаш — школьница, ученица 11 класса лицея № 145 г. Киева.

Вернемся теперь к опыту с бумажным листом. Подвесим на нити лист длиной 15—20 сантиметров и будем перемещать его в воздухе (или поместим перед вентилятором). Мы увидим, что бумажный лист начнет совершать повторяющиеся зигзагообразные или круговые колебательные движения. Попробуем понять, как могут возникнуть такие колебания.

Если плоскость листа развернута по отношению к скорости потока, то точка приложения аэродинамической силы смещена к переднему, по отношению к потоку, краю — положение *А* на рисунке 3. Эта сила, во-первых, приводит лист в движение (вдоль и поперек потока), а во-вторых, создает вращательный момент, который стремится развернуть лист

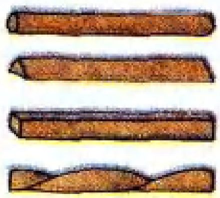


Рис. 1. Возможные формы черешков различных деревьев (внизу — черешок осины).

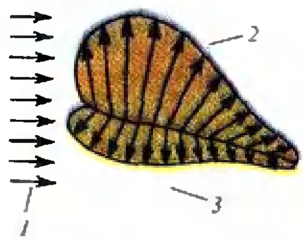


Рис. 2. Возникновение областей пониженного и повышенного давления вокруг пластинки в потоке воздуха (1 — поток воздуха, 2 — область пониженного давления, 3 — область повышенного давления).

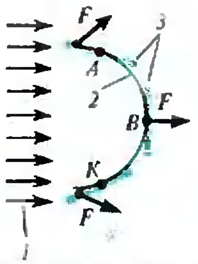


Рис. 3. Изменение точки приложения аэродинамической силы в разных точках траектории бумажного листа (1 — поток воздуха, 2 — траектория движения, 3 — проекция листа).

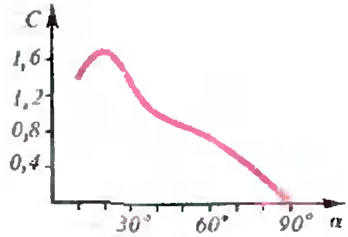


Рис. 4. Зависимость коэффициента подъемной силы от угла атаки.

поперек потока. В некоторой точке B вращательный момент станет равным нулю, но лист, обладая определенной скоростью в этой точке, проскочит ее и окажется в точке K. Возникающая аэродинамическая сила будет стремиться опять вернуть лист в положение B. В результате бумажный лист начнет колебаться.

Все описанное целиком справедливо для листа осины. Листьям же других деревьев не дают двигаться подобным образом их черешки, которые обладают большой жесткостью на изгиб и кручение.

Рассмотрим подъемную силу (т. е. проекцию аэродинамической силы, перпендикулярную скорости потока), с которой ветер действует на плоскую площадку S. Она равна

$$F=C\frac{\varrho v_0^2}{2}S,$$

где ϱ — плотность среды, в данном случае воздуха (ϱ=1,29 кг/м^3), v_0 — скорость ветра, C — так называемый коэффициент подъемной силы, зависящий, прежде всего, от угла атаки. Эта формула, с точностью до коэффициента, может быть получена из соображений размерности. Коэффициент C теоретически рассчитать очень трудно, и в большинстве случаев его находят путем «продувки» тела или его модели в аэродинамической трубе.

График зависимости коэффициента подъемной силы от угла атаки приведен на рисунке 4. Причина изменения коэффициента — в поведении воздушных струй на подветренной стороне. При углах атаки, меньших 15°, на подветренной стороне образуется устойчивый незавихренный поток воздуха. При угле порядка 15° разрежение становится максимальным, и коэффициент достигает максимума. С увеличением угла начинают появляться завихрения, которые усиливаются по мере роста угла (рис. 5). Это приводит к потерям энергии, и коэффициент уменьшается.

Благодаря тому, что черешок осинового листа скручен, сам лист вогнут и напоминает по форме парус. Если сравнить значения коэффициента C для плоской пластинки (обычный лист) и вогнутой поверхности (осиновый лист), то при всех углах атаки коэффициент подъемной силы будет больше для вогнутого листа. При углах, например, 15° силы отличаются в два раза. Эта разница объясняется наличием кривизны. Чем она больше, тем больше сужается поток

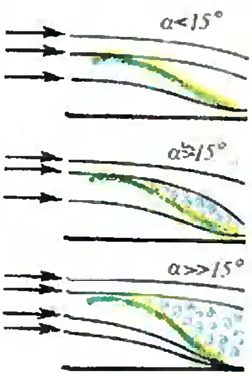


Рис. 5. Характер движения воздушного потока при разных углах атаки.

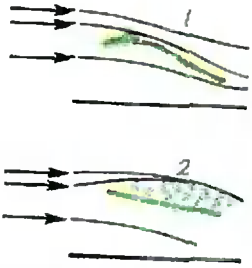


Рис. 6. Характер движения воздушного потока для вогнутого и плоского листа (1 — вогнутая модель, 2 — плоская модель).

и сильнее падает давление. На совершенно плоском листе получить незавихренный поток невозможно, так как уже с самого начала происходит отрыв струй (рис. 6). Но чем больше угол атаки, тем менее заметной становится разница в коэффициентах подъемной силы между плоскими и вогнутыми листами.

На движение листьев осины большое влияние оказывает явление резонанса. Листья осины расположены на ветке так, что каждый лист соприкасается с близлежащими. Так как черешки листьев и сами листья мало отличаются друг от друга, то, подобно двум одинаковым маятникам, подвешенным на одной нити, они приходят в движение, если хотя бы один из них начал колебаться. Колебания соседних листьев усиливают колебания друг друга, достигая значительных амплитуд.

Кроме того, листья осины не распределены по ветке равномерно, а растут пучками по нескольку листьев (рис. 7). Каждый такой пучок образует нечто подобное шатру или парашюту. Листья в пучке касаются друг друга, и как бы ни дул ветер, всегда найдется такой лист, для которого угол между плоскостью листа и направлением ветра будет оптимальным, и он начнет колебаться первым, приводя в движение соседние листья.

Известно, что природа рациональна, и каждое явление в ней обусловлено суровой необходимостью. Так зачем же осине дрожащие листья? Оказывается, причина тому есть.

Для того чтобы молодая осина прижилась, необходима достаточная влажность. Однако гибкая древесина осины склонна к гниению. Почти все взрослые деревья в середине гнилые и поэтому легко ломаются от ветра. Можно предположить, что дрожание листьев, которое увеличивает испарение и вызывает постоянную циркуляцию воды в дереве,— своеобразный метод борьбы с гниением. Подтверждает это и тот факт, что дрожат листья только на взрослом дереве. Молодое развивающееся дерево имеет совсем другие листья, не склонные к дрожанию — ведь молодому дереву гниль не страшна, а наоборот, нужна вода. Листья на молодом дереве сильно отличаются от листьев на взрослых деревьях не только по форме, но и по расположению — они одиночные и рассредоточены по ветке (рис. 8).

Кроме того, дрожание листьев ускоряет процесс фотосинтеза, так как фотосинтез — это фактически газовый обмен со средой. Дрожание листьев отгоняет от них выделившиеся газы. А большая скорость фотосинтеза необходима для быстрой замены старых клеток новыми, что также предохраняет древесину от гниения.

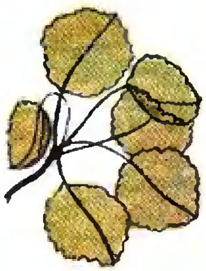


Рис. 7. Ветвь взрослого дерева осины.

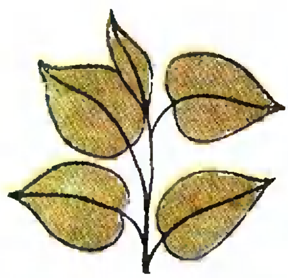


Рис. 8. Ветвь молодой осины.

Задачник „Кванта"

Задачи

М1321 — М1325, Ф1328 — Ф1332

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 1992 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Тверская, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1 — 92» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1321» или «Ф1328». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1321. Ладья побывала во всех клетках шахматной доски размерами $n\times n$ клеток. Докажите, что она должна была при этом изменить направление движения не менее $2n-2$ раз. (Ладья движется параллельно сторонам квадрата.)

Ю. Ходзинский, ученик 10 класса

М1322. Три отрезка, выходящие из разных вершин треугольника ABC и пересекающиеся в одной точке M, делят его на шесть треугольников. В каждый из них вписана окружность. Оказалось, что четыре из этих шести окружностей равны. Следует ли отсюда, что треугольник ABC правильный, если M — точка пересечения а) медиан, б) высот, в) биссектрис, г) M — произвольная точка внутри треугольника?

В. Сендеров

М1323. Докажите для любых положительных чисел x и y неравенство

$$x\cdot 2^y+y\cdot 2^{-x}\geqslant x+y.$$

В. Прасолов

М1324. Докажите, что ни при каком целом k число k^2+k+1 не делится а) на 5, на 11 и на 17; б) на число вида $6m-1$ (m — произвольное натуральное число).

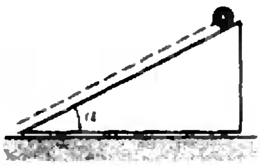
С. Масич

М1325. а) На плоскости даны три точки A, B, C. Пусть O — их центр тяжести (точка пересечения медиан треугольника ABC). При повороте вокруг точки O на угол $120°$ точка B переходит в точку P, а при повороте на $240°$ (в том же направлении) точка C переходит в точку Q. Докажите, что треугольник APQ правильный (либо точки A, P и Q совпадают).

б)* Для произвольного набора q точек A_0, A_1, ..., A_q на плоскости ($q\geqslant 1$) определим следующую операцию: строим центр тяжести O данных точек и поворачиваем каждую точку A_k вокруг O на угол $2\pi k/q$ в новое положение A'_k ($k=0, 1, ..., q$). С полученным набором q точек $A'_0=A_0$, A'_1, ..., A'_q проделаем такую же операцию еще раз, и т. д. Докажите, что через $q-1$ повторений получится набор из q совпадающих точек.

В. Быковский

Ф1328. Клин массой M с длиной наклонной грани L и углом при основании α покоится на гладкой горизонтальной плоскости (см. рисунок). К верхней точке клина прикреплен конец очень тонкой ленты, масса которой $m=M/3$, а длина L. Ленту заворачивают в клубок, после чего систему отпускают. Найдите максимальную скорость клина. Трением можно пренебречь.



Б. Корсунский

Задачник „Кванта"

Ф1329. В цилиндре под поршнем находится ν молей ненасыщенного водяного пара при температуре T_0. При медленном изобарическом охлаждении цилиндра половина пара сконденсировалась, а внутренняя энергия содержимого цилиндра уменьшилась на ΔU. Какое количество теплоты пришлось при этом отвести от содержимого цилиндра, если температура в нем уменьшилась на ΔT? Объемом воды по сравнению с объемом пара можно пренебречь.

А. Шеронов

Ф1330. К батарейке с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением подключены последовательно друг другу два одинаковых миллиамперметра, которые показывают ток $I_1=1$ мА. Параллельно одному из них подключают вольтметр, при этом показания этого миллиамперметра уменьшаются до $I_2=0{,}8$ мА, а вольтметр показывает напряжение $U=0{,}3$ В. Что показывает второй миллиамперметр? Чему равно напряжение батарейки? Каковы сопротивления приборов?

Р. Александров

Ф1331. К источнику с напряжением $U=10$ В подключили последовательно соединенные катушку индуктивностью $L_0=0{,}1$ Гн и резистор сопротивлением $R=10$ Ом. Через некоторое время ток в цепи установился. После этого начинают вдвигать и выдвигать сердечник катушки таким образом, чтобы индуктивность изменялась по закону $L=L_0(1+0{,}1\sin\omega t)$. При этом в цепи появляется переменная составляющая тока. Найдите амплитуду этой составляющей на частоте $\omega=1$ рад/с. Какой станет амплитуда, если вдвигать и выдвигать сердечник в 10000 раз чаще?

В. Можаев

Ф1332. Падающий на тонкую линзу луч пересекает главную оптическую ось под углом $\alpha=4^\circ$ на расстоянии $d=12$ см от линзы и выходит из нее под углом $\beta=8^\circ$ к главной оптической оси. Найдите фокусное расстояние линзы.

В. Дерябкин

Поправки

Ошибка, допущенная в формулировке задачи М1310 («Квант» № 10, 1991), сделала задачу нерешаемой. Приводим условие задачи в более общей формулировке:

М1310. В соревнованиях участвуют 2^k боксера ($k>1$). Ежедневно встречаются 2^{k-1} пары боксеров (так что каждый проводит один бой). Все боксеры имеют разную силу, и в каждом бою побеждает сильнейший. Докажите, что за $k(k+1)/2$ дня можно определить место каждого боксера. (Расписания на каждый день составляются накануне вечером.)

Конечно, было бы интересно получить оценку, меньшую $k(k+1)/2$; точная оценка в этой задаче неизвестна.

В условия задачи М1314 («Квант» № 11, 1991) допущены опечатки. Условие задачи следует читать так:

М1314. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а P и Q — центры окружностей, описанных около треугольников ABM и CDM соответственно. Докажите, что $AB+CD\leqslant 4PQ$.

Срок отправки решений продлевается до 1 мая 1992 года. Редакция приносит свои извинения.

Задачник „Кванта"

Решения задач

М1291 — М1295, Ф1308 — Ф1312

М1291. *Докажите, что а) в правильном 12-угольнике, б) правильном 54-угольнике найдутся 4 диагонали, не проходящие через центр многоугольника и пересекающиеся в одной точке.*

а) Пусть $A_1A_2...A_{12}$ — правильный 12-угольник (рис. 1). Рассмотрим треугольник $A_2A_4A_8$. Прямые A_2A_6, A_5A_8 и A_4A_{11} — биссектрисы его углов. Точно так же прямые A_3A_8, A_5A_1 и $A_{11}A_4$ — биссектрисы углов треугольника $A_8A_5A_{11}$. Отсюда следует, что диагонали A_1A_5, A_2A_6, A_3A_8 и A_4A_{11} проходят через одну точку.

б) Рассмотрим правильный 18-угольник $A_1A_2...A_{18}$ с вершинами, выбранными из вершин данного 54-угольника. Его диагонали A_1A_8, A_2A_9, A_4A_{12}, A_6A_{16} пересекаются в одной точке. Для доказательства достаточно

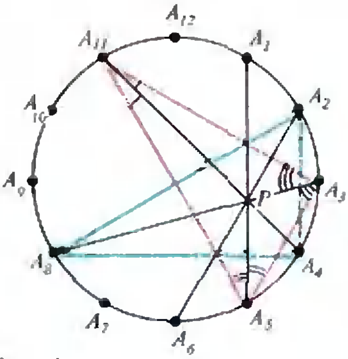


Рис. 1.

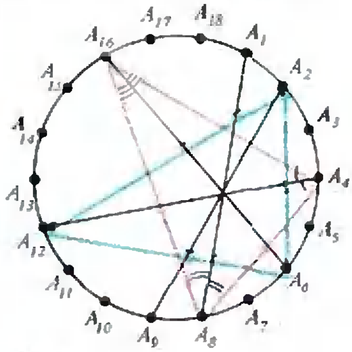


Рис. 2.

рассмотреть треугольники $A_2A_6A_{12}$ и $A_4A_8A_{16}$ с биссектрисами A_2A_9, A_6A_{16}, $A_{12}A_4$ и A_4A_{12}, A_8A_1 и $A_{16}A_6$ соответственно (рис. 2).

Было бы интересно выяснить, при каких n найдутся 4 диагонали правильного n-угольника, пересекающиеся в одной точке. Существует ли правильный n-угольник, имеющий 5 диагоналей, пересекающихся в одной точке, не совпадающей с его центром?

С. Токарев

М1292. *Совет из 2000 депутатов решил утвердить государственный бюджет, содержащий 200 статей расходов. Каждый депутат подготовил свой проект бюджета, в котором указал по каждой статье максимально допустимую, по его мнению, величину расходов, так, чтобы общая сумма расходов не превысила заданную величину S. По каждой статье совет утверждает наибольшую величину расходов, которую согласны выделить не менее k депутатов. При каком наименьшем k можно гарантировать, что общая сумма утвержденных расходов не превысит S?*

Ответ: $k=1991$.

Если $k\leqslant 1990$, может случиться, что первые 10 депутатов предложат ничего не выделять по первой статье расходов, а по остальным выделить по $S/199$. Следующие 10 депутатов ничего не выделят по второй статье и выделят по $S/199$ по остальным и так далее. В результате по каждой статье будет утверждена сумма расходов в $S/199$, а по всем двухстам статьям $\frac{200}{199}S>S$.

Если $k=1991$, то после утверждения расходов по всем статьям окажется, что лишь менее 10 депутатов могли предложить величину расходов, меньшую утвержденной. Поэтому найдется депутат, который по всем статьям предложил величину расходов, не меньшую утвержденной. Но сумма предложенных им расходов не больше S, а, значит, и утвержденная сумма тоже.

И. Сергеев

Задачник „Кванта"

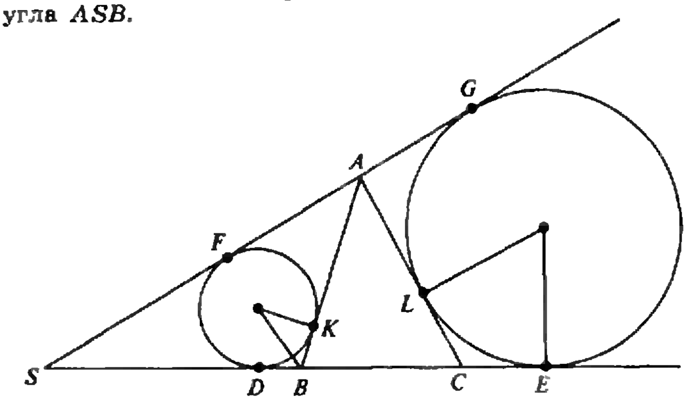
М1293. В данный угол вписаны два непересекающихся круга. Треугольник ABC расположен между кругами так, что его вершины лежат на сторонах угла, а равные стороны AB и AC касаются соответствующих кругов. Докажите, что сумма радиусов кругов равна высоте треугольника, опущенной из вершины A.

Пусть D, E, F и G — точки касания окружностей со сторонами угла, а K и L — со сторонами треугольника (см. рисунок), $a=BK+CL$, $\angle ABC=\varphi$.

Тогда сумма радиусов окружностей равна

$$BK\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi-\angle ABC}{2}+CL\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi-\angle ACB}{2}=a\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi-\varphi}{2}.$$

Мы видим, что сумма радиусов не зависит от величины угла ASB.

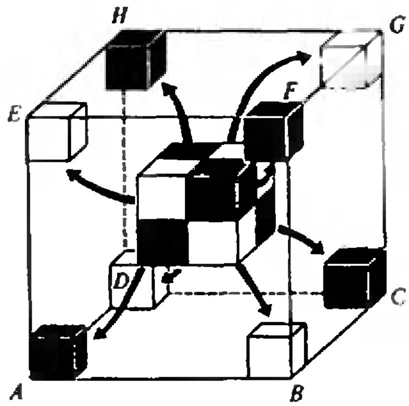


Но когда прямые FG и BC параллельны, сумма радиусов равна высоте треугольника ABC (при этом окружности равные, и диаметр каждой из них равен высоте треугольника ABC).

И. Шарыгин

М1294. Куб размером $10\times10\times10$ сложен из 500 черных и 500 белых кубиков в шахматном порядке (кубики, примыкающие друг к другу гранями, имеют различные цвета). Из этого куба вынули 100 кубиков таким образом, чтобы в каждом из 300 рядов размером $1\times1\times10$, параллельных какому-нибудь ребру куба, стало не хватать ровно одного кубика. Докажите, что число вынутых черных кубиков делится на 4.

Разрежем исходный куб $ABCDEFGH$ на кубики $2\times2\times2$. Разобьем все черные кубики на 4 группы M_A, M_C, M_F и M_H следующим образом: к группе M_A отнесем те черные кубики, которые расположены в своих кубиках $2\times2\times2$ (см. рисунок) там же, где расположен черный кубик при вершине A (т. е. если он стоит в левом нижнем углу кубика $2\times2\times2$), аналогично определяются группы M_C, M_F и M_H (см. рисунок). Таким же образом определяются множества M_B, M_D, M_E и M_G белых кубиков. Докажем, что *из каждого множества* M_A, M_C,



$M_Г$ и $M_Н$ вынуто по одинаковому количеству черных кубиков.

Рассмотрим множества M_A и M_B. Эти 2 множества заполняют 25 рядов, параллельных ребру AB. Поэтому из M_A и M_B вынуто в общей сложности 25 кубиков.

Рассмотрим еще, например, множество M_C. Из множеств M_B и M_C также вынуто в общей сложности 25 кубиков. А так как все кубики, вынутые из M_B — белые, из M_C вынуто столько же кубиков, сколько их вынуто из M_A. Очевидно, то же количество кубиков вынуто из $M_Г$ и $M_Н$ и, значит, общее количество вынутых кубиков делится на 4.

Утверждение задачи доказано.

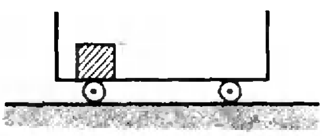
А. Спивак

***М1295.** На прямоугольном экране размером $m\times n$, разбитом на единичные клетки, светятся более $(m-1)(n-1)$ клеток. Если в каком-либо квадрате $2\times\times 2$ не светятся три клетки, то через некоторое время погаснет и четвертая. Докажите, что тем не менее на экране всегда будет светиться хотя бы одна клетка.*

Рассмотрим произвольный квадратик 2×2. Если когда-нибудь в этом квадрате окажется одна светящаяся клетка, то через некоторое время она погаснет. Значит, общее число погасших клеток не больше числа квадратов 2×2 в прямоугольнике $m\times n$. Нетрудно подсчитать, что это число равно $(m-1)(n-1)$. Таким образом, общее число погасших клеток не больше $(m-1)(n-1)$, но в самом начале было больше, чем $(m-1)(n-1)$ светящихся клеток, так что найдутся клетки, которые никогда не погаснут.

А. Часовских

***Ф1308.** У левого края тележки длиной $L=0{,}2$ м и массой $M=1$ кг лежит кубик массой $m=0{,}3$ кг (см. рисунок). Кубику толчком придают горизонтальную скорость $v_0=1$ м/с вправо. Считая, что тележка в начальный момент неподвижна, определите, на каком расстоянии от левого края тележки будет находиться кубик после того, как проскальзывание его относительно тележки прекратится. Коэффициент трения кубика о дно тележки $\mu=0{,}1$. Удары кубика о стенки считать абсолютно упругими. Тележка едет по столу без трения.*



Проще всего решать эту задачу, исходя из энергетических соображений. Согласно закону сохранения энергии, убыль кинетической энергии системы равна выделившемуся количеству теплоты, которое, в свою очередь, равно работе силы трения скольжения на тормозном пути l:

$$\Delta E_k=\frac{(M+m)u^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=Q=F_{тр}l=-\mu mgl.$$

Скорость системы u после прекращения проскальзывания легко найти из закона сохранения импульса

$$mv_0=(M+m)u.$$

После простых преобразований получим

$$l=\frac{v_0^2}{2\mu g(1+m/M)}\approx 0{,}38 \text{ м}.$$

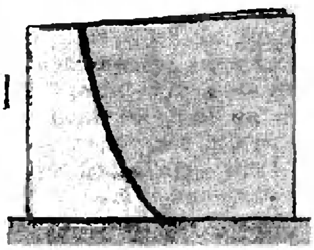
Значит, кубик остановится на расстоянии

$$x=L-(l-L)=0{,}02 \text{ м}$$

от левого края тележки.

А. Зильберман

Ф1309. На рисунке — фотография двух плоскопараллельных пластинок, составляющих между собой некоторый угол α, частично погруженных в воду. Горизонтальный размер пластинок равен 12 см. По форме границы раздела между жидкостью и воздухом определите угол α. Смачивание считать полным.



На фотографии мы видим не совсем обычный капилляр — его «диаметр» меняется от точки к точке, а именно увеличивается по мере удаления от ребра. Вот почему высота подъема воды в разных местах различна.

Трудность расчета связана с тем, что на фото нет положения горизонтальной поверхности воды вдали от ребра и мы не можем найти непосредственно высоту подъема в каком-нибудь месте. Так что нам придется сравнивать высоты подъема воды в разных точках.

Выберем некоторую точку. Разность давлений с двух сторон искривленной поверхности раздела воды и воздуха можно найти по формуле Лапласа

$$\Delta p = \frac{\sigma}{r_1} + \frac{\sigma}{r_2},$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, r_1 и r_2 — радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности. Обозначим x — расстояние от выбранной точки до ребра, H — высоту подъема воды в этой точке относительно горизонтальной поверхности. Учитывая малость угла α (иначе не было бы заметного эффекта) и тот факт, что $r_2 \gg r_1$ (как видно из рисунка, r_2 по порядку величины сравним с размером пластинки), получим

$$\Delta p = \frac{\sigma}{r_1} + \frac{\sigma}{r_2} \approx \frac{\sigma}{r_1} \approx \frac{\sigma}{{}^1/_2 \alpha x}.$$

При равновесии эта разность давлений компенсируется гидростатическим давлением:

$$\frac{\sigma}{{}^1/_2 \alpha x} = \rho g H,$$

где ρ — плотность воды.

Для двух произвольных точек запишем

$$\frac{\sigma}{{}^1/_2 \alpha x_1} = \rho g H_1, \quad \frac{\sigma}{{}^1/_2 \alpha x_2} = \rho g H_2,$$

откуда получим

$$\alpha = \frac{2\sigma(1/x_1 - 1/x_2)}{\rho g (H_1 - H_2)}.$$

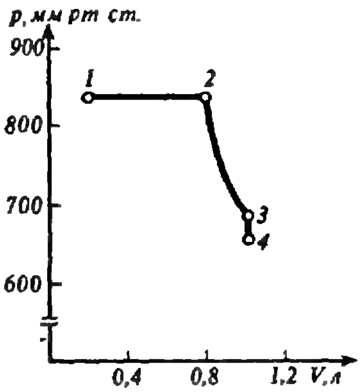
В это выражение входят табличные величины $\sigma = 7 \cdot 10^{-2}$ Н/м, $\rho = 10^3$ кг/м^3, $g = 10$ м/с^2 и непосредственно определяемые по рисунку x_1, x_2, $H_1 - H_2$. Рисунок совсем мал, поэтому ожидать хорошей точности трудно (на олимпиаде участники работали с ксерокопией фотографии в натуральную величину). Все же после подстановки чисел получаем

$$\alpha \approx 0{,}01 \text{ рад}.$$

В. Можаев

Ф1310. В сосуде под поршнем находится некоторое количество жидкого азота и его паров при температуре $T_1 = 78$ К (точка 1 на ри-

Из рисунка видно, что на участке *1 — 2* пар насыщенный, а на участке *2—3* — ненасыщенный, т. е. в точке *2* как раз испарился весь жидкий азот. Однако в точке *4* пар снова становится насыщенным: если бы это было не так, то его давление составило бы *сунке). Поршень медленно отодвигают, увеличивая объем сосуда при постоянной температуре (участок 1—2—3). В точке 3 давление в сосуде становится равным 686 мм рт. ст. Поршень закрепляют и охлаждают сосуд до $T_2=76$ К, давление при этом уменьшается до 657 мм рт. ст. (точка 4). Каким будет давление в сосуде, если при этой температуре медленно передвинуть поршень в начальное положение? Какая масса жидкости первоначально была в сосуде? Молярная масса азота $M=28$ г/моль. Плотность ртути $\varrho=13{,}6$ г/см^3.*



$$p_4'=p_3\frac{T_4}{T_3}=686\,\frac{76}{78}\text{ мм рт. ст.}=668\text{ мм рт. ст.}>$$

$$>p_4=657\text{ мм рт. ст.}$$

Это означает, что часть паров азота теперь сконденсировалась.

Если мы будем еще уменьшать объем, то пар станет насыщенным и его давление при постоянной температуре будет равно 657 мм рт. ст.

Найти первоначальную массу жидкости совсем просто. При увеличении объема от V_1 до V_2 жидкость вся испарилась, т. е. заняла объем V_2-V_1 при давлении $p_1=830$ мм рт. ст. и температуре T_1. Поэтому ее масса

$$m=\frac{Mp_1(V_2-V_1)}{RT_1}=$$

$$=\frac{28\cdot 10^{-3}\cdot 830\cdot 10^{-3}\cdot 13{,}6\cdot 10^{3}\cdot 10\cdot 0{,}6\cdot 10^{-3}}{8{,}31\cdot 78}\text{ кг}\approx 3\text{ г.}$$

А. Зильберман

Ф1311. *Лампочку для карманного фонаря подключают к источнику напряжения длинными проводами. При длине проводов 10 м ток через лампочку оказался равным 0,17 А, при 20 м — 0,13 А. Каким будет ток через лампочку при длине проводов 40 м? Каким станет этот ток, если лампочку подключить прямо к источнику? Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало. Зависимость тока через лампочку от напряжения на ней приведена на рисунке.*

В первых двух случаях лампочка подключена к батарейке напряжением U_x последовательно с сопротивлением проводов, которое во втором случае ровно в два раза больше, чем в первом. По характеристике лампочки найдем напряжения на ней:

$$\text{при } I_1=0{,}17\text{ А}\quad U_1=1{,}7\text{ В,}$$
$$\text{при } I_2=0{,}13\text{ А}\quad U_2=1{,}1\text{ В.}$$

Теперь мы можем составить уравнения

$$\frac{U_x-U_1}{R_{\text{пр}}}=I_1,\quad \frac{U_x-U_2}{2R_{\text{пр}}}=I_2.$$

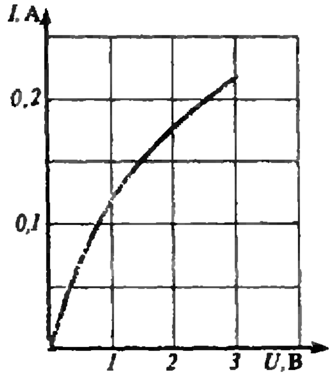
Отсюда легко найти

$$U_x=2{,}83\text{ В},\ R_{\text{пр}}=6{,}7\text{ Ом.}$$

При подключении лампочки непосредственно к батарейке потечет ток (определяем его по характеристике)

$$I_3=0{,}21\text{ А.}$$

При проводах длиной 40 м их сопротивление равно $4R_{\text{пр}}\approx 27$ Ом. Ток через лампочку можно найти, например, просто подбором, проверяя сумму напряжений



Задачник „Кванта"

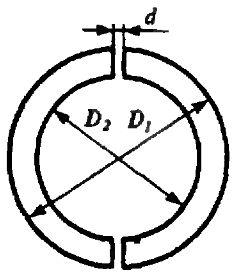
на лампочке и проводах при заданном токе — получается ли 2,83 В. Можно сделать и графическое построение: провести прямую $I=(U_x-U)/(4R_{пр})$ и найти точку пересечения с вольт-амперной характеристикой лампочки:

$$I_4 \approx 0{,}08 \text{ А}.$$

График очень маленький, и точность, разумеется, невелика — у вас могут получиться и несколько другие числа.

А. Зильберман

Ф1312. *Катушка равномерно намотана на кольце из феррита с магнитной проницаемостью $\mu=3000$. Внешний диаметр кольца $D_1=2$ см, внутренний $D_2=1{,}6$ см. Индуктивность катушки $L=0{,}1$ Гн. Какой была бы индуктивность катушки, если бы ее сердечник состоял из двух полуколец, прижатых друг к другу неплотно — с зазором шириной $d=0{,}1$ мм (см. рисунок)? Во сколько раз изменилась бы эта индуктивность при замене материала полуколец на феррит с $\mu_1=2000$?*



Решить эту задачу строго, не выходя сильно за пределы школьной программы, невозможно. Однако, если особой строгости не требуется, ничего сложного тут нет.

Если магнитная проницаемость сердечника μ велика, то линии магнитной индукции, независимо от формы и длины сердечника, практически не рассеиваются. Это означает, что витки катушки можно наматывать равномерно по всему кольцу, а можно лишь на его половине — разницы ни в величине поля, ни в индуктивности катушки не будет. Отсюда делаем вывод, что в нашем случае поле в сердечнике можно представить в виде $B \sim N/l$, где N — число витков, а l — так называемая средняя длина сердечника, или, как ее еще называют, средняя «длина силовых линий».

Ясно, что поле в зазоре между двумя полукольцами будет в μ раз меньше, чем в феррите. Следовательно, средняя длина линий магнитной индукции в этом случае получится больше:

$$\frac{l^*}{l}=\frac{l-2d+\mu\cdot 2d}{l}\approx\frac{l+2\mu d}{l}$$

(там, где сердечника нет, витков приходится наматывать больше — для «уравнивания» полей).

Итак, при том же токе через катушку после замены сердечника на два полукольца с зазором магнитное поле уменьшится во столько раз, во сколько возрастет средняя длина сердечника, и индуктивность катушки будет равна

$$L^*=L\frac{l}{l+2\mu d}=\frac{L}{1+2\mu d/(\pi(D_1+D_2)/2)}\approx\frac{L}{11{,}6}\approx 8{,}6\cdot 10^{-3}\text{ Гн}.$$

Если сердечник имеет магнитную проницаемость $\mu_1=2000$, то в случае целого кольца индуктивность составит

$$L_1=\frac{2}{3}L\approx 6{,}7\cdot 10^{-2}\text{ Гн},$$

а при кольце с зазором —

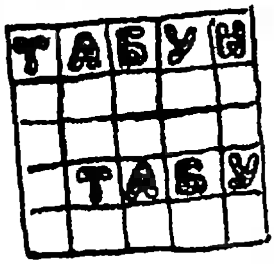
$$L_1^*=\frac{2/3\,L}{1+2\mu_1 d/(\pi(D_1+D_2)/2)}\approx 8{,}3\cdot 10^{-3}\text{ Гн}.$$

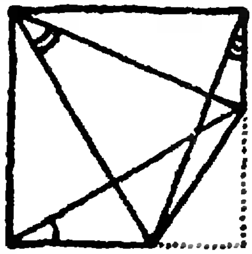
Видно, что катушка «с зазором» намного менее чувствительна к изменению магнитной проницаемости сердечника. Это широко используется на практике, поскольку у материалов с большой величиной μ она, как правило, сильно зависит от внешних условий — от температуры и индукции магнитного поля.

Р. Александров

Задачи

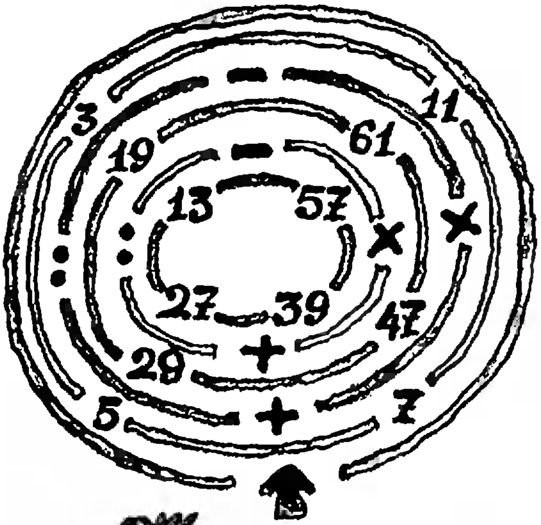
1. Продав последний персик за 2 рубля 30 копеек, торговец вычислил, что он продавал их в среднем по 2 рубля 45 копеек. Но покупатель вернул ему этот персик, указав на червоточину, и согласился купить его лишь за 1 рубль 58 копеек. Пересчитав среднюю цену, торговец выяснил, что она стала равной 2 рублям 42 копейкам. Сколько персиков продал торговец?





2. Завершите заполнение квадрата буквами Т, А, Б, У, Н так, чтобы в каждом горизонтальном, каждом вертикальном рядах и на каждой диагонали присутствовали все эти буквы по одному разу.

3. От квадрата отрезан прямоугольный треугольник, сумма катетов которого равна стороне квадрата. Докажите, что сумма углов, под которыми видна из трех оставшихся вершин его гипотенуза, равна 90°.



4. Пройдите до центра лабиринта так, чтобы в результате получилось число 100.

5. Рассказывают, что некто при встрече с греческим философом и математиком Пифагором спросил его: «Который час?» Пифагор ответил: «До конца суток осталось дважды две пятых того, что уже прошло от начала». Спрашивающий не сразу сообразил, в котором часу произошла встреча. Который был час?

Первые четыре задачи нам предложили Н. Антонович, Л. Никонов, В. Произволов и одиннадцатиклассник Алексей Ларионов из с. Первомайское Красноярского кр. Последняя задача взята нами из только что вышедшей книги Н. Н. Аменицкого и И. П. Сахарова «Забавная арифметика» (М.: Наука, 1991).

«ЕСЛИ В ПОЛЕ ДАЛЕКО РАЗДАЕТСЯ ГОЛОС...»

Кандидат педагогических наук
С. ТИХОМИРОВА

Человеку всегда важно знать, какая будет погода, поскольку она влияет на его деятельность и самочувствие. Наблюдая природу в ненастье и солнечным днем, в сумерки и ночью, люди отмечали характерные признаки, предваряющие те или иные изменения погоды. Так появились многочисленные приметы — свидетельства народной мудрости.

«Погодные» приметы разнообразны. Не углубляясь в сложные механизмы формирования погоды, попытаемся объяснить некоторые из них.

Перед наступлением дождя многие вещества, впитывающие в себя влагу из воздуха, сыреют. В народе говорят: *«Соль мокнет — к дождю»*, *«Табак сыреет — к сырой погоде»*.

Старинную народную примету *«Лучина трещит и мечет искры — к ненастью»* можно объяснить тем, что при повышенной влажности деревянные предметы отсыревают. При горении влага из древесины лучины интенсивно испаряется. Увеличиваясь в объеме, пар с треском разрывает древесные волокна.

Влажность воздуха влияет на распространение звука. С повышением влажности изменяется плотность воздуха и его способность проводить звук, что нашло отражение в ряде народных примет. Одна из них — *«Если в поле далеко раздается голос, то будет дождь»*. В старину в некоторых местностях крестьяне с помощью эха узнавали, будет ли дождь. Они кричали: «Какой пень, какая колода, какая будет погода? Го-о-оп-гоп-гоп!». Если эхо отвечало «гоп» сильно — ждали дождя.

Падение атмосферного давления, сопровождающее ухудшение погоды, является причиной того, что при кипячении молоко скорее «убегает». Отсюда и возникла пословица: *«Горшки легко позакипают через край — к ненастью»*.

А вот несколько пословиц, связанных с состоянием неба: *«Если звезды блестят ярко зимой — к стуже»*,

«Ясный Млечный Путь летом — к вёдру», *«Мало звезд на небе — к ненастью»*. Эти приметы можно достаточно просто объяснить. Как мы уже говорили, с ухудшением погоды увеличивается количество водяных паров в атмосфере. На высоте 8—10 км образуются кристаллики льда, которые рассеивают свет подобно дыму или туману, в связи с чем цвет неба белеет, затем облачность уплотняется. При этом слабые звезды становятся невидимыми. В ясную погоду небо чистое, звезд много, и они хорошо видны.

Можно ли судить о погоде по состоянию Солнца и Луны? Посмотрим, что говорят пословицы на этот счет: *«Кольцо вокруг Солнца — к ненастью»*, *«Солнце красно заходит — к ветру»*, *«Тусклый месяц — к мокрети; ясный — к сухту; в синеве — к дождю; в красне — к ветру»*, *«Луна ночью будто покраснела — жди завтра ветра, тепла и снега»*.

Что же происходит в действительности?

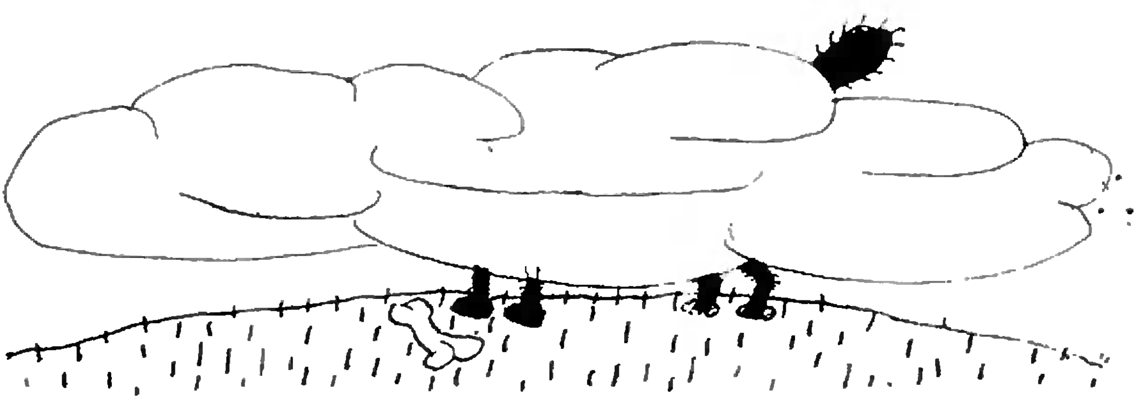
Высоко над горизонтом появляются прозрачные и быстрые облака. Небо постепенно становится молочно-белым и вот уже все оно как бы покрыто вуалью перисто-слоистых облаков. Кажется, что Солнце светит сквозь матовое стекло и его очертания становятся все более и более расплывчатыми. Именно в такую погоду можно увидеть кольца и венцы вокруг наших светил. Обычно вслед за этим погода начинает портиться. Красный цвет зари и самого светила свидетельствуют о высокой влажности воздуха, сопутствующей появлению облаков, сильного ветра, осадков.

И наконец, вспомним несколько примет, которые сулят нам добрую, ясную погоду: *«Обильная роса — к хорошей погоде»*, *«Осенний иней — к сухой и солнечной погоде»*, *«Туман утром стелется по воде — к хорошей погоде»*.

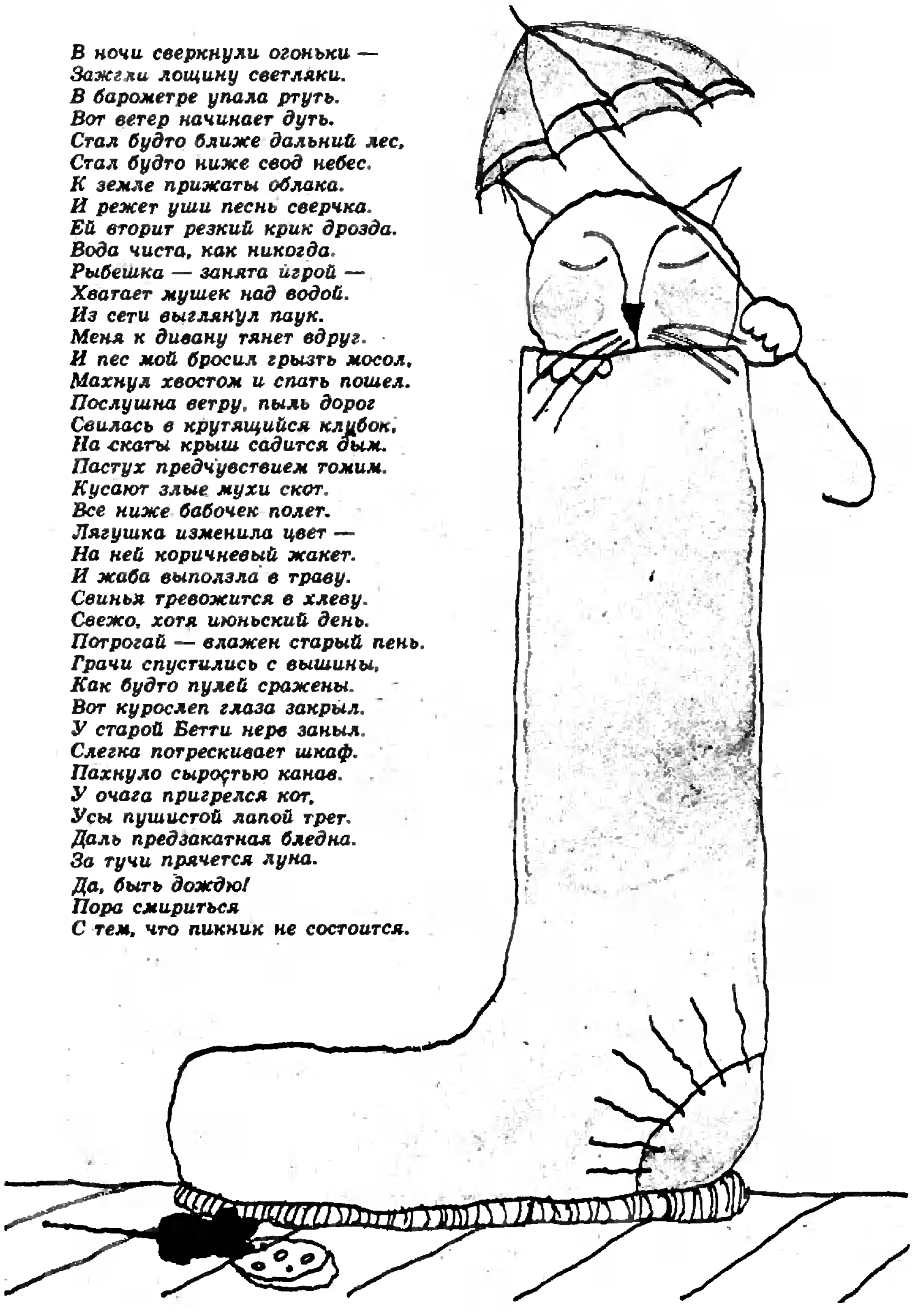
Эти приметы можно истолковать так. При отсутствии облачности ночью земля за счет теплового излучения охлаждается сильнее, чем в пасмурную погоду. Это вызывает конденсацию атмосферного водяного пара, и, как следствие, выпадение росы и инея, появление тумана.

«Предсказывая» погоду, надо помнить, что по одной примете, конечно же, нельзя сделать достоверный вывод. Все приметы носят приблизительный характер, и чем больше признаков совпадет, тем точнее будет прогноз погоды.

«Конец — всему делу венец». Поэтому в заключение — стихотворение Эдварда Дженнера «Сорок поводов для того, чтобы отказаться от предложения друга совершить совместную прогулку»:



В ночи сверкнули огоньки —
Зажгли лощину светляки.
В барометре упала ртуть.
Вот ветер начинает дуть.
Стал будто ближе дальний лес,
Стал будто ниже свод небес.
К земле прижаты облака.
И режет уши песнь сверчка.
Ей вторит резкий крик дрозда.
Вода чиста, как никогда.
Рыбешка — занята игрой —
Хватает мушек над водой.
Из сети выглянул паук.
Меня к дивану тянет вдруг.
И пес мой бросил грызть мосол,
Махнул хвостом и спать пошел.
Послушна ветру, пыль дорог
Свилась в крутящийся клубок.
На скаты крыш садится дым.
Пастух предчувствием томим.
Кусают злые мухи скот.
Все ниже бабочек полет.
Лягушка изменила цвет —
На ней коричневый жакет.
И жаба выползла в траву.
Свинья тревожится в хлеву.
Свежо, хотя июньский день.
Потрогай — влажен старый пень.
Грачи спустились с вышины,
Как будто пулей сражены.
Вот курослеп глаза закрыл.
У старой Бетти нерв заныл.
Слегка потрескивает шкаф.
Пахнуло сыростью канав.
У очага пригрелся кот,
Усы пушистой лапой трет.
Даль предзакатная бледна.
За тучи прячется луна.
Да, быть дождю!
Пора смириться
С тем, что пикник не состоится.

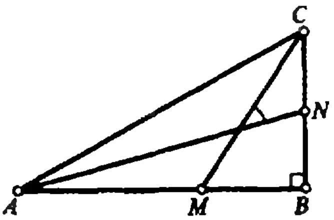


Конкурс «Математика 6—8»

Журнал «Квант» продолжает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 24 задач (по 3 в каждом номере) и заканчивается в апреле этого года. Решения задач из этого номера высылайте не позднее 1 апреля 1992 г. по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Тверская, 32/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

Задачи

13. В прямоугольном треугольнике ABC на катетах AB и BC взяты точки M и N так, что $AM=CB$ и



$MB=CN$. Докажите, что угол между отрезками AN и CM равен 45°.

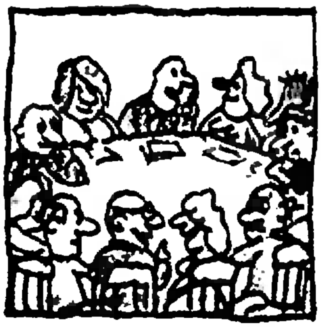
В. Произволов

14. Один чудаковатый часовщик смастерил странные часы. От полуночи до часу ночи они шли нормально, показывая верное

время, но затем часовая стрелка начинала идти со скоростью минутной, а минутная — со скоростью часовой. Через час стрелки вновь менялись скоростями, и так — каждый час. Укажите все моменты, когда часы показывают верное время.

А. Савин

15. Двенадцать собеседников совещались за круглым столом. После перерыва они вновь сели за этот стол, но в другом порядке. Докажите, что найдутся такие два собеседника, что между ними



(считая от первого ко второму по часовой стрелке) во второй раз окажется столько же собеседников, что и в первый раз.

В. Произволов

Две игры со спичками

(Начало см. на с. 10)

представляя, скажем, число a в виде

$$a=a_n4^n+a_{n-1}4^{n-1}+\dots+a_24^2+a_14+a_0;$$

здесь $0\leqslant a_i\leqslant 3$ для всех $i=n, n-1, \dots, 2, 1, 0$.

5. Докажите, что для любого целого положительного числа p существует одна и только одна проигрышная позиция $(a; b)$ в игре «цзяньшицзы» (т. е. позиция, удовлетворяющая условиям теоремы 2) такая, что $b-a=p$. Проверьте это для первых 15 проигрышных позиций, перечисленных в таблице II.

6. Докажите, что если позиция $(b; a)$ в игре «цзяньшицзы» не удовлетворяет условиям теоремы, то играющий своим ходом может либо сразу выиграть, либо свести позицию к проигрышной.

7. Докажите, что если позиция $(a; b)$ в игре «цзяньшицзы» является проигрышной, то после любого хода играющего она перестает быть таковой.

8. Укажите правила беспроигрышной игры в «цзяньшицзы», если число кучек нечетно (играющий каждым своим ходом имеет право взять либо любое число спичек из какой-то одной кучки, либо поровну — и тоже любое число! — из каждой кучки).

П р о б л е м а. Укажите правила беспроигрышной игры в «цзяньшицзы», если число кучек равно четырем.

Хочу предупредить читателя, что решение поставленной проблемы автору неизвестно.

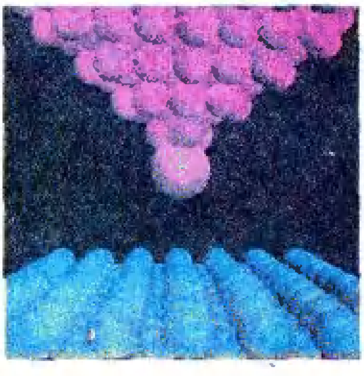
Новости науки

Чудеса миниатюризации

Говорят, что Цицерон как-то рассказывал, что видел эпическую поэму Гомера «Илиаду», умещавшуюся в скорлупе грецкого ореха. А вот несколько лет назад шотландцы действительно выпустили книжку размером 1×1,5 мм! Это в 10 раз превысило «рекорд» размера микрокниг прошлого века.

Ясно, что такие книги впору читать с помощью если не электронного, то уж простого микроскопа обязательно. А еще лучше — с помощью лазера, луч которого считывает информацию с поверхности компакт-диска, предназначавшегося поначалу исключительно для аудиозаписи.

И здесь миниатюризация не обошла нас стороной. Если первые аудиодиски имели диаметр 12 см и были рассчитаны на проигрывание в течение часа, то сейчас уже стали выпускать мини-диски, диаметр которых в два раза меньше, а время звучания — на четверть часа больше.



Перенос атома ксенона на поверхность кремния.

Но вот компакт-диски приспособили для записи так называемой интерактивной информации, т. е. информации не только звуковой, но и текстовой, и изобразительной. Подобные диски представляют собой «хранилище» информации, которая, как и на звуковых дисках, наносится во время записи на его поверхность в виде канавок и гладких участков. При считывании информации лазерным лучом эти канавки и гладкие участки интерпретируются как «нули» и «единицы» цифрового кода.*)

Такие компакт-диски обладают гигантской емкостью и плотностью записи информации. Достаточно сказать, что на одном диске уместилась бы вся Большая советская энциклопедия с энциклопедией Брокгауза и Ефрона впридачу. Причем в статье о Бетховене вы услышали бы фрагменты из его произведений, а в разделе об импрессионистах — увидели бы несколько сотен, а то и тысяч картин. На одном диске «укладывается» весь Лувр или Британский музей, могут «храниться» все сокровища Эрмитажа или Русского музея вместе с их запасниками.

Казалось бы, достигнут предел — причем физический — плотности размещения информации. Однако это далеко не так. Недавно предложен способ переноса на поверхность вещества отдельных атомов с помощью острия иглы сканирующего туннельного микроскопа*).

Для этого на кончик иглы подается небольшой положительный потенциал, который — в соответствии с законом Кулона — способствует «прилипанию» к острию отрицательно заряженной оболочки атома. (Это в какой-то мере похоже на «прилипание» кусочков бумаги к натертой стеклянной палочке.)

Когда атом или ион какого-то элемента перенесен в нужную точку поверхности, на кончик иглы подается отрицательный импульс. Атом (опять же по закону Кулона) отделяется от иглы и фиксируется на подложке. «Горка» из 1000 таких атомов соответствует «единице», а их отсутствие — «нулю». Плотность записи при таком способе трудно себе представить. Скажем лишь, что содержание всех книг Ленинской библиотеки уместится всего на одном мини-компакт-диске (а обычных дисков потребуется четверть миллиона!).

Только вот «записывать» такой диск придется пока около года. Так что теперь надо искать способ «ускорения» технологии записи и считывания...

И. Лалаянц

*) Советуем вам прочитать статьи Ю. Носова «Оптическая память» («Квант», 1989, № 11) и «Голографическая память» («Квант», 1991, № 10). (*Прим. ред.*)

*) Об этом приборе читайте в статье А. Володина «Осязающие микроскопы» («Квант», 1991, № 4). (*Прим. ред.*)

Школа в „Кванте"

Физика 9—11

Публикуемая ниже заметка «Конус трения» предназначена девятиклассникам, заметка «Первый источник электрического тока» — десятиклассникам, «Дифракция волн» — одиннадцатиклассникам.*)
Мы публикуем также «Избранные школьные задачи по физике».

Конус трения

Если рассмотреть условия равновесия тела на наклонной плоскости, угол наклона которой можно изменять, то легко получить (сделайте это самостоятельно), что тело начнет соскальзывать с плоскости при угле φ таком, что

$$\operatorname{tg}\varphi=\mu,$$

где μ — коэффициент трения тела о плоскость. Не кажется ли вам удивительным, что этот угол не зависит от массы тела?

То же самое выражение для угла φ можно получить и другим, пожалуй, более простым способом. Но для этого надо предварительно познакомиться с понятием «конус трения».

Пусть тело, которое можно считать материальной точкой, находится на шероховатой горизонтальной плоскости. Сила тяжести прижимает тело к поверхности, и поверхность «откликается», действуя на тело силой нормального давления $\vec{N}$. Если же к телу приложена также и некоторая горизонтальная сила, то со стороны поверхности появляется еще одна сила — сила трения $\vec{F}_{тр}$. Пока величина горизонтальной силы не превышает максимального значения силы трения покоя $F_{тр\ п\ max}=\mu N$, тело покоится. При достижении этого значения тело начинает двигаться, причем поверхность действует на него препятствующей движению силой трения скольжения

$$F_{тр\ ск}=F_{тр\ п\ max}=\mu N.$$

Как сила нормальной реакции, так и сила трения порождаются поверх-

*) *Эти заметки были опубликованы в «Кванте» № 1 за 1986 год.*

ностью, поэтому можно говорить о полной силе реакции поверхности. В случае, когда тело под действием внешней силы (конечно, включающей в себя и силу тяжести) движется вдоль поверхности (рис. 1), полная сила реакции есть

$$\vec{R}=\vec{N}+\vec{F}_{\text{тр ск}}.$$

Эта сила направлена под углом φ к нормали, который легко определить:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{F_{\text{тр ск}}}{N}=\mu\Rightarrow\varphi=\operatorname{arctg}\mu.$$

Угол φ называют *углом трения.*

Будем теперь мысленно вращать вектор $\vec{R}$ вокруг нормали к поверхности, не меняя угла φ между ними. При этом вектор опишет конус (с углом 2φ при вершине), называемый *конусом трения.* Он обладает следующим замечательным свойством:

Какая бы большая по величине внешняя сила ни прикладывалась к телу, если она лежит внутри конуса трения, тело остается в покое. Если же эта сила выходит за пределы конуса трения, то какой бы малой она ни была, тело начинает двигаться.

В справедливости этого утверждения убедиться нетрудно. Действительно, пусть внешняя сила $\vec{F}$ (см. рис. 1) приложена к телу так, что ее линия действия составляет угол α с нормалью к поверхности. Тогда «сдвигающая» тело вдоль поверхности сила равна $F\sin\alpha$, а сила нормальной реакции равна $F\cos\alpha$. Таким образом, предельно возможная сила трения покоя, удерживающая тело на месте, есть

$$F_{\text{тр п max}}=\mu N=\mu F\cos\alpha=F\operatorname{tg}\varphi\cos\alpha.$$

Пока сила F лежит внутри конуса трения, $\alpha<\varphi$ и, следовательно, $F\sin\alpha<F\operatorname{tg}\varphi\cos\alpha$. Тело при этом покоится. Однако как только угол α становится больше угла трения φ, последнее неравенство нарушается. Теперь трение уже не в состоянии удержать тело на месте, и оно начинает скользить.

Вернемся к телу, оставленному в начале статьи на наклонной плоскости, и построим для него конус трения (рис. 2). Внешней силой здесь служит сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Пока $\alpha<\varphi$, согласно сказанному выше, тело будет покоиться. Но как только угол α превысит угол φ — начнется движение. Поэтому мы сразу же получаем условие начала соскальзывания тела с наклонной плоскости:

$$\operatorname{tg}\alpha>\mu,\text{ или }\alpha>\operatorname{arctg}\mu.$$

Заметим, что понятием «конус трения» пользуются инженеры при расчете той или иной конструкции. Так, например, даже при проектировании табуретки следует помнить о конусе трения.

Представьте себе табуретку, ножки которой соединены с сидением шарнирами (рис. 3). Конечно, в действительности никто не станет так делать, однако такая система крепления позволит нам легче разобраться с ролью конуса трения. Поставим такую табуретку на пол так, чтобы угол α, который ножки составляют с нормалью к полу, был меньше угла трения φ.

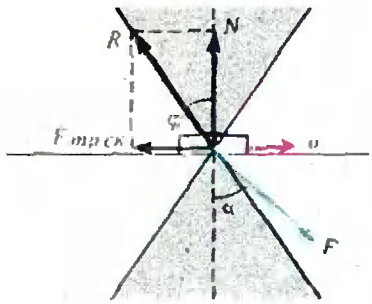


Рис. 1.

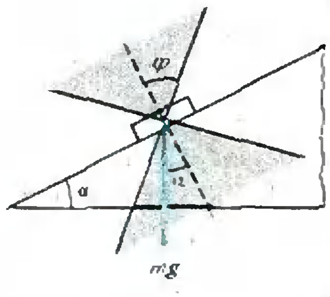


Рис. 2.

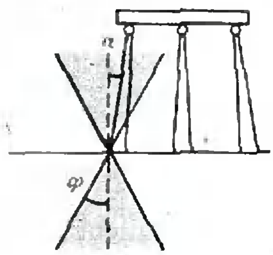


Рис. 3.

В этом случае как бы мы ни нагружали табуретку, ножки ее не разъедутся — сила, с которой каждая ножка действует на пол, лежит в пределах соответствующего конуса трения. Если же угол α сделать больше угла φ, то сила, с которой ножка действует на пол, выйдет за пределы конуса трения, ножки разъедутся и табуретка упадет.

У реальной табуретки ножки соединены с сидением не с помощью шарниров, а вклеены или вкручены в него. Однако, если сделать так, чтобы угол α превысил угол трения φ, в месте соединения ножек табуретки с сидением могут возникнуть значительные напряжения и табуретка сломается.

А. Варламов

Первый источник электрического тока

Электрический ток даже в простейшей электрической цепи может показаться несколько загадочным явлением. В самом деле, ток — это упорядоченное движение электрических зарядов, например электронов в металлическом проводнике. Упорядоченно двигаться их заставляет электрическое поле. Но, как известно, внутри проводников поля нет, кроме того работа электростатического поля по замкнутой траектории равна нулю (а электрические цепи, в которых протекает постоянный электрический ток, всегда замкнуты). Тем не менее в цепи при прохождении тока совершается работа. За счет этой работы, например, нагреваются проводники.

Почему же в цепи существует электрический ток и почему при его прохождении совершается работа?

И то, и другое возможно только потому, что где-то в цепи действуют неэлектростатические силы, которые могут создать и поддерживать в цепи электрическое поле и работа которых не равна нулю. Силы эти получили название *сторонних сил*. То место в цепи, где они действуют, носит название (не совсем удачное) *источника тока*.

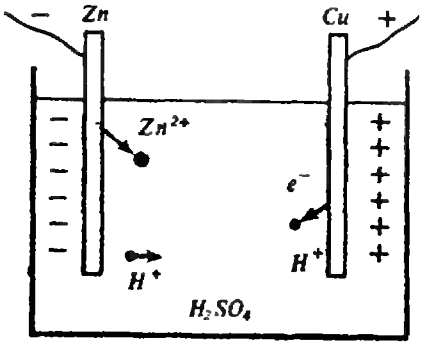
Что это за сторонние силы и как они действуют? В качестве примера рассмотрим первый в истории химический источник постоянного тока. Его придумал в самом конце XVIII века итальянский физик Алессандро Вольта (1745—1827). Теперь этот источник называют *элементом Вольта*. Он состоит из цинкового и медного электродов, погруженных в раствор серной кислоты.

Заметим, что медь и цинк состоят не из нейтральных атомов, а из положительных ионов соответствующего металла и электронов, оторвавшихся от атомов и ставших, как говорят, свободными. Следует иметь в виду, что и раствор кислоты состоит не из нейтральных молекул воды (H_2O) и серной кислоты (H_2SO_4). Значительная часть молекул H_2SO_4 в воде превращается в три иона — два положительно заряженных иона водорода и отрицательно заряженный ион кислотного остатка с двойным зарядом:

$$H_2SO_4 \rightarrow 2H^+ + SO_4^{2-}.$$

Посмотрим, что происходит, когда в такой раствор погружают электроды (см. рисунок). Начнем с цинка.

При погружении цинка в раствор кислоты начинается химическая реакция взаимодействия ионов SO_4^{2-} и Zn^{2+}, в результате чего ионы цинка отрываются от электрода и переходят в раствор. При этом на электроде оказывается избыток электронов, и он становится отрицательно заряженным. По мере накопления ионов Zn^{2+} в растворе некоторая их часть, при-



тягиваемая электродом, возвращается обратно. В конце концов устанавливается динамическое равновесие: число ионов, покидающих цинк, равно числу ионов, возвращающихся в него. Но электрод остается заряженным отрицательно, а раствор вблизи электрода (за счет ионов цинка) получает положительный заряд.

Появление дополнительных положительных ионов около цинкового электрода вызывает перераспределение уже имеющихся ионов внутри раствора. Часть отрицательных ионов из соседнего слоя перемещается ближе к электроду, а часть положительных ионов оттесняется в более удаленный слой. Подобные перемещения происходят во всех слоях раствора, вплоть до слоя, прилегающего к медному электроду. На нем происходит совсем другой процесс.

В отличие от цинка, медь почти не растворяется в кислоте, т. е. не посылает в раствор своих ионов. Наоборот, положительные ионы водорода из раствора, попадая на медный электрод, отбирают у него свободные электроны и нейтрализуются. Медь становится положительно заряженной, а раствор около нее приобретает отрицательный заряд.

Таким образом, медный электрод в элементе Вольта образует положительный полюс, а цинковый электрод — отрицательный. Разность потенциалов между ними составляет приблизительно 1,1 В.

Посмотрим теперь, что произойдет, если электроды соединить металлическим проводником. Свободные электроны во внешней части цепи (в проводнике) начнут двигаться от цинка, где они имеются в избытке, к меди, где их недостает. Это означает, что во внешней части цепи возникает электрический ток, направленный от меди к цинку.

А что же в самом элементе Вольта? Из-за ухода электронов с цинка равновесие между цинковым электродом и раствором нарушается, в результате чего дополнительное число ионов цинка будет переходить в раствор, поддерживая тем самым отрицательный заряд электрода. А из-за прихода электронов на медный электрод большее число положительных ионов водорода из раствора сможет нейтрализоваться на этом электроде. При этом положительный заряд меди тоже будет поддерживаться. Конечный результат обоих процессов таков: с медного электрода электроны уходят (они нейтрализуют ионы водорода), а на цинковом — появляются (из-за ухода ионов цинка), т. е. электроны как бы перетекают внутри раствора от меди к цинку. Понятно, что для этого какие-то неэлектростатические силы должны совершить определенную работу.

Мы видим, таким образом, что в то время как во внешней части цепи от цинкового электрода к медному движутся свободные электроны, внутри источника движутся ионы: положительные от цинка к меди и отрицательные от меди к цинку. Так в замкнутой цепи осуществляется круговой процесс перемещения электрических зарядов, т. е. электрический ток.

Какие же силы совершают работу по поддержанию постоянной разности потенциалов между медным и цинковым электродами? Это так называемые химические силы, действующие внутри элемента Вольта. Другими словами, можно сказать, что источником энергии электрического тока служит энергия, выделяющаяся при химических реакциях между электродами и раствором кислоты.

Отсюда получается, что так называемый источник тока в действительности есть источник энергии. За счет этой энергии и совершается работа по перемещению зарядов по цепи, проявляющаяся, в частности, в нагреве проводников. Энергию, приходящуюся на единицу заряда, обходящего цепь, называют *электродвижущей силой источника*.

В других источниках происходят другие процессы, действуют другие силы, но роль их всегда такая же, как и в рассмотренном нами элементе Вольта.

А. Кикоин

Дифракция волн

Дифракцией называется огибание волнами препятствия, их проникновение в область геометрической тени. Это одно из характерных явлений для волн любой природы.

Особенно заметно дифракция проявляется тогда, когда размеры препятствия сравнимы с длиной волны. Звуковые волны, например, имеют длину порядка метра, и их дифракцию обнаружить легко (звук можно услышать из-за угла). А вот у света длина волны составляет всего лишь доли микрометра, и в обычных условиях наблюдать дифракцию света трудно. Долгое время считалось даже, что свет всегда распространяется прямолинейно.

Качественно явление дифракции волн объясняется с помощью *принципа Гюйгенса*. Первую количественную теорию дифракции света построил французский инженер Огюстен Френель. В 1818 году он представил свой «Мемуар о дифракции света» на конкурс, объявленный Парижской академией наук. В следующем году этот мемуар был премирован, а позже напечатан в трудах Академии.

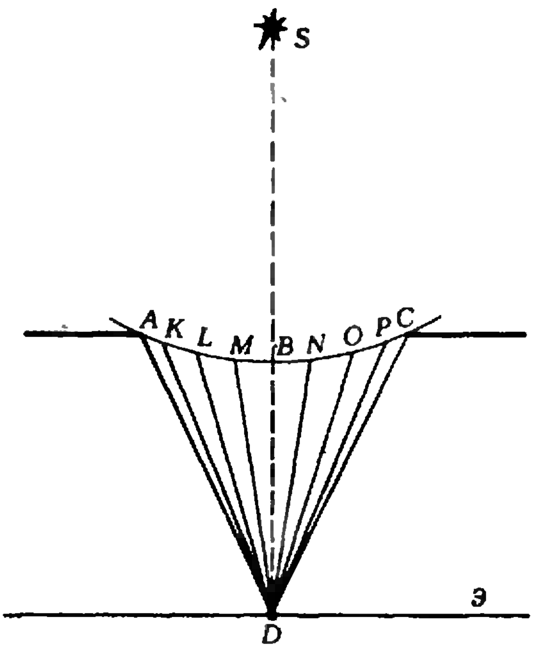


Рис. 1.

Среди членов комиссии, которой было поручено рассмотреть мемуар Френеля, был известный ученый С. Пуассон. Основываясь на теории Френеля, Пуассон проделал расчет для двух частных случаев дифракции на различных препятствиях, не разобранных Френелем, и получил парадоксальные результаты. В первом случае расчет показывал, что в центре геометрической тени от небольшого шарика, поставленного на пути света, должно наблюдаться светлое пятно. Во втором случае получалось, что после прохождения света через круглое отверстие в центре дифракционной картины может появиться темное пятно. Расчеты Пуассона были представлены как доказательство несостоятельности теории Френеля. Однако соответствующие эксперименты блестяще подтвердили все выводы френелевской теории. Этот факт сыграл немаловажную роль для начала широкого признания волновой природы света.

Давайте и мы разберемся в явлении дифракции поподробнее. Рассмотрим дифракцию света на круглом отверстии в непрозрачной ширме. На рисунке 1 дуга ABC изображает фронт волны, испущенной точечным источником света S, в момент достижения волной препятствия. Каждая точка фронта является, согласно принципу Гюйгенса, источником вторичных волн, а их интерференция, по теории Френеля, объясняет дифракционную картину на экране Э.

Чтобы рассчитать результат интерференции вторичных волн, например в точке D в центре экрана, применим метод, предложенный Френелем. Разобьем волновой фронт на зоны (зоны Френеля) по такому принципу: разность расстояний от крайних точек каждой зоны до экрана должна отличаться ровно на половину длины волны света:

$$AD-KD=KD-LD=LD-MD=\\=MD-BD=\lambda/2.$$

Так поступают для того, чтобы воспользоваться известным свойством: волны, имеющие разность хода в половину длины волны (находящиеся в

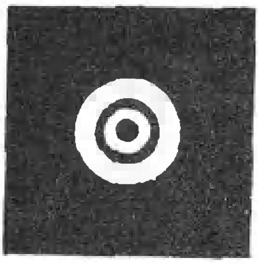


Рис. 2.

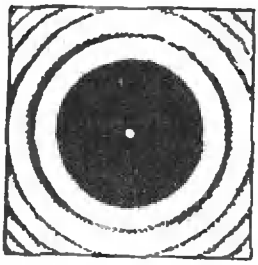


Рис. 3.

противофазе), при сложении гасят друг друга. Каждой точке одной зоны найдется соответствующая точка в соседней зоне, от которой волны придут в точку D в противофазе, а площади всех зон почти одинаковы. Поэтому действия соседних зон в точке D (например, первой и второй, второй и третьей и т. д.) практически уничтожают друг друга.

Теперь легко понять, при каких условиях можно наблюдать «парадокс Пуассона». Если в отверстии умещается четное число зон Френеля, то в центре экрана будет темное пятно. За ним располагается светлое кольцо, затем темное кольцо и т. д. Таким образом, на экране мы будем наблюдать систему чередующихся темных и светлых колец, но центральное пятно будет темным! (рис. 2). Если же в отверстии укладывается нечетное число зон, то результат будет обратным — в центре будет наблюдаться светлое пятно, окруженное чередующимися темными и светлыми кольцами. Дифракционную картину от небольшого шарика, изображенную на рисунке 3, попробуйте объяснить самостоятельно.

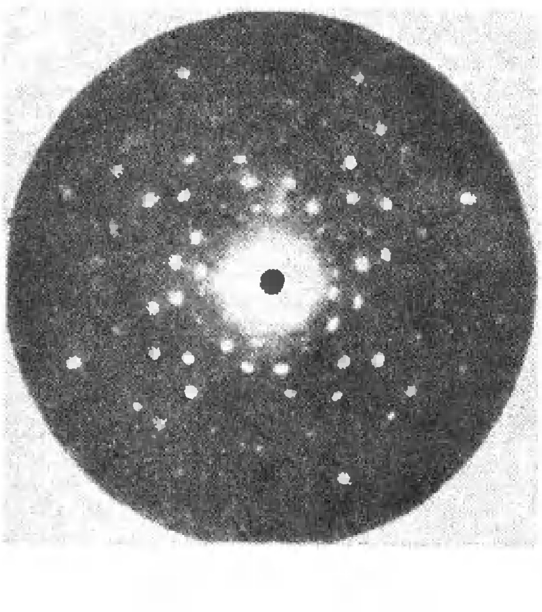


Рис. 4.

Ясно, что наблюдаемая дифракционная картина будет четкой, если число зон Френеля невелико. Так, для видимого света с длиной волны 5×10^{-7} м при диаметре препятствия 1 мм и расстояниях от препятствия до источника света и экрана порядка 1 м на препятствии укладывается всего несколько зон. В таком случае на экране хорошо различимы чередующиеся светлые и темные кольца. При бóльших размерах препятствия (или при меньших расстояниях) картина становится менее чёткой.

В наше время удается наблюдать дифракцию не только световых волн, но и более коротковолнового рентгеновского излучения, длина волны которого составляет десятки ангстрем (напомним, что 1 ангстрем $=1$ Å $=10^{-10}$ м). Создать препятствия такого размера искусственно очень трудно. Но вот если на пути рентгеновских лучей расположить кристалл, в котором межатомные расстояния как раз такого порядка величины, то возникает дифракционная картина — *лауэграмма* (по имени немецкого ученого М. Лауэ, предложившего впервые в 1912 году использовать для наблюдения дифракции рентгеновских лучей кристалл). Лауэграмма состоит из пятен разной интенсивности, расположенных регулярным образом вокруг центрального пятна (рис. 4 — лауэграмма от пентаэритрита). Ее вид определяется характером «упаковки» атомов в кристалле. Опыты по дифракции рентгеновских лучей не только доказали волновую природу рентгеновского излучения, но и позволили выяснить геометрическую структуру различных кристаллов.

Л. Асламазов

Избранные школьные задачи по физике

9 класс

1. Доска, находящаяся на гладком полу, связана с лежащим на ней грузом нитью, переброшенной через блок (рис. 1). Масса доски M, груза m, коэффициент трения между ними μ. С каким ускорением будет двигаться доска, если приложить к ней горизонтальную силу F? Нить и блок можно считать идеальными.

2. С какой скоростью должен двигаться маленький шарик внутри гладкой сферы радиусом $R=28$ см, чтобы все время оставаться в горизонтальной плоскости на высоте $h=20$ см от нижней точки сферы?

3. От поезда, идущего с постоянной скоростью $v=64$ км/ч, отделяется пятая часть состава. Через некоторое время скорость отделившихся вагонов уменьшилась в 2 раза. Считая, что сила тяги при разрыве не изменилась, найдите скорость головной части поезда в этот момент. Сила сопротивления движению пропорциональна силе нормальной реакции.

4. Горизонтальная струя воды ударяется о вертикальную стену. После удара вода стекает по стене вниз. Найдите силу, с которой струя действует на стену, если площадь сечения струи $S=5$ см^2, а ее скорость $v=8$ м/с.

5. Снаряд, летящий горизонтально со скоростью v, разрывается на два осколка. Сразу после разрыва скорость одного осколка направлена вертикально и равна v, а скорость другого осколка равна $5v$. Найдите отношение масс осколков.

10 класс

6. Два одинаковых положительных заряда находятся на некотором расстоянии друг от друга. Во сколько раз увеличится сила, действующая на один из этих зарядов, если на середине прямой, соединяющей заряды, поместить третий заряд, такой же по знаку, но вдвое больший по величине?

7. Протон (масса m, заряд e) движется из бесконечности, где его скорость равна v, по направлению к неподвижной α-частице (масса $4m$, заряд $2e$). Найдите наименьшее расстояние между частицами в процессе движения.

8. Плоский конденсатор заряжен до напряжения U. Напряженность поля вне конденсатора (кроме небольшой области возле его краев) можно считать пренебрежимо малой по сравнению с напряженностью внутри конденсатора (рис. 2). Можно ли отсюда сделать вывод, что работа поля по перемещению пробного заряда q из точки A в точку B по траектории, проходящей вне конденсатора, равна нулю?

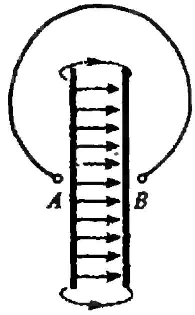


Рис. 2.

9. Два конденсатора, рассчитанные на максимальное напряжение $U=300$ В каждый, но имеющие различные емкости $C_1=500$ пФ и $C_2=300$ пФ, соединены последовательно. Какое наибольшее напряжение можно приложить к такому составному конденсатору?

10. Стеклянная пластина целиком заполняет зазор между обкладками плоского конденсатора, емкость которого в отсутствие пластины $C=2$ мкФ. Конденсатор зарядили от источника с ЭДС $\mathcal{E}=1000$ В, после чего отключили от него. Найдите механическую работу, которую необходимо совершить против электрических сил, чтобы извлечь пластину из конденсатора. Диэлектрическая проницаемость стекла $\varepsilon=2$.

11 класс

11. Длина волны красного луча в воде равна длине волны зеленого луча в воздухе. Вода освещена красным светом. Какой цвет увидит человек, открывающий глаза под водой?

12. Для уменьшения паразитного отражения света от стеклянных поверхностей их покрывают тонкими пленками вещества, показатель преломления которого n меньше, чем у стекла (так называемое просветление оптики). Какой должна быть толщина пленки для достижения наилучшего эффекта на длине волны света λ?

13. Сколько главных максимумов можно наблюдать в дифракционной картине при нормальном падении монохроматического света с длиной волны $\lambda=600$ нм на решетку с периодом $d=3$ мкм?

14. Рентгеновская трубка, работающая под напряжением $U=66$ кВ при токе $I=15$ мА, излучает ежесекундно $N=10^{16}$ фотонов. Считая длину волны излучения равной $\lambda=10^{-10}$ м, определите КПД установки.

15. При увеличении частоты падающего на металл света в два раза задерживающее напряжение для фотоэлектронов увеличивается в три раза. Частота первоначально падающего света $\nu=1{,}2\cdot10^{15}$ Гц. Определите длину волны (в нанометрах) света, соответствующую красной границе фотоэффекта для этого металла.

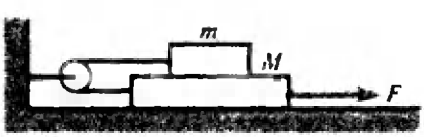


Рис. 1.

Публикацию подготовил А. Черноуцан

Синус и косинус

Синус и косинус — основные понятия тригонометрии — науки об измерении элементов треугольника. Их используют инженеры и строители, геодезисты и артиллеристы. Напомним, что синусом угла α называется ордината точки M единичной окружности с центром в начале координат, если угол между лучом OM и положительным направлением оси абсцисс равен α. А косинусом угла α называется абсцисса этой точки. Связь между этими функциями дают два соотношения:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

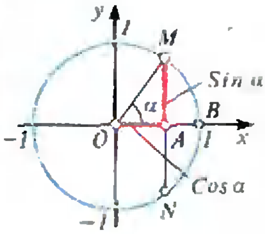
$$\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Любопытно, что синус ввели не древние греки, хотя они внесли огромный вклад в изучение геометрии треугольника, а индусы, математические интересы которых были ближе к практике. Само название синус является следствием грамматического недоразумения. Дело в том, что индусы называли длину хорды, стягивающей данную дугу, словом «джйя» или «джива», что означало тетиву охотничьего лука. А половину этой хорды называли «джйардха» или «архаджйа», а иногда для краткости называли ее так же, как и полную хорду. Арабы, сохранившие для нас знания древних греков, явились также переносчиками в Европу знаний и культуры Индии. В частности, «арабские цифры», которыми мы пользуемся, заимствованы ими от индусов. И понятие синуса тоже пришло к нам через арабов. В арабской транскрипции слово «джива» писалось как «джиба», потом оно превратилось в слово «джайб». Это не удивительно, поскольку арабы не пишут гласных букв, а обозначают их значками над текстом или под ним, а часто и вообще опускают. Слово «джайб» по-арабски означает «пазуха», поэтому переводчик арабского текста на латинский язык перевел это слово как *sinus*, что по-латыни означает «пазуха».

Индусы пользовались и косинусом, который они называли «котиджйа», и еще одной тригонометрической функцией, называвшейся «уткрамаджйа», а в Европе получившей название «синус-верзус» или «обращенный синус». Он определяется формулой

$$\text{sinver}\,\alpha=1-\cos\alpha.$$

На рисунке отрезок MA — синус угла α,



OA — косинус этого угла, а AB — его синус-верзус, являющийся высотой сегмента MNB. Любопытно, что в России высота сегмента часто называлась «стрелкой», что возвращает нас к индийскому охотничьему луку с тетивой MN.

Мы не станем здесь перечислять многочисленные тригонометрические формулы, а обратим свое внимание на график функции

$$y=\sin x.$$

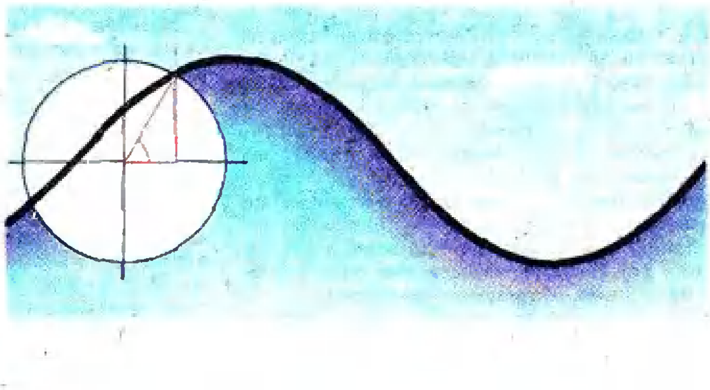
Эта кривая, называемая *синусоидой*, сначала кажется очень искусственной, хотя ее волны напоминают волны на воде. И на самом деле, волны на воде, как и радиоволны, и световые, и звуковые волны, напрямую связаны с функцией

$$y=\sin x.$$

Чтобы получить шаблон для вычеркивания синусоиды, следует обернуть несколько раз свечу листом бумаги, а потом разрезать ее острым ножом под углом 45° к оси свечи (ее фитилю). Развернув бумагу, вы окажетесь владельцами двух отличных шаблонов синусоиды, если принять за единицу радиус свечи. Синусоидами называют также графики всех функций вида

$$y=A\sin(kx+b)+c.$$

Эти кривые получаются из стандартной синусоиды сжатием или растяжением по осям и параллельным переносом. Поэтому график функции



$$y=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

будет синусоидой, как и график функции

$$y=\sin^2 x=\frac{1}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right).$$

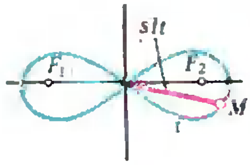
Синусоиду можно увидеть также при взгляде на сверло или пружину.

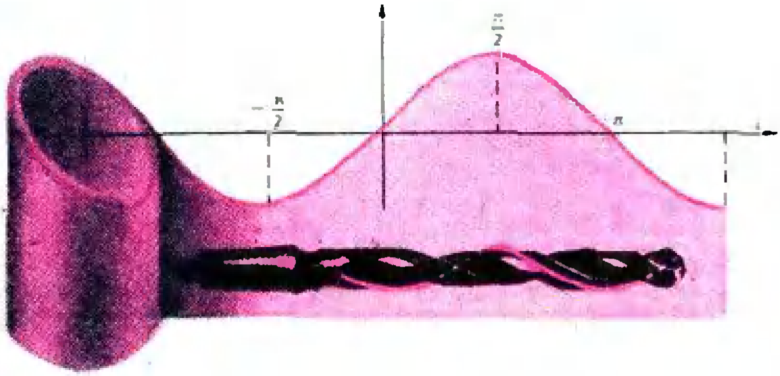
длину дуги AM, если точка M лежит в верхней полуплоскости, и через $-t$, если точка M лежит в нижней полуплоскости. При таком определении число t в зависимости от положения точки M может принимать любое вещественное значение. Теперь мы готовы ввести функции гиперболических синус и гиперболический косинус, положив их равными, соответственно ординате и абсциссе точки M. Они обозначаются так: $\operatorname{sh}t$ и $\operatorname{ch}t$. Очевидно соотношение между ними: $\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t=1$. Эти функции оказались связанными с тригонометрическим синусом и косинусом самым тесным образом при переходе от вещественных чисел к комплексным.

Графики функций $y=\operatorname{sh}t$ и $y=\operatorname{ch}t$ изображены на рисунке.

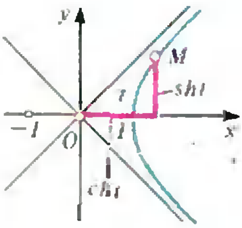
Видно, что одна из функций — четная, а другая — нечетная. График гиперболического косинуса называют также «цепной линией», поскольку *именно такую форму* принимает цепочка, подвешенная за концы.

Кроме тригонометрических и гиперболических, существуют и другие синусы и косинусы, например, лемнискатические, которые определяются через лемнискату Бернулли. Эта кривая есть множество точек плоскости, произведение расстояний которых до двух заданных точек F_1 и F_2 постоянно и равно четверти квадрата расстояния между этими точками. По форме эта кривая напоминает восьмерку, а само слово «лемниската» означает бантик, которым связывали лавровый венок.

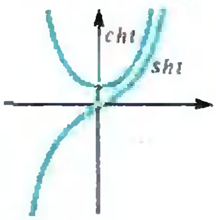


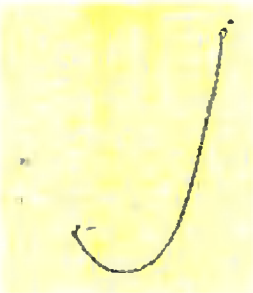


Рассмотрим теперь гиперболу $y=1/2x$ и повернем ее по часовой стрелке на 45° вокруг ее центра. Уравнение полученной кривой



будет таким: $x^2-y^2=1$. Эта гипербола будет пересекать ось абсцисс в точках $A(1, 0)$, и $B(-1;\ 0)$, дальше мы будем рассматривать только правую ее половину. Пусть точка M лежит на гиперболе. Обозначим через t





Рассмотрим лемнискату, у которой длина отрезка F_1F_2 равна $\sqrt{2}$. Ее уравнение будет таково:

$$(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2).$$

Более простым будет ее уравнение в *полярных координатах:*

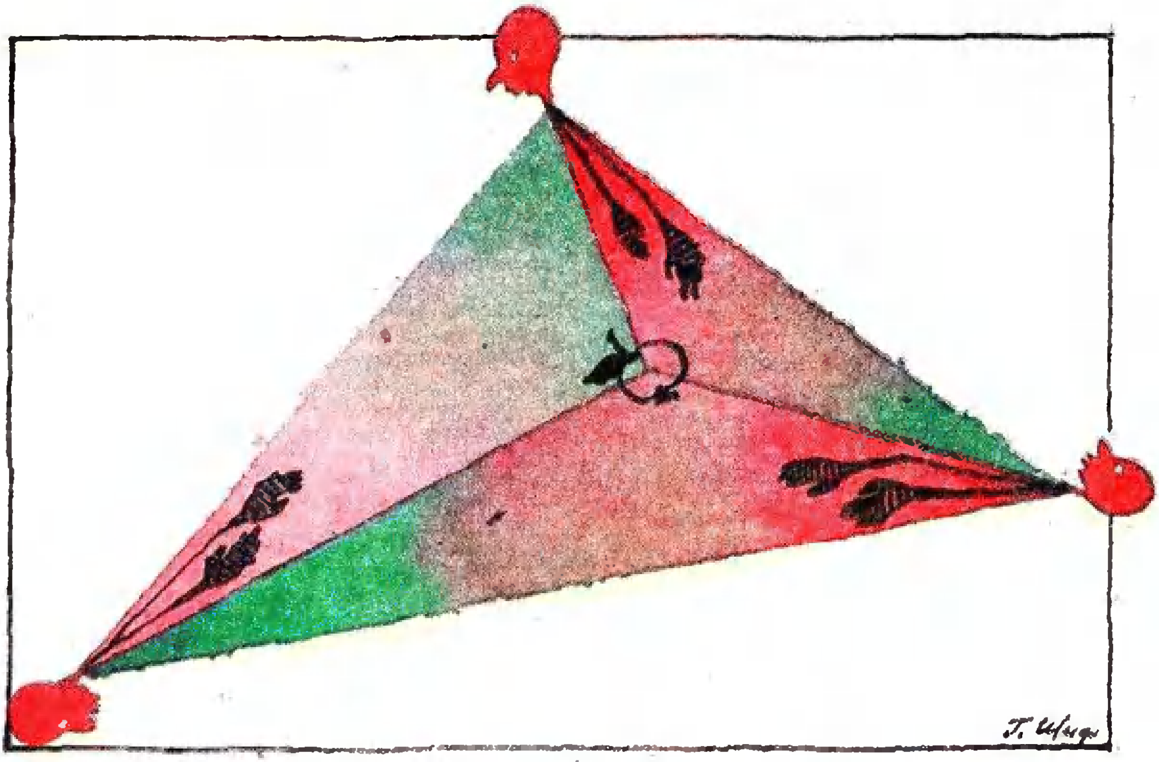
$$r^2=2\cos 2\varphi.$$

Аргументом функции и здесь будет длина дуги, отсчитываемая от точки O по часовой стрелке в правой половине лемнискаты и далее против часовой стрелки в левой ее половине. Лемнискатическим синусом $\operatorname{sl} t$ называют длину отрезка OM, если точка M лежит на правой половине кривой, и длину этого отрезка, взятую со знаком минус, если точка M лежит на левой половине кривой. Лемнискатический косинус определяется по формуле:

$$\operatorname{cl} t=\operatorname{sl}(\omega/2-t),$$

где ω — длина дуги одной половинки восьмерки. Полученные функции также имеют много общего с тригонометрическими. Их графики очень мало отличаются от синусоиды, а сами функции оказались *чрезвычайно полезными* в современной математике.

Материал подготовил А. Савин



Математический кружок

Точки Брокара

В. ПРАСОЛОВ

С каждым треугольником связано много замечательных точек: точка пересечения медиан, точка пересечения высот, центры описанной и вписанной окружностей. Есть и другие замечательные точки. Мы расскажем о двух из них — о точках Брокара.

Точка P, лежащая внутри треугольника ABC, называется первой точкой Брокара, если

$$\angle PAC = \angle PCB = \angle PBA$$

(рис. 1, а). Для второй точки Брокара должны выполняться равенства $\angle QAB = \angle QBC = \angle QCA$ (рис. 1, б).

Прежде чем рассказывать о свойствах этих точек, докажем, что для любого треугольника существует ровно одна первая точка Брокара, а также ровно одна вторая точка Брокара. Начнем с первой из них. Построим на сторонах треугольника ABC подобные ему треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1, как показано на рисунке 2. Так как $\angle PCB = \angle C - \angle PCA$, то равенства $\angle PAC = \angle PCB$ и $\angle PAC = \angle C - \angle PCA$ эквивалентны. Последнее равенство можно переписать в виде $\angle C = \angle PAC + \angle PCA = 180° - \angle APC$. Для точки P, лежащей внутри треугольника ABC, это равенство равносильно тому, что она лежит на окружности, описанной около треугольника AB_1C. Аналогичные рассуждения для остальных углов показывают, что P — точка Брокара тогда и только тогда, когда она принадлежит описанным окружностям всех трех треугольников A_1BC, AB_1C и ABC_1. Пусть P_1 — точка пересечения описанных окружностей треугольников A_1BC и AB_1C, отличная от точки C. Тогда

$$\angle AP_1B = 360° - AP_1C - \angle CP_1B = \gamma + \beta = 180° - \angle AC_1B,$$

а значит, точка P_1 лежит и на описанной окружности треугольника ABC_1, т. е. $P_1 = P$ — точка Брокара. Соединим ее со всеми вершинами рассматриваемых треугольников. Из равенства вписанных углов, опирающихся на одну дугу, следует, что углы между полученными отрезками именно такие, как указано на рисунке 2. А так как $\alpha+\beta+\gamma=180°$, отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 проходят через точку P.

Задача 1. Постройте на сторонах треугольника ABC подобные ему треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1 так, чтобы отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекались во второй точке Брокара.

Итак, мы доказали, что для любого треугольника существует первая точка Брокара, причем ровно одна. Теперь можно начать обсуждать свойства точек Брокара. Если через центр O описанной окружности треугольника ABC провести прямые AO, BO и CO, то они пересекут окружность в таких точках A_1B_1 и C_1, что треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC равны (они симметричны относительно точки O). Точка Брокара обладает похожим свойством.

Задача 2. а) Пусть P — первая точка Брокара. Прямые AP, BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle B_1C_1A_1$.

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для второй точки Брокара.

Если из центра O описанной окружности треугольника ABC опустить перпендикуляры OA', OB' и OC' на его стороны, то точки A', B' и C' будут серединами сторон треугольника ABC, поэтому $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Точка Брокара P снова обладает похожим свойством.

Задача 3. Из первой точки Брокара P опущены перпендикуляры PA', PB' и PC' на стороны треугольника ABC. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle B'C'A'$.

В некотором смысле задача 3 после задачи 2 уже излишняя. Дело в том, что справедливо следующее утверждение.

Задача 4. Прямые AX, BX и CX пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1; A', B' и C' — проекции точки X на стороны треугольника ABC. Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A'B'C'$.

Обратимся теперь к углу $\varphi = \angle PAC = \angle PCB = \angle PBA$. Его можно выразить через углы треугольника ABC. Сотрем для этого на рисунке 2 все лишнее (см. рис. 3) и опустим из точки A_1 перпендикуляр A_1K на прямую AC. Тогда

$$\operatorname{ctg}\varphi = AK/A_1K = AC/A_1K + CK/A_1K = (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma) + \operatorname{ctg}\beta.$$

Для второй точки Брокара мы получим точно такое же выражение. Углы, заключенные между 0° и 180°, равны тогда и только тогда, когда равны их котангенсы. Поэтому для второй точки Брокара мы получим тот же самый угол φ; он называется *углом Брокара*.

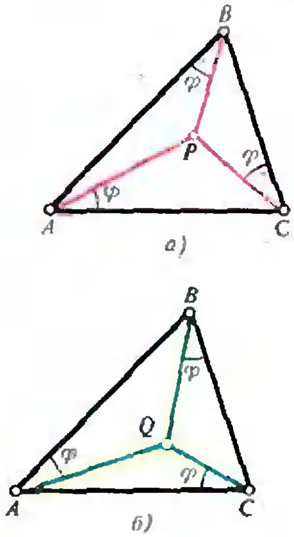


Рис. 1.

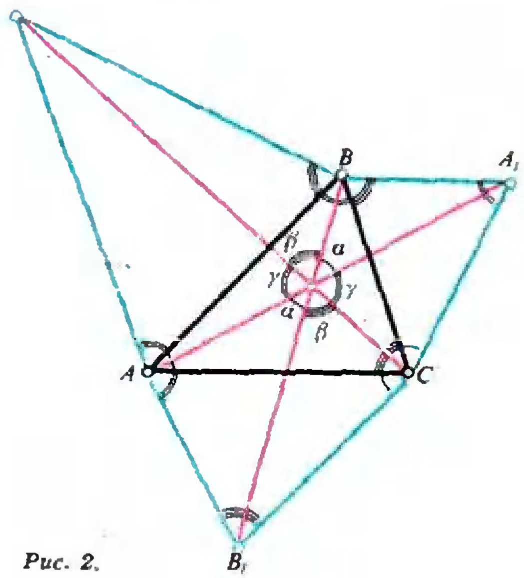


Рис. 2.

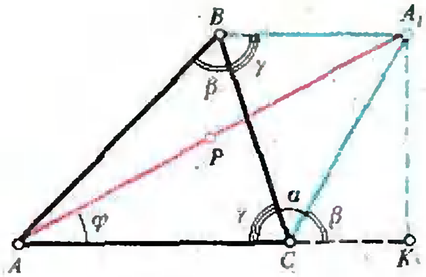


Рис. 3.

Задача 5. а) Докажите, что угол Брокара $\varphi \leq 30°$.

б) Внутри треугольника ABC взята точка M. Докажите, что один из углов ABM, BCM и CAM не превосходит 30°. (Отметим, что эта задача предлагалась в 1991 году на Международной математической олимпиаде.)

Обсудим более подробно совпадение углов для первой и второй точек Брокара. Пусть P и Q — эти точки. Отразим прямые AP, BP и CP относительно биссектрис углов A, B и C соответственно. Тогда полученные прямые пересекутся в точке Q. Впрочем, в этом отношении точки Брокара не исключение: для любой точки X, не лежащей на описанной окружности треугольника ABC, при отражении прямых AX, BX и CX относительно биссектрис соответствующих углов получаются прямые, пересекающиеся в одной точке. Мы не будем обсуждать подробно этот замечательный факт — это тема для отдельного разговора. Отметим лишь следующее.

Задача 6. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что прямые, симметричные прямым AO, BO и CO относительно биссектрис углов A, B и C соответственно, проходят через точку пересечения высот треугольника ABC.

Предлагаем вам решить еще несколько задач о свойствах точек и углов Брокара.

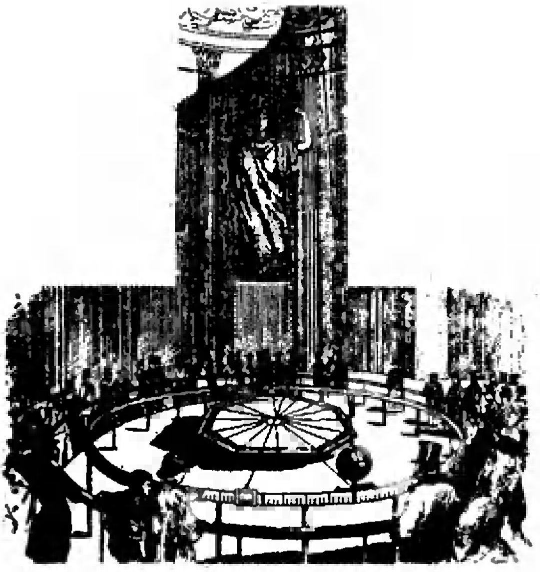
7. Пусть P — точка Брокара треугольника ABC; R_1, R_2 и R_3 — радиусы описанных окружностей треугольников ABP, BCP и CAP. Докажите, что $R_1R_2R_3=R^3$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC.

8. Пусть Q — вторая точка Брокара треугольника ABC; O — центр его описанной окружности; A_1, B_1 и C_1 — центры описанных окружностей треугольников CAQ, ABQ и BCQ. Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$, причем O — первая точка Брокара треугольника $A_1B_1C_1$.

9. Докажите, что из медиан треугольника ABC можно составить некоторый треугольник $A_1B_1C_1$, причем углы Брокара обоих треугольников равны.

10. Дан правильный треугольник ABC с центром O. Докажите, что угол Брокара треугольника, образованного проекциями точки X на стороны треугольника ABC, зависит лишь от длины отрезка OX.

Нам пишут



О маятнике Фуко

Известно, что первый опыт, подтверждающий вращение Земли вокруг своей оси, осуществил французский физик Жан Бернар Леон Фуко (1819—1868). Опыт проводился с помощью маятника, который теперь называют маятником Фуко. Он представляет собой массивный груз, подвешенный на длинном подвесе (проволоке или нити) так, что маятник может качаться в любой вертикальной плоскости. Если маятник отклонить от положения равновесия и отпустить, то действующие на груз силы тяжести и натяжения подвеса будут все время лежать в плоскости колебаний маятника и не смогут вращать эту плоскость по отношению к инерциальной системе отсчета, связанной со звездами. Однако наблюдатель, находящийся на Земле и вращающийся вместе с ней, будет видеть, что плоскость колебаний маятника медленно поворачивается в сторону, противоположную направлению вращения Земли. Это и подтверждает факт суточного вращения Земли.

Первый демонстрационный опыт колебаний маятника Фуко был проведен в здании Пантеона в Париже в 1851 году. Маятник имел груз массой 28 кг и подвес длиной 67 м. В нашей стране первый маятник Фуко был пущен в 1931 году в Исаакиевском соборе в Ленинграде. Он был еще более «представительным» — массой 54 кг и длиной 98 м.

Возникает естественный вопрос: почему маятник Фуко столь массивный и длинный? Попытаемся ответить.

С одной стороны, ясно, что чем дольше будут продолжаться колебания маятника, тем более заметным будет результат опыта. С другой стороны, известно, что любые собственные колебания всегда затухают. Выясним, от каких же параметров зависит время затухания колебаний маятника, и попробуем оценить эту величину.

Сначала заметим, что, если амплитудное отклонение s_m от положения равновесия маятника мало по сравнению с его длиной L, т. е. $s_m \ll L$, колебания можно считать гармоническими, а их период равным $T=2\pi\sqrt{L/g}$. Представим время затухания t в виде $t=nT$, где n — число колебаний маятника. Разумно положить, что по порядку величины n определяется отношением максимального значения потенциальной энергии маятника к среднему значению работы силы сопротивления за период колебаний: $n \sim E_{pm}/\bar{A}_c$.

В каждый момент сила сопротивления, действующая на груз со стороны воздуха, равна $F_c \sim \rho_в v^2 R^2$, где $\rho_в$ — плотность воздуха, v — мгновенная скорость, R — линейный размер груза. Усредним это выражение. По аналогии с переменным синусоидальным током, запишем

$$\overline{v^2}=(v_m/\sqrt{2})^2=1/2\,\omega^2 s_m^2,$$

где $\omega=\sqrt{g/L}$ — циклическая частота колебаний. Тогда

$$\bar{F}_c \sim \rho_в R^2\omega^2 s_m^2, \text{ и } \bar{A}_c \sim \rho_в R^2\omega^2 s_m^3.$$

Легко показать, что максимальная высота подъема маятника

$$H=L-L\cos\alpha_m \approx s_m^2/(2L),$$

и

$$E_{pm} \approx Mgs_m^2/(2L) \sim \rho g R^3 s_m^2/(2L),$$

где M — масса груза, ρ — его плотность.

В результате получаем искомое время затухания колебаний маятника Фуко:

$$t=nT \sim \frac{E_{pm}}{\bar{A}_c}T \sim \sqrt{\frac{L}{g}}\,\frac{\rho}{\rho_в}\,\frac{R}{s_m}.$$

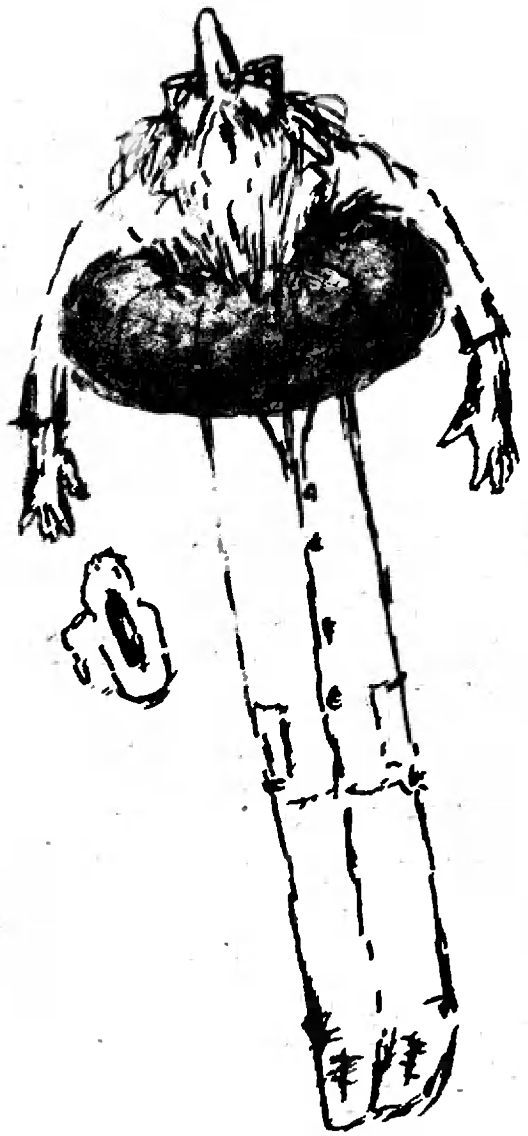
Проанализируем найденное выражение. Представим маятник, все линейные размеры которого в 100 раз меньше. Согласно выражению для t, время затухания колебаний такого маятника уменьшится в 10 раз. Соответственно ослабеет и эффект вращения плоскости колебаний. Вот почему маятник Фуко такой массивный и длинный.

В. Дроздов

Р — значит ракета

Золотой дирижабль

Доктор технических наук
В. БУРДАКОВ



«Честь имею представить Императорскому русскому Техническому обществу мою работу о металлическом аэростате вместе с его бумажной моделью... Прошу покорнейше, уважаемое общество, пособить мне, по мере возможности, материально и нравственно»,— это строки из письма К. Э. Циолковского, переданного через Д. И. Менделеева в Техническое общество.*) Менделеев писал 26 сентября 1890 года: «...согласно с желанием г. Циолковского (очень талантливого господина) препровождаю в Техническое общество: 1) его письмо, 2) тетрадь его исследования о форме складного металлического аэростата и 3) бумажную модель к проекту г. Циолковского».

Как известно, седьмой (воздухоплавательный) отдел Императорского русского Технического общества постановил «оказать г. Циолковскому нравственную поддержку, сообщив ему мнение Отдела о его проекте. Просьбу о пособии на производство опытов отклонить». Председатель этого отдела инженер Е. С. Федоров тогда заявил, что «аэростат обречен навеки силою вещей остаться игрушкой ветров». Эти слова впоследствии неоднократно повторяли многочисленные поколения противников управляемых аэростатов. К сожалению, основания к пессимизму были. Напомним хотя бы такой факт.

Великобритания, Германия и США приняли на вооружение систему Цеппелина,

*) Известный русский ученый Д. И. Менделеев отличался разносторонними интересами. В частности, он много сделал для воздухоплавания и авиации. Известно, что он помогал А. Ф. Можайскому при создании первого в мире самолета, изобрел и изготовил первый высотомер, высказал идею о создании герметичной кабины для высотного управляемого аэростата, подробно изучил принцип полета птиц, совершил в г. Клину самостоятельный подъем на свободном аэростате в 1887 году для наблюдения солнечного затмения.

однако эти дирижабли не оправдали грандиозных военных и политических надежд. Из 129 построенных «цеппелинов» 83 погибло (большинство из них вне всякой связи с военными действиями; так, 13 дирижаблей сгорело в эллингах от случайного воспламенения).

Потребовались годы труда, экспериментов, упорной работы по пропаганде управляемых аэростатов, в том числе и работы самого К. Э. Циолковского, чтобы проекты дирижаблей, основанные на новых конструкционных принципах, получили признание. Первая поднявшаяся в воздух модель такого дирижабля была собрана 15 сентября 1935 года из листов нержавеющей стали толщиной 0,1 мм. При сборке она имела длину 44 м, ширину 11 м и высоту 0,36 м. При наполнении водородом оболочка приняла форму веретена. Модель поднимала в воздух 200 кг балласта.

Известно несколько успешных попыток использовать аэростатическую силу и в ракетной технике. Прежде всего необходимо отметить, что ее стали учитывать при расчете летных характеристик тяжелых космических ракет. В качестве примера можно назвать космические ракеты и системы «Сатурн-5», «Энергия», «Спейс Шаттл». Кроме того, известны случаи применения в ракетной технике аэростатов. Например, в проекте Великобритании «Рокун» использовался аэростат типа «Скайхок», который поднимал на высоту до 25 км геофизическую ракету. Известны и более сложные проекты с аэростатами в качестве первых ступеней. Американская фирма «Боинг Эйрплейн» спроектировала для запуска и транспортировки ракет тороидальный баллон. Максимальный диаметр баллона 95 м, минимальный 43 м, а его грузоподъемность рассчитана на ракету массой до 45 т. Баллон разделен на 16 отсеков общим объемом 10^5 м^3 и выполнен из майларовой пленки. Этой же пленкой затянуто внутреннее отверстие тора, причем проведенные фирмой исследования показали, что струя от двигателей ракеты не вызывает разрушения баллона, т. е. аэростатная конструкция первой ступени может быть многоразовой. Баллон заполняется водородом или гелием, высота его подъема с ракетой 6 км, скорость в горизонтальном направлении при транспортировке ракеты на этой же высоте около 120 км/ч. Последняя достигается при одновременной работе установленных на баллоне трех авиационных двигателей, мощность каждого из них 3400 л. с. Двигатели закреплены шарнирно, что обеспечивает широкие возможности для маневрирования и парирования ветровых возмущений.

Об эффективности аэростатических летательных аппаратов говорит такой факт. 20 июня 1958 года корреспондент агенства «Юнайтед Пресс Интернешнл» передал из г. Миннеаполиса сообщение о запуске в США пластмассового аэростата с грузом 102 кг на высоту 40 км. Такая огромная высота (для ее достижения космическая ракета расходует более 60 % своей начальной массы!) — не предел для аэростатических систем.

Использование аэростатических подъемных сил целесообразнее всего начать с создания комбинированных систем, например реактивно-аэростатических.

Так, заполненное газообразным водородом сигарообразное тело способно на начальном участке движения в земной атмосфере использовать аэростатическую силу, а затем — реактивную, получаемую путем истечения того же самого водорода и его сгорания в воздушно-реактивном двигателе (ВРД). Подобный аппарат можно модифицировать, если на его передней части установить массозаборное устройство, а на хвостовой — реактивное сопло. Работая как ВРД с огромной камерой сгорания, плотность газа в которой меньше плотности окружающего воздуха, такой аппарат будет одновременно с реактивной развивать ощутимую аэростатическую силу. Вместо сгорающего горючего для нагрева воздуха может быть использован ядерный реактор.

Существуют, наконец, многочисленные проекты, в которых искусственно увеличивается вертикальный градиент внешнего давления, который и создает аэростатическую силу.

Наибольшее распространение получили проекты специальных пусковых установок, выполненных в виде вертикальных труб, внутри которых размещается ракета. В верхней части трубы, т. е. в области над ракетой, создается искусственное разрежение, а под ракетой за счет втекания воздуха, продуктов сгорания, воды (если труба опущена в море) или при комбинированных воздействиях возникает повышенное давление, создающее выталкивающее усилие. Исследования эффективности подобных сооружений проводятся длительное время в США. Установлено, в частности, что для организации подобного старта ракеты «Атлас» (стартовая масса 115 т) с ускорением 10 g требуется пусковая труба высотой 265 м и диаметром 3 м.

Подобные пусковые системы несколько напоминают увеличенные до гигантских размеров артиллерийские орудия, которые для запуска первых отечественных прямоточных двигателей были применены работниками ГИРДа еще в 1933 году. Необходимо отметить, что возможность применения артиллерийских орудий для предварительного разгона небольших ракет, а также аэродинамических моделей изучается до сих пор. В частности, в США при проведении подобных экспериментов используются тяжелые орудия с диаметром ствола более 400 мм.

Вертикальные потоки атмосферного воздуха, вызванные местными аномалиями вертикальных градиентов давления или устойчивыми ветрами, взаимодействующими с горным рельефом поверхности Земли, также могут быть в принципе использованы для подъема летательных аппаратов. Эта проблема, хорошо знакомая планеристам, может оказаться весьма актуальной и в космонавтике.

Приведем ряд довольно простых рассуждений, из которых можно понять основные закономерности, лежащие в основе работы аппаратов, использующих аэростатическую подъемную силу. Известный из школьных курсов физики закон Архимеда позволяет сделать вывод о том, что удельная (приходящаяся на 1 м^3 объема летательного аппарата) архимедова сила равна:

$$F_A = \varrho g,$$

где F_A — архимедова сила, ϱ — плотность атмосферы, g — ускорение свободного падения. Таким образом, чем больше объем и чем меньше масса собственно конструкции аппарата, тем больше масса поднимаемого полезного груза.

Удельная (приходящаяся на единицу площади) аэродинамическая (ветровая) сила $F_в$, действующая на аппарат, движущийся со скоростью v, равна

$$F_в = C\varrho v^2/2,$$

где C — экспериментальный аэродинамический коэффициент сопротивления, который для сферических аппаратов не зависит от направления обдувки.

Наконец, массы конструкционно подобных аппаратов (имеющих, например, разные размеры, но одинаковую удельную прочность оболочки и одинаковое давление в ней) определяются как

$$m = \gamma l^3,$$

где γ — постоянный коэффициент, l — характерный размер аппарата (например, диаметр для сферической формы).

Устойчивость аппарата к ветровым воздействиям определяется нагрузкой на его мидель*), т. е. отношением массы аппарата к площади его поперечного сечения. Очевидно, что с увеличением размера аппарата l масса растет быстрее, чем мидель, так как она пропорциональна l^3, а мидель — только l^2. Нагрузка на мидель при этом возрастает пропорционально l. Одновременно уменьшается зависимость от воздействия ветра и от турбулентности атмосферы.

Таким образом, увеличение абсолютных размеров летательных аппаратов «легче воздуха» выгодно в отношении их грузоподъемности и оправдано с точки зрения их устойчивости и управляемости.

Использование летательных аппаратов аэростатического типа возможно не только в пределах земной атмосферы, но и в плотных атмосферах других планет, например в атмосфере Венеры, где этот принцип наиболее эффективен. Действительно, организация экспедиции с посадкой на поверхность планеты довольно проблематична. Высокая температура атмосферы на поверхности Венеры (760 К) в сочетании с большим давлением (10^7 Па)**) практически исключают возможность пребывания там человека (во всяком случае, по современным представлениям).

Многочисленные эксперименты, проведенные на спускаемых аппаратах станций «Венера», показали, что на высотах между 40 и 50 км от ее поверхности давление и температура примерно соответствуют земным. Кроме того, на высоте около 49 км заканчивается облачный покров и видимость становится удовлетворительной. Таким образом, спускаемый аппарат, выполненный в виде заполняемого гелием баллона и останавливающийся при снижении в атмосфере Венеры на высоте, соответствующей земным температуре и давлению, смог бы стать уникальным средством для пребывания людей около этой до сих пор загадочной планеты. Возможность регулирования высоты полета в зависимости от изменения давления, свободного перемещения вдоль поверхности планеты, сбрасывания на поверхность и запуска в лежащие выше слои атмосферы радиозондов и, наконец, использования окружающей среды для вентиляции и жизнедеятельности (путем выделения кислорода из углекислого газа ат-

*) Мидель — наибольшее по площади сечение движущегося тела плоскостью, перпендикулярной направлению движения.

**) Давление атмосферы на поверхности Земли 10^5 Па.

мосферы) создает условия для пребывания экипажа на Венере более комфортные, чем на Марсе.

К этому необходимо добавить, что отработка такого летательного аппарата может быть проведена в земных условиях. И наконец, возможно применение на первом этапе автоматических аппаратов подобного типа. Такие аппараты, достигающие поверхности Венеры, уже созданы.

Заканчивая рассказ об аппаратах, использующих «даровую», по словам К. Э. Циолковского, аэростатическую силу, аппаратах, работа которых практически не приводит к загрязнению окружающей среды, можно еще раз сказать об их «многоликой» применимости. Это и самые дешевые транспортные средства, и универсальные атмосферные лаборатории, и первые ступени космических ракет-носителей, и, наконец, уникальные лаборатории, которые могут оказаться незаменимыми средствами для исследования многих планет Солнечной системы.

Хорошо известно, что не только Венера, но и такие планеты, как Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун, имеют мощную атмосферу. Атмосфера обнаружена (непосредственными наблюдениями или теоретически) у некоторых спутников планет. Ее имеют, например, так называемые галилеевские спутники Юпитера: Ио, Европа, Ганимед и Каллисто. Имеется атмосфера и у Титана — спутника Сатурна, и у Тритона — спутника Нептуна. Пока еще мало данных о составах и термодинамических параметрах этих атмосфер, однако уже сейчас можно представить, что по аналогии с земными условиями атмосферы планет и их спутников будут затруднять, если не предусмотреть их специальное использование, возможность покидания этих небесных тел ракетными летательными аппаратами, уносящими пробы грунта, автоматические зонды или даже персонал будущих экспедиций. Один из рациональных способов использования планетных атмосфер — создание аппаратов аэростатического типа или комбинированных систем, применяющих также самолетные, вертолетные или атмосферно-реактивные методы создания тяговых усилий в дополнение к аэростатическим.

Напомним, что К. Э. Циолковский, предвидя широкие возможности использования в будущем аппаратов «легче воздуха», говорил, что все затраты по созданию и строительству дирижаблей будут возмещены даже в том случае, если они будут изготовляться из чистого золота.

Олимпиады

Первая математическая олимпиада Мексики

В 1990 году в Мексике прошла первая олимпиада по математике. В заключительном туре, проходившем по традиционной схеме в два дня, участвовало 62 школьника. И в первый, и во второй день предлагалось по четыре задачи, на решение которых отводилось по 4,5 часа.

Задачи

1. Докажите, что если сумма двух несократимых дробей — целое число, то эти дроби имеют одинаковые знаменатели.

2. Сколько целых положительных делителей имеет число $20!$ $(20!=1\cdot 2\cdot 3\ldots 20)$?

3. Даны две параллельные прямые l и l'. Точка P лежит на равных расстояниях от этих прямых. Пусть точки A и B на прямых l и l' такие, что угол APB — прямой. Опишите множество точек M — проекций точки P на отрезок AB.

4. Найдите произведение всех целых положительных чисел, не превосходящих 100, которые имеют ровно три целых положительных делителя. Покажите, что каждое такое число есть полный квадрат.

5. На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбрана точка M. Обозначим через P и Q проекции этой точки на катеты AB и AC соответственно. Докажите, что треугольник BMP, треугольник CMQ и прямоугольник $MPAQ$ не могут одновременно иметь одинаковые площади.

6. Докажите, что для любого положительного целого числа n число $(n^3-n)(5^{8n+4}+3^{4n+2})$ делится на 3804.

7. Докажите, что для всех положительных целых чисел дробь
$$\frac{n^2+n-1}{n^2+2n}$$
несократима.

8. а) Через точку S в пространстве проведены три прямые l, m и n. Проведена плоскость, перпендикулярная прямой m и пересекающая прямые l, m и n в точках A, B и C соответственно. Углы ASB и BSC равны по 45°, а угол ABC — прямой. Найдите величину угла ASC.

б) Пусть P, Q и R — точки пересечения плоскости, перпендикулярной к прямой l, с прямыми l, m и n соответственно. Пусть также $SP=1$. Найдите длины сторон треугольника PQR. (Можно использовать теорему косинусов для треугольника со сторонами a, b и c: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$, где α — угол между сторонами a и b).

Гуд бай, Америка?..

За последние годы столько советских школьников побывало в Соединенных Штатах Америки, что сама по себе поездка очередной группы не выглядит чем-то из ряда вон выходящим. И тем не менее есть по крайней мере два обстоятельства, выделяющих для нас эту поездку от любой другой.

Первое обстоятельство связано с тем, что в третий раз подряд старт одной из групп (а именно о ней и идет речь) обеспечивает журнал «Квант». В этот раз основа группы состояла из победителей космического конкурса «К—Q», проведенного журналом «Квант» в 1990 и 1991 годах.

Это обстоятельство, как понимает читатель, приятное. Чего не скажешь о втором. Но о нем — в конце нашего репортажа.

Любая летняя поездка — удовольствие. Что уж тут говорить о поездке за океан! Советские школьники провели 2 недели в международной школе, расположившейся на территории Военной академии в красивейшем местечке Лонг-Айленд (штат Нью-Йорк). Сама академия, как говорят, напоминает суворовское училище. Может и так, но нам показалось, что и учебные корпуса, и спортивные сооружения, и огромное пространство, занимаемое академией, создают сугубо вольное настроение. Не случайно «объекты» академии не пустуют и летом.

Нынешняя школа — «космическая» еще и потому, что в числе преподавателей были профессор К. Феоктистов — участник полета на первом многоместном космическом корабле и А. Серебров, совершивший полеты на станциях «Салют-7» и «Мир».

К. Феоктистов прочел цикл лекций, связанных с вопросами проектирования космических аппаратов и с оценками задач, стоящих перед разработчиками космической техники. А. Серебров рассказал об использовании эффекта невесомости во время космического полета, а также о трудностях, которые этот эффект вызывает в работе.

Космическая тема, однако, не была единственной на занятиях в школе. Прекрасные лекции по молекулярной биологии прочел израильский профессор Э. Трифонов. Большим интересом пользовались и лекции по математике, которые читал сам директор школы — Э. Лозанский. И это не случайно. Ведь как Э. Трифонов, так и Э. Лозанский имеют уже многолетний опыт проведения занятий в школе.

Кроме советских школьников (учащихся 7—10 классов), под крышей академии были собраны ребята из США, Франции и Швейцарии.

Как всегда, занятия перемежались спортивными сражениями и концертами (силами самих участников школы), поездками к океану и знакомством с культурными и историческими достопримечательностями.

По окончании школы все участники переехали в Вашингтон, где их ждали в университетском городке Джорджтауна. В оставшиеся семь дней для школьников и преподавателей были организованы замечательные экскурсии не только в Вашингтоне, но и в Филадельфии и Балтиморе.

Со своими впечатлениями по традиции делятся сами участники международной школы.

Илья Тараскин (Ужгород): Поездка была очень интересной и полезной. Меня больше всего поразила духовная атмосфера, а не материальная обеспеченность. Здесь понимаешь, с какой стороны надо начинать реформы в нашей стране.

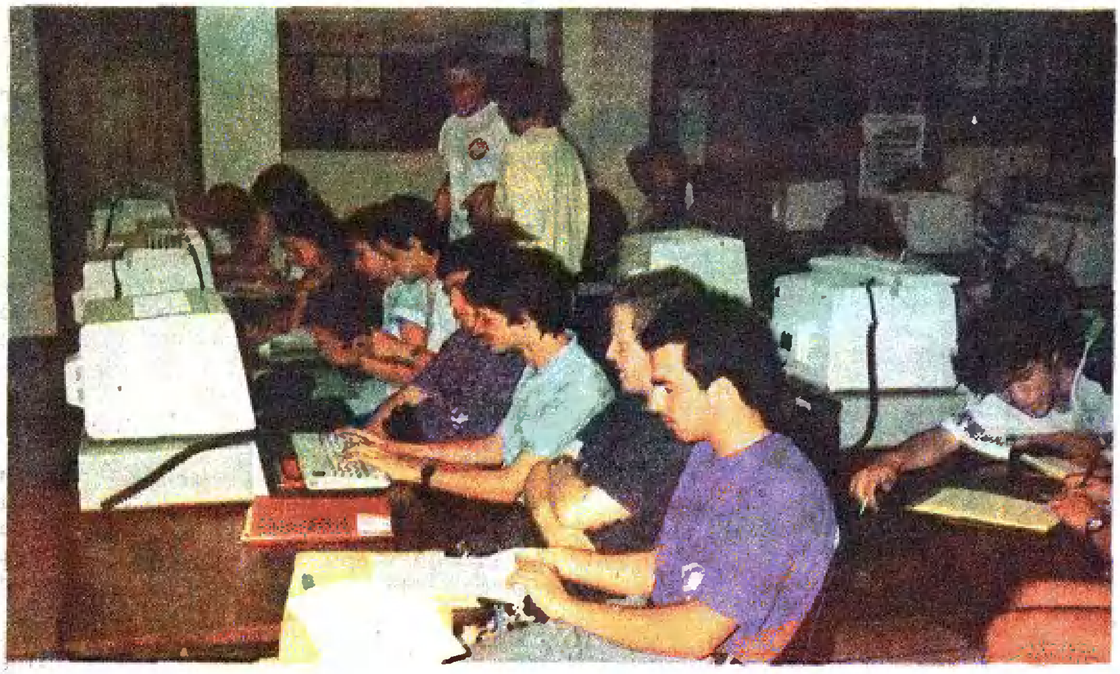
Константин Петухов (Старый Оскол): Школа запомнится на всю жизнь. Для меня важными были не только занятия, но и чисто житейская сторона поездки. Удивило меня то, что, как только мы попали в мир порядка и рациональности, все (или почти все) стали жить по его законам... Мне показалось, что из книг и фильмов об Америке я знал достаточно много, но увиденное впечатляло гораздо больше... Я очень благодарен хозяевам за их теплый прием и дружеское отношение, несмотря на то, что мы не всегда были на высоте... Спасибо!

Игорь Сперанский (Донецк): Приехали! Уехали! Три недели пролетели очень быстро. Прекрасная страна и люди, но домой все равно тянет. Все получили массу впечатлений и все очень довольны!

Ульяна Новикова (Москва): Что удивительное — всем всего хватает!

Антон Бакулев (Санкт-Петербург): Самая важная отличительная черта — доброжелательное отношение друг к другу. Даже если ты сам кого-нибудь случайно заденешь или толкнешь, тебе же скажут «Простите» и... улыбнутся!

Лонг-Айленд. В ожидании звонка.



Балтимор.
За нами — «Крузенштерн».

Вашингтон.
Горки «американские»... или «русские»?

***Рубен Ениколопов** (Москва): Единственной для меня неожиданностью оказались люди. Желание сделать добро окружающим поражает...*

***Тимур Рашба** (Махачкала): Посетить все лекции было невозможно из-за того, что они проходили одновременно. Поэтому скажу о лекциях К. Феоктистова. Подкрепленные математическим аппаратом его рассуждения полностью, к сожалению, отвергают мечты о полетах в далекий космос...*

Запомнились шахматные баталии. Причем не только между собой. В один из дней мы дружно, всем лагерем проиграли трехкратному чемпиону США Льву Альбурту.

Мне очень понравилась практичность американцев. К примеру, повезли нас в Брукхейвенскую национальную лабораторию. Там стоит давно заглушенный атомный реактор. Сейчас он используется в качестве музейного экспоната. Хотя реактор и старый, но посмотреть все равно интересно. Кроме этого, нам показали огромный ускоритель заряженных частиц. Посетили мы и Космический центр им. Р. Годдарда, одного из основоположников космонавтики. Оказалось, что центр приспособлен для экскурсий еще лучше. Одна из стен комнаты — стеклянная. Мы стояли и смотрели, а за стеклом работали люди. Они руководили испытаниями по новому варианту запуска корабля «Спейс Шаттл». В другом помещении собирали и испытывали космические аппараты, в третьем — находится межконтинентальная телефонная станция. Показали нам также одну из самых чистых комнат в мире, где шла сборка космического телескопа «Хаббл». Это — гражданские организации. Но была и экскурсия по главному военному ведомству — Пентагону. И хотя там, конечно, нет кабинетов со стеклянными стенами и фотографировать можно не везде, в отличие от космического центра, но даже пройтись по коридорам было очень интересно. Там выставлены флаги различных полков США, множество исторических документов, есть даже рисунки, сделанные солдатами во время различных войн и в мирное время. И все это для того, чтобы налогоплательщик, гражданин Соединенных Штатов Америки, видел, что деньги его идут на полезные для его страны, а значит и для него, дела...

Мы были еще во многих музеях и на выставках. Произвело впечатление, что вход на них бесплатный...

Несомненно, что поездка всем нам дала очень многое. Мы познакомились с культурой другой страны, во многом отличной от нашей. Это должно изменить жизнь всех участников школы в лучшую сторону. В итоге это будет сказываться и на жизни других людей в нашей стране (если такие школы будут проводиться и в будущем). Горячо благодарю всех задумавших и осуществивших школу!

Вашингтон.
Университетский городок.

А теперь вернемся ко второму обстоятельству. Действительно, немного грустному. Речь идет о галопирующих ценах на авиабилеты и на оформление выездных документов. Поэтому редакция очень опасается, как бы третья школа не стала последней. И все же не будем прощаться, а скажем осторожно: «До свидания, Америка!»

Информация

Новый прием во Всесоюзную заочную многопредметную школу на отделения «Математика» и «Языки и литература»

Всесоюзная заочная многопредметная школа Академии педагогических наук при Московском университете им. М. В. Ломоносова*) принимает на индивидуальное обучение учащихся восьмых классов общеобразовательных школ, гимназий и лицеев, а также учащихся СПТУ, за исключением проживающих в Москве и Санкт-Петербурге.

Цель ВЗМШ — рассказать своим ученикам о многих увлекательных вещах, связанных со школьным курсом, предложить и помочь решить интересные разнообразные задачи, приучить самостоятельно работать с книгой и грамотно, четко и кратко излагать свои мысли на бумаге.

Всем окончившим ВЗМШ (в том числе ее филиалы и группы «Коллективный ученик» — см. ниже) выдаются соответствующие удостоверения.

Для поступления в ВЗМШ надо хорошо выполнить вступительную контрольную работу, помещенную ниже. Преимуществом при этом пользуются ребята, проживающие в сельской местности, рабочих поселках и небольших городах.

Чтобы быть принятым в ВЗМШ, не обязательно решить все задачи. Решения надо написать на русском языке в ученической тетради в клетку. Эта тетрадь высылается простой бандеролью; не сворачивайте ее в трубку. На обложку наклейте листок бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу:

Область	Московская
Фамилия, имя ученика	Иванов Петр
Год рождения	1978
Класс и школа	8 класс «Б» школы № 2
Фамилия, имя, отчество учителя (математики или русского языка и литературы)	Орлов Борис Петрович
Место работы и должность родителей	Отец — шофер автобазы № 3 Мать — медсестра больницы № 1
Полный почтовый адрес (с указанием почтового индекса)	123456, Клин, ул. Строителей, д. 1, кв. 1.

1	2	3	4	5	6а	6б	7	8	9	10	11а	11б	12	Всего

В тетрадь вложите два листка бумаги размером 6×14 см с четко написанным вашим адресом (включая индекс), фамилией и именем, а также конверт с адресом.

Задачи в работе должны идти в том же порядке, что и у нас: запишите сначала условие, а затем решение.

Если вы хотите поступить сразу на несколько отделений — каждую работу присылайте в отдельной тетради!

Срок отправки вступительных работ — не позднее

по математике — 30 апреля;

по языкам и литературе — 15 апреля

1992 года (по почтовому штемпелю).

Если вы выдержите конкурс, то начиная с сентября 1992 года будете получать наши материалы, содержащие изложение теоретических вопросов, задачи для самостоятельного решения (с образцами решений) и контрольные работы. Все контрольные работы будут проверяться и подробно рецензироваться преподавателями ВЗМШ — студентами, аспирантами и преподавателями МГУ и других вузов, в которых имеются филиалы ВЗМШ, а также научными сотрудниками различных учреждений. Филиалы работают по тем же программам и пособиям, что и московская группа ВЗМШ.

Предполагается, что часть заданий будет даваться по журналу «Квант», поэтому рекомендуем на него подписаться (это можно сделать без ограничений с любого месяца в любом отделении связи; подписной индекс 70465; журнал распространяется только по подписке).

Для поступающих на отделение «Математика»

Вступительную работу надо выслать по адресу: *119823, Москва ГСП, МГУ, ВЗМШ (на прием), отделение «Математика»* или по адресу соответствующего филиала.

Филиалы ВЗМШ при университетах имеются в городах: Бишкек (Фрунзе), Воронеж, Гомель, Донецк, Екатеринбург (Свердловск), Иваново, Ижевск, Краснодар, Красноярск, Махачкала, Нальчик, Ростов-на-Дону, Самара (Куйбышев), Ташкент, Ульяновск — филиал МГУ, Худжанд (Ленинабад), Чебоксары, Челябинск, Элиста, Ярославль; филиалы при педагогических институтах — в городах: Абакан, Бирск, Брянск, Витебск, Вятка (Киров), Луцк, Магадан, Павлодар, Петроза

*) Так пока называется Всесоюзная заочная математическая школа, которая имеет сейчас 3 отделения «Математика», «Биология», «Языки и литература».

водск, Тернополь, Уральск, Целиноград, Череповец; работает также филиал в Могилеве при областном Дворце пионеров.

Учащиеся, проживающие на Северо-Западе России (в Архангельской, Калининградской, Петербургской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках), в Беларуси (кроме Витебской, Гомельской и Могилевской областей) и в прибалтийских республиках присылают свои работы по адресу: *198097, Санкт-Петербург, ул. Трефолева, д. 32, С-З ЗМШ (на прием).*

Без контрольной работы, только по заявлению, принимаются на индивидуальное обучение участники Всесоюзной и республиканских, а также победители краевых и областных олимпиад по математике для школьников и учащихся СПТУ.

Школьники и учащиеся СПТУ, не успевшие или не сумевшие поступить в ВЗМШ на индивидуальное обучение, имеют возможность заниматься по той же программе в группах «Коллективный ученик». Каждая такая группа — это математический кружок, работающий под руководством учителя математики по программе ВЗМШ и по ее пособиям. Прием в эти группы проводится до 1 октября 1992 г. на два потока: для тех, кто с сентября 1992 года начнет учиться в 9 классе и для тех, кто начнет учиться в 10 классе (соответственно на I и II курсе СПТУ). Прием в группы проводится без конкурса. Для зачисления достаточно заявления учителя математики, руководящего кружком, с приложением списка учащихся и указанием класса, в котором они будут учиться в 1992/93 учебном году.

Заявление должно быть подписано директором школы (СПТУ) и заверено печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик ВЗМШ» может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия. Заявление следует направлять в адрес ВЗМШ.

Для поступающих на отделение «Языки и литература»

Все поступающие на отделение «Языки и литература» независимо от места проживания высылают решений вступительной работы по адресу: *119823, Москва ГСП, МГУ, ВЗМШ (на прием), отделение «Языки и литература»*.

Принимаются также группы «Коллективный ученик» под руководством учителя русского языка и литературы, родного языка и литературы или иностранного языка.

Вступительная работа («Математика»)

1. Для выборов одного из двух кандидатов в президенты образован 1001 избирательный округ по 10001 избирателю в каждом. Сначала происходят выборы в каждом округе. Побеждает тот кандидат, за которого высказалось большинство округов. Какое наибольшее число голосов мог набрать проигравший кандидат в президенты?

2. От пристани A вниз по течению реки к пристани B отплыл плот. Одновременно от B отплыл в A катер и через 25 минут встретил плот. После прибытия в A катер сразу же развернулся и приплыл в B одновременно с плотом. Больше или меньше часа заняло плавание?

3. Две окружности касаются внутренним образом третьей окружности радиуса R и касаются друг друга (внешним образом). Чему равен периметр треугольника с вершинами в центрах этих окружностей?

4. Найдите все натуральные n, при которых число $\dfrac{19n+91}{(n+17)}$ целое.

5. Биссектриса внешнего угла при вершине A треугольника ABC пересекает продолжение стороны BC в точке E. Докажите, что если длина AE вдвое больше высоты треугольника, опущенной из вершины A, то один из углов B и C треугольника на 60° больше другого.

6. а) Можно ли занумеровать ребра куба числами 1, 2, ... 12 так, чтобы сумма номеров трех ребер, выходящих из каждой вершины, была одна и та же?

б) Тот же вопрос для номеров —6, —5, ... —1, 1, 2, ... 6.

7. Докажите, что $224\underbrace{99\ldots9}_{100\ \text{девяток}}1\underbrace{00\ldots0}_{102\ \text{нуля}}9$ — квадрат целого числа.

8. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки внутри треугольника до его вершин больше половины его периметра.

9. Жители города N делятся на рыцарей, которые всегда говорят правду, и лжецов, которые всегда лгут. Однажды 15 жителей этого города встали в круг и каждый из них заявил, что один из его соседей — рыцарь, а другой — лжец. Сколько рыцарей и сколько лжецов могло быть среди этих 15 человек?

10. Найдите все решения в целых положительных числах уравнения

$$x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4+\ldots+x_{14}^4=1992.$$

11. В вершинах правильного n-угольника расставлены синие и красные фишки. Верно ли, что найдутся три фишки одного цвета, расположенные в вершинах равнобедренного треугольника, если: а) $n=7$; б) $n=8$?

12. Винни-Пух шагает вниз в метро по равномерно движущемуся эскалатору. Если он каждую секунду будет проходить вниз две ступеньки, то всего за время спуска насчитает 50 ступенек. Если каждую секунду он будет проходить вниз три ступеньки, то всего насчитает их 60. а) Сколько времени продолжался бы спуск, если бы Винни-Пух не шагал, а просто стоял на эскалаторе?

Сколько ступенек он насчитает, если каждую секунду будет проходить вниз: б) 6 ступенек; в) x ступенек? г) Нарисуйте график зависимости числа пройденных ступенек от x.

Вступительная работа («Языки и литература»)

1. Даны фразы на японском языке и их переводы на русский язык:

1) Сэнсэй-га боку-но мура-кара мати-э итта.
Учитель шел из моей деревни в город.
2) Боку-но томодати-га сэнсэй-но хон-о тотта.
Мой товарищ брал книгу учителя.
3) Хигаси-кара-но кадзэ-га мура-дэ фуйта.
В деревне дул восточный ветер.
4) Сэнсэй-га мити-дэ кава-но фукуро-о сагасита.
Учитель искал на дороге кожаный мешок.
5) Кодомо-га мура-дэ сэнсэй-о мита.
Ребенок видел учителя в деревне.

Задание. Переведите на японский язык:
1) Учитель шел на восток.
2) Товарищ искал в городе кожу.
3) Ребенок видел меня на дороге в город.

2. Задание 1. Приведите пример предложения на русском языке, в котором прилагательное не согласовано в числе с определяемым существительным.

Задание 2. Приведите пример предложения на русском языке, в котором прилагательное не согласовано в падеже с определяемым существительным.

Задание 3. Приведите пример предложения на русском языке, в котором сказуемое не согласовано в числе с подлежащим.

3. Даны пары слов с одинаковым значением:
кидать — бросать,
громадный — огромный,
болезнь — заболевание.

Задание. Определите, всегда ли в речи первое слово пары можно заменить на второе, второе — на первое. Если нет, то укажите условия, при которых это можно сделать, а также условия, при которых этого сделать нельзя.

4. Даны фразы на языке курия (один из африканских языков, который относится к восточной группе языковой семьи банту) с их переводами на русский язык:
1) Agatoco kagakoyeta akaγe.
Зайчик вспоминает корзинку.
2) Agacucu gakogotegerera.
Птенчик слушает тебя.
3) Ekeboe kigukuγinca.
Шакал качает тебя.
4) Ekeboe gikigutiga egekone.
Шакал оставляет банан.
5) Agacucu kagikubukia egekondo.
Птенчик будит обезьяну.
6) Egekondo kegekoboγa egete.
Обезьяна привязывает палку.
7) Egetoco gikuguturia.
Заяц спасает тебя.

Задание. Переведите на язык курия:
1) Обезьяна слушает зайца.
2) Шакальчик спасает корзину.
3) Обезьянка качает палочку.
4) Шакал вспоминает тебя.
5) Птенец оставляет тебя.

Примечание. Буква «c» читается как русское «ч», буква «γ» — как звонкий звук, парный к русскому «х» (украинское «г»).

5. В рязанском говоре русского языка звуку «о» русского литературного языка соответствует иногда «о», иногда «уо». Ниже приведены некоторые слова в том виде, как они выступают в этом говоре:

двуор, пуоп, буоб, нуож, бог, ход, воз, сор.

Задание 1. Дайте свои примеры слов, которые должны произноситься с «уо».

Задание 2. Известно, что в определенное время подобное явление (а именно, переход «о» в «уо» при определенных условиях) было характерно для русского языка в целом. Следы этого явления можно найти в словах русского литературного языка, имевших «о» в начале. Попытайтесь найти хотя бы одно такое слово. Объясните свое решение.

6. Какие черты детектива можно отыскать в повести А. С. Пушкина «Дубровский»?

7. Рассказ А. П. Чехова «Каштанка» написан, как мы обычно говорим, «от третьего лица». Какие особенности повествовввния вы замечаете?

8. Какие черты романтизма как художественного метода вы отмечаете в повести Н. В. Гоголя «Тарас Бульба»?

9. Какую роль играет образ дороги в поэме Н. В. Гоголя «Мертвые души»?

10. Для достижения своей художественной цели литераторы часто пользуются приемом «говорящей фамилии» (или «говорящего имени»).

Задание 1. В чем суть этого приема? Приведите примеры.

Задание 2. Прочитайте рассказ В. М. Шукшина «Волки». Чем, по-вашему, может быть мотивирован выбор имени главного героя?

Специализированный учебно-научный центр МГУ (СУНЦ МГУ)

*объявляет конкурсный набор школьников-москвичей
на физико-математический, химический и экономический профили
в 10-е и 11-е классы.*

*Первый тур — заочный.
Его задания, а также правила оформления решений,
опубликованы в «Кванте» № 12 за 1991 год (с. 69—70).*

*Желающие участвовать в конкурсе
должны не позднее 30 апреля 1992 года (по почтовому штемпелю)
выслать решения по адресу:
121357, Москва, Кременчугская ул. 11, СУНЦ МГУ, пр. ком., заочн. экз.
Авторы лучших работ будут приглашены на II тур (письменный экзамен),
который состоится в мае 1992 года.*

Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Малый механико-математический факультет — математическая школа при механико-математическом факультете МГУ — объявляет прием учащихся, оканчивающих восьмые классы одиннадцатилетней общеобразовательной школы, на заочное отделение. Зачисление на Малый мехмат производится по результатам решения задач вступительной работы, опубликованной ниже.

Основной задачей Малого механико-математического факультета (МММФ) является приобщение к математике, углубление знаний в рамках школьной программы, а также расширение математического кругозора учащихся.

Занятия на заочном отделении начинаются в октябре. Обучение на малом мехмате бесплатное. Успешно выполнившие все задания получают удостоверение об окончании МММФ.

Преподавателями на заочном отделении МММФ работают аспиранты и студенты механико-математического факультета. Разработку тематических брошюр осуществляет методический совет МММФ, состоящий из профессоров и преподавателей механико-математического факультета.

Желающие поступить на Малый мехмат должны не позднее 1 мая 1992 года выслать в адрес МММФ решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все предложенные задачи). Учащиеся, успешно закончившие 9-й или 10-й классы, рекомендуются для поступления в физико-математическую школу-интернат при МГУ.

Работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. На обложку тетради наклейте тетрадный лист бумаги со следующими данными:

1) республика, край, область;

2) фамилия, имя учащегося;

3) школа и класс (полное название);

4) полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения);

5) фамилия, имя, отчество родителей, место их работы и должность.

В работу вложите листок бумаги 4×6 см^2, на котором напишите полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения) и пришлите по адресу: *119899, Москва, МГУ, Малый мехмат.*

Примечание: для школьников 8—11 классов Москвы и ближнего Подмосковья работает вечернее отделение МММФ. Справки по тел. 939-39-43.

Вступительное задание

1. В некотором городе каждый десятый математик — музыкант, а каждый одиннадцатый музыкант — математик. Кого в городе больше — музыкантов или математиков?

2. Могут ли биссектрисы двух углов треугольника быть взаимно перпендикулярными?

3. Решите уравнение

$$x(x+1)(x^2+x+1)=6.$$

4. Изобразите на координатной плоскости xOy линию, заданную уравнением

$$|x-y|+|x+y|=2.$$

Определите длину этой линии.

5. Докажите, что при всех значениях a и b справедливо неравенство

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2}\leqslant\frac{a^4+b^4}{2}.$$

6. Пусть P — периметр выпуклого четырехугольника, а L — сумма длин его диагоналей. Докажите, что а) $P<2L$; б) $P>L$.

7. Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению

$$xy=x+y+22.$$

8. В вашем распоряжении имеется ржавый циркуль неизменного раствора r. Пользуясь только этим циркулем, по заданным точкам A и B ($AB<2r$) постройте на луче AB такую точку C, что $AC=2AB$ (опишите процесс построения и дайте его обоснование).

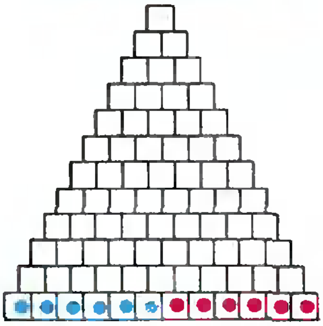
9. Шестизначное число делится на 7. Его первую цифру стерли, а затем записали ее позади последней цифры числа. Докажите, что вновь получившееся шестизначное число тоже делится на 7.

10. В клетках таблицы $n\times n$ расставлены числа 1 или −1 так, что каждое из них равно произведению всех чисел, стоящих в соседних клетках (соседними называем клетки, имеющие общую сторону). Может ли в этой таблице хотя бы один раз встретиться число −1 при а) $n=5$; б) $n=7$?

Поправка

В условии задачи 3 для девятого класса заочного вступительного экзамена в ФМШ МГУ и ФМШ НГУ («Квант» № 12, 1991 г.) допущена опечатка. Дроби, которые нужно сравнить, должны выглядеть так: $\frac{a+c}{b+d}$ и $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)$. Редакция приносит читателям свои извинения.

Пирамида



На четвертой странице обложки предыдущего номера журнала была помещена следующая игра. На нижнюю строку пирамиды (см. рисунок) выставляются фишки двух цветов. Игроки ходят по очереди. Возможны три типа ходов.

Вертикальный ход. Его может совершить лишь фишка нижнего ряда, перейдя на одну из двух соседних клеток верхнего ряда.

Горизонтальный ход. Фишка может перемещаться по своему ряду на любое число свободных клеток.

Дополнительное продвижение. В процессе игры три фишки могут занять положение «треугольником» (две снизу, одна сверху). Хозяин верхней фишки после очередного хода или вместо него может ее передвинуть на соседнюю клетку следующего ряда.

Побеждает тот, кто первым достигнет вершины *пирамиды*.

Наш автор из Минска И. Акулич, проанализировав эту игру, пришел к выводу, что при наилучшей игре партнеров игра закончится... вничью.

Докажем это. Сначала пронумеруем горизонтальные ряды снизу вверх, а клетки каждого ряда — слева направо. Таким образом, каждой клетке игрового поля поставлено в соответствие два числа: номер ряда и номер клетки в ряду.

Пусть в начальной позиции начинающий занимает левые шесть клеток нижнего ряда, т. е. клетки с (1,1) по (1,6), а второй игрок — остальные клетки нижнего ряда, т. е. с (1,7) по (1,12). Покажем, как должен играть начинающий, чтобы не проиграть. Первым ходом он передвигает фишку с поля (1,5) на поле (2,5), а затем все время переставляет одну и ту же фишку с клетки (1,4) на клетку (1,5) и обратно, предоставляя второму полную свободу добираться до вершины.

Поскольку для «пересылки» фишки в третий и более высокие ряды ей необходима «подпорка» из двух фишек, у второго игрока просто *не хватит фишек* для достижения вершины.

Действительно, всем фишкам нижнего ряда разрешается сразу переходить во второй ряд. Таким образом, второй игрок сможет переправить все свои шесть фишек во второй ряд. Но в третий ряд он сможет переслать только пять фишек, поскольку, если допустить, что он переслал в третий ряд все шесть фишек, то для пересылки последней из них он должен был использовать в качестве «подпорки» в первом ряду две фишки соперника. Однако для него доступна лишь одна из них, а именно (1,6), а доступ к остальным перекрывает фишка (2,5). Правда, последняя фишка, перейдя из первого ряда во второй и заняв поле (2,6), сможет служить «подпоркой» для пересылки фишек третьего ряда в четвертый, совместно с *«вражеской» фишкой* (2,5). В четвертый ряд, таким образом, можно переслать все пять фишек из третьего ряда. А вот из четвертого в пятый — только три из них, поскольку две фишки должны остаться в четвертом ряду в роли «подпорок». Рассуждая таким же образом, можно увидеть, что из трех фишек, достигших пятого ряда, лишь одна дойдет до седьмого, а две остальные — лишь до шестого (в этом им поможет «подпорка» из двух фишек, задержавшихся в четвертом ряду). Но тогда единственная фишка, достигшая седьмого ряда, может переместиться лишь в восьмой ряд, использовав в качестве «подпорки» две фишки, задержавшиеся в шестом ряду. И не выше!

Итак, второй игрок не сможет подняться выше восьмого ряда, а следовательно — победить.

Беспроигрышная стратегия для второго игрока аналогична. Он должен независимо от первого хода начинающего сделать ответный ход (1,8)—(2,7), а затем гонять фишку с поля (1,9) на поле (1,8) и обратно. При этом начинающий вершины не достигнет.

Игра, однако, приобретает интерес, если для достижения победы достаточно подняться в восьмой ряд. Тут уж не отсидишься! Трудно сказать, для кого такая игра является выигрышной. Попробуйте-ка разобраться.

ДОЛЛАР ДЖОНА ДЖОНСА

(фантастический рассказ)

Г. КИЛЕР

Двести первого дня 3221 года профессор истории Университета Терры уселся поудобнее перед визафоном и приготовился прочитать свою ежедневную лекцию слушателям, находившимся в самых удаленных уголках Земли.

Устройство, перед которым восседал профессор, по виду напоминало гигантский оконный переплет. Оно состояло из трех или четырех сотен матовых квадратных экранов. Прямо по центру экранов не было: там располагался продолговатый темный участок, ограниченный снизу небольшим выступом. На выступе лежал кусочек мела. Сверху свисал большой бронзовый цилиндр. Именно в него нужно было говорить во время лекции.

Прежде чем нажать на кнопку и дать сигнал своим слушателям собраться у местных визафонов, профессор достал из кармана крохотный приборчик и приложил его к уху. Легкое нажатие рычажка на крышке — и комнату огласил громкий металлический голос, казалось исходивший откуда-то из пространства и монотонно повторявший: «Пятнадцать часов одна минута... пятнадцать часов одна минута... пятнадцать часов одна минута...» Быстрым движением профессор сунул миниатюрный приборчик в карман жилета и нажал кнопку на боковой поверхности визафона.

Как бы в ответ один за другим вспыхнули матовые экраны, и на них появились лица и плечи молодых людей весьма странного вида: с огромными крутыми лбами, совершенно лысых, беззубых, в огромных роговых очках. Один экран по-прежнему оставался пустым. Профессор слегка нахмурился, но, видя, что все остальные экраны засветились, начал свою лекцию:

— Рад, что вы все собрались у своих визафонов. Тема моей сегодняшней лекции представляет интерес не столько для историка, сколько для экономиста. В отличие от наших прошлых встреч речь пойдет не об отдельных событиях, разыгравшихся на протяжении нескольких лет, а о грандиозной панораме событий, охватывающей десять веков и завершающейся в 2946 г., то есть примерно триста лет назад. Я расскажу вам о гигантском состоянии, выросшем из одного-единственного доллара, который Джон Джонс на заре цивилизации, или, если быть точным, в 1921 г., то есть тринадцать веков назад, положил в банк...

Я только что упомянул доллар Джона Джонса. Некоторые из вас, особенно те, кто лишь недавно записался на курс по истории, несомненно, спрашивает себя: «Кто такой Джон Джонс? И что такое доллар?»

— В те далекие времена, когда Национальное евгеническое общество еще не разработало существующей ныне научной регистрации людей, человеку приходилось обходиться весьма несовершенной системой номенклатуры, изобиловавшей повторами и не позволявшей точно идентифицировать личность. При этой системе Джонов Джонсов было бы больше, чем калорий в британской единице теплоты. Но я имею в виду вполне определенного Джона Джонса, жившего в двадцатом веке. О нем и пойдет речь в сегодняшней лекции. О жизни Джона Джонса мы знаем немного. Известно лишь, что он был непримиримым врагом частной собственности и ратовал за создание общества всеобщего процветания.

Теперь о долларе. В наши дни, когда за истинное мерило ценности принят психоэрг, представляющий собой комбинацию одного психа — единицы эстетического удовлетворения и одного эрга — единицы механической энергии, трудно представить себе, что в двадцатом веке из рук в руки в обмен на жизненные блага переходил небольшой металлический диск, который и назывался долларом.

Тем не менее дело обстояло именно так. В обмен на эти самые доллары человек расходовал свою умственную или физическую энергию. Получив доллары, он тратил их на приобретение пищи и крова, на одежду, развлечения и оплату операции по удалению червеобразного отростка.

Многие имели обыкновение класть доллары в специальные хранилища, которые назывались банками. Банки в свою оче-

---

Рассказ перепечатывается из сборника научно-фантастических рассказов «Неувязка со временем» (М.: Наука, 1991).

редь вкладывали доллары в займы и коммерческие предприятия. Каждый раз, когда Земля пересекала эклиптику, банки взимали со своих клиентов либо наличными, либо по безналичному расчету шесть процентов от первоначальной суммы займа. Тем же, кто оставлял им свои доллары на хранение банки начисляли три процента за право временного пользования этими металлическими дисками. Ежегодная надбавка называлась «годовыми». Говорили: «Банк выплачивает три процента годовых».

Банк не мог гарантировать вкладчику абсолютную сохранность долларов, отданных на хранение. Время от времени служащие банка, прихватив с собой чужие доллары, пускались в бега и скрывались в малонаселенных и труднодоступных уголках Земли. Случалось также, что группы кочевников, которых тогда называли «громилами», посещали банки, силой открывали бронированные сейфы и удалялись, унося с собой их содержимое.

Но вернемся к теме нашей лекции. В 1921 г. один из многочисленных Джонов Джонсов совершил явно непоследовательный акт, вписавший его имя в историю. Что он сделал?

Он обратился в один из банков, носивший название «Первого национального банка Чикаго», и отдал на хранение один металлический диск — серебряный доллар, открыв счет на имя некоего лица. Этим лицом был не кто иной, как сороковой потомок Джона Джонса. В специальном документе (который назывался завещанием), также оставленном на хранение в банке, Джон Джонс оговорил, что право наследования передается старшему ребенку в каждом поколении его потомков.

Банк согласился с условиями Джона Джонса и принял доллар на хранение. Было оговорено также, что банк будет присоединять три процента годовых к вкладу. Это означало, что к концу каждого года банк увеличивал сумму, числившуюся на счету у сорокового потомка Джона Джонса, на три сотых по сравнению с началом года.

О самом Джоне Джонсе до нас дошли весьма скудные сведения. Известно только, что через 10 лет, в 1931 г., он умер, оставив после себя несколько детей.

Те из вас, кто слушает курс математики у профессора Л123М72421муж из Университета Марса, должно быть, помнят, что любое число x, если его периодически увеличивать на величину, составляющую p-ю долю его текущего значения, после n циклов станет равным $x(1+p)^n$.

В нашем случае x равен одному доллару, p — трем сотым, а n — числу лет, в течение которых вклад хранится в банке. В своей лекции я приведу несложные расчеты, а те, кто сегодня в форме, могут производить их в уме.

К моменту смерти Джона Джонса на счету его сорокового потомка была следующая сумма.

Профессор подошел к продолговатому темному участку визафона и быстро написал мелом:

1931 г. через 10 лет 1,34 $.

— Волнистый иероглиф справа,— пояснил он,— это идеограмма, изображающая доллар.

— Итак, время шло, как идет только время. Прошло сто лет. Первый национальный банк еще существовал, а то, что некогда называлось Чикаго, превратилось в величайший населенный пункт на Земле. К этому времени на счету у сорокового потомка Джона Джонса было...

Профессор добавил еще одну строку:

2021 г. через 100 лет 19,10 $.

— На протяжении следующего столетия в образе жизни людей произошло множество мелких изменений, но все сильнее раздавались голоса тех, кто ратовал за отмену частной собственности. Первый национальный банк еще принимал вклады на хранение, и доллар Джона Джонса продолжал расти. Имея в запасе тридцать четыре грядущих поколения, счет в банке выглядел теперь так:

2121 г. через 200 лет 346 $.

К концу следующего столетия на счету сорокового потомка Джона Джонса уже была довольно внушительная по тем временам сумма:

2221 г. через 300 лет 6920 $.

В следующем столетии произошло весьма важное событие. Я имею в виду 2299 г., когда каждый человек на земном шаре был зарегистрирован под цифровым кодом в центральном бюро Национального евгенического общества.

Противники частной собственности по-прежнему взывали к ее отмене, но Первый национальный банк в Чикаго к тому времени превратился в первый Международный банк Земли. А как вырос доллар Джона Джонса? Изучим состояние счета в исторический 2299 г. накануне четырехсотлетия со дня его открытия:

2299 г. через 378 лет 68 900 $.
2321 г. через 400 лет 132 000 $.

Вы видите, что вклад Джона Джонса значительно приумножился, но еще не достиг тех размеров, которые позволяли бы говорить о необычайном богатстве. На Земле в те времена существовали гораздо более внушительные состояния. Например, потомок человека, некогда носившего имя Джона Д. Рокфеллера, обладал несравненно большим богатством, но, переходя от поколения к поколению, оно дробилось и таяло. Итак, перенесемся еще на одно столетие. К концу его на счету было:

2421 г. через 500 лет 2 520 000 $.

Во времена Джона Джонса на Земле жил человек, один из тех, кого называли учеными, по имени Илья Мечников. Из древних египетских папирусов и книг, хранящихся в собрании библиотеки Карнеги, мы знаем, что Мечников выдвинул гипотезу о том, что старение, или, точнее, одряхление, вызывается особыми бактериями-палочками. Впоследствие его гипотеза подтвердилась. Но насколько правильных взглядов Мечников придерживался относительно этиологии дряхления, настолько глубоко он заблуждался относительно терапии этого недуга.

Он предложил, друзья мои, бороться с бактерией и убивать ее продуктом брожения секрета молочных желез ныне вымершего животного под названием «корова», муляж которого вы в любое время можете увидеть в музее Солнечной системы.

Из бронзового цилиндра донесся дружный смех и возгласы удивления. Профессор подождал, пока утихнет приступ веселья, и продолжал с серьезным видом:

— Прошу вам, друзья мои, не улыбаться. Это — лишь один из странных и причудливых предрассудков, существовавших в те далекие времена.

Много позже, в двадцать пятом веке, проблемой дряхления занялся профессор К122В62411муж. Он не стал стратить свое драгоценное время на эксперименты с продуктом брожения секрета молочных желез коровы. Профессор К122В622411муж обнаружил, что открытые в незапамятные времена рентгеновские лучи, которые, как вы, физики, помните, не отклоняются в магнитном поле, в действительности представляют собой смесь двух разновидностей лучей, которые он назвал е-лучами и ж-лучами. Последние лучи в чистом виде были смертельны для бактерий-палочек, оставаясь в то же время совершенно безвредными для клеток человеческого организма. Как вы, должно быть, знаете, открытие профессора К122В62411муж привело к весьма важным последствиям, ибо позволило увеличить продолжительность человеческой жизни до двухсот лет. Этот век, говорю вам без обиняков, стал переломным в жизни всего человечества.

Но я рассказывал вам о событии, может быть, не столь важном, но, несомненно, более интересном. Я имею в виду вклад, завещанный Джоном Джонсом своему сороковому потомку. К тому времени, о котором сейчас пойдет речь, один доллар вырос в гигантскую сумму. Капитал, предназначавшийся потомку Джона Джонса, достиг таких размеров, что был учрежден специальный банк и назначен специальный совет директоров, в обязанность которым вменялось следить за разумным помещением всего несметного богатства. Следующая выписка из счета убедит вас, что в моих словах нет преувеличения:

2521 г. через 600 лет 47 900 000 $.

В 2621 г. в истории человечества произошли два события первостепенного значения. Вряд ли среди вас найдется человек, которому не приходилось бы слышать об открытии профессора Р222Д29333муж. Он обнаружил, что направление силы тяжести изменяется на обратное, если тело колеблется в направлении, перпендикулярном плоскости эклиптики, с частотой, равной четному кратному натурального логарифма числа 2. Тотчас же были построены вибрационные корабли, и люди получили возможность летать на любую планету. Открытие профессора Р222Д29333муж проложило землянам дорогу к семи новым мирам: Меркурию, Венере, Марсу, Юпитеру, Сатурну, Урану и Нептуну. Последовал подлинный земельный бум, и тысячи бедняков обрели желанное богатство.

Но земля, которая прежде была одним из главных источников благосостояния, вскоре утратила всякую ценность и стала пригодна разве что для игры в гольф. Причиной тому было второе научное открытие.

По существу, друзья мои, это было даже не открытие, а усовершенствование химического процесса, известного с незапамятных времен. Я имею в виду постройку на всех планетах огромных дезинтеграционных фабрик, на которые воздушным экспрессом доставлялись тела умерших обитателей соответствующей планеты. Процесс этот широко используется и поныне, поэтому вы все знаете, как он проводится. Под действием тепла тела умерших разлагаются на элементы: водород, кислород, азот, углерод, кальций, фосфор и т. д. Эти элементы поступают в специальные резервуары, хранятся там, и по мере надобности из них синтезируются пищевые таблетки для тех из нас, кто еще жив. Тем самым создается нескончаемая цепь от мертвого к живому. Нужно ли говорить, что необходимость в земледелии и животноводстве отпала, так как продовольственная проблема, над решением которой с незапамятных времен билось человечество, была решена раз и навсегда. Второе открытие привело к двум важным последствиям. Во-первых, как я уже говорил, резко упали сильно вздутые цены на землю, так как отпала необходимость возделывать ее. Во-вторых, люди обрели наконец досуг, позволивший им заняться наукой и искусством.

Что же касается доллара Джона Джонса, то, многократно приумноженный, он контролировал теперь бесчисленные предприятия и огромные пространства на Земле. Да и не удивительно, ибо банковский счет теперь выглядел так:

2621 г.   через 700 лет   912 000 000 $.

Без преувеличения можно сказать, что это было величайшее частное состояние на земном шаре, и в 2621 г. ему еще предстояло расти тринадцать поколений, прежде чем появится сороковой потомок Джона Джонса.

Но продолжим нашу лекцию. В 2721 г. в сенате и палате представителей парламента Солечной системы завершилась важная политическая баталия. Я имею в виду острые дебаты по поводу того, представляет ли земная Луна достаточно серьезную помеху для космической навигации, чтобы ее следовало уничтожить. Большинством голосов было принято решение избавиться от естественного спутника Земли. Участь Луны была решена.

Прошу прощения, мои юные друзья! Я как-то упустил из виду, что в вопросах истории вы осведомлены не столь хорошо, как я сам. Рассказывая вам о Луне, я совсем забыл, что многие из вас не знают, что это такое. Настоятельно советую тем из вас, кто еще не был в музее Солнечной системы на Юпитере, побывать там как-нибудь в воскресенье. Поезда межпланетной линии отправляются через каждые полчаса. Вы увидите там действующую модель некогда существовавшего спутника Земли, который до того, как его разрушили, освещал по ночам Землю, отражая солнечный свет своей неровной поверхностью.

После того как парламент счел нежелательным оставлять Луну там, где она всегда находилась, инженеры приступили к демонтажу ночного светила. Они откалывали от Луны часть за частью и отправляли осколки межпланетными грузовыми кораблями на Землю. С Земли осколками с помощью специального взрывчатого вещества зоодолита выстреливали в сторону Млечного Пути, придавая им скорость 11 217 м/с. Эта скорость сообщала каждому осколку кинетическую энергию, достаточную для преодоления земного притяжения на всем пути от земной поверхности и до бесконечности. Смею утверждать, что осколки Луны и поныне несутся в межзвездном пространстве.

Когда начались работы по демонтажу Луны, на счету сорокового потомка Джона Джонса числилось

2721 г.   через 800 лет   17 400 000 000 $.

Разумеется, имея в своем распоряжении такую колоссальную сумму, директора фонда Джона Джонса произвели крупные капиталовложения на Марсе и Венере.

В начале двадцать девятого столетия, а точнее, в 2807 г., Луна была полностью раздроблена на куски и разбросана в космическом пространстве. На всю работу по ее демонтажу потребовалось 86 лет. Приведу две выписки из счета сорокового потомка Джона Джонса: в год завершения работ по уничтожению Луны, незадолго до девятисотлетия со дня основания фонда, и по истечении 900 лет:

2807 г. через 886 лет 219 000 000 000 $.
2821 г. через 900 лет 332 000 000 000 $.

В этих скупых строках заложен простой и глубокий смысл: к 2807 г. будущий потомок Джона Джонса был практически владельцем всей недвижимости на Земле, Марсе и Венере — за исключением территории университетского городка на каждой планете. Эта территория была собственностью университета.

А теперь я попрошу вас последовать за мной и перенестись в 2906 г. В этом году директора фонда Джона Джонса оказались перед неразрешимой проблемой. Согласно завещанию Джона Джонса, оставленному в 1921 г., банк должен был выплачивать три процента годовых. В 2900 г. был жив тридцать девятый потомок Джона Джонса по имени Дж664М42721муж. Ему тогда исполнилось тридцать лет, и он собирался жениться на девушке по имени Т246М42652жен.

Вы, конечно, хотели бы знать с какой проблемой столкнулись директора фонда? А вот с какой.

Произведя тщательную инвентаризацию и оценку недвижимого имущества и всех богатств на Нептуне, Уране, Сатурне, Юпитере, Марсе, Венере и Меркурии, а также на Земле и точный подсчет стоимости энергии, оставшейся в Солнце, по весьма умеренной цене за калорию, директора обнаружили, что полная стоимость Солнечной системы составляет 630 952 524 136 215 $.

Как показывает простой расчет, если мистер Дж664М42721муж женится на мисс Т246М42652жен и у них в браке родится ребенок, то в 2921 г. по прошествии тысячи лет с того дня, когда Джон Джонс открыл в банке счет на 1 доллар, этот ребенок будет владеть состоянием:

2921 г.   1000 лет   6 310 000 000 000 $.

Нетрудно видеть, что дефицит составил бы 47 475 867 385 $. Банк просто не смог бы выплатить сороковому потомку Джона Джонса то, что ему причиталось.

Члены правления банка были в панике. Высказывались самые фантастические проекты. Например, предлагалось отправить экспедиционный корпус к ближайшей звезде с целью захвата какой-нибудь другой солнечной системы и восполнения дефицита за счет распродажи новых территорий. Но этот проект был отклонен, ибо на осуществление его потребовалось бы слишком много лет.

Перед мысленным взором несчастных директоров фонда Джона Джонса живо вставали картины нескончаемых судебных тяжб и разбирательств, но буквально накануне величайшего из судебных процессов, который когда-либо знала история, произошло нечто такое, что в корне изменило дальнейший ход событий.

Профессор извлек из жилетного кармашка миниатюрный приборчик, приложил его к уху и нажал рычажок.

— Пятнадцать часов пятьдесят две минуты... пятнадцать часов пятьдесят две минуты... пят...

Профессор сунул приборчик в карман и продолжал:

— К сожалению, я должен закончить лекцию. В шестнадцать часов у меня назначена встреча с профессором С122Б24999муж из университета Сатурна. Итак, на чем мы остановились? Ах, да! Я говорил о небывалом судебном процессе, который грозил директорам фонда Джона Джонса.

Так вот, этот самый мистер Дж664М42721муж, тридцать девятый потомок Джона Джонса, поссорился с мисс Т246М42652жен. Их ссора свела к нулю надежды на брак между ними. Никто не хотел уступать другому. Он так и не женился, она так и не вышла замуж. В 2946 г. мистер Дж664М42721муж, прожив всю жизнь холостяком и не оставив после себя детей, умер.

Солнечная система не перешла в частные руки. Немедленно вмешалось межпланетное правительство и объявило об отчуждении фонда Джона Джонса в пользу государства. Немедленно упразднилась частная собственность. В мгновение ока мы достигли всеобщего благоденствия.

Лекция окончена. Все свободны.

Один за другим лица слушателей исчезали с экранов визафона.

Профессор остался сидеть в кресле, размышляя о чем-то.

— Удивительный человек был этот Джон Джонс Первый,— задумчиво проговорил он наконец.— Какая сила предвидения! Какой ум! В особенности если учесть, что жил он в двадцатом веке, когда кругом царило невежество. Но как близка была его тщательно продуманная схема к полному краху. Что было бы с милым его сердцу обществом всеобщего процветания, если бы сороковой наследник Джона Джонса все-таки появился на свет?

Варианты вступительных экзаменов

Московский физико-технический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sqrt{5\,\mathrm{tg}\,x+10}=\frac{5}{2}\sin x+\frac{1}{\cos x}.$$

2. Найдите все значения параметра a, при которых расстояние между корнями уравнения

$$2\log_a x+3\log_{ax^2}a+5=0$$

меньше 6/25.

3. В равнобедренный треугольник ABC ($AB=BC$) вписана окружность. Прямая, параллельная стороне AB и касающаяся окружности, пересекает сторону AC в точке M такой, что $MC=\frac{2}{5}AC$. Найдите радиус окружности, если периметр треугольника ABC равен 20.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}(4x+y)(z+1)+4z=0,\\ xy+y-x=-1,\\ xy-zy+2z=1+x.\end{cases}$$

5. Сфера, вписанная в треугольную пирамиду $KLMN$, касается одной из граней пирамиды в центре вписанной в эту грань окружности. Найдите объем пирамиды, если

$$MK=\frac{5}{4},\quad \angle NMK=\frac{\pi}{2},$$
$$\angle KML=3\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3},$$
$$\angle NML=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}.$$

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\log_2(3-2x)\cdot\log_x(3-2x)=\log_2(3-2x)+\log_2 x^2.$$

2. Отрезок AD является биссектрисой прямоугольного треугольника ABC ($\angle C=90^\circ$). Окружность радиусом $\sqrt{15}$ проходит через точки A, C, D и пересекает сторону AB в точке E так, что $AE:AB=3:5$. Найдите площадь треугольника ABC.

3. Числа

$$-\sin x,\ 4\sin x\,\mathrm{ctg}\,2x,\ \cos x$$

являются членами арифметической прогрессии с номерами k, $k+1$, $k+2$ соответственно. Найдите все значения x и k, если седьмой член этой прогрессии равен 1/5.

4. На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x;\ y)$ которых удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{xy}{15}}\geqslant y-2x,\\ \dfrac{x-25}{x^2+y^2-625}>\dfrac{1}{26}.\end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите ее площадь.

5. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ основанием является трапеция $ABCD$ ($BC\parallel AD$), $BC=\frac{4}{5}AD$, $\angle ASD=\angle CDS=\frac{\pi}{2}$. Все вершины пирамиды лежат на окружностях оснований цилиндра, высота которого равна 2, а радиус основания равен 5/3. Найдите объем пирамиды.

Вариант 3

1. Решите неравенство

$$x\cdot 3^{\log_{1/9}(16x^4-8x^2+1)}<\frac{1}{3}.$$

2. При каких значениях параметра a вершина параболы

$$y(x)=x^2-(2\sqrt{5}\cos a-3)x-\frac{25}{4}\cos 4a$$

лежит на прямой $y=3x$, причем парабола пересекает ось OY в точке с отрицательной ординатой?

3. На диагонали BD прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle D=90^\circ$, $BC\parallel AD$) взята точка Q так, что $BQ:QD=1:3$. Окружность с центром в точке Q касается прямой AD и пересекает прямую BC в точках P и M. Найдите длину стороны AB, если $BC=9$, $AD=8$, $PM=4$.

4. На координатной плоскости рассматривается фигура Φ, состоящая из всех точек, координаты $(a;\ b)$ которых таковы, что система уравнений

$$\begin{cases}ax+(b-4)y=2,\\ (a-4)x+by=3,\\ bx-(a+6)y=3\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Изобразите фигуру Ф и составьте уравнения всех прямых, каждая из которых проходит через точку (0; 7) и имеет с фигурой Ф единственную общую точку.

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$ с острым углом при вершине A. Высота ромба равна 4, точка пересечения его диагоналей является ортогональной проекцией вершины S на плоскость основания. Сфера радиуса 2 касается плоскостей всех граней пирамиды. Найдите объем пирамиды, если расстояние от центра сферы до прямой AC равно $\frac{2\sqrt{2}}{3}AB$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Сани с седоком и собакой общей массой M съезжают с постоянной скоростью v_0 с горы (рис. 1), имеющей уклон α ($\cos\alpha = 6/7$). Собака массой m спрыгивает с саней по ходу их движения и приземляется со скоростью, равной v и направленной под углом β ($\cos\beta = 3/7$) к горизонту. Сани после этого продолжают двигаться по горе вниз. Найдите скорость саней с седоком после прыжка собаки.

2. Резиновый шарик массой $m = 2$ г надувается гелием при температуре $t = 17$ °С. При достижении в шарике давления $p = 1{,}1$ атм он лопается. Какая масса гелия была в шарике, если перед тем, как лопнуть, он имел сферическую форму? Известно, что резиновая пленка рвется при толщине $\delta = 2\cdot10^{-3}$ см. Плотность резины $\rho = 1{,}1$ г/см^3, молярная масса гелия $M = 4$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

3. В схеме, изображенной на рисунке 2, в начальный момент времени ключи K_1 и K_2 разомкнуты, а конденсатор большой емкости C не заряжен. Через некоторое время после замыкания ключа K_1 амперметр А показывает силу тока $I = 1$ мкА. В этот момент замыкают ключ K_2. Какую силу тока покажет амперметр сразу после замыкания ключа K_2, если известно, что $R_2 = 2R_1 = 10^8$ Ом, а ЭДС батареи $\mathcal{E} = 100$ В? Внутренними сопротивлениями амперметра и батареи пренебречь.

4. Интерферометр Рэлея используется для точного измерения показателя преломления газов. Для этого на пути одного из интерферирующих лучей ставится кювета $Г$ прямоугольной формы и длины $L = 10$ см с исследуемым газом, а на пути другого — компенсатор K, с помощью которого добиваются, чтобы в центре плоскости наблюдения P разность хода между лучами равнялась нулю (рис. 3). Чему равен показатель преломления газообразного азота, если после замены в кювете воздуха на азот интерференционная картина сместилась ровно на одну полосу в сторону, соответствующую увеличению показателя преломления? Показатель преломления воздуха $n_в = 1{,}000292$. Измерения проводились на длине волны света $\lambda = 500$ нм.

Вариант 2

1. Тележка и ящик с равными массами удерживаются упором A на наклоненной под углом α ($\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}4$) к горизонту поверхности горки (рис. 4). Упор убирают, и ящик с тележкой приходят в движение. Во сколько раз при этом уменьшается сила давления тележки на ящик? Коэффициент трения скольжения между ящиком и поверхностью горки $\mu = 0{,}2$. Соприкасающиеся поверхности стенок ящика и тележки считайте гладкими и расположенными перпендикулярно поверхности горки.

2. В цилиндре под поршнем находится смесь ν молей жидкости и ν молей ее

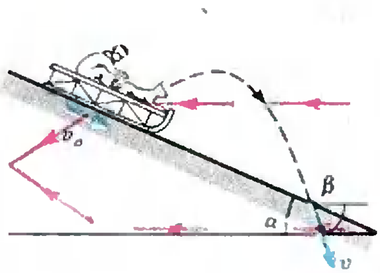


Рис. 1.

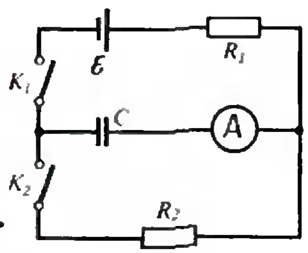


Рис. 2.

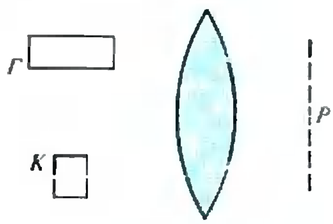


Рис. 3.

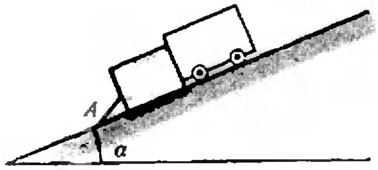


Рис. 4.

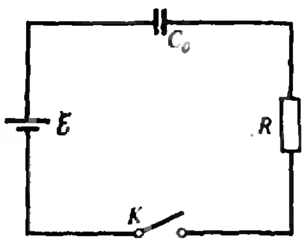


Рис. 5.

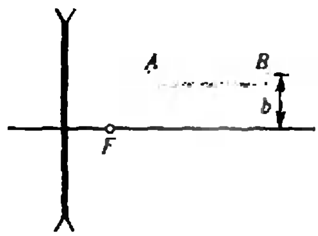


Рис. 6.

насыщенного пара при температуре T_0. При медленном изобарическом нагреве содержимого цилиндра к нему подвели количество теплоты Q, и температура внутри цилиндра увеличилась на ΔT. Найдите изменение внутренней энергии содержимого цилиндра. Объемом жидкости можно пренебречь.

3. В схеме, изображенной на рисунке 5, после замыкания ключа K через некоторое время τ устанавливается стационарный режим. Какая мощность будет выделяться в резисторе сопротивлением R, если начать изменять емкость конденсатора по закону $C(t)=C_0(1+A\sin\omega t)$, $A<1$? Рассмотрите случай медленных изменений емкости, т. е. когда $2\pi/\omega \gg \tau$. Параметры $\mathscr{E}$, C_0, R, A, ω считайте заданными. Внутренним сопротивлением батареи можно пренебречь.

4. Булавка расположена на прямой, параллельной главной оптической оси тонкой отрицательной линзы, так, что ее ближний конец A находится на расстоянии $d=19$ мм от плоскости линзы (рис. 6). Расстояние между главной оптической осью линзы и булавкой $b=8$ мм. Известно, что длина изображения булавки в линзе в 8 раз меньше длины самой булавки. Найдите длину булавки, если фокусное расстояние линзы $F=15$ мм.

Вариант 3*)

1. После разрыва неподвижного снаряда образовалось четыре осколка. Осколок массой $m_1=4$ кг полетел вертикально вниз со скоростью $v_1=150$ м/с, массой $m_2=3$ кг — горизонтально на юг со скоростью $v_2=100$ м/с, массой $m_3=1$ кг — горизонтально на восток. Осколок массой $m_4=3{,}5$ кг полетел со скоростью $v_4=200$ м/с. Найдите скорость третьего осколка.

*) Этот вариант предлагался в марте 1991 года на очном зачете в Заочной физико-технической школе при МФТИ.

2. Моль идеального одноатомного газа расширяется сначала в изобарическом процессе, а затем в процессе с линейной зависимостью давления от объема (рис. 7). Известно, что $V_2/V_1=V_3/V_2$, а прямая 2—3 проходит через начало координат. Найдите отношение объемов V_2/V_1, если количество теплоты Q_{12}, подведенное к газу на участке 1—2, в четыре раза меньше работы A_{23}, совершенной газом на участке 2—3.

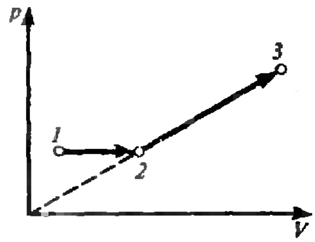


Рис. 7.

3. Через два последовательно соединенных проводника с одинаковыми сечениями S, но разными удельными сопротивлениями ρ_1 и ρ_2 ($\rho_2>\rho_1$) течет ток I (рис. 8). Определите знак и величину поверхностной плотности заряда, возникающего на границе раздела проводников.

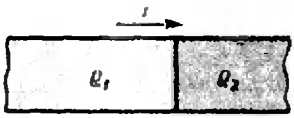


Рис. 8.

4. На тонкую рассеивающую линзу падает луч под углом $\alpha=8^\circ$ ($\operatorname{tg}\alpha=0{,}14$) к главной оптической оси, пересекая ее на расстоянии $a=4$ см от плоскости линзы. Найдите фокусное расстояние линзы, если преломленный линзой луч идет под углом $\beta=12^\circ$ ($\operatorname{tg}\beta=0{,}21$) к главной оптической оси.

Публикацию подготовили
В. Дерябкин, С. Самарова

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$1+\frac{3}{x-a-1}=\frac{5a+5}{(x-a-1)(x-2)}.$$

2. Найдите множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\log_{|x+1|-2|x-1|+6} y >$$
$$> \log_{|x+1|-2|x-1|+6}(x+4).$$

3. Решите уравнение

$$\sin x - 2\sin 2x + \sin 3x =$$
$$= |1-2\cos x + \cos 2x|.$$

4. В правильную четырехугольную пирамиду вписан полушар так, что плоская грань его лежит на основании пирамиды, а шаровая поверхность касается боковых граней пирамиды. Найдите отношение полной поверхности полушара к полной поверхности пирамиды, если боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α.

5. Докажите, что при $a=2$ неравенство

$$9^x+(2a+4)\cdot 3^x+3a+1>0$$

выполняется для любых x. Найдите все другие значения параметра a, при которых неравенство выполняется для любых x.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$1+\frac{5a-3}{x-a}=\frac{5(2a+1)(1-a)}{(x-a)(x-3a+1)}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_3(x^2-4x+3)-\log_3(x^2-10x+9)=$$
$$=-\log_3|5x-3|.$$

3. Решите уравнение

$$(3\cos x-\pi)(2\sin x^2-\operatorname{tg} x^2)=0$$

и найдите сумму его корней, принадлежащих промежутку $[-\pi; 0]$.

4. В основании пирамиды лежит правильный треугольник ABC со стороной 2 см. Грань ACD перпендикулярна основанию, причем $AD=CD=\sqrt{6}$ см. Найти длину ребра BD, а также площади всех тех сечений пирамиды, которые являются квадратами.

5. При каких значениях параметра a неравенство

$$|x+a|<4-x^2$$

имеет хотя бы одно отрицательное решение?

Физика

Задачи устного экзамена

1. С какой высоты надо бросить горизонтально тело, чтобы оно столкнулось в воздухе с другим телом, брошенным под углом $\alpha=60°$ к горизонту с той же начальной скоростью из точки, отстоящей на расстоянии $s=1{,}0$ м по горизонтали от места бросания первого тела?

2. Определите ускорение груза массой m_1, если $m_0=3{,}0$ кг, $m_1=1{,}0$ кг, $m_2=2{,}0$ кг (рис. 1).

3. На клин массой $M=10$ кг положили тело массой $m=1{,}5$ кг на высоте $h=20$ см от горизонтальной поверхности. Угол наклона клина к горизонту $\alpha=30°$. На сколько сдвинется клин, когда тело достигнет горизонтальной плоскости? Трение между клином и горизонтальной плоскостью отсутствует.

4. Один моль идеального газа совершает цикл, изображенный на рисунке 2 в

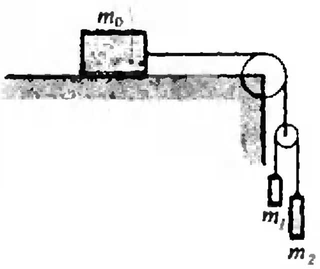


Рис. 1.

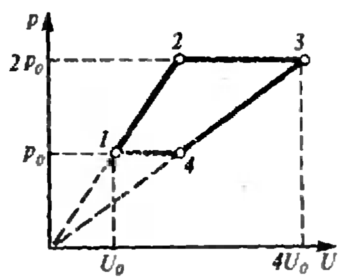


Рис. 2.

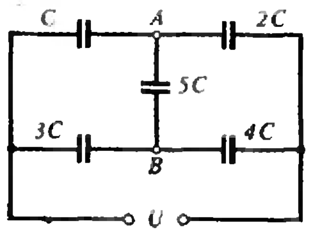


Рис. 3.

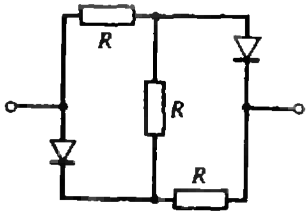


Рис. 4.

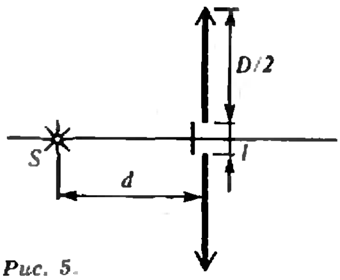


Рис. 5.

координатах p и U, где p — давление, U — внутренняя энергия газа. Определите КПД цикла.

5. Определите относительную влажность воздуха, находившегося в баллоне емкостью $V=83$ л при температуре $t=100$ °С, если до полного насыщения пара понадобилось испарить в этот объем дополнительно $\Delta m=18$ г воды.

6. Определите заряд конденсатора, подключенного между точками A и B, если $U=71$ В, $C=1{,}5$ мкФ (рис. 3).

7. В сеть переменного тока с напряжением $U=220$ В включена схема, состоящая из двух идеальных диодов и трех одинаковых резисторов сопротивлением $R=5{,}0$ кОм каждый (рис. 4). Какая мощность выделяется на резисторах?

8. По кольцу радиусом $R=2{,}5$ см, сделанному из проволоки сечением $S=1{,}5$ мм^2, течет ток $I=2{,}0$ А. Кольцо помещено в однородное магнитное поле с индукцией, равной $B=0{,}1$ Тл и перпендикулярной плоскости кольца. Определите механическое напряжение в кольце.

9. Человек рассматривает зрачок своего глаза в плоском зеркале толщиной $l=1{,}5$ см на расстоянии наилучшего зрения ($d_0=25$ см). На каком расстоянии от зеркала расположен глаз человека? Показатель преломления стекла $n=1{,}5$.

10. Собирающая линза с диаметром $D=5{,}0$ см и фокусным расстоянием $F=50$ см разрезана по диаметру пополам, и половинки раздвинуты на расстояние $l=5{,}0$ мм (рис. 5). Точечный источник света S расположен на расстоянии $d=1{,}0$ м от линзы. На каком расстоянии от линзы можно наблюдать интерференционную картину? Щель между половинками линзы закрыта.

Публикацию подготовили
Г. Ефашкин, В. Тонян

Московский педагогический государственный университет им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Средний годовой процент прироста добычи угля на одной из шахт из года в год остается постоянным. Если годовой процент прироста добычи был бы увеличен на 10,5 %, то через 2 года было бы добыто угля в 1,21 раза больше, чем в обычных условиях. Определите средний годовой процент прироста добычи угля (в обычных условиях).

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}=\frac{\sqrt{6}}{\sin x+\cos x}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{5x-1}2x>\log_{2x}\frac{4x^2}{5x-1}.$$

4. Найдите наибольшее расстояние от точки с координатами (2; 0) до точек графика функции

$$f(x)=\sqrt{12+5x-2x^2}.$$

5. Основание пирамиды $SABCD$ — прямоугольник $ABCD$ со сторонами $a\sqrt{3}$ и a. Ребро SC перпендикулярно к плоскости основания, а ребро SA образует с ней угол α. Вычислите площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной прямой SA и проходящей через BD.

Вариант 2
(математический факультет)

1. В одном сплаве веса золота и серебра относятся как 1:2, а в другом — как 2:3. Сколько граммов каждого сплава нужно взять, чтобы после совместной переплавки получить 95 граммов нового сплава, содержащего 7 частей золота и 12 частей серебра?

2. Решите уравнение

$$1+\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}=2\cos^2 x.$$

3. Решите неравенство

$$\log_x\left(\log_3\left(\frac{x+2}{x-2}\right)\right)<$$

$$<\log_{1/x}\left(\log_{1/3}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)\right).$$

4. Найдите наименьшее расстояние от точки с координатами (—4; 0) до точек графика функции

$$f(x)=|x|\sqrt{4-x}.$$

5. Отрезок прямой, соединяющей центр основания правильной треугольной пирамиды с серединой бокового ребра, равен стороне основания. Найдите угол между смежными боковыми гранями пирамиды.

Вариант 3
(индустриально-педагогический факультет)

1. Вычислите угол между векторами $a=3p+2q$ и $b=p+5q$, где p и q — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

2. Решите уравнение

$$\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x+\sin^2 5x=2.$$

3. Решите неравенство

$$\log_4(x-1)+1\geqslant\log_2 x.$$

4. Постройте график функции $y=-x^4+8x$.

5. Решите неравенство

$$\frac{x^2+4}{x+1}\geqslant 0.$$

Вариант 4
(физический факультет)

1. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $10\sqrt{2}$ см и образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем параллелепипеда, если одна сторона основания больше другой на 2 см.

2. Решите уравнение

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\cos^2 2x+0{,}25.$$

3. Решите неравенство

$$(x^2+x)^2\geqslant 4(x+1)^2.$$

4. Постройте график функции $y=x^3-3x^2$.

5. Решите неравенство

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{4-x}<\left(\frac{5}{2}\right)^{2x+1}.$$

Вариант 5
(химический факультет)

1. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 13 см и 14 см, меньшая его диагональ 17 см, площадь основания 168 см². Определите площадь боковой поверхности.

2. Решите уравнение

$$\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 8x=\frac{1}{4}\sin 12x.$$

3. Решите неравенство

$$\log_3\log_2\log_{0,5}x\geqslant 0.$$

4. Постройте график функции $y=x^4+4x$.

5. Решите нервенство

$$\frac{5-x}{x^2-x-6}<0.$$

Задачи устного экзамена

Математический факультет

1. Вычислите $\operatorname{arctg} 3+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

2. Сравните числа $\sqrt{\log_3 5}$ и $\log_3\sqrt{15}$.

3. Трехзначное число делится на 9. Средняя цифра равна сумме двух крайних цифр. Число сотен вдвое больше числа единиц. Найдите это число.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=\sin^5 x-\sin x.$$

5. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=\frac{x^3+1}{3}$ в точке его пересечения с осью абсцисс.

6. Найдите $\sin 997{,}5°$.

7. Докажите тождество $\cos 36° \cdot \cos 72° = \frac{1}{4}$.

8. Докажите неравенство $\sin x + \cos x < \frac{\pi}{2}$ $(x \in \mathbf{R})$.

9. Докажите неравенство $\log_{49} 5 + \log_{25} 7 > 1$.

10. Постройте график функции

$$y = x^{\log_x (8x^3 - 1)}.$$

Факультет начальных классов

1. Решите уравнение $\sin^2 x - \sin 2x = 3 \cos^2 x$.

2. Решите уравнение $\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$.

3. Решите уравнение $x \cdot 3^{\log_x 3} = 9$.

4. Решите неравенство $\frac{1}{2} > \frac{1}{|x-1| - 3}$.

5. Решите неравенство $\log_5 \sqrt{x} - 2 \log_{25} x > 2$.

6. Решите неравенство $27^{-2/3} < \sqrt[4]{9^{3x-1}}$.

7. Постройте равнобедренный треугольник по высоте и углу при вершине.

8. Основания трапеции 4 см и 10 см, одна из боковых сторон составляет с меньшим основанием угол 150°. Найдите эту боковую сторону, если площадь трапеции равна 21 см^2.

9. Постройте график функции $y = \frac{\sin 2x}{\cos x}$.

10. Постройте график функции $y = x^2 + 2|x| + 1$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Два связанных между собой бруска, массы которых $m_1 = 0{,}5$ кг и $m_2 = 0{,}3$ кг, движутся по горизонтальной поверхности под действием горизонтальной силы $F = 4$ Н, приложенной ко второму бруску. Каково ускорение брусков? Какова сила натяжения связывающей их нити? Коэффициент трения $\mu = 0{,}1$.

2. Маятник массой $m = 0{,}3$ кг отклоняют от вертикали на угол $\alpha = 90°$ и отпускают. Найдите силу натяжения нити при прохождении маятником положения равновесия.

3. Снаряд массой $m = 6$ кг, летевший горизонтально со скоростью $v = 130$ м/с, попал в неподвижную тележку с песком и застрял в песке, в результате чего тележка приобрела скорость $u = 10$ м/с. Какова масса тележки с песком?

4. Баллон содержит газ при температуре $t_1 = 27$ °С и давлении $p_1 = 4 \cdot 10^6$ Па. Каким станет давление газа, если из баллона выпустить половину массы газа, а температуру понизить до $t_2 = 12$ °С?

5. Какую работу совершит идеальный тепловой двигатель, имеющий температуру нагревателя $t_1 = 527$ °С и холодильника $t_2 = 47$ °С, если от нагревателя получено количество теплоты $Q = 20$ кДж?

6. В электрическом чайнике мощностью $P = 600$ Вт можно вскипятить $V = 1{,}5$ л воды за $\tau = 20$ мин при начальной температуре воды $t = 20$ °С. Найдите КПД чайника. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг · К), плотность $\rho = 10^3$ кг/м^3.

7. Какой скоростью обладает электрон, пролетевший разность потенциалов $U = 100$ В? Масса электрона $m = 9{,}1 \times 10^{-31}$ кг, заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, начальная скорость электрона равна нулю.

8. Пылинка массой $m = 3 \cdot 10^{-9}$ г находится между горизонтальными пластинами, к которым приложено напряжение $U = 6$ кВ. Расстояние между пластинами $d = 3$ см. Каков заряд пылинки, если она висит в воздухе?

9. По цепи, состоящей из источника тока с электродвижущей силой $\mathscr{E} = 12$ В и внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом и реостата, идет ток $I = 0{,}5$ А. Каким будет ток при уменьшении сопротивления реостата в два раза? Чему будет равно напряжение на реостате в этом случае?

10. Из некоторой жидкости на границу ее раздела с воздухом падает луч света. Угол падения $\alpha = 30°$. Отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу. Найдите показатель преломления жидкости.

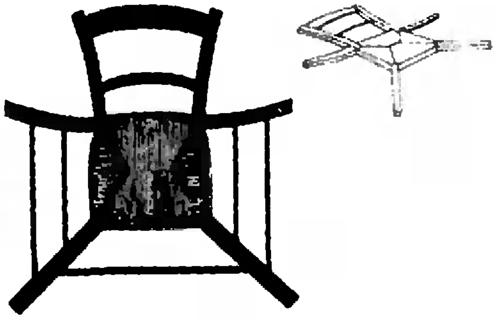
Публикацию подготовили
Г. Карасев, О. Овчинников

„Квант" улыбается

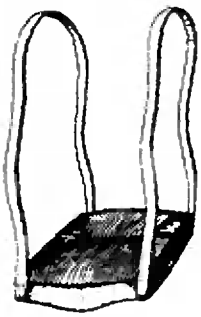
Предметы меблировки

Стул для наездников. Продлевает удовольствие от верховой езды.

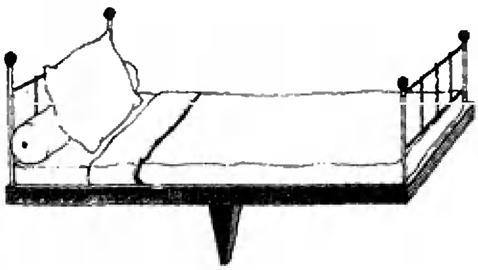
Стул «Тулуз-Лотрек» для танцовщицы канкана.



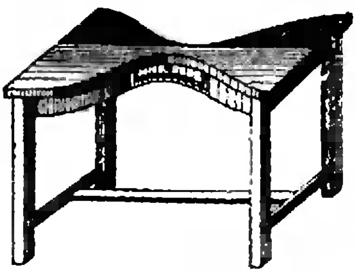
Плоский стул. Удобен тем, что занимает мало места.



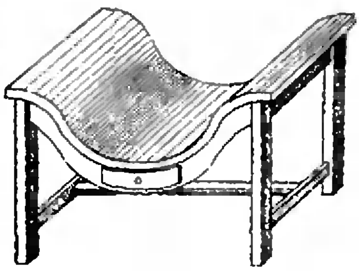
Походный стул. С помощью бретелек вешается на плечи и позволяет отдыхать на ходу.



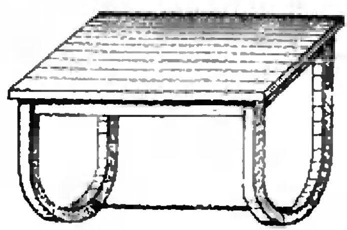
Кровать для эквилибриста. Позволяет продолжать тренировку во время сна.



Стол для беседы тет-а-тет. Позволяет собеседникам сидеть вплотную друг к другу.



Стол для толстяков.



Стол-качалка. Предназначен для увеселительных прогулок на пароходе. Повторяет любой крен палубы.

Из «Каталога невозможных объектов» Карельмана. Перевод с французского.

Ответы, указания, решения

игры со спичками

1. Пример. Пусть, скажем, позиция (a, b, c) такова: $a=1\ 100\ 101$, $b=11\ 101\ 010$, $c=100\ 011\ 010$; эта позиция не является проигрышной, ибо суммы цифр, задающих 1-й, 3-й, 5-й, 8-й и 9-й разряды чисел a, b и c, нечетны (разряды всегда считаются с конца числа). Больший из этих разрядов — это 9-й; из того, что сумма соответствующих цифр нечетна, следует, что хоть одна из этих цифр — это 1. Изменим теперь число c, в котором на 9-м с конца месте стоит 1, так, чтобы у него изменились цифры, отвечающие 1-му, 3-му, 5-му, 8-му и 9-му разрядам (т. е. заменим его числом $c_1= =010\ 001\ 111$, или, короче, числом $10\ 001\ 111$); позиция (a, b, c_1) будет уже проигрышной, а так как $c_1 < c$, то игрок может перейти от позиции (a, b, c) к позиции (a, b, c_1).

Докажите сами, что разобранное на этом примере рассуждение является общим (т. е. применимо к любой выигрышной позиции).

2. Это следует из того, что любой ход меняет хоть одну цифру в (двоичной) записи чисел a, $в$ и c (т. е. заменяет 0 на 1 или 1 на 0); при этом в данном разряде такое изменение касается лишь одной цифры.

3. Для любого n проигрышные позиции определяются условием, аналогичным указанному в теореме 1.

В случае $n=2$ стратегия беспроигрышной игры сводится к следующему: *надо каждым своим ходом брать столько спичек из большей по численности кучки, чтобы в обеих кучках спичек оставалось поровну* (это, разумеется, можно сообразить и не используя двоичной системы счисления).

4. Позиция (a, b, c) (где все числа a, b и c записаны в четверичной системе счисления) проигрышна тогда, когда в любом разряде совокупность цифр чисел a, $в$ и c имеет следующий вид: (0, 0, 0), или (0, 1, 1) или (0, 2, 2), или (0, 3, 3), или, наконец, (1, 2, 3).

5. Сравните с задачей 14 из статьи И. Яглома «Системы счисления», опубликованной в «Кванте» № 12 за 1990 год. Если запись числа в фибоначчиевой системе счисления кончается нечетным числом нулей, то запись числа a получается из нее дописыванием цифры 0; если же она кончается четным числом нулей, то для получения записи числа a нужно к записи числа $p-1$ приписать цифру 1. То, что пара a, b определяется по p однозначно, докажите сами. Заметим еще, что чем больше p, тем больше определенное по нему a. (Это будет использовано в решении задачи 6.)

6. Будем считать, что $b-a \geqslant 0$, т. е. $p=b-a \geqslant 0$. Существует проигрышная позиция (b_1, a) (где мы теперь не требуем, чтобы b_1 было больше a) и проигрышная позиция (b', a'), где $b'-a'=p$ (задача 5). Если $b_1 < b$, то играющий может одним ходом перейти к позиции (b_1, a); если же $b_1 > b$, то $b_1 - a > p$, и поэтому (см. решение предыдущей задачи) $a > a'$. Поэтому играющий может перейти к позиции (a', b').

7. Это следует из того, что не существует двух разных проигрышных позиций (a, b) и (a_1, b_1), где одно из чисел a, b равнялось бы одному из чисел a_1, b_1 или где $b-a=b_1-a_1$.

8. Проигрышные позиции определяются условием, аналогичным указанному в теореме 1.

анные школьные задачи по физике

1. В зависимости от численных значений данных величин возможны два случая — тела движутся или тела неподвижны. Предположим, что реализуется первый случай. Так как нить нерастяжима, ускорения доски и груза будут равны по величине и направлены в противоположные стороны. Запишем уравнения движения тел в проекциях на горизонтальную ось, направленную вправо (рис. 1):

$$F - F_{тр} - T = Ma,$$
$$-T + F_{тр} = -ma,$$

где T — натяжение нити, $F_{тр}$ — сила трения между доской и грузом. Учитывая, что в случае скольжения $F_{тр} = \mu mg$, окончательно получим

$$a = \frac{F - 2\mu mg}{m + M}.$$

Этот ответ будет верен только при выполнении условия $F \geqslant 2\mu mg$. Если же $F < 2\mu mg$, тела останутся неподвижными, т. е. $a=0$.

2. На шарик (рис. 2) действуют две силы — сила нормальной реакции $\vec{N}$ и сила тяжести $m\vec{g}$. Ускорение шарика направлено к центру горизонтальной окружности, по которой он движется, и равно v^2/r, где v — скорость шарика, r — радиус окружности. Запишем уравнения второго закона Ньютона в проекциях на оси X и Y:

$$N \sin \alpha = m\frac{v^2}{r},$$

$$N \cos \alpha - mg = 0.$$

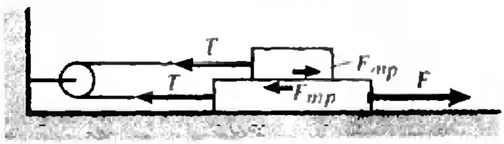
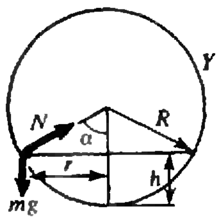


Рис. 1.



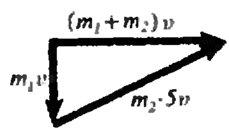


Рис. 2. Рис. 3.

Исключая N, получаем

$$v^2=gr\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Учитывая, что $\mathrm{tg}\,\alpha=r/(R-h)$, а $r^2=R^2-(R-h)^2$, находим

$$v=\sqrt{gh(2R-h)/(R-h)}=3\ \text{м/с}.$$

3. Так как не изменились ни сила тяги, ни суммарная сила сопротивления движению, импульс системы, состоящей из двух частей состава, не изменился:

$$mv_0=0{,}2mv_0/2+0{,}8mu,$$

где u — скорость головной части поезда в интересующий нас момент. Получаем

$$u=9v_0/8=72\ \text{км/ч}.$$

4. По третьему закону Ньютона, сила, действующая на стену со стороны струи, равна по величине силе, действующей на струю со стороны стены. Чтобы найти эту силу (F), запишем закон изменения импульса воды (p) за время Δt:

$$F\Delta t=\Delta p.$$

Но

$$\Delta p=\rho(Sv\Delta t)v,$$

где ρ — плотность воды, а в скобках записан объем воды, которая за время Δt ударилась о стену и потеряла свою скорость. Окончательно находим

$$F=\rho v^2S=32\ \text{Н}.$$

5. Запишем закон сохранения импульса системы:

$$(m_1+m_2)\vec{v}=m_1\vec{u}_1+m_2\vec{u}_2,$$

где $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ — скорости первого и второго осколков. На рисунке 3 представлен соответствующий этому равенству треугольник, причем учтено, что вектор $\vec{u}_1$ перпендикулярен вектору $\vec{v}$, $u_1=v$, $u_2=5v$. Применяя к этому треугольнику теорему Пифагора, находим

$$m_1/m_2=3.$$

6. Полная сила, действующая на один из одинаковых зарядов q, складывается из силы F отталкивания от второго заряда q и силы $8F$ отталкивания от заряда $2q$, расположенного вдвое ближе. Значит, полная сила равна $9F$, т. е. в 9 раз больше первоначальной.

7. В момент наибольшего сближения скорости частиц одинаковы (относительная скорость равна нулю). Найдем эту скорость u из закона сохранения импульса:

$$mv=(m+4m)u\Rightarrow u=v/5.$$

Чтобы найти наименьшее расстояние r между частицами, запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{(m+4m)u^2}{2}+k\frac{e\cdot 2e}{r}.$$

Подставляя $u=v/5$ и $k=1/(4\pi\varepsilon_0)$, получаем

$$r=\frac{5e^2}{4\pi\varepsilon_0 mv^2}.$$

8. Так как работа электростатического поля не зависит от траектории, ее можно найти, пронеся заряд через конденсатор по прямой: $A=qU$. Получается, что работа не равна нулю.

9. Так как заряды на последовательно соединенных конденсаторах равны, напряжения на них связаны соотношением

$$C_1U_1=C_2U_2.$$

Первым будет пробит конденсатор, имеющий меньшую емкость, т. е. второй конденсатор (с емкостью C_2). В момент пробоя на нем будет напряжение $U_2=U$, а на первом конденсаторе — напряжение $U_1=U_{max}-U$. Тогда получаем

$$U_{max}=U(C_1+C_2)/C_1=480\ \text{В}.$$

10. Минимальная работа по извлечению пластины равна изменению электрической энергии конденсатора:

$$A=\Delta W_{эл}=\frac{q^2}{2C_2}-\frac{q^2}{2C_1},$$

где $C_2=C$ — емкость конденсатора в отсутствие пластины, $C_1=\varepsilon C$ — его емкость в присутствии пластины, $q=C\mathscr{E}$ — заряд конденсатора. Получаем

$$A=C\varepsilon(\varepsilon-1)\mathscr{E}^2/2=2\ \text{Дж}.$$

Заметим, что $A=\Delta W_{эл}$ только в том случае, когда можно пренебречь тепловыми потерями и кинетической энергией пластины.

11. Красный. Восприятие цвета определяется частотой, которая не изменяется при переходе света из одной среды в другую.

12. Луч, отраженный от дальней поверхности пленки (границы пленки со стеклом) проходит дополнительный путь $\Delta l=2h$, где h — толщина пленки, по сравнению с лучом, отраженным от ее передней поверхности. Длина волны света в пленке $\lambda_п=\lambda/n$, где n — показатель преломления вещества пленки. Условие минимума в отраженном свете имеет вид

$$\Delta l=(2k+1)\lambda_п/2,\ k=0,\ 1,\ 2...$$

Минимальная толщина пленки ($k=0$) получается равной

$$h_{min}=\lambda_п/4=\lambda/(4n).$$

13. Направление на главный максимум k-го порядка определяется условием

$$d\sin\varphi_k=k\lambda.$$

Наблюдать можно только те максимумы, для которых $\sin\varphi_k<1$, т. е. $k<d/\lambda$. Так как $d/\lambda=5$, будут видны максимумы до 4-го порядка включительно. Всего на экране можно наблюдать 9 главных максимумов — центральный и по четыре с обеих сторон от него.

14. Энергия, ежесекундно излучаемая трубкой, равна энергии вылетевших фотонов: $P_и=N(hc/\lambda)$, а потребляемая лампой мощность равна $P_п=UI$. Следовательно, КПД установки

$$\eta=\frac{P_и}{P_п}=\frac{Nhc}{\lambda UI}=0{,}02=2\ \%.$$

Здесь $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка, $c=3\cdot10^{8}$ м/с — скорость света.

15. Запишем уравнение Эйнштейна для каждого излучения, причем учтем, что максимальная кинетическая энергия вылетевших электронов равна $eU_з$, где $U_з$ — задерживающее напряжение:

$$h\nu=A+eU_з,$$
$$h\cdot2\nu=A+e\cdot3U_з.$$

Работа выхода A определяет искомую длину волны света, соответствующую красной границе фотоэффекта:

$$A=hc/\lambda_{кр}.$$

Из полученных уравнений находим

$$\lambda_{кр}=2c/\nu=500\ нм.$$

[redacted]ковский физико-технический институт

Математика

Вариант 1

1. $x=-\arccos 1/\sqrt{5}+\pi k$, $x=\arccos 1/\sqrt{5}+2\pi k$, $k\in Z$.

Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 25\cos^4 x+60\cos^2 x-16=0, \\ \dfrac{5}{2}\sin x+\dfrac{1}{\cos x}\geqslant 0. \end{cases}$$

2. $a\in(5/6;\ 1)\cup(1;\ 5/3)\cup(5/2;\ +\infty)$.

Указание. При $a>0$, $a\neq1$ уравнение с помощью замены $t=\log_a x$ приводится к виду $t^2+3t+2=0$, откуда $x=1/a^2$, $x=1/a$. Остается решить неравенство $|a^2-a|\leqslant\dfrac{6}{25}a^2$ при $a>0$, $a\neq1$.

3. $4/\sqrt{5}$. Указание. Пусть K — точка пересечения касательной со стороной BC. Докажите, что периметр треугольника MKC равен AC. С другой стороны, из подобия $\triangle MKC$ и $\triangle ABC$ следует, что $P_{MKC}=\dfrac{2}{5}P_{ABC}$, откуда $AC=8$, $AB=BC=6$. Для вычисления радиуса окружности воспользуйтесь формулой $S=rp$.

4. $(0;\ -1;\ 1/3)$, $(-2;\ 3;\ -5)$. Указание. Из второго уравнения следует вычесть третье, затем из полученного уравнения выразить z через y, из второго уравнения — x через y и подставить эти выражения в первое уравнение.

5. Если сфера с центром в точке O касается граней двугранного угла с ребром l в точках P, Q, а точки A и B лежат на прямой l, то $\angle PAB=\angle QAB$ (докажите это).

Отсюда следует, что прямая, соединяющая вершину пирамиды с точкой касания сферы, является биссектрисой соответствующего плоского угла тогда и только тогда, когда два других плоских угла при этой вершине равны между собой.

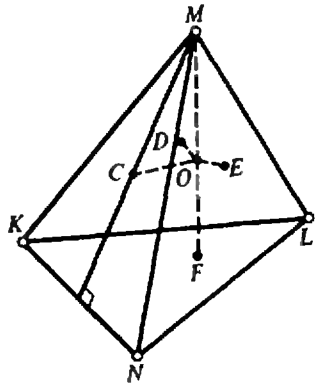


Рис. 4.

Но при вершине M все плоские углы разные, так что сфера касается именно грани KLM в центре вписанной в эту грань окружности (рис. 4). При этом, как мы показали выше,

$$\angle CMK=\angle DMK,\quad \angle DML=\angle EML,\quad \angle EMN=\angle CMN,$$

где C, D, E, F — точки касания сферой граней NMK, KML, LMN, KLN соответственно. Поэтому

$$\angle NMC=\frac{1}{2}(\angle NMK+\angle NML-\angle KML)=\frac{\pi}{2}-2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3},$$

$$\angle KMC=\angle KMD=\frac{\pi}{2}-\angle NMC=2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3},$$
$$\angle LMD=\angle LME=\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}.$$

Далее, из равенства углов MKN и NKL следует, что точка M лежит в плоскости, перпендикулярной KLN и проходящей через биссектрису KF угла NKL. Аналогично получаем, что M лежит в плоскостях, перпендикулярных LKN и проходящих через LF и NF, т. е. $MF\perp KLN$. Но $OF\perp KLN$, а значит, $O\in MF$.

Вариант 2

1. $x=1/2$.

2. 32. Указание. Угол AED — прямой, $AC=AE$, $\triangle DEB\sim\triangle ABC$.

3. $x=-\mathrm{arctg}\,\dfrac{3}{4}+2\pi n$, $n\in Z$, $k=11$;

$x=\pi-\mathrm{arctg}\,\dfrac{3}{4}+2\pi n$, $n\in Z$, $k=15$.

Указание. Для арифметической прогрессии (a_n)

$$a_k=\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}\ \text{при}\ k>1.$$

4. $\dfrac{625}{2}\left(\mathrm{arctg}\,\dfrac{12}{5}+\mathrm{arctg}\,\dfrac{3}{5}\right)-72\pi$.

Указание. Множество M показано на рисунке 5.

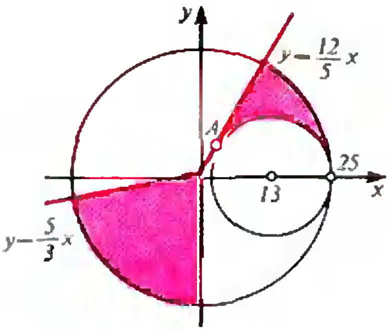


Рис. 5.

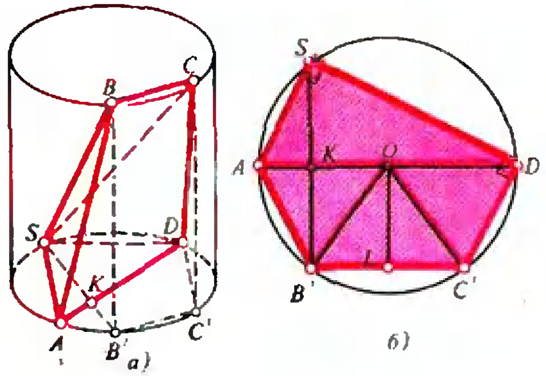


Рис. 6.

5. 2. Рассмотрим прямоугольный треугольник, гипотенуза которого есть хорда круга радиуса R, а вершина прямого угла лежит в плоскости, параллельной плоскости круга. Тогда расстояние между этими плоскостями не превосходит R. Используя замечание и числовые данные задачи $(5/3<2)$, заключаем, что либо вершины A и D находятся на разных основаниях цилиндра, либо треугольник ASD лежит в плоскости одного из оснований. Первый случай невозможен, так как тогда $AB \parallel CD$. Поэтому AD — диаметр (рис. 6, а) и $\angle CDS=\pi/2 \Rightarrow C'D \perp SD$ (рис. 6, б), $ASDC'$ — прямоугольник; $AD=10/3$, $BC=8/3$, $AB'=$ $=C'D=AS$, поэтому $SK=B'K=OL=1$. Пусть h — высота пирамиды, опущенная из вершины S, тогда

$$V=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot h=\frac{1}{6}(AD+BC)\cdot BK\times$$

$$\times SK\sin\angle BKB'=\frac{1}{6}(AD+BC)\cdot SK\cdot BB'.$$

Вариант 3

1. $(-\infty;\ -1/2)\cup(-1/2;\ 1/4)\cup(1;\ +\infty)$.

Указание. Неравенство равносильно системе

$$|4x^2-1|>3x,\ x\neq\pm1/2.$$

2. $\alpha=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4}{3}\right)+\pi k,\ k\in Z.$

Указание. Вершина параболы $y(x)=x^2+$ $+px+q$ находится в точке $x_0=-p/2$, $y_0=$ $=q-p^2/4$. Условие $y_0=3x_0$ приводит к уравнению относительно α:

$$25\cos^2 2\alpha+5\cos 2\alpha-12=0.$$

3. 3. Указание. Пусть B' — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на прямую AD. Тогда $B'A=1$. Затем найдите отрезок $BB'=x$, пользуясь тем, что радиус окружности равен $\frac{3}{4}x$, а расстояние от ее центра до отрезка PM равно $x\cdot 14$.

4. См. рис. 7. Уравнения прямых: $b=2a+7$, $b=-\frac{60}{91}a+7$, $a=0$.

Указание. Решив систему, составленную из первых двух уравнений, получаем

$x=\frac{12-b}{4(a+b-4)}$; $y=\frac{a+8}{4(a+b-4)}$. Подставляя полученные значения x и y, приходим к уравнению $(a+13)^2+b^2=169$ при $a+b\neq4$. При $a+b=4$ решение системы существует лишь при $a=-8$, $b=12$.

5. $8\sqrt{2}$. Решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник SKN $(SK=SN)$ и проведем биссектрисы всех его внутренних и внешних углов. Тогда в каждой из точек O_1, O_2, O_3, O_4 и только в них пересекаются три биссектрисы (по одной из каждой вершины). Отметим, что $O_1O_2 \parallel KN$, $S\in O_1O_2$, $O_2S=SN=SK=SO_1$. Пусть SK и SN — апофемы граней ASB и DSC (рис. 8), тогда в плоскости KSN (рис. 9) возникает ранее рассмотренная картинка. Случай точек O_3 и O_4 невозможен, т. к. тогда $O_1H=2=HN$ и $\angle HNS=\pi/2$. Поэтому центр сферы может лежать только на прямых $A'B'$ и $C'D'$, проходящих через точки O_1 и O_2 и параллельных AB и CD, а высота пирамиды равна радиусу сферы, т. е. $SH=2$. Те же самые рассуждения, примененные к плоскостям граней SBC, SAD и $ABCD$, показывают, что центр сферы может находиться только в вершинах ромба $A'B'C'D'$ $(A'D' \parallel B'C' \parallel AD)$, а точка S является центром этого ромба; $A'B'C'D' \backsim$ $\backsim ABCD$ с коэффициентом подобия $SN/HN=$ $=\sqrt{2}$.

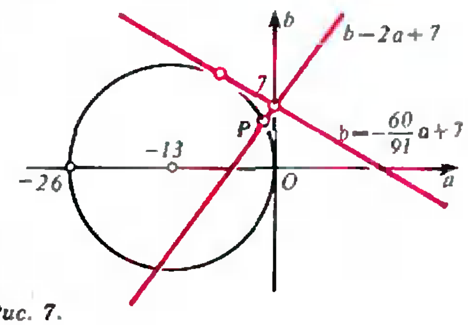


Рис. 7.

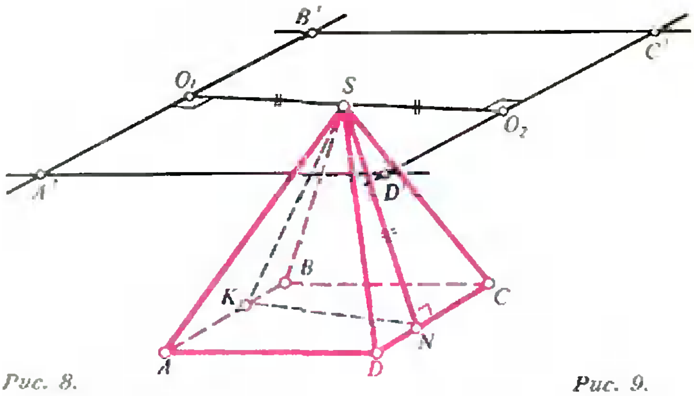


Рис. 8.

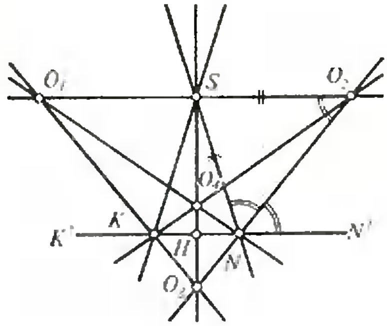


Рис. 9.

Точки A' и C' не подходят, т. к. тогда $2\sqrt{2}AB/3=2$ и $AB=3/\sqrt{2}<4=KN$. Для точек B' и D':

$$BH^2=\frac{1}{2}B'S^2=\frac{1}{2}(B'H^2-SH^2)=\frac{4}{9}AB^2-2,$$

$$BH^2=\frac{1}{4}BD^2=\frac{1}{4}\left((AB-\sqrt{AB^2-16})^2+16\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(AB^2-AB\sqrt{AB^2-16}\right).$$

Отсюда получаем $AB=3\sqrt{2}$.

$$V=\frac{1}{3}AB\cdot KN\cdot SH=8\sqrt{2}.$$

Физика

Вариант 1

1. Так как скорость саней v_0 постоянна, коэффициент трения между санями и горкой $\mu=\operatorname{tg}\alpha$. Это означает, что векторная сумма сил реакции опоры $\vec{R}=\vec{F}_{тр}+\vec{N}$ направлена всегда вертикально вверх (рис. 10). Нетрудно убедиться, что даже при действии произвольной силы $\vec{F}$ на сани проекции сил $\vec{F}_{тр}$ и $\vec{N}$ на горизонтальную ось X компенсируют друг друга. Поэтому можно записать закон сохранения импульса вдоль оси X (и только вдоль нее; по любым другим осям закон сохранения импульса не выполняется):

$$Mv_0\cos\alpha=(M-m)u\cos\alpha+mv\cos\beta,$$

откуда находим искомую скорость саней после прыжка собаки:

$$u=\frac{Mv_0\cos\alpha-mv\cos\beta}{(M-m)\cos\alpha}=\frac{2Mv_0-mv}{2(M-m)}.$$

2. Площадь поверхности шарика равна $4\pi r^2$, объем оболочки $4\pi r^2\delta$, ее масса

$$m=\rho\cdot 4\pi r^2\delta.$$

Масса M заключенного в шарик гелия определяется из уравнения Менделеева—Клапейрона

$$p\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)=\frac{M}{\mathrm{M}}RT.$$

Решая полученные уравнения совместно, находим

$$M=\frac{\mathrm{M}mp}{6RT\rho\delta}\sqrt{\frac{m}{\pi\rho\delta}}\approx 0{,}47\ \text{г}.$$

3. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта» (см. Ф1325).

4. В среде с показателем преломления n длина волны уменьшается в n раз, т. е. в воздухе $\lambda_в=\lambda/n_в$, а в азоте $\lambda_а=\lambda/n_а$. Соответственно, на длине кюветы L укладывается число длин волн, равное

$$N_в=L/\lambda_в=Ln_в/\lambda \text{ и } N_а=Ln_а/\lambda.$$

По условию задачи, при замене в кювете воздуха на азот интерференционная картина сместилась ровно на одну полосу, следовательно,

$$N_а-N_в=1, \text{ или } Ln_а-Ln_в=\lambda.$$

Отсюда

$$n_а=n_в+\lambda/L=1{,}000297.$$

Вариант 2

1. В том случае, когда тележка и ящик удерживаются упором, сила давления тележки на ящик

$$N_1=mg\sin\alpha.$$

Когда упор убран, уравнение движения ящика можно записать в виде

$$ma=mg\sin\alpha-\mu mg\cos\alpha+N_2,$$

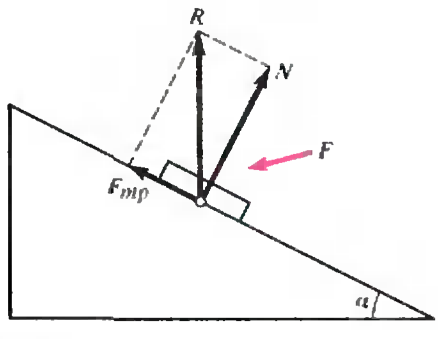


Рис. 10.

а тележки —

$$ma = mg\sin\alpha - N_2,$$

где N_2 — сила взаимодействия ящика и тележки в этом случае. Решая совместно все три уравнения, получаем

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\mu} = 4.$$

2. Процесс состоит из двух этапов. На первом происходит испарение жидкости при неизменной температуре T_0. При этом объем насыщенного пара увеличивается вдвое, и совершается работа

$$A_1 = p\Delta V_1 = pV_1 = \nu RT_0,$$

где V_1 — объем, занимаемый ν молями насыщенного пара. На втором этапе происходит изобарический нагрев 2ν молей пара, и совершается работа

$$A_2 = p\Delta V_2 = 2\nu R\Delta T.$$

Из первого начала термодинамики изменение внутренней энергии содержимого цилиндра равно

$$\Delta U = Q - A = Q - (A_1 + A_2) = Q - \nu RT_0 - 2\nu R\Delta T.$$

3. При условии $2\pi/\omega \gg \tau$ можно считать, что напряжение на конденсаторе остается постоянным:

$$U_C = \mathscr{E} = \text{const}.$$

Тогда заряд конденсатора меняется по закону

$$Q_C = \mathscr{E}C_0(1 + A\sin\omega t).$$

Отсюда переменная составляющая тока, текущего через конденсатор, равна

$$i_\sim = Q'_C = \mathscr{E}C_0A\omega\cos\omega t,$$

ее амплитуда —

$$I_\sim = \mathscr{E}C_0A\omega,$$

а мощность, выделяемая на резисторе, составляет

$$P = \frac{I_\sim^2 R}{2} = \frac{(\mathscr{E}C_0A\omega)^2 R}{2}.$$

4. $l = 8F\sqrt{F^2+b^2}/(d+F) - (d+F) = 26$ мм.
Указание. См. рис. 11.

Вариант 3

1. Согласно закону сохранения импульса (см. рис. 12),

$$m_4\bar v_4 + m_3\bar v_3 + m_2\bar v_2 + m_1\bar v_1 = 0,$$

или

$$(m_4v_4)^2 = (m_3v_3)^2 + (m_2v_2)^2 + (m_1v_1)^2.$$

Отсюда

$$v_3 = \sqrt{(m_4v_4)^2 - (m_1v_1)^2 - (m_2v_2)^2}/m_3 = 200 \text{ м/с}.$$

2. Согласно первому началу термодинамики, количество теплоты

$$Q_{12} = \Delta U + p\Delta V = 3/2R(T_2 - T_1) + p(V_2 - V_1) = 5/2\,RT_2(\alpha - 1)/\alpha,$$

где $\alpha = V_2/V_1 = V_3/V_2$.
Работа газа на участке 2 — 3 равна

$$A_{23} = (p_2 + p_3)(V_3 - V_2)/2 = RT_2(\alpha^2 - 1)/2.$$

По условию задачи

$$4A_{23} = Q_{12},$$

откуда получаем

$$\alpha = V_2/V_1 = V_3/V_2 = 4.$$

Очевидно, что второй корень квадратного уравнения ($\alpha = 1$) не отвечает условию задачи.
3. Для любого участка проводника можно записать закон Ома в виде

$$U = El = IR = I\rho l/S,$$

где U — разность потенциалов на длине проводника l, E — напряженность электрического поля в проводнике. Отсюда получаем

$$\frac{E_1}{\rho_1} = \frac{E_2}{\rho_2} = \frac{I}{S},$$

или

$$E_2 - E_1 = (\rho_2 - \rho_1)I/S.$$

С другой стороны,

$$E_2 - E_1 = \sigma/\varepsilon_0,$$

где σ — поверхностная плотность заряда, ε_0 — электрическая постоянная.
Тогда окончательно

$$\sigma = \varepsilon_0(\rho_2 - \rho_1)I/S > 0.$$

4. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта» (см. Ф1332).

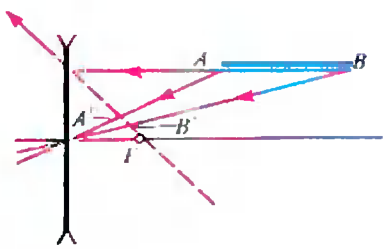


Рис. 11.

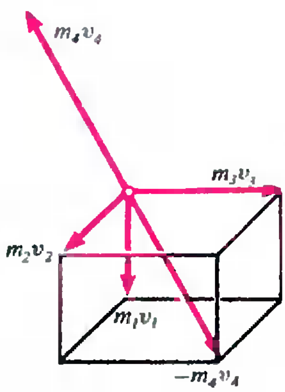


Рис. 12.

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Вариант 1

1. $a+3$ и (-3) при $a\notin\{-1;\ -4\}$, (-3) при $a=-1$ и (-1) при $a=-4$.
2. $\{x\in(-3;\ -2)\cup(8;\ 9),\quad 0<y<x+4\}\cup\{x\in(-2;\ 8),\ y>x+4\}$.

Указание. Рассмотрите сначала функцию

$$u(x)=|x+1|-2|x-1|+6\,.$$

Ее значения лежат между нулем и единицей при $x\in(-3;\ -2)\cup(8;\ 9)$ и больше единицы при $x\in(-2;\ 8)$. В первом случае $\log_u y$ убывает с возрастанием y, во втором — возрастает.

3. $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ 2\pi k,\ -\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$. Указание. Данное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases}(\sin x\pm 1/2)(\cos^2 x-\cos x)=0\,,\\ \sin x\,(\cos x-1)\cos x\geqslant 0.\end{cases}$$

4. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi\sin^2\alpha\cos\alpha}{4(1+\cos\alpha)}$, где S_1 — площадь поверхности полушара, S_2 — боковая поверхность пирамиды. Указание. Рассмотрите сечение пирамиды плоскостью, перпендикулярной основанию и двум противоположным боковым граням. В таком сечении легко выразить через радиус полушара все необходимые данные для нахождения площади.

5. $a\in[1/8;\ +\infty)$. Указание. После замены переменной $u=3^x$ данное неравенство эквивалентно системе

$$\begin{cases}u^2+(2a+4)u+8a+1>0\,,\\ u>0.\end{cases}$$

Остается выяснить, при каких значениях параметра a часть графика параболы $y=u^2+(2a+4)u+8a+1$, лежащая в правой полуплоскости, целиком лежит в верхней полуплоскости.

Вариант 2

1. $a-2$ и $4-2a$ при $a\notin\left\{-\frac{1}{2};\ 1;\ \frac{4}{3}\right\}$, 5 при $a=-\frac{1}{2}$, (-1) при $a=1$, $\left(-\frac{2}{3}\right)$ при $a=\frac{4}{3}$.
2. 0.
3. $\pm\sqrt{\pi k}$, $\pm\sqrt{\frac{\pi}{3}+2\pi k}$, $\pm\sqrt{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}$, $k\geqslant 0$, $k\in Z$. Сумма корней, принадлежащих отрезку $[-\pi;\ 0]$, равна

$$S=-(\sqrt{\pi/3}+\sqrt{\pi}+\sqrt{5\pi/3}+\sqrt{2\pi}+\sqrt{7\pi/3}+\sqrt{3\pi}).$$

4. $BD=2\sqrt{2}$, площадь сечения, являющегося квадратом, равна $8(3-2\sqrt{2})$. Указание. Для нахождения ребра BD удобно рассмотреть сечение пирамиды плоскостью, содержащей это ребро и перпендикулярной основанию пирамиды. Чтобы найти все сечения, являющиеся квадратами, заметьте, что в таких случаях секущая плоскость должна быть параллельна двум скрещивающимся под прямым углом ребрам. Такая пара ребер только одна — BD и AC. Нетрудно понять, что из всех плоскостей, параллельных двум этим ребрам, только одна дает в сечении квадрат.

5. $(-4;\ 17/4)$. Указание. График функции $y=|x+a|$ отличается от графика функции $y=|x|$ лишь сдвигом вдоль оси абсцисс. Множество тех значений x, где выполнено данное неравенство, расположено между точками касания параболы $y=4-x^2$ с графиком функции $y=|x+a|$ при двух указанных выше значениях параметра a.

Физика

1. $h=s\sin\alpha/(1-\cos\alpha)=1{,}7$ м.
2. $a=g\,\frac{4m_1m_2+m_0(m_1-m_2)}{4m_1m_2+m_0(m_1+m_2)}=2{,}9$ м/с^2.
3. $l=hm\operatorname{ctg}\alpha/(M+m)=4{,}4$ см.
4. $\eta=2/13=15\,\%$.
5. $\varphi=1-\Delta mRT/(Mp_н V)=0{,}627=62{,}7\,\%$, где $R=8{,}31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная, $M=18$ г/моль — молярная масса воды, $p_н=10^5$ Па — давление насыщенного пара при 100 °С.
6. $q=10\,CU/71=15$ мкКл.
7. $P=5\,U^2/(3R)=16$ Вт.
8. $\sigma=IBR/S=3{,}3$ кН/м^2.
9. $x=d_0/2-l/n=11{,}5$ см.
10. $L=\frac{dF(D+l)}{(D+l)(d-F)-ld}=1{,}22$ м.

Указание. См. рис. 13.

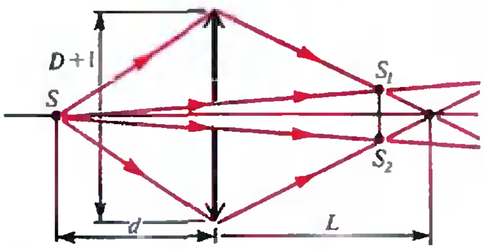


Рис. 13.

Московский педагогический государственный университет им. В. И. Ленина

Математика

Вариант 1

1. 5 %. Указание. Если x — искомая величина, то условие задачи записывается в виде $\left(1+\frac{x+10{,}5}{100}\right)^2=$

$=1{,}21\left(1+\dfrac{x}{100}\right)^2$, откуда $1+\dfrac{x+10{,}5}{100}=$ $=1{,}1\cdot\left(1+\dfrac{x}{100}\right)$.

2. $\dfrac{\pi}{12}+2\pi k, \dfrac{5\pi}{12}+2\pi k,\ k\in Z$. Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\sin 2x=1/2,\\ \sin x+\cos x>0.\end{cases}$$

3. $(1/5;\ 1/3)\cup(1/3;\ 2/5)\cup(1/2;+\infty)$. Указание. Приведите неравенство к виду $\dfrac{(y-1)^2}{y}>0$, где $y=\log_{2x}(5x-1)$.

Полученное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}y>0,\\ y\neq 1.\end{cases}$$

4. $\dfrac{\sqrt{65}}{2}$. Указание. Исследуйте на экстремум функцию

$d(x)=(\sqrt{(x-2)^2+(\sqrt{12+5x-2x^2}-0)^2}=$ $=-x^2+x+16$ в области определения $f(x)$, т. е. на $[-3/4;\ 4]$.

5. $\dfrac{a^2}{2}\sqrt{3+4\operatorname{tg}^2\alpha}$. Предостережение.

$S_{BKD}\neq\dfrac{1}{2}KO\cdot BD$.

Вариант 2

1. 45 г, 50 г. 2. $\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$. Указание. Преобразуйте уравнение к виду $2t^2+t-1=0$, где $t=|\sin x|$.

3. $(4;\ +\infty)$. Указание. Правую часть неравенства приведите к виду

$-\log_x\log_3\dfrac{x+2}{x-2}$. Исходное неравенство с учетом его О.Д.З. будет равносильно системе

$$\begin{cases}\log_3\dfrac{x+2}{x-2}<1,\\ x>2.\end{cases}$$

4. $\dfrac{2\sqrt{51}}{9}$. 5. $\arccos\dfrac{7}{15}$.

Вариант 3

1. 45°. 2. $\dfrac{\pi}{2}(2k+1), \dfrac{\pi}{4}(2k+1), \dfrac{\pi}{14}(2k+1)$, $k\in Z$.

3. 2. 5. $[-2;\ -1)\cup[2;\ +\infty)$.

Вариант 4

1. 480 см^3. 2. $\dfrac{\pi}{8}(2k+1),\ k\in Z$.

3. -1, $(-\infty;\ -2]\cup[2;\ +\infty)$. 5. $(-5;\ +\infty)$.

Вариант 5

1. 432 см^2. 2. $\dfrac{\pi}{8}k,\ k\in Z$. 3. $(0;\ 0{,}25]$.

5. $(-2;3)\cup(5;\ +\infty)$.

Устный экзамен

Математический факультет

1. $\dfrac{\pi}{2}$. 2. $\log_3\sqrt{15}>\sqrt{\log_3 5}$. 3. 693.

4. $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}, -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

Указание. Исследуйте на экстремум функцию $f(t)=t^3-t$ на $[-1,\ 1]$. 5. $y=x+1$. 6. $\dfrac{1}{4}\sqrt{2(4+\sqrt{2}+\sqrt{6})}$. Указание. $\sin 997{,}5^\circ=$ $=-\cos 7{,}5^\circ=-\sqrt{(1+\cos(45^\circ-30^\circ))/2}$.

7. Указание. Умножьте обе части уравнения на $4\sin 36^\circ$.

8. Указание. При $x\in\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ возведите обе части неравенства в квадрат.

Факультет начальных классов

1. $-\dfrac{\pi}{4}-\pi k$, $\operatorname{arctg}3+\pi k$, $k\in Z$. 2. $\dfrac{\pi}{2}(2k+1)$, $(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$. 3. 3. 4. $(-\infty;\ -4)\cup$ $\cup(-2;\ -4)\cup(6;\ +\infty)$. 5. $(0;\ 1/625)$. 6. $(-1;\ +\infty)$. 8. 3.

	1	2	3	4	5	6	7	8	В	Н	П	М
1			0:0			1:0	1:0	1:0	3	1	0	3:0
2					1:0	1:0	1:0	1:0	4	0	0	4:0
3	0:0				0:0	1:1	0:0		0	4	0	1:1
4					1:0	1:0	1:0	1:0	4	0	0	4:0
5		0:1	0:0	0:1				2:0	1	1	2	2:2
6	0:1	0:1	0:1	0:1					0	1	3	1:4
7	0:1	0:1	0:0	0:1					0	1	3	0:3
8	0:1	0:1		0:1	0:2				0	0	4	0:5

Рис. 14.

Физика

1. $a=F/(m_1+m_2)-\mu g=4$ м/с^2; $T=Fm_1/(m_1+m_2)=2{,}5$ Н.
2. $T=3mg=9$ Н.
3. $M=m(v-u)/u=72$ кг.
4. $p_2=p_1T_2/(2T_1)=1{,}9\cdot10^5$ Па.
5. $A=Q(1-T_2/T_1)=12$ кДж.
6. $\eta=\rho Vc(t_к-t)/(P\tau)=0{,}7$ (здесь $t_к=100$ °C — температура кипения).
7. $v=\sqrt{2eU/m}=5{,}9\cdot10^6$ м/с.
8. $q=mgd/U=1{,}5\cdot10^{-16}$ Кл.
9. $I'=2\mathscr{E}/(r+\mathscr{E}/I)=0{,}9$ А; $U'=\mathscr{E}-I'r=10{,}2$ В.
10. $n=\operatorname{ctg}\alpha=1{,}7$.

Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» № 9 за 1991 г.)

1. Эта задача имеет «подвох». Не все заметили, что ребята, живущие на нижних этажах, могут подниматься к себе, не пользуясь лифтом.
Правильный ответ таков: лифтер поднимает 13 школьников на 14-й этаж, и один из них уже дома, четверо ребят, живущие на этажах с 15-го по 18-й, поднимаются дальше уже по лестнице, а восемь — спускаются к себе (на этажи с 6-го по 13-й). Четыре же оставшихся школьника, чьи квартиры находятся на этажах со 2-го по 5-й, поднимаются пешком, вообще не пользуясь лифтом. При этом суммарное неудовольствие равно

$$0+(1+2+3+4+5+6+7+8)+\\+4(1+2+3+4)=76.$$

2. См. рис. 14 на с. 79.
3. См. рис. 15.

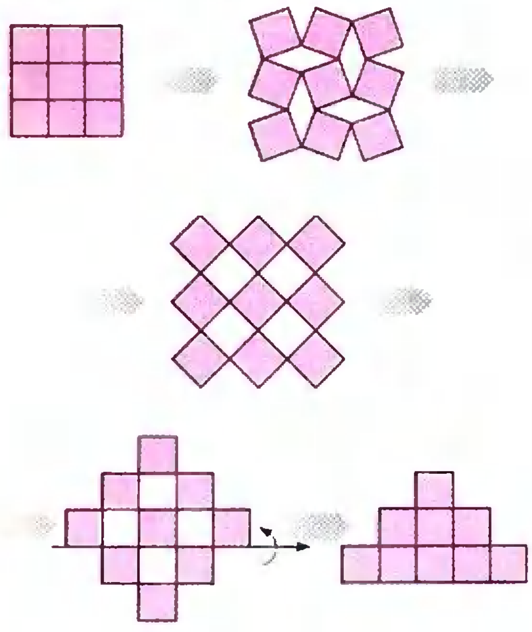


Рис. 15.

103006, Москва К-6, ул. Тверская, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54, факс 251-55-57

Сдано в набор 28.10.91. Подписано к печати 05.02.92.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,45.
Тираж 85 939 экз. Заказ 1700. Цена 1 р. 10 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Министерства печати и массовой информации
Российской Федерации
142300, г. Чехов Московской обл.

Шахматная страничка

XI ЧЕМПИОНАТ МИРА

В 1967 году состоялась первая в истории встреча компьютеров за шахматной доской. Советская программа «Каисса» в телеграфном матче из четырех партий сразилась с американской программой, созданной в Станфордском университете, и выиграла матч со счетом 3:1. Став достоянием широкой прессы, этот поединок дал мощный импульс к развитию компьютерных шахмат во многих странах мира. За прошедшие четверть века шахматные компьютеры добились фантастических результатов: если в 60-е годы они играли как простые любители, то ныне их удостаивают внимания самые выдающиеся игроки, включая Г. Каспарова и А. Карпова.

На первых этапах развития компьютерных шахмат отношения между собой выясняли только программы, разработанные для больших машин, супер-ЭВМ, занимавших тогда целые этажи научно-исследовательских институтов. В таких условиях не каждый программист мог попробовать свои силы. Ситуация изменилась с появлением на свет микро-ЭВМ, особенно персональных компьютеров (PC). Теперь любой владелец собственной машины получил возможность создать свою шахматную программу. В результате возник новый вид состязаний — с участием микрокомпьютеров и программ для PC.

В чемпионатах супер-ЭВМ, которые проводятся раз в три года, начиная с 1974-го, допускаются микрокомпьютеры и любые программы. В настоящее время сильнейшей программой, написанной для больших машин, является американка «Дип Сот». Кстати, в этом году ей предстоит отстаивать свой чемпионский титул.

Что касается микрокомпьютеров, то их чемпионаты проводятся ежегодно с 1980 года. При этом, как правило, турнир проходит один, а чемпионы определяются сразу в нескольких группах.

К первой относятся программы, записанные на обычных дискетах и предназначенные для мощных персональных компьютеров, совместимых с IBM PC (самый популярный класс PC, в том числе в нашей стране). С такими программами многим читателям, наверное, не раз доводилось играть. Во многих PC они даже входят в математическое обеспечение, т. е. заложены в память ЭВМ. До недавнего времени эти программы не отличались большим мастерством, но сейчас положение изменилось (об этом чуть дальше).

Ко второй группе относятся программы, разработанные для специализированных машин, приспособленных только для игры в шахматы. Речь, по существу, идет не столько об отдельных программах, сколько о программном обеспечении (Software) — техническом и программном комплексе, специально разработанном для успешной шахматной игры. Software может быть «вмонтировано» в робота, самые распространенные компьютеры такого сорта — «Фиделити» и «Мефисто», неоднократные чемпионы мира.

К этой же группе относят и Software, предназначенные для пользователей PC. Это может быть специальная машина, которая подключается к домашнему компьютеру.

Наконец, третью группу составляют любительские программы — обычно они не отличаются большой шахматной силой и часто пишутся на компьютерах, более простых, чем IBM PC.

Теперь, когда мы разобрались с категориями шахматных программ, расскажем об итогах 11-го чемпионата мира среди микрокомпьютеров, состоявшегося в прошлом году в канадском городе Ванкувер. 15 программ состязались в семи турах по швейцарской системе. Первое место в турнире неожиданно заняла программа-приставка «Гидеон» (автор — голландец Эд Шредер) — 6 очков и единственное поражение (от «Мефисто»). «Гидеон» был объявлен чемпионом мира в группе Software.

На пол-очка меньше набрала программа «М-Чесс» — поражение от «Гидеона» и одна ничья. «М-Чесс», созданная американцем Марти Хиршем, записана на обычной дискете. Таким образом, эта программа стала чемпионкой в группе PC. Надо сказать, что это довольно крупное событие в мире шахматных компьютеров. То, что шахматные программы для PC в состоянии на равных соперничать со специализированными микрокомпьютерами, делает компьютерные шахматы еще более разносторонними и интересными.

Знаменитый робот «Мефисто» (программа принадлежит англичанину Ричарду Лэнгу), о котором мы неоднократно писали, набрал пять очков (поражения от программ «М-Чесс» и «Кинг») и оказался на третьем месте, опередив «Кинга» (автор — Джохан Коннинг из Дании) по коэффициентам. Пятой была программа «Сайтек» (авторы — Дан и Касе Спраклен), шестой — программа «Хиркс» (ее написал Марк Уник из Англии), которая стала чемпионкой мира в группе любительских программ.

Итак, после побед в семи чемпионатах подряд «Мефисто» впервые расположился ниже первой строчки. В знак уважения к заслугам любимца публики был проведен матч «Гидеон» — «Мефисто». Ожесточенная схватка закончилась мирно — 2:2, и обеим программам были присвоены звания абсолютных чемпионов мира. Так, на дружеской ноте, завершился XI чемпионат мира среди микрокомпьютеров. Наиболее интересные партии, сыгранные в Ванкувере, а также встречи победительниц турнира с мастерами мы приведем в следующих выпусках «Шахматной странички».

Е. Гик

1 р. 10 к.
Индекс 70465

Только две головоломки оспаривают право называться самыми древними, одна из них — мозаика, другая — лабиринт. Казалось бы, за тысячелетнюю историю придумано столько лабиринтов, что предложить что-нибудь принципиально новое невозможно. Но вот на нашей картинке вы видите лабиринт, который появился совсем недавно.

Новая игрушка представляет собой коробочку, сложенную из трех пар обычных лабиринтов. Внутри коробочки помещено перекрестие из трех палочек, которое называется курсором. Задача состоит в том, чтобы за одну минуту перевести перекрестье курсора из одного угла кубика в другой.

А. К.