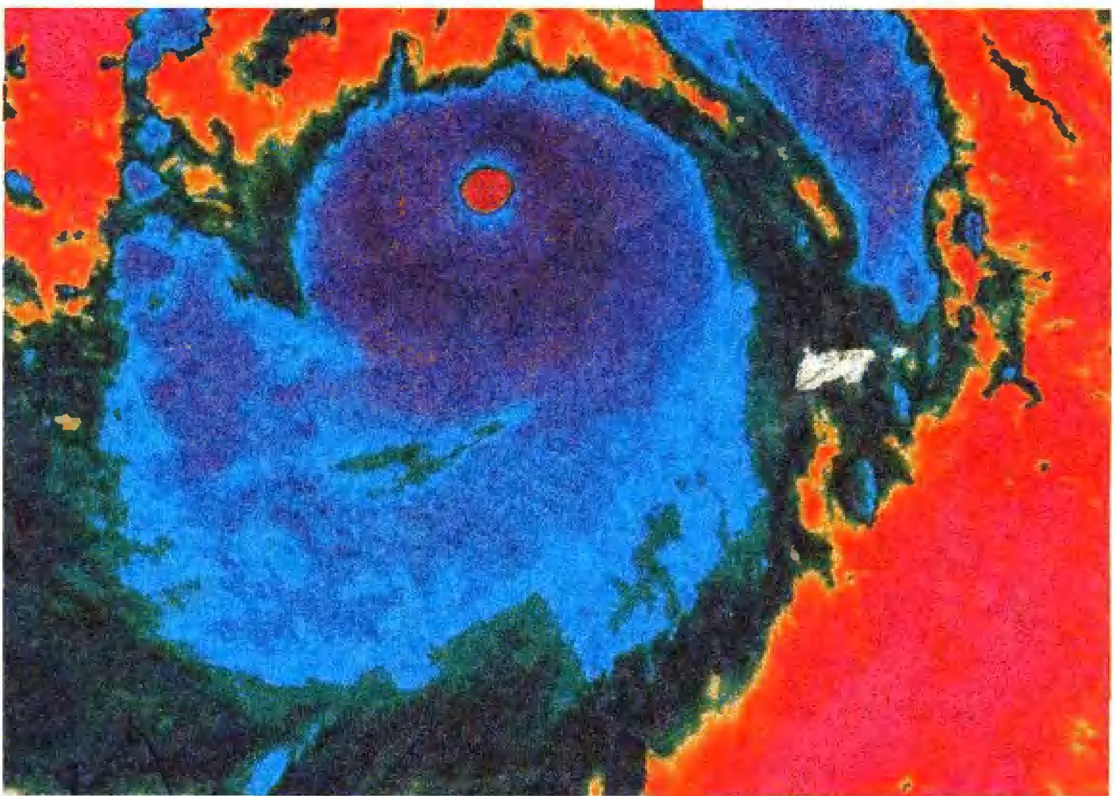
ISSN 0130-2221

Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



1991

Квант

8 1991

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал

Учредители — Президиум Академии наук СССР, Президиум Академии педагогических наук СССР и трудовой коллектив редакции журнала «Квант»

Москва, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

ЭМАП — НОВОЕ НАПРАВЛЕНИЕ В РАДИОСПЕКТРОСКОПИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Доктор физико-математических наук
А. ВАСИЛЬЕВ

В этой статье речь пойдет о новом подходе к изучению механических свойств веществ, основанном на явлении прямого преобразования электромагнитных волн в звуковые (и наоборот) на поверхности проводника. В рамках этого подхода чисто электромагнитные экспериментальные методы с успехом используются для определения твердости и пластичности металлов, скорости и затухания распространяющихся в них звуковых волн.

В научной литературе это явление во всех его разновидностях, а также связанные с ним измерительные методики получили общее название Электро-Магнитно-Акустического Преобразования, или, сокращенно, ЭМАП.

Электромагнитное возбуждение звука в металлах можно рассматривать в качестве одного из направлений радиоспектроскопии — раздела физики твердого тела, изучающего взаимодействие электромагнитного поля с веществом. В отличие, однако, от традиционных направлений радиоспектроскопии, исследующих поглощение электромагнитной энергии на фиксированных частотах, ЭМАП не связано условиями резонансного взаимодействия и происходит на всех частотах и при любых температурах.

Главная причина того, что прямое преобразование звуковой и электромагнитной энергии в течение долгого времени вообще не рассматривалось, заключается в заведомо низкой эффективности ЭМАП. Действительно, поскольку любое макроскопическое тело, и металл в том числе, электрически нейтрально, электромагнитная волна, на первый взгляд, вообще не может привести вещество в движение. Кроме того, известно, что электромагнитная волна практически полностью отражается от границы проводника (рис. 1). (Вспомните, что отражающим элементом зеркала служит просто металлическая пленка, нанесенная на поверхность стекла.) Наконец, в течение долгого времени не возникало и особой необходимости в разработке ЭМАП — проблему возбуждения звука удовлетворительным образом решали с помощью традиционных контактных преобразователей, и развитие техники эксперимента связывали в первую очередь с их совершенствованием.

Действие контактных преобразователей основано на пьезоэффекте или магнитострикции, т. е. на способности некоторых кристаллов изменять под воздействием электрического или магнитного поля свои размеры и форму. Для генерации звука в твердом теле оказывалось достаточным приклеить кристалл преобразователя к поверхности изучаемого объекта и подать на этот кристалл электромагнитную волну.

Схема стандартного эксперимента

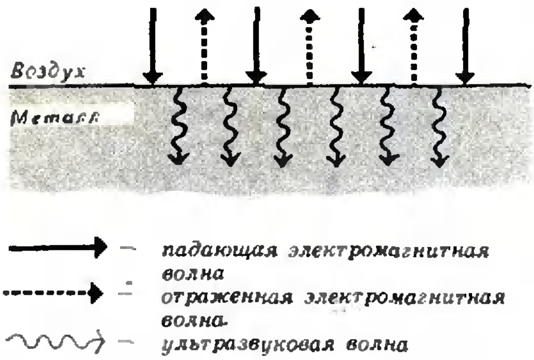


Рис. 1. Схема эксперимента по электромагнитному возбуждению звука в металле.

по возбуждению звука в металле, показанная на рисунке 2, включает, таким образом, два дополнительных элемента по сравнению со схемой ЭМАП (см. рис. 1): преобразователь и склейку. Именно в этих дополнительных элементах и заключаются все ограничения контактных методик. Первое из ограничений связано с самими преобразователями. Дело в том, что пьезоэлектрическими или магнитострикционными свойствами обладает ограниченное число материалов, и сохраняют они эти свойства лишь в ограниченном интервале температур. Кроме того, такие преобразователи работают лишь на фиксированных частотах, что резко ограничивает возможности эксперимента. Второе ограничение связано с необходимостью использования склеек. Акустический контакт между преобразователем и образцом создается обычно при комнатной температуре. С изменением температуры на границах образец — склейка и склейка — преобразователь возникают гигантские термические напряжения, обусловленные различиями в коэффициентах теплового расширения всех этих веществ. При измерениях в широких температурных интервалах эти напряжения не только приводят к деформации поверхности образца, но и могут завершиться разрушением самого акустического контакта.

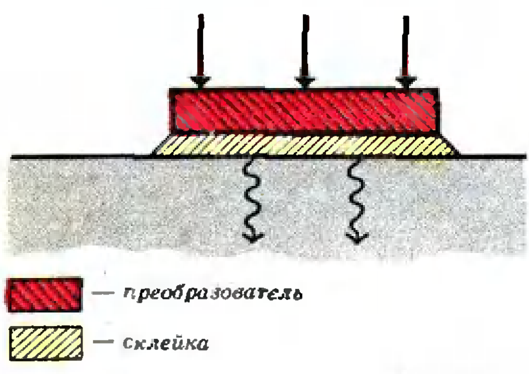


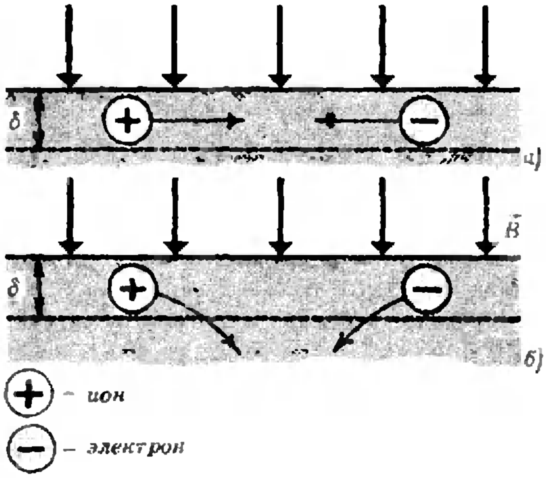
Рис. 2. Схема эксперимента по возбуждению звука в металле с использованием контактного преобразователя.

Все эти, а также многие другие ограничения традиционных методик стимулировали разработку и внедрение бесконтактных методов. Новые методы открыли и новые возможности в проведении акустических измерений.

Однако прежде чем переходить к их описанию, рассмотрим на качественном уровне некоторые из основных взаимодействий, ответственных за ЭМАП.

Индукционное взаимодействие

Как бы хорошо металл не отражал электромагнитную волну, всегда какая-то, пусть даже очень малая, часть энергии волны проникает в его поверхностный слой. Именно на этом и основаны все механизмы бесконтактного возбуждения звука. Простейший из этих механизмов, получивший название индукционного взаимодействия, срабатывает, когда изучаемое вещество находится в сильном магнитном поле. В отсутствие магнитного поля электроны и ионы в приповерхностном слое металла под действием поля электромагнитной волны движутся, как показано на рисунке 3, *а*, в противоположных направлениях, теряя время от времени свою избыточную кинетическую энергию при столкновениях. Проникающая при этом в проводник часть энергии электромагнитной волны превращается в тепло, и никакой генерации звука не происходит. Если, однако, проводник находится в постоянном магнитном поле, то и электроны, и ионы откло-



δ — *глубина проникновения электромагнитного поля в металл*
$\vec{B}$ — *индукция постоянного магнитного поля*

Рис. 3. Принцип действия индукционного механизма ЭМАП.

няются от первоначального направления движения под действием силы Лоренца. Поскольку знаки зарядов этих частиц противоположны, а движутся они навстречу друг другу, то сила Лоренца отклоняет их, как показано на рисунке 3, *б*, в одну и ту же сторону. Сталкиваясь с ионами, электроны передают им свою избыточную энергию, вызывая тем самым колебания решетки проводника на частоте падающей волны. В этом, собственно, и заключается ЭМАП. Упругие колебания решетки могут быть зарегистрированы обычными акустическими методами, например пьезоэлектрическими или магнитострикционными преобразователями. Возможна также и бесконтактная регистрация звука, поскольку падение звуковой волны на границу проводника сопровождается электромагнитным излучением — этот эффект носит название обратного ЭМАП.

Для того чтобы представить масштаб описываемого явления, приведем выражение для эффективности трансформации, определяемой как отношение потоков энергии в падающей на металл электромагнитной волне и в уходящей от его поверхности звуковой волне:

$$K=(S/c)(B^2/8\pi\varrho S^2)/(1+\beta^2).$$

В этой формуле c — скорость света, B — индукция постоянного магнитного поля, ϱ — плотность металла, S — скорость звука в металле. Важный для всех механизмов ЭМАП параметр

$$\beta=2\pi^2\delta^2\lambda^2$$

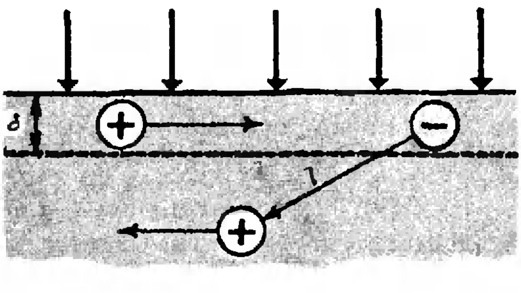
описывает пространственное распределение возбуждающей силы, выражая его через отношение глубины проникновения электромагнитной волны в проводник δ к длине упругой волны в нем λ.

Видно, что эффективность преобразования определяется, во-первых, отношением скоростей звука и света — для всех твердых тел эта величина составляет $\sim 10^{-5}$, во-вторых, отношением энергии, запасаемой в постоянном магнитном поле $B^2/8\pi$, к величине ϱS^2, равной модулю упругости вещества E, и, наконец, распределением возбуждающей силы. Сразу же оговоримся, что параметр β мал лишь в хорошо проводящих средах, для которых глубина проникновения электромагнитной волны мала по сравнению с длиной упругой волны. Это обстоятельство выделяет металлы в качестве лучших объектов для реализации различных механизмов ЭМАП. В хороших металлах — алюминий, медь, серебро — при комнатной температуре в магнитном поле $B=1$ Тл на частоте $f=1$ МГц эффективность ЭМАП $K\sim 10^{-10}$. Столь же малая доля энергии трансформируется и при обратном преобразовании. Таким образом, если эксперимент проводится с использованием ЭМАП как для возбуждения, так и для приема звука, то эффективность двойного преобразования составляет $K^2\sim 10^{-20}$.

Деформационное взаимодействие

Рассмотренный выше механизм трансформации универсален. Если предположить, что $\beta\leqslant 1$, то окажется, что эффективность преобразования вообще не зависит от электрических параметров твердого тела. Это действительно так, однако, как мы уже отмечали, такое предположение ограничивает нас только хорошо проводящими средами — полупроводниками при высоких температурах и металлами. При низких температурах в таких веществах ЭМАП оказывается возможным и без магнитного поля. Суть этого — деформационного — механизма преобразования заключается в следующем.

В особо чистых металлах при низких температурах расстояние, которое пробегает электрон, не сталкиваясь с ионами, оказывается большим по сравнению с глубиной проникновения электромагнитной волны. В этом случае электроны, приобретая избыточную энергию вблизи поверхности, уносят ее вглубь металла, и, как показано на рисунке 4, прямое воздействие электрического поля волны на ионы оказывается нескомпенсированным. Генерации звука, таким образом, способствует то обстоятельство, что электроны отдают решетке свою избыточную энергию не там, где они ее получили, а совсем в другом месте. Свое название этот механизм ЭМАП получил вследствие того, что решетка кристалла всегда подстраивается (деформируется) под распределение электронов по энергиям. Эффективность деформационного взаимодействия невелика, она даже на порядок ниже приведенной оценки для индукционного взаимодействия, однако именно этот механизм представляет наибольший интерес в физике из-за своей тесной связи с характеристиками движения электронов по кристаллу.



l — длина свободного пробега электронов

Рис. 4. Принцип действия деформационного механизма ЭМАП.

Магнитоупругое взаимодействие

Важное место среди металлов занимают такие, которые обладают магнитными свойствами. В них, так же как и в обычных металлах, работают индукционное и деформационное взаимодействия. Дело осложняется, однако, тем, что в магнетиках, помимо реакции электронов и ионов на электрическое поле электромагнитной волны, необходимо также учитывать действие магнитного поля на элементарные атомные токи. В результате взаимодействия электронов, ионов и элементарных токов с электромагнитной волной и друг с другом в магнетиках реализуется довольно много различных механизмов ЭМАП. К ним относятся, например, механизмы генерации звука, связанные со смещением доменных границ и с вращением вектора намагниченности в доменах. Оказалось также, что переход металла из одного магнитного состояния в другое сопровождается гигантским (на два-три порядка по сравнению с индукционным взаимодействием!) возрастанием эффективности ЭМАП. Качественно эффект гигантской трансформации можно объяснить тем, что положение элементарных атомных токов при переходах металла из одного устойчивого состояния в другое никак не определено, и поэтому электромагнитная волна оказывается в состоянии сильно раскачать эти токи, а те, в свою очередь, заставляют колебаться ионы.

Принципы проведения эксперимента

Численные оценки эффективности ЭМАП, естественно, никак не стимулировали разработку бесконтактных методик генерации и приема звуковых волн. Следует помнить, однако, что в экспериментальной физике главным является вопрос не о величине эффекта, а о его «наблюдаемости». Оказалось, что ЭМАП не только на-

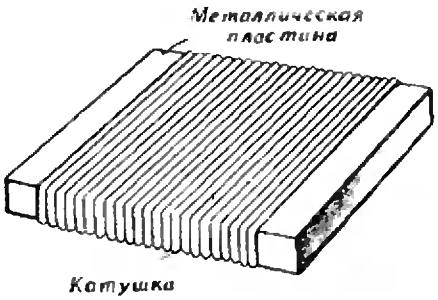


Рис. 5. Электромагнитное поле на поверхности образца создается катушкой индуктивности, охватывающей его.

дежно регистрируется, но и с успехом может использоваться для проведения акустических измерений. Стимулом явилось, как ни странно, быстрое развитие исследований еще в одной области — физике низких температур.

Изучение проводников при низких температурах показало, что под действием магнитного поля многие их свойства изменяются немонотонно, или, как говорят, обнаруживают квантовые осцилляции. Описание природы этого явления выходит за рамки статьи, для нас важно лишь то обстоятельство, что наблюдать квантовые осцилляции можно только в совершенных кристаллах, полностью лишенных механических напряжений.

Возник вопрос и о существовании квантовых осцилляций скорости звука в металлах. Именно здесь традиционные контактные методики вступили в противоречие с требованиями эксперимента. Термические напряжения в контакте опасны даже при малых изменениях температуры, тем более они велики при охлаждении образца от комнатной (300 К) до гелиевой (4 К) температуры.

Для иллюстрации экспериментальных возможностей нового подхода, используемого, в частности, и для изучения квантовых осцилляций скорости звука, рассмотрим один из вариантов проведения эксперимента по бесконтактному возбуждению звуковых волн в металлах.

Образец, имеющий форму тонкой пластины, помещается, как показано на рисунке 5, в катушку индуктивности, которая создает электромагнитное поле на его поверхности. Если подобрать частоту этого поля таким образом, чтобы она сравнялась с частотой собственных колебаний пластины, амплитуда возбуждаемого звука в ней многократно возрастет.

Экспериментально такое резонансное возбуждение можно наблюдать, измеряя частотную зависимость поглощения электромагнитной энергии в образце в присутствии постоянного магнитного поля. Положение акустического резонанса позволяет с высокой точностью определить скорость звука. Если теперь изменять индукцию магнитного поля и следить за положением акустического резонанса по частоте, то окажется, что резонансная частота последовательно увеличивается и уменьшается, что и соответствует квантовым осцилляциям скорости звука.

Мы привели только один пример конкретной реализации методики ЭМАП и только один пример экспериментального исследования. Однако низкотемпературными измерениями не исчерпываются возможности нового подхода.

Прогресс в этой области оказался удивительно быстрым. Бесконтактное возбуждение звука представляет собой в настоящее время не только одно из направлений радиоспектроскопии, но и один из методов неразрушающих испытаний материалов, нашедший себе применение в различных областях промышленности.

Вся история развития исследований по ЭМАП показывает, насколько плодотворным оказывается взаимодействие идей и методов, разрабатываемых в различных физических дисциплинах.

ФИЗИКА ПРОТИВ МОШЕННИКОВ

Кандидат биологических наук
И. ЛАЛАЯНЦ,
кандидат биологических наук
А. МИЛОВАНОВА

Знаменитая туринская плащаница оказалась подделкой! Плащаница, погребальный покров, в который, как утверждали, было завернуто тело Иисуса Христа, более чем на тысячелетие «моложе» самого Христа.

В 1989 г. несовпадение во времени было доказано строго научно. Поэтому папа Иоанн Павел II, которому доложили результаты исследования, сказал: «Публикуйте». И через две недели сей прискорбный для церкви факт был опубликован в ведущем международном научном журнале «Nature» («Природа»).

Прежде всего напомним, в чем суть дела. Известно, что в Турине, на севере Италии, на протяжении вот уже многих веков хранится в особом серебряном ковчеге некая холстина длиной 4,3 метра и шириной 1,1 метра. На холстине имеется «отпечаток» тела бородатого человека, в котором видят изображение Христа. В свое время было осуществлено компьютерное моделирование, что позволило «выявить» трехмерные очертания лица и тела человека, лежащего с вытянутыми вдоль тела руками. Фотографии этого изображения в «негативе» обошли весь мир.

Надо сказать, что сам Ватикан начиная с XIV века подвергал сомнению аутентичность (подлинность) плащаницы (от слова «плащ»). Впервые она появилась около 1350 г. в поместье некоего Жофрея де Шарни, французского рыцаря-крестоносца, графское поместье которого было недалеко от Парижа. Легенда гласит, что в 1203 г. крестоносцы перед самым взятием Константинополя видели плащаницу в его окрестностях. Но граф унес с собой в могилу секрет обретения плащаницы.

В церковь поместья де Шарни, где хранилась холстина, хлынул поток верующих и паломников, желавших причаститься реликвии. Их не смущал вопрос: где же находилась святыня в течение чуть ли не полутора тысячелетий и почему она не истрепалась за столь долгое время.

Несколько позже — уже во времена Возрождения — многие люди (особенно художники) стали обращать внимание на то, что на плащанице Христос с бородой. Дело в том, что все древнеримские источники показывают нам его... безбородым! Таким он изображен на стенах катакомб Рима, на мозаике Равеннского собора конца V века, на картине распятия, вырезанной из слоновой кости около 420 г.

Но наиболее интересна римская мозаика, случайно открытая при раскопках в английском поместье Хинтон Сент-Мэри в 1963 г. Это поместье находится в графстве Дорсет, лежащем к западу от Лондона: Безбородый Христос изображен в центре напольной мозаики в окружении четырех евангелистов — Матфея, Луки, Марка и Иоанна. Чтобы Христа не спутали с кем-нибудь другим, над его головой художник выложил знаменитое греческое «Хи Ро» — начальные буквы слова «Христос».

В 1389 г. епископ французского города Труа, что к востоку от Парижа, в верховьях Сены, писал папе Клименту IV, что плащаница является фальшивкой. Папа с ним полностью согласился. Тем не менее к 1578 г., благодаря стараниям герцога Савойского, плащаница оказывается в городе Турине (столице Савойи). Примерно в это время один итальянский художник написал картину, изображающую снятие Иисуса со креста, над которым ангел несет плащаницу с отпечатками его тела...

В настоящее время плащаница является собственностью Ватикана (с условием ее вечного хранения в Туринском соборе). С 1931 г., когда была сделана первая «негативная» фотография, началось научное исследование плащаницы. После войны, в 1951 г., была даже организована специальная Гильдия святой плащаницы, по инициативе которой в 1978 г. было проведено исследование холстины группой международных экспертов. Компьютер показал, что в нее был завернут мужчина ростом около 180 см, причем весьма худой. Американский судебный эксперт Р. Ваклин определил, что человек весил около 77 кг. Спектроскописты исследовали краску, с помощью которой на холст были нанесены отпечатки. Но проверить аутентичность ткани всеми этими методами оказалось невозможно. Необходима была точная датировка холстины.

Почему же ее не провели тогда? Ведь в распоряжении ученых уже был метод радиоуглеродного анализа, созданный американским химиком У. Либби, за что он был удостоен Нобелевской премии по химии за 1960 г. Метод, как и все гениальное, прост по своей идее и исполнению. Но в те годы для проведения анализа по этому методу требовалось сжечь довольно большой кусок холста, на что Ватикан сказал категорическое «нет» (для одного опыта тогда нужен был лоскут не меньше носового платка). В чем же суть метода?

Всем хорошо известно, что наша атмосфера постоянно бомбардируется частицами весьма высоких энергий. Попадая в ядра атомов, они выбивают из ядер нейтроны — частицы, не несущие заряда и по массе равные протонам, имеющим заряд $+1$.

Число протонов в атомном ядре равно порядковому номеру элемента в таблице Менделеева. Так, в ядре азота, стоящего в таблице на 7-м месте, содержится 7 протонов и 7 нейтронов (ядро $^{14}_{7}N$: 7 — порядковый номер, 14 — массовое число, т. е. общее число протонов и нейтронов).

Как уже говорилось, космические лучи выбивают из ядер нейтроны, обладающие достаточно высокой энергией. Поскольку нейтрон не имеет заряда, он довольно легко проникает в ядро азота, выбивая из него протон. Так получается новое ядро, в котором оказывается 8 нейтронов и всего 6 протонов.

Новое ядро имеет заряд 6 и массовое число 14, т. е. оно находится в клетке углерода.

Из-за несбалансированного количества протонов и нейтронов ядро изотопа углерода $^{14}_{6}C$ оказывается нестабильным (радиоактивным): в результате β-распада (испускания электрона и антинейтрино) оно снова превращается в $^{14}_{7}N$.

Радиоактивный углерод распадается очень медленно: половина ядер распадается примерно за время $T_{1/2} = 5600$ лет (это время называют периодом полураспада). Можно было бы подумать, что за время $2T_{1/2} = 11\,200$ лет распадутся все радиоактивные ядра. Но это, конечно, не так.

За последующие $T_{1/2} = 5600$ лет распадется половина оставшихся ядер (т. е. останется четверть начального их количества), за последующие — половина этой четверти, и т. д. В компактном виде можно записать закон убывания числа радиоактивных ядер так (закон радиоактивного распада):

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-t/T_{1/2}}.$$

Радиоактивный углерод — как и и обычный стабильный изотоп — окисляется кислородом воздуха до двуокиси CO_2, которая поглощается растениями в процессе фотосинтеза*). Количество потребляемого растениями радиоактивного углерода чрезвычайно мало — не больше одного атома $^{14}_{6}C$ на триллион (10^{12}) обычных атомов, поэтому не стоит бояться за наше здоровье.

Усвоенный в ходе фотосинтеза углерод идет на строительство огромных биомолекул целлюлозы, или клетчатки, входящей в состав травы, древесины, льна, хлопка и т. д. Травой питаются жвачные животные, от которых получают рога и копыта, кожу, из которой в древности чего только не делали. А кости и бивни слонов издревле ценились косторезами как прекрасный материал для поделок. И если вы определите количество оставшегося $^{14}_{6}C$, то тем самым вы — с определенной мерой погрешности — определите, когда был изготовлен тот или иной предмет.

Легко сказать «определите», когда мы не знаем, сколько $^{14}_{6}C$ было в древнем образце. Да, это в большинстве случаев ученым не известно, но есть некоторые «опорные» точки. Тот же Либби определил количество радиоактивного углерода в древнеегипетских предметах, время изготовления которых было точно известно по историческим документам и другим источникам (что позволило рассчитать первоначальное количество $^{14}_{6}C$). Кроме того, археологи и антропологи умеют примерно определять возраст по глубине залегания. Естественно, что чем древнее стоянка, тем глубже приходится копать. Так постепенно стало ясно, сколько примерно может содержаться радиоактивного углерода в образце того или иного времени. Недаром ученые говорят о дате с точностью $\pm(30-80)$ лет.

Одной из крупнейших побед нового метода физической датировки было разрешение загадки знаменитого «пилтдаунского человека». Он был назван по местечку Пилтдаун к югу от

Радиоуглеродный анализ помог определить возраст этого мусульманского коврика — VII век н. э.

Лондона, где в 1912 году археолог-любитель Ч. Доусон нашел череп человека, умершего — как потом выяснилось — в середине XV века во время эпидемии чумы. Хитроумный А. Кейт приделал к черепу нижнюю челюсть орангутана с острова Борнео и объявил подделку «находкой века», «недостающим звеном» между человеком и обезьяной.

Уже в 1913 г., сравнив на рентгене плотность костей черепа и челюсти, ученые подвергли сомнению справедливость этого заявления, но их никто не послушал (т. е. уже в самом начале с помощью физического метода можно было бы разоблачить подделку, а вместе с нею и главного подделывателя, который в 1939 г. открыл «памятник» на месте находки). Когда в 1953 г. Кейту сказали, что пилтдаунский человек подделка, он ответил, что знает. К сожалению, все подумали, что он имел в виду отчет о раскрытии подделки, опубликованный в лондонской «Таймс»...

Очень часто изделия, открытые археологами, настолько ценны, что никто не осмеливается подвергать их радиоуглеродному анализу, а попросту говоря сжигать. Но не менее часто на месте находок удается обнаружить угли костров, по которым и определяют возраст захоронения, очага жилищ и т. д. Совсем недавно так

*) Об этом рассказывается в статье «Зеленая, зеленая трава...», опубликованной в «Кванте» № 7 за 1989 год.

было датировано первое групповое захоронение кроманьонцев в чешской области Моравии. Возраст находки оказался равным 28 тысячам лет! А неподалеку от Моравии в австрийском Гальгенберге ученые раскопали фигурку женщины, которую древний художник вырезал из стеатита, или мыльного камня. Возраст фигурки — 27 тысяч лет.

Сегодня разрешающая способность радиоуглеродного анализа резко возросла благодаря применению компьютеров и «кооперированию» его с другими более тонкими и точными физическими методами. Речь идет о масс-спектрометрии, которая позволяет «напрямую» подсчитывать количество атомов $^{14}_{6}C$. Помимо повышения точности анализа, новый метод позволяет резко уменьшить объем и массу образца, по которому определяют возраст.

Метод заключается в отделении атома $^{14}_{6}C$ от остальной массы углерода в образце. Для этого все атомы углерода — как стабильного природного, так и радиоактивного — подвергаются ионизации, после чего они разгоняются в ускорителе до энергии примерно 10 МэВ (10 миллионов электронвольт). Далее все атомы «прогоняют» сквозь магнитное поле, в котором более легкие атомы $^{12}_{6}C$ и $^{13}_{6}C$ отклоняются в большей степени, нежели тяжелые $^{14}_{6}C$. Остается только подсчитать количество атомов $^{14}_{6}C$ на финише (на нем окажутся только эти атомы).

Метод масс-спектрометрии позволил не только в 1000 раз уменьшить необходимую для анализа массу образца, но и отодвинуть датировку в более далекое прошлое. Дело в том, что число радиоактивных распадов $^{14}_{6}C$ при старом методе определялось как число сцинтилляций, или вспышек молекул флюоресцирующего вещества, которые усиливались фотоумножителями и подсчитывались компьютером. При таком довольно грубом методе требовалось не меньше 10 тысяч атомов $^{14}_{6}C$, содержащихся в 1—5 г чистого углерода (соответственно в 25—1000 г образца). Для масс-спектрометра же требуется всего 0,5—5 мг углерода!

Резко снизились требования и к радиоактивности углерода. В образцах старше 37—40 тысяч лет радиоактивность не отличалась от фоновой, которая существует благодаря космическому излучению и современному радиоактивному загрязнению. Сегодня, как уже говорилось, определяется не радиоактивность как таковая, а всего лишь число атомов $^{14}_{6}C$, что гораздо легче и точнее. Неудивительно поэтому, что когда в Ватикане изложили все эти соображения, было получено разрешение на проведение анализа ткани плащаницы.

Анализ проводился в трех лабораториях: Цюриха, Оксфорда и Аризонского университета в г. Туксоне. Для контроля были взяты кусочки тканей, возраст которых известен. Это ткань священных одеяний, хранящихся ныне в часовне Жана Базилика во французском городке Вар, а также ткань, в которую обернуты мощи одного из исламских пророков.

Результаты анализов, проведенных в этих трех лабораториях, определили время изготовления одеяний: начало XIII века и XI—XII века́, что соответствует историческим данным. Затем ученые приступили к датировке ткани плащаницы и определили ее возраст: между 1262 и 1384 гг. Таким образом, плащаница оказалась более чем на тысячу лет «моложе», нежели предполагалось. По этому поводу представитель Ватикана кардинал Анастасио Баллестреро заявил: «Я не вижу причин, по которым церковь могла бы оспаривать результаты исследования и подвергать их сомнению». А американский физик Д. Донахью добавил, что ткань плащаницы могла быть соткана намного позже того, когда для нее был выращен лен, из которого она сделана, но это позже, а не раньше, поэтому плащаница может быть только еще моложе, но никак не старше.

М. Тайт, который со стороны Британского музея координировал усилия всех трех лабораторий, сказал, что «поражает удивительное совпадение

Стол рыцарей Круглого стола легендарного короля Артура, оказавшийся на полтысячелетия «моложе» самих рыцарей.

результатов разных групп». Таким образом, король умер! Но у этой фразы есть и продолжение: да здравствует король! Средства массовой информации с удивлением отметили, что количество паломников после опубликования результатов ученых резко возросло! Нескончаемые очереди в кафедральный собор Джованни Баттиста — так итальянцы на свой лад называют *Иоанна Крестителя, крестившего в* святых водах Иордана самого Христа,— поражают воображение, поскольку «там» от очередей давно отвыкли. Люди отстаивают долгие часы к ковчегу, чтобы лишний раз убедиться, что плащаница на месте и ей не нанесено никакого ущерба.

Ну а что же теперь ученые говорят об изображении некоего тела, подлинность которого на холстине никем не отрицается? В 1979 г. У. Макрон из Чикагского университета провел анализ частицы краски, с помощью которой сделан этот «рисунок». Оказалось, что она ничем не отличается от самой обычной... ржавчины! которая химически представляет собой, как известно, окись железа, широко применявшуюся средневековыми художниками.

Талантливость изображения, его стиль, а также прекрасное знание анатомии позволяют предположить, *что автор его — сам великий Леонардо* из города Винчи, умерший в 1519 г., т. е. в самом начале XVI века. Хочется надеяться, что будущие поколения ученых сумеют раскрыть окончательно тайну туринской плащаницы. Как — трудно пока сказать. Но так же трудно было всего лишь несколько лет тому назад предполагать, что сегодня мы будем знать точный ее возраст.

Подделкам в мире искусств нет числа. Совсем недавно Британский музей провел очередную (!) выставку знаменитых подделок произведений искусства самых разных времен и цивилизаций. На ней была представлена вавилонская клинописная табличка II тысячелетия до н. э., сделанная под третье тысячелетие! Забавно, что на этой поддельной табличке имеется древнешумерская надпись, которая гласит: «Подделывателю сего документа Энки забьет все каналы слизью!» Если учесть, что Энки был великим божеством, то проклятье действительно было грозным.

Сегодня в распоряжении искусствоведов и музейных работников имеется множество физических методов для определения подделок, не соответствующих тому времени, на которое они «рассчитаны». При освещении, например, поверхности художественного изделия ультрафиолетовыми лучами она начинает флюоресцировать. Съемка такой светящейся поверхности, особенно с помощью микроскопа, позволяет выявить множество деталей, которые не видны невооруженным глазом. А инфракрасные лучи позволяют «видеть» и то, что скрыто под красочным слоем. То же можно сказать и о съемке в рентгеновских лучах. Рентген позволил увидеть под «Юдифью» Тициана портрет испанского короля Карла V.

Есть в распоряжении ученых и так называемый активационный анализ. Он заключается в активации ядер атомов металла с помощью быстрых нейтронов. Отдавая затем полученную энергию, ядра формируют специфический спектр, по которому можно отличить, например, свинец от титана. Оказывается, в старину художники грунтовали холст свинцовыми белилами, сегодня же они для этого используют титан. Известно, что титановые белила стали выпускаться в 20-х годах нашего столетия.

А вот знаменитая краска «берлинская лазурь» появилась в конце XVIII в. На упоминавшейся уже выставке в Британском музее висел один из «Боттичелли», созданный после первой мировой войны. Настоящий Сандро Боттичелли, живший в 1445—1510 гг., никак не мог рисовать с помощью берлинской лазури, обнаруженной при исследовании хламиды Богородицы на «его» картине.

Сейчас крупнейшие музеи мира, в том числе Британский, Лувр, нью-йоркский Метрополитен, а также музей Пибоди в Гарварде, что неподалеку от Бостона в США, обзаводятся компактными ускорителями протонов и ионов. В подземелье Лувра установлен ускоритель, построенный в США и обошедшийся министерству культуры Франции в 1,6 млн. долларов. Он используется для идентификации произведений искусства, а также в решении проблемы их сохранности.

Так в музее Пибоди выявили «современную» костяную пластинку, резьба на которой изображала мамонта. Эта пластинка появилась в музее в 1889 г. и произвела в свое время самую настоящую сенсацию, поскольку «свидетельствовала» о том, что на территории нынешних США некогда водились эти мохнатые родственники слонов. Теперь все встало на свое место: мамонты в Новом Свете не водились, что давно утверждали зоологи и палеонтологи.

Не надо думать, что физические методы используются в искусствоведении только для разоблачения подделок. Нет, с их помощью осуществляются и «реабилитации». Речь, в частности, идет о новом методе ПИРЭ, или протон-индуцированной рентгеновской эмиссии.

В чем суть этого метода?

Если разогнанные в ускорителе протоны сфокусировать в тонкий пучок диаметром 0,5—1 мм (энергия пучка до 4,5 МэВ) и направить на поверхность, например, рукописи, то протоны начинают возбуждать атомы металлов, входящих в состав краски или чернил. За сохранность древних документов можно не волноваться: энергия облучения не превышает энергию 100-ваттной лампочки, освещающей книгу с расстояния полуметра!

Возбужденные атомы испускают рентгеновские лучи, которые регистрируются чувствительными детекторами. Затем сигналы от детекторов подаются в компьютер для анализа.

С помощью метода ПИРЭ была не так давно «прочитана» 42-строчная Библия, отпечатанная в типографии Гутенберга, находящаяся в библиотеке Гарвардского университета.

Выяснилось, что Гутенберг использовал для своей типографской краски большие количества свинца и меди. Помощники Гутенберга по типографии смешивали новые порции краски буквально каждый день. Библия состояла из нескольких тетрадей. Ежедневно печаталось до шести тетрадей одновременно. Поначалу Библию печатали в 40 строк, но затем перешли на 42 строки. Переносы не допускались — на весь текст было допущено всего два переноса слов! После того как первый лист отпечатывали с обеих сторон, начинали печатать 2-й и 120-й и т. д. Это и позволяло вести работу над шестью тетрадями одновременно, хотя и требовало очень точного соблюдения «технологии», раскрытой с помощью метода ПИРЭ. В лаборатории, где проводилась экспертиза Библии Гутенберга, проходил практику и специалист из Лувра. Музей хочет исследовать 36-строчную Библию Гутенберга, которая отпечатана раньше 42-строчной и хранится в Национальной библиотеке Франции.

С помощью ПИРЭ удалось «реабилитировать» и известную «карту Винланда». Винландом — «Страной винограда» — норманны называли в своих сагах некую далекую землю, лежавшую за Гренландией, богатую диким виноградом. Ее будто бы открыл легендарный Эрик Рыжий, считающийся сегодня первооткрывателем Америки.

Карта Винланда вошла в научный обиход в начале 60-х годов нашего столетия. Ученых поразило удивительно точное изображение Гренландии, мало чем отличающееся от современного. Считалось, что подобной точности картографии просто было невозможно добиться во времена отважных викингов.

В 1974 г. карта была объявлена подделкой на основании анализов, проведенных группой ученых Чикагского университета. Анализы показали высокое содержание окислов титана в чернилах, которые использовались для нанесения линий на карте.

И вот ПИРЭ доказал, что по крайней мере треть линий, а то и больше нанесена на карте чернилами, содержание титана в которых не превышает «норму», т. е. тот минимум, который можно считать естественной примесью. В других линиях титан и вовсе отсутствовал!

Значит ли это, что была доказана подлинность карты? Да нет, просто было показано, что для чернил не использовали окислов титана, т. е. чернила не современные. Но ведь кто-то мог изготовить чернила и по средневековым рецептам. Пока физика доказать полную аутентичность карты не может. Вот если бы она позволила построить машину времени...

Все, конечно, помнят великолепную книгу Марка Твена «Янки при дворе короля Артура» и рыцарей Круглого стола. Много лет в большом холле кафедрального собора в английском городе Винчестер на стене висит огромный — больше шести метров в диаметре — круглый стол, вернее его столешница. Туристы из разных стран восхищались ее разноцветными секторами и большим красно-желтым цветком в самом центре. К сожалению, сегодня почитателей старины и благородных рыцарей ждет разочарование: радиоуглеродный анализ показал, что дерево, из которого была сделана столешница, росло в Англии всего лишь на полтысячи лет позже того времени, когда жил и творил легендарный король Артур...

Так вот физика помогает нам сегодня разгадывать вечные загадки волнующего искусства. Жизнь коротка, искусство вечно, говорили древние.

ОСВЕЩЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА, КОНУСЫ И ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

В. МАТОВ, Е. ПЕКАРЬ

Как мы решили написать статью

Все началось с того, что один из авторов придумал задачу:

В точке пространства расположены 4 прожектора. Каждый из них освещает часть пространства, испуская бесконечный выпуклый световой конус. При этом ни один конус не содержит противоположно направленных лучей, любые три из них имеют общий луч, а все четыре — нет. Докажите, что тогда любая точка пространства освещена.

— Задачка интересная,— сказал другой автор,— но, по-моему, школьники не знают, ни что такое «бесконечный конус», ни что такое «выпуклый».

— Зато какая перспектива! — настаивал первый,— осветить все пространство и всего-то четырьмя прожекторами. Кроме того, школьники, выписывающие «Квант», могут знать определение выпуклости и некоторые свойства выпуклых множеств по статьям А. Савина «Кое-что о выпуклости» и О. Ижболдина и Л. Курляндчика «Неравенство Иенсена» («Квант» № 1, 1979 и № 4, 1990).

— Да,— сказали оба автора, придется рассказать кое-что еще о выпуклости.

Так и появилась эта статья, в которой обсуждаются свойства выпуклых фигур, рассматриваются принципы захвата территорий, освещается пространство, доказывается знаменитая теорема Хелли, а также... Впрочем, читайте.

Выпуклость

Слово «выпуклый» довольно часто употребляется в жизни, так же, как и слово «вогнутый». Например, бывают плоские, выпуклые и вогнутые зеркала. Однако житейское и математическое понимание выпуклости несколько различны. В математике все (без исключения!) геометрические фигуры делятся на два класса: выпуклые и невыпуклые. Математическое понятие выпуклости на житейском языке можно выразить так: выпуклые фигуры — это фигуры, не имеющие вогнутостей. Вот точное определение:

Множество называется выпуклым, если вместе с любыми двумя точками A и B оно содержит и соединяющий их отрезок. Пустое множество также считается выпуклым.

Если множество имеет вогнутость («ямку»), то отрезок, соединяющий ее края, принадлежит множеству не полностью, так что такое множество невыпукло.

Теперь вы можете легко доказать, что точка, отрезок, плоскость, полуплоскость, круг, шар, куб и многие другие фигуры выпуклы, а множества на рисунке 1 — нет. А будет ли выпуклым пересечение*) круга и квадрата? Будет, причем безразлично, как они расположены друг относительно друга. Выпуклые множества обладают замечательным свойством: пересечение любого их числа — выпуклое множество. В самом деле, если A и B — две точки из пересечения,

*) Пересечением двух множеств называется их «общая часть», т. е. множество, состоящее из всех точек, принадлежащих одновременно обоим множествам. Обозначение: $A \cap B$ — пересечение множеств A и B. Объединением двух множеств называется множество всех точек, принадлежащих или первому, или второму множеству. Обозначение: $A \cup B$ — объединение множеств A и B.

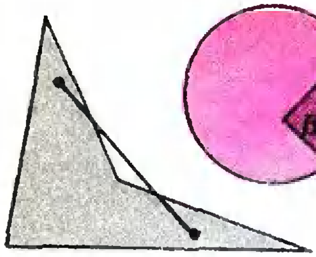


Рис. 1.

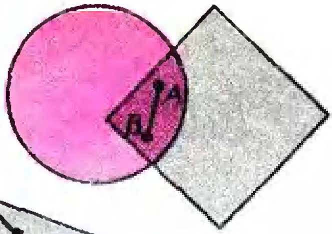


Рис. 2.

то они принадлежат каждому из множеств. А в силу выпуклости каждое из множеств содержит отрезок AB, следовательно, и он принадлежит пересечению (рис. 2).

— Однако,— скажет въедливый школьник,— в учебнике уже даны определения выпуклого многоугольника и выпуклого многогранника. *Это многоугольник (многогранник), лежащий по одну сторону от каждой прямой (плоскости), проходящей через его сторону (грань).* Эквивалентны ли «школьное» и «общее» определение, то есть все ли многоугольники и многогранники, выпуклые по одному из определений, выпуклы и по другому?

Конечно же, эти определения эквивалентны. Самые въедливые школьники могут провести строгое доказательство самостоятельно.

Любой школьник сразу же заметит, что «общее» определение проще и универсальнее «школьного»: оно относится к самой фигуре, а «школьное» требует, чтобы многоугольник обязательно находился на плоскости (это нужно для понятия «по одну сторону от прямой»). Например, для грани многогранника сначала надо «провести» содержащую ее плоскость и только потом можно определить, выпукла ли грань.

Выпуклая оболочка

Даже если множество невыпуклое, для него еще не все потеряно: его можно естественным образом дополнить до выпуклого множества. Последнее называется его выпуклой оболочкой.

Способ получения выпуклой оболочки ограниченной плоской фигуры очень прост: следует растянуть замкнутую резинку так, чтобы она охватывала фигуру, и отпустить. Если резинка при этом не порвется, то часть плоскости, ограниченная ею, и есть выпуклая оболочка фигуры.

Для пространственного тела следует поступать аналогично: засунуть это тело внутрь воздушного шарика и осторожно натянуть шарик, давая выйти воздуху.

Вот точное определение: *выпуклой оболочкой множества M называется минимальное выпуклое множество, содержащее M,* т. е. выпуклое множество, содержащее M и не содержащее других выпуклых множеств, содержащих M. Выпуклую оболочку множества M теоретически можно построить, взяв пересечение всех выпуклых множеств, содержащих M. Действительно, это пересечение выпукло и, кроме того, любое выпуклое множество, содержащее M, содержит и пересечение.

Как и во многих других случаях, чтобы не писать словосочетания «выпуклая оболочка множества M», придумано обозначение conv (M) (от слова *convex* — выпуклый).

Упражнение 1. Докажите, что:
а) M лежит в conv (M);
б) если M лежит в N, то conv (M) лежит в conv (N);
в) $\mathrm{conv}\,(M \cup N) = \mathrm{conv}\,(\mathrm{conv}\,(M) \cup N)$.

Однако, как практически найти conv (M), зная M? Рецепт достаточно прост и противоположен рецепту О. Родена получения скульптуры из глыбы мрамора постепенным отсечением всего лишнего: надо постепенно добавить все недостающее. А именно: рассмотрим множество M_1, состоящее из точек всех отрезков с концами в

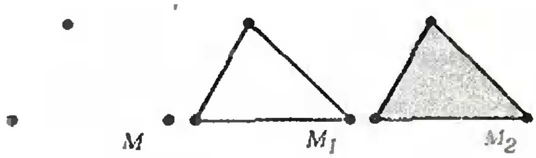


Рис. 3.

M, затем множество M_2, полученное подобным же образом из M_1, и т. д. (рис. 3). К счастью, оказывается, что этот процесс не очень долог: можно доказать, что для плоских фигур уже $M_2 = \mathrm{conv}(M)$, а для пространственных — $M_3 = \mathrm{conv}(M)$.

Упражнение 2 Постройте выпуклые оболочки следующих множеств: а) 4 точки на плоскости; б) 4 точки, не лежащие в одной плоскости; в) 5 точек в пространстве. Рассмотрите все возможные случаи!

Разделяй и властвуй

Недоверчивый школьник уже, конечно, засомневался: «Если отсекать лишнее от глыбы мрамора *имеет* прямой смысл (особенно если это делает Роден), то зачем, собственно, нужно трудиться, дополняя невыпуклое множество до его выпуклой оболочки?»

Дело в том, что дополнение множества до его выпуклой оболочки — процесс естественный. Это, например, подтверждает жизнь в стране Флатландии (впрочем, и в стране Спейсландии жизнь не лучше). Жители Флатландии, а проще — плоскости, одержимы манией к захвату территорий. Стоит нескольким жителям окружить какую-нибудь территорию, как *они* считают ее своей. Считается, что точка окружена, если нельзя провести прямую, относительно которой эта точка и точки $A_1, A_2, \ldots, A_k$, в которых *находятся* захватчики, лежат строго в разных полуплоскостях. Можно доказать, что окруженная территория — это выпуклая оболочка точек $A_1, A_2, \ldots, A_k$ (рис. 4). Теперь

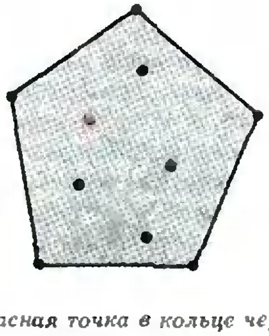


Рис. 4. Красная точка в кольце черных врагов.

знакомый с историей школьник понимает, что в точности означает выражение «находиться в кольце врагов»...

Жизнь во Флатландии была бы просто ужасной, если бы все захватчики действовали заодно. В самом деле, стоит *трем захватчикам* A_1, A_2, A_3 (мы будем отождествлять захватчиков с точками, в которых они находятся) двигаться так, чтобы все высоты треугольника $A_1A_2A_3$ *неограниченно* росли, как рано или поздно любая точка плоскости окажется захваченной.

Верный способ избежать превращения *Флатландии* в *империю* — поссорить захватчиков. Они разделятся на враждующие группировки и забудут про захват территорий. Этот древний принцип называется «разделяй и властвуй». Из-за чего могут поссориться захватчики? Ну, конечно, из-за территорий: если две группировки претендуют на одну и ту же территорию, ссоры не избежать. Школьник наших дней не ощущает недостатка в примерах.

Итак, принцип «разделяй и властвуй» состоит в том, что нужно разбить множество точек $A_1, A_2, \ldots, A_k$ на два подмножества так, чтобы их выпуклые оболочки пересекались. (Тогда захватчики из обоих подмножеств будут претендовать на точки из пересечения.) Осуществимость принципа «разделяй и властвуй» первым доказал математик Радон, вот теорема его имени:

Каждое множество на плоскости (в пространстве), если оно содержит не менее четырех (пяти) точек, можно разбить на два непересекающихся множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.

Проницательный школьник, конечно, заметил справедливость теоремы Радона, выполняя упражнение 1. Доказательство достаточно провести для четырех (пяти) точек, а остальные точки присоединить к любому из двух полученных множеств. Для четырех точек на плоскости доказательство видно из рисунка 5. Флатландия спасена.

Займемся пространством. Рассмотрим в нем точки $A_1, \ldots, A_5$. Если какие-

Рис. 5.

то четыре из них лежат в одной плоскости, то задача сводится к теореме Радона для плоскости, поэтому допустим, что $A_1, \ldots, A_4$ в одной плоскости не лежат. Тогда conv $(A_1, \ldots, A_4)$ — тетраэдр с вершинами в них. Если он содержит A_5, то $\{A_1, \ldots, A_4\}$ и $\{A_5\}$ — нужное разбиение (рис. 6, *а*). Предположим теперь, что A_5 не принадлежит тетраэдру. Плоскость, проходящая через три вершины тетраэдра, делит пространство на два полупространства, одно из которых содержит тетраэдр. Тетраэдр — пересечение четырех таких полупространств, следовательно, A_5 не принадлежит какому-то из них — например, определяемому точками A_1, A_2 и A_3. Тогда отрезок A_4A_5 пересекает эту плоскость в некоторой точке B (рис. 6, *б*). Применив к точкам A_1, A_2, A_3, B теорему Радона для плоскости, получим два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются. Заменив точку B в одном из них на пару точек A_4 и A_5, получим требуемое разбиение.

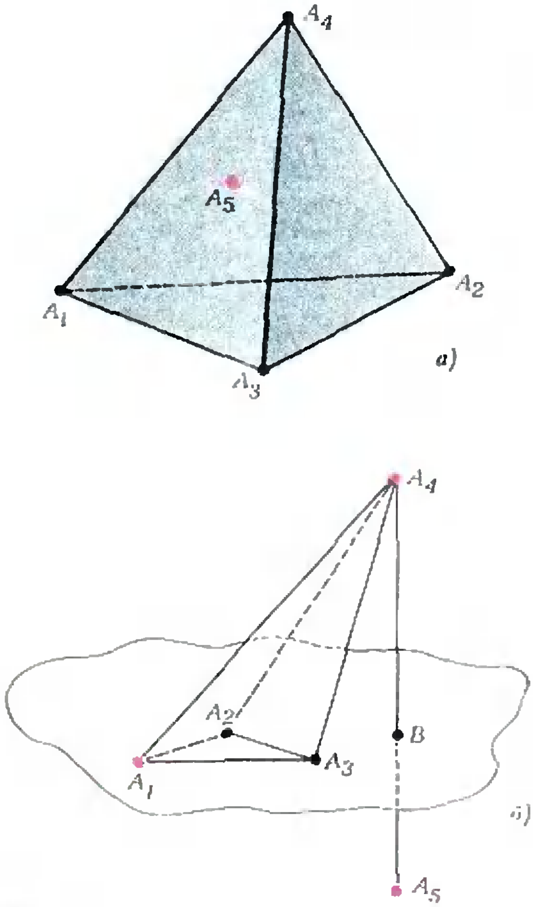


Рис. 6.

Принцип «разделяй и властвуй» скоро нам понадобится, а тем временем мы узнали о выпуклости достаточно, чтобы заняться освещением пространства. Осталось только разобраться с тем, что такое конус.

Конус — это шаг от малого к большому

Бывалый школьник не раз видел пучок света от отдаленного прожектора. Поэтому он уже догадался, что математическое определение конуса таково:

Конусом (бесконечным) называется множество, состоящее из точек лучей, выходящих из одной и той же точки, называемой вершиной конуса.

Само определение подсказывает, как построить примеры конусов: нужно взять лучи, выходящие из точки O и проходящие через какое-либо множество M. (Говорят, что такой конус порожден множеством M.) Если в качестве M взять круг в пространстве, не содержащий O, то получится круговой конус, а если многоугольник — то многогранный. Если лучи заменить отрезками, то получатся соответственно «школьный» круговой конус и пирамида. А что получится, если O лежит внутри круга? А если на его граничной окружности?

«Маленькое» множество может породить «большой» конус. Вот важный пример: если точка O лежит строго внутри тетраэдра T (т. е. не на его границе), то все пространство — это конус, порожденный границей тетраэдра T. «Маленький» тетраэдр породил бесконечное пространство.

Можно сконструировать несметное количество конусов, воспользовавшись следующими свойствами конусов с общей вершиной: непустое пересечение таких конусов — конус, объединение — тоже конус.

Дочитавший до этого места школьник знает, что выпуклый конус — это конус, являющийся выпуклым множеством. Например, если конус порожден выпуклым множеством, то он тоже выпуклый. Заметим при этом, что если у выпуклого конуса, не содержащего противоположно направленных лучей, удалить его вершину, то оставшееся множество будет по-прежнему выпукло.

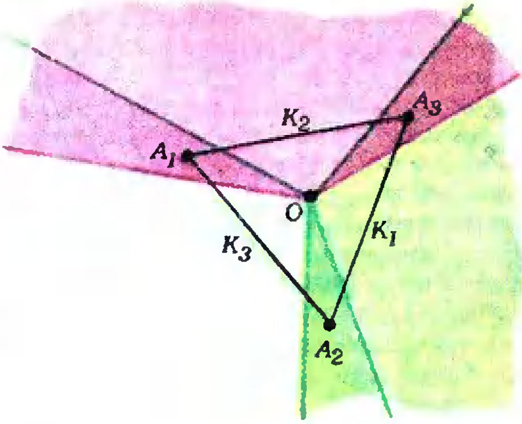


Рис. 7.

Освещение пространства

Пора наконец осветить пространство. «Математическая суть» нашей задачи такова: в пространстве имеются четыре выпуклых конуса K_1, K_2, K_3, K_4 с общей вершиной O, ни один из которых не содержит противоположно направленных лучей. Кроме того, любые три из них имеют общий луч, а пересечение всех четырех — это точка O. Нужно доказать, что объединение K конусов K_1, K_2, K_3, K_4 — это все пространство.

Упражнение 3. Сформулируйте и докажите аналогичный результат для освещения плоскости.

Внимательный школьник помнит, что, собственно говоря, мы уже сделали первый шаг к освещению пространства: мы заметили, что достаточно построить тетраэдр T, граница которого содержится в K, так, чтобы точка O лежала внутри T.

Сейчас мы такой тетраэдр построим. Выберем в пространстве четыре точки A_1, A_2, A_3, A_4 следующим образом: A_i — это какая-либо отличная от O точка из пересечения трех конусов K_j с номерами j, не равными i. Пусть T — выпуклая оболочка conv(A_1, A_2, A_3, A_4). Теперь надо только показать, что T — тетраэдр, граница которого содержится в K, и что O лежит внутри T (см. рис. 7 для случая плоскости).

Надеемся, что школьник еще не забыл принцип «разделяй и властвуй». Настало время его применить. Итак, по теореме Радона множество $\{O, A_1, A_2, A_3, A_4\}$ можно разбить на два непересекающихся подмножества M и N таких, что conv (M) пересекает conv (N). Для определенности будем считать, что точка O содержится в M.

Разделение произошло. Пора властвовать. Обозначим через I множество индексов i, таких, что A_i содержится в M, а через J множество индексов j, таких, что A_j содержится в N (заметим, что I может быть пустым, а J — нет). Тогда в силу выпуклости K_j множество conv (M) лежит в K_j для всех j из J, а conv (N) — в K_i для всех i из I. Так как любой номер 1, ..., 4 содержится либо в I, либо в J, то пересечение conv (M) и conv (N) содержится в пересечении K_1, K_2, K_3, K_4, а следовательно, состоит только из точки O. Значит, O содержится в conv (M), и тем самым в T.

Итак, O лежит в T. Следующий шаг состоит в том, чтобы убить сразу двух зайцев. Если мы докажем, что O не принадлежит выпуклой оболочке никаких трех точек из числа A_1, ..., A_4, то тогда, во-первых, точки A_1, ..., A_4 не лежат в одной плоскости и, тем самым, T — тетраэдр, а во-вторых, O лежит строго внутри T.

Спокойно! Переходим к убийству зайцев. Предположим, что O содержится в conv (A_1, A_2, A_3), т. е. O лежит в треугольнике с вершинами A_1, A_2 A_3 (или на его границе). Так как O не совпадает ни с одной из точек A_i, то O лежит на некотором отрезке с концами B и C на сторонах треугольника, который, в свою очередь, в силу выпуклости принадлежит K_4. Тем самым K_4 содержит противоположно направленные лучи OB и OC, что противоречит условию.

Остался последний шаг: доказать, что граница T содержится в K. Ну, это просто: граница состоит из четырех треугольников, каждый из которых содержится в одном из конусов K_j (действительно K_j — выпуклый конус, содержащий все A_i при i, не равном j). Следовательно, граница T принадлежит K.

Цель достигнута, пространство освещено.

Экономить стоит

Щедрый школьник наверняка уже задался вопросом: «Если уж речь идет о такой грандиозной задаче, как освещение всего пространства, то стоит ли экономить на прожекторах. Можно ли, например, осветить все пространство, имея пять выпуклых световых конусов с общей вершиной O, каждые четыре из которых имеют общий луч?» Ответ на этот вопрос об экономии дает знаменитая теорема Хелли:

Если в пространстве даны n выпуклых множеств, где $n>4$, каждые четыре из которых пересекаются, то все n множеств также имеют общую точку.

Конечно же, пять выпуклых множеств, получающиеся удалением вершины O из каждого конуса, удовлетворяют условию теоремы Хелли, и тем самым, имеют общую точку, скажем A. Но тогда луч противоположно направленный по отношению к лучу OA, не содержится ни в одном из конусов. Пространство не удалось осветить полностью пятью прожекторами. Экономить на прожекторах стоит.

Итак, уважаемый школьник, теорема Хелли спасла нас от лишних и бесполезных затрат. Она выручает и во многих других случаях. А кроме того, она — яркое воплощение принципа «разделяй и властвуй». Сейчас мы это увидим.

Теорема Хелли доказывается индукцией по числу множеств n. Пусть X_1 $X_2, \ldots$ X_n — выпуклые множества, удовлетворяющие условию теоремы. Если $n=4$, то все множества имеют общую точку по условию. Предположим, что утверждение теоремы справедливо для $n=k$, и докажем его для $n=k+1$.

Рассмотрим все множества $X_1, \ldots$ $\ldots, X_{k+1}$, кроме X_i. По условию каждые 4 из них пересекаются, а значит по предположению индукции эти k множеств имеют непустое пересечение. Пусть A_i — какая-либо точка из этого пересечения.

Разделяй! По теореме Радона множество $\{A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}\}$ можно разбить на два непересекающихся подмножества M и N такие, что conv (M) и conv (N) имеют непустое пересечение.

Властвуй! Обозначим через I множество индексов i, таких что A_i содержится в M, а через J множество индексов j, таких, что A_j содержится в N. Вспомним, что при i, не равном j, точка A_i содержится в X_j. Следовательно, все точки A_i из M содержатся в каждом из множеств X_j, где j из J. И наоборот, все точки A_j из N содержатся в каждом из множеств X_i, где i из I. В силу выпуклости conv (M) лежит в каждом X_j при j из J, а conv (N) лежит в каждом X_i при i из I. Таким образом, пересечение conv (M) и conv (N) содержится во всех множествах $X_1, \ldots, X_{k+1}$, что и доказывает теорему.

Упражнение 4. Сформулируйте и докажите теорему Хелли для случая плоскости. (В справедливости теоремы Хелли для плоскости можно убедиться, наблюдая за выпуклыми пятнами света на сцене театра или арене цирка.)

Еще кое-что о выпуклости

Все, о чем мы здесь рассказали, относится к комбинаторной геометрии выпуклых множеств. Заинтересовавшемуся школьнику рекомендуем найти и прочитать книгу И. Яглома и В. Болтянского «Выпуклые фигуры». Главы, посвященные выпуклым множествам, имеются также в 5 томе «Энциклопедии элементарной математики» и книге Д. Шклярского, Н. Ченцова и И. Яглома «Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии».

Везде, где решаются задачи на максимум (минимум), естественным образом «возникают» выпуклые множества (даже если их и не было в условии задачи), а также тесно связанные с ними выпуклые функции. Подробнее об этом любознательный школьник может прочесть в книге В. Тихомирова «Рассказы о максимумах и минимумах», вышедшей в «Библиотечке «Кванта».

Выпуклые множества возникают и в задачах, связанных с преследованиями. Вот одна из них:

На плоскости таракан убегает от пауков-телепатов, которые в любой момент знают, в каком направлении и с какой скоростью он намерен ползти, и могут мгновенно менять свои скорости. Максимальные скорости всех насекомых одинаковы. При каких начальных условиях таракан сможет убежать, а при каких — нет?

Справившись с этой задачей, можете решить аналогичную про муху и ос в пространстве.

„Квант" улыбается

Прямая речь
(физико-математическая)

Абсолютный ноль — «И в мыслях нет».

Аксиома — «Будут требовать доказательства — уйду в теоремы».

Биссектриса — «Всю жизнь приходится делить поровну».

Вакуум — «Прошу не путать с пустотой».

Вибрация — «А меня колотит и трясет».

Влажность — «Всегда из-за гигрометров моя репутация оказывается подмоченной».

Выпрямитель — «Веду борьбу с искривлениями».

Высота — «Все дело в основании».

Гипотенуза — «Ну и что с того, что я длинней, катетов-то все равно больше».

Гистерезис — «Что наша жизнь — петля!»

Градус — «Трудно всегда быть под градусом».

Диэлектрик — «Ничего никуда проводить не буду!»

Закон Архимеда — «Да не утонет знающий меня!»

Знак умножения — «Нас иногда путают со знаком сложения, но ведь мы на все смотрим под своим углом».

Инерция — «Движение — это сила...»

Квадрат — «Я за равенство».

Константа — «Не могу поступиться принципом».

Окружность — «Вот что время делает с квадратом».

Параллельная прямая — «Легче встретиться с Лобачевским, чем с подругой».

Периметр — «Приходится держать площадь в рамках».

Пирамида — «Могу похвастаться родословной. Еще в Древнем Египте...»

Погрешность — «Все могу простить, кроме ошибок».

Развернутый угол — «Прямые считают меня углом, а углы — прямой линией».

Рентген — «Я вас насквозь вижу».

Свет — «Тьма тоже распространяется со скоростью света».

Скорость — «Помогаю распространяться».

Смесь — «С кем поведешься, от того и наберешься».

Теорема — «Все время приходится кому-то доказывать».

Ток — «За электронами нужен глаз да глаз».

Турбулентность — «Не могу без завихрений».

Уравнение — «Мое дело приравнять, а там...»

Цепь — «Если бы не было звеньев, то не было бы и меня».

Шум — «Чтобы со мной бороться, тоже нужно шуметь».

Эталон — «На меня все равняются».

Е. Лапин

Задачник „Кванта"

Задачи

М1296 — М1300, Ф1303 — Ф1307

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 октября 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 8—91» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1296» или «Ф1303». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М1296—М1300 и Ф1303—Ф1307 предлагались на заключительном этапе XXV Всесоюзной олимпиады по математике и физике.

М1296. Из многоугольника можно получить новый многоугольник с помощью следующей операции: разрезав его по отрезку на 2 части, одну из частей перевернуть и приставить к другой части по линии разреза, если при этом части не будут иметь общих точек, кроме точек разреза. Можно ли с помощью нескольких таких операций из квадрата получить треугольник?

И. Воронович

М1297. Числа α и β удовлетворяют равенствам

$$\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha=1,$$
$$\beta-3\beta^2+5\beta=5.$$

Найдите $\alpha+\beta$.

Б. Кукушкин

М1298. Билет лотереи — карточка, на которой имеется 50 пустых подряд расположенных клеток. Каждый участвующий в лотерее во все клетки записывает числа от 1 до 50 без повторений. Организаторы лотереи по таким же правилам заполняют свою карточку-эталон. Выигравшим считается билет, у которого хотя бы в одной клетке записано такое же число, какое записано в этой же клетке карточки-эталона. Какое наименьшее количество билетов надо заполнить играющему, чтобы иметь выигрышный билет независимо от того, как заполнена карточка-эталон?

А. Берзиньш

М1299. На доске выписаны n чисел. Разрешается стереть любые два из них, скажем a и b, и вместо них записать одно число $(a+b)/4$. Эта операция повторяется $n-1$ раз, и в результате на доске остается одно число. Докажите, что если на доске первоначально были выписаны n единиц, то в результате всех операций на доске останется число не меньшее, чем $1/n$.

Б. Берлов

М1300. Следователь придумал план допроса свидетеля, гарантирующий раскрытие преступления. Он собирается задавать вопросы, на которые возможны только ответы «да» или «нет» (то, какой вопрос будет задан, может зависеть от ответов на предыдущие). Следователь считает, что все ответы будут верные; он подсчитал, что в любом варианте ответов придется задать не более 91 вопроса.

Покажите, что следователь может составить план с не более чем 105 вопросами, гарантирующий раскрытие преступления и в случае, если на один вопрос может быть дан неверный ответ (но может быть, что все ответы верные).

Примечание: если у вас получаются только планы с более чем 105 вопросам, напишите лучший из них.

А. Анджанс, И. Соловьев, В. Слитинский

Задачник „Кванта"

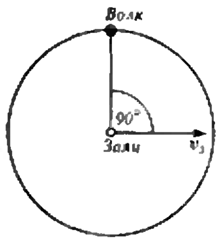


Рис. 1.

Ф1303. На горизонтальной поверхности льда нарисована окружность радиусом $R=10$ м. В центре окружности находится заяц, а волк — как вы уже догадались — на окружности. Заяц может двигаться по прямой с постоянной скоростью $v_0=2$ м/с, как показано на рисунке 1. Волк должен двигаться по окружности так, чтобы расстояние между ним и зайцем все время оставалось равным начальному. До какой точки окружности волк сможет добраться, не нарушая правил игры? Коэффициент трения на льду $k=0{,}05$. Волк движется строго по окружности, не подпрыгивая.

А. Зильберман

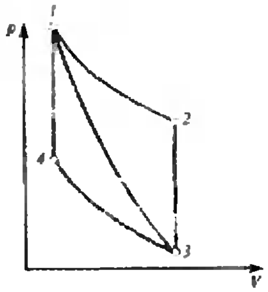


Рис. 2.

Ф1304. КПД тепловой машины в цикле *1 — 2 — 3 — 1* (рис. 2), состоящем из изотермы *1 — 2*, изохоры *2 — 3* и адиабаты *3 — 1*, равен η_1. В цикле *1 — 3 — 4 — 1*, состоящем из адиабаты *1 — 3*, изотермы *3 — 4* и изохоры *4 — 1*, КПД равен η_2. Чему равен КПД тепловой машины, работающей по циклу *1 — 2 — 3 — 4 — 1*? Рабочим веществом является идеальный одноатомный газ.

А. Шеронов

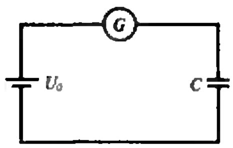


Рис. 3.

Ф1305. В схеме на рисунке 3 напряжение батарейки $U_0=10$ В, емкость конденсатора $C=1$ мкФ, сопротивление гальванометра $R=1$ кОм. Десять раз в секунду конденсатор отключают от цепи и сразу же подключают обратно, поменяв местами его выводы. Какой ток показывает гальванометр? Во сколько раз изменится ток при увеличении емкости конденсатора до 1000 мкФ? При такой частоте переключений стрелка гальванометра практически не дрожит.

З. Рафаилов

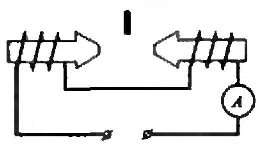


Рис. 4.

Ф1306. Известны опыты, в которых диски, сделанные из немагнитных материалов, падают в неоднородном магнитном поле между полюсами электромагнита практически без ускорения (рис. 4).

В одном из опытов были исследованы четыре диска одинаковых размеров — из серебра, платины, цинка и неизвестного металла. Диск из серебра падал в зазоре электромагнита с некоторой постоянной скоростью v при токе в обмотке $I_1=0{,}41$ А. Диск из платины падал с той же скоростью при токе в обмотке $I_2=1{,}39$ А.

При каком токе диск из цинка будет падать с той же скоростью? Из какого материала сделан четвертый диск, если он падал с той же скоростью при токе $I_3=0{,}29$ А? Считайте, что в данном диапазоне токов поле в зазоре электромагнита пропорционально величине тока. Необходимые данные о материалах возьмите из прилагаемой таблицы (см. с. 24).

С. Кожел

Задачник „Кванта"

Таблица

Материал	ρ, Ом · мм²/м (при 20 °С)	α, град$^{-1}$ (при 20 °С)	Плотность, г/см³	Температура плавления, °С
Алюминий	0,032	0,038	2,6—2,8	660
Бронза	0,12	0,004	7,4—8,8	1000
Вольфрам	0,055	0,0051	19,0	3387
Золото	0,024	0,0039	19,3	1063
Кобальт	0,097	0,0033	8,8	1490
Латунь	0,06—0,09	0,001—0,007	8,4—8,7	900
Медь	0,017	0,0043	8,6—9,0	1083
Молибден	0,048	0,0050	10,2	2622
Никель	0,11	0,0027	8,8	1452
Олово	0,11	0,0044	7,3	232
Платина	0,09	0,0038	21,4	1773
Свинец	0,21	0,0042	11,3	327
Серебро	0,016	0,0040	10,5	961
Сталь	0,199	0,0016—0,0042	7,5—7,9	1500
Хром	0,027	0,0042	6,7	1700
Цинк	0,060	0,0039	6,8—7,1	419

Ф1307. Квант электромагнитного излучения испытывает рассеяние на покоящемся электроне (так называемый Комптон-эффект). При этом рассеянный квант изменяет частоту, а электрон получает импульс отдачи p. Определите, под какими углами по отношению к направлению падающего излучения может двигаться электрон с данным импульсом. Считайте, что скорость электрона существенно меньше, чем скорость света.

Ю. Самарский

Решения задач

М1271—М1275, Ф1283—Ф1287

М1271. Дана полуокружность с диаметром AB. Постройте хорду MN, параллельную AB, так чтобы трапеция AMNB была описанной.

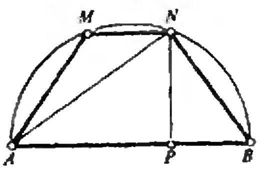


Рис. 1.

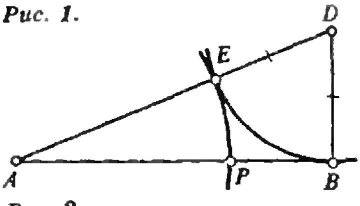


Рис. 2.

Пусть $AMNB$ — искомая трапеция и NP — ее высота. Так как трапеция вписана в окружность, то ее боковые стороны равны. Но трапеция является и описанной, поэтому каждая из ее боковых сторон равняется полусумме оснований, т. е. отрезку AP. Из подобия треугольников ANB и NPB (рис. 1) следует равенство

$$AP^2 = NB^2 = AB \cdot BP, \qquad (*)$$

т. е. точка P делит отрезок AB, как говорят, «в крайнем и среднем отношении». Построение такой точки можно выполнить следующим образом: восставим к AB перпендикуляр $BD = \frac{1}{2}AB$ (рис. 2), отложим на отрезке AD отрезок $DE = DB$, а на AB отрезок $AP = AE$. Если $AB = 2$, то, как легко проверить, $AP = \sqrt{5} - 1$ и для точки P выполнено соотношение (*).

Затем можно, восставив перпендикуляр PN в точке P к отрезку AB до пересечения с полуокружностью, построить искомую равнобочную трапецию $AMNB$ и доказать (используя подобие треугольников), что ее боковая сторона равна AP, т. е. полусумме оснований, следовательно, она описанная.

Задачник «Кванта»

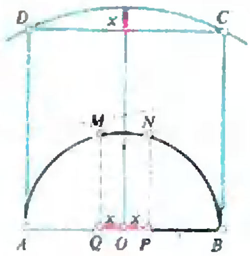


Рис. 3.

Еще один из многих возможных способов построения трапеции основан на идее, изложенной в статье «Правильные многогранники и повороты» («Квант» № 10, 1989). Строим квадрат $ABCD$, проводим через его вершины C и D дугу окружности с центром в точке O — середине стороны AB (рис. 3). Восставим из точки O перпендикуляр к AB, его отрезок x (он равен $\sqrt{5}-2$) между квадратом и построенной дугой окружности отложим от точки O влево и вправо по отрезку AB. Полученные точки Q и P — проекции вершин M и N трапеции на основание AB.

В. Сендеров

М1272. *Докажите, что для любых n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, сумма которых равна 1, выполнено неравенство*

$$(1/a_1^2-1)(1/a_2^2-1)\ldots$$
$$\ldots(1/a_n^2-1)\geqslant(n^2-1)^n.$$

Если сближать два числа u, v $(0<u<v<1)$ так, чтобы их сумма оставалась постоянной, то произведение $uv=(u+v)^2/4-(u-v)^2/4$ увеличивается, а произведение $(1/u^2-1)(1/v^2-1)=(1-u^2-v^2+u^2v^2)/u^2v^2=(1-(u+v^2)/u^2v^2+2uv+1$ уменьшается. Из n чисел с суммой 1, среди которых не все равны $1/n$, найдется число u, меньшее $1/n$, и число v, большее $1/n$ (подобное соображение играло ключевую роль в «самом коротком доказательстве теоремы Коши», см. статью Ю. П. Соловьева в «Кванте» № 3 за этот год). Будем сближать u и v, сохраняя сумму, до тех пор, пока одно из них не станет равным $1/n$; при этом произведение $P=(1/a_1^2-1)\times\ldots\times(1/a_n^2-1)$ будет уменьшаться. Если в полученном наборе еще не все числа равны $1/n$, можно повторить эту процедуру с другой парой чисел и поступать так до тех пор, пока все числа не станут равны $1/n$; при этом P станет равным $(n^2-1)^n$. Тем самым, первоначально произведение P было не меньше этой величины.

Л. Курляндчик

М1273. *На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC как на основаниях вне его построены подобные равнобедренные треугольники ABC_1, CBA_1 и CAB_1, у каждого из которых отношение высоты к основанию равно k. Такие же треугольники ABC_2, CBA_2 и CAB_2 построены и по другую (внутреннюю) сторону от оснований. Докажите, что площади S, S_1 и S_2 треугольников ABC, $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ связаны соотношением*

$$S_1\pm S_2=S(1/2+6k^2)$$

(знак «+» или «−» зависит от ориентации тре-

Вершины треугольников с площадями S_1 и S_2 лежат на серединных перпендикулярах к сторонам треугольника ABC, проходящих через центр O его описанной окружности. Если R — радиус этой окружности, α, β, γ — углы треугольника ABC, то (см. рис. 1) $2S_1$ равно

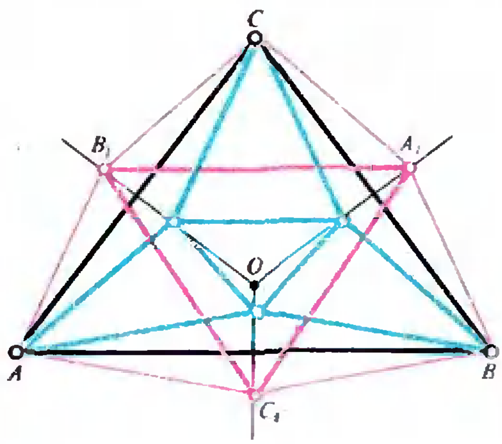


Рис. 1.

угольника $A_2B_2C_2$ по отношению к ABC).

сумме

$$OA_1OB_1 \sin\gamma + OB_1OC_1 \sin\alpha + OC_1OA_1 \sin\beta,$$

поскольку синусы углов между перпендикулярами равны синусам углов между соответствующими сторонами. Пусть t — тангенс угла наклона стороны равнобедренного треугольника к основанию ($t=2k$), тогда отрезки от O до вершин легко выразить через радиус R и получить:

$$\begin{aligned}\frac{2S_1}{R^2} = &(\cos\alpha + t\sin\alpha)(\cos\beta + t\sin\beta)\sin\gamma + \\ &+(\cos\beta + t\sin\beta)(\cos\gamma + t\sin\gamma)\sin\alpha + \\ &+(\cos\gamma + t\sin\gamma)(\cos\alpha + t\sin\alpha)\sin\beta.\end{aligned} \qquad (1)$$

А отношение $2S_2/R^2$ (для случая, изображенного на рисунке 1) равно аналогичному выражению, где вместо t стоит $-t$. Сложив оба эти выражения и раскрыв скобки, мы увидим, что коэффициент при t в первой степени равен 0, коэффициент при t^2 равен $6\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, а свободный член (здесь нужно использовать равенство $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, откуда $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha = 1$) равен $2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. По известной формуле $S=abc/(4R)$, выражающей площадь S через стороны a, b, c и R,

$$2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 2abc/(8R^3) = S/R^2$$

Отсюда получаем нужную формулу

$$S_1 + S_2 = \frac{1+3t^2}{2} S = S\left(\frac{1}{2} + 6k^2\right). \qquad (2)$$

Эти рассуждения необходимо несколько уточнить, чтобы они оказались применимы не только для случая, изображенного на рисунке 1, но и для тупоугольного треугольника ABC, и для случая, когда внутренние треугольники налегают друг на друга, в частности, когда $A_2B_2C_2$ имеет противоположную ориентацию. Вместо этого мы посмотрим на наши вычисления с более общей точки зрения.

Верен такой общий факт: если три точки K, L и M с постоянными скоростями движутся по трем прямым, то площадь ориентированного треугольника KLM как функция времени t выражается квадратным трехчленом от t: $S=F(t)$. Легко доказать это, например, с помощью метода координат. (Формула ориентированной площади треугольника с вершинами (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) выглядит так:

$$S = (x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3)/2.$$

Ясно, что если каждая координата выражается линейной функцией от t, то S — квадратный трехчлен от t).

Будем считать, что при $t=0$ наши точки совпадают с серединами сторон треугольника ABC и двигаются по серединным перпендикулярам (при $t>0$ во внешнюю сторону) со скоростями, пропорциональными длинам a, b, c соответствующих сторон треугольника: при не-

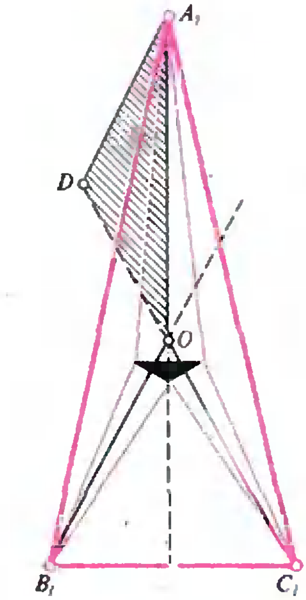


Рис. 2.

котором t они занимают положения A_1, B_1, C_1, а при противоположном значении $(-t)$ — положения A_2, B_2, C_2. Нас интересует сумма $F(t)+F(-t)$, то есть свободный и старший (содержащий t^2) члены $F(t)$, которые по существу мы и вычисляли выше (1).

Интересно заметить, однако, что они имеют геометрический смысл, так что можно найти их без вычислений. Свободный член $F(0)$ — это $S/4$ (площадь треугольника из средних линий ABC). Чтобы найти старший коэффициент,— он определяется как отношение площади S_1 к t^2 в пределе при t стремящемся к бесконечности,— заметим, что при очень большом t треугольник ABC можно считать «почти точкой» O. При этом векторы OA_1, OB_1, OC_1 перпендикулярны соответствующим сторонам треугольника и им пропорциональны (с коэффициентом $t/2=k$). Сумма этих векторов OA_1, OB_1 и OC_1 равна нулю (как и векторов, образующих стороны треугольника), то есть они служат отрезками медиан треугольника $A_1B_1C_1$, причем последний по площади в 3 раза больше треугольника A_1OD (рис. 2), подобного ABC с коэффициентом k. Отсюда ясно, что старший член $F(t)$ имеет вид $3k^2S=3t^2S/4$.

Итак, $F(t)=S(1+\ldots+3t^2)/4$, откуда следует нужная формула (2) для $S_1\pm S_2=F(t)+F(-t)$.

Отметим интересные частные случаи нашей формулы: если на сторонах строятся правильные треугольники, то $t=\sqrt{3}$, так что $S_1\pm S_2=5S$; если равнобедренные прямоугольные, — $t=1$ и $S_1\pm S_2=2S$, а если $t=\sqrt{3}/6$ (при этом новые точки — центры правильных треугольников, построенных на сторонах), то $S_1\pm S_2=S$.

А. Елизаров, Р. Сарбаш, Н. Васильев

М1274. Докажите, что разность между числами

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\ldots+\cfrac{1}{n-1}}}}$$

и

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\ldots+\cfrac{1}{n-1+\cfrac{1}{n}}}}}$$

по модулю не превосходит $\dfrac{1}{(n-1)!n!}$.

Пусть $a_k=k+\cfrac{1}{k+1+\cfrac{1}{\ldots+\cfrac{1}{n-1}}}$, $b_k=k+\cfrac{1}{k+1+\cfrac{1}{\ldots+\cfrac{1}{n-1+\cfrac{1}{n}}}}$

— «хвосты» двух данных цепных дробей, начинающиеся с k, и h_k — абсолютная величина разности между ними. Тогда

$$a_{k-1}-b_{k-1}=\frac{1}{a_k}-\frac{1}{b_k}=\frac{b_k-a_k}{a_kb_k},$$

так что $h_{k-1}<h_k/k^2$ при $k=2, 3, \ldots, n-1$ (поскольку $a_k>k$ и $b_k>k$); $h_{n-1}=1/n$. Отсюда интересующая нас разность оценивается так:

$$h_1<\frac{h_2}{2^2}<\frac{h_3}{2^23^2}<\ldots<\frac{h_{n-1}}{2^23^2\ldots(n-1)^2}=\frac{1}{(n-1)!n!}.$$

Г. Гальперин

Задачник „Кванта"

***M1275*.** Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ такова, что при любом $k \geqslant 1$*

$$a_{k+2} = a_k a_{k+1} + 1.$$

Докажите, что при $k \geqslant 9$ число $a_k - 22$ — составное.

Пусть $k > 8$. Будем рассматривать остатки от деления чисел a_i, $i > k-6$, на $m = a_{k-6}$. Мы используем запись $a \equiv b (\mathrm{mod}\, m)$ для обозначения того, что числа a и b дают одинаковый остаток при делении на m, и пользуемся тем, что остаток суммы (и произведения) равен остатку суммы (соответственно произведения) остатков этих чисел (см. статью А. Егорова в «Кванте» № 6, 1991).

Поскольку $a_{k-5} = a_{k-6} a_{k-7} + 1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, m)$

и $a_{k-4} = a_{k-5} a_{k-6} + 1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, m)$,

то

$$a_{k-3} = a_{k-4} a_{k-5} + 1 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, m),$$
$$a_{k-2} = a_{k-3} a_{k-4} + 1 \equiv 3 (\mathrm{mod}\, m),$$
$$a_{k-1} = a_{k-2} a_{k-3} + 1 \equiv 7 (\mathrm{mod}\, m),$$
$$a_k = a_{k-1} a_{k-2} + 1 = 22 (\mathrm{mod}\, m).$$

Откуда следует, что $a_k - 22$ делится на a_k. Конечно, точно так же можно доказать, что (начиная с некоторого k) будут составными и числа $a_k - b$, где b — любое другое число последовательности 1, 1, 2, 3, 7, 22, ..., определяемой тем же рекуррентным соотношением: каждое число на 1 больше произведения двух предыдущих.

С. Генкин

***Ф1283.** Перед закрытым шлагбаумом стоит человек с тяжелой тележкой. Ему нужно как можно быстрее попасть в магазин, находящийся на расстоянии 300 м от шлагбаума. Максимальная сила, с которой человек может действовать на тележку, 500 Н, наибольшая скорость тележки 5 м/с, масса нагруженной тележки 2000 кг. Известно, что шлагбаум откроется ровно через 30 с. За какое минимальное время человек сможет доставить груз в магазин?*

Понятно, что к тому моменту, когда откроется шлагбаум, скорость тележки должна быть как можно большей. Значит, за $t_0 = 30$ с тележку нужно откатить назад, затормозить и начать разгон вперед.

Пусть время на движение назад равно t, причем $t/2$ уходит на разгон с максимальным ускорением и еще столько же — на торможение. Тогда на разгон вперед остается время $t_0 - t$. Найдем, какую же скорость получит тележка перед открывающимся шлагбаумом:

$$a = \frac{F}{M} = \frac{500\ \text{Н}}{2000\ \text{кг}} = 0{,}25\ \text{м/с}^2,$$

$$\frac{a(t_0 - t)^2}{2} = \frac{a(t/2)^2}{2} + \frac{a(t/2)^2}{2} \Rightarrow t_0 - t = t_0(\sqrt{2} - 1),$$

$$v = a(t_0 - t) = at_0(\sqrt{2} - 1) \approx 3\ \text{м/с} < v_m = 5\ \text{м/с}.$$

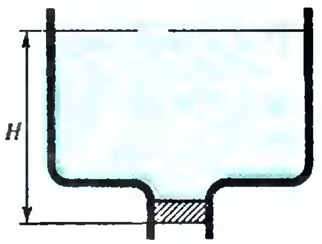
Итак, к шлагбауму тележка подъезжает со скоростью v, затем разгоняется до скорости v_m, потом движется равномерно и, наконец, тормозится до остановки (вообще говоря, в условии задачи о погашении скорости тележки перед магазином прямо не говорится). Окончательно, время движения тележки до магазина после открытия шлагбаума будет равно

$$t_x = \frac{v_m - v}{a} + \frac{l - (v_m^2 - v^2)/(2a) - v_m^2/(2a)}{v_m} + \frac{v_m}{a} \approx 72\ \text{с}.$$

А. Коршков, Н. Коршкова

Задачник «Кванта»

Ф1284. Большой сосуд массой m заполняют водой через небольшое отверстие в дне сосуда (см. рисунок). Для того чтобы закачать в сосуд воду массой M, пришлось совершить работу A. Отверстие открывают, и вода начинает вытекать. Одновременно поднимают сосуд так, чтобы верхняя граница воды в нем оставалась на одной высоте относительно земли. Какую работу придется совершить до того момента, когда сосуд опустеет?



Если отверстие в дне сосуда мало, скорость понижения уровня воды h в сосуде тоже мала, а из отверстия вода вытекает со скоростью $v=\sqrt{2gh}$. Действительно, пусть за небольшое время Δt из сосуда вытек небольшой объем воды ΔV. Состояния воды в начале и в конце промежутка Δt отличаются тем, что потенциальная энергия слоя массой $\rho\Delta V$, находящегося раньше на высоте h, перешла в кинетическую энергию вытекшей воды тоже массой $\rho\Delta V$:

$$\rho\Delta Vgh=\rho\Delta V\frac{v^2}{2} \Rightarrow v=\sqrt{2gh}.$$

(Как известно, с такой скоростью движется тело, упавшее с высоты h.)

Когда мы поднимаем сосуд так, чтобы верхняя граница воды в нем оставалась на одной высоте относительно земли, мы перемещаем сосуд с очень малой скоростью, так что скорость вытекания воды относительно земли можно считать равной скорости ее вытекания относительно сосуда.

Рассмотрим весь процесс, описанный в условии задачи, в целом. В самом начале вся вода находилась на уровне отверстия в дне сосуда. При закачивании в сосуд воды была совершена работа A. Затем вода снова попала на прежний уровень, причем так, как будто она свободно падала с высоты H. При этом вода потеряла энергию, равную MgH. Значит, поднимая воду, мы совершаем работу MgH. Плюс еще на поднятие самого сосуда мы израсходовали энергию mgh.

Итак, окончательно, нам придется совершить работу

$$A'=(M+m)gh-A.$$

Н. Кузьма

Ф1285. На квадратном деревянном плоту размером 2×2×0,3 м, сделанном из дерева плотностью 800 кг/м³, стоит физик массой 80 кг. На какое расстояние от центра плота он должен отойти, чтобы край плота окунулся в воду?

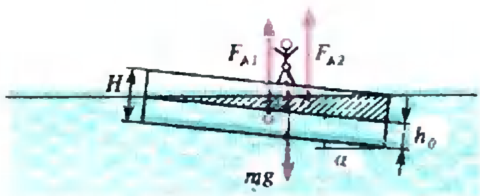
Пусть в начальный момент человек находится в центре плота. Запишем условие равновесия системы «человек — плот» в виде

$$Mg+mg=\rho_в gSh,$$

где m — масса человека, $M=\rho V$ — масса плота, $\rho_в$ — плотность воды, S — площадь плота, h — глубина погружения его в воду. Отсюда находим

$$h=0{,}26 \text{ м}.$$

Теперь рассмотрим ситуацию, когда человек отошел от центра на расстояние l, и край плота окунулся в воду (см. рисунок). Поскольку система по-прежнему



находится в равновесии, объем погруженной части плота измениться не должен:

$$Sh=SH-\frac{S(H-h_0)}{2},$$

откуда находим

$$h_0=0{,}22\ \text{м}.$$

Нам осталось записать уравнение моментов сил относительно центра масс плота. Моменты создают следующие силы (только они и изображены на рисунке): сила тяжести человека $m\vec{g}$, архимедова сила $\vec{F}_{A1}$, действующая на погруженную незаштрихованную на рисунке часть плота, и архимедова сила $\vec{F}_{A2}$, действующая на заштрихованный участок, причем точка ее приложения лежит в точке пересечения медиан выделенного треугольника (т. е. плечо этой силы равно $L/2-L/3=L/6$, где $L=2$ м — длина плота). Поэтому получаем равенство

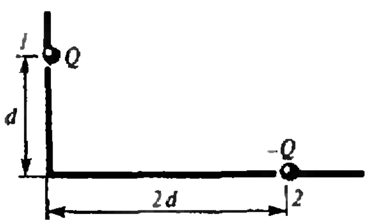
$$mgl\cos\alpha+\rho_{\text{в}}L^2h_0g\frac{H-h_0}{2}\sin\alpha=\rho_{\text{в}}L^2\frac{H-h_0}{2}g\frac{L}{6},$$

из которого, учитывая малость угла α, находим искомую величину l:

$$l\approx\frac{\rho_{\text{в}}L^3(H-h_0)}{12m}\approx0{,}67\ \text{м}.$$

А. Коршиков

Ф1286. На непроводящий стержень, изогнутый под прямым углом, насажены две бусинки равной массы M, несущие заряды противоположных знаков Q и —Q (см. рисунок). В начальный момент бусинки неподвижны и находятся на расстояниях d и 2d от вершины угла. Отпустим их. Где окажется «дальняя» бусинка в тот момент, когда «ближняя» доедет до вершины угла? Найдите скорости бусинок в тот момент, когда расстояние между ними составит d.



Поскольку массы бусинок одинаковы, их ускорения — они определяются соответствующими проекциями силы электрического взаимодействия — оказываются пропорциональными расстояниям до вершины угла. Это означает, что и скорости, и перемещения бусинок тоже пропорциональны этим расстояниям. Тогда на первый вопрос можно ответить сразу — бусинки доедут до вершины угла одновременно.

Теперь — второй вопрос. Пусть в тот момент, когда расстояние между бусинками составляет d, скорость первой бусинки равна v_1, а второй — v_2. Сразу же заметим, что $v_2=2v_1$, и запишем закон сохранения энергии замкнутой системы:

$$-\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{d^2+4d^2}}=-\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}+\frac{Mv_1^2}{2}+\frac{M(2v_1)^2}{2}.$$

Отсюда получаем

$$v_1=Q\sqrt{\frac{1-1/\sqrt{5}}{10\pi\varepsilon_0 dM}},\quad v_2=2Q\sqrt{\frac{1-1\sqrt{5}}{10\pi\varepsilon_0 dM}}.$$

К. Зуев

Задачник „Кванта"

Ф1287. Неподалеку от включенного в сеть трансформатора поместили замкнутый виток из медной проволоки. Ток в нем оказался сдвинутым по фазе на $\pi/4$ относительно тока в обмотке трансформатора. Во сколько раз изменится мощность, рассеиваемая в витке, если сделать его не из меди, а из нихрома, сохранив все размеры неизменными? У нихрома удельное сопротивление в 65 раз выше, чем у меди. Амплитуду тока в обмотке трансформатора считать одинаковой в обоих случаях.

ЭДС индукции $\mathscr{E}$, возбуждаемая в витке, одинакова в обоих случаях. Для расчета тока в витке нужно учитывать как активное сопротивление, так и индуктивное:

$$X_{\text{общ}}=\sqrt{R^2+X_L^2}\,.$$

В первом случае сдвиг фаз равен $\pi/4$, следовательно, активное и индуктивное сопротивления медного витка равны друг другу. Во втором случае активное сопротивление много больше индуктивного (в 65 раз). Это означает, что сдвиг по фазе тока в нихромовом витке относительно тока в обмотке трансформатора практически равен нулю, а общее сопротивление витка равно его активному сопротивлению.

Теперь найдем отношение мощностей, рассеиваемых в витках:

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{\mathscr{E}^2/(65R)}{(\mathscr{E}/\sqrt{R^2+R^2})^2R}=\frac{2}{65}=\frac{1}{32{,}5}\,.$$

А. Зильберман

Информация

Экономико-математическая школа при МГУ

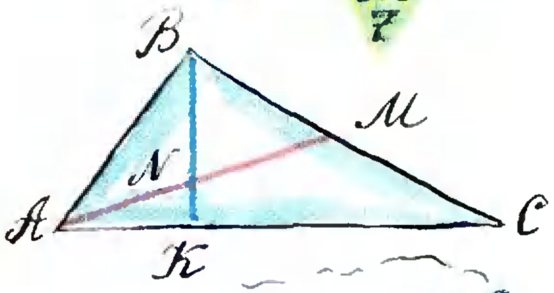
Экономико - математическая школа при МГУ существует с 1968 года. Занятия проходят в вечернее время 2 раза в неделю. В школе обучаются ученики 9—11 классов. Обучение бесплатное.

Бо́льшее внимание уделяется изучению теоретических закономерностей экономики (элементы маркетинга и менеджмента, финансов и делопроизводства присутствуют в ЭМШ лишь как второстепенные курсы). В программу школы входят как чисто математические курсы, дополняющие программу средней школы, так и экономико-математические, дающие слушателю представление об использовании математических методов и моделей в экономическом анализе.

Учебная программа строится как система спецкурсов, т. е. нет жестко заданных программ и предметов, повторяющихся из года в год. Каждый слушатель посещает два спецкурса: с экономической и математической ориентацией. Школьники имеют возможность выбирать предметы на свой вкус.

Если вас заинтересовала ЭМШ, приходите на экономический факультет МГУ (Москва, Ленинские горы, ул. Лебедева, 2 учебный корпус, ЭМШ). Вступительные экзамены — в третье воскресенье сентября, в 10 часов.

У − Р = А : В = Н × Е = Н + И = Е



Задачи

1. В мешке лежит 101 конфета. Малыш и Карлсон играют в такую игру: по очереди — первым Малыш, а вторым Карлсон — они берут из мешка от 1 до 10 конфет. Когда все конфеты разобраны, игроки подсчитывают взятое количество конфет. Если эти числа взаимно просты — выигрывает Малыш, если нет — Карлсон. Кто выиграет в этой игре и как ему нужно играть?

2. Решите арифметический ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

3. Суммы чисел в ромбах подчиняются некоторой закономерности. Найдите ее и докажите справедливость вашей гипотезы.

4. В треугольнике ABC отрезок AM — медиана, точка N — ее середина, прямая BN пересекает основание AC в точке K. В каком отношении точка K делит основание треугольника?

5. За десять дней пират Ерема
Способен выпить бочку рома,
А у пирата у Емели
Ушло б на это две недели.
За сколько дней прикончат ром
Пираты, действуя вдвоем?

Первые четыре задачи нам предложили К. Кохась, Л. Мочалов, В. Произволов и В. Чичин. Стихотворение Сергея Сатина мы взяли из журнала «Крокодил» (№ 34, 1990 г.).

Мы продолжаем публикацию научно-популярных статей известного советского писателя Александра Волкова. Рассказ об этом писателе вы можете прочесть в предыдущем номере журнала.

Как появилась метрическая система мер

А. ВОЛКОВ

С древнейших времен люди стремились связать меры с неизменными величинами природы. С глубокой древности были известны такие меры длины, как фут, локоть, шаг. Все эти меры были весьма изменчивы, как изменчива хотя бы длина шага у разных людей. Впоследствии появились образцовые узаконенные меры длины, веса. Но в случае утраты точных образцов мер (эталонов) восстановить их было бы невозможно. Деление крупных мер на более мелкие было совершенно произвольным, и приходилось много времени тратить на заучивание таблиц мер и еще больше — на действия с именованными числами. Достаточно привести хотя бы русские дореволюционные меры длины: географическая миля — 7 верст, верста — 500 сажен, сажень — 3 аршина, аршин — 16 вершков, или: сажень — 7 футов, фут — 12 дюймов, дюйм — 10 линий.

Неудобства прежних систем мер и весов давно были замечены, и научная мысль работала над созданием простой, удобной системы мер и весов, которая была бы заимствована из природы и благодаря своим достоинствам получила бы всеобщее распространение. Такой международной системой является сейчас метрическая система мер, созданная во время Великой французской революции.

В те времена во Франции применялось больше 50 различных мер длины, объема и веса. Такое разнообразие мер приносило большой вред как внутренней, так и внешней торговле. Парижская Академия наук предложила в 1788 году принять за основную единицу длины десятимиллионную часть четверти земного меридиана. Измерения меридианов до того времени производились неоднократно, но были недостаточно точными. Решено было измерить дугу меридиана между городами Дюнкерком и Барселоной, около $9°30'$, больше тысячи километров длиной.

Точные измерения таких больших расстояний весьма трудны; измерить их непосредственно нельзя, и приходится применять триангуляцию. Триангуляция состоит в том, что где-нибудь на ровном месте измеряется с большой точностью прямая линия в несколько километров длиной, так называемый базис. От этого базиса на местности последовательно строится ряд треугольников, стороны которых находятся вычислением. Одна из сторон последнего треугольника триангуляционной сети, уже определенная вычислением, измеряется. Разница между вычисленной длиной и длиной, полученной в результате измерения, показывает точность всей работы. За вершины треугольников берутся предметы, видимые издалека: колокольни, башни, высокие деревья и т. п. Астрономы направляют на эти предметы угломерные инструменты и измеряют углы треугольников, необходимые для вычисления сторон.

На протяжении тысячи километров от Дюнкерка до Барселоны надо было построить десятки треугольников и для определения их сторон произвести множество сложнейших вычислений. Эту работу Академия наук поручила двум талантливым астрономам — Мешену и Деламбру.

Им сразу же пришлось столкнуться с чрезвычайными трудностями. Король Людовик XVI издал указ, в котором местным властям предписывалось оказывать экспедиции всяческое содействие. Но королевская власть во Франции доживала последние дни. Революционные настроения в народе усиливались с каждым днем. На людей, являвшихся с королевским указом в руках, смотрели подозрительно. Уже на третьей станции от Парижа направлявшийся на юг Мешен был задержан гражданами, которые приняли его за контрреволюционного заговорщика. Только с помощью полиции ему удалось доказать свою невиновность и спастись от гибели.

Мешен начал свою работу в Испании, с самого южного пункта измеряемой дуги — Барселоны. Девять месяцев Мешен проработал очень успешно, а потом чуть не погиб. Производя наблюдения с водокачки, он сорвался, попал в передачу и получил несколько опасных переломов костей. Хотя через два месяца он снова принялся за работу, но от повреждений не оправился до самой смерти.

Работу Мешена осложнила война, которая вскоре началась между Францией и Испанией. Астроном оказался пленником, и лишь в 1794 году ему удалось добраться до родины.

Деламбру, измерявшему северную часть дуги, тоже пришлось столкнуться с большими трудностями. Он должен был проверить результаты прежних измерений, сделанных еще в 1740 году. Но многие сооружения, которые были использованы за пятьдесят лет до того, оказались разрушенными. Деламбру приходилось, часто с риском для жизни, взбираться на ветхие колокольни, поминутно грозившие падением. На некоторых старинных строениях можно было работать только в тихую погоду, а при ветре приходилось немедленно спускаться.

Пользование сигналами, особенно ночными, вызывало подозрительность народа. Хотя после свержения короля астрономы получили рекомендательные письма к местным республиканским властям от Национального Собрания, этого все же оказалось недостаточно. По ночам на высоких башнях загорались яркие фонари, свет которых был виден за десятки километров. Народ считал, что эти сигналы подаются иностранными шпионами: ведь Франция была окружена вражескими армиями, шедшими задавить революцию. Деламбру и его помощникам не раз приходилось попадать под арест; они вынуждены были читать гражданам популярные лекции для объяснения задач своей экспедиции.

Когда началась зима, возникли новые трудности. Астрономам приходилось целые дни проводить на узеньких площадках высоких колоколен, где наблюдатели ничем не были защищены от ветра, дождя и снега. Коченеющими от холода руками они должны были производить точнейшие измерения углов. Туманы делали отдаленные сигналы невидимыми. Деламбр напрасно старался увидеть одну колокольню в продолжение целых шести дней; чтобы сделать наблюдение, ему пришлось вернуться через несколько месяцев.

Так работали астрономы, борясь со стихиями и с вполне законной недоверчивостью революционного народа. И тем не менее все измерения производились с такой точностью, какая только была возможна при тогдашнем состоянии науки. Впоследствии оказалось, что измерения Мешена и Деламбра дали длину метра, отличающуюся от истинной длины сорокамиллионной части меридиана на 0,2 мм!

Работа Мешена и Деламбра позволила определить основную единицу длины — метр. С помощью греческих и латинских приставок (кило, гекто, дека, деци и т. д.) были образованы крупные и мелкие меры. Таблица мер упростилась до крайности, так как в основу ее легло число 10. Меры веса, жидкостей, сыпучих тел, денежные единицы — все было поставлено в зависимость от метра.

Благодаря своим крупнейшим достоинствам, метрическая система мер распространилась по многим странам Европы. У нас в Советском Союзе она была узаконена в 1926 году.

Лаборатория „Кванта"

«Париж, 1 января 1890 г.

Моему сыну Жану

Дорогой мой маленький Жан!

Среди опытов, описанных в этой книге, есть простые затеи, которые будут развлечением для родителей и детей, собравшихся вечером за столом...

Все эти опыты, и простые и сложные, не требуют никаких приборов: наша лаборатория, как ты знаешь, состоит из кухонной утвари, из пробок, спичек и всяких других вещей, которые у нас всегда под рукой...»

Так начинается книга Тома Тита «Научные развлечения» (перевод с французского М.Гершензона, М.— Л., Издательство детской литературы, 1937), отрывки из которой мы сегодня предлагаем вашему вниманию.

Из старых опытов

ИНТЕРЕСНЫЕ СЛУЧАИ РАВНОВЕСИЯ

Две вилки и пятак

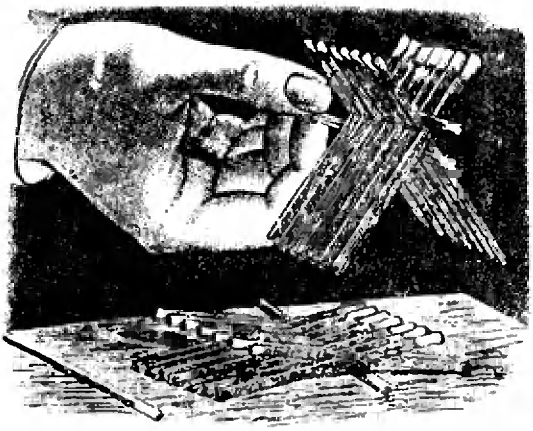
Сложи две вилки так, чтобы зубья одной легли на зубья другой; просунь пятачок в прорезь между средними зубьями вилок. Теперь после нескольких неудачных попыток тебе удастся, конечно, положить это коромысло краешком пятачка на краешек стакана, да так, чтобы пятачок прикасался только к наружной стороне стакана. Вот коромысло наше уравновешено.

Предложи теперь приятелю перелить воду из этого стакана в другой, не сбросив вилок и пятачка! Вряд ли он возьмется сделать это.

Между тем задача не так уж трудна.

Пятнадцать спичек на одной

Положи одну спичку на стол, а на нее поперек еще 14 спичек так, чтобы головки их торчали кверху, а концы без головок касались стола, как показано у нас на рисунке внизу. Как поднять первую спичку, держа ее за один конец, и вместе с нею все остальные спички?

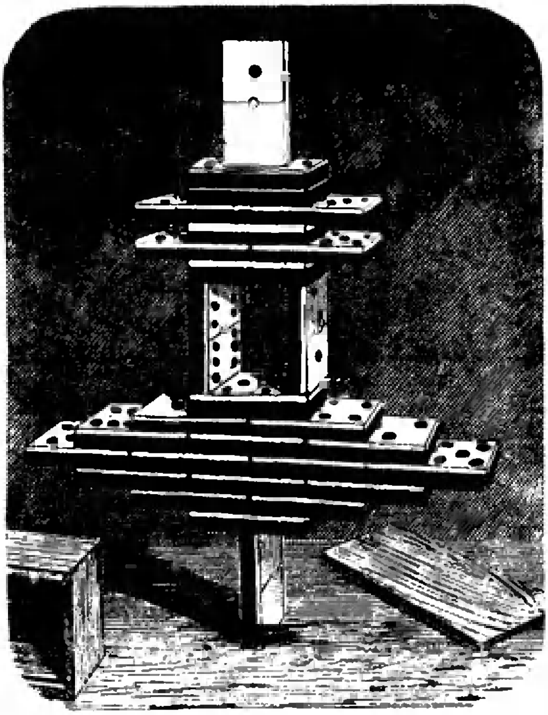


Для этого нужно только поверх всех спичек, в ложбинку между ними, положить еще одну, пятнадцатую, спичку.

Все 28!

Если стол совершенно горизонтален и прочно стоит на полу, ты сможешь выстроить все двадцать восемь костей домино так, как здесь на рисунке.

Сперва поставь стоймя три косточки домино — на них возвести такую хрупкую постройку легче, чем на одной кости. Потом, когда все будет построено, ты осторожно уберешь две крайние косточки, которые служили подпорками, и поставишь их на вершину своего непрочного здания. Равновесие здесь вполне возможно; нужно только, чтобы перпендикуляр, опу-



щенный из центра тяжести всей конструкции, прошел через основание нижней косточки домино.

Стеариновый мотор

Чтобы сделать этот мотор, нам не нужно ни пара, ни электричества, ни сжатого воздуха, ни бензина. Нам нужна для этого только... свеча.

Раскали две булавки и воткни их головками в свечу с двух сторон, посредине, перпендикулярно фитилю. Это будет ось нашего двигателя; положи свечу концами булавок на края двух стаканов и получше уравновесь. Если теперь зажечь свечу с обоих концов, капля стеарина упадет в одну из тарелок, подставленных под концы свечи. Равновесие нарушится, другой конец свечи перетянет и опустится; при этом с него стечет несколько капель стеарина, и он станет легче первого конца; он поднимется кверху, первый конец опустится, уронит каплю, станет легче, и... наш мотор начнет работать вовсю; постепенно колебания свечи будут увеличиваться все больше и больше.

МЫЛЬНЫЕ ПУЗЫРИ И ПЛЕНКИ

Свеча, погасни!

Очень большие и красивые пузыри можно выдувать из стеклянной или жестяной воронки.

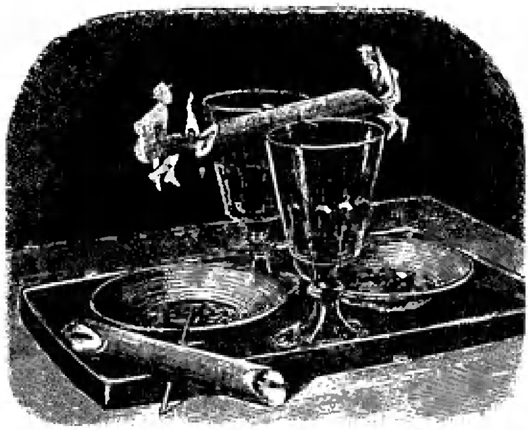
Огромные пузыри, до 30 см в диаметре!

Воронку опускать нужно в широкий сосуд, чтобы хорошо смочить в мыльном растворе ее края.

Осторожно, держа воронку вертикально, подними ее и дуй, с передышками, каждый раз зажимая пальцем узкий конец воронки. Иначе сила натяжения мыльной пленки выгонит воздух из шара. А пленка сжимает этот воздух с изрядной силой. В этом очень легко убедиться. Поднеси узкий конец воронки к горячей свече и скажи:

— Свеча, погасни!

Пламя станет меркнуть, меркнуть, потом потухнет.



Пленки вперегонки

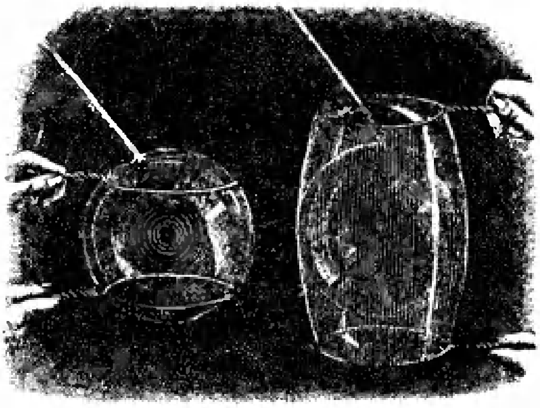
Мыльная пленка всегда стремится занять такую форму, чтобы поверхность ее была возможно меньше.

Постарайся добыть ламповое стекло конической формы, такое, у которого один конец у́же другого. Смочи мыльным раствором всю внутреннюю сторону стекла и дай воде стечь. Теперь широким концом опусти стекло в воду, держа его вертикально. Осторожно вынь стекло из раствора. Мыльная пленка затянула отверстие. Держи теперь стекло горизонтально и ты увидишь, что пленка твоя сдвинется с места и побежит к узкому концу стекла.

Если ты будешь окунать стекло в раствор раз за разом, пленки побегут одна за другой, будто стараясь догнать друг дружку.

Шар в бочке

Свей на бутылке кольцо из проволоки и скрути концы проволоки, чтобы получилась ручка. Еще одно кольцо сделай такого же диаметра; смочи кольца мыльным раствором, которым мы пользовались для предыдущих опытов. Потом выдуй между этими двумя кольцами пузырь (как у нас на левой части рисунка). Осторожно раздвигая кольца, растяни этот шар в цилиндр; остановись, как только поверхность цилиндра начнет принимать вогнутую форму.



Попроси теперь кого-нибудь смочить в мыльном растворе трубку и ввести ее конец в цилиндр сквозь пленку, которой затянуто верхнее кольцо. Пусть товарищ твой очень-очень осторожно выдует внутри первого пузыря второй.

Наш цилиндр понемножку раздастся в стороны и превратится в бочку.

Когда же второй пузырь приблизится к стенкам «бочки», легким толчком нужно отделить его от трубки, затем осторожно вытащить трубку из «бочки».

Вот и повис наш шар между крышкой и донышком. Если раздвинуть теперь кольца, наш шар превратится в яйцо. А сблизить кольца — «бочка» раздастся в стороны, шар коснется донышка, и оба пузыря в тот же миг лопнут.

Шар-недотрога

Только что я рассказал, как выдуть мыльный пузырь — шар в пузыре-цилиндре. Когда смотришь на этот маленький шар, тебе кажется, что он прикасается к пленке цилиндра. Но в действительности этого нет! Шар не прикасается к цилиндру! Вот опыт, который поможет нам в этом убедиться. Попроси товарища держать проволочные кольца так, чтобы цилиндрический мыльный пузырь занял горизонтальное положение. Если расстояние между кольцами не превышает утроенного их диаметра, наш цилиндр и в таком положении сохранит свою форму.

Введем теперь в цилиндр трубку и выдуем внутри него маленький шар; стряхнем его с трубки легким толчком. Он опустится, не лопнув, на пленку цилиндра.

Пусть твой товарищ теперь слегка наклонит цилиндр, как показано у нас на рисунке. И ты увидишь, что маленький шар катится внутри цилиндра. Он катится совершенно свободно, потому что ни в одной точке не прикасается к цилиндру и между пленками наших двух пузырей все время есть тончайшая прослойка воздуха!

ОПЫТЫ С ЭЛЕКТРИЧЕСТВОМ И МАГНЕТИЗМОМ

Бумажные танцоры

Сейчас мы устроим театр, в котором будут плясать наэлектризованные бумажные танцоры.

Возьми кусок стекла длиной 35—40 см и шириной 25 см. Просуши стекло хорошенько у печки — оно должно быть совершенно сухим. Положи его между страницами двух толстых книг, как показано у нас на рисунке, так, чтобы стекло лежало над столом примерно на высоте 3 см. Из тонкой папиросной бумаги вырежь фигурки такой величины, какие нарисованы у нас в верхней части рисунка. Вырежь кого хочешь: человечков, собачек, лягушек. Эти фигурки должны быть не больше 2 см высоты. Чтобы пляски были еще веселее, можешь вырезать их из бумаги разных цветов. Положи эти фигурки на стол под стекло.

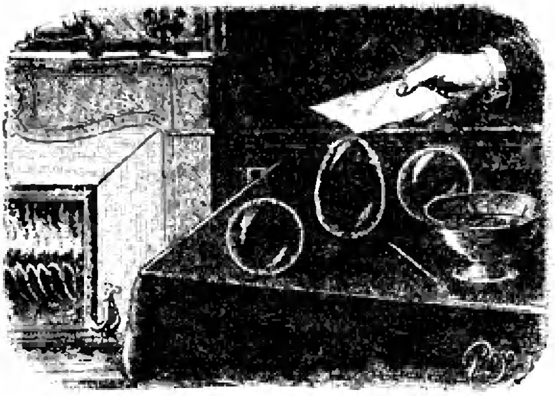
Если теперь ты начнешь натирать стекло — хорошенько, не жалея сил,— шерстяной или шелковой тряпкой (тоже совершенно сухой), твои фигурки, притянутые электричеством, начнут привставать, подпрыгивать к стеклянному потолку «танцевального зала». Они будут плясать все время, пока ты будешь натирать стекло шерстью или шелком.

Не унывай, если опыт не удастся сразу; просуши еще раз стекло и тряпку. Тряпка из натурального шелка для этого опыта лучше, чем шерстяная.

Электрический танец

Если мыльный пузырь посадить на сухую шерстяную материю, он не лопнет.

Вот на суконной скатерти у нас сидит несколько пузырей. Высушим у печки кусок плотной бумаги, натрем его щеткой, чтобы наэлектризовать.



Поднесем эту бумагу к одному из пузырей. Смотрите! Он вытягивается и превращается из шара в яйцо.

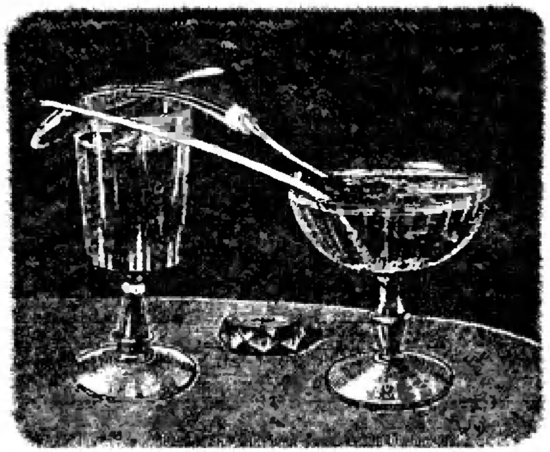
Если мы поднесем бумагу еще ближе, наш пузырь снимется со стола и полетит кверху, как воздушный шар.

Теперь, поднося бумагу поочередно то к одному, то к другому пузырю, заставим их танцевать смешной электрический танец.

Опыты Эрстеда

Во всех физических кабинетах, при помощи дорогих и сложных приборов, повторяют знаменитые опыты датского ученого Эрстеда, который открыл зависимость между электричеством и магнетизмом. Эти приборы — гальваноскоп и электрический элемент.

Попытаемся и мы доказать, что проволока, по которой проходит электрический ток, будучи приближена к намагниченной игле, заставляет эту иглу выйти из положения равновесия. Наши приборы мы соорудим из большого стакана, полного воды, и вазочки для варенья, налитой до половины водой, подсоленной щепоткой поваренной соли; из чайной ложки, вилки, куска кокса, разбитого на кусочки величиной с горошину, иголки, маленького магнита и полоски цинка 20 см длины и 2 см ширины.



Начнем с компаса. Натрем иголку магнитом, водя им по игле все время в одном направлении. Пустим иголку плавать в большой стакан, то ли смазав ее жиром, то ли воткнув ее в кусочек бумаги, вырезанный наподобие человеческой фигурки. Мы знаем, что один из концов иголки, скажем, тот, что ближе к ногам фигурки, тотчас же повернется к северу.

Затем займемся устройством гальваноскопа. Это прибор, который должен нам сообщить о появлении тока. Положим на края стакана чайную ложку, прямо над намагниченной иглой, в том же направлении. Компас и чайная ложка — вот и весь наш гальваноскоп. Не правда ли, пока все очень просто?

Остается устроить электрический элемент. Завернем кусочки кокса в тряпку и завяжем ниткой, предварительно воткнув в кокс ручку вилки. Этот коксовый пирожок погрузим в соленую воду и получим положительный полюс элемента. Зубья вилки положим на один из концов нашей ложки. На другой конец ложки положим один конец цинковой пластинки, погрузив другой ее конец в соленую воду так, чтобы он не прикасался к коксовому пирожку. Этот конец будет отрицательным полюсом нашего элемента.

Тотчас же выработается электрический ток, и игла выйдет из своего положения равновесия; она вернется в это положение, как только мы вытащим из соленой воды цинковую пластинку.

А так ли хорошо знаком вам

момент

?

Калейдоскоп „Кванта"

Любопытно, что...

...кошка, брошенная вверх ногами, способна приземлиться на лапы, хотя момент импульса кошки остается постоянным во время падения. Происходит это за счет поворота какой-то части тела кошки в одну сторону, а лап — в противоположную, что позволяет ей изменить ориентацию.

...забавы с игрушками могут повлечь серьезные исследования. Например, известные ученые Клейн и Зоммерфельд посвятили целых четыре тома только движению волчков. Полученные, в том числе и с помощью закона сохранения момента импульса, результаты объясняют движения таких твердых тел, как гироскоп или Земля.

...геометрическое следствие сохранения момента импульса было установлено по наблюдениям еще в 1609 году Кеплером и сформулировано им в одном из трех знаменитых законов, гласящим, что радиус-вектор, проведенный из Солнца к планете, «заметает» равные площади за равные времена.

...фотоны можно отсортировать так, что направление момента импульса — и фотоны им обладают — у всех у них будет одинаковым. Это удалось показать в искусном эксперименте, когда освещением диска поляризованным светом, падающим вдоль оси диска, было вызвано его вращение.

Микроопыт

Свяжите книгу резинкой, чтобы она не раскрывалась. Подбросьте ее несколько раз вверх так, чтобы она вращалась последовательно вокруг различных осей. Что вы наблюдаете? Почему?

13. Лестница, центр тяжести которой находится посередине, опирается на абсолютно гладкие пол и стену. Какой должна быть сила натяжения веревки, привязанной к середине лестницы, чтобы удержать ее от падения?

Конечно же, выдающийся физик XX века Р. Фейнман не вводил таким странным образом понятие момента. Этот термин, в близком к современному понимании, был введен в науку в XVI веке покровителем и другом Галилея Гвидо Убальдо дель Монте. Им же было сформулировано и условие равновесия рычага в виде равенства моментов.

Понятие момента значительно шире известного из школы момента силы, о котором именно и шла сейчас речь. Не менее важен и момент инерции, характеризующий распре-

Вопросы и задачи

1. Как отличить сырое яйцо от вареного?

2. Кирпич лежит на наклонной плоскости, прилегая к ней всем основанием. Какая половина кирпича — правая или левая — с большей силой давит на наклонную плоскость?

3. Как легче сдвинуть с места груженую телегу: прилагая силу к корпусу телеги или к верхней части обода колеса?

4. Почему, прижимая руки к телу, фигуристка на льду вращается быстрее?

5. Почему прямоугольный проволочный виток с током стремится устанавливаться в магнитном поле так, чтобы плоскость витка была перпендикулярна к полю?

6. Отчего присохшую пробку с резьбой легче отвернуть, если плотно обмотать ее несколькими слоями ткани?

7. Длинный стержень легче удерживать в горизонтальном положении за середину, чем за конец. Почему?

8. Что труднее переломить — целую спичку или ее половинку?

9. На некоторых гоночных автомобилях двигатель стоит не спереди и не сзади, а посередине. Какое преимущество имеет такое расположение?

10. Почему при стрельбе из пистолета выбирают стойки, указанные на рисунке?

11. Почему мяч не остается в покое на наклонной плоскости?

12. Почему конькобежцы, разгоняясь, размахивают руками?

Что читать о моменте в «Кванте»
(публикации последних лет)

1. «Законы Кеплера и школьная физика» — 1986, № 2, с. 49;
2. «Магнитный момент тока» — 1986, № 3, с. 22;
3. «Калейдоскоп «Кванта» — 1988, № 4, с. 40;
4. «Равнодействующая — как ее найти?» — 1988, № 11—12, с. 50;
5. «Статика» — 1989, № 2, с. 62.

... работа, которую мы проделали, равна углу, на который было повернуто тело, умноженному на какую-то странную комбинацию сил и расстояний. Эта «странная комбинация» и есть момент.

Р. Фейнман

14. Провод, согнутый как показано на рисунке, может вращаться вокруг горизонтальной оси и расположен в однородном магнитном поле, направленном вертикально. Что произойдет с проводом, если по нему потечет ток?

деление масс в теле и служащий мерой его инертности при вращении, и момент импульса, закон сохранения которого — того же ранга, что и законы сохранения импульса и энергии. При дальнейшем изучении физики вы познакомитесь также со спиновым и магнитным моментами элементарных частиц, с моментами импульса атомных ядер, атомов и молекул, и даже с моментами инерции и импульса планетных систем, звезд и звездных скоплений — без этих понятий невозможно представить современное состояние науки.

Математический кружок

Откуда берутся задачи?

И. ШАРЫГИН

После некоторого размышления я решил начать эту статью с двух противоречащих друг другу высказываний, которыми следовало бы ее завершить. Во-первых, не хотелось бы, чтобы каждый школьник, прочитавший эту статью, а таковые, надеюсь, найдутся, сразу кинулся сочинять собственные задачи. А во-вторых, я приглашаю всех желающих принять участие в конкурсе по составлению задач (в первую очередь, геометрических). Свои произведения присылайте в «Квант» на имя автора статьи. Лучшие творческие достижения (критерии субъективные) будут опубликованы и даже премированы (хотя, конечно, не так щедро, как в телепрограмме «Капитал-шоу»).

Теперь к делу. Я хочу поделиться своим довольно большим опытом в деле составления различных геометрических задач, раскрыть некоторые секреты своей кухни, сформулировать эстетические и даже этические принципы. Начну с того, что задачи удобно разделить на три группы: учебные, конкурсные и олимпиадные. Можно говорить еще и о творческих задачах, но это скорее подтекст, нежели формальный признак, характеристика «творческая» более относится не к самой задаче, а к процессу ее решения. Впрочем, стоит все же выделить в отдельную группу задачи «проблемного» типа.

Существует определенный набор характерных технических приемов, достаточно часто используемых при составлении тех или иных видов задач.

Перефразировка

Начну с примера.

Задача 1. *Докажите, что для произвольного треугольника проекция диаметра описанной около него окружности, перпендикулярного одной стороне этого треугольника, на другую его сторону равна третьей стороне.*

Решение. За этой изящной словесностью скрывается широкоизвестный факт, сопутствующий теореме синусов: $a=2R\sin A$ (Здесь и далее a, b, c — стороны треугольника, A, B, C — его углы, R — радиус описанной окружности). Формулировка этой задачи литературно настолько привлекательна, что перед ее чарами не устояли даже видавшие виды руководители «Задачника «Кванта», включившие ее в свой задачник. Задача эта скорее учебная, чем олимпиадная. Ее смысл — показать известный факт с новой неожиданной точки зрения.

Весьма распространенным является прием, который можно назвать «замена опорной фигуры». Я, как ведущий раздела «Задачи» в журнале «Математика в школе», нередко прибегаю к нему, если мне не хватает для этого раздела какой-либо не очень трудной задачи (подобные задачи обычно даются без авторской подписи.) Такие задачи встречаются довольно часто. Вот пример из XXIV Всесоюзной олимпиады по математике (1990 г.).

Широко и давно известна следующая теорема:

Теорема. *Если на прямых AB, BC и CA взяты произвольно точки C′, A′ и B′ соответственно, отличные от вершин треугольника ABC, то окружности, проходящие через A, B′, C′; A′, B, C′ и A′, B′, C имеют общую точку.*

(Иногда эту теорему называют теоремой Микеля, а общую точку пересечения окружностей обозначают через M и называют точкой Микеля.)

Доказывается эта теорема в общем-то несложно. Единственная трудность, если не прибегать к ориентированным углам, состоит в необходимости перебора различных случаев взаимного расположения точек C', A' и B'. В ситуации, изображенной на рисунке 1, *а*, обозначив через M точку пересечения окружностей A, B', C' и A', B, C', легко покажем, что точки A', B', C, M лежат на одной окружности.

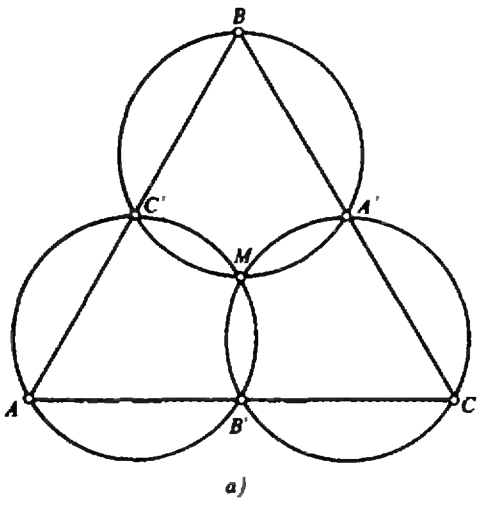
А вот задача Всесоюзной олимпиады:

Задача 2. *На стороне AB выпуклого четырехугольника ABCD взята точка E, отличная от точек A и B. Отрезки AC и DE пересекаются в точке F. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC, CDF и BDE, имеют общую точку.*

Решение. Присмотревшись к рисунку 1, *б* и вдумавшись в условие, мы без труда заметим, что задача 2 совпадает с теоремой, если указанную в ней конфигурацию привязать к треугольнику AEF (переобозначив при этом буквы $E \to B$, $B \to C'$, $F \to C$, $C \to B'$, $D \to A'$). Конечно, формулировка задачи 2 менее естественна, а следовательно, менее эстетична, чем теоремы. Возможно, что я и ошибся в своих предположениях и неверно «вычислил» происхождение этой задачи 2. Ну, что ж, тем хуже для организаторов олимпиады.

Очень красивые и эффектные задачи могут возникать при переводе геометрической задачи с геометрического языка на алгебраический. Например, возьмем известную задачу на построение треугольника по трем высотам (можете ли вы решить эту задачу?). Идея состоит в том, что треугольник со сторонами a, b, c подобен треугольнику со сторонами $1/h_a$, $1/h_b$, $1/h_c$ по третьему признаку подобия треугольников.

Пусть теперь высоты треугольника равны a, b, c, а его стороны x, y, z. Если этот треугольник остроугольный,



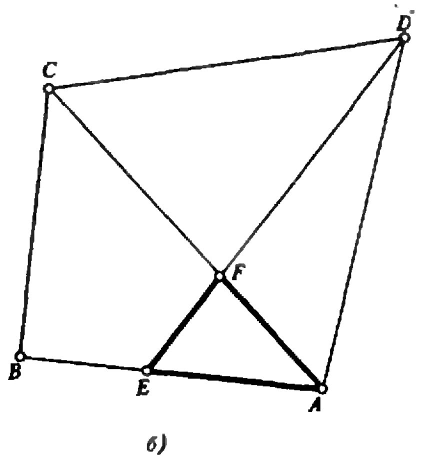


Рис. 1.

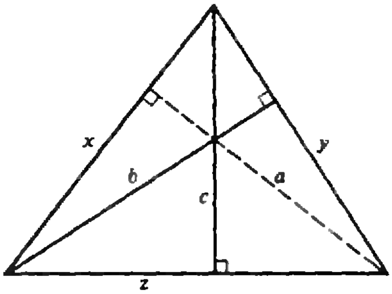


Рис. 2.

легко получаем систему уравнений для x, y, z.

Итак, имеем задачу (рис. 2):

З а д а ч а 3. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-c^2}+\sqrt{y^2-c^2}=z, \\ \sqrt{y^2-a^2}+\sqrt{z^2-a^2}=x, \\ \sqrt{z^2-b^2}+\sqrt{x^2-b^2}=y. \end{cases}$$

Зная происхождение этой системы, мы без труда найдем условие, при котором она совместна (остроугольность треугольника со сторонами $1/a$, $1/b$, $1/c$), а затем и решим саму систему. (Докажите при этом, что система, как и задача на построение, не может иметь более одного решения.)

К этому же разделу, хотя и с некоторой натяжкой, можно отнести изменение формулировки, связанное с переходом от прямого утверждения к обратному. (Стоит заметить, что границы между типами задач весьма размыты, условны. Одна и та же задача часто может служить иллюстрацией различных приемов, тем более, что во многих случаях итоговая задача получается за счет комбинации различных приемов.) Здесь возможен широкий спектр различных случаев и разновидностей, поэтому я ограничусь одним примером, показывающим, как из тривиального по сути прямого утверждения получается вполне богатая геометрическим содержанием задача. Совершенно очевидно, что точка пересечения высот (точка H) остроугольного треугольника ABC обладает следующим свойством:

$$\angle HAB=\angle HCB, \quad \angle HBA=\angle HCA, \quad \angle HAC=\angle HBC.$$

В связи с этим возникает вполне естественно задача:

З а д а ч а 4. *Найдите геометрическое место таких точек M, для которых имеют место равенства $\angle MAB=\angle MCB$, $\angle MBA=\angle MCA$, где ABC — данный остроугольный треугольник.*

Р е ш е н и е. Понятно, что искомому месту точек внутри треугольника принадлежит его точка пересечения высот. Кстати, здесь возникает отнюдь не тривиальная задача: единственна ли такая точка внутри треугольника? Мы докажем ее единственность. Для этого продолжим AM, BM и CM до пересечения со сторонами треугольника в точках A_1, B_1 и C_1 (рис. 3). Точки A, C, A_1 и C_1 лежат на одной окружности. Значит, $\angle MA_1C_1=\angle MCA=\angle MBC_1$ и $\angle MAC=\angle MC_1A_1$. Таким образом, M, B, A_1 и C_1 также лежат на одной окружности и $\angle MBA_1=\angle MC_1A_1=\angle MAC$. Обозначив теперь углы через α, β и φ, как на рисунке 3, найдем, что $\alpha+\beta+\varphi=\pi/2$, из чего следует, что AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты нашего треугольника. Однако наше геометрическое место не исчерпывается одной точкой пересечения высот. В него входит также дуга AB описанной около ABC окружности, а также середины дуг BC и CA (докажите это).

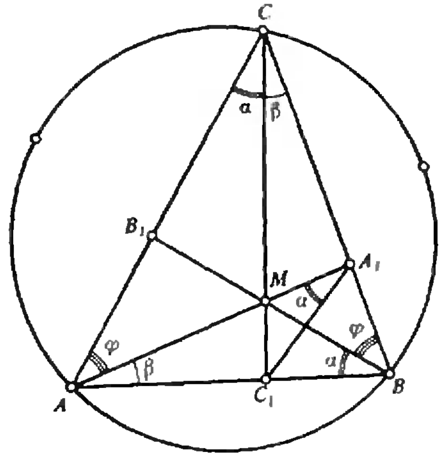


Рис. 3.

Конструкции

Чаще всего в задачах этого типа «сооружается» некая геометрическая конструкция, в качестве деталей которой берутся некие фигуры и их элементы.

Иллюстрацией здесь могут служить стереометрические задачи-«монстры», встречающиеся на экзаменах в такие вузы, как МФТИ, мехмат и ВМК МГУ и некоторые другие. Я не буду приводить примеры подобных задач, тем более, что за ними не надо далеко ходить. Достаточно вспомнить стереометрические задачи из вариантов 1990 г., опубликованные в журнале «Квант», №№ 1 и 2 за 1990 и 1991 годы.

Усложнение геометрической конструкции почти наверняка приводит к многоходовости задачи, превращает ее в своего рода задачу-«этажерку» (много полочек и на каждой своя задачка) или задачу-«матрешку» (несколько задач, одна в другой).

Впрочем, такого рода задачи не обязательно должны иметь в основе сложную геометрическую конструкцию. Вот простой пример, составленный из двух (или из трех) задач-«полочек»:

Задача 5. *Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре треугольника. Докажите, что произведение площадей двух противоположных треугольников равно произведению площадей двух других треугольников.*

Задача 6. *Докажите, что из всех четырехугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.*

Решите задачи 5 и 6 самостоятельно, а мы из них сконструируем следующую задачу.

Задача 7. *В единичную окружность вписан четырехугольник ABCD, диагонали которого пересекаются в точке M. Найдите площадь этого четырехугольника, если известно, что произведение площадей треугольников ABM и CDM равно 1/4.*

Решение. Чтобы ее решить, достаточно заметить (рис. 4), что

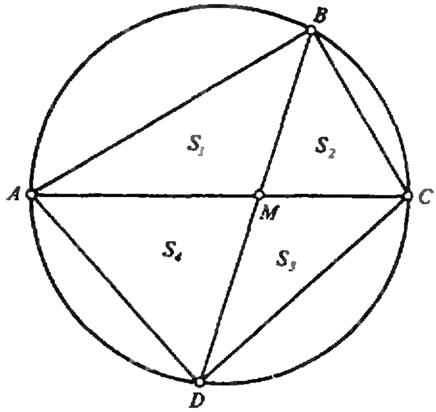


Рис. 4.

$S_1S_3=S_2S_4=1/4$ (задача 5), а также, что $S=S_1+S_3+S_2+S_4\geqslant 2\sqrt{S_1S_3}+2\sqrt{S_2S_4}=2$ (неравенство о среднем арифметическом).

Кроме того (задача 6) $S_{ABCD}\leqslant 2$, так как площадь квадрата, вписанного в единичную окружность, равна 2. Из всего этого следует, что $ABCD$ — квадрат и его площадь 2.

Иногда целью конструкции является маскировка основной идеи, или говоря шахматным языком, добавление вступительной игры. Обычно это приводит к появлению в условии лишних деталей, мало и даже вовсе не работающих в решении, что, конечно же, снижает эстетический уровень задачи («Каждое ружье должно стрелять!»). В качестве примера, возможно не очень убедительного, поскольку мой анализ основывается на личных домыслах, вновь возьму задачу с XXIV Всесоюзной олимпиады.

Задача 8. *На сторонах A_1A_2 и A_2A_3 правильного 2n-угольника $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ взяты точки K и N соответственно так, что $\angle KA_{n+2}N=\pi/(2n)$. Докажите, что NA_{n+2} — биссектриса угла KNA_3.*

Решение. Вся суть задачи в следующем. Возьмем произвольный треугольник ABC и проведем в нем биссектрису угла B и биссектрисы углов, смежных с углами A и C (рис. 5). Эти три прямые, как известно, пересекаются в одной точке —

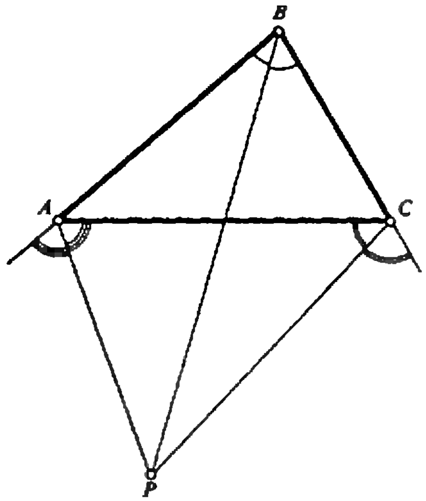


Рис. 5.

центре вневписанной окружности треугольника ABC. (Если вы этого не знаете, докажите самостоятельно. Рассуждение полностью аналогично доказательству того, что биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке.) Обозначим эту точку через P. Нетрудно доказать, что угол APC равен $90° - \frac{1}{2}B$. Верно и обратное утверждение: если на биссектрисе угла B вне треугольника ABC взята точка P такая, что $\angle APC = 90° - \frac{1}{2}B$, то AP и CP будут являться биссектрисами внешних углов этого треугольника. (Докажите.) Вот и все. Именно в этом суть ситуации, описанной в условии задачи 8. (Роль треугольника ABC играет треугольник KA_2N вместо точки P — вершина A_{n+2}.) Весь антураж в виде правильного n-угольника нужен лишь для того, «чтобы вы не догадались».

Многие задачи конструируются авторами под понравившуюся им идею решения. Правда, довольно часто «решатели» находят другие, отличные от авторского, иногда более простые решения.

В связи с задачей 8 хочу в качестве примера взять одну из «своих» задач. Мне захотелось сконструировать задачу, в которой рассуждение о том, что три биссектрисы пересекаются в одной точке, а вернее, что через точку пересечения двух биссектрис углов некоего треугольника (не обязательно внутренних, см. рисунок 5) проходит третья, повторялось бы дважды, причем второй этап существенно опирался бы на первый. Получившуюся задачу нельзя назвать очень удачной, поскольку идея была реализована на известной конструкции, но все же...

Задача 9. *В треугольнике ABC угол B равен $120°$. На стороне AC взята точка M, а на прямой AB точка K так, что BM — биссектриса угла ABC, а CK — биссектриса угла, смежного с ACB. Отрезок MK пересекает сторону BC в точке P. Докажите, что $\angle APM = 30°$.*

Решение. Вот это двухходовое рассуждение. Для треугольника BMC отрезки BK и CK — биссектрисы внешних углов B и C (рис. 6). Следовательно, MP — биссектриса угла BMC, а P — точка пересечения биссектрис углов, внешних к углам B и M треугольника ABM. Значит, AP — биссектриса угла BAC. Окончательно получаем

$$\angle APM = \angle PMC - \angle PAM =$$
$$= \frac{1}{2}(\angle BMC - \angle BAM) = 30°.$$

Ну, и наконец, задачу можно конструировать «под ответ» (так часто поступают в учебных задачах) или, более широко, «под результат». Хочу в качестве примера привести одну задачу-ловушку (весьма редко встре-

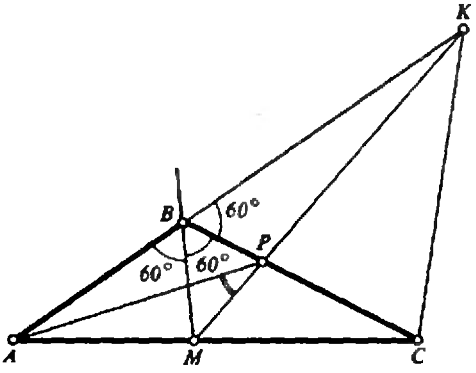


Рис. 6.

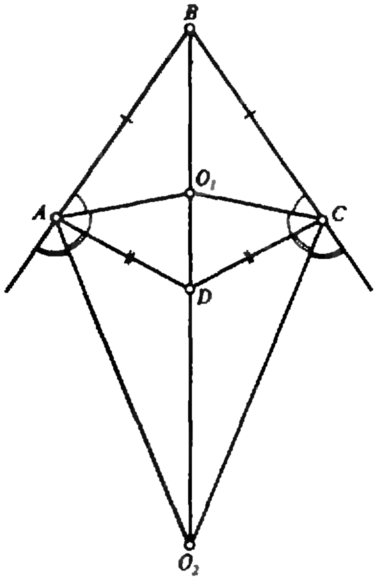


Рис. 7.

чающийся тип задач), в которой специально подобранные числовые данные задают непривычную геометрическую ситуацию. Несмотря на определенные недостатки (пришлось прибегнуть к маленькой хитрости в формулировке условия), задача эта мне весьма дорога. Правда, ее нельзя отнести ни к олимпиадным — не принято давать на олимпиадах задачи с числовыми данными, ни к конкурсным задачам — попасться в ловушку могут даже самые сильные, а это не соответствует идее конкурса. Скорее, это все же учебная задача с воспитательным оттенком.

Задача 10. *В основании четырехугольной пирамиды лежит выпуклый четырехугольник, две стороны которого равны 6, а две оставшиеся 10, высота пирамиды равна 7, боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем пирамиды.*

Решение. По условию, двугранные углы при основании равны или 60° или 120° (но не обязательно только 60°. Именно в этом небольшая тонкость в формулировке!), а вершина пирамиды проектируется в точку, равноудаленную от сторон, а вернее, от прямых, образующих четырехугольник. Из последнего следует, что четырехугольник в основании не может быть параллелограммом. Две соседние его стороны равны 6, две другие, также соседние, равны 10. Но если у четырехугольника $ABCD$ имеет место $AB=BC(=10)$, $AD=DC(=6)$, то для него есть две точки O_1 и O_2, равноудаленные от его сторон (рис. 7). Из условия следует, что расстояния от проекции вершины пирамиды до ее сторон равны $7/\sqrt{3}$. Если вершина проектируется в точку O_1 — центр вписанной в $ABCD$ окружности, то площадь $ABCD$ должна быть равной $16\cdot\frac{7}{\sqrt{3}}$. Но площадь $ABCD$ не превосходит 60 (она равна 60, если углы A и C прямые), а $16\cdot\frac{7}{\sqrt{3}}>60$. Значит, вершина проектируется в точку O_2, расстояния от которой до сторон четырехугольника $ABCD$ равны $\frac{7}{\sqrt{3}}$. Теперь легко найдем площадь $ABCD$, $(10-6)\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{28}{\sqrt{3}}$, а затем и объем пирамиды $\frac{64}{\sqrt{3}}$.

Частный случай

Многие общие теоремы, вооружающие нас мощным средством решения задач, такие как теорема Чевы в геометрии или неравенства о средних в алгебре, могут выступать и в качестве инструмента составления задач. Например, возьмем теорему Паскаля: *если A, B, C, D, E и F — шесть точек, расположенных на окружности, то три точки, в которых пересекаются попарно прямые AB и DE, BC и EF, FA и CD, расположены на одной прямой.* Рассмотрим также задачу:

Задача 11. *Пусть стороны AB и CD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а стороны BC и AD — в точке K. Докажите, что касательные к окружности в точках B и D пересекаются на прямой KM.*

Не надо обладать большой наблюдательностью, чтобы заметить, что эта задача является частным, а вернее предельным случаем теоремы Паскаля.

Профессиональные математики, занимающиеся также и организацией математических олимпиад, нередко черпают красивые и интересные задачи из своей научной деятельности, перенося на школьную почву частные случаи серьезных математических теорем, приспосабливая к ней те или иные леммы, в большом числе возникающие при доказательстве почти любой серьезной математической теоремы. Правда, в геометрии такие примеры не слишком часты, серьезная математика все же очень далека от школьной геометрии. (Эту фразу ни в коем случае нельзя рассматривать как упрек геометрии.) Поэтому я ограничусь одним примером, возможно, не очень ярким и характерным.

Есть такая **теорема «о зигзаге»**. Даны две окружности (возможно, в пространстве). Известно, что существует набор из $2n$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ таких, что точки с нечетными номерами расположены на одной окружности, точки с четными номерами — на другой и $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{2n}A_1$. Тогда таких наборов из $2n$ точек существует бесконечно много, причем в качестве точки A можно взять любую точку первой окружности, а расстояние между последовательными точками будет таким же, как у исходного набора точек.

Я не знаю элементарного доказательства этой теоремы. Однако ее частные случаи вполне можно использовать в качестве элементарных задач. Например:

Задача 12. *На плоскости даны две окружности с радиусами R и r и расстоянием между центрами a. Найдите сторону ромба, две противоположные вершины которого лежат на одной окружности, а две оставшиеся — на другой.*

Задача эта достаточно проста, поэтому я ограничусь лишь указанием ответа: $\sqrt{R^2+r^2-a^2}$.

(Окончание в следующем номере)

Информация

Вечерняя физическая школа при МГУ

Вечерняя физическая школа (ВФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 9, 10 и 11 классы на очередной учебный год.

Основная цель ВФШ — помочь учащимся глубже изучить физику в объеме школьной программы. Занятия проводятся в вечернее время в форме лекций, читаемых раз в дне недели, и еженедельных семинаров. Кроме того, учащиеся смогут посетить научные лаборатории факультета и на лекциях ведущих ученых ознакомиться с основными направлениями современной физики.

Для желающих организованы факультативные занятия по математике и основам информатики.

Прием в ВФШ производится по результатам собеседования, которое будет проводиться начиная с 26 сентября. Для поступления в школу необходимо лично заполнить заявление в комитете ВЛКСМ физфака МГУ (и приложить две фотокарточки размером 3×4 см). Заявления можно подавать с 6 по 22 сентября ежедневно, кроме воскресенья, с 16 до 18 часов. Работающая молодежь зачисляется вне конкурса.

Успешно закончившие обучение получают справку об окончании ВФШ.

Адрес: 119899, Москва, ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ВФШ. Телефон: 939-26-56.

Вниманию наших читателей

Московский магазин № 3 «Академкнига» (книга-почтой) высылает наложенным платежом книги издательства «Наука»:

Бронштейн М. П. *Солнечное вещество. Лучи икс. Изобретатели радиотелеграфа.* (Библиотечка «Квант», вып. 80). 1990. 40 к.

Буздин А. И., Зильберман А. Р., Кротов С. С. *Раз задача, два задача...* (Библиотечка «Квант», вып. 81). 1990. 1 р.

Дирак П. А. М. *Воспоминания о необычайной эпохе.* 1990. 1 р. 10 к.

Дьяконов В. П. *Справочник по расчетам на микрокалькуляторах.* 1989. 1 р. 80 к.

Математика для техникумов. Геометрия. 1989. 75 к.

Паркер Б. *Мечта Эйнштейна: В поисках единой теории строения Вселенной.* Пер. с англ. 1991. 1 р. 50 к.

Поль Дирак и физика XX века. 1990. 2 р. 80 к.

Сборник задач по физике. Учебное пособие. Под ред. С. М. Козела. Изд. 2-е, испр. 1990. 90 к.

Сена Л. А. *Единицы физических величин и их размерности.* Учебно-справочное руководство. Изд. 3-е, перераб. и доп. 1989. 1 р.

Стройк Д. Я. *Краткий очерк истории математики.* Пер. с нем. Изд. 5-е, испр. 1990. 2 р.

Филиппов А. Т. *Многоликий солитон.* (Библиотечка «Квант», вып. 48). 1990. 60 к.

Заказы на книги направляйте по адресу: 117393 Москва, ул. Академика Пилюгина, д. 14, корп. 2, магазин № 3 «Книга-почтой» «Академкнига».

Ленинградский магазин «Академкнига» (книга-почтой) высылает наложенным платежом книги издательства «Наука»:

Аленицын А. Г., Бутиков Е. И., Кондратьев А. С. *Краткий физико-математический справочник.* 1990. 1 р. 70 к.

Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. *Квантовая электродинамика.* (Теоретическая физика в 10 т., т. IV). Изд. 3-е, испр. 1989. 1 р. 80 к.

Бугров Я. С., Никольский С. М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.* 1989. 1 р.

Вавилов С. И. *Исаак Ньютон.* 1989. 1 р. 20 к.

Горский Ю. М. *Системно-информационный анализ процессов управления.* 1988. 4 р. 30 к.

Задачи по математике. Начала анализа. Справочное пособие. 1990. 2 р. 40 к.

Заочные математические олимпиады. 1986. 30 к.

Козлов Б. И. *Возникновение и развитие технических наук. Опыт историко-теоретического исследования.* 1988. 1 р. 80 к.

Компьютер и задачи выбора. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения). 1989. 80 к.

Кудрявцев Л. Д. *Краткий курс математического анализа.* 1989. 1 р. 90 к.

Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. *Краткий курс высшей математики.* Для университетов. Изд. 7-е, испр. 1989. 1 р. 40 к.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Квантовая механика. Нерелятивистская теория.* (Теоретическая физика в 10 т., т. III). 1989. 1 р. 90 к.

Мелединн Г. В. *Физика в задачах. Экзаменационные задачи с решениями.* 1989. 50 к.

Никольский С. М., Потапов М. К. *Алгебра. Пособие для самообразования.* Изд. 2-е, перераб. и доп. 1990. 1 р. 10 к.

Пайс А. *Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна.* Пер. с англ. 1989. 3 р. 30 к.

Пярнпуу А. А. *Программирование на современных алгоритмических языках.* Изд. 3-е, перераб. и доп. 1990. 1 р. 30 к.

Сборник задач по физике. Учебное пособие. Под ред. С. М. Козела. Изд. 2-е, испр. 1990. 90 к.

Стройк Д. Я. *Краткий очерк истории математики.* Изд. 5-е, испр. 1990. 2 р.

Физики о себе. Сборник документов. 1990. 2 р.

Фролова Г. В. *Педагогические возможности ЭВМ. Опыт. Проблемы. Перспективы.* 1988. 70 к.

Яворский Б. М., Селезнев Ю. А. *Справочное руководство по физике для поступающих в вузы и для самообразования.* 1989. 1 р. 90 к.

Заказы на книги направляйте по адресу: 197345 Ленинград, Петрозаводская ул., 7, «Книга-почтой».

Харьковский магазин «Академкнига» высылает наложенным платежом книги издательства «Наука»:

Арнольд В. И. *Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук — первые шаги математического анализа и теории катастроф от эвольвент до квазикристаллов.* (Современная математика для студентов). 1989. 35 к.

Белонучкин В. Е. *Кеплер, Ньютон и все-все-все.* (Библиотечка «Квант», вып. 78). 1990. 30 к.

Брусенцов Н. П. *Микрокомпьютерная система обучения «Наставник».* (Библиотечка программиста). 1990. 3 р.

Воробьев И. И. *Теория относительности в задачах.* 1989. 40 к.

Гальперин Г. А., Земляков А. Н. *Математические бильярды.* (Библиотечка «Квант», вып. 77). 1990. 65 к.

Гросберг А. Ю., Хохлов А. Р. *Физика в мире полимеров.* (Библиотечка «Квант», вып. 74). 1989. 55 к.

Майер В. В. *Кумулятивный эффект в простых опытах.* 1989. 50 к.

Полищук В. Р. *Как исследуют вещества.* (Библиотечка «Квант», вып. 72). 1989. 50 к.

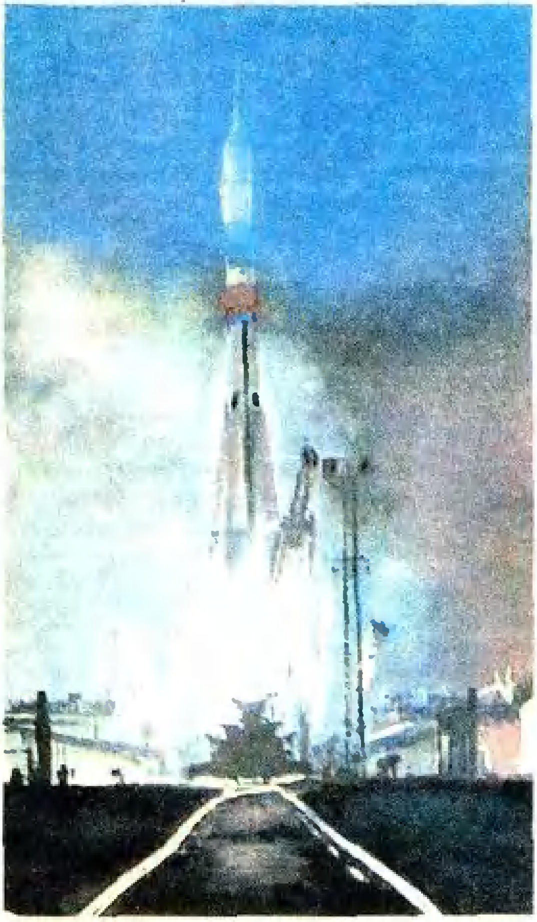
Пономарев Л. И. *Под знаком кванта.* Изд. 2-е, испр. и доп. 1990. 1 р. 70 к.

Сборник качественных вопросов и задач по общей физике. Учебное пособие для втузов. 1990. 1 р. 20 к.

Силин А. А. *Трение и мы.* (Библиотечка «Квант», вып. 57). 1987. 35 к.

Физики о себе. Сборник документов. 1990. 2 р.

Заказы на книги направляйте по адресу: 310078 Харьков, ул. Чернышевского, 87, «Академкнига».



Ф-значит ракета

В этой рубрике мы обычно печатаем материалы о ракетно-космической технике и ее возможностях. Нынешняя статья посвящена издержкам этой техники, т. е. тому отрицательному воздействию, которое она оказывает на природу.

Озон, вулканы и... ракеты

Доктор технических наук
В. БУРДАКОВ

Среди многих привычных в наше время экологических бед озонная проблема занимает особое место. Если в земной атмосфере не будет озона, то солнечное жесткое УФ излучение (длина волны $\lambda<300$ нм) погубит фитопланктон океанов и морей, возвращающий в нашу земную атмосферу до 70 % кислорода из углекислоты, во все большей мере вырабатываемой живыми организмами, промышленностью и транспортом. Леса и растения, возвращающие в атмосферу до 30 % кислорода, также боятся ультрафиолетового излучения. Наконец, люди, которых сейчас на Земле более 5,3 млрд. и большинство из которых так любят греться на солнышке, все в большей мере подвергают себя опасности. Загар обеспечивает мягкое УФ излучение ($\lambda>300$ нм), называемое эритемным. Оно очень полезно, т. к. вырабатывает в организме витамин Д. В сочетании же с жестким (бактерицидным) излучением эритемные лучи могут вызвать не только болезненные ожоги, но и более опасные последствия. Медики и биологи считают, что уменьшение концентрации стратосферного озона всего на 1 % приводит к увеличению раковых заболеваний кожи на 6 %, увеличивает восприимчивость к другим болезням, особенно кожным, легочным и аллергическим.

Самые разные методы измерения показывают — количество стратосферного озона в земной атмосфере имеет тенденцию (тренд) к постепенному уменьшению! Хорошо еще, что существуют компенсирующие процессы — озон, исчезая на привычных для него высотах, начинает вырабатываться ближе к тропосфере (рис. 1), где плотность воздуха значитель-

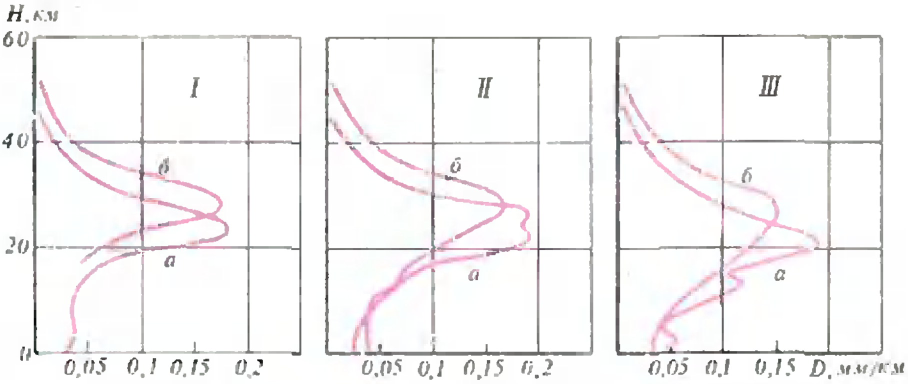


Рис. 1. Зависимость концентрации озона от высоты сегодня (а) и в конце 1960 года (б) для экваториальных (I), средних (II) и полярных (III) широт.

но выше. Казалось бы, ничего страшного — «озонный щит» продолжает действовать! Но специалисты-экологи забили тревогу — над Антарктидой после полярной ночи (т. е. в октябре) стала появляться «озонная дыра» — резкое уменьшение концентрации озона во всем атмосферном столбе. Более того, признаки «озонных дыр» стали обнаруживаться и в Северном полушарии, но не на полюсе, а примерно на широте Ленинграда.

Новое явление, как всегда, рождает массу гипотез. Не было в них недостатка и на этот раз. Чему только не приписывали вину за «озонные дыры»: и земному магнитному полю, и фреонам (хлорированным углеводородам, используемым как теплоноситель в холодильниках), и даже межпланетному «эфиру», обтекающему Землю с ее Северного полюса.

Наиболее реальной представляется версия, связывающая явление с существованием в земной атмосфере устойчивых вихрей: одного большого в районе Антарктиды и трех поменьше — в районе Северного полюса. Пока озон существовал на «своих» высотах — все было нормально, но когда максимум его концентрации опустился в зону более интенсивных ветров (рис. 2), атмосферные полярные вихри стали преграждать озону дорогу к полюсам Земли.

Есть и другие не менее опасные причины исчезновения озона, например, вулканы и... ракеты. Вулканы доставляют озоноразрушающие вещества на высоту до 12 км, откуда они поднимаются в стратосферу за счет турбулентности воздуха. Ракеты же — непосредственно в озонный слой.

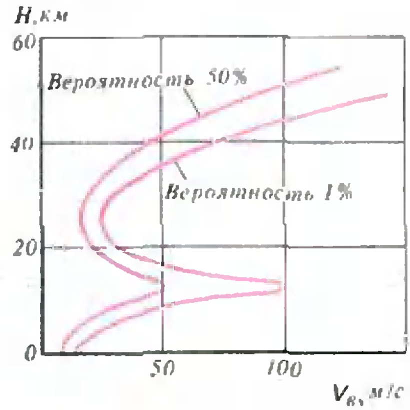


Рис. 2. Изменение скорости ветра с высотой над поверхностью Земли.

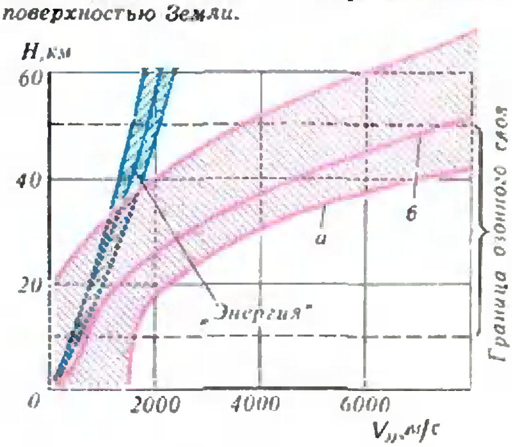


Рис. 3. Характерные траектории взлета баллистических ракет-носителей, в том числе «Энергии», (синие) и перспективных носителей самолетной схемы (красные) с горизонтальным (а) и вертикальным (б) стартом.

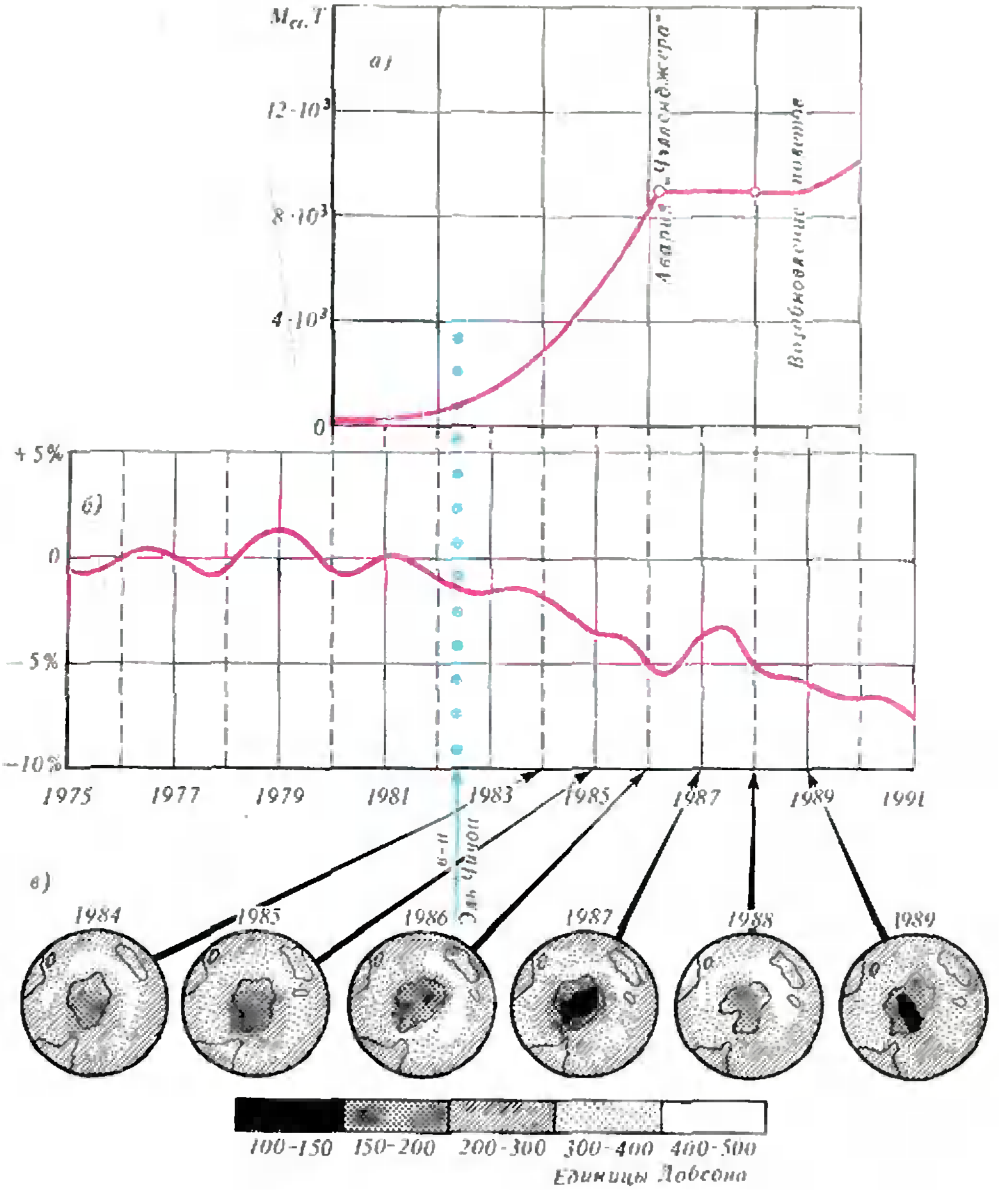
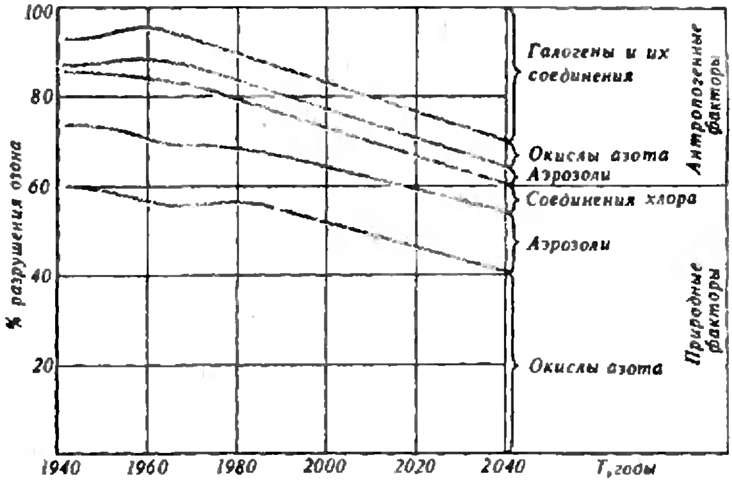


Рис. 4. Корреляционная зависимость массы выбрасываемого в атмосферу транспортной системой «Спейс Шаттл» хлора в тоннах (а) и наметившегося тренда уменьшения концентрации стратосферного озона в северном полушарии (б). Синие точки отмечают начало извержения вулкана Эль-Чичон — другую возможную причину появления озонных дыр в южном полушарии в центре Антарктиды в 1986, 1987 и 1989 годах (в). Одна единица Добсона соответствует 0,01 мм толщины озонного слоя в атмосферном столбе при нормальных условиях. Полная осредненная толщина озонного слоя для Земли не превышает 3,5 мм, или 350 единиц Добсона.

Рис. 5. Прогноз возрастания антропогенных факторов разрушения стратосферного озона по сравнению с природными факторами.



В настоящее время наибольшее количество запусков ракет осуществляют военные. Боевые ракеты малого и среднего радиусов действия, а также многие стратегические ракеты имеют твердотопливные двигательные установки, продукты выброса которых в большом количестве содержат аэрозоли, хлор и его соединения, а также окислы азота, т. е.— основные разрушители озона. К сожалению, твердотопливные ускорители все шире применяют и в космонавтике (США, Китай, Франция, Япония). Это совершенно недопустимо, особенно учитывая тенденцию к росту объемов космических транспортировок и повышению мощности ракет-носителей. Даже перспективные космические транспортные средства, которые не имеют твердотопливных ускорителей и работают на самых чистых топливных парах: водород с кислородом и углеводородное горючее с кислородом, также требует самого тщательного экологического анализа, т. к. продолжительность их пребывания в озонном слое существенно больше, чем у баллистических носителей (рис. 3).

На рисунке 4 приведена зависимость общего количества доставленных в озоносферу соединений хлора всего лишь одной космической транспортной системой — «Спейс Шаттл»*). Здесь учтен и перерыв в запусках из-за аварии «Чэлленджера» (*а*). На этом же рисунке приведен график периодических и систематических отклонений концентрации озона в северном полушарии (*б*). Периодические отклонения вызваны солнечной активностью, а систематические отклонения — причиной, которая, скорее всего, имеет антропогенную природу. Из сопоставления двух графиков видно, что уменьшение концентрации озона коррелирует с регулярными пусками «Шаттла». Вместе с тем, в апреле 1982 г. произошло мощное извержение мексиканского вулкана Эль-Чичон, выбросившего в земную атмосферу большое количество аэрозоля, хлоридов и окислов азота. Это природное событие некоторые специалисты и положили в основу объяснения причины возникновения «озонных дыр» в Антарктиде (*в*). Но «озонная дыра» постепенно исчезла, а затем появилась снова — после возобновления запусков «Шаттла», когда крупных вулканических извержений уже не было. Не доказывает ли это причастность «Шаттла» к «озонным дырам?» Как бы то ни было, ясно одно: природные и антропогенные процессы должны изучаться совместно, т. к. только в этом случае появится возможность правильно согласовывать мероприятия по защите окружающей среды. И чем раньше это будет сделано международным сообществом, тем эффективнее окажутся защитные меры.

Антропогенная доля в нашем экологическом бедствии неуклонно возрастает. Это видно хотя бы на примере разрушения озонного слоя (рис. 5). Даже многочисленные испытания ядерного оружия в атмосфере, которые проводились в 60-х годах, с точки зрения разрушения озонного слоя — ничто по сравнению с ситуацией нынешней. Еще более тяжелая картина ожидает людей в будущем веке, если научно-технический прогресс не будет поставлен под контроль информационных и природоохранных служб.

*) Имеющей (в отличие от системы «Энергия» — «Буран») в своем составе твердотопливные блоки — ускорители.

«Вместе к Марсу!»: национальный этап

Национальный этап международного конкурса «Вместе к Марсу!» завершен.*) С 17 по 21 июня в Москве состоялся финал, определены победители состязания и вручены награды. Прежде чем сообщить о наиболее интересных работах, расскажем, как проходил конкурсный отбор.

Всего в Оргкомитет поступило около 350 работ (не так много, как мы ожидали!). В зависимости от тематики они прошли экспертизу в МАИ, МГТУ им. Н. Э. Баумана, в Государственном астрономическом институте им. П. К. Штернберга. К каждой переданной на рассмотрение работе была приложена учетная карточка, в которую три специалиста заносили свои оценки. В итоге в Оргкомитет были представлены списки авторов, рекомендованных для участия в финальной части конкурса. После обсуждения всех кандидатур на совместном заседании жюри и Оргкомитета, которое проходило под председательством члена-корреспондента АН СССР М. Я. Марова с участием экспертов, был утвержден список участников финала.

Финалисты собрались под Москвой в Центре международного сотрудничества «Олимпиец». Здесь их ожидали новые испытания. В первый день все участники финала защищали свои проекты по секциям. Были выявлены 19 лучших, которые на следующий день выступили с докладами перед экспертами в МАИ и МГТУ. На третий день вечером общее жюри во главе с председателем Научно-технического совета Федерации космонавтики СССР профессором В. П. Сенкевичем провело собеседование с авторами наиболее интересных работ. Здесь и были определены 3 финалиста национального этапа: Ира Литвякова из Витебска, Сергей Стенюк из Донецка и Максим Штангеев из Харькова. Их работы отосланы в Планетное общество США. Теперь международному жюри предстоит на основе анализа всех присланных работ определить 20 участников заключительного этапа в Вашингтоне.

Участники финала в Москве награждены дипломами, авторам девяти лучших работ вручены ценные подарки и почетные дипломы Федерации космонавтики СССР. Финалисты встретились с учеными и конструкторами космической техники, посмотрели тематические видеофильмы, побывали в Звездном городке и в Научно-производственном объединении им. С. А. Лавочкина, где создаются межпланетные станции. В последний вечер они долго беседовали с президентом Всесоюзного аэрокосмического молодежного общества «Союз» космонавтом Александром Серебровым.

Во время работы в «Олимпийце» участники финала, руководители кружков, члены жюри и Оргкомитета обсуждали возможность дальнейшего сотрудничества. В ходе этих бесед родилась идея продолжить совместную работу, вовлекая в нее всех заинтересованных. Мы хотели бы, чтобы сложился коллектив ребят и взрослых, объединенных призывом пионера космонавтики Ф. А. Цандера — «Вперед на Марс!». Члены такого своеобразного очно-заочного конструкторского бюро могли бы заниматься самообразованием, продолжать разработку старого проекта или начинать новый, обмениваться информацией с коллегами, работать по заданиям и рекомендациям специалистов, встречаться для совместной работы. Итогом такой деятельности может стать многовариантный поэтапный проект исследования и освоения Марса.

Несколько слов о работах, получивших призовые места.

Простую и ясную модель предложила Ира Литвякова. При полете к Марсу может возникнуть ситуация, когда неподалеку от корабля пролетает комета, представляющая интерес для научных исследований. На такой случай надо иметь на борту корабля автоматический аппарат, способный осуществить сближение с кометой и посадку на поверхность ее ядра. По подсчетам Иры для взлета с поверхности ядра небольшой кометы нужна очень маленькая скорость. Такую скорость может сообщить аппарату сжатая пружина. В работе приведен список комет, проходящих перигелий в 1994—2000 гг., и проанализирована вероятность встречи с кометой. Для продолжения этой работы необходим более строгий анализ траекторий комет и возможности сближения с ними зонда, посланного с борта межпланетного корабля.

Работа Павла Зайчука (Красноярск) показала, что приближенный расчет траекторий может провести не только специалист. Павел приводит расчеты различных вариантов полета к Марсу и приходит к выводу, что сборку марсианского экспедиционного комплекса лучше осуществлять на высокой околоземной орби-

*) Об этом конкурсе «Квант» рассказывал в номерах 7, 10—12 за 1990 год. (*Примеч. ред.*)

те. При таком выборе точки старта и возвращения уменьшается необходимое количество горючего на межпланетном корабле. Все трудности при этом переносятся на системы, обеспечивающие сборку и обслуживание корабля на орбите.

Одной из серьезных трудностей при работе на высокой околоземной орбите является необходимость защиты от излучения радиационных поясов. При полете по межпланетной траектории радиация меньше, но и она создает серьезную проблему из-за большой длительности полета.

Противорадиационной защите корабля посвятил свою работу Максим Штангеев из Харькова. Он предлагает создать вокруг корабля магнитное поле, аналогичное магнитному полю Земли, которое надежно защищает нас от космической радиации. Магнитную катушку, создающую поле, предлагается изготовить из высокотемпературного сверхпроводника. Поскольку магнитное поле не совершает работы над движущейся в нем заряженной частицей, расход энергии на поддержание тока в катушке теоретически равен нулю. Достаточно создать в катушке мощный ток при старте корабля. Чтобы получить нужный ток, Максим предлагает использовать «по совместительству» ракетный двигатель в качестве магнитогидродинамического (МГД) генератора. Такой МГД-генератор способен кратковременно генерировать огромный постоянный ток. Нескольких секунд, в течение которых работают современные МГД-генераторы, вполне достаточно для запуска сверхпроводящего контура. В работе приведены два варианта радиационной защиты для конкретных проектов космических кораблей, предлагаемых для полета на Марс. Первый вариант — для космического корабля в форме тора. На поверхность корпуса-тора необходимо нанести специальный слой со сверхпроводящим материалом. После запуска тока в контуре вокруг корабля возникает магнитное поле, по форме напоминающее яблоко. Вторым, более экономичным, вариантом защиты является противорадиационный магнитный зонт. Он представляет собой плоскую тороидальную катушку достаточно большой площади и пригоден для защиты корабля цилиндрической формы.

Александр Костыря (Днепропетровская область) выбрал в качестве возможной базы для старта и возвращения межпланетного корабля на околоземную орбиту, а Луну. Он не задерживается на вопросах баллистики и технических проблемах. Его тема — обеспечение экспедиции продуктами питания. Подробно рассмотрены проблемы космического растениеводства и птицеводства. Высказана, между прочим, мысль, что выращенные на Луне растения и животные должны лучше переносить условия межпланетного полета, чем выращенные на Земле. Особенно подробно рассмотрен вопрос о выращивании в космосе японских перепелов (эта неприхотливая домашняя птица давно уже является объектом экспериментов на орбите). Описана действующая установка для их выращивания, созданная товарищами Александра по кружку — членами клуба «Ровесник» СПТУ № 76 Межевского района Днепропетровской области.

Модели предлагаемых устройств представили многие участники конкурса. Хотя шел конкурс идей, а не моделей, такие «объемные иллюстрации» вызывали неизменный интерес. К числу идей, удачно проиллюстрированных моделями, относится работа Григория Шифрина (Днепропетровск). Шифрин предлагает выполнить взлетно-посадочный модуль марсианского корабля в виде дисколета с большой площадью киля и аэродинамических рулей. Дисколет за счет малых моментов инерции легко управляем, имеет критический угол атаки около 45° и даже при таких наклонах не сваливается в штопор, а может безопасно планировать без участия двигателей на заранее выбранную площадку.

Бóльшая часть работ, представленных на конкурс, была посвящена комплексному описанию марсианской экспедиции в целом. Среди них заметно выделяется детальностью проработки проект Сергея Стенюка (Донецк). Экипаж — 4 человека, продолжительность экспедиции — 520 суток с 20-суточным пребыванием на поверхности Марса, двигатель — электрореактивный. Для этих исходных условий детельно описаны в пятидесятистраничном отчете все основные узлы корабля.

В целом совокупность конкурсных работ позволяет увидеть черты будущей марсианской экспедиции, что дает возможность надеяться на создание общего, тщательно проработанного проекта в нескольких вариантах.

Конкурс завершен, подарки вручены, но работа может быть продолжена. Оргкомитету и жюри интересно узнать, есть ли среди читателей «Кванта» желающие принять в ней участие. Ждем ваших писем. Направляйте их по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с пометкой «КВМ»).

Заместитель председателя национального комитета Б. Пшеничнер, член жюри конкурса С. Яценко

„Квант" улыбается

Мы продолжаем публикацию отрывков из книги Д. Джоунса «Изобретения Дедала». Короткий рассказ о книге и фрагменты из авторского предисловия к ней вы можете найти в июньском номере нашего журнала за 1989 год в заметке «Спасительная безликость».

Дома на воде

Д. ДЖОУНС

Долгая история архитектурных поисков и нерационального городского планирования наводит Дедала на мысль, что дома следует делать подвижными, чтобы в случае перепланировки не нужно было разрушать старые здания. Для перемещения домов удобнее всего было бы использовать принцип воздушной подушки, но, поскольку давление, оказываемое зданиями на опорную поверхность, составляет 0,02—2 атм, воздушная подушка вряд ли обеспечит требуемую подъемную силу. К тому же передвижение зданий сопровождалось бы невообразимым шумом. Поэтому Дедал намеревается использовать вместо воздуха воду, плотность которой в 1000 раз выше. Платформа на водяной подушке могла бы создавать значительную подъемную силу при относительно небольшом расходе воды. К сожалению, при этом вода затопит всю улицу, если только каким-то образом не отводить поток. Дедал предлагает окружить платформу водоотсасывающим кольцом, собирающим воду и возвращающим ее в систему. Дедал проектирует здания, оснащенные цистернами, насосами и всем необходимым для того, чтобы в считанные минуты превратить их в самоходные сооружения. Такой системой можно оснастить и многие существующие здания, возведенные на неглубоких или «плавающих» фундаментах.

Громко хлюпая, эти урбанистические супердомомерки будут скользить с места на место, подчиняясь прихотям архитектурной моды: высотный дом уступит место многорядному виадуку, а у подножия гигантов будут копошиться коттеджи и павильончики. Заводы будут ездить по стране в поисках квалифицированных рабочих или правительственных субсидий; пустеющие многоэтажные офисы приползут в центр Лондона, где спрос на них огромен, а старые конторы со своим персоналом покинут насиженные места, уступая требованиям комиссии по перепланировке. Трущобы гетто и загородные виллы будут располагаться обособленно или вперемежку, сообразуясь с текущей правительственной политикой (если же их просто оставить в покое, то со временем они естественным путем придут к равновесию). Проектировщики городов смогут не только учиться на своих ошибках, но и исправлять их. Только составители городских карт и работники коммунального хозяйства, наверное, проклянут новую Утопию.

(New Scientist, February 3, 1972)

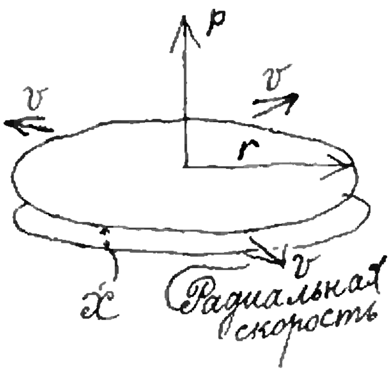
Из записной книжки Дедала

Рассмотрим платформу радиусом r, под которой в радиальных направлениях прокачивается жидкость через зазор размером x. Общая площадь щели $A=2\pi rx$, так что секундный массовый расход жидкости равен $m'(t)=2\pi rxv\rho$.

Давление p, создаваемое в жидкости перед щелью, должно равняться потоку импульса через единицу площади щели, т. е.

$$p=2\pi rxv^2\rho/2\pi rx=v^2\rho.$$

Это давление одинаково всюду под платформой и действует на всю нижнюю ее поверхность. Тогда полная подъемная сила F равна произведению давления на площадь поверхности: $F=\pi r^2v^2\rho$. Ясно, что вода, плотность которой в тысячу раз больше, чем у воздуха, создает в тысячу раз большую подъемную силу.



Принимая разумные размеры платформы на водяной подушке: $r=10$ м, $v=10$ м/с, $\rho=1000$ кг/м^3, находим

$$p=10^2\times1000 \text{ Н/м}^2 = 1 \text{ атм};$$

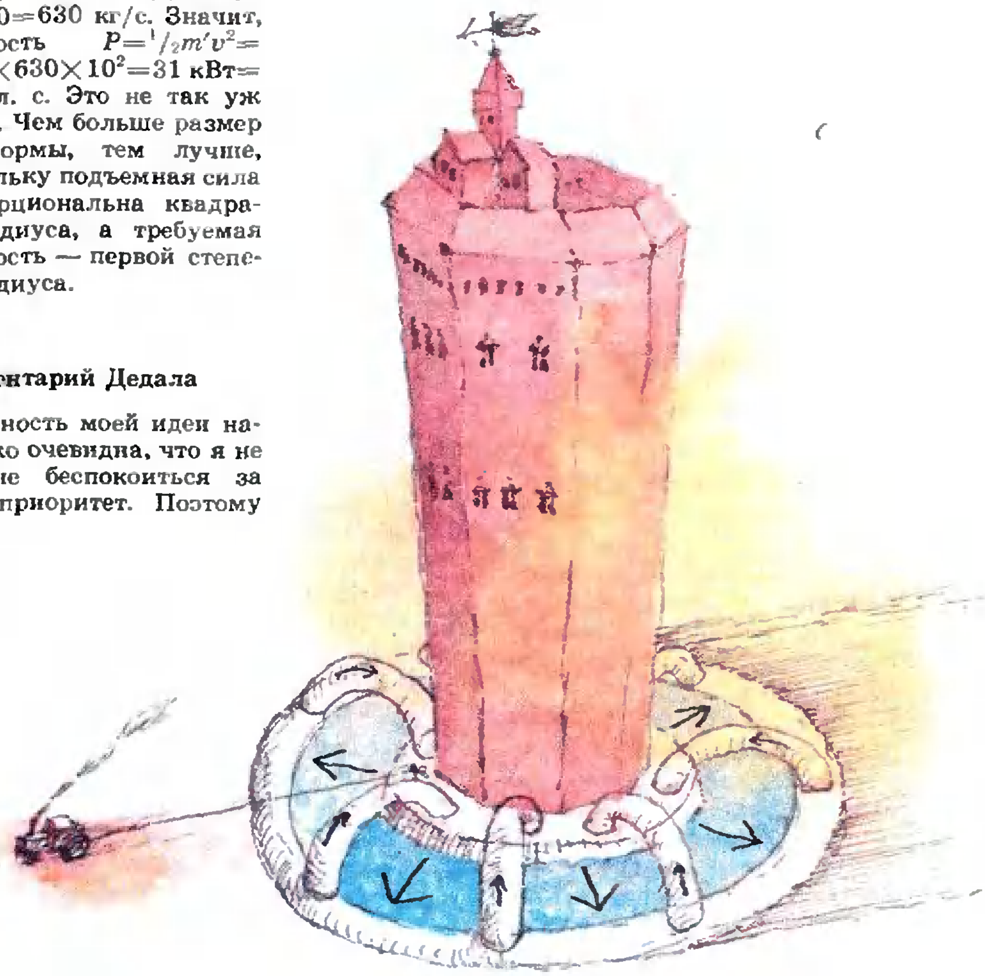
$$F=\pi\times10^2\times10^2\times1000 = 3{,}1\times10^7 \text{ Н}.$$

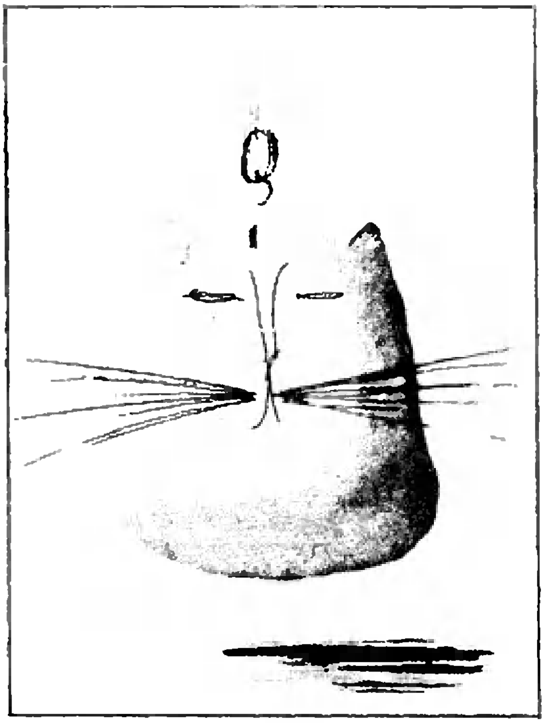
Прекрасно!

Какая мощность потребуется для создания нужного потока жидкости? Окружив здание прочной эластичной «юбкой», мы можем уменьшить зазор между ним и землей до 1 мм. Тогда массовый расход воды составит $m'=2\pi\times10\times10^{-3}\times10\times\times1000=630$ кг/с. Значит, мощность $P={}^1/_2m'v^2=0{,}5\times630\times10^2=31$ кВт$=40$ л. с. Это не так уж много. Чем больше размер платформы, тем лучше, поскольку подъемная сила пропорциональна квадрату радиуса, а требуемая мощность — первой степени радиуса.

Комментарий Дедала

Разумность моей идеи настолько очевидна, что я не мог не беспокоиться за свой приоритет. Поэтому я не очень удивился, узнав, что другие организации «наступают на пятки» фирме КОШМАР. Шесть месяцев спустя (*New Scientist*, Aug. 17, 1972, p. 340) было опубликовано сообщение о том, что Национальная инженерная лаборатория в Ист-Килбриде использует платформы на водяной подушке для перемещения тяжелых грузов в доках. Патенты на эти платформы принадлежат Национальной научно-исследовательской корпорации. (Интересно, не потеряли ли они силу из-за того, что я опубликовал свой проект раньше?) Предполагалось, что такие платформы будут в основном использоваться для точной установки тяжелых деталей при сборочных работах. Никто, однако, не додумался пока применять их для перемещения зданий.





Практикум абитуриента

Энергия электрического поля

Кандидат физико-математических наук
В. МОЖАЕВ

Когда мы говорим, что заряженный конденсатор обладает энергией, возникает ряд вопросов: откуда взялась эта энергия? где она сосредоточена? в каком виде? Убедиться в том, что в конденсаторе действительно запасена энергия, можно очень просто. Если, например, его разрядить через резистор, то резистор нагреется. И, наверное, всем известно, какая громадная энергия выделяется при разряде молнии (в гигантском конденсаторе «облако — земля»).

Чтобы ответить на поставленные выше вопросы, рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 1. *Имеется изолированный сферический воздушный конденсатор, у которого радиусы обкладок R_1 (внутренняя обкладка) и R_2 (внешняя), а заряд Q. Найдите плотность энергии электрического поля между обкладками конденсатора в случае, когда $R_2 - R_1 \ll R_1$.*

Очевидно, что энергия, запасенная в конденсаторе, не зависит от способа зарядки. Проведем зарядку, например, таким способом. Будем небольшими порциями переносить заряд из бесконечности и помещать на обкладки. Сначала зарядим внутреннюю сферу. Пусть в некоторый момент на ней уже находится заряд q (мы его уже перенесли), и мы переносим очередную порцию заряда Δq. При этом нами будет совершена работа

$$\Delta A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\Delta q}{R_1}.$$

Это выражение можно написать сразу, зная, что потенциал заряженной сферы равен $q/(4\pi\varepsilon_0 R_1)$. А можно исходить только из закона Кулона, записать выражение для работы на элементарном участке пути и проинтегрировать это выражение вдоль всего пути перемещения нашего заряда:

$$\Delta A = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{\infty}^{R_1}\frac{q\Delta q}{r^2}\,dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,\Delta q}{R_1}.$$

Понятно, что полная работа по перемещению заряда Q на внутреннюю сферу равна

$$A_1 = \int\limits_0^Q \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_1}\,dq = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1}.$$

Теперь начнем заряжать внешнюю сферу. Пусть, для определенности, на внутренней сфере находится положительный заряд, а на внешнюю будем переносить отрицательный заряд, который в некоторый момент будет равен $-q$. В этом случае при переносе очередной порции заряда этот заряд будет находиться в двух полях: в поле заряда $+Q$ (на внутренней сфере) и в поле заряда $-q$ (на внешней). Поэтому элементарная работа по переносу заряда $-\Delta q$ на сферу радиусом R_2 будет равна

$$\Delta A = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\Delta q}{R_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\Delta q}{R_2},$$

а полная работа —

$$A_2 = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2} = -\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2}.$$

Итак, наш конденсатор полностью заряжен, и запасенная в нем энергия

$$W = A_1 + A_2 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Вся эта энергия сосредоточена между сферическими обкладками конденсатора в виде энегии электрического поля. Поскольку $R_2 - R_1 \ll R_1$, поле можно считать однородным, а его напряженность равной

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}.$$

Выразим полную энергию электрического поля через напряженность:

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta R}{R_1^2} = 2\pi\varepsilon_0 E^2 R_1^2 \Delta R.$$

Для нахождения объемной плотности энергии w поделим это выражение на объем $V = 4\pi R_1^2 \Delta R$, занимаемый полем, и получим

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Мы с вами рассмотрели воздушный конденсатор, и полученное выражение для объемной плотности энергии, строго говоря, соответствует случаю электрического поля в вакууме. Попробуем подправить наше выражение для среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon \neq 1$. В этом случае, если мы будем помещать на сферы тот же заряд, то работа, совершенная нами, будет в ε раз меньше. В ε раз уменьшится и напряженность электрического поля, а выражение для объемной плотности энергии будет иметь вид

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Заметим, что полученный результат вовсе не означает, что плотность энергии после заполнения конденсатора диэлектриком (при сохранении зарядов) увеличилась в ε раз. Как раз все наоборот — энергия конденсатора уменьшилась в ε раз, поскольку напряженность поля уменьшилась в ε раз и произведение εE^2 также уменьшилось в ε раз. А вот если бы мы поддерживали постоянной разность потенциалов между обкладками конденсатора, то после заполнения конденсатора диэлектриком напряженность поля осталась бы прежней. а энергия конденсатора увеличилась бы в ε раз.

Задача 2. *Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы поместить в центр незаряженной тонкой сферической оболочки заряд Q, первоначально расположенный на большом удалении от нее (рис. 1)? Радиус внутренней поверхности оболочки R_1, внешней R_2. Рассмотрите два случая: оболочка изолирована; оболочка заземлена.*

Прежде всего заметим, что минимальной работа будет в том случае, если заряд перемещать так медленно (квазистатически), что возможным выделением тепла при перемещении по оболочке наведенных зарядов можно будет пренебречь.

Теперь — непосредственно решение. Из энергетических соображений ясно, что работа равна разности энергий нашей системы (заряд и оболочка) в конечном и начальном состояниях:

$$A = W_к - W_н.$$

Сначала рассмотрим случай, когда оболочка не заземлена (изолирована). Электрическая энергия системы в на-

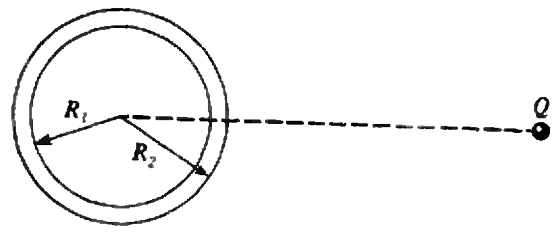


Рис. 1.

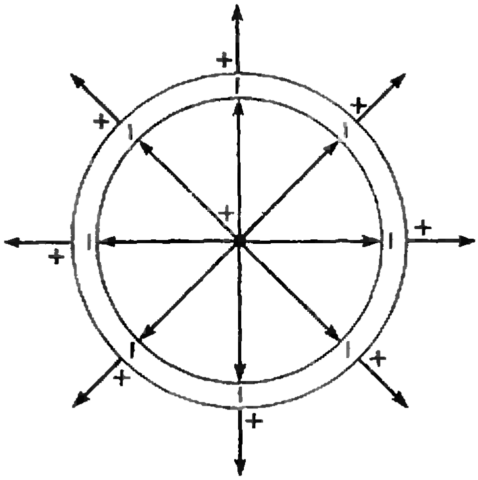


Рис. 2.

чальном состоянии, когда заряд Q (для определенности положительный) находится на большом удалении от оболочки, включает в себя только энергию электрического поля заряда Q:

$$W_н = W_Q.$$

Конфигурация электрического поля в конечном состоянии изображена на рисунке 2. Видно, что из поля заряда Q как бы вырезан сферический слой с радиусами R_1 и R_2. Поэтому понятно, что энергия электрического поля в конечном состоянии будет равна

$$W_к = W_Q - W_{R_1R_2},$$

где $W_{R_1R_2}$ — энергия электрического поля в сферическом слое с радиусами R_1 и R_2. Эта энергия может быть подсчитана что называется «в лоб» — плотность энергии поля нам известна, остается просуммировать (проинтегрировать) по всему объему сферического слоя. Мы же воспользуемся полученным в задаче 1 выражением для энергии поля заряженного сферического конденсатора:

$$W_{R_1R_2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Итак, совершенная в первом случае работа равна

$$A_I = W_к - W_н = (W_Q - W_{R_1R_2}) - W_Q = -W_{R_1R_2} = -\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Рассмотрим теперь случай заземленной оболочки. Конфигурация поля, когда заряд Q будет находиться в центре, изображена на рисунке 3. В этом случае на оболочку перетечет отрицательный заряд, равный по величине Q. Этот заряд будет расположен на внутренней поверхности оболочки, и поле будет сосредоточено только внутри сферы радиусом R_1. Работа в этом случае будет равна

$$A_{II} = W_к - W_н = (W_Q - W_{R_1}) - W_Q = -W_{R_1} = -\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1}.$$

Разумеется, этот результат можно было получить сразу из выражения для A_I, положив в нем $R_2 \to \infty$.

З а д а ч а 3. *Какое количество теплоты выделится на резисторе сопро-*

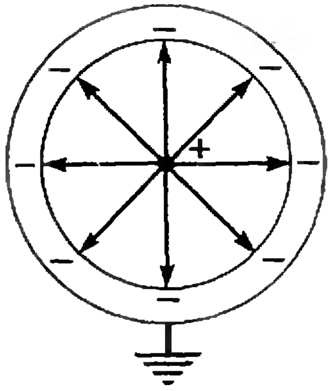


Рис. 3.

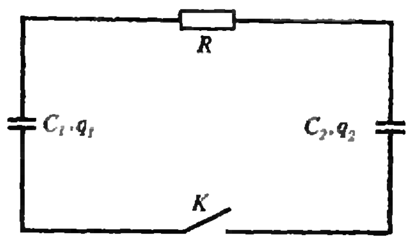


Рис. 4.

тивлением R в схеме, приведенной на рисунке 4, после замыкания ключа K? До замыкания ключа на конденсаторе емкостью C_1 находился заряд q_1, а на конденсаторе емкостью C_2 — заряд q_2.

Согласно закону сохранения энергии, выделившееся количество теплоты будет равно разности энергий конденсаторов до замыкания ключа K и после замыкания, т. е. разности начальной и конечной энергий:

$$Q = W_н - W_к.$$

До замыкания ключа суммарная энергия, сосредоточенная в конденсаторах, равна

$$W_н = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2}.$$

Для нахождения энергии конденсаторов после замыкания ключа и установления нового стационарного состояния мы должны найти новые заряды на конденсаторах. Пусть с конденсатора емкостью C_1 ушел заряд q, и новый заряд на нем стал равным $q_1 - q$. По закону сохранения суммарного заряда, на пластинах конденсатора емкостью C_2 установится заряд $q_2 + q$. Условием прекращения перетекания зарядов будет равенство напряжений на конденсаторах:

$$\frac{q_1 - q}{C_1} = \frac{q_2 + q}{C_2}.$$

Решая это уравнение, получим

$$q = \frac{q_1 C_2 - q_2 C_1}{C_1 + C_2}.$$

Тогда новые заряды на конденсаторах будут равны

$$q_1' = \frac{C_1}{C_1 + C_2}(q_1 + q_2)$$

и

$$q_2' = \frac{C_2}{C_1 + C_2}(q_1 + q_2),$$

новый запас энергии в конденсаторах будет

$$W_к = \frac{q_1'^2}{2C_1} + \frac{q_2'^2}{2C_2} = \frac{(q_1 + q_2)^2}{2(C_1 + C_2)},$$

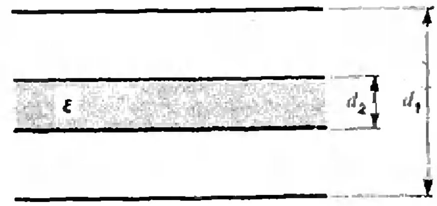


Рис. 5.

а выделившееся количество теплоты —

$$Q = W_н - W_к = \frac{(q_1 C_2 - q_2 C_1)^2}{2C_1 C_2 (C_1 + C_2)}.$$

Как видно из полученного выражения, Q не зависит от R. Какова же роль сопротивления? Оказывается, его величина влияет на скорость рассеяния (диссипации) энергии — чем меньше R, тем более интенсивно происходит выделение тепла, а время разрядки соответственно уменьшается.

Задача 4. *Какую работу нужно совершить, чтобы в зазор плоского воздушного заряженного конденсатора вставить другой плоский заряженный конденсатор, заполненный диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε (рис. 5)? Заряды на конденсаторах Q_1 и Q_2, площадь каждой пластины S, расстояние между пластинами d_1 и d_2 ($d_1 > d_2$).*

Для решения задачи используем энергетический метод. Очевидно, что работа по введению конденсатора с зарядом Q_2 в конденсатор с зарядом Q_1 будет равна разности энергий электрического поля конденсаторов в конечном и начальном положениях:

$$A = W_к - W_н.$$

В исходном состоянии конденсаторы изолированы друг от друга, и их суммарная энергия равна

$$W_н = \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} = \frac{Q_1^2 d_1}{2\varepsilon_0 S} + \frac{Q_2^2 d_2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

Энергию электрического поля системы в конечном состоянии найдем с помощью полученного выше выражения для плотности энергии электрического поля. Рассмотрим два объема однородных электрических полей: объем

$V_2=Sd_2$ конденсатора с зарядом Q_2 и суммарный объем $V_1=S(d_1-d_2)$ воздушных зазоров между пластинами. Напряженность электрического поля в объеме V_1 определяется поверхностной плотностью зарядов на внешних пластинах: $E_1=Q_1/(\varepsilon_0 S)$. В объеме V_2 напряженность электрического поля определяется суммарным зарядом пластин Q_1+Q_2 и диэлектрической проницаемостью ε среды, заполняющей внутренний конденсатор: $E_2=(Q_1+Q_2)/(\varepsilon_0\varepsilon S)$. Конечная энергия электрического поля системы равна

$$W_к=\frac{\varepsilon_0 E_1^2}{2}V_1+\frac{\varepsilon_0\varepsilon E_2^2}{2}V_2=$$
$$=\frac{1}{2\varepsilon_0\varepsilon S}\left(Q_1^2(\varepsilon d_1-\varepsilon d_2+d_2)+\right.$$
$$\left.+2Q_1Q_2d_2+Q_2^2d_2\right).$$

Окончательно работа по введению конденсатора с зарядом Q_2 в конденсатор с зарядом Q_1 равна

$$A=W_к-W_н=\frac{Q_1d_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}(2Q_2-(\varepsilon-1)Q_1).$$

Проанализируем полученное выражение. В нем содержатся два члена — первый определяет ту часть работы, которую нужно совершить, чтобы ввести пустой (воздушный) конденсатор ($\varepsilon=1$), второй член характеризует работу по введению диэлектрической пластины толщиной d_2 ($Q_2=0$). Знак перед первым членом зависит от произведения зарядов: если $Q_1Q_2>0$, то мы совершаем положительную работу, и, следовательно, на конденсатор с зарядом Q_2 и $\varepsilon=1$ действует выталкивающая сила; если же $Q_1Q_2<0$, то конденсатор втягивается, и мы совершаем отрицательную работу. Знак перед вторым членом всегда отрицательный — диэлектрическая пластина всегда втягивается в область, занятую электрическим полем. В общем случае полная работа A может быть или положительной, или отрицательной, или равной нулю.

Заметим, что при решении данной задачи мы пренебрегли краевыми эффектами, т. е. мы считали, что все электрическое поле зарядов на пластинах конденсатора сосредоточено в объеме, ограниченном размерами пластин, и однородно. Это приближение выполняется тем лучше, чем меньше расстояние между пластинами по отношению к размерам пластин. Казалось бы, все нормально и естественно. Однако возникает парадоксальная ситуация — для расчета количественного показателя эффекта мы пренебрегли самим эффектом. Действительно, работа, совершаемая при введении одного заряженного конденсатора в другой, обусловлена действием силы со стороны электрического поля основного (неподвижного) конденсатора на вводимый конденсатор. Эта сила возникает только из-за неоднородности поля на краю неподвижного конденсатора, т. е. определяется краевым эффектом. А мы этим эффектом пренебрегли. Как же так? На самом деле никакого парадокса нет — силы определяются не величиной поля на краю конденсатора, а величиной изменения поля по мере смещения от края пластин. В случае малого расстояния между пластинами конденсатора по сравнению с размерами пластин величина поля вне конденсатора резко спадает, и лишь малая часть силовых линий поля выходит за границы объема конденсатора.

З а д а ч а 5. *Плоский воздушный конденсатор касается поверхности жидкости с диэлектрической проницаемостью ε и плотностью ρ. Найдите высоту поднятия жидкости в конденсаторе, пренебрегая капиллярными*

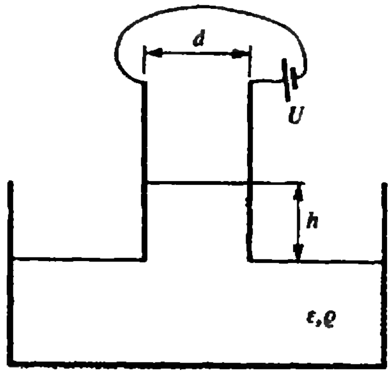


Рис. 6.

явлениями, если между его обкладками поддерживается постоянная разность потенциалов U, а расстояние между пластинами d (рис. 6).

Пусть уровень жидкости между пластинами конденсатора после подключения источника напряжения установится на высоте h. Любая замкнутая система стремится занять устойчивое положение, при котором она обладает минимумом потенциальной энергии.

Запишем полную энергию нашей системы. Она включает в себя энергию электрического поля конденсатора, энергию, запасенную в источнике, и потенциальную энергию жидкости в поле тяжести. Энергия W_C частично заполненного диэлектрической жидкостью конденсатора в нашем случае равна

$$W_C=\frac{CU^2}{2}=\left(\frac{\varepsilon_0 S(L-h)}{dL}+\frac{\varepsilon_0\varepsilon Sh}{dL}\right)\frac{U^2}{2}=$$
$$=\frac{\varepsilon_0 S(L+(\varepsilon-1)h)}{dL}\frac{U^2}{2}.$$

Энергию W_U источника напряжения можно записать в виде разности некоторого первоначального запаса энергии W_0 (до подключения к конденсатору) и работы, совершенной источником по зарядке конденсатора:

$$W_U=W_0-qU=W_0-(CU)U=$$
$$=W_0-2W_C.$$

Потенциальная энергия поднятой жидкости равна

$$W_g=\frac{\rho g d h^2 S}{2L}.$$

Поскольку полная энергия W нашей системы в состоянии устойчивого равновесия минимальна, ее производная равна нулю:

$$\frac{dW}{dh}=0,\quad -\frac{\varepsilon_0 S(\varepsilon-1)U^2}{2dL}+\frac{2\rho g d h S}{2L}=0,$$

откуда следует, что искомая высота поднятия жидкости будет равна

$$h=\frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)U^2}{2\rho g d^2}.$$

В приведенном решении мы не учитывали потерь энергии в нашей си-

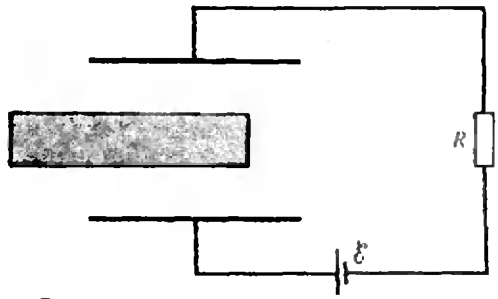


Рис. 7.

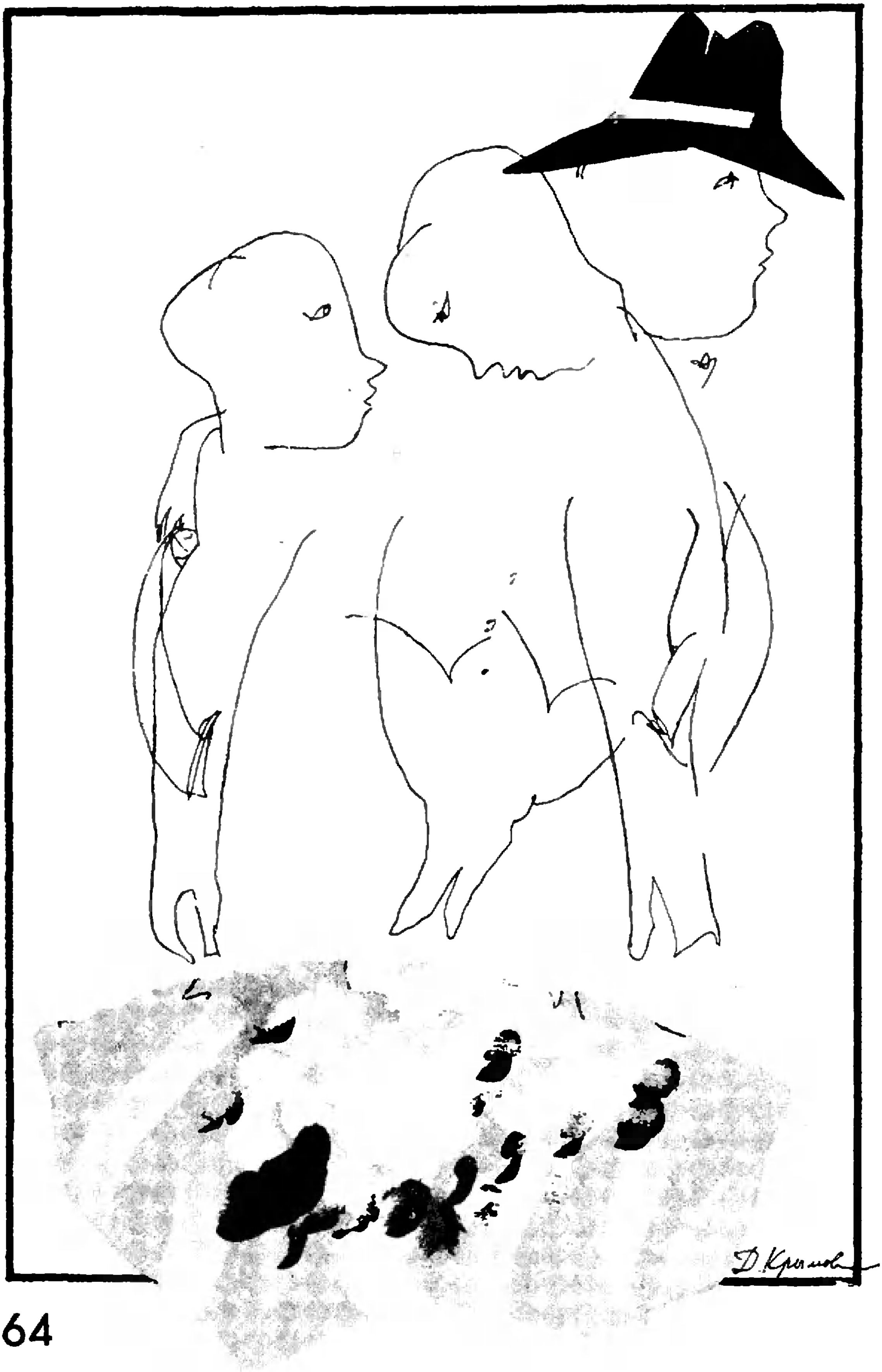
стеме, и может возникнуть вполне законный вопрос: не окажут ли влияние эти потери на высоту подъема жидкости? Мы исследовали статические состояния нашей системы и среди них нашли состояние с наименьшей энергией. Это то состояние, к которому стремится наша система, а если в системе есть потери, то источник напряжения вынужден будет совершить дополнительную работу. И если источник в состоянии покрыть эти потери, то система рано или поздно придет в состояние устойчивого равновесия с минимумом потенциальной энергии.

Упражнения

1. Вычислите электростатическую энергию шара радиусом R, заряд которого Q равномерно распределен по его объему.

2. В центрах двух удаленных друг от друга диэлектрических шаров с радиусами $R_1=R$, $R_2=12R$ и проницаемостью ε помещены заряды $q_1=q$, $q_2=2q$. Найдите работу, необходимую для того, чтобы поменять эти заряды местами.

3. Плоский воздушный конденсатор подключен через резистор к батарее с ЭДС $\mathscr{E}$ (рис. 7). В пространство между пластинами быстро вставляют металлическую пластину, толщина которой в три раза меньше расстояния между пластинами конденсатора. За время введения пластины заряд на конденсаторе не успевает измениться. Какое количество теплоты выделится на резисторе R после введения пластины? Емкость пустого конденсатора C_0.



ПРАКТИЧНОЕ ИЗОБРЕТЕНИЕ

Л. ТАШНЕТ

Я человек практичный, не то что мои сыновья, хотя они и умные ребята. А ума у них хватает, ничего не скажешь. Не родись они близнецами и достанься этот ум одному, а не двоим, так все ученые в мире, вместе взятые, этому одному и в подметки бы не годились. Ну, да и сейчас им жаловаться не приходится — оба отличные инженеры и на самом лучшем счету в своей фирме. Большая фирма, занимается электроникой и еще чем-то в том же роде. Называть я ее не буду, потому что ребятам это не понравится. Я их хорошо знаю. Да кому и знать, как не мне? Я ведь сам их вырастил, а это, позвольте вам сказать, было совсем не так легко: мать их умерла, когда им еще девяти не исполнилось, а я второй раз жениться не стал. Вот и приходилось и делами заниматься, и следить, чтобы в доме все шло как полагается и за ребятами настоящий присмотр был. Ну, да они всегда были хорошими мальчиками...

У Ларри есть свой конек — лазеры. Ну, это такой способ посылать свет. Как уж они устроены, я не знаю, потому что я-то в колледжах не обучался, не до того было. А Лео — фокусник-любитель, и, надо сказать, это у него ловко получается. Ну, и вместе они напридумывали много разных фокусов и номеров. Подвал у нас битком набит всяким оборудованием. Вот об этом-то я и хотел рассказать.

Ларри придумал аппарат для Лео, чтобы создавать оптические иллюзии. Ну, знаете: словно бы видишь что-то, чего на самом деле тут и вовсе нет. Как-то там зеркала приспосабливают. А Ларри приспособил лазеры и начал делать вроде бы картинки, но только вовсе и не картинки, а голограммы — вот как он их назвал. На негативе одна мешанина из точек и всяких завитушек, а если спроецировать на экран, то вид такой, словно этот предмет можно кругом обойти. Объемное изображение. Ну, объяснить это трудно, надо своими глазами видеть. Обычная картинка — она плоская и выглядит одинаково, с какого боку на нее ни посмотришь, а голограмма выглядит, как будто это не картинка, а настоящая вещь, и если зайти справа или слева, то видишь совсем не то, что спереди.

Так вот, значит, Ларри сделал нашему Лео аппарат для голограммных иллюзий. Он проецировал изображение не на экран, а прямо в воздух. При помощи зеркал. Они меня позвали и показали. Просто поверить невозможно! В воздухе плавает самая настоящая шкатулка, или ваза с фруктами, или букет — ну просто что хотите. Даже кучка мелкой монеты. И она-то и навела меня на мысль.

— Прямо как настоящие,— говорю я.— Жалко, что вы не можете их сохранить насовсем! Обрызгали бы плексигласом, что ли,— ну, как цветы сохраняют.

Это я вспомнил про сувениры, которые продают в лавках для туристов — всякие штучки в прозрачных кубиках, вроде бы стеклянных.

Ребята так и покатились.

— Папа,— говорят они хором (они всегда говорят хором),— это же только иллюзия. Это же не реальные деньги. Их на самом деле тут нет.

— Реальные — не реальные... А что такое «реальные», позвольте вас спросить? Я их вижу, и вы их видите,— говорю я.— Мы могли бы хоть в суде под присягой показать, что видели горсть мелочи прямо в воздухе. Разве нет?

А потом в шутку я и говорю... Ну, не совсем в шутку, потому что забава — это забава, но раз уж подвернулась возможность заработать доллар-другой, так с какой стати ее упускать? Вот, значит, я и говорю:

— Вы, ребята, у меня такие умные, так почему бы вам не придумать способа, чтобы эта иллюзия не исчезла, даже когда вы свой лазер выключите? Хоть и мелочь, а все равно ведь деньги.

Ну, тут они принялись мне объяснять, что у световых волн нет никакой массы и еще всякие там премудрости, в которых сам черт ногу сломит. Но одно я все-таки понял:

— Раз световые волны, которые, по-вашему, неосязаемы, могут рисовать такие картинки, что кажется, будто тут что-то есть, так вам, чтобы оно и вправду тут

Рассказ перепечатывается из сборника научно-фантастических рассказов «Практичное изобретение» (М., Мир, 1974).

было, достаточно будет это изображение чем-то обмазать. Скажем, другими какими-нибудь световыми волнами, чтобы изображение не пропало. А если его удастся обмазать, так, значит, оно и в самом деле будет тут, ведь верно?

Они опять засмеялись, но я увидел, что мои рассуждения не пропали даром...

— Папа, тебе бы философом быть,— говорит Лео.— Ты бы побил епископа Беркли его собственным оружием...

(Я потом нашел этого епископа в энциклопедии. Человек был с головой, ничего не скажешь. Так умел рассуждать, что не сразу и подкопаешься.)

Тут они принялись спорить между собой, что обмазывать надо будет волнами особой длины, и все такое прочее. Ну, я и ушел.

Недели через три ребята пригласили меня посмотреть, что у них получилось. К своему прежнему аппарату они добавили приставку, которая окружила голограмму (для модели они взяли десятицентовик) вроде бы туманом, как только она возникла. Потом они что-то включили, туман рассеялся, и — хотите верьте, хотите нет — изображение десятицентовика начало опускаться на пол. Правда, очень медленно, но все-таки оно опускалось.

— Видишь, папа,— говорит Лео,— у голограммы теперь есть вес.

— Очень интересно,— говорю я. А что еще я мог сказать? Тут вдруг изображеиие монеты исчезло, и на пол упала капля клея, какой прилагается к детским авиаконструкторам.

— Ну, а дальше что? — спрашиваю я.— Чего вы, собственно, добились?

— Одну проблему мы решили и сразу же столкнулись с другой,— говорят ребята хором.— Нам теперь нужно добиться, чтобы обмазка успевала затвердевать прежде, чем голограмма исчезнет. Если это нам удастся, то мы получим точный слепок оригинала.

Ну, я уже говорил, что я человек практичный. Я им посоветовал:

— А вы сделайте так: когда туман рассеется и изображение начнет падать, пусть оно упадет в жидкую пластмассу, которая затвердевает быстрее, чем за секунду. Вот будет фокус — взять в руку слепок оптической иллюзии.

Ну, тут они опять принялись втолковывать мне, что голограмма существует только в пучке света — то да се,— и вдруг оба замолчали и переглянулись. Я понял — они что-то придумали.

Потом время от времени я все пытался их расспросить, как у них идут дела с новым фокусом, но они отмалчивались. Прошло с полгода. Я совсем уж и думать забыл про эти голограммы, но тут они меня опять позвали посмотреть свой новый аппарат.

В углу подвала стояли два бочонка. Ребята дали мне мотоциклетные очки и велели их надеть. А я тем временем заглянул в бочонки и вижу, что они чуть не доверху полны десятицентовиками.

Новый аппарат был совсем не похож на прежний. Это была трубка из толстого, только совсем прозрачного стекла в форме буквы «X». Трубка была со всех сторон запаяна, и только там, где палочки «X» перекрещивались, снизу имелось отверстие. А на полу под трубкой лежал старый матрас, весь в черных дырочках, словно об него гасили окурки. Лео навел голограмму десятицентовика внутрь трубки и двигал ее до тех пор, пока она не оказалась в самой середке «X». А Ларри в другом углу включил еще какой-то аппарат, и в одном конце трубки появилось изображение тумана — длинная такая, узкая полоска. Ларри покрутил что-то, и полоска тумана начала медленно двигаться по трубке, пока не совпала с голограммой десятицентовика в середке.

— Давай! — скомандовал Лео.

Тут они оба что-то покрутили — и в центре «X» будто мигнула лампа-вспышка. И тут же матрас на полу поехал вперед, потом назад и вбок. Я просто глазам не верил: из отверстия в трубке на матрас посыпались десятицентовики, укладываясь ровными рядками. Скоро весь матрас был покрыт монетами, и они перестали сыпаться.

Я только рот разинул. А ребята расхохотались, и Лео говорит:

— Ну-ка, попробуй возьми их в руки, папа!

Я принялся подбирать монеты. Ну, ни дать ни взять настоящие десятицентовики, только покрыты очень тонкой прозрачной твердой пленкой и совсем легкие — прямо ничего не весят.

— Ты подал нам хорошую мысль, папа,— говорит Ларри,— но мы кое-что добавили и от себя. Сгусток световых волн нельзя обмазать ничем материальным, но мы сообразили, что на голограмму десятицентовика можно наложить голограмму аэрозоли быстротвердеющей прозрачной пластмассы.

Тут он объяснил, что свет — это не просто волна, но еще и частица, а потому теоретически тут должно произойти образование пленки.

Он мне очень подробно это объяснил, но только я все равно ничего не понял.

— Теперь ты видишь, папа? Наложи

один негатив на другой — и получишь позитив. Минус на минус дает плюс. Это верно не только с математической, но и с философской точки зрения. Отрицание отрицания, как сказал Гегель. Только новый позитив находится на более высоком витке диалектической спирали, чем оригинал...

И пошел, и пошел.

А я рассматривал десятицентовики. Если бы не пленка, они ни чем не отличались бы от настоящих монет.

— И что же вы будете с ними делать? — спросил я.

Ребята переглянулись.

— А мы с ними ничего и не собирались делать,— отвечают они.— Просто было интересно с этим повозиться.

Наверное, они заметили, как я на них посмотрел, потому что вдруг хором сказали:

— Мы можем раздавать их зрителям после представления на память, папа,— и глядят на меня с улыбкой: дескать, видишь, какие мы практичные.

Ну вы сами видите, каких я практичных сыновей воспитал. Изобрели копирующий аппарат и думают использовать его для любительских фокусов! Я покачал головой.

— Нет, я придумал кое-что получше. Эти штуки ведь ничего не стоят, если не считать расходов на пластмассу и на электричество, а потому из них можно много чего наготовить. (Они сразу поняли, к чему я клоню: я ведь занимаюсь бижутерией.) Ну, скажем, индийские браслеты или цыганские серьги.

— Ничего не выйдет, папа,— говорят они, а Ларри добавляет: — Вот посмотри.

Он подобрал одну монетку и швырнул ее об стену. Словно бы вспыхнуло радужное пламя — и все. От монеты даже и следа не осталось.

— Видишь? — спрашивает Лео.— Стоит нарушить структуру — и ты опять получаешь световые волны, которые движутся со скоростью сто восемьдесят шесть тысяч миль в секунду.

Это он правду сказал. Я взял с верстака коловорот и попробовал просверлить в десятицентовике дырочку. Хоп! Ни монеты, ни даже пластмассовой оболочки. Ларри говорит:

— Вот видишь, папа, они годятся только на бесплатные сувениры. Забавная новинка, и ничего больше.

До чего же они оба у меня непрактичные!

— Так сделайте их тяжелее, раз уж вы научились их изготовлять. Подберите оболочку потверже. На такие штучки всегда есть спрос — иностранные монеты, цветочки там или даже мушка какая-нибудь красивая.

Ну, оказалось, они уже пробовали, только ничего не вышло. Монеты-то образовывались, но как только теплая пластмасса ударялась о матрас, они сразу исчезали. Ребята мне тут же это и показали.

Эх, получи я их образование, давно бы я был миллионером! Самых простых вещей сообразить не могут.

— Вот что, ребята! До того, как проецировать изображение, приклейте на негативе к монете крохотное ушко. И тогда в него можно будет пропустить нитку или проволочку.

Вижу, им неприятно, что они сами до того не додумались. Ну, мне и захотелось их подбодрить. Это не дело, если отец собственных сыновей обескураживает. Я и говорю:

— Вот что, ребята. Я где-нибудь добуду золотую монету в двадцать долларов и закажу ювелиру приделать к ней ушко, как я вам и говорил. Вы изготовите побольше копий, и я покажу их Тони (это мой художник), а уж он что-нибудь сообразит. Прибыль поделим пополам.

Так мы и сделали. Они мне наготовили полный бочонок золотых монет (их изображений в оболочке, само собой). Золотые эти совсем ничего не весили. Тони понаделал из них всяких ожерелий, поясков, серег, обручей на голову, и расходиться они начали, как горячие пирожки. Я поставлял их крупным магазинам в Нью-Йорке и Далласе и бижутерийным лавочкам в Лос-Анджелесе. Они сразу вошли в моду. И выглядели совсем как настоящие. Да, собственно, в некотором роде они и были настоящими. Только такие украшения из подлинного золота совсем оттянули бы руки или шею, а эти были легче перышка. Некоторое время спрос на них был очень большой, и мы порядочно заработали.

Да оно и понятно. Электричество обходится дешево, лазерный аппарат и трубка были уже изготовлены раньше, а двадцатидолларовая монета стоит в антикварном магазине всего семьдесят два доллара. Так что можете сами высчитать чистую прибыль. В общем, как я уже сказал, мы на них неплохо заработали.

Однако мода — это мода, и когда украшения из монет всем приелись и перестали расходиться, я попросил ребят изготовить мне кое-что еще.

Тут уж я пошел на расходы: купил восьмикаратовый бриллиант самой чистой воды и заказал для него съемную филигранную оправу (понимаете, такая оправа позволяла изготовить несколько моделей). Ну, с бочонком таких побрякушек можно было сделать настоящее дело. Из-за пленки камешки выглядели похуже оригинала, но все-таки сверкали неплохо, можете мне поверить. Я ограничился одним бочонком потому, что намеревался продавать такие украшения как редкость. У меня их было достаточно для десятков диадем, кулонов, подвесок и хватило еще для особого заказа — одна миллионерша, жена нефтяного магната, расшила ими свое платье к свадьбе дочки. Конечно, я не утверждал, что это бриллианты, как и не выдавал мои золотые монеты за золото, и торговал я ими как бижутерией, только особого сорта. Они стали специальностью моей фирмы и соперничали даже с австрийским горным хрусталем и стразами.

Я мог бы найти сотни способов, чтобы использовать затвердевшие голограммы, и сказал ребятам, что им пора бы запатентовать процесс, и поскорее. А пока больше ничего изготовлять не следует.

Они сразу согласились.

Хорошие ребята, только несерьезные. Видите ли, им все это уже успело надоесть. А что дело приносит деньги, их совсем не интересовало.

Тут как раз подошло рождество — время для нас самое горячее,— и я так захлопотался, что спросил ребят про патент только после Нового года. Они поглядели друг на друга, потом на меня и хором вздохнули.

— Мы решили не брать патента, папа.

Ага! Благородство взыграло, подумал я. Опубликуют формулу в каком-нибудь научном журнале и подарят свое открытие человечеству. А какой-нибудь ловкач добавит пустячок, да и возьмет патент на свое имя.

— Почему же вы так решили? — спрашиваю я терпеливо.

— Слишком опасно,— говорят они хором. А потом Лео начал объяснять про сохранение энергии, а Ларри — про атомную бомбу, и зачастили, зачастили, так что у меня голова кругом пошла от этих их «е равно эм це в квадрате» и «эффектов реверберации при наложении волн». Ну, я их перебил:

— Бог с ней, с наукой. Объясните-ка по-человечески.

— Проще объяснить нельзя,— сказал Лео, а Ларри добавил: — Мы лучше тебе покажем.

Накануне выпало много снегу, и двор был весь в сугробах. Ларри спустился в подвал и принес оттуда мешочек с десятицентовиками, которые так там и лежали в бочонках. И еще он принес духовое ружье. Потом положил десятицентовик на сугроб, а на этот десятицентовик — еще один. А сам взял камешек и бросил его на монетки. Когда камешек о них ударился, они, как всегда, вспыхнули и исчезли.

— Ну и что? — спрашиваю я.— Мы же всегда знали, что они непрочные. И всех клиентов я об этом предупреждал.

— Посмотри получше, папа,— говорит Лео и показывает туда, где лежали монетки. Снег там подтаял, и образовалась ямка дюйма полтора в поперечнике и чуть меньше дюйма глубиной. Но я все равно не мог понять, к чему он клонит.

Ребята повели меня за дом, к большому сугробу, куда мы счищаем снег с крыши. Этот сугроб был чуть не в человеческий рост. Лео взял десять монеток и осторожно вдавил их колбаской в снег на высоте груди. Потом отвел нас шага на четыре к забору и выстрелил из духового ружья. Тут на секунду словно метель разбушевалась. А когда в воздухе прояснилось, я гляжу — от сугроба ничего не осталось, и пахнет словно после грозы.

Тут меня как осенило. Я схватил Лео за руку и закричал:

— Да это же замечательно! Кому нужны все эти побрякушки? Вы ведь можете за один час очистить от заносов целый город или шоссе.

Но ребята только головами покачали.

— Нет, папа. Ты сам человек мирный и нас такими же воспитал. Разве ты не понимаешь, к чему это может привести?

Тут Лео начал объяснять, и Ларри начал объяснять, а я только молчал и слушал.

— Ведь таким способом можно изготовить оружие уничтожения пострашней водородной бомбы. Чтобы убрать этот сугроб, хватило десяти монеток. А ты попробуй представить себе, что случится, если кто-нибудь сложит кучкой тридцать таких монеток и выстрелит в них из духового ружья? Или пятьдесят? Или сто? Одна разбитая монетка исчезает словно бы бесследно, просто возвращаясь в общее электромагнитное поле, и энергии при этом выделяется так мало, что невозможно измерить. Когда исчезли две монетки одновременно, выделилось тепло, которое растопило немного снега, как ты сам видел. Десять уже взорвались с выделением значительного количества тепла и ионизировали кислород в атмосфере. Ты ведь почувствовал запах газа, который при этом получился,— озона? Мы рассчитали, что будет происходить, если увеличивать число монет вплоть до сотни. А дальше мы просто побоялись считать. При добавлении каждого нового десятка, помимо взрыва и выделения тепла, возникают всякие явления вторичного порядка, и при этом все более сильные.

Мы вернулись в дом и с полчаса сидели молча. Я хорошенько обдумал все это. Ребята были абсолютно правы: в мире и без нас хватает неприятностей. И я им сказал, что они правильно решили. Тут оба вскочили и давай меня целовать — это взрослые-то люди! И оба просто сияют.

— Папа, ты у нас молодец!

А потом как-то сразу сникли, словно им меня жалко стало,— что все мои мечты о богатстве пошли прахом.

— Не расстраивайтесь, ребята,— говорю я им.— У меня же есть вы. Так чего мне еще надо? Свою старость я хорошо обеспечил.

Тут я даже немного всплакнул — от радости.

Ну, о патенте, конечно, больше и речи не было. И аппарат ребята сразу разобрали. Про это изобретение мы больше не говорим. Но когда выпадает много снега, ребята мне улыбаются, а я улыбаюсь им в ответ. Потому что мне все соседи завидуют: дорожки во дворе у меня всегда расчищены, а никто из них не разу не видел, чтобы я брался за лопату. Мы рассчитали, что после обычного снегопада двух монет мало, а десяти — многовато. А вот три будет в самый раз. Я кладу монетки через равные промежутки и наловчился стрелять из духового ружья почти без промаха. Какой толк от изобретения, если из него нельзя извлечь пользы, ведь верно? Я человек практичный.

Перевод с английского И. Гуровой

Игра шакур

С. КОНОВАЛОВ

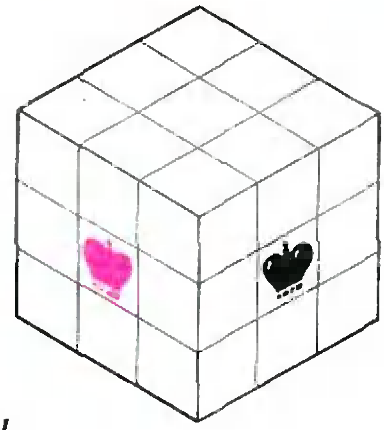


Рис. 1.

В одном из выпусков шахматной странички «Кванта» приводились задачи, в которых в какой-то момент доска поворачивалась. Это меняло направление движения пешек, а следовательно, приводило к другой позиции. Возникает естественная для математика мысль: рассмотреть вариант игры, в котором преобразование шахматного пространства было бы настоящим ходом. Одну из реализаций этой идеи можно получить на кубике Рубика — шахматный кубик Рубика, или, сокращенно, шакур.

Игра будет поверхностной (в геометрическом смысле), «доска» состоит из 54-х клеток. В каждой вершине кубика встречаются три клетки, поэтому мы не сможем сохранить обычную пятнистую раскраску и будем считать доску одноцветной (белой), а фигуры — красными и черными (рис. 1).

Оживим шахматные фигуры (все, кроме пешек, которые нам пока не понадобятся, так как сегодня мы рассмотрим самый простой вид игры — матование одинокого черного короля). Фигура (король, ферзь, ладья, слон или конь) может пойти с поля *A* на поле *B*, если на какой-нибудь развертке кубика фигура может попасть с *A* на *B* по обычным шахматным правилам, однако слону запретим ходить с одной клетки на другую, если у них есть общая сторона. Аналогичное исключение сделаем и для диагональных ходов ферзя, иначе эти фигуры были бы слишком мощными.

Чтобы читателю было проще освоиться с геометрией нашей шахматной доски, рекомендуем сделать комплект шакурных фигур, состоящий из кубика Рубика и фигур-наклеек, изготовленных с помощью любой клейкой ленты.

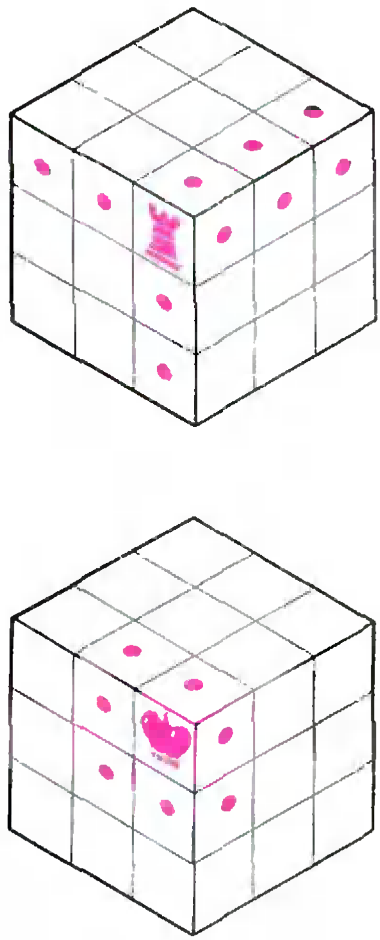


Рис. 2.

Самые простые ходы (и соответствующие развертки) у ладьи и короля (рис. 2). В дальнейшем на рисунках будем отмечать точками поля на «видимых» гранях, доступные фигуре.

У слона, если он не занимает центральную или угловую клетку грани, битые поля образуют два диагональных меридиана, пересекающихся в двух полюсах-антиподах. На рисунке 3 изображены два слона, расположенные в таких полюсах и имеющие одинаковые траектории.

З а д а ч а 1. *Нарисуйте развертку куба для определения одного хода-меридиана слона C_1 из позиции на рисунке 3.*

Возможности слона, расположенного в центральной или угловой клетке грани, показаны на рисунке 4.

З а д а ч а 2. *Проверьте, что за несколько ходов слон может попасть с любого поля доски на любое другое. За какое наименьшее число ходов слон может попасть с поля 1 на поле 2 (см. рис. 4)?*

З а д а ч а 3. *Разберите свойства ферзя.*

Даже на обычной доске кони выделяются своими коварными ходами, на кубике их ходы еще неожиданнее (см. рис. 5).

Отметим, что описанным образом можно определить ходы фигур на поверхности клетчатого кубика с гранями размером $n \times n$, а не только 3×3.

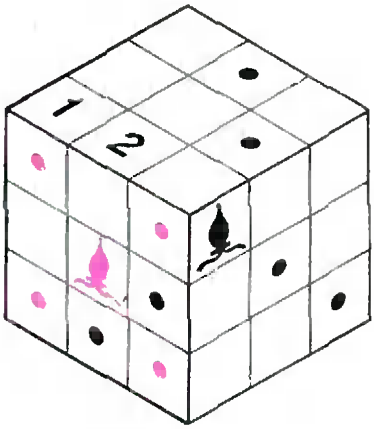


Рис. 4.

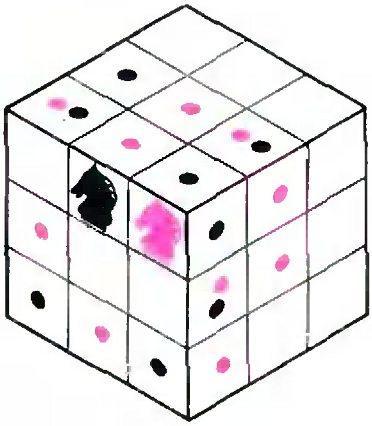


Рис. 5.

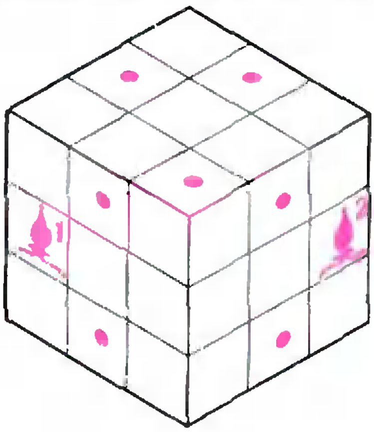


Рис. 3.

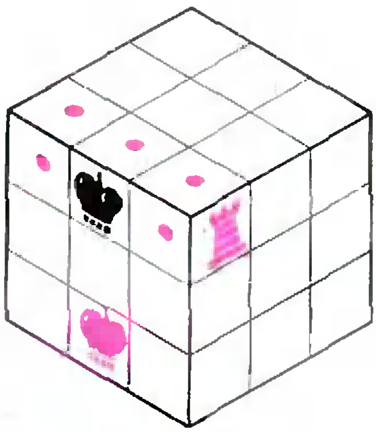


Рис. 6.

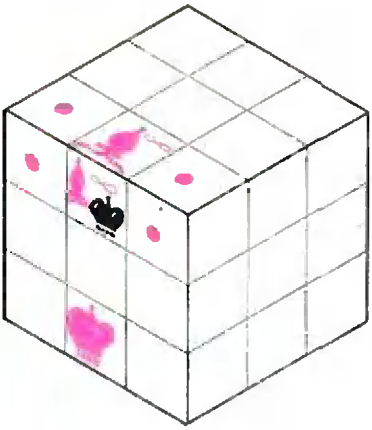


Рис. 7.

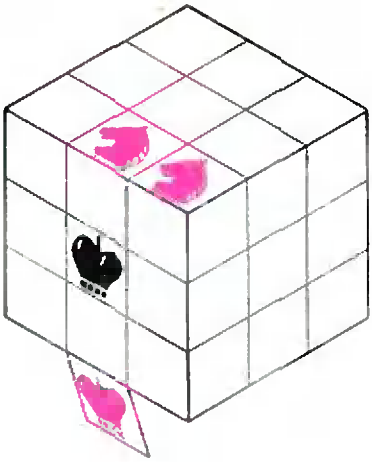


Рис. 9.

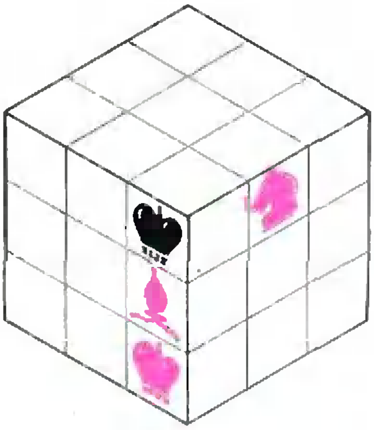


Рис. 8.

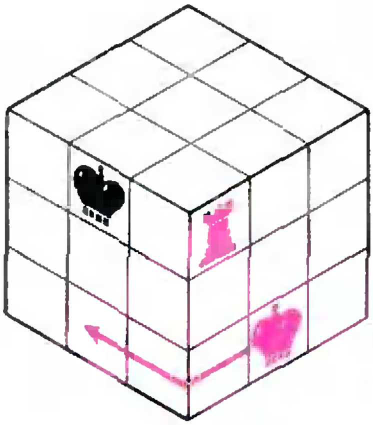


Рис. 10.

На такой доске можно решать обычные задачи с «активными» движениями фигур. Например, докажите, что красные король и ладья могут заматовать одинокого черного короля; заключительная позиция может быть такой, как на рисунке 6.

Любопытно, что перевес в ладью, минимально-достаточный для победы над одиноким королем на обычной доске, оказывается достаточным и на кубике! Еще более неожиданным является то, что на кубике 3×3 можно придумать матовые позиции, в которых кроме королей с сильнейшей стороны участвуют два слона, слон и конь, два коня — опять так же, как на обычной доске.

На рисунке 7 изображена матовая позиция; символ ∞ в клетке доски означает, что слон находится на далеком поле-антиподе, а как мы знаем, действует такой слон-двойник так, как если бы он находился в выделенной клетке. Из рисунка 8 видно, что вместе с красным королем слоны-невидимки отрезают черному королю все пути для бегства, а один из них еще и объявляет шах — на доске мат.

Приведем без комментариев еще несколько матовых позиций.

В позиции на рисунке 9 нам не удается повернуть кубик так, чтобы все фигуры были на видимых гранях. Красный король расположен на невидимой нижней грани кубика, *часть которой изображена в виде развертки.*

Можно было бы и дальше рассматривать «обычные» шахматные ходы на кубике и решать соответствующие задачи, но у нас в этой заметке другая цель — использовать динамические возможности кубика Рубика.

Назовем две позиции совместимыми, если одну можно получить из другой вращениями граней кубика. Например, позиция, изображенная на рисунке 6, совместима с позицией на рисунке 10.

Теперь мы можем, наконец, сформулировать условия игры шакур: из *заданной расстановки красных и черных фигур получить вращениями граней кубика совместимую с ней позицию, в которой на доске стоял бы мат черному королю.*

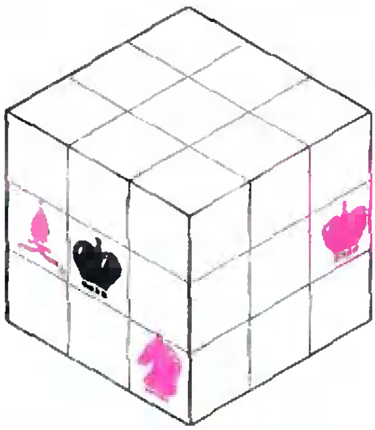
Решение такой задачи будет состоять из двух частей: сначала надо придумать матовую позицию, а потом получить ее, делая ходы-вращения. Подчеркнем, что фигуры будут двигаться только вместе с доской.

Для желающих придумывать задачи отметим, что при большом числе черных фигур их роль будет двоякой: они могут разрушать атаки красных фигур, но могут и ограничивать подвижность своего же черного короля.

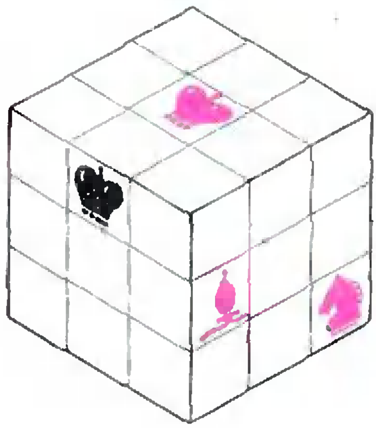
Как и в обычной шахматной композиции, можно было бы ввести ограничения на число ходов-вращений («мат в два хода»), но мы этого делать не станем.

В заключение предлагаем читателям еще четыре задачи (рис. 11) с одинаковым этюдным заданием: найти выигрыш в игре шакур, т. е. заматовать черного короля вращениями кубика Рубика (на невидимых гранях фигур нет).

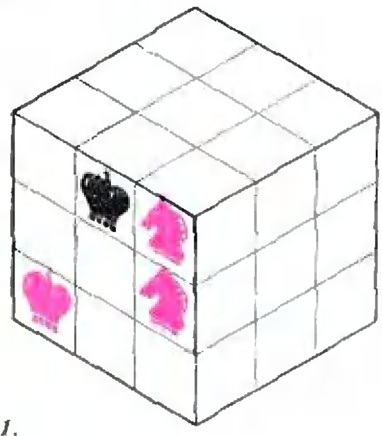
Задача 4.



Задача 6.



Задача 5.



Задача 7.

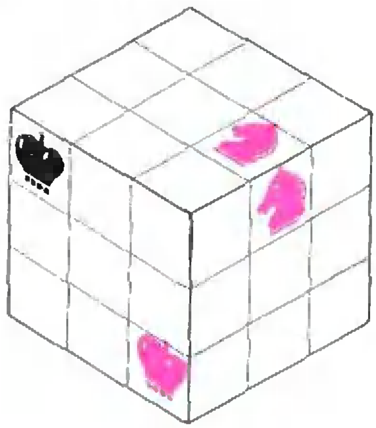


Рис. 11.

Алгоритмика простоты

Электронный плакат

Б. ТАРАСЕНКО

Нелегкий вопрос-то,
Но верь одному:
Все сложно и просто,
Считай, по уму!

«Мы все учились понемногу чему-нибудь и как-нибудь». И не только во времена А. С. Пушкина. В недалеком вчера, в очень неоднозначном сегодня. По тому же принципу, видимо, будем учиться и завтра.

Если разобраться — не такой уж и плохой принцип. Кто, положа руку на сердце, может честно сказать, что учился только в школе? Мы учимся и учим, формируем себя и воспитываем других в самых, казалось бы, невероятных ситуациях. Человек так устроен, что он каждый день вместе с хлебом должен получить и передать еще и порцию информации. Роль преподавателя еще не миновала никого! Им можно стать даже в очень раннем школьном возрасте. Тем, кто затрудняется с выбором объектов для своих программно-педагогических и социальных изысканий, предлагаем обратить внимание на старших или младших братьев, родителей, бабушек и дедушек, детей и внуков.

Никлас Вирт, всемирно известный ученый из Швейцарии, автор языков программирования Паскаль и Модула-2, недавний гость телепрограммы «Диалог с компьютером», считает, что учить всех детей компьютерной грамотности до уровня программистов высокой квалификации было бы нереальным и недальновидным делом. А вот показывать как можно большему числу детей возможности компьютеров и программ — надо, и чем раньше — тем лучше. Мы бы добавили, что чем более дешевы, распространенны, просты и безопасны используемые устройства — тем разумнее. Об использовании для дела именно таких простейших ЭВМ мы уже договорились с читателями. Было бы что показывать. Итак, очередная программа.

Если мы видим молоток, то сразу соображаем, что им забивают гвозди, если лопату — то знаем, что ею копают землю. О назначении программы никто не догадается, если не сказать о ней все заранее. Сегодня мы представляем читателям демонстрационный циклический генератор первых 25 простых чисел. Он был показан ученице 3-го класса из города Гатчина под Ленинградом Светлане, не отягченной большими знаниями и заботами жизнерадостной хохотушке. И это веселое создание на целых 10 минут оставило свои развлечения, чтобы ознакомиться с результатами работы демонстратора. Да еще более половины из предъявленных простых чисел, о которых узнала впервые в жизни, запомнила!

Так что, прежде чем приступить непосредственно к описанию программы, пожелаем вам как ученических, так и преподавательских успехов. Мы по-прежнему считаем, что большинство наших читателей — исследователи в области простых чисел и программирования. А всякий уважающий себя исследователь обязан знать не только кое-что из сделанного до него, но и как к этому относится его ближайшее окружение.

Программа 3. Демонстратор первых 25 простых чисел

Пригодны все ПМК от БЗ-34 до МК-61. Учебная программа для кружков программирования и математики любой возрастной категории, начиная от старших групп детского сада. Программа последовательно предъявляет простые числа от 2 до 97 включительно. Используется принцип электронной таблицы, в которой все предъявляемые числа записаны заранее и

Текст программы с пошаговыми комментариями

00	В↑	0Е	/+	Перевод стартового номера И из РгХ в РгY
01	2	02	/+	Набор
02	6	06	/+	константы 26
03	↔	14	/+	РгХ:=И и одновременно РгY:=26
04	—	11	/+	Н:=26 — И
05	БП	51	/+	Безусловный переход
06	09	09	/+	на шаг 09
07	2	02	/+	Набор
08	5	05	/+	константы 25
09	Х→П 0	40	/+	Рг0:=Н
10	9	09	/+	Набор
11	8	08	/+	константы 98
12	П→Х 0	60	/+	РгХ:=Н
13	3	03	/+	Константа 3
14	×	12	/+	Н×3
15	—	11	/+	А=98 — Н×3, начальный адрес подпрограммы
16	Х→П 9	49	/+	запись адреса А подпрограммы в Рг9
17	К ПП 9	—9	/+	Обращение к подпрограмме по адресу А=Рг9
18	С/П	50	/+	Стоп-индикация выбранного простого числа
19	F L0	5Г	/+	Рг0=0? Проверка окончания цикла
20	10	10	/+	Переход на шаг 10, если цикл не закончен
21	БП	51	/+	Безусловный переход, если цикл закончен
22	07	07	/+	на шаг 07

Команды 26—97 состоят из 24 групп по 3 команды в каждой, все они однотипны, первые две команды — набор очередного простого числа, третья — возврат в основную программу. Для экономии места мы приводим только первую и последнюю группы и числа, набираемые в промежуточных группах.

23	0	00	/+	Набор в подпрограмме
24	2	02	/+	простого числа 02
25	В/0	52	/+	Возврат в основную программу

Далее набираются числа 03, 05, 07, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89.

95	9	09	/+	Набор в подпрограмме
96	7	07	/+	простого числа 97
97	В/0	52	/+	Возврат в основную программу

выбор их идет под управлением основной части программы.

Используемые регистры и переменные: А=Рг9 — начальный адрес подпрограммы-заготовки; Н=Рг0 — дополнение до 26 порядкового номера очередного простого числа; из регистров стека в явном виде используются только РгХ и РгY.

Описание алгоритма

По заданному стартовому номеру И простого числа по формуле А=98—3×Н, где Н=26—И, вычисляется начальный адрес А подпрограммы, выводящей на индикатор это простое число, после чего осуществляется переход к этой подпрограмме, а после возврата из нее — останов ПМК. При последующих запусках ПМК (клавишей С/П) Н автоматически уменьшается на единицу, в результате чего на индикацию вызывается следующее простое число; после отработки последнего простого числа (при Н=1) происходит переход к И=1 присваиванием Н: = 25, тем самым процесс демонстрации зацикливается.

Оценка быстродействия программы: «вычисление» стартового числа с применением команды В/О, а также переход от 97 к 2 выполняются за 6 секунд; очередное большее простое число высвечивается через 4 секунды.

Инструкция

После набора программы и переключения ПМК в режим счета нажать клавишу В/О. Затем набрать номер И начального простого числа (в диапазоне от 1 до 25 включительно) и нажать клавишу С/П; после останова ПМК на индикаторе появится И-е простое число. Новые нажатия клавиши С/П приведут к появлению на индикаторе следующих простых чисел до последнего, а затем появится первое и т. д.

Чтобы узнать номер И очередного простого числа (после серии С/П) необходимо выполнить вручную последовательность команд

2 6 П→Х О —

— на индикаторе появится значение И.

Программа 3 наиболее эффективна, если ее записать в энергонезависимую память МК-52. Для МК-61 и МК-52 эту программу можно дополнить (начиная с шага 98) подпрограммой, показывающей простое число 101. Ее можно вызывать вручную последовательностью команд

В/О 2 6 С/П

и на индикаторе появится число 101. Чтобы вернуться в основной цикл после такого вызова, нужно снова нажать клавишу В/О. Если же вы хотите, чтобы ПМК сам показывал это число после 97, а потом возвращался к числу 2, то программу надо доработать (как — обдумайте сами). Тем, кто будет экспериментировать на «хвосте» программной памяти ПМК, необходимо помнить, что счетчик адресов шаги 100, 101, 102 и т. д. показывает в виде -0, -1, -2 и т. д., но в самой программе эти адреса должны вырабатываться в обычном виде, т. е. как 100, 101, 102...

Мы уверены, что наши добровольные преподаватели-программисты сами понимают, когда можно рассказывать слушателям об устройстве этого циклического демонстратора, а когда необходимо показывать только результаты его работы. Последнее, например, в детском саду. Не так ли?

„Квант" улыбается

Программа, предотвращающая сбои ЭВМ

Представитель одной из крупных фирм-разработчиков матобеспечения сообщил о создании специальной программы, позволяющей свести практически к нулю простои ЭВМ, вызванные сбоями; используемый метод весьма прост и является развитием давно известного подхода. Разработанная фирмой программа OREMA (от латинского «oremus» — «давайте помолимся») через определенные интервалы времени воссылает молитвы о сохранности содержимого памяти, нормальном функционировании дисков и лентопротяжек, а также другого наиболее часто отказывающего оборудования.

Являясь в своей основе литургической, OREMA использует стандартные молитвы и мольбы, хранящиеся на внешних носителях в виде программ, реализованных на латыни, фортране и других языках. Служба проводится регулярно, три раза в день, в автоматическом режиме; участие оператора сводится лишь к установке лент и вводу с пульта ритуальных команд типа «Отныне и во веки веков» или «Аминь».

Молитвы на латыни могут сначала обращаться к периферийному оборудованию, а затем, посредством внутренних подпрограмм, вновь адресоваться центральному процессору, а мольбы на фортране и других языках обращаются непосредственно к центральному процессору.

Поставляемое молитвенное программное обеспечение охватывает все известные на сегодняшний день причины возможных сбоев. Кроме того, предусмотрена специальная функция, позволяющая модифицировать пакет OREMA и хранить вводимое дополнительно моление после последнего имеющегося блока «Аминь». Для закрытых учреждений выпускается особый пакет засекреченных молитв.

В ходе пробных прогонов на некоторых типах ЭВМ удалось уменьшить время простоев оборудования в среднем на 98,2 %. Представитель фирмы-изготовителя счел своим долгом подчеркнуть, что в настоящее время OREMA предотвращает лишь сбои, вызванные отказами оборудования. Ведется активная работа по созданию более совершенной версии — программы «Не греши!», которая позволит устранить ошибки операторов и другие человеческие глупости.

У. Минклер

(Data Link, 1966, № 3)

Перевод О. И. Мацарской

Олимпиады

XIV Московская экономико-математическая олимпиада

В марте 1991 года на экономическом факультете МГУ силами сотрудников, аспирантов и студентов кафедры математических методов анализа экономики была проведена XIV Московская экономико-математическая олимпиада для школьников 9—11 классов.

Олимпиада состояла из двух туров. Впрочем, их лучше было бы назвать двумя попытками: любой школьник мог принять участие как в первом, так и во втором туре. Таким образом, ребята имели возможность «пристрелки», тренировки.

В каждом классе условие олимпиады содержало 4—5 вопросов и задач. Среди них были и сугубо экономические, и чисто математические — однако большая часть лежала на стыке двух наук. Соответственно, и критерии оценок несколько отличались от тех, которые обычно приняты на математических олимпиадах.

Так, в некоторые вопросы, даже, на первый взгляд, математические по формулировке, организаторы олимпиады изначально не закладывали наличие полного и точного ответа.

Наряду с логикой и четкостью аргументации ценились общая эрудиция, глубина мышления, способность учесть условия, явно в задаче не сформулированные (например, если в поселке живет 1000 человек, то не могут 900 из них работать на местной фабрике — хотя бы в силу демографических причин).

При подведении итогов кроме общих призов были вручены также специальные призы — лучшему экономисту среди математиков и лучшему математику среди экономистов.

Ниже приведены некоторые из предложенных на олимпиаде вопросов и задач.

1. В Москве были проведены три социологических опроса:

— 1000 человек опросили с 8 до 9 утра у метро «Университет»;

— 2000 человек опросили вечером у метро «Спортивная»;

— из телефонной книги наугад выбрали 800 номеров и задали вопросы по телефону.

Как вы думаете, результаты какого из опросов наиболее точно отражают мнение москвичей?

2. Вы прочитали в журнале «Economist», что математически с помощью компьютеров доказано, что рыночная экономика эффективнее плановой. Как бы вы отнеслись к такому утверждению?

3. Известно, что фигура заданного объема имеет минимальную поверхность, если это — шар. Так может, делать конфеты шарообразными и сэкономить на этом оберточную бумагу?

4. Карандашный фабрикант для производства 10 000 карандашей должен купить у лесопромышленника 1 кубометр леса за 100 долларов. Лесопромышленник, любящий учет, на производство 1 кубометра леса расходует 100 карандашей по 10 центов

за штуку. На сколько в итоге возрастут цены, если будет введен налог с продаж 10 %? Дайте экономическую интерпретацию ответа.

5. Вам необходимо покрыть плиткой пол помещения размером 20×20 метров. Однако в магазине, куда вы пришли, вам готовы продать за один раз только один набор плиток, в который входит по одной плитке размером 1×1, 1×2, ..., $1\times N$ дм, причем N вы можете определить самостоятельно. Какие варианты поведения вы можете предложить и какой из них, на ваш взгляд, оптимален?

6. Укажите все пары простых чисел p и q таких, что число $p\cdot q+1$ и $p\cdot q-1$ также простые.

7. Разрежьте прямоугольник размером 1×5 на части, из которых можно сложить квадрат.

8. На бесконечной шахматной доске, поля которой занумерованы парами натуральных чисел, передвигается фигура Квазиладья по следующим правилам:

— она может удвоить любую из координат;

— она может из большей координаты вычесть меньшую.

Как описать множество клеток, на которые может попасть Квазиладья и на которые не может, если она начинает с клетки (1,1)?

9. В некотором царстве, в некотором государстве монетный двор чеканит в год 1000 золотых монет весом 10 граммов каждая. За год каждая монета стирается на 5 процентов от первоначального веса.

В тяжелый год после затяжной войны царь собрал лишь 6000 монет налога. Этих денег, вместе с той тысячей монет, что он мог отчеканить, ему не хватало, чтобы выплатить жалованье войску, и царь решил всех обмануть и переплавить эти монеты с 25-процентной добавкой меди.

Сколько может выиграть царь на этой операции?

Ответы, указания, решения

Энергия электрического поля

1. $W=\dfrac{3}{20}\dfrac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 R}$.

2. $A=\dfrac{11}{32}\dfrac{(\varepsilon-1)q^2}{\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$.

3. $Q=C_0\mathscr{E}^2/12$.

Игры шакур

4. См. рис. 1. 5. См. рис. 2. 6. См. рис. 3. 7. См. рис. 4.

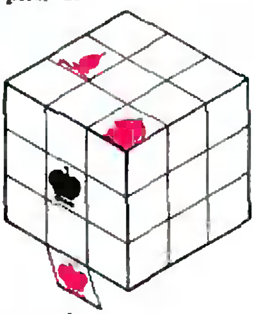


Рис. 1.

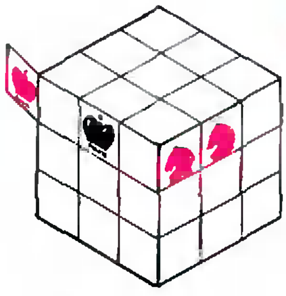


Рис. 2.

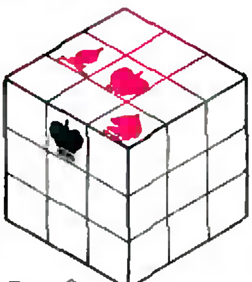


Рис. 3.

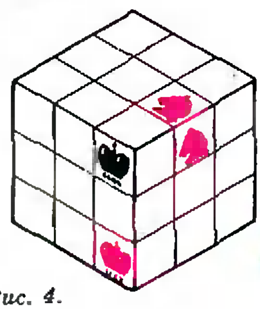


Рис. 4.

XIV Московская экономико-математическая олимпиада

1. Телефонный опрос. В двух других случаях выборки отвечающих не случайны.
2. Счетные возможности компьютера — не гарантия корректности тех математических моделей, с которыми он работает.
3. Из плоского листа нельзя получить шаровую поверхность без складок.
4. Учтите, что мельче цента монеты нет.
6. (2; 3), (2; 2).
8. Квазиладье доступны те и только те точки, где НОД координат равен 2^n, $n=0, 1, 2,...$
9. С точки зрения экономики поступок царя неэффективен: он вызовет в стране инфляцию.

Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» № 5)

25. Число равно 1991.

26. После каждой операции разрезания число кусков увеличивается либо на 5, либо на 11. Поэтому, если сделано n разрезаний на 6 кусков и m разрезаний на 12 кусков, то полученное количество кусков равно $1+5n+11m$. Покажем, что такое число не может равняться 40. Действительно, если $m=0$, то получаем уравнение $5n=39$, которое не имеет решений в целых числах, при $m=1$ получаем уравнение $5n=28$, при $m=2$ получаем $5n=17$ и при $m=3$ получаем $5n=6$. Если число кусков больше 40, то достаточно показать, как получаются 41, 42, 43, 44 и 45 кусков — остальные могут быть получены прибавлением к этим числам несколько раз по 5. Итак, $41=1+8\cdot5$, $42=1+6\cdot5+1\cdot11$, $43=1+4\cdot5+2\cdot11$, $44=1+2\cdot5+3\cdot11$, $45=1+4\cdot11$.

27. Это числа 8, 5, 4, 2 и —3.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 7)

1. Обозначим число мячей, забитых Ван Бастеном, через x, Гуллитом — через y, Михайли-

ченко — через z, Фёллером — через v и Скнлаччи — через w. Из условий задачи имеем: $2x=y$, $x=z+1$, $v=z+3$, $w=v+3$. Отсюда $x=z+1$, $y=2z+2$, $v=z+3$, $w=z+6$. Ясно, что числа z, $z+1$, $z+3$, $z+6$ не равны друг другу, кроме того, число $2z+2$ не меньше, чем любое из них, поэтому $2z+2=z+6$ и $z=4$. Отсюда $x=5$, $y=10$, $v=7$, $w=10$.

2. См. рис. 5.

Ч	У	К	Е	Г
Г	К	Ч	У	Е
У	Г	Е	К	Ч
Е	Ч	У	Г	К
К	Е	Г	Ч	У

Рис. 5.

3. Ясно, что четырех администраторов достаточно, поскольку возможен следующий график: «сутки работа — трое суток отдых». Покажем, что нельзя обойтись меньшим числом администраторов. Действительно, если кто-то работает подряд сутки, то во время его отдыха никто не сможет проработать больше суток, поэтому в течение 2,5 суток его отдыха необходима работа не менее, чем трех человек. В случае, если никто не работает больше полусуток, то за время отдыха администратора, проработавшего ночную смену, должны работать еще три администратора.

4. Отметим точку K — середину стороны AB и соединим ее отрезком с точкой D (рис. 6.). Угол

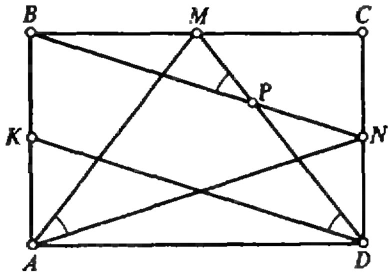


Рис. 6.

KDM равен углу MAN (из симметрии). В то же время прямые KD и BN параллельны, и поэтому углы KDM и BPM равны.

5. Рассмотрим 15 школьников, не упомянутых в условии задачи ($15=40-10-15$). У них количество винтиков не равно количеству гвоздиков, а количество гвоздиков должно быть равно количеству болтиков. Значит, по крайней мере у этих 15 школьников количество винтиков не равно количеству болтиков.

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 27.05.91. Подписано к печати 15.07.91.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,5. Усл. кр.-отт. 27,3. Уч.-изд. л. 7,80.
Тираж 86 666 экз. Заказ 887. Цена 70 коп.

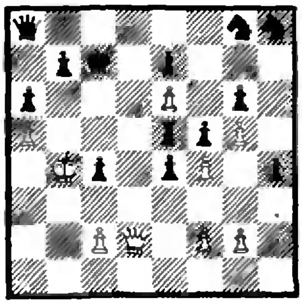
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской обл.

Шахматная страничка

МАКСИ-РЕКОРДЫ

На шахматной страничке мы часто приводим позиции, в которых устанавливаются те или иные мини-рекорды (минимальное количество фигур на доске, минимум ходов и т. д.). Однако составителей необычных позиций издавна привлекают и задачи с большим числом использованных фигур или требуемых для решения ходов. В арабском манускрипте XI века, хранящемся в Британском музее, имеются композиции с заданием в 20, 24, 34 хода.

Если мини-рекорд часто оказывается абсолютным (мат в 0 ходов, на доске всего два короля — здесь уже просто нечего уменьшать), то максирекорды иногда улучшаются много десятилетий. В этом жанре шахматной композиции известно немало классиков, составивших множество задач-гротесков. Так, знаменитый венгерский проблемист О. Блаты свое творчество посвятил макси-жанру, установив ряд рекордов, которые никто не сумел превзойти.



О. Блаты, 1889 г.
Мат в 257 ходов

Для подрыва g2—g4 и проникновения белого короля в тыл противника необходимо последовательно уничтожить пешку h4 и коня h8.

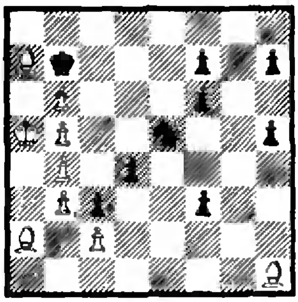
1. Фd7+ (если ходы черных единственные, то для экономии места мы их опускаем) 2. Фd8+ 3. Фd4+! Лс5 4. Ф:с5+ 5. Фе5+ Крс8 6. Фd5! Крс7 7. Фd7+ 8. Фd8+ 9. Фb6+ 10. с3!! Крс8 11. Фс5+ Крb8! 12. Фе5+ Крс8 13. Фd5 Крс7 14. Фd7+ 15. Фd8+ 16. Фb6+ 17. Кра3, и далее белые каждый раз выигрывают темп шестиходовым маневром ферзя.

24. Крb2 31. Крс1 (с2) 38. Крd1 45. Kpe1 (е2) 52. Крf1 59. Крg1 66. Крh2 73. Крh3 80. Кр:h4. Теперь белый король возвращается обратно.

150. Крb4 Крс8 151. Фс5+ 152. Фе5+ 153. Фd4+ Крb8 154. Ф:h8 Крс7 155. Фе5+ 156. Фd5 Крb8! 157. Фd8+ 158. Фb6+. И вновь белый король отправляется в путешествие.

158—215. Кра3—h3 222. g4! 229. gf gf 230. Крh4 237. Крh5 244. Крg6 251. Крf7 Крс8 252. Кре8 Крb8 253. Крd7 е3 254. fe Кf6+ 255. gf ef 256. е7 и мат следующим ходом.

Приведенная позиция является легальной (может возникнуть в реальной шахматной партии) и комплектной (использованы лишь фигуры из начального комплекта). В легальном, но некомплектном варианте (на доске три белых слона) данный рекорд был побит спустя 80 лет! Рекордсмен — известный композитор-фантаст из Югославии.

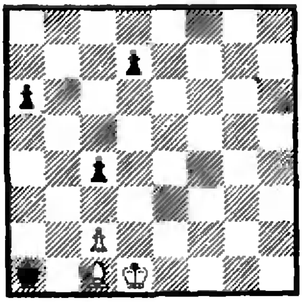


Н. Петрович, 1969 г.
Мат в 270 ходов

1. Сb1 h4 2. Кра4 Кра8! 3. Кра3 4. Кра2 5. Кра1 6. Са2 7. Крb1 8. Крс1 9. Сb1 10. Крd1 11. Кре1 12. Крf1 13. Крf2 14. Кре1 15. Крd1 16. Крс1 17. Са2 18. Крb1 19. Кра1 20. Сb1 21. Кра2 22. Кра3 23. Кра4 24. Кра5 f5. Белый король многократно повторяет осуществленный выше маневр, пока черные не исчерпают все ходы пешками.

254. Кра5 Крс8 255. Кра6 f2 256. b7+ Крd7 257. b8Ф f1Ф 258. Ф:е5 Ф:h1 259. Фg7+ Кре6 260. Фg6+ Кре5 261. Сb8 Кре4 262. Фс6+ Кре3 263. Ф:h1 Крf2 264. С:f4 Кре2 265. b6 d3 266. cd Крf2 267. Сс2 Кре2 268. Сd1+ Крf2 269. Фf3+ Крg1 270. Се3×.

И в заключение макси-рекорд несколько другого рода.



В. Иоргенсен, 1980 г.
Мат в 28 ходов

Решение здесь недлинное и тем не менее оно представляет собой рекорд для задачи-миниатюры (на доске не более семи фигур).

1. с3 Крb1 2. Крd2 Кра2 3. Крс2 Кра1 4. Са3 Кра2 5. Сb2 а5 6. Сс1 Кра1 7. Са3 Кра2 8. Сb2 а4 9. Сс1 Кра1 10. Са3 Кра2 11. Сb2 а3 12. Сс1 Кра1 13. С:а3 Кра2 14. Сb2 d6 15. Сс1 Кра1 16. Са3 Кра2 17. Сb2 d5 18. Сс1 Кра1 19. Са3 Кра2 20. Сb2 d4 21. cd с3 22. Кр:с3 Крb1 23. d5 Кра2 24. d6 Крb1 25. d7 Кра2 26. d8Ф Крb1 27. Фd1+ Кра2 28. Фа1×.

По-видимому, в миниатюрном жанре проблемисты еще не сказали своего последнего слова по поводу макси-рекордов. В следующем номере мы вернемся к этой теме.

Е. Гик

70 коп.

Индекс 70465

Игрушку, которая показана на рисунке, в Японии назвали двумерным кубиком Рубика. Пока эта головоломка существует только на экране компьютера, так как никому еще не удалось придумать механизм, который бы в панели из девяти квадратов переворачивал любой горизонтальный или вертикальный ряд из трех квадратов.

В головоломке требуется из произвольно заданного исходного состояния получить одноцветную раскраску каждой из сторон панели за наименьшее число ходов.

*Всего существует $2^9-2=510$ разноцветных состояний панели. Расчеты на компьютере показали, что среди них имеется 192 состояния, из которых головоломка может быть решена за 6 ходов (это состояния, самые далекие от «правильного»). **В нижней части рисунка приведено решение для одного из таких исходных положений квадратов.** В домашних условиях эту головоломку проще всего смоделировать на обычных детских кубиках, а ряды переворачивать «вручную».*