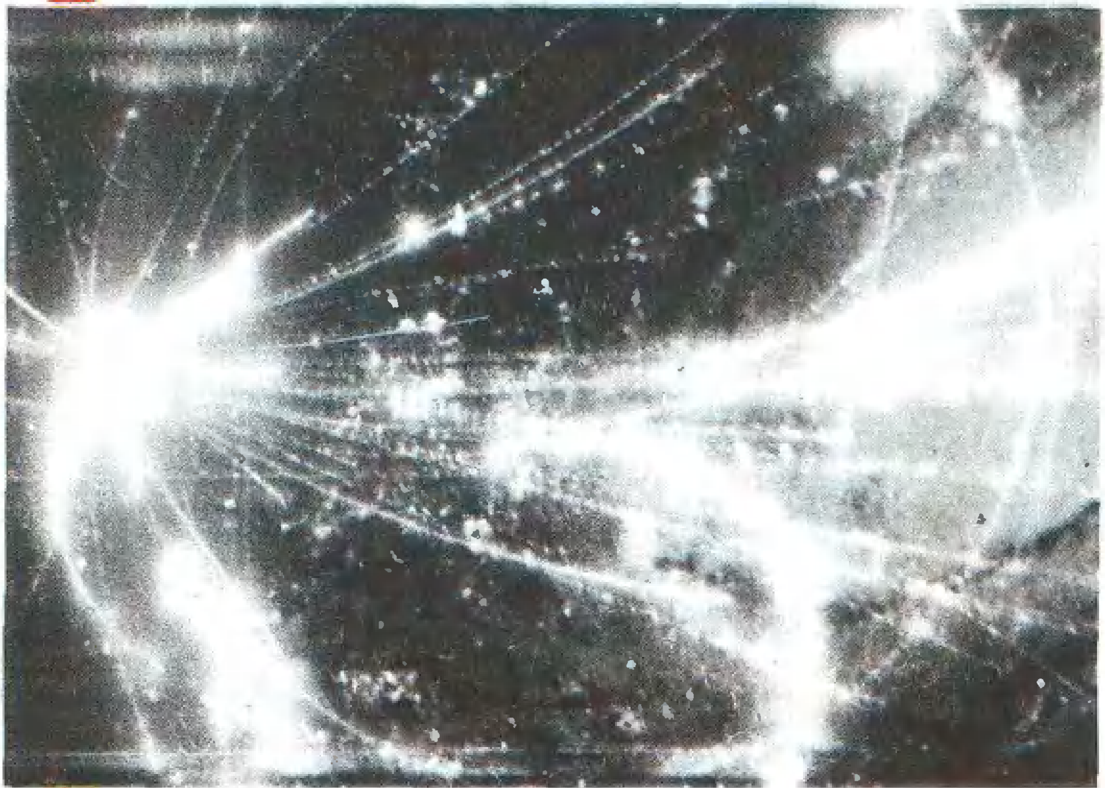
ISSN 0130-2221

# Квант

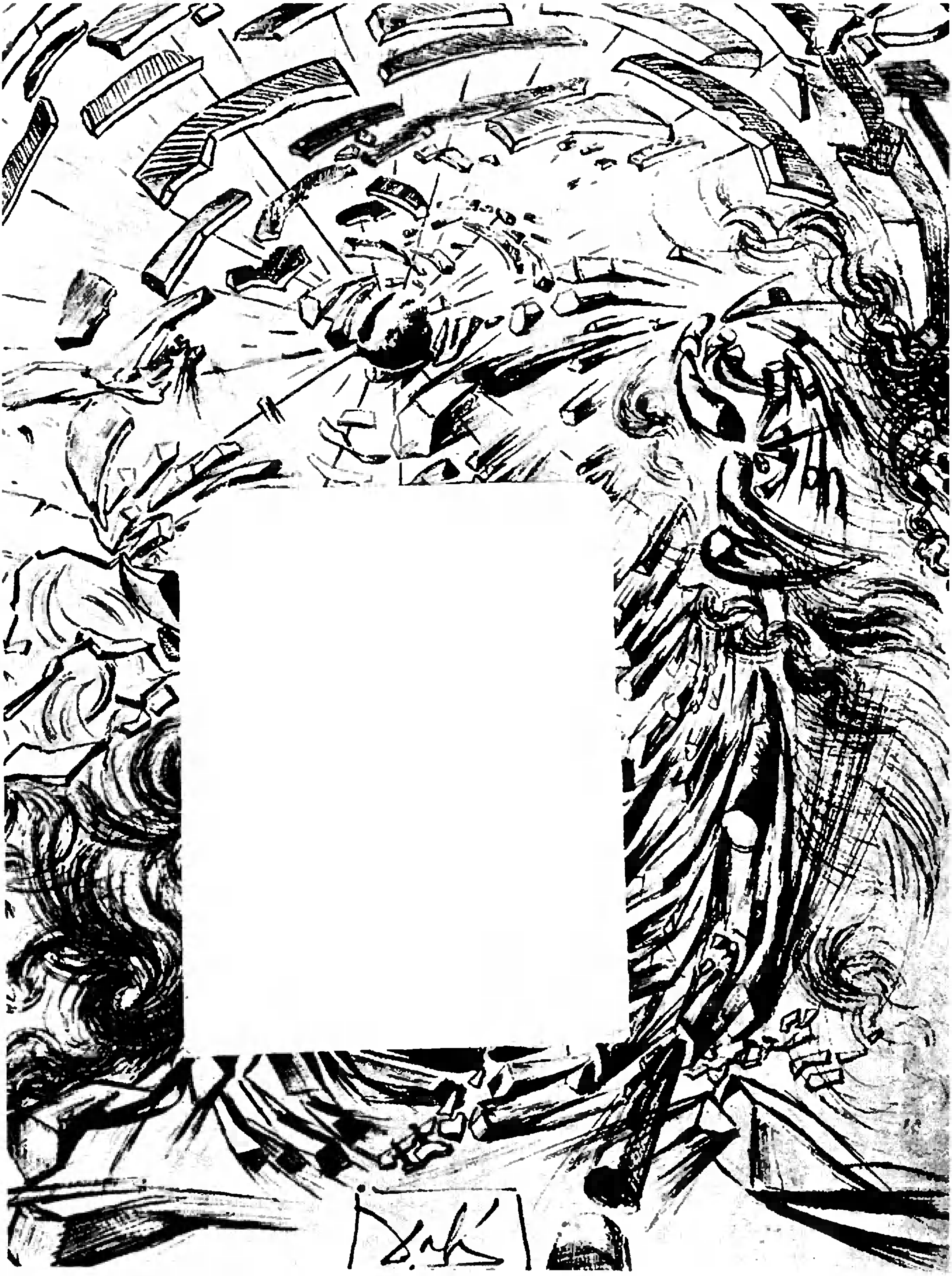
*Научно-популярный физико-математический журнал*

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



За пределы таблицы

1991



Квант

1 1991

*Выходит с января 1970 года*

*Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал*

*Учредители — Президиум Академии наук СССР, Президиум Академии педагогических наук СССР и трудовой коллектив редакции журнала «Квант»*

*Москва, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы*

# В номере:

2 К нашим читателям
8 *А. Шур.* Спутниковое телевидение
10 *В. Овсиенко.* Сколько на Земле кривых?

**Задачник «Кванта»**
18 Задачи М1261—М1265, Ф1268—Ф1272
19 Решения задач М1236—М1240, Ф1248—Ф1252
29 Список читателей, приславших правильные решения

**«Квант» для младших школьников**
30 Задачи
31 *С. Тихомирова.* Задачи про свет и цвет

**Школа в «Кванте»**
**Физика 9, 10, 11:**
35 Гроза и грозоотвод
38 За пределы таблицы
44 Избранные школьные задачи по физике

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

**Качественные задачи по физике**
45 «Велосипедная» задача

**Математический кружок**
47 *Н. Васильев.* Геометрические вероятности

**Практикум абитуриента**
54 *В. Уроев, М. Шабунин.* Об углах и окружностях

**Информация**
53 Конкурс «Математика 6—8»
58 Малый мехмат
59 Всесоюзная заочная многопредметная школа
62 «Дружба—90»
63 ФМШ при МГУ и НГУ
64 Участникам Научно-технической конференции в МФТИ
65 Конкурс «KQ—91»

**Игры и головоломки**
66 Реверси

71 **Варианты вступительных экзаменов 1990 г.**
75 **Ответы, указания, решения**
**«Квант» улыбается** *(9)*
**Реклама** *(34)*
**Наша обложка**
1, 2 Фотография «следов» ядерных частиц и картина Сальвадора Дали «Ядерная голова ангела» (1952) — так мы решили проиллюстрировать заметку «За пределы таблицы».
3 Шахматная страничка.
4 Еще раз о головоломке «Цветные фишки на треугольном поле».

**Дорогие читатели!**

Перед вами — 253 номер «Кванта». За два десятилетия своего существования журнал, несомненно, менялся — от чего-то мы отказывались, появлялись новые рубрики... Мы старались и стараемся следить за жизнью, наукой, школой. Но свой облик журнал приобрел, и мы намерены сохранить его и в этом году.

Что же ждет вас в «Кванте»?

Рассказы об истории и достижениях науки, о проблемах, над которыми работают физики и математики, о современных открытиях, интервью с крупными учеными, их размышления о науке и о путях ее развития — эти материалы помещаются на первых страницах журнала.

Наш «Задачник» — это раздел, который ведется из номера в номер. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, *выходящих за рамки школьной программы.* Ежегодно мы проводим конкурс на лучшее решение этих задач. Победители получают право участвовать в республиканских турах Всесоюзной физико-математической олимпиады школьников.

Материалы, связанные со школьной программой, разъясняющие наиболее трудные вопросы школьного курса,— содержание рубрики «Школа в «Кванте».

Те, кто собираются поступать в вузы, найдут для себя полезные материалы в разделах «Практикум абитуриента» и «Варианты вступительных экзаменов».

«Квант» для младших школьников» — это раздел, в котором публикуются занимательные задачи, требующие не столько конкретных знаний, сколько сообразительности, умения мыслить логически. Статьи, помещаемые в этом разделе, мы надеемся, доступны и интересны всем школьникам — любителям математики и физики.

Тем, кто любит физические опыты,— материалы рубрики «Лаборатория «Кванта». Они помогут вам развить наблюдательность, научиться ставить эксперимент, делать простые приборы.

«Математический кружок» — для участников математических кружков, сегодняшних и завтрашних.

Тем, для кого «Р — значит ракета», предназначаются материалы о теории космических полетов, а также о развитии и проблемах космонавтики, об исследовании космического пространства, о работе Всесоюзного молодежного аэрокосмического общества.

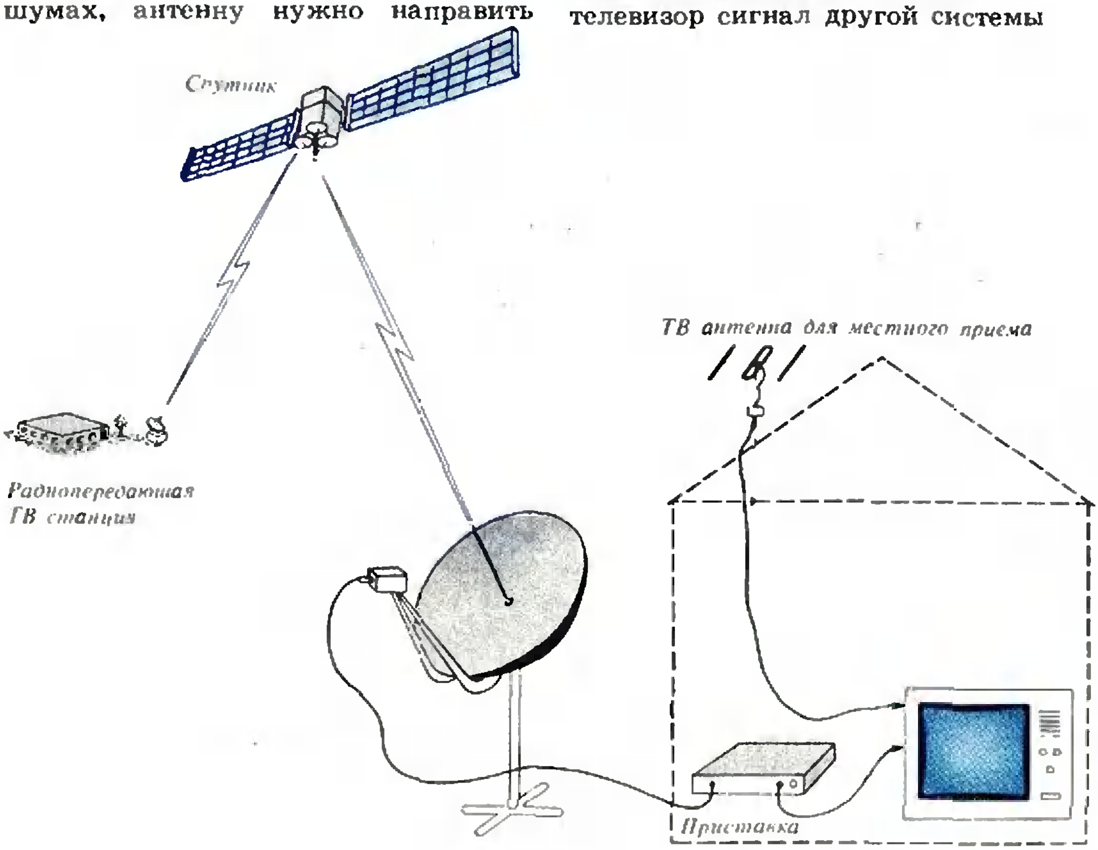
Что еще? «Калейдоскоп», «Фантастика», «Игры и головоломки», «Шахматная страничка», «Олимпиады»...

Понравится ли вам журнал? Что для вас будет наиболее занимательным, полезным? Нам очень важно знать ваше мнение. Поэтому раз в квартал мы помещаем нашу «Анкету».

И ждем ваших писем!

# *TV — ТВ*

Телевидение в наше время очень популярно. Даже весьма далекие от техники люди живо интересуются состоянием дел в этой области и хотят знать, когда же можно будет принимать на домашний телевизор программы со всего света. В этом уже нет ничего плохого, и дело теперь за техникой. Однако тут и возникают *серьезные проблемы — если* телезритель не хочет ждать, пока государство все решит и подготовит и будет достаточно только включить соответствующий канал у своего телевизора, ему придется изрядно потрудиться самому. При этом он должен более или менее четко представлять себе суть возникающих проблем. Часть их связана собственно с приемом сигналов от спутника — эти сигналы слабые и могут утонуть в шумах, антенну нужно направить на спутник, а это не так просто, да и диапазон частот очень уж непривычен для радиолюбителей, на таких высоких частотах обычные транзисторы не работают и нужно применять экзотические приборы (диоды Ганна, например). Другая часть проблем возникает после того, как сигнал удалось принять. Дело в том, что *в настоящее время используется* множество разных систем цветного телевидения. Основные из них—это SECAM, PAL и NTSC. Советско-французская система SECAM используется еще в нескольких странах, в Европе применяют систему PAL, а в США и Японии работают с системой NTSC. На обычные отечественные телевизоры можно принимать полноценно только передачи в системе SECAM; если подать на такой телевизор сигнал другой системы



(например, с видеомагнитофона), получится только черно-белая картинка, да и звука может не быть. Телевизоры новых поколений у нас в стране будут многостандартными, а пока приходится подключать к ним специальный декодер.
Тут нужно сказать, что ни одна из перечисленных систем не превосходит по всем параметрам остальных — в чем-то лучше одна, в чем-то — другая. Плохое качество изображения, которое еще кое-где порой встречается на экранах отдельных отечественных телевизоров, связано вовсе не с пороками системы SECAM. Хотя, справедливости ради, заметим, что принятие у нас в стране этой системы было продиктовано не только техническими, но и политическими соображениями.
Телевидение — это очень интересная область техники, в этой области работали и работают и серьезные ученые, и хорошие инженеры.
Многие технические решения в ТВ очень остроумны и эффективны, а решенные и решаемые задачи находятся на грани возможного при нынешнем состоянии техники. Еще совсем недавно любой грамотный инженер, услышав рассказ о том, как устроен современный кинескоп для цветного телевизора, счел бы это за первоапрельский розыгрыш, а разговор о возможностях современного бытового видеомагнитофона еще 10—15 лет назад вызвал бы насмешки у всякого специалиста по передаче информации. Однако ведь работает!
И у каждого из вас есть возможность внести свой вклад в дело посрамления осторожных технических прогнозов, которые делают современные ученые и инженеры.

# *СПУТНИКОВОЕ ТЕЛЕВИДЕНИЕ*

*Кандидат технических наук*
*А. ШУР*

Наземное телевидение известно всем. В наземном телевидении антенны наших домашних телевизоров направлены на местную радиопередающую телевизионную (ТВ) станцию. Но, вероятно, еще не все знают, что уже появилось спутниковое телевидение, где антенны направляются прямо на искусственный спутник Земли. На спутнике устанавливается приемник, принимающий ТВ сигнал от наземной передающей станции, и передатчик, излучающий его в сторону Земли.

Спутниковое телевидение охватывает весь земной шар. Оно вызывает большой интерес, поскольку предоставляет возможность принимать ТВ программы любой страны мира. Наземное телевидение удобно и более доступно для местных программ. Уже в настоящее время в США и Западной Европе миллионы телезрителей, используя ту и другую систему телевидения, могут принимать 15—20 ТВ программ.

### Частота сигнала

Принцип телевидения, как известно, заключается в последовательной передаче электрических сигналов, соответствующих яркости элементов (точек) изображения. При амплитудной модуляции мощность полезного сигнала изменяется вместе с яркостью элемента. Обычно полоса частот сигнала изображения составляет 6,25 МГц. Для звукового сопровождения также требуется полоса частот до нескольких сот килогерц. В результате один частотный канал (одна ТВ программа) занимает полосу частот 8 МГц. При частотной модуляции мощность сигнала остается неизменной. Пропорционально яркости элемента изображения (и громкости звука) изменяется частота сигнала. Этот вид модуляции имеет некоторые преимущества, но один канал занимает полосу частот в 3—4 раза шире, чем при амплитудной модуляции.

Передача сигналов с такой широкой полосой частот возможна только в диапазоне высоких частот. В диапазоне метровых и дециметровых волн для телевидения выделены полосы частот от 50 до 230 МГц (длина волны $\lambda=6—13$ м) и от 470 до 1000 МГц ($\lambda=0{,}63—0{,}3$ м). Развитие телевидения привело сейчас к тому, что почти все эти частоты уже использованы и даже многократно. Всемирной административной конференцией по радио (ВАКР) специально для спутникового телевидения выделена еще одна полоса частот от 11,7 до 12,5 ГГц. Эта полоса относится к сантиметровому диапазону волн ($\lambda\approx2{,}5$ см). В полосе размещается 60 каналов шириной 27 МГц.

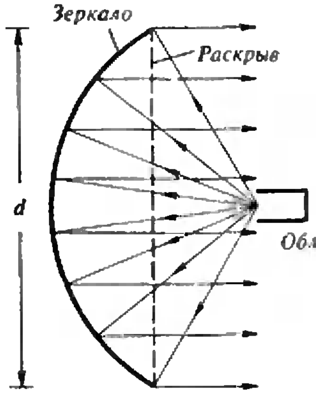
Радиоволны сантиметрового диапазона, так же, как и радиоволны других ТВ диапазонов, распространяются в свободном пространстве прямолинейно, как луч света. В зоне прямой видимости (т. е. при отсутствии преград между приемником и передатчиком) потери энергии сигнала минимальны. При «закрытии» луча зданием, деревьями или выпуклостью Земли прием практически прекращается. На радиоволнах короче примерно 5 см начинают сказываться потери сигнала в мокрых осадках, особенно в дожде. В спутниковых системах для индивидуального приема дождь в течение двух-трех часов может сильно ухудшить или даже «сорвать» изображение.

### Антенны

На сантиметровых волнах представляется возможность использовать параболические антенны, позволяющие концентрировать и направлять энергию довольно узким пучком. По сравнению с «изотропной» антенной, которая излучает такую же энергию во все стороны равномерно, параболическая антенна обладает бо́льшим «усилением». Такая антенна работает как прожектор. Как показано на рисунке 1, сферическая волна, которая излучается из конца облучателя, после отражения от металлического зеркала, имеющего форму параболоида, превращается в плоскую. Иначе говоря, расходящийся пучок лучей собирается в параллельный.*)

Облучателем антенны служит открытый конец волновода. Волновод представляет собой трубу круглого или прямоугольного сечения и служит для передачи энергии. Использование для этой цели кабелей на сан-

*) Это свойство параболического зеркала вы сможете легко объяснить, если вспомните, что парабола — это геометрическое место точек, каждая из которых равноудалена от некоторой точки (фокуса) и прямой (директрисы).



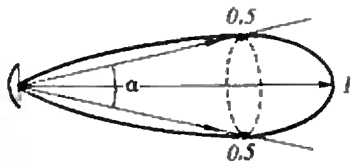




*Рис. 1. Диаграмма направленности*


Рис. 2.

тиметровых волнах приводит к большим потерям сигнала. Направленность параболической антенны в пространстве характеризует диаграмма на рисунке 1. Максимум мощности излучается вблизи оси зеркала. По мере удаления от оси излучаемая мощность снижается. Под шириной диаграммы направленности понимают угол $\alpha$, определенный по точкам, где мощность снижается вдвое относительно максимума. В область диаграммы направленности (внутрь конуса с углом $\alpha$) антенна излучает примерно 60 % всей мощности. Ширина диаграммы будет тем у́же, чем больше диаметр зеркала $d$ (диаметр раскрыва) и чем меньше длина волны $\lambda$:

$$\alpha \approx 1{,}2\lambda/d.$$

Например, при $d=100$ см для $\lambda=2{,}5$ см имеем $\alpha\approx 0{,}3$ рад. При подключении антенны к приемнику антенна «собирает» энергию радиоволн из окружающего пространства. Выигрыш по сравнению с «изотропной» антенной остается (как и при передаче). Узкая диаграмма направленности хороша еще тем, что ослабляет сигналы от посторонних (мешающих) станций. Для индивидуального приема применяют антенны с диаметром зеркала до 1—1,5 м. Антенны большего диаметра (3 м и более) слишком громоздки и очень дороги. В небольших антеннах облучатель, чтобы не затенять зеркало, выносится в сторону от него. При этом зеркало делают несимметричным. Оно представляет собой несимметричную часть параболы.

### Зоны обслуживания

Наличие прямой видимости определяет зону обслуживания передающей ТВ станции, точнее говоря, территорию, где станция обеспечивает уверенный прием. Над земной поверхностью расстояние прямой видимости, в общем случае, зависит от высоты антенн и рельефа местности. Над ровной сферической земной поверхностью, когда высота антенны передатчика $H$ намного больше высоты приемной антенны, расстояние прямой видимости (см. рис. 2)

$$D\approx\sqrt{2RH}\approx 3{,}6\cdot 10^3\sqrt{H}\ (\text{м})$$

($R$ — радиус Земли).

Зона обслуживания станции ограничивается видимым горизонтом. На мощных ТВ станциях высота антенн обычно не превышает 300 м, поэтому радиус зон обслуживания не превосходит 70 км. Для охвата телевидением всей страны построена обширная сеть многочисленных мощных и маломощных (с радиусом зоны несколько километров) станций. Однако есть еще населенные пункты, где, в силу их отдаленности или сложности рельефа местности, наземное телевидение отсутствует.

С появлением искусственных спутников Земли, естественно, возникла мысль — для расширения зоны обслуживания установить ТВ передатчик на спутнике. Спутник запускается на геостационарную орбиту, которая проходит строго над экватором на высо-

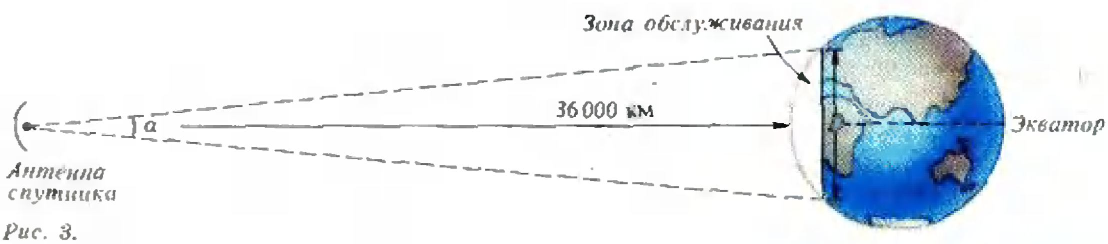



Рис. 3.

те $h \approx 36\,000$ км (т. е. радиус орбиты спутника $\sim 42\,400$ км). Спутник вращается с такой же угловой скоростью, что и Земля вокруг своей оси, поэтому кажется с Земли неподвижным. Благодаря этому могут быть неподвижны антенны как на спутнике, так и на Земле. Если антенна бортового передатчика нацелена вертикально вниз, на подспутниковую точку, зона обслуживания будет ограничена окружностью, диаметр которой зависит, в основном, от ширины диаграммы направленности антенн (рис. 3):

$$D \approx \alpha h.$$

При $\alpha = 1/57$ рад $= 1^\circ$ имеем $D \approx \approx 630$ км. При $\alpha = 0{,}3$ рад зона обслуживания охватывает почти все полушарие Земли (диаметр Земли $\sim 12\,800$ км). Если нацелить антенну на какую-либо другую точку земного шара, то форма зоны приобретает вид искаженного эллипса (рис. 4).

### Мощность сигнала

Для оценки мощности сигнала от спутника представим себе, что через центр зоны обслуживания, перпендикулярно направлению прихода волны, проходит диск. Диаметр диска $D$ приближенно будем считать равным диаметру зоны обслуживания. Антенна, как мы уже говорили, излучает в область диаграммы направленности только 60 % мощности передатчика $P$. Поэтому на единицу площади диска падает мощность $p = 0{,}6P/(\pi D^2/4)$, а на приемную антенну с диаметром раскрыва $d$ — мощность $p(\pi d^2/4)$. Но нужно еще учесть, что антенна извлекает только 60 % падающей на нее мощности. В результате в центре зоны

$$P_c \approx 0{,}36 P \left(\frac{d}{D}\right)^2.$$

Мощность сигнала, как видим, прямо пропорциональна мощности передатчика и площади раскрыва приемной антенны и обратно пропорциональна площади зоны обслуживания. По мере удаления точки приема от центра зоны мощность сигнала будет уменьшаться в соответствии с диаграммой направленности передающей антенны.

На спутнике питание аппаратуры происходит от солнечных батарей. Солнечные батареи обычно не позволяют иметь мощность передатчика более 200 Вт. Для иллюстрации формулы предположим $P = 100$ Вт, $D = 700$ км и $d = 1$ м. Расчет дает мощность сигнала в центре зоны $P_c \approx 0{,}7 \cdot 10^{-10}$ Вт, на краю — $0{,}35 \times \times 10^{-10}$ Вт. Много это или мало? Ответить на этот вопрос можно лишь тогда, когда известна чувствительность приемника.

### Чувствительность приемника

Эта характеристика приемника определяет его способность обеспечивать нормальный прием при минимальной мощности сигнала. Чувствительность тем выше, чем меньшей величиной сигнала она оценивается. Может показаться, будто, увеличивая усиление, можно неограниченно улучшать чувствительность приемника и делать его способным принимать все более слабые сигналы. Однако предел чувствительности ставится наличием шумов. При недостаточной мощности сигнала на экране телевизора видны шумы в виде хаотически блуждающих черточек и точек. Изображение смотрится как бы за пеленой снега. Нормальный прием наступает лишь при определенном превышении сигнала над шумом.

Происхождение шумов двоякое: одни шумы возникают в самом приемнике, другие принимаются антенной из окружающего пространства. В приемнике шумы рождаются из хаотического теплового движения электро-


*Рис. 4.*

нов в проводниках и при сложных процессах распределения токов в транзисторах. Чем выше температура проводника, тем сильнее шум. Наибольший шум вносят первые каскады приемника, поскольку он усиливается всеми последующими каскадами. Антенна принимает шумы, которые вызываются тепловым движением частиц атмосферы Земли, и шумы, связанные с радиоизлучением небесных тел. Шумы наблюдаются на всех частотах, полная их мощность зависит от полосы частот и возрастает с увеличением полосы пропускания приемника. Поэтому полоса пропускания не берется шире полосы, минимально необходимой для передачи сигнала. В результате на мощность шума самого приемника влияет только его схема и конструкция входных каскадов.

При частотной модуляции мощность принятого сигнала должна быть в 15—20 раз больше мощности шумов, при амплитудной — еще в несколько раз больше (по этой причине в спутниковых системах чаще всего выбирается частотная модуляция). Опыт показывает, что чувствительность приемного устройства должна быть выше еще в 2 раза для уменьшения влияния дождя. Надежность приема будет обеспечена примерно в 99 % времени, если использовать приемники, у которых мощность шума в 30—40 раз меньше мощности сигнала.

**Особенности приема**

Для спутникового приема обычный домашний телевизор может быть применен только с помощью специальной приставки. Приставка необходима для переноса сигнала из сантиметрового диапазона в дециметровый, для повышения чувствительности телевизора и для преобразования частотно-модулированного сигнала в амплитудно-модулированный. Первые «малошумящие» каскады и каскады, служащие для переноса сигнала на другую частоту, выполнены отдельно в выносной головке. Головка совмещена с облучателем. Благодаря такой конструкции, уровень шумов сводится к минимуму; отпадает необходимость в длинном волноводе. Помимо аппаратуры спутникового приема, владелец телевизора может иметь антенны метрового и дециметрового диапазонов для приема местного телецентра.

Спутники, рассчитанные на индивидуальный ТВ прием, обслуживают «небольшие» зоны, чтобы получить приемлемый уровень сигнала и, соответственно, умеренное по цене приемное устройство с антенной диаметром около 1 м. На территории Советского Союза, с пяти позиций на орбите, будет создано пять таких зон. Программа для зон будет формироваться со сдвигом во времени относительно московского.

При коллективном приеме используют антенны большого диаметра и высокочувствительный усилитель. Благодаря возможности приема слабых сигналов спутники могут обслуживать большие территории. Например, советская система «Экран-М» передает программы Центрального телевидения на сеть наземных передающих станций в районах Сибири и Крайнего Востока. Система «Москва Глобальная» обеспечивает прием советского телевидения на территории почти всех стран мира. Антенна, работающая на сантиметровых волнах, здесь имеет диаметр 4 м!

Прием с западноевропейских спутников на территории Советского Союза затруднителен. Это связано не только с низким уровнем сигнала. У этих спутников используется другой стандарт телевидения, некоторые сигналы закодированы, чтобы препятствовать бесплатному просмотру. Интересное сообщение прессы: по договоренности с иностранными фирмами в Москве будет организован коллективный прием западноевропейских ТВ спутников по существующей кабельной сети.

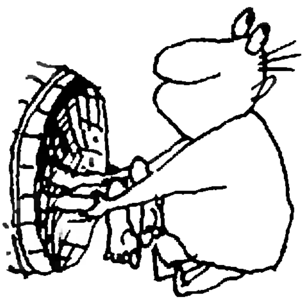
Спутниковое телевидение интенсивно развивается во всех странах. Оно только на старте и, образно говоря, у порога нашего дома.

„Квант" улыбается

# Забавные высказывания

Изучение научной литературы — тяжелый труд, напоминающий подъем на высокую горную вершину. Поэтому каждый «человеколюбивый» автор считает себя обязанным позаботиться и об интеллектуальном отдыхе читателей. Темы для таких «площадок отдыха» подсказывают исторические сведения, фантастические аналогии, остроумные замечания и т. д. Приведем некоторые примеры, снабдив их для завязки абстрактным вопросом.

1. Почему Диогена не смогли убедить переселиться в добротный дом?



*«На самом деле по любому вопросу, вероятно, здравого человека можно в чем-то, как-то убедить. По жилищному вопросу — это дело совершенно безнадежное»* (Цетлин М. Л. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем, с. 154).

2. Играют ли взрослые в «испорченный телефон»? Это подтверждает В. И. Арнольд.

*«Рассмотренная выше теорема в сущности была известна Пуанкаре; явная формулировка и доказательство даны А. А. Андроновым. Р. Том, которого я обучил этой теории в 1965 году, стал широко пропагандировать ее под именем «бифуркация Э. Хопфа»* (Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, с. 247).

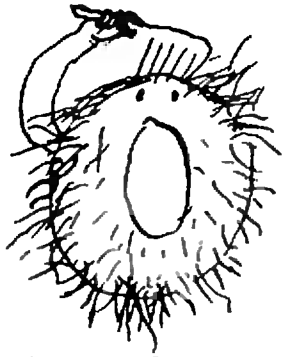
3. Целесообразно ли создать кооператив по написанию лаконичных телеграмм? Советуем это сделать!

*«Вообще, естественные языки отличаются чрезвычайной избыточностью. Даж есл нскльк бкв вбрсть, эт прдлжн ещ мжн прчть»* (Уэзерелл Ч. Этюды для программистов, с. 63).

4. Бог создал мир, но, может быть, некоторые его части помогал строить дьявол?

*«Хромосома ведет себя как та ЭВМ, которая библейское изречение «Плоть немощна, но дух бодр» перевела с английского (The spirit is sound, but the flesh is weak) на русский следующим образом: «Водка крепкая, но мясо размякло»* (Медников Б. М. Аксиомы биологии, с. 58).

5. Может ли тор породить радиофобию? Это не исключено.



*«Отметим, однако, что волосатый тор можно причесать гладко. Этот факт имеет важное значение для термоядерных установок будущего»* (Косиевски Ч. Начальный курс алгебраической топологии, с. 290).

6. О чем мечтает автор, приступая к написанию книги?

*«Лучше всего, если бы читатель знал все, что содержится в этой книге, еще не начав читать ее!»* (Пианка Э. Эволюционная экология, с. 6).

*В. Ильичев*

# СКОЛЬКО НА ЗЕМЛЕ КРИВЫХ?

*Кандидат физико-математических наук*
*В. ОВСИЕНКО*

Этот вопрос кажется странным. Можно нарисовать неописуемое множество разнообразных кривых. Договоримся сначала, какие кривые мы будем рассматривать. Здесь нам должен помочь повседневный опыт. Хорошая упругая веревка или проволока не имеет острых углов. Поэтому мы будем изучать только *гладкие* кривые (без каких бы то ни было изломов), начерченные на земной поверхности. Таким кривым разрешается иметь сколько угодно точек самопересечения.

Гладких кривых тоже слишком много. Пересчитать их все невозможно. Единственный способ разобраться в нашем вопросе — условиться считать одинаковыми кривые, которые «не очень сильно» отличаются друг от друга.

### Типы кривых

Кривая — популярный математический объект, имеющий много интересных характеристик: кривизну, длину, число точек самопересечения, перегиба и т. д. Все они заслуживают изучения. (О некоторых из них рассказано в статье С. Табачникова «О плоских кривых» в «Кванте» № 11 за 1988 г.) А какие важны для нас? Может быть длина? Но кривых одинаковой длины все равно слишком много. Считать одинаковыми кривые, у которых одинаковая кривизна? Тогда различных кривых будет больше, чем функций,— многовато... Чтобы больше не гадать, забудем сразу обо всех характеристиках кривой.

Будем понимать выражение «кривые не очень сильно отличаются друг от друга» буквально и считать одинаковыми кривые, которые отличаются «малым шевелением». Теперь нам придется считать *одинаковыми любые две кривые, которые можно продеформировать (перетянуть) друг в друга так, чтобы они все время оставались гладкими* (рис. 1). Ведь такую деформацию можно разбить на серию «малых шевелений». Будем называть такие кривые *кривыми одного типа* (математикам кажется более красивым термин *гомотопные кривые*).

Мы отбросили все видимые различия между кривыми. Естественно предположить, что при таком наивном соглашении все кривые — одного типа. Для незамкнутых кривых так оно и есть. Представим себе лежащую на земле веревку, начинающую распрямляться с одного из концов. Такая веревка плавно развернется в прямую линию (рис. 2). Итак, интересно рассматривать только *замкнутые* кривые.

Теперь все готово, чтобы сформулировать строгий математический вопрос:

*Сколько на Земле различных типов замкнутых кривых?*

Этот вопрос имеет много разновидностей и дополнений, приводящих нас в весьма популярную область современной математики. Об этом речь впереди, а пока давайте считать Землю плоской.

*Рис. 1.*

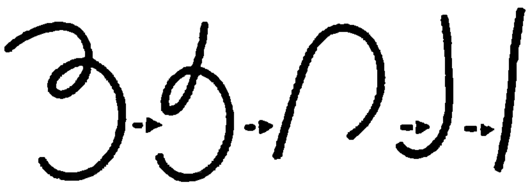


*Рис. 2.*

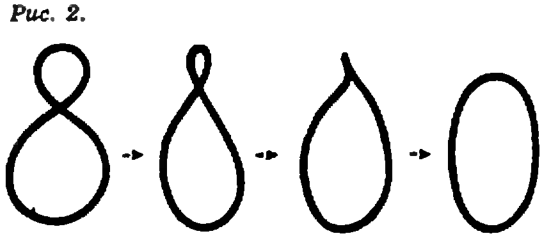


*Рис. 3.*

### Число оборотов

Попробуйте продеформировать «восьмерку» в «нолик». Получилось? Тогда по дороге у вас обязательно возникло острие (рис. 3). А можно ли продеформировать так, чтобы кривая оставалась гладкой? Похоже, что нельзя. Как это строго доказать? Первая мысль — посчитать число самопересечений кривой или число областей, на которые кривая делит плоскость. Но эти числа могут меняться. Мы уже видели на рисунке 1, как кривая типа «восьмерки» потеряла пару точек самопересечения. Вот как, *пару*! Это значит, что *четность числа самопересечений* осталась без изменения. (Правда, в первый момент две точки превратились в одну, но ее следует рассматривать как слившуюся пару.) Точно так же обстоит дело с числом областей: они образуются и исчезают парами. Итак, «восьмерка» и «нолик» относятся к разным типам. Может быть, существует только два типа кривых? Ничего подобного.

*На плоскости существует бесконечно много различных типов замкнутых кривых.*

Чтобы доказать эту нашу первую теорему, каждой замкнутой кривой на плоскости поставим в соответствие натуральное число. Рассмотрим точку, движущуюся вдоль кривой (вектор ее скорости касается кривой в каждый момент времени). Пусть за некоторое время точка обежит всю кривую и вернется в начальное положение. *Числом оборотов кривой* мы будем называть число полных оборотов, которые совершает вектор скорости этой точки. (Неважно, в каком направлении поворачивается вектор. Это зависит от направления движения точки вдоль кривой.)

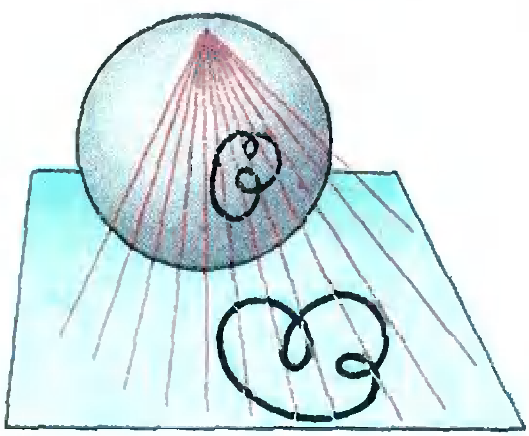


Рис. 4.

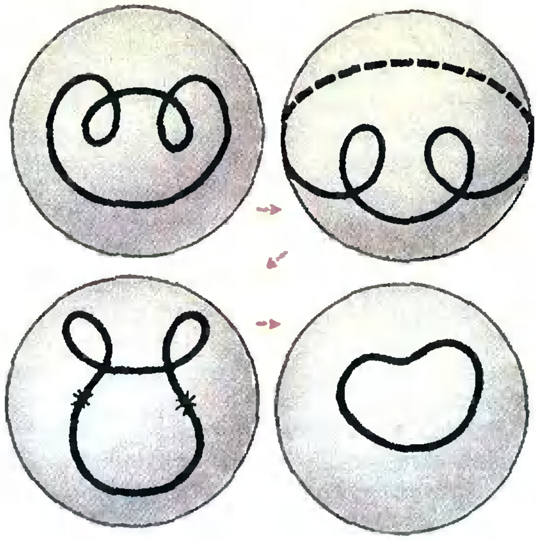


Рис. 5.

*Число оборотов — инвариант*, т. е. оно не меняется при деформации кривой. Ведь это число не может измениться скачком при «малом шевелении» кривой, а деформация — цепочка таких «шевелений». Следовательно, кривые с разным числом оборотов относятся к разным типам.

Упражнение 1. Придумайте кривую для каждого наперед заданного числа оборотов.

Разных чисел бесконечно много, значит, и кривых — тоже. Теорема доказана.

На самом деле, *число оборотов — единственный инвариант* плоской кривой. Это значит, что две кривые с одинаковыми числами оборотов принадлежат к одному типу. Попробуйте сами придумать доказательство, а если не получится — поэкспериментируйте. В крайнем случае, прочтите «Квант» № 4 за 1983 г. А мы лучше вспомним, что Земля — шар.

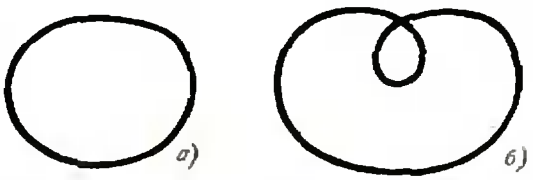


Рис. 6.

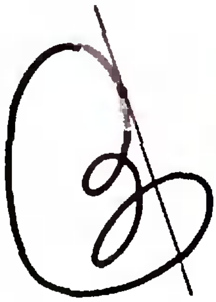


Рис. 7.

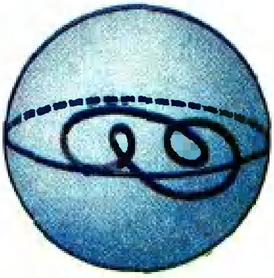


Рис. 8.

### И все-таки она вертится...

Поверхность Земли — сфера. Сколько же на ней кривых? Сфера — это плоскость плюс еще одна точка (рис. 4). Рисунок 4 называется *стереографической проекцией.* Сделаем стереографическую проекцию из точки, не лежащей на кривой. Тогда эта кривая попадет на плоскость. Значит, на сфере столько же типов кривых, сколько на плоскости? Да, недалеко мы ушли от тех, кто и в правду считает Землю плоской. Вот правильный ответ.

*На сфере существует ровно два различных типа замкнутых кривых.*

Доказательство начнем с картинки (рис. 5). Как видите, число оборотов больше не сохраняется. Вот, что отличает кривые на сфере от кривых на плоскости. «Обернувшись» вокруг сферы, кривая потеряла два оборота. Теперь легко проделать такую же операцию над кривой с любым числом оборотов (надо только дорисовать у кривых на рисунке 5 несколько петелек в любом месте). Мы получили, что любую кривую можно продеформировать в одну из кривых на рисунке 6. В какую именно — зависит от четности числа оборотов.

Упражнение 2. Перетяните «восьмерку» в кривую, изображенную на рисунке 6, *б*.

Но как доказать, что кривые *а*) и *б*) — разных типов не только на плоскости, но и на сфере? Ведь, строго говоря, число оборотов в этом случае вообще не определено. Выручает уже знакомая нам четность числа самопересечений. У кривой *б*) это число нечетно, а у кривой *а*) — четно (равно нулю).

### Выпуклость

Среди всех гладких кривых на плоскости выделяется класс кривых, не имеющих точек перегиба. Такие кривые мы будем называть *выпуклыми.* Маленькая окрестность любой точки на выпуклой кривой лежит по одну сторону от своей касательной и может пересекаться с любой прямой не более чем в двух точках (рис. 7).

Понятие выпуклости легко и естественно обобщается для сферы. «Прямыми» на сфере будем называть большие окружности (экваторы). *Кривая на сфере называется выпуклой в данной точке, если окрестность кривой в этой точке лежит по одну сторону от касательного экватора* (рис. 8).

Выпуклые кривые встречаются в природе, когда заряженная частица мчится поперек линий магнитного поля. Согласно правилу буравчика, она будет закручиваться все время в одну и ту же сторону (рис. 9).

Будем говорить, что выпуклые кривые — *одного типа*, если их можно продеформировать друг в друга так,

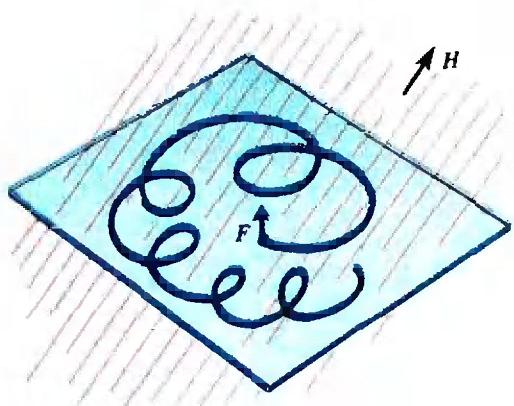


Рис. 9.

чтобы они оставались не только *гладкими*, но и *выпуклыми* в каждой точке. Это условие сильнее, чем то, что было раньше. Две однотипные в старом смысле кривые могут оказаться совершенно различными, если принять во внимание их выпуклость.

### Самый большой вопрос

Любознательные математики, конечно же не могли пропустить вопрос:

*Сколько бывает различных типов замкнутых выпуклых кривых на сфере?*

Более того, для математиков он оказался значительно более важным, чем вопрос о кривых без условия выпуклости. Интерес к нему и различным его обобщениям неожиданно подскочил за последние два года...

*Рис. 10.*

Требование выпуклости очень существенно и полностью меняет ответ. Удивительно, однако, не это, а то, что ответ этот был получен лишь двадцать лет тому назад.

Теорема. *Существует ровно три различных типа замкнутых выпуклых кривых на сфере* (рис. 10).

Этот красивый результат был опубликован американским математиком Дж. Литтлом*) в 1970 году в журнале по дифференциальной геометрии. Остается загадкой, как этот интересный геометрический вопрос мог укрыться от внимания классиков еще в прошлом веке.

Сравним рисунки 10 и 6. На первый взгляд, к кривым *а*) и *б*) добавилась дополнительная кривая *в*). Мы увидим, что в действительности кривая *а*) «отщепилась» от других кривых с нечетным числом оборотов в важный самостоятельный класс. Кривую *а*) нельзя перетянуть в кривую с точками самопересечения, любой экватор пересекает ее не более двух раз.

Прежде чем серьезно браться за доказательство, поговорим немного о мотивировках. Почему полезно изучать выпуклые кривые? Во-первых, рассматриваемый нами вопрос — один из тех редких геометрических вопросов, которые благодаря своей простоте и наглядности превращают математику в красивую науку, и этого вполне достаточно для того, чтобы он был интересен сам по себе. Во-вторых, кривая — простейший геометрический объект, связанный со многими другими важными математическими понятиями. Поэтому любой разумный вопрос о кривых должен иметь те или иные приложения. Именно так обстоит дело и с вопросом о выпуклых кривых на сфере. Позже мы поговорим об этом немного подробнее.

### Мультфильм Литтла

Может ли мультфильм быть доказательством математической теоремы? Не верите — смотрите сами (рис. 11). На ваших глазах кривая, совершающая 4 оборота, превращается в кривую *б*) на рисунке 9 с числом оборотов 2, *оставаясь по дороге выпуклой в каждой точке*. Тем, кому мультфильм кажется недостаточно убедительным, не остается ничего другого, как последовать совету Феликса Клейна и сделать гипсовую модель, но при этом доказательство станет гораздо тяжелее (во всяком случае — по весу). Мультфильм — основное и вместе с тем самое красивое место в доказательстве теоремы Литтла. Теперь, дорисовав несколько петелек, каждый сам сможет продеформировать кривую с большим числом оборотов в кривую *б*) или *в*) в зависимости от четности этого числа.

Итак, любую выпуклую кривую на сфере можно продеформировать в одну из трех кривых на рисунке 9. Кривые *а*) и *б*), а также *б*) и *в*) принадлежат к различным типам даже без

*) Его фамилия так и пишется *Little* (по-английски — маленький).

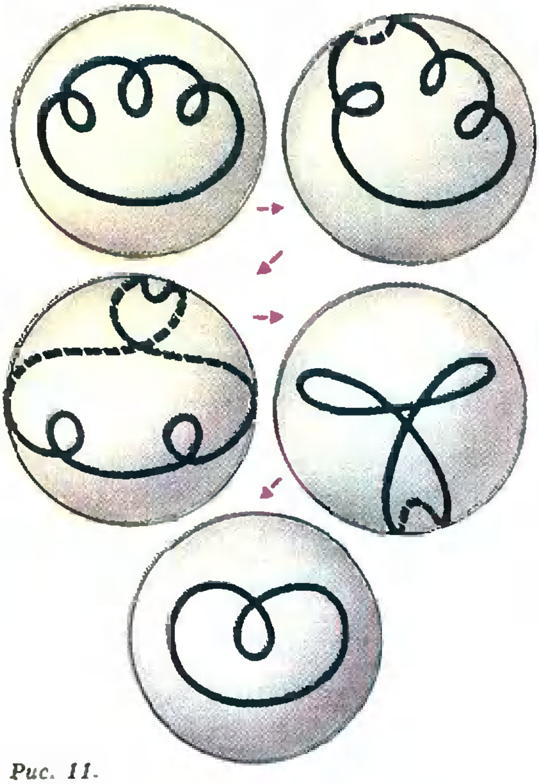


*Рис. 11.*

условия гладкости. Нам остается доказать, что кривую *в*) нельзя перетянуть в кривую *а*).

Что же мешает кривой *в*) «обернуться» вокруг сферы, потерять 2 оборота и превратиться в *а*)? В самом деле, это уже происходило на рисунке 5 (кривая *в*) перешла в кривую *а*), но при этом у нее сначала возникли, а затем пропали две точки перегиба). Чтобы убедиться, что дело здесь *не в дефекте мультфильма* и кривые *а*) и *в*) действительно *различны* как выпуклые кривые, проще всего начать с кривой *а*), а не с *в*).

*Выпуклая несамопересекающаяся кривая на сфере лежит на полусфере*, т. е. целиком по одну сторону от некоторого экватора.

Это простое утверждение было доказано еще в 20-х годах. Прежде всего поясним его смысл. Утверждение означает, что кривая *а*) лежит на некоторой полусфере. Такая кривая ничем не отличается от кривой на плоскости. Действительно, существует простой способ переделать кривую на полусфере в плоскую — спроецировать ее из центра сферы на плоскость (рис. 12). При этом, в отличие от стереографической проекции, *диаметры* (точнее — полудиаметры, принадлежащие полусфере) переходят в прямые на плоскости. Поэтому выпуклая кривая на полусфере переходит *в выпуклую кривую* на плоскости. Кривая *а*) на рисунке 10 при любой деформации вынуждена оставаться на полусфере (неважно, что полусфера может меняться; при этом точка приложения плоскости, на которую происходит проекция, «прокатывается» по сфере). Кривая на плоскости не может перейти в кривую с бо́льшим числом оборотов. Поэтому кривая *а*) не может перейти в кривую *в*).

Для доказательства утверждения проведем касательный экватор к любой точке кривой. Выпуклая кривая без самопересечений не может пересекать *этот экватор в другой точке* (и, стало быть, лежит по отношению к нему на одной из полусфер). В самом деле, если допустить такое пересечение, то на кривой найдется точка, в которой кривая выпукла в противоположную сторону (рис. 13). Значит, у кривой есть и пара перегибов.

Доказательство теоремы Литтла закончено. Пора признаться, что при доказательстве теоремы мы допустили-таки один небольшой пробел

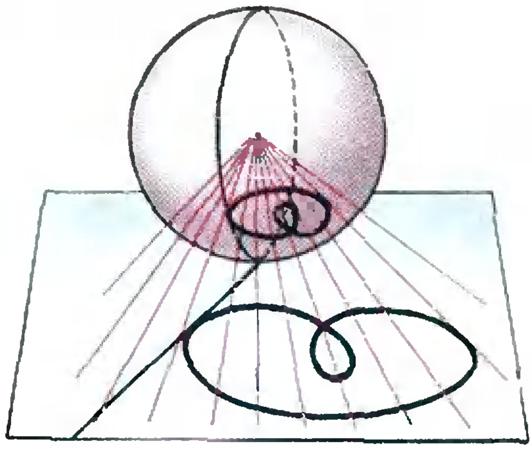


*Рис. 12.*

*Рис. 13.*

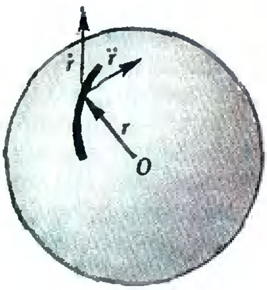



*Рис. 14.*

(попробуйте его найти!). Преодоление этого пробела — дело техники (и поэтому требует еще много возни). Вообще, доказательство теоремы Литтла производит впечатление очень «ручного» и даже кустарного. Поэтому оно трудно поддается обобщениям и многие схожие вопросы о кривых до сих пор не решены. Но что делать, другого доказательства пока неизвестно. Вся надежда здесь — на наших читателей.

Разговор о кривых на этом мы закончили. Мне остается выполнить свое обещание и рассказать немного о применении этой теории. Правда, потребуется несколько более основательная математическая подготовка.

Однажды на своем семинаре профессор В. И. Арнольд, знакомый читателям «Кванта» (интервью с ним опубликовано в № 8 за 1990 г.), предположил, что Земля — тор.

Упражнение 3. а) Сколько различных замкнутых кривых на торе? б) Как в этом случае обстоит дело с выпуклостью?

### Кривые и уравнения

В заключение поговорим о связи кривых с дифференциальными уравнениями. Вспомним, что кривая лежит на сфере, а сфера находится в трехмерном пространстве. Пусть как и раньше вдоль кривой движется точка, которая за некоторое время пробегает всю кривую. Так как в каждый момент времени проведенный из центра радиус-вектор $\vec r(t)$ перпендикулярен сфере, а вектор скорости $\dot{\vec r}(t)$ касается кривой, а значит, и сферы. Эти векторы не могут быть коллинеарными. Если кривая — выпуклая, то вектор ускорения $\ddot{\vec r}(t)$ не лежит в плоскости, натянутой на векторы $\vec r(t)$, $\dot{\vec r}(t)$, так как проекция ускорения на касательную плоскость к сфере направлена в сторону «вогнутости» кривой и не коллинеарна $\dot{\vec r}(t)$ (рис. 14). Поэтому радиус-вектор, скорость и ускорение — три независимых вектора, т. е. любой вектор можно разложить по ним.

Рассмотрим вектор $\dddot{\vec r}(t)$, т. е. вектор, координаты которого — производные от координат $\vec r(t)$: если $\vec r(t)=(r_1(t); r_2(t); r_3(t))$, то $\dddot{\vec r}(t)=(\dddot r_1(t); \dddot r_2(t); \dddot r_3(t))$. Разложим вектор $\dddot{\vec r}(t)$ по $\vec r(t)$, $\dot{\vec r}(t)$, $\ddot{\vec r}(t)$ (разумеется, коэффициенты разложения зависят от времени):

$$\dddot{\vec r}(t)=a(t)\ddot{\vec r}(t)+b(t)\dot{\vec r}(t)+c(t)\vec r(t).$$

Но тогда каждая координата $r_i(t)$ ($i=1, 2, 3$) — функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\dddot r_i(t)=a(t)\ddot r_i(t)+b(t)\dot r_i(t)+c(t)r_i(t).$$

Итак, каждой выпуклой кривой на сфере мы поставили в соответствие уравнение. Возможно, некоторые читатели найдут сходство между этой конструкцией и рассуждениями средневекового мыслителя Деногардуса (см. статью «О великом числе Деногардуса и законе Гука», опубликованную в № 8 за 1989 г.) о движении небесных тел.

Еще одно важное замечание: замкнутой кривой соответствует уравнение, у которого все коэффициенты и все решения — периодические функции.

А теперь — несколько примеров.

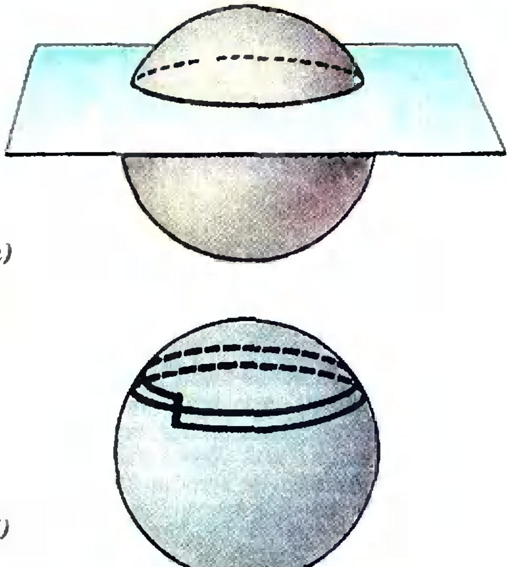


Рис. 15.

1) Уравнение $\dddot{r}(t)=-\dot{r}(t)$ имеет периодические решения $r_1(t)=1$, $r_2(t)=\sin t$, $r_3(t)=\cos t$.

2) Уравнение $\dddot{r}(t)=-4\dot{r}(t)$ имеет периодические решения $r_1(t)=1$, $r_2(t)=\sin 2t$, $r_3(t)=\cos 2t$.

3) Уравнение $\dddot{r}(t)=0$ имеет решения $r_1(t)=1$, $r_2(t)=t$, $r_3(t)=t^2$, из которых только одно — периодическое. Такое уравнение *нам не подходит*.

Уравнение 1) соответствует кривой на рисунке 15, *а* (пересечение сферы и плоскости), т. е. кривой *а*) на рисунке 9. Точка на кривой движется равномерно с постоянной скоростью и пробегает всю окружность за время $T=2\pi$. Уравнение 2) относится к другому типу. На первый взгляд, оно соответствует той же кривой. Но за время $T=2\pi$ точка пробегает кривую два раза, т. е. совершает два оборота (см. рис. 15, *б*). При «малом шевелении» эта «два раза пройденная кривая» *переходит в кривую б)* на рисунке 5, *б*.

Будем считать уравнения одинаковыми, если их можно перевести друг в друга, изменяя их коэффициенты, но так, чтобы решения оставались *периодическими*.

*Сколько существует разных уравнений порядка 3 с периодическими решениями?*

Этот вопрос оказывается переформулировкой вопроса о выпуклых кривых на сфере, и ответ на него дается теоремой Литтла: *их три*. Первые два *уравнения уже* указаны в примерах 1) и 2).

Упражнение 4. Найдите третье.

Указание. Придумайте уравнение, соответствующее три раза пройденной окружности.

На примере связи кривых и уравнений мы проиллюстрировали лишь одно из применений теоремы Литтла. Следующее упражнение для тех, кому это применение показалось интересным.

Упражнение 5. Сколько существует различных уравнений порядка 2 с периодическими решениями.

Ответ. Бесконечное число.

Указание. Вспомните о кривых на плоскости.

Еще одно последнее замечание.

Мы видели, что кривая *а*) на рисунке 9 *явно отличается* от кривых *б*) и *в*). Как это отражается на свойствах соответствующего уравнения?

Пусть снова точка пробегает кривую. Любое решение уравнения — это *координата этой точки как функция от времени* (т. е. проекция точки на прямую, выходящую из центра). Рассмотрим экватор, перпендикулярный данной оси. Пересечения экватора с кривой — это точки, в которых координата обращается в нуль. Их не более двух. Поэтому решения нашего уравнения на периоде (т. е. когда $t$ меняется от 0 до $T$) не могут иметь более двух нулей. Мы получили очень важный класс уравнений, которые математики называют изящным словом *неосциллирующие* уравнения.

*Если бы мы начали эту статью* с вопросов об уравнениях порядка 3, то, вероятно, многие профессиональные математики затруднились бы дать на них ответ и даже указать способ решения. Как мы видим, игрушечный вопрос о кривых может привести к самым серьезным последствиям.

# Задачник „Кванта"

## Задачи

### М1261 — М1265, Ф1268 — Ф1272

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 марта 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1—91» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1261» или «Ф1268». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Наш журнал ежегодно проводит конкурс на лучшее решение задач из «Задачника «Кванта». Итоги конкурса подводятся в декабре. Победители получают право участвовать сразу в республиканских турах Всесоюзной олимпиады школьников по математике и физике.

**М1261.** На плоскости расположено 1991 красных, черных и желтых точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые пары точек соединены отрезками, причем из каждой точки выходит одинаковое число отрезков. Докажите, что найдется красная точка, которая соединена и с черной, и с желтой точками.

*С. Генкин*

**М1262.** Пусть $d_1$, $d_2$, $d_3$ — попарные разности длин сторон треугольника (по абсолютной величине), $P$ — его периметр. Докажите неравенство

$$d_1d_2+d_2d_3+d_3d_1\leqslant P^2/4.$$

*Л. Курляндчик*

**М1263.** Внутри окружности лежит еще две окружности, касающиеся внешней окружности в точках $A$ и $B$ соответственно и пересекающиеся между собой. Докажите, что если одна из точек пересечения лежит на отрезке $AB$, то сумма радиусов меньших окружностей равна радиусу большей. Верно ли обратное?

*А. Веселов*

**М1264*.** На бесконечном белом листе клетчатой бумаги квадрат $2\times 2$ клетки нужно закрасить в черный цвет. Можно ли это сделать несколькими операциями, каждая из которых — перекрашивание в противоположный цвет всех клеток в квадрате $3\times 3$ или $4\times 4$ клетки?

*И. Кан*

**М1265*.** а) Докажите, что среди 21 попарных расстояний между 7 различными точками плоскости одно и то же число встретится не более 12 раз.

б) Какое наибольшее количество раз может встретиться одно и то же число среди 15 попарных расстояний между 6 различными точками плоскости?

*Н. Седракян*

**Ф1268.** Сферический стеклянный аквариум заполнен водой и вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси. После того как оболочку мгновенно затормозили и отпустили, угловая скорость вращения установилась в 1,5 раз меньшей, чем была вначале. Какую часть массы аквариума составляет вода? Считать, что стекло имеет плотность в три раза бо́льшую, чем вода.

*О. Нидерландский*

**Ф1269.** Вагон массой $M$ и длиной $L$ может без трения двигаться по рельсам. Он заполнен газом и разделен посередине подвижной невесомой вертикальной перегородкой. Вначале температура газа равна $T$. В правой половине вагона включают нагреватель и доводят температуру газа до $2T$, в левой части температура остается прежней. Найти перемещение вагона, если масса всего газа $m$.

*А. Быцко*

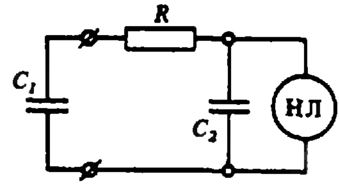


Рис. 1.

**Ф1270.** Неоновая лампа НЛ (рис. 1) «вспыхивает» при увеличении напряжения до $U_1=80$ В и гаснет при уменьшении напряжения до $U_2=25$ В. Конденсатор $C_1$ емкостью 10 мкФ заряжают до напряжения $U_0=300$ В и подключают к схеме (генератору пилообразного напряжения). Сколько раз вспыхнет неоновая лампа? Какое количество теплоты выделится в системе? $C_2=0{,}1$ мкФ, $R=1$ МОм.

*Н. Павлов*

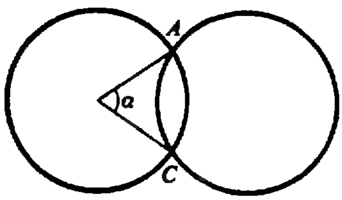


Рис. 2.

**Ф1271.** Два одинаковых проволочных кольца радиусом $R$ и массой $m$ каждое находятся в однородном магнитном поле, индукция которого равна $B_0$ и направлена перпендикулярно плоскости колец (рис. 2). В точках соприкосновения $A$ и $C$ кольца имеют хороший электрический контакт. Угол $\alpha=\pi/3$. Какую скорость приобретет каждое из колец, если выключить магнитное поле? Электрическое сопротивление куска проволоки, из которого сделано кольцо, равно $r$. Индуктивность колец не учитывать. Смещением колец за время выключения поля пренебречь. Трения нет.

*В. Можаев*

**Ф1272.** Электрическая лампочка включена в сеть 50 Гц последовательно с катушкой, индуктивность которой 1 Гн. Параллельно лампочке подключили конденсатор неизвестной емкости, и оказалось, что лампочка горит при этом с той же яркостью, что и без конденсатора. Определить его емкость.

*А. Зильберман*

# Решения задач

## М1236 — М1240, Ф1248 — Ф1252

**М1236.** *Найти множество точек $O$ внутри данного квадрата на плоскости, для которых существует окружность с центром $O$, пересекающая стороны квадрата в 8 точках.*

Условие, что окружность с центром $C$ и радиусом $r$ пересекает стороны квадрата в 8 точках, эквивалентно тому, что расстояние от $C$ до всех вершин больше $r$, а до всех сторон — меньше $r$.

Ясно, что искомое множество имеет те же 4 оси симметрии, что и квадрат. Поэтому достаточно найти все точки этого множества в одном из 8 углов, на которые эти оси делят плоскость. Проще всего сделать это с помощью метода координат.

Пусть наш квадрат задается условиями $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, а центр $C$ окружности радиуса $r$ имеет координаты $(x;\,y)$ и лежит в треугольнике $0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1/2$

# Задачник „Кванта"

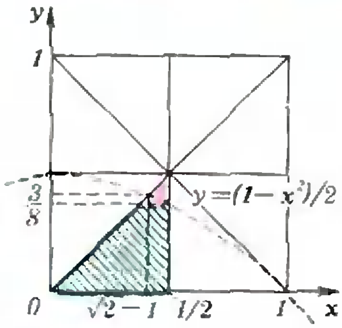



Рис. 1.

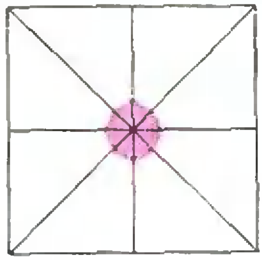


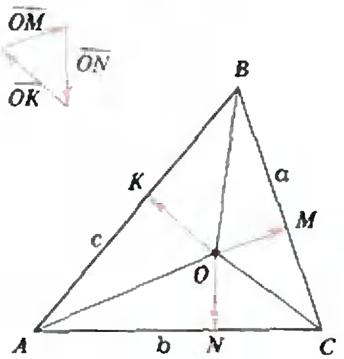
Рис. 2.

(рис. 1). Тогда самой близкой к $C$ вершиной квадрата будет точка (0; 0) и расстояние до нее равно $\sqrt{x^2+y^2}$, а самой далекой от $C$ стороной квадрата будет сторона, лежащая на прямой $y=1$, и расстояние до нее равно $1-y$. Точка $C$ принадлежит искомому множеству, если для некоторого $r$ выполнены неравенства $\sqrt{x^2+y^2}>r>1-y$, т. е. если $\sqrt{x^2+y^2}>1-y$. Это неравенство выделяет из треугольника $0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1/2$ кусочек, где $x^2+y^2>1-2y+y^2$, т. е. $2y>1-x^2$; он ограничен параболой $y=(1-x^2)/2$. Все множество — «снежинка» — изображено на рисунке 2.

*А. Толпыго*

**М1237.** *Пусть точка $O$ внутри треугольника $ABC$ такова, что $\overline{OK}+\overline{OM}+\overline{ON}=\overline{0}$, где $K$, $M$, $N$ — основания перпендикуляров, опущенных из $O$ на стороны $AB$, $BC$, $CA$ треугольника. Докажите неравенство*

$$\frac{OK+OM+ON}{AB+BC+CA}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$




В силу условия на точку $O$ отрезки $OK$, $OM$, $ON$ можно параллельно передвинуть так, чтобы составился треугольник (см. рисунок). После поворота на 90° стороны этого треугольника станут параллельны сторонам треугольника $ABC$, следовательно, эти треугольники подобны. Коэффициент подобия обозначим через $k$: $k=OK/AB=OM/BC=ON/CA$. Тогда левая часть доказываемого неравенства равна $k$. С другой стороны, представляя площадь $S$ треугольника $ABC$ как сумму площадей треугольников $AOB$, $BOC$ и $COA$, получим

$$2S=a\cdot OK+b\cdot OM+c\cdot ON=k(a^2+b^2+c^2),$$

где $a$, $b$, $c$ — длины сторон $\triangle ABC$. Таким образом, задача сводится к доказательству неравенства

$$S\leqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}.$$

Приведем одно из доказательств этого довольно известного неравенства, использующее формулу Герона и неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим трех чисел (буквой $p$, как обычно, обозначен полупериметр):

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{p((p-a+p-b+p-c)/3)^3}=p^2/3\sqrt{3}\leqslant$$
$$\leqslant(a^2+b^2+c^2)/4\sqrt{3}$$

(последнее неравенство следует из соотношений

$$4p^2=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

и $2xy\leqslant x^2+y^2$).

Отметим, что точка $O$ в этой задаче определена однозначно. Она называется точкой Лемуана треугольника $ABC$ и является точкой пересечения его *симедиан*, т. е. прямых, симметричных медианам относительно соответствующих биссектрис.

*А. Magadeev*

**М1238.** *Множество натуральных чисел разбито на две части. В одной из них нет трехчленных арифметических прогрессий. Обязательно ли в другой есть бесконечная арифметическая прогрессия?*

Ответ: не обязательно. Арифметическая прогрессия из натуральных чисел однозначно задается парой $(a, d)$, где $a$ — ее первый член, $d$ — разность. Поэтому все такие прогрессии можно занумеровать. (Пары $(a, d)$ разбиваются на группы с постоянной суммой $a+d$, а затем нумеруются внутри каждой группы, скажем, по возрастанию $a$. Этот метод нумерации даст такую последовательность пар: (1,1); (1,2); (2,1); (1,3); (2,2); (3,1); (1,4), ...) Пусть $A_i$, $i=1, 2, \ldots$ — $i$-я прогрессия по нашей нумерации. Начав с любого числа $p_1$ из $A_1$, будем последовательно выбирать числа $p_2$ из $A_2$, $p_3$ из $A_3$ и т. д. так, чтобы $p_{i+1}$ было больше чем $2p_i$. Тогда множество $P=\{p_1, p_2, \ldots\}$ не содержит трехчленных арифметических прогрессий, поскольку $p_k-p_j>p_j>p_j-p_i$ для любых $k>j>i$. В то же время множество натуральных чисел, не входящих в $P$, не содержит ни одной бесконечной прогрессии, так как хотя бы один элемент каждой такой прогрессии входит в $P$.

*А. Скопенков*

**М1239.** *Даны две пересекающиеся окружности и точка $P$ (рис. 1). Проведите через точку пересечения окружностей их общую секущую $AB$ так, чтобы угол $APB$ имел заданную величину.*

Построение основано на следующем полезном утверждении:

*в обозначениях рисунков 2 и 3 треугольник $CAB$ подобен треугольнику $CO_1O_2$, где $O_1$ и $O_2$ — центры окружностей, $AB$ — произвольная секущая, проходящая через их точку пересечения $D$, отличную от $C$.*

(Для доказательства достаточно заметить, что $\angle CAB=(1/2)\angle CO_1D=\angle CO_1O_2$, а $\angle CBA=(1/2)\angle CO_2D=\angle CO_2O_1$; обратите внимание на необходимость отдельного рассмотрения разных расположений точек $A$ и $B$: см., например, рис. 2.)

Обозначим через $\alpha$ заданную величину угла $APB$, через $\varphi$ — угол $O_1CO_2$ ($C$ — точка пересечения окружностей, не принадлежащая искомой секущей). Построим точку $Q$ так, чтобы треугольники $CPQ$ и $CO_1O_2$ были подобны и направления обхода вершин у них совпадали. В силу приведенного выше утверждения при преобразовании подобия, состоящем из поворота на угол $\varphi$ вокруг

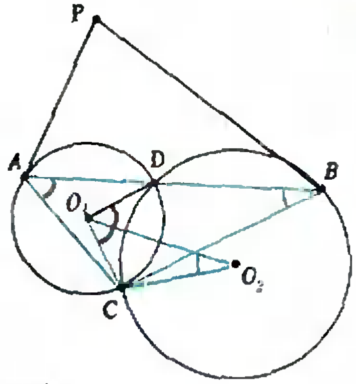



Рис. 1.

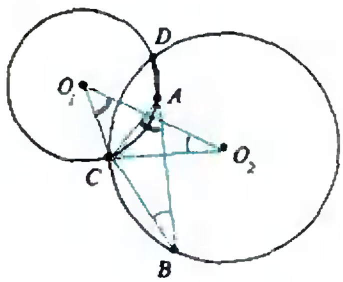



Рис. 2.

центра $C$ и последующей гомотетии с коэффициентом $CB/CA = CQ/CP = CO_2/CO_1$, точки $A$ и $P$ перейдут соответственно в $B$ и $Q$ (см. рис. 3). Следовательно, угол между лучами $AP$ и $BQ$ равен $\varphi$ (угол между любым

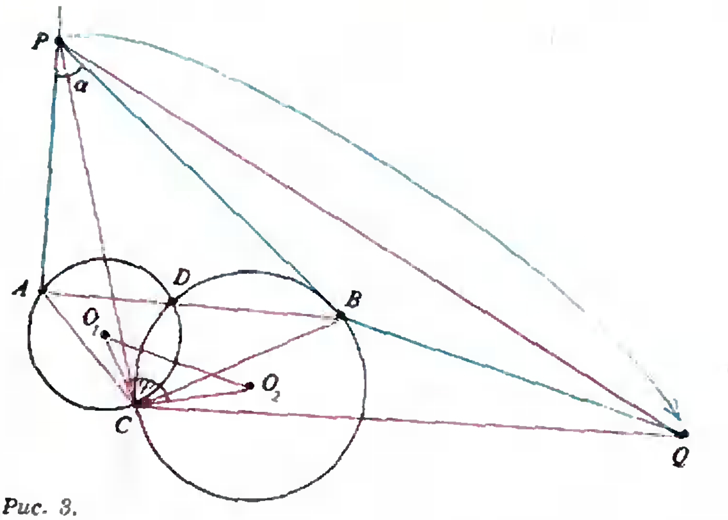



Рис. 3.

лучом и его образом при повороте равен углу поворота, гомотетия переводит любой луч в сонаправленный). В то же время угол между лучами $BP$ и $AP$ равен $\alpha = \angle APB$. Поэтому угол $PBQ$ между лучами $BP$ и $BQ$, в зависимости от конкретных данных задачи, может быть равен $\alpha + \varphi$, $2\pi - (\alpha + \varphi)$ или $|\alpha - \varphi|$ (рис. 4).

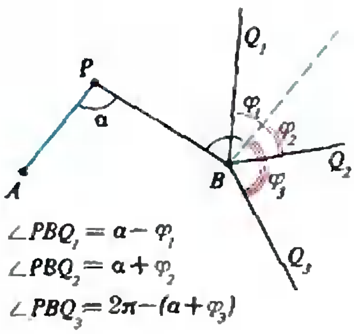



Рис. 4.

Итак, *для нахождения точки B достаточно построить на отрезке PQ дуги, из точек которых этот отрезок виден под указанными углами: все возможные положения точки B находятся среди точек пересечения этих дуг с окружностью $O_2$*. Конечно, при построении дуг из двух значений $\alpha + \varphi$ и $2\pi - (\alpha + \varphi)$ нужно выбрать то, которое меньше $\pi$; если $\alpha + \varphi = \pi$ или $\alpha - \varphi = 0$, то соответствующие дуги вырождаются в интервал $PQ$ или множество точек прямой $PQ$, не принадлежащих отрезку $PQ$.

Подчеркнем, что не все получившиеся точки пересечения обязаны давать решение задачи. Полное ее исследование мы оставляем заинтересованному читателю.

*В. Дубровский*

**М1240**. *На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 выделен квадрат ABCD $n \times n$ клеток. Из вершины A в C по линиям сетки проводится случайная ло-*

Ответ: вероятность того, что звездочки лежат по одну сторону от ломаной, равна $1/2^{n-1}$.

Мы докажем эквивалентное утверждение: вероятность того, что все $n$ звездочек лежат ниже ломаной, равна $1/2^n$. Приведем два доказательства.

Первое — по индукции — основано на прямом вычислении числа $L_n$ ломаных, числа $P_n$ всевозможных *маная длиной 2n. В n клетках квадрата, случайно расположенных в разных строках и разных столбцах, расставляются n звездочек. С какой вероятностью все звездочки окажутся по одну сторону от ломаной? (Другими словами, какую долю среди всевозможных расположений ломаных и звездочек составляют такие, что звездочки лежат по одну сторону от ломаной?)*

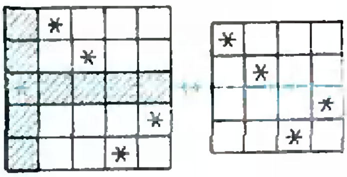


*Рис. 1.*

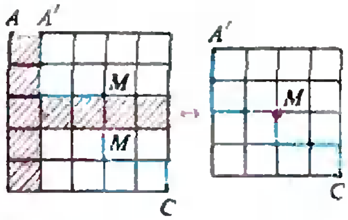



*Рис. 2.*

## Задачник „Кванта"

расстановок $n$ звездочек (в разных строках и столбцах) и числа $\Pi_n$ таких пар «ломаная, расстановка», в которых звездочки лежат ниже ломаной (при этом искомая вероятность равна $\Pi_n/P_nL_n$).

Для тех, кто знаком с началами комбинаторики, найти $L_n$ и $P_n$ не составляет труда: $L_n=C_{2n}^n=(2n)!/(n!)^2$ (каждая ломаная определяется последовательностью длиной $2n$ из стрелок двух направлений → и ↓, причем стрелок каждого типа ровно $n$), а $P_n=n!$ (каждая расстановка определяется перестановкой из $n$ номеров, указывающих, в каких строках стоят звездочки в 1-м, 2-м,..., $n$-м столбце). Но мы не будем опираться на эти формулы, а докажем рекуррентные соотношения

$$P_n=nP_{n-1}, \qquad (1)$$

$$L_n=\frac{2(2n-1)}{n}L_{n-1}, \qquad (2)$$

$$\Pi_n=(2n-1)\Pi_{n-1}. \qquad (3)$$

Из них по индукции сразу получается нужный результат. (Проверка для $n=1$ и $n=2$ не составляет труда.) Если доказано, что для таблицы $(n-1)\times(n-1)$ нужная вероятность равна

$$\frac{\Pi_{n-1}}{L_nP_{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}},$$

то для таблицы $n\times n$ она равна

$$\frac{\Pi_n}{L_nP_n}=\frac{(2n-1)\Pi_{n-1}\cdot n}{2(2n-1)L_{n-1}\cdot nP_{n-1}}=\frac{1}{2^n}.$$

Доказательства формул (1)—(3) *аналогичны*. Мы устанавливаем необходимое соответствие, отрезая от таблицы $n\times n$ первый столбец и одну из строк (мы считаем, что ломаная идет из левого верхнего в правый нижний угол). Соотношение (1) почти очевидно. Из каждой расстановки звездочек в таблице $n\times n$ удалением первого столбца и строки, содержащей звездочку из этого столбца, получается некоторая расстановка в таблице $(n-1)\times(n-1)$ (рис. 1). При этом к каждой из $P_{n-1}$ таких расстановок мы можем добавить первый столбец и любую (1-ю, 2-ю,..., $n$-ю) строку, поставив на их пересечении звездочку. Таким способом мы установили соответствие, при котором каждой из $P_{n-1}$ расстановок в таблице $(n-1)\times(n-1)$ отвечает $n$ расстановок в таблице $n\times n$, откуда следует (1).

Докажем формулу (2). Рассмотрим лишь половину из $L_n$ ломаных, а именно те, у которых первое (выходящее из вершины $A$) звено $AA'$ горизонтально (рис. 2). Пометим красным цветом любое вертикальное звено $MM'$ ломаной (его можно выбрать $n$ способами). Удалив звено $AA'$ вместе с первым столбцом и звено $MM'$ вместе с содержащей его строкой, мы получим ломаную $A'C$ в таблице $(n-1)\times(n-1)$, в которой оставим помеченную «красную» точку $M$ (на месте звена $MM'$). Обратно, по каждой из $L_{n-1}$ ломаных с любой помеченной вершиной (а вершин у нее $2n-1$, поскольку звеньев $2(n-1)=2n-2$) однозначно восстанавливается ломаная $A'C$. Отсюда $n\cdot L_n/2=(2n-1)L_{n-1}$ — это и есть (2).

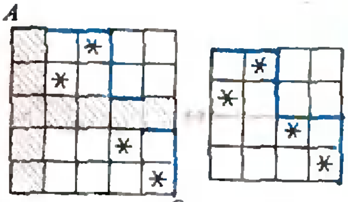



Рис. 3.

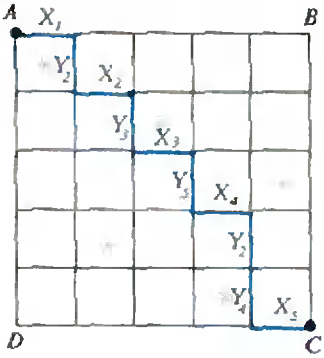



Рис. 4.

Наконец, докажем (3). Заметим, что среди $\Pi_n$ пар «ломаная, расстановка» первое звено ломаной обязательно горизонтально (иначе в первой строке не будет звездочек ниже ломаной). Удалив первый столбец, а также строку, в которой стоит содержащаяся в нем звездочка, мы получим одну из $\Pi_{n-1}$ пар «ломаная, расстановка» в таблице $(n-1)\times(n-1)$ (рис. 3). Обратно, пометив любую из $2n-1$ вершин такой ломаной и заменив ее вертикальным звеном и новой строкой, начинающейся со звездочки, мы однозначно восстановим пару «расстановка, ломаная» в таблице $n\times n$. Отсюда следует равенство (3).

Второе доказательство объясняет, почему в этой задаче получается столь простой ответ, но требует знакомства с некоторыми понятиями теории вероятностей, которые мы не будем здесь детально объяснять.

Сначала опишем правило, которое произвольному набору из $n$ точек в квадрате $K=\{(x;\ y):0\leqslant x,\ y\leqslant 1\}$, все $2n$ координат которых различны, сопоставляет пару «ломаная, расстановка».

Точки нумеруются слева направо. Затем все $2n$ координат точек располагаются в порядке возрастания, абсцисса $i$-й точки заменяется символом $X_i$, а ордината — $Y_i$. В итоге получится последовательность из символов $X_1, \ldots X_n$ и $Y_1, \ldots Y_n$, в которой символы идут в порядке возрастания индексов. Теперь двинемся по полученной последовательности слева направо и одновременно будем рисовать ломаную, начиная с точки $A$, и ставить звездочки: если очередная символ последовательности — $X_i$, то делаем шаг вправо (горизонтальное звено ломаной), если это символ $Y_j$, то делаем шаг вниз (вертикальное звено) и в строке, которую мы при этом пересекаем, ставим звездочку на $j$-м месте, т. е. на пересечении столбца $X_j$ и строки $Y_j$. (Вся эта процедура проиллюстрирована на рисунке 4.) Для того чтобы эта звездочка оказалась под ломаной, необходимо и достаточно, чтобы звено $Y_j$ было правее звездочки, т. е. чтобы к тому моменту, когда проводится это звено, ломаная успела сделать не менее $j$ шагов вправо ($X_1, X_2, \ldots, X_j$). Другими словами, в нашей последовательности буква $Y_j$ должна стоять правее $X_j$. А это значит, что *ордината $j$-й точки должна быть больше ее абсциссы*. Если мы хотим, чтобы все звездочки попали под ломаную, то последнее условие должно выполняться для всех точек: на рисунке 5, где ось ординат направлена вниз, *все точки должны попасть под диагональ $x=y$ квадрата $K$*.

Теперь допустим, что точки в квадрате $K$ выбираются наугад, т. е. по строгой терминологии, каждая из их $2n$ координат равномерно распределена на отрезке $[0;\ 1]$ и не зависит от остальных координат (вероятность совпадения координат при этом равна 0). Тогда все возможные порядки координат на $[0;\ 1]$ будут равновероятны. Следовательно, равновероятны все соответствующие им последовательности символов $X_i$ и $Y_j$, т. е. все пары «ломаная, расстановка». Остается найти вероятность того, что все точки окажутся под диагональю квадрата. Для одной точки эта вероятность равна $1/2$, для $n$ точек,

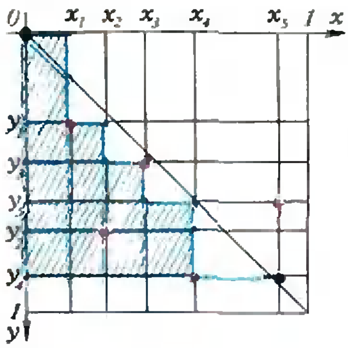


Рис. 5.

# Задачник „Кванта"

в силу независимости их выбора,— произведению вероятностей для каждой из них, т. е. $1/2^n$. (Последний результат можно получить и иначе, не прибегая к понятию независимости. Представим, что точки выбираются поочередно. Выбор каждой из них характеризуется для нас двумя возможными исходами — выше или ниже диагонали она попала. Для $n$ точек число исходов равно $2^n$, нас устраивает только один из них — все точки ниже диагонали. Все исходы равновероятны, поэтому искомая вероятность — $1/2^n$.

*Д. Фомин, С. Фомин*

**Ф1248.** *На горизонтальной доске лежит кусок мела. Доске мгновенно придают горизонтальную скорость $V_0$ и останавливают доску тоже мгновенно через время $\tau$ после первого толчка. Коэффициент трения между мелом и доской равен $\mu$. Найти длину следа мела на доске и полное смещение мела относительно доски.*

Если за время $\tau$ мел успевает остановиться, то длина его следа на доске равна

$$l_1=\frac{V_0^2}{2\mu g},$$

а полное смещение относительно доски —

$$s_1=0.$$

Если же время $\tau$ меньше времени $t=V_0/(\mu g)$ остановки мела относительно доски, то к моменту остановки доски скорость мела равна

$$v=\mu g\tau,$$

длина пути и смещение равны

$$l_2'=s_2'=V_0\tau-\frac{\mu g\tau^2}{2}.$$

После остановки доски мел поедет в обратном направлеиии и пройдет путь

$$l_2''=s_2''=\frac{v^2}{2\mu g}=\frac{\mu g\tau^2}{2}.$$

Следовательно, *полная длина следа мела в этом случае* равна

$$l_2=l_2'+l_2''=V_0\tau,$$

а полное смещение —

$$s_2=s_2'-s_2''=V_0\tau-\mu g\tau^2.$$

*А. Зильберман*

**Ф1249.** *Круглую пластинку диаметром $d=40$ мм и толщиной $a=0{,}5$ мм осторожно положили на поверхность воды. Благодаря*

Запишем условие равновесия пластинки в проекциях на вертикальное направление:

$$mg-\Delta p\,S-F=0,$$

где $mg$ — сила тяжести, $\Delta p$ — разность давлений на *поверхностному натяжению она осталась на плаву, причем в месте соприкосновения верхней плоскости пластинки с поверхностью воды угол между ними оказался равным 90° (рис. 1). Определить плотность материала пластинки. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma=0{,}073$ Н/м.*

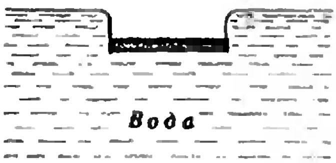



Рис. 1.



пластинку снизу и сверху, $F$ — сила поверхностного натяжения. Рассмотрим каждую силу в отдельности.

Сила тяжести связана с искомой плотностью $\rho$ материала пластинки соотношением

$$mg=\rho(\pi d^2/4)ag.$$

Сила поверхностного натяжения, действующая на пластинку со стороны воды, равна

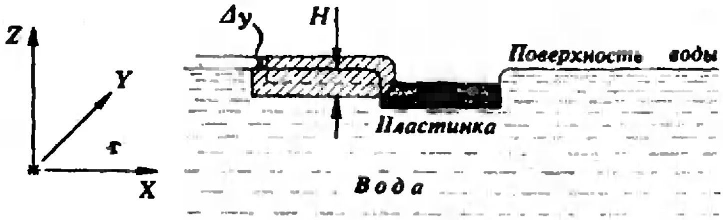



Рис. 2.

$$F=\sigma\pi d.$$

Разность сил давления на пластинку обусловлена «падением» уровня воды под пластинкой и равна

$$\Delta pS=\rho_в g(H+a)(\pi d^2/4),$$

где $\rho_в$ — плотность воды, $H$ — глубина погружения верхнего края пластинки. Эту величину определим из условия равновесия выделенного на рисунке 2 объема воды «шириной» $\Delta y$ ($\Delta y \ll d$), записав его в проекциях на горизонтальную ось $Y$:

$$\sigma\Delta y=p_{ср}\Delta S=\rho_в g(H/2)H\Delta y,$$

откуда

$$H=\sqrt{2\sigma/(\rho_в g)}.$$

Итак, перепишем условие равновесия пластинки в виде

$$\rho\frac{\pi d^2}{4}ag-\rho_в g\left(\sqrt{\frac{2\sigma}{\rho_в g}}+a\right)\frac{\pi d^2}{4}-\sigma\pi d=0$$

и найдем плотность $\rho$ пластинки:

$$\rho=\rho_в+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2\sigma\rho_в}{g}}+\frac{4\sigma}{adg}\approx 10^4\ \text{кг/м}^3.$$

*М. Гаврилов*

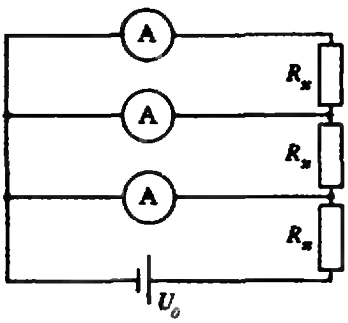
**Ф1250.** *В схеме на рисунке все амперметры одинаковые и все резисторы $R_x$ одинаковые. Верхний амперметр показывает ток $I_в=1$ мА, средний — ток $I_с=4$ мА. Напряжение ба-*

Верхние амперметр и резистор соединены последовательно, и параллельно им подключен средний амперметр. По условию ток, текущий через средний амперметр, в 4 раза больше тока, текущего через верхний амперметр. Это означает, что сопротивление амперметра $r$ в 3 раза меньше сопротивления резистора $R_x$:

$$r=R_x/3.$$

# Задачник „Кванта"

*тарейки $U_0 = 4{,}5$ В. Что показывает нижний амперметр? Чему равно $R_x$?*



Теперь легко найти ток, текущий через нижний амперметр:

$$I_н r = I_c r + (I_в + I_c) R_x,$$

откуда

$$I_н = 3I_в + 4I_c = 19 \text{ мА}.$$

Зная все токи и напряжение батарейки, можно определить величину сопротивления резистора, воспользовавшись законом Ома

$$I_н r + (I_н + I_c + I_в) R_x = U_0,$$

откуда

$$R_x = \frac{U_0}{{}^4/_3 I_н + I_c + I_в} = 148{,}3 \text{ Ом}.$$

*А. Зильберман*

**Ф1251.** *В схеме, приведенной на рисунке 1, после установки токов мгновенно перебрасывают ключ из положения 1 в положение 2. Считая катушки идеальными, определить количество теплоты, которое выделится на резисторе R после переключения. ЭДС источника $\mathscr{E}$, внутреннее сопротивление r.*

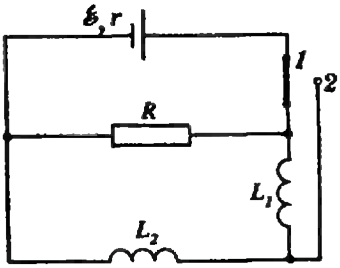


*Рис. 1.*

После установления токов перед перебрасыванием ключа через катушки $L_1$ и $L_2$ течет ток

$$I = \mathscr{E}/r.$$

Поскольку катушки идеальные (омическое сопротивление их обмоток равно нулю), падение напряжения на резисторе $R$ и, следовательно, величина тока через резистор равны нулю. Мгновенность переброски ключа из положения *1* в положение *2* означает, что за время переброски ток в катушках практически не успевает измениться.

После переброски ключа действующая электрическая схема имеет вид, изображенный на рисунке 2. Начальные значения токов равны:

$$I_1(0) = I_2(0) = I = \mathscr{E}/r,$$

$$I_3(0) = 0.$$

Из закона Ома для замкнутого контура *abcd* (для произвольного момента времени *t*) имеем

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} = 0 \Rightarrow I_1 = \text{const}.$$

Поскольку $I_1 = I_2 + I_3$, получаем

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{dI_2}{dt} + \frac{dI_3}{dt} = 0.$$

Из-за наличия резистора $R$ ток $I_2$ будет уменьшаться, т. е. затухать. При этом уменьшение тока $I_2$ будет численно равно приращению тока $I_3$ (поскольку $dI_2 = -dI_3$). Когда ток $I_2$ упадет до нуля, ток $I_3$ будет равен начальному значению тока $I_2$ ($I_2(0) = \mathscr{E}/r$).

В новом установившемся режиме в цепи текут токи

$$I_1(\infty) = I_3(\infty) = \mathscr{E}/r, \quad I_2(\infty) = 0.$$

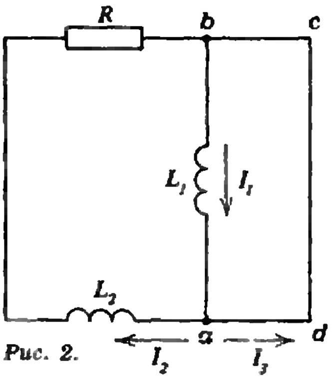



Рис. 2.

Следовательно, по закону сохранения энергии, энергия магнитного поля катушки $L_2$ выделится в виде тепла на резисторе $R$:

$$Q=\frac{L_2I_2^2(0)}{2}=\frac{L_2\mathscr{E}^2}{2r^2}.$$

*В. Можаев*

**Ф1252.** *Вертикальную спицу двигают перед дисплеем слева направо со скоростью $v_0=1$ м/с, при этом на светящемся экране отчетливо видна наклонная «тень» спицы. Почему это происходит? Чему равен угол наклона «тени» к вертикали? Электронный луч рисует полный кадр за время $t=0{,}02$ с, число строк в кадре примите равным $n=512$. Будет ли угол таким же, если двигать спицу перед телеэкраном?*

Под воздействием попадающих на экран электронов светится флюоресцент, покрывающий внутреннюю поверхность передней части кинескопа. Это свечение гаснет почти мгновенно, но глаз (точнее — мозг) сохраняет изображение в течение долей секунды. За это время пучок электронов успевает обежать весь экран, и «тень» на экране составляется из точек, которые спица заслоняла от глаза в разные моменты времени.

Пусть спица закрывает некоторую точку на данной строке. Тогда на следующей строке спица заслонит точку, смещенную на расстояние (по горизонтали) $l=v_0t$, где $t$ — время прохождения лучом одной строки (на самом деле это время немного больше — ведь с учетом смещения луч пройдет немного больше, чем строку). Примем размер кадра равным $20\times15$ см. Одну строку луч проходит за время 0,02 с/512=39 мкс. За это время спица сдвинется на 39 мкм. Расстояние между строками составляет 0,15 м/512=0,29 мм. Таким образом, угол «тени» с вертикалью приблизительно равен

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{0{,}039}{0{,}29}\approx7{,}7^\circ.$$

Видно, что смещение мало́ по сравнению с длиной строки, так что наше приближение оказалось вполне разумным.

Случай с телеэкраном немного отличается от рассмотренного. Дело в том, что в телевидении применяют так называемую чересстрочную развертку луча, при которой за 0,02 с луч рисует только нечетные строки кадра, а затем в следующие 0,02 с рисуются четные строки — между нечетными. Делается это для того, чтобы передавать 25 полных кадров в секуиду (как и в кино), но рисовать их вдвое чаще — при этом нет заметного на глаз «мигания». Значит, при расчете угла число строк за 0,02 с нужно взять равным 512/2.

*А. Кожевников*

## Список читателей, приславших правильные решения

**Большинство читателей, приславших решения задач М1216—М1230, Ф1223—Ф1237, справились с задачами М1216, М1217, М1221, М1226, Ф1226. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).**

**Математика**

*П. Андреева* (п. Черноголовка Московской обл.) 18, 24; *Д. Андриенко* (Киев) 18, 22—24, 29; *Б. Арясов* (Киев) 18; *А. Ахмедов* (Баку) 22—25, 28—30; *А. Ахунова* (Москва) 29; *Ю. Белоус* (Нижний Тагил) 22—25, 28—30; *В. Беляев* (Тихвин) 28, 29; *А. Бениаминов* (Москва) 24; *Л. Беркович* (Киев) 18; *А. Бобков* (Балаково) 22, 25; *А. Бородин* (Донецк) 22—25, 28—30; *В. Бринюк* (Донецк) 18, 19, 22—24, 29, 30; *А. Бурков* (Киров) 22, 23; *И. Буссукойа* (Москва) 24; *С. Василькевич* (Киев) 18, 28, 30; *М. Волошина* (Москва) 30; *К. Волченко* (Донецк) 18, 19, 22—25, 27—30; *О. Гайдай* (Львов) 24; *М. Гельбанд* (Одесса) 18, 19, 22—25, 28—30; *С. Гетун* (Киев) 18, 22—25, 28—30; *С. Гнедков* (п. Палатка Магаданской обл.) 23; *С. Голубчик* (Харьков) 30; *А. Гордиященко* (п. Рогань Харьковской обл.) 24, 28, 29; *С. Гудзенко* (Павлоград) 23, 24; *Э. Давиджан* (Белореченск) 23, 24; *А. Давыдов* (с. Елфимово Горьковской обл.) 29; *А. Днестранский* (Рязань) 27—30; *И. Егорова* (Ленинград) 20; *Ф. Еникеева* (Ташкент) 22; *А. Ермошко* (Орша) 24; *Д. Жалковский* (Донецк) 23, 24, 30; *А. Жеглов* (Москва) 18, 19; *Ю. Забелышинский* (Харьков) 23, 24; *К. Зарьков* (Минск) 22—24, 29, 30; *А. Зимин* (Иваново) 18, 23; *А. Зингер* (Москва) 22, 23, 30; *С. Злотников* (Гомель) 22; *М. Иванов* (Тула) 29, 30; *И. Изместьев* (п. Суна Кировской обл.) 18, 19, 22—25, 28—30; *А. Ионес* (Ленинград) 24; *Т. Калита* (Киев) 24, 28, 29; *Г. Каминский* (Киев) 18, 23, 24; *И. Кацман* (Киев) 18; *С. Ковaценко* (Винница) 18—20, 22—25, 28—30; *П. Кожевников* (Калуга) 22—24, 30; *А. Козачко* (Винница) 18—20, 22—25, 28—30; *М. Коников* (Москва) 24, 30; *А. Корниенко* (Днепропетровск) 22—25, 28—30; *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) 29; *С. Корсак* (п. Суворово, Молдова) 28, 30; *А. Котов* (Одесса) 29; *Ю. Кравич* (Киев) 24; *А. Криволуцкий* (Новосибирск) 28; *А. Кудрявцева* (Киев) 18, 20, 22, 24, 25, 29, 30; *И. Кузнецова* (Новороссийск) 24; *Е. Лазарева* (Запорожье) 24; *А. Лебедев* (Краснодар) 22—25, 27—29; *И. Левин* (Москва) 24, 30; *М. Лейчкис* (Киев) 22; *А. Львов* (Москва) 22, 27, 30; *А. Майлыбаев* (п. Черноголовка Московской обл.) 22, 23; *А. Малафеев* (Белорецк) 24; *В. Мергель* (Корюковка) 28—30; *К. Мильштейн* (Киев) 18, 19, 23—25, 28—30; *К. Мишачев* (Липецк) 18—20, 22—25, 27, 29, 30; *А. Мкртчан* (с. Вазмаберд АрмССР) 28, 30; *Р. Мучник* (Винница) 19, 20, 22—25; *А. Наврузов* (Ургенч) 24; *В. Наимов* (Ура-Тюбе) 28; *И. Найденов* (София, Болгария) 24; *А. Насыров* (Обнинск) 20, 22—24, 28—30; *А. Наумович* (Минск) 28—30; *Н. Немировская* (Киев) 18, 24; *А. Ноаров* (Москва) 18; *И. Новак* (Житомир) 18, 28, 29; *Д. Номировский* (Черкассы) 22—24, 28—30; *С. Павличков* (Евпатория) 22—24; *Т. Панов* (Киев) 18, 22—25, 28—30; *В. Пасхавер* (Киев) 18; *О. Пелязов* (Уфа) 28; *Е. Перельман* (Ленинград) 18, 23, 25, 27, 29, 30; *А. Петросян* (Ереван) 18, 23, 24, 28—30; *Л. Пиковская* (Киев) 28; *А. Погребняк* (Киев) 23; *Д. Поперечный* (Хабаровск) 18, 23, 24; *Н. Пошевнчук* (Пинск) 24; *М. Прибытько* (Чернигов) 28, 30; *И. Приешкина* (Антрацит) 24; *А. Разин* (Одесса) 18, 19, 22—25, 27—30; *Д. Рекалов* (Киев) 23, 24; *В. Рычков* (Куйбышев) 24, 27—30; *К. Саввиди* (Ереван) 18, 19, 22—24; *А. Сарсембаев* (Аркалык) 28, 29; *М. Сатимов* (Шават) 24; *А. Сафронов* (Томск) 22—24, 28—30; *С. Сафронов* (Псков) 23; *В. Севриновский* (Москва) 25, 28, 30; *Г. Сироткин* (Харьков) 18, 22—25, 28, 30; *М. Славкин* (Минск) 22—24, 28—30; *В. Сластинов* (Киев) 18, 24; *А. Солодов* (Воронеж) 18, 22, 23, 29, 30; *А. Солодушкин* (Томск) 18, 20, 22—24, 28—30; *И. Сперанский* (Донецк) 23, 24; *А. Таратин* (Северодвинск) 24; *М. Темкин* (Москва) 22—25, 27—30; *А. Титаренко* (Видное) 27—30; *С. Трегубенко* (Красногорск Московской обл.) 18, 24; *Б. Турешбаев* (Кзыл-Орда) 24; *П. Ушаков* (Москва) 24, 28; *К. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 20, 22—24, 27—30; *Р. Ханмагомедов* (Дербент) 24, 28; *М. Хасин* (Донецк) 18, 22—25, 30; *Г. Хачатрян* (с. Бердик АрмССР) 28, 30; *А. Шиндлер* (Феодосия) 18, 22—24, 29; *Д. Щукин* (Саратов) 18; *О. Яцун* (Киев) 19, 24.

**Физика**

*М. Абдуллаев* (Баку) 29; *Е. Агеева* (Донецк) 25, 27; *Е. Алабердин* (Ташкент) 32; *Г. Астахов* (Ленинград) 24, 27; *С. Атанасян* (Ленинград) 28; *Я. Бабкин* (Киев) 24, 27—33, 36; *С. Базылько* (Северодвинск) 25, 32; *Н. Балюнас* (Вильнюс) 28, 29, 32—34, 36; *М. Барашков* (д. Осиновка Могилевской обл.) 24, 25, 27—30, 32, 33, 36, 37; *Б. Барышников* (Новгород) 24, 29, 32; *Д. Баско* (Москва) 23, 24, 27; *С. Белов* (Старый Оскол) 28, 32, 33; *М. Беломытцев* (Москва) 28, 36; *В. Бондаренко* (Кузнецовск) 28, 32; *Л. Васильев* (Салават) 23, 27—30, 32; *Г. Вейтас* (Вильнюс) 28, 29, 32; *П. Волынец* (Брест) 25, 29; *А. Воронин* (Старый Оскол) 24, 27; *И. Воскобойник* (Киев) 24—28, 32, 36; *К. Галичский* (Северодвинск) 23—25, 27—32; *А. Гвозденко* (Нежин) 25; *К. Генинг* (Павлодар) 28; *В. Глазков* (Коломна) 25, 32; *А. Гледзер* (Одинцово) 24, 27—29, 34; *С. Головко* (Горловка) 28, 35; *П. Гребенев* (Кузнецовск) 24, 27—32, 34—37; *В. Грибок* (с. Долинское Одесской обл.) 24; *В. Гузовский* (Могилев) 24, 28; *Н. Гуляев* (Нижний Новгород) 24, 25, 27—33, 35—37; *О. Гусар* (Канев) 24, 27, 28, 30—32, 36, 37; *А. Давлетов* (Алма-Ата) 24, 25, 27—33, 36; *А. Дементьев* (Чебоксары) 24, 25, 27—33, 36, 37; *В. Демчик* (Ровно) 25; *И. Денисов* (д. Осиновка Могилевской обл.) 23—25, 27—30, 32, 33, 35—37; *С. Джосюк* (Винница) 23—25, 27—29, 31—33, 36; *С. Дибров* (Киев) 23—25, 27, 28,

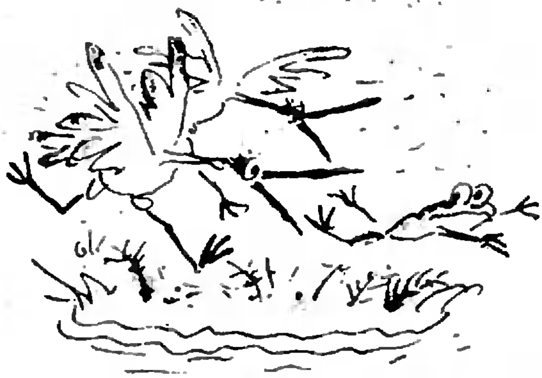
*(Окончание см. на с. 46)*

„Квант" для младших школьников

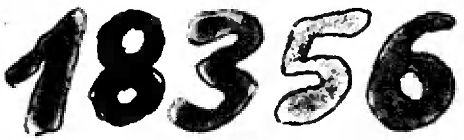
## Задачи


1. Решите арифметический ребус, который вы видите на рисунке. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным — разные; все гласные буквы соответствуют цифрам одной четности, а согласные — другой.

2. Покажите, что если длины сторон прямоугольного треугольника выражаются целыми числами, то хотя бы одна из них делится на 2 и хотя бы одна делится на 3.



3. На пяти островах завтракали 30 аистов. На каждом острове аисты поделили лягушек поровну, причем каждый аист с первого острова съел больше, чем каждый аист со второго, со второго — больше, чем с третьего, и т. д. Сколько лягушек было съедено на каждом из островов, если всего было съедено 40 лягушек и каждый аист съел хотя бы одну лягушку?




4. Расшифруйте слово, записанное разноцветными цифрами (см. рисунок).

5. На первом этаже большого дома у лифта встретились пятеро друзей. Женя сказал: «Если считать отсюда, то я живу выше, чем ты, Вова, в два раза, выше Пети в три раза, выше Андрея в четыре раза и выше Тани в шесть раз». «Ты это здорово подметил,— отозвался Андрей,— а ты, Петя, потише стучи своими гантелями у меня над головой». На каком этаже живет Андрей?

*Эти задачи нам предложили А. Домашенко, А. Савин, Г. Гальперин, А. Швецов, М. Роллова.*

# ЗАДАЧИ ПРО СВЕТ И ЦВЕТ

*Кандидат педагогических наук*
***С. ТИХОМИРОВА***

В ноябрьском номере журнала за прошлый год мы предложили нашим читателям несколько задач на тему «Световые явления», взятых из художественной литературы («Квант», 1990, № 11, с. 34). Сегодня, как и обещали, мы возвращаемся к этим задачам. Их обсуждение позволит более широко рассмотреть ряд физических явлений, знакомых вам по учебникам.

Начнем с прямолинейного распространения света и образования теней. Почему вечером тени удлиняются? Причина этого в том, что высота Солнца над горизонтом в течение суток изменяется — до полудня она растет, а к вечеру уменьшается. Из-за этого и длина тени меняется, но «в обратном порядке». Писатель И. Соколов-Микитов наблюдал восход солнца в тундре, когда при появлении солнечных лучей тени от ног «протянулись почти на километр». (Надеемся, что вы без труда смогли объяснить, почему в рассказе Ф. Искандера мальчик, который определял время по тени, опоздал.)

В эпизоде из повести Н. Гоголя вы, конечно, узнали явление прохождения света сквозь малые отверстия. При этом на стене (на экране) получилось перевернутое изображение расположенных перед отверстием предметов. На основе этого явления действует прибор под названием камера-обскура, или «дырочная» камера. Он был изобретен в середине XVI века и в свое время широко применялся для точных натуральных зарисовок.

Поэт А. Прасолов писал о видимой сходимости вдали рельсов железной дороги. Это явление кажущееся, иллюзия зрения. Как можно объяснить ее возникновение? Дело в том, что наше зрительное восприятие не всегда правильно отражает истинные размеры предметов и расстояния между ними. Например, чем дальше находится предмет от наблюдателя, тем меньшим он представляется. Это связано с тем, что кажущаяся величина предмета зависит от угла зрения, под которым он рассматривается. Наглядно это показывает рисунок 1. Наблюдатель, глаз которого изображен на рисунке, длину одной и той же вертикальной палочки оценит по-разному в зависимости от расстояния до нее, т. е. в зависимости от ее углового размера. В крайнем левом положении она ему представляется большей.

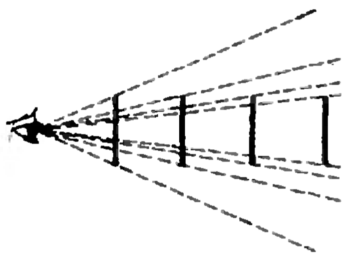


*Рис. 1.*

(Да и нам, читатель, эта палочка кажется больше остальных. В чем же дело? Дело в тонких линиях на рисунке, которые «задают» угловые размеры и для нас. Тут мы должны были бы говорить о той роли, которую играет наш *мозг в восприятии внешних образов*, в «переводе» этих образов в наши зрительные ощущения. Но это отдельная и довольно сложная тема, которой мы сегодня не будем касаться.)

Теперь нетрудно понять, почему кажется, что рельсы вдали сходятся: по мере удаления от наблюдателя уменьшается угловой размер расстояния между рельсами (угловой размер шпалы). Явление видимой сходимости параллельных линий вдали называется перспективой. Перспективное восприятие пространства было выработано в ходе длительной эволюции зрения у человека.

Писатель В. Короленко заметил, что во время солнечного затмения, когда от дневного светила остался лишь узкий светящийся серпик, тени на земле стали «бледные, неясные». Почему? Дело в том, что при слабом освещении ухудшается контрастная чувствительность глаза, т. е. глаз хуже различает границы между областями с различной освещенностью.

Обсудим еще, какие формы приобретают тени от разных предметов во время частного затмения Солнца. Вы, наверное, замечали, что в солнечный день тень от небольших предметов, независимо от их формы (бабочка, птица, шарик), имеет форму круга. Это — теневое изображение Солнца. (А солнечные лучи, проходящие сквозь листву дерева, образуют на земле множество круглых пятен, хотя лучи «пробивались» через самые разнообразные отверстия неправильной формы между листьями. Эти пятна — изображения Солнца.) Когда при затмении Солнце приобретает серповидную форму, все маленькие предметы дают серповидную тень. (И солнечные светлые пятна на тени деревьев получаются такой же формы — маленькие серпики, но повернутые в обратную сторону.)

Что можно сказать о тени тел, имеющих немаленькие размеры? Во время затмения они также будут изменяться. Всякий протяженный объект можно представить как сумму маленьких тел. Тень от каждого маленького тела серповидна, и тень большого тела будет состоять из множества серпов.

В отрывке из романа Г. Хаггарда «Копи царя Соломона» вы, конечно, узнали картину лунного затмения. Писатель заметил, что во время затмения Луна приобретает медно-красный оттенок. Это явление можно объяснить с точки зрения физики. Луна, как известно, сияет отраженным солнечным светом; затмение наступает тогда, когда Земля «загораживает» Луну от Солнца. Но, как показывают тщательные исследования, и при затмении Луна освещается Солнцем: из-за преломления в нижних слоях атмосферы Земли солнечные лучи искривляются, как бы «огибают» Землю и попадают на Луну, так что четкой геометрической тени Земли на Луне не получается. Однако в земном воздухе из белых солнечных лучей «теряются» синие цвета — как

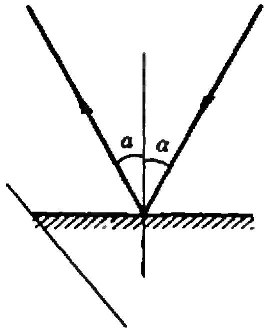



*Рис. 2.*

говорят физики, синие цвета в большей степени рассеиваются в атмосфере. (Этим явлением, кстати, объясняется голубой цвет неба.) В прошедшем же свете остаются желто-красные цвета. Чем толще воздушный слой, который проходят лучи света, тем больше они теряют сине-голубые цвета и тем интенсивнее краснеют. (Вспомните, какими красными бывают Солнце и Луна у горизонта.) А во время затмения Луны световые лучи проходят земную атмосферу дважды: до Луны и обратно к нам на Землю.

Теперь поговорим об отражении света. В рассказе М. Пришвина собака Лада перепутала живого кулика с его изображением в воде, так они были похожи. Однако, несмотря на большое сходство, различие между предметом и его изображением имеется. В зеркальном отражении, как вы знаете, правое и левое меняются местами. Кроме того, пейзаж и его изображение в воде также различаются. Отраженный пейзаж виден так, как если бы мы смотрели на него из точки, расположенной под поверхностью воды.

В фантастическом произведении А. Беляева «Последний человек из Атлантиды» жрецы использовали плоские зеркала для освещения подземных помещений солнечным светом. Как расположить три зеркала, чтобы повернуть луч на 90°? Из рисунка 2 видно, что при отражении от зеркала угол поворота луча будет равен двум углам падения. Исходя из этого, можно предположить различные комбинации зеркал, позволяющие повернуть луч на 90°. Два возможных варианта — на рисунке 3. Таким образом с помощью нескольких зеркал можно «провести» луч по подземным переходам различной формы. Правда, чем больше зеркал, тем бо́льшая доля света будет теряться при отражении от них.

Вы, наверное, наблюдали, как искрится поверхность реки в солнечный

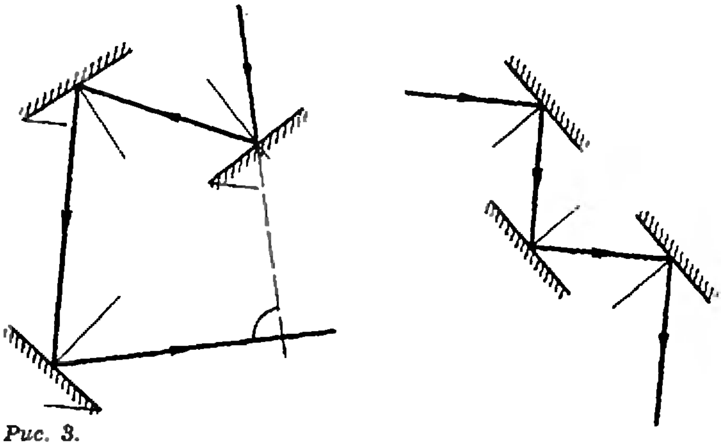


*Рис. 3.*

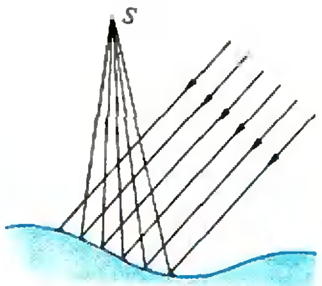



*Рис. 4.*

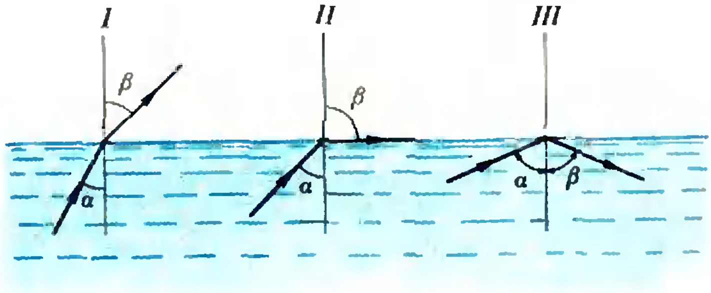



*Рис. 5.*

день. Множество мелких искр вспыхивает, гаснет и опять загорается. Как объяснить это воспетое Ф. Тютчевым явление? На поверхности воды всегда есть волнение, рябь, маленькие водовороты. Водную поверхность можно представить как совокупность вогнутых и выпуклых зеркал. Вогнутые поверхности фокусируют солнечные лучи, поэтому на воде появляется множество ярких искорок (рис. 4). Волны на поверхности все время перемещаются, поэтому искорки вспыхивают и гаснут.

Мир, который увидел *из-под воды* Ихтиандр, «Человек-амфибия», трудно себе представить. Физика объясняет подобные видения явлением полного внутреннего отражения.

Вспомните: когда луч света переходит из оптически более плотной среды в менее плотную, он преломляется и в большей степени отклоняется от вертикали. На рисунке 5 можно проследить за ходом лучей, переходящих из воды в воздух. Когда угол падения составит примерно 48,5°, луч не выйдет из воды совсем. Это для воды предельный угол. Для всех углов падения, бо́льших предельного, лучи не выйдут из-под воды, а отразятся от ее поверхности, как от *зеркала. Говорят, что луч* претерпевает полное внутреннее отражение. Соответственно и предельный угол называют углом полного внутреннего отражения.

Как видится водная поверхность из глубины? Она представляется в форме конуса или воронки, в вершине которой вы находитесь. Бока конуса наклонены друг к другу под углом, равным двум предельным углам (97°). *Весь надводный мир* заключается внутри этого конуса, правда, в искаженном виде. За краями конуса расстилается блестящая поверхность воды, *в которой, как в зеркале,* отражается подводный мир.

А теперь разберемся, каким видится из воды рыбак, зашедший в воду. Ноги рыбака видны непосредственно в воде. Но кроме этого наблюдается еще и отражение ног от зеркальной поверхности воды (рис. 6). Верхняя часть тела рыбака видна через границу вода — воздух. Здесь луч зрения подводного *наблюдателя* преломляется. И что же он видит? Верхняя часть тела рыбака висит в воздухе без ног! Именно такое изображение возникает на *сетчатке глаза.*

Теперь поясним, почему края конуса окружены разноцветными каемками. Белый солнечный свет — это «смесь» лучей разных цветов. Каждый род лучей имеет свой показатель преломления, а потому и свой предельный угол. Поэтому края конуса и имеют радужную окраску.

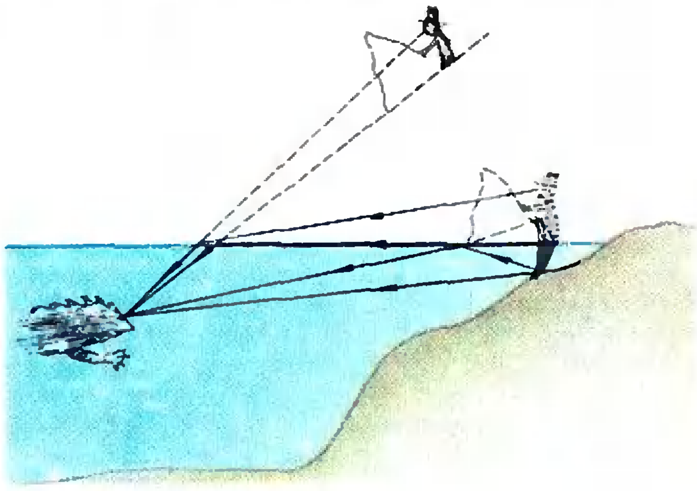


*Рис. 6.*

В одном из отрывков из «Фауста» также описана картина «подводного зрения».

Серебряный свет в аквамарине, о котором идет речь в повести К. Паустовского «Золотая роза», объясняется тем же явлением полного внутреннего отражения...

На этом мы остановимся. Читателю, которого заинтересовала тема «Световые явления», рекомендуем посмотреть следующие книги и статьи из «Кванта»:


Артамонов И. Д. *Иллюзии зрения.* М.: Наука, 1969;

Миннарт М. *Свет и цвет в природе.* М.: Наука, 1969;

Перельман Я. И. *Занимательная физика.* Книга 2, 22-е изд., перераб. и доп.— М.: Наука, 1986;

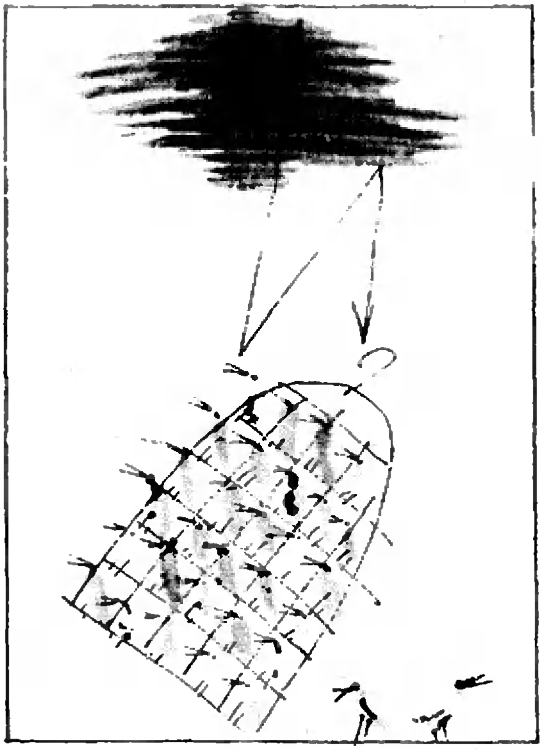
Асламазов Л. Г. *Лунные дорожки.* Квант, 1971, № 9, с. 18;

Гринева Г. И., Розенберг Г. В. *Дела и проделки феи Морганы.* Квант, 1984, № 8, с. 20;

Буздин А. И., Кротов С. С. *Как однажды Жак-звонарь головой сломал фонарь...* Квант, 1987, № 12, с. 32;

Буздин А. И., Кротов С. С. *Что и как мы видим.* Квант, 1988, № 3, с. 34.


В них вы найдете решения многих задач из статьи «Световые явления» и узнаете много нового для вас и интересного из этой области физики.



Школа в „Кванте"

# Физика 9, 10, 11

*Публикуемая ниже заметка «Гроза и грозоотвод» предназначена десятиклассникам (впрочем, она будет интересной и девятиклассникам тоже), заметка «За пределы таблицы» предназначена одиннадцатиклассникам.*
*Публикуем также подборку «Избранных школьных задач по физике».*

## Гроза и грозоотвод

Гроза — очень часто наблюдаемое атмосферное явление. Каждую секунду на земном шаре происходят около сотни гроз. Есть даже такие места (центральная Америка, Индонезия), где грозы происходят так регулярно, что люди договариваются о свидании примерно такими словами: «встретимся в среду после грозы».

Гроза и неразлучные с ней молния и громовые раскаты — не только эффектное, но и устрашающее явление. И небезопасное. Недаром одного корня с этим словом слова «грозить», «угроза», «грозный» и т. п. С грозой и в самом деле связаны немалые опасности — для людей и для лесов, для электрических устройств и средств связи. Отсюда — необходимость в средствах защиты от грозы.

Но что же такое гроза?

Гроза — это грандиозный искровой разряд в атмосферном воздухе, который возникает между электрически заряженными облаками или между заряженным облаком и землей. Длина канала, по которому прокладывает себе путь разряд, может достигать многих километров. Сила тока в нем — сотни тысяч ампер. Температура газа в грозовом канале — многие тысячи градусов. Соответственно очень высоко и давление газа в нем. Чтобы такой разряд мог произойти, необходимо электрическое напряжение (например, между облаком и землей) — до миллиарда вольт, а напряженность электрического поля — до миллиона вольт на метр.

Если на пути грозового разряда встречается препятствие — дерево, здание и т. п., то высокое давление может привести к механическому разрушению, а высокая температура — к пожару. Возможно, что первый огонь, с которым познакомился человек, и был огонь, вызванный грозой, зажегшей дерево. Не случайно ведь в мифе о Прометее говорится о похищении огня с неба.

Как же бороться с этой опасностью? Как ее устранить?

Впервые идею защиты от грозы предложил американский физик Бенджамин Франклин еще в середине XVIII века. Им же была установлена и электрическая природа молнии. Идея защиты, используемая и в наше время, основана на свойствах проводящего острия.

**Проводник с острием.** Известно, что электрические заряды на проводнике располагаются на его поверхности. Если проводник имеет форму сферы или шара, заряд распределяется по его поверхности равномерно — на каждую единицу площади поверхности приходится одинаковый заряд.

Как говорят, поверхностная плотность заряда всюду одинакова. Это связано с тем, что у сферы одинакова кривизна во всех точках поверхности, т. е. одинакова величина, характеризующая отклонение кривой поверхности от плоской.

На поверхности произвольной формы кривизна в разных местах может быть различной. Ясно, что в этом случае электрический заряд распределяется по поверхности неравномерно — ведь заряды всегда располагаются так, чтобы внутри проводника напряженность электрического поля равнялась нулю. Для этого в тех местах, где «меньше места», заряды должны располагаться с большей поверхностной плотностью. Вот почему напряженность поля вокруг проводника особенно велика около тех участков его поверхности, где большая кривизна поверхности.

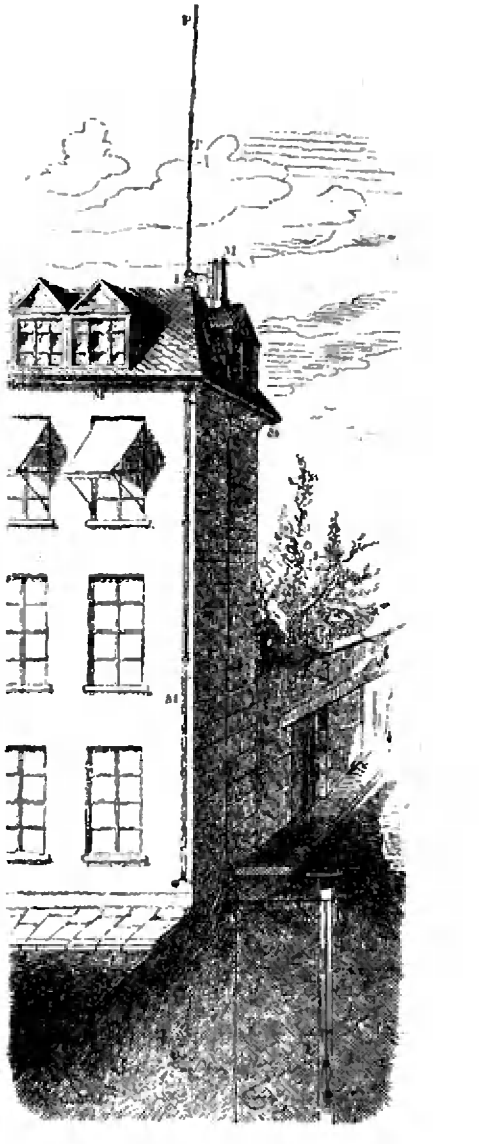
Острие на поверхности — это место наибольшей кривизны. Соответственно здесь наибольшая поверхностная плотность зарядов, а около острия — особенно сильное электростатическое поле. Это и используется в грозозащитном устройстве — грозоотводе.

**Грозоотвод.** Он представляет собой металлический стержень, один конец которого приведен в хороший контакт с землей (надежно заземлен), а другой, снабженный заостренным штырем, возвышается над защищаемым сооружением. Стержень вместе с землей — это гигантский проводник, а штырь грозоотвода — острие на нем.

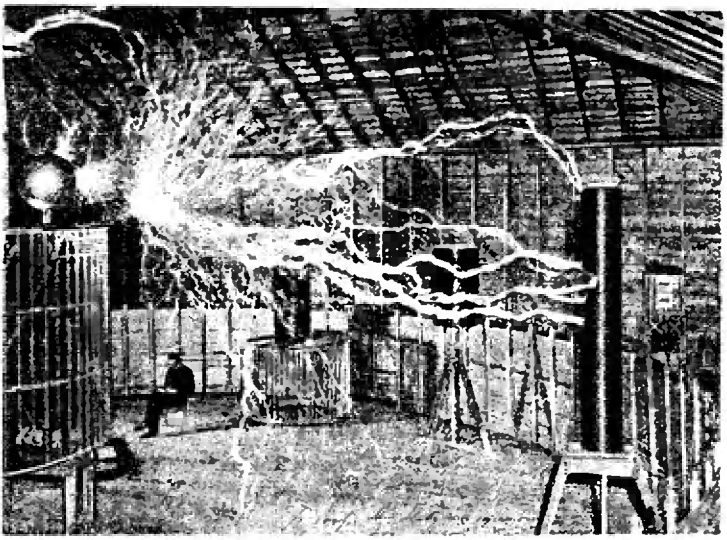
Как же действует это простое устройство?

Предположим, что вблизи грозоотвода оказалось грозовое облако. Пусть, например, заряд на нем положительный. Тогда электростатическое поле облака вызовет разделение зарядов на проводнике, состоящем из земли и грозоотвода, так, что на грозоотводе появится отрицательный заряд. Причем, поскольку на штыре будет очень большая поверхностная плотность заряда, вокруг него возникает очень сильное электростатическое поле.

В атмосферном воздухе всегда есть небольшое число (порядка нескольких сотен в одном кубическом сантиметре) положительно и отрицательно заряженных частиц — ионов и свободных электронов. Обычно они не мешают воздуху быть отличным изолятором. Но в сильном поле — около штыря грозоотвода — ионы и электроны приобретают такие большие скорости, что, сталкиваясь с нейтральными молекулами воздуха, они ионизируют их. Получившиеся новые электроны и



*Американское правительство самым энергичным образом поддерживало идею Франклина о громоотводе. Так, в 1782 году Филадельфия на своих 1300 домах имела уже свыше 400 громоотводов.*



*Искусственная молния длиной около 4 метров, полученная Н. Тесла в своей лаборатории в горах Колорадо.*

ионы тоже ускоряются и в свою очередь создают все больше и больше пар заряженных частиц, число их растет, как снежный ком. Воздух становится в какой-то мере проводящим.

В настоящем проводнике электростатическое поле, как известно, отсутствует. В воздухе же вокруг грозоотвода оно, во всяком случае, ослабляется, и искровой разряд становится менее вероятным. Можно сказать и так, что отрицательные частицы движутся к положительно заряженному облаку и, по крайней мере частично, нейтрализуют его. Если же разряд все-таки происходит, то стержень грозоотвода будет служить безопасной для окружающих объектов «дорожкой» для разряда.

**Молния и гром.** Итак, грозовой разряд представляет собой гигантский электрический разряд в газе. Но электрический ток, как известно, не виден и не слышен. Как же объяснить такие впечатляющие грозовые явления, как вспышки молнии и раскаты грома?

Начнем по порядку. Оказывается, образующиеся в канале разряда (его ширина достигает нескольких сантиметров) ионы и электроны, притягиваясь друг к другу, воссоединяются и образуют нейтральные молекулы воздуха. Такой процесс называется рекомбинацией. При этой-то рекомбинации и выделяется свет (происходит вспышка молнии).

Гром же возникает вот почему. При разряде давление газа в грозовом канале становится очень высоким. Быстрое понижение его сопровождается образованием мощной ударной звуковой волны, которую мы и называем громом. Раскаты грома объясняются многократными отражениями звука от облаков и других объектов.

Таким образом, молния и гром — это как бы последствия грозового разряда. Опасности же, о которых мы говорили, связаны с самим разрядом, который не виден и не слышен. Заметим, кстати, что весь процесс разряда, на описание которого мы потратили так много слов и времени, происходит практически мгновенно — в тысячные доли секунды.

**Громоотвод? Молниеотвод? Грозоотвод?** Мы назвали грозозащитное устройство грозоотводом. Но очень долго его называли громоотводом. Затем его стали называть молниеотводом, часто так его называют и теперь. Однако из того, что мы рассказали, следует, что ни грома, ни молнии «отвести» нельзя — они лишь неизбежные следствия грозового разряда. Задача же грозозащиты — отвести грозу, вот почему слово «грозоотвод», с нашей точки зрения, точнее всего отражает свое назначение.

*А. Кикоин*

# За пределы таблицы

В 1871 году Д. И. Менделеев предложил периодическую систему химических элементов в виде таблицы, выражающей открытый им же за два года до того периодический закон. В первой таблице не было привычных теперь клеток, а около каждого элемента стояло одно число — относительная атомная масса (тогда она называлась атомным весом). Не было также номера элемента в таблице, а число элементов было немногим — чуть более 60, хотя для некоторых еще не открытых элементов с самого начала были оставлены места.

Проходили годы, таблица изменялась. Появились клетки-«убежища» для каждого элемента, а в них — порядковый номер, который так и понимался как порядковый, вроде номера дома на улице или номера документа в канцелярии.

Периодическим законом и таблицей широко пользовались и химики, и физики, но ни тем, ни другим не была известна причина периодичности свойств элементов, а значит, не был известен и смысл таблицы. Положение изменилось только через сорок с лишним лет.

В 1911 году опыты Э. Резерфорда показали, что атом состоит из положительно заряженного ядра и электронной оболочки вокруг него. А голландский юрист (?!) Ван дер Брук выяснил, что заряд ядра атома (если принять за единицу электрического заряда заряд электрона) как раз равен порядковому номеру элемента.

В 1913 году Н. Бор предложил новую, квантовую в своей основе, теорию строения атома, которая дала возможность, наконец, понять причину перио-

*Д. И. Менделеев — известный во всем мире за исключением России — во время одного из визитов в Манчестер.*

личности свойств элементов в периодической таблице. Связанный с этой теорией закон — закон Мозли — позволял прямо из опыта определять значение порядкового номера элемента. Теперь он перестал быть «порядковым» и стал атомным номером.

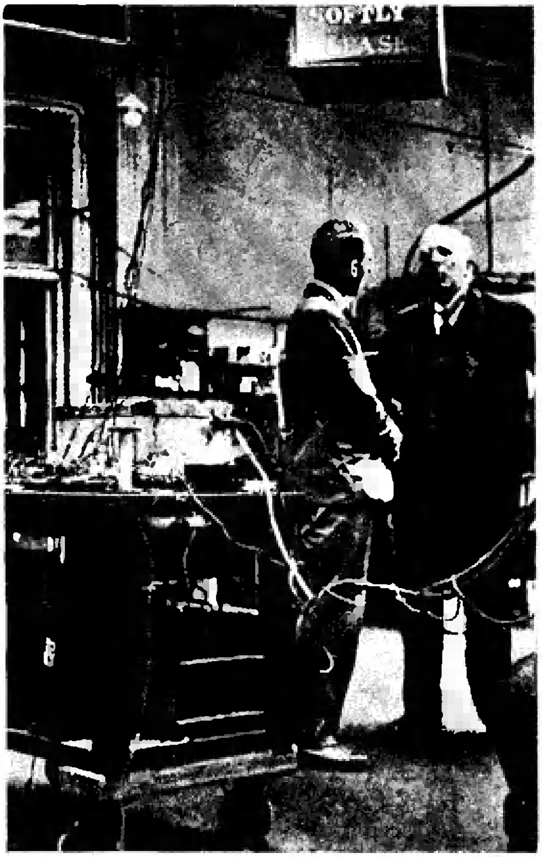
В 1932 году был установлен состав атомных ядер: ядро атома состоит из положительно заряженных частиц — протонов и электрически нейтральных частиц — нейтронов, масса которых почти равна массе протонов. Следовательно, атомный номер элемента (бывший порядковый) — это число протонов в его ядре и, соответственно, число электронов в электронной оболочке его атома.

К этому времени в таблице Менделеева было заполнено уже 92 клетки — от водорода до урана, правда 4 клетки еще пустовали. Четыре элемента никак не удавалось обнаружить ни в земной коре, ни в воде, ни в атмосфере. Правда, щедрость природы сказалась в том, что многие клетки таблицы оказались «убежищем» не для одного атома, а для многих — для изотопов одного и того же химического элемента, так что различных атомов оказалось много больше, чем 88 и даже 92. А не могут ли существовать химические элементы и за пределами таблицы Менделеева — влево от начала или вправо от ее конца?

**Слева от начала таблицы.** Еще в 1920 году Э. Резерфорд высказал предположение, что может существовать элемент с нулевым номером. И когда в 1932 году был открыт нейтрон, стало ясно, что на роль «обитателя» нулевой клетки таблицы подходит именно он. Это и в самом деле химический элемент с нулевым атомным номером, хотя даже в самых современных таблицах рисовать нулевую клетку с нейтроном в ней не принято.

С расширением таблицы «влево» было, казалось, покончено — влево от нуля вроде бы идти некуда.

**Вправо от конца таблицы.** После открытия нейтрона и создания первых источников нейтронов они стали применяться для облучения различных



*Эрнест Реферфорд — директор Кавендишской лаборатории в Кембридже.*

веществ и изучения происходящих при этом ядерных реакций.

Оказалось, например, что очень часто происходят реакции типа такой:

$$^{23}_{11}\mathrm{Na} + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{24}_{11}\mathrm{Na} + \gamma.$$

Это так называемый радиационный захват нейтрона — нейтрон «захватывается» ядром натрия с испусканием (радиацией) гамма-кванта. Но изотоп $^{24}_{11}\mathrm{Na}$ радиоактивен и с периодом $T \approx 14$ часов распадается с испусканием β-частицы (электрона $_{-1}^{0}e$):

$$^{24}_{11}\mathrm{Na} \rightarrow ^{24}_{12}\mathrm{Mg} + \beta. \qquad (*)$$

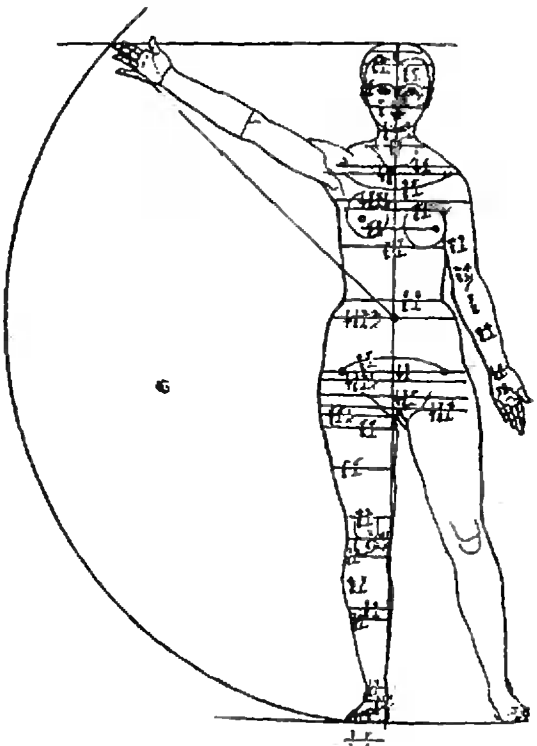
Таким образом, конечный результат облучения нейтронами состоит в том, что натрий превращается в своего соседа справа — в магний.

Аналогичные реакции наблюдались на очень многих элементах. Это навело Э. Ферми на счастливую мысль — поставить опыт с облучением нейтро-

*(Окончание см. на с. 42)*

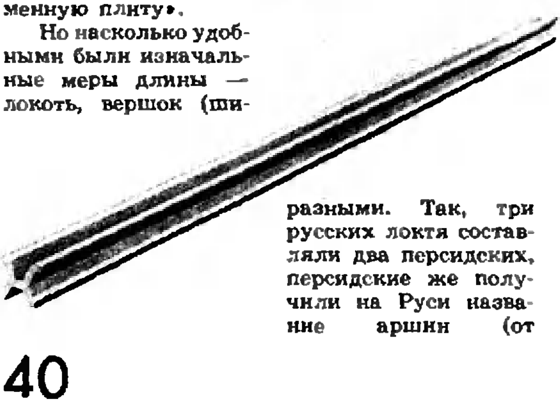
## Калейдоскоп „Кванта"

# Длина



Длина — одно из первых геометрических понятий, с которым столкнулось человечество. Первые меры длины были самыми естественными и поэтому сохранились до нашего времени. Действительно, в газетах можно прочесть такие фразы: «Избушка находилась от поселка на расстоянии двух дневных переходов», «Трещина шириной в ладонь пересекала каменную плиту».

Но насколько удобными были изначальные меры длины — локоть, вершок (ширина ладони на уровне пальцев), сажень (расстояние между концами пальцев разведенных в стороны рук) — ведь они всегда при себе,— настолько они были неточными; у разных людей, эти единицы различны. Государствам приходилось вводить эталоны длины — образцовые единицы измерения. Но в разных странах эти единицы оказывались



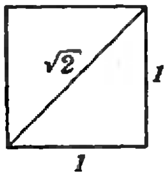
разными. Так, три русских локтя составляли два персидских, персидские же получили на Руси название аршин (от «арш» — «локоть» в группе тюркских языков).

Естественно, что соотношения между различными единицами длины даже в одной стране были довольно причудливы. Указ Петра I, призванный упорядочить систему мер в России, вводил довольно сложные соотношения между бытовавшими в то время единицами: 1 миля = =7 верст = 3500 саженей = 10500 аршин = 168 000 вершков = 294 000 дюймов = 2 940 000 линий = 29 400 000 точек.

Заметны, что в последних соотношениях прослеживается идея десятичной системы мер, но привычные меры настолько трудно искоренимы, что для введения новых требуется революция, притом Великая, как Великая французская революция, в результате которой во Франции появились метр, километр, сантиметр, дециметр, миллиметр... и Великая Октябрьская социалистическая революция, после которой эти единицы были введены у нас. А США, Англия и многие другие страны обходятся еще средневековыми мерами.

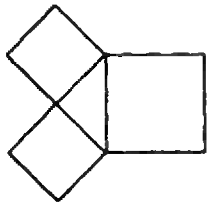
Понятие длины отрезка сыграло огромную роль в становлении математики. Ведь, собственно, что такое длина отрезка? Это — число, которое указывает, сколько раз укладывается на этом отрезке выбранная единица длины. Если этот эталон не помещается целое число раз, то приходится вводить дробную длину в точном соответствии с алгоритмом Евклида.

Еще древние греки знали, что диагональ



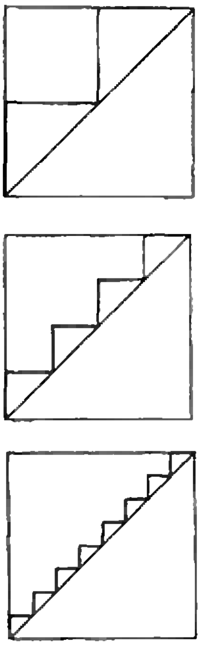

квадрата несоизмерима с его стороной, т. е. не может быть выражена через его сторону в виде обыкновенной дроби. В результате появились иррациональные числа, так, через понятие длины оказались связанными алгебра и геометрия.

Еще сильнее «связал» их французский математик Рене Декарт, создавший аналитическую геометрию на основе прямоугольной системы координат. В результате любую геометрическую задачу можно сформулировать как алгебраическую. Вспомним знаменитую теорему Пифагора — квадрат длины гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов. Этот за-



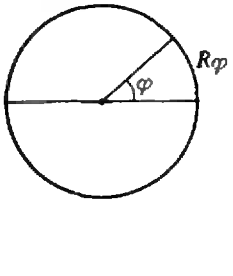
мечательный факт имеет массу обобщений и в геометрии, и в алгебре, и в теории чисел (пифагоровы тройки, Великая теорема Ферма).

Стремление измерять длины дуг кривых привело к целому ряду открытий. Длину окружности научились измерять еще в древности (приближая ее ломаными), хотя вопрос о природе числа «пи» мучил математиков сотни лет и был решен лишь в прошлом веке. Подход к определению длины дуги кривой был тот же, что и в случае окружности. Правда, здесь нужна осторожность, так как при неаккуратном обращении с предельным переходом можно столкнуться с парадоксом. Рассмотрим диагональ квадрата и

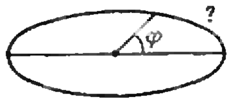


начнем приближать ее ступенчатыми ломаными. Все эти ломаные имеют длину, равную удвоенной длине стороны квадрата. В пределе такая ломаная стремится к диагонали, а длина диагонали равна $\sqrt{2}$, умноженному на длину стороны квадрата. Отсюда $2=\sqrt{2}$ — противоречие. Проблемы измерения длин стимулировали развитие теории пределов дифференциального и интегрального исчислений.

Любопытно, что длина дуги окруж-

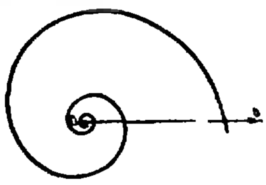



ности прямо пропорциональна углу $\varphi$, определяющему эту дугу, а вот выразить



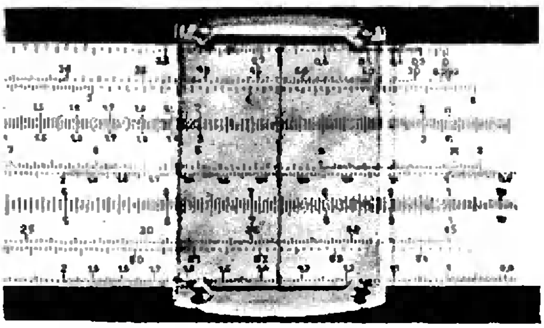

длину дуги эллипса — «сплюснутой окружности» — через такой угол $\varphi$ уже невозможно даже с помощью всех известных вам функций (они называются элементарными функциями). Пришлось вводить новые функции — «эллиптические», которые оказались полезными во многих других задачах математики.

Интересно рассмотреть длины дуг спиралей, делающих бесконечное число витков вокруг своего центра. Так называемая «гиперболическая спираль», которая задается уравнением $\rho=\dfrac{a}{\varphi}$, где $\rho$ — расстояние точки на спирали от центра, при изменении угла $\varphi$ на отрезке $[0;\ 1]$ совершает бесконечное число витков и длина полученной дуги оказывается бесконечно большой.



«Логарифмическая спираль», задаваемая уравнением $\rho=e^{\varphi}$, при изменении угла $\varphi$ на интервале $(-\infty;\ 0)$ тоже совершает бесконечное число витков, а их общая длина оказывается равной 3.

Говоря о длине, нельзя не сказать об инструментах с помощью которых длина измеряется. В первую очередь — это линейка с делениями, которая, как правило, лежит у каждого из вас в портфеле. На ней отмечены сантиметры и миллиметры. Если взять две линейки, то с их помощью можно складывать числа. Отметим на одной линейке 8 см и приставим к этому делению начало второй линейки. После этого найдем на ней число 6 и посмотрим какое число находится рядом с ним на первой линейке. Оказывается 14. Значит, $8+6=14$. Этот же метод удалось применить и для умножения чисел, только шкала на линейке должна быть не равномерной, а логарифмической, поэтому такая линейка называется логарифмической. У нее часто бывает еще несколько шкал на неподвижной части и на движущейся, с помощью которых можно определять синусы и косинусы углов и другие функции.



Когда мы говорим о длине пути между пунктами, а не о расстоянии между ними, то не всегда километры являются лучшей единицей. Для пассажиров важнее знать не километраж, а время в пути, и мы измеряем расстояние часами лета на самолете, езды на автобусе или поезде. Таким образом, мы вводим совсем другую «метрику» для пунктов на Земле, в которой, скажем, расстояние от Москвы до Углича может оказаться бо́льшим расстояния от Москвы до Марселя. А у владельца автомобиля своя «метрика». Что их объединяет? Во-первых, что расстояние от пункта $A$ до пункта $B$ равно расстоянию от пункта $B$ до пункта $A$, во-вторых, что все расстояния неотрицательны, а в-третьих, то, что сумма расстояний между пунктами $A$ и $B$ и пунктами $B$ и $C$ не меньше расстояния между пунктами $A$ и $C$ (аксиома треугольника). Еще одно свойство: если расстояние между двумя пунктами равно нулю, то это один и тот же пункт. Так мы и пришли к важному в современной математике понятию метрического пространства. Таким пространством может быть не только глобус, но и, например, множество всех непрерывных функций, заданных на отрезке.

В заключение еще несколько слов о фразе «Избушка находилась от поселка на расстоянии двух дневных переходов». Ясно, что для путника эта информация гораздо важнее, чем о расстоянии в километрах, поскольку дорога может идти через горы и леса.

нами последнего тогда элемента таблицы Менделеева — урана. Быть может, и он превратится в своего реально не существующего в природе соседа справа, т. е. в элемент с атомным номером 93? Ферми с сотрудниками такой опыт поставили, но не смогли доказать, что «заурановый» элемент действительно был получен, хотя в осторожной форме и указали на такую возможность. Впоследствии выяснилось, что в их опытах получался не один даже, а по крайней мере два заурановых элемента.

Во-первых, происходит то, что и ожидал Ферми, — реакция, как две капли воды похожая на реакцию (*):

$$^{238}_{92}\mathrm{U}+{}^{1}_{0}n\rightarrow{}^{239}_{92}\mathrm{U}+\gamma,$$
$$^{239}_{92}\mathrm{U}\rightarrow{}^{239}_{93}\mathrm{Np}+\beta.$$

Период полураспада $^{239}_{92}\mathrm{U}$ всего 2,3 минуты. Получившийся новый элемент нептуний тоже бета-радиоактивен, и с периодом полураспада $T\approx2{,}3$ дня он превращается в элемент с новым атомным номером — 94, названный плутонием:

$$^{239}_{93}\mathrm{Np}\rightarrow{}^{239}_{94}\mathrm{Pu}+\beta.$$

Так были «открыты» первые два заурановых элемента — Np и Pu. Слово «открыты» поставлено в кавычки потому, что они были не открыты, а созданы. Открыть ведь можно то, что существует, но еще не обнаружено, здесь же была открыта лишь возможность создания новых элементов.

В дальнейшем было «приготовлено» более десятка изотопов нептуния. Наиболее стабильный из них — $^{237}_{93}\mathrm{Np}$, у которого период полураспада около 2,2 миллионов лет. Сохранись он на Земле, он был бы «отцом» радиоактивного семейства, конечным продуктом распада которого был бы $^{209}_{83}\mathrm{Bi}$. Получено много изотопов и плутония. Огромное практическое значение имеет один из них — $^{239}_{94}\mathrm{Pu}$, который наряду с $^{235}_{92}\mathrm{U}$ служит топливом в ядерных реакторах.

Настала очередь создания и следующих заурановых элементов.

**Элемент номер 95 — америций (Am).** Этот элемент в атомных реакторах получается «сам собой»: один из изотопов плутония бета-радиоактивен и по правилу смещения превращается в америций:

$$^{241}_{94}\mathrm{Pu}\rightarrow{}^{241}_{95}\mathrm{Am}+\beta.$$

**Элемент номер 96 — кюрий (Cm).** Впервые этот элемент был получен облучением $^{239}_{94}\mathrm{Pu}$ альфа-частицами высокой энергии по реакции

$$^{239}_{94}\mathrm{Pu}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}\rightarrow{}^{242}_{96}\mathrm{Cm}+{}^{1}_{0}n.$$

Известно более десяти изотопов кюрия. Самый стабильный из них — $^{249}_{96}\mathrm{Cm}$, у которого период полураспада равен 16 миллионам лет.

**Элемент номер 97 — берклий (Bk).** Чтобы получить этот элемент, облучению альфа-частицами был подвергнут один из изотопов америция:

$$^{241}_{95}\mathrm{Am}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}\rightarrow{}^{243}_{97}\mathrm{Bk}+2{}^{1}_{0}n.$$

Период полураспада этого изотопа берклия 4,5 часа, но есть и более долго живущие изотопы. Например, $^{247}_{97}\mathrm{Bk}$, у которого $T=7000$ лет.

**Элемент номер 98 — калифорний (Cf).** «Открыт» почти одновременно с берклием путем облучения альфа-частицами изотопа кюрия:

$$^{242}_{96}\mathrm{Cm}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}\rightarrow{}^{245}_{98}\mathrm{Cf}+{}^{1}_{0}n.$$

У этого элемента тоже есть изотоп со значительным периодом полураспада. Это $^{251}_{98}\mathrm{Cf}$ с $T=800$ лет.

**Элемент номер 99 — эйнштейний (Es).** Для создания этого элемента потребовалось воздействие на ядра не легких альфа-частиц, а ускоренных ионов более тяжелых элементов — ионов азота с энергией около 100 МэВ:

$$^{238}_{92}\mathrm{U}+{}^{14}_{7}\mathrm{N}\rightarrow{}^{246}_{99}\mathrm{Es}+6{}^{1}_{0}n.$$

**Элемент номер 100 — фермий (Fm).** Этот элемент был получен почти таким же способом, как и предыдущий, с тем только различием, что здесь были использованы ионы кислорода, ускоренные до энергии 180 МэВ:

$$^{238}_{92}\mathrm{U}+{}^{16}_{8}\mathrm{O}\rightarrow{}^{250}_{100}\mathrm{Fm}+4{}^{1}_{0}n.$$

**Элемент номер 101 — менделевий (Md).** Он получен так:

$$^{253}_{99}\mathrm{Es}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}\rightarrow{}^{256}_{101}\mathrm{Md}+{}^{1}_{0}n.$$

У самого стабильного изотопа менделевия $^{258}_{101}\mathrm{Md}$ период полураспада около 5 часов.

**Элемент номер 102 — нобелий (No).** Перечисленные выше зауранове элементы были синтезированы усилиями главным образом американских ученых во главе с Г. Сиборгом. В создании 102-го элемента впервые участвовали и советские физики группы академика Г. Н. Флёрова. Ими было показано, что нобелий может быть получен облучением $^{238}_{92}U$ ускоренными ионами неона:

$$^{238}_{92}U+^{22}_{10}Ne \to ^{256}_{102}No+4^{1}_{0}n.$$

Все изотопы этого элемента имеют небольшие периоды полураспада — от одной секунды до трех минут.

**Элемент номер 103 — лоуренсий (Lr).** Для его получения была использована реакция облучения калифорния быстрыми ионами бора:

$$^{252}_{98}Cf+^{10}_{5}B \to ^{257}_{103}Lr+5^{1}_{0}n.$$

Периоды полураспада всех известных изотопов лоуренсия исчисляются секундами.

**Элемент номер 104 — курчатовий (Ku).** При синтезе этого элемента снова были использованы быстрые ионы неона, которыми облучали плутоний:

$$^{242}_{94}Pu+^{22}_{10}Ne \to ^{260}_{104}Ku+4^{1}_{0}n.$$

Позже были синтезированы и другие изотопы курчатовия, периоды полураспада у всех у них очень малые.

Были сообщения о синтезе и элементов с более высокими атомными номерами — вплоть до 107. Получение таких элементов сильно затрудняется тем, что их периоды полураспада столь малы, что элементы распадаются почти тотчас после образования. К тому же радиоактивные ядра зауранових элементов распадаются не только с испусканием альфа- или бета-частиц, но и путем самопроизвольного деления ядер. Ясно, что при делении ядра зауранового элемента зауранoвый же элемент не получится.

Все это ограничивает возможность дальнейшего расширения таблицы Менделеева вправо. Существуют, однако, теоретические соображения, позволяющие надеяться на то, что некоторые ядра с высокими атомными номерами могут оказаться долгоживущими (например, ядра с номерами 114, 126). Проверить это было бы, конечно, очень интересно.

*Энрико Ферми (1901—1954).*

**Еще раз к вопросу о ... «слева».** Выяснив, что нейтрон — нулевой элемент, мы, казалось бы, пришли к выводу, что с вопросом о выходе за пределы таблицы влево покончено. Однако есть основания для того, чтобы еще раз к нему вернуться.

Дело в том, что наряду с известными элементарными частицами — электронами, протонами и нейтронами могут существовать и так называемые античастицы. Так, если считать электрон частицей, то существует его античастица — позитрон, отличающаяся от электрона только знаком электрического заряда. Наблюдались и антипротоны — такие же, как протоны, но только отрицательно заряженные частицы. Наблюдались даже антинейтроны — частицы такие же нейтральные, как и нейтроны, но все же «анти». В таком случае возможны и антиядра, состоящие из антипротонов и антинейтронов, и антиатомы, в которых антиядра окружены не электронной, а позитронной оболочкой. А поскольку атомный номер элемента в таблице Менделеева определяет положительный заряд его ядра, то антиэлементы должны располагаться слева от нулевого элемента.

Зaурановые элементы в природе не существуют, однако, их можно «сделать». Антиэлементов в природе тоже нет, но и их, по крайней мере в принципе, тоже можно «сделать». Правда это очень трудная задача, потому что вещество и антивещество, атомы и антиатомы, частицы и античастицы не могут мирно сосуществовать. При близком соседстве они, как говорят, аннигилируют, исчезают. Но... не бесследно — при аннигиляции выделяется огромная энергия. В расчете на единицу массы она примерно в 1000 раз больше энергии, выделяющейся при обычных ядерных реакциях. Кто знает, не станет ли когда-нибудь аннигиляция «вещество — антивещество» управляемым и безопасным видом энергии? Пока это чистая фантазия, но ведь многое из того, чем мы сейчас пользуемся, когда-то тоже было фантазией.

*А. Кикоин*

# Избранные школьные задачи по физике

**9 класс**

1. Брусок массой $M$ лежит на гладкой горизонтальной плоскости, по которой он может двигаться без трения (рис. 1). На бруске лежит тело массой $m$. Коэффициент трения между телом и бруском $\mu$. При каком значении силы $F$, приложенной к бруску в горизонтальном направлении, тело начнет скользить по бруску?

2. Найдите относительное изменение веса тела, вызванное суточным вращением Земли вокруг своей оси, при измерении веса на экваторе и на полюсе. Землю можно считать шаром радиусом $R=6400$ км.

3. Найдите ускорения тел, массы которых $m_1$ и $m_2$, и силы натяжения нитей в системе, изображенной на рисунке 2. Массой блоков и нитей, а также трением в блоках можно пренебречь.

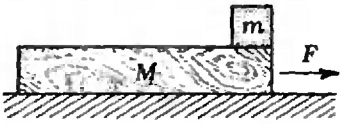


*Рис. 1.*

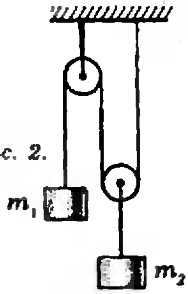


*Рис. 2.*

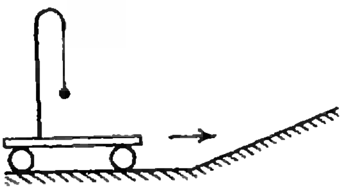


*Рис. 3.*

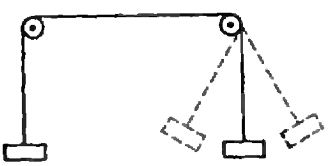


*Рис. 4.*

*Рис. 5.*

4. Легкая тележка с подвешенным на нити шариком подъезжает к наклонной плоскости (рис. 3). В какую сторону от вертикали отклонится нить с шариком, когда тележка начнет въезжать на наклонную плоскость?

5. Два одинаковых невесовых блока с параллельными осями установлены на одинаковой высоте. Через оба блока перекинута нерастяжимая и невесомая нить, на концах которой висят два одинаковых груза (рис. 4). Один из грузов отводят в сторону и отпускают. Сохранится ли при этом равновесие системы?

**10 класс**

6. В вершинах квадрата со стороной $a$ расположены четыре заряда: два из них равны по $+q$ и два по $-q$. Определите напряженность электрического поля в точке пересечения диагоналей квадрата. Рассмотрите все возможные случаи.

7. Два одинаковых точечных заряда находятся на расстоянии $r_1=1$ м друг от друга. Величина каждого заряда $q=10^{-10}$ Кл. Какую работу надо совершить, чтобы сблизить заряды до расстояния $r_2=10$ см?

8. Дана картина расположения эквипотенциальных поверхностей некоторого электростатического поля (рис. 5). Известно также, что $\varphi_1>\varphi_2$. Восстановите по этой картине примерную картину линий напряженности этого поля и укажите их направления. В какой области напряженность поля больше?

9. Три одинаковые заряженные частицы массой $m=2$ г и зарядом $q=10^{-8}$ Кл каждая поместили в вершинах равностороннего треугольника со стороной $a=10$ см. Затем частицы одновременно освободили, после чего они стали симметрично разлетаться под действием кулоновских сил отталкивания. Найдите максимальное значение скорости частиц.

10. Конденсатор подключен к аккумулятору. Раздвигая пластины конденсатора, мы преодолеваем силы электростатического притяжения между его пластинами и, следовательно, совершаем положительную работу. На что идет эта работа? Что происходит с энергией конденсатора?

**11 класс**

11. Если смотреть на светящуюся рекламу (например из газосветных трубок), то красные буквы всегда кажутся выступающими вперед

по отношению к синим или зеленым. Чем это можно объяснить?

12. Известно, что скорость света $c$ и длина световой волны $\lambda$ связаны с частотой колебаний $\nu$ соотношением $c=\lambda\nu$. На сколько изменится длина волны красного света при переходе из вакуума в стекло, если показатель преломления стекла $n=1{,}5$, а частота колебаний, соответствующая красному свету, $\nu=4\cdot10^{14}$ Гц?

13. В каком случае кольца Ньютона видны более отчетливо: в отраженном свете или в проходящем?

14. Дифракционная решетка освещена нормально падающим монохроматическим светом. В дифракционной картине максимум второго порядка наблюдается под углом $\varphi_2=14°$. На какой угол отклонен максимум третьего порядка?

15. Найдите скорость фотоэлектронов, вылетающих из цинка, при освещении его ультрафиолетовыми лучами с длиной волны $\lambda=0{,}3$ мкм. Работа выхода электронов из цинка $A=4$ эВ.

*Публикацию подготовила В. Тихомирова*

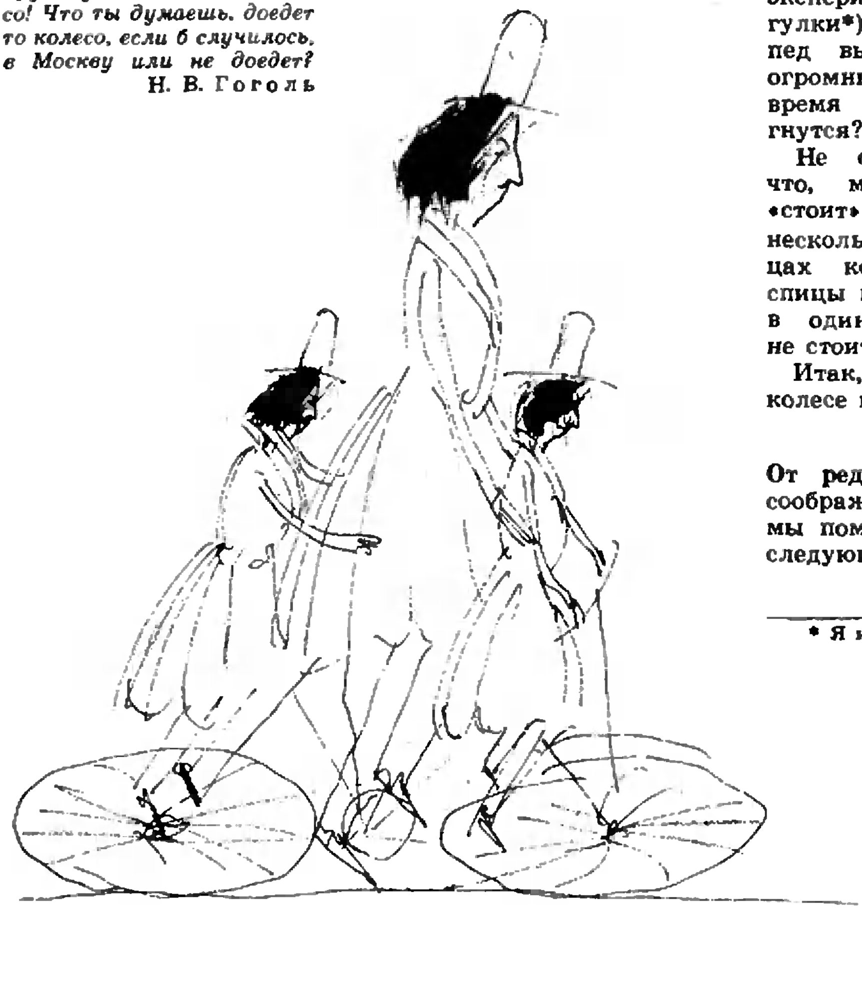
## Качественная задача по физике

# «Велосипедная» задача

*Вишь ты,— сказал один другому,— вон какое колесо! Что ты думаешь, доедет то колесо, если б случилось, в Москву или не доедет?*

Н. В. Гоголь

Обычный двухколесный велосипед выдерживает более ста шестидесяти килограммов. Именно таков общий вес автора и двух его младших друзей, которые провели чрезвычайно сложный — почти цирковой — эксперимент, проехав втроем шесть километров на одном велосипеде. Велосипеде автора.



Однако, если вытащить спицы — эти тоненькие стальные прутики — из обода, то их можно согнуть двумя пальцами, что и сделали друзья автора после экспериментальной прогулки*). Как же велосипед выдерживает такой огромный вес, почему во время езды спицы не гнутся?

Не спешите отвечать, что, мол, велосипедист «стоит» не на одной, а на нескольких нижних спицах колеса. Даже все спицы колеса, сложенные в один пучок, согнуть не стоит труда.

Итак, почему спицы в колесе не гнутся?

*Е. Гурович*

**От редакции.** Авторские соображения на этот счет мы поместим в одном из следующих номеров.

* Я их уже простил.

### Список читателей, приславших правильные решения

*(Начало см. на с. 29)*

32; *С. Добровольский* (Днепропетровск) 23—25, 27—34, 36, 37; *А. Дубовик* (Брест) 24, 25, 34, 36; *С. Дудий* (п. Комсомольский Харьковской обл.) 24; *М. Дьяк* (Владимир) 24, 25, 28, 29, 32; *М. Егоров* (Старый Оскол) 28, 32, 33; *И. Егорова* (Ленинград) 24, 27; *П. Енин* (Воронеж) 25; *Н. Ефремов* (Свердловск) 25, 28; *А. Жуков* (Воронеж) 23; *И. Журавлев* (Старый Оскол) 24, 27, 28, 31—33, 37; *Р. Загребаев* (Старый Оскол) 24, 27; *А. Зайцев* (Железногорск) 28—34; *В. Злобов* (Старый Оскол) 24, 27; *И. Зозуля* (Одесса) 25, 27, 28, 32; *М. А. Иванов* (Тула) 28, 29; *М. Г. Иванов* (Тула) 23—25, 28—36; *Н. Ивченко* (Киев) 24, 27—33, 36; *Т. Калита* (Киев) 24, 25, 27, 28, 30, 36, 37; *К. Калюжный* (Одесса) 25, 27—29, 31—33, 36, 37; *Г. Каминский* (Киев) 24, 25, 28, 30; *С. Карасев* (Киев) 28; *И. Кацман* (Киев) 24, 25, 27, 36, 37; *А. Каширин* (Старый Оскол) 24, 27, 28, 32; *Е. Климчук* (Кузнецовск) 24, 27—29, 31, 32, 34, 36, 37; *В. Ковшевный* (Пушкино Московской обл). 28, 32; *О. Ковылин* (Волгоград) 32; *Д. Кожевников* (Омутнинск) 28, 29, 31, 32; *А. Козлов* (Старый Оскол) 32; *В. Козлов* (Старый Оскол) 24, 27—29, 32, 33; *Т. Колесникова* (Вишневое) 25; *М. Колпаков* (п. Почет Красноярского кр.) 24, 25, 27, 29—37; *В. Кордюк* (Киев) 24, 28, 32; *А. Короновский* (Саратов) 32; *Д. Коротков* (Астрахань) 27—29, 36; *Ю. Крававич* (с. Княжполь Львовской обл.) 25, 27; *Э. Криворотько* (Чехов Московской обл.) 27—29, 31, 33, 36; *Д. Кример* (Брест) 25; *А. Кузнецов* (Жуковский) 28, 32; *Д. Кузнецов* (Белорецк) 25; *И. Кузнецова* (Краснодар) 28, 29; *Ю. Кузьма* (п. Протва Калужской обл.) 24, 25, 27, 30; *П. Куприн* (Северодвинск) 24, 27, 29, 32; *М. Лазарев* (Никель) 28; *В. Легостаев* (Кустанай) 24, 25, 27—30, 36; *В. Леонтьев* (Канаш) 27—29; *Д. Логинов* (Тула) 24, 25, 27, 28, 33—36; *А. Лозовой* (Вольск) 28, 33, 34; *В. Макаров* (Кировское) 24, 25, 27—29; *А. Мальцев* (Курчатов) 24; *Ю. Маравин* (Евпатория) 27—29, 32, 35, 36; *М. Махмудов* (Исфара) 29, 33; *Н. Мацко* (Киев) 24, 27, 28, 30—33; *П. Мелентьев* (Старый Оскол) 24, 27, 28, 32; *В. Меркер* (Старый Оскол) 34—36; *В. Мирошниченко* (Пенза) 24, 25, 27—30, 32; *С. Мурин* (Брест) 24, 28—30; *Ю. Мусатенко* (Киев) 24, 27—29, 31, 32; *М. Мячин* (Баку) 36; *А. Наливайко* (Старый Оскол) 29, 32; *А. Нежуренко* (Киев) 24, 25, 27—29, 32, 36; *М. Немировский* (Одесса) 32; *И. Николаенко* (Армавир) 24, 25, 27—32; *Б. Овсицер* (Северодвинск) 24, 25, 27—29, 31—33, 36; *В. Оганесян* (Ростов-на-Дону) 25, 28, 30, 32, 34, 36; *А. Ольховец* (Киев) 24, 25, 27, 28, 32; *Д. Островский* (Ленинград) 23, 25; *Ю. Пайвин* (Харьков) 24, 25, 27; *Д. Пастухов* (Витебск) 23, 25, 27—33, 36; *Г. Перадзе* (Тбилиси) 28, 29; *А. Перекрест* (Киев) 28, 31; *А. Петросян* (Ереван) 25; *Е. Пехман* (Армавир) 29; *В. Писляков* (Тверь) 25, 28, 32; *А. Пищальченко* (Старый Оскол) 24, 25, 28, 32; *А. Погребняк* (Киев) 24; *И. Полищук* (Москва) 24, 25, 27—36; *С. Польшин* (Харьков) 23, 25, 27, 29, 31—33; *В. Попов* (Ростов-на-Дону) 24—27, 29, 36; *В. Попов* (Жуковский) 25, 27; *А. Потапов* (Саратов) 28, 29, 31, 32; *Д. Потишко* (Харьков) 24, 36; *Ю. Радченко* (Волжский) 25, 29; *С. Рассадин* (Минск) 25, 29; *И. Рассказов* (Брест) 25, 27; *У. Рахимов* (Шават) 28, 29; *В. Репин* (Невинномысск) 28, 29; *Г. Рубаненко* (Артемовск Донецкой обл.) 28—32; *Л. Рубчинский* (Нижний Новгород) 25, 27; *А. Рыбалочка* (Киев) 23, 24, 27; *Н. Савельев* (Кузнецовск) 24, 27—29, 31, 34, 36; *С. Самсонов* (Старый Оскол) 32; *Р. Сенков* (Москва) 28, 29, 32, 34, 36; *В. Сергиенко* (Брест) 25; *Д. Скотников* (Владимир) 24, 27—29, 31, 32; *В. Сластиков* (Киев) 24, 25, 28, 30; *А. Снежко* (Киев) 28—32, 36; *А. Соклаков* (Брест) 25; *В. Солдаткин* (Ростов-на-Дону) 25; *Ю. Спектор* (Киев) 23, 27—31, 33; *А. Столповская* (Днепрорудный) 28; *Д. Субботун* (Москва) 28, 30, 31, 36; *Д. Супрун* (Минск) 24, 25, 29, 30, 33, 34; *С. Суслов* (Северодвинск) 24, 25; *М. Сущук* (Братск) 25; *В. Тамошюнас* (Вильнюс) 24, 25, 28, 30, 32, 33; *А. Таротин* (Северодвинск) 35; *С. Телков* (Старый Оскол) 24, 27; *Д. Тимофеев* (Константиновка) 27—29, 32; *С. Тимощук* (с. Черница Ровенской обл.) 25, 27—29, 32; *М. Томилко* (Брест) 24, 28—30; *В. Третьяков* (Алма-Ата) 24, 25, 27, 28, 30—33, 36; *Ю. Третьяков* (Алма-Ата) 24, 25, 27—33, 36; *В. Тыртычко* (Кустанай) 24, 25, 27—30, 36; *О. Устинов* (Старый Оскол) 24, 27; *А. Федоренко* (Омск) 25, 27, 28, 32; *А. Филатов* (Кузнецовск) 24, 28; *К. Фотев* (София, Болгария) 25, 27, 28, 30—32, 36; *А. Хацкевич* (Брест) 25; *А. Хмелев* (Свердловск) 29, 32, 37; *Р. Храбров* (Северодвинск) 23—25, 28—31, 33, 35, 36; *В. Черняевский* (Павлодар) 24, 25; *А. Чистый* (Брест) 25, 29, 30; *О. Чунихин* (Енисейск) 32; *С. Чупахин* (Ростов-на-Дону) 24, 27—30, 36; *Е. Шагаров* (Грозный) 23, 24, 27, 28—30, 32; *Г. Шаповалов* (Киев) 23—25, 27—32, 36; *С. Шаракин* (Солигорск) 23—25, 27—31, 34—37; *А. Шехтер* (Бельцы) 24, 27—32; *С. Шинкевич* (Березники) 24, 25, 28—32; *А. Шпагин* (Мариуполь) 24, 27—29, 32, 33; *О. Шпырко* (Киев) 28, 29, 33; *И. Шуляк* (Киев) 24, 27—29, 31, 32, 34, 36; *К. Шурунов* (Куйбышев) 25, 27—29, 32; *Т. Шутенко* (Мариуполь) 24, 28, 29, 31—37; *А. Юмагузин* (Уфа) 25; *Р. Якупов* (Кузнецовск) 24, 28, 29, 31, 32, 34, 37; *Р. Янченко* (Кузнецовск) 28, 32, 37.


Математический кружок

# Геометрические вероятности

*Кандидат физико-математических наук*
*Н. ВАСИЛЬЕВ*

**В этой статье мы не будем заниматься строгим определением основных понятий теории вероятностей, а познакомимся с некоторыми задачами, где посчитать вероятности событий помогают соображения симметрии, а также наглядное изображение событий с помощью координат на плоскости.**

При этом мы будем иметь дело не только с задачами, где имеется конечное число равновозможных вариантов, но и с такими, где вариантов бесконечно много. Вот две из них.

**Задача о встрече.** *Двое приятелей договорились встретиться на площади Маяковского от 12 до 13 часов. Каждый приходит в некоторый случайный момент времени, ждет 15 минут другого и уходит. Какова вероятность, что они встретятся?*

**Задача об остроугольном треугольнике.** *На окружности случайно выбираются три точки. Какова вероятность, что треугольник с вершинами в этих точках — остроугольный?*

Но начнем мы все же с более простых, конечных примеров.

### Бросаем кубик

Самый удобный инструмент для первого знакомства с вероятностями — игральная кость: кубик, грани которого занумерованы числами 1, 2, ..., 6.

Поскольку кубик совершенно симметричен, мы считаем, что все шесть возможных вариантов имеют одинаковую вероятность. Скажем, вероятность выпадения шестерки равна $1/6$, вероятность, что выпадет число не меньшее 3, равна $4/6=2/3$, вероятность, что выпадет нечетное число оч-

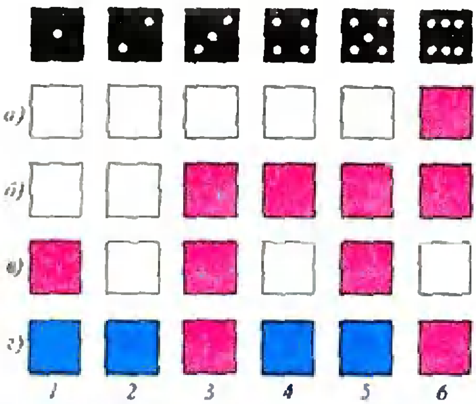


Рис. 1.

ков, равна 1/2. (Соответствующие *события* — множества «благоприятных исходов» — показаны красным цветом на рисунках 1 *а, б, в*.)

Если под рукой нет игрального кубика, с таким же успехом можно катить по столу шестигранный карандаш, на гранях которого написаны номера 1, 2, ..., 6. Легко представить себе карандаш не с 6, а с любым числом $n$ боковых граней.

Итак, пусть у нас есть инструмент, обеспечивающий получение $n$ равновозможных вариантов. Мы по определению считаем, что вероятность осуществления каждого из этих вариантов равна $1/n$, а вероятность каждого события $A$, состоящего из $k$ вариантов, равна $k/n$.

При $n=6$, конечно, легко просто пересчитать все варианты, изобразив их на рисунке. Но когда число вариантов $n$ велико, на помощь приходят некоторые правила вычисления вероятностей.

Будем обозначать вероятность события $A$ через $p(A)$. События у нас — это просто некоторое подмножество множества $E$ всех возможных вариантов, причем $p(E)=1$. Для бросаний кубика множество $E$ состоит из шести элементов 1, 2, ..., 6. Самые простые соотношения между вероятностями возникают из соотношений между множествами, точнее, количествами элементов в них.

Вероятность события $\bar{A}$, *дополнительного* к $A$ (в него входят все элементы $E$, не входящие в $A$), равна

$$p(\bar{A})=1-p(A). \qquad (1)$$

Например, если $A$ состоит из чисел от 1 до 6, делящихся на 3, то $\bar{A}$ — числа, не делящиеся на 3; $p(A)=1/3$, $p(\bar{A})=1-1/3=2/3$ (рис. 1, *г*).

Объединение $A\cup B$ — событие, состоящее в том, что произошло *хотя бы одно* из двух событий: $A$ **или** $B$. Если события $A$ и $B$ *несовместны*, т. е. два множества $A$ и $B$ не пересекаются, то

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B). \qquad (2)$$

Если же события $A$ и $B$ *совместны*, то есть имеется непустое пересечение $AB$, то

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(AB). \qquad (3)$$

(Пересечение двух множеств $A$ и $B$ — событие, состоящее в том, что выполняются одновременно $A$ **и** $B$ — мы обозначаем, как принято в теории вероятностей, просто $AB$.)

### Повторные испытания

Представим себе, что кубик бросили два раза (или — что сразу бросили два кубика); это — два независимых испытания.

Задача 1. Какова вероятность, что при первом бросании выпадет не меньше 5 очков, а при втором — не меньше 4?

Теперь множество $E$ — это множество всех пар $(x, y)$, где $x$ и $y$ — числа от 1 до 6 ($x$ означает число очков, выпавшее на первом кубике, $y$ — на втором). Все пары $(x, y)$ равновероятны, их число равно $6\cdot 6=36$. Удобно изобразить их в виде квадрата $6\times 6$ клеток: клеточка с координатами $x$ и $y$ изображает пару $(x, y)$ (рис. 2). Из них надо выбрать те клетки, которые удовлетворяют условию задачи: $x\leqslant 5$, $y\leqslant 4$. Они заполняют прямоугольник $2\times 3$ клетки. Итак, среди $6\cdot 6$ пар выбрано $2\cdot 3$, так что искомая вероятность равна

$$\frac{2\cdot 3}{6\cdot 6}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

Вообще, если событие $A$ определяется по результату первого испытания, а $B$ — по второму испытанию (то есть $A$ — это некоторый набор столбцов, а $B$ — некоторый набор строк), то вероятность одновременного выполнения $A$ и $B$ равна

$$p(AB)=p(A)\cdot p(B). \qquad (4)$$

В этом случае события $A$ и $B$ называют *независимыми*. Правило произведения (4) можно использовать и для большего числа независимых испытаний. Например, вероятность, что при каждом из трех бросаний кубика выпадет пятерка или шестерка, равна $(1/3)^3=1/27$.

Рассмотрим теперь два примера, где речь тоже идет о двух испытаниях, т. е. $E$ — множество пар $(x, y)$, но интересующее нас событие зависит от $x$ и $y$ более сложным образом, так что условие «независимости» уже не выполнено.

Задача 2. *Какова вероятность, что хотя бы при одном из двух бросаний кубика выпадет не менее 5 очков?*

Соответствующие пары отмечены на рисунке 3, так что искомая вероятность равна $20/36=5/9$.

Заметим, что можно рассуждать иначе: найти дополнительную вероятность того, что и при первом, и при втором бросании выпадет не более 4 очков. Это уже можно сделать по правилу произведения: $(2/3)\times(2/3)=4/9$, поэтому искомая вероятность равна $1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$.

Задача 3. *Какова вероятность, что количества очков, выпавших при двух бросаниях, отличаются не более чем на 1?*

Нужные пары отмечены на рисунке 4, это 6 клеточек по диагонали $x=y$ и по 5 на двух соседних с ней параллельных прямых. Искомая вероятность равна $16/36=4/9$.

## Случайные числа и точки: равномерное распределение

Теперь речь пойдет о случайных точках на отрезке, на окружности, в квадрате... Как определяются вероятности в этом случае? Какие «события» можно рассматривать?

Покатим по столу круглый карандаш — цилиндр. Пусть его поверхность желтая, но некоторая полоска (или несколько полосок) ширины $\alpha$ покрашены в красный цвет (рис. 5); какова вероятность, что карандаш остановится на красной, а не на желтой линии? (Здесь $\alpha$ — угол, измеряемый, скажем, в градусах.)

Представим себе аналогичную задачу про карандаш с большим числом граней $n$, из которых $k$ закрашены в красный цвет. Тогда искомая вероятность будет равна отношению $k/n$. Для круглого карандаша множество «элементарных событий» $E$ — окружность, и вероятность каждого отдельного элемента — вероятность остановки на одной определенной линии — равна 0; но вероятность события «остановка на одной из красных линий» естественно считать равной отношению $\alpha/360°$.

Точно так же, говоря о случайной точке на отрезке (или на окружности) длины $L$, будем считать, что вероятность ее попадания в любой отре-

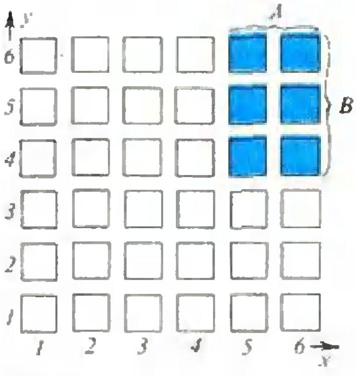



Рис. 2.

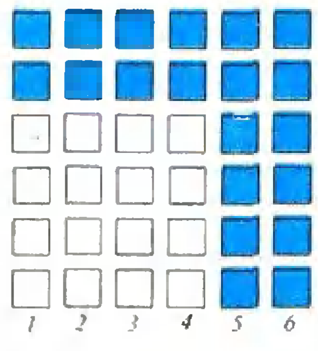



Рис. 3.

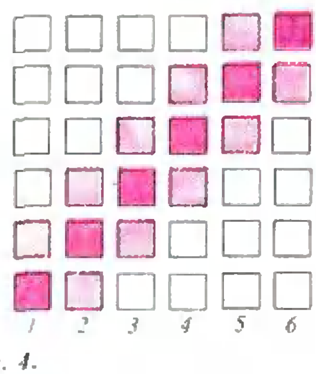



Рис. 4.

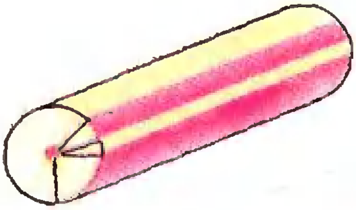


Рис. 5.


Рис. 6.

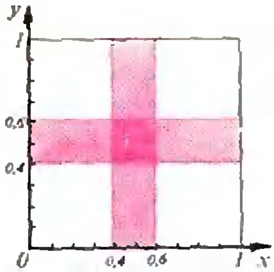



Рис. 7.

зок (или на дугу) длины $d$ равна $d/L$. В соответствии с правилом (1), мы считаем также, что вероятность попадания в один из данных (непересекающихся) отрезков суммарной длины $d$ равна $d/L$. Например, вероятность, что первая после запятой цифра случайного числа на отрезке [0; 1] — простое число, т. е. одна из цифр 2, 3, 5 и 7 (рис. 6), равна $4/10=2/5$.

Точно так же, говоря о случайной точке в квадрате или другой фигуре площади $S$, мы будем считать, что вероятность ее попадания в каждую область площади $s$ равна $s/S$. Заметим, что и для длины на отрезке и для площади фигуры выполнены правила (1), (2) и (3).

Замечательно, что, выбирая независимо друг от друга два числа $x$ и $y$ на отрезке [0; 1], можно считать, что $(x, y)$ — это координаты случайной точки в единичном квадрате: по аналогии с формулой произведения (4), вероятность попадания точки $(x, y)$ в прямоугольник со сторонами $a$ и $b$, параллельными осями $Ox$ и $Oy$, равна произведению $ab$, т. е. площади этого прямоугольника.

Например, вероятность того, что случайное число, выбранное на отрезке [0; 1], находится на расстоянии не более 0,1 от середины отрезка, равна 0,2 (такие точки покрывают отрезок от 0,4 до 0,6). Если $x$ и $y$ — два случайных числа на отрезке [0; 1], вероятность того, что *оба* они удалены от середины не более чем на 0,1 равна $0{,}2^2=0{,}04$, а вероятность того, что *хотя бы одно* из них удалено от середины не более чем на 0,1, равна 0,36 (рис. 7); эту вероятность можно найти, сложив площади прямоугольников, составляющих «крест», а можно — перейдя к «дополнительным событиям» — по формуле $(1-0{,}8^2)$.

Теперь мы можем решить и задачу о встрече, сформулированную в начале статьи. Уточним ее следующим образом. Будем считать, что каждый из приятелей приходит в некоторый случайный момент, выбранный на отрезке [0; 45] (в течение первых 45 минут условленного часа) и ждет другого 15 минут; тем самым они встретятся, если разность между моментами $x$ и $y$ их прихода (по модулю) не превосходит 15.

Изобразим на квадрате $0\leqslant x\leqslant 45$, $0\leqslant y\leqslant 45$ множество точек $(x, y)$, в которых $|x-y|\leqslant 15$ — оно ограничено прямыми $y-x=15$ и $y-x=-15$, параллельными диагонали $x=y$ (рис. 8). Площадь этого множества равна $45^2-30^2$ (два белых треугольника вместе составляют квадрат со стороной 30), а искомая вероятность равна ее отношению к площади всего квадрата $45\times45$:

$$1-\frac{30^2}{45^2}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}.$$

Решим еще одну задачу про случайную точку $(x, y)$.

Задача 4. *Найдите вероятность $p=p(a)$ того, что сумма $x+y$, где $x$, $y$ — случайные числа на отрезке [0; 1], больше данного числа $a$.*

Уравнение $x+y=a$ задает прямую, параллельную диагонали $x+y=1$ квадрата. Искомая вероятность — площадь части квадрата, лежащей выше этой прямой. (При $a>1$ это треугольник, при $a<1$ — пятиугольник, и легче считать площадь дополнения.) Ответ записывается так:

$$p=\begin{cases}(2-a)^2/2 & \text{при } a\geqslant 1,\\ 1-a^2/2 & \text{при } a\leqslant 1.\end{cases}$$

**Соображения симметрии. Точки на окружности**

Заметим, что при $a=1$ в предыдущей задаче получается ответ $p=1/2$. (Соответствующие точки $(x, y)$ лежат над диагональю.) Его можно угадать сразу, не рисуя картинку на квадрате: если $x$, $y$ — числа, случайно выбираемые на отрезке [0; 1], то условие $x+y\leqslant 1$ можно записать в виде $x\leqslant 1-y$ и прочесть так: «$x$ ближе к 0, чем $y$ к 1». Ясно, что дополнительное условие получается просто заменой $x$ на $y$ и имеет ту же вероятность: ведь роли $x$ и $y$, а также концов отрезка совершенно равноправны.

Вот еще один пример.

Задача 5. *На отрезке [0; 1] случайно выбираются три числа. Какова вероятность того, что а) выбранное последним число наибольшее? б) числа идут в порядке возрастания?*

Здесь речь идет уже не о двух, а о трех числах $x$, $y$, $z$. Тройки $(x, y, z)$ можно было бы рассматривать как координаты точки в кубе и подсчитывать объемы нужных множеств. Но в этом нет нужды. Ведь ясно, что все 6 вариантов расположения трех чисел: $x<y<z$, $y<x<z$, $x<z<y$, $y<z<x$, $z<x<y$, $z<y<x$ совершенно равноправны, и имеют одинаковую вероятность по 1/6. Таким образом, ответ на вопрос б) 1/6, а на вопрос а) 1/3 (ему отвечают два первых варианта).

Решим теперь задачу об остроугольном треугольнике, сформулированную в начале статьи. Ясно, что при любом повороте окружности вероятности событий и условие «остроугольности» сохраняются; так что мы можем считать, что одна из трех выбираемых вершин $A$, $B$, $C$ — скажем, $C$ — фиксирована, а две другие уже выбираются случайно. Будем задавать их положения величинами дуг $CA=\alpha$, $CB=\beta$, отсчитываемых против часовой стрелки. Будем измерять дуги в радианах, тогда пара $(\alpha, \beta)$ — это точка в квадрате $0<\alpha<2\pi$, $0<\beta<2\pi$. По теореме о том, что величина вписанного угла измеряется половиной дуги между его сторонами, углы треугольника $ABC$ равны $\pi-\beta/2$, $\alpha/2$ и $(\beta-\alpha)/2$ (мы считаем, что $\beta>\alpha$ (рис. 9); случай $\alpha>\beta$ совершенно аналогичен — $\alpha$ и $\beta$ меняются ролями). Точки $(\alpha, \beta)$ в треугольнике $\alpha<\beta<2\pi$, для которых все три угла $A$, $B$, $C$ меньше $\pi/2$, т. е. $\beta>\pi$, $\alpha<\pi$ и $\beta-\alpha<\pi$, заполняют внутренность меньшего треугольника, образуемого средними линиями большего (рис. 10). Ситуация в нижнем треугольнике $\beta<\alpha<2\pi$ симметрична относительно диагонали $\alpha=\beta$ квадрата. Поэтому искомая вероятность равна 1/4.

У этой задачи есть и другое удивительно красивое решение, которое позволяет решить аналогичную задачу для $n$ точек (см. задачу 9 в конце); мы узнали его от физика В. В. Фока и математика Ю. В. Чеканова.

Будем искать дополнительную вероятность, что три точки $A$, $B$, $C$ являются вершинами *тупоугольного* треугольника.

Рассмотрим для каждой точки $M$ окружности диаметрально противоположную ей точку $M'$ и полукруг, для которого $M'$ служит серединой дуги. Тройка $A$, $B$, $C$ «тупоугольная», если и только если полукруги, соответствующие точкам $A$, $B$ и $C$, пере-

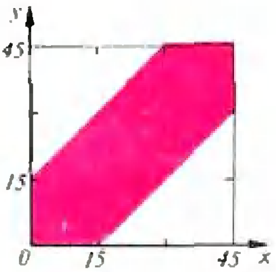


Рис. 8.

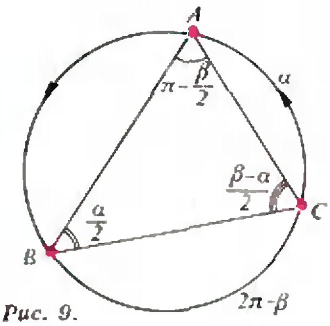


Рис. 9.

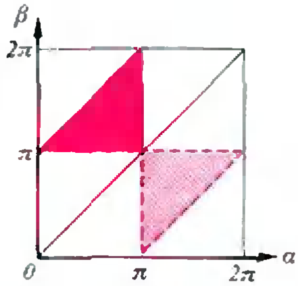


Рис. 10.

секаются по некоторому сектору (рис. 11). (Для каждого радиуса $OD$ в выделенном секторе все углы $DOA$, $DOB$, $DOC$ — тупые; такой радиус $OD$ существует, если $A$, $B$, $C$ лежат на одной полуокружности или, что эквивалентно, образуют «тупоугольную» тройку.)

Выбор случайных точек проведем в два этапа. Сначала отметим произвольно три пары диаметрально противоположных точек и проведем для каждой пары диаметр, относительно которого она симметрична. А затем в каждой паре независимо выберем (с вероятностью $1/2$) одну из точек. Докажем, что из 8 вариантов выбора точек ровно в 6 получится «тупоугольная» тройка $A$, $B$, $C$. В самом деле, три диаметра делят круг на 6 секторов, причем каждый сектор можно получить как пересечение трех определенных полукругов, соответствующих некоторому выбору точек $A$, $B$, $C$. Итак, вероятность получить «тупоугольную» тройку равна $6/8=3/4$, а значит дополнительная вероятность равна $1/4$.

### Задача Бюффона

Мы привыкли, что вероятность — это всегда дробь с небольшими целыми числителем и знаменателем. Но в заключение приведем две задачи, где в ответе встречается число $\pi$. Первая почти очевидна.

Задача 6. На большой лист клетчатой бумаги со стороной клетки 1 случайно бросают точку. Какова вероятность, что она будет находиться на

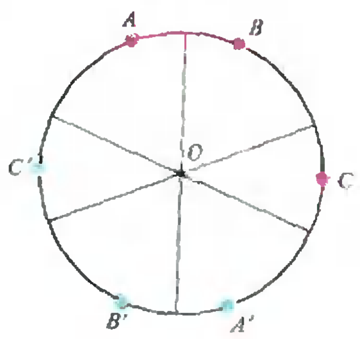



*Рис. 11.*

расстоянии меньше $1/2$ от центра некоторой клетки?

Достаточно рассмотреть одну клетку. Точки, находящиеся на расстоянии не более $1/2$ от ее центра, заполняют круг площади $\pi/4$. Это и есть ответ: искомая вероятность (отношение площади круга к площади клетки) равна $\pi/4$.

Задача 7 (задача Бюффона об игле)

*Плоскость разлинована на полосы шириной 1. На нее бросают иглу (отрезок) длиной 1. Какова вероятность, что игла пересечет одну из линий?*

У этой задачи удивительный ответ: $2/\pi$. Откуда же берется $\pi$, если в условии нет речи ни об окружностях, ни о расстояниях?

Наметим коротко одно из решений. Положение иглы (если не говорить о смещении ее вдоль линий, очевидно, не играющем роли) определяется двумя параметрами: расстоянием $y$ конца иглы от верхнего края полосы, в которую он попал $0<y<1$, и углом $\alpha$ иглы с прямой, перпендикулярной линиям (рис. 12, *а*). Можно считать, по соображениям симметрии, что $\alpha<\pi/2$. Условие, при котором игла пересекает край полосы: $y<\cos\alpha$. Итак, среди точек $(\alpha, y)$ в прямоугольнике $0<\alpha<\pi/2$, $0<y<1$ мы должны выбрать лежащие ниже линии $y=\cos\alpha$ (рис. 12, *б*) и найти отношение площади $S$ полученной фигуры к площади прямоугольника ($\pi/2$). Для тех, кто знаком с понятием интеграла (его изучают в старшем классе), эта задача нетрудная: $\int_0^{\pi/2}\cos\alpha\, d\alpha=1$. Но можно получить ответ, опираясь на аналогию из механики. Представим себе точку, равномерно с единичной скоростью проходящую дугу $AB$ в $1/4$ круга радиуса 1 (рис. 12, *в*). Когда точка $M$ находится в положении $\alpha$ на дуге ($0<\alpha<\pi/2$), скорость ее проекции $M'$ на радиус $OB$ равна как раз $\cos\alpha$. Так что рисунок 12, *б* — это график скорости точки $M'$, а площадь $S$ под графиком равна пройденному этой проекцией пути, т. е. $S=OB=1$.

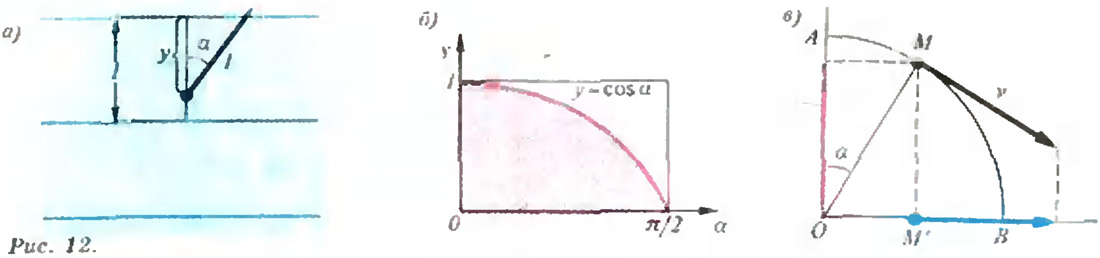


Рис. 12.

**В заключение предлагаем несколько задач, похожих на те, с которыми мы познакомились.**

Упражнения

1. Какова вероятность того, что при двух бросаниях кубика выпадут

а) два числа с суммой не меньше 10?

б) два числа, из которых первое делится на второе?

2. Пассажир приходит на остановку в случайный момент времени и дожидается автобуса одного из двух маршрутов, идущих с интервалами 10 и 15 минут. Найдите вероятность $p=p(t)$ того, что ему придется ждать не менее $t$ минут.

3. Отрезок разделен на три равные части. Какова вероятность, что три точки, случайно брошенные на отрезок, попадут в три разные кусочка?

4. На окружности случайно выбраны четыре точки $A$, $B$, $C$, $D$. Какова вероятность того, что отрезки $AC$ и $BD$ пересекаются?

5. а) В окружности проведен диаметр. На нем случайно выбирается точка и через нее проводится хорда, перпендикулярная диаметру. Какова вероятность, что длина хорды больше радиуса окружности?

б) На окружности случайно выбираются две точки. Какова вероятность, что длина соединяющей их хорды больше радиуса?

в) В круге случайно выбрана точка. Какова вероятность, что хорды с серединой в этой точке больше радиуса?

г) Решите аналогичные задачи про хорду длины $r\sqrt{3}$, где $r$ — радиус.

Замечание. Задачи а), б), в) как бы три варианта одной и той же: проведем случайную прямую, пересекающую данную окружность; какова вероятность, что длина высекаемой хорды больше радиуса? Но ответ в них разный (парадокс Бертрана)!

6. На окружности случайно выбраны три точки. Какова вероятность, что у треугольника с вершинами в этих точках: а) есть угол больше 30°? б) все углы больше 30°? в) все углы меньше 120°?

7. На отрезке случайно выбраны две точки. Какова вероятность, что из отрезков, на которые он разбит, можно составить треугольник?

8. Плоскость разбита сеткой прямых на а) квадраты; б) правильные треугольники со стороной 1. Какова вероятность, что монета диаметра 1, случайно брошенная на плоскость, закроет одну из вершин сетки?

9. Найдите вероятность того, что

а) выпуклый $n$-угольник с вершинами в случайных точках окружности содержит ее центр?

б) Докажите, что вероятность того, что $n$ случайно выбранных точек на сфере лежат на одной полусфере (по одну сторону от некоторого большого круга) равна $(n^2-n+2)/2^n$.

# Конкурс «Математика 6—8»

***Журнал «Квант» совместно с болгарским молодежным журналом «Математика» продолжает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 27 задач (по 3 в каждом номере) и закончится в мае этого года. Победители будут награждены призами журнала «Квант» и «Математика».***

***Решение задач из этого номера высылайте не позднее 15 марта 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.***

13. Бабушка раздавала внукам яблоки. Первому внуку она дала 1 яблоко и 1/10 часть оставшихся, второму — 2 яблока и 1/10 часть оставшихся, третьему — 3 яблока и 1/10 часть оставшихся и т. д. до тех пор, пока яблоки не кончились. Оказалось, что все внуки получили яблок поровну. Сколько было внуков и по сколько яблок они получили?

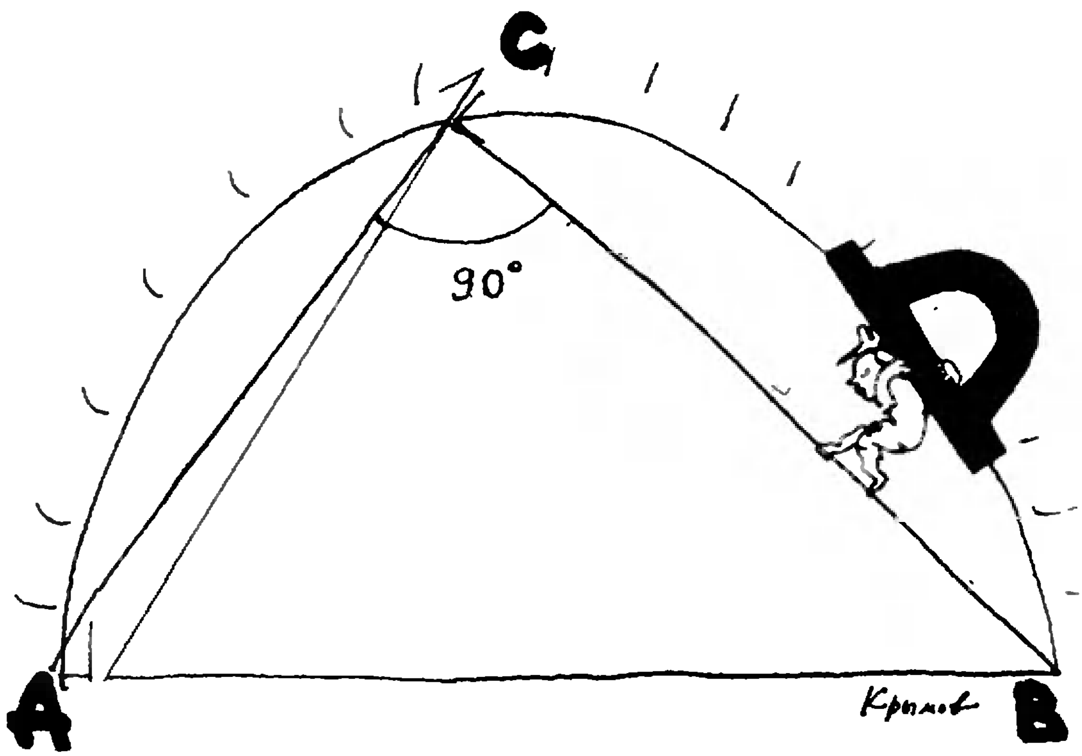
*А. Кючуков, Х. Христов*

14. Телефонные номера в городе $N$ состоят из пяти цифр, причем первая цифра не является нулем. Счастливым называется такой номер, в котором все цифры различны и расположены в убывающем или возрастающем порядке. (Например, 12345 — счастливый номер, а 11234 или 10234 — нет.) Найдите число всех счастливых номеров в городе $N$.

*П. Кожухов*

15. Найдите все натуральные числа $n$, обладающие следующим свойством: если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяют равенству $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$, то $x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n-n\cdot x_1x_2\ldots x_n=0$.

*П. Кожухов*




Практикум абитуриента

# Об углах и окружностях

*Кандидат физико-математических наук*
*В. УРОЕВ,*
*кандидат физико-математических наук*
*М. ШАБУНИН*

*...Иль треугольник в поле полукружья,*
*Но не прямоугольный начертить.*
Данте. Божественная комедия. Рай.

Треугольник, о котором пишет Данте, построить нельзя (рис. 1). Этот факт автор бессмертной поэмы приводит наряду с другими научными истинами, которые, видимо, считались общеизвестными в кругу образованных современников. Здесь уместно напомнить годы жизни великого Данте Алигьери — 1265—1321, а также заметить, что математикой Данте не занимался и вошел в историю как поэт и философ, создатель итальянского литературного языка.

В нашей статье пойдет речь как о треугольниках, вписанных «в поле полукружья», так и о других конфигурациях, для изучения которых необходима

**Теорема 1** (о вписанном угле). *Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.*

Часто пользуются эквивалентной формулировкой теоремы 1:

*Пусть $\alpha$ — центральный угол, опирающийся на дугу $AnB$ данной окружности (рис. 2). Тогда из точек, принадлежащих дуге $AmB$, хорда $AB$ видна под углом $\alpha/2$.*

Заметим, что в силу этой теоремы угол, опирающийся на диаметр — прямой, поэтому вписанный «в поле полукружья» треугольник обязательно прямоугольный. Этим удобно воспользоваться, например, в следующей задаче.

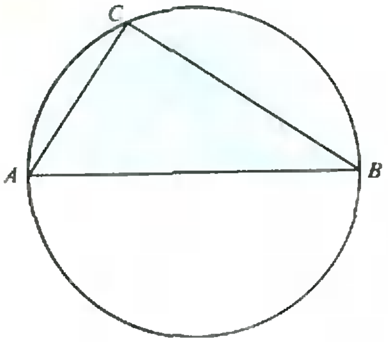



*Рис. 1.*

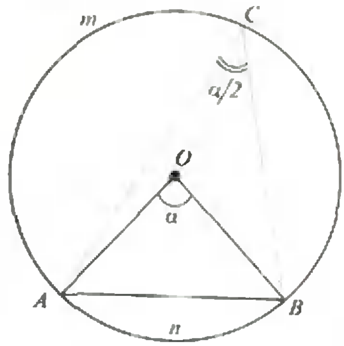



*Рис. 2.*

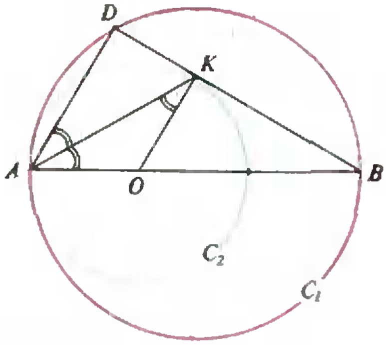



*Рис. 3.*

З а д а ч а 1. *На отрезке $AB$ как на диаметре построена окружность $C_1$, $BD$ — ее хорда. Окружность $C_2$ касается $C_1$ в точке $A$ и отрезка $BD$ в точке $K$. Докажите, что $AK$ — биссектриса угла $DAB$ (рис. 3).*

Р е ш е н и е. Центр $O$ окружности $C_2$ лежит на диаметре $AB$ окружности $C_1$. Радиус $OK$, проведенный в точку касания, перпендикулярен $BD$. Угол $ADB$ прямой, т. к. опирается на диаметр, поэтому отрезки $AD$ и $OK$ параллельны, а углы $DAK$ и $AKO$ равны как накрест лежащие. В равнобедренном треугольнике $AOK$ углы $AKO$ и $KAO$ равны, следовательно, $AK$ делит угол $DAB$ пополам.

Однако чаще приходится пользоваться простым следствием теоремы 1:

*Углы, вписанные в окружность и опирающиеся на одну и ту же дугу или на равные дуги, равны.*

Общий принцип подхода к решению задач, в которых участвуют окружности, такой: искать всевозможные вписанные углы, для чего проводить различные хорды. Чем больше найдем равных вписанных углов, тем яснее будет виден путь, ведущий к решению.

З а д а ч а 2. *В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, через вершины $A$, $B$ и точку $P$ пересечения диагоналей проведена окружность, пересекающая сторону $BC$ в точке $E$. Докажите, что если $AB=AD$, то $CD=CE$ (рис. 4).*

Р е ш е н и е. Проведем хорду $AE$ и найдем равные вписанные углы. Такими углами в одной окружности будут $DAC$ и $DBC$, а в другой — $PAE$ и $PBE$. Следовательно, $\angle DAC=\angle CAE$. Кроме того, равны опирающиеся на равные дуги углы $DCA$ и $ACB$. Отсюда следует равенство треугольников $DCA$ и $ECA$ и, соответственно, их сторон $DC$ и $EC$.

У п р а ж н е н и е 1. Докажите следующую теорему о хордах. Пусть хорды $AB$ и $CD$ данной окружности пересекаются в точке $M$. Тогда $AM\cdot MB=CM\cdot MD$. (Это произведение, не зависящее от выбора хорды, называется степенью точки $M$ относительно данной окружности.)

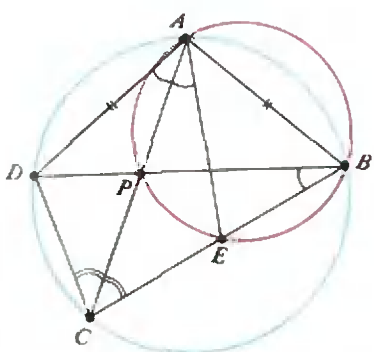



*Рис. 4.*

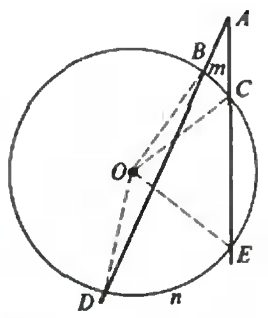



*Рис. 5.*

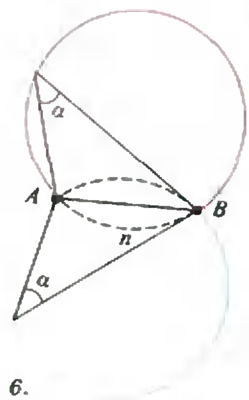



*Рис. 6.*

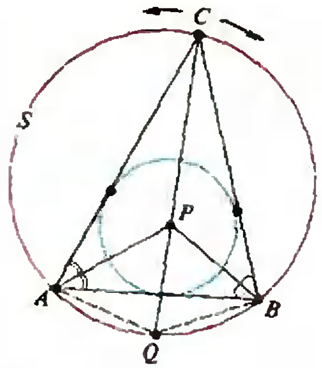



Рис. 7.

Часто оказывается полезной формула для величины угла с вершиной вне или внутри окружности.

Упражнение 2. а) Пусть угол с вершиной $A$, лежащей вне окружности, высекает на ней дуги $BmC$ и $DnE$ (рис. 5). Докажите, что в этом случае величина угла равна половине разности центральных углов, опирающихся на эти дуги, т. е. $\angle DAE = {}^1/_2(\angle DOE - \angle BOC)$.

б) Самостоятельно сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для угла с вершиной внутри окружности.

Теорема 1 доказывается в школьном курсе. Нам потребуется существенно более общая теорема.

Теорема 2. *Геометрическое место точек, из которых данный отрезок $AB$ виден под некоторым углом $\alpha$, состоит из двух дуг окружностей, симметричных друг другу* (рис. 6).

Доказательство. То, что из любой точки, лежащей на одной из дуг, отрезок $AB$ виден под углом $\alpha$, вытекает из теоремы 1. Надо доказать *обратное* утверждение, т. е., что *любая* такая точка лежит на одной из дуг. Но это следует из упражнения 2. В самом деле, если точка $C$ лежит вне фигуры, ограниченной дугами, то $\angle ACB < \alpha$, а если внутри, то $\angle ACB > \alpha$. Теорема доказана.

Теорема 2 часто используется в задачах на построение.

Упражнение 3. Постройте треугольник

а) по углу, противолежащей стороне и проведенной к ней высоте;

б) по углу, противолежащей стороне и проведенной к ней медиане.

Задача 3. *Точка $C$ движется по дуге окружности $S$, стягиваемой хордой $AB$. Найти траекторию движения точки $P$, являющейся центром вписанной в треугольник $ABC$ окружности.*

Решение. Точка $P$ лежит на пересечении биссектрис треугольника $ABC$ (рис. 7). Следовательно, из треугольника $ABP$ получим следующие соотношения:

$$\angle APB = 180^\circ - \left(\frac{1}{2}\angle CAB + \frac{1}{2}\angle CBA\right) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACB) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ACB.$$

Величина угла $ACB$ не меняется (по теореме 1), поэтому величина угла $APB$ также постоянна. В таком случае, согласно теореме 2, точка $P$ целиком пробегает дугу окружности, проходящей через точки $A$ и $P$. Позже будет установлено, что центром этой окружности является точка $Q$ — середина дуги $AB$.

Теорема 2 позволяет выяснить, принадлежит ли какое-либо множество точек одной окружности.

Из теоремы 2, в частности, вытекает важное следствие:

*Вершина прямоугольного треугольника лежит на окружности, построенной на его гипотенузе как на диаметре.*

Упражнения

4. Диаметры $AB$ и $CD$ окружности радиусом $R$ пересекаются под углом $\alpha$. Из произвольной точки $M$ окружности на эти диаметры опущены перпендикуляры $MP$ и $MQ$. Докажите, что длина отрезка $PQ$ не зависит от выбора точки $M$, и найдите $PQ$.

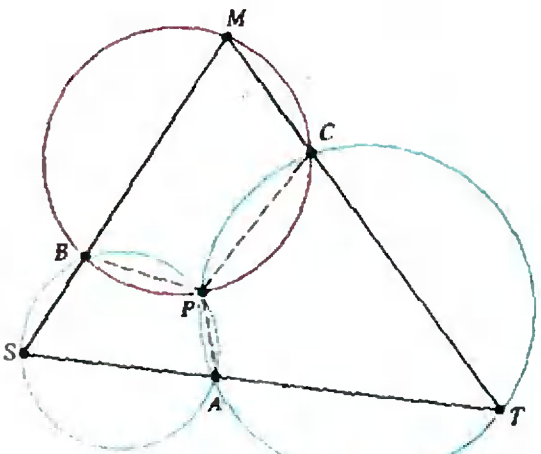



Рис. 8.

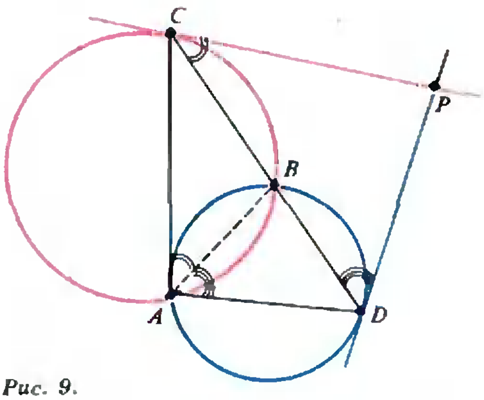



*Рис. 9.*

5. Вершины $A$ и $B$ острых углов прямоугольного треугольника $ABC$ скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым. Найдите траекторию движения вершины $C$ прямого угла.

В следующих двух упражнениях следует воспользоваться тем, что основания высот $BD$ и $CE$ треугольника $ABC$ лежат на окружности, построенной на стороне $BC$ как на диаметре.

Упражнения

6. В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $BD$ и $CE$. Из вершин $B$ и $C$ на прямую $ED$ опущены перпендикуляры $BF$ и $CG$. Докажите, что $EF=DG$.

7. Докажите, что высоты треугольника $ABC$ являются биссектрисами треугольника $DEK$, образованного основаниями высот треугольника $ABC$.

**Задача 4.** *На сторонах четырехугольника как на диаметрах построены четыре круга. Докажите, что они покрывают весь четырехугольник.*

**Решение.** Если бы внутри четырехугольника нашлась точка, не принадлежащая ни одному из четырех кругов, то каждая сторона была бы видна из этой точки под острым углом. А это невозможно, т. к. сумма всех четырех углов равна 360°.

Следствием теорем 1 и 2 является следующий признак вписанного четырехугольника:

*Четырехугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°.*

**Задача 5.** *Три окружности проходят через точку $P$ и попарно пересекаются в точках $A$, $B$ и $C$. Из произвольной точки $M$ первой окружности через точки $B$ и $C$ проводятся прямые, пересекающиеся с другими окружностями в точках $S$ и $T$ (рис. 8). Докажите, что отрезок $ST$ проходит через точку $A$.*

**Решение.** Из свойств вписанных четырехугольников $MBPC$, $BPAS$, $CPAT$ вытекают следующие соотношения:

$$\angle BPC=180°-\angle M,$$
$$\angle BPA=180°-\angle S,$$
$$\angle CPA=180°-\angle T.$$

Суммируя полученные равенства, получаем

$$360°=\angle BPC+\angle BPA+\angle CPA=$$
$$=180°\cdot 3-(\angle M+\angle S+\angle T),$$

откуда $\angle M+\angle S+\angle T=180°$. Следовательно, четырехугольник $MSAT$ является треугольником, т. е. угол $SAT$ — развернутый.

Для решения следующей задачи недостаточно знать, когда четырехугольник является вписанным. Нужна еще чрезвычайно полезная

**Теорема 3.** *Угол между хордой и касательной измеряется половиной заключенной между ними дуги.*

Упражнение 8. Докажите теорему 3.

**Задача 6.** *Две окружности пересекаются в точках $A$ и $B$. Через точку $B$ проводится прямая, пересекающая окружности в точках $C$ и $D$, а затем через точки $C$ и $D$ проводятся касательные к этим окружностям (рис. 9). Докажите, что точки $A$, $C$, $D$ и точка $P$ пересечения касательных лежат на одной окружности.*

**Решение.** Проведем хорду $AB$ и заметим, что, согласно теоремам 1 и 3, следующие углы попарно равны: $\angle BAD=\angle BDP$, $\angle CAB=\angle BCP$, откуда $\angle CAD=\angle BAD+\angle CAB=\angle BDP+\angle BCP=180°-\angle CPD$. Таким образом, выполняется критерий существования описанной окружности.

Упражнения

9. Прямые $l_1$ и $l_2$ касаются окружности в точках $A$ и $B$. Точка $M$ окружности удалена от прямых $l_1$ и $l_2$ на расстояния $a$ и $b$ соответственно. Докажите, что $M$ находится на расстоянии $\sqrt{ab}$ от прямой $AB$.

10. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке $D$. Прямая касается одной из этих окружностей в точке $A$ и пересекает другую в точках $B$ и $C$. Докажите, что точка $A$ равноудалена от прямых $BD$ и $CD$.

11. Доказать теорему о касательной и секущей. Пусть прямая $AP$ касается данной окружности в точке $P$; а прямая $AB$ пересекает эту

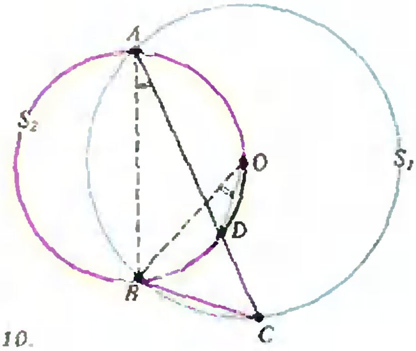



Рис. 10.

окружность в точках $B$ и $C$. Тогда $AP^2 = AB \cdot AC$ (это произведение, не зависящее от выбора секущей, называется индексом точки относительно окружности; сравните с упражнением 1).

12. Докажите, что центр окружности, по которой вынуждена двигаться точка $P$ в задаче 3, является серединой $Q$ дуги $AB$ (рис. 7).

Задача 7. *Окружности $S_1$ и $S_2$ пересекаются в точках $A$ и $B$, центр $O$ окружности $S_1$ лежит на окружности $S_2$. Хорда $AC$ окружности $S_1$ пересекает окружность $S_2$ в точке $D$ (рис. 10). Докажите, что отрезки $OD$ и $BC$ перпендикулярны.*

Решение. Углы $BAD$ и $BOD$ равны как вписанные в окружность $S_2$, $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$ как вписанный и центральный углы в окружности $S_1$. Следовательно, $\angle BOD = \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BOC$, поэтому $OD$ — биссектриса угла $BOC$. В равнобедренном треугольнике $BOC$ биссектриса является высотой.

Задача 8. *В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) угол $ADB$ в два раза меньше угла $ACB$, $BC = AC = 5$, $AD = 6$. Найдите площадь $S$ трапеции.*

Ответ: $S = 22$.

Указание. Задачу можно решать стандартным способом, например, обращаясь к теореме косинусов. Однако задача решается значительно быстрее, если заметить, что по теореме 2 точка $D$ лежит на окружности с центром в точке $C$, проведенной через точки $A$ и $B$.

## Информация

# Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Малый механико-математический факультет — математическая школа при механико-математическом факультете МГУ — объявляет прием учащихся, оканчивающих восьмые классы одиннадцатилетней общеобразовательной школы, на заочное отделение. Зачисление на Малый мехмат производится по результатам решения задач вступительной работы, опубликованной ниже.

Основной задачей Малого механико - математического факультета (МММФ) является приобщение к математике, углубление знаний в рамках школьной программы, а также расширение математического кругозора учащихся средних школ.

Занятия на заочном отделении начинаются в октябре. Обучение на Малом мехмате бесплатное. Срок обучения три года. Учащиеся заочного отделения, успешно выполнившие все задания, получают удостоверения об окончании МММФ. Учащиеся, успешно закончившие 9-й или 10-й классы, рекомендуются для поступления в физико-математическую школу-интернат при МГУ.

Преподавателями на заочном отделении МММФ работают аспиранты и студенты механико - математического факультета МГУ. Разработку тематических брошюр осуществляет методический совет МММФ, состоящий из профессоров и преподавателей механико-математического факультета.

Желающие поступить на Малый мехмат должны не позднее 1 мая 1991 года выслать в адрес МММФ решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все предложенные задачи). Работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. На обложку тетради наклейте тетрадный лист бумаги со следующими данными:

1) республика, край, область;

2) фамилия, имя учащегося;

3) школа и класс;

4) полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения);

5) фамилия, имя, отчество родителей, место их работы и должность.

В работу вложите листок бумаги $4 \times 6$ см, на котором напишите полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения) и вышлите по адресу: 119899, Москва, МГУ, Малый мехмат.

Примечание

Для школьников 8—11 классов Москвы и ближнего Подмосковья работает вечернее отделение МММФ. Справки по тел. 939-39-43.

**Задачи вступительной работы на Малый механико-математический факультет в 1991 году**

1. Какое из чисел больше: $\sqrt[3]{28}$ или $\sqrt[4]{85}$?

2. Имеет ли уравнение

$$x^2+\frac{p_1+p_2}{2}x+\frac{q_1+q_2}{2}=0$$

хотя бы одно решение, если каждое из уравнений $x^2+p_1x+q_1=0$ и $x^2+p_2x+q_2=0$ решений не имеет?

3. Даны семь чисел. Сумма любых трех из них равна 0. Что это за числа?

4. Докажите, что сумма расстояний от любой точки правильного шестиугольника до его вершин не меньше его периметра.

5. Докажите, что для любых целых чисел $n_1, \ldots, n_{1991}$ число

$$|n_1-n_2|+|n_2-n_3|+\ldots+|n_{1990}-n_{1991}|+|n_{1991}-n_1|$$

является четным.

6. Докажите, что любое натуральное число, десятичная запись которого состоит из $5n$ единиц, делится на 41.

7. Одновременно навстречу друг другу выехали из двух пунктов два автомобиля. Через какое время они встретятся, если известно, что при увеличении скорости первого в два раза они встретились бы на четверть часа раньше, а при неизменной первоначальной скорости первого и удвоенной второго — на 24 минуты раньше?

8. Можно ли расположить на плоскости 7 точек и так соединить некоторые из них отрезками, чтобы отрезки не пересекались и из каждой точки выходило ровно 3 отрезка?

9. Найдите все пары натуральных $m$ и $n$, удовлетворяющих уравнению $19m+91n=1991$.

10. Команды *А* и *Б* играют в волейбол. Спонсор соревнований учредил специальный приз, который получит команда, сделавшая так, что при подаче команды *А* 26-е касание мяча придется на другую команду (считаем, что после подачи мяч достаточно долго находится в игре). Может ли *А* так играть, чтобы обязательно выиграть специальный приз? Напомним, что при подаче производится одно касание, на стороне одной команды производится до передачи на другую от 1 до 3 касаний.

# Новый прием во Всесоюзную заочную многопредметную школу на отделения «Математика» и «Языки и литература»

Всесоюзная заочная многопредметная школа Академии педагогических наук СССР при Московском университете им. М. В. Ломоносова*) принимает на индивидуальное обучение учащихся восьмых классов общеобразовательных школ и СПТУ, за исключением проживающих в Москве и Ленинграде.

Цель ВЗМШ — рассказать своим ученикам о многих увлекательных вещах, связанных со школьным курсом соответствующих предметов, научить решать интересные разнообразные задачи, приучить самостоятельно работать с книгой и грамотно, четко и кратко излагать свои мысли на бумаге. Всем успешно окончившим ВЗМШ (в том числе ее филиалы и группы «Коллективный ученик») выдаются соответствующие удостоверения.

Для поступления в ВЗМШ надо хорошо выполнить вступительную контрольную работу, помещенную ниже. Преимуществами поступления пользуются ребята, проживающие в сельской местности, рабочих поселках и небольших городах.

Чтобы быть принятым в ВЗМШ, не обязательно решить все задачи. Решения задач надо выполнить на русском языке в ученической тетради в клетку. Эта тетрадь высылается простой бандеролью; не сворачивайте ее в трубку. На обложку тетради наклейте листок бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу:

| | |
|---|---|
| Область | Московская |
| Фамилия, имя ученика | Иванов Петр |
| Год рождения | 1977 |
| Класс и школа | 8 класс «В» школы № 2 |
| Фамилия, имя, отчество учителя математики | Орлов Борис Петрович |
| Место работы и должность родителей | Отец — шофер автобазы № 3<br>Мать — медсестра Городской больницы № 1 |
| Полный почтовый адрес (с указанием почтового индекса) | 123456, Клин, ул. Строителей, д. 1, кв. 1 |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6а | 6б | 7 | 8 | 9 | 10а | 10б | Всего |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | |

*) Так теперь называется бывшая Всесоюзная заочная математическая школа, которая имеет сейчас 3 отделения: «Математика», «Биология», «Языки и литература».

В тетрадь вложите два листа бумаги размером 6×14 см с четко написанным Вашим адресом (включая индекс), фамилией и именем, а также конверт с адресом.

Задачи в работе должны идти в том же порядке, что и у нас; запишите сначала условие, потом — решение.

Срок отправки вступительной работы — не позднее 15 марта 1991 года (по почтовому штемпелю).

Если Вы выдержите конкурс, то начиная с сентября 1991 года будете получить наши задания, которые содержат теоретический материал и задачи для самостоятельного решения, а также контрольные задачи. Все контрольные работы будут проверяться и подробно рецензироваться преподавателями ВЗМШ — студентами, аспирантами и преподавателями МГУ и других вузов, в которых имеются филиалы ВЗМШ. Филиалы работают по тем же программам и пособиям, что и московская группа ВЗМШ.

Предполагается, что часть заданий будет даваться по журналу «Квант», поэтому рекомендуем на него подписаться (это можно сделать без ограничений с любого месяца в любом отделении связи; подписной индекс 70 465; журнал распространяется только по подписке).

**Для поступающих на отделение «Математика»**

Вступительную работу надо выслать по адресу: 119823, Москва, ГСП, МГУ, ВЗМШ (на прием), отделение «Математика» или по адресу соответствующего филиала.

Филиалы ВЗМШ при университетах имеются в городах: Воронеж, Гомель, Донецк, Душанбе, Запорожье, Иваново, Ижевск, Казань, Краснодар, Красноярск, Куйбышев, Махачкала, Одесса, Ростов-на-Дону, Свердловск, Ташкент, Фрунзе, Чебоксары, Челябинск, Черновцы, Элиста, Ярославль; филиалы при педагогических институтах — в городах: Абакан, Бирск, Благовещенск, Брянск, Витебск, Киров, Ленинабад, Луцк, Магадан, Павлодар, Смоленск, Тернополь, Ульяновск, Уральск, Целиноград, Череповец, Чита, Южно-Сахалинск; работают также филиалы в Дубне при Объединенном институте ядерных исследований, в Могилеве — при областном Дворце пионеров и школьников.

Учащиеся, проживающие на северо-западе РСФСР (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми АССР), в прибалтийских республиках и в Белоруссии (кроме Витебской, Гомельской и Могилевской областей), присылают свои работы по адресу: 197136, Ленинград, Чкаловский пр., 25ª, С-3 ЗМШ (на прием).

Школьники и учащиеся СПТУ, не успевшие или не сумевшие поступить в ВЗМШ на индивидуальное обучение, имеют возможность заниматься по той же программе в группах «Коллективный ученик».

Каждая такая группа — это математический кружок, работающий под руководством учителя математики по программе ВЗМШ и по ее пособиям. Прием в эти группы проводится до 1 октября 1991 года на два потока: для тех, кто с сентября 1991 года начнет учиться в 9 классе, и для тех, кто начнет учиться в 10 классе (соответственно для учащихся I и II курсов СПТУ). Прием в группы проводится без конкурса. Для зачисления достаточно заявления учителя математики, руководящего кружком, с приложением списка учащихся и указанием класса, в котором они будут учиться в 1991/92 учебном году.

Заявление должно быть подписано директором школы (СПТУ) и заверено печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик» ВЗМШ может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия. Заявление следует направлять в адрес ВЗМШ.

Без контрольной работы, только по заявлениям, принимаются на индивидуальное обучение участники Всесоюзной и республиканской, а также победители краевых и областных олимпиад по математике для школьников и учащихся СПТУ.

**Для поступающих на отделение «Языки и литература»**

Все поступающие на отделение «Языки и литература» независимо от места проживания высылают решения вступительной работы по адресу: 119828, Москва, ГСП, МГУ, ВЗМШ (на прием), отделение «Языки и литература».

Принимаются также группы «Коллективный ученик» под руководством учителя русского языка и литературы, родного языка или иностранного языка.

**Вступительная работа («Математика»)**

1. Расстояние от деревни Воробьево до деревни Грачево составляет целое число километров. Чему может быть равно это расстояние, если известно, что от Воробьева до деревни Дроздово — 2,5 километра, а от Грачева до Дроздова — 1,3 километра?

2. В равнобочной трапеции боковая сторона равна меньшему основанию, а диагональ — большему. Найдите углы трапеции.

3. В библиотеке не более 5000 книг. Если их связывать по 5, по 6 или по 7 книг в пачку, то каждый раз остается одна лишняя книга, а если связывать по 11 книг, то лишних книг не остается. Сколько книг в библиотеке?

4. Найдите все пары целых положительных чисел $(x, y)$ таких, что

$$xy = x + y + 1990.$$

5. Из двух концов $A$ и $B$ шоссейной дороги одновременно стартуют два велосипедиста навстречу друг другу. Один проезжает весь путь $AB$ за 21 минуту, другой — за 19 минут. Доезжая до $A$ или $B$, каждый из них мгновенно разворачивается и едет в обратном направлении. Сколько раз они встретятся лицом к лицу, прежде чем второй нагонит первого сзади?

6. Два круга, радиусы которых $R$ и $r$, касаются одной и той же прямой в точках $A$ и $B$ соответственно, а также друг друга.

а) Найдите отрезок $AB$.

б) Найдите радиус круга, касающегося обоих данных кругов и их общей касательной.

7. Про 7 московских математиков известно, что каждый из них в течение 1991 года не менее 210 дней проведет за рубежом. Докажите, что в какой-нибудь день 1991 года в Москве будет не более двух математиков из этих семи.

8. В стране Плюралии некоторые жители всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. Как-то собрались четыре жителя этой страны, и между ними произошел такой разговор:

1-й: По крайней мере один из нас — лжец.
2-й: По крайней мере двое из нас — лжецы.
3-й: По крайней мере трое из нас — лжецы.
4-й: Среди нас нет лжецов.

Кто из них четверых — лжец, а кто всегда говорит правду?

9. Про некоторое число сделано шесть утверждений:

а) число делится на 3;
б) число делится на 5;
в) число делится на 9;
г) число делится на 15;
д) число делится на 25;
е) число делится на 45.

Перечислите все двузначные числа, для которых три из этих утверждений истинны, а три — ложны.

10. а) Можно ли замостить плоскость равными пятиугольниками?

б) Тот же вопрос про пятиугольники, у которых нет параллельных сторон.

**Вступительная работа («Языки и литература»)**

1. Даны следующие высказывания:

Мальчик исправил полученную двойку.
Многое в тот вечер было им рассказано.
В комнате стояла одна кровать.
Ты его больше слушай: старик — мастер рассказывать сказки.

Задание. Объясните, почему возникла двусмысленность высказываний. Укажите, что нужно сделать для ее устранения.

2. Даны пять синонимов: бегло, торопливо, мимоходом, мельком, наспех.

Задание. Придумайте с каждым из пяти синонимов такое предложение, в котором это слово нельзя было бы заменить ни одним из четырех остальных. Синонимы являются неполными, так как для каждого из них возможно подобрать такое предложение, что замена одного слова другим будет невозможна.

3. Иностранец (англичанин, немец, француз) в разговоре с Вами допустил ошибку в русском языке, сказав: «Я буду пойти гулять».

Задание. Объясните ему, в чем состоит его ошибка. Почему он ее допустил?

4. Одна из наиболее известных работ К. Маркса называется «Восемнадцатое брюмера Луи Бонапарта».

Задание. Укажите, что обозначает в этом заглавии слово *брюмера* (укажите родовое понятие). Как это сделать, не прибегая к историческим сведениям?

Примечание. Пример родового понятия: кошка, собака, лиса — животные, понедельник, вторник, среда — дни недели.

5. Даны следующие слова: глубина, горошина, тишина, писанина, ширина, соломина, кружковщина, бисерина, свинина, долина, молодчина, быстрина, баранина, машина, ветчина, льдина.

Задание. Разберите данные слова по составу. Слова, в которых можно выделить суффикс *ин*, объедините в группы в зависимости от значения этого суффикса.

6. Даны следующие русские слова, восходящие к латинским или построенные из латинских корней, суффиксов, приставок:

традиция — обычай, передаваемый из поколения в поколение,
контракция — сжатие (например, жидкости),
контрадикция — противоречивое высказывание,
экстрадиция — выдача иностранному государству лица, нарушившего его законы,
диктор — лицо, читающее перед микрофоном текст (радио- или телепередачи),
акция — действие, предпринимаемое для достижения какой-либо цели,
экстрактор — аппарат для удаления, извлечения,
дикция — манера произношения.

Задание 1. Разделите каждое слово на те значащие части (корень, приставку, суффикс), из которых оно состоит, и укажите значение каждой значащей части.

Задание 2. Укажите еще 2—3 русских слова, состоящих из выделенных вами значащих частей. Для каждого из этих новых слов укажите значащие части, из которых оно составлено.

7. Даны выражения на языке одного из народов Мексики с их переводами на русский язык:

pan — мужчина
pənt'am — мужчины
pənkotoya — для мужчины
pənhi'ŋ — с мужчиной
yomo — женщина
nanah — мать
nanaht'am — матери
nanakotoya — для матери

'unehi'ŋ — с ребенком
'unehi'ŋta'm — с детьми
yomohi'ŋ — с женщиной
te'pən — этот мужчина
maŋute'pən — этот мужчина шел
maŋpate'pan — этот мужчина идет
minpate''une — этот ребенок приходит
minute''une — этот ребенок пришел

Задание 1. Переведите на русский язык: 'unekotoya; yomohi'ŋta'm; maŋpatə'yomo. Поясните ваше решение.

Задание 2. Переведите на язык народа Мексики: эта женщина, для женщин, эта женщина пришла. Ваши решения обязательно поясните.

8. Даны некоторые числа и их обозначения в системе, разработанной знаменитым математиком VI века н. э. Ариабхатой и встре-

чающейся в математических и астрономических трактатах того времени (Ариабхата, разумеется, пользовался знаками древнеиндийского письма; здесь они переданы русскими буквами):

2 — кха
214 — дхакхи
1428 —

2311 — таби
280011 — такху
111400 — дхиту

141102 — кхатидху
280023 — бабу
280211 —

**Задание 1.** Заполните пропуски и объясните ваше решение.

**Задание 2.** Какие числа передают в системе Ариабхаты записи бхатхи и даки, если известно, что запись набхи обозначает 2401, а тхаку — 10012? Объясните ваше решение.

**Примечание.** Сочетание согласного с *х* обозначает единый звук, отличающийся от соответствующего простого только тем, что произносится с придыханием.

9. Какова композиция поэмы М. Ю. Лермонтова «Мцыри»?

10. Кто, по вашему мнению, является главным героем повести А. С. Пушкина «Капитанская дочка». Аргументируйте свой ответ.

11. Назовите несколько произведений, написанных на один и тот же сюжет. Почему разные авторы прибегали к одному сюжету?

12. Что сближает Василия Теркина с героями народных сказок и былин? Назовите эти сказки и былины.

Ряд заданий предлагался в разные годы на олимпиадах по лингвистике и математике.

# Четвертый международный турнир по математике «Дружба — 90»

С 26 по 31 мая 1990 года на курорте Старозагорские минеральные источники проходил IV турнир по математике «Дружба — 90», в котором приняли участие 65 учащихся 8—11 классов из Болгарии (Стара-Загора, Казанлык, Хасково, Шумен, Кырджали, Габрово и Велико-Тырново), Польши (Легница), СССР (Сосновый Бор, Белорецк, Евпатория, Ереван, Алма-Ата) и Румынии (Брашов). Право выступить в турнире участники получили по результатам двух заочных туров конкурса «Дружба — 90». Организатором турнира является школьный центр по математике и информатике в городе Стара-Загора.

Турнир проходил два дня, отдельно для 8—9 и 10—11 классов. В первый день победили Иван Дайков (8 кл., Казанлык), Николетта Войку (9 кл., Брашов), Казимира Георгиева (11 кл., Хасково), Ольга Дубова (11 кл., Белорецк).

Победителями второго дня стали Надежда Христова (8 кл., Хасково), Богдан Соцеа (8 кл., Брашов), Камен Лозев (9 кл., Хасково), Евгений Цыганов (9 кл., Белорецк), Михай Паску (11 кл., Брашов) и Стефан Станчиу (11 кл., Брашов).

В общем зачете победили: Михай Паску, 41 очко из 42, Стефан Станчиу — 40, Евгений Цыганов — 39 и Камен Лозев — 39.

Следующий турнир предполагается провести в польском городе Легнице.

Предлагаем вам несколько задач IV турнира.

1 (8 кл.). Точка $M$ — середина стороны квадрата $ABCD$, а $P$ — основание перпендикуляра, опущенного из вершины $C$ на прямую $BM$. Докажите, что $DP=DC$.

2 (8 кл.). Числа $a$, $b$, $c$ — целые взаимно простые и

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}.$$

Докажите, что $a-b$, $a-c$, $b-c$ — квадраты целых чисел.

3 (8 кл.). Докажите, что не существует натуральных чисел $x$, $y$, для которых

$$7^x-1=12(2y+1)^2.$$

4 (9 кл.). Найдите наибольшее натуральное число $n$, для которого $n^2+1990n$ есть квадрат целого числа.

5 (9 кл.). В угол с вершиной $O$ вписана окружность и на ней выбраны две диаметрально противоположные точки $A$ и $B$, отличные от точек касания со сторонами угла. Через $B$ проведена касательная к окружности, которая пересекает стороны угла в точках $C$ и $D$. Прямая $OA$ пересекает $CD$ в точке $E$. Докажите, что $BC=DE$.

6 (9 кл.). Докажите, что не существует положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n\geqslant 3$), для которых

$$\begin{cases} x_1+\dfrac{x_2}{2^2}+\dfrac{x_3}{3^2}+\ldots+\dfrac{x_n}{n^2}=\dfrac{n-2}{n+1}, \\ \dfrac{1}{2^2x_1}+\dfrac{1}{3^2x_2}+\dfrac{1}{4^2x_3}+\ldots \\ \qquad \ldots+\dfrac{1}{(n+1)^2x_n}=\dfrac{n+2}{n+1}. \end{cases}$$

7 (10 кл.). Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ составляют арифметическую прогрессию. Числа $\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_n$ также образуют арифметическую прогрессию. Известно, что

$$\cos\alpha_1=\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \cos\alpha_n=-\frac{1}{2}.$$

Найдите $n$.

8 (10 кл.). Какую наибольшую площадь может иметь треугольник, одна из сторон которого $d$, а две его медианы пересекаются под прямым углом?

9 (10 кл.). Найдите все целые числа $a$, $b$, $c$, для которых $a^2+b^2+c^2=1990abc$.

*Л. Любенов (Болгария)*

# Заочный вступительный экзамен в ФМШ при МГУ и НГУ

Специализированные учебно-научные центры МГУ им. М. В. Ломоносова и НГУ им. М. А. Лаврентьева, созданные на базе школ-интернатов при этих университетах, проводят заочные вступительные экзамены по математике и физике для учащихся 9-х и 10-х классов 11-летней школы, интересующихся математикой и физикой. По решению приемной комиссии успешно выдержавшие заочный экзамен будут приглашены на очный устный экзамен, который будет проходить в мае 1991 года в областных центрах СССР. Работу необходимо выполнить в тетради. На первой странице укажите данные:

1. Фамилия, имя, отчество (полностью);
2. Домашний адрес (подробный), индекс;
3. Подробное наименование школы и класс.

Работы отправляйте простыми бандеролями. Школьникам, проживающим в Европейской части СССР, следует высылать свои работы по адресу: 121357, Москва, Кременчугская ул., 11, ФМШ МГУ, приемная комиссия, заочный экзамен. Школьники, проживающие в Сибири, на Дальнем Востоке и в Средней Азии, высылают свои работы по адресу: 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 6, учебно-научный центр НГУ, Олимпиадный комитет. Срок отправки работ — не позднее 15 марта 1991 года (по почтовому штемпелю). Работы, высланные позже этого срока, рассматриваться не будут. Если вы не сможете решить все задачи, не огорчайтесь — будут рассматриваться работы с любым числом решенных задач. Желаем успеха!

**9 класс**

1. Докажите, что среди чисел 2, 8, 14, ..., $2+6n$, ... ($n$ — натуральное) нет ни одного квадрата натуральных чисел.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x(y+z)=35, \\ y(x+z)=32, \\ z(x+y)=27. \end{cases}$$

3. На сторонах или на продолжении сторон квадрата $ABCD$ расположены точки $P$, $Q$, $R$, $S$ так, что $AP/PB=BQ/QC=RC/DR=DS/SA=1/3$. Отрезки $AQ$, $BR$, $SC$, $DP$ ограничивают четырехугольник $KLMN$. Вычислите площадь четырехугольника $KLMN$.

4. Высота прямоугольного треугольника равна 2, разность между проекциями катетов на гипотенузу равна 3. Найдите гипотенузу и катеты этого треугольника.

5. Найдите все простые числа $p$, для которых число $20p^2+1$ также будет простым.

6. С башни вертикально вниз с некоторой начальной скоростью бросают камень. Первый метр пути камень пролетает за время $t_1=0{,}2$ с, а последний — за $t_2=0{,}1$ с. Какова высота башни $h$? Ускорение свободного падения $g=10$ м/с$^2$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

7. Человек, масса которого $M=72$ кг, бежит по длинной доске с ускорением $a_0=0{,}5$ м/с$^2$ относительно доски. Доска лежит на гладком полу. Ее масса $m=18$ кг. С каким ускорением доска движется относительно пола?

8. На горизонтальной поверхности лежат два тела с массами $m_1=2{,}5$ кг и $m_2=3{,}5$ кг, прикрепленные к концам пружины с коэффициентом жесткости $k=50$ Н/м. Длина пружины в недеформированном состоянии $l_0=0{,}2$ м. На какое максимальное расстояние $x$ друг от друга могут быть удалены тела, чтобы они оставались в покое, если коэффициент трения между телами и поверхностью $\mu=0{,}2$?

9. Три электровоза идут по трем параллельным путям, отстоящим друг от друга на равных расстояниях. Электровозы, идущие по крайним путям, движутся в противоположных направлениях со скоростями $v_1=80$ км/ч и $v_2=40$ км/ч. С какой скоростью $v$ должен двигаться электровоз, идущий по среднему пути, чтобы во время движения он все время находился на одной прямой с двумя другими?

**10 класс**

1. Докажите, что среди чисел 3, 9, 15, 21, ..., $3+6n$, ..., ($n$ — натуральное) содержится бесконечно много квадратов натуральных чисел.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+xy=19, \\ y+z+yz=11, \\ z+x+zx=14. \end{cases}$$

3. Найдите все пары действительных чисел $(x, y)$, удовлетворяющих условию

$$x^{[y]}\cdot y^{[x]}=x\cdot y$$

($[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее $x$).

4. На сторонах или продолжениях сторон квадрата $ABCD$ расположены точки $P$, $Q$, $R$, $S$ так, что $AP/BP=BQ/QC=RC/DR=DS/SA=\lambda/\mu$. Отрезки $AQ$, $BR$, $SC$ и $DP$ ограничивают четырехугольник $KLMN$. При каких $\lambda$, $\mu$ площадь четырехугольника $KLMN$ максимальна?

5. Дан неравнобедренный треугольник $ABC$. Точки $M$, $N$, $K$ — середины сторон $BC$, $AC$ и $AB$ соответственно. Найдите величину угла $C$, если известно, что центр окружности, описанной около треугольника $MNK$, лежит на биссектрисе угла $C$.

6. На какую величину $\Delta m$ уменьшится масса воздуха в открытом сосуде, если его нагреть от температуры $t_1=0$ °C до температуры $t_2=100$ °C? Начальная масса воздуха $m_1=100$ г. Изменением объема сосуда при нагревании пренебречь.

7. 56 г азота, находящегося под давлением $5\cdot10^5$ Па в объеме 10 л, сначала изохорически нагрели, а затем изобарически сжали до объема 5 л, совершив при этом работу $A=6700$ Дж. Определите разность температур газа в конечном и начальном состояниях. Молярная масса азота $M=0{,}028$ кг/моль, универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К).

8. Пуля массой $m=10$ г, летящая горизонтально, пробивает насквозь шар массой $M=1$ кг, подвешенный на нити длиной $l=3$ м, проходя через его центр, и вылетает

из шара со скоростью $v_1=150$ м/с. В результате шар начинает раскачиваться. При этих колебаниях наибольшее натяжение нити $T=12{,}8$ Н. Найдите скорость пули $v_0$ перед ее попаданием в шар.

9. По наклонной плоскости с углом наклона $\alpha=30°$ тело соскальзывает с постоянной скоростью. Какую кинетическую энергию $E_k$ приобретает это тело, соскользнув без начальной скорости по такой же поверхности с высоты $H=2$м при угле наклона $\beta=45°$? Масса тела $m=1$ кг.

# Участникам Научно-технической конференции школьников в МФТИ

## *(секция «Физика»)*

Что такое физическая научная работа, представляемая на конференцию? Как выбрать тему такой работы? С чего начать исследования или как довести до научного уровня уже имеющиеся? Опыт проведения предыдущих конференций показал необходимость некоторых разъяснений этих и аналогичных вопросов. Вот несколько советов.

Основой выбора подходящей темы для самостоятельного изучения для Вас может стать внимательный взгляд на реальные физические ситуации из окружающего нас мира. (Именно так родились известные задачи Капицы — см. книгу: Капица П. Л. Физические задачи.— М.: Знание, 1972.) Например, такие:

1. Заряженные водяные капли играют существенную роль в самых разных физических явлениях. Попробуйте изучить количественно процесс испарения (конденсации) таких капель в зависимости от их радиуса и заряда (потенциала). Что происходит, если рядом испаряются две разные капли?

2. Как Вы знаете, закон Гука, связывающий механическое напряжение $\sigma$ с относительным удлинением $\varepsilon$ —

$$\sigma=E\varepsilon, \text{ где } E=\text{const},$$

верен лишь для малых $\varepsilon$. Попытайтесь «расширить» этот закон, т. е. получить зависимость $\sigma$ ($\varepsilon$) вплоть до предела текучести для веществ, допускающих большие удлинения (например, для резины).

3. Известно, что при трении о стекло некоторых материалов возникают резкие, порой неприятные звуки. Определите частоты и соответствующие им интенсивности таких звуков. Чем можно объяснить тот факт, что для большинства людей эти звуки вызывают именно неприятные ощущения?

4. Одним из известных способов сортировки мелких синтетических алмазов является продувка алмазного порошка потоком воздуха. Выберите параметры, характеризующие форму частиц, и оцените эффективность такого способа сортировки. (Например, найдите долю частиц неправильной, по Вашим параметрам, формы, оставшихся в заданном объеме к определенному моменту времени.)

5. Рассмотрите движение модели корабля по поверхности воды. Попробуйте описать количественно возникающую при этом волновую картину и ее изменение в зависимости от скорости корабля.

6. Предложите способ ускорения небольших нейтральных частиц (пылинок, песчинок) до больших скоростей и оцените его возможности. Как реализовать Ваше предложение?

7. Можно ли использовать тепло водяной батареи центрального отопления для кипячения воды? Попытайтесь придумать наиболее эффективный способ.

8. Как нужно бросить в воду плоский камешек, чтобы он совершил возможно большее число отражений от поверхности воды? Подумайте, как провести такой эксперимент, чтобы он не превратился просто в упражнение по бросанию.

Разумеется, темой исследования может быть и часть обширной задачи, уже разрабатываемой специалистами. В этом случае, конечно, нужен научный руководитель, который введет Вас в курс дела и поможет организовать Вашу работу.

Исследования на выбранную тему могут быть как теоретическими, так и экспериментальными. Первые требуют склонности к логическим рассуждениям и вычислениям, вторые — умения делать что-то своими руками, но оба способа объединяет использование физической интуиции — способности находить оптимальные пути для решения задачи.

Непременным атрибутом научного исследования являются выводы, содержащие ясную формулировку полученных результатов. При этом даже если результаты не отвечают на исходный вопрос, они могут стать отправной точкой для новой задачи.

**Внимание! У Вас еще есть время воспользоваться нашими советами и принять участие в VI Научно-технической конференции — срок отправки рефератов по физике продлен до 1 марта с. г.**

**Желаем успехов!**

*Оргкомитет секции «Физика» НТКШ*

# Конкурс продолжается!

В октябрьском номере прошлого года наш журнал сообщил о начале Советско-американского конкурса юных любителей астрономии и космонавтики.

Инициаторами конкурса стали журналы «Квант» (СССР) и «Quantum» (США—СССР), Всесоюзное молодежное аэрокосмическое общество (ВАКО) «Союз» и International Educational Network (США).

Победители конкурса летом нынешнего года примут участие в советско-американских школах. Одна из школ будет проведена в июле в США, другая (в том же месяце) — в СССР (в пионерском лагере «Орленок» на Черном море).

Несколько слов о I туре.

Мы получили сотни писем с решениями заданий. И хотя не все участники справились с ними, редакция надеется, что время не было потеряно напрасно.

Сразу оговоримся — и в первом туре, и в последующих главным для нас является не скрупулезность проведенных вычислений (хотя это тоже высоко ценится), а способность ухватить суть задачи, сделать необходимые допущения и затем произвести расчеты.

При решении первой задачи часть участников забыла о том, что зонд сначала летит с ускорением, равным ускорению свободного падения на Марсе. Правильный ответ: зонд удалится на 12,5 километра.

Во второй задаче некоторые участники конкурса (очевидно, прежде всего из числа постоянных читателей «Кванта») заметили, что маяки могут находиться на дуге окружности радиусом 15 м. Мы поздравляем тех, кто обратил на это внимание и провел исследование этих случаев. Ну а для случая, когда маяки находятся на одном перпендикуляре к серединам стен базы (как это поняло большинство читателей), ответ такой: объем лунной базы равен $4{,}5 \cdot 10^4$ м$^3$.

Для ответа на третью задачу совсем не обязательно было читать роман А. Кларка. Нам было интересно познакомиться с вашими предложениями одиссеи. Некоторые участники не ограничились прогнозами, а прислали даже целые рассказы.

В этом номере мы предлагаем вам задания II тура. Срок отсылки решений — не позднее 15 марта 1991 г. Наш адрес: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, журнал «Квант» (Конкурс «KQ—91»).

Внимание! Просим в письме указывать не только номер школы и класса, но и степень владения английским языком, так как при отборе в школу, которая будет проходить в США, знание английского языка (в пределах, позволяющих слушать лекции и участвовать в занятиях) обязательно. Напоминаем, что в школах не смогут, к сожалению, участвовать школьники выпускных классов.

Итак,

**Задания II тура**

Задача 1. Космическая станция движется вокруг Земли по экваториальной круговой орбите, высота которой $H=3000$ км. Оцените, сколько времени длится «ночь» на борту станции, т. е. станция находится в тени Земли.

Задача 2. Из наблюдений известно, что в земных условиях арбуз не раскалывается, если его уронить с высоты $h \leqslant 30$ см (считая от его нижней точки). С какой высоты в таком случае можно ронять арбузы на Луне? Ускорение свободного падения на Луне в 6 раз меньше, чем на Земле.

Задача 3. Для исследования верхних слоев атмосферы Венеры в проекте «Вега» использовался аэростатный зонд. Определите объем зонда, если давление на исследуемых высотах $p=50\,000$ Па, а температура $t=10$ °С. Можно считать, что атмосфера Венеры целиком состоит из двуокиси углерода $CO_2$, а зонд наполнен гелием He. Массу зонда вместе с аппаратурой принять равной $m=20$ кг.

Игры и головоломки

# Реверси

Игра реверси (от английского to reverse — обращать) популярна во многих странах. В США она вышла на второе место после шахмат, а в Японии — после го. Проводятся разнообразные турниры, матчи, в том числе чемпионаты мира. Игра привлекает простотой правил — они проще шахматных и шашечных — и удивительной динамичностью. Обстановка на доске меняется мгновенно, и все завоевания игрока за один ход могут перейти к противнику.

Реверси были известны с незапамятных времен, а в начале 70-х годов XX века их как бы заново открыл японец Хаседжава. Коварные ловушки и непредвиденные ситуации, отличающие игру, вызвали у него ассоциацию с шекспировским «Отелло», и в результате реверси получили еще одно название— «Отелло».

Атрибутами игры служат доска 8×8 и 64 фишки (по 32 у каждого игрока), окрашенные с одной стороны в белый цвет, а с другой — в черный. Можно взять и обычную шахматную доску, раскраска ее полей значения не имеет. Фишки можно сделать, приклеив друг к другу обычные белые и черные шашки или окрасив в два цвета 64 одинаковые пуговицы.

Опишем правила игры в реверси. Играющий белыми ставит свои фишки белой стороной вверх, а играющий черными — черной. Прежде всего партнеры располагают в центре доски по две своих фишки, как показано на рисунке 1 (в реверси, в отличие от шахмат, горизонтали доски нумеруются сверху вниз).

Первый ход делают черные (как в го и рэндзю, но в отличие от шахмат и шашек). Соперники по очереди выставляют по одной своей фишке на свободные поля доски, рядом с одной из фишек противника и так, чтобы вместе с какой-нибудь своей фишкой окаймить (окружить) одну или несколько фишек противника по горизонтали, вертикали или диагонали (или по нескольким линиям сразу). Другими словами, фишка ставится на одну линию с другой фишкой того же цвета, уже находящейся на доске, и между ними должен стоять ряд фишек противника, а пустых полей нет. Окруженные с двух сторон фишки попадают в плен, но не снимаются с доски, а переворачиваются другой стороной, меняя свой цвет. Если окружение происходит одновременно по нескольким линиям, то переворачиваются все цепочки захваченных фишек. Итак, любая фишка, попав на доску, до конца игры остается на ней, хотя переворачиваться может сколько угодно раз.

Для иллюстрации рассмотрим симметричную позицию на рисунке 2. Сейчас ход черных, и, ставя фишку на угловое поле a8, они окружают сразу 18 белых фишек в трех возможных направлениях. Фишки вертикали «a», с a2 до a7, окружены фишками a1 и a8, фишки последней горизонтали, с b8 до g8,— фишками a8 и h8, наконец, фишки большой диагонали, с b7 до g2,— фишками a8 и h1. Этот пример является рекордным — наибольшее число фишек, которые могут быть захвачены и перевернуты за один ход, равно 18.

Если в какой-то момент один из игроков не может сделать ход (не в состоянии окружить ни одной неприятельской фишки), то он пропускает его.

Если один из игроков использовал все свои фишки, то он может взять фишку из запаса противника. Впрочем, в комплекте игры и белые, и черные имеют по две дополнительных фишки, и этого, как правило, достаточно, чтобы обойтись собственными фишками.

Ходы обеих сторон считаются в реверси не парами, как в шахматах, а отдельно (за редким случаем нечетные номера соответствуют ходам черных, четные — белых). До начала игры четыре поля доски уже заняты, и поэтому она продолжается не более 60 ходов. Заканчивается партия тогда, когда ни один из партнеров не в состоянии сделать очередной ход, в частности, если все 64 поля доски уже заполнены фишками. Победителем становится тот, чьих фишек в данный момент на доске больше, а при равенстве — ничья (разумеется, учитывается «видимая» на доске сторона фишек).

Возвращаясь к рисунку 2, заметим, что ход черных a8 был последним в партии,— вся доска заполнена фишками. Перевернув рекордное число фишек — 18, черные чудом спаслись — игра закончилась вничью — 32:32!

Рассмотрим теперь для примера десять ходов партии в реверси (по пять с каждой стороны).

1. c5. Черные окружили своими фишками c5 и e5 белую фишку d5, и она переворачивается черной стороной вверх (для простоты будем говорить — меняет цвет).

2. c6. Теперь переворачивается и становится белой фишкой d5.

3. d6. Фишка d6 вновь становится черной.

4. e6. Окружены фишки d6 и e5, обе переворачиваются и становятся белыми.

5. f6. Фишка e5 меняет цвет с белого на черный.

6. c4. Фишки c5, d4 и d5 — белые.

7. b6. Ряд фишек — c6, d6, e6 — переворачивается, и все они становятся черными.

8. e7. Фишки d6, e5 и e6 — белые.

9. f3. Фишки d5 и e4 — черные.

10. e3. Фишка e4 — белая.

Возникла позиция, показанная на рисунке 3. Инициатива у белых, у которых больше фишек. Но радоваться рано: ситуации в реверси меняются, как в калейдоскопе, фишки-хамелеоны то и дело «перекрашиваются», и важно, какими они будут в конце партии.

В большинстве игр, например в шахматах и шашках, материальное превосходство обычно определяет и общий перевес, а в реверси игрок, имеющий значительно большее число фишек своего цвета, может за один ход

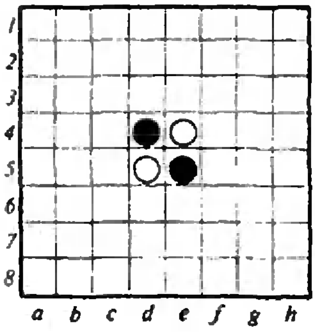



*Рис. 1.*

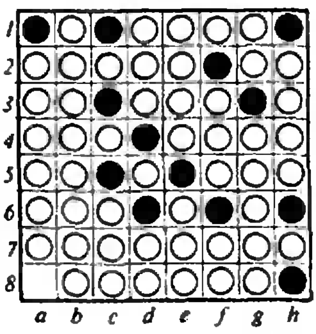



*Рис. 2.*

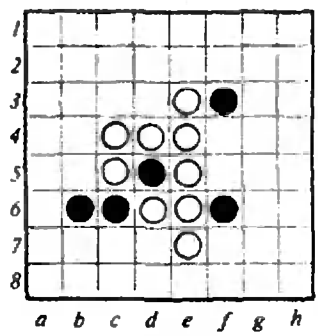



*Рис. 3.*

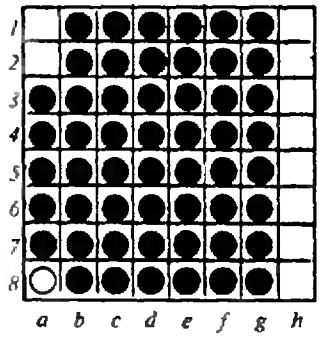



*Рис. 4.*

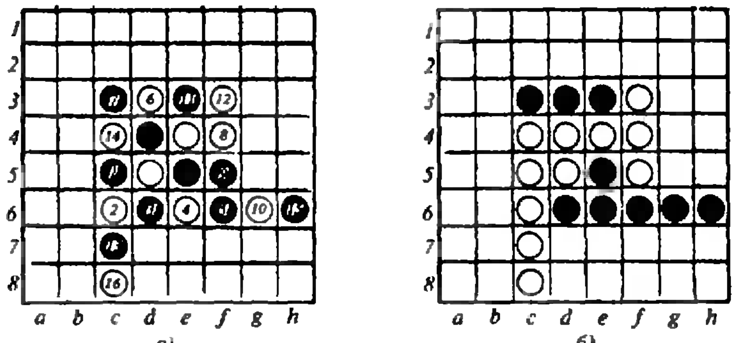



*Рис. 5.* а) б)

потерять все завоевания (см., например, рис. 2).

Очевидно, если в какой-то момент у одного из игроков оказываются «съеденными» все фишки, партия сразу завершается его поражением. Кратчайший поединок с таким финалом («детский мат» для реверси) состоит из девяти ходов: 1. c5 2. c4 3. e3 4. e6 5. e7 6. d3 7. c3 8. f5 9. g5!, и на доске остались одни черные фишки. Игра закончилась их победой со счетом 13:0.

Рассмотрим некоторые элементарные принципы игры. Поскольку фишки противника, расположенные в центре доски, захватить проще, чем на краю, всегда следует стремиться занять крайние поля доски и препятствовать в этом противнику. Особенно выгоден захват угловых полей. Фишки, попавшие на них, никогда не могут быть перевернуты (их просто нечем захватить) и сохраняют первоначальный цвет до конца партии. Тот, кто прорывается в один из углов доски, получает серьезное преимущество, а если это происходит в начале игры, то — решающее. Поэтому, кстати, весьма опасно ставить свои фишки рядом с угловыми полями, особенно на b2, b7, g2, g7, противник может провести несложную комбинацию и занять угол. Вот яркий пример, иллюстрирующий силу угловых фишек (рис. 4).

Как будто белым впору сдаваться — у них всего одна фишка против 53 фишек противника! Тем не менее они легко берут верх, да еще с «сухим» счетом! Приведем эффектное окончание этой партии.

1. a2. При своем ходе черные все равно вынуждены были бы пропустить его. Теперь вся вертикаль «a» стала белой (пока кроме поля a1). У черных по-прежнему нет ходов, как, впрочем, не будет и до конца партии. 2. h8. Последняя горизонталь окрасилась в белый цвет. 3. h7. 4. h6. 5. h5. 6. h4. 7. h3. 8. a1. 9. h2. 10. h1. Итак, вся доска заполнена белыми фишками, 64:0!

Опытные игроки в дебюте ведут борьбу в центре доски — в квадрате c3 — c6 —f6 — f3, стремясь как можно дольше не выпускать фишки противника на край доски. Затем белые и черные фишки одна за другой занимают край доски, и надо следить за тем, чтобы не пропустить неприятельские фишки в угол. К концу игры вариантов становится меньше, и искусные игроки просчитывают их чуть ли не до конца. Теперь уступка углов уже не так опасна.

Стоит сказать, что игра реверси привлекает к себе большое внимание любителей компьютерных игр, создано немало программ, достойно соперничающих с человеком. В 1989 году на первой компьютерной Олимпиаде в Лондоне именно турнир по реверси собрал наибольшее число программ из разных стран — 15.

Приведем теперь для иллюстрации одну интересную партию в реверси между человеком (черные) и компьютером (белые). Номера ходов для удобства ставятся прямо на полях доски.

На рисунке 5, *а* указаны первые 16 ходов, причем цвет фишек показывает лишь, кто именно — белые или черные — делал ход с данным номером. В результате возникает позиция, которую вы видите на рисунке 5, *б* (чтобы убедиться в этом, нужно, конечно, разыграть партию на доске).

Сначала игроки заняли весь центр доски (12 ходов, квадрат $4\times4$), а затем вышли на ее край (15-м ходом черные и 16-м — белые). На этом дебют партии можно считать законченным. Миттельшпиль партии, ходы 17—42 можно проследить по рисунку 6. Здесь цвет занумерованных фишек также отвечает последовательности ходов, а цвет фишек, не имеющих номеров, сохранен тот же, что и на рисунке 5, *б*.

Все больше и больше фишек появляется на границах доски, но к ее углам соперники по-прежнему друг друга не подпускают. Позиция после 42-х ходов показана на рисунке 7, *а* (со всех фишек, уже выставленных на доску, сняты номера).

Инициатива сейчас принадлежит компьютеру (25:21), но в эндшпиле человек сумел создать решающую атаку (ходы 43—60). Для этого он пошел на хитрость — отдал левый нижний угол (машина заняла его ходом 46), но ходами 47, 49 проник в соседний правый угол, завоевал значительное пространство в нижней части доски. Шансы уравнялись, но на 50 ходу компьютер ошибся, и черные захватили еще один угол, правый верхний. После их 53-го хода белые не в состоянии поставить на доску новую фишку и вынуждены пропустить ход, а за ним и второй (поэтому фишки с номерами 53, 54 и 55 на рисунке 7, *а* окрашены в черный цвет). Через несколько ходов партия закончилась победой черных с минимальным перевесом 33:31 (рис. 7, *б*).

Остановимся на некоторых стратегических принципах игры. В миттельшпиле игроку следует создавать такие ситуации на доске, чтобы возникали поля, на которые он может пойти, а его противник — нет. Четыре основных случая с возможным ходом белых на краю доски — *А*, *Б*, *В*, *Г* показаны на рисунке 8.

При наличии второй опорной фишки в центре доски (на рисунке центральные поля заштрихованы) белые всегда могут поставить фишку на одно из этих полей; для черных же они недоступны при любом положении в центре. Очевидно, наличие таких «резервных» полей для одной из сторон, в данном случае белых, является очень важным; выражаясь шахматным языком, это позволяет выиграть темп.

Не следует считать, что самое главное в реверси — далекий расчет вариантов. Нередко возникают положения, в которых борьба носит локальный характер, затрагивается лишь некоторая часть доски. Рассмотрим рисунок 9.

Белые плохо разыграли дебют, и черные, ставя фишку на поле *А*, получают резервное поле. Они как можно дольше не занимают поле *В*, а если в какой-то момент белые займут его, то у черных появится новое поле *Г*, на которое они могут пойти, а противник — нет.

Предположим теперь, что черные на первом ходу заняли поле *Б*. В ответ на эту ошибку белые могут про-

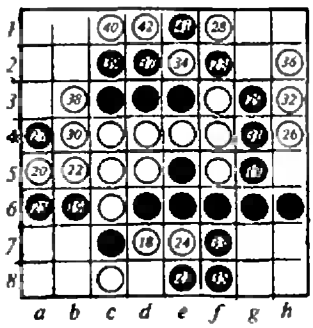


*Рис. 6.*

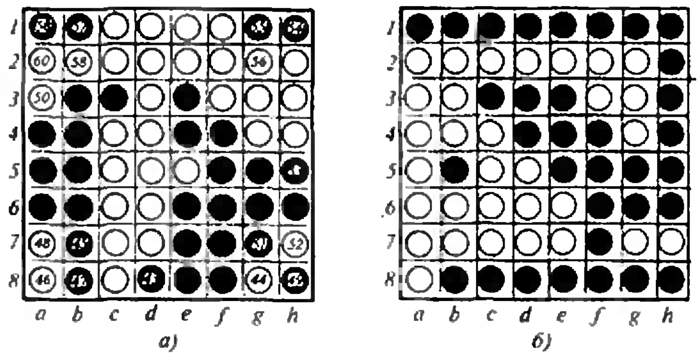


*Рис. 7.*

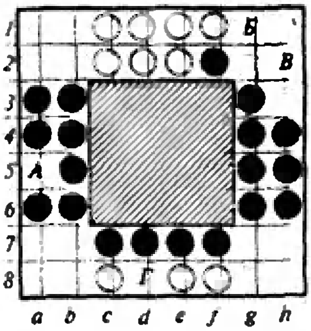



Рис. 8.

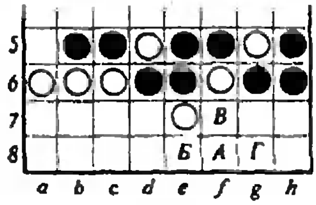



Рис. 9.

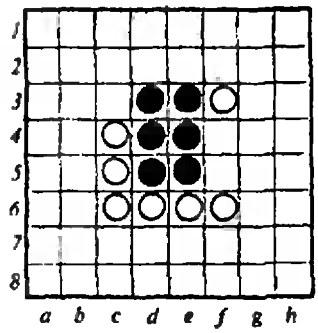



Рис. 10.

вести несложную комбинацию. Белые — *А*, черные — *Г*, белые — *В*, и теперь ход черных (нас сейчас не интересует расположение фишек в верхней половине доски, но предполагается, что на b4 стоит белая фишка). Поскольку занимать поле g7 — самоубийство, черные вынуждены переключиться на другой участок доски.

Чтобы понять идею комбинационного маневра белых, следует остановиться на некоторых общих принципах игры. В любой ситуации на доске у игрока имеется множество плохих ходов и множество нейтральных. Задача противника состоит в том, чтобы заставить его использовать все нейтральные ходы и в конце концов сделать плохой. Стандартный прием заключается в передаче очереди хода. Локальная ситуация разыгрывается так, чтобы в конце концов был ход противника. Этот прием и используется в операции на рисунке 9. После неточности черных и правильных действий партнера они вынуждены ходить вне правого нижнего угла.

Зная стандартные положения на краях (рис. 8) — к чему стремиться и чего избегать, можно уже в районе 30-го хода прогнозировать итог партии. Точный розыгрыш «стороны» доски является как бы аналогом позиционной игры в шахматах. Создание резервного поля можно сравнить с владением открытой линией или образованием проходной пешки... Разумеется, в реверси, как и в шахматах, позиционное преимущество, а тем более материальное (его роль здесь мала), не гарантирует победы, хотя увеличивает ее вероятность.

Разработаны и другие стратегические принципы, применимые в тех или иных положениях.

Как и в любой игре, в реверси существуют интересные задачи и комбинации. Приведем одну уникальную задачу (на шахматном языке — этюд), предложенную одним из авторов О. Степановым. На рисунке 10 белые начинают и выигрывают.

Эта жемчужина решается ходом 1. e2! Посмотрим, как складываются события дальше. Черные фишки d3 и e3 — e5 переворачиваются, и в «живых» остаются только фишки d4 и d5. Как теперь играть черным? После хода d2 или d7 и, соответственно, ответа d1 или d8 на доске, как мы видим, остаются одни белые фишки — игра закончена. В случае одного из ходов b7, b5, b4, b3, f2, f4, f5, f7 и соответствующего ответа a8, a5, a4, a2, g1, g4, g5, g8 у черных остается одна единственная фишка, которая окружена по всем направлениям, и следующим ходом белые завершают игру полным уничтожением неприятельских сил.

Итак, у черных вынужденный ответ g7, уступающий угол доски. Белые играют, например, f5 (на e5 появляется белая фишка) с неизбежным h8. В результате правый нижний угол завоеван, что на столь ранней стадии игры равносильно победе.

Возможно, что это единственная позиция (с точностью до симметрии) со столь малым и примерно равным материалом, про которую можно утверждать, что одна из сторон начинает и выигрывает!

*Е. Гик, О. Степанов*

# Варианты вступительных экзаменов

## Московский физико-технический институт

### Математика

*Письменный экзамен*

**Вариант 1**

1. Решите уравнение

$$\sqrt{6}\,(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} 2x)=-\frac{2}{\sin x}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{16}{x^2}-1}(\log_3 x)<0.$$

3. Биссектрисы углов $B$ и $C$ параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке $O$. Найдите площадь параллелограмма, если

$$\angle A=2\arcsin\frac{2}{\sqrt{13}},\ OA=2\sqrt{10},\ OD=5$$

(найдите все решения).

4. На координатной плоскости $xOy$ задан треугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B\left(\frac{2}{3};0\right)$, $C(0;-2)$. К графику функции $y=\frac{(3x-1)^2}{3x}$, $x>0$, проведена касательная, отсекающая от треугольника $ABC$ четырехугольник, около которого можно описать окружность. Найдите расстояние от начала координат до этой касательной.

5. Даны правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ и конус, центр основания которого лежит на прямой $SO$ ($SO$ — высота пирамиды). Точка $E$ — середина ребра $SD$, точка $F$ лежит на ребре $AD$, причем $AF=\frac{3}{2}FD$. Треугольник, являющийся одним из осевых сечений конуса, расположен так, что две его вершины лежат на прямой $CD$, а третья — на прямой $EF$. Найдите объем конуса, если $AB=4$, $SO=3$.

**Вариант 2**

1. Решите неравенство

$$\frac{\log_9 x+4}{1+\log_9 x}\leqslant 4\log_x 3-1.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\operatorname{ctg}^4 x+32\sin^2 y=55,\\ \dfrac{1}{\sin^2 x}-4\cos y=5.\end{cases}$$

3. Функция $y=\frac{1}{6}x^3+6x+56$ является разностью кубов двух линейных функций. Найдите эти функции.

4. В треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $AP$. Известно, что $BP=16$, $PC=20$ и что центр окружности, описанной около треугольника $ABP$, лежит на отрезке $AC$. Найдите длину стороны $AB$.

5. В треугольной пирамиде $SABC$ площадь основания $ABC$ равна 7, а углы $ABC$, $ASB$ и двугранный угол при ребре $AB$ являются прямыми. Рассматриваются проекции пирамиды $SABC$ на всевозможные плоскости, проходящие через прямую $AB$. Наибольшая из площадей таких проекций равна 14, а наименьшая — $4\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды.

### Физика

*Письменный экзамен*

**Вариант 1**

1. Автомобили на автодроме испытываются на скорости $v=120$ км/ч. Под каким углом $\alpha$ к горизонту должно быть наклонено полотно дороги на повороте с радиусом закругления $R=110$ м, чтобы движение автомобиля было наиболее безопасным даже в гололедицу (рис. 1)?

2. Трубка длиной $l=1{,}1$ м, герметично закрытая с одного конца, опускается открытым концом в воду и плавает в вертикальном положении, что обеспечивается незначительными внешними боковыми усилиями. Трубку притопили, опустив ее закрытый конец до поверхности воды, и удерживают в новом вертикальном положении. Найдите высоту слоя воды, находящейся в трубке. Атмосферное давление принять равным давлению, создаваемому слоем воды высотой $h_0=10$ м. Давлением насыщенного пара воды при температуре опыта пренебречь.

3. Два одинаковых проволочных кольца, радиусом $R$ каждое, движутся поступательно в одной плоскости навстречу друг другу вдоль прямой, проходящей через их центры (рис. 2). Перпендикулярно плоскости колец действует однородное магнитное поле с индукцией $B$.

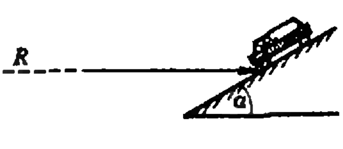



*Рис. 1.*

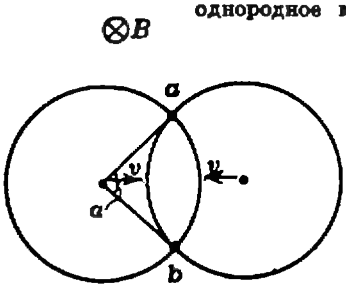



*Рис. 2.*

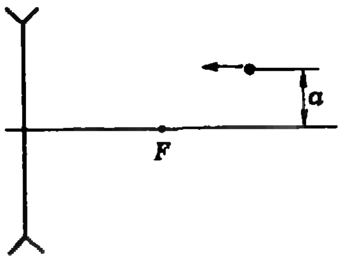



*Рис. 3.*

Найдите направления и абсолютные величины сил, действующих на кольца со стороны магнитного поля, в тот момент, когда скорости колец равны $v$, а угол $\alpha=\pi/3$. В точках касания колец $a$ и $b$ имеется хороший электрический контакт. Электрическое сопротивление проволоки длиной, равной длине окружности кольца, равно $r$. Индуктивностью колец пренебречь.

4. Вдоль прямой, параллельной главной оптической оси линзы и отстоящей от нее на $a=5$ см, ползет к линзе муравей с постоянной скоростью $v_0=1{,}6$ см/с (рис. 3). Найдите скорость перемещения изображения муравья в тот момент, когда он проползает через фокальную плоскость линзы. Линза тонкая, рассеивающая, с фокусным расстоянием $F=10$ см.

Вариант 2

1. Деформация вертикальной легкой пружины, удерживающей гирю, составляет $x=4$ см (рис. 4). Чтобы увеличить деформацию пружины на 50 %, медленно надавливая на груз в вертикальном направлении, надо совершить работу $A=0{,}3$ Дж. Найдите жесткость пружины.

2. Найдите работу, совершаемую молем идеального газа в цикле, состоящем из двух участков линейной зависимости давления от объема и изохоры (рис. 5). Точки *1* и *3* лежат на прямой, проходящей через начало координат. Температуры в точках *2* и *3* одинаковы. Считать заданными температуры $T_1$ и $T_2$ в точках *1* и *2*.

3. Какой заряд протечет через резистор $R$ после замыкания ключей $K_1$ и $K_2$ в схеме, изображенной на рисунке 6? До замыкания ключей конденсатор $C_2$ не заряжен, а конденсатор $C_1$ заряжен до разности потенциалов $U_0$ (знаки зарядов указаны на рисунке). Считать известными $\mathscr{E}$, $U_0$, $C_1$ и $C_2$.

4. В ядерной реакции $^2H+{}^2H\rightarrow{}^4He+\gamma$ образуется медленно движущаяся, по сравнению со скоростью света, $\alpha$-частица и квант света $\gamma$ с энергией $E=19{,}7$ МэВ. Пренебрегая скоростями вступающих в реакцию ядер, найдите скорость образовавшейся $\alpha$-частицы. Энергию покоя $\alpha$-частицы принять равной $mc^2=3730$ МэВ.

*Публикацию подготовили С. Резниченко, В. Чивилев*

# Московский институт электронного машиностроения

## Математика

*Письменный экзамен*

Вариант 1

1. Решите неравенство $4^x-2^{x+1}-3<0$.

Принадлежит ли множеству его решений число $\sqrt{2}$?

2. Решите уравнение

$$\sin x+2\cos x=\sqrt{6\sin 2x+4}.$$

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины $a$, точка $K$ — середина ребра $AB$, точка $E$ — середина ребра $DD_1$. Найдите периметр треугольника $A_1KE$ и определите, в каком отношении делит объем куба плоскость, проходящая через вершины этого треугольника.

4. Велосипедисту надо было проехать расстояние в 30 км. Выехав на три минуты позже назначенного срока, велосипедист ехал со скоростью большею на 1 км/час и прибыл вовремя на место. Определите скорость, с которой ехал велосипедист.

5. Дано неравенство $(a-1)x^2-2x-a>0$.

а) Проверьте, что при $a=5$ это неравенство выполняется при любом $x>6$.

б) Укажите еще какое-нибудь значение $a$, при котором это неравенство выполняется при любом $x>6$.

в) Определите все значения $a$, при которых это неравенство выполняется при любом $x>6$.

Вариант № 2

1. Решите уравнение

$$4^{\lg 3-\lg(a-x)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\lg x+1}.$$

2. Решите уравнение

$$2\cos x+3\sin x=\sqrt{4+13\sin x}.$$

3. В трапеции длины диагоналей равны $2\sqrt{61}$ и $3\sqrt{41}$, а длины оснований — 10 и 15. Найдите площадь трапеции.

Можно ли в эту трапецию вписать окружность?

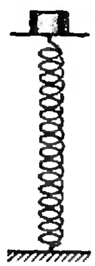


Рис. 4.

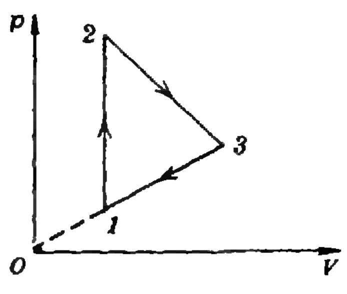



Рис. 5.

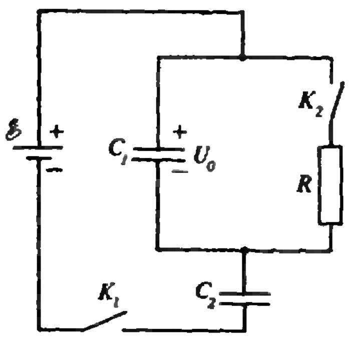



Рис. 6.

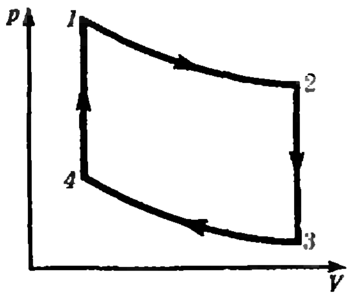



Рис. 1.

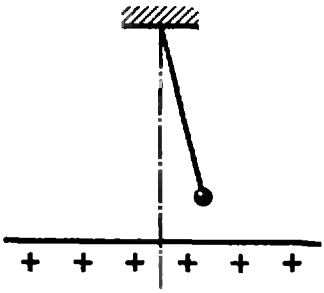


Рис. 2.

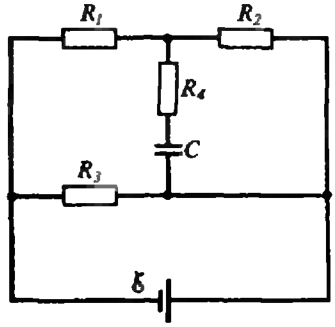



Рис. 3.

Можно ли вокруг этой трапеции описать окружность?

4. Решите неравенство

$$(2\,\mathrm{ctg}\,x-1)\cdot\sqrt{9-5x-4x^2}\geqslant 0.$$

5. В магазине имеются книжные полки двух типов. 6 полок первого типа и 11 полок второго типа могут вместить не более 30 % книг домашней библиотеки, а 21 полка первого типа и 16 полок второго типа — более 60 % книг.

а) Хватит ли 29 полок первого типа для размещения $\frac{1}{3}$ библиотеки?

б) Хватит ли 51 полки второго типа для размещения всей библиотеки?

в) Докажите, что 39 полок первого типа и 24 полки второго типа достаточно для размещения всей библиотеки.

**Физика**

*Задачи устного экзамена*

1. Два тела бросили вертикально вверх с одинаковой скоростью $v_0=20$ м/с через время $\tau=1$ с одно после другого. Определите, где и когда (через какое время после бросания первого тела) они встретятся. Задачу решите аналитически и графически. Ускорение свободного падения $g\approx10$ м/с$^2$.

2. Снаряд разрывается на две части, массы которых относятся как 1:2. Взрыв произошел на высоте $H=320$ м. Через время $\tau=4$ с после взрыва больший осколок падает под тем местом, где произошел взрыв. Определите расстояние до места падения легкого осколка. Скорость снаряда перед взрывом горизонтальна и равна $v_0=150$ м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3. Определите положение центра тяжести однородной квадратной пластинки со стороной $a=12$ см, в которой вырезано круглое отверстие радиусом $r=3$ см, касающееся двух смежных сторон.

4. Воздушный шар имеет легко растяжимую замкнутую теплоизолированную оболочку массой $m_1=130$ кг. Оболочка заполнена воздухом массой $m_2=260$ кг при давлении и температуре окружающей атмосферы ($T=273$ К). На сколько градусов необходимо нагреть воздух внутри оболочки, чтобы шар взлетел?

5. В сухом атмосферном воздухе содержатся кислород, азот и аргон (содержанием остальных газов можно пренебречь). Определите число молекул этих газов и их массы в объеме $V=1$ м$^3$ при нормальных условиях: $p=101$ кПа, $T=273$ К. Известно, что число молекул азота в 4 раза больше, а аргона в 20 раз меньше, чем кислорода. Молярные массы: кислорода — $M_1=32$ г/моль, азота — $M_2=28$ г/моль, аргона — $M_3=40$ г/моль. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль·К), число Авогадро $N_A=6\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$.

6. Определите КПД цикла, состоящего из двух адиабат и двух изохор, совершаемого одноатомным идеальным газом (рис. 1). Известно, что в процессе адиабатного расширения устанавливается температура $T_2=0{,}75T_1$, а в процессе адиабатного сжатия — $T_3=0{,}75T_4$.

7. Положительно заряженный шарик массой $M=30$ г совершает гармонические колебания над положительно заряженной бесконечной горизонтальной плоскостью (рис. 2). Сила электростатического взаимодействия шарика с плоскостью $F=0{,}1$ Н, а период колебаний шарика $T=2$ с. Шарик перезарядили так, что заряд его стал отрицательным, но по модулю равным первоначальному. Определите период гармонических колебаний шарика в новом состоянии.

8. Определите заряд конденсатора емкостью $C=2$ мкФ, включенного в цепь, показанную на рисунке 3, если $\mathscr{E}=24$ В, $R_1=R_2=5$ Ом, $R_3=R_4=10$ Ом, $r=1$ Ом.

9. Электрон влетает в однородное магнитное поле со скоростью $v=2\cdot10^5$ м/с, которая составляет с направлением вектора индукции $\vec{B}$ угол $\alpha=60°$. При каком наименьшем значении индукции магнитного поля электрон сможет оказаться в точке, лежащей на той же линии магнитного поля на расстоянии $L=2$ см от начальной точки? Удельный заряд электрона $e/m=1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг.

10. Действительное изображение предмета, полученное с помощью собирающей линзы, находится от нее на расстоянии $f_1=80$ см. Собирающую линзу заменяют на рассеивающую с таким же фокусным расстоянием. Изображение предмета в этом случае находится на расстоянии $f_2=20$ см. Определите фокусное расстояние линз и увеличения $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$.

*Публикацию подготовили*
*Г. Ефашкин, В. Тонян*

# Московский педагогический государственный университет им. В. И. Ленина

## Математика

### *Письменный экзамен*

**Вариант 1**
*(математический факультет)*

**1.** Две машины, работающие с двух сторон тоннеля, должны закончить проходку за 60 дней. Если первая машина выполнит 30 % своей работы, а вторая — $26\frac{2}{3}$% своей, то обе они пройдут 60 м тоннеля. Если бы первая машина выполнила 2/3 всей работы второй машины по проходке этого тоннеля, а вторая — 0,3 всей работы первой машины, то первой понадобилось бы для этого на 6 дней больше, чем второй. Определите, сколько метров в день проходит каждая машина.

**2.** Решите уравнение

$$5^2\cdot 5^4\cdot 5^6\cdot\ldots\cdot 5^{2x}=0{,}04^{-28}.$$

**3.** Решите уравнение

$$\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{17}{32}.$$

**4.** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+1$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

**5.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $AB=a$, $BC=a$, $AA_1=b$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину $A$ и перпендикулярного диагонали $BD_1$.

**Вариант 2**
*(физический факультет)*

**1.** В правильной треугольной призме через сторону нижнего основания и середину противоположного ребра проведена плоскость, образующая с плоскостью основания двугранный угол в 60°. Площадь сечения равна $S=8\sqrt{3}$. Найдите объем и полную поверхность призмы.

**2.** Найдите промежутки возрастания и убывания функции

$$y=3x^3-6x^2+7.$$

**3.** Решите уравнение

$$\sin^4\frac{x}{2}-\cos^4\frac{x}{2}=\frac{1}{2}.$$

**4.** Решите неравенство

$$\frac{x^2-4}{x^2-3x-4}\geqslant 0.$$

**5.** Решите уравнение

$$\lg(10x^2)\cdot\lg x=1.$$

## Физика

### *Задачи устного экзамена*

**1.** Тело, брошенное вертикально вверх, дважды проходит через точку на высоте $h$. Промежуток времени между этими прохождениями $\Delta t$. Найдите начальную скорость тела.

**2.** Человек, стоящий на коньках на гладком льду реки, бросает камень массой $m=0{,}5$ кг. Спустя $t=2$ с камень достигает берега, пройдя расстояние $l=20$ м. С какой скоростью начинает скользить конькобежец, если его масса $M=60$ кг? Трением пренебречь.

**3.** Мотоциклист едет по горизонтальной дороге, переходящей в мертвую петлю радиусом $R=4$ м. Какую скорость он должен развить, чтобы, выключив мотор, проехать по петле?

**4.** Тело $m=1$ кг соскальзывает с наклонной плоскости длиной $l=12$ м, образующей с горизонтом угол $\alpha=30°$. Начальная скорость тела равна нулю, скорость у основания плоскости $v=4$ м/с. Какое количество теплоты выделилось при трении тела о плоскость?

**5.** Сосуд с газом разделен подвижной перегородкой на две части, отношение объемов которых $V_1/V_2=2/3$. Температуры газа в меньшем и большем объемах $t_1=177$ °С и $t_2=267$ °С соответственно; давление в них одинаково. Каково будет отношение объемов, если температуры сравняются? Теплообмен возможен только через перегородку.

**6.** В электрическом чайнике, мощность которого $P=600$ Вт, можно вскипятить $V=1{,}5$ л воды за $\tau=20$ мин при начальной температуре воды $t=20$ °С. Найдите КПД чайника. Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К).

**7.** Два последовательно соединенных конденсатора, емкости которых $C=1$ мкФ и $C_2=3$ мкФ, подключены к источнику тока с напряжением $U=220$ В. Найдите напряжение на каждом конденсаторе.

**8.** Нагревательная спираль электроаппарата для испарения воды при температуре $t=100$ °С имеет сопротивление $R=10$ Ом. Какой ток надо пропустить через эту спираль, чтобы аппарат испарил массу воды $m=100$ г за время $\tau=1$ мин? Удельная теплота парообразования воды $\lambda=2{,}3$ МДж/кг.

**9.** С какой скоростью должен двигаться проводник перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля, чтобы между концами проводника возникла разность потенциалов $U=0{,}01$ В? Индукция магнитного поля $B=0{,}2$ Тл, длина проводника $l=10$ см.

**10.** Проверяя свои очки, человек получил на полу комнаты действительное изображение лампы, висящей на высоте $H=3$ м, держа очковое стекло под лампой на расстоянии $f=1$ м от пола. Какова оптическая сила очков?

*Публикацию подготовили*
*О. Овчинников, О. Рыльков, Н. Терешин*

# Ответы, указания, решения

## Избранные школьные задачи по физике

**1.** Запишем уравнения движения тела и бруска в проекциях на горизонтальное направление (рис. 1):

$$ma_1 = F_{тр},$$
$$Ma_2 = F - F_{тр},$$

где $F_{тр} = \mu mg$. Тело проскальзывает по бруску, если $a_1 < a_2$, т. е. если

$$\frac{\mu mg}{m} < \frac{F - \mu mg}{M}.$$

Отсюда получаем

$$F > \mu(M+m)g.$$

**2.** В обоих случаях вес тела $P$ численно равен силе нормальной реакции $N$ со стороны поверхности Земли (рис. 2). Согласно второму закону Ньютона,

$$ma_1 = mg - N_1,$$
$$0 = mg - N_2,$$

где $m$ — масса тела, $a_1 = 4\pi^2R/T^2$ — центростремительное ускорение тела на экваторе ($T = 24$ ч). Относительное изменение веса тела равно

$$\left|\frac{P_1 - P_2}{P_2}\right| = \left|\frac{N_1 - N_2}{N_2}\right| = \left|\frac{mg - ma_1 - mg}{mg}\right| =$$
$$= \frac{a_1}{g} = \frac{4\pi^2R}{gT^2} \approx 0{,}003 = 0{,}3\ \%.$$

**3.** Пусть, для определенности, ускорение первого тела направлено вниз, а второго — соответственно вверх. Тогда уравнения движения тел в проекциях на вертикальное направление имеют вид

$$m_1g - T_1 = m_1a_1,$$
$$T_2 - m_2g = m_2a_2.$$

Из условия невесомости подвижного блока получаем

$$T_2 = 2T_1,$$

а из кинематической связи —

$$a_1 = 2a_2.$$

Объединив все полученные уравнения в систему, найдем искомые величины:

$$a_1 = 2g\frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2},\quad a_2 = \frac{a_1}{2},$$
$$T_1 = \frac{3m_1m_2g}{4m_1 + m_2},\quad T_2 = 2T_1.$$

**4.** Когда тележка въезжает на наклонную плоскость, она приобретает ускорение, направленное вдоль плоскости вниз. Поэтому точка подвеса нити, двигаясь вместе с тележкой, отстает от шарика. Ускорение шарика станет таким же, как у тележки, в тот момент, когда нить будет направлена перпендикулярно плоскости (рис. 3).

**5.** Равновесие не сохранится, так как натяжение того конца нити, где находится колеблющийся груз, не остается постоянным и равным весу этого груза — в крайних точках натяжение нити меньше, а в средней точке больше веса груза. Опыт показывает, что колеблющийся груз при этом опускается (объясните это).

**6.** Для двух возможных случаев (рис. 4) получаем

$$E_1 = 2\sqrt{2}\,\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(a/\sqrt{2})^2} = \frac{q\sqrt{2}}{\pi\varepsilon_0a^2},$$
$$E_2 = 0.$$

**7.** Работа, которую надо совершить, равна изменению энергии взаимодействия электриче-

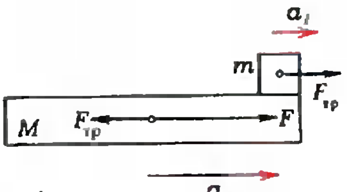



Рис. 1.

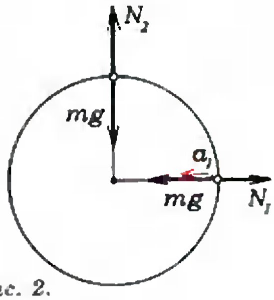



Рис. 2.

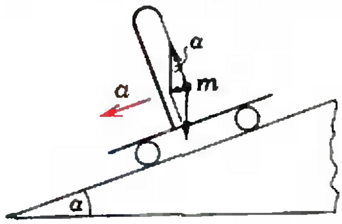



Рис. 3.

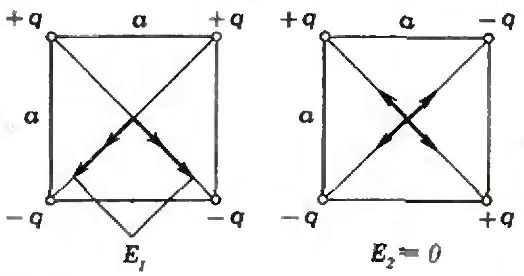



Рис. 4.

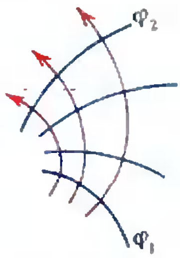



Рис. 5.

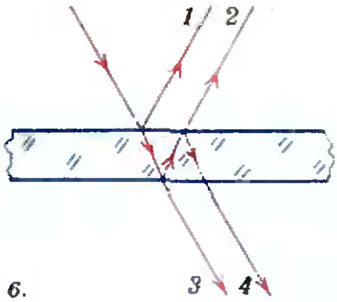



Рис. 6.

ских зарядов:

$$A=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1}=$$
$$=\frac{q^2(r_1-r_2)}{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}=8{,}1\cdot10^{-10}\ \text{Дж}.$$

8. Линии напряженности электрического поля всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям и направлены в сторону убывания потенциала (рис. 5). Напряженность больше там, где эквипотенциальные поверхности расположены ближе друг к другу.

9. Из закона сохранения энергии

$$3\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}=3\frac{mv^2}{2}$$

получаем

$$v=\sqrt{\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 ma}}\approx 9{,}5\cdot10^{-2}\ \text{м/с}.$$

10. Совершенная механическая работа и часть энергии, запасенной в конденсаторе, идут на увеличение энергии аккумулятора и на тепло, выделяющееся в подводящих проводах. (Действительно, при раздвигании пластин конденсатора, подключенного к аккумулятору, заряд конденсатора и его энергия уменьшаются, вследствие чего аккумулятор подзаряжается.)

11. В глазной линзе красные лучи преломляются слабее, чем синие. Поэтому возникает зрительное впечатление, что красные предметы находятся ближе к наблюдателю, чем синие (убедитесь в этом, сделав соответствующие построения хода лучей).

12. При переходе из вакуума в стекло частота колебаний не изменяется, а скорость света уменьшается в $n$ раз. Поэтому

$$\Delta\lambda=\frac{c}{v}-\frac{c/n}{v}=\frac{c(n-1)}{nv}=2{,}5\cdot10^{-7}\ \text{м}.$$

13. В отраженном свете кольца Ньютона видны более отчетливо, чем в проходящем. Это связано с тем, что в отраженном свете интенсивности интерферирующих лучей (лучи *1* и *2* на рисунке 6), испытавших каждый по одному отражению, приблизительно одинаковы, а в проходящем свете интенсивность луча, испытавшего два отражения (луч *4*), существенно меньше интенсивности луча (луч *3*), не испытавшего ни одного отражения. В результате первая картина получается более контрастной, чем вторая.

14. Из уравнения дифракционной решетки для главных максимумов получаем

$$\frac{\sin\varphi_3}{\sin\varphi_2}=\frac{3}{2},$$

откуда

$$\varphi_3=\arcsin(1{,}5\sin\varphi_2)\approx 21^\circ.$$

15. Искомая скорость электронов находится непосредственно из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта:

$$\frac{hc}{\lambda}=A+\frac{mv^2}{2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2(hc/\lambda-A)}{m}}\approx 2{,}2\cdot10^5\ \text{м/с}.$$

**[redacted]ковский физико-технический институт**

**[redacted]ематика**

**Вариант I**

1. $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\pi+2\pi k,\ k\in Z$.

2. $3<x<4,\ 1<x<2\sqrt{2}$.

3. $S_{ABCD}=24$ или $S_{ABCD}=72$, причем в обоих случаях $AB=2\sqrt{13}$. Указание. Записав теорему косинусов для треугольников $ABO$ и $CDO$, покажите, что числа $x=AB$ и $y=BC$ удовлетворяют системе уравнений

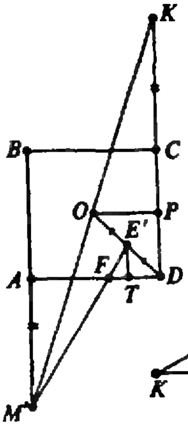
$$\begin{cases}x^2+(4/13)\cdot(y^2-2xy)=40,\\ x^2+(9/13)\cdot(y^2-2xy)=25.\end{cases}$$

4. Искомое расстояние равно $h_1=(2\sqrt{10}-6)/\sqrt{10}$ или $h_2=(3\sqrt{2}-4)/\sqrt{5}$. Указание. Возможны два случая.

1) Касательная из условия — это прямая $KL\perp BC$, имеющая уравнение $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2\sqrt{10}-6}{3}$. В этом случае расстояние равно $h_1$.

2) Касательная — прямая $MN$, имеющая уравнение $y=\frac{1}{8}x+\frac{8-6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$. В этом случае расстояние равно $h_2$.

5. $V=(343\sqrt{13}/18)\pi$. Решение. Пусть $K$, $L$ — вершины осевого сечения, лежащие на прямой $CD$, $M$ — вершина, лежащая на прямой $EF$, $Q$ — центр основания конуса. Какие-то две из точек $K$, $L$, $M$ симметричны относительно точки $Q$. Поскольку точка $Q$ не лежит на прямой $CD$, этими точками не могут быть точки $K$ и $L$. Пусть, для определенности, $Q$ — середина отрезка $KM$, и, значит, $QL\perp KM$. Геометрическое место точек $M$ таких, что середина отрезка $KM$ лежит на прямой $SO$, а его конец $K$ — на прямой $CD$,— это плоскость $\alpha$, параллельная прямым $SO$ и $CD$ и содержащая точку $A$. Следовательно, плоскость $\alpha$ содержит прямую $AB$ и перпендикулярна плоскости $ABCD$, а $M$ — точка пересечения прямой $EF$ с плоскостью $\alpha$. Пусть $M'$ и $E'$ — проекции точек $M$ и $E$ на плоскость $ABCD$, $P$ — проекция точки $Q$ на прямую $CD$. Точка $M'$ принадлежит прямой $E'F$ — проекции прямой $EF$ на плоскость $ABCD$, симметрична точке $K$ относительно точки $O$ — проекции точки $Q$ на эту плоскость и лежит на продолжении отрезка $AB$ за точку $A$, а точки $E'$ и $P$ — середины отрезков $OD$ и $CD$ (рис. 7). Обозначим $R$ и $h$ — радиус основания и высоту конуса. Тогда $2R=KM=\sqrt{M'K^2+M'M^2}$, где $M'K^2=(AB+2M'A)^2+BC^2$. Пусть $T$ — проекция $E'$ на отрезок $AD$ (см. рис. 1). Тогда $E'T=1$, $FT=FD-TD=3/5$, и из подобия треугольников $M'AF$ и $E'TF$ находим $M'A=4$. Следовательно, $R=7$. Из подобия треугольников $KQP$ и $KLQ$ (рис. 8) получаем $h=R\cdot QP/KP$, где $KP=KC+CP=M'A+CD/2=6$, $QP=\sqrt{OQ^2+OP^2}=\sqrt{MM'^2+(AD/2)^2}$. Из подобия треугольников $EE'F$ и $MM'F$ (рис. 9) следует, что $EE'/MM'=E'F/FM'=1/4$, т. е. $MM'=4EE'=$



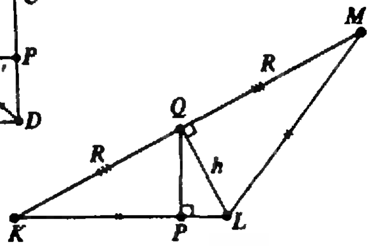




*Рис. 7.* *Рис. 8.*

$=4(SO/2)=6$, $QP=\sqrt{13}$, $h=7\sqrt{13}/6$. Следовательно, объем конуса равен

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 h=\frac{343\sqrt{13}}{18}\pi.$$

**Вариант 2**

1. $\frac{1}{81}\leqslant x<\frac{1}{9}$, $1<x\leqslant 3$.

2. $x=\pm\operatorname{arcctg}\sqrt{5}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$;
$y=\pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

3. $y=\left(\frac{x}{6}+4\right)^3-\left(\frac{x}{6}+2\right)^3=$
$=\left(-\frac{x}{6}-2\right)^3-\left(-\frac{x}{6}-4\right)^3$.

4. $AB=144/\sqrt{5}$. Указание. Покажите, что $OP\parallel AB$, где $O$ — центр окружности, описанной около треугольника $ABP$.

5. $^7/_3\sqrt{21/2}$. Решение. Пусть $\psi$ — угол между плоскостью $ABC$ и плоскостью $\beta$, на которую проектируется пирамида. Положим

$$\varphi=\begin{cases}\psi, & \text{если } \beta \text{ пересекает ребро } SC;\\ \pi-\psi & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

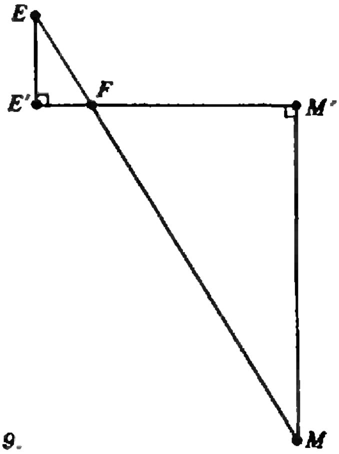



*Рис. 9.*

Тогда $\varphi$ изменяется от 0 до $\pi$. Обозначим $S_0$ — площадь треугольника $ABC$, $\tilde{S}$ — площадь проекции пирамиды, $SO$ — высоту пирамиды (по условию точка $O$ принадлежит отрезку $AB$), $S'$ и $C'$ — проекции на плоскость $\beta$ точек $S$ и $C$, $\varphi_1$ — значение $\varphi$, при котором $S'$ принадлежит отрезку $AC'$.

Пусть $SO=H$, $AB=c$, $BO=kc$ $(0<k<1)$, $BC=h$ (рис. 10). Тогда $S_0=\frac{1}{2}hc$,

$$\tilde{S}=\begin{cases}S_1(\varphi), & \text{если } 0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_1,\\ S_2(\varphi), & \text{если } \varphi_1<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\\ S_3(\varphi), & \text{если } \frac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\pi,\end{cases}$$

где $S_1(\varphi)={}^1/_2hc\cdot\cos\varphi$,
$S_2(\varphi)={}^1/_2khc\cdot\cos\varphi+{}^1/_2Hc\cdot\sin\varphi$,
$S_3(\varphi)=-{}^1/_2hc\cdot\cos\varphi+{}^1/_2Hc\cdot\sin\varphi$.

Из условия $S_1(\varphi_1)=S_2(\varphi_1)$ получаем $\operatorname{tg}\varphi_1=(1-k)h/H$. Исследуем функции $S_i(\varphi)$. Функция $S_1(\varphi)$ убывает. Так как производная $S_2'(\varphi)$ обращается в нуль в единственной точке $\varphi=\varphi^*\in(0;\frac{\pi}{2})$, то либо функция $S_2(\varphi)$ монотонна на интервале $(\varphi_1;\frac{\pi}{2})$ (если $\varphi^*\in(\varphi_1;\frac{\pi}{2})$), либо она имеет максимум при $\varphi=\varphi^*$ (если $\varphi^*\in(\varphi_1;\frac{\pi}{2})$). Функция $S_3(\varphi)$ имеет максимум при $\varphi=\varphi^{**}\in(\frac{\pi}{2};\pi)$. Но $S_3(\varphi^{**})=({}^1/_2)c\sqrt{H^2+h^2}>S_2(\varphi^*)=({}^1/_2)c\sqrt{H^2+kh^2}$, значит, $\tilde{S}_{\max}=S_3(\varphi^{**})$. Далее, $\tilde{S}_{\min}=\{\tilde{S}(\varphi_1),\ \tilde{S}(\frac{\pi}{2})\}=\tilde{S}(\varphi_1)$, так как $\tilde{S}(\pi/2)={}^1/_2Hc=\sqrt{\tilde{S}^2(\varphi^{**})-S_0^2}$, а из данных задачи получаем, что $\tilde{S}_{\min}<\sqrt{\tilde{S}^2(\varphi^{**})-S_0^2}$. Итак, $hc=2S_0=14$; $\sqrt{(Hc)^2+(hc)^2}=2\tilde{S}_{\max}=28$, откуда $Hc=14\sqrt{3}$; $hc\times Hc/\sqrt{(Hc)^2+(hc)^2\cdot(1-k)^2}=2S_{\min}=8\sqrt{3}$, откуда $k=1/4$. Следовательно, $H=\sqrt{AO\cdot BO}=(\sqrt{3}/4)c$, и, значит, $c=2\sqrt{14}$, $H=\sqrt{21/2}$, а искомый объем равен $V={}^1/_3HS_0={}^7/_3\cdot\sqrt{21/2}$.

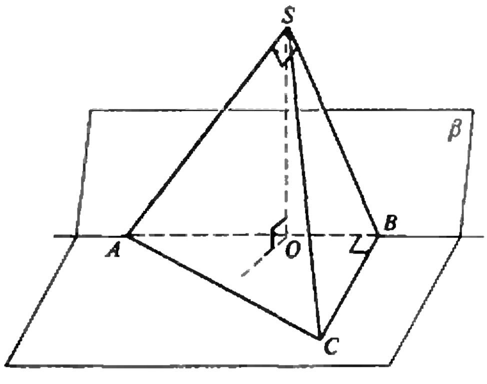



*Рис. 10.*

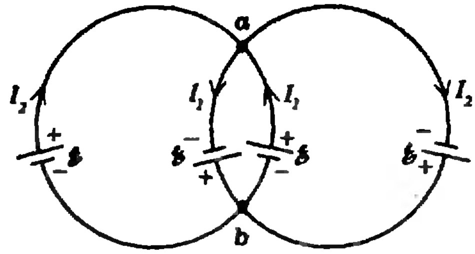


*Рис. 11.*

**Физика**

**Вариант 1**

1. $\alpha=\mathrm{arctg}\,\frac{v^2}{Rg}\approx\mathrm{arctg}\,1=45^\circ$.

2. $x=0{,}1$ м. Указание. Воспользуйтесь законом Бойля — Мариотта, а также тем, что атмосферное давление $p_a=\rho g h_0$, где $\rho$ — плотность воды.

3. На каждое кольцо действует сила, направленная противоположно его скорости и равная

$$F=(36/5)B^2vR^2/r.$$

Указание. На рисунке 11 приведена эквивалентная схема. Здесь $\mathscr{E}=Bvl_{ab}=2BvR\sin\alpha/2$, $I_1=(4\pi BVr\sin\alpha/2)/(r\alpha)$, $I_2=(4\pi BvR\sin\alpha/2)/(r(2\pi-\alpha))$. Окончательно $F=B(I_1+I_2)l_{ab}=(36/5)B^2vR^2/r$.

4. $v=\sqrt{5}v_0/8\approx0{,}45$ см/с. Указание. Рассмотрите малое перемещение муравья и соответствующее перемещение его изображения.

**Вариант 2**

1. $k=8A/x^2=1500$ Н/м.
2. $A=A_{31}+A_{23}=-R(T_2-T_1)/2+R\sqrt{T_2/T_1}(T_2-T_1)/2=R(T_2-T_1)(\sqrt{T_2/T_1}-1)/2$.
3. $q=C_2\mathscr{E}+C_1U_0$.
4. $v=Ec/(mc^2)\approx1{,}6\cdot10^3$ км/с.

Указание. Воспользуйтесь законом сохранения импульса.

## [redacted]овский институт электронного машино[redacted]ния

**Математика**

**Вариант 1**

1. $(-\infty;\ \log_2 3)$, принадлежит. Указание. $\sqrt{2}<\log_2 3$, поскольку $\sqrt{2}<\frac{3}{2}<\log_2 3$.

2. $x=2\pi n$, $n\in Z$. Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\sin x+2\cos x\geqslant0,\\ \sin x(4\cos x-3\sin x-6)=0.\end{cases}$$

Уравнение же $4\cos x-3\sin x=6$ корней не имеет.

3. $a\left(\sqrt{5}+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$; $\frac{7}{41}$. Указание. $A_1K=A_1E=\frac{\sqrt{5}}{2}$; $KE=\frac{\sqrt{6}}{2}$. Пусть $M$ — точка пересечения прямых $AE$ и $AD$, $N$ — точка пересечения $KM$ и $DC$. Объем многогранника $AA_1KNDE$ равен разности объемов пирамид $AA_1KM$ и $DENM$.

4. 25 км/ч.

5. $[48/35;\ \infty)$. Указание. Неравенство выполняется при всех $x>6$ тогда и только тогда, когда либо $D<0$, $a>1$, либо $a>1$, $f(6)\geqslant0$, $x_в\leqslant6$ ($x_в$ — абсцисса вершины параболы $y=(a-1)x^2-2x-a$).

**Вариант 2**

1. $x=a+45-3\sqrt{10a+225}$ при $a\in(0;\ +\infty)$; при $a\leqslant0$ корней нет. Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}0<x<a,\\ 90x=(a-x)^2.\end{cases}$$

2. $2\pi n$; $\arccos\frac{12}{13}+2\pi n$, $n\in Z$.

3. 150; вписать окружность можно, а описать нельзя. Указание. Пусть $ABCD$ данная трапеция, $AD=15$, $AC=2\sqrt{41}$, $BD=3\sqrt{61}$, $BC=10$. Пусть $M$ точка на прямой $AD$ такая, что $BM\parallel AC$. В треугольнике $MBD$: $BM^2-AM^2=BD^2-AD^2=144=12^2$. Отсюда следует (убедитесь в этом!), что $AB$ высота треугольника $BMD$, так что трапеция $ABCD$ — прямоугольная и $AB=12$. Остальное ясно.

4. $\left[-\frac{9}{4};\ \mathrm{arctg}\,2-\pi\right]\cup[0;\ 1]$. Указание. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}9-5x-4x^2\geqslant0,\\ 2\,\mathrm{ctg}\,x-1\geqslant0,\end{cases}$$

при решении которой необходимо доказать, что $\mathrm{arctg}\,2>1$ и $-\frac{9}{4}<\mathrm{arctg}\,2-\pi$.

5. а) Хватит; б) для ответа на этот вопрос условий задачи недостаточно.

Указание. Пусть на полке 1 типа помещается $x$ книг, на полке второго типа — $y$ книг, а всего в библиотеке $N$ книг. По условию

$$\begin{cases}6x+11y\leqslant0{,}3N,\\ 21x+16y>0{,}6N,\end{cases}$$

откуда $y<\frac{1}{50}N$, $x>\frac{1}{75}N$. Так, $29x>\frac{29}{75}N>\frac{1}{3}N$ и $51y<\frac{51}{50}N$ при этом неизвестно, верно ли, что $51y\leqslant N$ или $\frac{51}{50}N>51y>N$.

**Физика**

1. $h=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{g(\tau/2)^2}{2}=18{,}75$ м;

$t=\frac{v_0}{g}+\frac{\tau}{2}=2{,}5$ с.

2. $l\approx11{,}9$ км.
3. Центр тяжести находится на диагонали пластинки, проходящей через центр отверстия, на расстоянии $x=a\pi\sqrt{2}/(64-4\pi)\approx1$ см от центра квадрата.
4. $\Delta T=Tm_1/m_2=136{,}5$ К.
5. $N_1=(20/101)(pN_A)/(RT)\approx5{,}8\cdot10^{24}$; $N_2\approx2{,}1\cdot10^{25}$; $N_3\approx2{,}6\cdot10^{23}$; $m_1=N_1M_1/N_A\approx0{,}28$ кг; $m_2\approx0{,}99$ кг; $m_3\approx0{,}017$ кг.
6. $\eta=0{,}25=25\ \%$.
7. $T'=T\sqrt{(g-F/m)/(g+F/m)}\approx1{,}4$ с.
8. $q=\frac{C\mathscr{E}R_2R_3}{(R_1+R_2)R_3+r(R_1+R_2+R_3)}=2\times10^{-5}$ Кл.

9. $B_{min}=(2\pi mv\cos\alpha)/(eL)\approx1{,}8\cdot10^{-4}$ Тл.
10. $F=2f_1f_2/(f_1+f_2)=32$ см; $\Gamma_1=(f_1-f_2)/(2f_2)=-1{,}5$; $\Gamma_2=(f_1-f_2)/(2f_1)=3/8$.

### [redacted]ковский педагогический государственный [redacted]ерситет им. В. И. Ленина

**Математика**

**Вариант 1**

1. 2 м, 1,5 м.
2. 7.
3. $\pi(2k+1)/8$, $k\in Z$.
4. $y_{min}=y(-1)=-5/6$, $y_{max}=y(0)=1$.
5. $\frac{a}{2b}\sqrt{b^2+2a^2}$.

**Вариант 2**

1. $48\sqrt{3}$, $144+8\sqrt{3}$.
2. Промежутки возрастания: $(-\infty;\ 0)$ и $(\frac{2}{3};\ \infty)$. Промежуток убывания $(2/3;\ \infty)$.
3. $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.
4. $(-\infty;\ -2]\cup(-1;\ 2)\cup(4;\ \infty)$.
5. 0,1; $\sqrt{10}$.

**Физика**

1. $v_0=\sqrt{2gh+g^2(\Delta t)^2/4}$.
2. $v=ml/(Mt)=0{,}08$ м/с.
3. $v\geqslant\sqrt{5gR}=14$ м/с.
4. $Q=m(gl\sin\alpha-v^2/2)=52$ Дж.
5. $V_1'/V_2'=(V_1/V_2)(T_2/T_1)=4/5$.
6. $\eta=c\rho V(t_к-t)/(P\tau)=0{,}7$ (здесь $\rho=10^3$ кг/м$^3$ — плотность, $t_к=100$ °C — температура кипения воды).
7. $U_1=UC_2/(C_1+C_2)=165$ В, $U_2=UC_1/(C_1+C_2)=55$ В.
8. $I=\sqrt{m\lambda/(R\tau)}\approx200$ А.
9. $v=U/(Bl)=0{,}5$ м/с.
10. $D=H/((H-f)f)=1{,}5$ дптр.

### [redacted]урс «Математика 6—8»
### [redacted]*«Квант» № 10)*

1. Ясно, что на последнем месте в искомом числе стоит цифра 0, а на пятом месте — 5. Четные цифры расположены на четных местах, нечетные — на нечетных. На четвертом и на восьмом местах должны стоять цифры, не делящиеся на 4. Поэтому число имеет один из четырех видов:

1) *8*254*6*0,
2) *4*658*2*0,
3) *4*258*6*0,
4) *8*654*2*0.

Суммы трех шести первых цифр должны делиться на 3. Поэтому и сумма чисел, стоящих на 4-м, 5-м и 6-м местах, также кратна 3. Таким образом, числа вида 1), 2) и 3) нам не подходят.

Итак, число имеет вид 4). Остаются следующие возможности:

а) 381654*2*0,
б) 183654*2*0,
в) 387654*2*0,
г) 783654*2*0,
д) 189654*2*0,
е) 981654*2*0.

Число 381 654 делится на 7. Поэтому, если число имеет вид а), то на седьмом месте должна стоять цифра 7. Итак, число 8 816 547 290 — искомое. Теперь перебором случаев б) — е) можно проверить, что оно единственное.

2. а) Число 1991 раскладывается на множители: $1991=11\cdot181$. Поэтому оба слагаемых делятся на него: первое из них содержит 11 и 181 в качестве сомножителей, а второе — 22 и 362.

б) Запишем первое слагаемое в виде $(1993-1991)\times(1993-1989)\times(1993-1987)\times\times\ldots\times(1993-1)$. После раскрытия скобок возникают члены, содержащие 1993 в виде слагаемого и еще один член вида $(-1991)\times\times(-1989)\times\ldots\times(-1)$, имеющий четное число сомножителей, он сокращается со вторым слагаемым.

3. Пусть в первый магазин привезли $37\times\times11\cdot2\cdot x$ книг, во второй — $57\cdot3\cdot y$, в третий — $25\cdot6\cdot z$, где $x$, $y$, $z$ — целые числа. Тогда

$$814x+171y+150z=1990.$$

Ясно, что $x$ не превосходит 2, а $y$ — четное число, не большее 9. Если $x=2$, то $171y+150z=362$. Тогда $171y$ должно оканчиваться на 2, т. е. $y=2$. Отсюда $150h=20$. Это равенство невыполнимо при целых $z$. Если $x=1$, то $171y+150z=1176$. Число $171y$ должно оканчиваться на 6, поэтому $y=6$, откуда $z=1$.

Итак, в первый магазин привезли 814, во второй — 1026, в третий — 150 книг.

4. Искомое число можно представить в виде $A\cdot100+56$. Поскольку $A\cdot100$ должно делиться на 56, то число $A$ кратно 14, т. е. оно четно, делится на 7 и имеет сумму цифр, равную $56-(5+6)=45$. Наименьшим четным числом с суммой цифр 45 является число 199 998, однако оно не делится на 7. Следующими по величине четными числами с такой же суммой цифр будут 289 998, 298 998 и т. д. Первое из них также не делится на 7, тогда как второе делится. Таким образом, ответом на вопрос задачи будет число $298998\cdot100+56=29\,899\,856$.

5. а) Не всегда. Если на всех 28 крайних клетках доски расставить 28 фигур, то из них нельзя выбрать 8 с требуемым свойством (рис. 12).

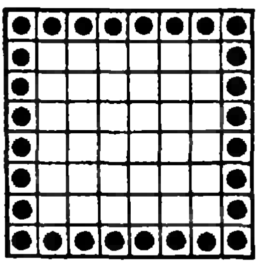


*Рис. 12.*

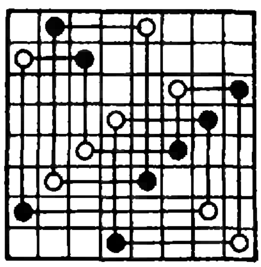


*Рис. 13.*

б) Всегда. Из 16 фигур выберем 8 с требуемым свойством. Все фигуры на шахматной доске соединим замкнутыми ломаными линиями, звенья которых параллельны сторонам доски. В каждой ломаной оставим все фигуры через одну по обходу ломаной (рис. 13).

6. Магический квадрат $3\times 3$ однозначно определяется тремя числами $a$, $b$ и $n$:

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $3n-a-b$ |
| $4n-2a-b$ | $n$ | $2a+b-2n$ |
| $a+b-n$ | $2n-b$ | $2n-a$ |

Легко проверить, что сумма по вертикалям, горизонталям и обеим диагоналям одна и та же и равна $3n$. Также легко проверить, что $a^2+b^2+(3n-a-b)^2=(a-b-n)^2+(2n-b)^2+(2n-a)^2$. Такое же равенство справедливо, очевидно, для первого и последнего столбцов.


**Квант**





103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 24.10.90. Подписано к печати 13.12.90
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45.
Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 8,27. Тираж 93 131 экз.
Заказ 2067. Цена 70 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской области

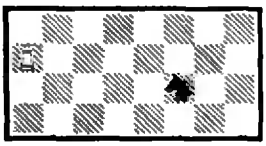
[redacted]

# Шахматная страничка

## ОХОТА НА МУСТАНГА

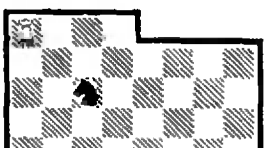
В одном из вычислительных центров сравнивались эффективности различных алгоритмов анализа конфликтных ситуаций. В качестве моделей использовались шахматные головоломки всего с двумя фигурами, которые перемещаются на необычных досках — одна фигура ловит другую. Особенно любопытны достижения компьютера в анализе игры, где ладья борется с конем. «Охота на мустанга» — так назвали эту игру ее авторы А. Левин и О. Ускова.

Традиционная доска интереса не представляет. Поймать на ней коня невозможно, если не считать некоторых особо неудачных для него ситуаций. По мере уменьшения размеров доски коня подстерегают все большие опасности. На доске 8×5 большинство начальных позиций все еще ничейно, а вот на доске 8×4 ладья уже легко ловит коня при любом начальном положении фигур.



Перед нами как бы учебный пример «охоты на мустанга». 1. Лc3! Кd1 (1...Кh1 и 1...Кg4 сразу проигрывают ввиду 2. Лf3) 2. Лc2! Кe3 3. Лd2 Кf1 (3...Кc4 4. Лd3 Кb2 5. Лd4) 4. Лe2 Кg3 5. Лe1! — конь пойман и следующим ходом ладья уничтожает его. Другой вариант: 1...Кe4 2. Лf3! Кd2 3. Лe3!, и после 3...Кf1 или 3...Кc4 дело сводится к предыдущему.

Обратимся к более занятным позициям.



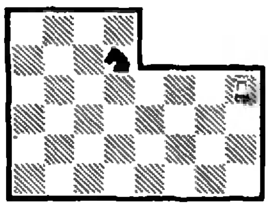
1. Лa3! Ладья берет под контроль центр доски. 1...Кe2 2. Лd3. Если бы фигуры стояли не на белых полях d3 и e2, а на черных d2 и e3, то конь быстро погибал. Цель белых и состоит в том, чтобы перейти от белопольной оппозиции к этой чернопольной. В обоих эховариантах (Кf4 и Кc1) это достигается при помощи остроумных маневров.

2...Кf4 3. Лe3! Кd5 4. Лf3 Кb4 5. Лc3 Кd5 (5...Кa2 6. Лc4) 6. Лc4! Кe3 7. Лd4! Кc2 8. Лd1! Кe3 9. Лd2! Кc4 10. Лd3 Кb2 (10...Кa5 11. Лc3) 11. Лd4. Или 7...Кf1 8. Лe4 Кd2 (8...Кg3 9. Лe1, 8...Кh2 9. Лf4) 9. Лe3 Кf1 (9...Кc4 10. Лd3) 10. Лe2 Кg3 11. Лe1.

2...Кc1 3. *Лd2 Кb3 4. Лd1!* Кc5 5. Лd4! Кb3 6. Лc4 Кd2. Неожиданно конь вырывается на свободу, впрочем, ненадолго. 7. Лb4! Кf3 (f1) 8. Лe4! Кd2 9. Лe3 и все кончено (дальше как в предыдущем варианте).

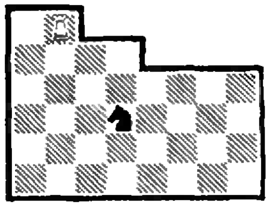
Осталось сказать, что в случае 1...Кd5 2. Лf3 возникает позиция первого варианта после четвертого хода белых, а в случае 1...Кe4 2. Лd3 Кc5 (2...Кf2 3. Лe3 Кd1 4. Лf3 с дальнейшим Лc3-c2-d2) 3. Лd4 — позиция второго варианта после пятого хода белых.

Тонкость и изящество игры в главных вариантах делают эту миниатюру весьма удачным образцом компьютерного творчества.



1. Лd4! Кc3. Быстрее проигрывает 1...Кe3 2. Лd2 или 1...Кb6 2. Лd2 Кa4 3. Лc2 и далее Лc5-c4-d4.

2. Лd2! Кe4 3. Лd3. Если теперь 3...Кc5, то 4. Лd4 и на 4...Кb3 — знакомый маршрут Лc4-b4-e4-e3. На 3...Кf2 решает 4. Лe3 Кd1 5. Лf3 Кb2 6. Лc3 Кd1 (6...Кa4 7. Лc4 и 8. Лd4) 7. Лc2 и т. д. При любом другом первом ходе ладьи выигрыша уже нет, правда, мустангу предстоят весьма опасные гонки. Вот один из вариантов: 1. Лc4? Кe3! 2. Лf4 Кc2! (2...Кd5? 3. Лd4, 2...Кd1? 3. Лf3) 3. Лe4 Кa3! 4. Лe2 Кb5! (4...Кc4? 5. Лc2 Кd6 6. Лc3) 5. Лd2 Кc3!, и белые в цугцванге: 6. Лd4 Кe2 7. Лc4 (7. Лd3 Кf4!) 7...Кg1 (7...Кg3? 8. Лc2 Кe4 9. Лe2 и 10. Лd2) 8. Лe4 Кf3! 9. Лg4 Кe1! (9...Кd2? 10. Лf4 Кb3 11. Лc4) с ничьей.



*Заключительная задача* потруднее предыдущих. Решение содержит 15 ходов — небольшая шахматная партия!

1. Лb3! Кf4. Ходы 1...Кf2 и 1...Кc5 ускоряют развязку, а при 1...Кc1 и 1...Кe1 дело сводится к основным вариантам. 2. Лf3! Продолжение «лобовой атаки» выглядит бессмысленно, но ошибкой было бы как раз напрашивающееся 2. Лe3. 2...Кd5 3. Лf2!! 3...Кb4 4. Лd2! Кa6 5. Лd4! Кc5 6. Лd5! Кe4 7. Лd3! Кc5 (7...Кf2 8. Лe3!) 8. Лd4! Эта позиция уже возникала после пяти ходов, но на сей раз надо ходить коню.

8...Кb3. Теперь следует эффектный маневр, знакомый нам по второй позиции. 9. Лc4! Кd2 10. Лb4! Кf1 11. Лe4! Кd2 12. Лe3! Кf1 13. Лe2 Кg3 14. Лe1, и следующим ходом ладья съедает коня.

Вот какая содержательная борьба возможна на миниатюрной доске даже при столь мизерном материале.

*Е. Гик*

70 коп.
Индекс 70465

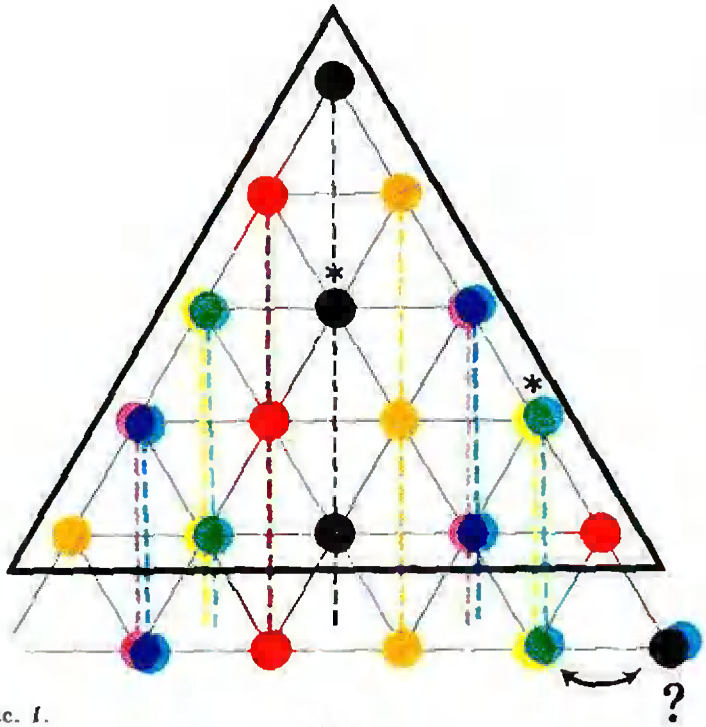



Рис. 1.

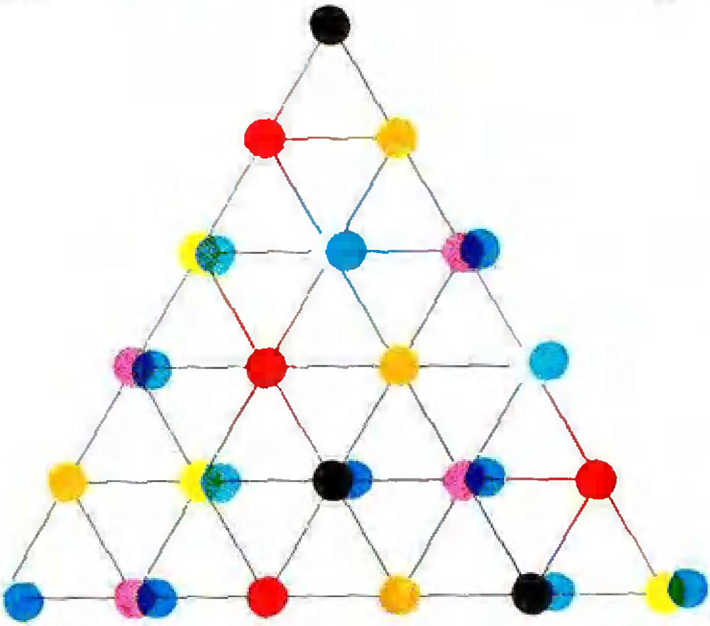


Рис. 2.

*После публикации головоломки «Цветные фишки на треугольном поле» (см. обложку «Кванта» № 8 за прошлый год) мы получили письма от В. Аксеновой из Ленинграда, С. Злотникова из Гомеля, В. Севрийского из Москвы, В. Талдыкина из Семипалатинска и др., с ее решениями. Напомним, что требовалось расставить фишки n цветов в узлах сетки, образуемой при разбиении треугольника на меньшие треугольники (по n узлов на стороне), так, чтобы на линиях сетки цвета не повторялись. В заметке, посвященной этой головоломке («Квант» № 9, 1990 г., с. 69), мы привели ее общее решение для нечетного n и предложили читателям найти решение для четного n>4. Выяснилось, что это не так уж сложно: надо только слегка подправить решение для «нечетного случая». Во всех полученных нами ответах это сделано по-разному, и мы изложим некий комбинированный вариант. Сначала отбросим основание треугольного поля. Останется решетка с нечетным числом n—1 узлов на стороне, и на ней можно расставить фишки n—1 цветов по известному нам правилу: вдоль вертикалей (рис. 1). Продолжим эти цветные вертикали до основания. Остаются незаполненными нижние углы треугольника. В левый угол ставим n-й цвет (у нас — голубой), в правый — цвет, который пока не использован в нижней строке, т. е. цвет вершины треугольника (у нас — черный). При этом концы правой стороны оказываются одноцветными. Внесем поправки: две крайние справа нижние фишки переставим, а вместо фишек тех же цветов на правой стороне и ближайшей к ней параллельной линии (отмеченных звездочками) поставим фишки n-го цвета. Очевидно, что после этого повторов цветов не останется (рис. 2).*

*В. Д.*