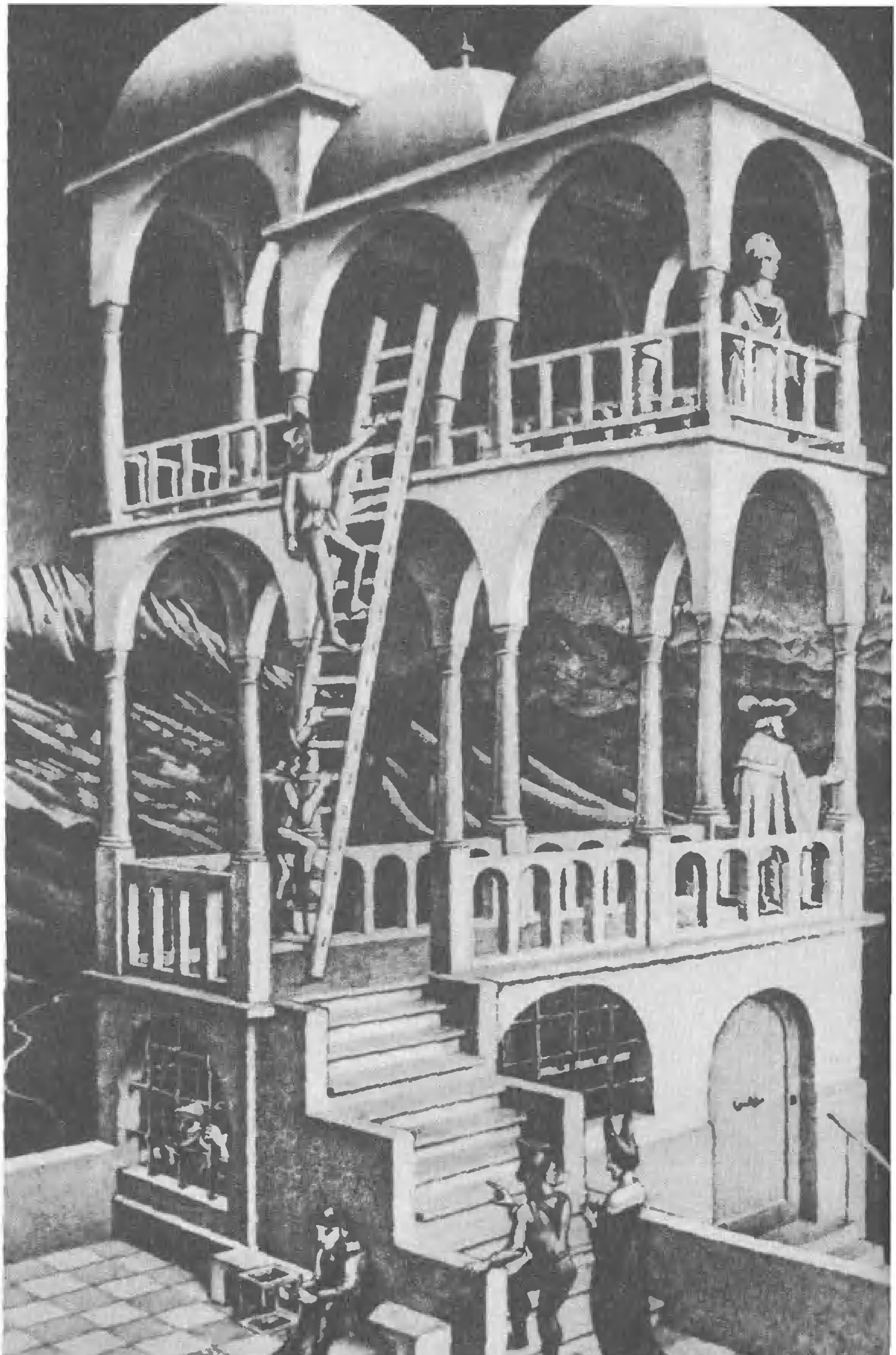
Квант

Научно-популярный
физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

О морозных узорах...

1990



Квант

12 1990

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Москва, «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

ВАРИАЦИИ НА ТЕМУ ЭШЕРА

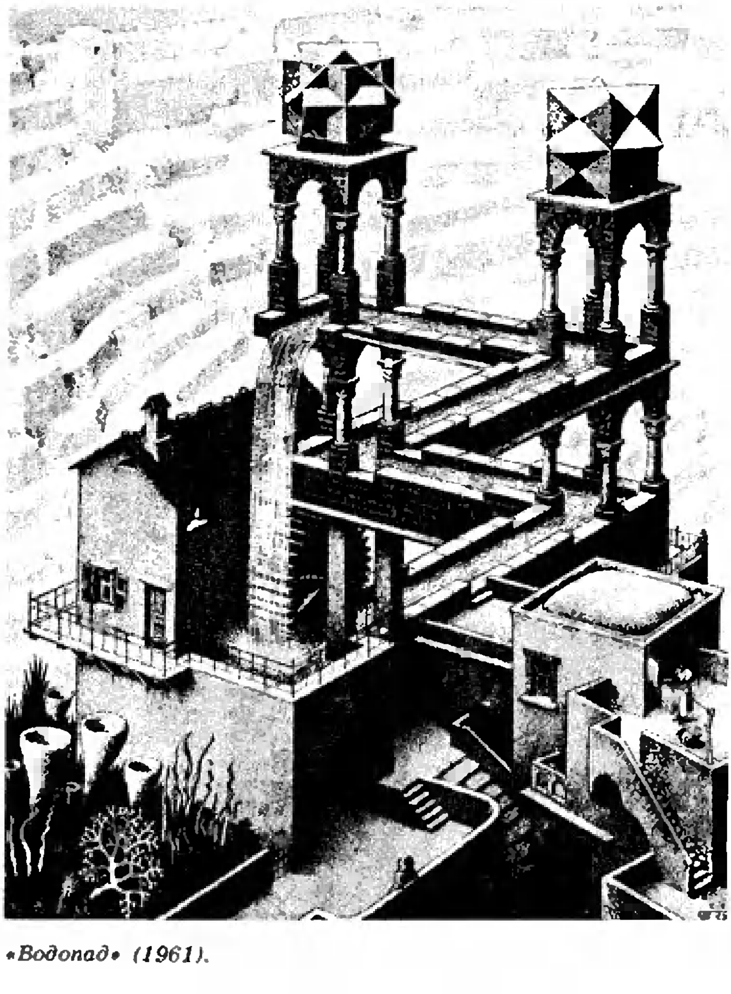
Кандидат физико-математических наук
С. ТАБАЧНИКОВ

Постоянные читатели «Кванта», вероятно, обращали внимание на репродукции работ замечательного голландского художника М. Эшера, которые время от времени публикуются в журнале. Жизнь Эшера, как часто пишут в биографиях выдающихся людей, была небогата событиями. Морис Корнелиус Эшер родился в городе Лееварден в 1898 году. В школе Эшер учился неважно (еще одна характерная деталь биографии знаменитого человека!); лучше всего давалось ему рисование. Его отец, инженер-гидравлик, хотел, чтобы сын получил солидную профессию; и в 1919 году Эшер поступает в Гарлемское училище архитектуры и декоративного искусства. В 1922 году, проучившись в училище два года, Эшер переезжает в Италию, где он прожил 13 лет.

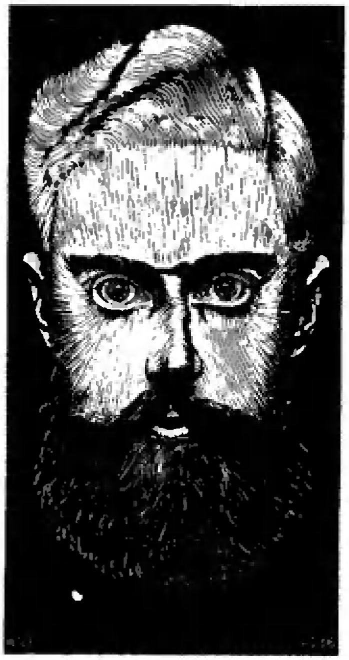
Каждое лето он путешествует по Южной Италии или Испании. Летние впечатления служили материалом для гравюр, над которыми он работал зимой. К середине тридцатых годов политический климат в Италии стал нетерпимым. В 1935 году девятилетнего сына Эшера обязали носить форму юного фашиста; это послужило толчком к решению семьи переехать в Швейцарию.

Холодная снежная Швейцария действовала на Эшера угнетающе. Он обратился в морскую компанию, совершавшую грузовые перевозки по Средиземному морю, с просьбой разрешить ему путешествовать на ее судах с оплатой гравюрами, выполненными в пути. Удивительно, но предложение было принято. Это было последнее большое путешествие Эшера. После этого он больше не нуждался во внешних впечатлениях для творчества.

С 1941 года Эшер постоянно живет в Голландии. Всемирная известность пришла к нему в 1951 году после публикаций сразу в трех популярных журналах: «The Studio», «Time» и «Life». В 1954 году в Амстердаме состоялась большая выставка Эшера, приуроченная к Международному математическому конгрессу. Ма-



«Водопад» (1961).



«Автопортрет» (1923).

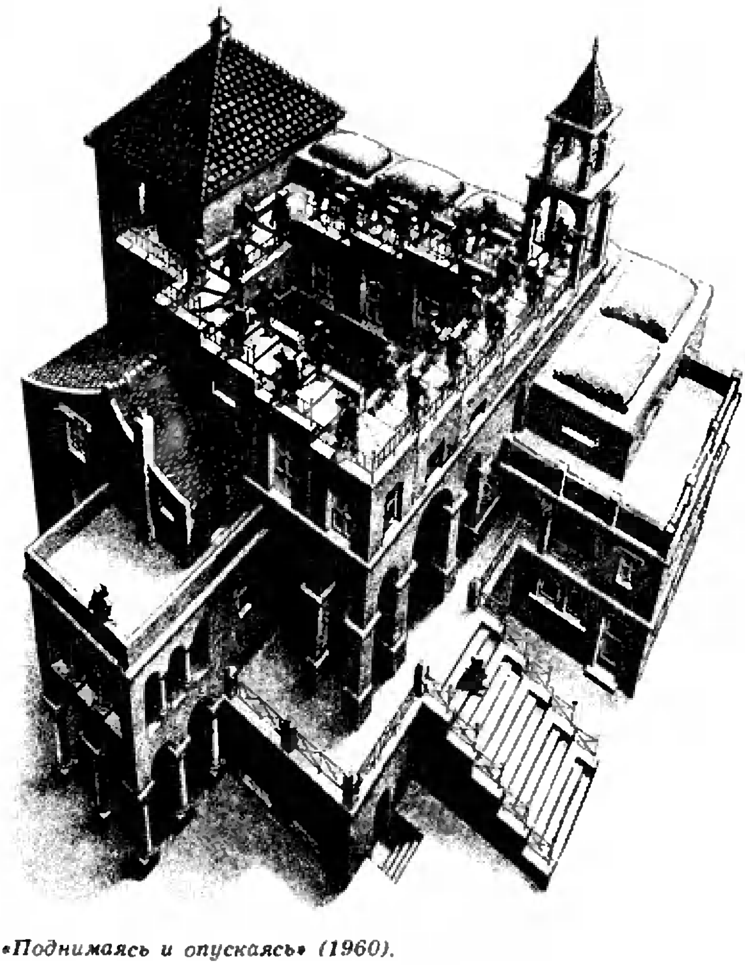
тематики сразу признали «своего» художника; с этого времени его рисунки — неизменный атрибут физико-математических изданий («Квант» публиковал Эшера более 20 раз). Слава мало изменила образ жизни художника, который настойчиво продолжал работать. Умер он 27 марта 1971 года.

Обратимся теперь к теме «Эшер и математика». Как я уже говорил, математики любят Эшера. Комментаторы обычно объясняют, как достигается тот или иной неожиданный эффект в его работах. Часто это — хороший повод рассказать о математических теориях. Например, орнаменты Эшера — прекрасная иллюстрация к теории кристаллографических групп (о которой «Квант» планирует рассказать в одном из ближайших номеров).

Сам Эшер плохо знал математику. Однажды известный геометр Г. Коксетер пригласил Эшера на свою лекцию, посвященную математическому содержанию его гравюр и литографий. Ко взаимному разочарованию, Эшер не понял почти ни слова из того, о чем рассказывал Коксетер. Вот что писал об этом сам художник:

«Я так ни разу и не смог получить хорошей оценки по математике. Забавно, что я неожиданно оказался связанным с этой наукой. Поверьте, в школе я был очень плохим учеником. И вот теперь математики используют мои рисунки для иллюстрации своих книг. Представьте себе, эти ученые люди принимают меня в свою компанию как потерянного и вновь обретенного брата! Они, кажется, не подозревают, что математически я абсолютно безграмотен».

В этих словах, наверное, есть доля преувеличения. Все же мне кажется, что творчество Эшера интересно математикам не только потому, что в его работах можно обнаружить отголоски конкретных математических результатов. Скорее они вызывают ассоциации с общими математическими идеями. Платон считал, что абстрактные идеи живут отдельно в «мире чистых сущностей» (таковы идеи пространства и времени). Думаю, что в таком,

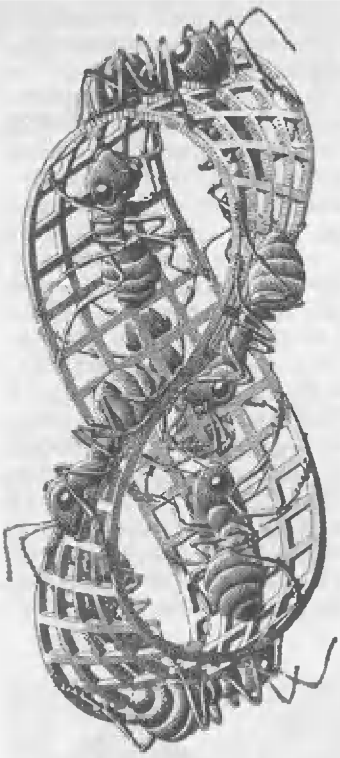


«Поднимаясь и опускаясь» (1960).

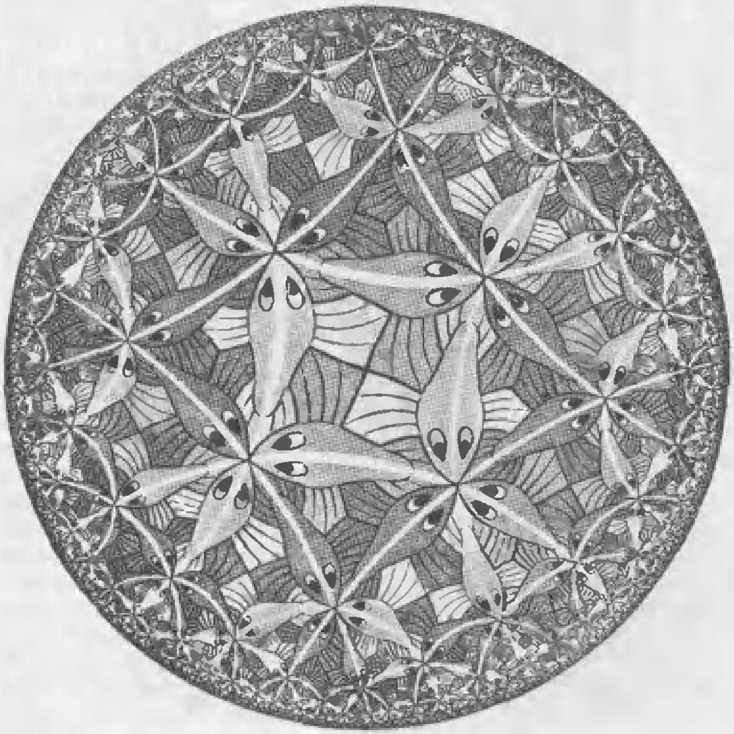
платоновском понимании мир Эшера и мир математики — близкие соседи. Попробую проиллюстрировать этот тезис.

Посмотрите на литографии «Бельведер» (см. 2-ю с. обл.), «Водопад» и «Поднимаясь и опускаясь». В каждой из них что-то не так... Лестница, по которой поднимается юноша,— внутри или снаружи беседки находится она? Вода все время течет вниз — и бесконечно движется по кругу. А монахи идут по замкнутой лестнице: одни все время вверх, а другие — вниз (кстати, бессмысленную работу голландцы называют «монашеский труд»). Каждый небольшой фрагмент этих работ безупречно изображает реальность, но в целом эти фрагменты складываются в невозможные объекты.

Но ведь нечто похожее бывает и в математике!



«Лента Мёбиуса» (1963).



Орнамент «Круговой предел» III (1959).

Например, окружность и прямая: «в малом», или как говорят в математике, локально, устроены одинаково (если разрешить изгибание), но «в целом» — *глобально* — совершенно различны. Выбросьте из прямой точку и она распадется на два куска; окружность же останется связной. Или знаменитая лента Мебиуса: в малом ее не отличить от бумажного кольца, но после обхода вы оказываетесь на ее противоположной стороне. Один из главных предметов исследования в топологии — это такие объекты, которые локально устроены одинаково, а глобально — по-разному.

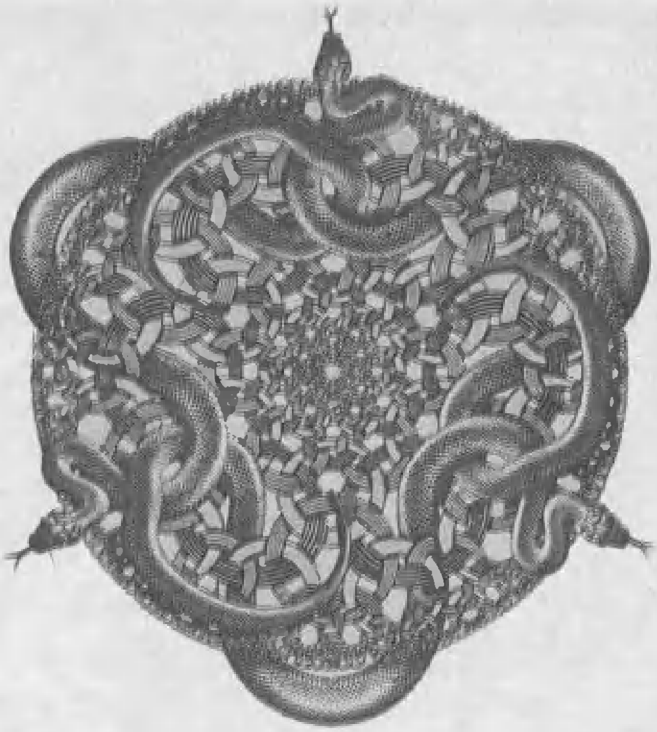
Обратите внимание на каркас куба в левом нижнем углу «Бельведера». Конечно же, это — невозможный объект! Английский математик Роджер Пенроуз опубликовал в 1958 году в психологическом журнале изображение другого невозможного объекта — «треугольника Пенроуза». Этот рисунок Эшер использовал при работе над «Водопадом». (Целое «созвездие» невозможных объектов вы увидите на обложке «Кванта» № 2 за 1979 год, а как получить их фотографии, рассказано в № 5 за 1971 год.)

Для того чтобы обсудить другие общие математические идеи, с которыми у меня ассоциируются работы Эшера, я предлагаю вам такую задачу. На столе лежит карта города, а на ней (строго внутри) — еще одна карта этого города, но меньшего масштаба. Нужно доказать, что найдется такое место в городе, изображение которого на обеих картах совпадает.

Задача решается так. Построим отображение f

большей карты в себя. Возьмем любую ее точку A и найдем на меньшей карте точку B, изображающую то же место в городе, которому отвечает точка A. Точка большей карты, лежащая под точкой B,— это и есть точка $f(A)$. Пусть M обозначает большую карту. $f(M)$ лежит внутри M, $f(f(M))$ — внутри $f(M)$, $f(f(f(M)))$ — внутри $f(f(M))$ и т. д. В пределе получается единственная точка — изображение одного и того же места на обеих картах.

Хорошо известен также орнамент «Меньше и меньше». Этот орнамент напоминает задачу о карте. Здесь *тоже* масштаб уменьшается к центру, который служит неподвижной точкой всего хоровода ящериц. На орнаменте «Круговой предел» ситуация обратная — масштаб уменьшается к периферии рисунка (о связи этого орнамента с инверсией и так называемой *модулярной* фигурой вы можете прочитать в статье «Геометрия круга», «Квант» № 6 за 1977 год). Наконец, на последней работе Эшера «Змеи» масштаб уменьшается как к центру, так и к граничной окружности.



«Змеи» (1969).

Идея неподвижной точки — одна из основных в математике. Что отображение, уменьшающее масштаб, имеет единственную неподвижную точку — ясно из решения задачи о картах (кстати, почему точка единственная?). В действительности, неподвижную точку имеет любое непрерывное отображение круга (или шара) в себя — это знаменитая теорема Брауэра.

В задаче о картах присутствует еще одна общая идея — идея взаимодействия объекта и обозначающего его знака (*объект — большая карта*, знак — меньшая). Совмещение предмета и его изображения вы видите на литографиях «Встреча», «Рисующие руки», «Рептилии». Рисунок на каждой из них покидает плоскость и превращается в реальное трехмерное тело, а затем снова возвращается в плоскость.

Следующая задача внешне совсем не похожа на задачу о картах, но в основе ее решения лежит та же идея взаимодействия объекта и знака. Рассмотрим последовательность из нулей и единиц; первая цифра — нуль, а затем последовательность строится по правилу: к уже построенному куску приписывается справа кусок такой же длины с заменой всех нулей на единицы, а единиц — на нули (как если бы в этом месте стояло зеркало). Вот первые члены этой последовательности (она называется последовательностью Морса):

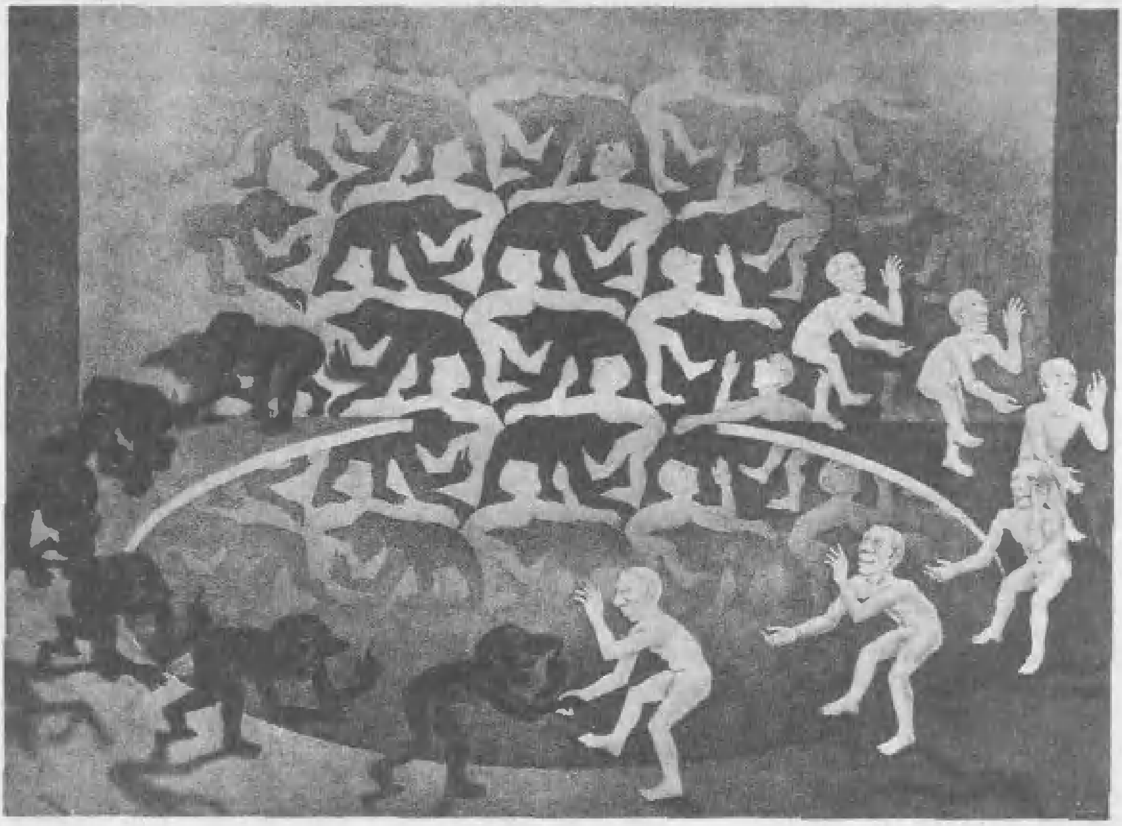
$$M = 0110100110010110\ldots$$

Требуется доказать, что эта последовательность непериодическая.

Будем писать $0*$ вместо пары 01 и $1*$ — вместо 10. С помощью этих символов наша последовательность записывается точно так же, как раньше:

$$M* = 0*1*1*0*1*0*0*1*\ldots$$

Предположим, что M имеет период. Ясно, что M содержит примерно поровну нулей и единиц (скажем, в каждом начальном отрезке длиной 2^k их точно поровну). Если бы период имел нечетную длину, то в нем или единиц, или нулей было бы



«Встреча» (1944).

больше, а тогда в M одних цифр становилось бы все больше и больше, чем других. Итак, если период есть, *то его длина четна.*

Но тогда можно считать, что M состоит из предпериода четной длины и минимального периода длины $2n$. *Значит, и предпериод, и период можно записать с помощью символов* 0* и 1*; период будет состоять из n знаков 0* и 1*. *А теперь внимание:* уберем звездочки у цифр — последовательность от этого не изменится. Следовательно, M имеет период *и длины* n, что противоречит его минимальности.

Не правда ли, это напоминает решение задачи о картах? M — аналог *большой карты*, M* — карты меньшего масштаба (или так: M — исходный объект, M* — обозначающий его знак, совпадающий к тому же с самим M). Продумайте эту аналогию, а заодно попытайтесь догадаться, как определить значение n-го члена последовательности Морса по его номеру (подсказка: запишите n в двоичной системе счисления).

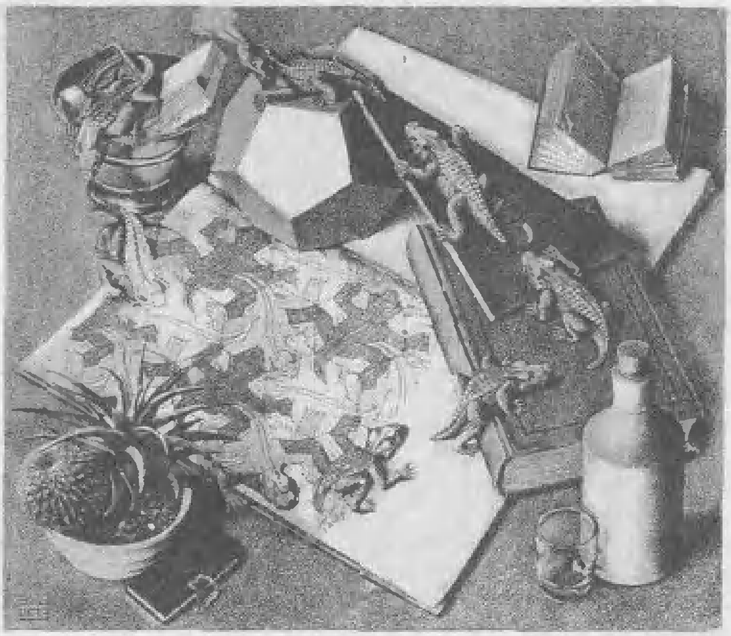
Неосторожное совмещение объекта и знака может приводить к парадоксам типа:

то, что написано на этой строке, неверно.

(Об этом рассказано в статье «У попа была собака», «Квант» № 6 за 1989 год.) Но может привести и к замечательным результатам.

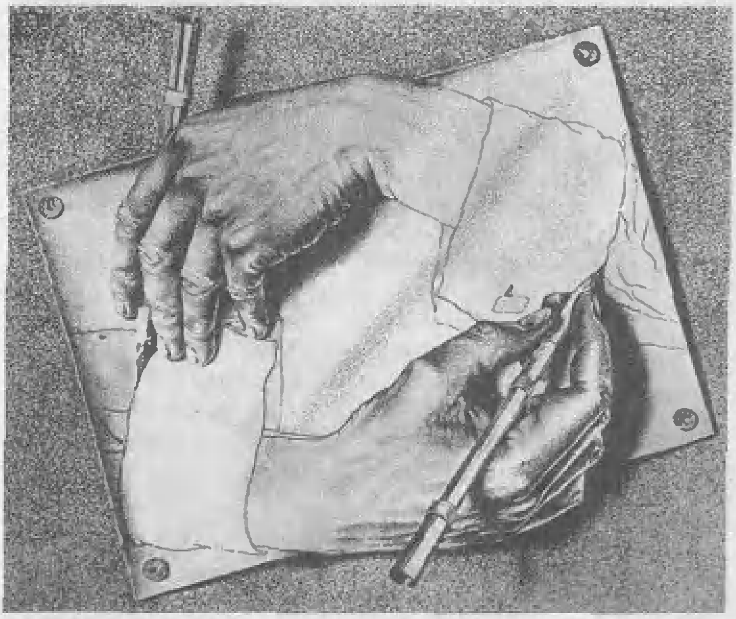
Самый известный пример такого рода — это знаменитая теорема Геделя о неполноте арифметики. Речь идет о том, всякое ли истинное арифметическое утверждение может быть формально доказано, т. е. выведено из аксиом арифметики по законам логики (которые тоже описываются аксиомами). Представьте себе, что удалось построить формулу, которая утверждает собственную недоказуемость. Если эта формула ложна, значит она доказуема, а доказуемые утверждения истинны. Следовательно, она истинна, а стало быть, недоказуема! Итак, если на языке арифметики можно построить такую формулу, то арифметика окажется неполной: в ней есть истинные, но недоказуемые утверждения.

Именно это и удалось сделать австрийскому логику Курту Геделю. Для построения нужной формулы он присваивает всем формулам и их последовательностям номера, по которым формулы однозначно восстанавливаются (вот проявление идеи объекта и знака: формулы — объекты, геделевские номера — знаки). Свойство формулы *быть доказуемой* оказывается распознаваемым по ее номеру. После этого Гедель конструирует формулу, выражающую свою собственную недоказуемость. *Конечно, это очень* приблизительное описание работы Геделя (рекомендую по этому поводу замечательную книгу Ю. И. Манина «Доказуемое и недоказуемое», М.: *Радио*, 1979). На английском языке есть книга Д. Хофстадтера «Гедель, Эшер, Бах», посвященная теореме Геделя и иллюстрированная репродукциями *Эшера*. (Вскоре выйдет ее перевод на русский язык.) Теорема Геделя произвела в начале 30-х годов эффект разорвавшейся бомбы, заставив математиков отказаться от веры во всемогущество аксиоматического метода.



«Рептилии» (1943).

Пожалуй, из всех работ Эшера лучше всего известны его орнаменты, т. е. периодические заполнения плоскости одинаковыми фигурами. Во время путешествия в Испанию Эшер старательно изучал и зарисовывал орнаменты в *Альгамбре*, выполненные в период мавританского владычества. В искусстве орнамента арабские мастера достигли совершенства. Ислам запрещает *изображение* человека, животных, рыб и птиц (в соответствии с заповедью: «Не сотвори кумира!»), поэтому мусульманские орнаменты составлены из *абстрактных геометрических* фигур. Эшера очень занимала задача составления орнаментов, использующих в качестве повторяющихся элементов реальные изображения. *О результатах, которых ему* удалось достичь, вы можете судить сами.



«Рисующие руки» (1948).

Орнаменты Эшера, конечно, отвечают важной математической идее периодичности (недавно «Квант» писал об этом: см. статью «И возвращается ветер...», или Периодичность в математике», № 4 за этот год).

(Окончание см. на с. 19)

Я убежден, что Исаак Ньютон
То яблоко, которое открыло
Ему закон земного тяготения,
Что он его,
В конечном счете, — съел...

Дж. Байрон. Дон Жуан, песнь X

ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

Доктор физико-математических наук
Я. СМОРОДИНСКИЙ

В современной физике есть постоянные, которые называют *фундаментальными*. Среди них скорость света c, заряд электрона e, масса электрона m, гравитационная постоянная G, постоянная Планка h. Эти постоянные входят в *формулы*, описывающие физические процессы в микромире и в космическом пространстве. Фундаментальность этих постоянных в том, что их значения не изменяются ни со временем, ни с местом в пространстве. Где бы мы ни измеряли эти постоянные, мы всегда получим одни и те же значения. Физики знают, что эти постоянные не изменились сколь-нибудь заметно за миллиарды лет эволюции Вселенной.

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 6 за 1977 год.

Первую фундаментальную постоянную — гравитационную постоянную G — ввел в физику Исаак Ньютон. Появилась она с открытием закона всемирного тяготения.

В истории этого открытия много удивительного и интересного. Забавна легенда о том, как Ньютон открыл этот закон, сидя под яблоней, когда ему на голову упало яблоко. Интересно, как Ньютон смог доказать справедливость этого закона, изучая движение Луны. Удивительно, сколь точным оказался этот закон.

Но самым удивительным было то, с какой смелостью Ньютон объявил, что закон тяготения есть всеобщий закон, который определяет взаимодействие любых тел во Вселенной.

Из равенства ускорений всех падающих тел он заключил, что сила, действующая на падающее тело, пропорциональна массе этого тела; сила, с которой Луна притягивается Землей, должна быть пропорциональна как массе Луны, так и массе Земли, поскольку можно с таким же успехом считать, что Земля притягивается Луной.

Это было главное в открытии Ньютона. Но Ньютон понял и то, что, хотя для разных тел ускорение должно быть одним и тем же, оно должно уменьшаться с возрастанием расстояния между притягивающимися телами.

В своем сочинении «Математические начала натуральной философии», вышедшем в Англии в 1686 году, Ньютон подвел итог своим многолетним исследованиям в механике*); он излагает, как он нашел зависимость сил притяжения между телами от расстояния между ними.

Проще всего было бы вывести этот закон для движения по окружности (мы это и сделаем ниже); но планеты движутся по эллипсам, и надо было доказать, что из того же закона можно получить и эллиптическую траекторию.

В своей книге Ньютон формулирует четыре правила, которыми должен руководствоваться естествоиспытатель. Он называет эти правила «правилами философствования». Мы приведем их полностью:

«Правило I. Не до́лжно принимать в природе иных причин сверх тех, которые истинны и достаточны для объяснения явлений.

Правило II. Поэтому, поскольку возможно, до́лжно приписывать те же причины того же рода проявлениям природы.

Правило III. Такие свойства тел, которые не могут быть ни усиляемы, ни ослабляемы и которые оказываются присущими всем телам, над которыми возможно производить испытания, должны быть почитаемы за свойства всех тел вообще.

Правило IV. В опытной физике предложения, выведенные из совершающихся явлений помощью наведения, несмотря на возможность противных им предположений, должны быть почитаемы за верные или в точности или приближенно, пока не обнаружатся такие явления, которыми они еще более уточняются или же окажутся подтвержденными исключениям.»

Правило III позволяет Ньютону сделать следующий вывод: «...Опытами и астрономическими наблюдениями устанавливается, что все тела по соседству с Землей тяготеют к Земле, и притом пропорционально количеству материи каждого из них; так, Луна тяготеет к Земле пропорционально своей массе, и взаимно наши моря тяготеют к Луне, все планеты тяготеют друг к другу, подобно этому и тяготение комет к Солнцу. На основании этого правила надо утверждать, что все тела тяготеют друг к другу». Зависимость сил тяготения от расстояния Ньютон сформулировал так: «Если времена находятся в полукубическом отношении радиусов, то центростремительные силы обратно пропорциональны квадратам радиусов...» Первая половина этой теоремы есть просто третий закон Кеплера:

*) Натуральной философией в Англии называли в XVII веке физику. Книга Ньютона была переведена на русский язык только в 1915 году замечательным русским ученым А. Н. Крыловым. Этот перевод помещен в V томе Собрания сочинений Крылова. Ниже в тексте статьи все цитаты приводятся из этого перевода.

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{R_1^{3/2}}{R_2^{3/2}}$$

— периоды обращения планет относятся как полукубические степени (степени 3/2) радиусов их орбит. Центростремительная же сила есть та сила, которая заставляет планеты падать на Солнце, т. е. сила притяжения планет Солнцем.

Книга Ньютона была первой книгой, где механика излагалась как точная наука; эту книгу нужно считать первой книгой по теоретической физике и считать год выхода книги — 1686 год — годом рождения теоретической физики. Влияние этой книги на науку было огромным. После нее уже нельзя было ограничиться только рассуждениями, словесными описаниями явлений природы — надо было создавать их теорию. А правильность теории может быть установлена только опытной проверкой: если предсказания теории совпадают с данными опытов, наблюдений,— теория верна. Создание Ньютоном и Лейбницем математического анализа дало средства для выполнения этой программы.

* * *

Еще древние греки создали первую теорию движения планет. Эта теория была изложена Птолемеем в трактате «Альмагест». Но она совсем не касалась вопроса о том, почему движутся планеты. Такой вопрос и не возникал. Следуя учению Аристотеля, греки считали, что планетам свойственно движение по окружностям, подобно тому как тяжелым телам свойственно падать, а легким, как дым, подыматься вверх. Даже в средние века рассуждать о причинах движения планет значило смешивать астрономию с физикой, что было по представлениям того времени не позволительно; законы небесные и земные принадлежали разным областям,и в них не следовало искать чего-либо общего.

Все же Коперник в 1543 году говорил о том, что тяжесть — это общее свойство тел, «...стремление, благодаря которому они, смыкаясь в форме шара, образуют единое целое. И следует допустить, что это стремление присуще также Солнцу, Луне и остальным планетам...».

Кеплер (а до Кеплера еще и Гильберт) сравнивал тяжесть с магнитным действием. При этом Кеплер был первым, кто объявил задачу о движении планет физической задачей, и первым, кто ясно поставил вопрос, *почему* движутся планеты, в то время как все остальные астрономы лишь придумывали геометрические модели, которые описывали, *как* движутся планеты. Физики времен Галилея и Кеплера решали физические задачи, составляя пропорции. Так, о падении тел на Земле говорилось, что если промежутки времени расположить в форме арифметической прогрессии, то отрезки путей, проходимых телом за последовательные промежутки времени, будут относиться как квадраты последовательных чисел. Галилей знал, что все тела на Земле падают с одинаковым ускорением; он вполне мог объяснить, почему брошенное на Землю тело летит по параболе. Описывая полет снаряда, он говорил, что это движение складывается из равноускоренного падения и равномерного прямолинейного движения по инерции, и не задавался вопросом о том, почему снаряд падает равноускоренно. Очень трудно было прийти к мысли, что ускорение зависит от высоты. Галилей считал, что даже Луна (если остановить ее поступательное движение) будет падать на Землю с тем же ускорением, с каким камень падает на Земле.

Правда, Галилей считал, что и для Луны должен выполняться «земной» закон независимости ускорения свободного падения от массы. Так что «половину» задачи он понимал правильно! Но Галилей никак не мог воспринять идею, что Земля притягивает камень. Падение камня (Луны) на Землю есть просто проявление стремления всех тел собраться поближе к одному центру, собраться в некую шарообразную «кучу». В то время считалось очевидным, что одно тело может действовать на другое, только соприкасаясь с ним. Действие на расстоянии казалось просто немыслимым.

Поэтому Галилей отверг идею Кеплера о том, что приливы и отливы на Земле связаны с притяжением Луной вод океанов. К времени Ньютона положение начало изменяться.

Не все слепо следовали за Галилеем. Так, Роберт Гук, основываясь на аналогии тяжести с притяжением магнита, пытался в 1666 году опытным путем определить, как изменяется вес тела с высотой. Он проводил опыты с маятниками разной длины в Вестминстерском аббатстве в Лондоне. Ясно, что обнаружить что-либо существенное он так и не смог. Даже высказывая предположение о том, что сила притяжения изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния, он не смог облечь свои мысли в строгую форму уравнений. Гук не умел еще ни писать уравнений, ни решать их и потому не смог проверить справедливость этого предположения. Также ничего не смог сделать и другой знаменитый в то время механик англичанин Рен. Рен также говорил о законе обратных квадратов, но и у него все ограничивалось словами.

Только в руках Ньютона все стало на свои места. Первая, и главная, идея пришла ему в голову в 1665 году, когда он спасался от чумы в своем родовом поместье. Как рассказывают, все дело началось с яблока, упавшего с дерева. 23-летнего ученого поразила мысль, что причина, заставляющая яблоко падать на Землю, должна быть родственна причине, заставляющей Луну отклоняться от своего прямолинейного пути. Сейчас это кажется очевидным, но во времена Ньютона сама мысль о подчинении космических тел простым земным законам была необычайно смелой. Но одно дело поверить самому в смелую гипотезу, а другое — убедить в ее справедливости других. Для этого надо, по крайней мере, найти способ ее проверки, *найти способ, как мы говорим сейчас*, сравнить теорию с опытом.

Лучше всего было начать с исследования движения Луны, используя имеющиеся результаты наблюдений. Это требовало сил и времени. Ньютон, кроме того, был еще занят оптическими исследованиями; и вообще ученые того времени обычно не торопились с публикациями. Вероятно, поэтому лишь через 20 лет — в апреле 1686 года — Ньютон представил Королевскому обществу (Английской академии наук) первый том «Начал», а весь труд был опубликован к середине 1687 года. Только тогда теория была выдана на суд других физиков.

* * *

Напишем закон всемирного тяготения для Солнца и планеты (обозначая их массы M и m). Сила притяжения

$$F = G\frac{Mm}{r^2}.$$

Ускорение, сообщаемое этой силой планете,

$$a = G\frac{M}{r^2}.$$

Как же Ньютон получил эти формулы?

В своих поисках закона тяготения Ньютон исходил из третьего закона Кеплера: квадраты средних времен обращения планет относятся как кубы их средних расстояний от Солнца. (Этот закон Ньютон называет полукубическим отношением.) Еще тогда, когда Ньютон сравнивал падение яблока и Луны, он знал, что, если тело движется по окружности, на это тело действует сила, притягивающая его к центру окружности; он знал также, что центростремительное ускорение пропорционально квадрату скорости и обратно пропорционально расстоянию.

Правда, честь открытия законов кругового движения приписывается Гюйгенсу, но Гюйгенс опубликовал свое открытие лишь в 1673 году (хотя знал о нем еще в 1659). Ньютону пришлось поэтому разбираться во всем самому.

Ньютон рассуждал примерно так. Третий закон Кеплера гласит, что для планет одной системы

$$\frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_2^2} = \dots = \text{const}.$$

Пусть планеты движутся по окружностям. Введем угловую скорость вращения планеты по орбите $\omega = 2\pi/T$. Тогда третий закон Кеплера примет вид:

$$\omega_1^2 R_1^3 = \omega_2^2 R_2^3 = ... = \text{const}.$$

Предположим теперь, что сила взаимодействия планеты с Солнцем пропорциональна некоторой степени расстояния:

$$F \sim R^n.$$

Этой же степени R пропорционально и ускорение планеты:

$$a = CR^n,$$

где C — некоторая константа. Так как $a = \omega^2 R$,

$$\omega^2 = CR^{n-1}.$$

Какова должна быть степень n, чтобы произведение $\omega^2 R^3$ было постоянным? Так как

$$\omega^2 R^3 = CR^{n-1} R^3 = CR^{n+2},$$

то ясно, что произведение $\omega^2 R^3$ не зависит от R, если $n = -2$. Тогда

$$\omega^2 R^3 = C.$$

Ньютон также предположил, что постоянная C пропорциональна массе притягивающего тела, т. е. Солнца:

$$C = GM_{\odot}.$$

Постоянная G и есть гравитационная постоянная, которая, по предположению Ньютона, уже не зависит ни от каких других величин. Итак,

$$a = G\frac{M_{\odot}}{R^2}.$$

Следовательно, сила, сообщающая планете массой m это ускорение, т. е. сила взаимодействия планеты с Солнцем, равна

$$F = G\frac{M_{\odot} m}{R^2}.$$

В этом выводе, однако, задача слишком упрощена. На самом деле она значительно сложнее.

Вводя в формулу одно-единственное расстояние R, мы рассуждали так, как будто бы Солнце — материальная точка, не имеющая размеров. Но Ньютон понимал, что, для того чтобы проверить закон тяготения, например, по движению Луны, надо уметь решать задачу для тела конечного размера, просуммировав как-то вклады от разных частей Земли и Луны. Задача была сложной, и ее решение было получено не скоро. Вероятно, это было главной причиной, почему Ньютон так долго не публиковал свое открытие.

Результаты решения этой сложной задачи Ньютон представил в виде теорем. Для однородных по плотности тел формула для закона притяжения выглядит так, как будто бы вся масса тела сосредоточена в его центре. Ньютон доказал, что сферический слой однородной плотности притягивается другими телами и, по закону равенства действия и противодействия, притягивает сам другие тела так, как будто вся его масса сосредоточена в центре.*) Если представить себе шар сложенным из сферических слоев, то можно видеть, как вычислять поле тяготения тела со сферически симметричным распределением массы. Эти теоремы Ньютона решили дело. Теперь в выражении для силы, действующей между Луной и Землей, под R следовало понимать расстояние между центрами этих тел. Замена реальных Земли и Луны телами со сферически симметричным распределением масс оказалась настолько хорошим приближением, что только в последние годы, при расчетах траекторий спутников, пришлось уточнять формулы.**)

Была и еще одна причина, которая, по-видимому, мешала Ньютону опубликовать его исследования закона тяготения. Ньютон не имел точного

*) Речь идет о телах, находящихся вне слоя. Ньютон доказал, что внутри полости гравитационные силы равны нулю.

**) Конечно, все рассуждения о Луне верны только приблизительно. В реальном мире движение Луны вокруг Земли определяется не только их взаимодействием по закону Ньютона. Ньютон сам это заметил и без успеха бился над решением задачи о Луне. Корень зла таился во взаимодействии Луны с другими планетами. Должно было пройти много лет, пока астрономы научились рассчитывать движение Луны с нужной точностью. Если читателю интересны подробности, он может прочесть книгу Бронштэна В. А. «Как движется Луна» (М., «Наука», 1990).

значения радиуса Земли, и сравнение расчетов с результатами наблюдений не давало хорошего согласия. Только после того, как Пикар измерил радиус Земли с большой точностью (ошибка не превышала 0,03 %), исчезли расхождения.

Теперь можно было доказать самое главное. Доказать, что из закона всемирного тяготения следует, что траекториями планет будут эллипсы, а траекториями комет — гиперболы.

Необходимость такого доказательства была четко сформулирована в январе 1684 года во время беседы трех английских физиков — Галлея, Рена и Гука. Рен даже объявил приз — книгу, которую он отдаст тому, кто в течение двух месяцев решит задачу. Приз так и не был вручен. В мае Галлей предлагает эту задачу Ньютону, который и прислал ему через полгода нужное доказательство.

В «Началах» Ньютон излагает решение обратной задачи: он находит, каков должен быть закон взаимодействия, чтобы траекторией был эллипс, и показывает, что это должен быть закон «обратных квадратов». Более того, Ньютон доказывает, что если бы закон сил, действующих между планетой и Солнцем, хотя бы немного отклонился от закона обратных квадратов, то точки наибольшего и наименьшего удаления планеты от Солнца не были бы неподвижны в пространстве. А из наблюдений было известно, что эти точки (их называют апсидами) почти неподвижны. Это доказательство Ньютона — одно из самых блестящих в астрономии.

Обратим еще раз внимание на сказанное: можно утверждать, что закон обратных квадратов для сил притяжения следует из одного только факта неподвижности апсид; так что расчеты силы притяжения с помощью третьего закона Кеплера излишни; на самом деле третий закон является следствием первого. Этого, конечно, Кеплер знать не мог.*)

*) Если бы сила притяжения была пропорциональна расстоянию, планета имела бы замкнутую эллиптическую орбиту только в том случае, если бы Солнце располагалось не в фокусе эллипса, а в его центре.

Что есть слава? Порождение случая! Сэр Исаак Ньютон открыл, что яблоки падают на землю,— честное слово, такие пустяковые открытия делали до него миллионы людей. Но у Ньютона были влиятельные родители, и они раздули этот банальный случай в чрезвычайное событие, а простаки подхватили их крик. И вот в одно мгновение Ньютон стал знаменит!!

Марк Твен. Когда я служил оператором

* * *

Много лет теория Ньютона была основой небесной механики, и хотя многие пытались обнаружить какие-либо поправки к закону всемирного тяготения, найти их удалось только Эйнштейну. Сейчас мы знаем, когда закон всемирного тяготения становится неточным, и умеем вычислять к нему поправки. Закон тяготения верен до тех пор, пока расстояние между телами много больше так называемого гравитационного радиуса притягивающего тела. Гравитационным радиусом тела массой M называют величину

$$R_{гр} = \frac{2GM}{c^2},$$

где $GM = C$ — это известная уже нам «постоянная Кеплера», а c — скорость света. Для Солнца гравитационный радиус равен 3 км, а для Земли — 7 мм. Отсюда мы можем заключить, что закон всемирного тяготения на поверхности Земли может иметь относительную ошибку, равную примерно $\frac{7 \cdot 10^{-3}\text{ м}}{6{,}4 \cdot 10^{6}\text{ м}} \approx 10^{-9}$ (радиус Земли ≈ 6400 км), а на поверхности Солнца — $\frac{3 \cdot 10^{3}\text{ м}}{7 \cdot 10^{8}\text{ м}} \approx 0{,}4 \cdot 10^{-5}$ (радиус Солнца $\approx 700\,000$ км).

На расстоянии, равном расстоянию от Солнца до Меркурия (около 50 млн. км), мы можем ожидать ошибку в законе всемирного тяготения

(Окончание см. на с. 51)


СМЕСТИТЬСЯ В ТОЧКУ X
ОПУСТИТЬ ПЕРО!
ПОДНЯТЬ ПЕРО!
СМЕСТИТЬСЯ НА ВЕКТОР
ТИШКОВ

ЧЕРТЕЖНИК РИСУЕТ КВАДРАТ

Кандидат физико-математических наук
В. ГИСИН

Иногда казалось бы совсем простые задачи по информатике приводят к интересным математическим задачам. Мы рассмотрим одну такую задачу из учебника информатики под редакцией А. П. Ершова (1988 г.).

Сначала напомним описание Чертежника — устройства, предназначенного для построения рисунков на координатной плоскости. Чертежник имеет перо, которое может перемещаться по плоскости. Если перо опущено, оно оставляет след. Чертежник может исполнять 4 команды: «поднять перо», «опустить перо», «сместиться в точку $(x;\ y)$», «сместиться на вектор $(d_x;\ d_y)$». Координаты точек и векторов в командах Чертежника записываются в виде конечных десятичных дробей. Считается, что перед началом работы Чертежника плоскость чиста, перо поднято и находится в начале координат. Чтобы получить рисунок, нужно дать Чертежнику серию команд. Например, если скомандовать:

> сместиться в точку (1; 1); опустить перо; сместиться на вектор (0; —2); сместиться на вектор (—2; 0); сместиться на вектор (0; 2); сместиться на вектор (2; 0); поднять перо,

то после исполнения будет нарисован квадрат со стороной 2 и центром в начале координат (задача 1 в § 4). Возникает естественный вопрос: может ли Чертежник нарисовать какой-нибудь квадрат со стороной 2 и центром в начале координат, не совпадающий с нашим квадратом?

Понятно, что у всякого такого квадрата координаты вершин выражаются конечными десятичными дробями. Наоборот, если координаты хотя бы одной вершины квадрата с центром в начале координат — конечные десятичные дроби (например, $(x;\ y)$), то конечными десятичными дробями будут и координаты остальных вершин (именно, $(x;\ y)$, $(-y;\ x)$, $(-x;\ -y)$, $(y;\ -x)$) и координаты всех векторов-сторон (именно, $(-x-y;\ x-y)$, $(-x+y;\ -x-y)$, $(x+y;\ -x+y)$, $(x-y;\ x+y)$) — рисунок 1. Точно так же, если хотя бы один из наших четырех векторов имеет конечные десятичные координаты, то остальные векторы и все вершины имеют конечные десятичные координаты. Таким образом, квадрат с центром в начале координат можно построить при помощи нашего Чертежника тогда и только тогда, когда хотя бы у одной его вершины или хотя бы у одного вектора его сторон координаты — конечные десятичные дроби.

Нам удобнее рассматривать не векторы, а *половины векторов*. Если длина стороны квадрата равна 2, то длина ее половины равна 1. Таким образом, чтобы найти все квадраты, являющиеся решениями нашей зада-

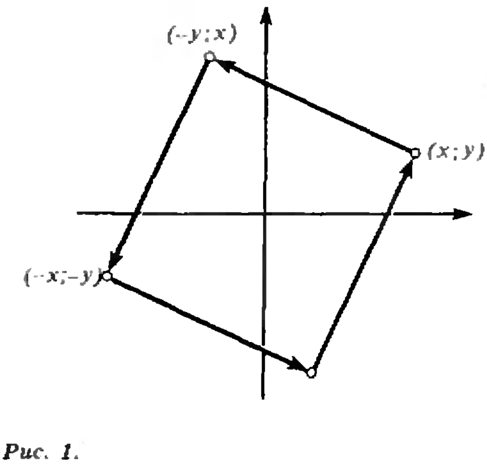


Рис. 1.

чи, мы должны просто отыскать все пары (a; b) конечных десятичных дробей, для которых $a^2+b^2=1$. По-другому — найти все точки единичной окружности с центром в начале координат, координаты которых — конечные десятичные дроби.

Четыре такие точки видны сразу: (±1; 0) и (0; ±1). Но они соответствуют нашему квадрату. А еще есть? Да, например, $a=0{,}6$, $b=0{,}8$ (или $a=\pm0{,}6$, $b=\pm0{,}8$, или $a=\pm0{,}8$, $b=\pm0{,}6$). А еще? Есть и еще, как показывает простое геометрическое рассуждение.

Координаты произвольной точки нашей окружности — это ($\cos\varphi$; $\sin\varphi$), где φ — угол между положительным направлением оси OX и радиус-вектором нашей точки, отсчитываемый против часовой стрелки. Значит, мы хотим найти все углы φ такие, что $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ — конечные десятичные дроби. Назовем такие углы *десятичными*.

Лемма. *Если φ_1 и φ_2 — десятичные углы, то $\varphi_1+\varphi_2$ и $\varphi_1-\varphi_2$ — также десятичные углы.*

Доказательство. Это сразу видно из формул $\cos(\varphi_1\pm\varphi_2)=\cos\varphi_1\cos\varphi_2\mp\sin\varphi_1\sin\varphi_2$, $\sin(\varphi_1\pm\varphi_2)=\sin\varphi_1\cos\varphi_2\pm\cos\varphi_1\sin\varphi_2$.

Следствие. *Если φ_1 и φ_2 — десятичные углы, то $k_1\varphi_1+k_2\varphi_2$ — десятичный угол при любых целых k_1 и k_2.*

Точке (0,6; 0,8) соответствует угол φ_0, для которого $\cos\varphi_0=0{,}6$, $\sin\varphi_0=0{,}8$. Угол φ_0 — десятичный. Но по доказанному $2\varphi_0$ — тоже десятичный угол. По известным формулам $\cos2\varphi_0=0{,}6^2-0{,}8^2=-0{,}28$, $\sin2\varphi_0=2\cdot0{,}6\cdot0{,}8=0{,}96$. Значит, вот еще одна подходящая точка окружности: (—0,28; 0,96). А можно взять и (0,28; 0,96), и вообще ($\pm0{,}28$; $\pm0{,}96$) или ($\pm0{,}96$; $\pm0{,}28$). А еще можно взять $3\varphi_0$, $4\varphi_0$, ... Потом не забудем о точках (±1; 0) и (0; ±1). Им соответствуют углы 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, т. е. углы $\frac{l\pi}{2}$ с $l=0$, 1, 2, 3. Значит, мы знаем массу десятичных углов: таковы все углы

$$k\varphi_0+\frac{l\pi}{2} \qquad (*)$$

с любым целым k и $l=0$, 1, 2, 3 (можно сказать «с любым целым l», но если l изменить на 4, угол изменится на 2π, т. е. задаст тот же поворот). Но, может быть, и это не все? Нет, это уже все. Мы рассмотрим такую теорему.

Теорема 1. *Все десятичные углы имеют вид (*), и все углы (*) (с $l=0$, 1, 2, 3) различны.*

Эту теорему мы докажем немного погодя. А сейчас заметим, что квадраты, которые может построить наш Чертежник, получаются из квадрата, описанного в начале статьи, поворотами на десятичные углы φ вокруг начала координат. На рисунке 2 изображены квадраты, образованные серединами сторон исходного и повернутого квадрата. Единичные векторы, идущие из начала координат в их вершины, являются десятичными. Кроме того, так как поворот вокруг центра на угол $\pi/2$ переводит всякий квадрат в себя, оказывается справедливой следующая теорема.

Теорема 2. *Квадраты со стороной 2 и центром в начале координат, которые можно построить при помощи Чертежника,— это квадраты, получающиеся из первоначального квадрата поворотами в ту или иную сторону на углы φ_0, $2\varphi_0$, $3\varphi_0$, ... Все эти квадраты различны.*

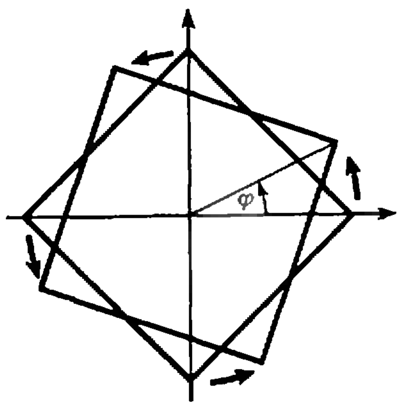


Рис. 2.

(Напомним, что поворот на угол $-\varphi$ есть поворот на угол φ в противоположную сторону.)

Теперь мы отвлечемся от наших чертежных проблем и обратимся к доказательству теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Пусть α — десятичный угол, и пусть $\cos\alpha = A/10^n$, $\sin\alpha = B/10^n$, где A и B — целые числа. Тогда

$$\left(\frac{A}{10^n}\right)^2 + \left(\frac{B}{10^n}\right)^2 = 1,\ A^2 + B^2 = = (10^n)^2 = 10^{2n}.$$

Обозначим через C наибольший общий делитель чисел A, B и 10^n и положим $a = A/C$, $b = B/C$; мы имеем:

$$a^2 + b^2 = (10^n/C)^2.$$

Число $10^n/C$ обязано быть нечетным, а значит — степенью пятерки. Действительно, если $10^n/C$ четно, то a и b не могут быть оба четны; но если одно из них четно, а другое нечетно, то сумма $a^2 + b^2$ нечетна, а с ней нечетно и $10^n/C$, если же a и b были бы оба нечетны, то a^2 и b^2 имели бы остаток 1 от деления на 4 в противоречие с тем, что число $(10^n/C)^2$, будучи четным, должно делиться на 4.

Итак, мы должны решить в целых числах уравнение

$$a^2 + b^2 = 5^{2m}.$$

Наша цель — показать, что эти решения исчерпываются следующими:

$$a = 5^m \cos\alpha,\ b = 5^m \sin\alpha,$$

где $\alpha = k\varphi_0 + \frac{l\pi}{2}$ (а m — такое целое число, что a и b — целые). Другими словами,

$$a = 5^m \cos\left(k\varphi_0 + \frac{l\pi}{2}\right) = \left\{\begin{array}{l}\text{или } \pm 5^m \cos(\pm k\varphi_0),\\ \text{или } \pm 5^m \sin(\pm k\varphi_0)\end{array}\right.$$

и аналогично для b.

Предположим, что при $m < m_0$ все целочисленные решения нашего уравнения имеют указанный вид. Возьмем решение a, b уравнения

$$a^2 + b^2 = 5^{2m}.$$

Мы можем считать, что a и b не делятся на 5 (если a делится на 5, то и b делится на 5, и тогда $a' = a/5$, $b' = b/5$ — решение аналогичного уравнения с $5^{2(m-1)}$ вместо 5^{2m} и оно имеет нужный вид по предположению). Запишем наше решение в виде $a = 5^m \cdot \cos\alpha$, $b = 5^m \cdot \sin\alpha$ и рассмотрим числа $3a + 4b$, $3a - 4b$. Их произведение $9a^2 - 16b^2 = 9(a^2 + b^2) - 25b^2 = 9 \cdot 5^{2m} - 25b^2$ делится на 5^2 и не делится на 5^3; их сумма $6a$ не делится на 5. Значит, одно из этих чисел, пусть для определенности это $3a + 4b$, делится на 5^2. Положим $a' = \frac{3a+4b}{5^2}$. Это — целое число, не делящееся на 5. Положим также $b' = a + b - 7a' = \frac{4a-3b}{5^2}$. Тогда

$$(a')^2 + (b')^2 = $$

$$= \frac{9a^2 + 12ab + 16b^2 + 16a^2 - 12ab + 9b^2}{5^4} =$$

$$= \frac{25(a^2+b^2)}{5^4} = 5^{2m+2-4} = 5^{2(m-1)}.$$

Значит, a', b' — решение уравнения нашего вида с $5^{2(m-1)}$ вместо 5^{2m}, т. е.

$$a' = 5^{m-1}\cos\beta,\ b' = 5^{m-1}\sin\beta,$$

где β имеет вид $q\varphi_0 + \frac{r\pi}{2}$, $r = 0, 1, 2, 3$. Но в то же время

$$a' = \frac{3a+4b}{5^2} =$$

$$= 5^{m-1}\cdot\left(\frac{3}{5}\cos\alpha + \frac{4}{5}\sin\alpha\right) =$$

$$= 5^{m-1}(\cos\varphi_0\cos\alpha + \sin\varphi_0\sin\alpha) = 5^{m-1}\cos(\alpha - \varphi_0)$$

и, аналогично,

$$b' = 5^{m-1}\sin(\alpha - \varphi_0).$$

Значит, $\beta = \alpha - \varphi_0$, $\alpha = \beta + \varphi_0$, и наше решение тоже имеет нужный вид. Теорема доказана.

Упражнение. Введем дополнительное ограничение на форму команд Чертежника: запись числа не должна содержать более пяти значащих цифр (подряд идущие нули слева и справа не считаются). Определите, сколько квадратов со стороной 2 и центром в начале координат может нарисовать Чертежник.

О МОРОЗНЫХ УЗОРАХ И ЦАРАПИНАХ НА СТЕКЛЕ

Кандидат физико-математических наук
А. МИТРОФАНОВ

Зимой в сильные морозы на окнах домов, в транспорте можно наблюдать красивые ледяные узоры. Удивительное творение зимы эта морозная «живопись»! Причудливые ветви и цветы, перья диковинных птиц, прозрачные радужные звезды-снежинки, тончайший геометрический орнамент...— морозные узоры разнообразны и неповторимы. А иногда пушистый снежный «мех» покрывает стекло — это слой мелких ледяных кристаллов, матовая поверхность которого служит примером идеально рассеивающего экрана.

Доводилось ли вам наблюдать, как зарождаются ледяные рисунки на оконных стеклах? Оказывается, очень часто самые первые кристаллы льда появляются на оконных стеклах не произвольно, не где попало, а вдоль царапин, микротрещин и других дефектов, которые всегда есть на стеклах. Такие ледяные кристаллы как бы визуализируют эти невидимые или почти невидимые дефекты.

Явление, о котором идет речь, наблюдается не только зимой при замерзании оконных стекол, но и во многих случаях при конденсации паров или при осаждении какого-либо вещества на поверхности аморфного или кристаллического твердого тела с нарушенной структурой поверхности. Это явление называется декорированием (от латинского слова decoro — украшаю).

Микродефекты, такие как микротрещины, точечные дефекты, дислокации (линии, вдоль которых нарушено правильное расположение атомных плоскостей в кристалле) и т. д., приводят к появлению локальных силовых полей, действующих на осаждаемые частицы вещества вблизи этих дефектов. Например, нескомпенсированный электрический заряд может возникнуть в местах излома поверхности и вблизи микротрещин диэлектрика. Атомам осаждаемого вещества оказывается энергетически выгодно выстраиваться на поверхности твердого тела около дефектов. Дефекты служат как бы «затравочными» центрами для роста кристаллов на поверхности. Размеры кристаллов в ходе их роста могут значительно превышать характерные размеры микродефектов, так что декорирование позволяет наблюдать (иногда даже невооруженным глазом) микродефекты, размеры которых могут быть соизмеримыми с атомными. Явление декорирования лежит в основе одного из методов исследования нарушений структуры твердых тел.

Если превращение твердое тело — пар не обходится без жидкой фазы, то рассматриваемое явление имеет некоторые особенности. Микротрещины и поры на поверхности тела способствуют конденсации паров вещества (если, конечно, образуется жидкость, которая смачивает стенки пор и трещин). Это явление называется капиллярной конденсацией, и суть его заключается в том, что давление насыщенных паров над искривленной (вогнутой) поверхностью жидкости меньше, чем над плоской. Поэтому жидкость конденсируется прежде всего в порах и трещинах. При дальнейшем охлаждении жидкости и ее замерзании вдоль трещин и вблизи пор появляются кристаллы конденсата, например льда. Вот о чем напомнили нам вереницы ледяных кристалликов на оконном стекле, возникшие при резком зимнем похолодании.

Так что красотой морозного узора мы обязаны несовершенству поверхности стекла.

Вариации на тему Эшера

(Начало см. на с. 2)

Не меньшее значение в современной математике и физике играет понятие квазипериодичности. Можно доказать, что не существует периодических замощений плоскости, имеющих симметрию пятого порядка. А квазипериодические замощения, т. е. такие, в которых каждый конечный фрагмент повторяется бесконечное число раз, существуют. В 1974 году их открыл упоминавшийся выше Р. Пенроуз, а через десять лет были получены квазикристаллы — материалы нового типа, имеющие такую симметрию (см. статью «Узоры Пенроуза и квазикристаллы», «Квант» № 6 за 1987 год). Кстати, последовательность Морса обладает свойством квазипериодичности. Не сомневаюсь, что если бы Эшер дожил до открытия квазипериодических замощений, он создал бы ряд ярких работ, использующих эту идею.

Закончу разговор о творчестве М. Эшера его словами:

«Если бы вы только знали, какие видения посещают меня в ночной тьме... Иногда моя неспособность сделать их зримыми буквально сводит меня с ума. По сравнению с этими мыслями каждая отдельная гравюра или рисунок — это полная неудача, только мельчайшая частица необъятного целого».

Задачник «Кванта»

Задачи

М1256 — М1260, Ф1263 — Ф1267

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 февраля 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 12 — 90» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1256» или «Ф1263». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М1259, М1260 предлагались в этом году на Международной математической олимпиаде.

М1256. Две равные окружности касаются друг друга. Постройте трапецию такую, что каждая из окружностей касается трех ее сторон, а центры окружностей лежат на диагоналях трапеции.

В. Сендеров

М1257*. Дан многочлен $F(x)$ с целыми коэффициентами, причем известно, что для любого целого n число $F(n)$ делится на одно из целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Докажите, что из этих чисел можно выбрать одно число так, что $F(n)$ будет делиться на него для любого целого n.

Д. Фомин

М1258*. С числами, расставленными по окружности, разрешается проделывать следующую операцию: заменить тройку идущих подряд чисел x, y, z на тройку $x+y$, $-y$, $z+y$ (именно в таком порядке).

а) Можно ли при помощи этих операций получить из набора 20 чисел 1, 2, 3,..., 9, 10, —1, —2,..., —9, —10 набор 10, 9, 8,..., 2, 1, —10, —9,..., —2, —1?

б) Докажите, что из любого набора n чисел на окружности можно получить один и только один набор из n неотрицательных чисел.

О. Ижболдин

М1259*. На окружности дано множество E из $(2n-1)$ различных точек ($n \geqslant 3$), из которых k точек покрашены в черный цвет, а все остальные — в белый. Раскраска точек называется *хорошей*, если существуют две черные точки, строго между которыми на одной из дуг окружности содержится ровно n точек из множества E. Найти наименьшее значение k, для которого каждая раскраска точек множества E является хорошей.

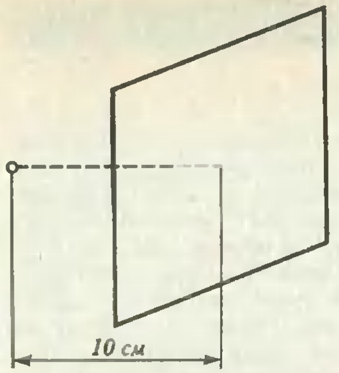
М1260*. Найдите все целые числа $n>1$ такие, что $(2^n+1)/n^2$ — целое число.

Ф1263. При разгоне ракеты масса ее уменьшается. При какой скорости ракеты будет максимальной ее кинетическая энергия, если расход топлива постоянен? Скорость газов относительно ракеты v_0, начальная скорость равна нулю. Разгон производят далеко от Земли, так что влиянием силы тяжести можно пренебречь.

Ф1264. Вычислите диаметр, массу и длину вольфрамовой нити накала лампочки 220 В, 100 Вт. Рабочая температура нити 2700 °С. При этой температуре удельное сопротивление вольфрама $\rho=90 \cdot 10^{-6}$ Ом · см, а мощность излучения с единицы поверхности нити $W=153$ Вт/см^2. Плотность вольфрама в 19 раз больше, чем плотность воды. Считайте, что нить свита из проволоки круглого сечения.

М. Цыпин

Ф1265*. В однородном магнитном поле вращается по круговой орбите электрон. Индукцию поля медленно



(за время, во много раз превышающее период обращения) увеличивают в три раза. Во сколько раз изменится радиус орбиты электрона?

М. Цыпин

Ф1266. Две металлические сферы радиусом R каждая удалены друг от друга на большое расстояние и соединены друг с другом очень тонким проводником, в разрыв которого включена катушка индуктивностью L. На одну из сфер помещают электрический заряд. Через какое время заряд этой сферы уменьшится в два раза? Через какое время заряд снова станет таким же, как в первый момент?

А. Выцко

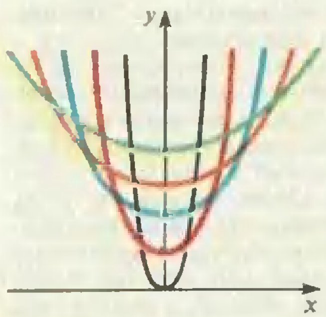
Ф1267. Точечный источник альфа-частиц испускает их во все стороны равномерно. На расстоянии 10 см от источника расположили фотопластинку размером 20×20 см (см. рис.), и за 10 секунд экспозиции на ней оказалось 200 следов от попавших частиц. Сколько всего частиц испускает источник за час?

В. Волков

Решения задач

М1231 — М1235, Ф1243 — Ф1247

М1231. *На какое наибольшее число частей могут разбить плоскость Oxy графики n квадратных трехчленов вида $y=ax^2+bx+c$ ($n=1, 2, 3, \ldots$)?*



Ответ: n^2+1.

Докажем по индукции, что число частей не превосходит n^2+1. Для $n=1$ это ясно: парабола делит плоскость на две части.

Пусть доказано, что $n-1$ графиков делят плоскость не более чем на $(n-1)^2+1$ частей. Проведем последний, n-й график. Он пересекается с каждым из $n-1$ предыдущих максимум в двух точках, т. е. он будет разбит не более чем на $2(n-1)+1=2n+1$ кусков (включая два крайних, уходящих в бесконечность). Каждый из этих кусков параболы делит одну из имеющихся частей плоскости на две. Таким образом, при проведении последней параболы число частей увеличится не более чем на $2n+1$, т. е. не превзойдет $(n-1)^2+1+2n+1=n^2+1$.

Легко строится пример, когда все графики попарно пересекаются в двух точках (см. рисунок) — при этом получится максимальное число частей, указанное в ответе.

Точно таким же образом можно подсчитать максимальное число частей, на которые делят плоскость n прямых, n окружностей и т. п.

Н. Васильев

M1232. *Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо p человек, либо q. На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну? Рассмотрите следующие случаи:*

а) p и q — взаимно простые числа,

б) p и q имеют наибольший общий делитель d.

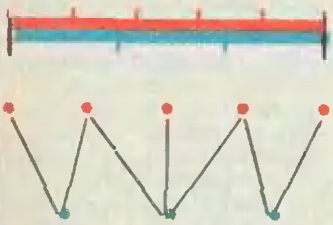


Рис. 1.

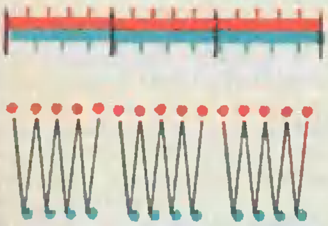


Рис. 2.

Ответ: а) $p+q-1$; б) $p+q-d$.

Чтобы привести пример нужного разрезания, представим пирог в виде отрезка, разбитого $p-1$ точками на p равных частей и $q-1$ точками на q равных частей. При взаимно простых p и q всего получится $p+q-2$ точек деления, а при НОД $(p, q)=d$ образуется всего $p+q-d-1$ различных точек деления ($d-1$ из точек деления совпадут), так что отрезок будет разбит как раз на указанное в ответе число частей. (Ясно, что таким же образом можно разрезать пирог: если он имеет форму прямоугольника, достаточно провести ряд разрезов параллельных стороне.)

Например, на рисунке 1, где $p=5$, $q=3$, все 6 точек деления различны, и отрезок разбит на 7 кусков, а на рисунке 2, где $p=15$, $q=12$ и $d=3$, различных точек деления 23 и отрезок разбит на 24 куска.

Приведем два различных доказательства, что указанное в ответе число кусков *минимально.*

Первое доказательство изложим сразу для обоих пунктов задачи.

Пусть пирог разрезан на несколько кусков так, что соблюдены условия задачи. Изобразим p гостей первой группы и q гостей второй группы точками на плоскости и соединим отрезками тех гостей, которым достается один и тот же кусок (см. примеры на рисунках). Мы получим систему *вершин* и *ребер* некоторого *графа.* Рассмотрим некоторую связную *компоненту* этого графа (множество всех вершин, в которые можно добраться из какой-то одной по ребрам графа). Соберем вместе куски, соответствующие ребрам этой компоненты. Из них можно собрать некоторое целое число k частей по $1/p$ пирога и некоторое целое число m частей по $1/q$ пирога. Но если $k/p=m/q$, то k должно делиться на p/d, а m — на q/d, тем самым, в этой компоненте собраны куски, составляющие не менее чем одну d-ю часть пирога. Если p и q взаимно просты, $d=1$ и компонента только одна, в общем случае их не более d. Но в каждой компоненте число вершин не более чем на 1 превышает число ребер. (Откинув некоторые ребра, можно получить из нее дерево — граф, в котором из каждой вершины в любую другую ведет один путь. Для него число вершин на 1 больше числа ребер.) Таким образом, общее число кусков не превосходит $p+q-d$.

Второе доказательство — более короткое — мы приведем лишь для пункта а), т. е. для случая когда p и q взаимно просты. Заметим здесь, что наша задача эквивалентна следующей: доказать, что наименьшее количество чисел, которые надо расставить в клетках таблицы $p\times q$ так, чтобы суммы по строкам равнялись $1/p$, а суммы по столбцам — $1/q$, равно $p+q-1$.

Докажем более общий факт. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_p$ и $b_1, b_2, \ldots, b_q$ — два набора положительных чисел с одинаковой суммой такие, что никакая подсумма чисел первого набора не равна никакой подсумме второго. Тогда количество чисел, которые можно вписать в клетки таблицы $p\times q$ так, чтобы суммы по строкам и столбцам соответственно равнялись числам этих двух наборов, не меньше $p+q-1$. Применяя этот факт к наборам из чисел

$1/p,\ldots, 1/p$ и $1/q,\ldots, 1/q$ (взаимная простота p и q гарантирует выполнение условия о подсуммах), получим нужный результат.

Проведем индукцию по $p+q$ (для $p=q=1$ все очевидно). Пусть $p>q$. Тогда в некоторой строке таблицы встречается лишь одно число из первой группы (иначе общее количество чисел в таблице не меньше $2p>p+$ $+q-1$) — пусть это будет число a_1, стоящее в первой строке и первом столбце, b_1 — сумма чисел в этом столбце. Вычеркнув первую строку, применим утверждение к наборам $a_2, a_3,\ldots, a_p$ и $b_1-a_1, b_2,\ldots, b_p$ — для него количество чисел на 1 меньше и условие о подсуммах очевидно выполнено. По предположению индукции в таблице $(p-1)\times q$ должно содержаться не менее чем $(p-1)+$ $+(q-1)=p+q$ — 2 чисел. Добавляя выброшенное число a_1, получим нужную оценку $p+q-1$ для таблицы $p\times q$.

А. Толпыго, Д. Фомин

М1233. *В трапеции ABCD диагональ AC равна боковой стороне BC. H — середина основания AB. Пусть l — прямая, проходящая через H, а P и Q — точки пересечения прямой l с прямыми AD и BD соответственно. Докажите, что углы ACP и QCB равны или составляют в сумме 180°.*

Пусть K — точка пересечения прямых l и CD. M и N — точки пересечения прямых CP и CQ с прямой AB соответственно. Докажем равенство $AM=BN$. Отсюда будет следовать утверждение задачи: углы ACM и BCN равны, а нужные нам углы ACP и BCQ соответственно равны этим углам или дополняющим их до 180°. Из подобия треугольников находим

$$\frac{DC}{AM}=\frac{DP}{AP}=\frac{DK}{AH},\quad \frac{DC}{BN}=\frac{DQ}{BQ}=\frac{DK}{BH}.$$

Поскольку $AH=BH$, отсюда следует нужное равенство $AM=BN$.

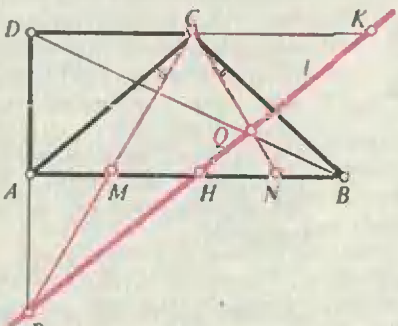


Рис. 1.

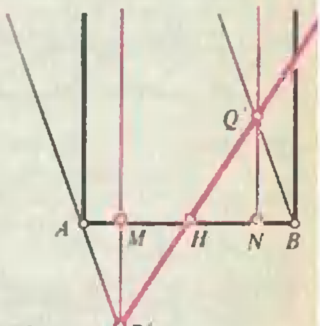


Рис. 2.

Можно доказать это равенство и без всяких вычислений, с помощью выхода в пространство. Рассмотрим центральную проекцию нашей плоскости на некоторую другую плоскость p, содержащую прямую AB, причем центр проекции O выберем так, чтобы плоскость OCD была параллельна p. При такой центральной проекции (образ рис. 1 — рис. 2) все прямые, проходящие через точку C, будут параллельны между собой и все прямые, проходящие через D,— тоже; поэтому образы P' и Q' точек P и Q будут симметричны относительно H, а значит точки M и N — тоже.

И. Шарыгин, В. Дубровский

М1234. *Можно ли любой треугольник разбить а) на 7, б)* на 5 подобных между собой треугольников?*

Разбиение на 7 треугольников получить легко — достаточно разрезать треугольник на 4 части средними линиями и один из полученных треугольников вновь разрезать на 4 средними линиями (рис. 1). Заметим, что так же легко получить разбиение на 6, 8 и любое большее число подобных (рис. 2) — добавлять 3 треугольника к уже имеющимся.

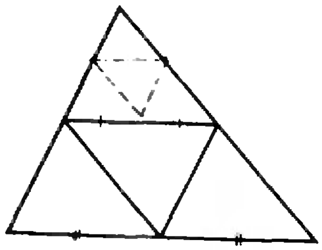


Рис. 1.

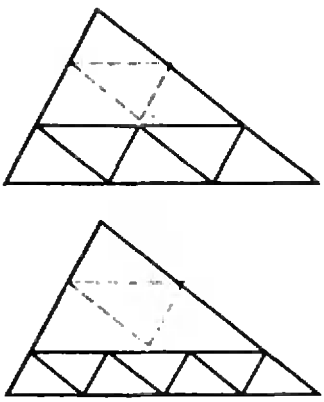


Рис. 2.

Докажем, что не любой треугольник можно разбить на 5 подобных. Мы приведем два доказательства, каждое — для некоторых треугольников с разными (и отличными от прямого) углами $\alpha>\beta>\gamma$. Оба приводят к тому, что треугольники разбиения должны быть подобны исходному — иметь те же углы α, β, γ. Дальнейшее рассуждение несложно. Если от треугольника отрезаны по углам подобные ему треугольники, оставшаяся часть может быть разрезана на два треугольника, только если она треугольник или четырехугольник (рис. 3). Но в обоих случаях при таком разрезании оказываются два угла, составляющие в сумме 180°, а среди углов α, β, γ таких нет.

Приведем два рассуждения. Первое — чисто алгебраическое (принадлежащее первому автору). Рассмотрим треугольник, величины углов α, β, γ которого рационально независимы, т. е. не существует ненулевых целых чисел k, l, m таких, что $k\alpha+l\beta+m\gamma=0$. Пусть в его вершинах сходится по одному или несколько углов треугольников, величины которых — X, Y, Z. Тогда выполнены равенства, указанные на полях, где коэффициенты a_{ij} — неотрицательные целые числа. Если все коэффициенты при одном из углов X, Y или Z равны 0, то можно показать (выразив оставшиеся два угла из первых двух уравнений через α и β и подставив в третье уравнение), что α, β, γ рационально зависимы, так что этот случай невозможен. Но если после сложения трех уравнений мы найдем, что коэффициенты при X, Y, Z все положительны, то все они должны быть равны 1, поскольку

$$\alpha+\beta+\gamma=X+Y+Z=180^\circ.$$

$$\alpha=a_{11}X+a_{12}Y+a_{13}Z,$$
$$\beta=a_{21}X+a_{22}Y+a_{23}Z,$$
$$\gamma=a_{31}X+a_{32}Y+a_{33}Z.$$

Отсюда ясно, что в каждом уравнении лишь один коэффициент 1, а другие два равны 0 — это и нужно было доказать.

Второе — геометрическое доказательство (его идею предложил И. Аржанцев — участник американо-советского летнего математического лагеря, где обсуждалась эта задача), пожалуй, даже проще.

Пусть среди углов α, β, γ нашего треугольника α много (более чем в 5 раз) больше β, а β много больше γ. Предположим, что он разбит на 5 подобных между собой. Пусть некоторые его вершины разбиты и α_1, β_1, γ_1 —

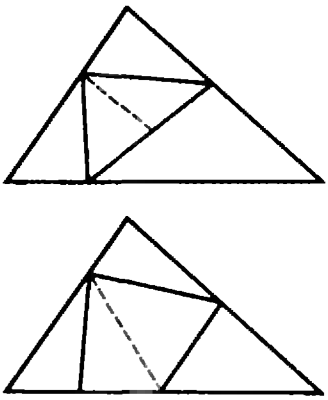


Рис. 3.

наибольшие из частей, составляющих углы α, β и γ соответственно. Поскольку каждый угол разбит не более чем на 5 частей, $\alpha_1 > \beta_1 > \gamma_1$. Таким образом, это и есть углы треугольника разбиения, их сумма равна $180°$, и, значит, они соответственно равны α, β, γ; таким образом, никаких выходящих из углов отрезков на самом деле нет.

А. Сойфер (США), Н. Васильев

М1235*. *Пусть $p=2\cdot q+1$ — простое число. Докажите, что число $2^{3q}q!-(-1)^q(2q-1)!!$ делится на а) p; б) p^2; в) p^3 (при $p>3$). (Здесь $q!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot q$; $(2q-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2q-1)$.)*

$p=5$:

```
     1
    11
   121
  1331
 14141
100001
```

$p=7$:

```
       1
      11
     121
    1331
   14641
  153351
 1616161
10000001
```

Треугольники Паскаля по модулю p.

Утверждение а) сравнительно нетрудно доказать, опираясь на простые свойства чисел C_n^k — коэффициентов разложения степени бинома

$$(1+x)^n=1+nx+\ldots+C_n^kx^k+\ldots+x^n. \qquad (*)$$

Из формулы $C_n^k=n(n-1)\ldots(n-k+1)/k!$ следует, что при простом n все коэффициенты C_n^k, кроме двух крайних, делятся на n, и тот факт, что в треугольнике Паскаля (где в n-й строке стоят числа $C_n^0=1$, C_n^1, $C_n^2,\ldots$, $C_n^n=1$) каждое число равно сумме двух стоящих над ним: $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$. Поскольку

$$2^qq!(2q-1)!!=(2q)!=C_{2q}^q(q!)^2,$$
$$2^q(2^{3q}q!-(-1)^q(2q-1)!!)=q!(2^{4q}-(-1)^qC_{2q}^q),$$

а числа 2^q и $q!$ взаимно просты с $p=2q+1$, достаточно доказать, что число в последних круглых скобках делится на p.

Будем рассматривать числа «по модулю p», в частности, «остаток -1» будет означать то же, что и «остаток $p-1$». Докажем, что остаток от деления C_{2q}^q на p равен $(-1)^q$. Если в треугольнике Паскаля заменить числа их остатками при делении на p, то p-я строка будет иметь вид 1 0 0...0 1, а, стало быть, предыдущая $2q$-я (состоящая из $2q+1$ чисел) —

$$1\ -1\ 1\ -1\ldots1\ -1\ 1,$$

так что среднее число в ней равно $C_{2q}^q=(-1)^q$ (примеры треугольников Паскаля по модулю p для $p=5$ и $p=7$ приведены на полях). Эта же строка пригодится нам и для отыскания остатка для степени 2.

Подставив в формулу (*) $x=1$, $n=2q$, мы увидим, что по модулю p число 2^{2q} равно 1 (это — частный случай Малой теоремы Ферма), следовательно, интересующая нас разность $2^{4q}-(-1)^qC_{2q}^q$ по модулю p равна $1-(-1)^{2q}=1-1=0$.

Доказательство утверждения б) получено как побочный результат в конце VIII главы замечательной книги G. Hardy, F. Wright «Introduction to the number theory» к сожалению, не переведенной до сих пор на русский язык. Мы приведем более короткое доказательство. (Конечно, для $p=3$ утверждение б) очевидно: $2^3+1=3^2$. Ниже мы считаем, что $p>3$, т. е. $q>1$.)

Задачник „Кванта"

Представим произведение $2^{3q}q!(2q-1)!!$ как «многочлен от p^2»:

$$2^{3q}q!(2q-1)!!=$$
$$=2^{2q}(2q)!=2\cdot 4\cdot \ldots\cdot (p-1)(p+1)\ldots(2p-2)=$$
$$=(p-(p-2))\ldots(p-1)(p+1)\ldots(p+(p-2))=$$
$$=(p^2-(p-2)^2)\ldots(p^2-(2k-1)^2)\ldots(p^2-1)^2=$$
$$=(p^2-(2q-1)^2)\ldots(p^2-(2k-1)^2)\ldots(p^2-1)^2=$$
$$=p^{2q}-S_1p^{2q-2}+\ldots+(-1)^kS_kp^{2q-2k}\ \ldots$$
$$\ldots-(-1)^qS_{q-1}p^2+(-1)^qS_q. \qquad (**)$$

Здесь S_k — суммы всех произведений по k чисел 1^2, 3^2, 5^2, ,..., $(2q-1)^2$, в частности,

$$S_1=1^2+3^2+\ldots+(2q-1)^2,$$
$$S_{q-1}=3^2\ldots(2q-1)^2+1^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(2q-1)^2+\ldots$$
$$\ldots+1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(2q-3)^2=$$
$$=S_q(1+1/3^2+\ldots+1/(2q-1)^2),$$

$S_q=(2q-1)!!^2$ — произведение всех q квадратов чисел 1, 3, ..., $(2q-1)$.

Очевидно, все слагаемые последней суммы (**), кроме последнего, делятся на p^2. Отсюда следует, что разность

$2^{2q}(2q)!-(-1)^q(2q-1)!!^2$

делится на p^2, а поскольку p простое, удалив лишние множители $(2q-1)!!$, не делящиеся на p, получим, что и нужная нам разность делится на p^2.

Приведем теперь доказательство последнего, самого сильного утверждения в), кажущегося поистине удивительным (примеры для $p=5$, 7, 11, 13 приведены на полях).

Все слагаемые суммы S_1 дают разные остатки при делении на p, поскольку разность $i^2-j^2=(i-j)(i+j)$ не делится на p при нечетных i, j, $1<i<j<p$. То же можно сказать и про сумму S_{q-1}. Но квадраты натуральных чисел, не кратных p, могут давать при делении на p только $(p-1)/2=q$ разных остатков (поскольку квадраты i и $p-i$ дают одинаковые остатки). Все эти остатки входят по разу в обе суммы S_1 и S_{q-1}, состоящие из одинакового числа $(p-1)/2=q$ слагаемых, поэтому обе суммы дают равные остатки при делении на p.

Первую сумму легко посчитать — она равна $p(p-1)(p-2)/6$ (можно действовать по индукции) и делится на p при $p>3$. Тем самым, и вторая сумма делится на p.

(Можно доказать, что и сумма S_k всех произведений по k квадратов чисел 1, 3, 5, ..., $2q-1$ при каждом $k<q$ делится на p, но нам это не потребуется.)

Поскольку S_{q-1} делится на p, разность

$$2^{2q}(2q)!-(-1)^q(2q-1)!!^2$$

делится на p^3. Удалив лишние множители, не делящиеся на p, получим, что и нужная нам разность делится на p^3.

И. Вайнштейн

Малая теорема Ферма. Если p — простое, a — натуральное число, не делящееся на p, то $a^{p-1}-1$ делится на p.

$p=5$, $q=2$:
$2^6\cdot 2-1\cdot 3=125=5^3$.
$p=7$, $q=3$:
$2^9\cdot 6+1\cdot 3\cdot 5=3\cdot 7^3$.
$p=11$, $q=5$:
$2^{15}\cdot 120-1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9=$
$=3\cdot 5\cdot 197\cdot 11^3$.
$p=13$, $q=6$:
$2^{18}\cdot 720-1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11=$
$=3^2\cdot 5\cdot 1909\cdot 13^3$.

Ф1243. *Таракан и два жука могут ползать по большому горизонтальному столу. Каждый из жуков может развивать скорость до $v=1$ см/с. В первый момент насекомые находятся в вершинах равностороннего треугольника. Какую скорость должен уметь развивать таракан, чтобы при любых перемещениях жуков треугольник оставался равносторонним?*

Рассмотрим маленький промежуток времени Δt, за который первый жук сместился на $\vec{s}_1=\vec{v}_1\Delta t$, а второй — на $\vec{s}_2=\vec{v}_2\Delta t$. Найдем, каким должно быть смещение таракана, чтобы соединяющий их треугольник остался равносторонним.

Будем рассуждать последовательно. Предположим сначала, что первый жук неподвижен, а второй совершил перемещение $\vec{s}_2$ (рис. 1). Чтобы треугольник $Ж_1Ж_2'T'$ был равносторонним, таракан должен сместиться на $\overrightarrow{TT'}$, причем

$$|\overrightarrow{TT'}|=|\vec{s}_2|=v_2\Delta t.$$

Пусть теперь неподвижен второй жук, а первый смещается на $\vec{s}_1$. Тогда таракан должен будет сместиться на $\overrightarrow{T'T''}$, при этом

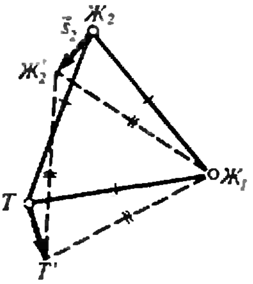


Рис. 1.

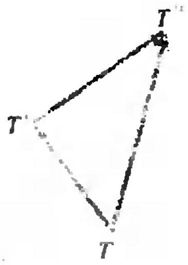


Рис. 2.

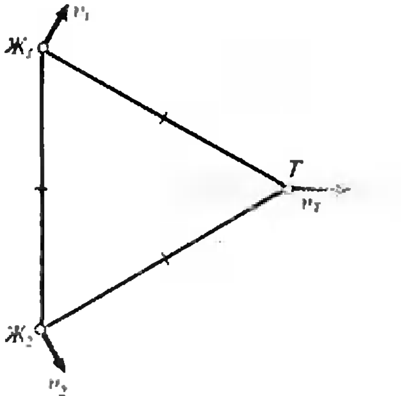


Рис. 3.

$$|\overrightarrow{T'T''}|=|\vec{s}_1|=v_1\Delta t.$$

Итак, если один жук смещается на $\vec{s}_1$, второй — на $\vec{s}_2$, то таракан должен сместиться на

$$\overrightarrow{TT'}+\overrightarrow{T'T''}=\overrightarrow{TT''}.$$

Из треугольника $TT'T''$ (рис. 2) получаем

$$|\overrightarrow{TT''}|\leqslant|\overrightarrow{TT'}|+|\overrightarrow{T'T''}|=(v_1+v_2)\Delta t.$$

Значит, скорость, которую должен развить таракан, связана со скоростями жуков соотношением

$$v_т=\frac{|\overrightarrow{TT''}|}{\Delta t}\leqslant v_1+v_2\leqslant 2v.$$

Равенству соответствует случай, когда смещения таракана $\overrightarrow{TT'}$ и $\overrightarrow{T'T''}$ направлены в одну сторону. Для этого скорости жуков должны быть направлены, например, так, как показано на рисунке 3.

А. Коршков

Ф1244. *Бытовой холодильник поддерживает в камере постоянную температуру —12 °С. При темпера-*

Разность температур ΔT снаружи и внутри холодильника и длительность паузы τ_2 связаны соотношением

$$\tau_2\Delta T=\text{const}. \qquad (1)$$

туре в комнате +25 °С его мотор включается каждые 8 минут и, проработав 5 минут, выключается. Считая холодильник идеальной тепловой машиной, работающей по обращенному циклу, предскажите — как часто и на какое время он станет включаться, если в комнате температура понизится до +15 °С. При какой максимальной температуре в комнате он сможет поддерживать в камере заданную температуру?

Задачник „Кванта"

Для идеальной холодильной машины справедливо равенство

$$\frac{A}{Q}=\frac{\Delta T}{T},$$

где A — работа двигателя, Q — количество теплоты, отнимаемое от содержимого холодильной камеры, T — температура камеры. Очевидно, что работа, совершаемая двигателем, пропорциональна времени τ_1 работы мотора —

$$A\sim\tau_1,$$

а отнимаемое количество теплоты пропорционально полному «периоду» $(\tau_1+\tau_2)$ и разности температур —

$$Q\sim(\tau_1+\tau_2)\Delta T,$$

поэтому можно записать

$$\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1}(\Delta T)^2=T=\text{const}. \qquad (2)$$

Подставляя в равенства (1) и (2) значения τ_1 и τ_2 для первого случая, а ΔT для обоих случаев, найдем новые значения τ_1' и τ_2' для второго случая:

$$\tau_1'=2\ \text{мин},\ \tau_2'=4{,}1\ \text{мин}.$$

Максимально возможную температуру в комнате находим из условия $\tau_2''=0$:

$$\Delta T_{\max}=\Delta T\sqrt{8/5}=46{,}8\ \text{К},$$
$$t_{\max}=34{,}8\ °\text{С}.$$

Р. Александров

Ф1245. *В схеме на рисунке амперметр показывает ток 10 мА, вольтметр — напряжение 2 В. После того как резистор отключили от вольтметра и подключили параллельно амперметру, показания амперметра уменьшились до 2,5 мА. Определите по этим данным сопротивление резистора. Чему равно сопротивление вольтметра? Можно ли определить по этим данным сопротивление амперметра и напряжение батареи? Батарею считать идеальной.*

В первом случае напряжение на резисторе R_x равно

$$U_1=U_{Rx1}=U\frac{RR_x/(R+R_x)}{r+RR_x/(R+R_x)}=U\frac{RR_x}{rR+R_x(R+r)},$$

где U — напряжение батареи, R — сопротивление вольтметра, r — сопротивление амперметра.

Во втором случае амперметр и вольтметр меняются местами, поэтому напряжение на резисторе будет равно

$$U_{Rx2}=U\frac{rR_x}{rR+R_x(R+r)}.$$

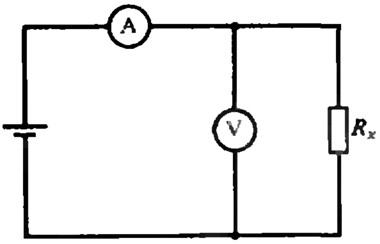
Но одновременно это и напряжение на амперметре; значит, ток через него равен

$$I_2=\frac{U_{Rx2}}{r}=\frac{UR_x}{rR+R_x(R+r)}=\frac{U_1}{R}.$$

Отсюда находим сопротивление вольтметра:

$$R=\frac{U_1}{I_2}=0{,}8\ \text{кОм}.$$

Тогда сопротивление резистора равно



$$R_x=\frac{U_1}{I_1-U_1/R}=\frac{U_1}{I_1-I_2}\approx 0{,}27\ \text{кОм}.$$

Сопротивление амперметра и напряжение батареи по данным задачи найти нельзя.

А. Зильберман

Ф1246. *Два одинаковых LC-контура находятся далеко друг от друга. В первом возбуждены колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе U_0. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе оказалось нулевым, подключают проводами второй контур (рис. 1). Опишите процессы в цепи после подключения. Что изменится, если подключение произвести в тот момент, когда напряжение на конденсаторе максимально?*

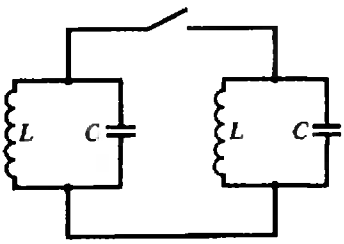


Рис. 1.

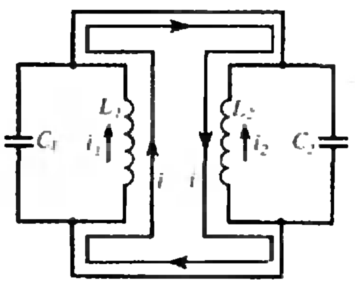


Рис. 2.

Начнем со второго случая, когда в момент замыкания ключа напряжение на первом конденсаторе максимально, т. е. весь заряд сосредоточен на конденсаторе C_1, а тока в катушке L_1 нет. Сразу после замыкания ключа напряжения на конденсаторах равны $U_1=U_0$ и $U_2=0$. К соединяющим проводам приложено напряжение U_0, и, поскольку их сопротивление очень мало, в системе происходит быстрый (по сравнению с периодом колебаний) процесс перераспределения заряда между конденсаторами. Так как емкости равны, заряд делится поровну, т. е.

$$U_1'=U_0/2 \text{ и } U_2'=U_0/2.$$

Катушки в процессе не участвуют.

После перераспределения заряда оба контура оказываются в одинаковом начальном состоянии — напряжение на конденсаторе равно $U_0/2$, тока в катушке нет, и начинаются их совместные синхронные колебания с частотой $\omega=1/\sqrt{LC}$ и амплитудой напряжения $U_0/2$:

$$u_1(t)=u_2(t)=U_0/2\cos\omega t.$$

На эти процессы не влияет перемычка между контурами, после обмена зарядами ее можно было бы и убрать.

Теперь обсудим первый случай, когда в начальный момент напряжение на первом конденсаторе равно нулю. Эта ситуация сложнее.

Итак, в момент замыкания ключа напряжение на конденсаторе C_1 равно нулю, а через катушку L_1 течет ток $I_0=\sqrt{C/L}\,U_0$ (это получается из равенства $LI_0^2/2=CU_0^2/2$). Чтобы описать дальнейшие процессы в цепи, заметим, что после замыкания ключа по контуру L_1-L_2 может циркулировать постоянный ток, не создающий никаких напряжений (активным сопротивлением катушек пренебрегаем). Представим распределение токов в катушках так, как показано на рисунке 2. В катушках L_1 и L_2 текут равные и одинаково направленные токи $i_1=i_2=I_0/2$, а по контуру L_1-L_2 циркулирует постоянный ток $i=I_0/2$. Тогда

$$I_1=i_1+i,\quad I_2=i_2-i.$$

Далее рассуждения аналогичны первому случаю. Действительно, если мы временно забудем о постоянном токе i, который не создает напряжений и, следовательно, не влияет на другие процессы в цепи, то контуры оказываются в одинаковом начальном состоянии — по катушке течет ток $I_0/2$, а конденсатор незаряжен. После замыкания ключа начнутся синхронные колебания с частотой ω и амплитудой тока $I_0/2$:

$$i_1(t)=i_2(t)=\frac{I_0}{2}\cos\omega t.$$

Чтобы найти полные токи в катушках, надо вспомнить о постоянном токе i и добавить его с нужным знаком:

$$I_1(t)=i_1(t)+i=\frac{I_0}{2}(\cos\omega t+1),$$

$$I_2(t)=i_2(t)-i=\frac{I_0}{2}(\cos\omega t-1).$$

А. Алексеев

Ф1247. *На противоположных стенах комнаты висят друг против друга два одинаковых круглых зеркала диаметром 1 м. Наблюдатель находится на оси симметрии оптической системы и смотрит на одно из зеркал. Сколько «вложенных» отражений он сможет насчитать, если угловое разрешение его глаза 1 минута? Зеркала находятся на расстоянии 5 м друг от друга. Размерами головы наблюдателя пренебречь.*

Все последовательные отражения отстоят друг от друга на $l=5$ м. Углы зрения на n-е и $(n+1)$-е изображения (при условии $n\gg1$) равны приблизительно

$$\alpha_n\approx\frac{d}{nl}\ \text{ и }\ \alpha_{n+1}\approx\frac{d}{(n+1)l},$$

где $d=1$ м — диаметр зеркала. Эти два изображения различимы, если выполняется условие

$$\frac{1}{2}(\alpha_n-\alpha_{n+1})>\alpha_0,$$

где $\alpha_0=1'=\pi/(180\cdot60)$ рад. Решая это неравенство (с учетом предыдущих выражений) относительно n, при дополнительном условии $n\gg1$, находим

$$n<\sqrt{\frac{d}{2l\alpha_0}}=18.$$

К. Зуев

Конкурс «Математика 6—8»

Журнал «Квант» совместно с болгарским молодежным журналом «Математика» продолжает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 27 задач (по 3 в каждом номере) и закончится в мае будущего года. Победители будут награждены призами журналов «Квант» и «Математика».

Решения задач из этого номера высылайте не позднее 15 февраля 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

Задачи

10. Имеются 9 килограмм крупы и чашечные весы с двумя гирями в 50 г и 200 г. Попробуйте за три взвешивания отвесить 2 кг этой крупы. Можно ли это сделать, если имеется лишь одна гиря в 200 г?

В. Вьюн и А. Савин

11. Докажите, что высота треугольника, опущенная на его большую сторону, не больше суммы длин перпендикуляров, опущенных из произвольной точки этой стороны на две другие стороны этого треугольника.

Е. Чернышов

12. Найдите три девятизначных числа, в которых цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 встречались бы ровно по одному разу, и при этом сумма некоторых двух из них равнялась третьему числу.

Г. Гальперин

„Квант" для младших школьников

Задачи

1. Несколько учеников отвечали на уроке, и все получили отметки не ниже тройки. Аня получила отметку, на 10 меньшую суммы отметок остальных; Боря получил отметку, на 8 меньшую суммы остальных отметок; Вера — отметку, на 6 меньшую суммы отметок остальных. Сколько человек отвечало на уроке и какие отметки они получили?

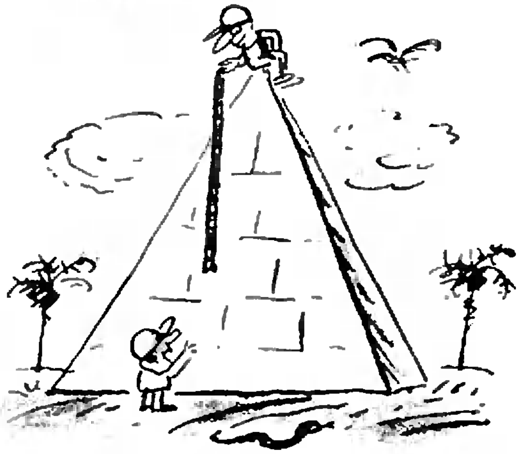
2. Насколько вы сильны в арифметике? Замените в этом ребусе (см. рисунок) буквы цифрами так, чтобы выполнялись все равенства. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

$$А \cdot Р = И - Ф = М : Е = Т - И = К : А$$

3. Огромный военный оркестр демонстрировал свое искусство на площади. Сначала музыканты выстроились в квадрат, а затем перестроились в прямоугольник, причем количество шеренг увеличилось на 5. Сколько музыкантов было в оркестре?

4. Может ли число, являющееся полным квадратом, записываться лишь с помощью цифр 0 и 6?

5. Высота некоторой египетской пирамиды, выраженная в метрах, больше произведения двух нечетных двузначных чисел, но меньше квадрата их полусуммы. Для какого фараона она была построена?



Эти задачи нам предложили А. Тоом, Л. Мочалов, С. Дворянинов, С. Сефибеков и И. Акулич.

РИМСКИЕ, АРАБСКИЕ И ДРУГИЕ

Кандидат физико-математических наук
А. САВИН

Не очень давно («Квант», 1988, № 4) в статье «Десять цифр» я рассказал историю записи чисел цифрами, главным образом, историю самих цифр, которые принято называть «арабскими». Мы часто пользуемся и другими цифрами. Записи «XX век», «Глава IV» не ставят нас в затруднительное положение. Здесь числа представлены римскими цифрами. Почему же мы до сих пор пользуемся этой очень неудобной системой записи чисел? Наверное потому, что с ее помощью можно выделять одни числа по сравнению с другими. Так, запись 25.XI.1990 сразу говорит о том, что это — дата: 25 ноября 1990 года.

Итак, римские цифры. Познакомимся с ними поближе:

I — один	C — сто
V — пять	D — пятьсот
X — десять	M — тысяча
L — пятьдесят	

Теперь, увидев на фронтоне старого особняка запись MDCCLXXXIX, вы без труда прочтете дату его постройки — 1789 год. Следует отметить, что существует и второй способ записи чисел римскими цифрами, при котором меньшая цифра не ставится впереди большей, и поэтому число 4 записывается как IIII, число 9 как VIIII, а число 99 как LXXXXVIIII.

Но как быть с очень большими числами в десятки и сотни тысяч? Например, как записать число 275 748? Римляне поступали довольно просто, они записывали его так: $\mathrm{CCLXXV}_m\mathrm{D\,CCXLVIII}$. Буква *m* показывает, что число, стоящее впереди нее, выражает количество тысяч в данном числе.

Но вернемся к арабским цифрам. В статье «Десять цифр» я отмечал, что арабы, заимствовав десятичную позиционную систему записи чисел и цифры у индусов, несколько изменили цифры; дальнейшее их изменение происходило и в Европе. В результате получившиеся знаки стали совсем непохожи на те, которыми пользовались индусы. Но самое интересное состоит в том, что цифры, которыми пользуются сейчас арабы, также непохожи на «международные» арабские цифры. Взгляните на таблицу записи арабских чисел. Разница велика.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩

Помимо «международной», свою собственную систему записи чисел используют не только арабы. Так, в Китае издавна существовала своеобразная система записи чисел с помощью иероглифов.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000
一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千

Числа в Китае традиционно записывались вертикально, сверху вниз. При этом числа 20, 30, 40, ... записывались столбиком из двух символов. Нижний символ означал, что

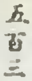
20: 二
十

60: 六
十

речь идет о десятках, а верхний указывал их число. Такие числа, как, например, 47 записывались столбиком из трех символов: к числу 40 снизу добавлялся иероглиф, обозначающий цифру 7. Аналогичная система ис-

47: 四
十
七

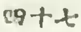
пользовалась для обозначения сотен, тысяч и т. д. Вот, например, как выглядит число 503 в этой записи.

503: 

Существовали и другие варианты вертикальной записи чисел, больших 20. Попробуйте сами «разгадать секреты» двух таких записей, рассматривая два представления числа 28.

28:  28: 

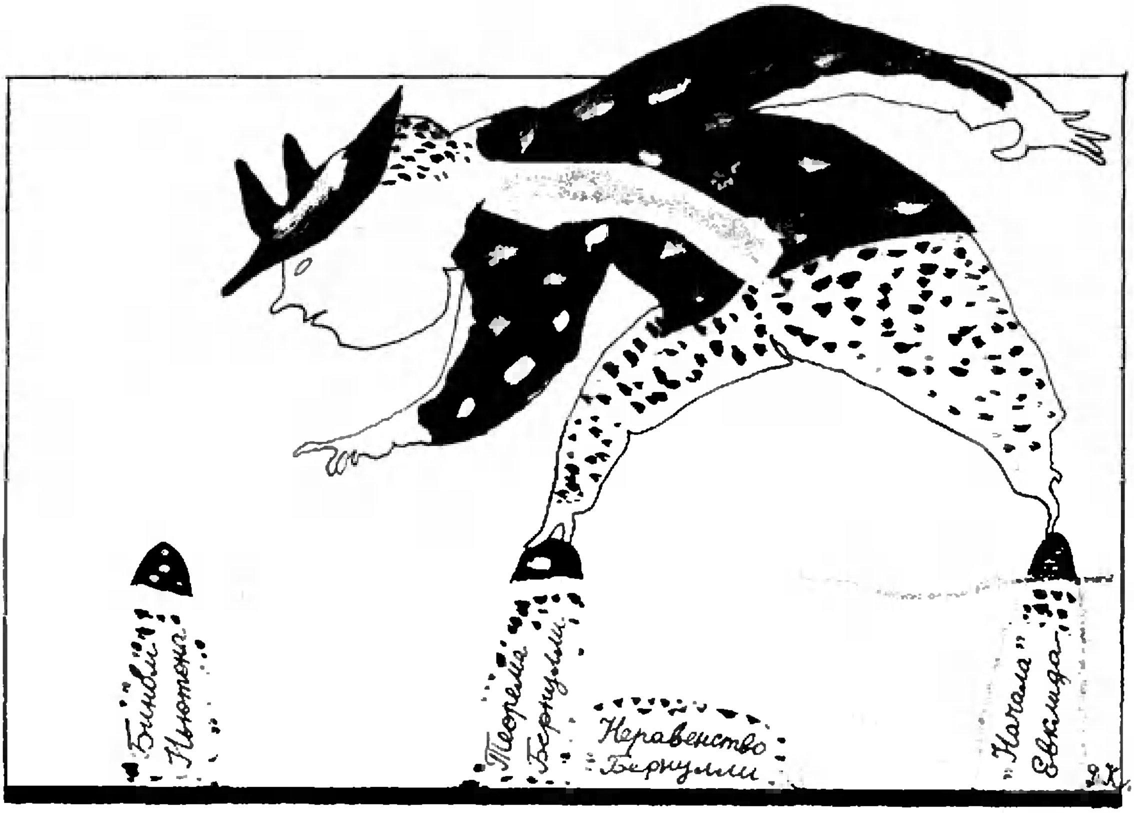
В начале XX столетия в Китае была введена обычная форма записи — слева направо. В этой записи число 47 выглядит так:

47: 

Иероглифы используются для записи цифр не только в Китае, но и в других странах таких, как Япония, Корея. Однако, традиционная вертикальная система записи сохранилась лишь на острове Тайвань.

На марках, монетах, бумажных денежных знаках многих стран национальные цифры соседствуют с «международными». Такое соседство можно увидеть на почтовых марках Ливии. Рядом на рисунке изображены две стороны японской монеты в 5 иен. Первый иероглиф означает цифру 5, а второй означает слово «иена».

Завершим наш рассказ красивой серией марок, изданных в Кампучии, где вы можете увидеть цифры, принятые в этой стране.



Школа в „Кванте"

Математика 9—11

Публикуемая статья предназначена для девятиклассников.

Начинаем с неравенства Евклида...

Двадцать пятое утверждение пятой книги знаменитых «Начал» Евклида*) гласит: если четыре величины пропорциональны, то наибольшая и наименьшая больше двух оставшихся (т. е. сумма наибольшей и наименьшей больше суммы двух оставшихся). Современному читателю это утверждение не покажется особенно сложным, но оно содержит в себе предпосылки многих важных результатов арифметики и анализа. Так, с его помощью можно легко доказать одну интересную теорему о прогрессиях, из которой вытекает известное неравенство Якоба Бернулли*). Но речь об этом — впереди.

Итак, обратимся к неравенству Евклида. Следует сказать, что евклидово доказательство этого неравенства — чисто геометрическое. Впрочем, это не удивительно — ведь автор «Начал» беседует со своими читателями исключительно на геометрическом языке! Не только геометрические, но и чисто арифметические утверждения (даже утверждение о бесконечности множества простых чисел — 20-е утверждение IX книги) доказаны в «Началах» геометрически.

Однако идеи, лежащие в основе доказательств утверждений названных

*) Евклид — великий математик древней Греции, живший в 3 веке до нашей эры. Его главная работа — шеститомный труд «Начала» — оказала огромное влияние на развитие всей математики.

*) Якоб Бернулли — родоначальник знаменитой семьи швейцарских математиков, живший во второй половине XVII века.

типов, излагаются Евклидом настолько ясно, что «перевести» их с геометрического на арифметический или алгебраический язык не представляет никакого труда.

Мы должны доказать, что *если a, b, c, d — положительные числа и*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

то сумма наибольшего и наименьшего из этих чисел больше суммы двух остальных.

В самом деле, без ограничения общности мы можем предположить, что наибольшим является a. Из данной пропорции

$$d=b\frac{c}{a}=c\frac{b}{a},$$

и так как обе дроби c/a и b/a меньше единицы, то $d<b$, $d<c$. Следовательно, d — наименьшее число, и, значит, требуется доказать неравенство

$$a+d>b+c.$$

Имеем

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\Leftrightarrow\frac{a-b}{c-d}=\frac{b}{d}\Leftrightarrow a-b=$$

$$=\frac{b}{d}(c-d).$$

Так как $c-d>0$, а $b/d>1$, то

$$a-b>c-d,$$

или, что то же самое, $a+d>b+c$. А это мы и хотели доказать.

Теперь сформулируем и докажем теорему Бернулли о прогрессиях.

Теорема. *Если (a_n) — арифметическая прогрессия, а (b_n) — геометрическая прогрессия с положительными членами и $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, $a_1\neq a_2$, то члены геометрической прогрессии, начиная с третьего, больше соответствующих членов арифметической прогрессии.*

Доказательство. Пусть $m>2$. Имеем

$$\frac{b_m}{b_{m-1}}=\frac{b_2}{b_1}.$$

Если (b_n) — возрастающая прогрессия, то из выписанных четырех чисел наибольшим будет b_m, а наименьшим — b_1. Если же прогрессия (b_n) убывает, то, наоборот, b_m — наименьшее, а b_1 — наибольшее из этих чисел. Таким образом, как в первом, так и во втором случае, согласно неравенству Евклида,

$$b_m+b_1>b_{m-1}+b_2.$$

Вспомнив, что $b_1=a_1$, $b_2=a_2$, и обозначив разность прогрессии (a_n) через d, мы получаем неравенство

$$b_m>b_{m-1}+d,$$

справедливое для любого натурального $m>2$.

Придавая m последовательно значения 3, 4, 5, ..., n, мы видим, что

$$b_3>b_2+d,$$
$$b_4>b_3+d,$$
$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$b_n>b_{n-1}+d.$$

Складывая неравенства, получим

$$b_n>b_2+(n-2)d=a_2+(n-2)d=$$
$$=a_1+(n-1)d=a_n.$$

Итак, для любого $n>2$

$$b_n>a_n,$$

что и требовалось.

Следствие (неравенство Бернулли). *Если $h>-1$, $h\neq 0$, то для любого натурального $n>1$*

$$(1+h)^n>1+nh.$$

В самом деле, рассмотрим две последовательности

$$1,\ 1+h,\ (1+h)^2,\ ...,\ (1+h)^n,\ ...,$$
$$1,\ 1+h,\ 1+2h,\ ...,\ 1+nh,\ ...$$

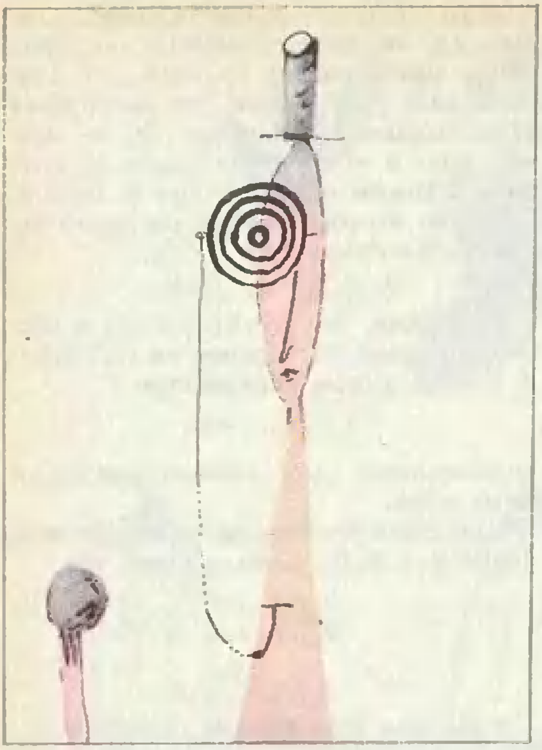
Первая из них арифметическая прогрессия, вторая — геометрическая, причем они удовлетворяют условиям теоремы Бернулли. Поэтому

$$(1+h)^n>1+nh\ (n=2,\ 3,\ 4,\ ...),$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что при $h>0$ это неравенство вытекает из формулы для бинома Ньютона, однако при $-1<h<0$ оно не вполне очевидно даже для тех, кто знаком с биномом Ньютона.

А. Бендукидзе



Лаборатория „Кванта"

Дифракция в лазерном свете

Д. ПАНЕНКО

Лазеры представляют собой источники света, замечательные прежде всего своей высокой когерентностью. Поэтому, например, с их помощью можно получать устойчивые интерференционные картины или наблюдать тонкие дифракционные эффекты, не проявляющиеся в опытах с нелазерными источниками.

В этой статье будет рассказано о том, как провести наблюдения дифракции на цилиндре, шаре или других телах в лазерном свете. Но сначала — немного о технической стороне эксперимента.

На рисунке 1 изображена блок-схема для получения увеличенной картины дифракции Френеля на различного рода препятствиях. Установка состоит из лазера (*ЛГ-52*), микрообъектива (*M*), точечной диафрагмы (*S*), объекта (*O*), на котором наблюдается дифракция, и плоскости наблюдения (P_0P). В этой плоскости может быть установлен белый экран для непосредственного наблюдения, фотоаппарат без объектива для фотографирования или же фотоэлектронный умножитель (ФЭУ) для фотоэлектрической регистрации. Фотоэлектронный умножитель, закрытый со стороны света диафрагмой с узкой щелью или точечным круглым отверстием, устанавливается на каретке, которая может равномерно перемещать его вместе с диафрагмой в плоскости наблюдения по оси *Y*. Сигнал ФЭУ, пропорциональный интенсивности света, прошедшего через диафрагму, регистрируется двухкоординатным графопостроителем. Его каретка перемещается с постоянной скоростью по оси абсцисс, а по оси ординат отклоняется пропорционально сигналу ФЭУ. Таким образом прибор регистрирует (в вы-

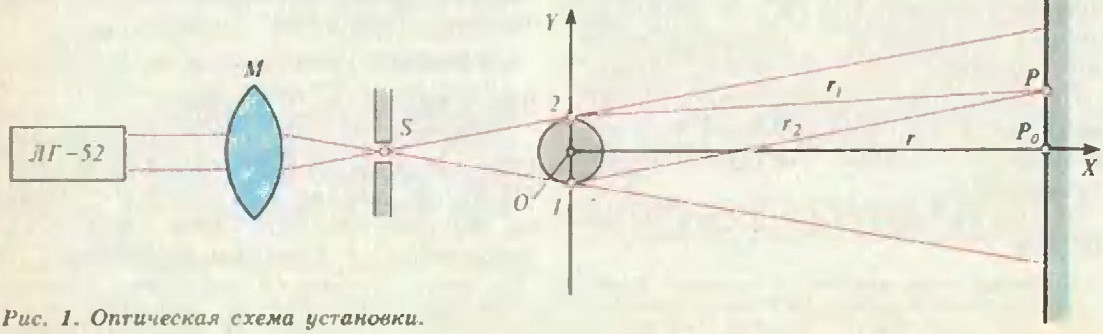


Рис. 1. Оптическая схема установки.

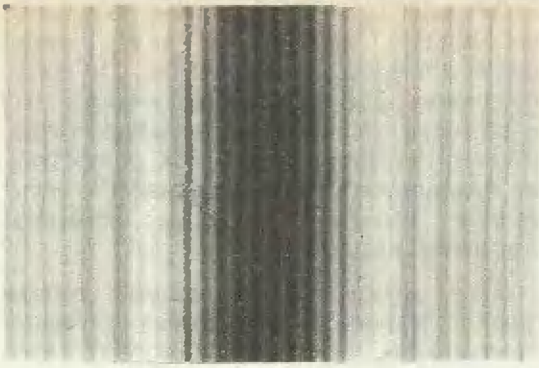


Рис. 2. Дифракция на цилиндрическом стержне.

бранном масштабе) распределение освещенности дифракционной картины в зависимости от расстояния P_0P. Длина регистрации при этом составляет 35 мм.

В первом опыте мы получили дифракционную картину на металлическом полированном цилиндре диаметром 2 мм. Ось цилиндра была направлена перпендикулярно плоскости XY, расстояние SO равнялось 1 м, OP_0 — 2,5 м, P_0P — 35 мм (см. рис. 1). Щель шириной 0,05 мм располагалась перед ФЭУ параллельно оси цилиндра.

На рисунках 2 и 3, *а* представлены результаты этого опыта. Как хорошо видно, в опыте наблюдаются две различные по происхождению картины дифракции. На краях тени цилиндра и во внешней области отчетливо наблюдается обычная краевая дифракция, т. е. чередующиеся темные и светлые области. Кроме того, в области геометрической тени и вне ее видны равноотстоящие друг от друга полосы, параллельные оси цилиндра. Оба вида дифракции можно получить и проанализировать по отдельности.

Если закрыть цилиндрический стерженек с одной стороны непрозрачным экраном, то свет будет дифрагировать только на одной стороне цилиндра. Получающаяся при этом дифракционная картина показана на ри-

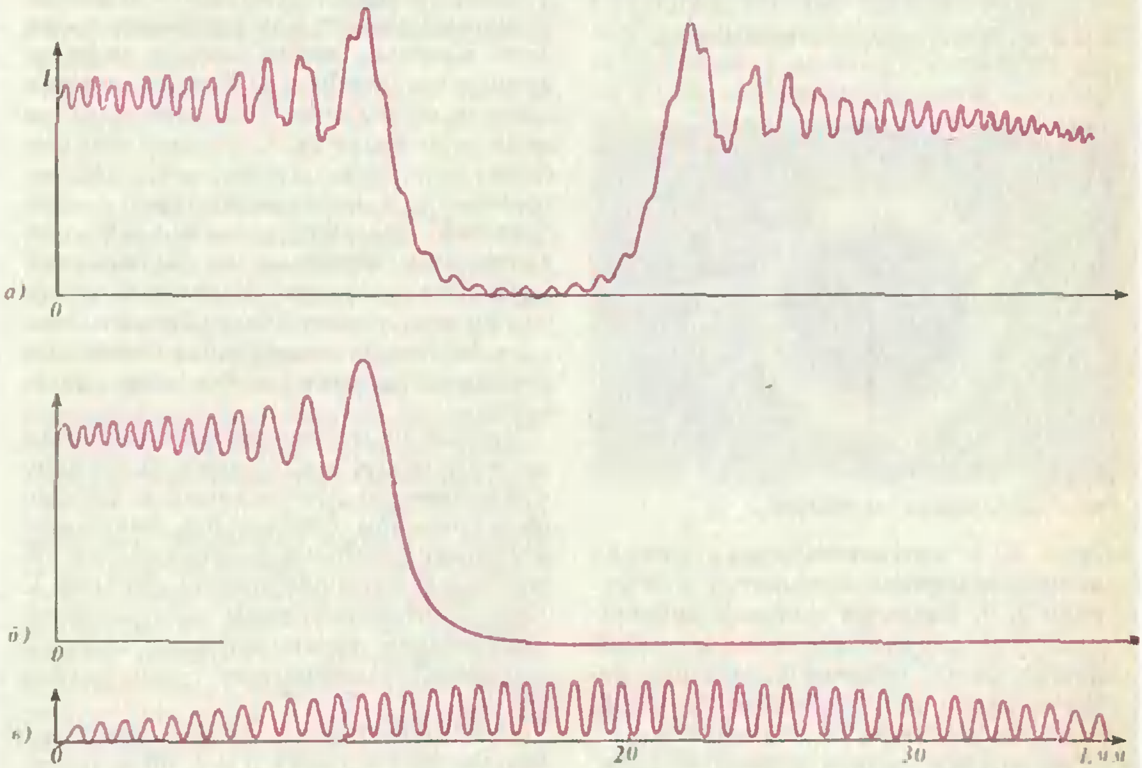


Рис. 3. Распределение освещенностей при дифракции от стержня (верхняя кривая), от края стержня (средняя кривая) и от двух щелей на краях стержня (нижняя кривая).

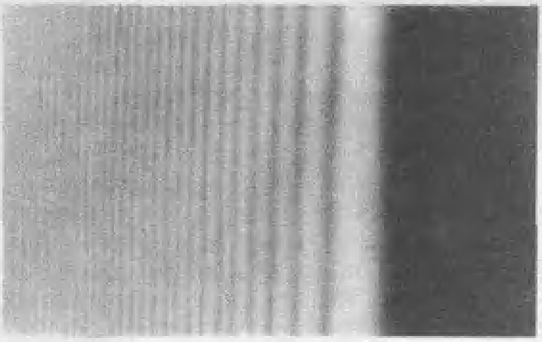


Рис. 4. Дифракция от одного края стержня.

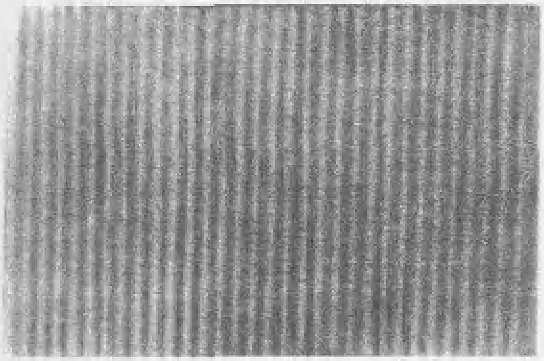


Рис. 5. Интерференционные полосы Юнга.

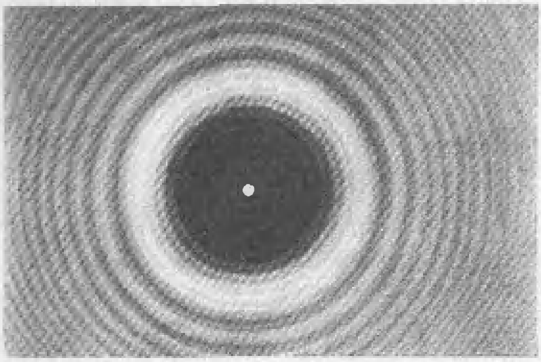


Рис. 6. Дифракция на шарике.

сунке 4, а соответствующая кривая распределения освещенности — на рисунке 3, *б*. Картина краевой дифракции в этом случае представляет собой систему полос, ширина и контраст которых уменьшаются по мере удаления от геометрической тени стержня.

Рассмотрим теперь второй вид дифракции на стержне, который дает равноотстоящие полосы, параллельные оси цилиндра. Происхождение этих полос может быть описано в представлениях известного вам интерференционного опыта Юнга. Области волнового фронта, прилегающие к поверхности цилиндра, являются источниками вторичных волн, а результат их сложения в плоскости наблюдения и дает интересующую нас дифракционную картину.

Для осуществления такого опыта (аналогичного опыту Юнга) стержень помещался посередине между ножами регулируемой щели S. Ширина щели подбиралась такой, чтобы между поверхностью цилиндра и ножами щели оставались зазоры шириной 0,1 мм. При освещении лазерным светом образовывались две светящиеся линии, которые и давали дифракцию Юнга. Из рисунка 5 видно, что картина дифракции действительно имеет вид равноотстоящих полос. Распределение освещенности в полосах показано соответствующей кривой на рисунке 3, *в*.

Итак, дифракцию на цилиндре можно рассматривать как сложение полей двух краевых дифракций и дифракционных полос Юнга. (При сравнении кривых на рисунке 3 следует иметь в виду, что верхняя и средняя кривые снимались при одинаковой чувствительности, а нижняя кривая — при большей чувствительности.) Обычно дифракция Френеля на проволочке связывается только со светлой полосой по оси геометрической тени. Опыты с лазерным светом дают более полное представление о дифракции в этом случае.

Второй опыт проводился с шариком диаметром 2,4 мм. Шарик аккуратно приклеивался пластилином к плоскопараллельной стеклянной пластинке и устанавливался в расходящийся пучок света, как показано на рисунке 1. При фоторегистрации перед фотоприемником устанавливался экран с круглым отверстием диаметром 0,1 мм.

Результаты этого опыта воспроизведены на рисунках 6 и 7, из которых хорошо видно, что и в случае с шариком наблюдаются также две картины дифракции.

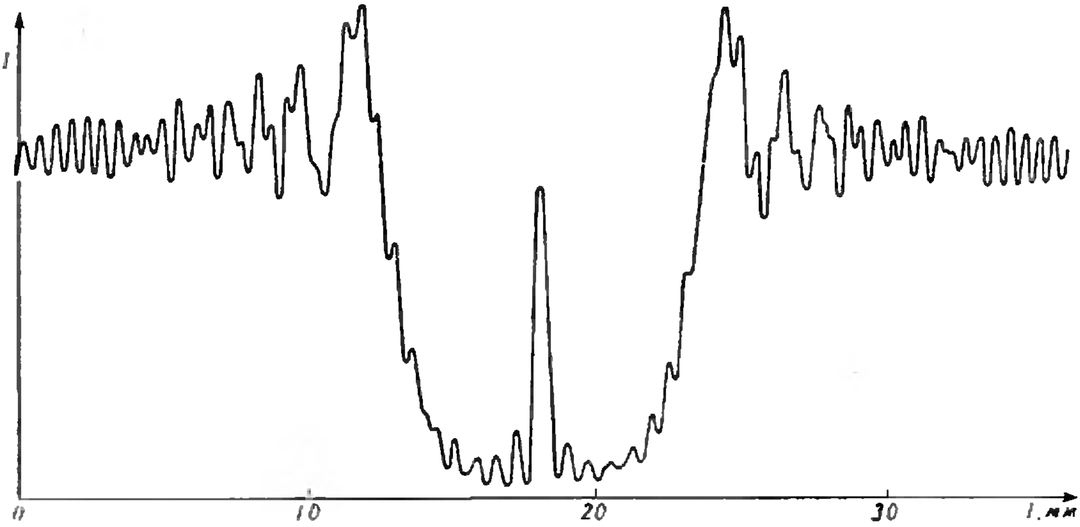


Рис. 7. Распределение освещенности при дифракции шарика.

Конечно же, вы не могли не обратить внимание на то, что в центре геометрической тени заметно яркое пятно, известное физикам как пятно Араго — Пуассона. История этого пятнышка довольно занимательна и поучительна.

Парижская Академия наук предложила дифракцию света в качестве темы на премию за 1818 год. Устроители конкурса в большинстве своем были сторонниками корпускулярной теории света и рассчитывали, что конкурсные работы принесут окончательную победу их теории. Однако Френелем была представлена работа, в которой все известные к тому времени оптические явления объяснялись с волновой точки зрения. Рассматривая эту работу, Пуассон, бывший членом конкурсной комиссии, обратил внимание на то, что из теории Френеля вытекает «нелепый» вывод: в центре тени, отбрасываемой небольшим круглым диском, должно находиться светлое пятно. Араго тут же произвел опыт и обнаружил, что такое пятно действительно имеется. Этот факт, безусловно, помог всеобщему признанию волновой теории света.*)

Опыты в лазерном свете позволяют наблюдать также кольца в области геометрической тени и вне ее. Происхождение этих колец тоже можно объяснить с точки зрения представлений интерференционного опыта Юнга (если считать, что интерференция света в области геометрической тени создается бесконечным числом диаметрально противоположных источников света волнового фронта, соприкасающегося с шаром).

Таким образом, наблюдения в лазерном свете дают более полные представления о дифракции Френеля на телах простой формы.

---

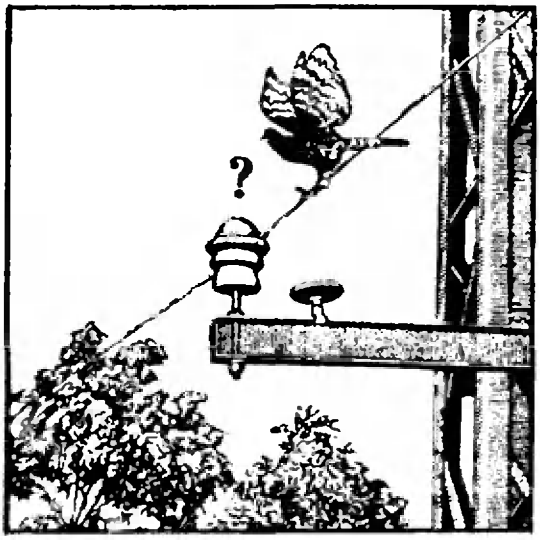
*) Мы советуем вам прочитать статью В. Вайнина и Г. Горелика «Пятно Пуассона и Шерлок Холмс» в «Кванте» № 4 за 1990 год. (*Примеч. ред.*)

Калейдоскоп „Кванта"

Я брал куски цилиндрической проволоки произвольной длины из различных материалов и помещал их поочередно в цепь...
Георг Ом

А так ли хорошо знакомы вам

электрические цепи?



Нельзя представить себе современный мир без использования разнообразных электрических цепей, передающих энергию и информацию. Возможность же исследовать законы, которым подчиняется электрический ток, появилась лишь в начале прошлого века после изобретения Гальвани, Вольтой и Зеебеком источников тока. Первым физиком, попытавшимся выяснить эти закономерности, был скромный школьный учитель из Кельна Георг Симон Ом. Сегодня его эксперименты могут показаться тривиальными, однако в то время провести надежные опыты с постоянным током было исключительно трудно, и только упорные и кропотливые измерения позволили Ому установить его знаменитый закон.

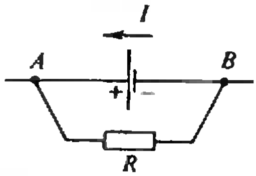
Чтобы почувствовать, как непросты «элементарные» вопросы, с которыми сталкивались исследователи, приближавшие «век электричества», поразмышляйте над задачами этого выпуска «Калейдоскопа».

Вопросы и задачи

1. Почему птицы могут безопасно усаживаться на провода, находящиеся под высоким напряжением?

2. Отчего величина пускового тока в лампе накаливания больше рабочего?

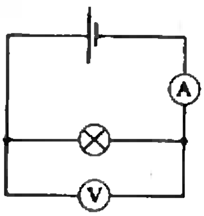
3. В каком направлении протекает ток через сопротивление R?



4. Верно ли утверждение, что вольтметр, подключенный к клеммам разомкнутого источника, показывает ЭДС?

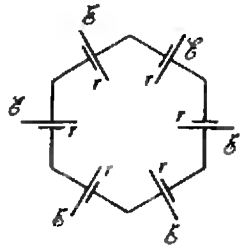
5. Как будет изменяться напряжение на зажимах источника при увеличении тока в цепи?

6. При сборке цепи, показанной на рисунке, амперметр и вольтметр поменяли по ошибке местами. Что произойдет при этом с измерительными приборами?



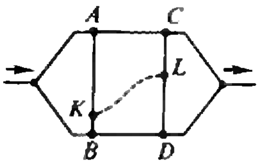
7. Можно ли включать конденсатор в цепь постоянного тока?

8. Какова будет разность потенциалов между любыми точками изображенной на рисунке цепи? Сопротивлением проводов пренебречь.



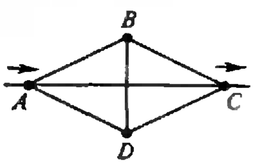
9. В электростатическом поле потенциал точки A выше потенциала точки B. Однако, если поместить в это поле проводник AB, ток по нему идти не будет. Почему?

10. На участках AKB и CLD, изображенных на рисунке, ток отсутствует. Будет ли течь ток по проволоке, соединившей точки K и L?



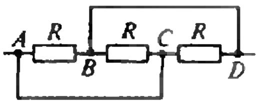
11. При включении в сеть елочной гирлянды, спаянной из лампочек для карманного фонаря, на каждую из лампочек приходится напряжение 3 В. Почему же опасно, выкрутив одну из лампочек, сунуть в патрон палец?

12. Какие из отрезков каркаса, изготовленного из однородной



проволоки, будут светиться ярче, если постепенно увеличивать подаваемое на каркас напряжение?

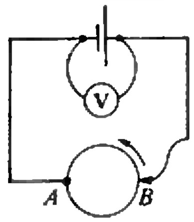
13. Чему равно сопротивление цепи, показанной на рисунке?



Сопротивлением проводов пренебречь.

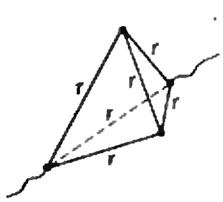
14. На сколько равных частей надо разрезать кусок однородной проволоки, чтобы при параллельном соединении этих частей получить в n раз меньшее сопротивление?

15. Как будут меняться показания вольтметра при движении



по однородному проволочному кольцу скользящего контакта?

16. Чему равно сопротивление каркаса из однородной прово-



локи в виде тетраэдра, включенного в цепь двумя вершинами?

Микроопыт

Имеются вольтметр, амперметр и источник ЭДС с неизвестными внутренними сопротивлениями. Как с их помощью измерить величину неизвестного сопротивления?

Любопытно, что...

...Генри Кавендиш, работы которого по электричеству долгое время оставались неизвестными, установил экспериментально пропорциональность тока напряжению в 1770-е годы, но в свойственной для него манере не удосужился никому сообщить об этом.

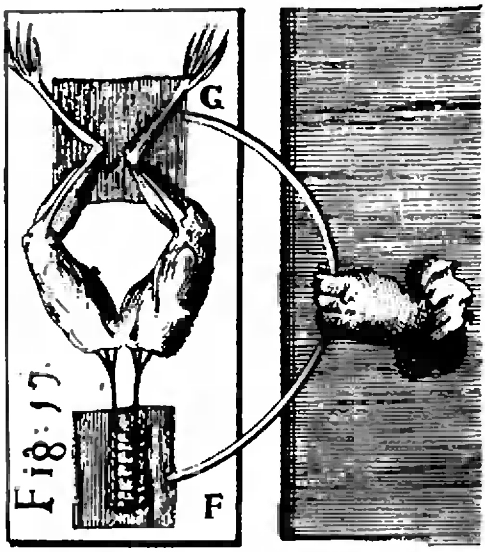
...открытие Ома было скептически воспринято в научных кругах. Это отразилось и на развитии науки — скажем, законы распределения токов в разветвленных цепях были выведены

Г. Кирхгофом лишь двадцать лет спустя,— и на научной карьере Ома — ему предложили кафедру в университете лишь в 1852 году, за два года до его смерти.

...Ом, пытаясь вывести свой закон уже из теоретических соображений, исходил из аналогии между распространением «электричества» и «теплоты», причем подтвердил правильность своего предположения.

...закон Ома, при всей его значимости, не является фундаментальным законом природы, а лишь следствием, которое, как теперь ясно, вытекает из квантовой теории твердого тела.

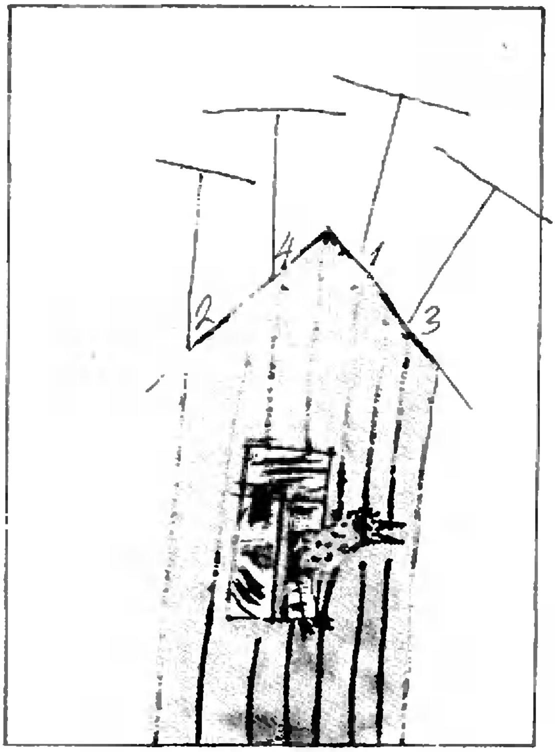
...еще в 1910 году известный физик П. Эренфест указал на возможность применения булевой алгебры, или алгебры логики, при составлении схем цепей телефонной станции. Впоследствии взаимосвязь булевой алгебры и ключевых электронных элементов легла в основу создания современных ЭВМ.



Что читать в «Кванте» об электрических цепях

(публикации последних лет)

1. «Правила Кирхгофа» — 1985, № 1, с. 26;
2. «Как в металле протекает электрический ток» — 1988, № 3, с. 41;
3. «Расчет электрических цепей» — 1988, № 8, с. 58;
4. «Калейдоскоп «Кванта» — 1989, № 12, с. 40;
5. «Электрические машины постоянного тока» — 1990, № 1, с. 63;
6. «Переходные процессы в электрических цепях» — 1990, № 4, с. 64;
7. «Об электрическом сопротивлении проводников» — 1990, № 5, с. 53.



Практикум абитуриента

Такие интересные ошибки...

Кандидат физико-математических наук
И. ГЕЛЬФГАТ

Поговорим об ошибках? Хотя этот разговор наверное надоел многим из вас на уроках в школе, попробуем показать, что и он может быть интересным. Завершить его придется по традиции моралью, но мы и мораль постараемся сделать не слишком длинной и скучной.

Начнем с задачи из заслуженно известного и неоднократно переиздававшегося сборника*) :

На концах невесомого стержня длиной $d=1$ м укреплены два маленьких шарика массой $m=1$ г каждый. Стержень подвешен на шарнире так, что может вращаться без трения около вертикальной оси, проходящей через его середину. На одной прямой со стержнем укреплены два больших шара массой $M=20$ кг каждый. Расстояние между центрами большого и малого шаров $L=16$ см (рис. 1). Вычислите период малых колебаний описанного крутильного маятника.

В этом месте мы предлагаем вам прервать чтение и заняться самостоятельным решением задачи. Решили? А теперь познакомьтесь с предлагаемым авторами сборника решением:

Каждая половина стержня с шариком на конце представляет собой математический маятник длиной $d/2$, совершающий колебания в поле тяготения большого шара. Математический маятник в поле тяготения Земли имеет период малых колебаний $T_0=2\pi\sqrt{l/g}$. По закону всемирного тяготения, $mg=GmM_З/R^2$; следовательно,

$$T_0=2\pi\sqrt{lR^2/(GM_З)},$$

где G — гравитационная постоянная, $M_З$ — масса Земли, R — расстояние от маятника до центра Земли. Соответственно, в поле тяготения большого шара период малых колебаний математического маятника длиной $l=d/2$ будет равен

$$T=2\pi\sqrt{dL^2/(2GM)}\approx 5{,}4 \text{ ч}.$$

Казалось бы, лучшего решения быть не может. Использование аналогии делает его коротким и изящным. Обоснованность этой аналогии *на первый*

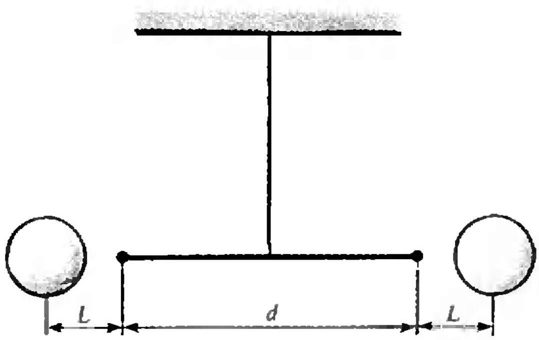


Рис. 1.

*) Буховцев Б. Б., Кривченков В. Д., Мякишев Г. Я., Сараева И. М. Сборник задач по элементарной физике. (М., Наука, 1987.) Задача № 650.

взгляд сомнений не вызывает. А вот *на второй...*

Согласно приведенному решению, «ускорение свободного падения» для маленького шарика не зависит от d. Но ведь при $d \to 0$ шарик попадает в середину стержня, где гравитационное поле обращается в ноль — силы притяжения к обоим большим шарам в точности компенсируют друг друга. Нетрудно понять причину этого противоречия: на половину стержня с шариком действует не только притяжение «Земли» — ближайшего из больших шаров, но и «Луны» — более далекого большого шара. При $d \gg L$ притяжением «Луны» можно было бы пренебречь, но в нашем случае отношение d/L не столь уж велико. А главное — мы ведь претендуем на решение задачи в общем виде, при любых d и L.

Можно предложить простое уточнение решения, учитывающее притяжение обоих шаров: полную «силу тяжести» mg, действующую на маленький шарик, запишем в виде

$$mg' = GmM/L^2 - GmM/(d+L)^2.$$

А дальше опять воспользуемся аналогией:

$$T_2 = 2\pi L(d+L)/\sqrt{2GM(d+2L)}.$$

Мы обозначили полученный период T_2, поскольку это второй по счету (но еще не последний!) ответ. Первый ответ, приведенный выше, будем далее обозначать T_1. Нетрудно видеть, что

$$T_2/T_1 = (d+L)/\sqrt{d(d+2L)}.$$

При данных в условии задачи значениях ($d = 6{,}25L$) поправка составляет всего около 1 %; при $d = L$ она превысила бы 15 %.

Ну что ж, наше решение теперь выглядит вполне солидно. (Как много, впрочем, солидных научных трудов оказались впоследствии совершенно неверными!) Чтобы исключить все сомнения, давайте все же попробуем решить задачу строго, исходя лишь из основных законов природы и свойств малых колебаний.

Напомним, что уравнение гармонических колебаний в общем случае имеет вид

$$\mu x'' = -kx, \qquad (1)$$

а полная энергия колебаний равна

$$W = W_0 + W_k + W_p = \\ = W_0 + \mu(x')^2/2 + kx^2/2, \qquad (2)$$

где μ и k — некоторые физические параметры колеблющейся системы, принимающие, вообще говоря, любые постоянные положительные значения, а W_0 — энергия системы в состоянии равновесия. Если хоты бы для малых отклонений x от положения равновесия справедлива одна из этих формул, то малые колебания являются гармоническими и их циклическая частота равна $\omega = \sqrt{k/\mu}$, а период —

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\mu/k}.$$

Величина x совсем не обязательно имеет смысл смещения от положения равновесия; в нашей задаче, например, это может быть и угол φ отклонения стержня от положения равновесия.

Попробуем получить выражение для полной энергии системы, состоящей из половины стержня с шариком. Скорость шарика равна $d\varphi'/2$, поэтому его кинетическая энергия равна

$$W_k = mv^2/2 = md^2(\varphi')^2/8.$$

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух шаров равна $W_p = -Gm_1m_2/r_{12}$ (r_{12} — расстояние между центрами шаров). Выводится эта формула аналогично формуле для электрической энергии взаимодействия двух точечных зарядов. Для нашей системы (см. рис. 2)

$$W_p = -GmM(1/R_1 + 1/R_2). \qquad (3)$$

Воспользуемся теоремой косинусов

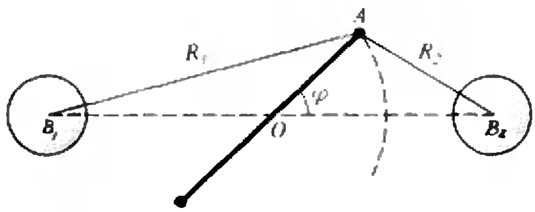


Рис. 2.

для треугольников OAB_1, OAB_2:

$$R_{1,2}^2=(d/2)^2+(d/2+L)^2\pm d(d/2+L)\times \times\cos\varphi.$$

Учитывая, что для малых φ $\cos\varphi=1-\varphi^2/2$, получаем

$$W_\varphi=-GmM(1/(d+L)+1/L)+ +GmMd(d+2L)(1/L^3-1/(L+d)^3)\varphi^2/8.$$

Итак, в нашем случае

$$W_0=-GmM(1/(d+L)+1/L),$$

$$\mu=md^2/4,$$

$$k=GmMd(d+2L)(1/L^3-1/(L+d)^3)/4.$$

Отсюда получаем

$$T_3=2\pi\sqrt{\frac{L^3(d+L)^3}{GM(d+2L)(d^2+3dL+3L^2)}}.$$

Так какой же из ответов — T_2 или T_3 — является правильным?! А может, есть еще и четвертый, пятый? Ключ к разгадке дает сравнение двух решений. Каких? Сравнивать, скажем, ответы T_3 и T_1 не имеет смысла, поскольку в T_3 учтено притяжение обоих больших шаров, а в T_1 — лишь одного. А вот если в формуле (3) отбросить слагаемое с R_1, т. е. тоже ограничиться учетом притяжения ближайшего большого шара, тогда, казалось бы, мы опять должны прийти к ответу T_1. Советуем вам проделать этот расчет самостоятельно — и вы действительно получите ответ, но... четвертый, не совпадающий ни с одним из предыдущих:

$$T_4=2\pi L\sqrt{\frac{dL}{GM(d+2L)}}.$$

Что-то опять не увязалось. Почему? Сравним этот ответ с T_1:

$$T_4/T_1=\sqrt{2L/(d+2L)}.$$

Заметим, что это отношение стремится к единице при $L\gg d$. Может, в этом все дело? Ведь для обычного маятника у поверхности Земли условие $L\gg d$ выполняется с огромным запасом (под L следует тогда понимать радиус Земли). Поэтому (и только поэтому!) при колебаниях поле силы тяжести можно считать однородным. А вот при отклонении от положения равновесия маленького шарика в нашей задаче меняется и направление, и величина действующей на него силы тяготения (правда, вы можете сами проверить, что изменение модуля силы тяготения как раз несущественно — все дело в изменении ее направления).

Мы столько раз уже ошибались, что для полной уверенности стоит проверить полученные результаты еще раз. Для этого можно решить задачу, опираясь на формулу (1), а не на выражение для энергии. Ограничимся при этом учетом притяжения ближайшего большого шара. Хорошо бы получить для периода колебаний выражение T_4...

Пусть стержень отклонился от положения равновесия на малый угол φ (рис. 3). Роль возвращающей силы играет проекция силы тяготения $\vec{F}$ на ось X, совпадающую с касательной к траектории. Уравнение движения имеет вид

$$ma_x=-F\cos\beta.$$

Учитывая, что $a_x=x''$, а $\beta=90°-\varphi-\gamma$, получаем

$$mx''=-F\sin(\varphi+\gamma)=-\frac{GmM}{L^2}(\varphi+\gamma).$$

Здесь мы использовали тот факт, что при малых отклонениях $R_2\approx L$ и $\sin(\varphi+\gamma)\approx\varphi+\gamma$. В однородном поле тяготения Земли слагаемое γ в правой части уравнения не появилось бы (сравните это с выводом формулы для периода колебаний математического маятника в школьном учебнике). Значит, действительно все дело в неоднородности поля тяготения!

Применяя к треугольнику OAB_2 теорему синусов (с учетом малости углов): $\gamma/\varphi=d/(2L)$, после подстановки γ в уравнение движения полу-

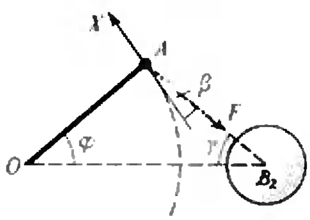


Рис. 3.

чаем

$$x''=-\frac{GM}{L^2}\left(1+\frac{d}{2L}\right)\varphi=-\frac{GM(d+2L)}{dL^3}\,x,$$

где $\varphi\approx 2x/d$. Из этого уравнения типа (1) находим период колебаний, полностью совпадающий с T_4. Теперь уже не вызывает сомнений, что правильным ответом для исходной задачи, с учетом притяжения обоих больших шаров, является T_3. При указанных в условии значениях d и L $T_3\approx 2{,}7$ ч. Правильный ответ отличается от T_1 вдвое!

Допущенная в первом предложенном решении ошибка оказалась, пожалуй, поинтереснее даже самой задачи. Напомним, что в нем не было учтено притяжение «дальнего» большого шара (что допустимо лишь при $d\gg L$) и неоднородность поля тяготения (что допустимо, наоборот, при $d\ll L$). В итоге полученный ответ T_1 для любых значений d и L оказался неверным!

Мораль. Во-первых, решение хорошей школьной задачи (как и задачи научной) не заканчивается получением итоговой формулы и подстановкой в нее численных значений. Результат нужно проверить «на прочность» как можно бо́льшим числом способов, отнестись к нему очень строго. От ошибок не застрахованы даже крупные ученые, да и задача может оказаться глубже, чем кажется даже ее автору.

Во-вторых, метод аналогий — прекрасный метод, но обращаться с ним нужно осторожно. Иногда принципиальное различие между задачами далеко не так сильно бросается в глаза, как сходство между ними.

Одним словом, если возникают малейшие сомнения в правильности решения или неясен смысл результата — попробуйте решить задачу другим способом и сравнить полученные результаты.

„Квант" улыбается

Математические переменки

1. Разгадайте короткий ребус: $?^2$.

2. Математик получил приглашение на званый обед. Он ответил запиской: С а: Что хотел сказать математик?

3. Сделав хитрое лицо, математик сказал девятилетнему мальчику: «Назови самое большое число». Лицо математика вытянулось, когда он услышал ответ — он сам не мог бы назвать большее число.

Какое число назвал мальчик?

4. Завершите числовую последовательность:

1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, ? .

5. Завершите другую числовую последовательность:

1, 3, 5, 10, 25, 50, ? .

6. Я не знал, какое существительное оканчивается на три е. Оказалось: «длинношеее»! В отместку я придумал свой вопрос для приятеля: «А вот ты скажи, какое существительное оканчивается на три ё»!

7. Наташа произнесла истинное утверждение. Леша повторил его дословно, и оно стало ложным. Что сказала Наташа?

8. Теорема Пифагора, как утверждает один автор, имеет 114 различных доказательств. Что это означает?

9. Как известно, «пифагоровы штаны во все стороны равны». Следует ли отсюда, что Пифагор носил штаны?

10. Почему переплет книги, читанной 2—3 раза, имеет перекос вправо?

В. Произволов

(Ответы см. на с. 57)

* * *

Утверждение «В математическом лексиконе отсутствуют слова с пятью согласными подряд» неверное.

Контрпример: КОНТРПРИМЕР.

И. Брыскин

56 миллионов километров до Красной планеты

Е. НАРИМАНОВ

Проектный облик марсианского экспедиционного комплекса (МЭК)

В проекте НАСА (начало 70-х годов) предлагалось осуществлять маневры разгона у Земли, торможение у Марса и маневр отлета к Земле с помощью ядерного ракетного двигателя с твердофазной рабочей зоной, получившего в США обозначение «NERVA». (В советской специальной литературе этот тип ядерного ракетного двигателя носит название ЯРД схемы «А».) В состав экспедиционного комплекса разработчики из НАСА включили три унифицированных крупномасштабных ракетных блока с ЯРД «NERVA» и с жидким водородом в качестве топлива. Ракетные блоки размещались по пакетной схеме (см. рис. 1), причем два крайних срабатывали у Земли, а центральный — у Марса. По продольной оси центрального ракетного блока последовательно располагались межпланетный орбитальный корабль (МОК), марсианский посадочный комплекс (МПК) и автоматические аппараты для исследования планеты (капсулы).

Выполненные в те же годы в СССР (НПО «Энергия», ЦНИИМаш) проекты марсианского экспедиционного комплекса содержали в качестве двигательной установки электроядерную ракетную двигательную установку (ЭЯРДУ), т. е. ДУ «малой» тяги. Компоновочная схема предлагалась «лучевой» (рис. 2) и «Т-образной» (рис. 3). Последняя схема предусматривала создание на борту в отсеках жилого и приборного модулей искусственной тяжести (с уровнем 0,2—0,3 от уровня земной тяжести) за счет вращения всего комплекса вокруг продольной оси.

В дальнейших проектных проработках было предложено ввести в состав МЭК две электроядерные ракетные двигательные установки, а межпланетный орбитальный корабль и посадочный комплекс размещать между ними (см. рис. 4) в зоне тени, создаваемой специальной размещенной у реактора защитой.

С целью исключения возможного неблагоприятного воздействия ионизирующих излучений от реактора при выходе кораблей из зоны тени в 80-х годах в НПО «Энергия» прорабатывалась компоновочная схема с солнечной энергетической установкой большой мощности. В качестве движителей предполагалось использовать те же двигатели «малой» тяги. Общий вид экспедиционного комплекса приведен на рисунке 5. Там же показано в более крупном масштабе размещение межпланетного корабля, поса-

Мы продолжаем публикацию материалов, которые могут оказаться полезными для участников конкурса «Вместе к Марсу» (см. «Квант» № 7, с. 69; № 10, с. 65; № 11, с. 51).

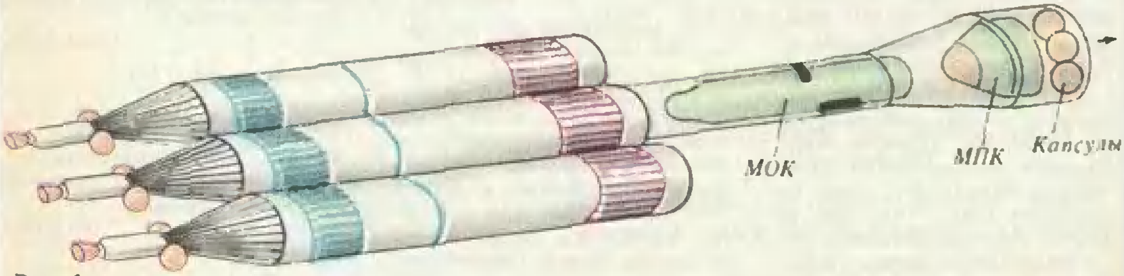


Рис. 1.

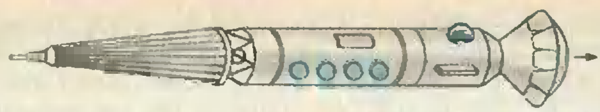


Рис. 2.

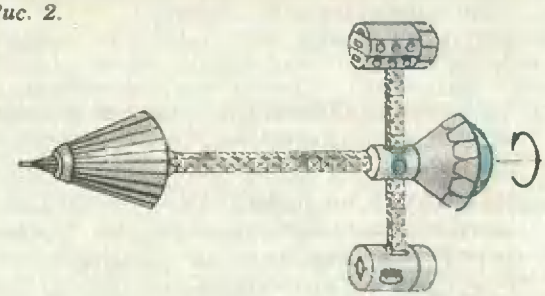


Рис. 3.

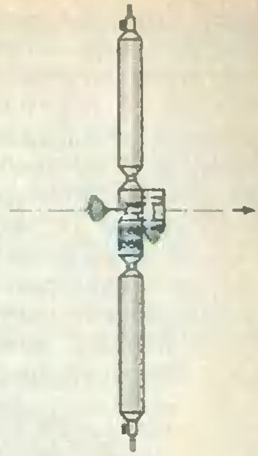


Рис. 4.

дочного комплекса и панелей с двигателями «малой» тяги. Посадочный комплекс в двух последних компоновочных схемах выполнен в форме цилиндра; это сделано с целью получения выигрыша по массе и упрощения процедуры выведения комплекса с Земли в космос за счет уменьшения поперечного размера. Размер каждого крыла солнечной энергоустановки 200×200 м, а масса одного квадратного метра солнечной батареи с учетом силового каркаса и распределительной сети оценивается в 500 грамм.

В настоящее время проводятся широкие проектные проработки марсианского экспедиционного комплекса других компоновочных схем.

Формирование МЭК на орбите ИСЗ

Приведем пример формирования МЭК на монтажной орбите искусственного спутника Земли для случая организации пилотируемой экспедиции по двухкорабельной схеме полета.

Дата начала транспортных операций по выведению грузов в космос — середина 2010 года. В это время по околоземной орбите обращаются две пилотируемые орбитальные станции — «Мир» нового поколения (СССР) и «Фридом» (США), которые в этом случае, дополнительно к традиционным научным и народнохозяйственным задачам, используются как сборочно-монтажные орбитальные комплексы.

Первым на околоземной орбите формируется автоматический межпланетный корабль, который доставит на орбиту искусственного спутника Марса (ИСМ) посадочный комплекс и ракетный блок с топливом для обратного полета экипажа или только бак с топливом. Пуском ракет-носителей «ALS» в космос выводятся посадочный комплекс (разработка США), ракетный блок возвращения и ЭЯРДУ (разработки СССР). Блоки полезного груза стыкуются со станцией «Фри-

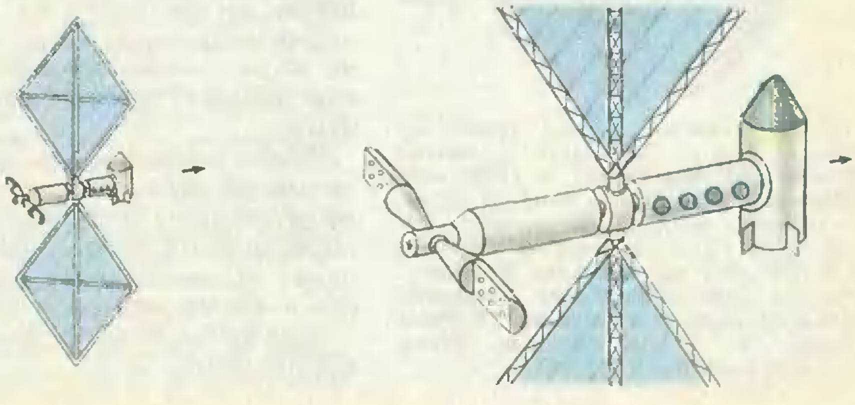
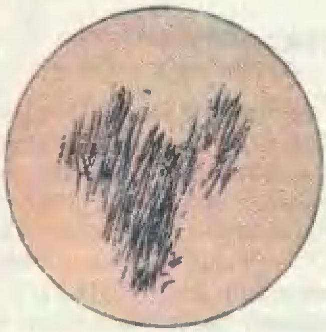


Рис. 5.

дом», затем в специальном ангаре с участием космонавтов-монтажников выполняется сборка грузового межпланетного корабля. Для вывода в космос отдельных модулей этого корабля всего потребуется 3—4 пуска РН «ALS», что займет с учетом этапа сборки и устранения неисправностей около полугода.

После проверки функционирования бортовых систем и устранения обнаруженных неисправностей грузовой межпланетный корабль отправляется к Марсу. 13 месяцев полета (90 суток — раскрутка у Земли, 270 суток — межпланетный полет, 30 суток — выведение на низкую ареоцентрическую орбиту) — и корабль выходит на рабочую орбиту ИСМ.



А)

Б)

В)

Эти рисунки отражают ранние этапы исследований Марса с помощью телескопа. Первый шаг (А) был сделан в 1659 году Х. Гюйгенсом, отметившим только V-образную область, называемую теперь равниной Большой Сирт. На рисунке (Б), сделанном в 1800 году наблюдателем И. Шретером, Большой Сирт показан уже достаточно точно. Знаменитая же сеть «каналов» (В) была обнаружена Дж. Скиапарелли во время великого противостояния 1877 года.

После получения данных об успешном выведении посадочного комплекса на орбиту ИСМ начинается формирование на орбите ИСЗ пилотируемого межпланетного корабля. Пусками РН «Энергия» на орбитальную станцию «Мир» последовательно доставляются ракетные блоки для разгона комплекса у Земли с ЯРД типа «NERVA», ракетный блок торможения у Марса (разработка СССР) и пилотируемый межпланетный корабль (разработка СССР с участием стран мирового сообщества). Отдельные модули собираются на специальном стапеле на станции «Мир». После этого на станцию с помощью ракеты-носителя «Зенит» в транспортных космических кораблях (типа «Союз») доставляется международный экипаж из 8 человек, представляющий разные континенты. Космонавты занимают рабочие места в межпланетном корабле. Марсианский экспедиционный комплекс отделяется от станции «Мир» и начинает самостоятельный полет по околоземной орбите. (Для формирования МЭК потребуется 3—4 пуска РН «Энергия» и один пуск РН «Зенит»; все операции займут около 5 месяцев.)

Но вот включаются маршевые ДУ, нарастает перегрузка, экспедиционный комплекс устремляется к Марсу. Впереди полет по трассе «Земля — Марс», торможение у Марса, стыковка с автоматическим кораблем, посадка на Марс, две недели работы на Красной планете, взлет с Марса, отлет к Земле...

Через полтора года после старта пилотируемого межпланетного корабля от Земли он возвращается к своему космическому дому. Спускаемый аппарат приземляется в казахстанской степи. На календаре — 2013 год.

Задача выполнена. Впереди — новые полеты!

III Заочная аэрокосмическая олимпиада

Всесоюзное молодежное аэрокосмическое общество (ВАКО) «Союз» и Московский физико-технический институт проводят III Заочную аэрокосмическую олимпиаду для учащихся 10 и 11 классов средних школ. Олимпиада предназначена для тех, кто интересуется исследованиями космического пространства и желает проверить свои знания школьного курса физики в решении задач из различных областей практической космонавтики.

Опыт проведения заочных аэрокосмических олимпиад показал, что успешное самостоятельное решение предложенных задач может явиться критерием готовности к поступлению в институт. Так, в частности, половина всех победителей олимпиады, которая проводилась весной 1990 года, успешно сдали вступительные экзамены в МФТИ.

Для участия в олимпиаде необходимо решить предложенные задачи и оформить их в тетради, по одной задаче на отдельном листе. На обложку тетради наклейте белый лист, оформленный следующим образом:

1. Фамилия, имя, отчество.
2. Подробный домашний адрес (с индексом).
3. Номер школы и класс, в котором вы учитесь.
4. Любые дополнительные сведения о себе.

Тетрадь с решениями задач олимпиады и конверт с вашим домашним адресом отправьте *до 1 апреля 1991 года* простой бандеролью по адресу:

141700, г. Долгопрудный, МФТИ, факультет аэрофизики и космических исследований (с пометкой «Олимпиада»).

Решение Оргкомитета олимпиады вам будет сообщено до 1 мая 1991 года.

Победители III Заочной аэрокосмической олимпиады будут награждены дипломами, которые вам могут пригодиться при поступлении в вузы аэрокосмического профиля.

Желаем успехов!

Ниже приводятся задачи III Заочной аэрокосмической олимпиады. Задачи 1—4 предназначены для учащихся 10 класса, 1—6 для 11 класса. Решение задач, отмеченных звездочкой, хотя и не обязательно, но будет учтено при подведении итогов олимпиады. При решении задач можно использовать любые справочные данные.

1. Для связи с космической станцией, вращающейся в экваториальной плоскости по круговой орбите, высота которой $H=300$ км, используется сеть наземных станций слежения. Сколько станций необходимо для обеспечения непрерывной связи, если сигнал устойчиво принимается при высоте станции над горизонтом $\alpha=30°$?

2. Почему космические аппараты (КА) удобнее запускать с космодромов, расположенных вблизи экватора? Для чего тогда в СССР вблизи Полярного круга построен космодром Плесецк?

3. Возможности космической технологии в значительной мере определяются уровнем микрогравитации — величиной возмущающих ускорений на борту космических аппаратов. Оцените величину ускорений на комплексе «Мир», вызываемых перемещениями космонавтов. Масса комплекса $M\approx85$ т, масса космонавта $m=70$ кг.

4. Ракета-носитель «Энергия» способна вывести на низкую околоземную орбиту груз массой $m_0=100$ т. Какой массы груз может быть доставлен с ее помощью на Луну? Скорость истечения газов из ракетного двигателя принять равной $u=3$ км/с.

5. В рамках Международного года космоса в 1992 г. планируется осуществить гонки «космических парусников» к Луне. Определите размер отражающего солнечного паруса, который необходим для разгона КА массой $m=500$ кг с ускорением $a=10^{-4}\ g$. Форма паруса — квадратная, коэффициент отражения $\eta=100\,\%$. Значение солнечной постоянной принять равным $N=1{,}36$ кВт/м^2.

6. Для компенсации аэродинамического торможения спутника на низкой околоземной орбите предполагается использовать ионный реактивный двигатель (ИРД). В камеру ИРД со скоростью $u=1$ мм/с подается круглый стержень из натрия диаметром $d=1$ мм. С помощью дугового разряда металлический натрий испаряется и однократно ионизируется. Какое ускоряющее напряжение U необходимо создать в камере, чтобы тяга двигателя была равна $P=1$ Н? Плотность натрия $\rho=1$ г/см^3.

7*. Два брата-близнеца путешествуют во Вселенной на звездолетах, летящих со скоростью $v=0{,}9\ c$ (c — скорость света). Пролетая мимо Земли, один из них задержался на один год для исследования земной цивилизации, после чего отправился догонять своего брата с относительной скоростью $V=0{,}9\ c$. Какой из братьев и на сколько будет старше к моменту встречи?

8*. В современной астрономии все наблюдаемые звезды классифицируются по многим признакам: массе, блеску и т. д. Различают звезды и по «цвету»: есть, например, красные и желтые карлики, голубые гиганты... Но только у писателей-фантастов встречаются «зеленые» звезды. Почему мы не видим их в телескоп?

Нам пишут

Еще раз о кривизне поверхности и тепловом расширении

В № 11 «Кванта» за 1989 г. помещена статья С. Л. Табачникова «Дифференциальная геометрия вокруг нас». Меня особенно заинтересовала та ее часть, где говорится о связи между кривизной поверхности и расширением тел. В ней рассмотрено перемещение поверхности нагреваемого тела в направлении внешней нормали в каждой точке на одинаковое расстояние ε (рис. 1, *а*; такое перемещение фигурирует в определении кривизны; назовем его *нормальным*). При нормальном перемещении взаимно перпендикулярные отрезки на поверхности произвольного тела испытывают в общем случае разные относительные растяжения. Этим можно объяснить, например, продольный разрыв сосиски при варке.

Между тем при тепловом расширении однородных аморфных тел (и кубических кристаллов) перемещение точек тела описывается *гомотетией* — преобразованием подобия (центр которого для изолированного тела совпадает с его центром масс; рис. 1, *б*). При гомотетии перемещение поверхности не всегда совпадает с нормальным (в частности, если нагревать круглую шайбу, то ее отверстие увеличивается, т. е. перемещение границы отверстия противоположно нормальному). Тепловая деформация однородных тел (при равномерном нагреве и свободном расширении) не вызывает внутренних напряжений, т. к. в указанных условиях тело при каждой температуре находится в своем равновесном состоянии. А значит, и описанные продольные разрывы не могут быть связаны с чисто тепловым расширением.

Но сосиски при кипячении все-таки лопаются! И притом продольно. Чем же тогда это вызвано?

Трудно придумать лучший механизм продольного разрыва, чем рассмотренный в статье «Дифференциальная геометрия вокруг нас», нормальное перемещение поверхности. Надо только добавить, что такое перемещение связано не с тепловым расширением, а с дополнительным эффектом, который создает силы, действующие перпендикулярно поверхности тела. Таким эффектом является, например, внутреннее давление. В случае сосиски оно может возникать в результате появления внутри нее сжатого пара при закипании содержащейся в сосиске влаги. Здесь нагревание приводит одновременно к двум разным эффектам: тепловому расширению (гомотетии) и «напорному» расширению (нормальному преобразованию). Первый эффект меняет размеры, но не форму тела, второй меняет как размеры тела, так и его форму. Реальное расширение описывается наложением обоих эффектов, но разрыв поверхности может быть связан только со вторым эффектом. В этом и состоит уточнение, которое следует внести в обсуждаемый механизм.

Можно предложить опыт, где реализовалось бы только нормальное преобразование. Возьмем надувные шарики, но не сферические, а в виде «сосисок» (рис. 2). Станем надувать шарик. Если делать это достаточно медленно, температурные эффекты будут пренебрежимо малы, и расширение шарика будет всецело обусловлено вторым эффектом. Надуваем шарик, пока он не лопнет. Поскольку здесь реализована в чистом виде нормальная деформация поверхности, разрыв шарика должен проходить вдоль одного из меридианов OO'.

Может оказаться, что шарик разрывается не вдоль меридиана, а вблизи одного из «полюсов». Это не противоречит теории: она предсказывает разрыв поверхности в первую очередь в области наибольшей кривизны — а это как раз окрестности вершин O и O'. Кстати, сосиски часто расщепляются при варке именно в вершинах — в согласии с геометрией нормального расширения.

Однако возможны ситуации, когда никакие силы не в состоянии вызвать нормального перемещения поверхности. Попробуем представить нормальное расширение кристалла. Его начальное сечение вблизи какого-либо ребра образует угол AOB (рис. 3, *а*). Алгоритм нормального расширения требует сместить стороны AO и OB на расстояние ε в направлении внешних нормалей. Направление смещения вершины O неопределенно, и точка O трансформируется в дугу O_1O_2. Реальная поверхность при этом разорвется, и образуются два зубца $A_1O_1OO_2B_1$ (рис. 3, *б*). Иначе говоря, одно ребро

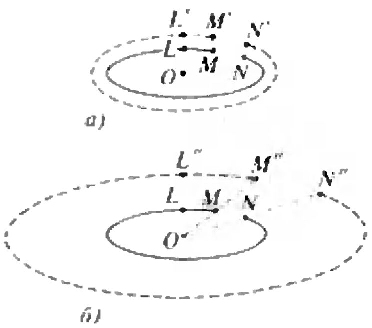


Рис. 1.

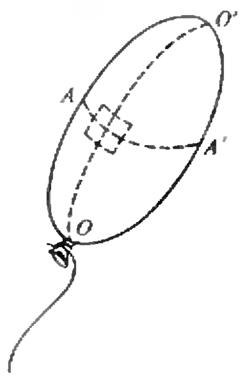


Рис. 2.

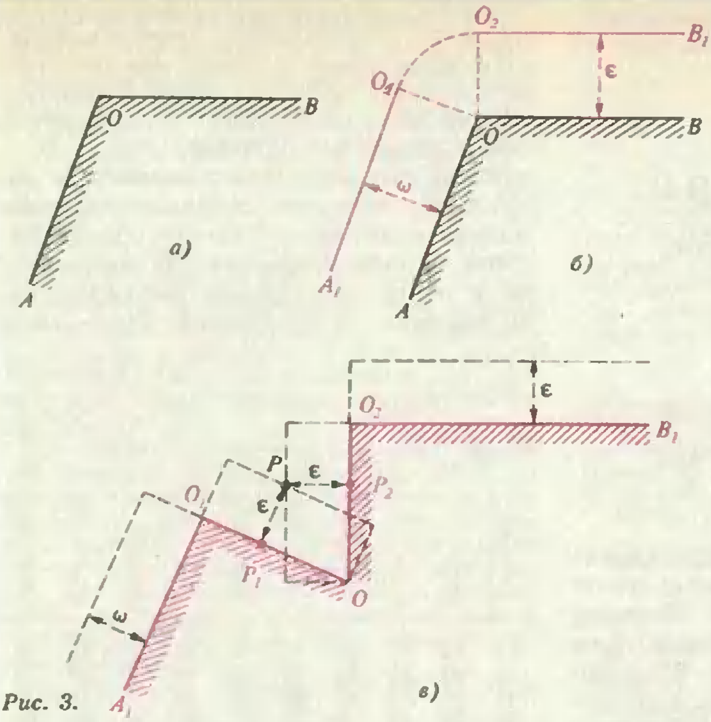


Рис. 3.

расщепится на два. Затем каждое из двух новых ребер снова должно расщепиться по указанному механизму. Однако теперь это невозможно, т. к. между ребрами имеется выемка O_1OO_2, участки которой OO_1 и OO_2 стали бы наползать друг на друга, что физически неосуществимо (рис. 3, *в*). Следовательно, дальнейшее перемещение поверхности кристалла либо прекратится, либо будет отличаться от нормального. К такому же выводу мы придем, рассматривая кристалл под давлением, например, под нагруженным поршнем в прозрачной цилиндрической капсуле с глицерином.

Итак, нормальное перемещение поверхности, используемое при определении ее кривизны, не всегда осуществимо. Но это никоим образом не порочит соответствующее определение кривизны. Ведь в математике речь идет о воображаемом, и притом бесконечно малом, перемещении. Здесь мы приходим к вопросу о взаимоотношении между физической реальностью и теми мысленными образами, которые мы используем для ее описания. Этот вопрос представляет самостоятельный интерес, выходящий далеко за рамки моего письма.

М. Файнгольд

Закон всемирного тяготения

(Начало см. на с. 8)

порядка $\frac{3\cdot 10^3\ \text{м}}{5\cdot 10^{10}\ \text{м}} = 0{,}6\cdot 10^{-7}$. Хотя ошибка и очень мала, но она приводит к наблюдаемому эффекту.

Это связано с указанным Ньютоном свойством апсид «отзываться» своим движением на нарушение закона обратных квадратов. Из-за малой поправки эллиптическая орбита Меркурия медленно поворачивается в пространстве. Это движение (в сторону обращения Меркурия на орбите) накладывается на движение, связанное с возмущающим действием Юпитера, которое объясняется ньютоновской теорией. За 100 лет накапливается дополнительное смещение 43″, объяснение которого было дано лишь общей теорией относительности.

Не всегда поправки общей теории относительности столь малы. В глубинах космоса есть области, в которых эффекты общей теории относительности оказываются основными. Это — недра тяжелых звезд, ядра галактик. При описании Вселенной как физической системы основным «инструментом» является общая теория относительности. Но дорогу к таким исследованиям открыл Ньютон. Он был первым, кто создал методы теоретической физики, и первым применил эти методы к изучению Вселенной.

Олимпиады

XXXI Международная математическая олимпиада

Кандидат физико-математических наук
В. ВАВИЛОВ.
Кандидат физико-математических наук
А. СЛИНЬКО

Очередная XXXI Международная математическая олимпиада школьников проходила в Пекине с 7 по 19 июля 1990 года. В олимпиаде участвовали 308 школьников из 54 стран. Впервые в этом году в ней приняли участие команды Алжира, Бахрейна, Японии, Макао, КНДР.

Нашу страну представляли *Малинникова Евгения* (Ленинград, с. ш. № 239), *Стояновский Александр* (Москва, с. ш. № 57), *Перлин Александр* (Ленинград, с. ш. № 239), *Абрамов Георгий* (Ленинград, с. ш. № 239), *Соловьев Иван* (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82), *Барановский Владимир* (Омск, с. ш. № 115). Научными руководителями команды на олимпиаде были авторы этой статьи — доцент МГУ Вавилов В. В. и научный сотрудник НИИ СИ АН СССР Слинько А. М.

Олимпиада, как всегда, проходила в два тура (по 3 задачи в каждом, на решение которых отводилось 4,5 часа в каждом туре). Решение каждой задачи оценивалось в 7 баллов.

Таблица 1

	Количество баллов	Сумма	Медаль
Малинникова Е.	7 7 7 7 7 7	42	Золотая
Стояновский А.	5 7 7 7 7 7	40	Золотая
Перлин А.	5 7 7 7 7 7	40	Золотая
Абрамов Г.	4 7 1 7 7 1	27	Серебряная
Соловьев И.	3 3 2 7 7 3	25	Серебряная
Барановский В.	2 7 2 0 5 3	19	Бронзовая

Итоги выступления нашей команды приведены в таблице 1, показывающей количество баллов, полученных за решение каждой задачи, общую сумму баллов каждого участника и полученную им награду.

Несмотря на то, что по своему регламенту Международная олимпиада является индивидуальным соревнованием, однако неофициально подводятся и итоги командных выступлений. В таблице 2 приведены результаты десяти лучших команд этого года.

Таблица 2

КИТАЙ	СССР	США	РУМЫНИЯ	ФРАНЦИЯ	ВЕНГРИЯ	ГДР	ЧСФР	БОЛГАРИЯ	ВЕЛИКОБРИТАНИЯ
42	42	39	36	42	34	33	33	38	40
42	40	35	34	36	33	30	30	29	39
41	40	33	32	34	29	27	26	23	19
36	27	32	29	28	24	25	24	23	18
36	25	23	22	15	22	22	24	23	13
33	19	12	18	13	20	21	16	16	12
230	193	174	171	168	162	158	153	152	141

Золотой медалью были награждены школьники, набравшие в сумме 34—42 балла, серебряной медалью — 23—33 балла, бронзовой — 16—22 балла. Отметим особо успех команды Люксембурга, которая состояла только из двух участников, завоевавших серебряную и бронзовую медали.

Олимпиада давно стала настоящим международным праздником юных математиков, программа которого включает в себя не только научные соревнования, но и знакомство с культурными достопримечательностями страны проведения олимпиады, ее культурой, историей.

Следующие Международные математические олимпиады пройдут в 1991 году в Швеции, а в 1992 году — в СССР. Пользуясь случаем, обращаемся к отдельным читателям и организациям с просьбой направлять свои предложения по различным аспектам проведения XXXIII Международной математической олимпиады по адресу: 119899, Москва, Ленинские горы, МГУ, ректорат, комн. 906, Вавилову В. В.

Поздравляем наших ребят с успешным выступлением на олимпиаде.

А теперь приводим условия задач (в скобках указана страна, предложившая задачу).

Задачи

1 (Индия). Хорды AB и CD пересекаются в точке E внутри данной окружности. Пусть M — внутренняя точка отрезка BE. Касательная в точке E к окружности, проходящей через точки D, E и M, пересекает прямые BC и AC в точках F и G соответственно. Пусть $AM/AB=t$. Найдите EG/EF как функцию от t.

2 (ЧСФР). На окружности дано множество E из $(2n-1)$ различных точек ($n\geqslant 3$), из которых k точек покрашены в черный цвет, а все остальные — в белый. Раскраска точек называется *хорошей*, если существуют две черные точки, строго между которыми на одной из дуг окружности содержится ровно n точек из множества E. Найдите наименьшее значение k, для которого каждая раскраска точек множества E является хорошей.

3 (Румыния). Найдите все целые числа $n>1$ такие, что $\dfrac{2^n+1}{n^2}$ является целым числом.

4 (Турция). Пусть Q^+ — множество всех положительных рациональных чисел. Приведите пример функции $f: Q^+\to Q^+$ такой, что

$$f(xf(y))=\frac{f(x)}{y}$$

для всех $x, y\in Q^+$.

5 (ФРГ). Дано натуральное число $n_0>1$. Игроки A и B выбирают по очереди натуральные числа n_1, n_2, ... по следующему индуктивному правилу. Игрок A, зная число n_{2k}, может выбрать любое число n_{2k+1} такое, что

$$n_{2k}\leqslant n_{2k+1}\leqslant n_{2k}^2.$$

Затем игрок B выбирает любое число n_{2k+2} такое, что n_{2k+1}/n_{2k+2} является положительной натуральной степенью простого числа. Игрок A побеждает тогда, когда выберет число 1990, а B — когда выберет 1.

Найдите все значения n_0, для которых

а) A имеет выигрышную стратегию;

б) B имеет выигрышную стратегию;

в) ни A, ни B не имеют выигрышных стратегий.

6 (Нидерланды). Докажите, что существует выпуклый многоугольник с 1990 сторонами такой, что

а) все его углы равны;

б) длины сторон многоугольника равны числам 1^2, 2^2, ..., 1989^2, 1990^2 в некотором порядке.

XXI Международная физическая олимпиада

Кандидат физико-математических наук
С. КРОТОВ,
А. ЗИЛЬБЕРМАН

В этом году Международная физическая олимпиада (МФО) школьников проходила с 5 по 13 июля в Нидерландах — в небольшом городе Гронингене (хорошо известном любителям шахмат). Олимпиада собрала школьников из 32 стран — каждый год число стран-участниц понемногу увеличивается.

Наша команда, как обычно, включала пять человек — все они окончили школу в этом году. Это

Василий Иванов (г. Тула, с. ш. № 73),

Вадим Кузьменко (г. Ивано-Франковск, с. ш. № 1),

Диар Чокин (г. Алма-Ата, РФМШ),

Сергей Шинкевич (г. Березники, с. ш. № 3),

Михаил Энтин (г. Тула, с. ш. № 73).

Кроме них в летних сборах принимали участие еще трое — Вадим Шеянов из г. Ленинграда, Ивар Мартин из г. Таллинна и Николай Заркевич из г. Канева. Окончательный отбор в команду был проведен по результатам двух олимпиад на сборах, приближенных, по возможности, к стилю МФО. Нужно сказать, что этот отбор проводить очень нелегко — все участники сборов люди серьезные, неоднократно побеждавшие на всевозможных олимпиадах — от районных до Всесоюзных. В общем, очень жаль, что в команду можно включить только пять человек, но таковы правила.

Церемония открытия олимпиады, которая проходила 6 июля, была очень торжественной и хорошо гармонировала с атмосферой старинного зала известного в Европе университета. В тот же день состоялось заседание жюри, где были рассмотрены и утверждены условия задач теоретического тура, после чего руководители команд переводили и печатали тексты заданий для участников. Вот эти задачи.

Теоретический тур

Задача 1. Дифракция рентгеновских лучей на кристалле. Мы хотим изучить дифракцию рентгеновских лучей на прямоугольной кристаллической решетке. С этой целью исследуем дифракцию плоской монохроматической волны, падающей перпендикулярно на двумерную решетку, которая представляет собой систему взаимно перпендикулярных щелей, отстоящих друг от друга на расстояниях d_1 и d_2 соответственно. Общее число щелей одного направления N_1, другого N_2. Дифракционная картина наблюдается на экране, который располагается параллельно решетке на расстоянии L от нее ($L \gg N_1 d_1, N_2 d_2$).

а) Вычислите положение и ширину главных максимумов на экране. (Шириной максимума называется расстояние между ближайшими минимумами с обеих сторон максимума.)

Рассмотрим теперь тонкую пластину кубического кристалла с постоянной решетки a и размерами $N_0 a \times N_0 a \times N_1 a$, причем N_1 гораздо меньше, чем N_0. Кристалл размещается под малым углом θ к направлению падения рентгеновского излучения вдоль оси Z (рис. 1). Дифракционная картина наблюдается на экране, который находится на большом расстоянии L от кристалла.

б) Вычислите положение и ширину максимумов как функцию угла θ (θ мало). В чем проявляется тот факт, что $N_1 \ll N_0$?

Дифракционная картина также может быть объяснена, исходя из теории Брэгга. При этом предполагается, что рентгеновское излучение отражается от атомных плоскостей решетки. Интерференцией этих отраженных пучков и создается дифракционная картина.

в) Докажите, что это отражение (называемое отражением Брэгга) дает такие же соотношения для максимумов, как и в части б).

В так называемом порошковом методе пучок рентгеновских лучей рассеивается на очень

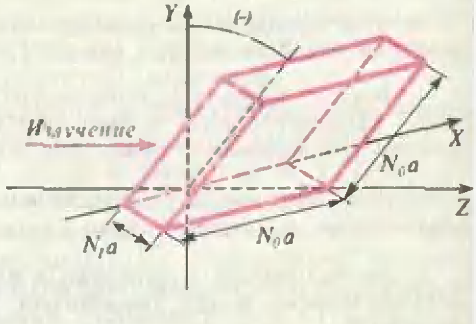


Рис. 1.

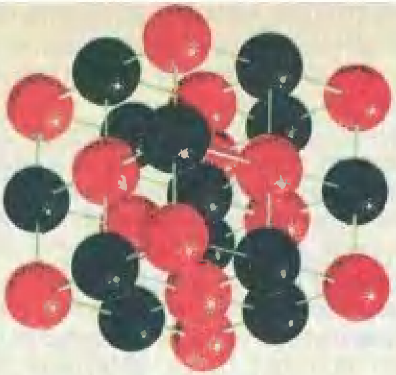


Рис. 2.

большом числе маленьких кристалликов, образующих порошок. (Конечно, размеры отдельного кристаллика больше, чем постоянная решетки *a*.) Рассеяние рентгеновского излучения с длиной волны 0,15 нм на порошке калийной соли KCl (имеющей кубическую решетку; см. рис. 2) дает на фотопластинке, расположенной на расстоянии $L=0{,}10$ м, систему концентрических темных колец (рис. 3). Радиус наименьшего кольца равен 0,053 м. Ионы калия и хлора имеют практически одинаковые размеры и могут рассматриваться как одинаковые рассеивающие центры.

г) Вычислите расстояние между соседними ионами K в кристалле.

Задача 2. Электрические эксперименты в магнитосфере Земли. В мае 1991 года космический корабль «Атлантис» будет выведен на орбиту вокруг Земли. Известно, что орбита круговая и расположена в плоскости экватора. В некоторый момент космический корабль выпустит сателлит *S* на направляющей изолированной штанге длиной *L*. Штанга жесткая, с пренебрежимо малой массой. Трение будем считать малым.

Пусть α — угол, который составляет штанга с *линией «Атлантис» — центр Земли* (рис. 4). *S* также расположен в плоскости экватора. Можно считать, что масса сателлита гораздо меньше массы Атлантиса, а *L* гораздо меньше радиуса орбиты.

а$_1$) Рассчитайте, при каком (каких) α система сохраняет свое положение относительно Земли. Другими словами, при каких значениях α этот угол не изменяется со временем.

а$_2$) Проанализируйте устойчивость системы в этом положении для каждого равновесного состояния.

Пусть в некоторый момент времени штанга получает небольшое *отклонение* от *равновесного* положения, оставаясь в плоскости экватора. При этом в системе возникают колебания.

б) Выразите период этих колебаний через время одного оборота вокруг Земли.

На рисунке 4 магнитное поле Земли (*B*) перпендикулярно плоскости рисунка и направлено на читателя. Вследствие орбитального движения штанги между ее концами появляется разность потенциалов. Окружающая среда (магнитосфера) представляет собой разреженный ионизированный газ с очень высокой электрической проводимостью. С помощью контактных пластин в *A* и *S* штанга электрически соединяется с ионизированным газом, в результате чего по ней начинает течь ток.

в$_1$) Определите направление этого тока.

Известно, что период обращения вокруг Земли $T=5{,}4\cdot10^3$ с, длина штанги $L=2{,}0\cdot10^4$ м, магнитная индукция поля Земли на высоте сателлита $B=5{,}0\cdot10^{-5}$ Тл, масса Атлантиса $M=100$ т.

Затем к штанге подключается источник тока (расположенный внутри корабля), поддерживающий ток, текущий в направлении, противоположном первоначальному.

в$_2$) Как долго нужно поддерживать этот ток для того, чтобы высота орбиты изменилась на 10 метров? Считать угол α равным нулю. Влиянием токов, протекающих в проводящей магнитосфере, пренебречь. Увеличится или уменьшится высота спутника?

Задача 3. Вращающаяся нейтронная звезда. Миллисекундный пульсар — источник излучения во Вселенной, который излучает очень короткие импульсы с периодом от одной до нескольких миллисекунд. Испускаемое излучение находится в радиодиапазоне, и хорошим *радиоприемником можно принимать отдельные* импульсы и очень точно определять этот период.

Радиоимпульсы возникают от поверхности особого типа звезды — так называемой нейтронной звезды. Это очень плотная звезда, которая быстро вращается вокруг своей оси. Мас-

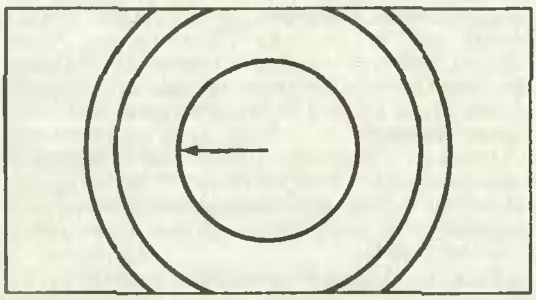


Рис. 3.

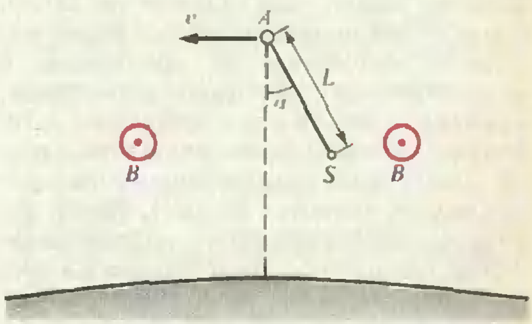


Рис. 4.

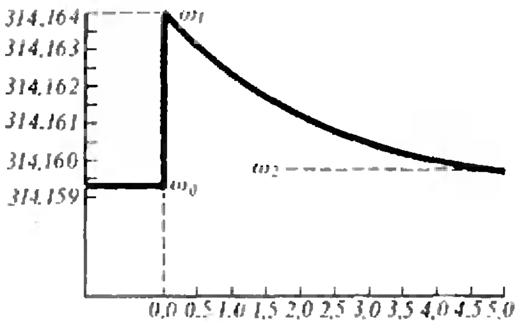


Рис. 5.

са ее приблизительно той же величины, что и масса Солнца, но радиус ее составляет только несколько десятков километров. Из-за быстрого вращения звезда немножко расплющивается. Предположим, что r_p — расстояние от центра до поверхности звезды у полюса вращения и r_e — расстояние от центра до поверхности у экватора. Тогда мы определим коэффициент сплющивания следующим образом: $\varepsilon = (r_e - r_p)/r_p$.

Рассмотрите нейтронную звезду с массой $2{,}0 \cdot 10^{30}$ кг, средним радиусом $1{,}0 \cdot 10^4$ м и периодом вращения $2{,}0 \cdot 10^{-2}$ с.

а) Вычислите коэффициент сплющивания, если гравитационная постоянная равна $6{,}67 \times 10^{-11}$ Н · м^2 · кг$^{-2}$.

Из-за потерь энергии вращение звезды постепенно замедляется, поэтому сплющивание уменьшается. Однако звезда имеет твердую кору, которая плавает на жидкой сердцевине (ядре). Время от времени в коре происходят сотрясения, что приводит к скачкообразному изменению ее формы. Обнаружено, что во время и после такого сотрясения угловая скорость коры изменяется. Это изображено на рисунке 5, где по горизонтальной оси отложено время (в сутках), а по вертикальной оси — угловая скорость коры (в радианах в секунду).

б) Вычислите радиус жидкого ядра на основе данных рисунка 5. Считайте, что плотности коры и ядра одинаковые. Изменением формы ядра можно пренебречь.

Нужно отметить, что уровень трудности теоретических задач был несколько выше, чем обычно на МФО. Это поставило наших ребят в более выгодное положение по сравнению с большинством участников (исключая, правда, те команды, с которыми в течение длительного времени проводится целенаправленная подготовка — например, команду Китая). Наши ребята плохо справились с первой задачей (к сожалению, этот раздел на сборах был обсужден недостаточно подробно, а в школьную программу он не входит), зато прекрасно решили вторую и третью задачи. В общем, перед экспериментальным туром у каждого из наших участников были неплохие шансы на успех.

Однако именно с экспериментом в последние годы у нашей команды не все ладилось (участники из ФРГ или Великобритании, например, были подготовлены лучше). Причин тут много, главная из них — у наших ребят мало возможностей поработать на современном лабораторном оборудовании у себя в школах, а за короткое время на сборах нелегко все успеть. В этом году мы постарались уделить больше внимания именно этой части работы. По этой ли причине или потому, что нашим ребятам просто повезло, но на экспериментальном туре они выступили превосходно. Лучший результат на эксперименте получил В. Кузьменко (кстати, у него был лучший результат в экспериментальном туре и на Всесоюзной олимпиаде), результат команды также оказался первым среди всех.

Расскажем немного о задачах экспериментального тура — официальный текст вряд ли может вам пригодиться, ведь он рассчитан на выданные участникам приборы и оборудование.

Задач было две, и каждая была рассчитана на 2,5 часа. Первая задача посвящена определению эффективности преобразования электрической мощности в световой поток кремниевым светодиодом. Светодиод (излучающий красный свет) подключался к источнику через переменный резистор, при помощи которого можно было регулировать ток. В закрытой коробочке с маленьким отверстием был помещен фотоприемник — фотодиод. Напряжение и ток светодиода и ток фотодиода можно было измерять при помощи точного цифрового тестера. Предполагалось, что участники смогут отградуировать фотоприемник при помощи закона «обратных квадратов» (изменяя расстояние между излучателем и приемником можно было убедиться, что ток фотодиода пропорционален его освещенности), а также непосредственно измерить распределение излучаемой энергии по углу. Длина волны излучаемого света, а также вероятность выбивания электрона проводимости при поглощении фотона были даны в условии задачи. В общем, задача хорошая — нужно придумать способ градуировки, провести множество измерений, сообразить, как употребить для расчетов измеренную зависимость силы света от угла, да и провести сами расчеты. И все это — за два с половиной часа.

Если вы захотите поставить эту работу в школьной лаборатории, можно использовать светодиод АЛ307, фотодиод — любой, какой удастся достать (его нужно включить последовательно с батарейкой на 4,5—9 вольт и измерять «обратный» ток). Коэффициент полезного действия в этом случае получается порядка 1—10 %.

Во второй задаче нужно было измерить отношение магнитных полей (точнее — индукций магнитных полей) в зазорах двух магнитов одинаковой формы. В качестве измерительных приборов были предложены алюминиевый диск на оси, нитка, два груза разных масс, секундомер и линейка. Метод измерений был ясен — намотать нитку на ось, подвесить к ней груз и дать диску раскручиваться. При этом магнит нужно расположить так, чтобы край диска попал в зазор — тогда в диске возникнут вихревые токи (токи Фуко) и появится тормозящий момент. Участник должен был догадаться (и обязательно доказать), что тормозящий момент пропорционален квадрату магнитной индукции. Комбинируя разные грузы и измеряя скорость установившегося движения, можно было найти отношение магнитных полей. Эксперимент этот требовал большой аккуратности — при этом результат получался весьма точным. Наличие двух грузов позволяло учесть силу трения в оси. Этот способ оценки отношения магнитных полей довольно прост, и такую установку вполне можно повторить.

После долгого и довольно эмоционального обсуждения результатов проверки (особенно по экспериментальным задачам) членами жюри определились окончательные оценки.

Дипломами I степени были награждены участники из Великобритании (лучший результат в олимпиаде) и ГДР (второй результат), затем наш В. Кузьменко (третий результат), участник из Польши и двое из Китая. С. Шинкевич, В. Иванов и Д. Чокин награждены дипломами II степени (всего их 12), а М. Энтин — дипломом III степени (всего их 25).

По уставу МФО соревнования — личные, командных итогов не подводится, однако все их, конечно, считают. Наша команда в этом году оказалась впереди всех. Лишь на 0,35 балла отстала команда Китая. Третьими стали ребята из ФРГ, четвертыми — из ГДР. Довольно неудачно выступила команда Румынии — обычно она выглядела намного сильнее. Во многих командах оказалось по одному или по два сильных участника, а остальные выступили слабо (это относится, например, к команде Великобритании).

Олимпиада была превосходно организована, хозяева олимпиады позаботились буквально обо всем (включая небольшую — по их меркам — сумму на карманные расходы и бесплатный проезд по городу для участников). Великолепная культурная программа состояла из концертов и интереснейших экскурсий, а также торжественных приемов. К сожалению, из-за недостатка места мы не можем здесь рассказать о них подробнее. На закрытии олимпиады участники имели возможность блеснуть своими побочными талантами — мы имеем в виду пение и танцы. У некоторых это получилось очень неплохо, особенно запомнилась одна команда (не наша, к сожалению), которая с большим энтузиазмом, размахивая флагом, исполнила национальный гимн — впрочем, может быть, и не гимн, но все равно было очень здорово.

Следующая — XXII МФО — будет проходить в будущем году на Кубе. Подготовка нашей команды уже началась, осталось пожелать нашим ребятам успехов во всем.

Математические переменки
(Ответы. Вопросы см. на с. 45)

1. Второстепенный вопрос.
2. «С большим аппетитом!» (С — большим, а — петитом.)
3. «Тридцать первое»,— ответил мальчик, имея в виду число месяца.
4. 50 (написаны последовательные достоинства монет в копейках).
5. 100 (а это — рубли).
6. Острие.
7. Например, «Меня зовут Наташа».
8. Это означает, что теорема Пифагора верна.
9. Пифагор никогда не носил штанов. Он носил короткий плащ философа трибон.
10. Я не знаю ответа на этот вопрос.

JULY 15-21
THE SECOND INTERNATIONAL OLYMPIAD IN INFORMATICS
MINSK-90

II Международная олимпиада по информатике

Кандидат технических наук
В. КИРЮХИН

Быстро пролетел год, и вот уже столица Белоруссии, г. Минск, гостеприимно распахнула двери участникам II Международной олимпиады по информатике (МОИ). Здесь с 15 по 21 июля 1990 года школьники различных стран мира собрались, чтобы помериться силами в области информатики.

Интерес к этой олимпиаде был проявлен необычайный. Если в прошлом году в МОИ принимали участие 13 стран, то в этом году их уже было 24: Аргентина, Болгария, Великобритания, Венгрия, Вьетнам, ГДР, Греция, Испания, Италия, Китай, КНДР, Куба, Кувейт, Марокко, Монголия, Нидерланды, Норвегия, Польша, Румыния, СССР, ФРГ, ЧСФР, Швеция и Югославия. Кроме того, присутствовали наблюдатели из Таиланда. В каждую команду входило не более 4 участников, хотя не все команды выступали полным составом.

На правах страны-организатора Советский Союз был представлен двумя командами: сборной командой СССР и командой Белоруссии. В команду СССР по итогам выступлений на последней Всесоюзной олимпиаде по информатике и по результатам участия в зимних и летних сборах были включены: *Рейн Варблане*, выпускник с. ш. № 1 п. Ныо Тартуского р-на; *Георгий Датуашвили*, выпускник с. ш. № 25 г. Тбилиси; *Юрий Зайцев*, выпускник с. ш. № 57 г. Киева; *Дмитрий Козлов*, выпускник с. ш. № 566 г. Ленинграда.

В команду Белоруссии вошли: *Сергей Линев*, выпускник с. ш. № 35 г. Минска; *Александр Наумов*, учащийся 10-го класса с. ш. № 36 г. Минска; *Олег Таборовец*, выпускник с. ш. № 1 г. Пинска; *Валерий Хаменя*, учащийся 10-го класса с. ш. № 1 г. Гродно.

Руководителем сборной СССР был автор этой статьи, руководителем команды Белоруссии — доцент БГУ В. М. Котов.

Организаторы олимпиады, особенно Министерство народного образования БССР, сделали все возможное, чтобы это событие осталось надолго в памяти всех участников. Запоминающимся было открытие олимпиады. На нем выступили первый заместитель председателя Государственного комитета СССР по народному образованию В. Д. Шадриков, председатель международного жюри олимпиады академик АН СССР Н. Н. Красовский, академик АН БССР В. А. Лабунов. Открыл II Международную олимпиаду по информатике министр народного образования БССР М. И. Демчук.

Олимпиада по информатике отличается от других олимпиад необычайной сложностью ее проведения. Подбор задач для соревнований и их проверка, обеспечение участников персональными компьютерами, поддержание средств вычислительной техники в работоспособном состоянии, а с учетом того, что участники могли пользоваться своим программным обеспечением, защита от вирусов — все это потребовало напряженной работы всех служб олимпиады. По сравнению с I МОИ объем этой работы удвоился, так как нынешняя олимпиада проводилась в два тура.

Перед каждым туром международное жюри осуществляло выбор одной задачи из пакета задач, подготовленного научным комитетом олимпиады.

В результате голосования, в котором участвовали только члены жюри — руководители команд, были выбраны следующие задачи.

Задача I тура

Задана таблица размером 4×4, в каждой клетке которой, кроме двух, содержится одно из чисел от 1 до 14 (все числа разные). Оставшиеся две клетки — пустые. (Пример — таблица 1.)

Таблица 1

7	3	5	14
	4	9	13
1		2	10
11	8	12	6

Таблица 2

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14		

Правила перемещения. Число из любой клетки может быть перемещено в любую незанятую соседнюю клетку по горизонтали или по вертикали. Клетка, в которой ранее размещалось число, становится пустой.

Цель. Необходимо с помощью указанного правила выполнить по шагам преобразование произвольной исходной таблицы в конечную таблицу 2.

Задание. Написать программу, которая

1) осуществляет ввод с клавиатуры исходной таблицы и вывод ее на экран (пустые клетки могут быть закодированы нулями);

2) выполняет преобразование введенной таблицы в таблицу 2;

3) на каждом шаге выдает на экран слева матрицу до хода, справа — матрицу после хода и указывает номер хода (1, 2, 3 и т. д.) так, что в конце работы программы будет показано полное число сделанных ходов;

4) минимизирует число ходов, требуемых для решения задачи.

Задача II тура

В картинной галерее каждый сторож работает в течение некоторого непрерывного отрезка времени. *Расписанием стражи* называется множество пар [$T1(i)$, $T2(i)$] — моментов начала и конца дежурства i-го сторожа из интервала [0; EndTime].

Для заданного расписания стражи требуется

а) проверить, в любой ли момент в галерее находится не менее двух сторожей.

Если условие а) не выполняется, то:

б) перечислить все интервалы времени с недостаточной охраной (менее 2-х сторожей);

в) добавить наименьшее число сторожей с заданной, одинаковой для всех длительностью дежурства, чтобы получить правильное расписание (удовлетворяющее условию а));

г) проверить, можно ли обойтись без добавления новых сторожей, если разрешается сдвигать время дежурства каждого сторожа с сохранением длительности его дежурства;

д) при положительном ответе на пункт г) составить расписание с наименьшим числом сдвигов.

Входные данные (все моменты времени задаются в целых минутах):

EndTime — момент окончания стражи (момент начала — 0);

N — число сторожей.

$T1(i)$, $T2(i)$, $i=1$, ..., N — моменты начала и окончания дежурства i-го сторожа.

Length — длительность дежурства каждого дополнительного сторожа.

Выходные данные:

1) ответ на пункт а) в форме да/нет;

2) при ответе «нет» на пункт а) — список пар (k, l) — начал и концов всех малоохраняемых интервалов с указанием числа сторожей в каждом (0 или 1);

3) число дополнительных сторожей и моменты начала и окончания дежурства каждого дополнительного сторожа;

4) ответ на пункт г) в форме да/нет; если «да», то номера сторожей, смена которых сдвигается, и значения сдвигов;

5) ответ на пункт д) — наименьшее число сторожей, смена которых сдвигается, их номера и значения сдвигов.

Примечание. Программа должна допускать независимое тестирование пунктов в), г), д).

Проведение II МОИ в два тура, с одной стороны, позволило избавить участников от возможных случайностей, а с другой — потребовало бóльших усилий для достижения поставленных целей. Кроме того, задачи были составлены так, чтобы каждый школьник выполнил хотя бы один или два пункта задания, а самые сильные участники смогли продемонстрировать все, на что они способны.

Решение задачи каждого тура оценивалось исходя из 100 баллов. В основу проверки были положены тесты, которые по мнению научного комитета и координационной комиссии олимпиады обеспечивали в значительной степени полноту проверки программ участников.

Наибольшие трудности у всех вызвала задача первого тура. Международное жюри выбрало ее из шести задач, предложенных научным комитетом олимпиады, скорее из соображений простоты и понятности формулировки условия, так как в отсутствие авторского решения очень трудно было оценить конкретный объем работы, требуемый для получения работоспособной программы. А этот объ-

ем работы оказался достаточно большим. У ребят, отличившихся в этом туре, листинг программы на Паскале составлял 7—10 страниц. По результатам первого тура наши участники Д. Козлов и Г. Датуашвили заняли соответственно 4 и 5 места. В целом оценки за решение первой задачи были невысокие. Лишь около 20 % участников набрали 35 баллов и выше.

Задача второго тура оказалась более доступной для участников, но вызвала много споров у членов международного жюри как при ответах на вопросы участников в процессе ее решения, так и при оценке результатов. Отрадным является тот факт, что среди трех победителей этого тура оказался и представитель сборной СССР Д. Козлов, получивший максимальное количество баллов — 95 (пять премиальных баллов жюри победителям не присудило).

По результатам официального личного зачета участникам II МОИ было вручено 8 дипломов первой степени, 10 дипломов второй степени и 12 дипломов третьей степени. Советские школьники получили: Г. Датуашвили и Д. Козлов (сборная СССР) — дипломы I степени, О. Таборовец (команда БССР) — диплом II степени, Ю. Зайцев (сборная СССР) и С. Линев (команда БССР) — дипломы III степени. Р. Варбланe, четвертому участнику сборной СССР, не хватило всего лишь одного балла, чтобы получить диплом III степени.

Международные олимпиады — индивидуальные соревнования, тем не менее неофициально подводятся итоги выступления команд. В этом году результаты пяти лучших команд таковы: Болгария — 427 баллов, Китай — 423 балла, СССР — 420 баллов, ФРГ — 331 балл, Венгрия — 307 баллов.

Команда БССР набрала 234 балла.

Программа олимпиады была очень насыщенной. Напряжение у участников не спадало вплоть до подведения итогов. И тем не менее, II МОИ вылилась в прекрасный праздник. Красочно организованное закрытие олимпиады состоялось в городском Дворце пионеров. И никто не чувствовал себя там проигравшим, так как всех объединяла любовь к информатике и стремление к общению со сверстниками из других стран.

Много теплых слов было сказано на закрытии МОИ как участниками, так и организаторами и гостями олимпиады, в частности официальным представителем ЮНЕСКО Э. Джекобсоном. Подвела итоги олимпиады и объявила победителей первый заместитель министра народного образования БССР Л. К. Сухнат.

Было очень много призов. Помимо прекрасных картин, которые получили победители олимпиады, вручались оригинальные призы победителям отдельных туров, приз за лучший результат среди девушек, призы самым юным участнице и участнику и другие. Приз лучшему белорусскому школьнику (учрежденный Белорусским филиалом Международного компьютерного клуба — ежемесячную стипендию в 200 рублей) получил О. Таборовец. В заключение церемонии закрытия II МОИ представитель Греции пригласил все страны принять участие в следующей международной олимпиаде по информатике, которая состоится в сентябре 1991 года в Афинах.

Советские школьники сделали существенный шаг вперед по сравнению с предыдущей олимпиадой. Конечно, «дома и стены помогают», однако нельзя не заметить, что олимпиадное движение по информатике в нашей стране набирает силу. Поздравляем советских участников олимпиады и их учителей с успешным выступлением, а будущим олимпийцам желаем успехов на следующих олимпиадах.

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся средних школ, расположенных на территории РСФСР, в 9, 10 и 11 классы на 1991/92 учебный год.

Цель школы — помочь учащимся, интересующимся физикой и математикой, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам. При приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности, рабочих поселках и небольших городах, где такая помощь особенно необходима.

Обучение в школе бесплатное.

Кроме отдельных учащихся в ЗФТШ принимаются физико-технические кружки и факультативы, которые могут быть организованы в любой общеобразовательной школе двумя преподавателями — физики и математики.

Руководители кружка или факультатива набирают и зачисляют в них учащихся (не менее 8—10 человек), успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Группа принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии, имена, отчества ее руководителей и поименный список учащихся (с указанием класса в 1991/92 учебном году и итоговых оценок за вступительное задание по физике и математике). Все эти материалы и конверт для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом на имя одного из руководителей следует выслать по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, ЗФТШ, с указанием «Кружок» или «Факультатив» *до 25 мая 1991 года.* (Тетради с работами учащихся в ЗФТШ не высылаются.) Работа руководителей заочных физико-технических кружков и факультативов может оплачиваться школой по представлению ЗФТШ при МФТИ как факультативные занятия.

Учащиеся ЗФТШ, руководители физико-технических кружков и факультативов будут получать задания по физике и матемвтике в соответствии с программой ЗФТШ (6—7 заданий по каждому предмету в течение учебного года), а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по соответствующей теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Задания ЗФТШ составляют преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ. Эти задания рассчитаны на любознательных, желающих учиться школьников, которые хотят выработать навыки систематической и продуктивной самостоятельной работы. Работы учащихся-заочников проверяют преподаватели, аспиранты и студенты МФТИ, ЛГУ и КрГУ (часто — выпускники ЗФТШ). Работу членов физико-технического кружка и факультатива оценивают их руководители.

С учащимися Москвы проводятся занятия по физике и математике два раза в неделю по программе ЗФТШ в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ), набор в которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам собеседования по физике и математике. Справки по телефону 408-51-45.

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу сделайте на русском языке и аккуратно перепишите в одну школьную тетрадь. Порядок задач сохраните тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. На лицевую сторону обложки наклейте лист бумаги, заполненный четко, желательно печатными буквами, по образцу:

1. Область (край или АССР)	Ростовская обл.
2. Фамилия, имя, отчество	Рудаков Геннадий Всеволодович
3. Класс, в котором Вы учитесь	восьмой
4. Номер, адрес и телефон школы (обычная, спецшкола, с каким уклоном)	№ 10, ул. Фрунзе, 7, г. Таганрог, тел.: 6-45-80 (класс с математическим уклоном)
5. Фамилия, имя, отчество Вашего преподавателя по физике	Николаева Ольга Романовна
по математике	Дмитриев Игорь Семенович
6. Место работы и должность родителей отец	металлургический завод, инженер
мать	ателье № 8, швея
7. Подробный домашний адрес	347930, г. Таганрог Ростовской обл., ул. Зеленая, д. 72, кв. 23, тел.: 6-50-25
8. Ваши любимые учебные предметы и увлечения	
9. Цель поступления в ЗФТШ при МФТИ	

Внизу под заполненной анкетой начертите таблицу для оценок за вступительное задание:

№ п/п													
Ф.													
М.													

Для получения ответа на вступительное задание обязательно вложите в театрадь конверт с написанным на нем вашим адресом.

Срок отправления решения — *не позднее 1 марта 1991 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1991 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (обязательно и по физике, и по математике) присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининградской, Кировской, Костромской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской, Пермской, Тверской, Ярославской областей, Карельской, Удмуртской, Коми АССР высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Кемеровской, Камчатской, Магаданской, Новосибирской, Омской, Сахалинской, Томской, Тюменской, Читинской областей, Алтайского, Красноярского, Приморского, Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР высылают работы по адресу: 660062, г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79, Госуниверситет, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Для учащихся Украины работает Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Желающим поступить следует обратиться по адресу: 252680, г. Киев, пр. Вернадского, д. 36, Институт металлофизики, Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Телефон: 444-95-24.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике.

В задании по физике задачи 1—6 предназначены для учащихся восьмых классов, 2—8 — для девятых классов, 7—13 — для десятых классов. В задании по математике задачи 1—6 — для учащихся восьмых классов, 3—9 — для девятых классов, 6—12 — для десятых классов. (Номера классов указаны для текущего, 1990/91 учебного года.)

Вступительное задание

Физика

1. Путь, состоящий из двух участков, тело проходит со средней скоростью 60 км/ч, при этом длины участков и скорости тела на них относятся соответственно как 1:2. С какой средней скоростью тело пройдет весь путь, если скорость на одном участке увеличить, а на другом уменьшить в два раза?

2. При испытаниях двигатель в течение первых 20 секунд развил половину проектной мощности, а в последние 10 секунд — полную мощность в 5,52 МВт. Сколько было израсходовано топлива с теплотворной способностью 46 МДж/кг при коэффициенте полезного действия 12 %?

3. В термосе имеется некоторое количество воды при температуре 24 °С. На ее поверхность высыпают 10 г «сухого льда» в размельченном виде при начальной температуре —79,2 °С. При каком количестве воды она охладится до 4 °С? «Сухой лед» — это твердая углекислота, которая при температуре —79,2 °С возгоняется, т. е. переходит непосредственно в газообразное состояние. Удельную теплоту возгонки «сухого льда» принять равной 340 кДж/кг; удельная теплоемкость углекислого газа равна 660 Дж/(кг · °С). Теплоемкостью стенок термоса пренебречь.

4. В калориметр теплоемкостью 1254 Дж/°С бросили 30 г мокрого снега, т. е. смеси снега с водой. Сколько было там самого снега, если температура в калориметре понизилась от 24 °С до 16 °С?

5. На горизонтальном столе находятся два одинаковых стакана, соединенных внизу тонкой резиновой трубкой. Сечение каждого стакана 18,2 см^2, высота 20 см. Стаканы заполняются до половины жидкостью плотностью 1,63 г/см^3. Затем в один стакан кладут диск из льда массой 62,3 г, диаметр которого практически совпадает с внутренним диаметром стакана. На какой высоте установятся уровни жидкости в стаканах? Как изменятся уровни в стаканах после таяния льда? Считать, что вода и жидкость в стаканах не смешиваются и не растворяются друг в друге.

6. Участок цепи включает резистор сопротивлением $R=1$ Ом, который соединен последовательно с параллельным соединением двух резисторов сопротивлениями R и $2R$ соответственно. Сопротивление одного из параллельно соединенных резисторов возросло в два раза, а сопротивление другого резистора упало в два раза. Как следует изменить напряжение на участке цепи, чтобы выделяемая в нем мощность не изменилась?

7. Электрический нагреватель сделан из двух последовательно соединенных резисторов сопротивлениями 1 Ом и 6 Ом. К концам резистора с бо́льшим сопротивлением подключают еще одно такое же звено из последовательно включенных резисторов (1 Ом и 6 Ом). Какими

будут силы токов в резисторах сопротивлением 6 Ом в цепи с двумя звеньями? Напряжение в цепи 110 В.

8. С какого расстояния человек двухметрового роста увидит носки своей обуви в маленьком плоском зеркале, установленном на горизонтальном полу под углом 30° к вертикали? Рекомендуется дать решение этой задачи, по крайней мере, двумя способами: а) экспериментально; б) графически. Опишите подробно и способы, и результаты решения.

9. Три пункта расположены на плоской местности на одной прямой, причем один из них — посередине. Из этих пунктов отправились вездеходы, которые могли двигаться в любом направлении с постоянной скоростью, и встретились одновременно в некотором месте. В каком отношении находились их скорости? Скорости вездеходов, вышедших из крайних пунктов, относились как 3:4 и в течение всего движения оставались взаимно перпендикулярными. Найдите скорости вездеходов, если расстояние между крайними пунктами 120 км, а время в пути вездеходов 45 мин.

10. Некоторый летательный объект (НЛО), разогнанный до своей максимальной скорости, влетает в плотную среду, сила сопротивления которой пропорциональна скорости тела. Путь торможения оказался равным 102 м. Каким будет путь торможения другого НЛО, топливо которого обладает теплотворной способностью в 2 раза большей, а КПД двигателя на 28 % больше, чем первого? Массы самих НЛО и топлива одинаковы.

11. В двух сосудах находится по одному молю идеального одноатомного газа. Начальные объемы одинаковы, начальные давления различаются в три раза. С ростом объема давление в одном сосуде линейно увеличивается, а в другом линейно уменьшается. Во сколько раз отличаются работы, совершаемые газами, и количества теплоты, получаемые ими в этих процессах, если объем каждого сосуда увеличился в три раза?

12. Во сколько раз изменится подъемная сила воздушного шара, если его из области над тропическим океаном переместить в область над пустыней Сахара? Считать, что температура воздуха в обоих случаях 35 °С, а шар наполнен гелием и его объем не меняется.

13. Воздушный конденсатор, заряженный до напряжения 120 В, подключается к незаряженному конденсатору таких же геометрических размеров, но заполненному непроводящей жидкостью. Относительная диэлектрическая проницаемость жидкости пропорциональна напряжению на конденсаторе. При каком коэффициенте пропорциональности этой зависимости напряжение на соединенных конденсаторах станет равным 40 В?

Математика

1. Из города N решения вступительного задания ЗФТШ прислали n школьников. Первую задачу по математике решили не все, но доля решивших превышает 85 %. Найдите наименьшее возможное значение n.

2. В прямоугольном треугольнике с катетами a и b из вершины прямого угла проведена высота. Докажите, что ее длина не превосходит $\sqrt{\frac{ab}{2}}$.

3. Докажите, что число $19^{91}-91^{19}$ делится на 3.

4. Корни уравнения $x^2+px+q=0$, у которого $p^2-2q=5$, являются натуральными числами. Найдите эти корни.

5. Можно ли так расположить шесть точек на плоскости, чтобы любые три из них были вершинами равнобедренного треугольника?

6. На сторонах прямоугольного треугольника, вне его, построены квадраты. Известно, что шесть вершин квадратов, не принадлежащих треугольнику, лежат на окружности радиусом 1. Найдите стороны треугольника.

7. Решите неравенство $|x^3-x|-|x|\geqslant x$.

8. Какое наибольшее значение может принимать параметр a, если известно, что $|ax^2-ax+1|\leqslant 1$ при $0\leqslant x\leqslant 1$?

9. В треугольнике со сторонами a, b и c проведены биссектрисы, точки пересечения которых с противолежащими сторонами являются вершинами второго треугольника. Докажите, что отношение площадей треугольников равно $\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

10. Решите уравнение $\sin x+\sin^2 x+\cos^3 x=0$.

11. Можно ли так расположить семь точек в пространстве, чтобы любые три из них были вершинами равнобедренного треугольника?

12. Пункты A и B расположены на берегу озера, имеющего форму круга радиусом 6 км, и диаметрально противоположны. Турист вышел из A и сначала двигался вдоль берега со скоростью 6 км/ч, а затем сел в лодку и поплыл к B со скоростью 3 км/ч. Какое наименьшее и какое наибольшее время может занять такой маршрут?

Игры и головоломки

Кубики Мак-Магона и таблица Конвея

В начале нашего века английский майор Александр Мак-Магон, преподаватель математики Королевской военной академии, придумал несколько задач с разноцветными кубиками. До него наборы кубиков как игра использовались, пожалуй, только для сооружения зыбких построек да для складывания картинок из кусочков, наклеенных на их грани. (Кстати, и «кубики с картинками» имеют не столь уж долгую историю — они были изобретены в Германии в середине прошлого века.) С тех пор число игр с кубиками неизмеримо возросло, почетное место среди них занял и непревзойденный кубик Рубика... Однако первым был все-таки Мак-Магон и его друг полковник Джоселин, доказавший разрешимость его основной задачи. Но обо всем по порядку.

Представьте, что вам нужно раскрасить кубик в 6 цветов, каждую грань — в свой цвет. Для нижней грани можно выбрать любой из цветов, для передней — любой из 5 оставшихся, для правой — любой из 4 оставшихся и т. д. Получается, что всего имеется $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=6!=720$ способов раскраски. Но если вы заготовите 720 таких кубиков, то обнаружите, что многие из них неразличимы, как только возьмете их в руки,— ведь на кубике не написано, какая грань у него нижняя, а какая — передняя. Неразличимые раскраски получаются друг из друга вращениями куба, переводящими его в себя. Имеется 24 таких вращения: 9 поворотов на углы $\pm 90^\circ$ и 180° вокруг осей, проходящих через центры противоположных граней, 8 поворотов на $\pm 120^\circ$ вокруг диагоналей куба, 6 осевых симметрий относительно прямых, соединяющих середины противоположных ребер, и тождественное преобразование. Поэтому для каждой из 720 учтенных выше раскрасок имеется еще 23 ей эквивалентных, а число существенно различных раскрасок равно $720:24=30$. Именно столько кубиков в наборе Мак-Магона. Все они показаны в таблице, приведенной на последней странице обложки. Там же объясняется, как с помощью этой таблицы, которую придумал американский математик Джон Конвей, быстро и красиво решить основную задачу Мак-Магона: выложив из набора один кубик — образец, найти среди остальных 29 такие 8, из которых можно сложить увеличенную вдвое копию образца, соблюдая «правило домино»: маленькие кубики должны соприкасаться гранями одинакового цвета.

Если мы посмотрим на кубик-образец вдоль диагонали, то увидим три грани, сходящиеся в одном из ее концов. Обозначим их цвета цифрами 1, 2, 3, а цвета противоположных граней, соответственно, 4, 5, 6. В искомую восьмерку надо включить хотя бы один кубик с трехгранным углом, раскрашенным теми же цветами 1, 2, 3, причем в том же порядке. Всего таких кубиков вместе с образцом шесть (это число перестановок цифр 4, 5, 6). Однако нетрудно понять, что «правило домино» оставляет из этих шести только два варианта цветов, соответственно противоположных 1, 2, 3: 5, 6, 4 и 6, 4, 5. Из соображений симметрии ясно, что любой из этих двух кубиков можно поместить в угол (1, 2, 3) большого куба, тогда второй кубик нужно будет поместить в противоположный угол (4, 5, 6). (Интересно, что в таблице Конвея эти два кубика и образец всегда расположены на местах вида Xy, Yx и Zx). Аналогично находятся еще три пары кубиков для трех других диагоналей. Таким образом, восьмерка кубиков, решающих задачу Мак-Магона для заданного образца, определена однозначно, хотя сложить большой куб из нее можно двумя способами — чтобы получить один способ из другого, надо перенести каждый кубик в противоположный угол. В таблице Конвея кубики, отвечающие образцу Xy, расположены в строке Y и столбце x, кубик Yx из них надо исключить. Можно проверить, что четыре кубика одного ряда при сборке большого куба займут места в концах диагонали его нижнего основания и скрещивающейся с ней диагонали верхнего основания.

Задача Мак-Магона имеет продолжение: составив копию по данному образцу, надо среди оставшихся кубиков найти новый образец и 8 кубиков, образующих его копию с соблюдением «правила домино». С помощью таблицы эта задача решается почти автоматически — искомые кубики определены однозначно и являются зеркальными отражениями кубиков первого набора.

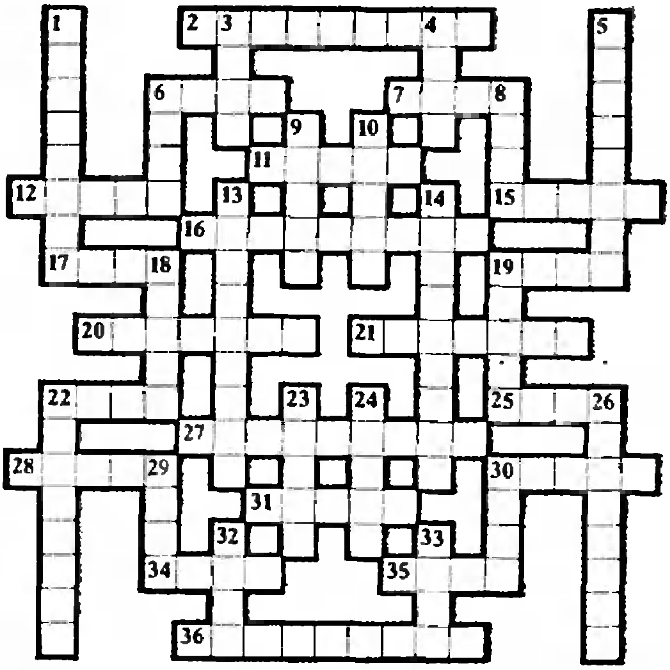
Возможно, таблица Конвея поможет вам решить и следующие задачи.

1. Соблюдая «правило домино», сложить куб $2\times 2\times 2$, каждая грань которого была бы раскрашена одним из а) пяти, б) четырех, в) трех цветов (в каждом случае должны быть использованы все заданные цвета). Все ли эти задачи разрешимы?

2. Откажемся от «правила домино». Сколькими способами тогда можно сложить куб $2\times 2\times 2$ по заданному образцу? Сколько существует наборов по 8 кубиков, позволяющих это сделать? Покажите, что сложить куб-копию из такого набора можно 2, 4, 8 или 16 способами. Можно ли сложить куб-копию $3\times 3\times 3$?

В. Дубровский

Кроссворд



По горизонтали:

2. Советский физик, совместно с *Л. И. Мандельштамом* поставивший опыт по доказательству электронной проводимости металлов. **6.** Полупроводниковый прибор с $p-n$-переходом. **7.** Российский физик, экспериментально установивший закон теплового действия тока. **11.** Примесный атом в полупроводнике. **12.** Российский физик и электротехник, создатель гальванопластики. **15.** Отрицательный электрод. **16.** Верхние слои атмосферы со значительным содержанием ионов и электронов. **17.** Знак заряда атомного ядра. **19.** Совокупность электрических цепей. **20.** Бытовой источник постоянного тока. **21.** Прибор для регулирования силы тока. **22.** Центральная область биполярного транзистора. **25.** Мельчайшая частица химического элемента. **27.** Образование ионов и электронов из нейтральных молекул. **28.** Направленное движение носителей заряда под действием внешних полей. **30.** Самый большой шаровой проводник, имеющийся в распоряжении электриков. **31.** Французский физик, основатель электростатики. **34.** След заряженной частицы. **35.** «Прибор», помогающий определить направление силы Лоренца. **36.** Электроизмерительный прибор.

По вертикали:

1. Электронно-лучевой прибор. **3.** Положительный электрод. **4.** Излучение, необходимое для работы фоторезистора. **5.** Тонкие листы из сплава свинца и олова, применяющиеся для изготовления конденсаторов. **6.** Английский химик и физик; установил зависимость сопротивления проводника от его длины и поперечного сечения. **8.** Металл, используемый в элементе Вольта. **9.** Переносчик электромагнитного взаимодействия между заряженными частицами. **10.** Советский физик, один из первых исследователей свойств полупроводников. **13.** Одна из областей биполярного транзистора. **14.** Вещество, обладающее свободными зарядами. **18.** Эквипотенциальная поверхность поля точечного заряда. **19.** Управляющий электрод в электронной лампе. **22.** Простейший прибор, помогающий определить направление вектора магнитной индукции. **23.** Знак заряда электрона. **24.** Устойчивая взаимосвязь материальных явлений. **26.** Американский физик; с высокой точностью измерил заряд электрона. **29.** Действительное событие. **30.** Область значений энергии, которой могут обладать электроны в твердом теле. **32.** Время года, благоприятное для работы гелиостанций. **33.** Резистор, присоединяемый параллельно амперметру для изменения цены деления шкалы.

М. Красин

Вниманию наших читателей

Магазин «Академкнига» г. Киева высылает наложенным платежом книги издательства «Наука»:

Балк М. Б., Болтянский В. Г. *Геометрия масс.* (Библиотечка «Квант»).— 1987.— 30 к.

Бутиков Е. И., Быков А. А., Кондратьев А. С. *Физика в примерах и задачах.* Учебное пособие. Изд. 3-е, перераб. и доп.— 1989.— 1 р.

Гашков С. Б., Олехник С. Н., Сергеев И. Н. *Примени математику.*— 1989.— 55 к.

Гурский И. П. *Элементарная физика с примерами решения задач.* Учебное руководство.— 1989.— 1 р. 10 к.

Фейнман Р. *Характер физических законов.* Пер. с англ. Изд. 2-е, испр. (Библиотечка «Квант»).— 1987.— 25 к.

Чернин А. Д. *Физика времени.* (Библиотечка «Квант»).— 1987.— 40 к.

Заказы отправляйте по адресу: 252208, Киев, пр. «Правды», д. 80-а, магазин «Книга — почтой» «Академкнига».

Конкурс программных разработок «Борланд-Контест»

Программисты - профессионалы и любители программирования! Ассоциация Групп Пользователей Борланд в СССР (БорАГ) приглашает вас принять участие в первом в нашей стране конкурсе на лучшую разработку программных продуктов, выполненную средствами Борланд.

Конкурс проходит под девизом «Интеллект + программирование = успех» и имеет своей целью популяризацию разработок фирмы, поиск новых идей и подходов в программировании с использованием программного обеспечения Борланд, стимулирование программистов, пользующихся продукцией Борланд.

Конкурс проводится в трех категориях программных средств:

а) системы и средства для работы с базами данных;

б) служебные программы: утилиты, антивирусные средства, драйверы устройств, программы для распознавания, кодирования, программы для автоматизации работы в MS DOS и OS/2 и пр.;

в) обучающие и демонстрационные программы, компьютерные игры.

Итоги конкурса подводятся раздельно в трех возрастных категориях: «Борланд-Юниор» (школьники и студенты техникумов до 18 лет); «Борланд-Кадет» (студенты высших учебных заведений и молодежь до 23 лет); «Борланд-Про» (профессионалы без ограничений по возрасту).

Жюри конкурса составлено из представителей крупнейших отечественных и зарубежных фирм по производству программного обеспечения. Тестирование программ будет проводиться в Тестовой лаборатории Международного компьютерного клуба. Сохранение авторских прав разработчика гарантируется.

Итоги конкурса будут подведены в апреле 1991 года и объявлены на Втором международном компьютерном форуме (июнь 1991 г.) представителями фирмы Борланд.

Для участников конкурса в каждой категории программных средств и для каждой возрастной категории спонсорами конкурса учреждены специальные призы (фирменные программно-технические средства, товары народного потребления). Спонсорами конкурса являются Международный компьютерный клуб, корпорация Борланд, СП «Интерквадро», крупнейшие фирмы по производству вычислительной техники.

Главный приз и звание Лауреата конкурса присуждается представителями фирмы Борланд. Авторы программы-лауреата в каждой возрастной категории (для коллективов — 1 представитель), приглашаются для знакомства с работой фирмы в ее штаб-квартиру (Калифорния, США). Призеры конкурса награждаются почетными дипломами фирмы Борланд.

В качестве поощрительных призов вручаются комплекты поставки любого программного средства Борланд по выбору и коробка дискет. Кроме того, все программы-призеры будут аннотированы с указанием авторов в обзорно-рекламных разделах ведущих отечественных и зарубежных журналов по информатике. Фирмы-спонсоры конкурса «Борланд-Контест» имеют право самостоятельно присуждать специальные призы по различным категориям программных продуктов.

Авторы лучших разработок, вошедшие в число призеров, могут быть приглашены на работу в ведущие совместные предприятия СССР в области компьютеризации и программирования.

Условия участия в конкурсе «Борланд-Контест»

Любой участник может предложить свою программу в более «старшую» категорию, но не наоборот. Любой участник может предложить на конкурс не более одного продукта в каждой категории.

Программные средства представляются на конкурс на дискетах 5.25″ или 3.5″ со стандартной разметкой MS DOS. Распаковка файлов, обработанных программами уплотнения, осуществляться не будет. Работы представляются на конкурс под девизами. Первая дискета должна содержать файл README с девизом программного продукта, его аннотацией и указаниями по запуску и использованию (не более 2500 байт). После завершения конкурса дискеты могут быть получены авторами в Ассоциации.

В почтовую бандероль с дискетами должна быть вложена сопроводительная открытка (не конверт!), распечатка текста файла README на русском или английском языках, а также запечатанный конверт, на котором пишется девиз работы, а внутрь вкладывается лист бумаги с координатами автора (адрес, фамилия, имя и отчество полностью, рабочий и домашний телефон).

В сопроводительной открытке и в файле README указывается: девиз представленного продукта; категория программных средств; возраст участника (число полных лет на 31 декабря 1990 г.); возрастная категория, в которой предлагается рассматривать представленный продукт; аннотация программного продукта (не более 256 символов); дата отправки.

На бандероли должна стоять заметная надпись: «Борланд-Контест».

Работы на конкурс надо отправлять до 31 января 1991 года по адресу: Москва, 125130, 2-й Новоподмосковный пер., д. 4, «Борланд-Контест». Телефоны рабочей группы «Борланд-Контест»: (095) 921-09-02, 150-92-01.

Ассоциация Групп Пользователей Борланд в СССР

Ответы, указания, решения

[redacted]нт» для младших школьников

1. Из условия ясно, что Аня получила самую низкую отметку из троих, Боря бо́льшую, чем Аня, а Вера — бо́льшую, чем Боря. Так как все получили не меньше тройки, то Аня получила 3, Боря — 4 и Вера — 5. Но оценка Ани — 3 — по условию на 10 меньше суммы остальных отметок, поэтому сумма остальных отметок равняется 13, а общая сумма — 16. Аня, Боря и Вера в сумме получили 12. Остается еще 4, а так как каждый отвечающий получил не меньше тройки, то отвечал еще только один ученик, получивший 4.

2. $2\cdot 1=7-5=6:3=9-7=4:2$.

3. Пусть сторона квадрата равняется a, и пусть количество музыкантов в шеренге после перестроения уменьшилось на x. Тогда $a^2=(a-x)(a+5)$. Отсюда $a=\dfrac{5x}{5-x}$. При целых положительных значениях x это выражение будет целым и положительным только при $x=4$; значит, $a=20$. Количество музыкантов равняется $20^2=400$.

4. Не может. Число, являющееся полным квадратом и записывающееся цифрами 0 и 6, должно оканчиваться на четное число нулей и после их отбрасывания оставаться квадратом. Оставшееся же число оканчивается либо на 06, либо на 66. А такие числа — четные, но не делящиеся на 4, и поэтому не могут быть квадратами.

5. Из условия следует, что произведение двух упомянутых нечетных чисел меньше квадрата их полусуммы. Отсюда можно сделать вывод, что эти числа различны (иначе произведение равнялось бы квадрату полусуммы). Наименьшее значение произведения двух различных нечетных двузначных чисел равно, очевидно, $11\cdot 13=143$; следующее по величине — это $11\cdot 15=165$.

Пирамид выше 165 м не существует, следовательно, те два нечетных числа, о которых говорится в условии,— это 11 и 13. Квадрат их полусуммы равен 144. Поэтому высота пирамиды больше 143 м, но меньше 144 м.

В Египте имеется всего две пирамиды выше 143 м. Это пирамида Хеопса (146,6 м) и пирамида Хефрена (143,5 м). Из них лишь последняя ниже 144 м.

Ответ: фараона звали Хефрен.

[redacted]ейдоскоп «Кванта»

[redacted]росы и задачи

1. Сопротивление тела птицы много больше сопротивления участка провода между ее ногами, поэтому сила тока в теле птицы мала и безвредна.

2. Сопротивление нити накала в холодном состоянии меньше, и, следовательно, пусковой ток в лампе больше рабочего.

3. В цепи, показанной на рис. 1, *а*, ток идет в направлении *ARB*, на рис. 1, *б* — в направлении *BRA*, если ЭДС $\mathscr{E}_1$ мала.

4. Да, если вольтметр электростатический. Вольтметры, через которые идет ток, показывают напряжение на самом себе, но если сопротивление такого вольтметра много больше внутреннего сопротивления источника, то показание вольтметра практически равно ЭДС источника.

5. Станет уменьшаться.

6. Приборы не испортятся, так как амперметр будет включен последовательно с вольтметром, имеющим большое сопротивление.

7. Да, параллельно какому-нибудь сопротивлению.

8. Будет равна нулю.

9. После внесения проводника в поле в нем начинается перемещение зарядов, пока в проводнике не образуется поле, направленное противоположно первоначальному. Складываясь, эти поля уничтожают друг друга.

10. Будет, так как потенциалы проводников *AB* и *CD* станут различными. Направления возникающих токов указаны на рис. 2.

11. На палец, если его сунуть в патрон, придется практически все напряжение цепи, так как сопротивление пальца много больше сопротивления гирлянды.

12. Ярче всего должен светиться участок *AC* — его сопротивление меньше, чем участков *ABC* и *ADC*. Через участок *BD* ток не пойдет вообще.

13. Точки *A* и *C*, как и точки *B* и *D*, имеют соответственно одинаковые потенциалы. Поэтому эквивалентная начальной схема будет выглядеть, как показано на рис. 3. Полное сопротивление равно $R/3$.

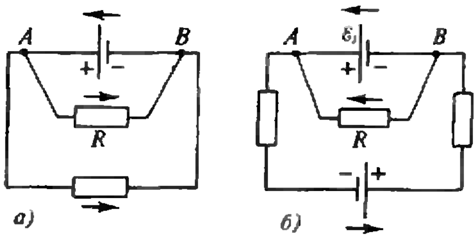


Рис. 1.

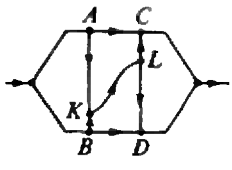


Рис. 2.

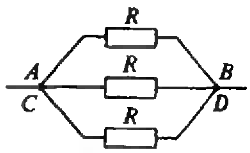


Рис. 3.

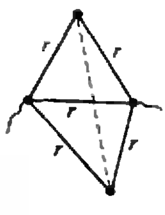
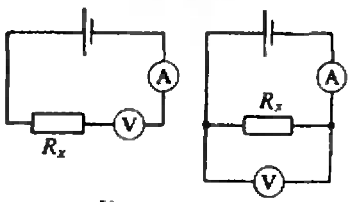


Рис. 4.



$R_V=\dfrac{U}{I_1}$ а)

$R_x=\dfrac{U_2}{I_2-\dfrac{U_2}{R_V}}$ б)

Рис. 5.

14. На $\sqrt{n}$ частей.

15. Кольцо в цепи — параллельное соединение двух проводников. Сопротивление при движении ползунка уменьшается, поэтому падает и напряжение на зажимах источника.

16. $r/2$. См. рис. 4.

Микроопыт

Необходимо сделать два измерения. См. рис. 5, *а* и *б*.

[redacted]ссворд

[redacted] горизонтали: 2. Папалекси. 6. Диод. 7. Ленц. 11. Донор. 12. Якоби. 15. Катод. 16. Ионосфера. 17. Плюс. 19. Сеть. 20. Элемент. 21. Реостат. 22. База. 25. Атом. 27. Ионизация. 28. Дрейф. 30. Земля. 31. Кулон. 34. Трек. 35. Рука. 36. Вольтметр.

По вертикали: 1. Кинескоп. 3. Анод. 4. Свет. 5. Станиоль. 6. Дэви. 8. Цинк. 9. Фотон. 10. Иоффе. 13. Коллектор. 14. Проводник. 18. Сфера. 19. Сетка. 22. Буравчик. 23. Минус. 24. Закон. 26. Милликен. 29. Факт. 30. Зона. 32. Лето. 33. Шунт.

[redacted]I Международная
[redacted]матическая олимпиада

1. $\frac{EG}{EF}=\frac{t}{1-t}$. Сначала нужно обосновать чертеж (рис. 6), т. е. показать (а это просто), что точка E лежит между точками G и F. Соединим точку D с точками A, M и B. Так как $\angle CEF=\angle DEG=\angle EMD$ и $\angle ECF=\angle MAD$, то треугольники CEF и AMD подобны; поэтому $CE\cdot MD=AM\cdot EF$. С другой стороны, так как $\angle ECG=\angle MBD$ и $\angle CGE=\angle CEF-\angle GCE=$ $=\angle EMD-\angle MBD=\angle BDM$, то треугольники CGE и BDM также подобны; следовательно, $EG\cdot MB=CE\cdot MD$. Из полученных двух пропорций получаем $EG\cdot MB=AM\cdot EF$, т. е.

$$\frac{EG}{EF}=\frac{AM}{MB}=\frac{t\cdot AB}{(1-t)\cdot AB}=\frac{t}{1-t}.$$

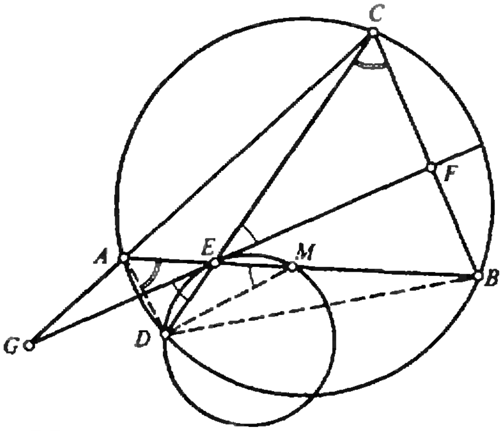


Рис. 6.

Замечание. Если точка M лежит между точками A и E (как показано на рис. 7), то можно изменить роль точек A и B, F и G, полагая $t'=1-t$. Тогда аналогично имеем

$$\frac{EF}{EG}=\frac{MB}{AM}=\frac{t'}{1-t'}=\frac{1-t}{t},$$

и, тем самым,

$$\frac{EG}{EF}=\frac{t}{1-t}.$$

2. Решение этой задачи — см. задачу М1259 из «Задачника «Кванта» — будет опубликовано позже.

3. Решение этой задачи — см. задачу М1260 из «Задачника «Кванта» — будет опубликовано позже.

4. Пример можно построить следующим образом. Пусть $p_1, p_2, \ldots$ — все простые числа, занумерованные в порядке возрастания. Тогда любое число $x\in Q^+$ однозначно представляется в виде $x=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_k^{n_k}$, где $n_1, \ldots, n_k$ — целые числа, $n_k>0$. Для этого x положим

$$f(x)=f(p_1)^{n_1}f(p_2)^{n_2}\ldots f(p_k)^{n_k}, \qquad (1)$$

где $f(p_j)$ определяется равенством

$$f(p_j)=\begin{cases} p_{j+1}, & \text{если } j \text{ нечетно,}\\ 1/p_{j-1}, & \text{если } j \text{ четно.}\end{cases} \qquad (2)$$

Легко проверить, что так определенная функция при всех x, $t\in Q^+$, удовлетворяет условиям

а) $f(xt)=f(x)f(t)$ (в силу (1)),

б) $f(f(x))=1/x$ (в силу (2)).

Отсюда сразу следует, что f является решением заданного функционального уравнения. Отметим, что из уравнения можно вывести условия а) и б) (подставьте поочередно $x=1$ и $y=1$ и покажите, что если $f(y_1)=$ $=f(y_2)$, то $y_1=y_2$), однако эти условия не определяют функцию f однозначно.

5. Ответ: а) $n_0\geqslant 8$; б) $2\leqslant n_0\leqslant 5$; в) $n_0=6$, $n_0=7$. Обозначим через W множество всех натуральных чисел n_0, начиная с которых игрок A имеет выигрышную стратегию.

Лемма. Пусть $\{m, m+1, \ldots, 1990\}\subset W$, $s\leqslant$ $\leqslant 1990$ и $s/p^r\geqslant m$, где p^r — наибольшая степень простого числа p, делящая s. Тогда все натуральные числа n_0 такие, что

$$\sqrt{s}\leqslant n_0<m,$$

также содержатся в W.

Доказательство. Если $\sqrt{s}\leqslant n_0<m$, то игрок A может выбрать число $n_1=s$. Тогда игрок B, по условию, должен выбрать одно из чисел n_2 таких, что

$$m\leqslant\frac{s}{p^r}\leqslant n_2<s\leqslant 1990.$$

Поэтому $n_2\in W$, и, конечно, игрок A может выиграть. Лемма доказана.

Так как $45^2=2025>1990$, то все n_0 такие, что $45\leqslant n_0\leqslant 1990$, очевидно, принадлежат W.

Числа $m=45$ и $s=420=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$ удовлетво-

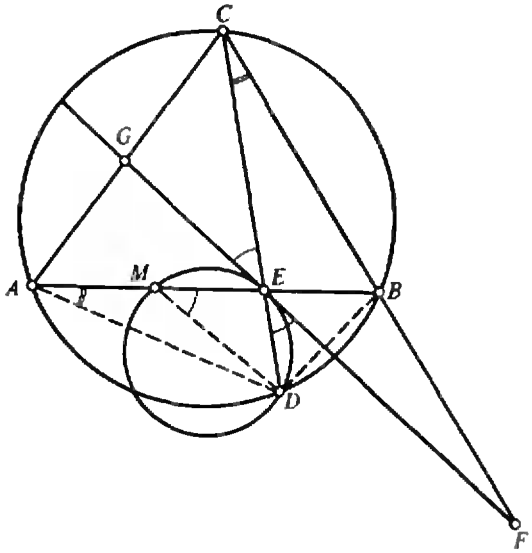


Рис. 7.

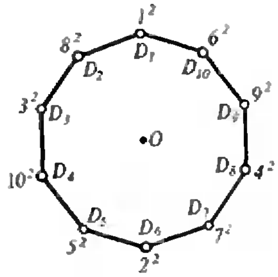


Рис. 8.

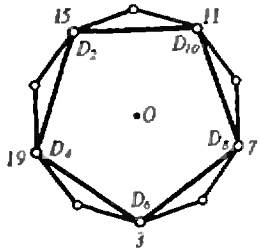


Рис. 9.

ряют предположению леммы, так как $\sqrt{420} < 21 < 45$, и, следовательно, $\{21, 22, \ldots, 44\} \subset W$.

Используя снова лемму для $m = 21$ и $s = 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$, видим, что $\{13, 14, \ldots, 20\} \subset W$.

Для $m = 13$ и $s = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ получаем, что $\{11, 12\} \subset W$.

Полагая $m = 11$ и $s = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, аналогично предыдущему, имеем: $\{8, 9, 10\} \subset W$. Итак,

$$\{8, 9, \ldots, 1990\} \subset W.$$

Если $n_0 > 1990$, то игрок A может подобрать натуральное число r такое, что

$$2^r \cdot 3^2 < n_0 \leqslant 2^{r+1} \cdot 3^2 < n_0^2,$$

и, тем самым, выбрать $n_1 = 2^{r+1} \cdot 3^2$. Теперь безразлично, какое число выберет игрок B, важно только, что $8 \leqslant n_2 < n_0$. После нескольких шагов игры ситуация будет такова, что $8 \leqslant n_{2k} \leqslant 1990$. А это показывает, вместе с доказанным выше, что все значения $n_0 \geqslant 8$ таковы, что игрок A имеет выигрышную стратегию.

Пусть $n_0 \leqslant 5$. Так как наименьшее произведение трех различных простых чисел равно $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 > 5^2$, то игрок A должен выбрать число вида $n_1 = p^r q^s$, где p — простое, а q — или простое число или равно 1, $p^r > q^s$ и $r, s \geqslant 1$. Тогда игрок B может выбрать

$$n_2 = q^s = \frac{n_1}{p^r} < \sqrt{n_1} \leqslant n_0.$$

После конечного числа шагов игрок B получит $n_{2k} = 1$ и выигрывает.

Для $n_0 = 6$ или $n_0 = 7$ игрок A может выбрать $n_1 = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, или $n_1 = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, и тогда игрок B выбирает $n_2 = 6$. После этого игроки A и B должны поочередно выбирать числа последовательности 30, 6, 30, 6, ..., так как в противном случае кто-то из них обязательно получит выигрышную стратегию.

6. Пусть $\bar{e}_1 = \overline{OE_1}$, $\bar{e}_2 = \overline{OE_2}$, ..., $\bar{e}_{1990} = \overline{OE_{1990}}$ — векторы, соединяющие центр O правильного 1990-угольника $E_1 \ldots E_{1990}$ с вершинами. Если мы найдем такую перестановку $a_1, a_2, \ldots, a_{1990}$ чисел $1^2, 2^2, \ldots, 1990^2$, что

$$a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + \ldots + a_{1990}\bar{e}_{1990} = \bar{0}, \qquad (*)$$

то, полагая $\overline{A_1A_2} = a_1\bar{e}_1$, $\overline{A_2A_3} = a_2\bar{e}_2$, ..., $\overline{A_{1989}A_{1990}} = a_{1989}\bar{e}_{1989}$, получим замкнутую ломаную $A_1 \ldots A_{1990}A_1$, ограничивающую многоугольник, который удовлетворяет условиям задачи (в частности, в силу (*), $\overline{A_{1990}A_1} = a_{1990}\bar{e}_{1990}$). Другими словами, нужно расставить «веса» $1^2, \ldots, 1990^2$ в вершинах правильного 1990-угольника так, чтобы выполнялось равенство (*).

Разобьем точки $E_1, \ldots, E_{1990}$ на 199 десяток — наборов вершин правильных 10-угольников. Первый из этих наборов, $E_1, E_{200}, E_{2 \cdot 199+1}, \ldots, E_{9 \cdot 199+1}$, для удобства переобозначим: $D_1 = E_1$, $D_2 = E_{200}$, ..., $D_{10} = E_{9 \cdot 199+1}$; следующие наборы получаются из него поворотами на углы $2\pi k/199$, $k = 1, 2, \ldots, 198$. Веса также разобьем на десятки: $(1^2, \ldots, 10^2)$, $(11^2, \ldots, 20^2)$, ... Расставим числа первой десятки в вершинах $D_1 \ldots D_{10}$, как показано на рисунке 8 (в противоположных вершинах D_1 и D_6 — 1^2 и 2^2, в D_3 и D_8 — 3^2 и 4^2, в D_5 и D_{10} — 5^2 и 6^2, в D_7 и D_2 — 7^2 и 8^2, в D_9 и D_4 — 9^2 и 10^2). Тогда, поскольку $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$, результирующий вектор для этого десятиугольника будет равен

$$\bar{v} = (1^2 \cdot \overline{OD_1} + 2^2 \cdot \overline{OD_6}) + \ldots + (9^2 \cdot \overline{OD_9} + 10^2 \cdot \overline{OD_4}) = 3 \cdot \overline{OD_6} + 7 \cdot \overline{OD_8} + 11 \cdot \overline{OD_{10}} + 15 \cdot \overline{OD_2} + 19 \cdot \overline{OD_4}$$

(рис. 9). Заметим, что точно такая же сумма получится, если заменить числа $1^2, \ldots, 10^2$ на $(10k+1)^2, \ldots, (10k+10)^2$. Действительно,

$$(10k+n+1)^2 - (10k+n)^2 = 20k + 2n + 1 = 20k + (n+1)^2 - n^2,$$

поэтому результирующий вектор для нового набора чисел будет отличаться от $\bar{v}$ на вектор $20k \cdot (\overline{OD_2} + \overline{OD_4} + \ldots + \overline{OD_{10}})$; но этот вектор нулевой, поскольку сумма векторов в скобках должна переходить сама в себя при повороте на угол $2\pi/5$. (Аналогичное утверждение верно для векторов, соединяющих центр правильного m-угольника с вершинами, при любом m.)

Итак, расставим числа $1^2, ..., 10^2$ в точках $D_1, ..., D_{10}$, как было указано. Затем точно так же разместим в этих точках числа второй десятки $11^2, ..., 20^2$ и повернем все это размещение на угол $2\pi/199$; мы заполним второй 10-угольник. Продолжая этот процесс, на k-м шаге разместим по той же схеме $(10k+1)^2, ..., (10k+10)^2$ в точках $D_1, ..., D_{10}$ и перенесем их на $(k+1)$-й 10-угольник поворотом на $2\pi k/199$ и т. д. Суммарный вектор $\bar{v}_k$ для k-го 10-угольника в силу этого построения будет равен вектору $\bar{v}_1=\bar{v}$, повернутому на угол $2\pi(k-1)/199$. Следовательно, общая сумма векторов $\bar{e}_i$ с «весами», расставленными по нашему правилу, будет равна $\bar{v}_1+\bar{v}_2+ ... +\bar{v}_{199}=\bar{0}$, т. е. это векторы, проведенные из центра правильного 199-угольника к его вершинам.

Международная олимпиада по информатике

Для проверки задачи I тура использовались следующие семь тестов, задающих начальные значения клеток в исходной таблице (перечислены числа в исходной таблице по строкам слева направо, тест 5 — требуемое расположение; в пустую клетку ставится ноль).

Тест 1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 33, 9, 10, 11, 12, 13, 0, 0.

Тест 2: 1, 2, 3, 4, 0, 5, 6, 0, 8, 9, 10, 0, 11, 12, 13, 14.

Тест 3: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 3, 11, 12, 14, 0, 0.

Тест 4: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 11, 13, 14, 0, 0.

Тест 5: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 0, 0.

Тест 6: 7, 3, 5, 14, 0, 4, 9, 13, 1, 0, 2, 10, 11, 8, 12, 6.

Тест 7: 14, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 1, 0, 0.

Первые три теста (дающие 5 баллов каждый) испытывали программу на наличие проверки корректности исходных данных. Правильность преобразования исходной таблицы в конечную оценивалась тестами 4—7 (дающими по 10 баллов каждый). Эффективность алгоритма оценивалась с помощью тестов 6 и 7, за успешное прохождение каждого из них начислялось $20\ N_{min}/N_{уч}$ баллов, здесь N_{min} — минимальное число шагов среди программ всех участников, $N_{уч}$ — число шагов программы данного участника. Еще 5 баллов жюри оставило в качестве премиальных.

Решение задачи II тура оценивалось с помощью следующих тестов.

Тест 1: EndTime=5; N=3; (0, 1), (3, 6), (2, 4); Length=2.

Тест 2: EndTime=5; N=3; (0, 1), (3, 5), (4, 2); Length=2.

Тест 3: EndTime=5; N=3; (0, 1), (—5, 5), (1, 2).

Тест 4: EndTime=5; N=6; (1, 4); (1, 4), (0, 1), (0, 1), (0, 1), (1, 4); Length=2.

Тест 5: EndTime=10; N=5; (1, 3), (2, 4), (3, 5), (5, 8), (7, 9); Length=3.

Тест 6: EndTime=20; N=7; (0, 5), (1, 2), (4, 5), (6, 8), (7, 9), (9, 14), (16, 17); Length=3.

Тест 7: EndTime=20; N=10; (0, 3), (2, 5), (5, 7), (6, 9), (8, 11), (10, 13), (12, 15), (14, 17), (16, 19), (18, 20); Length=4.

Тест 8: EndTime=20; N=6; (2, 3), (5, 7), (8, 9), (11, 13), (15, 17), (19, 20); Length=3.

Тест 9: EndTime=20; N=11; (2, 5), (16, 19), (4, 7), (18, 20), (10, 13), (12, 15), (8, 11), (6, 9), (14, 17), (11, 12), (8, 9); Length=3.

Тест 10: EndTime=9; N=6; (0, 5), (2, 5), (6, 9), (3, 6), (1, 3), (5, 7).

Тест 11: EndTime=59; N=20; (0, 2), (0, 2), (0, 2), (0, 4), (0, 4), (0, 4), (0, 4), (0, 4), (0, 6), (0, 6), (0, 6), (0, 6), (0, 8), (0, 8), (0, 8), (0, 8), (0, 8), (0, 8), (40, 50), (40, 50).

Тест 12: EndTime=12; N=5; (0, 8), (0, 7), (1, 4), (1, 5), (1, 4).

Тест 13: EndTime=9; N=4; (0, 8), (0, 3), (0, 5), (1, 6).

Тесты 1—3 — испытание программы на наличие проверки корректности исходных данных, они давали по 1 баллу каждый.

Правильность выполнения пунктов а)—в) проверялась с помощью тестов 4—9, каждый из них давал по 1 баллу за пункт а), 2 — за пункт б) и 3 — за пункт в).

Выполнение пунктов г) и д) оценивалось тестами 10—13. Тесты 10, 12 и 13 давали по 4 балла за пункт г) и по 5 баллов за пункт д); тест 11 давал 9 баллов за пункт г). Если некоторый пункт задания проходил все тесты, то это премировалось еще 4 баллами.

И опять 5 баллов жюри оставило в качестве премиальных.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 11)

1. Обозначим массу проволоки через x, тогда масса звена первой цепи равна $x:80$, а второй — $x:100$. Следовательно, $5=\frac{x}{80}$ —

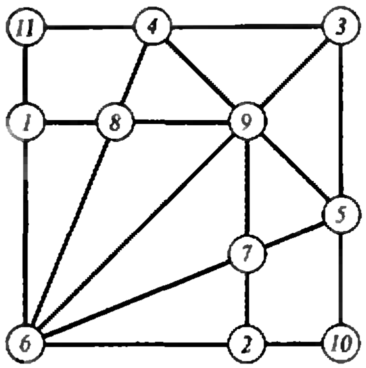


Рис. 10.

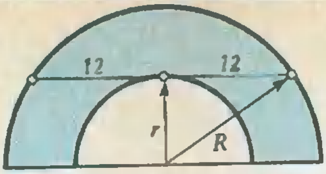


Рис. 11.

$-\dfrac{x}{100}=\dfrac{x}{400}$, откуда $x=2000$ г $=2$ кг.

2. Умножим второе выражение на 4 и затем вычтем первое. Получим $11\,(3a+c)$, т. е. величину, делящуюся на 11. Следовательно, если первая величина делилась на 11, то и вторая тоже должна делиться на 11.

3. См. рис. 10.

4. Площадь искомой фигуры равняется площади синей фигуры на рисунке 11. Эта площадь равна

$$S=\frac{1}{2}\pi R^2-\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{\pi}{2}(R^2-r^2)=$$
$$=\frac{\pi}{2}(12)^2=72\pi.$$

5. Количество вариантов покупки кота в мешке равняется $20\cdot 20=400$, а количество вариантов стоимости — 371, а именно, от 12 р. 30 коп. до 16 р. Значит, найдутся две покупки, имеющие одинаковую стоимость. Осталось заметить, что эти покупки не могут включать в себя одного и того же кота или один и тот же мешок.

Можно ли из тетраэдра сделать куб?
(см. «Квант» № 11)

1. Центральным моментом доказательства является л е м м а, по которой *произвольная треугольная пирамида равносоставлена с треугольной призмой такой же высоты и с основанием втрое меньшей площади.* Действительно, известная конструкция (рис. 12) разделяет призму на три пирамиды, из которых первая со второй и вторая с третьей имеют одинаковые основания и равные высоты. Значит, в силу нашей (неверной) посылки все эти пирамиды равносоставлены, т. е. наша призма равносоставлена с суммой трех одинаковых пирамид с таким же основанием и такой же высотой, как она сама. Основание треугольной пирамиды равносоставлено с объединением трех (пусть равных) треугольников втрое меньшей площади, а значит, опять-таки в силу нашей (неверной) посылки, треугольная пирамида тоже равносоставлена с объединением трех равных пирамид (см. рис. 12). Лемма доказана. Из нее следует, что произвольный многогранник равносоставлен с объединением призм. А призма объема a равносоставлена с брусом $1\times1\times a$: всякая призма равносоставлена с призмой с прямоугольным основанием (это следует из доказанной равносоставленности многоугольников равных площадей), выпрямление же призм производится при помощи конструкций, изображенных на рисунке 13. Заметим, что равносоставленность призмы с брусом верна независимо от посылки.

2. Набор Дена n-угольной призмы есть $(l,\varphi_1),\dots,(l,\varphi_n)$, (l_1,φ_1'), (l_1,φ_1''), $\dots$, (l_n,φ_n'), (l_n,φ_n'') (рис. 14). Но $\varphi_1+\dots+\varphi_n=\pi(n-2)$, $\varphi_1'+\varphi_1''=\pi,\dots,\varphi_n'+\varphi_n''=\pi$. Значит, наш набор Дена подобен набору $(l,\pi(n-2))$, $(l_1+\dots+l_n,\pi)$, который подобен пустому набору.

3. Это мы доказали в процессе решения упражнения 1.

4. $k\pi$ и $\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$. П е р в о е д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\cos 2\varphi=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$, из рациональности $\operatorname{tg}\varphi$ следует рациональность $\cos 2\varphi$. Теорема 4 позволяет назвать все φ, соизмеримые с π, у которых $\cos 2\varphi$ рационален $\left(\text{это } \dfrac{k\pi}{4} \text{ и } \pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2},\ k\in Z\right)$. Остается посмотреть, у каких из этих углов тангенс

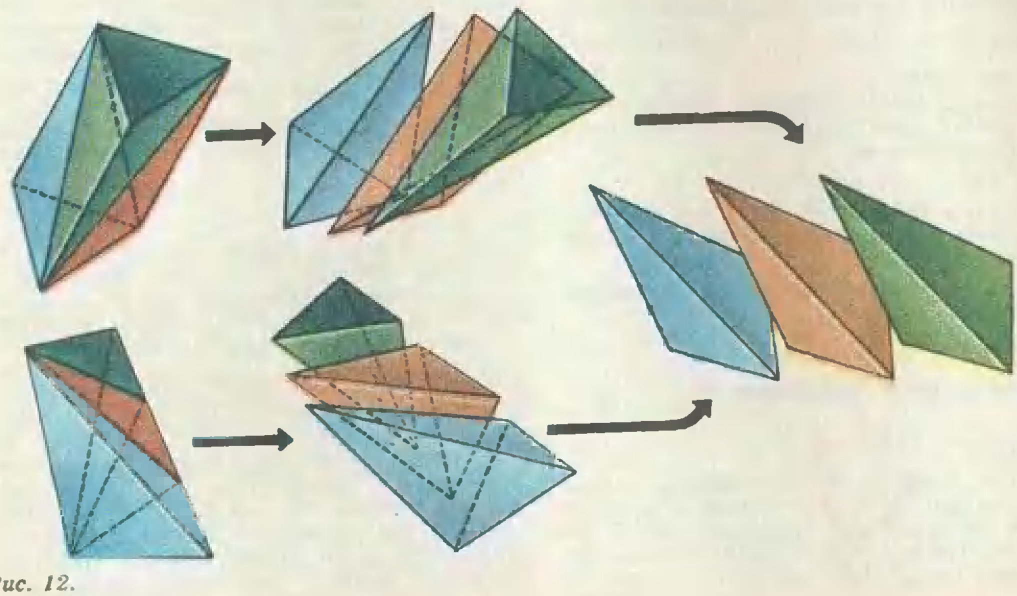


Рис. 12.

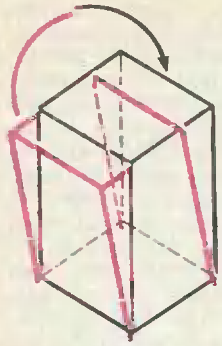


Рис. 13.

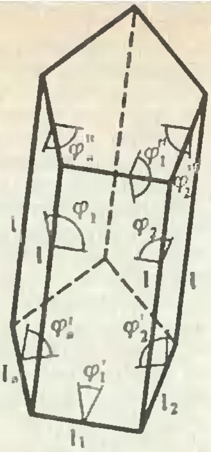


Рис. 14.

(определен и) рационален. Второе доказательство аналогично доказательству теоремы 4. Рассмотрим последовательность $\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{tg}2\varphi$, $\operatorname{tg}4\varphi$, ... Если угол φ соизмерим с π, то в этой последовательности должны быть повторяющиеся члены. Но $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{p}{q}$, то $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2pq}{q^2-p^2}$, откуда видно, что знаменатель дроби $\operatorname{tg}2\alpha$ не превосходит знаменателя q дроби $\operatorname{tg}\alpha$, только если $q=1$.

5. Если $\cos^2\varphi$ рационален или $\operatorname{tg}^2\varphi$ рационален, то $\cos 2\varphi=2\cos^2\varphi-1=\frac{1-\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$ рационален, откуда $\varphi=\frac{k\pi}{4}$ или $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$ (см. решение упражнения 4). Другими словами, $\varphi=0$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ и далее с периодом $\frac{\pi}{2}$. Как это хорошо известно, $\cos^2\varphi$ действительно рационален для всех этих углов, а $\operatorname{tg}^2\varphi$ — для всех, кроме углов $\frac{\pi}{2}+k\pi$, для которых он не определен.

6. Если аддитивная функция непрерывна в точке $\alpha\in\mathbf{R}$, то она непрерывна в любой точке $\beta\in\mathbf{R}$. Действительно,

$$f(x-\alpha+\beta)=f(x)+f(-\alpha+\beta);$$

правая часть непрерывна при $x=\alpha$, значит, и левая часть непрерывна при $x=\alpha$, т. е. при $x-\alpha+\beta=\beta$.

XXIV Всесоюзная олимпиада по математике («Квант» № 11)

9 класс

1. Воспользуйтесь тождеством $t^4-t+\frac{1}{2}=\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2$.

2. Пусть E, F и S — середины сторон AB, CD и AD, M и N — точки, в которых прямая EF пересекает диагонали AC и BD (рис. 15). Так как SF — средняя линия треугольника ACD, то $SF\parallel AC$, и поэтому $\angle CMF=\angle EFS$. Аналогично, $\angle BNE=\angle FES$. По условию, $\angle CMF=\angle BNE$, значит, $\angle EFS=\angle FES$ и $SF=SE$. Следовательно, $AC=DB$.

3. См. решение задачи М1244.

4. а) Существует, см. рис. 16.

б) Существует. «Растянем» рис. 16, увеличив все горизонтальные размеры в 5 раз, а все вертикальные — в 9 раз. Тогда прямоугольник преобразуется в квадрат, а «уголки» — в равные многоугольники: «несимметричные уголки» (рис. 17).

5. Очевидно, что треугольники, заштрихованные на рисунке 18, попарно подобны. Из подобия треугольников следует, что $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_3}{b_2}$ и $\frac{b_3}{b_2}=\frac{c_2}{c_1}$. Следовательно, $a_1b_1c_1=\frac{a_2b_3}{b_1}b_1c_1=a_2b_3c_1=a_2\frac{b_2c_2}{c_1}\cdot c_1=a_2b_2c_2$, и первое из требуемых равенств доказано. Второе равенство доказывается аналогично.

6. См. решение задачи М1243.

7. Ответ: 1989. Если x, y, z — неотрицательны, то $|x-y|\leqslant\max(x,y)$, $\max(\max(x,y),z)=\max(x,y,z)$, поэтому данное выражение не превосходит $\max(x_1,x_2,\ldots,x_{1990})=1990$. Так как четность значения данного выражения совпадает с четностью суммы $x_1+x_2+\ldots+x_{1990}=1+2+\ldots+1990=995\cdot1991$, то такое выражение не превосходит 1989. Пример постройте самостоятельно.

8. Всего имеется $1+2+\ldots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ вершин треугольников разбиения, и поэтому ломаная состоит из $\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1=\frac{n^2+3n}{2}$ звеньев. Раскрасим в черный и белый цвета треугольники разбиения так, как показано на рис. 19 (на рис. 19 $n=5$). Черных треугольников всего $1+2+\ldots+n=\frac{n^2+n}{2}$. Но каждое звено ломаной проходит по некоторой стороне черного треугольника, а разность между числом звеньев ломаной и числом черных треугольников равна $\frac{n^2+3n}{2}-\frac{n^2+n}{2}=n$. Следовательно, не менее n черных треугольников содержат по два звена ломаной, угол между которыми равен 60°.

10 класс

1. Ответ: нельзя. Рассмотрим произвольную раскраску таблицы 1990×1990, при которой симметричные относительно центра таблицы клетки окрашены в разные цвета. Запишем в черных клетках таблицы числа $+1$, в белых — числа -1. Разделим таблицу на 4 квадрата 995×995 вертикальной и горизонтальной осями симметрии (на рис. 20 квадраты обозначены A_1, A_2, A_3, A_4). Каждый из этих квадратов содержит нечетное число клеток, поэтому сумма чисел в любом из них отлична от нуля. Так как симметричные относительно центра таблицы клетки окрашены в разные цвета, то сумма чисел в квадратах A_1 и A_4, а также в квадратах A_2 и A_3, равна

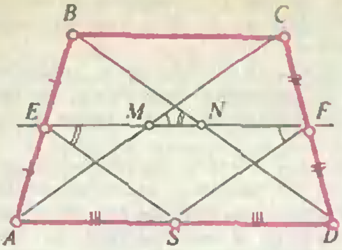


Рис. 15.

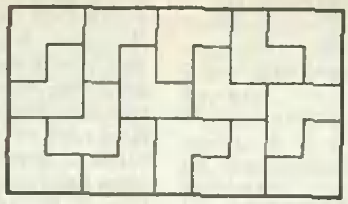


Рис. 16.

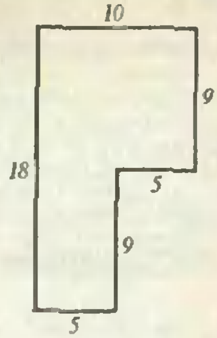


Рис. 17.

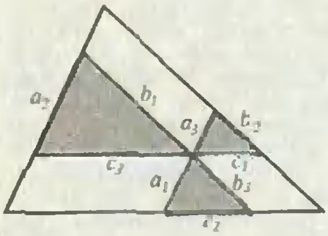


Рис. 18.

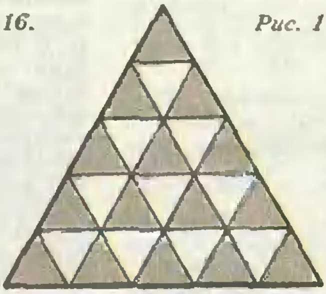


Рис. 19.

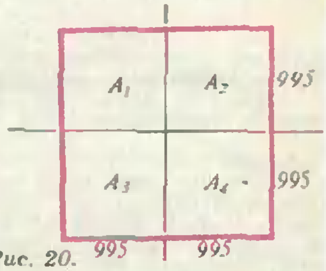


Рис. 20.

нулю. Поэтому сумма чисел в одном из квадратов A_1 или A_4, а также в одном из квадратов A_2 или A_3, положительна. Если это квадраты A_1 и A_3 или квадраты A_2 и A_4, то в одном из столбцов таблицы чисел $+1$ больше, чем чисел -1, т. е. черных клеток больше, чем белых. Если же это квадраты A_1 и A_2 или A_3 и A_4, то в одной из строк таблицы черных клеток больше, чем белых. Следовательно, раскраски, удовлетворяющей одновременно обоим условиям задачи, нет.

2. Для положительных чисел b и c справедливо неравенство $\frac{b^2}{b+c} \geqslant \frac{3b-c}{4}$, причем равенство имеет место при $b=c$. Осталось подставить в это неравенство $b=a_i$, $c=a_{i+1}$ ($i=1, 2, \ldots, n$; $a_{n+1}=a_1$) и сложить n полученных неравенств. Равенство имеет место при $a_1=a_2=\ldots=a_n=1/n$.

3. Обозначим через $(\widehat{l,l'})$ наименьший угол, на который нужно повернуть прямую l по часовой стрелке, чтобы она стала параллельной прямой l'.

Лемма. Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой. Точка D, отличная от точек A и C, тогда и только тогда лежит на окружности, описанной около треугольника ABC, когда $(\widehat{AB,BC})=(\widehat{AD,DC})$.

Доказательство леммы следует из теоремы о вписанном угле (рис. 21 *а*, *б*).

Возможны 2 случая.

1. *Окружности*, описанные около треугольников ABC и CDF, пересекаются, кроме точки C, еще и в точке K (рис. 22). Докажите, что точки B, D, E и K лежат на одной окружности, и, следовательно, K — общая точка окружностей, описанных около треугольников, указанных в условии задачи.

2. Окружности, описанные около треугольников ABC и CDF, касаются внутренним образом в точке C (рис. 23). Докажите, что точки

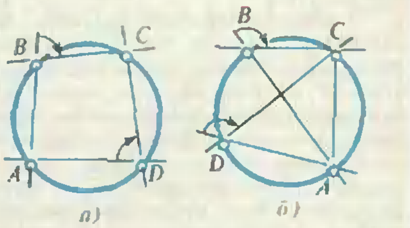


Рис. 21.

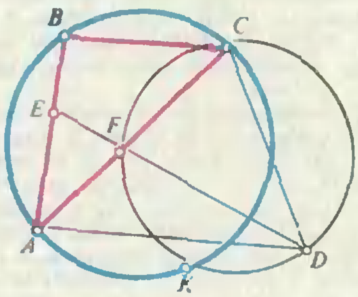


Рис. 22.

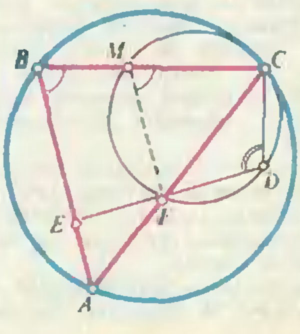


Рис. 23.

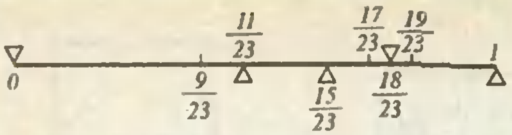


Рис. 24.

Рис. 25.

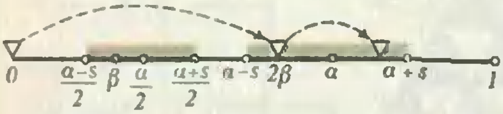


Рис. 26.

B, C, D и F лежат на одной окружности, и, следовательно, C — общая точка окружностей, описанных около треугольников из условия задачи.

4. Назовем ячейками отрезки, на которые разбивают отрезок $[0; 1]$ отмеченные точки. Легко проверить, что если отметить точки $9/23$, $17/23$ и $19/23$, то за один ход кузнечики не смогут попасть в одну ячейку (рис. 24). При любом количестве и при любом расположении отмеченных точек за два хода кузнечики смогут попасть в одну ячейку. Точнее, за два хода каждый из кузнечиков сможет попасть в ячейку наибольшей длины. Достаточно доказать это утверждение для кузнечика, находящегося в точке O. Пусть s — длина, α — левый конец ячейки наибольшей длины (если ячеек длины s несколько, то рассмотрим любую из них).

Если левый конец рассмвтриваемой ячейки расположен ближе к точке O, чем к правому концу, т. е. если $\alpha < s$ (рис. 25), то кузнечик, прыгнув через точку α, попадет в ячейку $[\alpha; \alpha+s]$ за один ход (если $\alpha=0$, т. е. кузнечик уже находится в рассматриваемой ячейке, то не потребуется ни одного прыжка). В противном случае, когда $\alpha \geqslant s$, рассмотрим отрезок $\left[\frac{\alpha-s}{2}; \frac{\alpha+s}{2}\right]$ длиной s (рис. 26). Этот отрезок содержит по крайней мере одну отмеченную точку β, так как иначе ячейка, содержащая этот отрезок, имела бы длину, большую s. Прыгнув через точку β, кузнечик попадет в точку $2\beta \in [\alpha-s; \alpha+s]$. Если эта точка не лежит в ячейке $[\alpha; \alpha+s]$, то второй прыжок, на этот раз через точку α, приведет кузнечика в ячейку $[\alpha; \alpha+s]$.

5. **О т в е т:** $x=584$. *Ясно, что x — натуральное* число, не превосходящее 1001, и что решение единственно (левая часть уравнения — строго возрастающая функция на множестве натуральных чисел).

6. См. решение задачи М1242.

7. **О т в е т:** $2k$. Если число вершин многоугольника равно n, а раскраска удовлетворяет условию задачи, то число отрезков каждого цвета не превосходит $n-1$. Это утверждение следует из леммы.

Л е м м а. Если какие-то n сторон и диагоналей выпуклого n-угольника окрашены, то существует замкнутая ломаная, все звенья которой окрашены.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем последовательно стирать вершины, из которых выходит ровно один окрашенный отрезок, причем вместе с вершиной будем стирать и выходящий из нее окрашенный отрезок. Если при этом будут появляться новые вершины указанного типа, то с ними и с выходящими из них отрезками будем поступать аналогично. Первоначально число вершин равно числу окрашенных отрезков, на каждом шаге оба эти числа уменьшаются на 1, поэтому в любой момент число нестертых вершин равно числу нестертых окрашенных отрезков. Будем продолжать процесс стирания *до тех пор, пока это возможно.* Тогда либо среди оставшихся вершин найдутся вершины, из которых выходят по крайней мере два окрашенных отрезка, либо все вершины и все окрашенные отрезки стерты. Докажите, что последнее невозможно. В итоге останется несколько вершин, из каждой из которых выходят по крайней мере два окрашенных отрезка. Возьмем любую такую вершину A_1. По окрашенному отрезку мы попадем из нее в вершину A_2, из вершины A_2 — в вершину A_3, и так далее. Самое большее через n шагов такой путь замкнется. Лемма доказана.

Всего у n-угольника $\frac{n(n-1)}{2}$ сторон и диагоналей, а отрезков каждого цвета не более $n-1$. Поэтому $\frac{n(n-1)}{2} \leqslant k(n-1)$, откуда $n \leqslant 2k$. При $n=2k$ требуемая раскраска существует. Возьмем правильный $2k$-угольник $A_1A_2 \ldots A_{2k}$ и покрасим первым цветом ломаную $A_1A_{2k}A_2A_{2k-1} \ldots A_kA_{k+1}$. *Вторым цветом* покрасим ломаную, получающуюся из нее поворотом на угол π/k, и так далее. Тогда каждый отрезок будет покрашен ровно одним из k цветов, и при этом не будет замкнутых одноцветных ломаных.

8. См. решение задачи М1245.

11 к л а с с

1. Данные окружности гомотетичны друг другу относительно точки A. Так как углы CBE и CDB измеряются половинами гомотетичных дуг CE и DB (рис. 27), то они равны. Следовательно, угол CBE измеряется половиной дуги BC окружности, проходящей через точки B, C и D, и, значит, прямая BE — касательная к этой окружности.

2. См. решение задачи М1241.

3. Покажем, что $f(x)\cdot f(y) \geqslant (f(\sqrt{xy}))^2$ для любых x, $y>0$. Действительно, обозначив $z=\sqrt{xy}$, *получаем*

$$f(x)\cdot f(y)-(f(z))^2=ab(x^2y+xy^2-2z^3)+$$
$$+ac(x^2+y^2-2z^2)+bc(x+y-2z)=$$
$$=ab(\sqrt{x^2y}-\sqrt{xy^2})^2+ac(x-y)^2+$$
$$+bc(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqslant 0.$$

Пополнив, если необходимо, набор чисел x_i некоторым количеством единиц, добьемся, чтобы количество чисел в наборе n стало степенью двойки (при этом условия $x_1x_2...x_n=1$ и $f(x_1)f(x_2)...f(x_n)\geqslant 1$ по-прежнему будут выполняться, ибо $f(1)=1$). Объединяя теперь числа в пары, затем — еще раз в пары и так далее и используя каждый раз доказанное неравенство, получаем

$$f(x_1)f(x_2)...f(x_n)\geqslant (f(\sqrt{x_1x_2}))^2\cdot(f(\sqrt{x_3x_4}))^2\cdot...\geqslant$$

$$\geqslant(f(\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}))^4\cdot...\geqslant(f(\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}))^n=(f(1))^n=1.$$

4. **Ответ:** можно. Введем в пространстве декартовы координаты так, чтобы у любой вершины большого куба каждая координата была либо 0, либо 100. Отметим некоторые вершины единичных кубиков с таким расчетом, чтобы на любом ребре каркаса длиной 100 находилась ровно одна отмеченная вершина (например, можно отметить каждую вершину с суммой координат, кратной 101). Для каждой неотмеченной вершины A построим репер $P(A)$ с вершиной в точке A так, чтобы ребро репера $P(A)$, лежащее на ребре каркаса длиной 100 (а таких ребер проходит через точку A ровно три), было направлено в сторону отмеченной вершины, лежащей на этом ребре каркаса. Таким образом, весь каркас разобьется на реперы.

5. **Ответ:** $n>1$. Число $3^{2n+1}-2^{2n+1}-6^n=(3^n-2^n)(3^{n+1}+2^{n+1})$ при $n>1$ — составное, поскольку $3^n-2^n>1$, а при $n=1$ оно равно простому числу 13.

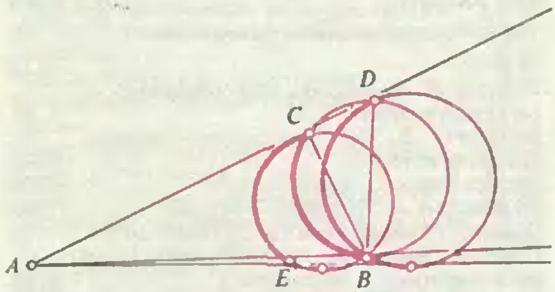


Рис. 27.

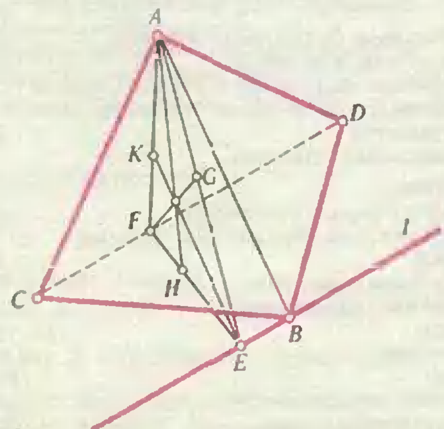


Рис. 28.

6. Пусть, для определенности, h — высота тетраэдра $ABCD$, проведенная из вершины A, d — расстояние между ребрами AB и CD. Проведем через вершину B прямую l, параллельную ребру CD, а через точку A — плоскость, перпендикулярную ребру CD и пересекающую прямые l и CD в точках E и F (рис. 28). Тогда высоты AH и FG треугольника AEF равны h и d соответственно. Третья высота EK треугольника AEF равна одной из высот тетраэдра $ABCD$ и, значит, не меньше h. Так как $AF\cdot EK=FE\cdot AH$, то $AF\leqslant FE$, и, следовательно,

$$\frac{h}{d}=\frac{AH}{FG}=\frac{AE}{FE}<\frac{AF+FE}{FE}\leqslant 2.$$

7. См. решение задачи М1243.

8. Докажем индукцией по четным n, что если даны n монет и известно, сколько среди них фальшивых, то за $\left[\frac{3n}{4}\right]$ взвешиваний можно определить все фальшивые монеты. При $n=0$ и $n=2$ утверждение верно. Пусть $n\geqslant 4$.

Сравним какие-нибудь две монеты. Если они различаются по массе, то обе сразу определяются, и задача сводится к $(n-2)$ монетам, поскольку $\left[\frac{3(n-2)}{4}\right]+1\leqslant\left[\frac{3n}{4}\right]$, а количество фальшивых монет среди оставшихся известно.

Пусть монеты весят одинаково. Сравним эту пару монет с другой парой. Если пары различаются по весу, то, сравнивая друг с другом монеты второй пары, определяем все четыре монеты, и задача сводится к $(n-4)$ монетам, поскольку $\left[\frac{3(n-4)}{4}\right]+3=\left[\frac{3n}{4}\right]$. Если пары весят одинаково, то сравним всю четверку монет с другой четверкой. Если четверки различаются по весу, то первая из них целиком определяется, и задача сводится к $(n-4)$ монетам. Если же четверки весят одинаково, то сравним всю восьмерку монет с другой восьмеркой, и так далее. Вообще, если на некотором шаге группа из 2^m одинаковых монет отличается по весу от другой группы из 2^m монет, то все 2^m монет первой группы целиком определяются, и задача сводится к $(n-2^m)$ монетам, поскольку $\left[\frac{3(n-2^m)}{4}\right]+(m+1)\leqslant\left[\frac{3n}{4}\right]$, $m\geqslant 2$. Если, наконец, оказалось, что $2^m>\frac{n}{2}$, то все 2^m монет полностью определяются.

Напечатано в 1990 году

Олимпиады

Информация

Игры и головоломки

Фантастика

«Квант» улыбается

Нам пишут 2,7,9,11,12

Реклама 2,3,5,7,9,11,12

Смесь

Шахматная страничка

Наша анкета 3,6,9,12

Высший Колледж наук о материалах

при Московском государственном университете и Академии наук СССР объявляет первый набор студентов

Колледж создан на правах факультета при МГУ и готовит специалистов высокой квалификации мирового уровня для выполнения материаловедческих программ в институтах АН СССР, в научно-исследовательских группах зарубежных фирм и совместных предприятий.

Обучение в Колледже позволит Вам получить фундаментальную подготовку по естественно-научным дисциплинам, приобрести знания и навыки в области менеджмента и маркетинга, обеспечит свободное владение иностранными языками и универсальное гуманитарное образование.

В течение одиннадцати семестров, один из которых отводится на зарубежную стажировку, ведущие специалисты, с учетом Ваших индивидуальных способностей и интересов, приобщат Вас к последним достижениям современной науки и технологии в области направленного синтеза и диагностики материалов будущего — керамики, высокотемпературных сверхпроводников, композитов, полимеров. Участие в научных исследованиях, работа на новейшем зарубежном оборудовании и компьютерных системах даст Вам возможность специализироваться в выбранной Вами области материаловедения.

Студенты Колледжа получают повышенную стипендию, а выпускники Колледжа — диплом об окончании МГУ.

Иногородним на время обучения предоставляется общежитие.

Решив проверить свои силы у нас, вы ничем не рискуете — отбор на первый курс проводится по результатам заочного зимнего конкурса и очной весенней сессии. Заявки на участие в конкурсе, с указанием кратких сведений о себе, просим выслать не позднее 31 декабря 1990 года по адресу:

119899, Москва В-234, ГСП-3, Ленинские горы, МГУ, Химический факультет, Высший Колледж наук о материалах; тел. 939-34-90 (звонить с 11^{00} до 17^{00}).

Анкета 12 — 90

Помещая последний раз в этом году нашу ежеквартальную анкету, мы благодарим всех читателей, откликнувшихся на предыдущие анкеты.

Мы собрали «пакет» вопросов, касающихся проблем развития науки и образования, и передали главному редактору журнала академику Ю. Осипьяну. Его ответы, а также обзор читательских мнений мы планируем опубликовать в начале будущего года.

А теперь, дорогой читатель, ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите «Анкета 12 — 90».

1. Класс, в котором Вы учитесь: ____

Ваша профессия (если Вы работаете): ____

круг интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните).

2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? ____

Анкета 12 — 90

3. Какие статьи и задачи из номеров 10—12 (номер укажите) Вам понравились?

Вы использовали при подготовке к уроку?

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»?

Участвуете ли Вы в конкурсе «Задачник «Кванта»?

5. Какая обложка из номеров 10—12 Вам больше всего понравилась?

6. Ваши общие замечания, пожелания, вопросы к редакции, главному редактору:

Номер подготовили:
А. Виленкин, М. Денисова, А. Егоров,
Л. Кардасевич, И. Клумова, В. Оксиенко, Т. Петрова,
С. Табачников, В. Тихомирова

Номер оформили:
Е. Берк, С. Иванов, Д. Крымов, Н. Кузьмина,
С. Лухин, Э. Назаров, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. Иванов

Художественный редактор Т. Макарова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Корректор М. Дронова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 23.09.90. Подписано к печати 15.11.90.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1. Гарнитура
школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45.
Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 8,85. Тираж 155 300 экз.
Заказ 1825. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР по печати
142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

ЭКС-ЧЕМПИОН ПРОТИВ МИКРОЧЕМПИОНА

Пройдет некоторое время, и, возможно, встречи машин и гроссмейстеров, победы электронных чемпионов над известными шахматистами станут обычным делом. Но пока что каждый поединок компьютера с гроссмейстером, особенно успешный для компьютера, вызывает повышенный интерес.

Дело происходило в Мюнхене в день открытия крупного международного турнира, проводимого, кстати, фирмой «Мефисто». В большом шахматном шоу участвовали гроссмейстеры А. Карпов и Р. Хюбнер. Каждый из них провел сеанс одновременной игры, причем соперниками были многие известные общественные, культурные и политические деятели Баварии, а также шахматный автомат «Мефисто-Порторож», победитель последнего, девятого микрокомпьютерного первенства.

И Карпов, и Хюбнер потерпели всего по одному поражению, и, как читатель, наверное, уже догадался, в обоих случаях победу одержал компьютерный чемпион. Этот успех машины в поединке с двумя гроссмейстерами, особенно — с 12-м шахматным королем, стал настоящей сенсацией. Небывалое достижение компьютера было подробно освещено популярными газетами «Die Zeit» и «The Times». Вот эта партия.

А. Карпов — «Мефисто»
Славянская защита

1. d4 d5 2. c4 c6 3. Kf3 Kf6 4. Kc3 dc 5. a4 Cg4 6. Ke5 Ch5 7. f3 Kfd7 8. K:c4 e5 9. Ke4 Cb4+ 10. Cd2 Фh4+ 11. g3 Фe7.

Карпову «по рангу» положено знать все варианты этого дебюта, а «Мефисто» опирается на свою обширную библиотеку, учитывающую современное состояние славянской защиты. Так или иначе, оба соперника до сих пор действовали по последнему слову теории, правда, обычно черные играют сразу 10...Фe7.

12. C:b4 Ф:b4+ 13. Фd2 Ф:d2+ 14. Kp:d2 ed 15. Ked6+ Kpe7 16. K:b7 Ka6. Как ни странно, и эта позиция содержится в дебютных справочниках, правда, с пешкой на g2 (отсутствовал промежуточный шах с поля h4). В этом случае после 13. e3 белые получали минимальный перевес в эндшпиле. Сейчас же этот ход невозможен из-за беззащитности пешки f3. С другой стороны, продвижение g2—g3 позволяет слону белых f1 выбраться на свободу. Так что можно считать, что лишь следующий ход белых придает игре новое направление. Наверное, именно здесь Карпов понял, что перед ним нешуточный соперник. Тем интереснее, что, несмотря на особое внимание к шахматному роботу, экс-чемпион не сумел его одолеть.

17. Ch3 Лab8 18. Kba5 Лhc8 19. f4 f6 20. e3. Из дебюта белые вышли с определенным перевесом, но в условиях сеанса не смогли его увеличить. Сейчас, например, неплохо было 20. Лhe1 и лишь затем e2—e3, не теряя времени на перемещение короля.

20...de+ 21. Kp:e3 Kb4 22. Kpf2 Kd3+ 23. Kpg2 K:b2 24. Лhe1+ Kpd8 25. Kd6 Лc7 26. g4 Cg6 27. f5 Ke5 28. fg hg. В результате бурной схватки белые выиграли фигуру за две пешки, что в нормальной обстановке было бы весьма серьезным достижением. Но в сеансе одновременной игры в возникшей абстрактной позиции легко ошибиться.

29. Лab1. Точнее сразу 29. g5 — в случае 29...Kpe7 очень сильно 30. Kdc4, а на 30...Лb4 следует, как и в партии, 31. Лe4, и пешка a4 защищена.

29...Лb4 30. g5 Kpe7 31. Лe4 Л:e4 32. K:e4 K:a4. Материальное равновесие можно считать восстановленным, и теперь «Мефисто» шаг за шагом улучшает свое положение.

33 Лa1 Kb6 34. Kc5 Kpe8 35. Kab7 Kf7 36. gf gf 37. Л:a7. Соотношение сил опять изменилось в пользу белых, но их легкие фигуры разбросаны по всей доске, и шансов на успех почти нет. **37...Kpe7 38. Лa6 Kd5 39. Kpg3 Ke5 40. Cg2 Ke3 41. Ch1 g5 42. Ka5 Kpd6 43. Ke4+ Kpe7 44. Kc5 Kpd6 45. Kcb7+ Kpd7 46. Лa8.** Повторение ходов — 46. Kc5+ Kpd6 47. Kb7+ явилось бы логичным завершением увлекательного сражения. Но Карпов отказывается от ничьей, видимо, недооценивая мастерство электронного партнера. «Мефисто» бросает вперед пешку «c», и чаша весов склоняется в его пользу.

46...c5 47. Лh8 Kpe6 48. Kb3 Kf5+ 49. Kpf2 Kd3+ 50. Kpe2 c4 51. Ka1 Kf4+ 52. Kpe1 c3 53. Kc2 Лc4 54. Kpd1 Лc7 55. Лe8+ Kpf7 56. Лd8 Kpe7. Грозит 57...Л:b7, а уступать линию «d» белые не могут.

57. Kb4. С надеждой вызвать осложнения, например 57...Л:b7 58. Kc6+ Kpf7 59. Ke5+ fe 60. C:b7 Ke3+ 61. Kpe1 (но не 61. Kpc1 Ke2+ 62. Kpb1 c2+) 61...c2 62. Kpd2.
57...Ke3+ 58. Kpe1 c2 59. K:c2 Л:c2 60. Лd2 Лc1+ 61. Kpf2 Kc4. Точнее, чем 61...Kg4+ 62. Kpg3 Лg1+ 63. Cg2 Ke3 64. Kpf2! с неясной игрой.

62. Лd4 Ke6 63. Лe4 Л:h1 64. Л:c4 Л:h2+. Здесь можно поставить точку: у черных две лишние пешки, к тому же связанные и проходные, и через несколько ходов белковый гроссмейстер поздравил электронного с достойной победой.

Е. Гик

45 коп.
Индекс 70465

1036-15-Т

Эта таблица составлена известным американским специалистом по «серьезной» и занимательной математике Дж. Конвеем. Здесь показаны 30 шестицветных раскрасок граней куба (видны цвета верхней и четырех боковых граней, цвет нижней грани — тот, которого не хватает) — все «геометрически различные» раскраски, т. е. не совместимые друг с другом вращениями куба. Таблица Конвея обладает замечательным свойством: если взять все кубики из строки Y и столбца x (за исключением кубика Yx, стоящего на пересечении этих рядов), то из них можно сложить куб 2×2×2, который снаружи будет окрашен точно, как кубик Xy, причем любые две «внутренние» грани кубиков, прилегающие друг к другу, будут окрашены одинаково. Тем самым моментально решается задача Мак-Магона, приведенная на обложке прошлого номера «Кванта» (подробнее о кубиках Мак-Магона рассказывается в этом номере журнала в заметке на с. 00). В таблице можно найти и более простые, но тоже интересные закономерности: раскраски Xy и Yx являются зеркальными отражениями друг друга, в любом ряду — строке или столбце — встречается ровно по разу каждая из 15 возможных расцветок пар противоположных граней и каждая из 40 «геометрически различных» расцветок трехгранных углов куба и др. Попробуйте понять общий принцип составления таблицы и доказать, не перебирая все варианты, что она действительно дает решение задачи Мак-Магона для любого кубика-образца.

Д. К.