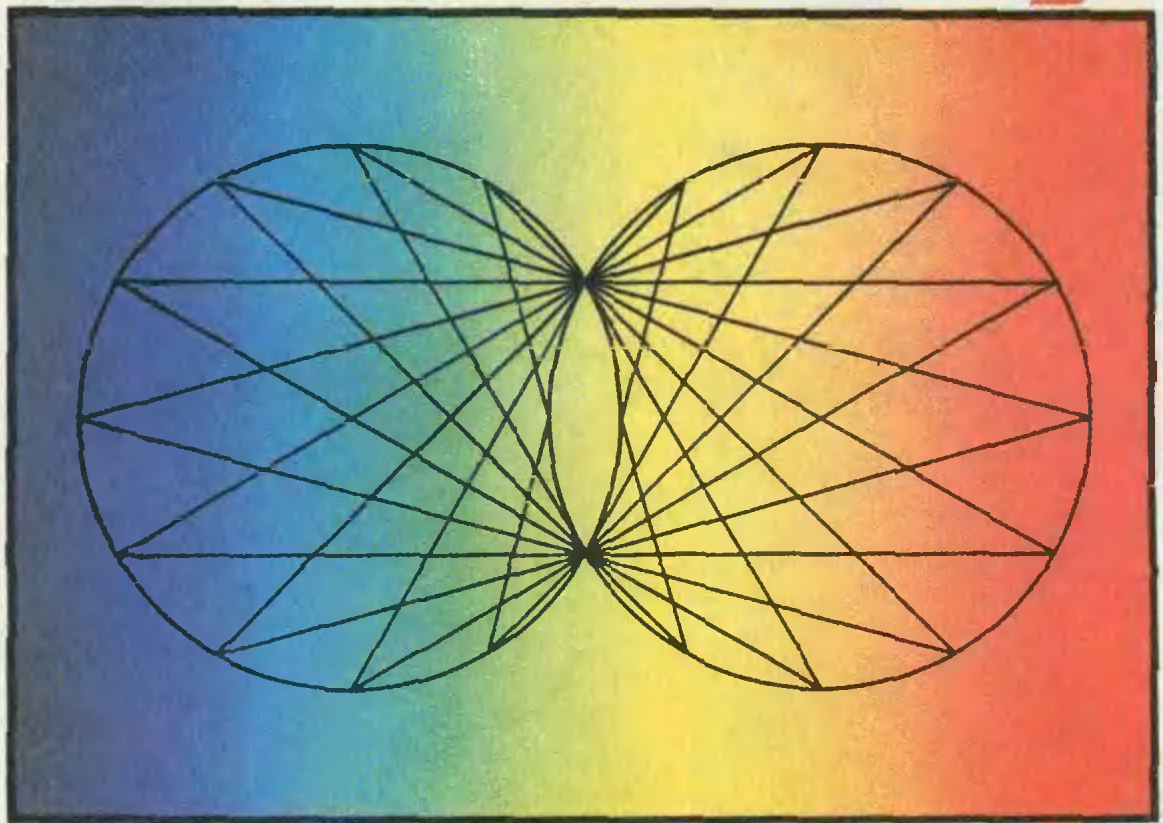


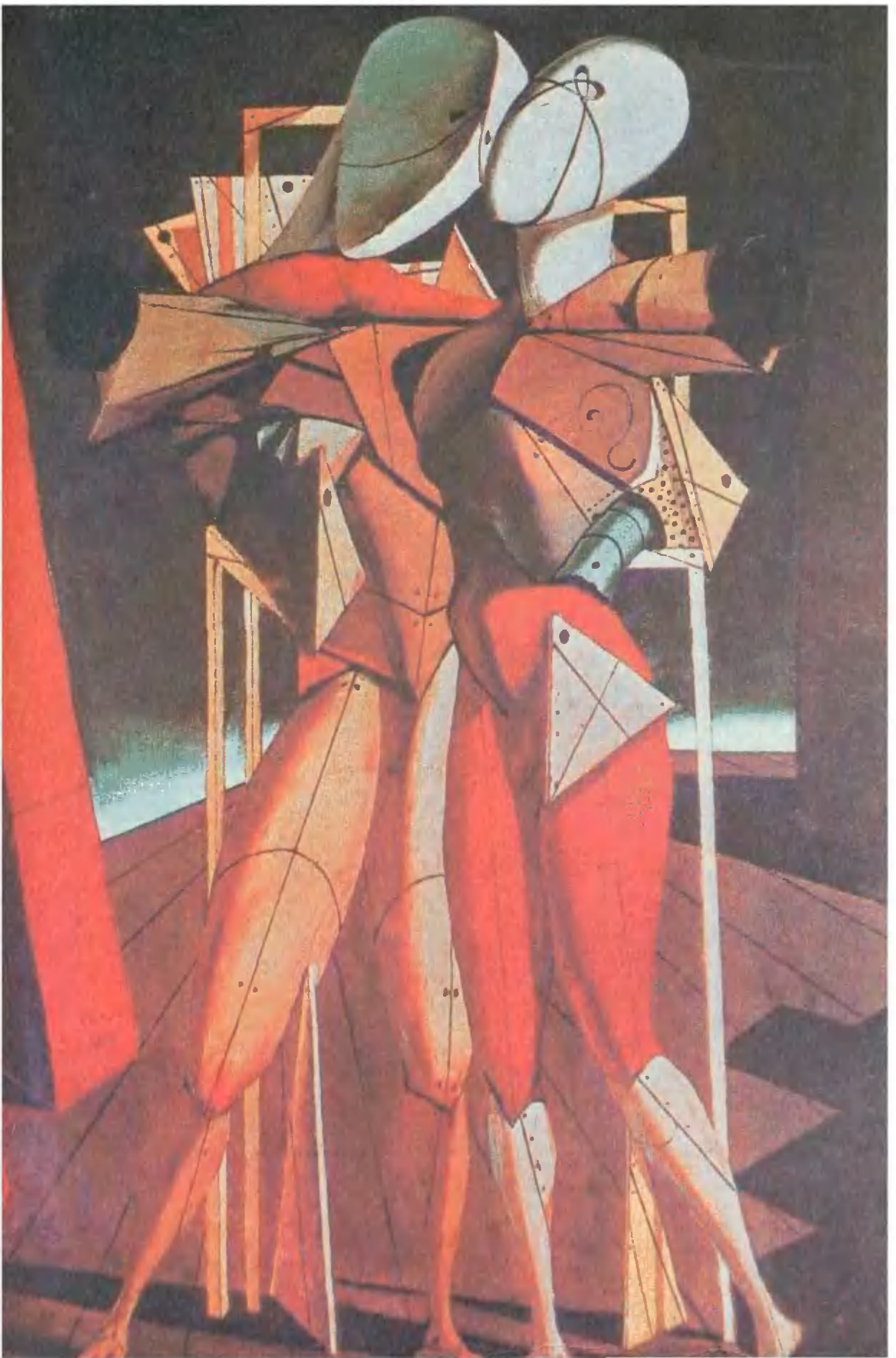
# Квант

Научно-популярный  
физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Прямые на кривых поверхностях



Ежемесячный  
научно-популярный  
физико-математический  
журнал Академии наук СССР  
и Академии педагогических  
наук СССР



Москва. «Наука»  
Главная редакция физико-  
математической  
литературы

## В номере

- 2 В. Б. Шикин. Заряженная поверхность жидкости  
7 Д. В. Фукс. Прямые на кривых поверхностях  
12 С. Л. Табачников. Сколько корней у многочлена?  
18 В. Е. Белонучкин. Приливные силы
- Задачник «Кванта»**  
23 Задачи M1196—M1200, Ф1203—Ф1207  
24 Решения задач M1171—M1175, Ф1183—Ф1187  
31 Разбиения многоугольников и... неевклидова геометрия
- «Квант» для младших школьников**  
35 Задачи  
36 Какой день недели?
- 40 Калейдоскоп «Кванта»
- Лаборатория «Кванта»**  
42 М. М. Цыпин. Высокочастотный генератор
- Практикум абитуриента**  
52 Б. А. Мукушев. Метод графических оценок
- Олимпиады**  
57 XXX Международная математическая олимпиада  
59 XX Международная физическая олимпиада  
64 I Международная олимпиада по информатике
- Информация**  
46 Летняя физико-математическая школа в США  
68 Заочная физико-техническая школа при МФТИ  
71 Игры — дело серьезное
- 72 Ответы, указания, решения  
76 Напечатано в 1989 году  
79 Анкета 12—89  
Смесь (45)  
Реклама (67)
- Наша обложка**  
1 Так выглядит тень гиперboloида, освещенного лучами света, параллельными одной из его образующих. Гиперboloид — искривленная поверхность, составленная из прямых линий (см. статью на с. 7).  
2 Какие ассоциации возникают у вас при взгляде на картину итальянского художника Джорджо де Кирико «Гектор и Андромаха»? У нас она ассоциируется со статьей «Разбиения многоугольников и... неевклидова геометрия» (с. 31).  
3 Шахматная страничка.  
4 Загадочные знаки на рисунке — зашифрованное поздравление с Новым годом.

# ЗАРЯЖЕННАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ЖИДКОСТИ

Доктор физико-математических наук  
В. Б. ШИКИН

Кому из нас не приходилось наблюдать рябь на поверхности озера или «волны» в стакане... Возбуждения эти, случайно возникнув (от дуновения ветра, от слабого толчка), постепенно затухают — свободная поверхность жидкости возвращается в равновесное состояние. Иными словами, равновесное состояние свободной поверхности оказывается устойчивым. Однако так бывает не всегда. В ряде интересных случаев амплитуда случайно возникших малых колебаний самопроизвольно нарастает со временем. Подобное состояние динамической системы (свободная поверхность жидкости — частный случай такой системы) называется неустойчивым. Изучение деталей развития неустойчивости очень интересно с точки зрения понимания физики этого фундаментального явления. При этом оказывается, что процессы, происходящие в различных системах, во многом аналогичны. В этой статье мы рассмотрим наиболее известные виды неустойчивости свободной поверхности жидкости.

1. Простейшую возможность проследить за развитием неустойчивости свободной поверхности жидкости дают наблюдения за струей воды, вытекающей из водопроводного крана или, что лучше, из тонкой пипетки. Неустойчивость здесь проявляется в том, что первоначально гладкая цилиндрическая поверхность струи на некотором расстоянии от края пипетки становится «гофрированной», а еще ниже — распадается на отдельные капли. Пример такого поведения струи — на рисунке 1.

Суть этого явления была понята еще в конце прошлого века благодаря работам известного английского физика лорда Рэля. Распад струи про-

исходит тогда, когда энергия поверхностного натяжения жидкого цилиндра  $W_{\text{ц}}$  оказывается больше, чем энергия  $W_{\text{к}}$  капель, которые могут из него образоваться:

$$W_{\text{ц}} > W_{\text{к}}. \quad (*)$$

В самом процессе «деления» струи на капли решающую роль играют силы поверхностного натяжения. Кроме этих сил в задаче о вытекании струи из отверстия участвуют силы тяжести. Однако они в данном случае направлены вдоль поверхности струи и потому не принимают активного участия в развитии неустойчивости (ситуация меняется, если граница нормальна направлению силы тяжести; об этом случае мы поговорим позже).

Посмотрим, при каких условиях выполняется соотношение (\*).

Итак, пусть длина невозмущенного цилиндра равна  $l$ , а его радиус —  $r_{\text{ц}}$ . В этом случае поверхностная энергия цилиндра —

$$W_{\text{ц}} = 2\pi r_{\text{ц}} l \sigma,$$

где  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения. Если цилиндр распадается на  $n$  примерно одинаковых капель с радиусом  $r_{\text{к}}$ , то поверхностная энергия всего набора этих капель равна

$$W_{\text{к}} = 4\pi r_{\text{к}}^2 n \sigma.$$

Суммарный объем капель равен объему цилиндра (полный объем жидкости сохраняется). Из этого условия мы можем найти связь радиуса капли с радиусом цилиндра:

$$\pi r_{\text{ц}}^2 l = \frac{4}{3} \pi r_{\text{к}}^3 n, \text{ откуда } r_{\text{к}} = \left( \frac{3}{4} r_{\text{ц}}^2 \frac{l}{n} \right)^{1/3}.$$

Таким образом, неравенство (\*) выполняется, когда

$$r_{\text{ц}} l > 2n \left( \frac{3}{4} r_{\text{ц}}^2 \frac{l}{n} \right)^{2/3},$$



т. е. цилиндр становится неустойчивым, если его длина в несколько раз больше радиуса  $r_u$ :

$$\frac{l}{\pi} > \frac{9}{2} r_u.$$

При  $n=1$  это условие выполняется для  $l > 4,5 r_u$ .

Более точное рассмотрение, принадлежащее лорду Рэлю, показывает, что события в данной задаче развиваются следующим образом. На поверхности гладкого жидкого цилиндра, падающего вниз из отверстия пипетки, возникают по разным случайным причинам слабые колебания. Длины волн  $\lambda$ , соответствующие этим колебаниям, могут быть различными. Если  $\lambda$  меньше некоторого критического значения  $\lambda^*$  ( $\lambda < \lambda^*$ ), колебания оказываются затухающими — спонтанно возникнув, они быстро гаснут. Однако «длинноволновые» колебания — с  $\lambda > \lambda^*$ , — случайно возникнув, начинают наращивать свою амплитуду. Критическая длина волны, разделяющая всю совокупность возможных колебаний на два качественно разных класса — устойчивых и неустойчивых, оказывается равной

$$\lambda^* = 2\pi r_u.$$

Это несколько больше значения  $\lambda^* = 4,5 r_u$ , полученного с помощью наших элементарных рассуждений, но отражает те же физические причины возникновения неустойчивости. В тот

момент, когда амплитуда нарастающих колебаний становится сравнимой с радиусом жидкого цилиндра, начинается распад цилиндра на отдельные капли. Время развития неустойчивости нетрудно оценить, зная скорость вытекания жидкости из пипетки и измеряя длину невозмущенной части жидкого столба.

II. Распад жидкой струи можно значительно ускорить, вводя в задачу дополнительные силы электрического происхождения.

Если в жидкости имеются одноименно заряженные частицы, они в результате кулоновского отталкивания будут скапливаться на «вершинах» гофра, покидая его «долины» (рис. 2). Подобное неоднородное распределение поверхностного заряда дополнительно дестабилизирует обстановку, ускоряя процесс развития неустойчивости.

Введение зарядов в струю осуществляется по схеме, изображенной на рисунке 3. Источник высокого напряжения  $U$  включен между объемом жидкости, заполняющей резервуар, и цилиндрической проводящей поверхностью, охватывающей падающую струю. В результате весь столб жидкости вплоть до границы его распада на капли оказывается подверженным воздействию радиально симметричного электрического поля, стремящегося разорвать струю. К чему

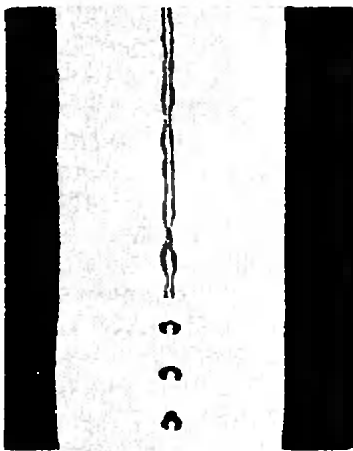


Рис. 1. Струя воды, вытекающая из пипетки (диаметр 1,1 мм).

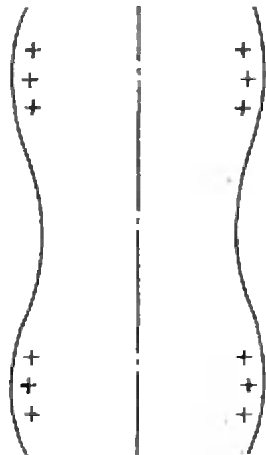


Рис. 2. Кулоновские силы отталкивания стимулируют неустойчивость струи.

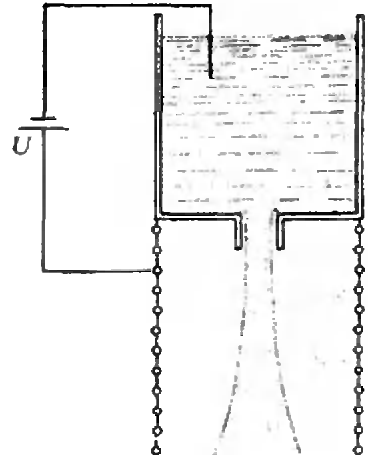


Рис. 3. Схема эксперимента по стимуляции неустойчивости струи электрическим полем.

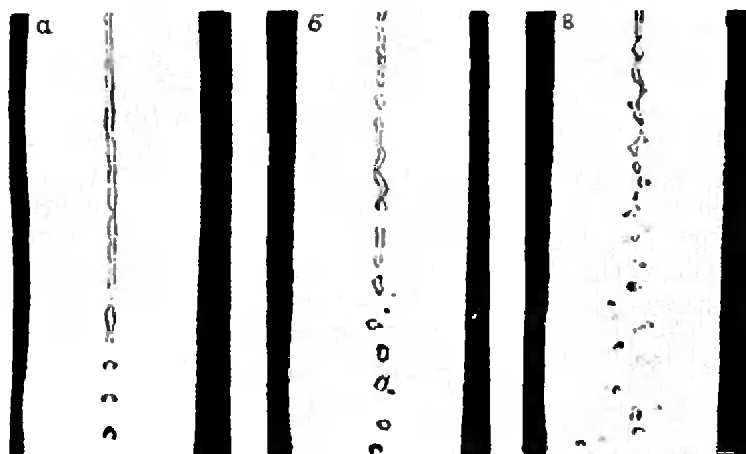


Рис. 4. Струя воды (диаметр 1.1 мм) не заряженная (а) и при разных значениях поверхностной плотности зарядов (в случае (в) плотность в 12 раз больше, чем в случае (б)).

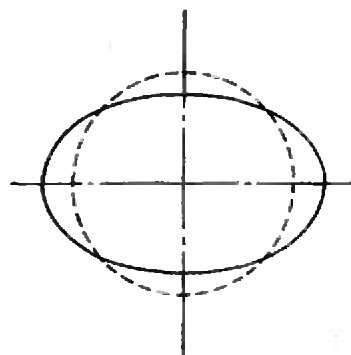


Рис. 5. При таких колебаниях поверхности заряженная капля наименее устойчива.

это приводит, видно из рисунка 4: это фотографии той же струи, что и на рисунке 1, но заряженной.

Полная теория электрических эффектов в задаче о распаде струи весьма сложна, и мы не будем ее обсуждать. Что же касается приложений этого явления, то они весьма обширны. Электрическая стимуляция распада жидкой струи используется в технике для улучшения качества аэрозолей, более интенсивного разбрызгивания горючего в форсунках мощных энергетических установок, в технологии получения металлических порошков, используемых современной порошковой металлургией, и т. д.

III. Задача о неустойчивости заряженной поверхности жидкости стала «знаменитой» в связи с исследованиями устойчивости тяжелых атомных ядер. Эта фундаментальная проблема в определенных предположениях сводится к задаче об устойчивости заряженной капли. Аналогия между явлением спонтанного деления тяжелых ядер и распадом заряженной капли жидкости настолько красива и прозрачна, что имеет смысл познакомиться хотя бы с историей этой проблемы.

В 1939 году немецкие физики О. Ган и Ф. Штрассман открыли деление ядер урана в результате бомбардировки их нейтронами — ядро урана, поглотившее нейтрон, распадается на

две примерно равные части. (Позже оказалось, что этим свойством обладает не только уран. Год спустя советские физики Г. Н. Флеров и К. А. Петржак обнаружили самопроизвольное деление ядер урана.) Объяснение этого эффекта последовало практически сразу же в работах классиков современной физики — советского теоретика Я. И. Френкеля, датчанина Нильса Бора и американца Дж. Уилера. В этих работах деление ядра описывалось как разрыв капли заряженной жидкости.

Дело в том, что с интересующей нас точностью свойства ядра определяются, в основном, двумя различными взаимодействиями между частицами, входящими в его состав, — ядерным взаимодействием, которое по природе своей короткодействующее, и кулоновским, которое относится к разряду далекодействующих. Ядерные силы, посредством которых взаимодействуют друг с другом все нуклоны ядра, намного больше электрических сил отталкивания, действующих между протонами; благодаря этому нуклоны и удерживаются в ядре, которое можно представить как каплю заряженной жидкости (с огромной плотностью). Поверхностное натяжение такой капли-ядра определяется силами ядерного взаимодействия. Как и у обыкновенной капли, поверхность капли-ядра может колебаться. Будут ли случайно возникшие колебания

затухать, или их амплитуда начнет увеличиваться — зависит от соотношения поверхностной энергии капли-ядра и энергии кулоновского взаимодействия протонов. Различие в природе ядерных и кулоновских сил приводит к тому, что с ростом порядкового номера ядра в таблице Менделеева (с ростом числа протонов) энергия электростатического взаимодействия нарастает быстрее, чем энергия поверхностного натяжения капли-ядра. В результате существует некоторый критический номер элемента периодической системы Менделеева, начиная с которого ядра оказываются неустойчивыми — под влиянием поверхностных колебаний происходит разрыв капли-ядра, т. е. деление ядра.

Теория Френкеля, Бора, Уилера и ее дальнейшие уточнения позволяют найти этот критический номер — он отвечает положению урана в таблице Менделеева.

Классическая формула, определяющая область устойчивости заряженной сферической капли, была получена в 1882 году лордом Рэлеем:

$$Q^2 < 16\pi r_k^3 \sigma$$

( $Q$  — полный заряд капли). Она отражает конкуренцию между силами поверхностного натяжения, удерживающими каплю радиусом  $r_k$  в «сферическом» состоянии, и кулоновскими силами, стремящимися придать капле форму гантели (см. рис. 5).

IV. Остановимся на еще одном варианте задачи об устойчивости заряженной поверхности жидкости — когда поверхность горизонтальна и присутствуют силы тяжести. В этом случае гравитация принимает активное участие в формировании избыточной энергии при деформации свободной поверхности жидкости, и задача о поведении колебаний заряженной поверхности жидкости становится заметно богаче, чем в вариантах без гравитации, которые мы до сих пор рассматривали.

Описание конкретных эффектов удобно начать с обсуждения сравнительно простой формулы, определяющей связь между частотой  $\omega$  и длиной

волны  $\lambda$  колебаний заряженной поверхности жидкости:

$$\omega^2 = \frac{2\pi}{\rho\lambda} \left( \rho g + \frac{4\pi^2\sigma}{\lambda^2} - \frac{8\pi^2\alpha}{\lambda} \right). \quad (**)$$

Первый член (в скобках) отражает влияние сил гравитации ( $g$  — ускорение силы тяжести), второй — сил поверхностного натяжения, третий — сил электрического происхождения ( $\alpha$  — поверхностная плотность заряда).

Формула (\*\*) впервые получена Я. И. Френкелем (1935). (Кстати, становится ясно, что Френкель интересовался проблемами устойчивости еще в 1935 году. Поэтому, когда в 1939 году возникла задача о распаде тяжелых ядер, быстро сработали нужные ассоциации.)

В случае  $\alpha = 0$  (жидкость не заряжена)  $\omega^2 > 0$  для любых значений  $\lambda$ . В этих случаях существуют незатухающие малые колебания свободной поверхности жидкости, известные еще лорду Рэлею. Поверхность жидкости устойчива.

Посмотрим, что происходит с колебаниями заряженной поверхности жидкости, т. е. при  $\alpha \neq 0$ . Как видно из (\*\*), с ростом  $\alpha$  частота колебаний с заданной длиной волны  $\lambda$  уменьшается и при некоторой критической

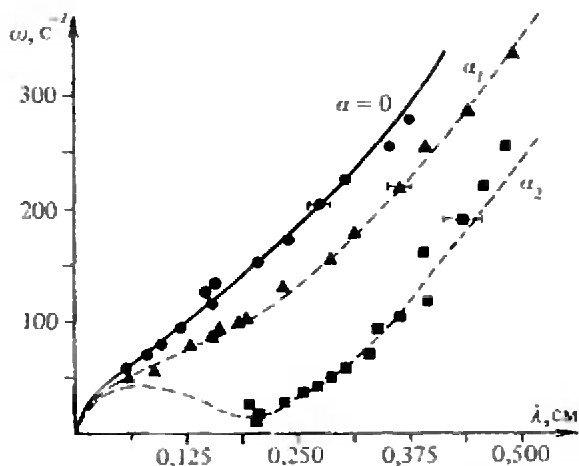


Рис. 6. Связь между частотой и длиной волны колебаний заряженной жидкости. Сплошная линия отвечает формуле (\*\*) при  $\alpha=0$ ; пунктирные линии — тот же закон при разных значениях  $\alpha$  (чем больше  $\alpha$ , тем ниже кривая  $\omega(\lambda)$ ); кружки, треугольники и квадраты — соответствующие экспериментальные данные.

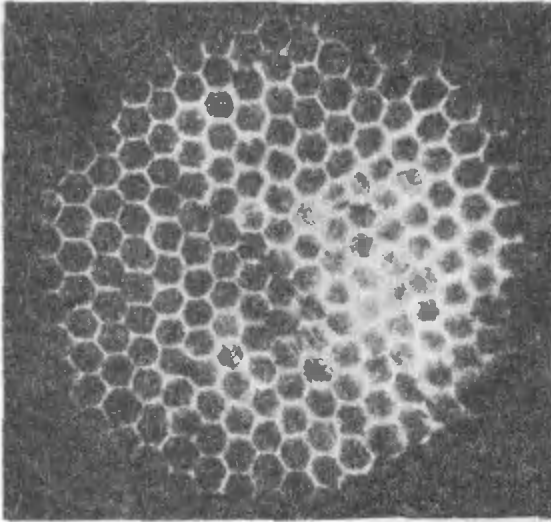


Рис. 7. Вид реконструированной заряженной поверхности.

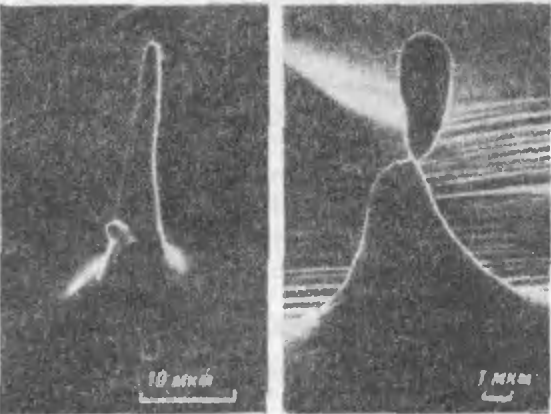


Рис. 8. Поверхность жидкой меди под действием сильного электрического поля.

величине  $\alpha_c$  становится равной нулю, что формально отвечает определению границы устойчивости. Для разных значений  $\lambda$  существуют свои критические значения  $\alpha_c$  (они определяются из условия обращения в нуль правой части формулы (\*\*)). Наиболее важным из них является значение  $\alpha_c^*$ ,

при котором заряженная поверхность наименее устойчива. Величина  $\alpha_c^*$  и отвечающая ей длина волны  $\lambda^*$  определяются соотношениями

$$(2\pi\alpha_c^*)^2 = \frac{\rho g}{\sigma}, \quad \frac{2\pi}{\lambda^*} = \left(\frac{\rho g}{\sigma}\right)^{1/2}.$$

Длина волны  $\lambda^*$  получила название капиллярной. Напомним в связи с этим, что в случае жидкого цилиндра и сферической капли «опасные» флуктуации развивались на длине волны, сравнимой с размерами цилиндра или сферы.

Эксперименты, выполненные в последнее время на заряженной поверхности жидкого гелия, полностью подтверждают предсказания, следующие из формулы (\*\*). На рисунке 6 приведены результаты таких экспериментов.

Каково же дальнейшее поведение заряженной поверхности жидкости? Если в обсуждавшихся раньше случаях нарушение критических условий приводило к нестационарным явлениям — распаду жидкой струи, разрыву заряженной капли, — то в «плоском» варианте задачи при осторожном переходе в закритическую область возникает новое, «реконструированное» состояние заряженной поверхности жидкости — так называемый луночный кристалл. На поверхности жидкости устанавливается стоячая волна деформации, имеющая периодическую структуру с характерным периодом, равным капиллярной длине волны  $\lambda^*$ . Вид свободной поверхности жидкости в этом случае представлен на рисунке 7.

Естественно, что при дальнейшем увеличении  $\alpha$  стационарное реконструированное состояние заряженной поверхности жидкости также становится неустойчивым. Описание этой стадии развития событий практически отсутствует ввиду сложности уравнений, определяющих динамику поверхности в области  $\alpha \gg \alpha_c^*$ . Что касается реального поведения жидкой поверхности, то общее представление об этом дает рисунок 8 — это фотография свободной поверхности жидкой меди в сильном электрическом поле, нормальном к границе.



# ПРЯМЫЕ НА КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Доктор физико-математических наук  
Д. Б. ФУКС

Бывают поверхности, с виду весьма искривленные, которые тем не менее вмещают в себя целые прямые. В этой статье мы поговорим о тех поверхностях, на которых этих прямых особенно много.

Статья состоит из двух частей; первая перед вами, а вторая будет напечатана в одном из ближайших номеров журнала. В первой части мы проделаем несколько любопытных геометрических экспериментов, вторая адресована любителям более серьезной математики: в ней среди прочего мы попытаемся обозреть все поверхности, через каждую точку которых проходят две лежащие в них прямые.

**Часть первая:**

**гиперболоид мастера Самоделкина**  
**Поверхность из ботиночных шнурков.**  
Возьмите два одинаковых обруча и свяжите их дюжиной шнурков одинаковой длины, как показано на рисунке 1. Если поднять получившееся сооружение за один обруч, держа этот обруч горизонтально, то шнурки составят поверхность — прямой круговой цилиндр. Если после этого, удерживая шнурки в натянутом состоянии, повернуть один обруч относительно другого (на угол не очень малень-

кий, но и не очень большой — скажем, около четверти оборота), то шнурки составят новую поверхность — см. рисунок 2. Мы сейчас подробно обсудим устройство этой поверхности, но сразу заметим главное: она настолько искривлена, что просто трудно поверить, что она сделана из совершенно прямых шнурков.

Эта поверхность называется *гиперболоидом*, и вот почему. Если смотреть на нее сбоку (лучше сказать, если спроектировать ее на плоскость), то мы увидим фигуру, заключенную между двумя ветвями гиперболы (рис. 3). Кроме того, наша поверхность может быть получена путем вращения гиперболы вокруг одной из ее осей симметрии (той, что ее не пересекает) — см. рисунок 4. Пересекая нашу поверхность различными плоскостями, мы также можем получить в сечении гиперболу (рис. 5, *a, б*), как, впрочем, и эллипс (рис. 5, *в*), параболу (рис. 5, *г*), пару пересекающихся прямых (рис. 5, *д*) и пару параллельных прямых (рис. 5, *е*). Все же наша поверхность имеет очень много общего именно с гиперболой и заслуживает названия «гиперболоид». Впрочем, ее нередко называют однополостным гиперболоидом, чтобы отличить от двуполостного гиперболо-



Рис. 1.



Рис. 2.



Рис. 3.



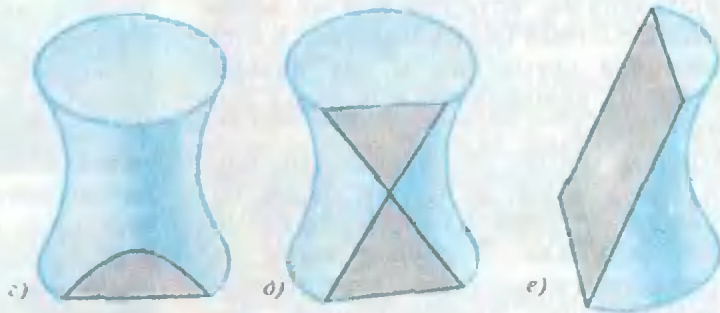
Рис. 4.



Рис. 5.



Рис. 6.



лоида, получающегося при вращении гиперболы вокруг другой оси (рис. 6). Двуполостный гиперboloид замечателен, главным образом, тем, что состоит (как и гипербола) из двух несоприкасающихся частей; мы его в дальнейшем не рассматриваем, и слово «гиперboloид» всегда будет означать у нас однополостный гиперboloид.

Сказанное в предыдущем абзаце мы оставим без доказательства, поскольку для нас все это не особенно важно. Кто пожелает восполнить этот пробел, может пойти по пути составления уравнений; уравнение нашего гиперboloида в подходящей системе координат имеет вид  $x^2 + y^2 = r^2 + a^2 z^2$ , где  $r$  и  $a$  зависят от размеров обручей, длин шнурков и угла поворота. Для тех, кто не хочет возиться с доказательствами, я скажу вещь очевидную, в доказательстве, в сущности, не нуждающуюся: наш гиперboloид есть также поверхность вращения прямой относительно другой, скрещивающейся с ней прямой (рис. 7).

Два семейства. Мы уже знаем, что наш гиперboloид состоит из прямых. Кстати, в математике прямая, целиком содержащаяся в неплоской по-

верхности, называется ее *прямолинейной образующей* (или просто *образующей*). Поверхность, через каждую точку которой проходит прямолинейная образующая, называется *линейчатой*. В частности, наш гиперboloид является линейчатой поверхностью, но на самом деле верно большее: он является *двойколинейчатой* поверхностью, т. е. через каждую его точку проходят две различные прямолинейные образующие.

Понять это нетрудно. Вернемся к нашему опыту с обручами и представим себе, что мы повернули тот же обруч на тот же угол в противоположную сторону. Очевидно, мы получим ту же самую поверхность, но по-другому замощенную образующими: новые образующие являются



Рис. 7.



Рис. 8.



зеркальными образами старых. На рисунке 8 показаны оба семейства образующих.

Кстати, слово «семейство», которое появилось в последней фразе, будет нам в дальнейшем полезно; естественно считать, что у гиперboloида два семейства образующих: одно из них изображено на рисунке 2, а другое ему зеркально. Некоторые свойства этих семейств поистине удивительны.

**Теорема 1.** *Всякие две образующие одного семейства скрещиваются.*

Это очевидно из рисунка 2.

**Теорема 2.** *Пусть  $l_1$  — образующая из одного семейства,  $l_2$  — образующая из другого семейства. Тогда прямые  $l_1$  и  $l_2$  пересекаются или параллельны.*

**Доказательство.** Обозначим через  $A_1, A_2$  точки пересечения образующих  $l_1, l_2$  с верхним из наших обручей и проведем диаметр обруча, относительно которого точки  $A_1, A_2$  симметричны (рис. 9). Теперь проведем плоскость  $P$  через этот диаметр и ось гиперboloида. Гиперboloид симметричен относительно этой плоскости; более того, зеркальное отражение в плоскости  $P$  переводит всякую образующую одного семейства в образующую другого семейства. При этом отражении точка  $A_1$  переходит в точку  $A_2$ , и, значит, прямая  $l_1$  — образующая первого семейства, проходящая через точку  $A_1$ , переходит в образующую второго семейства, проходящую через точку  $A_2$ , т. е. в  $l_2$ . Значит, прямые  $l_1$  и  $l_2$  симметричны относительно плоскости  $P$ . Если  $l_1$  пересекает  $P$  в некоторой точке  $B$ , то и  $l_2$  проходит через  $B$ , значит,  $l_1$  и  $l_2$  пересекаются. Если же пря-

мая  $l_1$  параллельна  $P$ , то ее зеркальный образ  $l_2$  параллелен ей. Теорема доказана.

Теорему 2 можно уточнить.

**Теорема 2 bis.** *Всякая образующая пересекает все образующие другого семейства, кроме одной, которой она параллельна.*

**Доказательство.** Достаточно доказать, что каждой образующей  $l$  параллельна ровно одна образующая другого семейства. Чтобы ее построить, достаточно отразить гиперboloид в плоскости, проходящей через его ось и параллельной  $l$  (рис. 10); образ  $l$  при этом отражении и есть образующая другого семейства, параллельная  $l$ . Двух образующих, параллельных  $l$ , быть не может: они были бы параллельны между собой, а две образующие из одного семейства всегда скрещиваются (в силу теоремы 1).

Теперь мы можем получить самый интересный результат этой части статьи. Правда, есть одна смешная, чисто языковая трудность: как коротко сказать, что две прямые пересекаются или параллельны? Скажем, «прямая  $l$  пересекается или параллельна прямой  $l'$ »? или «с прямой  $l'$ »? Лучше будем говорить: «не скрещивается». Это ведь и значит, что пересекается или параллельна.

**Теорема 3.** *Пусть  $l_1, l_2, l_3$  — три образующих из одного семейства. Второе семейство состоит в точности из всех прямых, которые не скрещиваются ни с одной из прямых  $l_1, l_2, l_3$ .*

Доказательство основано на двух наблюдениях, которые очень полезны и сами по себе.

**Наблюдение 1.** *Пусть  $l_1, l_2$  — скрещивающиеся прямые и  $A$  — точка, не лежащая ни на одной из них.*



Рис. 9.



Рис. 10.

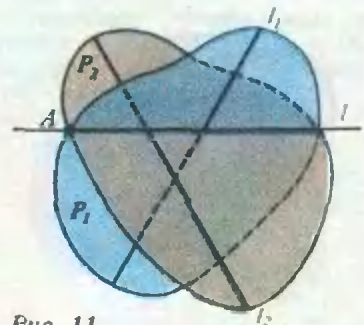


Рис. 11.

Тогда существует единственная прямая, проходящая через  $A$  и не скрещивающаяся ни с одной из прямых  $l_1, l_2$ .

Доказательство (рис. 11). Проведем плоскость  $P_1$  через точку  $A$  и прямую  $l_1$  и плоскость  $P_2$  через точку  $A$  и прямую  $l_2$ . Эти плоскости не параллельны (они имеют общую точку  $A$ ) и не совпадают (прямые  $l_1$  и  $l_2$  не лежат в одной плоскости). Линия  $l$  пересечения этих плоскостей — искомая прямая: она проходит через  $A$  и лежит в одной плоскости с каждой из прямых  $l_1, l_2$ . Единственность такой прямой следует из того же рассуждения: она должна лежать в каждой из плоскостей  $P_1$  и  $P_2$ .

Наблюдение 2. Пусть  $l_1, l_2, l_3$  — попарно скрещивающиеся прямые. Тогда существует единственная прямая, параллельная  $l_3$  и не скрещивающаяся ни с одной из прямых  $l_1, l_2$ .

Доказательство (рис. 12). Проведем через  $l_3$  плоскость  $P_1$ , параллельную  $l_1$ , и плоскость  $P_2$ , параллельную  $l_2$ . Линия пересечения плоскостей  $P_1$  и  $P_2$  — искомая прямая.

Доказательство теоремы 3. Что образующая второго семейства не скрещивается ни с одной образующей первого семейства, мы уже знаем (теорема 2). Теорема будет доказана, если мы убедимся, что каждая из прямых, не скрещивающихся с  $l_1, l_2$  и  $l_3$  — образующая второго семейства. Нам известно, что через каждую точку образующей  $l_3$  проходит ровно одна образующая второго семейства и еще одна образующая этого семейства параллельна  $l_3$ . Но в то же время через каждую точку образующей  $l_3$  прохо-

дит ровно одна прямая, не скрещивающаяся ни с  $l_1$ , ни с  $l_2$  (наблюдение 1), и еще есть одна прямая, параллельная  $l_3$  и не скрещивающаяся ни с  $l_1$ , ни с  $l_2$  (наблюдение 2). Следовательно, прямые, о которых идет речь в наблюдениях 1 и 2, являются образующими второго семейства.

Итак, наш гиперboloид устроен очень просто: достаточно взять любые три образующие одного семейства и провести все прямые, которые не скрещиваются ни с одной из выбранных прямых. В совокупности они и составят наш гиперboloид. Возникает интересная идея: взять три произвольные попарно скрещивающиеся прямые и рассмотреть поверхность, заметаемую всеми прямыми, которые ни с одной из взятых прямых не скрещиваются. Впрочем, нет, мы забежали вперед: это же — главная идея второй части статьи! А мы должны вернуться сейчас к нашему гиперboloиду.

Театр теней. Представим себе, что мы находимся в темной комнате и у нас в руках модель гиперboloида, сделанная из тонких спиц. Эти спицы — образующие обоих семейств, расположенные с одинаковой частотой (рис. 8). Мы освещаем модель при помощи точечного источника света или параллельным пучком лучей и рассматриваем тени, отбрасываемые нашими спицами на плоский экран.

Прежде чем вникать в устройство получающейся картинке, попробуем представить себе чисто умозрительно, какой она могла бы быть).

\*) См. также «Калейдоскоп «Кванта» в предыдущем номере журнала.

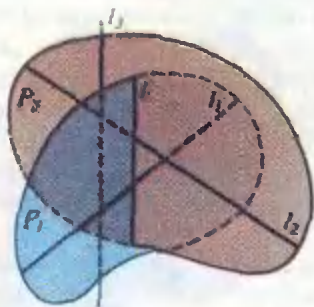


Рис. 12.

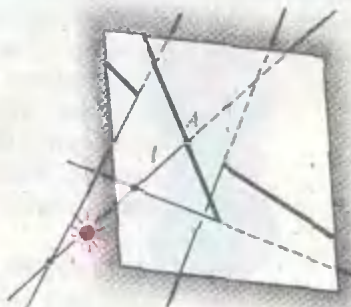


Рис. 13.

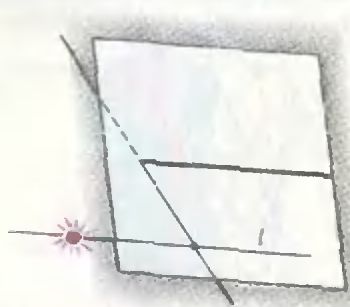


Рис. 14.

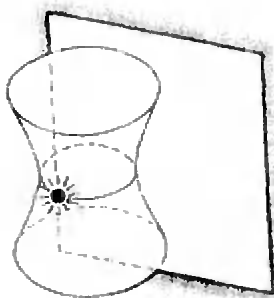


Рис. 15.

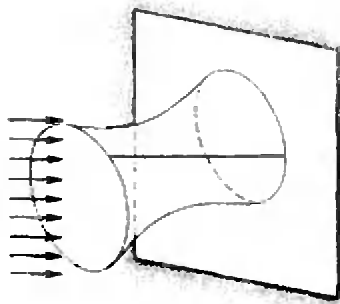


Рис. 16.

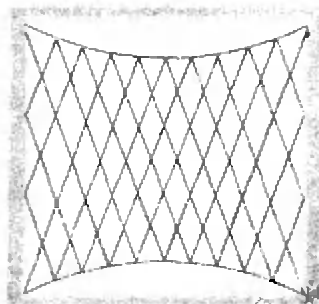


Рис. 17.

Пусть у нас есть точечный источник света и экран. Тогда прямая  $l$ , проходящая через источник света и не параллельная экрану, изобразится на нем в виде точки (обозначим ее через  $A$ ) — см. рисунок 13. Прямые, пересекающие  $l$  (и не проходящие через источник света), проектируются в прямые, проходящие через  $A$ . Точнее говоря, тень прямой, не параллельной экрану — это не прямая, а полупрямая, концом которой служит точка пересечения прямой с экраном. Если точка пересечения рассматриваемой прямой с  $l$  лежит между источником света и экраном, то точка  $A$  лежит на этой полупрямой, в противном случае — на ее продолжении (рис. 13). Если же прямая  $l$ , проходящая через источник света, параллельна экрану, то сама эта прямая никакой тени на экран не отбрасывает, а прямые, которые пересекают прямую  $l$  (и не параллельны экрану) отбрасывают тени в виде полупрямых, параллельных  $l$  (рис. 14).

Вернемся к нашей модели гиперboloида. Мы ограничимся рассмотрением двух теней. Во-первых, расположим гиперboloид так, что его ось

будет параллельна экрану, а источник света поместим в наиболее удаленной от экрана точке горловой окружности (самой маленькой окружности, опоясывающей гиперboloид) — см. рис. 15. Во-вторых, мы осветим гиперboloид пучком лучей, параллельных одной из образующих, а экран расположим параллельно краевым окружностям гиперboloида («обручам») — см. рисунок 16. Тени показаны на рисунках 17 и 18.

В первом случае тени образующих каждого семейства будут параллельны между собой; они будут параллельны образующим гиперboloида, проходящим через источник света. Во втором случае две образующие (выбранная нами образующая, которой параллелен пучок света, и параллельная ей образующая другого семейства) дадут точечные тени, а тени остальных образующих будут служить отрезки прямых, проходящих через эти точки.

Все это прямо вытекает из сказанного выше о тенях прямых и взаимном расположении образующих, детали мы оставляем читателю.

**Упражнение.** Как будет выглядеть тень нашей модели, если точечный источник света расположен на поверхности гиперboloида, но экран не обязательно параллелен оси, а образующие, проходящие через источник света, не обязательно параллельны экрану?

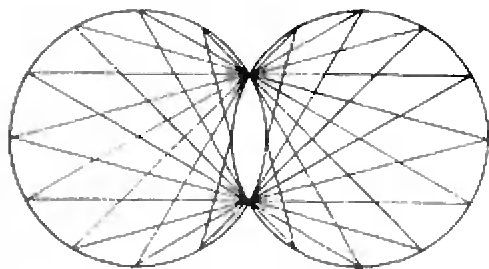
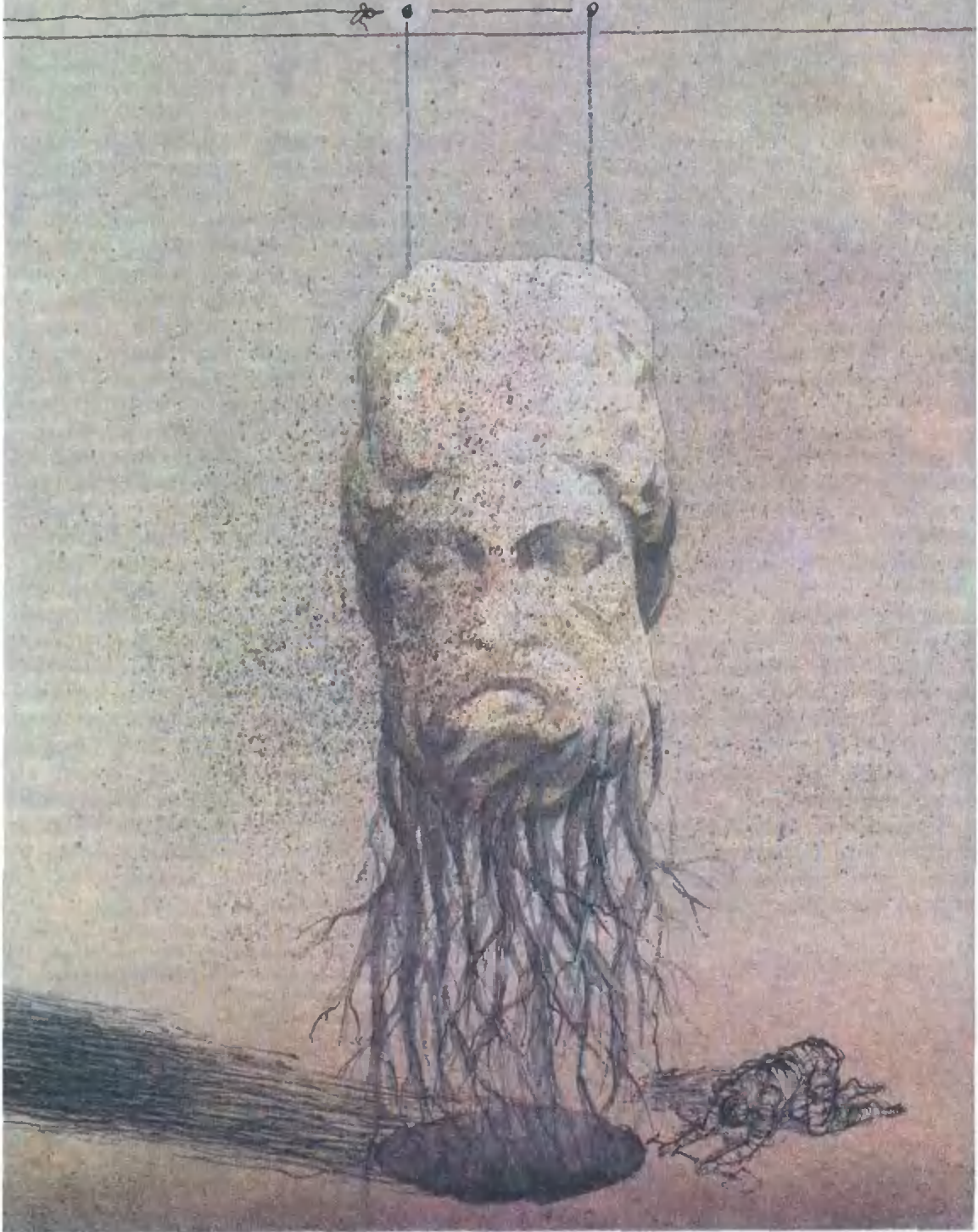


Рис. 18.



# СКОЛЬКО КОРНЕЙ У МНОГОЧЛЕНА?

Кандидат физико-математических наук  
С. Л. ТАБАЧНИКОВ



## Два удивительных факта

Уточним вопрос, поставленный в заглавии статьи: сколько действительных корней может быть у многочлена  $n$ -й степени с действительными коэффициентами? Большинство читателей сразу ответят: корней у многочлена не больше, чем его степень, т. е. не больше  $n$  (идея доказательства: если  $a$  — корень многочлена  $f(x)$ , то  $f(x)$  делится на  $(x-a)\dots$ ). Более искушенные читатели добавят, что если все-таки считать и комплексные корни, да еще с их кратностью, то корней будет ровно  $n$  (это утверждение настолько важно, что называется «основной теоремой алгебры»). Наконец, некоторые вспомнят, что общие формулы в радикалах для корней многочлена существуют только при  $n \leq 4$ ; а при больших  $n$  корни выражаются лишь (как говорили век назад) в «высших трансцендентных функциях».

Но не об этом пойдет речь в статье. Я расскажу о двух менее известных и довольно неожиданных фактах:

1) число корней многочлена зависит не столько от его степени, сколько от числа и знаков его ненулевых коэффициентов;

2) хотя определить значения корней многочлена, вообще говоря, невозможно, существует простой способ узнать, сколько корней имеет любой многочлен на любом отрезке числовой прямой.

Под «корнями» в этой статье подразумеваются только действительные корни (так что многочлен  $x^2 + 1$  вовсе не имеет корней, а многочлен  $x^3 + x^2 + x - 3$  имеет единственный корень  $x = 1$ ).

## Теорема Ролля

В «Кванте» не раз упоминалась теорема Больцано о промежуточных значениях:

*если непрерывная функция имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то в некоторой точке отрезка она обращается в ноль*

(см. рис. 1). Менше повезло на страницах «Кванта» следующей, столь же очевидной, теореме Ролля:

*если на концах отрезка дифференцируемая функция имеет равные значения, то в некоторой точке отрезка ее производная равна нулю* (см. рис. 2). Доказательство очень простое: если бы на всем отрезке производная была положительной, то функция возрастала бы (а если отрицательной, то убывала бы), и значения на концах отрезка не были бы равны\*).

Теорема Ролля, конечно, не утверждает, что производная равна нулю только в одной точке отрезка — на пример, на рисунке 2 таких точек две. Из теоремы Ролля следует, что если многочлен  $f(x)$  имеет  $k$  корней, то у его производной  $f'(x)$  корней не меньше чем  $k-1$  (хотя может быть и больше). В частности, если многочлен  $n$ -й степени имеет максимальное число корней  $n$ , то и его производная имеет максимальное число корней.

Упражнения

1. Пусть  $f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-n)$ . Сколько корней у многочлена  $f'(x)$ ?

\*В этом рассуждении используется непрерывность производной, но теорема Ролля верна и без этого предположения.

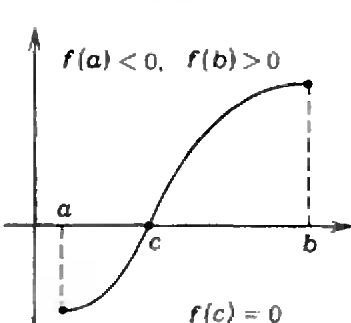


Рис. 1.

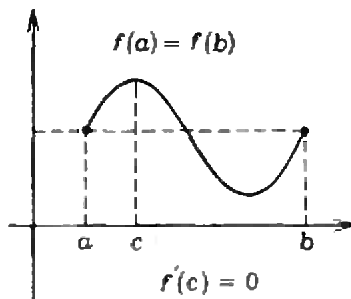


Рис. 2.

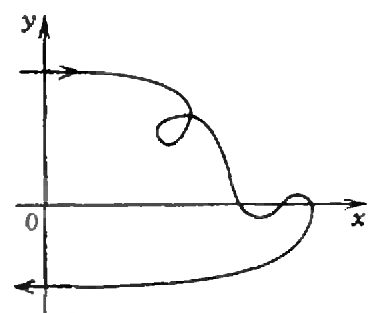


Рис. 3.

2. Докажите, что многочлен  $x^5 - 2x^3 + 2x^2 + ax^2 + bx + c$  при любых  $a, b, c$  не может иметь больше трех корней.

3\*. Докажите, что между корнями многочлена  $f(x)$  найдется корень многочлена  $f'(x) + af(x)$  ( $a$  — произвольное число).

### Геометрический смысл теоремы Ролля

В теореме Ролля идет речь о функции и ее производной. Изобразим эти «действующие лица» на одной картинке. Для этого нарисуем на плоскости  $xOy$  кривую, заданную параметрически:  $x = f(t), y = f'(t)$ ,  $t$  пробегает числовую прямую (рис. 3). Точки пересечения кривой с осью  $Oy$  отвечают корням уравнения  $f(t) = 0$ , а с осью  $Ox$  — корням уравнения  $f'(t) = 0$ .

Предположим, что  $f$  и  $f'$  не имеют общих корней. Если  $f$  — многочлен, то это означает отсутствие у  $f$  кратных корней (идея доказательства: если  $a$  — кратный корень многочлена  $f(x)$ , то  $f$  делится на  $(x-a)^2$ ; тогда  $f'$  делится на  $(x-a)\dots$ ). Поскольку  $f(t)$  и  $f'(t)$  не обращаются в нуль одновременно, кривая на рисунке 3 не проходит через начало координат  $O$ . Посмотрим на кривую из точки  $O$ .

Если в тот момент, когда  $f(t) = 0$ , производная  $f'(t) > 0$  (рис. 4), то кривая пересекает луч  $Oy$  слева направо (см. рис. 3). Если же при  $f(t) = 0$  производная  $f'(t) < 0$ , то кривая пересекает отрицательную полуось справа налево. В обоих случаях движение происходит по часовой стрелке относительно точки  $O$ . Поэтому между двумя пересечениями оси  $Oy$  кривая обязательно пересечет ось  $Ox$ . Т. е. между двумя корнями уравнения  $f(t) = 0$  найдется корень уравнения  $f'(t) = 0$ .

Упражнение 4. Может ли кривая касаться оси  $Oy$  (рис. 5)?

### Малочлены

«Малочлен» — это не математический термин. Так называются многочлены высокой степени, у которых сравнительно мало ненулевых коэффициентов. Например,

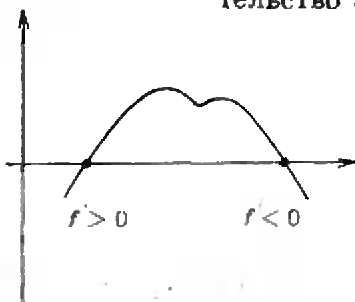


Рис. 4.

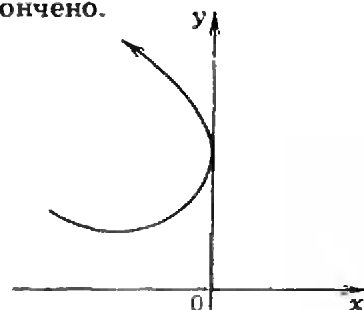


Рис. 5.

$x^{100} + 1$  или  $ax^n + bx^m$  — типичные малочлены. Главное свойство малочленов состоит в том, что

*малочлен имеет мало корней.*

Сейчас мы придадим этому высказыванию точный смысл.

Начнем с двучлена, т. е. многочлена, у которого ровно два ненулевых коэффициента. Общий вид двучлена  $f(x) = ax^n + bx^m$ . Сколько корней может иметь уравнение  $f(x) = 0$ ? Ясно, что  $ax^n + bx^m = 0$ , если  $x^m = 0$  или  $ax^{n-m} + b = 0$ . Первое уравнение имеет один корень (при  $m > 0$ ), а второе — не более двух (два — при четном  $n-m$  и отрицательном  $b/a$ ). Поэтому двучлен имеет не больше трех корней.

Верно и более общее утверждение: *многочлен, у которого ровно  $k$  коэффициентов отличны от нуля, имеет не более  $2k - 1$  корней.*

Доказательство будем вести индукцией по  $k$ . Возьмем многочлен  $f(x)$  с  $k+1$  ненулевыми коэффициентами. Если его свободный член равен нулю, разделим  $f(x)$  на максимально возможную степень  $x$ . В результате получится многочлен  $g(x)$  с ненулевым свободным членом и  $k+1$  ненулевыми коэффициентами.

При дифференцировании многочлена  $g(x)$  свободный член пропадает; поэтому  $g'(x)$  имеет не больше  $k$  ненулевых коэффициентов и, по предположению индукции, — не более  $2k - 1$  корней. По теореме Ролля многочлен  $g(x)$  имеет не более  $2k$  корней. У исходного же многочлена  $f(x)$  по сравнению с  $g(x)$  может быть только один дополнительный нулевой корень. Итак,  $f(x)$  имеет не более  $2k + 1 = 2(k+1) - 1$  корней, и доказательство закончено.



Рис. 6.

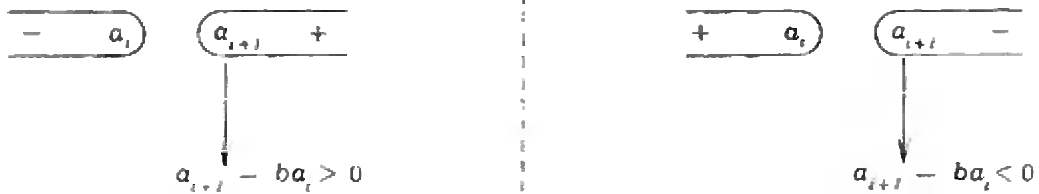


Рис. 7.

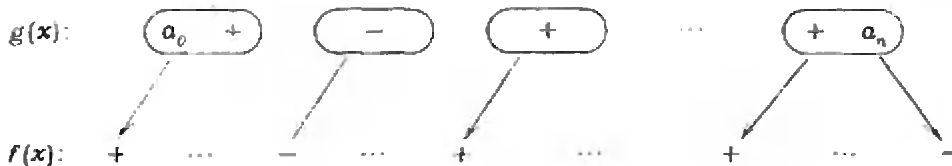


Рис. 8.

Оценка числа корней, которую мы получили, является точной: для любого  $k$  найдется многочлен, у которого ровно  $k$  ненулевых коэффициентов и  $2k - 1$  корней.

Упражнения

5. Постройте такой многочлен.

6\*. Сколько корней может иметь уравнение  $a_1 e^{\lambda_1 x} + a_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + a_n e^{\lambda_n x} = 0$  ( $a_1, \dots, a_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  — постоянные)?

### Правило Декарта

Утверждение предыдущего пункта о том, что  $k$ -член имеет не более  $2k - 1$  корней, становится слишком грубым, если интересоваться только *положительными* корнями (например, любой многочлен с неотрицательными коэффициентами вовсе не имеет положительных корней!). Более точным является следующее правило Декарта:

*число положительных корней многочлена не больше, чем число перемен знаков в последовательности его (ненулевых) коэффициентов.*

В частности, многочлен, у которого  $k$  ненулевых коэффициентов, не может иметь больше  $k - 1$  положительных корней — ведь в последовательности из его  $k$  ненулевых коэффициентов, конечно, не больше чем  $k - 1$  перемен знаков.

Упражнения

7. Докажите, что многочлен  $f(x) = x^3 - 2x + a$  при любом  $a$  имеет на интервале  $(1; \infty)$  не больше одного корня.

8. Выведите с помощью правила Декарта оценку из предыдущего пункта статьи для числа корней многочлена.

Для доказательства правила Декарта посмотрим, что происходит с коэффициентами многочлена при появлении нового положительного корня. Пусть  $f(x) = (x - b)g(x)$ , где  $g(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  и  $b > 0$ . Последовательность коэффициентов  $f(x)$  выглядит так:

$$a_0, a_1 - ba_0, a_2 - ba_1, \dots, a_n - ba_{n-1}, -ba_n. \quad (1)$$

Изобразим коэффициенты

$$a_0, a_1, \dots, a_n \quad (2)$$

многочлена  $g(x)$  схематически (рис. 6). Каждый овал на рисунке 6 обозначает группу подряд идущих коэффициентов одного знака. Посмотрим, что получается при переходе от последовательности (2) к последовательности (1) (рис. 7). Мы видим, что на границе двух овалов, т. е. в каждом месте перемены знаков последовательности  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , возникает тот же знак, что и в правом овале. Кроме того, в начале последовательности (1) стоит то же число, что в последовательности (2), а в конце последовательности (1) стоит число, знак которого противоположен знаку последнего числа в последовательности (2) — см. рисунок 8.

Итак, что бы ни стояло в новой последовательности на месте точек на

рисунке 8, число перемен знаков в ней больше, чем в старой. Это и значит, что каждый новый положительный корень многочлена увеличивает число перемен знаков в последовательности его коэффициентов.

Для завершения доказательства мы запишем произвольный многочлен  $f(x)$  в виде  $(x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_k) \times g(x)$ , где  $b_1 > 0, \dots, b_k > 0$ , а  $g(x)$  уже не имеет положительных корней. Число перемен знаков коэффициентов  $f(x)$  не меньше числа перемен знаков коэффициентов  $g(x)$ , увеличенного на  $k$ , т. е. не меньше  $k$ .

**Упражнения**

9\*. Докажите, что число положительных корней многочлена отличается от числа перемен знаков его коэффициентов на четное число (кратные корни считаются с их кратностью).

10\*. Докажите правило Декарта для функции  $f(x) = a_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + a_n e^{\lambda_n x}$ : если  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ , то число корней уравнения  $f(x) = 0$  не превосходит числа перемен знаков в последовательности  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

**Теорема Штурма**

Пришло время выполнить данное в начале статьи обещание и рассказать о том, как определить число корней любого многочлена  $f(x)$ . Для того чтобы перечислять корни многочлена, мы сконструируем своеобразный счетчик. При движении переменной  $x$  вдоль числовой оси этот счетчик будет срабатывать каждый раз, когда  $x$  проходит через корень многочлена. К сожалению, я не умею объяснять, как можно додуматься до конструкции этого счетчика; я просто покажу, как он устроен, и мы убедимся, что он действительно пересчитывает корни многочлена. Счетчик появится на сцене как «*deus ex machina*»<sup>\*</sup>.

Итак, возьмем многочлен  $f(x)$ , не имеющий общих корней со своей производной (как уже упоминалось, это значит, что  $f(x)$  не имеет кратных

корней). Построим последовательность многочленов убывающих степеней  $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ . Эта последовательность будет обладать тремя свойствами:

- 1)  $p_0(x) = f(x), p_1(x) = f'(x)$ ;
- 2) если  $p_k(x) = 0$  при некотором  $x$ , то числа  $p_{k-1}(x)$  и  $p_{k+1}(x)$  отличны от нуля и имеют разные знаки;
- 3) последний многочлен  $p_n(x)$  вовсе не имеет корней.

Такая последовательность многочленов называется *рядом Штурма*<sup>†</sup>. Как строить ряд Штурма, мы увидим чуть ниже. А пока предположим, что такой ряд у нас уже есть.

Мы хотим определить число корней многочлена  $f(x)$  на интервале  $(a; b)$  (не исключается, что  $a = \infty$  или  $b = \infty$ ). Начнем двигаться из точки  $a$  в точку  $b$  и будем (в духе правила Декарта!) следить за изменениями знаков в последовательности чисел

$$p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x). \quad (3)$$

Знаки могут меняться, лишь если  $x$  проходит через корень одного из многочленов  $p_i(x)$ . Посмотрим, как влияет такое событие на число перемен знаков в последовательности (3). Если  $x$  — корень исходного многочлена  $f(x) = p_0(x)$ , то, как видно из рисунков 3 и 4, происходит одно из двух: в начале последовательности знаки  $(- +)$  меняются на  $(+ +)$  или  $(+ -)$  — на  $(- -)$ . В обоих случаях *число перемен знаков уменьшается на единицу*. Если же  $x$  проходит через корень одного из многочленов  $p_k(x)$ , где  $0 < k < n$ , то в соответствии со свойством 2 ряда Штурма, знаки чисел  $p_{k-1}(x)$  и  $p_{k+1}(x)$  различны. Поэтому изменение знака  $p_k(x)$  не меняет числа перемен знаков в последовательности (3). Это выглядит так:

$$\begin{aligned} (- + +) &\leftrightarrow (- - +) \text{ или} \\ (+ + -) &\leftrightarrow (+ - -). \end{aligned}$$

Итак, число перемен знаков в ряду Штурма уменьшается на единицу тогда и только тогда, когда  $x$  прохо-

\* «Бог из машины» (лат.) — это выражение употребляется, когда в затруднительной ситуации появляется неожиданное обстоятельство, разрешающее все затруднения. В античном театре, когда у героев возникали непреодолимые трудности, в действие вмешивались боги, которые спускались на сцену сверху с помощью специального устройства, т. е. «машины».

† Штурм Жак (1803—1855) — французский математик, о творчестве которого «Квант» недавно рассказывал (№ 8 за 1989 год, с. 8—16).



$$\begin{array}{r}
 x^3 - 3x^2 + 7x - 4 \\
 \underline{x^3 \quad + \quad x} \\
 -3x^2 + 6x - 4 \\
 \underline{-3x^2 \quad - \quad 3} \\
 6x - 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 x^2 + 1 \\
 \hline
 x - 3
 \end{array}$$

частное

остаток

Рис. 9.

дит через корень исходного многочлена. Ряд Штурма — это и есть нужный нам счетчик! Чтобы найти число корней  $f(x)$  на интервале  $(a; b)$ , мы выпишем две последовательности:

$$\begin{aligned}
 & p_0(a), p_1(a), p_2(a), \dots, p_n(a); \\
 & p_0(b), p_1(b), p_2(b), \dots, p_n(b);
 \end{aligned}$$

вычисляем число перемен знаков в каждой из них и находим разность первого и второго чисел. Это и есть искомое число корней. (Конечно, если  $a$  или  $b$  равно  $\pm \infty$ , то под  $p(a)$  или  $p(b)$  тоже подразумевается  $\pm \infty$ . Если  $p(x)$  имеет четную степень, то  $p(\pm \infty) = +\infty$ , а если степень  $p(x)$  нечетна, то  $p(\pm \infty) = \pm \infty$ .)

Нам остается построить ряд Штурма, исходя из многочлена  $f(x)$ . Для этого нужно уметь делить многочлены с остатком. Если вы умеете делать это — очень хорошо, а если нет, скажу, что это ничуть не труднее, чем «уголком» делить числа. Как это делается, показывает пример на рисунке 9. Обратите внимание на то, что степень остатка всегда меньше степени делителя.

Ряд Штурма  $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots$  строится последовательно. Первые два его члена —  $f(x)$  и  $f'(x)$ . Чтобы построить его очередной член  $p_{k+1}(x)$ , разделим два предыдущих друг на друга:

$$p_{k-1}(x) = q(x)p_k(x) - p_{k+1}(x). \quad (4)$$

Следующий член  $p_{k+1}(x)$  — это остаток от деления, взятый с противоположным знаком (а  $q(x)$  — частное, которое нам не понадобится). Поскольку степени многочленов  $p_k(x)$  все время уменьшаются, деление не может продолжаться бесконечно долго, и на некотором шаге остаток  $p_{n+1}(x)$  станет равным нулю.

Способ, которым строится последовательность  $p_0, p_1, p_2, \dots$ , очень похож на нахождение наибольшего общего делителя двух чисел посредством алгоритма Евклида. И результат у него тот же: последний из многочленов  $p_n(x)$  — наибольший общий делитель многочленов  $f(x)$  и  $f'(x)$ . Доказывается это точно так же, как и в случае обычного алгоритма Евклида (попробуйте провести рассуждение сами!). Отсюда, кстати, следует, что  $p_n(x)$  вовсе не имеет корней — ведь каждый корень  $p_n(x)$  был бы общим корнем многочленов  $f(x)$  и  $f'(x)$ , а таких корней по предположению нет.

Осталось убедиться в том, что если  $p_k(x) = 0$ , то числа  $p_{k-1}(x)$  и  $p_{k+1}(x)$  отличны от нуля и имеют противоположные знаки. Если  $p_{k+1}(x) = 0$ , то из уравнения (4) следует, что и  $p_{k-1}(x) = 0$ . Применяя это рассуждение к тому же уравнению, но с заменой  $k$  на  $k-1$ , мы увидим, что  $p_{k-2}(x) = 0, p_{k-3}(x) = 0$  и т. д. Значит,  $p_1(x) = p_0(x)$ , т. е.  $f'(x) = f(x) = 0$ , а этого быть не должно.

Следовательно,  $p_{k-1}(x)$  и  $p_{k+1}(x)$  отличны от нуля. Но тогда из уравнения (4) следует, что они имеют разные знаки — для этого мы и поставили в этом уравнении знак минус перед остатком!

Итак, все три свойства ряда Штурма выполнены, и счетчик корней построен. Его конструкция как бы специально предназначена для вычислений с помощью компьютера, для которого деление многочленов с остатком не представляет проблемы.

Если вы хотите поработать с рядом Штурма, возьмите совсем простой многочлен  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ .

**Упражнение 11.** Постройте ряд Штурма и найдите число корней многочлена  $f(x) = x^3 - 3x + 1$  на отрезках  $[-3; 0]$  и  $[0; 3]$ .

А если вы хотите узнать больше о теореме Штурма и ее приложениях (в том числе, в электротехнике!), то рекомендую вам книгу М. М. Постникова «Устойчивые многочлены» (М.: Наука, 1981).



# ПРИЛИВНЫЕ СИЛЫ

Кандидат физико-математических наук  
В. Е. БЕЛОНУЧКИН

От малых причин бывают весьма важные последствия.

К. Прутков

Кто не знает, что в приливах виновата Луна? И Кеплер говорил: «Тяжесть есть взаимное стремление всех тел». И Ньютон свой четвертый закон назвал законом всемирного тяготения. Обычно мы воспринимаем силу тяжести как силу притяжения к Земле. Не вдаваясь в подробный разбор различий между этими двумя силами, обратим внимание лишь на одно обстоятельство: и нас с вами, уважаемый читатель, и «свободно падающее тело», и воды мирового океана притягивает не только Земля, но и Луна. Правда, Луна в 81 раз легче Земли (точнее, масса у нее в 81 раз меньше), да и находится она от нас подальше. Чтобы оценить это «подальше», надо сравнить расстояние до Луны с расстоянием до центра Земли (с радиусом Земли) — разница в 60 раз. Так что сила притяжения Луны чуть не в 300 тысяч раз меньше «силы тяжести».

Может быть, эта цифра даст нам ключ к оценке высоты прилива? Только вот с чем бы сравнить эту высоту? Напрашиваются два естественных масштаба.

Первый масштаб — глубина океана. Она в среднем «всего» 4 километра. Если поделить на 300 тысяч, получим чуть больше сантиметра — маловато.

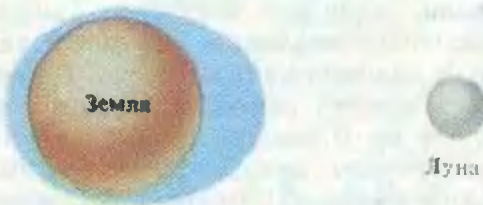


Рис. 1.

Второй масштаб — радиус Земли. Но тут получается около 20 метров — опять не то, теперь слишком много.

Так что же, совсем не помогут нам соображения размерности, которыми мы пытались сейчас воспользоваться? Да нет, помогут, если мы чуть аккуратнее разберемся, что же такое приливы, или, как их еще называют, приливообразующие силы.

Между прочим, 20 метров — не такая уж бессмысленная цифра. Именно таким был бы «прилив», если бы нам удалось какими-то посторонними силами закрепить на месте Землю и Луну. Правда, картина была бы совсем не такой, как в действительности, а такой, как на рисунке 1: со стороны Луны — прилив, на противоположной стороне — отлив. А ведь мы знаем, что и там и там — прилив, и действительная картина, наверное, такая, как на рисунке 2.

Дело в том, что Луна притягивает не только океан, падающие на Землю или находящиеся на ней тела, но и саму нашу планету. Земля падает на Луну с ускорением как раз в 300 тысяч раз меньшим, чем  $g$  — ускорение «свободного» падения тел на Землю. И океан падает на Луну с таким же ускорением, но только в среднем: те его части, которые поближе к Луне, имеют чуть большее «ускорение свободного падения на Луну»; те, которые подальше, падают с меньшим ускорением. Отличие этих ускорений от среднего есть приливное (приливообразующее) ускорение.

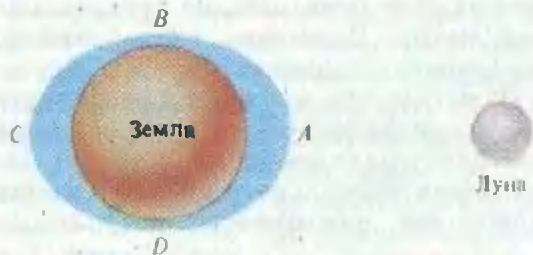


Рис. 2.



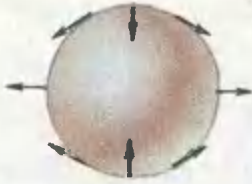


Рис. 3.

Попробуем это ускорение рассчитать. Положим, Земля находится на расстоянии  $R$  от Луны, масса Луны —  $m$ . Тогда ускорение падения Земли на Луну  $a_0 = Gm/R^2$ . Какая-то часть Земли (океана) ближе к Луне — примерно на радиус Земли, так что расстояние до Луны для этой части  $R - r$ . Ее ускорение  $a_1 = Gm/(R - r)^2$ . Разность ускорений (приливное ускорение) —

$$a_n = a_1 - a_0 = \\ = Gmr(2R - r)/R^2(R - r)^2 \approx \frac{2Gmr}{R^3}.$$

Пусть  $M$  — масса Земли. Преобразуем немного полученную формулу и придем к выражению

$$a_n = 2g \left(\frac{m}{M}\right) \left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

В нашей модели это максимальное значение приливообразующего ускорения.

Такое ускорение будет испытывать вода в точке  $A$  на рисунке 2; нетрудно показать, что и в точке  $C$  ускорение будет таким же. Там оно направлено от Луны, т. е. тоже создает прилив. Точки  $B$  и  $D$  «падают» со средним ускорением, с ускорением  $a_0$ .

Максимальное приливное ускорение, оказывается, меньше  $g$  не в 300 тысяч, а в 9 миллионов раз! И вот если радиус Земли поделить на это число, то мы получим как раз то, что надо — чуть меньше трех четвертей метра. Примерно такова высота прилива в открытом океане.

Заметим, что мы все же рассматриваем довольно грубую модель. Если все делать аккуратно, то картина получается несколько иной. Приливное ускорение оказывается постоянным по величине, равным  $\frac{3}{2}g \left(\frac{m}{M}\right) \left(\frac{r}{R}\right)^3$ ,



Рис. 4.

а направление его меняется так, как показано на рисунке 3.

Но это еще полбеды. Хуже другое. Приходится признаться, что рисунок 2 не намного правдивее, чем рисунок 1. Действительная картина — на рисунке 4: все повернуто почти на 90 градусов!

Вообще говоря, понятно, что прилив должен отставать от Луны. Действительно, когда некоторая точка Земли находится в положении  $A$  (рис. 2), приливные силы максимальны, ускорение воды вверх максимально. Но Земля вращается, и эта точка движется к положению  $B$ , где ускорение падает, но еще направлено вверх. Так что с фазой приливов тоже надо бы разобраться поподробнее.

Верную картину дает динамическая модель приливов, суть которых такова. Вода океана под действием приливных сил совершает вынужденные колебания. Фаза таких колебаний зависит от соотношения между собственной частотой колебаний системы и частотой изменения вынуждающей силы.

Некоторое представление о влиянии частоты силы на соотношение фаз можно получить на обыкновенных детских качелях. Раскачаем качели и посмотрим, как они ведут себя, когда мы их не трогаем, т. е. понаблюдаем за собственными колебаниями качелей. Период этих колебаний, как правило, одна-две секунды. Теперь будем очень медленно отклонять качели от положения равновесия. К примеру, 5 секунд ведем их в одну сторону, те же 5 секунд возвращаем их к положению равновесия, 5 секунд отводим в другую сторону и так далее. Ясно (и мы это почувствуем), что усилия наши тем больше, чем больше

отклонение, и направлены они в ту сторону, куда мы отклоняем качели. В конце концов, если все это происходит очень медленно, квазистатически, мы фактически в каждый момент просто удерживаем качели в том положении, в котором они в данный момент находятся. Полная аналогия со статической моделью приливов — отклонение в фазе с внешней силой.

А вот если мы попробуем «трясти» качели так, чтобы направление силы менялось пять раз в секунду, все будет по-другому. Качели только собрались двигаться влево, куда мы их потянули в предыдущий момент, а мы их уже толкаем вправо. Сразу сдвинуть их вправо не удастся, надо сначала притормозить их «левый уклон», потом они будут набирать «правую» скорость, а мы их уже снова тянем влево. Тут проследить за соотношением фаз силы и отклонения труднее, но очень похоже, что теперь эти две величины находятся в противофазе.

Рассмотрим другую модель. Ее, может быть, не так удобно трактовать на языке приливных сил, хотя внешне она гораздо больше напоминает океан на Земле. Зато уж наверняка в этой модели наглядно видна смена фазовых соотношений при переходе через резонансную частоту.

Нальем в прозрачную банку воды и пометим ее уровень. Подвесим банку (рис. 5) и будем медленно (частота внешней силы меньше собственной частоты колебаний маятника) отклонять ее от положения равновесия. Поверхность воды будет оставаться практически горизонтальной. На стороне банки, ближней к положению равновесия, — прилив, на противопо-

ложной — дальней стороне — отлив. Отпустим банку, пусть она качается сама по себе. Поверхность воды после некоторых колебаний установится параллельно дну, приливов не будет — нет приливообразующих сил. А теперь заставим банку колебаться быстрее, чем ей «хочется». Например, привяжем ее достаточно мягкими пружинами к опорам, стоящим на земле. Сама банка будет качаться с большей частотой, а вода «пытается» качаться с прежней частотой (собственных колебаний), банка не успевает ее как следует разогнать. Можно заметить, что прилив теперь на дальнем берегу (на дальней от положения равновесия стороне банки), а на ближнем — отлив.

Теперь нам осталось узнать собственную частоту колебаний мирового океана, и мы сообразим, в фазе или в противофазе должны быть приливы с приливными силами. И тут нам помогут цунами. Где-то под водой произошло землетрясение («моретрясение»), вода в океане вздыбилась — возник прилив. Совершенно не важно, что его вызвала не Луна, а другая причина. Что будет дальше? По океану побежит волна. С какой скоростью? Попробуем опять призвать на помощь соотношения размерностей. По-видимому, скорость связана с ускорением силы тяжести. Вода поднялась, сила тяжести старается вернуть ее на место, без  $g$  тут не обойтись. Помножить бы это  $g$  на какую-нибудь длину, и у нас будет величина с размерностью квадрата скорости. Возьмем в качестве такой длины глубину океана  $H \approx 4$  км (волна ведь бежит по океану), примем  $v = \sqrt{gH}$  и получим верный ответ — 200 метров в секунду. Значит, если бы не мешала суша, вокруг Земли волна обожала бы за 56 часов. А если бы на противоположных сторонах Земли возникли две такие волны и побежали друг за другом, через каждую точку волна пробежала бы раз в 28 часов. Зачем нам две волны? Да ведь Луна именно это и делает: поднимает две приливные волны — под собой и на противоположной стороне Земли — и гонит их по

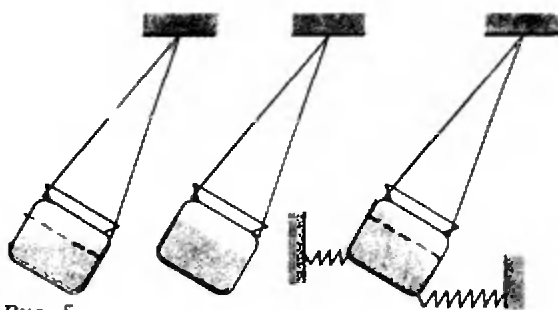


Рис. 5.





Рис. 6.

океану. Только Земля вращается слишком быстро, и период внешней силы — приливообразующей силы Луны — всего 12 часов 25 минут. Ну, что это скорее полсутки, чем сутки, мы уже разобрались. А лишние 25 минут? Так ведь Луна обращается вокруг Земли, причем в том же направлении, в каком вращается сама Земля. Луна старается догнать точку А, когда та от нее убегает в положение В. Не очень-то это удается, но 50 минут лишку набегают. На эти 50 минут время прохождения Луны через определенный меридиан больше суток.

Итак, частота приливообразующей силы больше частоты собственных колебаний океана, приливы в противофазе с силой: там, где Луна сильнее всего тянет воду вверх, — отлив, а там, где гонит к центру Земли, — прилив. Правда, злопамятный читатель, наверное, вспомнит, что было сказано о действительной картине приливов и отливов: «все повернуто почти на 90 градусов», т. е. почти в противофазе. Это объясняется тем, что точно в фазе или в противофазе с внешней силой колебания бывают только при полном отсутствии потерь энергии, отсутствии трения. А если трение почти отсутствует, то и колебания почти в фазе или почти в противофазе.

С фазой теперь все в порядке. Зато неожиданно возникают осложнения с амплитудой. Вот если бы частота внешней силы была заметно меньше собственной, тогда амплитуда просто обязана была бы быть близкой к той, которая получается из статической модели. А так нам приходится считать согласие расчета с реальной величи-

ной в значительной степени счастливым совпадением. Хорошо еще, что не получилось резонанса, а то без учета трения амплитуда должна была бы возрасти до бесконечности...

Насколько важны резонансные явления в организации сверхвысоких приливов, можно увидеть из экологической экспертизы проектов приливных электростанций.

На четырехсоткилометровом фронте от воспелой Мелвиллом столпцы китобоев Нантакета до не менее знаменитого Ярмута океанский прилив стандартной метровой высоты втекает в залив Мэн (рис. 6). Разогнавшись в более узком заливе Фанди, набрав четырехметровую высоту, приливная волна врывается в тесные заливчики Шигнекто и Майнас бейсин. В этом последнем амплитуда прилива достигает рекордной для всей Земли величины — 6 метров. Разность уровней в приливе и отливе — 12 метров. Где же и строить приливные электростанции, как не тут?

В одном из вариантов проекта предполагается отделить плотиной от Шигнекто бухту Шеподи — меньше 0,2 % площади залива Мэн. Второй вариант — перегородить Майнас бейсин, отрезать чуть больше полпроцента залива.

Электростанции отбирают энергию, приливная волна возле плотины уменьшается в первом случае на 20—25 сантиметров, во втором — на 30—35 сантиметров («В мире науки», 1988, № 1). А как это скажется в масштабах залива Фанди, всего залива Мэн? Разольем «недостачу» по просторам заливов и получим оценки: для залива Фанди — 0,2 миллиметра в первом варианте, около сантиметра во втором; а в заливе Мэн изменение надо искать с микроскопом. Не так ли?

Ничего подобного. Можно даже сказать — все наоборот. Дело в том, что меняется резонансная частота колебаний водной массы залива Мэн. Вместо 13 часов 20 минут период колебаний становится равным 13 часам 10 минутам.

(Окончание см. на с. 34)

# Задачник „Кванта“

## Задачи

M1196—M1200, Ф1203—Ф1207

Этот раздел ведется у нас по номерам в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 февраля 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала (или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник „Кванта“ № 12—89» и номера задачи, решения которых вы посылаете, например «M1196» или «Ф1203». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник „Кванта“, новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Задачи M1196—M1200 предлагались в этом году на Ленинградской городской математической олимпиаде.

**M1196.** Дано несколько (не менее двух) ненулевых чисел. Разрешается стереть любые два числа  $a$  и  $b$  и записать вместо них числа  $a + b/2$  и  $b - a/2$ . Докажите, что после нескольких таких операций нельзя получить исходный набор чисел.

Д. В. Фокин

**M1197.** В треугольнике  $ABC$  точка  $M$  лежит на стороне  $AB$ , точка  $N$  — на стороне  $BC$ ,  $O$  — точка пересечения отрезков  $CM$  и  $AN$ . Известно, что  $AM + AN = CM + CN$ . Докажите, что  $AC + AB = CO + CB$ .

А. С. Меркуров

**M1198\***. Назовем словом строчку из 10 цифр 0 и 1. Два слова будем считать синонимами, если одно можно получить из другого несколькими операциями следующего вида: из слова вычеркивается несколько подряд идущих цифр, сумма которых четна, и на их место вписываются те же цифры, но в обратной порядке. Каково максимальное число слов, среди которых нет синонимов?

Д. В. Фокин

**M1199\***. Докажите, что если уравнение  $ax^2 + (c - b)x + (e - d) = 0$  имеет корень, больший 1, то уравнение

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

имеет хотя бы один корень.

Д. В. Фокин

**M1200\***. Для каких  $k$  можно расположить на окружности а) 10; б) 100; в)  $n$  дуг так, чтобы каждая из них пересекалась ровно с  $k$  другими?

С. А. Генкин

**Ф1203.** На широковатой железнодорожной платформе стоит равномерно заполненный контейнер высотой  $H$  и шириной  $L$ , имеющий с одной стороны маленькие колеса (рис. 1). При разгоне поезда влево контейнер начинает скользить вправо по платформе, если ускорение разгона превышает  $a_0$ . С каким минимальным ускорением должен затормозить поезд, чтобы контейнер начал скользить влево? Трением качения пренебречь.

Д. Ю. Григорьев

**Ф1204.** Небольшой упругий брусок массой  $m$  может двигаться без трения внутри прямоугольной коробки такой же массы. Коробка находится на столе, покрытом тонким слоем масла (рис. 2). Сила трения коробки о стол зависит только от скорости  $u$  движения коробки по столу и равна  $F = -\gamma u$ . В начальный момент времени коробка покоится, а брусок находится у ее левой стенки и имеет скорость  $v_0$ , направленную вправо. Сколько ударов о коробку совершит брусок, если длина коробки  $L$  много больше размеров бруска?

Д. Ю. Григорьев

# Задачник „Кванта“

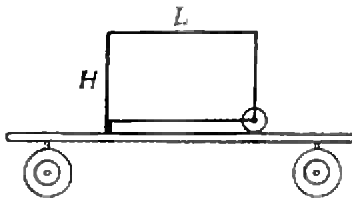


Рис. 1.

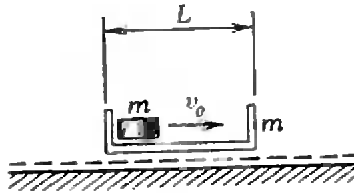


Рис. 2.

**Ф1205.** При прочих равных условиях в какой шубе больше потери тепла на излучение — в белой или в черной?

О. Ю. Никишина

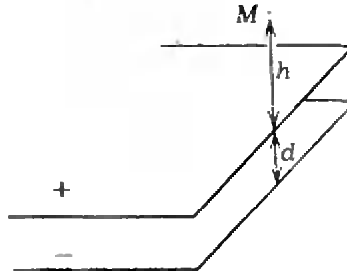


Рис. 3.

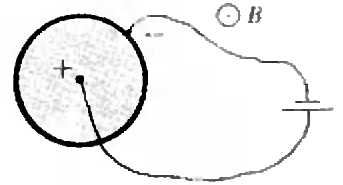


Рис. 4.

**Ф1206.** Две длинные и широкие полосы равномерно заряжены с плотностью зарядов  $+\sigma$  (верхняя) и  $-\sigma$  (нижняя). Найти величину и направление напряженности электрического поля в точке  $M$ , которая находится на высоте  $h$  над краем полос на оси, лежащей в их плоскости симметрии (рис. 3). Расстояние между полосами  $d$  мало по сравнению с  $h$ .

А. И. Семенов

**Ф1207.** Раствор электролита налит в цилиндрический сосуд, помещенный в вертикальное магнитное поле. Между электродом, проходящим вдоль оси цилиндра, и вторым электродом, которым является боковая поверхность сосуда, все время поддерживается разность потенциалов (рис. 4). Что вы можете сказать о поведении раствора в описанной ситуации?

А. И. Буздин

## Решения задач

М1171—М1175, Ф1183—Ф1187

**М1171.** Обозначим сумму  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$  через  $h_n$ . Докажите (для каждого натурального  $n$ ) неравенство

$$\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{2h_2^2} + \frac{1}{3h_3^2} + \dots + \frac{1}{nh_n^2} < 2.$$

Заметим, что при  $k > 2$

$$\frac{1}{h_{k-1}} - \frac{1}{h_k} = \frac{1}{kh_{k-1}h_k} > \frac{1}{kh_k^2}.$$

Суммируя эти неравенства по  $k=2, 3, \dots, n$ , получим неравенство

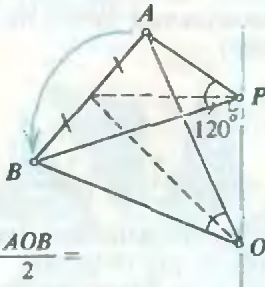
$$\frac{1}{2h_2^2} + \frac{1}{3h_3^2} + \dots + \frac{1}{nh_n^2} < \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_n} < 1$$

( $h_1 = 1$ ). Остается добавить к обеим частям  $1/h_1^2 = 1$ .

Л. Д. Курьяндчик

## Задачник „Квант“

**M1172.** Какой наибольший угол могут составлять между собой отрезки  $AO$  и  $OB$ , выходящие из начала  $O$  прямоугольной системы координат в пространстве, если точка  $A$  имеет координаты  $(x, y, z)$ , а точка  $B$  — координаты  $(y, z, x)$ ?



$$\begin{aligned} \sin \frac{\angle AOB}{2} &= \\ &= \frac{AB}{2OA} < \frac{AB}{2AP} = \sin 60^\circ \end{aligned}$$

Ответ:  $120^\circ$ . В самом коротком доказательстве используется скалярное произведение векторов  $OA \cdot OB$ :

$$\begin{aligned} \cos \angle AOB &= \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{OA \cdot OB} = \frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x+y+z)^2}{x^2 + y^2 + z^2} - \\ & - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2} = \cos 120^\circ. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\angle AOB \leq 120^\circ$ , причем равенство достигается для точек  $A$ , лежащих в плоскости  $x + y + z = 0$ .

Можно доказать это неравенство и геометрически, заметив, что преобразование пространства, переводящее точку  $A(x, y, z)$  в  $B(y, z, x)$  есть поворот на  $120^\circ$  вокруг прямой  $x = y = z$ . Отсюда сразу следует, что угол  $AOB$  не превосходит угла поворота (см. рисунок) и равен ему только когда отрезок  $OA$  перпендикулярен оси поворота.

С. Н. Быхков

**M1173\*.** Через одну точку внутри треугольника площади  $S$  проведены три прямые так, что каждую сторону треугольника пересекают две из них (рис. 1). Докажите, что для площадей  $S_1, S_2, S_3$  трех образовавшихся при этом треугольников выполняется неравенство

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \geq \frac{9}{S}.$$

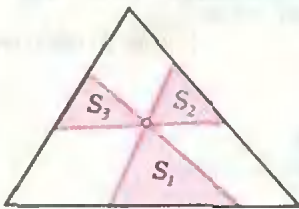


Рис. 1.

Мы докажем два неравенства, по-разному усиливающих неравенство задачи.

1. Покажем, что неравенство задачи справедливо для любых трех треугольников с общей вершиной  $O$  внутри данного треугольника  $ABC$ , основания которых лежат на его сторонах (рис. 2).

Ясно, что для заданной точки  $O$  наименьшее значение левой части неравенства будет достигаться для треугольников  $OAB, OBC$  и  $OCA$ . Тогда  $S = S_1 + S_2 + S_3$  и в силу неравенства  $a + 1/a \geq 2$  при  $a > 0$

$$\begin{aligned} \frac{S}{S_1} + \frac{S}{S_2} + \frac{S}{S_3} &= 3 + \left(\frac{S_2}{S_1} + \frac{S_1}{S_2}\right) + \left(\frac{S_3}{S_1} + \frac{S_1}{S_3}\right) + \left(\frac{S_3}{S_2} + \frac{S_2}{S_3}\right) \geq \\ &\geq 3 + 3 \cdot 2 = 9. \end{aligned}$$

Равенство достигается, когда  $S_1 = S_2 = S_3$ , т. е.  $O$  — точка пересечения медиан.

2. Теперь покажем, что для трех треугольников, рассматриваемых в условии задачи, справедливо более

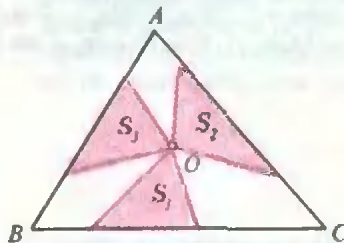


Рис. 2.

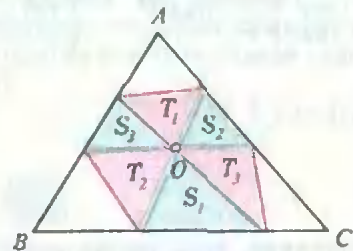


Рис. 3.



# Задачник „Квант“

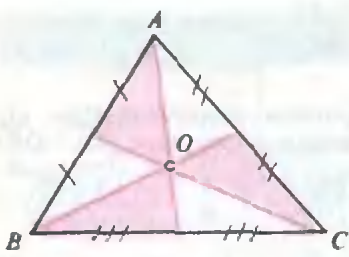


Рис. 4.

сильное неравенство:

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \geq \frac{18}{S}.$$

Соединим концы данных отрезков так, чтобы образовались еще три треугольника (рис. 3); пусть их площади равны  $T_1, T_2, T_3$ . Выражая площади всех шести треугольников через их стороны, выходящие из вершины  $O$ , и углы между этими сторонами, мы легко получим, что  $S_1 S_2 S_3 = T_1 T_2 T_3$ . Теперь воспользуемся тем, что среднее арифметическое нескольких чисел не меньше их среднего геометрического:

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} &\geq \frac{3}{\sqrt[3]{S_1 S_2 S_3}} = \frac{3}{\sqrt[3]{S_1 S_2 S_3 T_1 T_2 T_3}} \geq \\ &\geq \frac{3 \cdot 6}{S_1 + S_2 + S_3 + T_1 + T_2 + T_3} \geq \frac{18}{S} \end{aligned}$$

(общая площадь всех шести треугольников, конечно, не больше  $S$ ). Равенство здесь достигается, когда  $S_1 = S_2 = S_3 = T_1 = T_2 = T_3 = S/6$ , т. е. когда данные отрезки — медианы треугольника (рис. 4).

Г. И. Зайцев, В. Н. Дубровский, В. В. Прасолов

**M1174\*.** Последовательность целых чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots$  задается условиями  $a_1 = 1, a_2 = 12, a_3 = 20, a_{n+3} = 2a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Докажите, что для любого номера  $n$  число  $1 + 4a_n a_{n+1}$  — квадрат целого числа.

$a_n$	$4a_n a_{n+1} + 1$	$q_n$
1	49	7
12	961	31
20	5041	71
63	39409	197
154	...	...

Выписав несколько первых членов последовательности, как это сделано на полях, можно догадаться, что  $1 + 4a_n a_{n+1} = q_n^2$ , где  $q_n = a_{n+2} - a_{n+1} - a_n$ ; например, при  $n = 1$  и  $n = 2$  получаются такие равенства:  $1 + 4 \cdot 12 = (20 - 12 - 1)^2, 1 + 4 \cdot 12 \cdot 20 = (63 - 20 - 12)^2$ .

Воспользуемся методом индукции: докажем, что из предположения  $1 + 4a_{n-1} a_n = q_{n-1}^2$  вытекает равенство  $1 + 4a_n a_{n+1} = q_n^2$  (при  $n = 2, 3, \dots$ ). Как следует из условия задачи,  $q_n = a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = a_{n-1} + a_n - a_{n-1} = q_{n-1} + 2a_n$ . Поэтому

$$\begin{aligned} 1 + 4a_{n-1} a_n &= q_{n-1}^2 = (q_n - 2a_n)^2 = \\ &= q_n^2 - 4a_n q_n + 4a_n^2 = q_n^2 - 4a_n(a_{n+1} + a_n - a_{n-1}) + \\ &\quad + 4a_n^2 = q_n^2 + 4a_n a_{n-1} - 4a_n a_{n+1}, \end{aligned}$$

откуда  $1 + 4a_n a_{n+1} = q_n^2$ .

Из нашего решения ясно, что при любых начальных членах для последовательности с рекуррентным условием  $a_{n+2} + a_n = 2(a_{n+1} + a_n)$  величина  $(a_{n+2} - a_{n+1} - a_n)^2 - 4a_n a_{n+1}$  постоянна и не зависит от  $n$ .

Н. Б. Васильев

**M1175\*.** При каких натуральных  $n$  верно следующее утверждение: как бы

Докажем общее утверждение: при любом расположении выпуклых многоугольников на плоскости один из них можно выдвинуть (сколь угодно далеко по некоторому



ни были разложены на плоскости несколько непараллельных  $n$ -угольников, один из них можно выдвинуть по некоторому направлению, не задевая остальных? (Поворачивать  $n$ -угольник нельзя, т. е. все лучи, выходящие из точек выбранного  $n$ -угольника в нужном направлении, не должны задевать остальных  $n$ -угольников.)

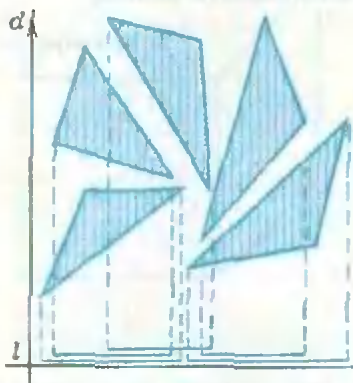


Рис. 1.

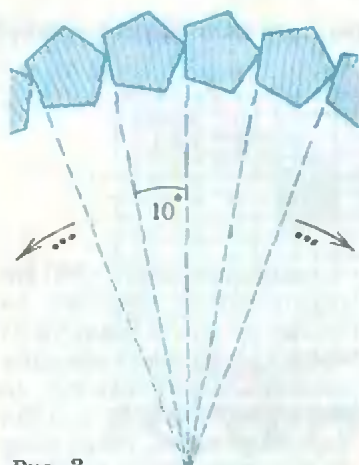


Рис. 2.

## Загадки „Кванта“

направлению  $d$ ), не задевая остальных. Такой многоугольник найдется для каждого направления  $d$ .

Рассмотрим «проекции» многоугольников на прямую  $l$ , перпендикулярную направлению  $d$ , причем при изображении пресекций будем указывать, какой из многоугольников расположен выше ( $d$  мы считаем направлением «вверх», рис. 1); здесь существенна выпуклость многоугольников.

Теперь достаточно доказать следующее утверждение — лемму о коврах: если отрезок «коридор» покрыт несколькими отрезками «коврами», то обязательно найдется ковер, никакая часть которого не покрыта другим — верхний ковер.

Очевидно, мы можем считать, что нет ковра, у которого имеется два открытых участка, разделенных закрытым: иначе мы могли бы рассмотреть лишь те ковры, которые лежат сверху на этом закрытом участке, и среди них искать верхний ковер. Точно так же можно исключить из рассмотрения (убрать) целиком закрытые ковры.

Предположив, что «верхнего» ковра нет, т. е. что на каждом ковре есть и открытый, и закрытый участки, мы тут же приходим к противоречию: к левому концу коридора примыкает ковер, у которого открытый участок — левый; примыкая к этому участку на этом ковре, лежит другой «открытый слева» ковер, и так далее. Эта цепочка не может оборваться (между тем к правому концу коридора примыкает, конечно, ковер, «открытый справа»).

Лемма о коврах доказана. Ясно, что многоугольник, соответствующий «верхнему» ковра, можно без помех двигать вверх в направлении  $d$ .

По поводу этой задачи сделаем несколько замечаний.

1. Аналог «леммы о коврах» для фигур на плоскости, очевидно, неверен. Неверен и аналог утверждения для выпуклых многогранников: Г. А. Гальперин указал пример нескольких «плит», ни одну из которых нельзя вытащить, не сдвигая остальных (в этом примере «наружные» грани 12 плит образуют додекаэдр, а «швы» — грани, которыми они «почти соприкасаются», — выбраны так, что у каждой плиты по крайней мере два несоседних «шва» образуют с наружной гранью угол больше  $90^\circ$ ).

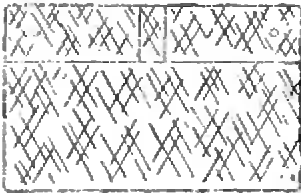
2. В первоначальной формулировке авторов задачи В. Г. Ильичева и Д. А. Терешина была еще дополнительная оговорка:  $n$ -угольник разрешено двигать лишь в направлении, перпендикулярном его стороне; при этом меняется и ответ: например, нетрудно придумать семейство 5-угольников, ни один из которых нельзя сдвинуть таким образом (рис. 2).

Н. Б. Васильев

**Ф1183.** Автобус движется с постоянной скоростью  $u=60$  км/ч, по болгу стоя

Картина, образованная дождевыми каплями на стекле, симметрична относительно вертикали. Из этого можно сделать вывод, что ветер сносит капли в направлении

на остановках. На улице ветер и идет дождь. Дождевые капли образовали на боковом стекле автобуса такую картину, как показано на рисунке. Скорость и направление ветра не меняются. Какова скорость падения капель дождя? Что можно сказать о скорости ветра? Дорога прямая, автобус не разворачивается.



## Задачник „Квант“

нии движения автобуса, причем составляющая скорости ветра, параллельная направлению движения, в два раза меньше скорости движения автобуса:

$$v_{\text{пар}} = u/2 = 30 \text{ км/ч.}$$

Как видно из рисунка, на остановках струи дождя образуют с вертикалью угол  $\alpha \approx 30^\circ$ ; следовательно, скорость падения капель

$$v_{\text{к}} = v_{\text{пар}} \operatorname{ctg} \alpha \approx 52 \text{ км/ч.}$$

О составляющей скорости ветра, перпендикулярной направлению движения, ничего сказать нельзя.

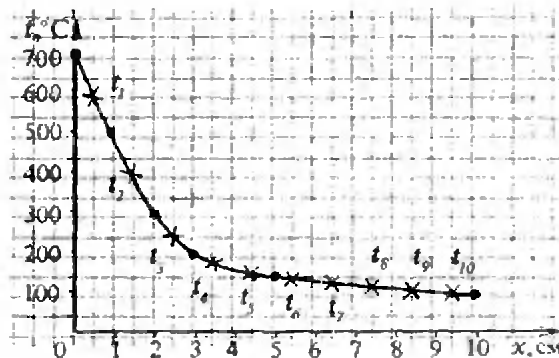
А. В. Андрианов

**Ф1184.** Железный пруток цилиндрической формы длиной 10 см нагрели в пламени газовой горелки. Температура горячего конца оказалась  $700^\circ\text{C}$ , на расстоянии 1 см от него —  $500^\circ\text{C}$ , 2 см —  $300^\circ\text{C}$ , 3 см —  $200^\circ\text{C}$ , 5 см —  $150^\circ\text{C}$ , температура другого конца прутка —  $100^\circ\text{C}$ . Через одну минуту температура выравнялась и оказалась равной  $200^\circ\text{C}$ . Оценить количество теплоты, которое пруток за это время потерял. Удельная теплоемкость железа  $460 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ , масса прутка 15 г.

Если потерь тепла нет, то установится температура

$$t_{\text{общ}} = \frac{1}{10} (t_1 + t_2 + \dots + t_{10}),$$

где  $t_i$  — средние температуры кусочков прутка длиной



по одному сантиметру (см. рисунок). В нашем случае

$$t_{\text{общ}} = \frac{1}{10} (600 + 400 + 250 + 180 + 150 + 150 + 130 + 110 + 100 + 100) = 218^\circ\text{C}.$$

Это означает, что потери тепла

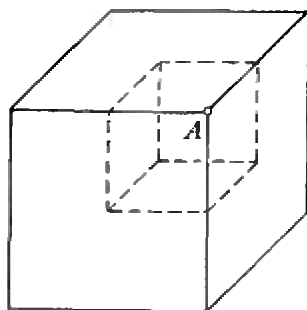
$$Q = cm(t_{\text{общ}} - t_{200}) \approx 0,12 \text{ кДж.}$$

Число получено, конечно, приближенно, и оно может быть несколько иным — в пределах  $\pm 10\%$ .

А. Р. Зильберман

## Задачник „Квант“

**Ф1185.** Однородно заряженный куб создает в своей вершине электрическое поле напряженностью  $E_0$ . Из куба удаляют кубик вдвое меньших размеров (см. рисунок). Чему теперь будет равна напряженность поля в точке  $A$ ?



Найдем, как зависит напряженность поля, созданного однородно заряженным кубом в своей вершине, от линейных размеров куба. Из соображений симметрии ясно, что эта напряженность направлена вдоль соответствующей большой диагонали куба. Поэтому можем записать

$$E = \sum_i \frac{\rho \Delta V_i}{r_i^2} \cos \alpha_i,$$

где  $\rho$  — плотность заряда,  $\Delta V_i$  — малые объемы, на которые мысленно разбивается весь куб,  $r_i$  — расстояние от  $i$ -го объема до рассматриваемой вершины куба,  $\alpha_i$  — угол между направлением из объема на вершину и большой диагональю куба.

Для куба с ребром  $l$

$$\Delta V_i \sim l^3, \quad r_i^2 \sim l^2,$$

а  $\alpha_i$  для всех кубов одинаковы; следовательно,

$$E \sim \frac{l^3}{l^2} = l$$

— напряженность поля в вершине куба прямо пропорциональна его линейным размерам.

Очевидно, что куб вдвое меньших линейных размеров создает напряженность тоже вдвое меньшую. Поэтому если вначале напряженность в точке  $A$  была равна  $E_0$ , то после удаления малого кубика напряженность станет вдвое меньшей:

$$E_A = E_0 - \frac{E_0}{2} = \frac{E_0}{2}.$$

Направление напряженности при этом не изменится.

И. Ю. Потеряйко

**Ф1186.** При какой величине емкости конденсатора  $C_x$  в схеме, приведенной на рисунке 1, сдвиг фаз между подаваемым напряжением и током во внешней цепи будет равен нулю при любой частоте источника? Индуктивность катушки  $L$ , сопротивление каждого резистора  $R$ . Все элементы цепи считать идеальными.

Эту задачу можно решать различными способами, но наиболее простой и понятный — это метод векторных диаграмм\*).

Основная идея этого метода состоит в том, что переменные напряжения и токи изображаются в виде векторов соответствующих длин и складываются по правилам векторной алгебры. В резисторе ток совпадает по фазе с напряжением, и  $U_R = I_R R$ , где  $U_R$  — модуль вектора напряжения на резисторе,  $I_R$  — модуль вектора тока в резисторе,  $R$  — сопротивление резистора. Напряжение на катушке индуктивности опережает ток на  $90^\circ$ , и  $U_L = I_L \omega L$ , где  $U_L$  — модуль вектора напряжения на катушке индуктивности,  $I_L$  — модуль вектора тока,  $L$  — индуктивность катушки,  $\omega$  — частота пере-

\*1 См., например, статью А. Р. Зильбермана «Цепи переменного тока» («Квант», 1986, № 9). (Примеч. ред.)

## Задачник „Кванта“

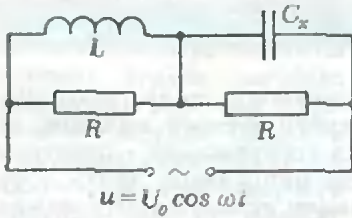


Рис. 1.

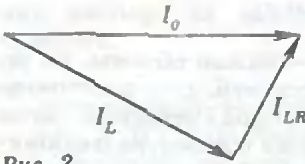


Рис. 2.

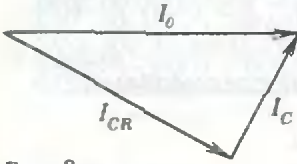


Рис. 3.

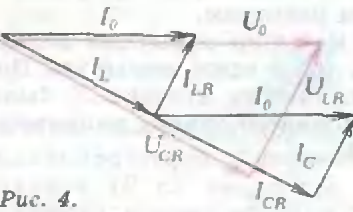


Рис. 4.

менного тока. Напряжение на конденсаторе отстает от тока на  $90^\circ$ , и  $U_C = I_C \frac{1}{\omega C}$ , где  $U_C$  — модуль вектора напряжения на конденсаторе,  $I_C$  — модуль вектора тока через конденсатор,  $C$  — емкость конденсатора.

А теперь вернемся к нашей задаче. Пусть во внешней цепи протекает ток  $I_0$ . Тогда для контура, содержащего катушку индуктивности и резистор, векторная диаграмма будет иметь вид, показанный на рисунке 2, при этом

$$\vec{I}_0 = \vec{I}_{LR} + \vec{I}_L, \quad U_{LR} = I_{LR}R \quad \text{и} \quad I_{LR}R = I_L \omega L.$$

Для контура, содержащего конденсатор и резистор, векторная диаграмма будет аналогичной (рис. 3):

$$\vec{I}_0 = \vec{I}_C + \vec{I}_{CR}, \quad U_C = I_{CR}R \quad \text{и} \quad I_{CR}R = I_C \frac{1}{\omega C}.$$

Для того чтобы вектор  $\vec{U}_0$  совпадал по фазе с вектором  $I_0$ , необходимо, чтобы углы между векторами  $\vec{I}_0$  и  $\vec{I}_{LR}$ , а также между  $\vec{I}_0$  и  $\vec{I}_C$  были равны (рис. 4). Тогда

$$\frac{I_L}{I_{LR}} = \frac{I_{CR}}{I_C},$$

откуда следует, что

$$\frac{\omega L}{R} = \omega CR, \quad \text{или} \quad C = \frac{L}{R^2}.$$

Очевидно, если выбрать  $C = L/R^2$ , то ток будет совпадать по фазе с напряжением при любой частоте, и можно легко показать, что при этом  $U_0 = I_0 R$ .

В. Е. Скоросаров

**Ф1187.** Сани длиной  $L = 2$  м и высотой  $H = 0,5$  м едут по прямой со скоростью  $v = 10$  м/с. На расстоянии  $d = 10$  м от дороги установлен штатив с фотоаппаратом, и съемку производят в момент максимального сближения.

Фотоаппарат имеет однолинзовый объектив с фокусным расстоянием  $F = 5$  см. Выдержка (т. е. время, в течение которого засвечивается каждый участок фотопленки) обрабатывается в этом фотоаппарате при помощи щелевого затвора, который работает следующим об-

Обозначим длину мгновенного изображения саней на фотопленке через  $l$ , а высоту через  $h$ . Тогда, учитывая, что  $d \gg F$ , получим

$$l = \frac{F}{d} L, \quad h = \frac{F}{d} H.$$

Однако во время экспозиции изображение движется по пленке со скоростью  $u = (F/d)v$ , что приводит к из-



Рис. 1.

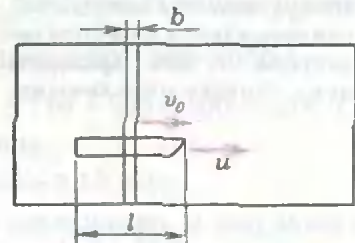


Рис. 2.

разом. Вдоль кадра вблизи от фотопленки движется с постоянной скоростью  $v_0 = 1$  м/с вертикальная щель, ширину которой можно менять в широких пределах для получения нужной выдержки (рис. 1). Размер кадра  $24 \times 36$  мм. Каким окажется отношение длины к высоте  $u$  полученного на пленке достаточно резкого изображения саней?

## Задачник „Кванта“

менению длины реально получаемого изображения. Найдем ее.

Щель затвора «пробегает» движущееся изображение за время  $t = l / (v_0 \pm u)$  (считаем, что ширина щели  $l$  много меньше  $l$ ). Знак « $-$ » соответствует случаю, когда скорости  $v_0$  и  $u$ , направлены в одну сторону, знак « $+$ », когда скорости направлены в противоположные стороны (рис. 2). Длина полученного на пленке изображения саней будет равна

$$x = v_0 t = \frac{v_0 l}{v_0 \pm u} = \frac{LF/d}{1 \pm Fv/(dv_0)}$$

Итак, искомое отношение длины к высоте полученного на пленке изображения саней окажется равным

$$\alpha = \frac{x}{h} = \frac{L}{H} \frac{1}{1 \pm \frac{Fv}{dv_0}} \approx \begin{cases} 3,81 \text{ при одинаковых направ-} \\ \text{лениях скоростей } v_0 \text{ и } v; \\ 4,21 \text{ при противоположных} \\ \text{направлениях } v_0 \text{ и } v. \end{cases}$$

М. Г. Гаврилов

## Разбиения многоугольников и... неевклидова геометрия

Эта заметка посвящена решению задачи M1170. Напомним ее условие:

Рассмотрим разбиения данного выпуклого  $n$ -угольника на треугольники непересекающимися диагоналями. Назовем перестройкой следующее преобразование: вместо некоторой диагонали  $BC$ , служащей общей стороной двух треугольников  $ABC$  и  $BCD$  разбиения, проводится диагональ  $AD$  (рис. 1). Обозначим через  $P(n)$  наименьшее число перестроек, за которое можно любое разбиение перевести в любое другое. Докажите оценки:

- а)  $P(n) \geq n - 3$ ;
- б)  $P(n) \leq 2n - 7$ ;

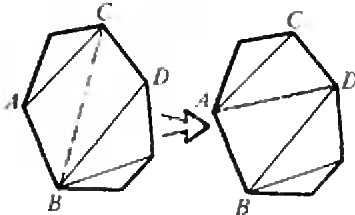


Рис. 1.

в)  $P(n) \leq 2n - 10$  при  $n \geq 13$ .

Эта задача была предложена в 1988 году на осеннем туре Турнира городов. А ее источником явилось вышедшее в 1986 году весьма серьезное исследование трех известных американских математиков: Дэниэла Слейтора, Роберта Тарьяна и Уильяма Терстона. Они сумели найти гораздо более точные оценки снизу для числа  $P(n)$ , причем их метод доказательства настолько неожидан и изящен, что мы решали познакомиться с ним читателей «Кванта».

### Решение задачи M1170

Прежде всего дадим следующее определение: разбиение  $n$ -угольника называется коническим с вершиной  $A$ , если все образующие его диагонали выходят из одной точки — вершины  $A$   $n$ -угольника.

Теперь рассмотрим два конических разбиения — одно с вершиной  $A$ , а другое — с вершиной  $B$ , соседней с  $A$ . Эти

два разбиения не имеют ни одной общей диагонали, и поэтому получить одно из другого менее чем за  $n - 3$  перестройки невозможно. В самом деле, при каждой перестройке множество диагоналей данного разбиения изменяется лишь на один элемент, а всего диагоналей в каждом разбиении  $n - 3$ . Таким образом, мы доказали неравенство а):  $P(n) \geq n - 3$ .

Докажем теперь, что не более чем за  $n - 3$  перестроек можно из любого разбиения получить коническое разбиение с произвольной заранее выбранной вершиной  $A$ . Для этого достаточно указать цепочку перестроек, каждая из которых добавляет новую диагональ, выходящую из вершины  $A$ .

Рассмотрим все треугольники разбиения с вершиной  $A$ . Допустим, что среди них есть треугольник  $ABC$ , сторона  $BC$  которого является диагональю (а не стороной) нашего  $n$ -угольника. Тогда к этой диагонали примыкает



# Задачник "Кванта"

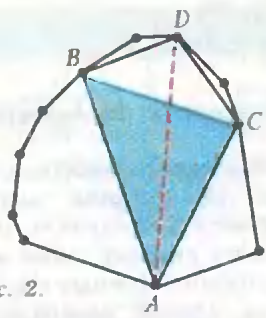


Рис. 2.

еще один треугольник разбиения  $BCD$  (рис. 2). Заменяем диагональ  $BC$  на  $AD$ . Повторяя аналогичные перестройки, мы добьемся того, что у всех треугольников разбиения с вершиной  $A$  противоположная ей сторона будет одной из сторон  $n$ -угольника. А такое разбиение, очевидно, конечное.

Мы доказали даже более сильный факт: количество перестроек, необходимых для того, чтобы получить из данного разбиения коническое разбиение с вершиной  $A$ , не превосходит  $n-3-x$ , где  $x$  — число диагоналей данного разбиения, выходящих из вершины  $A$ . Если выбрать вершину  $A$  так, чтобы из нее выходила по крайней мере одна диагональ исходного разбиения, то нам потребуется не более чем  $n-4$  перестроек для того, чтобы получить из него коническое разбиение с вершиной  $A$ , и не более чем  $n-3$  перестроек, чтобы получить из этого конического разбиения второе разбиение. Тем самым доказано неравенство б):  $P(n) \leq (n-4) + (n-3) = 2n-7$ .

Теперь, чтобы доказать последнее неравенство в)  $P(n) \leq 2n-10 = (n-3) + (n-3) - 4$  при  $n \geq 13$ , нам достаточ-

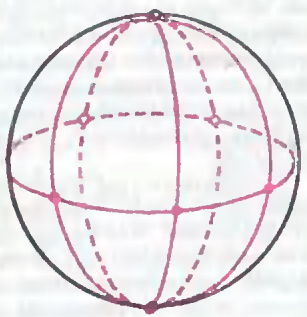


Рис. 3.

но для любых двух разбиений найти такую вершину  $A$ , что суммарное количество выходящих из нее диагоналей первого и второго разбиений не меньше 4. Подсчитаем среднее число диагоналей произвольного разбиения, выходящих из одной вершины. Всего диагоналей  $n-3$ , каждая из них соединяет две вер-

которые разбивается сфера, должна иметь ровно три стороны, т. е. ее должны ограничивать ровно три кривых.

Таким образом, при триангуляции сфера разбивается на несколько криволинейных треугольников. Пример показан на рисунке 3.

Специальной триангуляцией шара будем называть та-

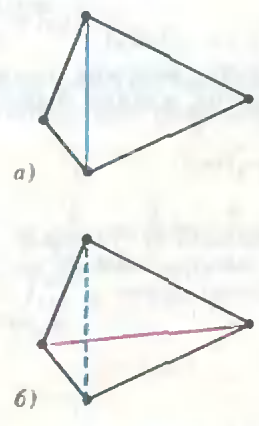


Рис. 4.

шины, а вершин всего  $n$ . Следовательно, в среднем на вершину приходится  $2(n-3)/n$  диагоналей. Поэтому среднее суммарное число диагоналей первого и второго разбиений, выходящих из одной вершины, равно  $4(n-3)/n$ . При  $n \geq 13$  это число больше трех и, значит, нужная нам вершина  $n$ -угольника действительно существует.

### Триангуляция сферы и шара

Прежде чем приступить к изложению результатов Слейтора, Тарьяна и Терстона, необходимо дать несколько определений.

Триангуляцией сферы будем называть разбиение сферы на несколько областей, получаемое следующим образом: на сфере отмечаются несколько точек — они называются вершинами триангуляции — и некоторые из них соединяются несамопересекающимися кривыми, которые могут пересекаться друг с другом только в вершинах. При этом каждая из областей, на

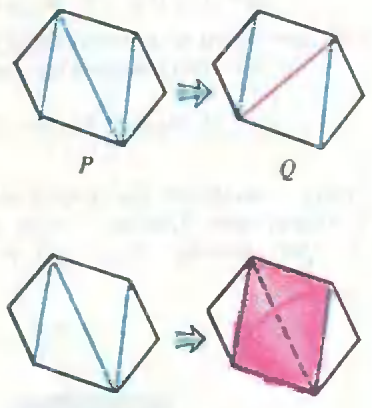


Рис. 5.

кое разбиение шара на несколько «криволинейных» тетраэдров, что все их вершины лежат на сфере, ограничивающей шар.

Не удивляйтесь, если далее мы иногда будем словом «шар» называть нечто, совсем на шар не похожее, например, куб. Дело в том, что куб можно, немного помяв, превратить в шар. При этом, конечно, триангуляция куба перейдет в триангуляцию шара и т. д.

Чрезвычайно удачная идея позволяет свести проблему более точного вычисления  $P(n)$  к геометрической задаче. Надо «всею лишь» заметить, что переход от картинке, изображенной на рисунке 4, а, к картинке на рисунке 4, б очень похож на приклеивание тетраэдра (особенно, если пунктиром изобразить только что стертую диагональ). Мы начинаем с исходной картинке — разбиения многоугольника — и «приклеиваем» к ней криволинейные тетраэдры (удобно представлять их себе почти плоскими). Вот как выглядит такое приклеивание, если мы

# Задачник „Квант“

превращаем разбиение  $P$  в разбиение  $Q$  (рис. 5).

Ясно, что вид сверху на полученную фигуру совпадает с разбиением  $Q$ . Если у двух разбиений  $P$  и  $Q$  нет общих диагоналей, то приклеив все криволинейные тетраэдры в соответствии с последовательностью перестроек, переводящих  $P$  в  $Q$ , мы получим тело  $B$ , которое можно считать шаром. Его границная поверхность — это «помятая» сфера

которая получается такой склейкой, обладает дополнительным свойством: она имеет гамильтонов обход. Это означает, что есть замкнутый путь по кривым триангуляции, проходящий через каждую вершину ровно один раз. Поэтому далее мы будем рассматривать лишь триангуляции сферы, обладающие этим

менее чем  $P(n)+1$  перестроек. А это противоречит определению числа  $P(n)$ .

**Лемма 2.** Если перестройка  $a$  увеличивает число общих диагоналей у разбиений  $P'$  и  $Q$ , то существует простейшая последовательность перестроек, превращающая  $P'$  в  $Q$  и начинающаяся с перестройки  $a$ .

**Лемма 3.** Если разбиения  $P$  и  $Q$  имеют общую диагональ, то кратчайшая последовательность перестроек, переводящая  $P$  в  $Q$ , не затрагивает этой диагонали.

Доказательство этих лемм мы оставляем читателю.

## Геометрия Лобачевского и оценка $P(n)$

Итак, чтобы оценить снизу  $P(n)$  достаточно оценить снизу  $T(n)$ . Вслед за тремя американскими математиками мы докажем, что для бесконечной последовательности значений  $n$  выполнено неравенство  $T(n) \geq 2n - 10$ , т. е. что имеется гамильтонова триангуляция сферы с  $n$  вершинами, которую нельзя заклейить менее чем  $2n - 10$  тетраэдрами. Тем самым будет доказано, что оценка задачи M1170, в) является в определенном смысле точной.

Рассмотрим многогранник  $M$  с вершинами в вершинах триангуляции и настоящие геометрические тетраэдры с теми же вершинами, что и криволинейные тетраэдры, которыми мы заклейили данную триангуляцию. Тогда, конечно, суммарный объем построенных геометрических тетраэдров будет не меньше, чем объем  $V$  многогранника  $M$ . Если теперь вспомнить,

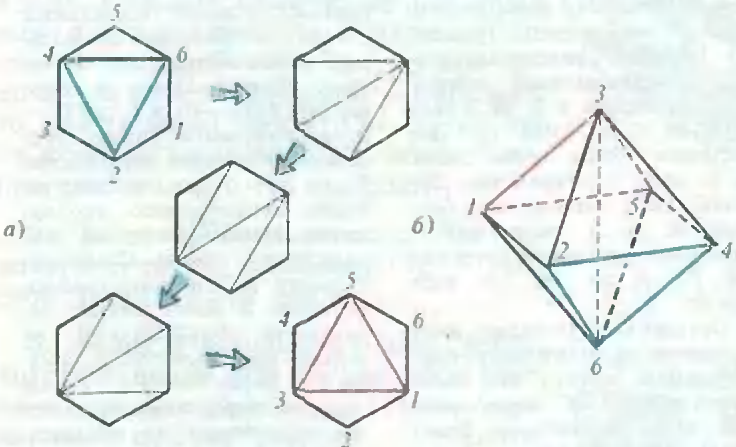


Рис. 6.

$S$ , экватор которой совпадает с нашим многоугольником, одна половина (нижняя) разбита диагоналями в соответствии с разбиением  $P$ , а другая (верхняя) — в соответствии с разбиением  $Q$ . Таким образом, для всякой триангуляции  $t$  сферы  $S$ , получающейся склейкой двух разбиений  $n$ -угольника (не имеющих общих диагоналей), существует специальная триангуляция шара  $B$  из  $m$  тетраэдров, где  $m \leq P(n)$ , такая, что ребра тетраэдров, лежащие на сфере  $S$ , дают на ней триангуляцию  $t$ .

На рисунке 6, а приведен пример превращения одного разбиения шестиугольника в другое, а на рисунке 6, б — соответствующая специальная триангуляция шара (имеющего здесь вид октаэдра). Ее составляют, в порядке приклеивания, следующие тетраэдры: 2436, 4536, 1236, 1536.

Однако не всякая триангуляция сферы может быть получена склеиванием двух разбиений  $n$ -угольника. Дело в том, что триангуляция сферы,

свойством (назовем их гамильтоновыми).

**Лемма 1.** Обозначим через  $T(n)$  минимальное число «криволинейных» тетраэдров, из которых заведомо можно составить специальную триангуляцию шара  $B$ , дающую на сфере  $S$  произвольную данную гамильтонову триангуляцию с  $n$  вершинами. Тогда  $P(n) \geq T(n)$ .

Для доказательства рассмотрим два разбиения  $P$  и  $Q$  такие, что для перехода от  $P$  к  $Q$  требуется ровно  $P(n)$  перестроек. Если эти разбиения не имеют общих диагоналей, то неравенство  $P(n) \geq T(n)$  следует из рассуждения, изложенного выше. Остается показать, что разбиения  $P$  и  $Q$  не могут иметь общих диагоналей. Допустим, что это не так, и  $AB$  — их общая диагональ, к которой в разбиении  $P$  примыкают треугольники  $ABC$  и  $ABD$ . Заменяя  $AB$  на  $CD$ , мы получим из разбиения  $P$  новое разбиение  $P'$ . Как следует из двух приводимых далее комбинаторных лемм, для превращения  $P'$  в  $Q$  требуется не

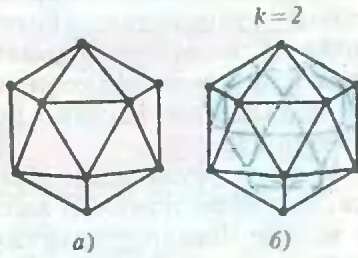


Рис. 7.



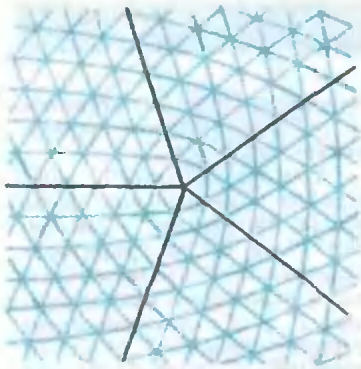


Рис. 8.

что существует максимальный объем тетраэдра, вписанного в данную сферу —  $V_0$ , то мы получим, что количество тетраэдров не меньше чем  $V/V_0$ . Увы, это рассуждение не дает нам хорошей оценки. Более того, поскольку объем многогранника  $M$  не превосходит объема всего шара, который, в свою очередь, не превосходит  $10V_0$ , этот метод оценки не дает нам даже неравенства  $P(n) \geq n-3$ . Но можно попытаться изменить само определение объема так, чтобы объем шара стал бесконечным, а объем любого вписанного в него тетраэдра оставался ограниченным некоторой фиксированной величиной  $V_0$ . Тогда, подгоняя многогранник  $M$  к шару, можно рассчитывать, что объем  $M$  — и оценка  $T(n)$  — будет расти достаточно быстро вместе с ростом числа вершин  $n$ . Вот тут и приходит на по-

## Задачник „Кванта“

мощь неевклидова геометрия Лобачевского. Дело в том, что внутренность шара при соответствующем определении расстояния между точками превращается в модель пространства Лобачевского. Есть даже два способа это сделать. При одном способе прямыми служат хорды шара — это «модель Клейна», при другом — дуги окружностей, перпендикулярных поверхности шара, — это «модель Пуанкаре» («Квант» рассказывал об ней в одноименной статье К. Л. Самарова и В. М. Уроева в № 6 за 1984 г.). Неевклидов объем всего шара (т. е. всего пространства Лобачевского), естественно, бесконечен, а у тетраэдра — ограничен некоторой постоянной  $V_0$ . А это то, что нам нужно.

Осталось только одно: найти такую гамильтонову триангуляцию сферы, что соответствующий ей многогранник с  $n$  вершинами будет иметь объем, не меньший чем  $(2n-10)V_0$ . Это удается сделать (однако не для всех  $n$ ) с помощью очень красивой конструкции. Возьмем один из пяти правильных многогранников — икосаэдр (рис. 7, а), у которого 20 треугольных граней, 12 вершин и 30 ребер, вписанный в нашу сферу, и разобьем каждую из его граней на  $k^2$  маленьких равно-

сторонних треугольничков (см. рис. 7, б). Полученная триангуляция поверхности икосаэдра проецируется на сферу. Получается триангуляция сферы с  $n=10k^2+2$  вершинами (проверьте, что она гамильтонова; часть этой триангуляции вблизи вершины икосаэдра показана на рисунке 8). Она определяет некоторый неевклидов многогранник, и после тщательных и довольно сложных вычислений оказывается, что объем этого многогранника не меньше чем  $2nV_0 - C_1 \ln n$ , где  $C_1$  — некая константа. Таким образом, мы получаем неравенство  $P(n) \geq 2n - C_2 \ln n$ , а это уже очень существенное продвижение. Используя ту же триангуляцию сферы, Слейтору, Тарьяну и Терстону удалось доказать и более точное неравенство  $P(n) \geq 2n - 10$ , но только при достаточно больших  $n$  вида  $10k^2+2$ . Таким образом, перед нами остаются две проблемы: а) доказать, что  $P(n) \geq 2n - 10$  при всех  $n > 12$  (или опровергнуть это); б) найти элементарное, комбинаторное доказательство изложенных выше фактов.

Может быть, кому-то из читателей «Кванта» удастся решить одну из этих задач. Попробуйте свои силы!

Д. В. Фокин

## Приливные силы

(Начало см. на с. 18)

А период приливной силы, как мы помним, — 12 часов 25 минут. Система становится «более резонансной». А во втором варианте сказывается еще и изменение режима течения на выходе из Майнас бейсин: изменяется течение.

И вот результаты. Плотины Шеподи, почти не изменяя высоту прилива в заливе Фанди, увеличивает приливную волну в гигантском заливе Мэн

на 3—4 сантиметра, а это больше 2% от нынешней амплитуды. Во втором же варианте прилив на всем пространстве от Бостона до входа в Майнас бейсин возрастает на 15—20 сантиметров — больше, чем на 10%! И в пору строить новые причалы, нарушится миграция рыб, в общем, последствия весьма существенные!

Ну что же, даже такие проекты, несомненно экологически гораздо более чистые, чем тепловые или атомные электростанции, надо тщательнейшим образом просчитывать с точки зрения воздействия на природу.

# „Квант“ для младших школьников.

## Задачи

1. Ученики 3 «А» класса пришли в театр. В антракте все они побежали в буфет. Каждый мальчик купил пирожок, а каждая девочка — булочку. Если бы каждый мальчик купил булочку, а каждая девочка — пирожок, то они (вместе) потратили бы на одну копейку меньше. Мальчиков больше, чем девочек. На сколько?

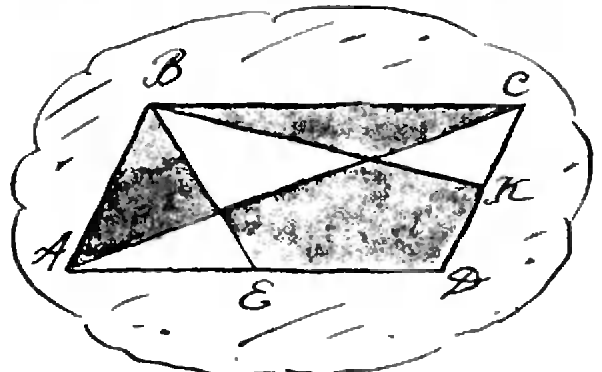
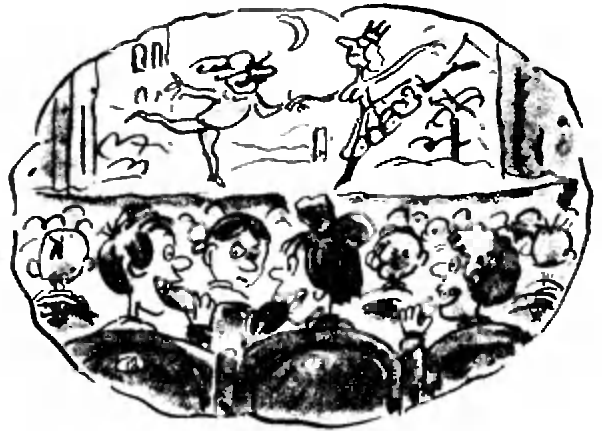
2. Число КУБ является кубом некоторого числа, а число БУК — простое. Найдите эти числа.

3. Решите арифметический ребус, который вы видите на рисунке. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

4. Покажите, что в параллелограмме  $ABCD$  площадь, окрашенная в красный цвет, в два раза больше площади, окрашенной в желтый цвет (см. рисунок). Точки  $K$  и  $E$  — середины соответствующих сторон.

5. Может ли число  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$  (оно читается эн факториал) иметь вид  $111\dots100\dots0$ ? А найдется ли число такого вида — начинающееся с единиц и заканчивающееся нулями, — которое делится на 1990?

Эти задачи нам предложили Н. Ю. Нецветаев, Н. К. Антонович, П. В. Джанджгава, А. И. Демидов, ученики из п. Черноголовка Московской обл. И. Соловьев и Д. Фельдман.





# КАКОЙ ДЕНЬ НЕДЕЛИ?

Читатель, конечно, знает день своего рождения: год, месяц и число. А день недели? Может быть, это была среда, а может быть, суббота или понедельник? Как ответить на этот вопрос, не прибегая к помощи старых календарей, рассказывается в этой статье.

## Давайте занумеруем дни

Для этого просто присвоим какому-нибудь дню № 1, а дальше будем нумеровать дни по порядку: № 2, № 3 и т. д. Какой именно день взят за первый, все равно, пусть это, например, будет

1 января 1-го года.

Тогда 2 января 1-го года получит № 2, 3 января 1-го года — № 3 и т. д., 31 января 1-го года станет днем № 31, 1 февраля — днем № 32, 1 марта — днем № 60 (в феврале 1-го года было 28 дней, потому что год не високосный). Всего в 1-м году было 365 дней, так что 1 января 2-го года будет днем № 366, 1 января 3-го года — днем № 731, 1 января 4-го года — днем № 1096, а 1 января 5-го года — днем № 1462 (4-й год содержал 366 дней). Таким образом, каждый день получит свой номер.

## Как узнать день недели, зная номер дня?

Например, какой день недели придется на миллионный день? Ответить на этот вопрос мы пока что не можем. Но если бы мы знали день недели, соответствующий дню с каким-нибудь номером, то мы смогли бы определить день недели, отвечающий дню с любым другим номером. Возьмем, ска-

В основу статьи положены материалы, присланные в редакцию доктором физико-математических наук Н. М. Бескиным, и глава из книги О. Оре «Приглашение в теорию чисел» (М.: Наука, Библиотечка «Квант», 1980).

жем, день № 100 000. Между ним и миллионным днем должно пройти  $1\ 000\ 000 - 100\ 000 = 900\ 000$  дней. Поделим  $900\ 000$  на  $7$  с остатком:  $900\ 000 = 128\ 571 \cdot 7 + 3$ , т. е. между рассматриваемыми днями должно пройти целое число недель и еще три дня. Число недель для нас совершенно не важно, значение имеют только эти три дня. В частности, если  $100\ 000$ -й день был понедельник, то  $1\ 000\ 000$ -й день — четверг, если  $100\ 000$ -й день — вторник, то  $1\ 000\ 000$ -й день — пятница и т. д.

Теперь программа действий ясна. Сначала определим номер какого-нибудь дня, для которого день недели нам известен. Эту работу можно проделать раз и навсегда. Затем мы определяем номер интересующего нас дня. Сравнивая два полученных номера, мы определяем день недели, отвечающий второй дате — как объяснялось выше.

**Как найти номер дня?**

Пусть нас интересует

$k$ -й день  $m$ -го месяца  $N$ -го года.

Годы, как известно, бывают високосные и невисокосные. Невисокосные годы содержат  $365$  дней, високосные —  $366$  дней. Невисокосными являются, во-первых, годы, номера которых не делятся на  $4$ , и, во-вторых, годы, номера которых делятся на  $100$ , но не делятся на  $400$ . (Таким образом,  $2000$ -й год будет високосным, но  $1900$ -й год не был високосным, в отличие, скажем, от  $1904$ -го года. Эта оговорка отличает «григорианский календарь», или «новый стиль», от «юлианского календаря», или «старого стиля». Подробнее о старом и новом стилях мы поговорим ниже.)

Вернемся к рассматриваемому дню. После дня №  $1$ , т. е.  $1$  января  $1$ -го года, прошло  $N-1$  лет,  $m-1$  месяцев и  $k-1$  день. Пусть среди этих  $N-1$  лет было  $N_1$  високосных и  $N_2$  невисокосных. Потом мы подумаем, чему равны  $N_1$  и  $N_2$ , а пока запишем, что эти годы содержат  $366N_1 + 365N_2$  дней. Числа дней в  $1$ -м, ...,



$12$ -м месяце мы обозначим через  $a_1, \dots, a_{12}$ . Таким образом,  $a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = a_9 = a_{10} = a_{12} = 31$ ,  $a_4 = a_6 = a_8 = a_{11} = 30$ , а  $a_2 = 29$  или  $28$ , в зависимости от того, високосный или невисокосный  $N$ -й год. Итак, номер нашего дня равен

$$366N_1 + 365N_2 + a_1 + \dots + a_{m-1} + k.$$

Теперь найдем  $N_1$  и  $N_2$ . Представим  $N-1$  в виде  $100P + R$ , где  $0 \leq R \leq 99$  (если  $N-1$  — четырехзначное число, как это на практике обычно бывает, то  $P$  и  $R$  — двузначные числа, записываемые первыми двумя и последними двумя цифрами числа  $N-1$ ). Далее, поделим  $P$  и  $R$  на  $4$  с остатком:  $P = 4p + q$ ,  $R = 4r + s$  ( $0 \leq q \leq 3$ ,  $0 \leq s \leq 3$ ). Нашему году предшествовало  $P$  полных столетий. В каждом было  $99$  лет, номера которых не делятся на  $100$ , из них  $24$  года високосных и  $75$  лет невисокосных. Из  $P$  лет с номерами, делящимися на  $100$ , високосных было  $p$ , а невисокосных  $P - p = 3p + q$ . Наконец, из  $R$  последних лет было  $r$  високосных и  $R - r = 3r + s$  невисокосных. Итак,

$$N_1 = 24P + p + r = 97p + 24q + r,$$

$$N_2 = 75P + 3p + q + 3r + s = 303p + 76q + 3r + s.$$

Окончательная формула для номера нашего дня такова:

$$366(97p + 24q + r) + 365(303p + 76q + 3r + s) + a_1 + \dots + a_{m-1} + k = 146\ 097p + 36\ 524q + 1461r + 365s + a_1 + \dots + a_{m-1} + k.$$

Например, пусть интересующая нас дата

1 марта 1989 года.

Для этого дня  $P=19$ ,  $R=88$ ,  $p=4$ ,  $q=3$ ,  $r=22$ ,  $s=0$ ,  $m=3$ ,  $a_1=31$ ,  $a_2=28$ ,  $k=1$ , и его номер равен

$$\boxed{726\ 162!}$$

Нам нужен только остаток от деления на 7

Номер дня интересует нас лишь с точностью до любого числа, делящегося на 7 (ибо день нас интересует лишь с точностью до целого числа недель). Поэтому уместно заметить, что  $146\ 097=20\ 871 \cdot 7$  делится на 7, так что первое слагаемое в нашей сумме можно просто отбросить. Далее,  $36\ 524=5217 \cdot 7+5$ , так что вместо коэффициента 36 524 можно взять 5; точно так же вместо 1461 и 365 можно взять 5 и 1. Наша огромная сумма превратится в

$$5(q+r)+s+a_1+\dots+a_{m-1}+k,$$

к тому же и для  $a_1, \dots, a_{12}$  значения 28, 29, 30, 31 можно безболезненно заменить их остатками от деления на 7, т. е. значениями 0, 1, 2, 3 соответственно. Тогда для 1 марта 1989 года наш номер заменится числом

$$5(3+22)+0+3+0+1=129,$$

которое заведомо имеет такой же остаток от деления на 7, как номер нашего дня (действительно, проверка показывает, что у обоих чисел этот остаток равен 3). Кстати, наиболее трудоемкая часть последнего вычисления — это нахождение суммы  $a_1+\dots+a_{m-1}$  или, вернее, остатка от деления этой суммы на 7. Этот остаток зависит от  $m$  и от того, является ли год високосным. Имеет смысл вычислить его

раз и навсегда и записать результат в таблице 1.

Например, сумма, отвечающая августу високосного года, есть  $31+29+31+30+31+30+31$ , ее остаток от деления на 7 совпадает с остатком числа  $3+1+3+2+3+2+3=17$ , т. е. равен 3; это и записано в таблице 1.

Теперь посмотрите в календарь и убедитесь, что 1 марта 1989 года — среда. Выше мы обнаружили, что остаток от деления номера этого дня на 7 равен 3. Значит, если остаток от деления номера дня на 7 равен 3, то день — среда. Соответственно, если остаток равен 4, 5, 6, 0, ..., то день — четверг, пятница, суббота, воскресенье, ... . Как видим, нам немножко повезло: остаток от деления получившегося числа на 7 просто равен номеру дня недели:

- |                 |                  |
|-----------------|------------------|
| 1 — понедельник | 4 — четверг      |
| 2 — вторник     | 5 — пятница      |
| 3 — среда       | 6 — суббота      |
|                 | 0 — воскресенье. |

(Везение состоит в том, что наугад взятый нами первый день — 1 января 1-го года — оказался понедельником. Если бы не это, нам пришлось бы внести в окончательную формулу крохотную поправку.) Теперь мы можем написать окончательную формулу.

**Формула**

Рассмотрим

$k$ -й день  $m$ -го месяца  $N$ -го года.

Обозначим через  $R$  двузначное число, составленное из двух последних цифр числа  $N-1$ , и через  $P$  — число, составленное из остальных цифр числа  $N-1$ . Далее, поделим числа  $P$  и  $R$  с остатком на 4:  $P=4p+q$ ,  $R=4r+s$ . Затем найдем число

$$D=5(q+r)+s+b+k,$$

Таблица 1

год \ месяц	январь	февр.	март	апр.	май	июнь	июль	авг.	сент.	окт.	нояб.	дек.
висок.	0	3	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
невисок.	0	3	3	6	1	4	6	2	5	3	0	5

где  $b$  зависит от месяца и «високосности»  $N$ -го года и находится из таблицы 1. Остаток от деления числа  $D$  на 7 — это и есть номер дня недели.

**Пример.** Великая Отечественная война началась 22 июня 1941 года. Какой это был день недели? Вычисляем:  $P=19=4\cdot 4+3$ ,  $R=40=4\cdot 10+0$ ,  $b=4$  (июнь невисокосного года),

$$D=5(3+10)+0+4+22=91,$$

остаток от деления числа  $D$  на 7 равен 0. Значит, это было воскресенье.

### Старый стиль и новый стиль

Способ определения високосности года, изложенный на с. 37, введен в употребление в XVI веке; до этого високосными считались все годы, номера которых делятся на 4. Необходимость исправления была вызвана тем, что период обращения Земли вокруг Солнца фактически на несколько минут меньше  $365\frac{3}{4}$  суток. Поэтому с течением времени Новый год приближался к весне, и если бы не нововведение, то уже к 12 000-му году он пришелся бы на время цветения подснежников. В России новый стиль был введен только в январе 1918 года. Поэтому даты многих исторических событий принято называть по старому стилю.

Различие между старым и новым стилями появляется благодаря тому, что в старом стиле есть даты, от-

сутствующие в новом стиле: 29 февраля 1700 года, 29 февраля 1800 года, 29 февраля 1900 года, 29 февраля 2100 года и т. д. В каждый из этих дней (по старому стилю!) число дней, на которые новый стиль опережает старый стиль, увеличивается на 1. В настоящее время это число равно 13. Расхождение между старым и новым стилями мы привели в таблице 2 (читатель с легкостью продолжит эту таблицу в любую сторону).

**Пример.** Бородинская битва произошла 26 августа 1812 года по старому стилю. Какой при этом был день недели? Различие между старым и новым стилями составляло в это время 12 дней. Значит, дата Бородинской битвы по новому стилю такова:

$$26 \text{ августа} + 12 \text{ дней} = 38 \text{ августа} = 7 \text{ сентября.}$$

Определяем день недели:

$$D=5(2+2)+3+6+7=36,$$

остаток от деления числа 36 на 7 равен 1, значит, это был понедельник.

Таблица 2

Даты (по новому стилю, исключительно)	Число дней, на которые новый стиль опережает старый
13 марта 1900 г. — 13 марта 2100 г.	13
12 марта 1800 г. — 12 марта 1900 г.	12
11 марта 1700 г. — 11 марта 1800 г.	11
10 марта 1500 г. — 10 марта 1700 г.	10
9 марта 1400 г. — 9 марта 1500 г.	9





## Калейдоскоп Кванта

Имеется огромное количество фактов, заставляющих нас думать, что атомы вещества каким-то образом одарены электрическими силами или связаны с ними и им они обязаны своими наиболее замечательными качествами.

М. Фарадей

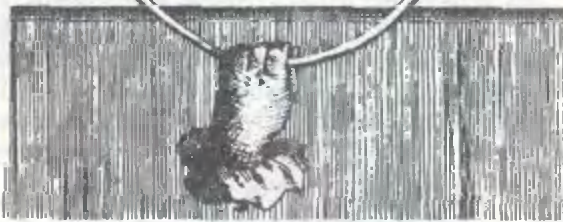
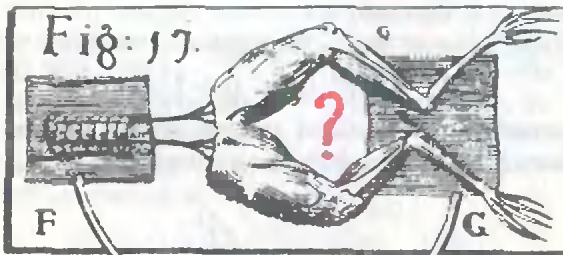
...электрический ток заключает в себе перемещение.

Дж. Максвелл



А так ли хорошо знаком вам

## электрический ток

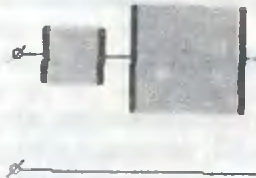


Извилистая история исследований электрических свойств самых различных сред, когда трудно было признать, что токи, текущие по металлическому проводу и в жидкости, проходящие через газы и вакуум, являются ближайшими «родственниками», с необходимостью привела к электронной теории. Эта теория позволила истолковать многие — и не только электрические — свойства материи, была шагом к более тонкому пониманию структуры вещества и взаимодействий, управляющих его поведением. А это, в свою очередь, повлекло за собой целый сонм технологических открытий, кардинально изменивших облик окружающего нас мира.

Сверхпроводники и солнечные батареи, МГД-генераторы и полупроводниковые элементы вычислительной техники — это лишь немногие примеры из тех областей физики и техники, где принципиально важно знать, как протекает ток через то или иное вещество. Этот вопрос — главный в сегодняшнем «Калейдоскопе».

### Вопросы и задачи

1. Длину проволоки вытягиванием увеличили вдвое. Как изменилось ее сопротивление?
2. Где больше средняя скорость упорядоченного движения электронов: в нити лампы или в проводах, подводящих к ней ток?
3. Две квадратные металлические пластины одинаковой толщины



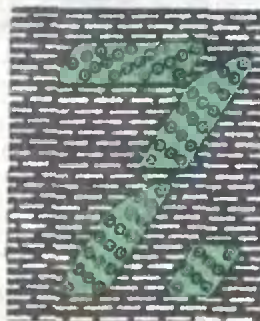
ны включены в цепь. Однокровное ли сопротивление оказывают они току?

4. Может ли стекло проводить электрический ток?

5. Плоский конденсатор заполнен средой с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и удельным сопротивлением  $\rho$ . Чему равно сопротивление конденсатора, если его емкость равна  $C$ ?

6. В полупроводниках концентрация заряженных частиц много меньше, чем в металлах. Отчего же при последовательном соединении полупроводника и металлического проводника с равными поперечными сечениями сила тока в них одинакова?

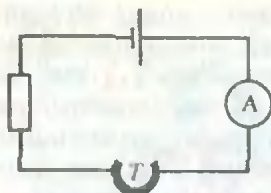
7. Различаются ли чем-нибудь «дырка» и



положительный ион в полупроводниках?

8. Почему измерения электропроводности полупроводников проводят при очень слабом освещении или в темноте?

9. В цепь включена



открытая металлическая трубка *T*. Как изменится показание амперметра, если трубку заполнить водным раствором медного купороса?

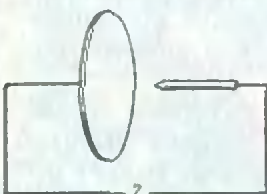
10. Одинаковое ли количество меди выде-



ляется на катодах 1, 2 и 3?

11. Чем отличается образование ионов в электролитах от ионизации газа?

12. К каким полюсам источника тока нужно присоединить электроды в форме диска и



острия, расположенные на некотором расстоянии друг от друга, чтобы воздушный пробой произошел при меньшей разности потенциалов между электродами?

13. Почему в дымоходных трубах частицы угля в дыме обладают положительным зарядом?



14. Будет ли работать в космосе радиолампа с разбитым стеклом?



**Микроулыг**

Включите лампу в комнате. Можете ли вы заметить, сколько времени прошло между моментом включения и моментом, когда лампочка загорается?



**Любопытно, что...**

...электродинамика Максвелла была фактически теорией электромагнитных явлений в вакууме. Для ее приложения к свойствам вещества приходилось вводить множество констант, полученных опытным путем.

...величины проводимости проводников и изоляторов различаются в огромное число раз, измеряемое единицей с двадцатью двумя нулями.

...если сравнить концентрацию электронов проводимости, например, в меди, с концентрацией молекул газа при нормальных

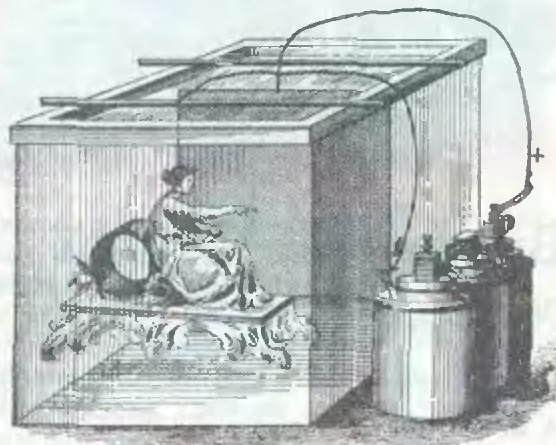
условиях, то окажется, что электронный газ в металле как бы сжат давлением в 1200(1) атмосфер.

...сейчас нам представляется совершенно очевидным, что молния — это искра, которая проскакивает



М. В. Ломоносову и Б. Франклину пришлось положить немало сил, а Г. В. Рихману это стоило жизни.

...археологические находки, относящиеся к временам Парфянского царства, позволяют допустить, что уже две тысячи лет назад производилось гальваническое золочение и серебрение изделий.



между облаками и землей. Однако в свое время для доказательства этого факта

Об этом же говорят и находки, сделанные в гробницах египетских фараонов.

**Что читать в «Кванте» об электрическом токе в различных средах (публикации последних лет)**

1. «О числе Фарадея и удельном заряде заряженной частицы» — 1985, № 2, с. 25;
2. «Полевые транзисторы» — 1985, № 10, с. 46;
3. «Биполярные транзисторы» — 1985, № 11, с. 48;
4. «Ионы в растворах» — 1986, № 7, с. 22;
5. «Как в металле протекает электрический ток?» — 1988, № 3, с. 41;
6. «Сверхпроводимость: история, современные представления, последние успехи» — 1988, № 6, с. 2;
7. «За пределами закона Ома» — 1989, № 4, с. 2;
8. «Симметрия, анизотропия и закон Ома» — 1989, № 10, с. 12.



## Лаборатория „Кванта“

# Высокочастотный генератор

М. М. ЦЫПИН

О многих физических явлениях мы слышим или читаем в книгах, но почти никогда их не видим. Между тем ничто так не помогает пониманию физического мира, в котором мы живем, как непосредственный опыт общения с ним. Поставленный своими руками эксперимент, увиденное и исследованное явление, размышления по поводу того, что действительно происходит в природе, — все это обычно оказывается разнообразнее и сложнее написанного в книгах.

В этой статье будет описан генератор высокочастотных колебаний, который можно сделать самостоятельно в школе или дома. Генератор позволяет поставить много интересных опы-

тов, связанных с электрическими разрядами, познакомиться со свойствами переменного тока и электромагнитного поля.

Генератор, схема которого приведена на рисунке 1, создает высокое напряжение (3—4 тысячи вольт) высокой частоты (около 5 МГц). Колебательный контур, определяющий частоту генератора, состоит из катушки  $L_1$  и конденсатора  $C_1$  (емкости конденсаторов указаны в пикофарадах). Поддержание в нем незатухающих колебаний обеспечивается с помощью дополнительной катушки  $L_2$  и усилителя, собранного на лампе  $L_1$ : часть энергии контура забирается этой катушкой, подается на сетку лампы, усиливается и через конденсатор  $C_2$  подается обратно в контур. Цепочка  $R_1 C_3$  обеспечивает (подумайте, как) отрицательное постоянное напряжение на сетке лампы, необходимое для ее нормальной работы. Еще одна катушка — из-за ее роли в схеме называемая по радиотехнической традиции дросселем ( $Dp$ ) — разделяет



участки цепи, где высокочастотное напряжение есть (анод лампы) и где его нет («плюс» источника питания). Это происходит благодаря большому сопротивлению дросселя переменному току высокой частоты. Вторая сетка лампы соединена с анодом, в результате лампа работает как триод. Катушки  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  индуктивно связаны друг с другом и образуют высокочастотный трансформатор.

Было бы ошибкой думать, что собрать такой генератор и заставить его работать под силу только многоопытному экспериментатору. Генератор практически не требует настройки, а нужные детали легко купить или добыть из старого лампового приемника или телевизора.

Что касается катушек, их довольно просто сделать самим. Катушки  $L_1$  и  $L_2$  наматываются на общий цилиндрический каркас диаметром 3,5 см и длиной 7 см, который проще всего склеить из плотной бумаги (рис. 2). Первая катушка состоит из 6 витков медного провода диаметром 2—3 мм (в любой изоляции), расстояние между витками равно 1 см. Вторая содержит 10 витков провода (в эмалированной изоляции) диаметром 0,5 мм, намотанных вплотную виток к витку. (Вопрос для теоретиков: как должны быть согласованы направления намотки  $L_1$  и  $L_2$ , чтобы обратная связь способствовала возникновению колебаний в контуре, а не наоборот? Иначе, очевидно, генератор работать не будет.) Катушка  $L_3$ , намотанная в один слой на бумажный каркас диаметром 2,7 см и длиной 8,5 см, содержит 190 витков провода ПЭЛШО (в эмалированной изо-

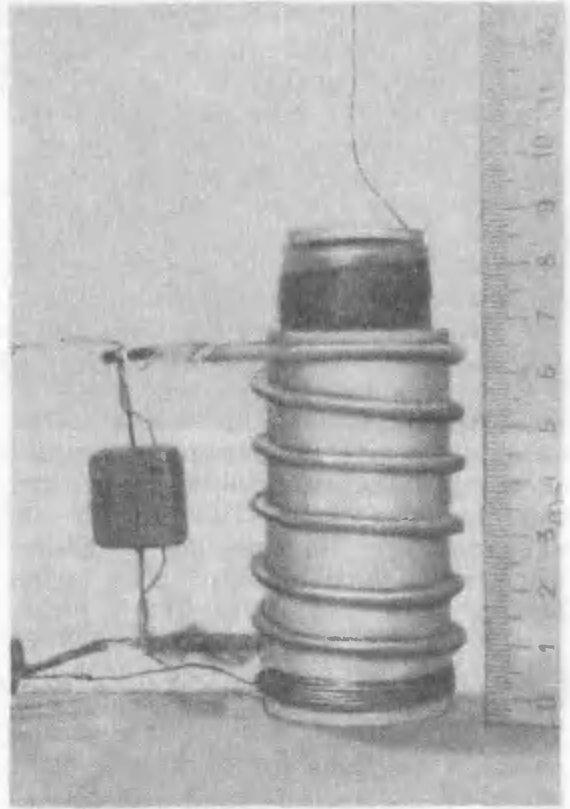


Рис. 2.

ляции и шелковой оплетке) диаметром 0,35 мм. Она обернута несколькими слоями полиэтиленовой пленки и вставлена внутрь катушек  $L_1$  и  $L_2$ . Дроссель  $Dr$  содержит 70 витков провода диаметром 0,3 мм, намотанных в один слой на каркас диаметром 2,5 см.

Все конденсаторы в схеме слюдяные, рассчитанные на напряжение 500 вольт.

Лампа  $L_1$  должна, во-первых, быть достаточно мощной, а во-вторых, иметь достаточно маленькое внутреннее сопротивление. Этими свойства-

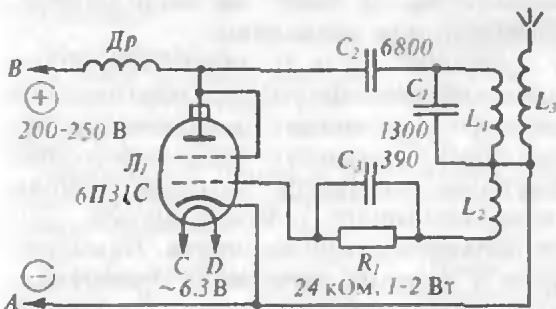


Рис. 1.

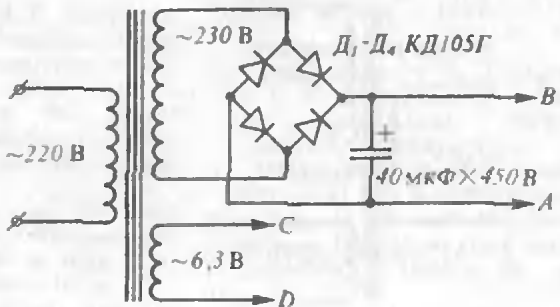


Рис. 3.



ми обладают, например, лампы 6П31С или 6П36С (применяемые в выходных каскадах строчной развертки телевизоров).

Для генератора нужен источник питания, дающий два напряжения: постоянное 200—250 В и переменное 6,3 В. Можно взять подходящий готовый блок питания, имеющийся в школьном физическом кабинете, воспользоваться блоком питания любого лампового приемника или собрать свой собственный по схеме, изображенной на рисунке 3. В нем можно использовать, например, имеющийся в продаже силовой трансформатор для радиол «Рекорд-353» и «Рекорд-354». На рисунке 4 приведена схема упрощенного блока питания. С ним генератор будет работать только каждый второй полупериод, когда напряжение на аноде положительно. Его средняя мощность уменьшится вдвое, и это даже хорошо: лампа и катушка будут меньше нагреваться.

Вопрос о конструкции генератора каждый может решить на свой вкус. Человек с практическим складом ума придумает и сделает корпус и плату для размещения деталей; теоретик ограничится тем, что разложит детали на столе и припаяет их друг к другу. К счастью, «форма» генератора не влияет на его «содержание».

Несколько замечаний о технике безопасности. По-настоящему опасная вещь (чего ни в коем случае не следует делать!) — это использование схем, в которых детали генератора оказываются непосредственно

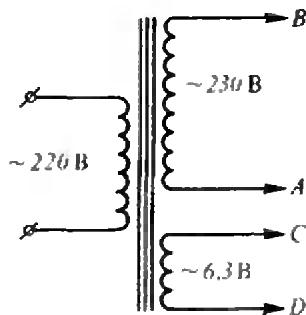


Рис. 4.

соединенными с сетью напряжением 220 В. Нельзя также использовать в блоке питания автотрансформатор. Это создаст реальную угрозу поражения электрическим током. Будьте особенно внимательны при выборе полярности диодов и электролитического конденсатора в схеме на рисунке 3. Что касается высокочастотного напряжения, то оно довольно безопасно: удара током от него не возникнет. Так что, если не трогать руками детали работающего генератора, работа с ним вполне безопасна.

Итак, будем считать, что у вас хватило желания и терпения намотать катушки и собрать генератор (что вполне осуществимо за один день). Осталось привести его в действие.

Возьмем неоновую лампочку и, держа ее за цоколь, поднесем на расстояние нескольких сантиметров к верхней части катушки  $L_3$ . Включим блок питания генератора в сеть. Примерно через 30 секунд, когда катод лампы нагреется до красного свечения, генератор должен заработать, а неоновая лампочка — загореться. (При этом ток, потребляемый от источника питания напряжением 250 В, должен быть 70—100 мА.) Если лампочка не загорается (а ток достигает 150 мА и больше), значит, в схеме что-то неправильно. Надо выключить генератор и разобраться в причинах. Возможно, не согласованы направления намотки в катушках  $L_1$  и  $L_2$  или расстояние между ними слишком велико.

Вот и проведен первый опыт — неоновая лампочка светится, хотя она вообще ни к чему не подключена. Сделаем еще несколько.

Катушки  $L_1$  и  $L_3$  образуют повышающий трансформатор, и потенциал на верхнем конце  $L_3$  достигает нескольких киловольт. Если вывод этой катушки кончается острием, вблизи него возникает электрическое поле большой напряженности. В результате у острия загорается своеобразный электрический разряд, похожий на миниатюрное (около 5 мм) пламя свечи, правда, ярко-голубого цвета.

Форма разряда довольно интересным образом зависит от напряжения и частоты. Понаблюдайте, как она меняется по мере прогрева генератора, когда напряжение постепенно возрастает. Часто «пламя» оказывается нестабильным (фотография на рисунке 5). Иногда, чтобы разряд загорелся, его нужно «поджечь», коснувшись острия лезвием отвертки с изолированной ручкой.

При низкой частоте (менее 1 МГц) электрический разряд около острия выглядит как рассеянное холодное свечение (так называемый коронный разряд), сопровождающееся шипением и образованием озона. Но наш разряд — компактный и горячий, в чем легко убедиться, поднеся к нему конец деревянной линейки. Разряд может даже прожечь насквозь баллон неоновой лампочки, если ее поднести слишком близко.

Обсуждение опытов с высокочастотным генератором мы продолжим в следующем выпуске «Лаборатории «Кванта». А пока — несколько вопросов для самостоятельных исследований.

— Оцените индуктивность катушки  $L_1$ .

— Оцените емкость между верхним концом катушки  $L_3$  и вашей рукой, держащей неоновую лампочку.

## Вниманию наших читателей

Магазин № 6 Москниги (103031, Москва К-31, Кузнецкий мост, 18, маг. № 6 Москниги) высылает наложенным платежом следующие книги:

### Математика

*Алгебра и начала анализа.* Ч. 1. Изд. 3-е, перераб. (Математика для техникумов).— 1987.— 95 к.

Васильев Н. В., Егоров А. А. *Задачи Всесоюзных математических олимпиад.*— 1988.— 70 к.

Воробьев Н. Н. *Признаки делимости.* Изд. 4-е, испр. (Популярные лекции по математике).— 1988.— 20 к.

*Задачи по математике. Уравнения и неравенства.* (Справочное пособие).— 1987.— 85 к.

*Зарубежные математические олимпиады.*— 1987.— 1 р. 50 к.

Клейн Ф. *Лекции о развитии математики в XIX столетии.* Т. 1. Пер. с нем.— 1989.— 2 р. 50 к.

Понтрягин Л. С. *Дифференциальные уравнения и их приложения.* (Знакомство с высшей мат.)— 1983.— 40 к.

Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. *Задачи по стереометрии.* (Б-ка мат. кружка).— 1989.— 75 к.

Сазанов А. А. *Четырехмерный мир Минковского.* (Пробл. науки и техн. прогресса).— 1988.— 70 к.

Успенский В. А. *Машина Поста.* Изд. 2-е, стер. (По-

пулярные лекции по математике).— 1988.— 20 к.

Цыпкин А. Г. *Справочник по математике для средних учебных заведений.* Изд. 4-е, перераб. и доп.— 1988.— 1 р. 70 к.

Цыпкин А. Г., Пинский А. И. *Справочник по методам решения задач по математике для средней школы.* Изд. 2-е, перераб. и доп.— 1989.— 2 р.

### Физика, астрономия

Беркинблит М. В., Глаголен Е. Г. *Электричество в живых организмах.* (Б-чка «Квант»).— 1988.— 70 к.

Влехман И. И. *Что может вибрация? О «вибрационной механике» и вибрационной технике.* (Пробл. науки и техн. прогресса).— 1988.— 80 к.



Рис. 5.

ку. Оцените ток, текущий по руке. Почему не стоит слишком долго держать руку близко к катушке?

— Неоновая лампочка светится рядом с генератором, хотя она ни к чему не подключена. Откуда берется энергия? Как она попадает в лампочку?

— Если удалить из схемы катушку  $L_3$ , неоновая лампочка все равно светится. Правда, ее теперь надо подносить вплотную к  $L_1$ . Изменяя индуктивность катушек и емкость конденсаторов, можно менять частоту генератора. Зависит ли цвет свечения неоновой лампочки от частоты?

(Окончание см. на с. 66)

# Информация

## Летняя физико-математическая школа в США

В соответствии с программой сотрудничества между журналом «Квант» (СССР) и фирмой «Международная образовательная сеть» (США) этим летом впервые были проведены советско-американские физико-математические летние школы — в США и в СССР.

Приехавшие в г. Тарту ЭССР 47 американских школьников прошли серьезный конкурсный отбор (на основе тестов). Среди советских школьников — участников школы в Тарту — были победители конкурса «Задачник «Кванта», Турнира городов, Московской городской олимпиады по математике и физике. В Эстонии роль хозяина взял на себя Тартуский научный парк (директор Я. Липпмаа). Учебная программа обеспечивалась преподавателями и научными сотрудниками МГУ. Среди лекторов был известный советский математик профессор Ю. Манин.

А в Америку отправилась группа из 15 советских школьников. Делегация состояла, в основном, из победителей конкурса «Задачник «Кванта», а неизменными условиями участия являлись активное владение английским языком и коммуникабельность. Руководителями группы были ученый секретарь серии книг «Библиотечка «Квант» доктор физико-математических наук А. Бuzдин и член редколлегии журнала «Квант»

летней школы Э. Лозанского (США).

Будем надеяться, что международные физико-математические школы станут традиционными. А теперь — слово советским участникам школы в США.



Советские преподаватели А. Бuzдин и...

кандидат физико-математических наук А. Сосинский. Они приняли также участие в обсуждении проекта выпуска советско-американского журнала «Квантум» (который будет выходить на основе журнала «Квант»).

Хочется поблагодарить тех, кто сделал идею обмена школьниками реальностью, — Бюро «Квантум» (директор С. Кротов), Творческий центр советско-американской программы «Дети — творцы XXI века» (директор М. Торховской), Совет по кибернетике АН СССР (председатель академик Е. Велихов), Национальную ассоциацию преподавателей естественных наук (США, директор Б. Олдридж), Американскую ассоциацию преподавателей физики (директор Дж. Уилсон), а также директора американской

Иван Аржанцев (Киев, ФМШ № 45 при КГУ). Нашей поездке в Америку предшествовала двухнедельная летняя школа в Молодежном центре ЦК ВЛКСМ «Олимпиец». Ежедневно проводились занятия по физике, математике на английском языке, мы практиковались и в английской разговорной речи. Летняя школа в «Олимпийце» оказалась не только полезной, но и приятной. Состоялись интересные встречи с членами редколлегии «Кванта», с американскими учеными и даже с бизнесменом.

Из 26 кандидатов для поездки в Америку были отобраны 15 школьников. Ребята, не вошедшие в эту группу, получили возможность поехать на советско-американскую школу в г. Тарту ЭССР.

Преодолевшие же этот первый барьер перешли ко

второму, для многих не менее трудному, — оформлению документов в Бюро Международного молодежного туризма «Спутник»...

11 июля после одиннадцатичасового перелета мы оказались в Вашингтоне, где нас встречали представители Американской ассоциации преподавателей физики. И поздно ночью мы уже были в летней международной школе в Лонг-Айленде (штат Нью-Йорк).

Занятия в школе проводились по трем предметам — математике, физике, биологии. Математику преподавал доктор А. Соيفер (университет штата Колорадо); по физике занятия проводили доктор Э. Лозанский, директор летней школы, и доктор физико-математических наук А. Буздин; и, наконец, по молекулярной биологии лекции читал доктор Э. Трифонов (Институт Вейцмана, Израиль). Занятия по математике были посвящены комбинаторной геометрии и теории графов. Помимо традиционных заданий, нам было предложено несколько задач, представляющих некоторый научный интерес, и тех, кто их решит, ожидало материальное вознаграждение. Вот эти задачи. Рассмотрим выпуклый четырехугольник площадью 1 и точку внутри него. Вершины этого четырехугольника и внутренняя точка образуют 10 треугольников. Выберем из них треугольник с минимальной площадью. Требуется найти максимально возможное значение этой площади. Решения этой и аналогичной задачи для выпуклого пятиугольника оценивались в 20 долларов каждая. В следующей задаче рассматривались

выпуклые многоугольники. На занятиях мы показали, что если внутри или на границе произвольного выпуклого многоугольника площадью 1 взять 6 точек, то всегда можно выбрать из них три такие, что площадь треугольника с вершинами

физический турнир, в котором участвовало 12 команд.

На лекциях по молекулярной биологии доктор Трифонов объяснял геометрическое и химическое строение ДНК, рассказывал о последних экспериментах по исследованию



...А. Сосинский в американской летней школе.

в этих точках меньше  $1/4$  (условие 1). Также было доказано, что в произвольном выпуклом многоугольнике единичной площади можно так расположить 4 точки, что площадь любого треугольника с вершинами в этих точках будет больше  $1/4$ . Осталось определить, для каких выпуклых многоугольников наименьшим необходимым числом точек для выполнения условия 1 является 5, а для каких — 6. Решение этой задачи оценивалось в 50 долларов. Однако нам не удалось до конца решить ни одну из этих задач\*).

На занятиях по физике мы решали задачи из многих разделов элементарной физики, был проведен

внутриклеточного строения. Лекции были очень интересные и неформальные. Вообще, уровень изучения биологии в американских школах в среднем выше, чем в советских, чего нельзя сказать однозначно об уровне изучения физики и математики.

Нам также был прочитан цикл лекций на самые разнообразные физические темы, объединенный названием «Силы в природе». Лекции читал лауреат Нобелевской премии профессор Ш. Глэшоу, и взгляды на физику такого крупного специалиста были интересны всем. Другой нобелевский лауреат, доктор Ш. Пронин прочел лекцию о методах определения структуры молекул, но эта лекция понравилась нам куда меньше.

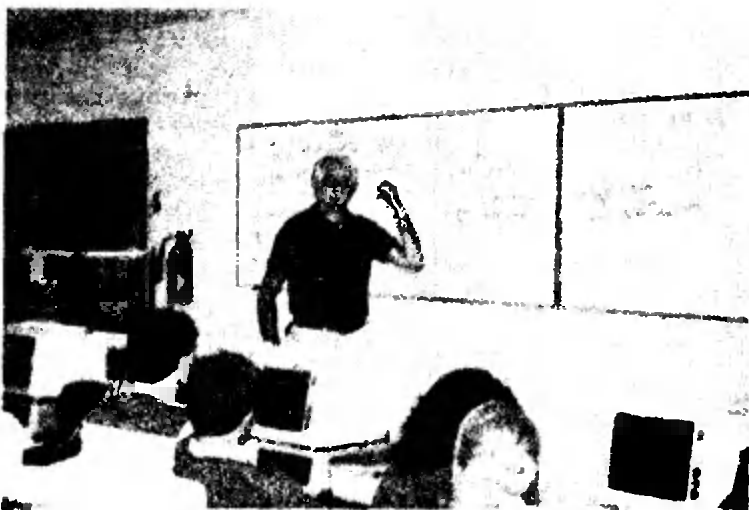
В последние дни работы школы были проведены

\* Мы предлагаем читателям решить эти задачи. (Примеч. ред.)



математическая и физическая олимпиады, победители которых\*) смогут поехать следующим летом по бесплатным путевкам либо в США, либо во Францию (это обещали организаторы школы).

Помимо выполнения обширной учебной программы, мы просто хорошо отдохнули в течение этих двух недель, участвуя в теннисном и шахматном турнирах, играя в волейбол и катаясь на каноэ по реке. В школе занимались ребята из четырех стран: СССР, США, Франции и Швейцарии. Обще-



*Лекцию читает лауреат Нобелевской премии Ш. Глашюу.*



*Идут занятия по физике.*

ние было самое тесное, так как состав всех комнат был интернациональным.

Многие из нас столкнулись с языковыми проблемами, несмотря на то, что перед поездкой все занимались английским очень активно. Сразу стали видны слабые стороны нашего школьного преподавания языка. В первую очередь, лексика школьных учебников абсолютно неприменима к пов-

седневному разговорам на улице, в столовой, в магазине. К тому же даже ребята, усердно изучавшие английский язык в школе, как правило, читали, переводили, готовили на уроках определенные темы, но не имели разговорной практики и не могли воспринимать быструю английскую речь на слух. Таким образом, стала очевидна ошибочность направленности школьного курса английского лишь на политические и географические темы.

Во время пребывания в летней школе мы съез-



*Встреча с Ю. Осипьяном в посольстве СССР в США.*

\*) Оба из советской группы -- Ивар Мартин по физике и Иван Аржанцев по математике. (Примеч. ред.)

дили в Нью-Йорк, в Брукхейвенскую национальную лабораторию, на пляжи Атлантического океана. Большое впечатление оставило посещение загородного дома одной из американских семей, где мы несколько часов играли в волейбол, теннис, купались в бассейне.

Ребята каждой из стран, участвовавших в работе школы, подготовили свой вечер, где в импровизированном спектакле показали что-то из прошлого или настоящего своей страны. Мне довелось сыграть роль Ивана Грозного...



Шахматный «матч» СССР—США.

В последний день работы школы состоялось закрытие, на котором наградили победителей всех олимпиад, турниров и конкурсов; было вручено множество забавных призов и сувениров, состоялся небольшой конкурс художественной самодеятельности — наибольшее число очков набрал Михаил Капустин, импровизировавший на рояле. Безусловно, о нашей жизни на Лонг-Айленде можно было бы исписать еще не одну страницу, это были замечательные две недели.

После окончания работы

школы нас ждал трехдневный переезд из Лонг-Айленда в Вашингтон на микроавтобусах, во время которого мы побывали в Принстонском университете, в Филадельфии, в Балтиморе. Но больше всего запомнилось посещение казино «Trump Plaza» в Атлантик-Сити, где опустошение кошелек безжалостной теорией вероятностей сочетается с горящими от азарта глазами и звоном сыплющихся монет. Наконец — Мэрилендский университет (который находится совсем рядом с Вашингтоном),

где мы и провели оставшиеся 10 дней. Сюда же на три дня приехали 17 американских ребят, готовившихся ехать в СССР. Нам было прочитано несколько лекций по физике, проводились занятия на компьютерах. За это время мы несколько раз ездили в Вашингтон на экскурсии, побывали в Национальной галерее искусств, библиотеке Конгресса, Космическом центре. Значительным событием явился прием в советском посольстве, где мы встретились с вице-президентом АН СССР, глав-

ным редактором журнала «Квант», академиком Ю. А. Осипьяном.

Покидая США, хотелось бы сказать спасибо всем тем, благодаря кому это необычное событие состоялось — и редакции «Кванта», и всем американским организациям, подготовившим для нас настолько роскошную и увлекательную программу. Видимо, подобная поездка состоится и в следующем году, а потому хотелось бы рекомендовать читателям «Кванта», особенно тем, кто регулярно решает «Задачник», — самостоятельно и настойчиво изучать английский язык. Безусловно, в этой поездке мы имели хорошую языковую практику, мы довольно серьезно занимались физикой и математикой, и, главное, мы посмотрели то, что стоит посмотреть — Америку!

Михаил Капустин (Львов, с. ш. № 50). Хотелось бы рассказать немного о психологии американцев. Конечно же, они отличаются от нас. Банальная фраза из телестов: «Они такие же люди, как и мы» — вовсе не верна. С другой стороны, и пресловутый «желтый дьявол» не царит безраздельно в их душах. Очень существенная черта американцев, которая сразу бросается в глаза — общительность. К тому же у них большой интерес к Советскому Союзу. Любопытно, что, вопреки распространяемому мнению, далеко не все сразу узнавали в нас советских. Когда же мы сообщали об этом, они обычно удивлялись и тут же начинали расспрашивать буквально обо всем. Так что на недостаток общения со «средними американца-

ми» жаловаться не приходилось — мы разговаривали с продавцами, прохожими, с попутчиками по прогулке на пароходе. Очень приятно было встретиться с такими жизнерадостными и приветливыми людьми.

Маша Дорохова (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82). Выезжая из Нью-Йорка в Вашингтон, мы побывали в Бруклине, точнее в Нью-Одессе. Население здесь составляют в основном русские эмигранты. Поэтому вполне естественным был интерес к этому району советских школьников — все мы соскучились по русской речи. «Одесситы» тоже были рады пообщаться с людьми «только что оттуда». Их интерес к нашей стране — это уже не простое любопытство... Бруклин на вид — типичный район Нью-Йорка. Та-

кие же яркие вывески, маленькие магазинчики. Нас особенно поразило то, что многие, особенно старшее поколение, так и не научились говорить по-английски, все необходимое они покупают в «русских» магазинах. Обедали мы в русском ресторане. Сбылись мечты: черный хлеб, пельмени, борщ!.. Михаил Гулько пел для нас русские песни. Большинство из них было о том, как трудно эмигрантам вдали от Родины... Мы, хотя и не были эмигрантами, нечто похожее на ностальгию почувствовали и сами. Поэтому разговоры про Нью- и просто Одессу еще долго не прекращались.

Ивар Мартин (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ) и Павел Михеев (Москва, ФМШ № 18 при МГУ). Одно из наиболее сильных впечатлений произве-

ла на нас обыкновенная американская High School\*). Эта школа находится в штате Нью-Йорк, на острове Long Island. Ее полное название Smithtown High School West.

Рассказ об этой школе можно начать с того, что учится в ней 1100 человек (15—25 человек в классе), но по размерам эта школа в 3—4 раза больше, чем средняя советская школа. На территории школы 4 теннисных корта, 2 футбольных поля и одно поле для американского футбола. Интерьер школы не уступает ее внешнему виду. Прекрасно оборудованные кабинеты, огромный спортивный зал — одним словом, все то, чего не хватает большинству наших школ. Также можно отметить, что в этой школе имеются 3 буфета,

\* Аналог старших классов нашей школы. (Примеч. ред.)



Летняя школа в полном составе — учителя и ученики.

в которых качество и ассортимент пищи несколько выше, чем в наших школах. Но все эти яркие картинки отступили, когда мы увидели школьную библиотеку. Поразило даже не количество книг, которое соответствует ресурсам наших районных библиотек, а сама организация работы. Каждый ученик, чтобы найти необходимый материал, может воспользоваться одним из многочисленных компьютеров, находящихся здесь же. Ведение документации производится с помощью 2-х центральных компьютеров. Там же можно получить информацию о периодической печати, которая поступает в библиотеку даже летом.

И еще один интересный момент: каждый ученик имеет свой собственный металлический шкафчик, закрывающийся на замок, который, как это ни странно, нельзя открыть ни отверткой, ни шпилькой, поэтому каждый ученик может положить внутрь этого «сейфа» любую ценную вещь с полным спокойствием.

Трудно заканчивать наш рассказ словами, полными скрытой зависти. Поэтому скажем вам, по секрету, что тех, кто вынужден учиться даже летом, у американцев не меньше, а может, даже и больше, чем у нас.

**Володя Барановский** (Омск, с. ш. № 115). Мне больше всего понравились прогулки по Капитолию — это здание конгресса США в Вашингтоне (кстати, купол Капитолия венчает американский индеец). В одном из залов увидел статуи наиболее известных народных трибунов из разных штатов Америки. Интересно было взглянуть и на комнату, в которой

в прошлом веке заседал Верховный Суд. Жалко только, что Конгресс начинает работу с сентября, не удалось посмотреть съезд их «депутатов».

**Диар Чокин** (Алма-Ата, РФМШ). Я хотел бы поделиться своими впечатлениями о физических лекциях в Мэрилендском университете. Если честно, то они показались мне (а может быть, не я один такой) не очень интересными. В лекциях рассказывалось о довольно сложных вещах, о которых я и на русском языке, не говоря уж об английском, не все бы понял. При всем при этом ложились мы очень поздно, а вставать должны были очень рано. И поэтому большая часть энергии, которая должна была идти на переваривание лекций, шла на борьбу со сном. Но зато, когда лектор начинал показывать слайды или пользовался другим оборудованием из богатого арсенала вспомогательных средств, зал заметно оживлялся. Да, оснащенности университетских аудиторий можно позавидовать. Это и компьютер, выводящий данные на громадный экран, и автоматизированные доски, и вращающиеся сцены. Конечно, очень хочется, чтобы все это было у нас. И еще мне очень понравился памятник Альберту Эйнштейну в Вашингтоне. Я думаю, что это гениальное произведение искусства современности.

**Юля Великина** (Днепропетровск, с. ш. № 45). Перед отъездом в Штаты всем нам говорили, что американцы очень религиозные люди, и мы смогли убедиться в этом сами. Их набожность, правда, совершенно не заметна с

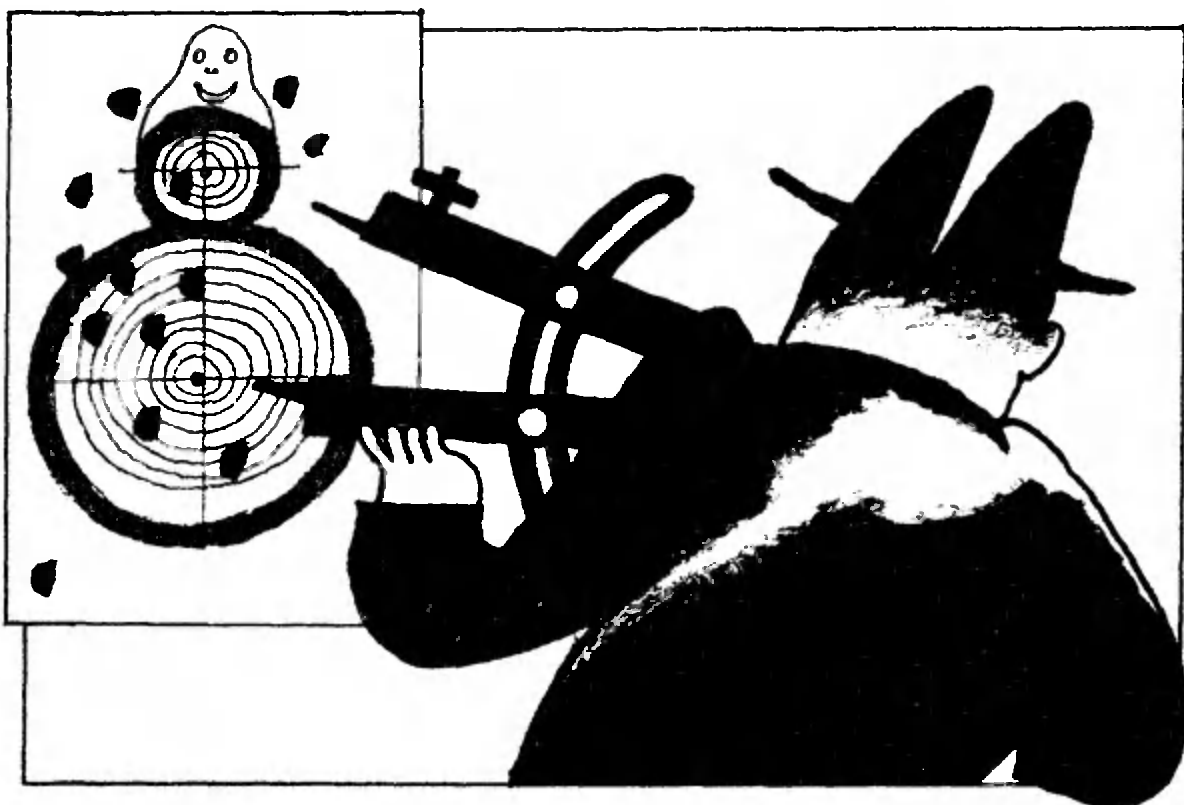
первого взгляда. Религия здесь никому никем не навязывается, люди сами приходят к Богу, причем многие уже в зрелом возрасте. По воле случая мы познакомились с членами одной из христианских общин. Они приходили к нам несколько вечеров подряд, читали Библию, рассказывали о себе. Эти люди никоим образом не пытались обратить нас в свою веру, они просто говорили с нами о Боге и людях, о добре и зле.

**Борис Дубров** (Минск, с. ш. № 107). Очень интересным оказался заключительный пункт нашей программы — посещение NASA. Нас провели по современному научному центру, показали новейшее оборудование для исследовательских работ в космосе. Было прочитано несколько интересных лекций о работе NASA, об исследованиях океана, полетах американского корабля «Вояджер» и работе одного из крупнейших в мире телескопов, расположенного на околоземной орбите. За ленчем мы встретились со специалистами по кибернетике и долго беседовали о компьютерной науке.

**Катрин Каарли** (Тарту, с. ш. № 2). Если меня спросят, что меня больше всего поразило в Америке, я отвечу — люди. Благодаря этим людям, наше путешествие было прекрасным и незабываемым. И, прощаясь, мы говорили друг другу: «We'll surely meet soon!» («Мы обязательно скоро встретимся!»).

*Редакция благодарит Татьяну Лозанскую, любезно предоставившую фотографии для этой статьи.*





## *Траектории абитуриента*

# Метод графических оценок

Б. А. МУКУШЕВ

Известно множество различных методов в исследовании физических явлений и процессов. Один из них — метод графических оценок. Он применяется и при решении конкретных физических задач.

Графический способ, с одной стороны, делает наглядным различные этапы решения задачи, а с другой — дает возможность быстрой оценки полученного решения, что особенно важно в случае громоздкого аналитического решения или при его невозможности.

Поскольку графический метод относится к приближенным методам вычислений, результаты получаются не

точными. Впрочем, точность всегда можно увеличить, используя различные таблицы, микрокалькуляторы, ЭВМ. Построив соответствующие графики, вы можете быстро получить приближенный результат и проверить, насколько он реален и имеет ли физический смысл.

Предлагаемые в статье задачи вряд ли давались на вступительных экзаменах в вузы, хотя близкие к ним задачи, имеющие громоздкое аналитическое решение, вам, несомненно, могут встретиться.

**Задача 1.** На закрепленный шар радиусом  $R$  сверху поставлена игрушка «Ванька-Встанька» (рис. 1). Нижняя поверхность игрушки — сферическая с радиусом  $r$ , центр тяжести игрушки — точка  $C$  — расположен на середине радиуса сферы. До какого предельного угла  $\beta_{\max}$  можно отклонить игрушку, чтобы она возвратилась в начальное положение, если  $R/r=4$ ?

При отклонении игрушки, например, вправо, центр тяжести смещается (см. рис. 1). Если при этом он окажется левее вертикали  $AB$ , проходящей через точку опоры  $A$ , то момент силы тяжести будет возвращать игрушку в положение равновесия. Если же центр тяжести окажется правее  $AB$ , игрушка упадет.

Обозначим  $\alpha$  — угол поворота игрушки,  $\beta$  — угол поворота радиуса  $O'A$ . Дуги  $LA$  и  $KA$  равны (нет проскальзывания), т. е.  $\alpha r = \beta R$ , откуда

$$\alpha = \beta \frac{R}{r}.$$

Из треугольника  $OAB$  имеем

$$\frac{OB}{\sin \beta} = \frac{AO}{\sin (\pi - \alpha - \beta)} = \frac{r}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{r}{\sin (\beta (1 + R/r))},$$

или

$$OB = \frac{r \sin \beta}{\sin (\beta (R/r + 1))}.$$

Игрушка возвратится в исходное положение, если  $OC = \frac{1}{2} r > OB$ , т. е.

$$\frac{1}{2} r > \frac{r \sin \beta}{\sin (\beta (R/r + 1))},$$

или, с учетом соотношения  $R/r = 4$ ,  $\sin 5\beta > 2 \sin \beta$ .

Чтобы найти предельный угол  $\beta_{\max}$ , нам предстоит решить тригонометрическое уравнение

$$\sin 5\beta_{\max} = 2 \sin \beta_{\max}.$$

Для этого построим графики функций

$$y = \sin 5\beta \text{ и } y = 2 \sin \beta$$

и из пересечения этих графиков (рис. 2) найдем

$$\beta_{\max} \approx 0,42 \text{ рад} \approx 23,9^\circ.$$

Значит, при  $-23,9^\circ < \beta < 23,9^\circ$  игрушка возвращается в начальное положение.

**Задача 2.** На покоящийся на гладкой поверхности кубик массой  $m$ , соединенный со стенкой пружиной, налетает справа второй кубик массой  $M$  (рис. 3). Происходит абсолютно упругий удар, после чего первый кубик начинает колебаться. Какая часть периода колебаний пройдет до момен-

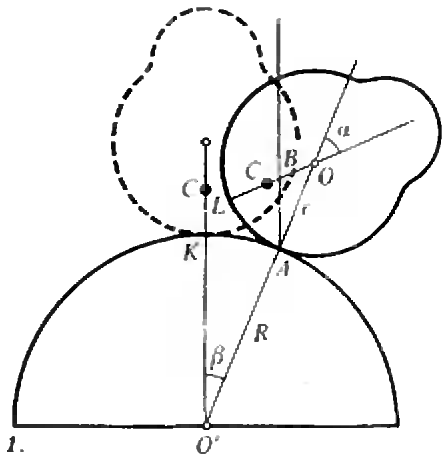


Рис. 1.

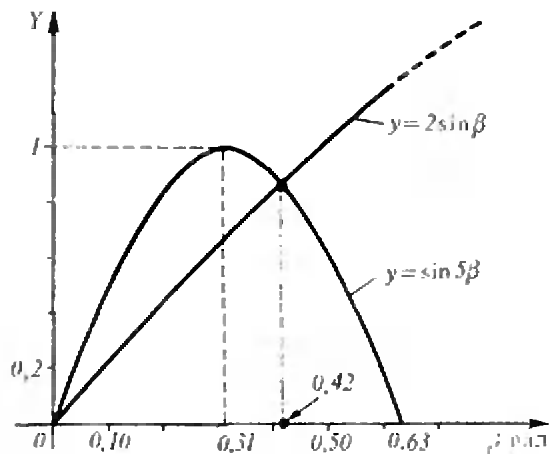


Рис. 2.



Рис. 3.

та второго столкновения кубиков, если а)  $m/M = 1/2$ , б)  $m/M \ll 1$ ? При каких значениях параметра  $\gamma = m/M$  второе столкновение не произойдет вовсе?

Пусть  $v_0$  — начальная скорость второго кубика и  $v_1$  и  $v_2$  — скорости кубиков после первого соударения, причем оба кубика движутся влево. Из законов сохранения импульса и энергии получаем

$$Mv_0 = mv_1 + Mv_2, \quad \frac{Mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2},$$

откуда

$$v_1 = v_0 \frac{2}{1 + \gamma}, \quad v_2 = v_0 \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}.$$

После соударения второй кубик будет двигаться равномерно, и его координата со временем будет изменяться по закону

$$x_2 = v_2 t = v_0 \frac{1-\gamma}{1+\gamma} t.$$

Первый же кубик начнет колебаться по закону

$$x_1 = x_m \sin \omega t.$$

Частота гармонических колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

где  $k$  — жесткость пружины. Амплитуду колебаний  $x_m$  найдем из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{kx_m^2}{2} \Rightarrow x_m = \frac{v_1}{\omega} = \frac{2v_0}{(1+\gamma)\omega}.$$

Таким образом,

$$x_1 = \frac{2v_0}{(1+\gamma)\omega} \sin \omega t.$$

Второе соударение кубиков произойдет при условии  $x_1 = x_2$ , т. е.

$$\frac{2v_0}{(1+\gamma)\omega} \sin \omega t = v_0 \frac{1-\gamma}{1+\gamma} t.$$

Отсюда

$$2 \sin \omega t = (1-\gamma) \omega t,$$

или

$$2 \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} \right) = (1-\gamma) 2\pi \frac{t}{T},$$

где  $T = 2\pi/\omega$  — период колебаний,  $t/T$  — искомая часть периода.

Обозначим  $\pi t/T = z$ . Тогда предыдущее уравнение приобретет вид

$$\sin 2z = (1-\gamma) z.$$

При  $\gamma = 1/2$  получаем

$$\sin 2z = \frac{z}{2}.$$

Начертим графики функций  $y = \sin 2z$  и  $y = z/2$  (рис. 4) и из их пересечения найдем

$$z \approx 1,24 \text{ рад}, \quad \pi \frac{t}{T} \approx 1,24, \quad \frac{t}{T} \approx 0,39.$$

Если  $m \ll M$ , т. е.  $\gamma \rightarrow 0$ , то получаем уравнение

$$\sin 2z = z.$$

Его решением будет (см. рис. 4)

$$z \approx 0,95 \text{ рад}, \text{ или } \frac{t}{T} \approx 0,30.$$

Второго соударения кубиков не произойдет, если их координаты больше не совпадут, т. е., говоря на языке графиков, если прямая, выражающая график зависимости координаты второго кубика от времени, не пересечет второй раз синусоиду. Этому соответствуют все прямые линии, выходящие из точки  $O$  и находящиеся в заштрихованной области между линиями  $I$  и  $II$ . Линия  $I$  соответствует случаю  $m/M \rightarrow \infty$  (масса налетающего кубика очень мала). Осталось найти  $\gamma$  для линии  $II$  — касательной к синусоиде. Как видно из рисунка 4, этой линии соответствует значение  $z \approx 2,24$  рад. Отсюда

$$\gamma = 1 - \frac{\sin 2z}{z} \approx 1,44.$$

Итак, чтобы не произошло второго столкновения, должно выполняться условие

$$1,44 < \gamma < \infty.$$

**Задача 3.** Поршневой насос при каждом качании захватывает определенный объем воздуха. При откачке воздуха из сосуда насос совершил четыре качания. Начальное давление внутри сосуда было равно атмосферному  $p_0$ . Затем этот же насос начал нагнетать воздух в сосуд из атмосферы и совершил также четыре качания. При этом давление в сосуде стало в

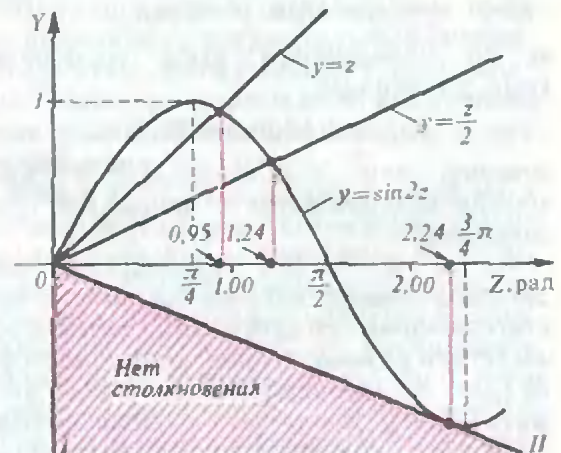


Рис. 4.

2 раза больше, чем атмосферное. Найдите соотношение между рабочим объемом насоса и объемом сосуда.

При откачке воздуха из сосуда после первого качания давление в сосуде станет равным

$$p_1 = p_0 \frac{V}{V + V_0},$$

где  $V$  — объем сосуда,  $V_0$  — рабочий объем поршневого насоса; после второго качания —

$$p_2 = p_1 \frac{V}{V + V_0} = p_0 \left( \frac{V}{V + V_0} \right)^2$$

и т. д. После четырех качаний давление в сосуде будет

$$p' = p_0 \left( \frac{V}{V + V_0} \right)^4.$$

При нагнетании воздуха в сосуд после четырех качаний в сосуде установится давление

$$p = p' + \frac{4p_0V_0}{V} = p_0 \left( \left( \frac{V}{V + V_0} \right)^4 + 4 \frac{V_0}{V} \right) = p_0 \left( \left( \frac{1}{1 + V_0/V} \right)^4 + 4 \frac{V_0}{V} \right).$$

С другой стороны, по условию задачи

$$p = 2p_0.$$

Получаем уравнение

$$2p_0 = p_0 \left( \left( \frac{1}{1 + V_0/V} \right)^4 + 4 \frac{V_0}{V} \right),$$

или

$$2 - 4x = \left( \frac{1}{1 + x} \right)^4,$$

где  $x = V_0/V$ . Построим графики функций (рис. 5)

$$y = 2 - 4x \text{ и } y = \frac{1}{(1 + x)^4}$$

и из их пересечения найдем

$$x \approx 0,44, \text{ т. е. } \frac{V_0}{V} \approx 0,44.$$

**Задача 4.** Для определения емкости неизвестного конденсатора  $C_x$  была собрана схема, изображенная на рисунке 6. Емкость конденсатора  $C_0$  известна. Конденсатор  $C_0$  при помощи ключа  $K_1$  присоединяют сначала к источнику тока (контакт 2), а потом

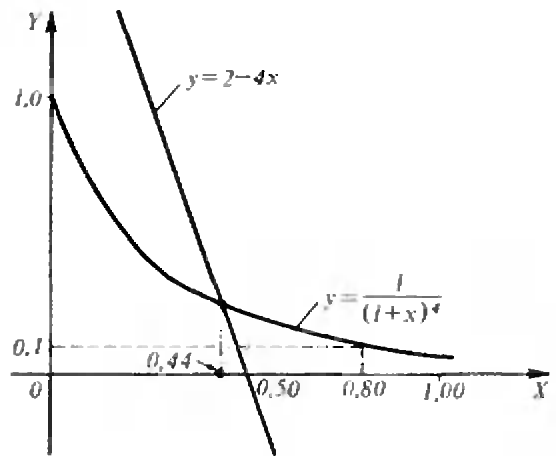


Рис. 5.

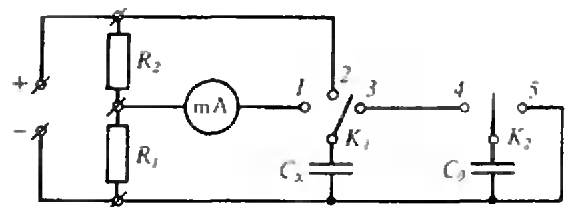


Рис. 6.

к контакту 3. Все это время ключ  $K_2$  находится в положении 4. Потом заряженный конденсатор  $C_x$  с помощью  $K_2$  разряжается через контакт 5. Переключение  $K_2$  между контактами 4 и 5 повторяется четыре раза, после чего  $K_1$  соединяется с контактом 1. Миллиамперметр при этом показывает нуль. Затем, поменяв местами резисторы, весь процесс повторяется снова. На этот раз миллиамперметр показывает нуль при переключении  $K_2$  три раза. Считая  $C_0 = 100$  мкФ, найдите  $C_x$ .

Пусть напряжение источника равно  $U_0$ . При включении  $K_1$  в положение 2 напряжение на неизвестном конденсаторе становится равным  $U_0$ , а после четырех переключений  $K_2$  оно оказывается  $U_4$ . Так как при этом ток через миллиамперметр не течет, легко установить, что

$$\frac{U_2}{R_2} = \frac{U_4}{R_1},$$

где  $U_2$  — падение напряжения на сопротивлении  $R_2$ . С другой стороны,

$$U_2 = U_0 - U_4.$$



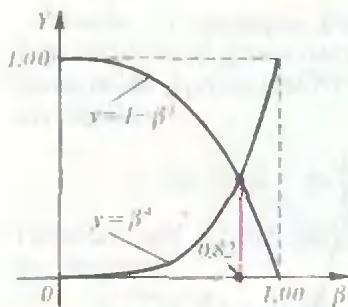


Рис. 7.

Отсюда

$$\frac{U_4}{U_0} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (1)$$

Вначале на конденсаторе  $C_x$  был заряд  $q_x = C_x U_0$ . При первом переключении  $K_1$  в положение 3 этот заряд распределяется между  $C_x$  и  $C_0$ , а напряжение на обоих конденсаторах становится равным

$$U_1 = \frac{q_x}{C_x + C_0} = \frac{C_x U_0}{C_x + C_0}.$$

После переключения  $K_2$  в положение 5 конденсатор  $C_0$  полностью разряжается, а на конденсаторе  $C_x$  остается заряд

$$q_1 = C_x U_1 = \frac{C_x^2 U_0}{C_x + C_0}.$$

После второго переключения  $K_2$  в положение 4 напряжение на конденсаторах оказывается

$$U_2 = \frac{q_1}{C_x + C_0} = U_0 \left( \frac{C_x}{C_x + C_0} \right)^2,$$

а после четвертого переключения —

$$U_4 = U_0 \left( \frac{C_x}{C_x + C_0} \right)^4.$$

Обозначим  $\beta = C_x / (C_x + C_0)$ , тогда

$$\frac{U_4}{U_0} = \beta^4. \quad (2)$$

После перемены местами резисторов и повторения всего процесса можно записать уравнения, аналогичные уравнениям (1) и (2):

$$\frac{U_3}{U_0} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad (3)$$

$$\frac{U_3}{U_0} = \beta^3, \quad (4)$$

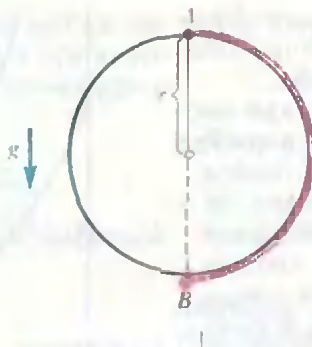


Рис. 8.

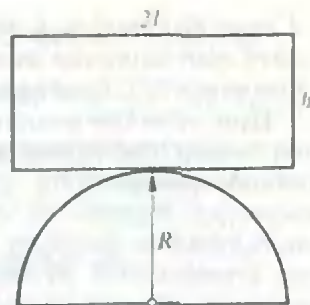


Рис. 9.

где  $U_3$  — напряжение на конденсаторе  $C_x$  после трех переключений  $K_2$ . Из уравнений (1) и (3) получаем

$$\frac{U_4}{U_0} + \frac{U_3}{U_0} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 1,$$

значит,

$$\beta^4 + \beta^3 = 1.$$

Построим графики функций (рис. 7)

$$y = \beta^4 \text{ и } y = 1 - \beta^3$$

и из их пересечения найдем

$$\beta \approx 0,82.$$

Тогда окончательно

$$C_x = \frac{\beta}{1 - \beta} C_0 \approx \frac{0,82}{1 - 0,82} 100 \text{ мкФ} \approx$$

$$\approx 450 \text{ мкФ}.$$

#### Упражнения

1. Нить, обернутая вокруг неподвижного диска радиусом  $r$ , образует полуокружность (рис. 8). Один конец нити закреплен в точке  $A$ , ко второму концу нити привязан грузик, который удерживается в точке  $B$  (точки  $A$  и  $B$  находятся на одной вертикали). В некоторый момент грузик отпускается. Какая часть нити останется в соприкосновении с диском, когда грузик достигнет наивысшего положения? Трением пренебречь.

2. На неподвижном круглом полуцилиндре радиусом  $R$  (рис. 9) лежит доска. Толщина доски  $h$ , длина  $2l$ ,  $R = h$ . До какого предельного угла ( $\varphi_{\text{пр}}$ ) можно отклонить доску от горизонтального положения, чтобы она возвратилась в начальное состояние? Трение велико. Считая, что полуцилиндр находится на бесконечной горизонтальной плоскости и что  $2l/R = 4$ , выясните, возвратится ли доска в начальное состояние при максимальном отклонении от горизонтального положения.

# Олимпиады



## XXX Международная математическая олимпиада

Кандидат физико-математических наук  
В. В. ВАВИЛОВ,  
кандидат физико-математических наук  
А. А. ФОМИН

За тридцать лет своего существования Международная олимпиада по математике прошла впечатляющий путь развития. В первой ММО, состоявшейся в 1959 году в Румынии, приняли участие только 7 стран. В этом году олимпиада собрала команды уже из 51 страны; в ней впервые участвовали команды Индии, Португалии и Тонга, а Япония, Дания, Нигерия и Берег Слоновой Кости направили своих официальных наблюдателей.

XXX ММО проходила в древнем городе Брауншвейге, впервые упомянутом в летописях в 1031 году. Этот город в ФРГ был выбран местом проведения олимпиады не случайно, — ведь именно здесь были заложены основы школьного образования в Германии. Уроженцами Брауншвейга были «король математиков» Карл Фридрих Гаусс и его ученик Рихард Дедекинд. Отдавая дань своему великому соотечественнику, организаторы олимпиады использовали в эмблеме олимпиады правильный семнадцатиугольник. Дело в том, что, когда Гауссу было 19 лет, он полностью решил древнюю задачу о возможности построения циркулем и линейкой правильных многоугольников. В частности, он впервые доказал возможность построения правильного 17-угольника.

В олимпиаде участвовал 321 школьник. Нашу страну представляли Дмитрий Иванов (Москва, с. ш. № 57), Сергей Иванов (Ленинград, с. ш. № 239), Евгения Малинникова (Ленинград, с. ш. 239), Владимир Рагулин (ФМШ № 18 при МГУ), Мария Рогинская (Ленинград, с. ш. № 239) и Аркадий Скопенков (ФМШ № 18 при МГУ). Их успехи отражены в таблице, показывающей количество баллов, полученных за решение каждой задачи, общую сумму баллов каждого участника и полученную им награду. Традиционно олимпиада проходила в 2 тура. В каждом туре (продолжительностью в 4,5 часа) предлагалось по три задачи. Все задачи оценивались по 7 баллов.

Золотая медаль этой олимпиады была третьей, полученной Сережей Ивановым на международных олимпиадах. Вторую свою золотую медаль получил Дима Иванов. Выдающийся успех, юность и обаяние ученицы 9 класса Жени Малинниковой сделали ее одной из самых популярных участниц олимпиады.

Проверка работ была жесткой: ни одна ошибка или неточность в оформлении решения задачи не прощалась.

Олимпиада прошла в более сжатые, чем обычно, сроки и была насыщена экскурсиями, встречами, вечерами отдыха, играми, танцами и т. д. Для этого много сделали Федеральный министр образования и науки Юрген В. Меллеманн, министр просвещения земли Нижней Саксонии Хорст Хоррманн, бургомистр Брауншвейга Гер-

Таблица

	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	Сум- ма	Ме- даль
Иванов С.	7	7	7	7	7	7	42	I
Малинникова Е.	7	7	7	6	7	7	41	I
Иванов Д.	7	7	7	7	7	4	39	I
Скопенков А.	7	6	0	7	7	7	34	II
Рогинская М.	0	7	5	7	6	7	32	II
Рагулин В.	7	7	0	7	7	1	29	III

хард Глоговски и председатель жюри профессор Артур Энгель. Большое внимание организации проведения ММО уделил канцлер ФРГ Хельмут Коль.

При закрытии XXX ММО профессор А. Энгель, тепло поздравляя участников, отметил: «Часто забывают, что ММО — индивидуальное соревнование. Состязаются друг с другом не страны. Это было бы абсурдно... Сложение баллов по отдельным странам не запрещено, но официально не предусмотрено и немного несправедливо...» Присоединяясь к этим словам, мы все-таки ответим на многочисленные вопросы и приведем общие суммы баллов по первым десяти странам: Китай (237), Румыния (223), СССР (217), ГДР (216), США (207), ЧССР (202), НРБ (195), ФРГ (187), Вьетнам (183), Венгрия (175).

Следующие две Международные олимпиады по математике пройдут в Китае и Швеции, а в 1992 году — в СССР.

Несколько слов о подготовке и формировании нашей команды для участия в ММО. Кандидатами в команду зачисляются учащиеся, получившие I и II премию на заключительном этапе Всесоюзной математической олимпиады, по решению жюри ВМО. В программу подготовки команды входят 8—10 заочных заданий на специальные темы и два учебно-тренировочных (и отборочных) очных сбора: неделя зимой и месяц в июне перед самым отъездом.

Поздравляем советских участников олимпиады и их учителей с успешным выступлением на XXX ММО, желаем им успехов в учебе и труде, хорошего здоровья, прекрасного настроения и большого счастья.

**Задачи**

1 (Филиппины). Докажите, что множество  $\{1, 2, \dots, 1989\}$  можно представить в виде объединения попарно непересекающихся множеств  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 117$ ) таких, что

а) каждое из множеств  $A_i$  имеет 17 элементов;

б)  $S_1 = S_2 = \dots = S_{117}$ , где  $S_i$  — сумма всех чисел множества  $A_i$ .

2 (Австралия). Биссектрисы углов  $A, B, C$  остроугольного треугольника  $ABC$  пересекают

описанную около него окружность в точках  $A_1, B_1, C_1$  соответственно. Прямая  $AA_1$  пересекает биссектрисы внешних углов при вершинах  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  в точке  $A_2$ . Точки  $B_2$  и  $C_2$  определяются аналогично.

Докажите, что

а)  $S_{A_1B_1C_1} = 2S_{A_2B_2C_2}$ ;

б)  $S_{A_1B_1C_1} \geq 4S_{ABC}$ .

3 (Венгрия). Пусть  $n$  и  $k$  фиксированные натуральные числа,  $n \geq k$ . Множество  $S$  и  $n$  точек плоскости обладает следующими свойствами:

а) никакие три точки из  $S$  не лежат на одной прямой;

б) для любой точки  $P \in S$  существуют не менее  $k$  различных точек из  $S$ , равноудаленных от  $P$ .

Докажите, что

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2}n.$$

4 (Исландия). Пусть  $ABCD$  — выпуклый четырехугольник, стороны  $AB, AD$  и  $BC$  которого удовлетворяют равенству  $AB = AD + BC$ . Внутри этого четырехугольника существует точка  $P$  такая, что  $AP = h + AD$  и  $BP = h + BC$ , где  $h$  — расстояние от точки  $P$  до прямой  $CD$ .

Докажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}.$$

5 (Швеция). Докажите, что для любого  $n$  найдется  $n$  последовательных натуральных чисел, каждое из которых не является степенью простого числа с целым показателем.

6 (Польша). Назовем перестановку  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  из чисел  $1, 2, \dots, 2n$  удобной, если  $|x_i - x_{i+1}| = n$  по крайней мере для одного значения  $i \in \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ . Докажите, что при любом  $n$  больше половины всех возможных перестановок являются удобными.



# XX Международная физическая олимпиада

*Кандидат физико-математических наук*  
**С. С. КРОТОВ,**  
*кандидат педагогических наук*  
**В. А. ОРЛОВ**

В этом году Международная физическая олимпиада (МФО) школьников проходила с 16 по 24 июля в столице Польской Народной Республики. В Варшаву приехали школьники из 29 стран, на две команды больше, чем в прошлом году. Надо сказать, что число стран-участниц олимпиады год от года неуклонно увеличивается.

В проведении олимпиады участвовали вице-президент Европейского физического общества г-н Дефирь (Бельгия) и наблюдатели из Греции, Испании, Таиланда и Объединенных Арабских Эмиратов. Вне конкурса на олимпиаде выступила команда Литовской ССР. В качестве почетных гостей на юбилейную XX МФО были приглашены руководители команд-участниц МФО прошлых лет Г. С. Тарасюк (СССР), д-р Вендт (ГДР) и проф. Груич (Югославия). На олимпиаде присутствовали также корреспонденты научных журналов для школьников из ряда европейских стран. Жаль, что среди них и на этот раз не оказалось официального представителя журнала «Квант».

В команду СССР, по итогам выступлений на Всесоюзных олимпиадах и по результатам участия в зимних и летних сборах, вошли:

*Константин Зуев* — выпускник с. ш. № 8 г. Вологды,

*Александр Коршков* — выпускник с. ш. № 8 г. Мозыря,

*Николай Кузьма* — выпускник с. ш. № 1 п. Протва Калужской области,

*Владислав Макеев* — выпускник РФМШ г. Алма-Аты,

*Юрий Уваров* — выпускник с. ш. № 239 г. Ленинграда.

Заметим, что все они, а также и другие участники летних сборов — Евгений Староколыцев (с. ш. № 37 г. Днепропетровска), Вадим Терещенко (с. ш. № 145 г. Киева) и Дмитрий Фалькович (с. ш. № 57 г. Москвы) — зачислены без экзаменов в выбранные ими вузы. Еще один участник летних сборов — Сергей Шинкевич, ученик 9 класса с. ш. № 3 г. Березники — зачислен кандидатом в команду СССР на XXI МФО.

Руководителями команды СССР были авторы этой статьи.

Организацию подготовки и проведения XX МФО взяло на себя Министерство просвещения и высшего образования ПНР. Составление и проверка конкурсных задач осуществлялась сотрудниками Института теоретической и экспериментальной физики Варшавского университета и Института физики Польской Академии наук под руководством А. Котлицкого и В. Гошковского — истинных энтузиастов польского олимпиадного движения. Председателем оргкомитета олимпиады был проф. Блиновский — заведующий кафедрой теоретической физики Варшавского университета. С интересным докладом о работе польских ученых в области гиперядерной физики перед участниками и гостями олимпиады выступил президент Польского физического общества проф. Закшевский. В частности, он рассказал о впервые обнаруженном в 1952 году процессе образования гиперядер в результате реакции столкновения высокоэнергичных космических частиц с тяжелыми ядрами. Фотография этой уникальной реакции изображена на эмблеме XX МФО.

Как обычно, соревнования проходили в два тура. На теоретическом туре школьникам было предложено ре-



шить три задачи, на экспериментальном — одну. Приведем условия этих задач, а также принятую Международной комиссией оценку (разбалловку) их решений (каждая теоретическая задача оценивалась в 10 баллов, экспериментальная — в 20).

**Теоретические задачи**

**Задача 1**

Жидкости *A* и *B* взаимно нерастворимы. Давления их насыщенных паров  $p_i$  ( $i=A$  или *B*) с хорошей точностью подчиняются закону

$$\ln(p_i/p_0) = a_i/T + b_i,$$

где  $p_0$  — нормальное атмосферное давление,  $T$  — абсолютная температура паров,  $a_i$  и  $b_i$  — некоторые постоянные, зависящие от жидкости (символ  $\ln$  обозначает натуральный логарифм, т. е. логарифм по основанию  $e=2,7182818\dots$ ). Значения (точные) отношений  $p_i/p_0$  для жидкостей *A* и *B* при температурах 40 °C и 90 °C приведены в таблице:

$t, \text{ }^\circ\text{C}$	$P_i/p_0$	
	$i=A$	$i=B$
40	0,284	0,07278
90	1,476	0,6918

a) Найдите температуры кипения жидкости *A* в жидкости *B* при давлении  $p_0$ .

b) Жидкости *A* и *B* налиты в сосуд, где они расслоились так, как это представлено на рисунке 1. Поверхность жидкости *B* покрывает тонкий слой неиспаряющейся жидкости *C*, которая не растворяется в жидкостях *A* и *B* и препятствует свободному испарению с поверхности жидкости *B*. Отношение молярных масс веществ *A* и *B* в газообразном состоянии равно  $\gamma = M_A/M_B = 8$ . Массы жидкостей *A* и *B* сначала были одинаковы и равны  $m=100$  г каждая. Высоты столбов жидкостей в сосуде и плотности жидкостей такие, что в любой точке сосуда давление не отличается от нормального атмосферного давления  $p_0$ . К рассматриваемой системе жидкостей медленно и равномерно подводится тепло. Оказывается, что температура  $t$  жидкостей изменяется с течением времени  $\tau$  так, как это схематически представлено на рисунке 2. Определите температуры  $t_1$  и  $t_2$  (с точностью до целого числа гра-

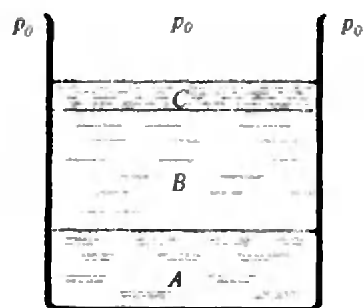


Рис. 1.

дусов), соответствующие горизонтальным отрезкам диаграммы, и массы жидкостей *A* и *B* (с точностью до десятых долей грамма) в момент времени  $t_1$ .

**Примечание.** Предполагается, что пары рассматриваемых жидкостей с хорошим приближением: 1) подчиняются закону Дальтона, согласно которому давление смеси газов равно сумме парциальных давлений газов, составляющих смесь; 2) до давлений, соответствующих давлениям насыщенных паров, можно считать идеальным газом.

**Разбалловка решения:**

Условие кипения	1
Температура кипения жидкости <i>A</i> (численно)	1
Температура кипения жидкости <i>B</i> (численно)	1
Анализ явлений при температуре $t_1$	3
Численное значение $t_1$	1
Отношение масс насыщенных паров в пузырьке (численно)	1
Массы жидкостей в момент времени $t_1$	1
Смысл и значение $t_2$	1

**Задача 2**

Три материальные точки  $P_1, P_2, P_3$ , не лежащие на одной прямой и имеющие массы  $m_1, m_2, m_3$ , взаимодействуют друг с другом только гравитационными силами и не взаимодействуют с другими телами. Обозначим через  $\sigma$  ось, проходящую через центр масс этих точек и перпендикулярную к плоскости треугольника  $P_1P_2P_3$ . Каким условиям должны удовлетворять расстояния между точками  $P_1P_2=a_{12}, P_2P_3=a_{23}, P_1P_3=a_{13}$  и угловая скорость  $\omega$  вращения системы рассматриваемых точек, чтобы во время движения не изменялась форма треугольника  $P_1P_2P_3$ , т. е. чтобы система вращалась вокруг оси  $\sigma$  как твердое тело?

**Разбалловка решения:**

Констатация условия $\omega = \text{const}$	1
Условия равновесия системы	3
Доказательство равенства $a_{12}=a_{13}=a_{23}$	4
Доказательство равенства $\omega^2 a^3 = Gm$	2

**Задача 3**

Исследуйте возможность и следствия преобразования электронного микроскопа с магнитным управлением электронным пучком, ускоренным напряжением  $U=511$  кВ, в протонный микроскоп, в котором пучок протонов ускоряется напряжением —  $U$ . Для этого ответьте на два вопроса.

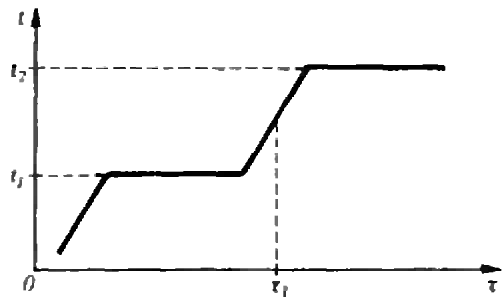


Рис. 2.

а) Электрон после ускорения напряжением  $U$  попадает в область с неоднородным магнитным полем  $B$ , создаваемым системой неподвижных катушек  $L_1, L_2, \dots, L_n$ . Силы токов в катушках равны соответственно  $i_1, i_2, \dots, i_n$ . В этой области электрон движется по некоторой траектории  $T$ . Чему должны быть равны силы токов  $i'_1, i'_2, \dots, i'_n$  в катушках  $L_1, L_2, \dots, L_n$ , чтобы протон, ускоренный напряжением  $-U$ , после попадания в область с магнитным полем мог двигаться по той же самой траектории  $T$  (и в ту же самую сторону), по которой двигался электрон?

Указание. Найдите условие, при котором уравнение, описывающее траекторию, в обоих случаях одинаково. Можно использовать соотношение

$$\vec{p} \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\vec{p}^2}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dP^2}{dt},$$

где  $P$  — импульс частицы.

б) Во сколько раз увеличится или уменьшится разрешающая способность рассматриваемого микроскопа (т. е. минимальное расстояние между двумя точечными предметами, изображения которых в виде дисков еще различимы), если пучок электронов заменить пучком протонов? Считать, что разрешающая способность микроскопа обусловлена только волновыми свойствами материи. Предполагается, что скорости электронов и протонов перед их ускорением равны нулю. Для упрощения принимаем также, что взаимодействие собственных магнитных моментов электронов и протонов с внешним магнитным полем пренебрежимо мало и что эти частицы, двигаясь в магнитном поле, не испускают электромагнитного излучения.

Примечание. В физике часто в качестве единицы измерения энергии используется 1 электронвольт (эВ) и производные единицы 1 кэВ или 1 МэВ; 1 эВ равняется изменению энергии электрона, прошедшего разность потенциалов 1 В. В расчетах используйте следующие значения: энергия покоя электрона  $E_e = m_e c^2 = 511$  кэВ, энергия покоя протона  $E_p = m_p c^2 = 938$  МэВ.

Разбалловка решения:

Релятивистское уравнение движения	1
Постоянство $P$ и $v$	1
Равенство $eV/P$ в обоих случаях	2
Умножение полей и токов на одинаковый множитель	1
Вычисление импульсов (релятивистских)	1
Вычисление отношения импульсов (численно)	1
Пропорциональность разрешающей способности и $\lambda$	1
Обратная пропорциональность $\lambda$ и $P$	1
Разрешающая способность протонного микроскопа	1

**Экспериментальная задача**

Имеется оборудование: два пьезоэлектрических диска толщиной 10 мм с напыленными на торцах электродами, закрепленными в зажимах на щеках штангенциркуля; калиброванный генератор синусоидальных электрических колебаний; двухканальный осциллограф; два плот-

но закрытых полиэтиленовых мешочка, наполненных жидкостями  $A$  и  $B$ ; сосуд с глицерином для смачивания поверхностей дисков, обеспечивающего лучший механический контакт; провода и штативы для закрепления штангенциркуля и мешочков с жидкостями.

а) Зная, что скорость продольных ультразвуковых волн в материале диска равна приблизительно  $4 \cdot 10^3$  м/с, проведите грубую оценку резонансной частоты осевых механических колебаний диска, считая середину плоскости диска неподвижной. (Отметим, что в дисках возможны также другие моды собственных колебаний, как с более высокими, так и с более низкими частотами.) Сделав оценку, найдите экспериментальную частоту, при которой пьезоэлектрические диски наилучшим образом работают в режиме передатчика-приемника ультразвука в жидкости (смачивание мешочками улучшает проникновение ультразвука).

б) Не открывая мешочков, найдите скорости ультразвука для обеих жидкостей и проведите оценку погрешности.

с) Найдите отношение скоростей ультразвука в обеих жидкостях и проведите оценку погрешности.

Разбалловка решения:

а) Формула	1
Результат (единицы)	1
Метод измерения наилучшей частоты передачи — приема	1
Результат	2
отличие от настоящего значения меньше чем на 10 %	1
меньше чем на 5 %	2
Правильная оценка ошибки полученного результата	1
б) Ясное описание метода измерения скорости ультразвука	2
Измерение расстояний	3
больше чем 5 результатов для каждой жидкости	3
больше чем 5 для одной и больше чем 1 для другой жидкости	2
больше чем 1 результат для каждой жидкости	1
Правильный результат для $v_A$	2
отличие от настоящего значения меньше чем на 5 %	2
меньше чем на 15 %	1
Правильная оценка ошибки полученного значения $v_A$	1
Правильный результат для $v_B$	2
отличие от настоящего значения меньше чем на 5 %	2
меньше чем на 15 %	1
Правильная оценка ошибки полученного значения $v_B$	1
с) Правильный результат для $v_A/v_B$	2
отличие от настоящего значения меньше чем на 3 %	2
меньше чем на 10 %	1
Правильная оценка ошибки полученного значения отношения $v_A/v_B$	1

По замыслу авторов разные задачи предполагали наличие разных уме-



*Команда СССР на XX Международной физической олимпиаде. Слева направо: Н. Кузьма, Ю. Уваров, А. Коршков, К. Зусев, В. Макеев.*

ний и навыков у учащихся. Так, в первой задаче было существенно использование численных методов расчета, во второй — владение аппаратом векторной алгебры, в третьей — исследование явлений на качественном уровне с привлечением идей размерностей и подобия. Отметим, что все три теоретические задачи явно выходят за рамки программы общеобразовательного курса физики нашей средней школы. Несмотря на это, советские школьники в целом успешно справились с задачами теоретического тура, особенно с задачами 2 и 3, каждую из которых полностью решили 3 участника. Наибольшие трудности вызвала задача 1, в которой предлагалось разобраться в своеобразном явлении пограничного кипения. За решение теоретических задач наша команда получила 94 балла, что составляет 63 % от максимально возможного числа баллов. Это — шестой результат.

Целью эксперимента было определение скорости распространения ультразвуковых волн в воде и глицерине, используя метод фазового сдвига опорного и прошедшего через среду сигналов. Основу физического содержания экспериментальной задачи составил пьезоэлектрический эффект в диэлектриках.

Для выполнения задания ученикам было предложено современное физи-

ческое оборудование, не являющееся обычным для школьного физического кабинета: двухлучевой электронный осциллограф, генератор стандартных сигналов, пьезодатчики. Надо заметить, что на протяжении последних пяти лет достаточно стабильно прослеживается тенденция перехода от замороженного (порой очень остроумного) оборудования к настоящему, современному. Стратегия подготовки команды СССР этого явно не учитывает.

Успех решения экспериментальной задачи зависел не столько от глубины владения физикой, сколько от выполнения кропотливых и трудоемких наблюдений, грамотного оформления результатов эксперимента, включая основательные расчеты погрешностей. К сожалению, это не является характерным для экспериментальных туров Всесоюзных физических олимпиад, что сказалось на результатах. Хотя наши школьники в сумме набрали 69,5 баллов (70 % от максимального их числа), этот результат превзошли многие команды, и мы оказались лишь на одиннадцатом месте.

По итогам теоретического и экспериментального туров в неофициальном командном зачете команды расположились в следующем порядке: ФРГ (196,833), Китай (186,498), Великобритания (179,333), Польша (176,999), Румыния (175,833), ГДР

(172,499), Венгрия (168,666), Голландия (166,500), СССР (163,500), Болгария (154,499), Югославия (152,999), Чехословакия (152,666), США (151,499), Австрия (140,165), Швеция (133,333), Сингапур (129,582), Австралия (127,499), Финляндия (126,166), Канада (126,166), Иран (119,333), Норвегия (113,833), Бельгия (104,499), Куба (101,333), Кипр (88,666), Италия (88,166), Турция (74,333), Колумбия (60,833), Исландия (59,666), Кувейт (21,000).

По результатам официального личного зачета участникам олимпиады было вручено 10 дипломов первой степени, 26 дипломов второй степени, 30 дипломов третьей степени и 33 похвальные грамоты. Все призеры олимпиады удостоились также ценных подарков.

Советские школьники получили следующие награды: Н. Кузьма — диплом I степени, А. Коршков — диплом II степени, К. Зуев — диплом III степени, В. Макеев и Ю. Уваров — похвальные грамоты. Отметим, что К. Зуеву не хватило нескольких долей балла до серебряной медали, а В. Макееву — до бронзовой.

Команда Литвы, выступавшая вне конкурса, получила один диплом III степени и одну грамоту.

На закрытии олимпиады руководитель команды Голландии д-р Ханс Йордан от имени своего правительства пригласил всех присутствующих на следующую олимпиаду в г. Гронинген.

Что же можно сказать в заключение о подготовке и выступлении нашей команды? Итоги участия в XX МФО свидетельствуют о резко возросшей конкуренции со стороны команд многих стран. Особенно заметен прогресс команды Китая, занявшей второе место на физической олимпиаде и добившейся лучших командных результатов на математической и химической олимпиадах. Показателен успех команды США, самый сильный участник которой (Стивен Габсер) набрал лучшую сумму баллов — 46,3, очень высокий результат. Поэтому, заглядывая в будущее, следует серьезно задуматься о создании оптимальных

условий для подготовки наших школьников к международным олимпиадам. Первые шаги в этом направлении сделаны на пути объединения усилий Государственного комитета СССР по народному образованию и ЦК ВЛКСМ.

В прошлом году впервые зимние и летние сборы кандидатов в команды проходили в Молодежном центре ЦК ВЛКСМ «Олимпиец», обладающем рядом существенных преимуществ по сравнению с предыдущей базой. Это и более удобное географическое расположение, и принципиально иной уровень жилищно-бытовых условий, и более широкие возможности для отдыха и занятий спортом. Кроме кандидатов на международные олимпиады в «Олимпиец» были приглашены также финалисты Московского турнира юных физиков, победители заочного коллективного конкурса Всесоюзного турнира юных физиков и победители конкурса «Задачник «Кванта». Все это способствовало созданию атмосферы серьезного и справедливого отбора в команды СССР наиболее достойных претендентов.

Слабым местом в подготовке команд к олимпиадам сейчас является отсутствие соответствующих условий для проведения экспериментальных занятий. Интересы же дела обязывают нас предусмотреть проведение серьезного физического практикума, чтобы дать возможность нашим ребятам познакомиться с современным оборудованием и с разнообразными методиками постановки эксперимента и обработки его результатов. С этой целью в ближайшем будущем необходимо полнее использовать экспериментальные базы МГУ и МФТИ, активно участвующих в подготовке команд, а в перспективе — создать самостоятельную экспериментальную базу.



# I Международная олимпиада по информатике

Кандидат технических наук  
В. М. КИРЮХИН

В этом году по решению ЮНЕСКО, принятому на 24 сессии в 1987 году, состоялась I Международная олимпиада по информатике. Олимпиада проводилась с 15 по 20 мая в Народной Республике Болгарии, в г. Правец, и была приурочена к третьему международному конгрессу «Дети в информационном веке».

Тринадцать стран (Болгария, Венгрия, Вьетнам, ГДР, Греция, Зимбабве, Китай, Куба, Польша, Советский Союз, ФРГ, Чехословакия и Югославия) прислали своих школьников, возраст которых не превышал 19 лет, на первую Международную олимпиаду по информатике. Согласно положению об олимпиаде в состав каждой команды могло входить максимум трое школьников. Все страны, за исключением Венгрии и Югославии, воспользовались этим правом. Команды Венгрии и Югославии были представлены двумя участниками; от Болгарии как страны-организатора в олимпиаде участвовали две команды. Кроме того, помимо сборной команды Советского Союза, получили приглашение для участия в олимпиаде также команда г. Переславля-Залесского и команда Посольства СССР во Франции.

Состав команды Советского Союза был определен по результатам весенних сборов, которые состоялись в начале мая в Молодежном центре ЦК ВЛКСМ «Олимпиец» в г. Химки, и II Всесоюзной олимпиады по информатике. В итоге нашу страну в Болгарии представляли Илья Доголяцкий и Лев Новик, учащиеся школы № 239 г. Ленинграда и Андриус Чяпайтис, учащийся школы № 28 г. Каунаса. Руководителем команды

был автор настоящей статьи.

Олимпиада проводилась в один тур. На своем заседании международное жюри, возглавляемое профессором П. Кендеровым (НРБ) и в состав которого входили также руководители всех команд, отобрало одну из шести заранее подготовленных задач. Эта задача и была предложена для решения всем участникам.

## Задача I МОИ

Дана последовательность из  $2N$  ячеек. Две соседние из них — пустые, а в остальных расположены  $N-1$  символов А и  $N-1$  символов В. Пример для  $N=5$ :

А	В	В	А				А	В	А	В
---	---	---	---	--	--	--	---	---	---	---

**Правило перемещения:** содержимое любых двух соседних непустых ячеек можно, сохраняя их порядок, пересылать в пустые ячейки.

**Цель:** используя правило перемещения, достичь конфигурации, в которой все символы А расположены левее всех символов В. Местоположение пустых ячеек после перемещений не имеет значения.

**Задание.** Составить программу, которая:

1) вводит с клавиатуры начальную конфигурацию в виде последовательности символов А, В и нулей для пустых ячеек, а также моделирует перемещения;

2) для заданной начальной конфигурации определяет по крайней мере один план перемещений, с помощью которого можно достичь цели, или сообщает, что такого плана не существует (вывод должен содержать начальную конфигурацию, промежуточные конфигурации после каждого шага, а также заключительную конфигурацию);

3) находит некоторый план, достигающий цели за минимальное число шагов.

**Результаты:** представьте по крайней мере одно решение для примера, приведенного выше.

Для решения задачи отводилось четыре часа. В распоряжение каждого участника предоставлялся персональный компьютер «Правец-16» с соответствующей периферией. Разрешалось также в процессе решения задачи использовать свои персональные компьютеры, и команды ФРГ и Посольства СССР во Франции работали на привезенных ими компьютерах.

Каждый участник олимпиады имел право при выполнении задания работать с любой системой программирования из имеющихся в составе программного обеспечения персонального

компьютера: Си, Паскаль, Бейсик, Лого и т. п. Поскольку при выборе олимпиадной задачи учитывалась независимость ее от архитектуры конкретного персонального компьютера, то необходимости в использовании специализированных пакетов программ не было.

По окончании решения олимпиадной задачи каждый участник должен был представить международному жюри неформальное и блок-схемное описание и обоснование алгоритма, на основе которого написана программа, исходный текст программы и результаты ее выполнения, полученные при помощи персонального компьютера, а также гибкий диск с последней версией программы, исходным текстом и результатами тестирования.

Проверка решений осуществлялась членами координационной комиссии и руководителями команд. Окончательное подведение итогов проводилось на заседании международного жюри.

В процессе проверки задач осуществлялось тестирование программ с

использованием четырех специально подготовленных членами международного жюри тестов. Поскольку для  $N > 3$  решение задачи всегда существует (читатели могут это попытаться доказать), то тестовые примеры были выбраны для  $N=3, 4, 5$ . В частности, они представляли собой следующие наборы символов:

Тест 1 ( $N=3$ ): 0, 0, А, В, А, В.

Тест 2 ( $N=4$ ): 0, А, В, А, 0, В, А, В.

Тест 3 ( $N=5$ ): 0, 0, А, В, А, В, А, В, А, В.

Тест 4 ( $N=5$ ): А, В, В, А, 0, 0, А, В, А, В.

Для первого теста программа должна выдать сообщение об отсутствии решения, второй тест связан с проверкой корректности введенных данных, для третьего теста должно быть получено решение за четыре шага, и при использовании последнего теста программа должна обеспечить получение требуемой последовательности символов за минимальное число шагов, равное трем.

Программы победителей олимпиады проверялись также при  $N > 5$ , чтобы оценить еще эффективность алгоритма, хотя сделать это членам международного жюри было не совсем просто.

Решение каждого участника олимпиады оценивалось, исходя из 100 баллов, при этом выполнение отдельных пунктов задания оценивалось соответственно в 10, 40 и 40 баллов. 10 баллов жюри оставило в своем распоряжении для поощрения оригинальности решения, техники программирования и оформления программы и т. п.

При оценке первого задания 10 баллов начислялось за правильную организацию ввода данных и наличие проверки на корректность исходных данных. За второе 15 баллами оценивалось нахождение хотя бы одного плана или 20 баллов начислялось, если были найдены все планы; еще 20 баллов ставилось за вывод сообщения об отсутствии решения. Что касается третьего задания, то 15 баллов давалось за наличие в программе попытки минимизировать число шагов и



Команда СССР на I Международной олимпиаде по информатике. Слева направо: И. Догляцкий, Л. Новик, А. Чяпайтис.

40 баллов — если программа содержала полную оптимизацию плана.

На заключительном заседании международного жюри было принято решение наградить золотыми медалями участников, набравших более 90 баллов, серебряными медалями — набравших 80—90 баллов и бронзовыми медалями — набравших 60—79 баллов.

Как же выступили советские участники?

Золотой медалью награжден А. Чяпайтис (95 баллов), серебряную медаль получил Л. Новик (80 баллов), а третий участник сборной Советского Союза И. Доголяцкий набрал только 15 баллов и остался без медали. Участники двух других советских команд выступили не совсем удачно, хотя следует выделить выступление самого молодого участника олимпиады из команды Посольства СССР во Франции четырнадцатилетнего А. Колюбина, который набрал 40 баллов и получил поощрительный приз как самый молодой участник, добившийся наилучших результатов.

Хотя официально итоги командных соревнований не подводились, но тем не менее хотелось бы отметить выступление первой сборной НРБ, в копилке которой одна золотая и две серебряные медали. Конечно, «дома и стены помогают», однако надо учесть, что начиная с 1987 года в Болгарии

ежегодно проводились международные соревнования по информатике, которые позволили сформировать определенную систему подготовки к такого рода олимпиадам.

Сборная команда Советского Союза для первого раза выступила, на мой взгляд, достаточно успешно. Даже неудачное выступление нашего третьего участника, И. Доголяцкого, мы связываем лишь со стремлением выступить уж очень хорошо.

Олимпиадное движение по информатике набирает силу. Проведенные в Правце дни навсегда останутся в памяти всех участников. Знакомство с Болгарией, общение с молодыми коллегами из других стран, обмен мнениями по тем или иным вопросам развития информатики, вычислительной техники и компьютерного образования — все это создало благоприятную среду для успешного проведения I Международной олимпиады по информатике среди школьников. Но уже не за горами новые олимпиады. Отрадно, что честь проведения следующей международной олимпиады по информатике доверена Советскому Союзу, и уже известно, что она пройдет в середине июля 1990 г. в Минске. Хотелось бы пожелать всем настоящим и будущим олимпийцам творческих успехов, крепкого здоровья и удач на ниве информатики и вычислительной техники.

## Вниманию наших читателей

(Начало см. на с. 45)

Бутиков Е. И., Быков А. А., Кондратьев А. С. *Физика в примерах и задачах*. Изд. 3-е, перераб. и доп. — 1989. — 1 р.

Бялко А. В. *Наша планета — Земля*. Изд. 2-е, перераб. и доп. (Б-чка «Квант»). — 1989. — 55 к.

Воробьев И. И. *Теория относительности в задачах*. — 1989. — 40 к.

Горбань А. Н., Хлебопрос Р. Г. *Демон Дарвина. Идея оптимальности и естественный отбор*. (Пробл. науки и техн. прогресса). — 1988. — 80 к.

Григорьев В. И. *Силы в природе*. Изд. 7-е, испр. — 1988. — 95 к.

*Задачи Московских физических олимпиад*. (Б-чка «Квант»). — 1988. — 40 к.

*Задачи по физике*. Изд. 2-е, перераб. — 1988. — 1 р. 20 к.

Зельдович Я. Б., Хлопов М. Ю. *Драма идей в познании природы. Частицы, поля, заряды*. (Б-чка «Квант»). — 1988. — 50 к.

Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г. *Справочник по элементарной физике*. Изд. 10-е, испр. и доп. — 1988. — 1 р. 10 к.

Майер В. В. *Кумулятивный эффект в простых опытах*. — 1989. — 50 к.

Новосельцев В. Н. *Организм в мире техники: Кибернетический аспект*. (Пробл. науки и техн. прогресса). — 1989. — 85 к.

Рябов Ю. А. *Движение небесных тел*. Изд. 4-е, перераб. и доп. — 1988. — 60 к.

*Сборник задач и вопросов по физике для средних специальных учебных заведений*. Изд. 7-е, перераб. — 1988. — 1 р.

*Сборник задач по элементарной физике*. Пособие для самообразования. Изд. 5-е, перераб. — 1987. — 85 к.

Сучков А. А. *Галактики знакомые и загадочные*. (Пробл. науки и техн. прогресса). — 1988. — 65 к.

# р е к л а м а

Производственное объединение «Точрадиомаш» предлагает оборудование марки Л87-01, с помощью которого, например, может быть поставлена

## Лабораторная работа №10

### «Исследование параметрического стабилизатора напряжения».

Наше оборудование обеспечивает также проведение еще более тридцати лабораторно-практических работ по радиотехнике и радиоэлектронике в профессионально-технических училищах, техникумах и вузах. Это:

#### Снятие и анализ характеристик

- диодов,
- стабилитрона и стабилистра,
- туннельного и обращенного диодов.

#### Исследование тиристора.

#### Снятие и анализ характеристик

- транзистора в схеме с общей базой,
- транзистора в схеме с общим эмиттером,
- полевого транзистора.

#### Исследование

- двухполупериодной схемы выпрямителя,
- мостовой схемы выпрямителя,
- компенсационного стабилизатора напряжения,
- параметрического стабилизатора тока.

#### Режим каскада с общим эмиттером по постоянному току.

#### Исследование

- релактатного УНЧ на транзисторе,
- эмиттерного повторителя,
- двухтактного усилителя мощности,
- дифференциального усилителя постоянного тока.

#### Обратные связи в усилителе низкой частоты.

#### Исследование

- колебательных контуров,
- усилителя промежуточной частоты и амплитудного детектора,
- LC-генератора,
- преобразователя частоты,
- схемы амплитудной модуляции,
- генератора пилообразного напряжения,

- мультивибратора,
- триггера,
- блокинг-генератора,
- триггера Шмитта,
- ждущего мультивибратора с эмиттерной связью,
- логических схем «И» и «ИЛИ»,
- частотного детектора,
- двухкаскадного LC-генератора.

Техническая характеристика оборудования: мощность, потребляемая от сети, — не более 50 Вт; среднее время выработки на отказ — не менее 750 ч; масса изделия — 50 кг; габаритные размеры — 970×237×478 мм; оптовая цена — 4580 руб.



Наш адрес:  
352709, г. Майкоп, ул. Юнатов, 9;  
телефоны: 3-36-62, 3-20-03



- 10
- 11
- 12
- 13
- 14
- 15
- 16
- 17
- 18
- 19
- 20
- 21
- 22
- 23
- 24
- 25
- 26
- 27
- 28
- 29
- 30
- 31
- 32

# Информация

## Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся средних школ, расположенных на территории РСФСР, в 9, 10 и 11 классы на 1990/91 учебный год.

Цель школы — помочь учащимся, интересующимся физикой и математикой, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам. При приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности, рабочих поселках и небольших городах, где такая помощь особенно необходима.

Обучение в школе бесплатное.

Кроме отдельных учащихся, в ЗФТШ принимаются физико-технические кружки и факультативы, которые могут быть организованы в любой общеобразовательной школе двумя преподавателями — физики и математики.

Руководители кружка или факультатива набирают и зачисляют в них учащихся (не менее 8—10 человек), успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Группа принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии, имена, отчества ее руководителей и полный список учащихся (с указанием класса в 1990/91 учебном году и итоговых оценок за вступительное задание по физике и математике). Все эти материалы и конверт для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом на имя одного из руководителей следует выслать по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, ЗФТШ, с указанием «Кружок» или «Факультатив» до 25 мая 1990 года. (Тетради с работами учащихся в ЗФТШ не высылаются.) Работа руководителей заочных физико-технических кружков может оплачиваться школами по

представлению ЗФТШ при МФТИ как факультативные занятия.

Учащиеся ЗФТШ, руководители физико-технических кружков и факультативов будут получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ (6—7 заданий по каждому предмету в течение учебного года), а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по соответствующей теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Задания ЗФТШ составляют преподаватели кафедр общей физики

и высшей математики МФТИ. Эти задания рассчитаны на любознательных, желающих учиться школьников, которые хотят выработать навыки систематической, продуктивной самостоятельной работы и не побоятся при этом возможных трудностей (особенно постоянного недостатка времени). Работы учащихся-заочников проверяют преподаватели, аспиранты и студенты МФТИ, ЛГУ и КрГУ (часто — выпускники ЗФТШ). Работу членов физико-технического кружка и факультатива оценивают их руководители.

С учащимися Москвы проводятся занятия по физике и математике два раза в неделю по программе ЗФТШ в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ), набор в которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам собеседования по физике и математике. Справки по телефону 408-51-45.

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоя-

1. Область (край или АССР)
2. Фамилия, имя, отчество
3. Класс, в котором вы учитесь
4. Номер, адрес и телефон школы (обычная, спецшкола, спецкласс, с каким уклоном)
5. Фамилия, имя, отчество вашего преподавателя по физике по математике
6. Место работы и должность родителей
- отец
- мать
7. Подробный домашний адрес
8. Ваши любимые учебные предметы и увлечения
9. Цель поступления в ЗФТШ при МФТИ

Ростовская обл.  
 Рудаков Геннадий Всеволодович  
 восьмой  
 № 10, ул. Фрунзе 7, г. Таганрог  
 тел. 6-45-80 (обычная, класс с математическим уклоном)

Николаева Ольга Романовна  
 Дмитриев Игорь Семенович  
 металлургический завод, инженер  
 ватель № 8, швей 847930, г. Таганрог Ростовской обл., ул. Зеленая, д. 72, кв. 23

Внизу под заполненной анкетой начертите таблицу для оценок за вступительное задание:

№									
п/п									
Ф.									
М.									



тельно. Работу сделайте на русском языке и аккуратно перепишите в одну школьную тетрадь. Порядок задач сохраните тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). На лицевую сторону обложки наклейте лист бумаги, заполненный четко, желательнo печатными буквами, по образцу (с. 68).

Для получения ответа на вступительное задание обязательно вложите в тетрадь конверт с написанным на нем вашим адресом.

Срок отправления решения — не позднее 1 марта 1990 года (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1990 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (обязательно и по

физике, и по математике) присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининской, Калининградской, Кировской, Костромской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской, Пермской, Ярославской областей, Карельской, Удмуртской и Коми АССР высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ИГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Кемеровской, Камчатской, Магаданской, Новосибирской, Омской, Сахалинской, Томской, Тюменской, Читинской областей, Алтайского, Красноярского, Приморского, Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР высылают работы

по адресу: 660063, г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79, Госуниверситет, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Для учащихся Украины работает Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ, имеющий свои условия приема. Желающим поступить следует обратиться по адресу: 252680, г. Киев, пр. Вернадского, д. 36, Институт металлофизики, Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Телефон 444-95-24.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике.

В задании по физике задачи 1—6 предназначены для учащихся восьмых классов, задачи 2—9 — для девятых классов, задачи 7—13 — для десятых классов.

В задании по математике задачи 1—6 — для учащихся восьмых классов, 3—9 — для девятых классов, 6—12 — для десятых классов.

### Вступительное задание Физика

1. Тело прошло первую треть пути со скоростью  $v=40$  км/ч. Вторую треть пути оно прошло со скоростью на 30% больше скорости на начальном отрезке, последнюю часть — со скоростью на 30% больше средней скорости на предшествующих отрезках. Какова средняя скорость тела на всем пути?

2. Из одного населенного пункта в другой отправляются друг за другом с некоторыми запаздываниями пешеход, велосипедист и автомобиль. Скорости их соответственно равны 3 км/ч, 12 км/ч и 48 км/ч. К некоторому моменту времени пешеход прошел четверть пути, велосипедист оказался на середине пути, а автомобилисту осталось проехать всего четверть пути. Во сколько раз должно отличаться при этом время запаздывания велосипедиста относительно пешехода от времени запаздывания автомобилиста относительно велосипедиста?

3. Кусок дерева плавает в воде, погружаясь на  $3/4$  своего объема. Какая часть его объема будет погруженной, если этот кусок дерева плавает в керосине? в растительном масле?

4. Температуры двух тел возрастают от начальной температуры  $100^\circ\text{C}$  до значений  $300^\circ\text{C}$  и  $200^\circ\text{C}$  соответственно при сообщении им количества теплоты  $Q$ , достаточного для таяния 1,5 кг льда при  $0^\circ\text{C}$ . У какого из тел теплоемкость больше и во сколько раз? Чему равны теплоемкости тел? У какого тела удельная теплоемкость больше, если массы тел равны? У какого тела масса больше, если удельные теплоемкости тел равны? Нарисуйте также

графики зависимости температуры  $t$  ( $^\circ\text{C}$ ) тел от количества теплоты  $Q$  (Дж), сообщенного телам.

5. Для охлаждения до  $40^\circ\text{C}$  трех литров воды, имеющей температуру  $80^\circ\text{C}$ , в воду бросают некоторую массу льда, имеющего температуру  $0^\circ\text{C}$ . Какова должна быть при этом масса льда?

6. Миниатюрный калориметр массой  $m=0,22$  г с удельной теплоемкостью материала  $c=2,8$  кДж/(кг· $^\circ\text{C}$ ) позволяет измерять изменение температуры не менее  $\Delta T=0,01^\circ\text{C}$ . В калориметр с высоты  $h=4,2$  м падает капля воды. При каком минимальном объеме капли термометр позволяет зафиксировать ее попадание в калориметр?

7. Резистор  $R_1$  соединен параллельно с включенными последовательно резисторами  $R_2$  и  $R_3$ . Для измерения их сопротивлений собрана схема с двумя идеальными амперметрами ( $R_A=0$ ) и двумя идеальными вольтметрами ( $R_V \rightarrow \infty$ ). Один амперметр показывает ток силой  $I_1=2$  А в неразветвленном участке цепи, а другой —  $I_2=1$  А на участке цепи с резистором  $R_1$ . Один из вольтметров показывает напряжение  $U_1=10$  В на участке цепи с резистором  $R_1$ , а второй — напряжение  $U_2=4$  В на резисторе  $R_2$ . Нарисуйте схему включения резисторов и измерительных приборов. Каковы сопротивления резисторов?

8. Тело массой  $M=1$  кг лежит на горизонтальной плоскости. Коэффициент трения  $\mu=0,2$ . К телу приложена направленная горизонтально сила  $F$ , которая линейно во времени меняется от 0 до 4 Н за  $t=100$  с.

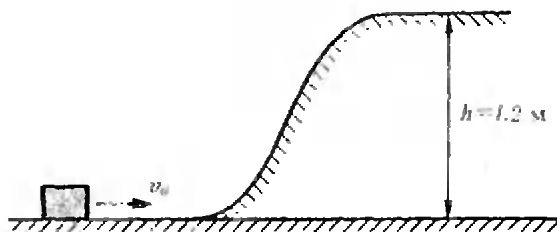


Рис. 1.

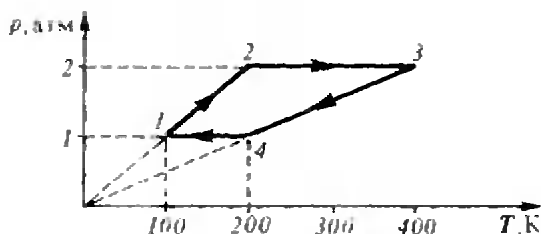


Рис. 2.

Как меняются в этом процессе сила трения и ускорение тела? Представьте на графике зависимости их от внешней силы  $F$ . Чему равна скорость тела в момент, когда внешняя сила достигнет своего наибольшего значения?

9. Тело скользит по горизонтальной поверхности и въезжает на покоящуюся вначале подвижную горку, профиль которой показан на рисунке 1. В результате скорости тела и горки оказались равными соответственно 1,33 м/с и 1,67 м/с. Какова начальная скорость тела? Трением пренебречь.

10. Зависимость давления  $p$  (атм) от абсолютной температуры  $T$  (К) для идеального газа в количестве  $\nu=2$  моль, совершающего замкнутый цикл 1—2—3—4—1, представлена на рисунке 2. Какую работу совершает газ за цикл?

11. В цилиндре находятся по одному молю гелия и неона, молярные теплоемкости  $C_V$  которых при постоянном объеме равны  $1,5R$  ( $R$  — газовая постоянная). Газы отделены от окружающей атмосферы неподвижной перегородкой, пронизываемой только для гелия, и с внешней стороны перегородки легким подвижным поршнем, который в начальном положении слегка касается перегородки. К системе подводится некоторое количество теплоты  $Q$ , и газ при этом совершает работу  $A=1660$  Дж. Какое количество теплоты было подведено к системе?

12. Какова относительная влажность воздуха, заполняющего баллон емкостью  $V=700$  л при температуре  $t=24^\circ\text{C}$ , если до полного насыщения пара после подключения к баллону пустого сосуда той же емкости пришлось испарить воду массой  $M=21,2$  г? Воспользоваться необходимыми табличными данными.

13. Два конденсатора одинаковой емкости  $C=1$  мкФ заряжены соответственно до напряжений  $U_1=100$  В и  $U_2=300$  В. Конденсаторы включают так, что они образуют

замкнутую цепь. Какое при этом выделится количество теплоты? Считать, что один из конденсаторов соединяется с другим через резистор с большим сопротивлением.

### Математика

1. Стоимость 7 одинаковых книг не превышает 12 рублей, а 10 таких книг стоят 17 рублей и несколько копеек. Определите стоимость одной книги.

2. На гипотенузе прямоугольного треугольника построен квадрат. Докажите, что отрезок, соединяющий вершину прямого угла треугольника с центром квадрата, делит прямой угол пополам.

3. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $x^2+x+q=0$ . Найдите все значения параметра  $q$ , при которых  $|x_1-x_2|=-q$ .

4. Пусть  $m$  — число цифр в десятичной записи числа  $2^{1989}$ ,  $n$  — число цифр в десятичной записи числа  $5^{1989}$ . Найдите  $m+n$ .

5. Найдите три различных простых числа, произведение которых в три раза больше их суммы (найдите все решения).

6. а) Докажите, что любой треугольник можно разрезать на 9 равных треугольников.

б) Постройте треугольник, который можно разрезать на 5 равных треугольников.

7. При каких значениях параметра  $p$  каждое число из отрезка  $[0; 1]$  удовлетворяет неравенству  $x^2+px-1 \leq 0$ ?

8. Диагонали делят трапецию на четыре треугольника. Площади двух из них равны  $1 \text{ см}^2$  и  $2 \text{ см}^2$ . Какой может быть площадь трапеции?

9. Представьте многочлен  $x^4-x^2+1$  в виде произведения двух многочленов второй степени. Можно ли это сделать для любого многочлена вида  $x^4+px^2+q$ , где  $p, q \in \mathbb{R}$ ?

10. Найдите геометрическое место точек, расположенных внутри данного треугольника таких, что расстояния от каждой из них до сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию.

11. а) Докажите, что

$$\cos 40^\circ + \cos 80^\circ = \cos 20^\circ.$$

б) Найдите целое число  $x$ ,  $0 < x < 90$ , для которого выполняется равенство

$$\sin 20^\circ + \cos x^\circ = \sin 100^\circ.$$

12. Чему равна наибольшая площадь проекции единичного куба на плоскость?

## Игры — дело серьезное

— к такому выводу пришли математики, историки, философы и просто завидные игроки, собравшиеся на первом конгрессе Международной Ассоциации интеллектуальных игр в Варшаве летом 1989 года.

Сколько логических игр вы знаете?

Первое, что приходит в голову, это, конечно же, шахматы. Список обычно продолжают шашками, домино, крестиками-ноликами, кто-то упоминает го, рэндзю. А вот в коллекции Президента Международной Ассоциации, научного руководителя Варшавского центра логических игр Тадеуша Урбановича — сотни игр, и этот список постоянно пополняется. Причем в число самых популярных в мире в последние годы уверенно вошли совсем новые и пока почти неизвестные в СССР игры.

Исторические, военные или коммерческие игры (в СССР распространена одна из первых коммерческих игр — «Монополия») — идеальный способ заполнения семейного досуга, т. е. они доступны и интересны и взрослым и детям и разница в мастерстве не мешает получать удовольствие от игры. К тому же, играя в историческую игру, Вы одновременно узнаете о царствующих особах, выдающихся полководцах, дипломатах, государственном устройстве, крупных битвах и т. п. — игры называются, например, «Петр I», «Александр Невский» или, скажем, «Вторая мировая война».

С какими играми мы войдем в XXI век? В какие игры играли наши предки? Смогут ли наше поколение придумать игру, которая подобно шахматам или рэндзю проживет тысячелетия? Не приведет ли развитие компьютерных игр к отмиранию традиционных — с милыми сердцу доской и фигурами (фишками)? Какова роль математики в анализе игр и игр в развитии математики («Квант» неодно-

кратно писал об играх, анализ которых привел к появлению целых математических направлений)? Эти и другие вопросы были предметом горячих дискуссий на конгрессе. Было решено значительно расширить экспозицию Международного музея логических игр в Швейцарии, провести конкурсы на создание новых логических игр, развивать исследования по истории и философии игр (в частности, организовать экспедицию по Великому шелковому пути — местам, где зародились многие игры), создать Энциклопедию логических игр и т. д. К сожалению, у нас в стране до сих пор нет журнала «Логические игры», поэтому многие советские энтузиасты логических игр разобщены. Однако работа по организации такого журнала уже началась, и мы хотели бы обратиться к читателям «Кванта» с просьбой. Если вы придумали новые логические игры или знаете что-то интересное о старых, если у вас есть соображения о деятельности Международной Ассоциации интеллектуальных игр и вы готовы принять участие в ее работе — напишите по адресу: Варшава, Иерусалимская аллея 2, ГРО-ТЕКА, Международная Ассоциация интеллектуальных игр. Все ваши письма будут рассмотрены, а авторы наиболее интересных новых игр будут приглашены на очередной конгресс Международной Ассоциации в 1990 году.

Недавно в Лондоне состоялась еще одна встреча любителей игр. На этот раз их объединяли не только игры, но и компьютеры. В зале Парк-Лэйн-отеля, в том самом, где 3 года назад проходил матч на первенство мира по шахматам между А. Карповым и Г. Каспаровым, состоялась I Всемирная компьютерная олимпиада. Участники из 16 стран мира привезли компьютерные программы, играющие в разные логические игры. Для компьютеров впервые были организованы Олимпийские игры, где разыгрывались медали в 15 видах единоборств. Советские программисты в упорной борьбе завоевали две золотые и одну серебряную медали (рэндзю и

го-моку) — и это несмотря на известные трудности в компьютеризации нашей страны.

В заключительный день олимпиады с программами-победителями играли эксперты. Ко всеобщему удивлению в таких видах, как бридж и резерси, команда людей проиграла сборной компьютеров! А ведь тайваньская фирма «Acet» — спонсор олимпиады — установила приз в 1 миллион долларов той программе по го, которая сможет выиграть у мастера, представителя Homo-sapiens. Правда, программирование го — вещь необычайно сложная, поскольку в этой игре до сих пор не найден сильный алгоритм поиска верного игрового решения, а традиционные приемы программирования игр здесь не годятся. Может, кто-то из вас предложит что-нибудь более эффективное?

И последнее. В апреле 1990 года в Москве состоится I Всесоюзная компьютерная олимпиада. Будут разыграны награды в шахматах, шашках, нардах, го, рэндзю и некоторых других видах. Желающие принять участие в этих соревнованиях могут обращаться по адресу: 129010, Москва, Б. Колхозная пл., дом 3, кор. 1, редакция газеты «Поиск».

*И. Цевзнер, М. Трухан*

# Ответы указаний, решения

## Сколько корней у многочлена?

1.  $n$  корней.
2.  $f'''(x) = 60x^2 - 48x + 12 > 0$ , т. е. у  $f'''(x)$  корней нет. Поэтому у  $f(x)$  не больше трех корней.
3. Если  $g(x) = e^{ax} f(x)$ , то  $f(x) = 0$  тогда и только тогда, когда  $g(x) = 0$ . Но  $g'(x) = e^{ax} (f'(x) + af(x))$ . Результат следует из теоремы Ролля для функции  $g(x)$ .
4. Нет. Если при некотором  $t$  происходит касание, то  $f(t) = 0$ , но  $f$  в точке  $t$  не меняет знак. Тогда и  $f'(t) = 0$ . Так что касание возможно только в начале координат.
5.  $f(x) = (x^2 - (k-1)^2)(x^2 - (k-2)^2) \dots (x^2 - 1)x$ .
6. Не больше чем  $n-1$ . **Доказательство** (по индукции): разделим  $f(x)$  на  $e^{ax}$  и возьмем производную. Получится функция такого же вида, но с меньшим числом членов. Применим теорему Ролля.
7. Применим правило Декарта к  $f(x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + a$ .
8.  $k$ -член  $f(x)$  имеет не больше  $k-1$  положительных корней. Его отрицательные корни — это положительные корни многочлена  $f(-x)$ , и их тоже не больше  $k-1$ . Еще возможен нулевой корень.
9. Пусть  $a_0$  — первый ненулевой коэффициент и  $a_k$  — последний ненулевой коэффициент многочлена  $f(x)$ . Число перемен знаков в последовательности  $a_0, \dots, a_k$  четно, если  $a_0$  и  $a_k$  одного знака, и нечетно — если разных знаков. Если  $x$  — очень маленькое положительное число, то знак  $f(x)$  такой же, как у  $a_0$ , а если  $x$  — очень большое положительное число, то знак  $f(x)$  такой же, как у  $a_k$ . Поэтому число нулей  $f(x)$  на интервале  $(0; \infty)$  четно, если  $a_0$  и  $a_k$  одного знака, и нечетно — если разных знаков.
10. Доказательство проводится индукцией по числу перемен знаков  $s$ . Пусть знаки коэффициентов  $a_k$  и  $a_{k+1}$  различны. Возьмем  $\lambda \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$  и найдем производную функции  $e^{-\lambda x} f(x)$ . Она равна  $a_1(\lambda_1 - \lambda)e^{(\lambda_1 - \lambda)x} + \dots + a_k(\lambda_k - \lambda)e^{(\lambda_k - \lambda)x} + a_{k+1}(\lambda_{k+1} - \lambda)e^{(\lambda_{k+1} - \lambda)x} + \dots + a_n(\lambda_n - \lambda)e^{(\lambda_n - \lambda)x}$ . Число перемен знаков в последовательности ее коэффициентов на 1 меньше, чем у  $f(x)$ , т. е. равно  $s-1$ . По предположению индукции, корней не больше чем  $s-1$ . Тогда по теореме Ролля корней у  $f(x)$  не больше чем  $s$ .
11. Ряд Штурма выглядит так:  $x^3 - 3x + 1$ ,  $3x^2 - 3$ ,  $2x - 1$ ,  $9/4$ . Значениям  $-3$ ,  $0$  и  $3$  отвечают последовательности знаков:  $-+ -+$ ,  $+- -+$  и  $++++$ . Значит, на интервале  $[-3; 0]$  — один корень, а на интервале  $[0; 3]$  — два.

## «Квант» для младших школьников

1. Мальчиков на одного больше. Решение. Пусть мальчиков  $x$ , а девочек  $y$ , пирожок стоит  $a$  копеек, а булочка —  $b$  копеек. Тогда из условия задачи  $ax + by = bx + ay + 1$ , откуда  $(x - y)(a - b) = 1$ . Каждый из сомножителей слева равен  $+1$  или  $-1$ : но так как мальчиков было больше, чем девочек, то  $x - y = 1$ .

2. 125 и 521.
3.  $28\ 375 + 28\ 375 + 28\ 375 = 85\ 125$ .
4. Проведем еще одну диагональ  $BD$  параллелограмма и соединим вершину  $D$  с серединами противоположных ей сторон (см. рис. 1). Параллелограмм разобьется на 12 равнобедренных треугольников, 8 из которых — красные, а 4 — желтые.



Рис. 1

5. В числе  $n!$ , как нетрудно заметить, множителей 2 всегда больше, чем множителей 5, поэтому первая цифра перед серией нулей в конце этого числа является обязательно четной, т. е. не может быть единицей. Число указанного вида, делящееся на 1990, существует. Действительно, рассмотрим остаток от деления на 199 чисел, состоящих из одних единиц. Так как эти остатки не превосходят 198, то среди них найдутся два равных. Разность соответствующих им чисел из одних единиц будет делиться на 1990 и иметь указанный в условии задачи вид.

## Метод графических оценок

1.  $\frac{\sphericalangle AD}{\sphericalangle AB} = \frac{\pi - \theta}{\pi} \approx 0,27$  (см. рис. 2 и 3).
2.  $\varphi_{ог} \approx 1,15$  рад  $\approx 64,5^\circ$ ;  $\varphi_{max} \approx 0,64$  рад  $\approx 36,5^\circ < \varphi_{пр}$ , поэтому доска возвратится в начальное положение. Указание. См. рис. 4.

## Калейдоскоп «Кванта»

### Вопросы и задачи

1. Увеличилось в 4 раза.

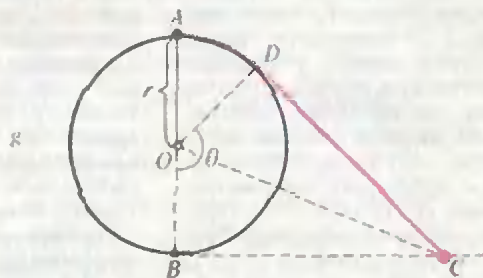


Рис. 2

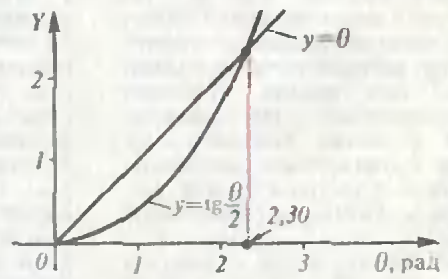


Рис. 3

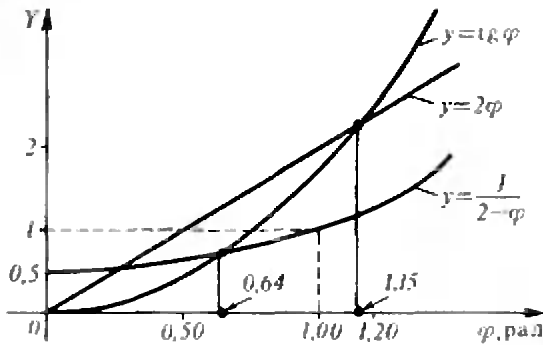


Рис. 4.

2. В нити, поскольку площадь поперечного сечения у проводов значительно больше, чем у нити.

3. Одинаковое.

4. Да — в накаливаем состоянии ( $t > 300^\circ \text{C}$ ).

5.  $R = \rho \frac{d}{S} = \rho \frac{\epsilon_0 E}{C}$ .

6. Средняя скорость упорядоченного движения носителей заряда будет в полупроводнике больше, чем в металле.

7. В кристаллической решетке дырки могут быть и нейтральные атомы примеси, валентность которых ниже валентности основных атомов решетки.

8. Электропроводность полупроводников зависит от их освещения.

9. Заполнив трубку раствором, мы как бы включаем параллельно трубке сопротивление, показание амперметра увеличится.

10. На третьем катоде — больше, поскольку сила тока здесь наибольшая.

11. В электролитах молекулы распадаются только на ионы (диссоциация) и только за счет энергии теплового движения. Молекулы жезла распадаются на ион и электрон (ионизация) не только вследствие теплового движения, но и под действием излучений.

12. Острие — к отрицательному полюсу, диск — к положительному.

13. При высокой температуре уголь, как и металлы, излучает электроны.

14. Да, так как в космосе — вакуум.

### Микрошныт

Свет «зажигается», когда до лампочки доходит сигнал (изменение электрического поля в проводнике), но ни в коем случае не сами электроны. Сигнал может дойти до нити накала за  $10^{-9}$  с. Однако, чтобы нить начала светиться видимым светом, ток должен ее нагреть до нескольких тысяч градусов Кельвина. На это обычно требуется 0,01—0,1 с, практически заметить такой промежуток нельзя.

### Международная математическая олимпиада

1. Вместо множества  $\{1, 2, \dots, 1989\}$  рассмотрим множество  $A = \{-994, -993, \dots, 993, 994\}$ , получающееся вычитанием из каждого элемента данного множества числа 995.

Пусть  $B_1 = \{993, -496, -497\}$ ,  
 $B_2 = \{-993, 496, 497\}$ ,

$B_{2k+1} = \{993 - 4k, 2k - 496, 2k - 497\}$ ,  
 $B_{2k+2} = \{4k - 993, 496 - 2k, 497 - 2k\}$ ,

$B_{115} = \{665, -382, -383\}$ ,  
 $B_{116} = \{-665, 382, 383\}$ .

Кроме того, положим  $B_{117} = \{-1, 0, 1\}$ .

Все множества  $B_i$ ,  $1 \leq i \leq 117$  имеют по три элемента, с равной нулю суммой, и попарно не пересекаются. Кроме того, если  $x \in A$  является элементом одного из множеств  $B_i$ , то число  $-x$  также принадлежит одному из множеств  $B_j$ .

Заметим, что остальные 14 117 элементов множества  $A$ , не принадлежащие ни одному из множеств  $B_i$ , разбиваются на 7 · 117 пар чисел с противоположными знаками. Добавив произвольным образом по 7 таких различных пар чисел к выбранным выше множествам  $B_i$ , получим искомое разбиение множества  $A$  на 117 попарно непересекающихся множеств.

Замечание. Аналогично можно доказать, что множество  $\{1, 2, \dots, n\}$  можно представить в виде объединения  $k$  непересекающихся множеств с одинаковыми суммами элементов, если является одним из делителей числа  $n$ ,  $1 < k < n$ .

2. а) Пусть  $I$  — точка пересечения биссектрис треугольника  $ABC$  (рис. 5). Докажем, что

$IA_1 = A_1A_0$  (\*). Поскольку  $\angle A_1IB = \frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle B$ , и  $\angle B_1BA_1 = \frac{1}{2} \angle B + \frac{1}{2} \angle A$ , полу-

чаем  $\angle A_1IB = \angle B_1BA_1$  и потому  $IA_1 = A_1B$ . Точки  $A_0$ ,  $B_0$  и  $C_0$  являются точками пересечения

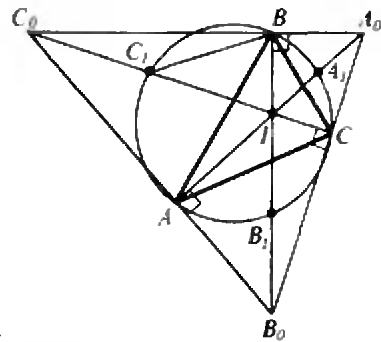


Рис. 5.

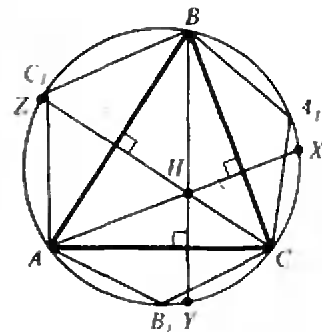


Рис. 6.



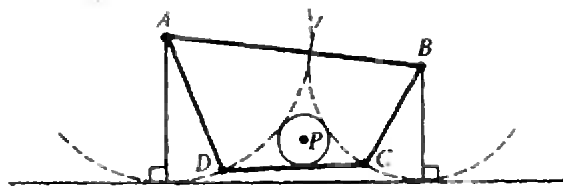


Рис. 7.

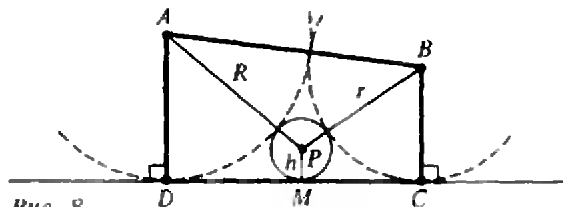


Рис. 8.

биссектрис соответствующих внешних углов треугольника  $ABC$ , поэтому  $A_1A$ ,  $B_1B$  и  $C_1C$  — высоты треугольника  $A_1B_1C_1$ . Следовательно,  $\angle A_1A_0B = \frac{\pi}{2} - \angle A_1IB$ ,  $\angle A_1BA_0 = \frac{\pi}{2} - \angle IBA_1$ .

Откуда  $A_1B = A_1A_0$  и равенство (\*) доказано. Из (\*) следует, что  $S_{IA_1B} = S_{A_1A_0B}$ . Так же доказываются аналогичные равенства для остальных пяти треугольников с вершиной  $I$ , на которые разбит шестиугольник  $AB_1CA_1BC_1$ .

б) Пусть  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$  (рис. 6), и точки  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  симметричны точке  $H$  относительно прямых  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$  соответственно. Тогда точки  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  лежат на окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .

Так как точка  $A_1$  является серединой дуги  $BC$ , то  $S_{BA_1C} \geq S_{BXC}$ ; аналогично  $S_{A_1BC} \geq S_{A_1YC}$ ,  $S_{BCA_1} \geq S_{BZA_1}$ . Таким образом,

$$S_{AC_1BA_1CB_1} \geq S_{AZBXC_1Y} = 2(S_{BXC} + S_{CNA} + S_{AHB}) = 2S_{ABC}.$$

3. Предположим противное, т. е. что

$$k > \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

Пусть  $P \in S$ . По условию существует не менее  $k$  точек, равноудаленных от  $P$ . Из них можно образовать не менее  $C_k^2$  пар точек  $A$  и  $B$  таких, что  $AP = BP$ . Так как это утверждение верно для любой точки  $P \in S$ , то в  $S$  существует не менее  $nC_k^2$  пар точек  $A$  и  $B$ , для которых на серединном перпендикуляре к отрезку  $AB$  лежит по крайней мере одна точка из  $S$ . Имеем:

$$\begin{aligned} nC_k^2 &= n \frac{k(k-1)}{2} \geq \frac{n}{2} \left( \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right) \left( \sqrt{2n} - \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{n}{2} \left( 2n - \frac{1}{4} \right) = n \left( n - \frac{1}{8} \right) > n(n-1) = 2C_n^2. \end{aligned}$$

Так как  $C_n^2$  является числом всех пар различных точек из  $S$ , то из доказанного неравенства следует, что существует пара точек  $A$  и  $B$  и точки  $P_1, P_2, \dots, P_m$ ,  $m > 2$ , такие, что  $AP_i = BP_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Таким образом, точки

$P_1, P_2, \dots, P_m$ ,  $m > 2$  лежат на одной прямой, а это противоречит условию задачи.

4. Пусть данный четырехугольник  $ABCD$  и точка  $P$ , удовлетворяющие условию задачи таковы как показано на рисунке 7. Нетрудно доказать, что при данных  $AD = R$  и  $BC = r$  величина  $h$  принимает наибольшее значение  $h_0$ , когда прямая  $CD$  является общей касательной к окружностям с центрами в точках  $A$  и  $B$  (рис. 8). Тогда по теореме Пифагора легко находим, что

$$CD = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$$

$$\text{и } CD = CM + MD = 2\sqrt{rh_0} + 2\sqrt{Rh_0}.$$

Отсюда  $\sqrt{Rr} = \sqrt{rh_0} + \sqrt{Rh_0}$  и, окончательно

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{h_0}} = \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}.$$

5. Пусть  $N = p_1 p_2 \dots p_k$ , где  $p_1, p_2, \dots, p_k$  — все простые числа, не превосходящие данного  $n > 2$ . Рассмотрим числа  $N! + 1, N! + 2, \dots, N! + n$ . Предположим, что существуют  $1 \leq j \leq n$  и простое  $p$ , для которых  $N! + j = p^m$ . Поскольку  $N > n$ ,  $N!$  делится на  $j$ , но тогда  $j = p^l$  ( $\alpha < m$ ), причем  $p < n$ . Сократив на  $j$ , получим  $p^{m-l} = 1 + 2 \cdot 3 \dots (j-1)(j+1) \dots N$ , что невозможно.

6. Разобьем числа  $1, 2, \dots, 2n$  на пары:  $(1; n+1)$ ,  $(2; n+2)$ , ...,  $(n; 2n)$ . Перестановка будет удобной, если числа хотя бы одной из пар стоят рядом. Пусть  $A_k$  — множество перестановок, в которых рядом стоят числа  $n$  и  $n+k$ .

Пусть  $|X|$  — количество элементов в множестве  $X$ . Мы должны доказать, что

$$\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| > \frac{1}{2} (2n)!.$$

$$\text{Заметим, что } \left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| \geq \sum_{k=1}^n |A_k| -$$

$$- \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|. \text{ В перестановке из } 2n \text{ эле-}$$

ментов пару соседних элементов можно выбрать  $2n-1$  способом, а числа  $k$  и  $n+k$  могут быть поставлены на эти места двумя способами. Поэтому

$$|A_k| = 2(2n-1)(2n-2)! = 2 \cdot (2n-1)!$$

$$\text{Итак, } \sum_{k=1}^n |A_k| = (2n)! \text{ Аналогично, две пары}$$

соседних мест можно выбрать  $(2n-3)(n-1)$  — способами, а поставить на эти места элементы  $i, n+i$  и  $j, n+j$  можно 8-ю способами. Поэтому  $|A_i \cap A_j| = 8(n-1)(2n-3)! = 4(2n-2)!$ .

$$\text{Итак, } \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| = 4C_n^2 2n - 2! = \frac{n-1}{2n-1} \times$$

$$\times (2n)! < \frac{1}{2} (2n)! \text{ Окончательно получаем, что}$$

$$\sum_{k=1}^n |A_k| - \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| > \frac{1}{2} (2n)!$$

**Международная физическая олимпиада**  
Решение первой задачи подготовлено А. Коршковым, второй задачи — Н. Кузьмой, третьей — К. Зуевым. Все они получили за решение этих задач на олимпиаде высшие баллы.

**Задача 1**

а) Кипение происходит тогда, когда давление насыщенных паров равно атмосферному:  $p_i = p_0 \Rightarrow \ln(p_i/p_0) = 0$ . Из формулы  $\ln(p_i/p_0) = a_i/T + b_i$  для температуры кипения получаем

$$T_{ки} = -a_i/b_i \quad (*)$$

Численные значения  $a_i$  и  $b_i$  можно получить из таблицы:

$$a_A = -3748 \text{ К}, a_B = -5122 \text{ К}, b_A = 1072, b_B = 13.73.$$

Окончательно

$$T_{кА} \approx 350 \text{ К}, T_{кВ} \approx 373 \text{ К}.$$

б) Вначале (первый наклонный участок на исходном графике) жидкости нагреваются. Испарение с поверхности отсутствует. Рассмотрим пузырек, образовавшийся, например вследствие флуктуации, или внутри жидкости А, или внутри жидкости В, или на их границе. Если он возник внутри А, то давление в нем  $p = p_A(T)$ , если внутри В, то  $p = p_B(T)$ , а если на границе, то  $p = p_A(T) + p_B(T)$ . Пусть при некоторой температуре  $T_x$

$$p_A(T_x) + p_B(T_x) = p_0.$$

При этом  $p_A(T_x) < p_0$  и  $p_B(T_x) < p_0$ , т. е. пузырьки в А и В исчезнут, а на границе — нет. Этот пузырек начнет подниматься, дойдет до поверхности жидкостей, и будет наблюдаться пограничное кипение. Температуру  $T_x$  находим из условия

$$p_A(T_x) + p_B(T_x) = p_0 \Rightarrow e^{a_A/T_x + b_A} + e^{a_B/T_x + b_B} = 1.$$

Решить это уравнение точно довольно сложно. Но поскольку в условии требуется точность в 1 К, это уравнение можно решить методом половинного деления с помощью калькулятора. Получаем  $T_x = 340 \text{ К}$ . Во время такого кипения  $T = \text{const}$ , значит, пограничному кипению соответствует первый горизонтальный участок и  $T_1 = T_x = 340 \text{ К}$ . Пузырек объемом  $V$  уносит массу  $m_A$  вещества А и  $m_B$  вещества В:

$$\frac{p_A V}{T_x} = \frac{m_A}{M_A} R, \quad \frac{p_B V}{T_x} = \frac{m_B}{M_B} R \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{p_A}{p_B} \frac{M_A}{M_B}.$$

Подставив  $T_x$  в уравнение (\*), получаем значение  $p_A/p_B$  и находим  $m_A/m_B = 22,4$ , т. е. масса А уменьшается в 22,4 раза быстрее, чем масса В. Когда вещество А кончится, часть вещества В выкипит, а часть останется:

$$\Delta m_B = m m_B / m_A, \quad m'_B = m(1 - m_B/m_A) = 95,5 \text{ г}.$$

Теперь пограничное кипение кончилось, и следующий наклонный участок соответствует нагреву вещества В до температуры его кипения. Количество вещества В при этом не меняется, и таким образом в момент  $t_1$   $m_A = 0$ ,  $m'_B = 95,5 \text{ г}$ . Ясно, что  $T_2$  — температура кипения вещества В, т. е.  $T_2 \approx 373 \text{ К}$ .

**Задача 2**

Рассмотрим движение данных тел в инерциальной системе отсчета, связанной с осью  $\sigma$  (она

существует, поскольку система тел изолирована). Поскольку конфигурация тел не изменяется, по закону сохранения момента импульса  $\omega = \text{const}$ . Обозначим векторы  $\vec{P}_1 \vec{P}_2 = a_{12}$ ,  $\vec{P}_1 \vec{P}_3 = a_{13}$ ,  $\vec{P}_1 \vec{O} = \vec{R}_1$ , где  $O$  — центр масс (рис. 9). По определению центра масс

$$\vec{R}_1 = \frac{1}{M} (m_2 \vec{a}_{12} + m_3 \vec{a}_{13}),$$

где  $M = m_1 + m_2 + m_3$ . Рассмотрим массу  $m_1$ . Ее ускорение равно

$$a_1 = \omega^2 \vec{R}_1 = \frac{\omega^2}{M} (m_2 \vec{a}_{12} + m_3 \vec{a}_{13}).$$

Силы, действующие на  $m_1$  со стороны  $m_2$  и  $m_3$ , равны соответственно

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{a_{12}^2} \vec{a}_{12}, \quad \vec{F}_{13} = G \frac{m_1 m_3}{a_{13}^2} \vec{a}_{13}.$$

По второму закону Ньютона

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = m_1 \vec{a}_1,$$

т. е.

$$\frac{m_2}{a_{12}^2} \vec{a}_{12} + \frac{m_3}{a_{13}^2} \vec{a}_{13} = \frac{\omega^2}{GM} m_2 \vec{a}_{12} + \frac{\omega^2}{GM} m_3 \vec{a}_{13}.$$

Поскольку точки  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  не лежат на одной прямой, векторы  $\vec{a}_{12}$  и  $\vec{a}_{13}$  неколлинеарны, и из предыдущего равенства следует

$$\frac{m_2}{a_{12}^2} \vec{a}_{12} = \frac{\omega^2}{GM} m_2 \vec{a}_{12}, \quad \frac{m_3}{a_{13}^2} \vec{a}_{13} = \frac{\omega^2}{GM} m_3 \vec{a}_{13}.$$

откуда

$$a_{12} = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}, \quad a_{13} = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}.$$

Рассматривая точки  $P_2$  или  $P_3$ , по аналогии получаем

$$a_{23} = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}.$$

Итак, необходимым условием являющимся следующее равенство:

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = \sqrt[3]{\frac{G}{\omega^2} (m_1 + m_2 + m_3)}.$$

**Задача 3**

Заметим, что кинетическая энергия электрона  $eU = 511 \text{ кэВ}$  равна его внутренней энергии, поэтому к нему необходимо применять реля-

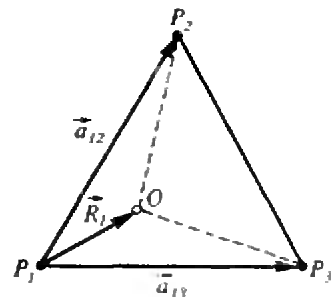


Рис. 9.

тивистские формулы. Для протона этого делать не надо (511 кэВ ≪ 938 МэВ).

а) Для частицы в магнитном поле

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_L,$$

где  $\vec{P} = m_0\vec{v}/\sqrt{1-v^2/c^2}$  — импульс,  $\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}(x)$  — сила Лоренца,  $\vec{B}(x)$  — индукция магнитного поля (зависит только от координат). Сила перпендикулярна скорости, поэтому модули скорости и импульса и энергия частицы не изменяются:

$$\vec{P} \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dP^2}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dP^2}{dt} = \vec{F}_L \vec{P} = 0, \text{ т. е. } P = \text{const.}$$

Пусть  $s$  — путь, пройденный частицей, тогда

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{P}}{ds} = v \frac{d\vec{P}}{ds} = \vec{F}_L. \quad v \frac{d\vec{P}}{ds} = q\vec{v} \times \vec{B}(x).$$

Разделим обе части на  $Pv$ :

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\vec{P}}{P} \right) = \frac{q}{P} \left( \frac{\vec{v}}{v} \right) \times \vec{B}(x), \text{ или } \frac{d}{ds} \vec{r} = \frac{q}{P} \vec{r} \times \vec{B}(x),$$

где  $\vec{r}$  — единичный вектор направления скорости. Последнее уравнение задает траектории движения частиц одинаковыми, если

$$\frac{q_e \vec{B}(x)}{P_e} = \frac{q_p \vec{B}'(x)}{P_p}, \text{ или } \vec{B}'(x) = - \frac{P_e}{P_p} \vec{B}(x).$$

Поле  $\vec{B}(x)$  является геометрической суммой полей катушек, поэтому поле каждой катушки, а значит, и токи в них надо изменить в  $-P_p/P_e$  раз:

$$i'_j = - \frac{P_p}{P_e} i_j.$$

Для электрона  $P_e = \sqrt{2m_e U_e + U_e^2 c^2}$ , для протона  $P_p = \sqrt{2m_p U_p}$ . Тогда

$$\frac{P_p}{P_e} = 35, \quad i'_j = -35i_j.$$

б) Каждой частице соответствует волна де Бройля с длиной  $\lambda = h/P$ . Угол разрешения, определяемый отношением  $\lambda/d \sim 1/P$ , уменьшится в  $P_p/P_e = 35$  раз. Следовательно, разрешающая способность увеличится в 35 раз.

«Квант» для младших школьников (см. «Квант» № 11)

1. Бим был в красном, так как кроме него никто не мог по условию быть в красных туфлях. Значит, Бам был в синей рубашке и зеленых туфлях, а Бом — в зеленой рубашке и синих туфлях.

2. Это числа 5 и 2. Так как сумма — простое число, одно из чисел должно быть четным, т. е. равняться 2. Обозначим второе число через  $p$ . Тогда  $p-2$ ,  $p$  и  $p+2$  — простые числа. Одно из этих чисел делится на 3, поэтому  $p-2=3$ , т. е.  $p=5$ .

3.

3	4	9	6
6	6	2	4
8	0	0	4

4. ПОДУМАЙТЕ = 236415789.

5. На 15 частей.

# Напечатано в 1989 году

К нашим читателям	№	с.
Интервью с академиком И. М. Гельфандом	1	2
Наш круглый стол	1	3
	2	2
<b>Статьи по математике</b>		
Акулич И. Ф. Бурсацкое развлечение	2	30
Акулич И. Ф. Как убежать от дождя?	3	22
Акулич И. Ф. Муравей на консервной банке	9	26
Виленкин Н. Я. От нуля до декаллиона	3	16
Виленкин Н. Я. В таинственном мире бесконечных рядов	10	20
Гальперин Г. А., Степин А. М. Периодические движения бильярдного шара	3	8
Дубровский В. Н., Смородинский Я. А. Оптическое изображение и проективная плоскость	9	2
Дубровский В. Н., Смородинский Я. А. Оптическое изображение и проективная плоскость (продолжение)	10	8
Жиглевич А. Б., Петров Н. Н. О четырех решениях уравнения $x^2 = x$	11	14
Котляр Б. Д. Удивительное равенство	7	17
Овсиенко В. Ю. О великом числе Денюгардуса и законе Гука	8	8
Соловьев Ю. П. «Ради отечества, науки и славы»	7	2
Солодовников А. С. Системы линейных неравенств и их применение	6	16
Сосинский А. Б. Косы и узлы	2	6
Сосинский А. Б. Узлы, зацепления и их полиномы	4	10
Сунгурцев Ю. В. Сергей Алексеевич Чаплыгин	5	2
Табачников С. Л. О кривизне	5	14
Табачников С. Л. Дифференциальная геометрия вокруг нас	11	8
Табачников С. Л. Сколько корней у многочлена?	12	12
Тихомиров В. А. 50 лет линейному программированию	6	6
Удивительные приключения периодических дробей	8	22
Чулаевский В. А. Преобразование пекаря	4	19
Фукс Д. Б. Прямые на кривых поверхностях	12	7
<b>Статья по физике</b>		
Белонучкин В. Е. Приливные силы	12	18
Бетяев С. К. Почему не летают самолеты в сильный дождь?	7	10
Блиох П. В. Глобальные резонансы	2	16
Бронштэн В. А. Трудная задача	8	17
Гинзбург И. Ф. Физика на горной реке	7	22
Давыдов В. А. Как индейцы бросают томагавк?	11	19
Делоне Н. Б. Многоквантовые процессы	5	22
Джоунс Д. Спасительная безликость	6	26
Джоунс Д. Ороситель для пустыни	7	54

<i>Зарецкий А. В.</i> Лёд-икс	1	14	Квадрат	5	•
<i>Каганов М. И.</i> Ваглянув на термометр...	3	2	Электромагнитная индукция	6	•
<i>Коткин Г. Л.</i> Газ бильярдных шаров	6	2	Биссектрисы, вписанная и невписанная окружности треугольника	7	•
<i>Киржниц Д. А.</i> Некоторые уроки научной сенсации	10	2	Как движется точка	8	•
<i>Лалаянц И. Э., Милованова Л. С.</i> Зеленая, зеленая трава...	7	6	Цепи	9	•
<i>Лыков С. Н., Паршин Д. А.</i> Симметрия, анизотропия и закон Ома	10	12	Термодинамика	10	•
<i>Митрофанов А. В.</i> Пузыри в луже	6	22	Театр теней	11	•
<i>Митрофанов А. В.</i> Прогулки с фотоаппаратом	9	9	Электрический ток	12	•
<i>Мурзин С. С., Трунин М. Р., Шовкун Д. В.</i> За пределами закона Оми	4	2	<b>Р — значит ракета</b>		
<i>Носов Ю. Р.</i> Оптическая память	11	2	<i>Авдеевский В. С., Лесков Л. В.</i>		
<i>Руденко О. В., Черкезян В. О.</i> В мире мощного звука	9	18	XXI век: энергия из космоса?	8	57
<i>Соколов И. М.</i> Фракталы	5	6	<i>Белонучкин В. Е.</i> Галакты	5	50
<i>Соколов И. М.</i> Вечная электрическая лампочка?	8	2	<i>Белонучкин В. Е.</i> Орбиты	9	60
<i>Шикин В. Б.</i> Заряженная поверхность жидкости	12	2	20 лет спустя	7	47
<i>Штейнберг А. С.</i> Правило фаз Гиббса	2	23	Беседа с К. П. Феоктистовым	7	49
<b>Из истории науки</b>			<i>Брэдбери Р. Р.</i> — значит ракета	1	34
<i>Крыжановский Л. Н.</i> Громоотвод, политика и... шляпки	1	13	<i>Николаев В. Б.</i> Раз челнок, два челнок...	4	44
<b>Задачник «Кванта»</b>			Комментарий	4	49
Победители конкурса «Задачник «Кванта»	3	26	«Союз» открывает Турнир	2	45
Задачи M1141 — M1200, Ф1148 — Ф1207	1—12		«Союз» объявляет конкурс	4	50
Решения задач M1116—M1175, Ф1128—Ф1187	1—12		<i>Фроман Д.</i> Земля как управляемый космический корабль	6	58
Список читателей, приславших правильные решения	1, 4, 7, 10		<i>Шварцбург А. Б.</i> Космическая парусная регата	11	13
О свойствах центра невписанной окружности	9	38	<b>Есть идея?!</b>		
О числе целых точек в плоском множестве	10	37	Физика и техническое творчество	9	58
О треугольном бильярде	11	30	<b>Школа в «Кванте»</b>		
Разбиения многоугольников и ... неевклидова геометрия	12	31	Физика 8, 9, 10:		
<b>«Квант» для младших школьников</b>			Равновесие механической системы и метод виртуальных перемещений	1	45
Задачи	2—12		Сколько бывает состояний у вещества?	1	47
<i>Бронштейн М. П.</i> Лучи «икс»	11	35	Несколько замечаний по поводу фотоэффекта	1	49
Вопросы, вопросы...	7	44	Сила Лоренца и эффект Холла	3	46
<i>Гутенмахер В. Л.</i> Дроби — верблюды — паркеты	1	30	Альфа-частицы и опыты Резерфорда	3	49
<i>Дворянинов С. В., Савин А. П.</i> Арифметика песочных часов	2	47	Почему не скользит мешок?	5	56
Какой день недели?	12	36	Полярные сияния	5	58
Ответы, ответы...	9	43	О законах Ньютона и «свободе воли»	5	60
<i>Перельман Я. И.</i> Награда	8	44	Относительность движения	9	46
<i>Табачников С. Л.</i> У попа была собака...	6	42	Модуляция и модуляторы	9	48
<i>Табачников С. Л.</i> Закон Архимеда с точки зрения математика	10	44	Симметрия и физические свойства кристаллов	11	44
<i>Тихомирова С. А.</i> О давлении	3	44	Дифракция света на круглом отверстии	11	46
<i>Штейнберг А. С.</i> Нейтроны ищут убийцу	5	44	Математика 8, 9, 10:		
<b>Калейдоскоп «Кванта»</b>			Геометрические преобразования.		
Новогодний калейдоскоп	1	40	Часть I: Движения		
Световые волны	2	•	Геометрические преобразования.	2	50
Один, два, много	3	•	Часть II: Преобразования подобия	3	52
Орбитальное движение	4	•	Производная сложной и обратной функций	4	36
			Средние линии	6	46
			Правильные многогранники и повороты	10	46
			Изобранные школьные задачи	2, 4, 6, 10, 12	
			<b>Лаборатория «Кванта»</b>		
			<i>Амгиславский Я. Е.</i> Рефрактометр для домашней лаборатории	2	55
			<i>Амгиславский Я. Е.</i> Цвета толстых пластинок	6	52
			<i>Бегяев С. К.</i> Десять опытов из «золотого фонда» гидродинамики	8	52

Бетяев С. К. Десять опытов из «золотого фонда» гидродинамики (продолжение)	10	52	Московский инженерно-физический институт	3	67
Из старых опытов	7	56	Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе	3	69
Утешев В. В. Как заметить незаметное	4	54	Московский институт радиотехники, электроники и автоматики	3	70
Христов Д. Д. Лазерный рефрактометр	2	60	Московский институт стали и сплавов	3	71
Цылин М. М. Высокочастотный генератор	12	42	Ленинградский государственный университет	4	67
<b>Математический кружок</b>			Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина	4	69
Болянский В. Г. Паркет из четырехугольников	11	57	Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)	4	70
Курьяндчик Л. Д. Прямоугольный треугольник	3	56	Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена	4	71
Курьяндчик Л. Д., Фомин Д. В. Этюды о полуинварианте	7	63	Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского	5	71
Львовский С. М., Тоом А. Л. Можно и нельзя	1	52	Московское высшее техническое училище (новое название — Московский государственный технический университет) им. Н. Э. Баумана	5	72
Матизен В. Э. Перекачивание многогранников	5	63	Московский институт нефти и газа им. И. М. Губкина	5	73
Фомин Д. В. Криминальная геометрия, или Дело принципа	8	47	Московский энергетический институт	5	74
Шарыгин И. Ф. Узнайте точку	9	52	Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1988 году	6	68
<b>Информатика и программирование</b>			<b>Вузы мира</b>		
Аларкон Е. Х., Виленкин А. Н. Определение суммы цифр числа на ЭВМ	5	66	Задачи вступительного экзамена по математике в Оксфордский университет	8	71
Брудко А. Л. Метод Лобачевского	4	51			
Виленкин А. Н., Коткин Г. Л. Газ на дисплее	6	61	<b>Олимпиады</b>		
Гейн А. Г., Ковальджи А. К., Сапир М. В. Задачи, модели и ЭВМ	3	59	XXIX Международная математическая олимпиада	1	56
Носков Н. Н., Столбоушкин С. К. Спутник на дисплее	10	60	XIX Международная физическая олимпиада	1	59
Шварцман В. О. ЭВМ и электросвязь	11	49	Математические олимпиады ФРГ	7	75
<b>Практикум абитуриента</b>			Канадские математические олимпиады	7	75
Водик В. А., Шейнерман Ф. Б. Об увеличении изображения	10	56	Задачи LI Московской математической олимпиады	9	73
Габович И. Г. Теорема о трех синусах	9	71	Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике	9	74
Горюнин С. А. Закон сохранения энергии в электростатике	6	63	Олимпиада по физике Ленинградского политехнического института	9	75
Горнштейн П. И. Тригонометрия помогает алгебре	5	68	Всесоюзная заочная физико-математическая олимпиада МГТУ им. Н. Э. Баумана	9	76
Зильберман А. Р. Статика	2	62	Олимпиады по информатике в Киргизии	9	77
Коржув А. В. Мощность в цепи постоянного тока	8	67	XV Всероссийская олимпиада по математике и физике	10	67
Кушнин И. А. Геометрические решения негеометрических задач	11	61	I Всероссийская олимпиада по информатике	10	70
Мукушев Б. А. Метод графических оценок	12	52	XXIII Всесоюзная олимпиада по математике	11	65
Черноуцан А. И. Законы сохранения энергии и импульса	4	60	XXIII Всесоюзная олимпиада по физике	11	68
<b>Варианты вступительных экзаменов</b>			II Всесоюзная олимпиада по информатике	11	72
Московский физико-технический институт	1	72	XXX Международная математическая олимпиада	12	57
Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина	1	73	XX Международная физическая олимпиада	12	59
Московский институт электронного машиностроения	1	74			
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова	2	66			
Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола	3	65			



I Международная олимпиада по информатике	12	64
<b>Информация</b>		
Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу	1	65
Заочная физико-техническая школа при МФТИ	1	66
Заочная физико-техническая школа при МИСиСе	1	69
Новый прием на заочное отделение Малого мехмата	1	70
Информация биологической комиссии ВЗМШ	2	80
ЗФМШ при Калининском университете	2	29
•Библиотечке «Квант» — 10 лет	4	9
Заочная физическая школа при МГУ	4	65
XIX встреча в Батуми	6	15
Заочная школа при НГУ	7	69
Школа космонавтики	8	62
XII Турнир юных физиков	8	76
Вечерняя физическая школа при МГУ	8	78
Об итогах ТЮФ 1988/89 года	10	42
V Всесоюзная научно-техническая конференция школьников	10	80
Летняя физико-математическая школа в США	12	46
Заочная физико-техническая школа при МФТИ	12	68
Игры — дело серьезное	12	71
<b>Игры и головоломки</b>		
Амбиграммы	8	65
Проверьте свои способности	9	67
* * *		
Фейнман Р. Счастливые числа	7	72
«Квант» улыбается		
Как не слушать оратора	4	53
Будильник. Заявление. Опровержение	4	64
Советы экзаменатору	5	49
Новая сказка о Любопытном Слоенке	8	21
О возможности создания электростанций на угле	10	65
Эффект Чизхолма	11	64
Нам пишут	2, 3, 6,	7, 8, 11
<b>Смесь</b>		
Половинки целого	3	45
Задача для исследования	6	21
Заказы принимаются	7	16
Что может «Электрон»?	8	56
Вниманию наших читателей	8	66
150 лет фотографии	9	9
Вариации на тему Евклида	9	51
Вниманию наших читателей	10	7
Арифметическая ошибка в «Войне и мире»	10	27
Вниманию наших читателей	11	60
Вниманию наших читателей	12	45
<b>Шахматная страничка</b>		
Непобедимый «Мефисто»	1	3-я с. обл.
<b>Мотивы симметрии</b>		
Пешка против всех фигур	3	•
Неравные силы	4	•
Читатели уточняют рекорды	5	•
Компьютер обыгрывает гроссмейстера	6	•

Ладья против коня	7	•
Восьмой чемпионат мира среди микрокомпьютеров	8	•
Три редких жанра	9	•
Магические шахматы	10	•
Компьютер уступает человеку	11	•
Поединки компьютеров	12	•
<b>Наша анкета</b>	<b>3, 6, 9, 12</b>	

## АНКЕТА 12—89

*Последний раз в этом году мы помещаем нашу ежеквартальную анкету. На предыдущие анкеты (3—89, 6—89, 9—89) откликнулись около тысячи читателей. Мы благодарим их. Дождавшись ответов на «Анкеты 12—89», редакция подготовит обзор читательских мнений. Он будет опубликован в начале будущего года.*

*Итак, ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), выделите анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите «Анкета 12—89».*

1. Класс, в котором Вы учитесь: \_\_\_\_\_
- Ваша профессия (если Вы работаете): \_\_\_\_\_
- Ваших интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните). \_\_\_\_\_
2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? \_\_\_\_\_
3. Какие статьи и задачи из номеров 10—12 (номер укажите) Вам понравились? \_\_\_\_\_



Главный редактор —  
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:  
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,  
Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:

А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,  
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,  
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,  
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,  
Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский,  
А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел,  
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,  
В. А. Лешковцев, С. П. Новиков, Т. С. Петрова,  
М. К. Потапов, В. Г. Разумовский,  
Н. А. Родина, Н. Х. Розов,  
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,  
А. Б. Сосниский, В. М. Уров, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:

А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,  
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,  
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,  
Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин,  
Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаяев,  
В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев,  
А. Л. Стасенко, И. К. Суриц, Е. Л. Сурков,  
Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:

А. И. Буздин, А. Н. Виленин,  
А. А. Егоров, Л. В. Кардашевич,  
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,  
С. Л. Табачников, В. А. Тихомирова

Номер оформили:

М. Б. Дубак, Д. А. Крымов, Н. С. Кузьмина, С. Ф. Луккин,  
Э. В. Назаров, И. Е. Смирнова, Л. А. Тишков,  
П. И. Чернуцкий, В. Б. Юдин

Фото представили Т. И. Лозанская, В. В. Макеев,  
В. И. Плюсин

Редактор отдела художественного оформления  
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор Н. Б. Румянцева

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,  
тел. 250-33-54

Сдано в набор 26.9.89. Подписано к печати  
13.11.89. Т 17259. Формат 70×100/16. Бумага  
оф. № 1. Гарнитура школьная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр. отт. 27,09. Уч.-изд. л.  
8,16. Тираж 13957 экз. Заказ 2178. Цена 45 коп.

Орден Трудового Красного Знамени  
Чеховский полиграфический комбинат  
Государственного комитета СССР  
по печати  
142800, г. Чехов Московской области

## АНКЕТА 12—89

Вы использовали при подготовке к уроку?

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»?

Участвуете ли Вы в конкурсе «Задачник «Кванта»?

5. Вам больше всего понравилась обложка номера  
иллюстрация из номера \_\_\_\_\_, страница \_\_\_\_\_

6. Ваши общие замечания и пожелания:

# Шахматная страничка

## ПОЕДИНКИ КОМПЬЮТЕРОВ

В прошлый раз мы привели несколько партий ЭВМ с шахматистами. Возможно, читателей «Кванта» партии электронных шахматистов интересуют еще больше. Рассказывая о главном матче восьмого чемпионата мира среди шахматных микрокомпьютеров («Квант» № 8 за 1989 год), мы ограничились одной партией, выигранной «Фиделити». Однако борьба, как мы помним, закончилась внушительной победой «Мефисто».

### «Мефисто» — «Фиделити»

#### Славянская защита

1. d4 d5 2. Kf3 Kf6 3. e4 c6 4. Kc3 e6 5. e3 Kbd7 6. Cd3 dc 7. C:c4 b5 8. Cd3 a6 9. e4 c5 10. e5 cd 11. K:b5 K:e5 12. K:e5 ab 13. C:b5+ Cd7 14. K:d7 Фа5+ 15. Cd2 Ф:b5. До сих пор все по теории, позиция после 16. K:f8 Kр:f8 17. a4 Ф:b2 расценивается как примерно равная. «Мефисто» избирает новый путь. 16. K:f8+ gf 17. a4!? Ф:b2 18. 0—0 Сd6 19. Фf3! Белые переходят к решающим действиям. 19...Крe7 20. Лfb1! C:h2+ 21. Кр:h2 Ф:d2 22. Лb7+ Крd6 23. Лd1 Фh6+ 24. Крg1 Л:a4 25. Фc3! Лb8 26. Фc7+ Крd5 27. Л:b8. Все конечно: взята ладья, а за ней и ферзь — 27...Крe4 28. Фc2+ Крf4 29. Фc1+ и 30. Ф:h6.

В третьем первенстве мира среди больших ЭВМ (1980 г.) советская программа «Каисса», первая чемпионка мира, находилась не в лучшей спортивной форме, но одну из партий выиграла в хорошем позиционном стиле.

### «Мичесс» — «Каисса»

#### Староиндийская защита

1. d4 Kf6 2. c4 c5 3. d5 d6 4. Kc3 g6 5. Kf3 Cg7 6. e4 0—0 7. Cg5 h6 8. C:f6 C:f6 9. Фd2 h5 10. 0—0—0 Cg4 11. Ce2 Kd7 12. h3 C:f3 13. C:f3 Фа5 14. g4 Cd4 15. Крb1 Ke5 16. Ce2 C:f2 17. gh Cd4 18. hg fg 19. Kb5 Ф:d2 20. Л:d2 Ce3 21. Лdd1 Лf2 22. Ke3 Лaf8 23. h4 Cd4 24. Лde1 Лf4 25. Лc1 C:c3 26. Л:c3 Л:e4 27. Лc2 Лf2 28.

Cd1 Л:c2 29. Кр:c2 Л:c4+ 30. Крd2 Лd4+ 31. Крe3 Kc4+ 32. Крe2 K:b2, и черные реализовали свои лишние пешки.

В США уже много лет проводятся чемпионаты страны и другие состязания среди ЭВМ, состав участников которых не сильно отличается от высших компьютерных форумов. Следующая партия сыграна в одном из американских чемпионатов.

### «Чесс» — «Дачесс»

#### Скандинавская защита

1. e4 d5 2. ed Ф:d5 3. Kc3 Фd6 4. d4 Cf5 5. Kf3 Kc6 (надежнее 5...c6) 6. Kb5 Фd7 7. Cf4 Le8 8. Kc5 K:e5 9. de! Фc6 10. Фf3. Размен ферзей в такой редакции лишает белых инициативы. Правильно было 10. Фe2! Ф:c2 11. Ф:c2 C:c2 12. Лc1 Ce4 13. K:c7+ Крd8 14. e6 с сильной атакой. 10...Ф:f3 11. gf a6 12. Kd4 Cd7 13. 0—0—0 g6. Белым следовало избрать 13. e6!, теперь же черные могли воспрепятствовать этому прорыву, продолжая 13......e6. 14. Kb3 Лd8. Снова белые напрасно выжидают с e5—e6, а черные почему-то не обращают внимания на эту угрозу. 15. Ka5 Ce8 16. Л:d8+ Кр:d8 17. Cc4 Крe8 18. Лd1. В очередной раз черные упускают возможность предотвратить e5—e6, а белые этим не пользуются. 18...Ch6 19. Cd2 Cg7 20. Ce3 c6? 21. e6! Наконец-то! 21...Ch6+ 22. Крb1 f6 23. K:b7! C:b7 24. Ca5 Крf8 25. Лd7! Тихий ход, изящно завершающий комбинацию. 25...Cf4 26. h3 Ce5 27. Л:b7 g5 28. C:a6 h5 29. a4 Лh6 30. Cc4 f5 31. Cd2 Лg6 32. a5 Cd4 33. a6 C:f2 34. a7 C:a7 35. Л:a7, и белые взяли верх.

На чемпионате Северной Америки 1986 года двухкратный чемпион мира среди больших ЭВМ «Край блиц» потерпел первое поражение после трехлетнего победного шествия.

### «Край блиц» — «Бебе»

#### Сицилианская защита

1. e4 e5 2. Kf3 d6 3. d4 cd 4. K:d4 Kf6 5. Kc3 g6 6. Cg5 Cg7 7. Фd2 Kc6 8. 0—0—0 0—0 9. Kb3 Le8 10. Cc4 Kg4

11. h3 Kge5 12. Cb5 a6 13. Ce2 a5 14. Cb5 Ce6 15. Kd5 a4 16. Kd4 Cd7. От теории машины отошли давно, но в маневренной игре явных ошибок пока не допустили. Сейчас черные грозят выиграть фигуру: 17...K:d4 18. C:d7 K:d7. Однако белопольный слон противника сделал несколько лишних ходов и не стоило жалеть еще один темп: 17. Ce2. Приемлемо было и 17. Ce3. А вот компьютер, на свою беду, пустился на разменную операцию.

17. K:c6 bc 18. K:e7+ Л:e7 19. C:e7 Ф:e7 20. Ce2. Наверное, белые рассчитали, что возьмут еще одну пешку, и материальное равенство на доске не нарушится. Но в открытой игре две легкие фигуры всегда сильнее ладьи, даже если ту сопровождают несколько пешек. Информации для исследователей шахматной психологии машин! 20... Фe6 21. Крb1 Лb8. Грозит 22...Л:b2+ 23. Кр:b2 Kc4+, и белые вынуждены пойти на новые ослабления своего ферзевых фланга. 22. h3 ab 23. cb Ce8 24. Крe2 Kd7 25. f3 Лa8 26. Крe1 Kc5 27. Фc2 Фf6 28. Cc4 Фа1+ 29. Крd2 Ф:a2 30. Ф:a2 Л:a2+, и черные без труда реализовали перевес.

### «Марк-V» — «Хинтон»

#### Защита Каро-Канн

1. e4 c6 2. c4 d5 3. ed cd 4. cd Kf6 5. Фа4+ Cd7 6. Фb3 Фc7. Теоретическое продолжение 6...Каб, не опасаясь 7. Ф:b7 Kc5 8. Фb4 e6, а после 7. C:a6 ba 8. Kc3 Лb8 у черных достаточная контригра. Положение ферзя на c7 в скором времени наведет «Марка» на мысль об одной симпатичной комбинации.

7. Kc3 g6 8. d4 Cg7 9. Cf4! Комбинация на тему отвлечения. 9...Ф:f4 10. Ф:b7 0—0 11. Kge2 Фf5 12. Ф:a8 Kc6 13. Kg3! Фc2 14. Фb7 Лb8.

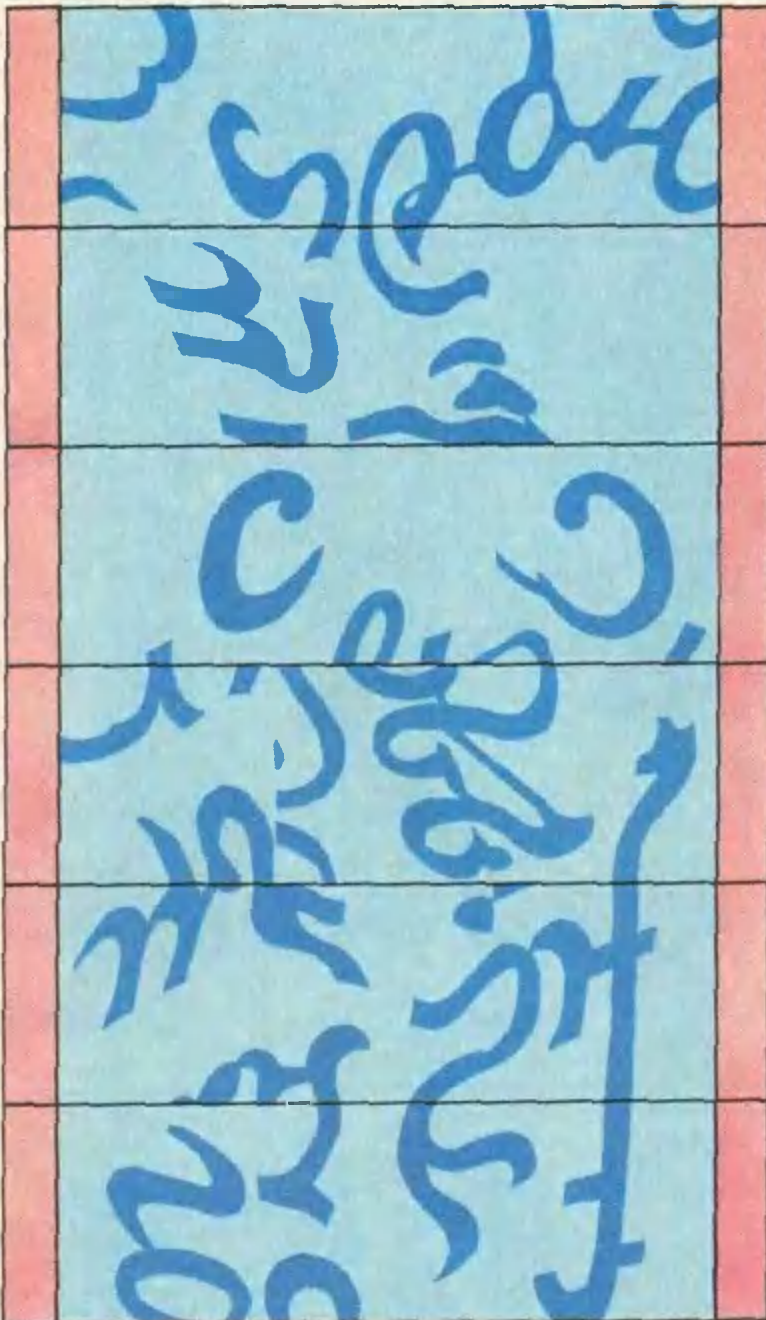
Кажется, что операция белых по уничтожению ладьи не удалась: сейчас на отвлечение ферзя решает Л:b2, не годится и 15. de Л:b7 16. cb Ф:b2. Однако следует новое «отвлечение», уже с помощью второго слона. 15. Cd3! Такой случай редко встретишь даже в партиях людей! 15...Ф:d3 16. dc. Черные сдались: после 16...Л:b7 17. cb белая пешка уверенно превращается в ферзя.

Е. Я. Гук

005 - 43

45 коп.

Индекс 70465



Загадочные, непонятные знаки на рисунке — это зашифрованное поздравление с Новым годом. Если скопировать его на прозрачную бумагу, разрезать на 6 частей, а потом переплести полоски между собой (см. рисунок сверху), можно прочитать текст. Существует 368 640 способов переплетения, но только в одном случае на плетенке появится поздравление.

Действительно, шесть полосок можно разложить не переплетая 6! = 720 способами. (С учетом возможных поворотов на 180° это число следовало бы умножить на 2<sup>6</sup>.) В каждом узле переплетения полоски можно уложить двумя способами. Если узлов, как у нас, — 9, то это дает 2<sup>9</sup> = 512 вариантов, т. е. 720 × 512 = 368 640 плетенки.

Конечно, решение задачи состоит не в переборе всех вариантов. Присмотревшись внимательно к рисунку, вы должны догадаться, какие части полосок должны быть видны, а какие — скрыты. Когда вы их найдете, вы без труда прочтаете поздравление.

Подобное послание вы можете нарисовать сами для ваших друзей и знакомых. С Новым годом! А. Т. Калинин