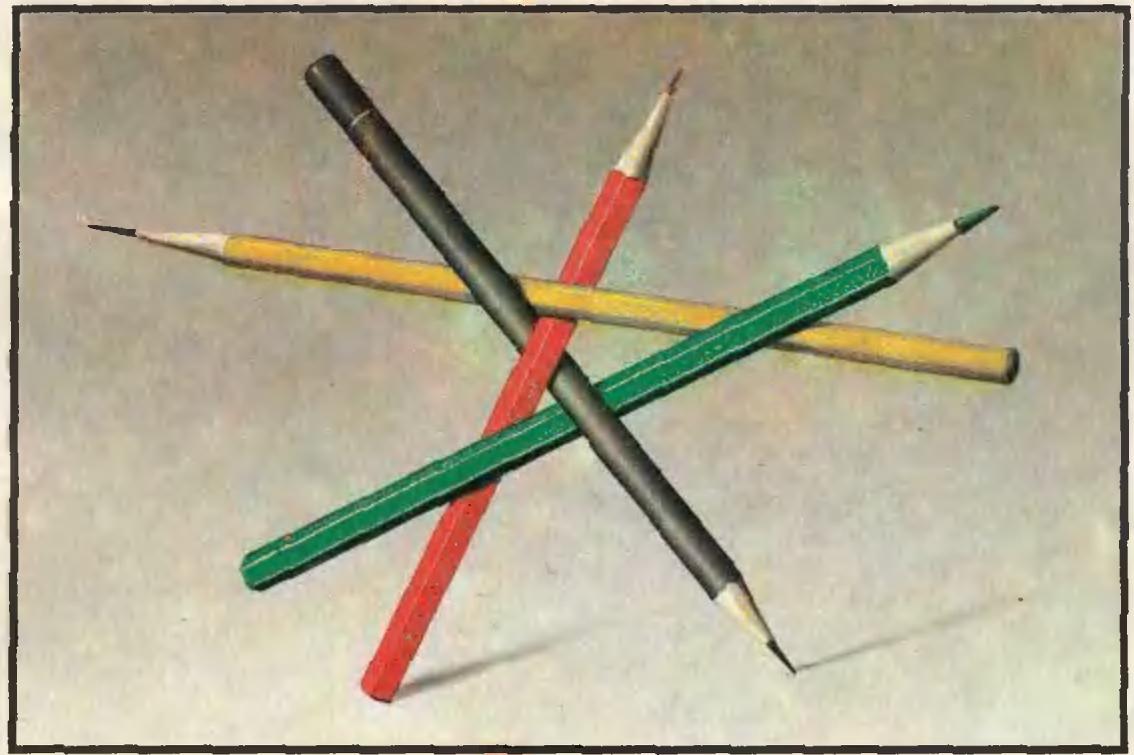


Квант

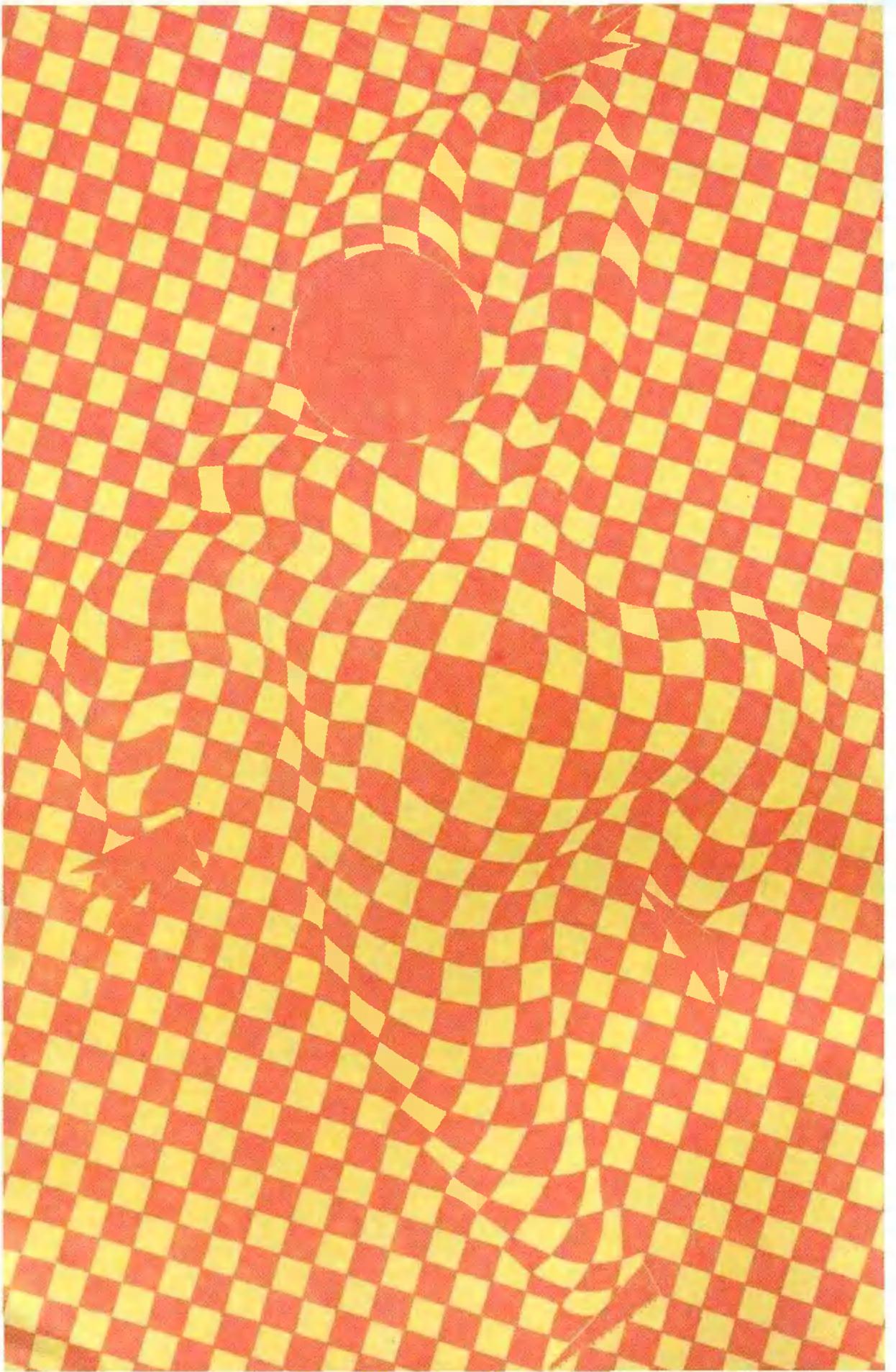
Научно-популярный
физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Возможно ли это?

1989



Выходит с января 1970 года

Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР



Москва, «Наука».
Главная редакция физико-
математической
литературы

В номере:

- 2 Г. Л. Коткин. Газ бильярдных шаров
- 6 В. М. Тихомиров. 50 лет линейному программированию
- 16 А. С. Солодовников. Системы линейных неравенств и их применение
- 22 А. В. Митрофанов. Пузыри в луже
- 26 Д. Джоунс. Спасительная безликость

Информация

- 15 XIX встреча в Батуми
- Задачник «Кванта»
- 30 Задачи M1166 — M1170, Ф1173 — Ф1177
- 31 Решения задач M1141 — M1145, Ф1153 — Ф1157
- «Квант» для младших школьников
- 39 Задачи
- 42 С. Л. Табачников. У попа была собака...
- 40 Калейдоскоп «Кванта»
- Школа в «Кванте»
- Математика 8, 9, 10:
- 45 Избранные школьные задачи
- 46 В. Н. Вагуген. Средние линии
- Лаборатория «Кванта»
- 52 Я. Е. Амтиславский. Цвета толстых пластинок
- Р — значит ракета
- 58 Д. Фроман. Земля как управляемый космический корабль
- Информатика и программирование
- 61 А. Н. Виленкин, Г. Л. Коткин. Газ на дисплее
- Практикум абитуриента
- 63 С. А. Гордюнин. Закон сохранения энергии в электростатике
- 68 Варианты вступительных экзаменов
- 76 Ответы, указания, решения
- Нам пишут (29, 38)
- Наша анкета (79)
- Смесь (21)

Наша обложка

- 1 Конечно, так переплести карандаши не удастся. А какими вообще могут быть сплетения прямых? Частичный ответ на этот вопрос вы найдете на с. 38.
- 2 «Арлекин» — так называется картина французского художника В. Вазарели. Он был основателем течения в живописи и графике 40—60-х годов, получившего название «Оп-арт» (от англ. optical art — оптическое искусство). Ритмическая комбинация геометрических линий и цвета, наша зрительная память — и полная иллюзия объема, движения. А ведь может быть все то же самое — и полная иллюзия отсутствия (см. заметку «Спасительная безликость»).
- 3 Шахматная страничка.
- 4 Многогранник, собранный из тридцати одинаковых маленьких фигур «оригами».

ГАЗ БИЛЬЯРДНЫХ ШАРОВ

Кандидат физико-математических наук
Г. Л. КОТКИН

Среди многих применений компьютеров в науке и технике одно из самых важных и распространенных — моделирование. Создаются компьютерные модели самолетов и морских течений, движения планет и экономических связей между странами...

В этой статье пойдет речь об одной из простейших моделей газа. Это — «идеальный бильярд»: абсолютно гладкие и упругие шары играют роль молекул газа, бортики бильярдного стола — роль стенок сосуда, поверхность стола абсолютно гладкая. Такого идеального бильярда не существует, однако можно «создать» его с помощью компьютера и наблюдать «жизнь» шаров на экране графического дисплея.

Возможно, «идеальный бильярд» покажется вам очень упрощенной моделью газа. В принципе, на компьютере можно «сконструировать» и более реальную модель — перейти к движению шаров в пространстве, а не на плоскости, ввести взаимодействие шаров-молекул и т. п. Однако и «бильярд» — объект не только учебных, студенческих, но и серьезных научных исследований.

Ясно, что движение идеальных шаров полностью определяется законами механики. Между тем движение частиц, составляющих газ, может рассматриваться как хаотическое, случайное*).

В этой статье мы опишем эксперименты с моделью «идеальный бильярд», которые позволяют наблюдать, как движение становится хаотическим, и попытаемся выяснить при-

чины возникновения «молекулярного хаоса».

Об алгоритме расчетов движения

Движение нескольких шаров не так уж трудно рассчитать. Действительно, все оно сводится к прямолинейному равномерному движению и к столкновению шаров друг с другом и со стенками. Конечно, в целом расчет получится громоздким, но компьютеру это не страшно.

Предлагается следующая схема расчета. Задав начальные положения и скорости всех шаров, найдем моменты столкновения каждого шара со стенками (без учета возможных помех со стороны других шаров и стенок). Затем найдем моменты столкновения каждой «изолированной» пары шаров (также без учета помех). После этого выберем из всех столкновений самое раннее; оно и осуществится, так как никакое другое не успеет ему помешать. Теперь определим положения всех шаров в момент этого столкновения и скорости столкнувшихся шаров сразу после столкновения (или одного шара — после уда-

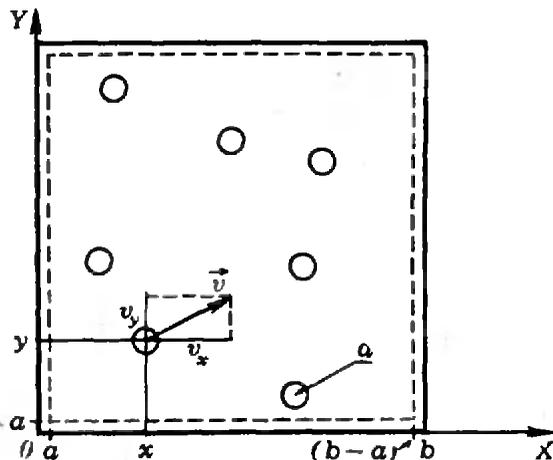


Рис. 1.

* Картину возникновения «молекулярного хаоса» в газе шаров исследовал советский физик Н. С. Крылов (1950 г.). Советский математик Я. Г. Синай провел подобное исследование на уровне строгости, удовлетворяющем математиков (1963 г.). Научных работ, использующих компьютерную модель «газа шаров», очень много.

ра его о стенку) — это будут новые начальные данные — и повторим расчет.

Положения шаров будем задавать с помощью декартовых координат их центров, а скорости — с помощью их проекций на те же оси (рис. 1):

$$\vec{r} = (x, y), \quad \vec{v} = (v_x, v_y).$$

Формулы для вычислений оказываются совсем несложными. Пусть ось Y совпадает с левым бортиком бильярда. Тогда время до столкновения шара с этим бортиком —

$$t = -(x - a) / v_x \quad (a - \text{радиус шара}),$$

причем столкновение состоится только если $v_x < 0$. Пусть это столкновение и есть самое раннее. При столкновении проекция v_y остается неизменной, а проекция v_x меняет знак:

$$v_x \rightarrow -v_x, \quad v_y \rightarrow v_y.$$

Перемещение каждого шара за время t —

$$\vec{r}_{ii} = \vec{r}_i + \vec{v}_i t,$$

т. е. $x_{ii} = x_i + v_{ix} t$, $y_{ii} = y_i + v_{iy} t$. Расчеты для случая столкновения шаров, хотя и несколько сложнее, тоже вполне «школьные». Предлагаем вам провести их самостоятельно (см. задачи в конце статьи).

Описание полной программы, моделирующей движение N шаров на графическом дисплее, приведено в статье «Газ на дисплее» (см. с. 61).

Какова скорость расчетов по подобной схеме? Компьютеры, используемые в студенческом практикуме физического факультета Новосибирского государственного университета, успевают считать с такой скоростью, что кадры на дисплее меняются так же быстро, как в мультфильме (если шаров не более десяти; с увеличением числа шаров время расчета каждого кадра «мультфильма» быстро растет*).

Все вычисления наш компьютер ведет с 7—8 значащими цифрами.

* Счет идет на ЭВМ «Электроника-60», включенных в «Терминальную вузовскую систему» (ТВУС — разработка Новосибирского государственного университета).

Первые эксперименты

Итак, в наших руках оказался «газ», с которым можно проводить различные эксперименты (пользуясь для их постановки и обработки результатов тем же компьютером).

Прежде всего хочется как-то проверить, «правильно» ли движутся шары. На вид — вроде бы правильно. Легко проверить, что выполняется закон сохранения энергии: $\sum v^2$ остается постоянной от кадра к кадру.

Теперь проведем такой опыт. Позволим шарам двигаться в течение какого-то времени t_0 , а затем одновременно изменим скорости всех шаров на строго противоположные: $\vec{v}_i \rightarrow -\vec{v}_i$. Шары станут двигаться обратно и к моменту $2t_0$ должны бы вернуться в исходное положение. Для настоящего газа это было бы что-то невиданное: из хаотического состояния сам по себе возникал бы порядок. (Когда Л. Больцману, основателю кинетической теории газа, указали на такой (мысленный) опыт, он ответил: «Попробуйте повернуть скорости...». Но компьютер-то может.)

На рисунке 2 приведены результаты такого компьютерного эксперимента. Траектории на пути «туда» изображались на экране зелеными, а на пути «обратно» — красными. Ожидалось, что траектории будут полностью перекрашены в красный цвет. Между тем, начиная с какого-то момента, ша-

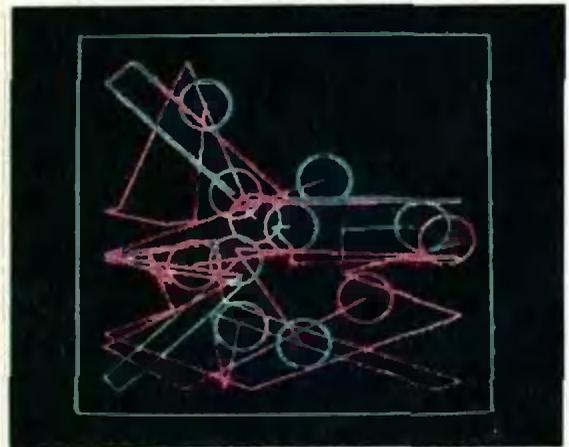


Рис. 2.

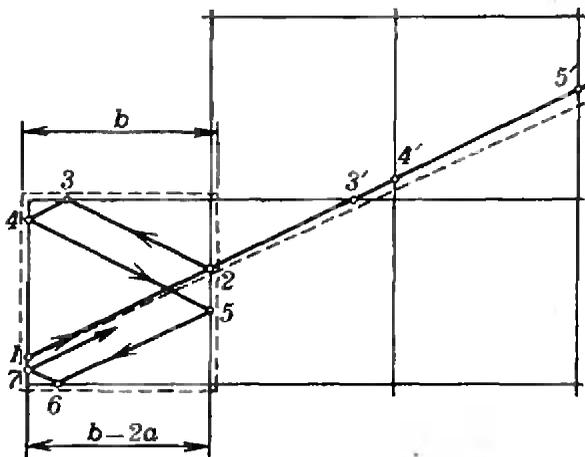


Рис. 3.

ры — сначала один, а затем и остальные — «сбились» с пути и пришли совсем не туда, откуда вышли. Таким образом, движение шаров оказывается «неправильным». Почему же?

Весь расчет производится по точным формулам, поэтому единственная возможная причина «неправильности» — округление чисел в процессе счета. Но отклонение, связанное с округлением, имеет относительную величину $10^{-7} - 10^{-8}$ (как мы говорили, компьютер работает с 7—8 значащими цифрами), а на экране к моменту времени $2t_0$ шары совсем «забыли» свои исходные положения. Можно ли эту «забывчивость» объяснить округлением?

Оценки отклонений

Чтобы получить количественные оценки, представим себе, что из-за округления расчетов направление движения одного из шаров отклонилось от правильного на угол $\varphi_0 \sim 10^{-7}$, а дальнейшее движение рассчитывается точно.

Сначала рассмотрим случай, когда имеется всего один шар и отклонение происходит при ударе о стенку. Траектория центра шара изображена на рисунке 3, и там же приведено несложное построение, облегчающее расчет. Квадрат со стороной $(b - 2a)$ — область, доступная центру шара (b — длина стороны бильярдного стола). Длина траектории $1 \rightarrow 2 \rightarrow$

$\rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow \dots$ равна длине луча $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3' \rightarrow 4' \rightarrow 5' \rightarrow \dots$. Если в точке 1 в результате округления значения v_x направление скорости шара после удара отклонилось от точного направления на малый угол φ_0 , то на пути длиной L «накопится» отклонение центра шара на расстояние $\Delta \sim L\varphi_0$. Ограничившись временем T , за которое произойдет $v_1 = 1000$ столкновений со стенкой, мы получим отклонение $\Delta_1 \sim v_1 b \varphi_0 \sim 10^{-4} b$. Для наших графических дисплеев толщина линии на экране составляет примерно $0,004 b$. Так что за время T накопившееся отклонение не может быть замеченным — оно меньше толщины линии на экране. На заметное расстояние, равное, скажем, диаметру шара $2a$, центр шара отклонится через $v_2 \sim 2a/b\varphi_0$ столкновений. Время, за которое произойдет такое количество ударов о стенки, оценивается в 100 (!) часов.

Очевидно, округлением при расчете ударов о стенки нельзя объяснить «неправильное» движение шаров в нашем эксперименте.

Посмотрим, как сказывается округление чисел при расчете соударений шаров. Вновь примем, что направление движения одного из шаров отклонилось от правильного на угол $\varphi_0 \sim 10^{-7}$, и исследуем, как будет меняться угол отклонения при соударениях. При этом ограничимся самыми грубыми оценками. Будем иметь в виду, что между соударениями шар движется по прямой и проходит в среднем путь l , много больший радиуса шара ($l \gg a$). За время между двумя последовательными столкновениями центр шара сместится на расстояние $OO' \sim l\varphi_0$ (рис. 4). Того же порядка и смещение точки соприкосновения шаров при ударе. Участок поверхности второго шара в окрестности точки касания играет при ударе роль «зеркала». Это «зеркало» само двигалось до удара, при ударе оно отскакивает, поэтому направление, в каком отскакивает наш шар, не определяется правилом «угол падения равен углу отражения». Тем не менее поворот «зеркала» на малый

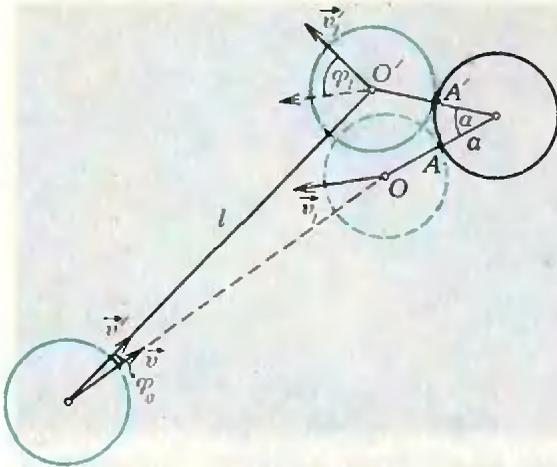


Рис. 4.

угол α ведет к изменению направления движения отскочившего шара на угол $\varphi_1 \sim \alpha$ (может быть, в полтора-два раза больше или меньше — такой уровень точности в данном случае нас устраивает). Так как $\alpha \sim \frac{AA'}{a} \sim \frac{l\varphi_0}{a}$, получаем

$$\varphi_1 \sim \frac{l}{a} \varphi_0 \gg \varphi_0$$

— при ударе отклонение скорости резко возросло. После k столкновений

$$\varphi_k \sim \left(\frac{l}{a}\right)^k \varphi_0.$$

Если $\frac{l}{a} \sim 10$, то достаточно 8—10 столкновений, чтобы стало $\varphi_k \sim 1$ и направление движения шара перестало иметь какое бы то ни было отношение к правильному.

Контрольный эксперимент

Проделанные оценки выглядят убедительно, и тем не менее подвергнем их проверке с помощью компьютерного эксперимента. Для этого проведем два «запуска» шаров с почти одинаковыми начальными условиями, лишь слегка изменив во второй раз начальную скорость (или начальное положение) одного из шаров.*) «Закажем» компьютеру запоминать

*) Разумеется, при повторном запуске с теми же самыми начальными условиями рассчитанное движение будет точно повторяться.

координаты какого-то шара через равные интервалы времени Δt ; при втором запуске будем отмечать координаты того же шара в те же моменты $t_k = k \cdot \Delta t$, а затем определим, как изменяется со временем «расхождение» траекторий этого шара

$$\Delta r_k = \sqrt{(x_k - x'_k)^2 + (y_k - y'_k)^2},$$

где x_k, y_k — значения координат в моменты t_k при первом запуске, а x'_k, y'_k — при втором. Учитывая ожидаемую зависимость, удобно воспользоваться логарифмическим масштабом по оси Δr_k , т.е. откладывать по этой оси значения $\lg(\Delta r_k)$. Зависимость вида $\varphi_k \sim \left(\frac{l}{a}\right)^k \varphi_0$ должна привести к прямолинейному графику

$$\lg(\Delta r_k) \sim \lg \varphi_0 + \frac{k}{t_k} \lg \frac{l}{a}.$$

Результаты экспериментов приведены на рисунке 5. На одном графике изображены точки, полученные при разных отклонениях в начальных условиях. Ожидаемый прямолинейный участок графика виден довольно отчетливо. Спустя время \bar{t} величина Δr_k вырастает до предела, задаваемого размером стола, и далее изменяется хаотически, но, в общем-то, не в миллионы раз (как на участке $t < \bar{t}$), так что в логарифмическом масштабе точки при $t > \bar{t}$ не отклоняются далеко от прямой $\lg(\Delta r_k) \sim \lg l$.

Этот компьютерный эксперимент свидетельствует о разумности сделанных ранее оценок.

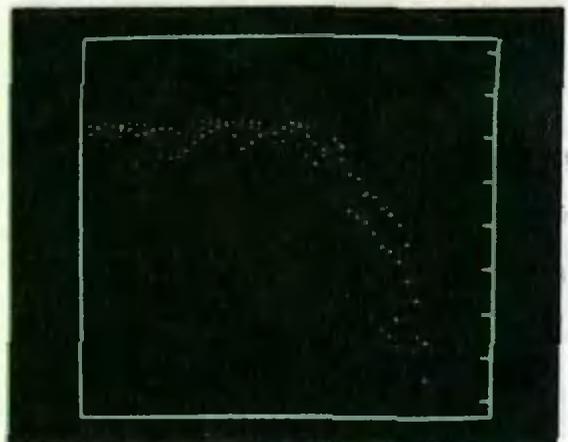


Рис. 5.

«Непредсказуемое поведение» шаров

Итак, исследование приводит к выводу, что движение сталкивающихся бильярдных шаров чрезвычайно неустойчиво. Ясно, что дело здесь не в приближенности вычислений, а в самом характере движения шаров. Грубость оценки позволяет распространить ее и на движение молекул настоящего газа. Только для молекул исходные неопределенности возникают из-за всяческих возмущений, которыми во всех остальных отношениях можно пренебречь. (Скажем, влияние электрического поля молнии, ударившей в другом городе, или пролетевшей там мухи...) Мы приходим к выводу, что движение шаров (и молекул) является вполне закономерным за относительно малые интервалы времени и оказывается случайным за длительный промежуток.

Различие характера движения шара при столкновениях лишь со стенками и при столкновениях с другими шарами можно считать качественным. В первом случае, улучшив точность начального направления в миллион раз, можно получить в миллион раз больший участок правильного пути. Во втором — больший лишь на 5—10 столкновений. Если бы столь же неустойчиво было движение планет, то под влиянием какого-нибудь незаметного нам астероида оно изменилось бы через несколько лет до неузнаваемости.

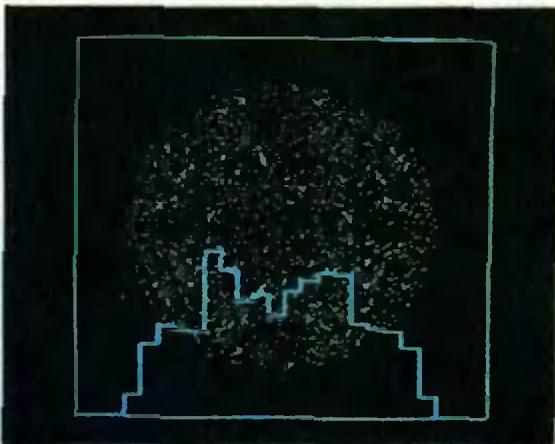


Рис. 6.

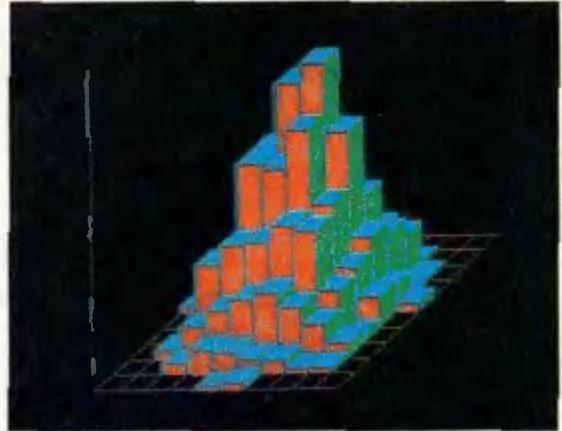


Рис. 7.

Однако движение планет рассчитывается на тысячи лет вперед. Расчеты движения в прошлом отлично согласуются с наблюдениями, скажем, древних вавилонян. Такие успехи небесной механики легли в основу взглядов на мир вообще, сложившихся в прошлом веке и лучше всего выраженных замечательным французским астрономом, математиком, физиком Лапласом: «Ум, которому были бы известны для какого-либо данного момента все силы, одушевляющие природу, и относительное положение всех ее составных частей, если бы вдобавок он оказался достаточно обширным, чтобы подчинить эти данные анализу, объял бы в одной формуле движения величайших тел Вселенной наравне с движениями легчайших атомов, не осталось бы ничего, что было бы для него недостворно, и будущее, так же как и прошедшее, предстало бы перед его взором».

Наука и практика показали, что такой идеально упорядоченный мир нереален. И причина тому — существование объективной случайности. Рассмотренный нами пример движения шаров (при понимании того, что пример этот вовсе не какой-то исключительный) — одно из доказательств решающей роли случайности в жизни сложной (состоящей из множества частиц) системы.

Примеры явлений, не поддающихся детальному расчету на длительный срок, встречаются уж никак не реже,

чем явлений, надежно рассчитываемых. Турбулентное течение жидкости или газа, движение воздуха на планете, определяющее погоду... Безнадежно и пытаться перечислить.

Возможность статистического описания

Итак, движение шаров-молекул из-за случайных отклонений приводит к молекулярному хаосу. Однако в возникающем хаосе появляются свои закономерности. Вспомним, что состояние газа можно характеризовать с помощью средних величин — температуры, давления. И если газ находится в состоянии равновесия, то эти величины остаются неизменными. Значит, несмотря на множество случайных факторов, система обнаруживает некоторое постоянство. А макроскопические параметры — такие, как температура, давление — связаны с наиболее вероятными значениями величин, характеризующих поведение отдельных элементов системы.

Примером вероятностного (статистического) описания системы являются так называемые функции распределения. С одной из них мы познакомимся с помощью следующего компьютерного эксперимента.

Будем отмечать на плоскости с координатами v_x, v_y точки, отвечающие скоростям шаров в разные моменты времени. Эти точки образуют «облако», концентрация точек в котором $n(v_x, v_y)$ определяется все точнее по мере увеличения числа точек M в «облаке». Функция

$$f(v_x, v_y) = \frac{1}{M} n(v_x, v_y)$$

при очень больших M вообще перестает зависеть от M . Ее и называют функцией распределения в пространстве скоростей. При изменении числа шаров N и их суммарной энергии E получаются новые функции распределения.

В частности, для двух шаров точки равномерно заполняют на плоскости v_x, v_y круг радиусом $\sqrt{2E/m}$ (рис. 6).

Для определения функции распределения в компьютерном экспери-

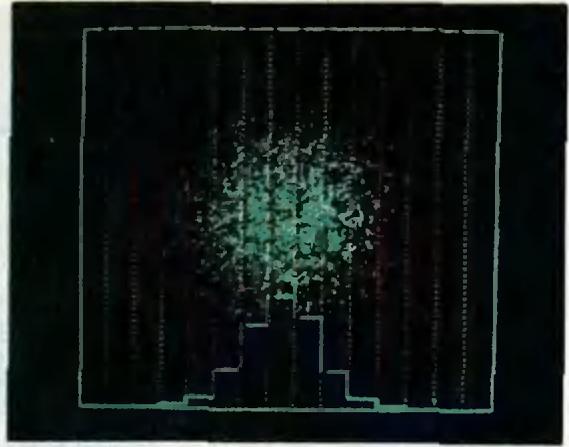


Рис. 8.

менте разобьем плоскость v_x, v_y на равные маленькие клетки и подсчитаем число точек, попавших в каждую из клеток. Наглядно результат представлен на рисунке 7.

Еще один вид функции распределения — по компоненте скорости v_x . Она получается разбиением плоскости v_x, v_y на полосы шириной Δv_x и подсчетом числа точек в каждой из полос (рис. 8).

Конечно, все это — лишь начало изучения «газа шаров».

Задачи

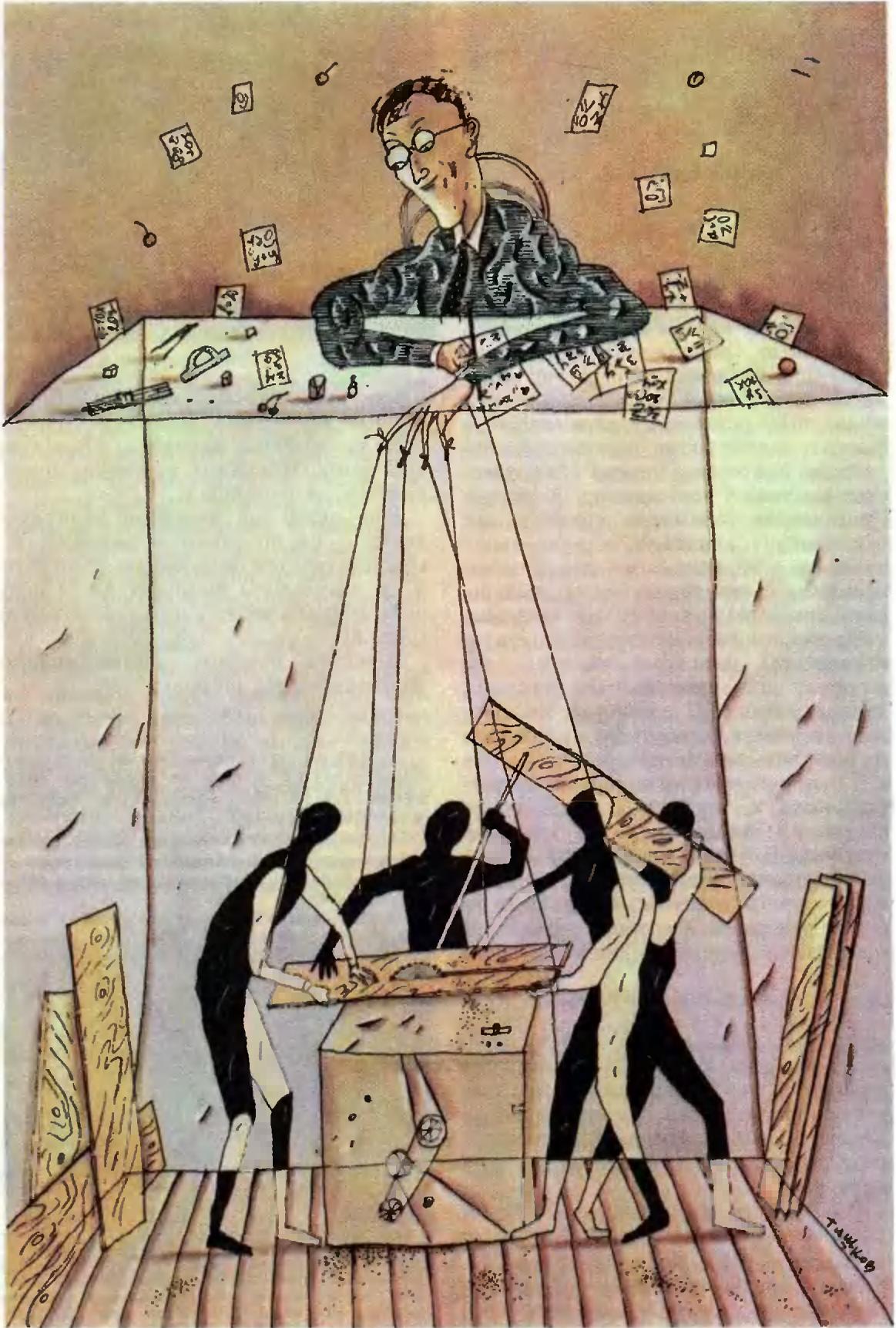
1. Найти, через какое время столкнутся шары радиусом a , если их начальные положения $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$, а скорости $\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y})$, $\vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y})$.

2. Два одинаковых упругих шара, двигающихся вдоль одной прямой со скоростями \vec{v}_1 и \vec{v}_2 , столкнулись. Найти скорости шаров после столкновения.

3. Два одинаковых гладких упругих шара радиусом a сталкиваются. Найти их скорости после столкновения. Скорости до столкновения \vec{v}_1 и \vec{v}_2 , координаты в момент столкновения \vec{r}_1 и \vec{r}_2 , причем $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = (2a)^2$.

Поправка

В «Кванте» № 3 на с. 45 приведены неверные условия и ответ к задаче «Половинки целого» (задача взята из книги М. Гарднера «Есть идея», М.: Мир, 1982, с. 124). После четырех продаж у мальчика осталось 11 рыбок. Сначала же рыбок было 59.



50 ЛЕТ ЛИНЕЙНОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ

Доктор физико-математических наук
В. М. ТИХОМИРОВ

В 1975 году советский математик Л. В. Канторович и американский экономист Т. Купманс были удостоены Нобелевской премии.

Эти премии получили свое название в честь их учредителя — известного химика и изобретателя Альфреда Нобеля. Согласно завещанию Нобеля, они должны были присуждаться за научные открытия в области физики, химии, физиологии или медицины, за литературные произведения, «отражающие человеческие идеалы», а также тем, кто «внесет весомый вклад в сплочение народов, уничтожение рабства, снижение численности существующих армий и содействие мирной договоренности». Математикам премия не предназначалась. Однако в 1969 году Шведский банк по случаю 300-летия со дня своего образования учредил премию памяти А. Нобеля — по экономическим наукам. Она то и была присуждена в 1975 году Л. В. Канторовичу и Т. Купмансу за создание новой математической теории (получившей название линейного программирования) и применения этой теории к экономике.

В автобиографии, представленной в Нобелевский комитет, Леонид Витальевич Канторович рассказывает о событиях, случившихся в 1939 году. К нему, 26-летнему профессору-математику, обратились за консультацией сотрудники лаборатории фанерного треста, которым нужно было решить задачу о наиболее выгодном распределении материала между станками. Эта задача сводилась к нахождению максимума линейной функции, заданной на многограннике. Максимум такой функции достигается в вершине, однако число вершин в этой задаче достигало миллиар-

да... Поэтому простой перебор вершин не годился.

Леонид Витальевич писал:

«Оказалось, что эта задача не является случайной. Я обнаружил большое число разнообразных по содержанию задач, имеющих аналогичный математический характер: наилучшее использование посевных площадей, выбор загрузки оборудования, рациональный раскрой материала, использование сырья, распределение транспортных грузопотоков... Это настойчиво побудило меня к поиску эффективного метода их решения».

И уже летом 1939 года была сдана в набор книга Л. В. Канторовича «Математические методы организации и планирования производства», в которой закладывались основания того, что ныне называется математической экономикой.

Для того чтобы понять характер экономических задач, в которых математика смогла оказать существенную помощь, начнем с примера — того самого, с которого начинается свою книгу Леонид Витальевич.

Пусть на производстве нужно изготовить наибольшее число комплектов из двух деталей. Имеются станки трех типов I, II и III, данные о которых приведены в таблице.

«Естественное распределение», применявшееся на практике, состояло в том, что на каждой группе станков производили наибольшее число комплектов. Станки первого типа могут произвести 20 комплектов (например, так: первый и второй станок производят по 10 первых деталей, а третий — 20 вторых) и не могут произвести больше. Аналогичный смысл имеет число 36 для станков второго типа: первый станок производит толь-

Тип станков	Число станков	Производительность		Естественное распределение		Оптимальное распределение	
		1-я деталь	2-я деталь	1-я деталь	2-я деталь	1-я деталь	2-я деталь
I	3	10	20	20	20	26	6
II	3	20	30	36	36	60	—
III	1	30	80	21	21	—	80

77 комплектов

86 комплектов

ко первые детали, второй — только вторые, а третий — 4/5 времени производит первые, а 1/5 времени — вторые детали. Аналогично — и для станков третьего типа.

Как видно из таблицы, оптимальное распределение дает существенную выгоду — 9 лишних комплектов! — не требуя никаких дополнительных затрат.

Для того чтобы найти далеко не очевидное оптимальное распределение, надо перевести задачу на язык математики. Итак, в нашем распоряжении имеются семь станков — первый, второй и третий станки образуют первый тип, четвертый, пятый и шестой — второй и, наконец, седьмой — третий тип. Требуется указать доли времени, в течение которых каждый станок должен вырабатывать первую и вторую деталь. Пусть α_i — доля времени, в течение которой i -ый станок будет вырабатывать первую деталь, а α'_i — доля времени его работы над второй деталью. Тогда $\alpha_i \geq 0$, $\alpha'_i \geq 0$, $\alpha_i + \alpha'_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, 7$. Число первых деталей, сделанных станками, будет равно

$$10(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + 20(\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) + 30\alpha_7.$$

Аналогично, число вторых деталей равно

$$20(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3) + 30(\alpha'_4 + \alpha'_5 + \alpha'_6) + 80\alpha'_7.$$

Число первых и вторых деталей должно быть одинаковым и как можно большим. Так мы приходим к задаче:

найти максимальное число s такое, что

$$s = 10(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + 20(\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) + 30\alpha_7,$$

$$s = 20(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3) + 30(\alpha'_4 + \alpha'_5 + \alpha'_6) + 80\alpha'_7, \\ \alpha_i \geq 0, \alpha'_i \geq 0, \alpha_i + \alpha'_i \leq 1, 1 \leq i \leq 7.$$

(При такой постановке мы пока пренебрегаем тем обстоятельством, что s обязано быть целым числом.)

Попробуем решить поставленную выше задачу на максимум. Сделаем мы это двумя способами. Сначала поступим «по-простому», как школьники шестого класса.

Переменных в нашей задаче 15, но на самом деле все сводится лишь к трем. Обозначим $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ через x , $\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$ через y и α_7 через z . Примем во внимание, что в нашей задаче на максимум не может быть выгодно, чтобы какое-то время какой-то станок вовсе не работал — если все станки будут работать все время, то хуже от этого не будет! Значит, если первые станки работают долю времени x над первой деталью, то над второй они работают в течение времени $3 - x$ и т. п. Так мы приходим к следующей задаче:

найти максимальное значение суммы $s = 10x + 20y + 30z$ при условии, что $10x + 20y + 30z = 20(3 - x) + 30(3 - y) + 80(1 - z)$, $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 3$, $0 \leq z \leq 1$.

Выразим из последнего равенства x :

$$x = \frac{23}{3} - \frac{5}{3}y - \frac{11}{3}z,$$

и подставим в выражение для s . Получим

$$s = \frac{230}{3} + \left(20 - \frac{50}{3}\right)y + \left(30 - \frac{110}{3}\right)z = \\ = \frac{230}{3} + \frac{10}{3}y - \frac{20}{3}z.$$

Теперь ясно, что самое большое значение суммы получится, когда $y = 3$,

$z=0$. При этом $x = \frac{23}{3} - \frac{5}{3} \cdot z =$
 $= \frac{8}{3} \leq 3$, т. е. x удовлетворяет нуж-

ным равенствам. Поэтому максимальное значение z равно $\frac{230}{3} + \frac{10}{3} \cdot 3 =$
 $= 86 \frac{2}{3}$. Остается только взять целую часть от этого числа, и мы приходим к тем самым 86 комплектам, которые были указаны в нашей таблице. Это число складывается из 60 первых деталей, изготовленных станками второго типа, 80 вторых деталей, произведенных станком третьего типа, и $\left[\frac{80}{3}\right]$ первых деталей и $\left[\frac{20}{3}\right]$ вторых деталей, сработанных на станках первого типа. При этом общее число комплектов 86 можно получить так:

$$86 = 60 + \left[\frac{80}{3}\right] \text{ или так: } 86 = 80 + \left[\frac{20}{3}\right].$$

Вопрос. Что получится, если выразить не x через y и z , а y через x и z ?

«И это — все? — недоуменно спросит читатель. — Из этого и родилось выдающееся открытие?»

Вернемся к исходной точке нашей истории. Вообразим: к Профессору, специалисту по абстрактным разделам математики, пришли на консультацию сотрудники из лаборатории фанерного треста со своей задачей о станках. Что могло бы произойти в результате такого визита? Как говорится, возможны варианты.

Первый. Профессор, смущаясь и краснея, говорит: «Это не по моей специальности, я с такими задачами не сталкивался... Извините...» И удовлетворенные сотрудники пошли бы домой — уж если Профессор не знает, как взяться за задачу, то им и вовсе не следует дальше размышлять над нею.

Второй. Профессор, взглянув на задачу, презрительно усмехается: «Это же текстовая задача, любой шестиклассник легко с ней справится!» И сотрудники побрели бы восвояси, удрученные и опечаленные, и больше никогда не стали бы беспокоить Профессора своими проблемами.

Вот и третий вариант. Профессор мог решить поставленную задачу (скажем, так, как только что сделали мы с вами). И сотрудники, чрезвычайно

обрадованные, отправились бы к себе в лабораторию, чего доброго, они изменили бы производство, добились бы перевыполнения плана, а значит — и премий, и повышения по службе.

Но в нашей истории получилось не так: Профессор оказался не просто профессором, но крупным, выдающимся математиком. Психология выдающегося математика отличается от психологии школьника, решающего олимпиадную задачу. Школьнику надо решить свою задачу в установленный короткий срок, а для крупного математика решение конкретной проблемы обычно не является самоцелью. Цель научного исследования — понять существо дела, раскрыть тайну явления, постичь его глубинные причины и научиться решать не одну, а множество аналогичных проблем.

Вот одна из этих общих задач:

найти максимум линейной функции $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ от переменных x_1, \dots, x_n при условии, что

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \dots \end{cases}$$

Каждое из неравенств задает полупространство (в n -мерном пространстве с координатами x_1, \dots, x_n), а система неравенств — пересечение этих полупространств, т. е. выпуклый многогранник. Поэтому речь идет о поиске экстремума линейной функции на многограннике. Наша задача о стан-

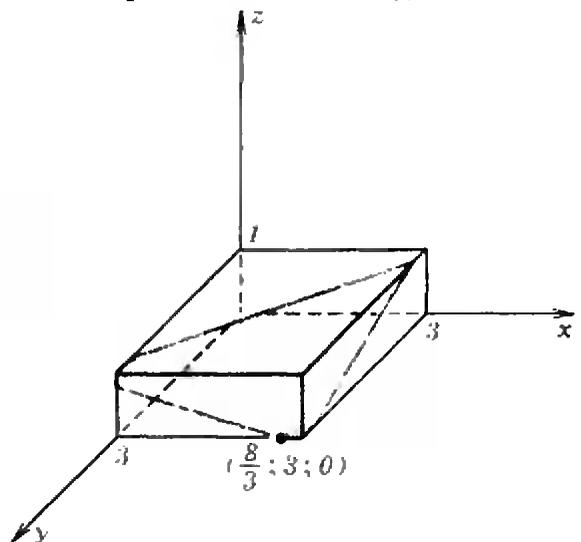


Рис. 1.

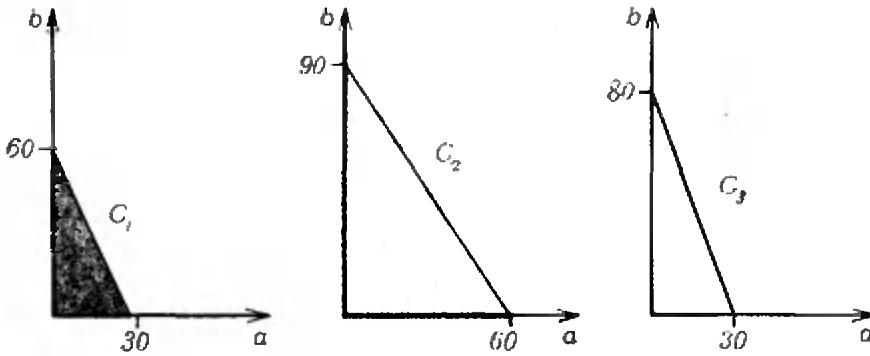


Рис. 2.

как тоже имеет такой вид:

$$\begin{cases} s = 10x + 20y + 30z, \\ 10x + 20y + 30z \geq 20(3-x) + \\ \quad + 30(3-y) + 80(1-z), \\ 20(3-x) + 30(3-y) + \\ \quad + 80(1-z) \geq 10x + 20y + 30z, \\ x \geq 0, 3 \geq x, y \geq 0, 3 \geq y, \\ z \geq 0, 1 \geq z. \end{cases}$$

«Многогранник», заданный системой неравенств, изображен синим цветом на рисунке 1 — он сводится к плоскому пятиугольнику. Вершина, в которой функция s достигает максимума, помечена красным.

Л. В. Канторович предложил несколько подходов к решению сформулированной общей задачи. Один из них основан на идее *двойственности*. Чтобы понять ее, решим задачу о станках другим способом.

Снова обозначим $a_1 + a_2 + a_3$ через x , $\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$ — через y и α_7 — через z ; введем новые обозначения: $x' = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $y' = \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$, $z' = \alpha_7$. Сопоставим каждому набору (x, y, z, x', y', z') , где все числа неотрицательны и связаны неравенствами

$$x + x' \leq 3, y + y' \leq 3, z + z' \leq 1, \quad (1)$$

точку плоскости $(a; b)$ с координатами $a = 10x + 20y + 30z$,

$$b = 20x' + 30y' + 80z'. \quad (2)$$

Что же представляет собой множество S всех точек, заданных соотношениями (1) и (2)? Это множество — сумма трех множеств: S_1 , образованного теми точками $(a; b)$, для которых $a = 10x$, $b = 20x'$; S_2 , состоящего из точек $(a; b)$, для которых $a = 20y$,

$b = 30y'$; S_3 , состоящего из точек $(a; b)$, для которых $a = 30z$, $b = 80z'$. При этом, конечно, выполнены неравенства (1). Множества S_1 , S_2 и S_3 — это треугольники, изображенные на рисунке 2.

Чтобы построить искомое множество S , сначала найдем сумму S_1 и S_2 , т. е. множество точек $(a; b)$ с координатами

$$a = 10x + 20y, b = 20x' + 30y'.$$

Для этого треугольник S_2 откладывают от верхней вершины треугольника S_1 , а затем S_2 «съезжает с горки», образованной гипотенузой S_1 . Получается четырехугольник, изображенный на рисунке 3.

Теперь можно построить и множество S . Отложим треугольник S_3 от верхней вершины на рисунке 3 и дадим ему «съехать с горки», образованной двухзвенной ломаной. Получается пятиугольник S , изображенный на рисунке 4.

А что же требуется в задаче? Требуется найти такую точку $A = (a; b)$, что во-первых, $a = b$, а во-вторых, a имеет наибольшее значение. Эта точка лежит на пересечении биссектрисы и ломаной $KLMN$ (см. рис. 4) и имеет координаты $(86^2/3, 86^2/3)$.

Как нам добраться до точки A ? Пойдем к ней с двух сторон. Сделаем шаг по отрезку KL из точки K в точку L . При этом поднимемся на 80 единиц. Это соответствует тому, что станок третьего типа должен изготовить 80 вторых деталей. Далее сделаем шаг из точки N в точку M . При этом мы сдвинемся вправо на 60 единиц. Это

соответствует тому, что станки второго типа должны работать лишь над первыми деталями и сделать их 60 штук.

А теперь мы движемся от L к A и от M к A . Это соответствует тому, что первые станки работают $2\frac{2}{3}$ из общих трех единиц времени над первой деталью (и мы сдвигаемся вправо на $26\frac{2}{3}$) и $\frac{1}{3}$ времени над второй деталью (и мы поднимаемся вверх на $6\frac{2}{3}$). В итоге мы попадаем в точку A .

Кстати, становится ясно, как надо поступать, если у нас не три, а n типов станков. Тогда множество n будет ограничено ломаной из C звеньев, углы наклона которых будут упорядочены от нижней точки к верхней в порядке убывания. И снова надо идти от верхней и нижней точек навстречу друг другу. Все типы станков, кроме одного, будут обрабатывать лишь одну деталь — «верхние» — первую, «нижние» — вторую. И лишь на последнем участке одному типу станков придется «поделиться» — часть времени обрабатывать первую, часть — вторую деталь.

В нашем втором решении главную роль играли прямые, на которых лежат звенья ломаной $KLMN$. В самых общих чертах идея двойственности в том и состоит, что многогранник можно задавать набором его вершин, а можно — и как пересече-

ние набора содержащих его полупространств.

Формализовав производственную задачу и указав некоторые рецепты ее решения, Л. В. Канторович увидел также замечательные перспективы в области экономики. Представьте себя на месте мастера, у которого в подчинении находятся семь рабочих. Они работают на тех самых станках, с которыми мы уже не раз встречались. Вы должны организовать производство так, чтобы изготовить как можно больше комплектов деталей.

Один путь — директивный. Мастер вызывает бригаду и строгим голосом распоряжается: «Ты, Петр, давай делай вторую деталь на станке третьего типа; Иван, Николай и Александр — делайте первую деталь на станке первого типа» и так далее.

Но есть и другой путь, более деликатный. Вы можете вызвать бригаду и сказать так: «Ребята, нужно сделать на ваших станках детали двух видов. Первая стоит 2 рубля, а вторая — 1 рубль; за каждый комплект из деталей двух видов — премия по 10 копеек. Подумайте, как вам заработать побольше».

Возможно, сначала рабочим в голову придет вариант, названный в нашей таблице «естественным распределением». При этом они заработают 238 рублей 70 копеек. Но потом они,

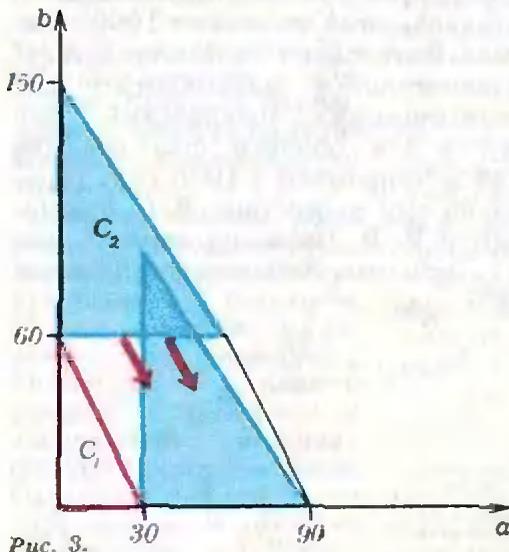


Рис. 3.

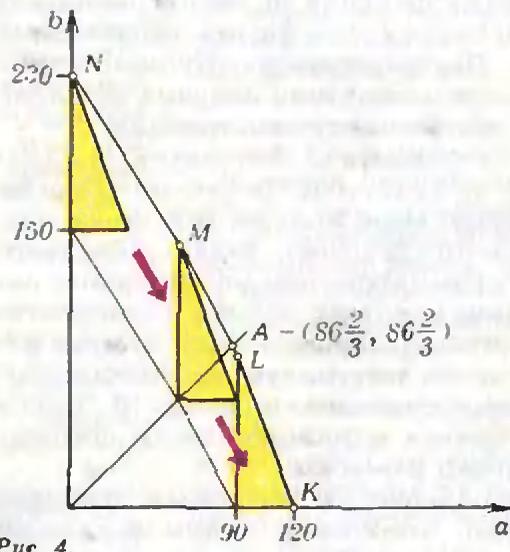


Рис. 4.

наверное, догадаются, что есть и более выгодное — «оптимальное распределение».

Вопрос: Какую наибольшую сумму сможет заработать бригада?

А откуда же взялись цены на детали? Посмотрите на рисунок 4. Прямая LM , на которой лежит оптимальная точка A , имеет уравнение $2a + b = 260$. Его коэффициенты 2 и 1 — это и есть цены. Если бы не премия за комплектность, то при ценах на детали в 2 и 1 рубль наибольший заработок бригады отвечал бы любой из точек отрезка ML . А небольшая премия в 10 копеек делает наиболее выгодной именно точку A . Таково искусство правильного выбора цен!

Но вернемся в 1939 год. Говорят, что истина рождается ересью... Увы, так случилось и с идеями Л. В. Канторовича в области экономики. Они не встретили понимания в момент их зарождения, были объявлены ересью, и его работа была прервана.

Концепции Леонида Витальевича вскоре после конца войны были перетолкованы на Западе. Американский экономист Т. Купманс в течение многих лет привлекал внимание математиков к ряду задач, связанных с военной тематикой. Он активно способствовал тому, чтобы был сформирован математический коллектив для разработки этих проблем. В итоге было осознано, что надо научиться решать задачи о нахождении экстремумов линейных функций на многогранниках, задаваемых линейными неравенствами. По предложению Купманса этот раздел математики получил название *линейного программирования*.

Американский математик Д. Данциг в 1947 году разработал весьма эффективный конкретный метод численного решения задач линейного программирования (он получил название *симплекс-метода*). Идеи линейного программирования в течение пяти-шести лет получили грандиозное распространение в мире, и имена Купманса и Данцига стали повсюду широко известны.

Примерно в это время Купманс узнал, что еще до войны в далекой России уже было сделано нечто по-

хожее на разработку начал линейного программирования. Как легко было бы Данцигу и Купмансу проигнорировать эту информацию! Маленькая книжица, изданная ничтожным тиражом, обращенная даже не к экономистам, а к организаторам производства, с минимумом математики, без четко описанных алгоритмов, без доказательных теорем — словом, стоит ли принимать такую книжку во внимание... Но Купманс настаивает на переводе и издании на Западе книги Канторовича. Его имя и идеи становятся известными всем. Воздадим должное благородству американского ученого!

А самому Леониду Витальевичу — как естественно было бы ему, испытав первые грозные удары ретроградов, отречься от «грехов» своей молодости, забыть про всю эту экономику и вернуться к математике. Но Л. В. Канторович продолжает писать математические работы, навеянные экономическими идеями, участвует и в конкретных разработках на производстве. При этом (одновременно с Данцигом, но не зная его работ) он разрабатывает метод, позже названный модифицированным симплекс-методом. Как только в 50-е годы образуется маленький просвет и кое-что из запретного ранее становится возможным, он организует группу студентов на экономическом факультете ЛГУ для обучения методам оптимального планирования. А начиная с 1960 года, Леонид Витальевич занимается только экономикой и связанными с нею математическими проблемами. Его вклад в эти области был отмечен Ленинской премией в 1965 году (присуждена ему совместно с В. С. Немчиновым и В. В. Новожиловым) и, как уже говорилось, Побелевской премией в 1975 году.

ХІХ встреча в Батуми

Капитаны, наморщив лбы и напрягая память, старались мысленно проникнуть внутрь предъявленного им предмета. Этим предметом был симпатичный зеленоватый мандарин; вопрос же, поставленный ведущим КВН, звучал так: сколько долек у этого мандарина? Несколько капитанам удалось угадать правильный ответ (видимо, им помог опыт, приобретенный в предыдущие дни).

Описанную сцену наблюдали 8 ноября в переполненном зале одной из батумских школ гости и участники ХІХ праздника юных математиков. На этот раз в Батуми приехали старшеклассники из Грузии и Армении, Москвы, Ленинграда, Киева, Ярославля, Перми. В традиционной программе, кроме научной конференции и КВН, — экскурсия в дельфинарий и знаменитый ботанический сад (тут участникам на редкость повезло с погодой и экскурсоводами), вечер занимательной математики и «Огонек», встречи с журналом «Квант» и математиками, приехавшими из Москвы, Ленинграда и Тбилиси.

Конечно, больше всего эмоций и энтузиазма вызвал КВН, которым четко руководил В. М. Гольховой. Помимо заготовленных заранее театрализованных приветствий с песнями и танцами и пресловутого «домашнего задания» (удачным решением жюри было оценивать его от —5 до 5 баллов, за отказ от выступления — 0), прово-

дилось еще несколько конкурсов. «Знатокам» и капитанам предлагали, например, такие вопросы (на ответ 1 — 2 минуты):

Назовите нескольких известных математиков — современников д'Артаньяна (восемнадцатилетний герой Дюма, как известно, прибыл в Париж в 1628 году).

Когда в Чикаго 3 часа утра, в Москве — полдень. Когда в Москве 3 часа, в Петропавловске - Камчатском — полдень. Сколько времени в Чикаго, когда в Петропавловске-Камчатском 3 часа утра?

Как разбить числа 1, 2, 9, 25, 49, 64 на две группы, чтобы суммы чисел в этих группах были равны?

Газету четыре раза сложили пополам (по очереди — вдоль и поперек), после чего от нее оторвали четыре угла. Если теперь развернуть газету — сколько в ней будет дыр?

На Зеленом мысе у входа в Ботанический сад работает безостановочная канатная дорога, на которой всего 72 кресла. Когда едешь по ней, каждые 10 секунд навстречу попадает кресло. Сколько времени занимает подъем? Читатели могут также подсчитать, сколько времени потребовалось всем 250 участникам праздника, чтобы прокатиться вверх — вниз по этой дороге, любуясь батумской бухтой.)

В заключение капитанам было предложено сыграть по олимпийской системе (команд было как раз $2^4=16$) в один из вариантов игры «кегли»*).

* Об этих очень трудных для анализа играх рассказано в книге М. Гарднера «Математический цветник» (М., Мир, 1983).

Тут победителем вышел капитан команды Перми. Общую же победу в КВН, слегка опередив команду ФМШ при МГУ, одержали ученики школы № 30 из Ленинграда.

В научной программе основное место заняла конференция, где за три дня участниками было сделано более 70 докладов, комментировавшихся членами жюри (председатель — профессор МГУ В. А. Скворцов). Особенность батумских праздников — большое разнообразие интересов и уровня подготовки участников. Кроме ведущих физматшкол, здесь представлены и «обычные» школы, и СПТУ; в этом году была и команда Северо-западной заочной математической школы. Среди докладов встречались реферативные, но большую и лучшую часть составляли те, где рассказывалось о самостоятельно решенных, чисто математических или прикладных задачах.

Одним из семи лучших жюри признало доклад Изабеллы Шефтель (с. ш. № 30, Ленинград). Она рассказала об оценках коэффициентов сумм, похожих на ряды Фурье ($a_0 + a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi + a_2 \cos 2\varphi + b_2 \sin 2\varphi + \dots$), для функций, определенных на конечном множестве — группе комплексных корней n -й степени из 1.

В секции программирования (ею руководил Н. Н. Константинов) был высоко оценен доклад Наумена Офмана (с. ш. № 444, Москва), который вместе с соавтором Кириллом Горячевым составил интересную систему программ, имитирующую работу калькулятора со скобочными формулами в операционной системе ЕМ-ЭВМ

(Окончание см. на с. 21)



СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Доктор физико-математических наук
А. С. СОЛОДОВНИКОВ

Теория систем линейных неравенств близка школьной математике. У этой теории много приложений, главным образом к *линейному программированию*, о котором рассказывается в статье В. М. Тихомирова в этом номере журнала. Мы расскажем о самых азах теории систем линейных неравенств.

Решение системы линейных неравенств путем последовательного уменьшения числа неизвестных

Начнем с примера. Пусть нам нужно решить систему неравенств (точнее — научиться находить все ее решения):

$$\begin{cases} 7x + 2y - 2z - 4 \geq 0, \\ -x - y - z + 4 \geq 0, \\ -2x + 3y + z - 1 \geq 0, \\ 5x - y + z + 2 \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Мы воспользуемся приемом, напоминающим решение обычной системы линейных уравнений. Перепишем систему (1) так:

$$\begin{cases} \frac{7}{2}x + y - 2 \geq z, \\ -x - y + 4 \geq z, \\ z \geq 2x - 3y + 1, \\ z \geq -5x + y - 2. \end{cases} \quad (2)$$

Из (2), разумеется, следует, что

$$\begin{cases} \frac{7}{2}x + y - 2 \geq 2x - 3y + 1, \\ \frac{7}{2}x + y - 2 \geq -5x + y - 2, \\ -x - y + 4 \geq 2x - 3y + 1, \\ -x - y + 4 \geq -5x + y - 2. \end{cases} \quad (3)$$

Предположим, что нам известно хотя бы одно решение (x_0, y_0) системы (3). Но тогда решением системы (2)

будет всякая тройка (x_0, y_0, z_0) , где z_0 — любое число, заключенное между наименьшей из левых частей неравенств системы (2) и наибольшей из правых частей неравенств этой системы. Наоборот, если (x_0, y_0, z_0) — решение системы (1), то пара (x_0, y_0) — решение системы (3).

Систему (3) можно переписать (по аналогии с тем, как мы поступали с системой (1)) так:

$$\begin{cases} y \geq -\frac{3}{8}x + \frac{3}{4}, \\ y \geq \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}, \\ 2x + 3 \geq y, \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Опять-таки, если (x_0, y_0) — решение системы (4), то x_0 удовлетворяет системе

$$\begin{cases} 2x + 3 \geq \frac{3}{8}x + \frac{3}{4}, \\ 2x + 3 \geq \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}, \\ x \geq 0, \end{cases} \quad (5)$$

которая равносильна одному-единственному неравенству $x \geq 0$.

Возьмем теперь какое-нибудь решение этого неравенства, скажем $x=1$, и подставим это значение x в систему (4):

$$y \geq \frac{3}{8}, y \geq 0, y \leq 5,$$

откуда $\frac{3}{8} \leq y \leq 5$. Возьмем теперь $y=4$ и подставим $x=1$ и $y=4$ в систему (2). Получим $-1 \geq z \geq -3$. Для таких z любая тройка $(1, 4, z)$ удовлетворяет исходной системе.

Вообще мы можем взять любое значение $x_0 \geq 0$, подставить это значение в систему (4), получить систему неравенств для y , выбрать одно из ее решений y_0 , подставить x_0, y_0 в систему (2), после чего найти все возможные значения z для уже выбранных значений x_0 и y_0 .

Итак, мы научились описывать все решения системы (1). Оказывается, что аналогичный прием можно использовать в самом общем случае.

Сопутствующая система линейных неравенств

Пусть дана система линейных неравенств с n неизвестными x_1, \dots, x_n — будем называть ее «система S ». Условимся в дальнейшем рассматривать только неравенства типа \geq . Таким образом, система S имеет вид

$$\begin{cases} L_1 \geq 0, \\ L_2 \geq 0, \\ \dots\dots\dots \\ L_m \geq 0, \end{cases} \quad (S)$$

где каждое L_i ($i=1, 2, \dots, m$) — это выражение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a.$$

При рассмотрении системы S возникают два основных вопроса:

а) является ли система совместной, т. е. имеет ли она хотя бы одно решение $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \dots, x_n = x_n^0$;

б) если да, то как найти все ее решения?

Рассмотрим любое из неравенств системы S . Оно имеет вид

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a \geq 0. \quad (*)$$

Если $a_n = 0$, оставим неравенство (*) без изменений. Если же $a_n \neq 0$, то, в зависимости от знака a_n , приведем его к виду $P_n \geq x_n$ (при $a_n \geq 0$) либо $Q \leq x_n$ (при $a_n < 0$). Итак, любое из неравенств системы S приводится к одному из трех видов $R \geq 0, P \geq x_n, Q \leq x_n$, где R, P и Q выражения вида

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_{n-1}x_{n-1} + b,$$

т. е. линейные многочлены, зависящие уже от $(n-1)$ -й переменной.

Таким образом, система S равносильна системе S_1 :

$$\begin{cases} P_1 \geq x_n, \\ P_2 \geq x_n, \\ \dots\dots\dots \\ P_p \geq x_n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_n \geq Q_1, \\ x_n \geq Q_2, \\ \dots\dots\dots \\ x_n \geq Q_q. \end{cases} \quad (S_1)$$

$$\begin{cases} R_1 \geq 0, \\ R_2 \geq 0, \\ \dots\dots\dots \\ R_r \geq 0. \end{cases}$$

Эта система состоит, вообще говоря, из трех блоков, выделенных рамками. Разумеется, при этом не исключено, что в системе S_1 не будет одного или даже двух блоков. Это зависит от знаков чисел a_n .

Построим теперь систему с меньшим числом неизвестных так же, как мы поступили при рассмотрении примера:

$$\begin{cases} P_\alpha \geq Q_\beta, \\ R_\gamma \geq 0, \end{cases} \quad (S^{(1)})$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, p, \beta = 1, 2, \dots, q, \gamma = 1, 2, \dots, r$.

Всего в этой системе $pq + r$ неравенств.

Система $S^{(1)}$ называется *сопутствующей* по отношению к исходной системе S .

Если окажется, что в системе S_1 первый или второй блок отсутствует, то сопутствующая система будет состоять только из неравенств $R_\gamma \geq 0$, если отсутствует третий блок, то в ней будут только неравенства $P_\alpha \geq Q_\beta$. Наконец, если отсутствуют первый и третий блоки или второй и третий, то сопутствующей системы нет вовсе. Мы будем считать ее в этом случае тождественной, т. е. состоящей из неравенства $0 \geq 0$ (или, точнее, из неравенства $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n + 0 \geq 0$).

Построенная при рассмотрении примера система (3) — сопутствующая

для системы (1), аналогично, система (4) — сопутствующая для системы (3).

Если рассмотреть систему

$$\begin{cases} -3x + 3y + z - 1 \geq 0, \\ 5x - y + z + 2 \geq 0, \end{cases}$$

состоящую из двух последних неравенств системы (1), то ее сопутствующая система тождественная.

Что значит решить систему линейных неравенств

Связь между решениями исходной системы S и сопутствующей ей системы $S^{(1)}$ мы уже обнаружили на примере. В общем случае эту связь выражает следующая теорема.

Теорема. Если от любого решения системы S отбросить значение последнего неизвестного x_n , то получим некоторое решение сопутствующей системы $S^{(1)}$.

Обратно, для любого решения сопутствующей системы $S^{(1)}$ можно найти такое значение неизвестного x_n , присоединив которое, получим решение исходной системы S .

Первое утверждение теоремы очевидно (если какой-нибудь набор значений неизвестных удовлетворяет системе S , то он удовлетворяет и системе (2); но тогда для этого же набора выполняются все неравенства системы S). Докажем обратную теорему.

Сначала рассмотрим основной случай — когда в сопутствующей системе $S^{(1)}$ имеется хотя бы одно неравенство $P_\alpha \geq Q_\beta$. Пусть

$$x_1 = x_1^0, \dots, x_{n-1} = x_{n-1}^0$$

— какое-нибудь решение системы $S^{(1)}$. Подставив указанные значения неизвестных в выражения $P_1, \dots, P_p, Q_1, \dots, Q_q, R_1, \dots, R_r$, получим некоторые числа $P_1^0, \dots, P_p^0, Q_1^0, \dots, Q_q^0, R_1^0, \dots, R_r^0$. Для них выполняются неравенства

$$P_\alpha^0 \geq Q_\beta^0, R_\gamma^0 \geq 0$$

($\alpha = 1, 2, \dots, p; \beta = 1, 2, \dots, q; \gamma = 1, 2, \dots, r$).

Мы видим, что каждое из чисел Q_1^0, \dots, Q_q^0 не больше, чем любое из чисел P_1^0, \dots, P_p^0 . Но в таком случае обязательно найдется число x_n^0 , которое

заключено между всеми числами Q_1^0, \dots, Q_q^0 и всеми числами P_1^0, \dots, P_p^0 :

$$P_\alpha^0 \geq x_n^0 \geq Q_\beta^0$$

($\alpha = 1, 2, \dots, p; \beta = 1, 2, \dots, q$).

Отсюда следует, что набор значений неизвестных

$$x_1 = x_1^0, \dots, x_{n-1} = x_{n-1}^0, x_n = x_n^0$$

является решением системы $S^{(1)}$, а следовательно, и S .

В исключительном случае — когда сопутствующая система $S^{(1)}$ состоит только из неравенств $R_\gamma \geq 0$ — в системе S , отсутствует первый или второй блок. Если нет первого блока, в качестве x_n можно взять любое число, удовлетворяющее условиям

$$x_n^0 \geq Q_\beta^0 \quad (\beta = 1, \dots, q).$$

Аналогично, при отсутствии второго блока x_n^0 выбираем, исходя из условий

$$P_\alpha^0 \geq x_n^0 \quad (\alpha = 1, \dots, p).$$

Наконец, если отсутствуют сразу первый и второй блоки, то в качестве x_n^0 можно взять какое угодно число. Теорема доказана.

Итак, система S линейных неравенств совместна тогда и только тогда, когда совместна сопутствующая ей система $S^{(1)}$. При этом все решения исходной системы S могут быть получены следующим способом: нужно к каждому решению x_1^0, \dots, x_{n-1}^0 сопутствующей системы $S^{(1)}$ присоединить любое из чисел x_n^0 , заключенных между всеми числами P_1^0, \dots, P_p^0 и всеми числами Q_1^0, \dots, Q_q^0 .

Скажем несколько слов о геометрическом смысле доказанной выше теоремы. Допустим, что S — система неравенств с тремя неизвестными x, y, z . Сопутствующая система $S^{(1)}$ есть система с двумя неизвестными x, y . Пусть $M(S)$ — множество решений системы S (это — некоторое множество точек в пространстве), а $M(S^{(1)})$ — множество решений системы $S^{(1)}$ (множество точек на плоскости). Доказанная теорема в переводе на геометрический язык означает следующее:

Область $M(S^{(1)})$ есть проекция области $M(S)$ на координатную плоскость xy .

Итак, для произвольной системы S линейных неравенств с неизвестными x_1, \dots, x_n мы построили новую, сопутствующую систему $S^{(1)}$, в которой неизвестными являются x_1, \dots, x_{n-1} . Для системы $S^{(1)}$ можно, в свою очередь, построить сопутствующую систе-

му $S^{(2)}$ (с неизвестными x_1, \dots, x_{n-2}), для последней — сопутствующую систему $S^{(3)}$ и т. д. Продолжая этот процесс, мы после ряда шагов придем к системе $S^{(n-1)}$, состоящей из неравенств с одним неизвестным x_1 . Из сказанного ранее вытекает, что система S совместна в том и только в том случае, когда совместна система $S^{(n-1)}$. Решение же вопроса о совместности или несовместности системы с одним неизвестным не представляет никакого труда. Таким образом, мы получили возможность при помощи весьма простых вычислений узнать, совместна исходная система S или нет. Кроме того, как только построены системы $S^{(1)}, S^{(2)}$ и т. д., мы можем найти все допустимые значения неизвестного x_1 (из системы $S^{(n-1)}$); затем для любого конкретного допустимого значения x_1^0 найти все совместные с ним значения неизвестного x_2 , т. е. такие значения, которые вместе с x_1^0 удовлетворяют системе $S^{(n-2)}$, по x_1^0 и x_2^0 найти все допустимые x_3 и т. д.

Поэтому мы будем считать, что система S решена, если построены системы $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(n-1)}$.

Применение к линейному программированию

В статье В. М. Тихомирова в этом номере журнала рассказывается о линейном программировании. Мы покажем, как можно свести задачу линейного программирования к решению некоторой системы линейных неравенств. Этот способ решения не самый экономный, но в логическом отношении весьма простой.

Итак, пусть нужно найти минимум (или максимум) некоторой линейной функции $F = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ при условиях

$$\begin{cases} L_1 \geq 0, \\ L_2 \geq 0, \\ \dots \\ L_n \geq 0, \end{cases} \quad (L)$$

где L_i ($i=1, 2, \dots, m$) — линейные функции от x_1, x_2, \dots, x_n .

Пусть M — множество всех решений системы L , а d — минимум функции F на этом множестве. Для каждого

из решений $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ рассмотрим число $F(x)$. Наименьшее из всех чисел $F(x)$, где $x \in M$, и будет d .

Однако и само число $F(x)$ при данном $x \in M$ также является наименьшим из всех чисел некоторого множества, а именно — из всех чисел z таких, что $z \geq F(x)$. Поэтому можно определить число d и по-другому: *следует рассмотреть систему*

$$\begin{cases} L_1 \geq 0, \\ \dots \\ L_m \geq 0, \\ z - F \geq 0 \end{cases} \quad (T)$$

линейных неравенств с $n+1$ неизвестными z, x_1, \dots, x_n и из всех ее решений выбрать такое, для которого z принимает наименьшее значение.

Способ сведения задачи линейного программирования к решению некоторой системы линейных неравенств, указанный в этом параграфе, позволяет легко доказать следующую теорему (являющуюся одной из основных теорем линейного программирования).

Теорема. Если совокупность значений линейной функции L на множестве M , заданном с помощью системы S линейных неравенств, ограничена снизу, то в этой совокупности существует наименьшее число (т. е. существует минимум L на множестве M).

Действительно, после исключения из системы T неизвестных x_n, x_{n-1}, \dots, x_1 получим систему $T^{(n)}$ неравенств с одним неизвестным z . Множество ее решений совпадает с совокупностью значений функций L (на M). Отсюда и следует утверждение теоремы.

В заключение предлагаем читателю решить следующую задачу.

Задача. Содержание витаминов A и C в 1 кг вишен и абрикосов дано в следующей таблице:

	A (мг)	C (мг)
Вишни	3	150
Абрикосы	24	75

Сколько граммов вишен и абрикосов следует включить в дневной рацион, чтобы в нем оказалось не менее 6 мг (суточная норма) витамина A и 75 мг витамина C при минимальных затратах, если стоимость 1 кг вишен, и 1 кг абрикосов составляет 2 р.?

ХІХ встреча в Батуми

(Начало см. на с. 15)

и снабженную удобной диа-
гностикой.

Два доклада учеников
ФМШ при МГУ были по-
священы бильярдам. В од-
ном, сделанном Алексеем
Бачуриным, были изучены
траектории для бильярда
в форме кольцевого секто-
ра — здесь почти пол-
ностью проясняет ситуа-
цию принцип «отражения»
(см. статью о бильярдах
в «Кванте» № 3 за
1989 год). Владимир Рагу-
ли исследовал итерации
дробно-линейных функ-
ций $x \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d}$ и с их по-

мощью объяснил поведе-
ние траекторий, проходя-
щих через фокусы эллип-
тического бильярда.

Задача для исследования

Рассмотрим бесконечные в обе
стороны последовательности
из 0 и 1. Для последователь-
ности, которую можно раз-
бить на отрезки «100» и «10»,
определим следующую опера-
цию: 100 заменяется на 1,
10 — на 0. С полученной бес-
конечной в обе стороны после-
довательностью, если повезет,
можно проделать эту опера-
цию еще раз, и т. д.:

... 100 10 10 100 10 100 10 100 10 10 100 10 ...
... 1 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 ...
... 1 0 0 1 0 ...

Как описать последователь-
ности, с которыми эту операцию
можно проделать неограни-
ченное количество раз? (Такие
последовательности мы буд-
дем называть *удачными*.)

1. Докажите, что удачные
последовательности можно по-

Тема доклада Алек-
сандра Сидорова (с. ш.
№ 57, Москва) о «почти
периодических» последо-
вательностях из нулей и
единиц сформулирована в
виде задачи для исследо-
вания (см. ниже). Алек-
сандр Стояновский (с. ш.
№ 57, Москва) представил
полное решение задачи:
на какие наборы цифр
может оканчиваться квад-
рат целого числа. В докла-
де Алексея Сарычева (с. ш.
№ 679, Москва) «Теорема
Рамсея, компактность от-
резка и математическая
логика» предложен новый
интересный подход к теоре-
мам Рамсея, которым
«Квант» посвятил в прош-
лом году две статьи (№№ 4
и 8).

Мы надеемся, что об
этих докладах «Квант»
сможет рассказать под-
робнее.

Все участники праздни-
ка — ученики, учителя,

лучить так. Возьмем окруж-
ность длиной $1+\sqrt{2}$, на кото-
рой некоторая дуга длиной 1
закрашена в черный цвет
(причем один из ее концов —
черный), а остальная часть
окружности — белая. Будем
двигаться по окружности ша-
гами длиной 1 и строить по-
следовательность из цифр
0 и 1: если на очередном
шаге мы попадаем в черную
область, то ставим 1, если в
белую — 0.

2. Подумайте, как полу-
чить другое описание все-
возможных удачных последо-
вательностей с помощью ло-

маных на клетчатой бумаге
(1 соответствует шагу вверх,
0 — шагу вправо; см. решение
задачи М1125 в № 2, 1989).

3. Будет ли среди удачных
последовательностей такая,
что полученная из нее опера-
цией $100 \rightarrow 1, 10 \rightarrow 0$ последо-

возглавлявшие команды, и
члены жюри — отметили
огромные усилия, затра-
ченные организаторами,
среди которых, в первую
очередь, нужно назвать
председателя Совпрофа
Аджарии Ш. М. Окропи-
ридзе, заместителя минис-
тра просвещения Л. Ш. Чан-
турая, членов оргкомитета
А. К. Беридзе, В. С. Бо-
чоришвили, А. В. Гогишви-
ли и заслуженную учи-
тельницу М. И. Жгенти.
Медая Илларионовна вы-
сказала надежду, что на
следующий юбилейный ХХ
праздник пригласят хотя
бы некоторых участников
самых первых батумских
встреч юных (когда-то!)
математиков. Конечно, это
было бы здорово! Очень хо-
чется надеяться, что пре-
красная традиция этих
осенних праздников будет
продолжена.

Н. Б. Васильев, С. В. Фомин

вательность равна (с точно-
стью до сдвига) исходной?

4. Докажите, что любая
удачная последовательность
«квазипериодична»: она не
имеет периода, но каждый
(конечный) отрезок встречает-
ся в ней бесконечное количе-
ство раз.

5. Назовем две последова-
тельности из 0 и 1 эквива-
лентными, если множества
(списки) их всевозможных ко-
нечных отрезков совпадают.
Какие из удачных последова-
тельностей эквивалентны? Су-
ществуют ли последователь-
ности, эквивалентные ровно 1
другим?

6. Как обобщить эти ре-
зультаты, чтобы вместо корня
из 2 в ответе возникала дру-
гая квадратичная иррацио-
нальность (или другое ирра-
циональное число)?

Для размышлений над эти-
ми вопросами полезно прочи-
тать статьи М. Л. Концевича
о равномерных последователь-
ностях (№ 7, 1985) и В. Е.
Корепича о квазикристаллах
(№ 6, 1987).

А. Сидоров, ученик 9 класса



ПУЗЫРИ В ЛУЖЕ

Кандидат физико-математических наук
А. В. МИТРОФАНОВ

Вы, конечно, наблюдали эти «живучие» пузыри. Они возникают на поверхности водоемов или луж во время ливня, когда вода как будто «вскипает» от часто падающих крупных капель. Иногда такие пузыри бывают и после дождя, если с веток деревьев продолжает капать. Пузыри удивительно устойчивы, их не только можно успеть сфотографировать, но и наблюдать, как они плывут по воде. Время жизни пузырей несколько секунд,

а то и несколько десятков секунд. В конце концов они лопаются.

На вид все пузыри примерно одинаковые. Оболочка пузыря похожа на полусферу с хорошо заметным ободком около основания. Каждый пузырь — словно круглая прозрачная шляпка с маленькими темными полями. Наша задача состоит в том, чтобы разобраться, что это за «шляпка» и откуда у нее появились «поля».

Мы знаем, что молекулы на поверхности жидкости имеют определенную потенциальную энергию, называемую поверхностной энергией. Величина этой энергии пропорциональна площади поверхности, а коэффициент пропорциональности — свой для каждой жидкости — называют коэффициентом поверхностного натяжения. Известно, что всякая система при равновесии находится в том (из возможных для нее) состоянии, в котором

ее энергия имеет минимальное значение. Применительно к нашим пузырям это означает, что площадь поверхности пузыря должна быть по возможности минимальной. Свободный мыльный пузырь имеет форму сферы: ведь при заданном объеме тела (воздуха в пузыре) сфера имеет минимальную площадь поверхности (роль силы тяжести для пузыря незначительна, т. к. он очень легкий). Если слегка деформировать пузырь, например подуть на него, то предоставленный самому себе пузырь опять примет форму сферы.

На поверхности воды пузыри по форме уже другие: если пузырь крупный, то он похож на полусферу, а не на сферу. Оболочка пузыря имеет выпуклую форму благодаря избыточному давлению Δp воздуха внутри пузыря. Поскольку величина Δp постоянная (воздух находится в равновесии), «шапка» пузыря выгнута везде одинаково; иначе говоря, стенки «шапки» имеют везде одну и ту же кривизну, т. е. являются частью сферы. Но какая часть сферы расположена над водой?

Будем считать, что основание пузыря (его «доннышко», роль которого играет поверхность водоема) плоское. Такое предположение справедливо, конечно, не всегда, и оно тем ближе к истине, чем больше размер пузыря (к этому вопросу мы еще вернемся). Нетрудно понять, что такой пузырь при заданном объеме воздуха имеет форму полусферы (полусфера имеет в этом случае минимальную площадь).

Теперь поговорим об «ободке», опоясывающем «шапку» водяного пузыря. Что это такое? Догадаться, пожалуй, нетрудно.

Известно, что вода поднимается в узком капилляре, если она смачивает его стенки. Энергетически это «выгодно». Чем меньше радиус капилляра, тем выше в нем уровень жидкости. Благодаря тем же капиллярным силам вода поднимается чуть-чуть и вблизи поверхности тела любой формы, например плоской вертикальной пластинки, — лишь бы поверхность смачивалась водой. Опустите



С изобретением фотографии и скоростной фотосъемки стали известными многие подробности событий, происходящих при ударе дождевой капли о водную поверхность.

Крупная капля дождя падает на водную гладь... образуется глубокая воронка... воронка «схлопывается»... и вот уже на поверхности воды спокойный пузырь с «заточенным» в нем воздухом.

Одним из первых, еще в начале нашего века, такое чудесное превращение зафиксировал на фотопластинке профессор физики Королевского военно-морского инженерного колледжа в Девонпорте А. Уортингтон. Ставшую классической серию фотоснимков Уортингтона можно увидеть в сборнике научной фотографии Дж. Дариуса «Недоступное глазу» (М.: Мир, 1986, с. 59).

Иная судьба у более мелких дождевых капель. Они тоже образуют углубления на поверхности воды, но не такие глубокие, и они не «схлопываются». Иногда наблюдаются водяные «гвозди» — вертикальные тоненькие фонтанчики, возникающие в центре углублений. Особенно впечатляющими выглядят водяные «гвозди» в сильный дождь ночью при яркой вспышке молнии.

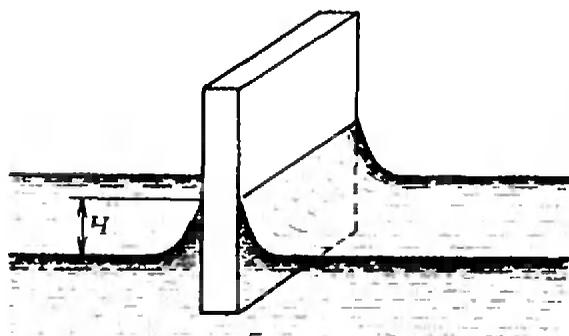


Рис. 1.

вертикально в воду мокрую дощечку или чистую стеклянную пластинку, так чтобы та выступала из воды. При подходящем освещении вы заметите узкий ободок капиллярного поднятия уровня воды около границы тела, по виду мало чем отличающийся от ободка пузыря, видимого на фотографии. Именно капиллярное поднятие уровня воды у стенок пузыря и создает «ободок» искривленной поверхности (рис. 1).

Тот, кто интересуется расчетами или физическими оценками, может вместе с нами подробнее рассмотреть вопрос о капиллярном поднятии воды вблизи гладкой вертикальной стенки при полном смачивании ее жидкостью.

Оценим максимальное повышение уровня воды H вблизи границы тела и определим зависимость H от коэффициента поверхностного натяжения σ . Воспользуемся для этого методом размерностей.

Равновесие жидкости при капиллярном поднятии определяется силами поверхностного натяжения и силой тяжести. Поэтому H может зависеть только от σ , от плотности жидкости ρ и от ускорения силы тяжести g . Будем искать функцию $H = f(\sigma, g, \rho)$ в виде

$$H = \text{const} \cdot \sigma^l \cdot g^m \cdot \rho^n. \quad (*)$$

(Конечно, не всегда физические величины, определяющие какое-либо явление, связаны степенной зависимостью, но очень часто это именно так.) Чтобы получить в явном виде зависимость H от σ , g и ρ , нам надо найти значения l , m и n .

Понятно, что левая и правая части соотношения (*) имеют одну и ту же

размерность. Выпишем размерности входящих в (*) величин —

$$[H] = L, \quad [\sigma] = MT^{-2}, \quad [g] = LT^{-2}, \\ [\rho] = ML^{-3}$$

(L , M , T — единицы длины, массы и времени) — и запишем соответствующее равенство

$$L = (MT^{-2})^l (LT^{-2})^m (ML^{-3})^n.$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений для неизвестных l , m и n :

$$l + n = 0, \quad l + m = 0, \quad m - 3n = 1.$$

Система имеет единственное решение

$$l = 1/2, \quad m = -1/2 \text{ и } n = -1/2.$$

Таким образом,

$$H = \text{const} \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}, \text{ или } H \sim \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}.$$

Определить методом размерностей неизвестную константу нельзя. Однако в физических формулах, полученных методом теоретического расчета, численные коэффициенты бывают, как правило, близки к единице; во всяком случае, они не влияют на порядок величин. Точное значение H отличается от полученной нами оценки в $\sqrt{2}$ раз: $H = \sqrt{2\sigma/\rho g}$.

Теперь мы можем оценить, как высоко поднимается вода около мокрой вертикальной стенки. Подставляя значения σ и ρ для воды ($\sigma \approx 73 \cdot 10^{-3}$ Н/м, $\rho \approx 10^3$ кг/м³), получим $H \approx 4$ мм. Примерно на столько же поднимется вода у основания стенок сферической части пузыря. Кривая поверхность воды у основания пузыря при надлежащем освещении и выглядит как темный ободок. Ширина ободка у всех больших пузырей такого же порядка, как H , т. е. несколько миллиметров.

Внимательный читатель заметит, что пузыри на фотографии — не точные полусферы, а как бы чуть приплюснутые в воде, и что ободок внутри пузыря отличается от наружного. (Под дождем, наблюдая пузыри, уловить такую разницу очень трудно.) Почему это так? Дело в том, что, как мы уже говорили, под оболочкой пузыря давление воздуха больше, чем снаружи. Поэтому внутри пузыря

в середине уровень воды ниже, чем в водоеме или луже. Найдем, насколько «проседает» пузырь относительно уровня жидкости в водоеме.

Избыточное давление воздуха внутри пузыря равно $\Delta p = 4\sigma/R$. В окружающей пузырь воде такое дополнительное (к атмосферному) давление создается на некоторой глубине Δh под поверхностью воды. Понятно, что именно на это Δh и будет «проседать» доннышко пузыря (рис. 2, а). Из равенства $4\sigma/R = \rho g \cdot \Delta h$ находим Δh :

$$\Delta h = \frac{4\sigma}{\rho g R}.$$

Для пузырей, которые были нами сфотографированы, величина Δh находилась в пределах 1—3 мм.

Таким образом, крупный пузырь имеет вид полусферы, слегка затопленной в жидкости и окаймленной у основания внутри и снаружи двумя изогнутыми кромками. Крупными пузырями мы будем называть те, у которых $R \gg H \approx \sqrt{\sigma/\rho g}$.

А как выглядят пузыри меньшего размера? Попробуйте самостоятельно разобраться в этом непростом вопросе. Отметим только, что если мы «изготовим» в воде маленький пузырек (радиусом порядка 1 мм или меньше), то он вообще не всплывет над уровнем жидкости, а будет находиться под водой, как будто приклеенный

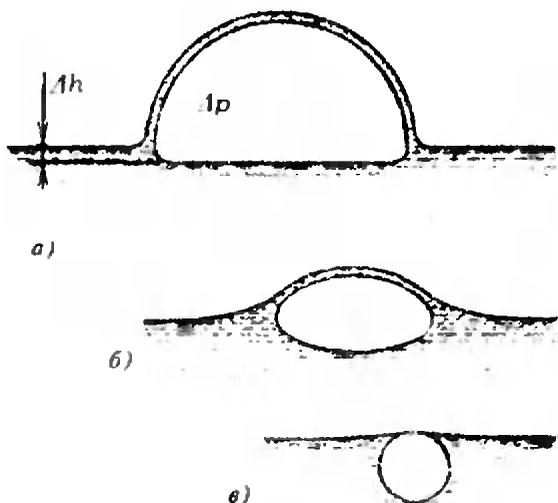


Рис. 2.

к водной поверхности. Форма маленького пузырька сферическая. На рисунке 2 показано, как выглядят крупный пузырь, т. е. такой, у которого $R \gg \sqrt{\sigma/\rho g}$ (а), пузырь средних размеров, у которого $R \approx \sqrt{\sigma/\rho g}$ (б), и маленький пузырек в форме сферы радиусом $R \ll \sqrt{\sigma/\rho g}$ (в).

Подумайте, почему форма пузыря разная в зависимости от его размера — чем больше пузырь, тем больше он похож на полусферу. И почему во время дождя появляются в основном пузыри крупные или средних размеров? Объяснение этого факта читатели найдут в замечательной книге Я. Е. Гегузина «Пузыри», выпущенной издательством «Наука» в 1985 году в серии «Библиотечка «Квант» (выпуск 46).

Перейдем к последнему вопросу. Поговорим об устойчивости водяного пузыря. Нам надо разобраться, почему пузыри «живут» долго только в том случае, если пасмурно или если идет дождь.

Кое-кто скажет, что во время дождя пузырей может быть очень много, поэтому и кажется, что они «долгожители». Доля истины в этом утверждении есть. Но если понаблюдать за отдельным пузырем, то легко убедиться, что вопрос наш не является надуманным. Пузыри в дождливую или пасмурную погоду живут действительно значительно дольше, чем, скажем, в сухую солнечную погоду (в сухую погоду они «живут» так мало, что их никто и не наблюдал толком).

Есть много разных причин, по которым пузыри разрушаются. Оболочку пузыря может порвать порыв ветра, «проткнуть» крупная дождинка и т. д. Она может испариться или стать очень тонкой и неоднородной из-за стекания воды вниз по стенкам пузыря. Присутствие в воде так называемых поверхностно-активных веществ (например, мыла) может, наоборот, продлить время жизни пузырей в десятки и сотни раз. (Вспомните пену на реке, которую не так-то легко разрушить.)

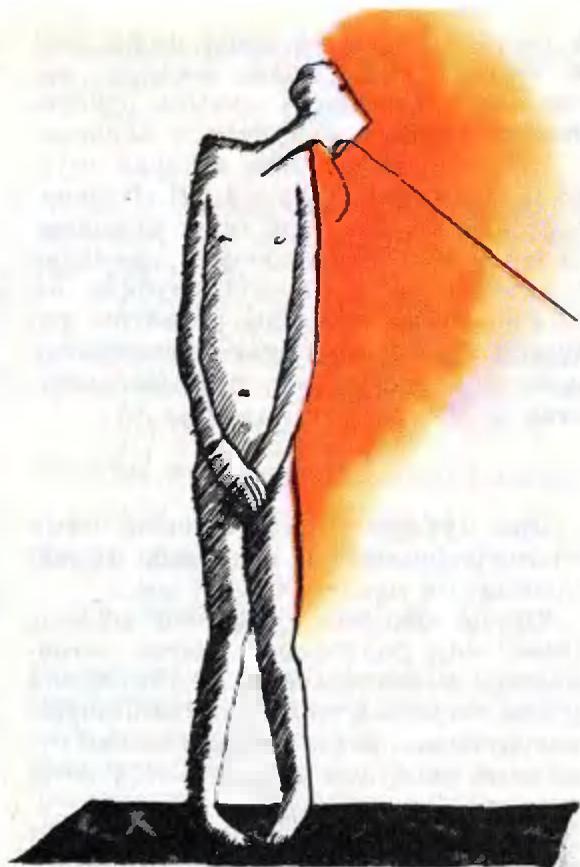
В 1985 году издательство «Мир» выпустило перевод книги Дэвида Джоунса «Изобретения Дедала». Рассказывать об этой книге мы не станем — во-первых, потому, что трудно рассказать, о чем эта книга, а во-вторых — потому, что гораздо интереснее прочитать книгу, чем рассказ о ней. Но боимся, что сделать это — прочитать книгу — сегодня уже не так просто. Хорошо, если вы найдете ее в библиотеке...

И мы решили дать нашим читателям возможность хотя бы частично познакомиться с «изобретениями Дедала» — мы будем помещать коротенькие отрывки из книги Д. Джоунса. Первую такую публикацию мы предваряем выдержками из авторского предисловия к книге.

«В этой книге собрано (и дополнено) 129 «изобретений Дедала», опубликованных в разное время на «страничке Ариадны» в еженедельнике «New Scientist». Все изобретения современного Дедала не уступают по смелости выдумки восковым крыльям его античного предшественника: они оригинальны и остроумны и дают читателю богатую пищу для размышлений. Эти идеи лежат на грани между строгой реальностью и очевидной фантастикой.

...Изобретательская фантазия Дедала всегда отталкивается от научной реальности. И как это ни странно, примерно 17 % изобретений в том или ином виде впоследствии были восприняты всерьез, запатентованы, реализованы, а некоторые, как оказалось, были уже осуществлены прежде!... Для тех, кто захочет более внимательно рассмотреть научную подоплеку этих «изобретений», я добавил раздел «Из записной книжки Дедала», где приводятся кое-какие вычисления и разбирается научная сторона вопроса... Прочие замечания, включая и упоминания о реализованных проектах Дедала, объединены под рубрикой «Комментарий Дедала»...

Дэвид Джоунс
(Ньюкасл-апон-Тайн, май 1981 г.)»



Спасительная безликость

Фотохромные стекла, применяемые в солнцезащитных очках, обладают интересным свойством — они темнеют на свету. Под действием света хлористое серебро, введенное в состав стекла, разлагается, образуя непрозрачные зерна серебра. Эта реакция обратима — при низких уровнях освещенности стекло снова становится прозрачным; таким образом, это стекло автоматически регулирует свою прозрачность. В этой связи Дедал вспоминает основное правило маскировки: избегать контрастов. Многие животные, например, имеют темную спину и светлое брюхо, но, так как спина хорошо освещена, а брюхо остается в тени, их тональности практически сливаются. Фотохромные животные — лягушки и хамелеоны



приспособились еще лучше. Чтобы стать незаметными, они изменяют свою окраску. Но и они не способны варьировать окраску отдельных участков своего тела так, чтобы полностью слиться с окружающим фоном. Такой прием маскировки настолько эффективен, что природа, несомненно, им уже воспользовалась, — вполне возможно, что животным с таким камуфляжем до сих пор успешно удавалось избегать знакомства с человеком.

Дедал пытается перенести этот принцип на человеческое общество. Он давно задумывался над тем, почему когда-то столь пышное мужское платье в викторианскую эпоху стало весьма унылым и до наших дней остается таковым, по крайней мере в повседневной и деловой жизни. По мнению Дедала, это объясняется стремлением людей не привлекать к себе особого внимания со стороны: эксцентрично или броско одетый субъект как бы напрашивается на



неприятности. Так появились деловые костюмы и белые воротнички. Дедал же разрабатывает фотохромный костюм, не имеющий себе равных по неприметности. При ярком освещении он темнеет, уменьшая свою отражательную способность; когда же на него падает мало света, он светлеет. Благодаря этому такой костюм будет казаться абсолютно однотонным. Глаз человека особенно чувствителен к контрастам. Так что фотохромный костюм, совершенно лишенный контрастности, будет практически незаметен, и его обладатель не привлечет к себе ничего внимания. Фотохромные крем для рук и лосьон для лица доведут камуфляж до совершенства. Дедал предвидит огромный спрос на свою фотохромную продукцию.

(New Scientist, August 16, 1973)

Комментарий Дедала

В фотохромном стекле происходит классическая фотографическая реакция: $\text{AgCl} \xrightarrow{h\nu} \text{Ag} + \text{Cl}$. Атом хлора, освобождающийся в фотографической эмульсии, тут же необратимо связывается с желатином, а атом серебра становится центром проявления. В стекле хлор не может отойти далеко от атома серебра, и поэтому реакция обратима. Равновесие реакции зависит от освещенности стекла.

Быстродействие галогеносеребряных стекол для солнцезащитных очков измеряется минутами. При такой скорости реакции изменение окраски фотохромного костюма не успевало бы за изменениями освещенности, возникающими при движении. Но в более совершенных фотохромных системах — например, в стеклах очков для защиты глаз от вспышки, сопровождающей ядерный взрыв, — продолжительность реакции уменьшается до микросекунд. Системы с подобными свойствами прекрасно подошли бы для фотохромного костюма.

Роль светотени в зрительном восприятии подробно обсуждалась Дж. Бекон (Scientific American, Aug. 1975, p. 62); объект, не подчиняющийся обычным законам распределения света и тени, очень трудно, а порой невозможно распознать, как бы пристально мы ни разглядывали его. Глаз не в состоянии определить фактуру поверхности и форму без привычных переходов светотени. Представьте себе теперь комнату, стены, пол и потолок которой оклеены фотохромными обоями. Каким бы ярким ни было освещение, любой фотохромный объект, помещенный в эту комнату, окажется невидимым, поскольку между ним и фоном не будет контраста. Какой простор для иллюзионистов!



Наша минута

Новые приближения числа π

Читателям «Кванта» хорошо известно, что задача о квадратуре круга, т. е. построении квадрата, равновеликого данному кругу, неразрешима посредством циркуля и линейки. Это означает, что, располагая единичным отрезком, невозможно построить отрезок длиной π . Поэтому задача построения отрезков, длины которых хорошо приближают число $\pi \approx 3,1415926\dots$, давно интересует математиков.

Вот несколько классических приближений π :

$22/7 = 3,1428571\dots$ (Архимед, 287—212 гг. до н. э.);

$355/113 = 3,1415929\dots$ (А. Меций, Голландия, 1543—1620);

$$\sqrt{\frac{40}{3}} - 2\sqrt{3} = 3,1415333\dots$$

(А. Коханский, Польша, 1631—1700);

$$\sqrt{9 - 3\sqrt{6}} + \sqrt{1 + \sqrt{6}} = 3,1423991\dots \text{ (Л. Маскерони, Италия, 1750—1800).}$$

Оцените сами точность этих приближений и подумайте, как построить соответствующие отрезки циркулем и линейкой.

Вот несколько приближений π , найденных автором:

$$\sqrt{145} - 8,9 = 3,1415945\dots;$$

$$5\sqrt{2}/2 - 13/33 = 3,1415945\dots;$$

$$\sqrt{7\sqrt{2}} = 3,1463462\dots;$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3,1462643\dots;$$

$$10\sqrt{2} - 11 = 3,1421356\dots$$

А следующие два приближения π имеют «рекордную» точность:

$$\sqrt[4]{399550} - 22 = 3,1415926\dots$$

$$\sqrt[4]{97 + 9/22} = 3,1415926\dots$$

Несмотря на «ужасающий» вид, соответствующие отрезки нетрудно построить. Подсказка к построению первого отрезка — в равенстве:

$$\sqrt[4]{399550} = \sqrt{5} \sqrt{\sqrt{11^2 + 1^2} \sqrt{11^2 + 3^2 + 1^2}}$$

Л. П. Куницын

Задачник „Квант“

Задачи

M1166 — M1170, Ф1173 — Ф1177

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 августа 1989 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6 — 89» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1166» или «Ф1173». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи M1166—M1170 предлагались осенью прошлого года на математической олимпиаде «Турнир городов».

M1166. Докажите неравенство $a^2pq + b^2qr + c^2rp \leq 0$, где a, b, c — длины сторон треугольника, $p + q + r = 0$.

Я. Ш. Мустафеев, ученик 10 кл., Баку

M1167. Сколько существует перестановок чисел $1, 2, \dots, n$, в которых для любого числа i , стоящего не на первом месте, хотя бы одно из чисел $i-1$ и $i+1$ находится левее i ?

А. В. Анджанс

M1168* В стране 1989 городов и 4000 дорог (каждая дорога соединяет два города). Докажите, что можно выбрать кольцевой маршрут, проходящий не более чем через 20 городов.

А. А. Разборов

M1169. Пусть M — точка, лежащая внутри прямоугольника $ABCD$, S — его площадь. Докажите неравенство

$$S \leq AM \cdot CM + BM \cdot DM.$$

И. Я. Гольдштейн

M1170. Рассмотрим разбиения данного выпуклого n -угольника на треугольники непересекающимися диагоналями. Назовем перестройкой следующее преобразование: вместо некоторой диагонали BC , служащей общей стороной двух треугольников ABC и BCD разбиения, проводится диагональ AD (рис. 1). Обозначим через $P(n)$ наименьшее число перестроек, за которое можно любое разбиение перевести в любое другое. Докажите оценки:

а) $P(n) \geq n - 3$,

б) $P(n) \leq 2n - 7$,

в)* $P(n) \leq 2n - 10$ при $n \geq 13$.

Д. В. Фомин

Ф1173. Длинный игрушечный поезд, составленный из большого числа вагонов, едет с постоянной скоростью по горизонтальным рельсам, а потом въезжает в «мертвую петлю» (рис. 2). Длина поезда L , радиус петли R (R существенно больше размера вагона, но $L > 2\pi R$). При какой начальной скорости поезд преодолет препятствие так, что во время движения ни один вагон не перестанет давить на рельсы?

А. И. Буздин

Ф1174. В кубическом сосуде объемом $V = 1$ л находится $m = 0,01$ г гелия при температуре $T = 300$ К. Понаблюдаем за одной из молекул. Сколько раз она ударится о верхнюю стенку сосуда за время $t = 1$ мин?

А. Р. Зильберман

Ф1175. НЛО пролетает над Землей с постоянной очень большой скоростью v . Какую скорость зафиксируют наземные приборы станции слежения в тот момент,

Задачник „Квант“

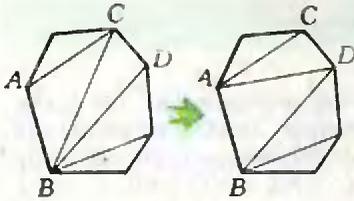


Рис. 1.

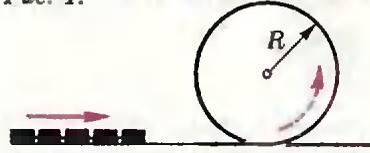


Рис. 2.

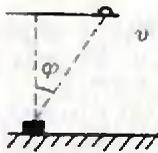


Рис. 3.

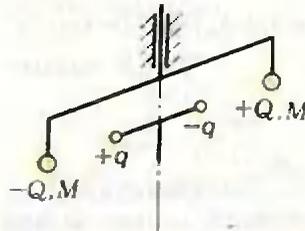


Рис. 4.

когда направление на объект будет составлять угол φ с вертикалью (рис. 3)?

С. С. Кротов

Ф1176. На невесомом коромысле длиной $2L$, которое может вращаться без трения вокруг вертикальной оси, закреплены заряды $+Q$ и $-Q$ массой M каждый. Под коромыслом на продолжении оси вращения расположен маленький диполь — заряды $+q$ и $-q$ на расстоянии $2a$ друг от друга ($a \ll L$). В начальный момент коромысло находится в состоянии устойчивого равновесия (рис. 4).

а) Диполь приводят во вращение с угловой скоростью ω . При каких ω коромысло будет «сопровождать» вращение диполя?

б) Диполь неподвижен. Найти период малых колебаний коромысла.

А. В. Андрианов

Ф1177. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью $L=1$ Гн с сопротивлением $R=1$ Ом и конденсатора емкостью $C=1$ мкФ. Конденсатор неидеален — сопротивление его изоляции R_x конечно. При какой величине R_x в катушке выделится в виде тепла $1/3$ начальной энергии контура?

З. А. Рафаилов

Решения задач

М1141 — М1145, Ф1153 — Ф1157

М1141. Трапеция описана около окружности. Докажите, что хотя бы одна из ее диагоналей образует с основанием угол не более 45° .

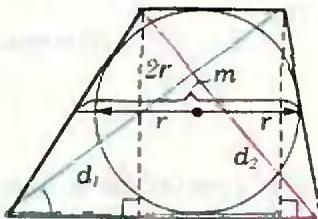


Рис. 1.

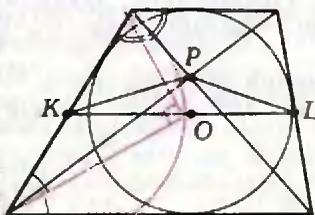


Рис. 2.

Как и другие несложные геометрические задачи, эта задача допускает много решений. Приведем три из них.

В первых двух используется неравенство $m \geq 2r$, где m — средняя линия трапеции, а r — радиус вписанной окружности, т. е. $2r$ — высота трапеции (рис. 1).

Если диагональ составляет с основанием угол больше 45° , то ее проекция на основание меньше высоты $2r$ трапеции. Сумма проекций обеих диагоналей, очевидно, равна сумме оснований, т. е. $2m$. Поэтому если утверждение задачи не верно, то $2m < 2r + 2r = 4r$, что противоречит неравенству $m \geq 2r$.

Другое рассуждение: площадь трапеции, равная $2rm$, не превосходит $d_1 d_2 / 2$, где d_1 и d_2 — ее диагонали. Если $d_1 \geq d_2$, то $d_1^2 / 2 \geq d_1 d_2 / 2 \geq 2rm \geq 4r^2$. Следовательно, $2r/d_1 \leq \sqrt{2}/2$, а значит, диагональ d_1 составляет с основанием угол не более 45° (см. рис. 1).

В третьем решении мы используем то, что боковые стороны трапеции видны из центра O ее вписанной окружности под прямым углом (так как O — точка пересечения биссектрис углов трапеции — рис. 2). Если бы утверждение задачи было неверным, то основания трапеции были бы видны из точки P пересечения диагоналей под острым углом, а боковые стороны — под тупым. Тогда точка P лежала бы внутри окружностей, построенных на боковых сторонах как на диаметрах,

Задачник „Кванта“

следовательно, выполнялись бы неравенства $PK < OK$, $PL < OL$, где K и L — центры этих окружностей, т. е. середины сторон. Но это противоречило бы неравенству треугольника $PK + PL > KL = KO + OL$.

Н. Б. Васильев,
В. Н. Дубровский, Н. М. Седракин

M1142. Таблица $m \times n$ заполнена mn числами так, что в каждой строке и в каждом столбце эти числа составляют арифметическую прогрессию. Сумма четырех чисел, стоящих в углах таблицы, равна s . Чему равна сумма всех чисел в таблице?

Ответ: $smn/4$.

Пусть a_1, a_2, \dots, a_m — числа в верхней строке, b_1, b_2, \dots, b_m — в нижней. Тогда $a_1 + a_2 + \dots + a_m = (a_1 + a_m)m/2$, $b_1 + b_2 + \dots + b_m = (b_1 + b_m)m/2$.

Суммы чисел в столбцах равны $(a_1 + b_1)n/2$, $(a_2 + b_2)n/2, \dots, (a_m + b_m)n/2$. Сложив эти суммы, мы получим сумму всех чисел в таблице:

$$(a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots + a_m + b_m)n/2 = (a_1 + a_m + b_1 + b_m)mn/4 = smn/4.$$

Н. Б. Васильев

M1143. Масса каждой из 101 гири, расположенных по окружности, — натуральное число, а их общая масса равна 300 г. Докажите, что из этого набора можно выбрать одну или несколько гирь, расположенных подряд, с общей массой 200 г.

Отметим на окружности 300 точек, разбивающих ее на 300 равных частей (по $1^\circ 12'$), и каждой гирьке массой m поставим в соответствие дугу из m таких частей; концы этих дуг (расположенных по окружности в том же порядке, что и гири) назовем красными точками, остальные $300 - 101 = 199$ точек — черными. Рассмотрим все равносторонние треугольники, вписанные в окружность, у которых одна из вершин — красная. Если бы у каждого из них две другие вершины оказались черными, то всего черных точек было бы не менее $2 \cdot 101 = 202$. Поэтому найдется треугольник, у которого две вершины — красные. Большая дуга (в 240°) с концами в этих красных вершинах соответствует гирькам, в сумме имеющим массу 200 г, меньшая (в 120°) — гирькам, имеющим массу 100 г.

В. В. Произволов

M1144. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n — неотрицательные числа. Какое число больше:

$$\sqrt[1988]{a_1^{1988} + a_2^{1988} + \dots + a_n^{1988}}$$

или

$$\sqrt[1989]{a_1^{1989} + a_2^{1989} + \dots + a_n^{1989}}?$$

Ответ: Первое число больше, если хотя бы два из чисел a_i не равны 0 (что мы и будем предполагать в дальнейшем).

Докажем сразу более общее утверждение: функция $f(\alpha) = (a_1^\alpha + \dots + a_n^\alpha)^{1/\alpha}$, монотонно убывает при $\alpha > 0$, т. е. $f(\alpha) > f(\beta)$ при $0 < \alpha < \beta$.

Не ограничивая общности, можно считать, что a_1 — наибольшее из чисел a_i , $a_1 > 0$. Положим $x_i = a_i/a_1$, тогда при $\alpha < \beta$

$$f(\alpha) = a_1(1 + x_2^\alpha + \dots + x_n^\alpha)^{1/\alpha} > a_1(1 + x_2^\beta + \dots + x_n^\beta)^{1/\beta} = f(\beta),$$

Задачник „Кванта“

поскольку $0 \leq x_i \leq 1$ при всех i и суммы в скобках больше 1.

Интересно, что часто рассматриваемая величина $((a_1^a + \dots + a_n^a)/n)^{1/a}$ — так называемое степенное среднее чисел a_1, \dots, a_n степени a — возрастает с ростом a .

А. И. Шехорский

М1145*. Из точки P проведены две касательные PB и PC к окружности, причем $\angle BPC > 90^\circ$. На меньшей дуге BC взята точка A . Докажите, что площадь треугольника, отсекаемого от угла BPC касательной к окружности в точке A , не превосходит площади треугольника ABC .

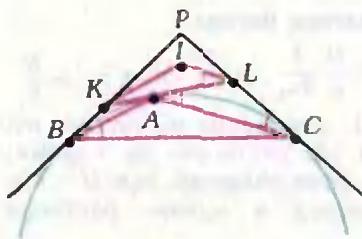


Рис. 1.

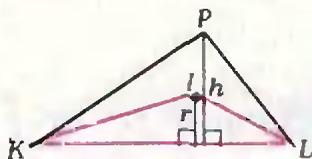


Рис. 2.

Обозначим отсекаемый от угла BPC треугольник через KPL (рис. 1), центр его вписанной окружности через I . Треугольники ABC и ILK подобны. Действительно, каждый из углов ABC , CAL и ACL равен половине угловой величины дуги AC (первый угол вписан в окружность и опирается на эту дугу, два других образованы хордой, стягивающей эту дугу и касательными в ее концах). Поэтому

$$2\angle ILK = \angle PLK = \angle LAC + \angle LCA = 2\angle ABC,$$

т. е. $\angle ILK = \angle ABC$. Аналогично, $\angle IKL = \angle ACB$. Коэффициент подобия треугольников ILK и ABC равен KL/BC , следовательно, отношение их площадей равно $S_{ILK}/S_{ABC} = KL^2/BC^2$.

Пусть, далее, p — полупериметр, S — площадь, r — радиус вписанной окружности и h — высота, опущенная из вершины P треугольника PKL (рис. 2). Тогда

$$\frac{S_{PKL}}{S_{ILK}} = \frac{h}{r} = \frac{2S}{KL} \cdot \frac{p}{S} = \frac{2p}{KL} = \frac{2BP}{KL},$$

поскольку $BP = CP$ и $BP + CP = AK + KP + PL + LA = 2p$ (мы пользуемся здесь равенством касательных к окружности, проведенных из точек P, K, L). Итак, $S_{PKL}/S_{ABC} = 2BP \cdot KL/BC^2$. Остается доказать, что последнее отношение меньше 1.

По неравенству треугольника $2KL < KL + KP + PL = 2p = 2BP$, т. е. $2BP \cdot KL < 2BP^2$. Но в случае, когда $\angle BPC > 90^\circ$, имеем $2BP^2 < BC^2$, т. е. $2BP \cdot KL/BC^2 < 2BP^2/BC^2 < 1$, что и требовалось доказать.

Эту задачу можно решать и с помощью тригонометрии. Если α, β, γ — углы при вершинах A, B, C треугольника ABC , то $BC = KL \cos \beta \cos \gamma$; нужное неравенство приводится к виду $2 \cos(\pi - \alpha) \cos \beta \cos \gamma > 1$ и вытекает из того, что $\pi - \alpha = \beta + \gamma < \pi/4$.

В. Ю. Протасов

Ф1153. Жидкий раствор бетона налили в кузов самосвала доверху. Оценить, какая доля раствора останется в кузове после резкого торможения. Предполагается, что вы хорошо представляете явление, мо-

Как известно, свободная поверхность жидкостей, в том числе и раствора бетона, располагается в поле тяжести перпендикулярно линии отвеса. Если же отвес движется горизонтально с ускорением a , линия отвеса отклоняется от вертикали на угол α такой, что $\operatorname{tg} \alpha = a/g$. Соответственно и поверхность жидкости, оставаясь перпендикулярной линии отвеса, будет наклонена к горизонту под тем же углом α .

жете сами задать необходимые для решения величины, выбрать достаточно разумные их числовые значения и получить числовой результат.

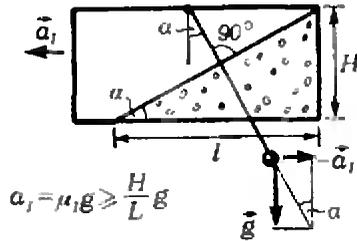


Рис. 1.

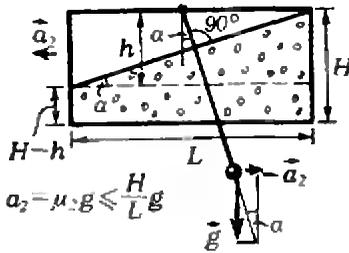


Рис. 2.

Задача «Кванта»

При резком торможении колеса автомобиля не катятся, а скользят (только так можно быстро затормозить). Тогда из второго закона Ньютона следует

$$ma = F_{\text{тр}} = \mu mg, \quad \text{т. е. } a = \mu g,$$

где μ — коэффициент трения скольжения.

Возможны два случая, изображенные на рисунках 1 и 2 соответственно. Первый случай: ускорение a_1 таково, что часть дна открывается. При оценке будем считать, что кузов прямоугольный. Тогда масса бетона в кузове до торможения

$$M = \rho L H d,$$

где ρ — плотность раствора, а d , H и L — ширина, высота и длина кузова. Как видно из рисунка 1, $H/l = \text{tg } \alpha = a_1/g$, откуда $l = Hg/a_1 \leq L$, т. е.

$$a_1 = \mu_1 g \geq \frac{H}{L} g.$$

Масса оставшегося в кузове бетона

$$m_1 = \rho l \frac{H}{2} d = \rho \frac{H^2 d}{2a_1} g.$$

Таким образом, доля оставшегося бетона

$$\eta_1 = \frac{m_1}{M} = \frac{\rho H^2 d g}{2a_1 \rho L H d} = \frac{H}{L} \frac{g}{2a_1} = \frac{H}{L} \frac{1}{2\mu_1} \quad \text{при } \mu_1 \geq \frac{H}{L}.$$

Второй случай (см. рис. 2): ускорение a_2 таково, что задний борт освобождается от раствора на глубину $h = L \text{tg } \alpha = La_2/g$, а глубина слоя раствора там $H - h = H - La_2/g$. Масса оставшегося в кузове раствора

$$m_2 = \rho L \left(H - L \frac{a_2}{2g} \right) d,$$

и доля оставшегося раствора

$$\begin{aligned} \eta_2 = \frac{m_2}{M} &= \frac{\rho L (H - La_2/(2g)) d}{\rho L H d} = \\ &= 1 - \frac{L}{H} \frac{a_2}{2g} = 1 - \frac{L}{H} \frac{\mu_2}{2} \quad \text{при } \mu_2 < \frac{H}{L}. \end{aligned}$$

Сделаем численные оценки. Положим $H = 1$ м, $L = 5$ м, т. е. $H/L = 0,2$. Тогда при $\mu_1 \geq H/L = 0,2$, например при $\mu_1 = 0,5$, имеем

$$\eta_1 = \frac{H}{L} \frac{1}{2\mu_1} = \frac{1}{5} = 20 \%.$$

При $\mu_2 < H/L = 0,2$, например при $\mu_2 = 0,1$, имеем

$$\eta_2 = 1 - \frac{L}{H} \frac{\mu_2}{2} = \frac{3}{4} = 75 \%.$$

Если же торможение не резкое, т. е. колеса катятся, тогда торможение обусловлено трением качения. В этом случае $\mu \approx 0,02$ и

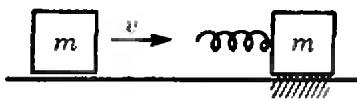
$$\eta_1 = 1 - \frac{L}{H} \frac{\mu}{2} \approx \frac{19}{20} \approx 95 \%.$$

Итак, в любом случае доверху кузовов наполнять нельзя: потери неизбежны.

Г. В. Меледин

Задачи „Кванта“

Ф1154. На гладком горизонтальном столе лежат два одинаковых кубика массой m каждый. Один из кубиков приклеен к столу (см. рисунок). Кубик отрывается от стола, если к нему приложить горизонтальную силу F . Между кубиками имеется невесомая свободная пружина жесткостью k . Незакрепленному кубику сообщили скорость v . С какими скоростями разлетятся кубики после столкновения?



Обозначим скорости кубиков после столкновения через v_1 и v_2 . Из закона сохранения энергии имеем

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}. \quad (1)$$

Сразу после отрыва второго кубика от стола система двух кубиков (между которыми находится невесомая пружина) становится замкнутой. Запишем для нее закон сохранения импульса. Обозначим через u скорость первого кубика непосредственно после отрыва от стола второго. Тогда получаем

$$mu = mv_2 - mv_1. \quad (2)$$

Скорость u найдем из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{kx^2}{2}, \quad (3)$$

где $x = F/k$ — величина сжатия пружины в момент отрыва.

Решая систему уравнений (1)–(3), находим

$$v_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{v^2 + F^2/(km)} - \sqrt{v^2 - F^2/(km)}),$$

$$v_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{v^2 + F^2/(km)} + \sqrt{v^2 - F^2/(km)}).$$

Интересно рассмотреть некоторые частные случаи.

Пусть, например, $mv^2/2 < F^2/(2k)$. Тогда максимального сжатия пружины будет недостаточно для отрыва второго кубика от стола и первый кубик после столкновения будет двигаться влево с первоначальной величиной скорости v .

Если $mv^2/2 = F^2/(2k)$, то после разлета кубики будут двигаться в противоположные стороны с одинаковыми по величине скоростями, равными $v/\sqrt{2}$.

Если же $mv^2/2 \gg F^2/(2k)$ (случай очень жесткой пружины, когда $k \rightarrow \infty$), то $v_1 \rightarrow 0$, а $v_2 \rightarrow v$.

Г. В. Федотович

Ф1155. Тяжелый поршень массой M может свободно перемещаться внутри вертикального теплоизолированного цилиндра сечением S , верхний конец которого закрыт, а нижний открыт в атмосферу (см. рисунок). Внутри цилиндра имеется горизонтальная перегородка с маленьким отверстием, отсекающая от атмосферы один моль воздуха, занимающий объем V и имеющий атмосферное давление p_a . Поршень, который вначале прикажет снизу к перегородке, от-

Если действующая на поршень сила тяжести Mg превышает действующую на него снизу силу атмосферного давления $p_a S$, то поршень, очевидно, выпадет из трубы, какой бы длинной она не была.

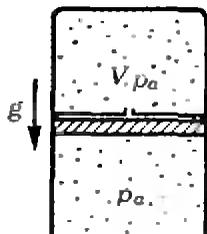
Если же $Mg < p_a S$, то происходит следующее. Проникающий через отверстие воздух создает в отсеке между перегородкой цилиндра и поршнем давление. Когда оно достигнет величины p такой, что

$$Mg + pS = p_a S,$$

поршень начинает двигаться вниз. По мере его движения в этот отсек попадают дополнительные порции воздуха, поддерживая там постоянное давление p . Поскольку отверстие маленькое, поршень движется медленно. Он остановится, когда давление над перегородкой упадет до величины p .

При смещении поршня на расстояние x газ, находящийся в цилиндре, совершает работу $A = pSx$,

пускают. Принимая, что внутренняя энергия газа равна cT , найти, на сколько опустится поршень.



Задача «Кванта»

а внутренняя энергия его уменьшается. Будем считать, что перегородка между образовавшимися в цилиндре отсеками не препятствует теплообмену между ними, так что температуры воздуха в них все время одинаковы. Обозначив температуру воздуха в начальный момент через T_0 , а в момент остановки через T , получаем

$$cT_0 = cT + A.$$

Запишем также уравнения состояния газа для этих моментов:

$$\begin{aligned} p_a V &= RT_0, \\ p(V + Sx) &= RT. \end{aligned}$$

Полученных уравнений достаточно для определения величины x :

$$x = \frac{V}{S} \frac{c}{c+R} \frac{Mg}{p_a S - Mg} \quad \text{при} \quad Mg < p_a S.$$

Г. Л. Коткин

Ф1156. Два одинаковых электромагнита L_1 и L_2 включены последовательно в цепь постоянного тока (рис. 1). С помощью ключа K_1 параллельно одному из них может в непроводящем направлении подключаться диод D . При замкнутом ключе K_2 к электромагнитам притянута железная пластинка. Если ключ K_1 разомкнут, то при размыкании K_2 пластинка отрывается от обоих магнитов одновременно и падает, сохраняя горизонтальное положение. Если ключ K_1 замкнут, то при размыкании K_2 пластинка вначале отрывается от магнита L_1 , а потом от L_2 , что приводит к ее вращению. Объяснить раз-

В первом случае, когда ключ K_1 разомкнут, при размыкании ключа K_2 ток в обоих электромагнитах прекращается одновременно, и так же одновременно происходит «отпускание» обоих концов железной пластинки.

Рассмотрим теперь второй случай, когда ключ K_1 замкнут. При замкнутом ключе K_2 (рис. 2) через последовательно включенные обмотки электромагнитов протекают одинаковые токи I_0 , так как через включенный в непроводящем направлении диод D ток не течет. Разомкнем ключ K_2 (рис. 3). Ток через электромагнит L_1 прекращается практически мгновенно, так как цепь для него разомкнута. Ток же через электромагнит L_2 в первый момент вообще не изменяется. Это происходит из-за того, что ЭДС самоиндукции, возникающая в обмотке L_2 , оказывается приложенной к диоду D в проводящем направлении, и через него начинает протекать ток I_0 . В дальнейшем ток через L_2 постепенно затухает, в соответствии с законами Фарадея и Ома:

$$-L_2 \frac{dI}{dt} = IR, \quad I = I_0 e^{-Rt/L_2},$$

где R включает в себя сопротивление диода D в про-

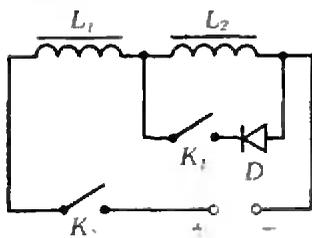


Рис. 1.

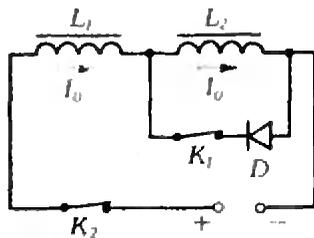


Рис. 2.

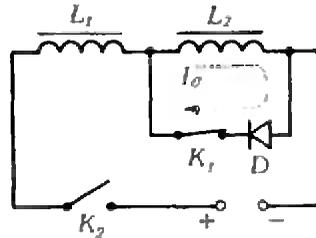


Рис. 3.

личие в поведении пластинок в первом и втором случаях.

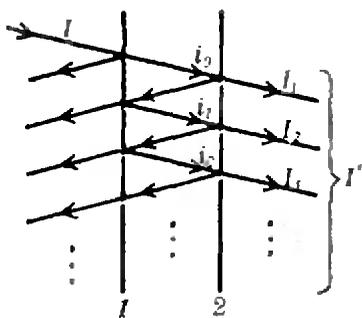
Задача „Кванта“

водящем направлении и обмотки L_2 . Видно, что чем меньше R , тем дольше затухает ток в L_2 .

Таким образом, при замкнутом ключе K_1 ток в L_2 затухает медленнее, чем в L_1 , и электромагнит L_2 дольше удерживает свой конец пластины.

В. Б. Голубев

Ф1157. Имеются два полупрозрачных зеркала, каждое из которых, как показывают измерения, пропускает приблизительно $1/5$ часть светового потока, а остальной свет отражает. Если на пути параллельного пучка света установить оба зеркала так, чтобы их плоскости были перпендикулярны пучку, то, казалось бы, они должны пропускать $1/25$ часть падающего потока света, тогда как на самом деле свет ослабляется не в 25 раз, а заметно меньше (примерно в 10 раз). Объяснить явление.



Явление объясняется тем, что лучи света, отраженные вторым зеркалом, снова возвращаются на первое зеркало, частично отражаются от него и, попадая на второе, увеличивают интенсивность прошедшего пучка.

Пусть I — интенсивность исходного светового пучка (см. рисунок; падающий световой пучок для наглядности изображен наклонным). Тогда интенсивность света, прошедшего через первое зеркало, будет равна $i_0 = I/k$, где k — коэффициент ослабления света зеркалом ($k = 5$ по условию задачи). При последовательных отражениях интенсивность «захваченного» между зеркалами света постепенно падает из-за частичной прозрачности зеркал, и через достаточно большое число отражений наружу выйдет практически весь «захваченный» свет, причем почти поровну вправо и влево. Таким образом, полная интенсивность прошедшего света будет равна

$$I' \approx \frac{i_0}{2} = \frac{I}{2k} = \frac{I}{10}.$$

Задача допускает и точное решение. Запишем, как меняется интенсивность «захваченного» между зеркалами света при последовательных отражениях:

$$i_1 = i_0 \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2, \quad i_2 = i_1 \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 = i_0 \left(1 - \frac{1}{k}\right)^4, \dots$$

При каждом падении на зеркало 2 свет частично выходит вправо:

$$I_1 = \frac{i_0}{k}, \quad I_2 = \frac{i_1}{k}, \quad I_3 = \frac{i_2}{k}, \dots$$

Полная интенсивность прошедшего света

$$\begin{aligned} I' &= I_1 + I_2 + I_3 + \dots = \frac{1}{k} (i_0 + i_1 + i_2 + \dots) = \\ &= \frac{i_0}{k} \left(1 + \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{k}\right)^4 + \dots\right) \end{aligned}$$

представляет собой сумму бесконечной убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = (1 - 1/k)^2$, поэтому

$$I' = \frac{i_0}{k} \frac{1}{1 - q} = \frac{i_0}{k} \frac{k^2}{k^2 - (k-1)^2} = \frac{i_0 k}{2k-1} = \frac{I}{2k-1} = \frac{I}{9}.$$

При $k = 5$ точное решение всего на 10% отличается от приближенного.

В. Б. Голубев

Линейные неравенства и задача M1085

В задаче M1085 «Задачкика «Кванта» речь шла о сплетениях прямых на плоскости. Некоторые из сплетений являются проекцией системы непересекающихся прямых в пространстве (рис. 1, а), а некоторые отвечают «невозможным» объектам (рис. 1, б). Мы получили письмо от канадского математика Уолтера Уайтли, которому в ходе научной работы приходилось изучать подобные сплетения. Его подход основан на применении линейных неравенств.

Будем считать, что сплетение расположено в горизонтальной (x, y) -плоскости, причем ни одна из прямых не проходит через начало координат. Ось OZ направим вертикально вверх. Как задать положение i -й прямой в пространстве? Ее проекция на (x, y) -плоскость уже задана, поэтому прямая лежит в вертикальной плоскости, проходящей через эту проекцию. Чтобы определить положение прямой в пространстве, достаточно задать еще одну плоскость, в которой она лежит — например, плоскость, проходящую через начало координат. Эта плоскость задается уравнением $z = px + qy$. Итак, прямые в пространстве заданы, если для каждой прямой сплетения выбраны свои коэффициенты p_i и q_i .

Пусть (x_{ij}, y_{ij}) — координаты точки пересечения i -й и j -й прямой сплетения. Тогда высота точки i -й прямой в пространстве,

лежащей над точкой (x_{ij}, y_{ij}) , равна $z = p_i x_{ij} + q_i y_{ij}$, а для соответствующей точки j -й прямой — $z = p_j x_{ij} + q_j y_{ij}$. Если пересечение такое, как на рисунке 2, а, то

$$p_i x_{ij} + q_i x_{ij} > p_j x_{ij} + q_j x_{ij}, \quad (1)$$

а если такое, как на рисунке 2, б, то неравенство противоположное:

$$p_i x_{ij} + q_i x_{ij} < p_j x_{ij} + q_j x_{ij}. \quad (2)$$

Совокупность неравенств (1) и (2) для всех пар индексов (i, j) образует систему линейных неравенств с неизвестными $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$. Если эта

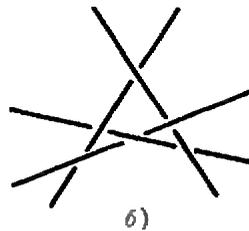
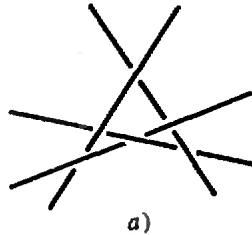


Рис. 1.

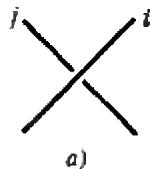


Рис. 2.

система имеет решение, то сплетение является проекцией пространственных прямых, а если система несовместна, то сплетение описывает «невозможный» объект.

У. Уайтли предлагает и другой — физический — подход к этой задаче. Представим себе, что прямые сплетения сделаны из жесткой проволоки, которую можно слегка изгибать. Тогда по любой картинке можно изготовить проволочное сплетение, «почти» лежащее в горизонтальной плоскости.

Обозначим через f_{ij} величину силы упругости, действующей на j -ю проволочную прямую со стороны i -й. Эти силы приложены в точках касания прямых и направлены вдоль вертикальной оси Oz . Для такого пересечения, как на рисунке 2, а,

$$f_{ij} < 0 \quad (3)$$

(сила направлена вниз), а для такого, как на рисунке 2, б,

$$f_{ij} > 0. \quad (4)$$

Кроме того, сила действия равна силе противодействия:

$$f_{ij} = -f_{ji}. \quad (5)$$

Каждая прямая проволочного сплетения будет находиться в равновесии. Это означает, что суммарная сила, действующая на i -ю прямую, равна нулю:

$$f_{1i} + f_{2i} + \dots + f_{ni} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

Равен нулю и суммарный момент сил, действующих на i -ю прямую, относительно осей Ox и Oy :

$$f_{1i} x_{1i} + f_{2i} x_{2i} + \dots + f_{ni} x_{ni} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

$$f_{1i} y_{1i} + f_{2i} y_{2i} + \dots + f_{ni} y_{ni} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

(Окончание см. на с. 60)

„Квант“ для младших школьников

Задачи

1. В равенстве $101-102=1$ передвиньте одну цифру так, чтобы оно стало верным.

2. Судно «Альфа» пришвартовалось к причалу раньше, чем судно «Квант». Сможет ли оно и отплыть раньше, если при этом не снимать с тумбы швартовочный канат «Кванта» (см. рисунок)?

3. Дедушка Сулейман на 100 лет старше своей праправнучки Зульфии. В этом году Зульфия обнаружила, что произведение ее возраста и возраста дедушки Сулеймана равняется 1989. Сколько ей лет?

4. Четыре неформальных молодежных объединения «Зеленый фронт», «Эко», «Красный патруль» и «Искатели истины» решили объединиться. На объединительной конференции присутствовало поровну делегатов от всех четырех объединений.

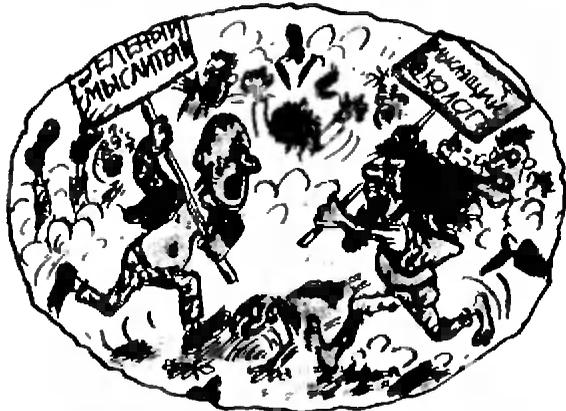
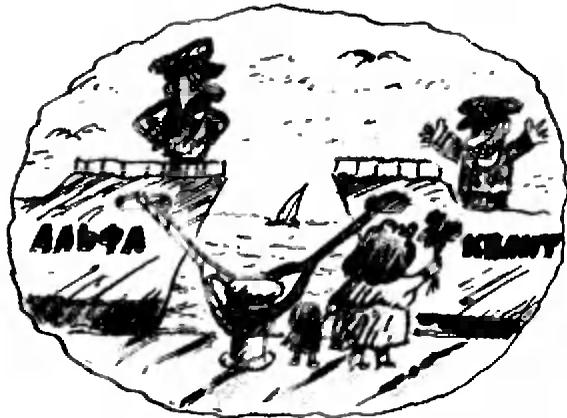
Разногласия возникли при выборе названия нового объединения. Для голосования были отобраны два названия: «Зеленый мыслитель» и «Мыслящий эколог».

Известно, что все делегаты от «Красного патруля» хотят голосовать за одно и то же название, а в остальных делегациях единства нет. Среди делегатов «Зеленого фронта» столько же хотят голосовать за первое название, сколько делегатов от «Эко» — за второе. Среди приверженцев второго названия одну треть составляют делегаты «Искателей истины».

Какое название будет выбрано?

5. Квадратный лист бумаги разрезали на 6 кусков в форме выпуклых многоугольников. Пять кусков затерялись, остался один кусок в форме правильного восьмиугольника. Можно ли по одному этому восьмиугольнику восстановить исходный квадрат?

$$101-102=1$$



Эти задачи нам предложили: А. В. Корлюков, Н. П. Долбилин, А. П. Савин, В. В. Произволов.

Калейдоскоп "Кванта"



...надежда получить электричество при помощи обыкновенного магнетизма в разные времена побуждала меня экспериментально изучить индуктивное действие электрических токов.

М. Фарадей

А так ли хорошо знакома вам

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

?

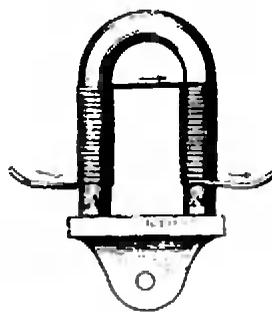


Всю свою жизнь Фарадей посвящал доказательству того, что ни один происходящий в природе электрический или магнитный процесс не протекает изолированно. Глубокая вера Фарадея во взаимосвязь всех сил природы привела его после многолетних неудач к уникальному открытию.

Новый эффект, как это часто случается, обнаруживался затем во множестве внешне различных явлений, объединенных, однако одним качественным выводом: переменные магнитные поля возбуждают поля электрические. Именно на этом принципе основано действие всех существующих электрических машин. Именно открытие Фарадея предоставило возможность преобразования механической энергии в электрическую, передачи энергии на расстояние и тем самым легло в фундамент современной технической цивилизации.

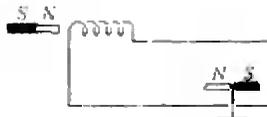
Работы Фарадея и его выдающихся современников позволили шаг за шагом создать единую картину электромагнетизма.

При изучении этого раздела физики вы не только объясните известные вам факты и наблюдения, но и сможете разобраться с электромагнитными явлениями как космических, так и микроскопических масштабов.



Вопросы и задачи

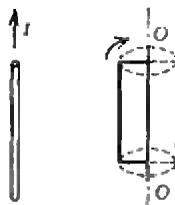
1. Как двигать магнит, чтобы повернуть



стрелку северным полюсом к наблюдателю?

2. Горизонтальная круглая рамка находится в магнитном поле, направленном вертикально вверх. Каким будет направление индукционного тока при наблюдении рамки сверху, если поле уменьшается со временем?

3. При каких положениях рамки, вращающейся с постоянной скоростью у прямоли-



нейного проводника с током, возникающая в ней ЭДС будет наибольшей? наименьшей?

4. В короткозамкнутую катушку сначала быстро, а затем медленно вдвигают магнит. Одинаковый ли заряд переносится при этом индукционным током? Одинаковое ли количество теплоты выделяется в катушке?

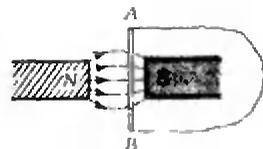
5. Как будет падать магнит в длинной медной трубке? Сопротивлением воздуха пренебречь.

6. Концы сложной вдвое проволоки присоединены к гальванометру. Почему стрелка прибора остается на нуле, когда проволока пересекает линии индукции магнитного поля?

7. На вертикально расположенной катушке лежит металлическая монета. Почему она нагревается, когда по катушке течет переменный ток, и остается холодной — при постоянном?

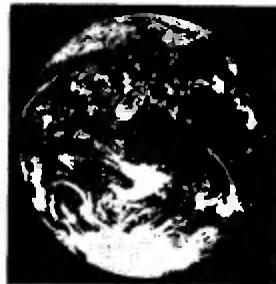
8. По прямолинейному проводнику течет ток высокой частоты. Как изменится сопротивление этого проводника, если ему придать форму соленоида?

9. Проводник АВ движется так, что по нему идет ток от точки А



к точке В. В какой из этих точек потенциал выше?

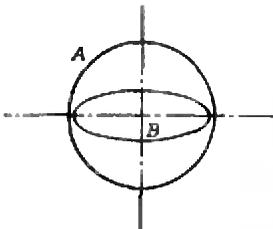
10. Два одинаковых самолета летят горизонтально с одинаковыми скоростями, один — вблизи экватора, другой — у полюса. У какого из них



возникает большая разность потенциалов на концах крыльев?

11. Ротор работающего электрогенератора испытывает торможение. Какова природа сил, вызывающих это торможение?

12. Два круговых проводника расположены перпендикулярно друг к другу. Возникнет ли



индукционный ток в проводнике А при изменениях тока в контуре В?

13. Кольцо из сверхпроводника находится вблизи постоянного магнита и пронизывается магнитным потоком Ф. Ток в кольце нет. Каким будет магнитный поток через это кольцо, если убрать магнит?



Микроопыт

Подвесьте подковообразный магнит на нитке над диском из алюминиевой фольги, способным вращаться вокруг оси, проходящей через его центр. Если раскрутить маг-

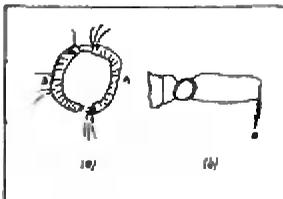


нит, то диск начнет вращаться. В какую сторону. Почему?



Любопытно, что...

...в новейших типах электрических машин отсутствуют какие-либо механические подвижные части. В так называемом МГД (магнитогидродинамическом) - генераторе вместо проводящего проводника между полюсами магнита движется плазма, образовавшаяся при сгорании нефти или газа. Носители заряда в плазме отклоняются магнитным полем к электродам, и во внешней цепи возникает ток.



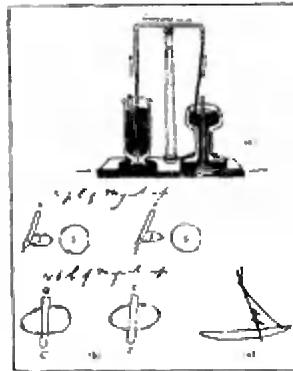
...Фарадей годами носил в жилетном кармане маленький по-

лосной магнит и проволочную катушку как постоянное напоминание о нерешенной проблеме порождения магнитным полем электрического тока.



...вихревые индукционные токи (токи Фуко) могут, как и трение, быть не только вредными, но и полезными. Всего лишь три примера; индукционные печи для нагрева и даже плавления металлов, «магнитное успокоение» в измерительных приборах и циркулярных пилах и... всем известный счетчик электрической энергии.

...самостоятельно придя к идее электромагнитного вращения, Фарадей с помощью ртутного контакта осуществил непрерывное вращение магнита вокруг проводника с током. Этот первый



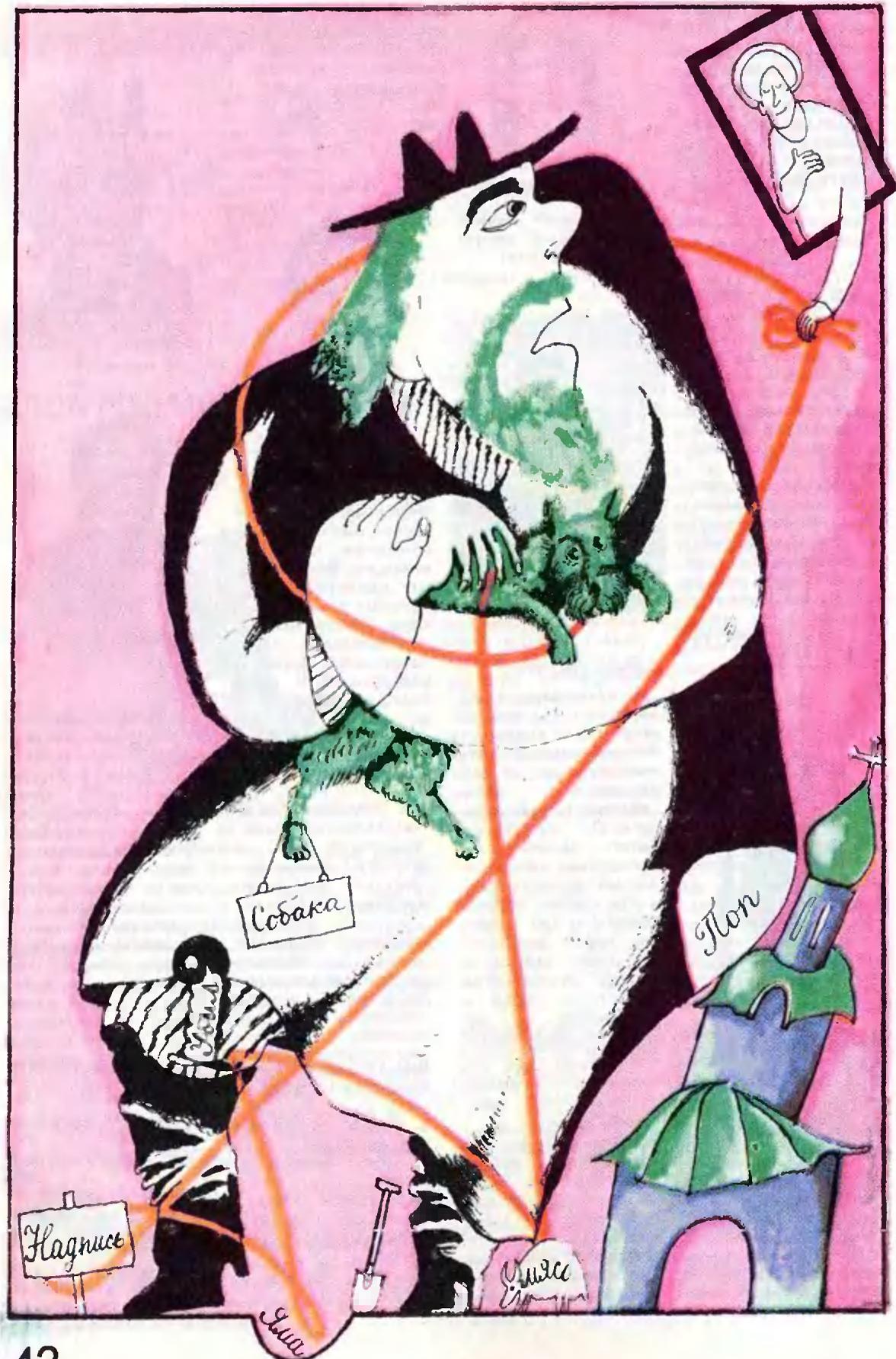
электродвигатель заработал в декабре 1821 года.



...правило Ленца, определяющее направление индукционного тока, было сформулировано почти сразу после открытия Фарадея — в 1833 году. Сегодня яркое проявление этого правила можно наблюдать в школьной лаборатории, поместив сверхпроводящую керамическую таблетку над магнитом: она будет «парить» над ним.

Что читать в «Кванте» об электромагнитной индукции (публикации последних лет)

1. «Электромагнитная индукция и принцип относительности» — 1987, № 11;
2. «Пути электромагнитной теории» — 1988, № 2;
3. «Правило Ленца» — 1988, № 5;
4. «Сверхпроводимость: история, современные представления, последние успехи» — 1988, № 6;
5. «Сила Лоренца и эффект Холла» — 1989, № 3.



У ПОПА БЫЛА СОБАКА...

Кандидат физико-математических наук
С. Л. ТАБАЧНИКОВ

В детстве почти всем приходилось слышать историю о том, как



*У попа была собака,
Он ее любил,
Она съела кусок мяса,
Он ее убил,
В землю закопал,
Надпись написал:
«У попа была собака...»*

Это немудреное стихотворение привлекательно тем, что с каждой строфой оно снова и снова возвращается к самому себе, подобно змее, заглатывающей собственный хвост. Я приведу несколько примеров таких предложений — математических и нематематических, — которые говорят что-то сами о себе.



В этой фразе двадцать восемь букв.



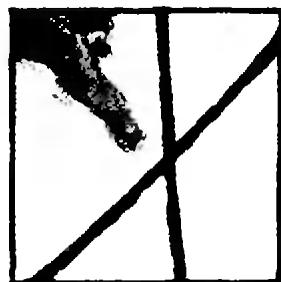
Эта фраза — типичный пример предложения, говорящего о себе самом. Пересчитайте буквы, и вы убедитесь, что это — чистая правда. Вот пример посложнее:



Это предложение содержит двенадцать слов, двадцать шесть слогов и семьдесят три буквы.

Не верите? Проверьте, что это тоже «честное» предложение.

Следующий пример я прочитал в одном из номеров американского журнала «Scientific American» за 1982 год (некоторые другие примеры — тоже оттуда^{*)}). Журнал тогда издавался только по-английски, и мне пришлось основательно потрудиться, прежде чем родился следующий «монстр».



В этой фразе два раза встречается слово «в», два раза встречается слово «этой», два раза встречается слово «фразе», четырнадцать раз встречается слово «встречается», четырнадцать раз встречается слово «слово», шесть раз встречается слово «раз», девять раз встречается слово «раза», семь раз встречается слово «два», три раза встречается слово «четырнадцать», три раза встречается слово «три», два раза встречается слово «девять», два раза встречается слово «семь», два раза встречается слово «шесть».

Уф! Прочитать это предложение совсем нелегко. И все же оно утверждает чистую правду. А вот задача для вас:



Придумайте такое десятизначное число, первая цифра которого показывает, сколько в этом числе единиц, вторая — сколько в нем двоек, третья — сколько троек, ..., десятая — сколько нулей.

Еще один вопрос.

В конце предисловия к переводу одной математической книги автор добавил такие замечания:

^{*} В то время математический раздел журнала редактировал профессор Даглас Хофстадтер, автор имевшей шумный успех книги «Гёдель, Эшер, Бах». К творчеству Д. Хофстадтера «Квант» надеется обратиться в ближайшем будущем.



Благодарю профессора NN за перевод этой книги.

Я также благодарю профессора NN за перевод последнего предложения.

Я также благодарю профессора NN за перевод последнего предложения.

Почему этот ряд благодарностей не нужно продолжать?

Может быть, вам доставит удовольствие еще одна выдержка из упоминавшегося выпуска «Scientific American»:

Вспоминаю случай на экзамене по истории. Доставшийся мне билет включал в себя следующее: «IV. Напишите вопрос, подходящий для выпускного экзамена по этому курсу, а затем ответьте на него». В качестве ответа я просто дважды переписал этот вопрос.

Что вы думаете об этой истории? Во всяком случае, она показывает, что предложения, говорящие сами о себе, не всегда говорят только о количестве своих букв или слогов. Вот еще пример в этом роде:



Девять слов назад это предложение еще не началось.

Это как будто правда. Следующее предложение — тоже истинное, хотя из него вы вряд ли узнаете много нового:



Вы только что начали читать предложение, чтение которого вы уже заканчиваете.

Лозунг



Короче!

сам следует тому, к чему призывает. Зато приказ



Не смей командовать!

находится в противоречии с самим собой. Приходилось ли вам видеть майки с надписью «На этой майке ничего не написано»? Нашумевшая в свое время (и до сих пор вызывающая споры) картина К. Малевича «Черный квадрат», по-моему, как бы утверждает, что на ней ничего не изображено.

Один математик (Г. Фрейденталь) рассказал своему сыну старую немецкую сказку:



Однажды крестьянин шел по дороге со своим сыном. Сын рассказывал что-то отцу и сказал ему неправду. Крестьянин догадался, что сын обманывает его. Тогда он сказал: «Сейчас, сынок, мы подходим к мосту. Этот мост не

простой, а волшебный — он проваливается под теми, кто говорит неправду». Когда сын крестьянина услышал это, он испугался и прижался к отцу, что обманул его.

Выслушав эту историю, сын математика спросил, что было дальше. «А дальше, — ответил математик, — крестьянин со своим сыном вступили на мост, и мост провалился под

крестьянином — ведь никаких волшебных мостов на самом деле нет.»

Как вам понравилась эта история? По-моему, что-то здесь не так...

Еще в Древней Греции знали «парадокс лжеца». Представьте себе, что вы открываете книгу и читаете:



То, что написано на этой странице, — неправда.

Так что же тут написано? Если правда, то тогда — это неправда; а если неправда — то это правда... Это — одна из форм «парадокса лжеца».

А слышали ли вы о парадоксе Рассела? В одном полку брадобрю приказали брить всех тех, кто не бреется сам. Брадобрю не ясно, брить ли ему самого себя. Как бы поступили на его месте?

Каждое натуральное число можно назвать, произнеся несколько слов.

Например, число 2 задается одним словом, а число 22 — двумя. Давайте рассмотрим



Наименьшее число, которое нельзя задать меньше чем десятью словами.

Как вы думаете, чему равно это число? Его описание состоит всего из 9 слов, что противоречит его основному свойству. Этот парадокс называется парадоксом Ришара.

Парадоксы Рассела и Ришара не так безобидны, как может показаться. Придуманные в начале века, они показали, что к математическим определениям нужно относиться осторожно, и заставили математиков пересмотреть формальные основы своей науки.

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Сумма пяти неотрицательных чисел равна единице. Какое наибольшее значение может иметь сумма абсолютных величин попарных разностей этих чисел?

2. Известно, что $abc=1$, $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Докажите, что хотя бы одно из чисел a , b , c равно 1.

3. Решите в простых числах уравнение $x^y+1=z$.

4. В шестиугольнике $ABCDEF$ стороны AB и DE , BC и EF , CD и FA параллельны. Известно также, что диагонали AD , BE , CF равны. Докажите, что вокруг этого шестиугольника можно описать окружность.

5. Пусть BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC с углом A , равным 30° , B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно. Докажите, что отрезки B_1C_2 и B_2C_1 перпендикулярны.

Девятый класс

6. Решите в целых числах систему уравнений $ab+cd=-1$; $ac+bd=-1$, $ad+bc=-1$.

7. Решите в целых числах систему уравнений

$$x^3+y^3+z^3=x+y+z=2.$$

8. Медианы треугольника равны 3, 4, 5. Какой это тупоугольник — остроугольный, прямоугольный или тупоугольный?

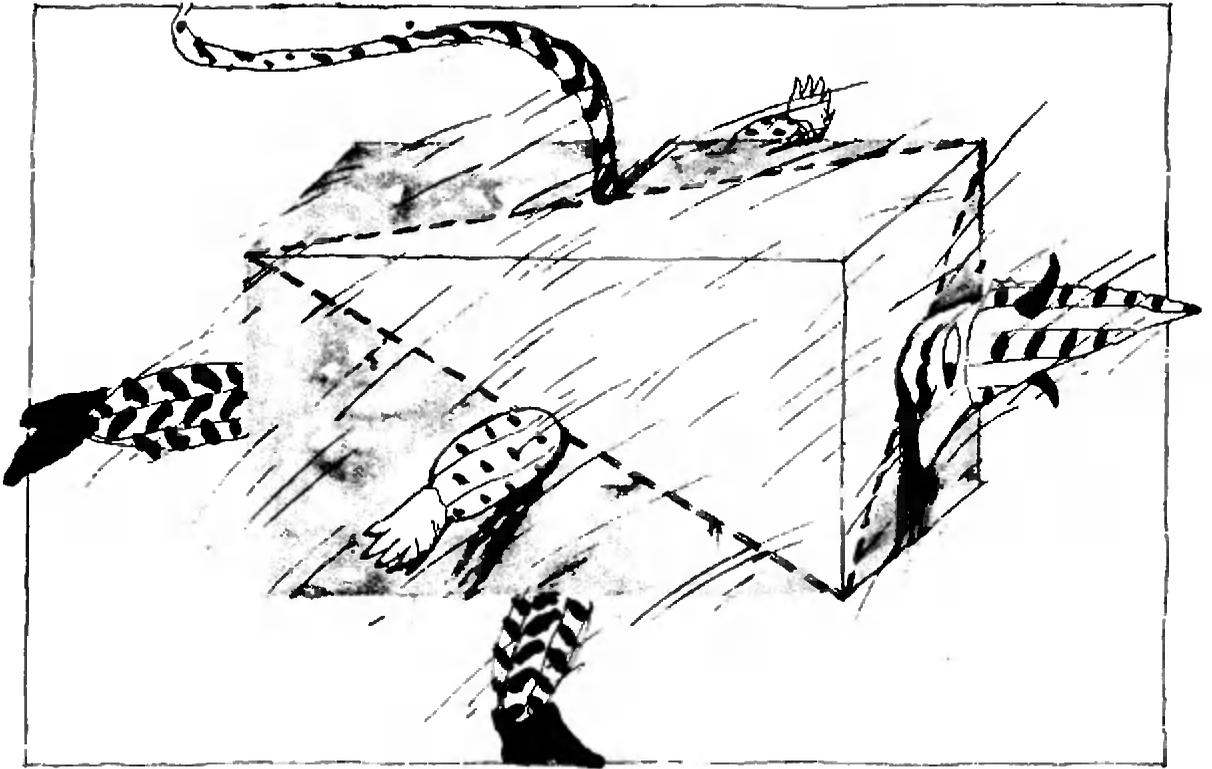
9. Результатом последовательных отражений некоторой точки M относительно всех сторон и вершины A некоторого треугольника ABC , произведенных в некотором порядке, является снова точка M . Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

10. Ломаная, лежащая на поверхности тетраэдра, содержит все его вершины и середины ребер. Каково минимальное возможное число звеньев этой ломаной?

Десятый класс

11. Рассмотрим всевозможные параболы $y=x^2+ax+b$, пересекающие ось координат в трех различных точках. Для каждой такой параболы через эти три точки проведем

(Окончание см. на с. 51)



Школа "Кванте"

Средние линии

В. Н. ВАГУТЕН

В этой статье обсуждается цепочка теорем, пронизывающая весь школьный курс геометрии — от 6-го до 10-го класса. Она начинается с теоремы о средних линиях треугольника и приводит к интересным свойствам тетраэдра и других многогранников.

Треугольник, четырехугольник, параллелограмм

К любому треугольнику KLM можно пристроить три равных ему треугольника AKM , BLK , CLM , каждый из которых образует вместе с треугольником KLM параллелограмм (рис. 1). При этом $AK = ML = KB$, и к вершине K примыкают три угла, равные трем разным углам треугольника,

в сумме составляющие 180° , поэтому K — середина отрезка AB ; аналогично, L — середина отрезка BC , а M — середина отрезка CA .

Ту же самую картину мы можем получить, начав с большого треугольника ABC .

Теорема 1. Если соединить в любом треугольнике середины сторон, мы получим четыре равных треугольника, причем средний составляет с каждым из трех других параллелограмм.

В этой формулировке участвуют сразу все три средние линии треугольника. Обычно в учебнике приводится теорема, где речь идет об одной средней линии.

Теорема 2. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, параллелен третьей стороне треугольника и равен ее половине (см. рис. 1).

Именно эта теорема и обратная к ней — о том, что прямая, парал-

лельная основанию и проходящая через середину одной боковой стороны треугольника, делит пополам и другую боковую сторону, — чаще всего нужны при решении задач.

Из теоремы о средних линиях треугольника вытекает свойство средней линии трапеции (рис. 2), а также теоремы об отрезках, соединяющих середины сторон произвольного четырехугольника.

Теорема 3. *Средины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма. Стороны этого параллелограмма параллельны диагоналям четырехугольника, а их длины равны половине длин диагоналей.*

В самом деле, если K и L — середины сторон AB и BC (рис. 3), то KL — средняя линия треугольника ABC , поэтому отрезок KL параллелен диагонали AC и равен ее половине; если M и N — середины сторон CD и AD , то отрезок MN также параллелен AC и равен $AC/2$. Таким образом, отрезки KL и MN параллельны и равны между собой, значит, четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм.

В качестве следствия из теоремы 3 получаем такой факт.

Теорема 4. *В любом четырехугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, делятся точкой пересечения пополам.*

Действительно, в этих отрезках можно увидеть диагонали параллелограмма (см. рис. 3), а в параллелограмме, как мы знаем, диагонали делятся точкой пересечения пополам (эта точка — центр симметрии параллелограмма).

Заметим, что теоремы 3 и 4 и наши рассуждения остаются верными и для

невыпуклого четырехугольника, и для самопересекающейся четырехугольной замкнутой ломаной (рис. 4; в последнем случае может оказаться, что параллелограмм $KLMN$ «вырожденный» — точки K, L, M, N лежат на одной прямой).

Покажем, как из теорем 3 и 4 можно вывести основную теорему о медианах треугольника.

Теорема 5. *Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1 (считая от вершины, из которой проведена медиана).*

Проведем две медианы AL и CK треугольника ABC . Пусть O — точка их пересечения. Середины сторон невыпуклого четырехугольника $ABCO$ — точки K, L, M и N (рис. 5) — вершины параллелограмма, причем точкой пересечения его диагоналей KM и LN для нашей конфигурации будет точка пересечения медиан O . Итак, $AN=NO=OL$ и $CM=MO=OK$, т. е. точка O делит каждую из медиан AL и CK в отношении 2:1.

Вместо медианы CK мы могли бы рассмотреть медиану, проведенную из вершины B , и убедиться точно так же, что и она делит медиану AL в отношении 2:1, т. е. проходит через ту же точку O .

Пространственный четырехугольник и тетраэдр. Центры масс

Замечательно, что теоремы 3 и 4 верны и для любой пространственной замкнутой ломаной из четырех звеньев AB, BC, CD, DA , четыре вершины A, B, C, D которой не лежат в одной плоскости.

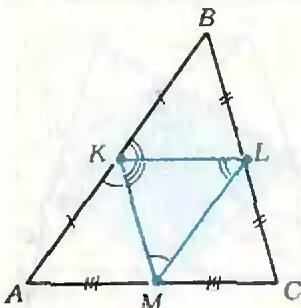


Рис. 1.

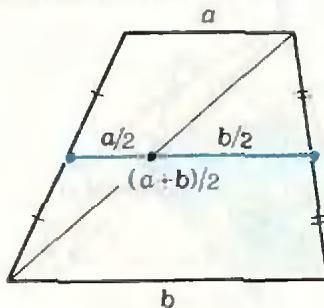


Рис. 2.

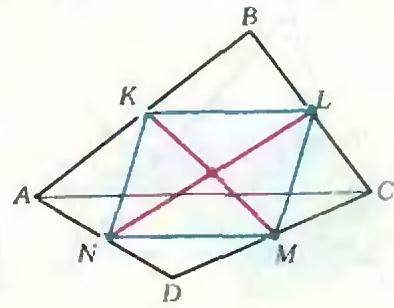


Рис. 3.

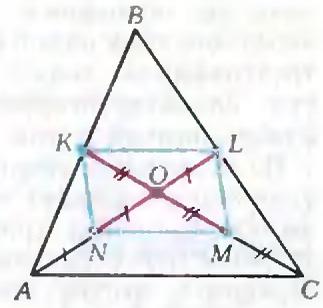
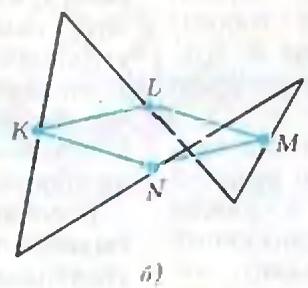
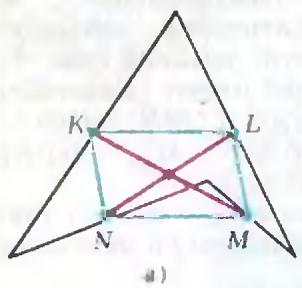


Рис. 4.

Рис. 5.

Такой пространственный четырехугольник можно получить, вырезав из бумаги четырехугольник $ABCD$ и согнув его по диагонали под некоторым углом (рис. 6, а). При этом ясно, что средние линии KL и MN треугольников ABC и ADC остаются по-прежнему их средними линиями и будут параллельны отрезку AC и равны $AC/2$. (Здесь мы используем тот факт, что для пространства остается верным основное свойство параллельных прямых: если две прямые KL и MN параллельны третьей прямой AC , то KL и MN лежат в одной плоскости и параллельны между собой.)

Таким образом, точки K, L, M, N — вершины параллелограмма; тем самым отрезки KM и LN пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

Вместо четырехугольника здесь можно говорить о тетраэдре — треугольной пирамиде $ABCD$: середины K, L, M, N его ребер AB, AC, CD и DA всегда лежат в одной плоскости. Разрезав тетраэдр по этой плоскости (рис. 6, б), мы получим параллелограмм $KLMN$, две стороны которого

параллельны ребру AC и равны $AC/2$, а две другие — параллельны ребру BD и равны $BD/2$.

Такой же параллелограмм — «среднее сечение» тетраэдра — можно построить и для других пар противоположных ребер. Каждые два из этих трех параллелограммов имеют общую диагональ. При этом середины диагоналей совпадают. Итак, мы получаем интересное следствие:

Теорема 6. Три отрезка, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам (рис. 7).

Этот и другие обсуждавшиеся выше факты естественно объясняются на языке механики — с помощью понятия центра масс. В теореме 5 говорится об одной из замечательных точек треугольника — точке пересечения медиан; в теореме 6 — о замечательной точке для четверки вершин тетраэдра. Эти точки — центры масс соответственно треугольника и тетраэдра. Вернемся сначала к теореме 5 о медианах.

Поместим в вершинах треугольника три одинаковых груза (рис. 8). Массу

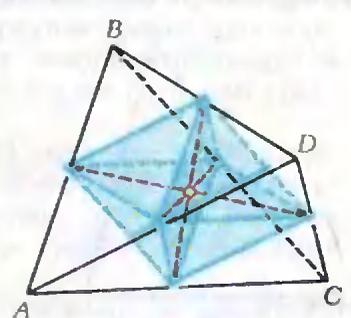
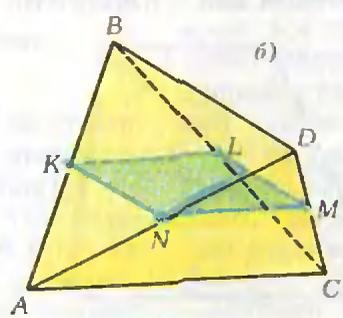
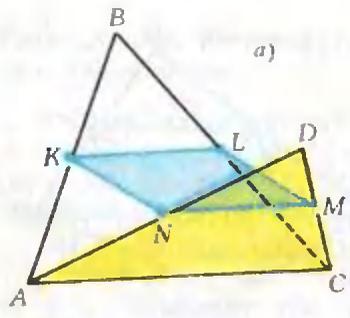


Рис. 6.

Рис. 7.

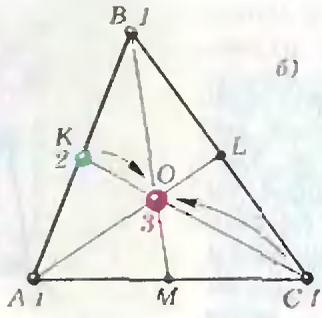
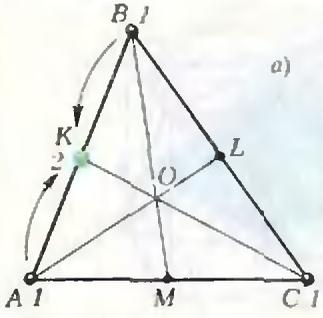


Рис. 8.

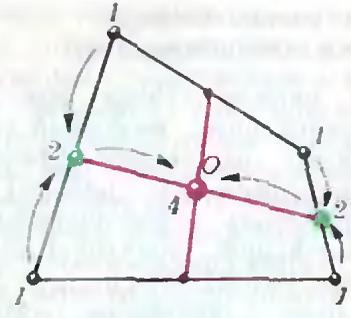


Рис. 9.

каждого примем за единицу. Найдем центр масс этой системы грузов.

Рассмотрим сначала два груза, находящихся в вершинах A и B : их центр масс расположен в середине отрезка AB , так что эти грузы можно заменить одним грузом массой 2 , помещенным в середину K отрезка AB (рис. 8, а). Теперь нужно найти центр масс системы из двух грузов: одного массой 1 в точке C и второго — массой 2 в точке K . По правилу рычага, центр масс такой системы находится в точке O , делящей отрезок CK в отношении $2:1$ (ближе к грузу в точке K с большей массой — рис. 8, б).

Разумеется, мы могли сначала объединить грузы в точках B и C , а затем — полученный груз массой 2 в середине L отрезка BC — с грузом в точке A . Или сначала объединить грузы A и C , а затем присоединить B . В любом случае мы должны получить тот же результат. Центр масс находится, таким образом, в точке O , делящей каждую из медиан в отношении $2:1$, считая от вершины.

Подобными соображениями можно было объяснить и теорему 4 — тот факт, что отрезки, соединяющие

середины противоположных сторон четырехугольника, делят друг друга пополам (служат диагоналями параллелограмма): достаточно поместить в вершинах четырехугольника одинаковые грузы и объединить их попарно двумя способами (рис. 9).

Конечно, четыре единичных груза, расположенных на плоскости или в пространстве (в вершинах тетраэдра), можно разбить на две пары тремя способами; центр масс находится посередине между серединами отрезков, соединяющих эти пары точек (рис. 10) — объяснение теоремы 6. (Для плоского четырехугольника полученный результат выглядит так: два отрезка, соединяющие середины противоположных сторон, и отрезок, соединяющий середины диагоналей, пересекаются в одной точке O и делятся ею пополам).

Через точку O — центр масс четырех одинаковых грузов — проходят еще четыре отрезка, соединяющих каждый из них с центром масс трех других. Эти четыре отрезка делятся точкой O в отношении $3:1$. Чтобы объяснить этот факт, нужно сначала найти центр масс трех грузов и потом присоединить четвертый.

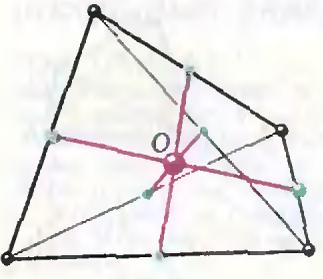


Рис. 10.

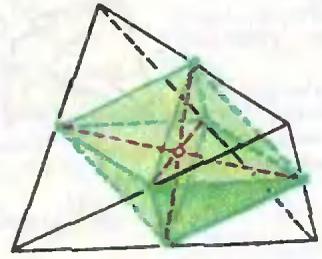
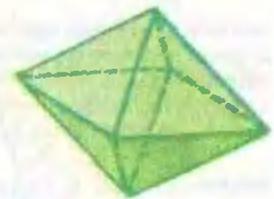


Рис. 11. а)



б)

Тетраэдр, октаэдр, параллелепипед, куб

В начале статьи мы рассмотрели треугольник, разбитый средними линиями на четыре одинаковых треугольника (см. рис. 1). Попробуем проделать то же построение для произвольной треугольной пирамиды (тетраэдра). Распилим тетраэдр на части следующим образом: через середины трех ребер, выходящих из каждой вершины, проведем плоский разрез (рис. 11, а). Тогда от тетраэдра будет отрезано четыре одинаковых маленьких тетраэдра. По аналогии с треугольником можно было бы думать, что в серединке останется еще один такой же тетраэдр. Но это не так: у многогранника, который останется от большого тетраэдра после удаления четырех маленьких, будет шесть вершин и восемь граней — он называется *октаэдром* (рис. 11, б). Удобно проверить это, используя кусок сыра в форме тетраэдра. Полученный октаэдр имеет центр симметрии, поскольку середины противоположных ребер тетраэдра пересекаются в общей точке и делятся ею пополам.

С треугольником, разбитым средними линиями на четыре треугольника, связана одна интересная конструкция: этот рисунок мы можем рассмотреть как развертку некоторого тетраэдра.

Представим себе остроугольный треугольник, вырезанный из бумаги. Перегнув его по средним линиям так, чтобы вершины сошлись в одной точке, и склеив сходящиеся в этой точке края бумаги, мы получим тетраэдр, у которого все четыре грани — рав-

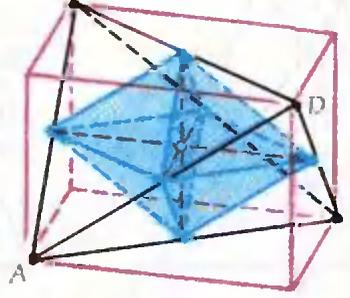


Рис. 13.

ные треугольники; его противоположные ребра равны (рис. 12). Такой тетраэдр называется *полуравильным*. Каждое из трех «средних сечений» этого тетраэдра — параллелограмм, стороны которых параллельны противоположным ребрам и равны их половинам, — будет ромбом. Поэтому диагонали этих параллелограммов — три отрезка, соединяющие середины противоположных ребер — перпендикулярны друг другу. Среди многочисленных свойств полуровильного тетраэдра отметим такое: сумма углов, сходящихся в каждой его вершине, равна 180° (эти углы соответственно равны углам исходного треугольника). В частности, если начать с развертки в форме равностороннего треугольника, мы получим правильный тетраэдр, у которого все ребра равны.

В самом начале статьи мы видели, что каждый треугольник можно рассматривать как треугольник, образованный средними линиями большего треугольника. Прямой аналогии в пространстве для такого построения нет. Но оказывается, что любой тетраэдр можно рассматривать как

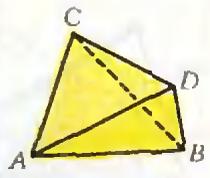
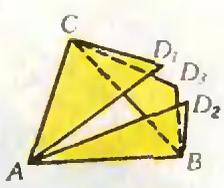
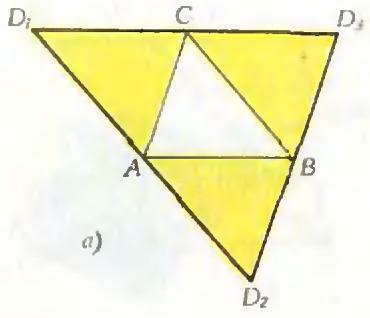


Рис. 12.

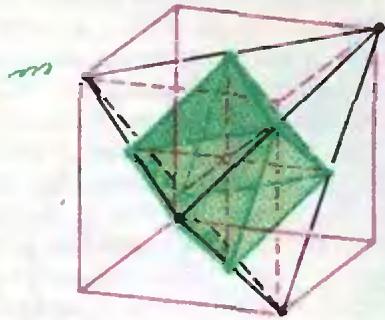


Рис. 14.

«сердцевину» параллелепипеда, у которого все шесть ребер тетраэдра служат диагоналями граней. Для этого нужно проделать следующее построение в пространстве. Через каждое ребро тетраэдра проведем плоскость, параллельную противоположному ребру. Плоскости, проведенные через противоположные ребра тетраэдра, будут параллельны друг другу (они параллельны плоскости «среднего сечения» — параллелограмма с вершинами в серединах четырех других ребер тетраэдра). Так получаются три пары параллельных плоскостей, при пересечении которых образуется нужный параллелепипед (две параллельные плоскости пересекаются третьей по параллельным прямым). Вершины тетраэдра служат четырьмя несмежными вершинами построенного параллелепипеда (рис. 13). Наоборот, в любом параллелепипеде можно выбрать (двумя способами) четыре несмежные вершины и отрезать от него плоскостями, проходящими через каждые три из них, угловые тетраэдры. После

этого останется «сердцевина» — тетраэдр, ребра которого являются диагоналями граней параллелепипеда. Попробуйте доказать, что каждая диагональ параллелепипеда (соединяющая две его противоположные вершины) пересекает грань тетраэдра в точке пересечения ее медиан, причем делится этой точкой в отношении 1:2.

Если исходный тетраэдр полуправильный, то каждая грань построенного параллелепипеда будет параллелограммом с равными диагоналями, т. е. прямоугольником. Верно и обратное: «сердцевинной» прямоугольного параллелепипеда служит полуправильный тетраэдр. Три ромба — средние сечения такого тетраэдра — лежат в трех взаимноперпендикулярных плоскостях. Они служат плоскостями симметрии октаэдра, полученного из такого тетраэдра отрезанием углов.

Для правильного тетраэдра описанный вокруг него параллелепипед будет кубом (рис. 14), а центры граней этого куба — середины ребер тетраэдра — будут вершинами правильного октаэдра, все грани которого — правильные треугольники. (Три плоскости симметрии октаэдра пересекают тетраэдр по квадратам.)

Таким образом, на рисунке 14 мы видим сразу три из пяти платоновых тел (правильных многогранников) — куб, тетраэдр и октаэдр. Существуют еще два таких тела: икосаэдр и додекаэдр. Но это уже — сюжет другого рассказа.

Избранные школьные задачи

(Начало см. на с. 45)

окружность. Докажите, что все эти окружности имеют общую точку.

12. Пусть $p(x) = x^2 + ax + b$, где a и b — целые числа. Докажите, что найдется такое целое N , что все числа $p(N+1)$, $p(N+2)$, ..., $p(N+1989)$ — составные.

13. Известно, что $a < b < c$. Докажите, что уравнение

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

имеет ровно два решения x_1 , x_2 , причем $a < x_1 < b < x_2 < c$.

14. В тетраэдре $ABCD$ углы ADB , ADC , BDC тупые, а ребра AD , BD , CD равны по длине. Докажите, что треугольник ABC остроугольный.

15. Прямые, проведенные перпендикулярно граням тетраэдра через центры вписанных в них окружностей, пересекаются в одной точке. Докажите, что суммы длин противоположных ребер этого тетраэдра равны между собой.

Публикацию подготовили Л. Д. Курляндчик и Жюри ленинградской математической олимпиады



Лаборатория „Кванта“

Цвета толстых пластинок

Кандидат педагогических наук
Я. Е. АМСТИСЛАВСКИЙ

Кто из вас не любовался радужной игрой цветов в мыльных пленках, разнообразием ярко окрашенных полос причудливой формы в масляных пленках на мокром асфальте (или на воде) или другими подобными проявлениями *интерференции белого света в тонких пленках*? Можно ли такую картину наблюдать в лабораторных условиях? Как ее объяснить?

Вообще явление интерференции света довольно подробно обсуждается в школьном курсе физики в десятом классе. (В частности, там объясняется происхождение цветов тонких пле-

нок.) Здесь же о самой интерференции будет рассказано совсем немного, лишь самое необходимое для понимания содержания статьи.

Интерференция света представляет собой наложение двух (или нескольких) световых волн, при котором в пространстве возникают регулярно чередующиеся области повышенной и пониженной интенсивности света. Интерференционная картина будет устойчивой, если налагающиеся волны согласованы, или, как говорят, когерентны: частоты колебаний одинаковы, а разность фаз остается постоянной во времени.

До появления лазеров когерентные световые пучки могли быть получены только путем разделения лучей, исходящих из одного и того же источника. Так, в случае пленок (или прослоек) интерференционную картину создают лучи, отраженные двумя поверхностями пленки. В монохроматическом свете картина представляет

собой чередующиеся светлые и темные полосы, в белом свете — окрашенные и темные полосы.

Как показывает опыт (и расчеты это подтверждают), картина будет четкой и яркой только в том случае, если толщина пленки не превосходит десятых долей микрометра (что в сотни раз меньше средней толщины человеческого волоса!).

Однако известен один особый случай, когда интерференционные полосы формируются при весьма значительной толщине прослойки. Это явление было открыто и исследовано еще Ньютоном (и описано в его «Оптике», увидевшей свет в 1704 году), но до сравнительно недавнего времени оно представляло лишь исторический интерес. И только бурное развитие в самые последние годы методов интерференции в диффузном свете вдохнуло в открытое Ньютоном явление новую жизнь.

В чем же суть этого явления? Впрочем... все по порядку. Начнем с опытов, а потом попробуем их объяснить.

Как увидеть цвета толстых прослоек?

Один из опытов по интерференции в диффузном (рассеянном) свете можно провести с так называемым запыленным зеркалом. Для выполнения опытов требуется весьма скромное оборудование: батарейка от карманного фонарика на 4,5 В, лампочка на 3,5 В, обычное домашнее зеркало (лучше тонкое) размером порядка 1 дм² и кусок телефонного провода.

Чтобы лампочку превратить в подходящий для опытов источник света, сделайте следующее. К цоколю лампочки припаяйте два провода, противоположные их концы во время опытов вы будете подсоединять к электродам батарейки. Из черной оберточной бумаги вырежьте небольшую полоску, сверните ее в виде маленького кулечка, наденьте на лампочку со стороны цоколя и подклейте так, чтобы образовался маленький черный абажур.

При подготовке зеркала к опытам необходимо нанести на его поверхность рассеивающее покрытие. Проще всего воспользоваться для этого разбавленным молоком. Одну ложку молока смешайте с 4—5 ложками воды, затем 0,5—1 чайную ложку раствора налейте на лежащее на столе зеркало и добейтесь равномерного распределения жидкости по всей поверхности зеркала. После этого зеркало оставьте на несколько минут для высыхания.

Если есть возможность достать зеркало с металлическим покрытием (такие зеркала имеются в школьном физическом кабинете), то можно изготовить тонкое «воздушное» зеркало. Для этого рассеивающее покрытие нанесите на одну из поверхностей отмытой от эмульсии фотопластинки (например, размером 9×12 см) или куска оконного стекла. Затем из обычной тетрадной бумаги по размерам зеркала вырежьте прямоугольную рамку-прокладку шириной 0,5—1 см, положите эту рамку на зеркало и покройте стеклянной пластинкой так, чтобы молочная пленка была обращена к зеркальной поверхности. В результате вы получите «воздушное» зеркало, толщина которого соответствует толщине бумажного листа (прокладки), т. е. ~0,1 мм.

При проведении опытов зеркало располагают горизонтально. В случае сравнительно толстого зеркала (толщиной 3—6 мм) его следует положить непосредственно на пол. Более тонкое зеркало (1—2 мм) можно положить на стул. Если же опыты выполняются с тонким «воздушным» зеркалом (~0,1 мм), удобнее положить зеркало на стол. Наблюдения лучше производить в темной комнате.

Опыт 1. Подключите лампочку к батарейке, возьмите батарейку в одну руку, а провода вблизи лампочки — в другую. Расположите лампочку между глазом и зеркалом, ближе к глазу, так, чтобы световой пучок был направлен в сторону зеркала, а сама лампочка и глаз оказались примерно на одной нормали к зеркалу. Вы увидите систему концентрических окрашенных интерференционных колец, охватывающих центральное бе-

лое пятно. При этом средняя часть пятна с изображением источника света в центре будет скрыта в области, экранируемой абажуром. Однако уже при небольшом поперечном смещении глаза это изображение можно увидеть. Перемещая лампочку ближе к глазу и в противоположном направлении, можно убедиться в быстром разрастании колец в первом случае и в сжатии картины — во втором.

Опыт 2. Расположите лампочку примерно посередине между глазом и зеркалом и наблюдайте за изменением картины при смещении глаза в сторону. Исследуйте качественно влияние величины смещения глаза, а также начального положения лампочки на конфигурацию «колец», их ширину и окраску центральной области картины.

Опыт 3. Поднесите лампочку непосредственно к глазу. Несколько смещая ее в поперечном направлении, вы увидите систему почти прямых и достаточно широких цветных интерференционных полос с изображением источника света в середине центральной белой полосы. Полосы простираются в направлении, перпендикулярном направлению смещения лампочки.

Интересно наблюдать за переориентацией и деформацией полос при перемещении источника света по окружности вокруг глаза, а затем по

одному из ее диаметров. С этой целью сначала расположите лампочку вблизи переносицы, затем двигайте ее к надбровью и далее по окружности с центром в области зрачка, а потом — по диаметру «через зрачок».

Иллюстрацией к сказанному могут служить фотографии интерференционных картин, приведенные на рисунках 1 и 2. Картины спроектированы на экран на фоне метровой линейки.

Первые две фотографии (см. рис. 1) получены в отраженных лучах от тонкого «воздушного» зеркала с рассеивающим покрытием в виде налета хлористого аммония на стекле. Снимок *а)* сделан при нормальном расположении зеркала, когда источник света и оптический центр проектирующей линзы (аналогичной по своей роли хрусталику глаза) находятся на одной нормали к зеркалу. Источник света — кинопроекторная лампа; ее изображение хорошо видно в средней части центрального пятна (в центре изображения — тень от небольшого вспомогательного зеркальца). Толщина воздушного зеркала $\sim 0,1$ мм. Снимок *б)* сделан при сильном наклоне зеркала ($\sim 45^\circ$); источник света — освещенная щель; толщина зеркала $\sim 0,03$ мм.

Фотографии, воспроизведенные на рисунке 2, получены в проходящих лучах с помощью так называемого

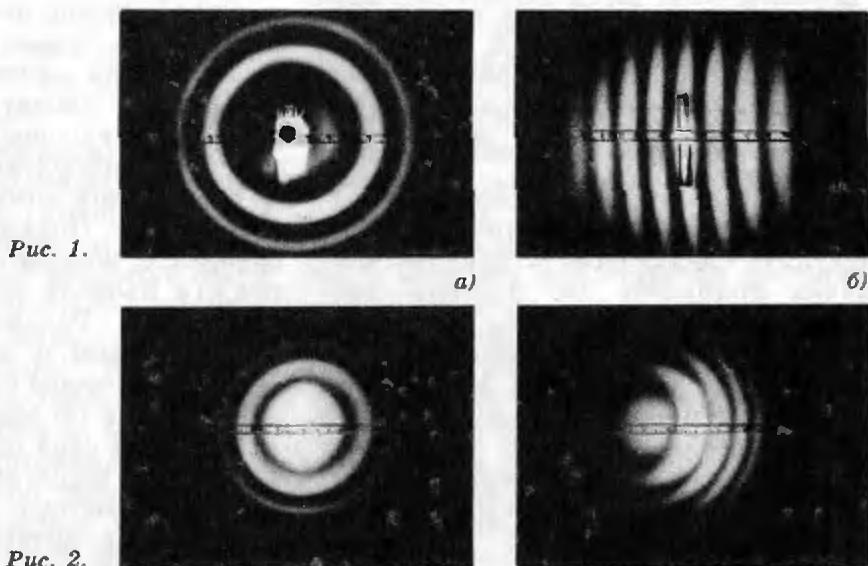


Рис. 1.

Рис. 2.

сложного диффузора (о нем будет рассказано чуть позже) толщиной $\sim 0,5$ мм. Источник света в этом опыте — небольшая 10-ваттная лампочка накаливания с прямой спиралькой (ее изображение — в средней части картины). Снимок *а*) сделан при нормальном расположении сложного диффузора, снимок *б*) — при небольшом наклоне диффузора ($\sim 3^\circ$).

Что такое сложный диффузор?

Как известно, отражение света от границы раздела двух сред может быть зеркальным или диффузным. Все определяется отношением размеров неровностей поверхности раздела к длине волны падающего света.

Если неровности малы по сравнению с длиной волны, происходит зеркальное отражение. Когда же неровности соизмеримы с длиной световой волны или превышают ее и расположение неровностей беспорядочное, имеет место *диффузное* отражение. В этом случае поверхность раздела сред рассеивает свет по всем возможным направлениям. Такую поверхность называют *диффузором*.

Теперь рассмотрим оптическую систему из двух плоских и параллельных диффузоров I' и I'' (рис. 3). Предположим, что эти диффузоры, состоящие каждый из множества хаотически распределенных неодинаковых рассеивающих центров, идентичны, т. е. распределение и свойства рассеивающих частиц второго диффузора идеально повторяют распределение и свойства частиц первого. Иначе говоря, каждый рассеивающий центр второго диффузора имеет свой двойник на первом, и диффузоры расположены так, что их идентичные центры находятся один против другого. Такую систему и назовем *сложным диффузором*.

Пусть сложный диффузор освещается точечным источником белого света S . Исходящие из источника близкие лучи $1a$ и $2a$ рассеиваются на идентичных центрах C'' и C' . Среди множества рассеянных лучей образу-

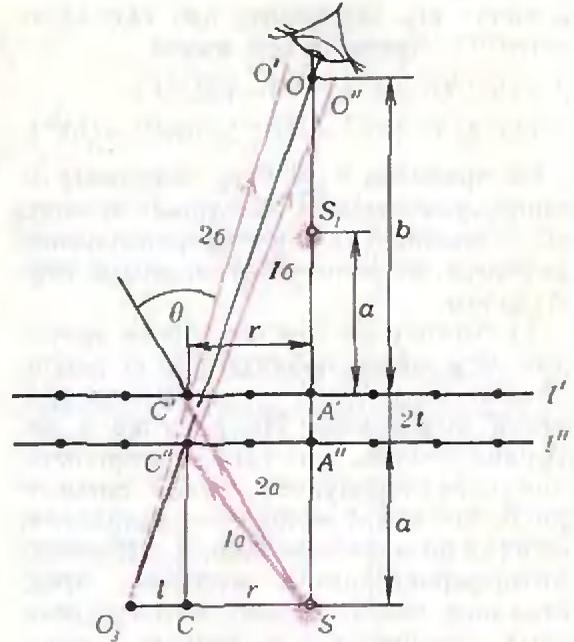


Рис. 3.

ются и лучи $1b$ и $2b$, перекрывающиеся в глазу наблюдателя, расположенном вблизи точки O . Будем называть последнюю точку наблюдения.

Расчет результата интерференции перекрывающихся лучей в случае произвольных диффузоров затруднителен, поскольку при каждом рассеянии фаза колебаний скачкообразно изменяется на некоторую величину, зависящую от свойств рассеивающих центров. Однако для идентичных диффузоров эта трудность полностью снимается. В нашем случае одинаковость частиц C' и C'' обеспечивает равенство соответствующих скачков фаз, поэтому результат интерференции зависит только от геометрии расположения, т. е. от разности хода Δ . Если разность хода кратна длине волны света, перекрывающиеся световые пучки усиливают друг друга, если же разность хода равна нечетному числу половин длин волн, световые пучки ослабляют друг друга.

Предположим, что диффузор находится в воздушной среде и что показатель преломления n повсюду равен единице. Тогда можем записать (см. рис. 3): $\Delta = SC''O'' - SC'O'$. Продолжим лучи $1b$ и $2b$ до их пересечения

в точке O_3 . Очевидно, что $O_3C''O'' = O_3C'O'$. Тогда будем иметь $\Delta = (SC''O'' - O_3C''O'') - (SC'O' - O_3C'O') = (SC'' - O_3C'') - (SC' - O_3C')$.

Не прибегая к расчету величины Δ , попробуем сделать некоторые выводы об особенностях интерференционной картины, формируемой сложным диффузором.

1) Начнем со случая, когда источник S и точка наблюдения O располагаются на одной нормали к поверхности диффузора. На рисунке 3 нетрудно видеть, что такое расположение характеризуется осевой симметрией, причем Δ монотонно возрастает от нуля по мере увеличения r . Поэтому интерференционная картина представляет собой систему концентрических окрашенных и темных колец с центральным белым пятном и источником S посередине него. Отличительная особенность интерференции в диффузном свете как раз и заключается в том, что интерференционная картина формируется на фоне источника и остается четкой независимо от толщины диффузора $2t$ (и даже — от его расположения).

2) Темп нарастания Δ с изменением r очень чувствителен к местоположению глаза наблюдателя на оси SO . Введем точку S_1 , симметричную точечному источнику S , и назовем ее «зеркальным изображением» источника в диффузоре. Из рисунка 3 видно, что, если точка O совпадает с S_1 (т. е. $b=a$), при любом r оптические пути обоих интерферирующих лучей оказываются одинаковыми ($O_3C'' = SC''$ и $O_3C' = SC'$) и $\Delta = 0$. Это значит, что нулевое белое пятно занимает все поле наблюдения.

3) Иной характер деформации интерференционной картины имеет место при поперечном смещении глаза наблюдателя относительно нормали SO . Пусть, например, глаз сместился в точку O_1 (рис. 4). Из рисунка 4 нетрудно видеть, что идущие от S к O_1 лучи, рассеянные на идентичных частицах A_1'' и A_1' , по-прежнему будут давать $\Delta = 0$ при углах рассеяния $\theta = 0$. Но вместе с тем $\Delta \neq 0$ и для целой совокупности лучей, рассеянных в

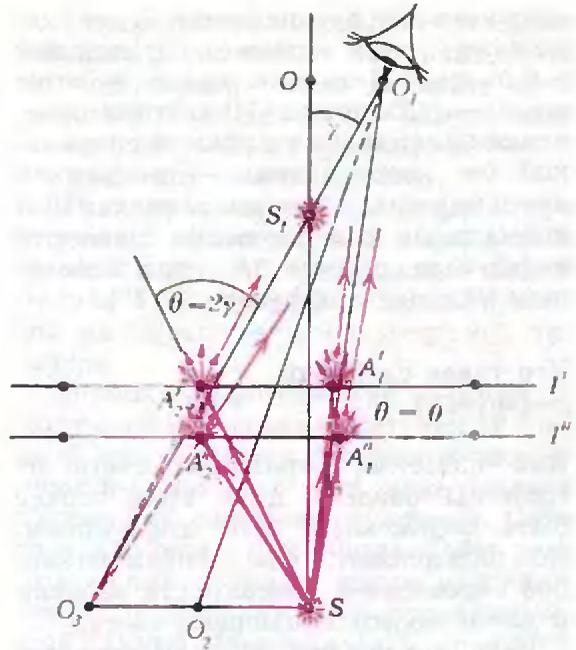


Рис. 4.

других местах диффузора. В частности, такой результат дают лучи, рассеянные под углом $\theta = 2\gamma$ на частицах A_2'' и A_2' , проходящие к O_1 по направлению O_3O_1 через область, прилегающую к «изображению» S_1 . В результате центральное нулевое пятно деформируется в неокрашенное нулевое кольцо, наиболее яркая часть которого проходит через источник S ($\theta = 0$), а наименее яркая — через точку O_3 ($\theta = 2\gamma$). К нулевому кольцу извне и изнутри прилегают окрашенные кольца. При увеличении смещения OO_1 нулевое кольцо расширяется, а окраска прилегающих к нему цветных колец блекнет.

Особенно разительные изменения картины при поперечном смещении глаза наблюдаются в том случае, когда $b=a$, т. е. когда точка O расположена вблизи S_1 . В этом случае происходит резкий переход от заполняющего все поле зрения нулевого пятна к системе практически прямых полос, ориентированных перпендикулярно направлению смещения.

От сложного диффузора — к запыленному зеркалу

Изготовить сложный диффузор в условиях домашней лаборатории весь-

ма трудно, хотя и возможно.*) Гораздо проще заменить его эквивалентным прибором — запыленным зеркалом.

Рассмотрим запыленное зеркало в виде плоской полупрозрачной рассеивающей поверхности I' и параллельной ей зеркально отражающей поверхности I (рис. 5). Пусть поверхности I' и I разделены воздушной ($n=1$) прослойкой толщиной t . Ход лучей в запыленном зеркале (сплошные линии) ясен из рисунка 5. Интерферирующие при перекрывании лучи $1b$ и $2b$ возникают в результате рассеяния на одной и той же частице C' (луч $2b$ — при падении первичного луча $2a$ на частицу C' снизу после отражения от зеркала I в точке B , луч $1b$ — при падении первичного луча $1a$ на ту же частицу сверху и последующего после рассеяния отражения от зеркала I в точке E), оказываются когерентными и могут интерферировать.

Нетрудно видеть, что без какого-либо искажения эффекта реальную схему интерференции от запыленного зеркала, представленную на рисунке 5 сплошными линиями, можно заменить эквивалентной, но легче читаемой схемой, данной на рисунке 5

*) См., например, книгу М. Франсона «Оптика спеклов» (М.: Мир, 1980; гл. 3).

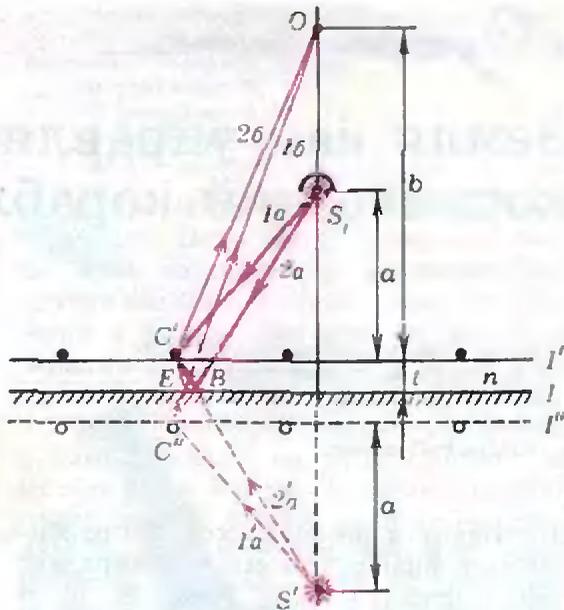


Рис. 5.

пунктирными линиями. В последней вместо реального источника S_1 фигурирует его зеркальное изображение S' , а вместо зеркала I — второй диффузор I'' , который представляет собой зеркальное изображение реального диффузора I' и поэтому оказывается ему идентичным (частица C'' идентична частице C'). Таким образом, мы снова возвращаемся к схеме сложного диффузора со всеми его свойствами.

Пузыри в луже

(Начало см. на с. 22)

Но нам бы хотелось обратить ваше внимание на процесс испарения жидкости со стенок пузыря. Вам, наверное, знакома народная примета «пузыри на лужах — к затяжному дождю». Именно потому, что во время сильного ливня или когда пасмурно относительная влажность воздуха близка к 100 %, испарение воды со стенок пузыря незна-

чительное. Это обстоятельство и «продлевает» жизнь крупных пузырей, которыми богат хороший летний дождик. Когда же влажность воздуха невелика, вода быстро испаряется. В сухом воздухе тонкий слой стенки водяного пузыря исчез бы практически мгновенно. Количественные суждения о скорости испарения влаги вы можете провести самостоятельно, если у вас есть комнатный гигрометр. Достаточно налить в блюдце воды и наблюдать, как быстро она будет испаряться. Результат будет зависеть от показаний гигрометра, установленного вдали от блюдца с водой.

Р-знатим ракета

Земля как управляемый космический корабль

Д. ФРОМАН

Речь на банкете, состоявшемся после конференции по физике плазмы, организованной Американским физическим обществом в ноябре 1961 года в Колорадо-Спринге

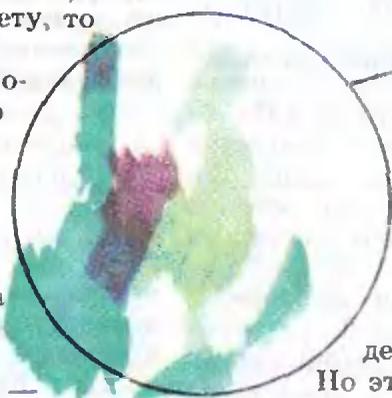
Поскольку я не очень хорошо разбираюсь в физике плазмы и термоядерном синтезе, я буду говорить не о самих этих явлениях, а об одном их практическом применении в ближайшем будущем.

Представим себе, что нам удалось изобрести космический корабль, который движется за счет того, что выбрасывает продукты реакций $D-D$ и $D-T$. На таком корабле можно стартовать в космос, поймать там несколько астероидов и отбуксировать их на Землю. (Идея, правда, не нова.) Если не очень перегружать ракету, то можно было бы доставить на Землю 1000 тонн астероидов, затратив всего около тонны дейтерия. Я, честно говоря, не знаю, из какого вещества состоят астероиды. Однако вполне может оказаться, что наполовину они состоят из никеля. Известно, что 1 фунт никеля стоит 50 центов, а 1 фунт дейтерия — около 100 долларов. Таким образом, на 1 миллион долларов мы могли бы купить 5 тонн дейтерия и, израсходовав их, доставить на Землю 2500 тонн никеля стоимостью в 2,5 миллиона долларов.

Неплохо, правда? Я уже было подумывал, а не организовать ли мне Американскую Компанию по Добыче и Доставке Астероидов (АКДА)? Оборудование такой компании будет исключительно простым. При доста-

точной субсидии со стороны дяди Сэма можно было бы основать весьма доходное дело. Если кто-либо из присутствующих с крупным счетом в банке пожелает войти в число учредителей, пусть подойдет ко мне после банкета.

А теперь давайте заглянем в более отдаленное будущее. Лично я вообще не могу понять, почему астронавты мечтают попасть в межзвездное пространство. В ракете ведь будет страшная теснота. Да и в питании им при-



дется себя сильно урезать. Но это еще полбеда. Главная неприятность — что астронавт в ракете будет находиться в том же положении, что и человек, помещенный против пучка быстрых протонов из мощного ускорителя. Очень мне жаль бедного астронавта; о его печальной участи я даже сочинил балладу:

Баллада об астронавте

От бета-инвертора
И гамма-конвертора
Осталась обшивка одна.

А ионная пушка,
 Как пустая хлопнушка,
 Торчит, ни на что не годна.
 Все распались мезоны,
 Все распались нейтроны,
 Излучился весь видимый свет.
 По закону Кулона
 Разбежались протоны,
 На лептоны ж надежды нет.
 Поврежденный реактор
 Тарахтит, словно трактор.
 В биокамере — гниль и прель.
 Вот сондо уж забилось,
 Да и дно прохудилось,
 И вакуум хлещет в щель.
 Он летел к Ориону,
 Но поток гравитонов
 Пересек неожиданно путь.
 Отклонившись от курса
 И спустив все ресурсы,
 Он сумел и от них ускользнуть.
 Сделав крюк здоровенный,
 Облетел пол-Вселенной
 И теперь на пустом корабле
 По последней прямой
 Возвращался домой,
 Приближаясь к планете Земле.

Чертыхаясь и плача
 От такой неудачи,
 Астронавт повернул рычаг,
 И раздалось Б,
 И раздалось А,
 И раздалось Х —
 БАХ!*)

Но мне жаль и тех, кто останется на Земле. Ведь наше Солнце не вечно. Оно когда-нибудь потухнет, погрузив все окружающее в космический мрак и холод. Как мне рассказывал Фред (Фред Хойл т. е.)**), через пару миллиардов лет на Земле будет так холодно, что не то что о комфорте, о самой жизни на этой планете не может быть и речи. А следовательно, имеет явный смысл куда-нибудь податься. Мне кажется, что для большинства из нас самым удобным космическим кораблем все же была бы сама Земля. Поэтому если нам не нравится, что наше светило постепенно гаснет, и вообще если все в Солнечной системе нам надоело, зачем здесь оставаться? Давайте полетим куда-нибудь прямо на нашей Земле. При этом все трудности, связанные с космическим полетом, отпадут сами собой. Ведь проблемы защиты от радиации не существует, на Земле есть атмосфера, да и скорость движения будет невелика. Безопасность и приятность такого путешествия очевидны.

Однако хватит ли нам энергии? Прежде всего понадобятся тепло и свет: ведь в течение долгого времени мы будем удалены от Солнца или какой-либо другой звезды. Дейтерий, содержащийся в океанской воде, может дать нам 10^{38} эрг, следовательно, если использовать его только для отопления и освещения, то этого хватит на три миллиона лет — срок вполне достаточный. Правда, здесь

Но борясь с тяготеньем,
 Сверх-сверх-сверхускореньем,
 Он замедлил стрелки часов.
 И стрелки застыли,
 На Земле ж проходили
 Тысячи тысяч веков.
 Вот родные планеты...
 Боже! Солнце ли это? —
 Темно-красный, чуть теплый шар...
 Над Землею дымится,
 Над Землею клубится
 Водородный, холодный пар.
 Что же это такое?
 Где же племя людское? —
 В неизвестных, далеких мирах.
 Вырастают их дети
 Уж на новой планете,
 А Земля вся в космических льдах.

*) Вольный перевод с английского В. Турчина.

**) Фред Хойл — известный английский астрофизик, профессор Кембриджского университета, автор ряда работ по теоретической астрофизике, космогонии, теоретической гравитации и... нескольких научно-фантастических романов.

имеется небольшая загвоздка. При нашей скорости мы будем потреблять $3 \cdot 10^{10}$ фунтов дейтерия в год, а стоимость его 100 долларов за фунт, следовательно, потребляемый дейтерий в 100 раз превысит годовой бюджет современных воздушных сил. Но, быть может, удастся получить дейтерий по оптовым ценам?

Однако нам понадобится еще энергия для того, чтобы оторваться от Солнца. Расчет показывает, что на это пойдет $2,4 \cdot 10^{40}$ эрг, т. е. гораздо больше, чем может дать весь океанский дейтерий. Поэтому необходимо будет изыскать другие источники энергии. Я полагаю, что для решения этой проблемы нам придется обратиться к синтезу альфа-частицы из четырех протонов. При использовании этой реакции все протоны мирового океана дадут нам энергию 10^{42} эрг, т. е. в сорок раз больше того, что нужно, чтобы оторваться от Солнца.

В качестве рабочего тела можно использовать песок. Выбрасывая 1000 молекул SiO_2 на каждую синтезированную альфа-частицу, мы для отрыва от Солнца должны будем

истратить всего 4 % массы Земли. Мне кажется, что мы можем себе это позволить. Тем более для такой цели не жалко будет израсходовать Луну: ведь вдали от Солнца от нее все равно нет никакого проку. Покинув Солнечную систему и скитаясь в космическом пространстве, мы, вероятно, сможем время от времени еще пополнять наши запасы массы и энергии, заправляясь на лету за счет встречающихся по дороге планет. На пути осуществления этих планов пока стоит одно принципиальное препятствие: мы не умеем осуществлять цепную реакцию $4p \rightarrow \text{}^4\text{He}$. Теперь вы видите, какая это важная проблема. Нам нужно удвоить свои усилия для ее решения. Время не терпит: Земля провела у Солнца уже две трети отпущенного ей срока.

Уверяю вас: в космосе нам будет отлично. Возможно, нам так понравится, что мы даже не захотим прилепиться к новой звезде.

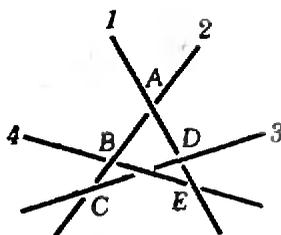
Перепечатано из книги «Физики продолжают шутить» (М.: Мир, 1968). Все примечания сделаны редактором книги.

Линейные неравенства и задача М 1085

(Начало см. на с. 38)

Если система линейных уравнений и неравенств (3) — (8) с неизвестными f_{ij} имеет решение, то силы упругости сделают проволочное сплетение жестким (как на рисунке 1, б). Тогда это сплетение нельзя представить как проекцию системы прямых в пространстве; а система неравенств (1) — (2) не имеет решения.

На рисунке 3 показаны силы, возникающие в сплетении. Проверьте, что эти силы удовлетворяют системе (3) — (8). Это —



$$\begin{aligned} f_{21} &= 1 \\ f_{23} &= AB/BC \\ f_{42} &= AC/BC \\ f_{41} &= AD/DE \\ f_{13} &= AE/DE \end{aligned}$$

Рис. 3.

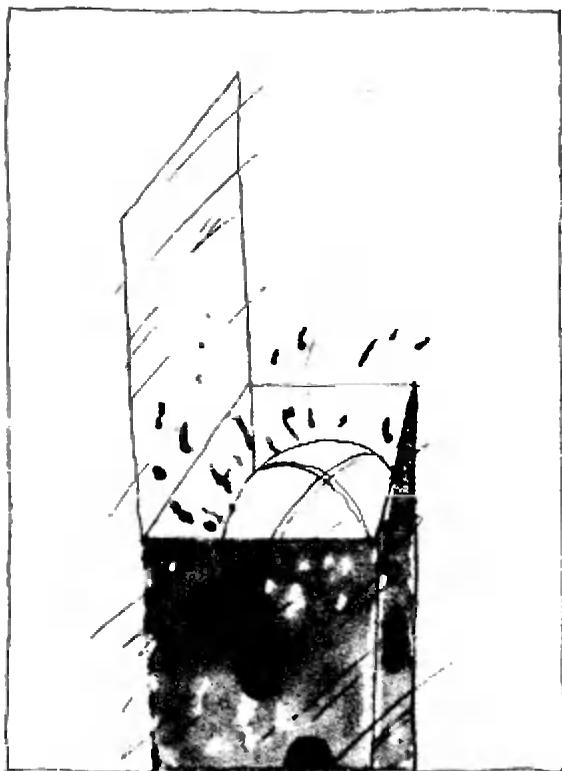
еще одно доказательство того, что сплетение на рисунке 1, б отвечает «невозможному» объекту.

С. Л. Табачников

Вниманию наших подписчиков!

Напоминаем вам, что в связи с увеличением объема нашего журнала его цена в 1989 году возросла на 5 копеек за номер. Новая цена — 45 копеек. Если вы оформили подписку по старой цене, просим вас произвести в соответствующем отделении «Союзпечати» доплату за все выписанные вами номера. Указания о приеме доплат получили все отделения «Союзпечати».

Благодарим вас!



*Информатика
и программирование*

Газ на дисплее

А. Н. ВИЛЕНКИН,
кандидат физико-математических наук
Г. Л. КОТКИН

В этой заметке, дополняющей статью «Газ бильярдных шаров» (см. с. 2), рассказано, как составить программу, моделирующую движение нескольких бильярдных шаров. Описание представлено в такой форме, чтобы читатели могли сами довести его до программы на конкретном языке программирования.

Программу «Газ» (так мы ее назовем) разумно разбить на семь блоков: описание переменных и подготовка данных, начальный запуск, подготовка экрана, расчет ближайшего соударения, расчет новых координат, вывод информации на экран, блок управления моделью.

Описание переменных и подготовка данных. Для описания системы потре-

буются такие переменные: N — число шаров; a — радиус каждого шара; T — счетчик времени (в начальный момент $T = 0$), $T\theta$ — шаг по времени; $A1$ и $A2$ — границы экрана. Значения этих переменных лучше всего задавать в программе, чтобы их можно было менять (редактируя программу), но не надо было вводить при каждом эксперименте.

Состояния шаров описываются 4 переменными на каждый шар: координаты x и y центра шара и составляющие скорости v_x и v_y . Все эти переменные стоит описать как один массив $R(4, N)$, потому что расчетные формулы для них одинаковы. Для старых положений шаров потребуется массив $RS(2, N)$.

Начальный запуск. Этот блок состоит из запроса начальных значений координат центров и составляющих скоростей шаров. Здесь же можно задавать $T\theta$ — «шаг» процесса.

Подготовка экрана. Дисплей в графическом режиме высокого разрешения — это часть координатной плоскости xu , состоящая из «точек» с целочисленными координатами, заключенными в определенных пределах (например, $1 \leq x \leq 256$, $1 \leq y \leq 192$). Границы экрана заданы переменными $A1$ и $A2$, но надо позаботиться, чтобы изображения шаров не только не вылезали за эти границы, но и не попадали на изображения границ стола. Так что в этом блоке надо перевести дисплей в режим высокого разрешения, нарисовать границы стола и вычислить границы положений центров шаров (типа $G1 = 1 + a + 1$, $G2 = A1 - a - 1$).

Расчет ближайшего соударения. В этом блоке надо рассчитать момент TC первого столкновения, описать в виде значения переключателя K тип столкновения и в виде значений $N1$, $N2$ номера сталкивающихся шаров, чтобы результат работы блока был такой: первым сталкивается шар $N1$, при $K = 1$ — с горизонтальной стенкой, $K = 2$ — с вертикальной, $K = 3$ — с шаром $N2$.

Практически надо сначала задать большое TC и $N1 = 0$, $N2 = 0$, $K = 0$. Затем в цикле (по номерам шаров)

проверить для каждого шара, не выйдет ли он до момента ТС за границы экрана (условия типа $x + v_x * (ТС - T) > G2$). Если выйдет, то определить момент столкновения с соответствующей стенкой и соответственно изменить ТС, N1 и К (такие сложности позволяют обойти риск деления на машинный ноль, который возникнет, если мы попытаемся найти время соударения с левой стенкой шара, движущегося вертикально). После этого в двойном цикле (по N3 от 1 до N-1 и N4 от N3+1 до N) надо проверить, не сталкиваются ли за время до ТС шары N3 и N4, и если сталкиваются, то соответственно изменить ТС, N1, N2 и К.

Расчет столкновения двух шаров, скажем 1 и 2, сводится к исследованию квадратного относительно t уравнения

$$(x_1 + v_{1x}t - x_2 - v_{2x}t)^2 + (y_1 + v_{1y}t - y_2 - v_{2y}t)^2 = 4a^2,$$

означающего следующее: через время t расстояние между центрами шаров станет равным $2a$. Если его дискриминант D больше нуля, то шары сталкиваются (при $D=0$ касаются); меньший корень — момент столкновения, больший — момент «касания» шаров после их «пролета сквозь друг друга», отрицательный корень — столкновение было в прошлом.

Расчет новых координат. Работа программы состоит в «сдвиге ситуации по времени на ΔT ». Если $ТС > T + T\theta$, то столкновений не предвидится, надо положить $T1 = T\theta$, записать старые координаты шаров (для стирания на экране старых изображений), а затем рассчитать новые координаты шаров через время $T1$.

Если же $ТС < T + T\theta$, то надо положить $T1 = ТС - T$, проделать то же, что раньше, но еще рассчитать новые скорости N1-го шара (при $K \neq 3$) или N1-го и N2-го (при $K = 3$). Столкновение шара со стенкой описано в основной статье, столкновение двух шаров — содержание задачи 3 там же, сформулируем лишь ответ: при столкновении шаров 1 и 2 новые скорости v^i определяются по формулам

$$VI = \frac{(x_2 - x_1)(v_{2x} - v_{1x}) + (y_2 - y_1)(v_{2y} - v_{1y})}{4a^2},$$

$$v_{1x}^i = v_{1x} + VI(x_2 - x_1),$$

$$v_{2x}^i = v_{2x} - VI(x_2 - x_1),$$

$$v_{1y}^i = v_{1y} + VI(y_2 - y_1),$$

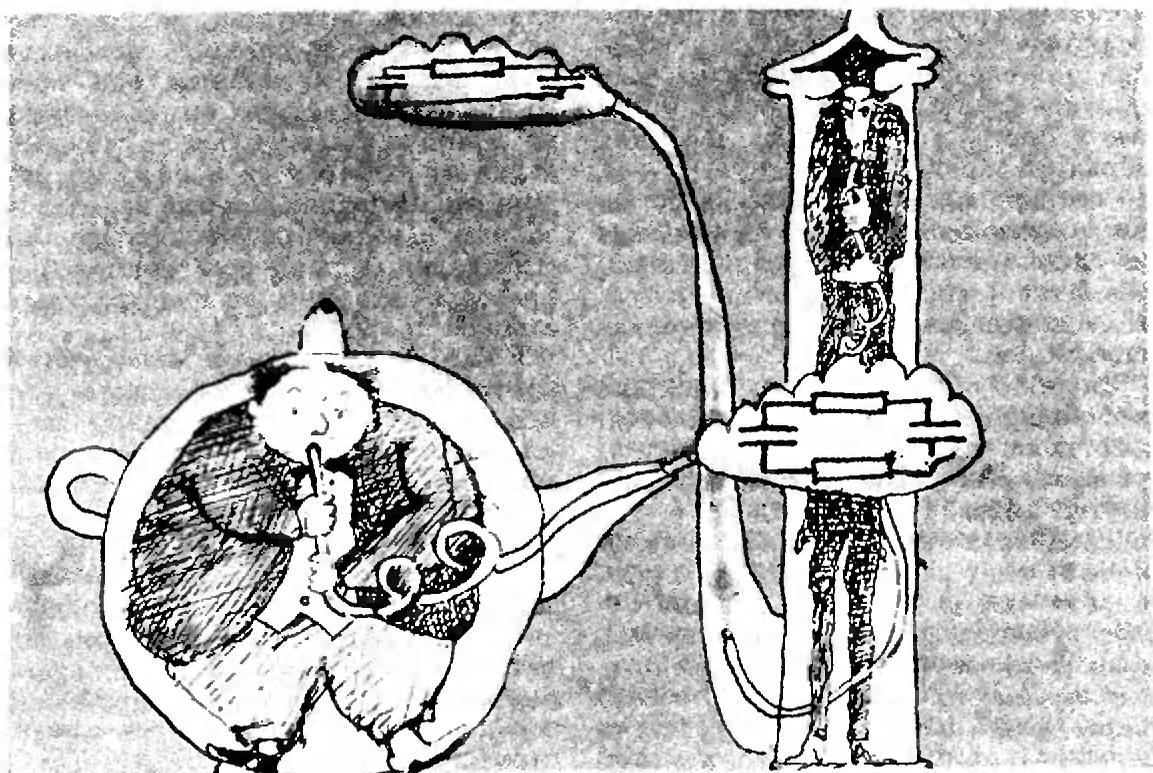
$$v_{2y}^i = v_{2y} - VI(y_2 - y_1).$$

Вывод информации на экран. Здесь все зависит от того, что мы хотим увидеть. Если движение шаров — то надо стереть старые изображения шаров (для этого мы и заломинили старые координаты), нарисовав их снова цветом фона, а основным цветом нарисовать шары в новом положении. Но при большом числе шаров на это рисование уйдет много времени, поэтому, возможно, придется рисовать только отрезки, соединяющие центры шаров в старом и новом положении, и не стирать старые изображения — тогда на экране возникнут траектории. Можно и ничего не рисовать, оставить экран в текстовом режиме, подсчитать некоторые характеристики системы (среднюю скорость, например) и вывести их на экран, но в одном и том же месте. Тогда при работе программы мы увидим на этом месте меняющиеся характеристики системы.

Блок управления. Здесь надо прежде всего прибавить $T1$ к T . А позже всего — передать управление: при $ТС > T$ — блоку расчета новых координат, а при $ТС \leq T$ — блоку расчета ближайшего соударения. Тем самым программа заикливаясь и начинает работать автоматически, демонстрируя нам на экране движение шаров. Причем при столкновении шаров картинка будет «застывать» на время расчета нового ближайшего соударения.

В промежутке между этими действиями компьютер может посмотреть, не нажата ли какая-нибудь клавиша. Если не нажата — работать дальше, а если нажата, то что-то сделать.

(Окончание см. на с. 75)



Абстрактный абрис

Закон сохранения энергии в электростатике

Кандидат физико-математических наук
С. А. ГОРДЮНИН

Закон сохранения энергии определяет в самом общем виде энергетический баланс при всевозможных изменениях в любой системе. Запишем его следующим образом:

$$A_{\text{внеш}} = \Delta W + Q, \quad (1)$$

где $A_{\text{внеш}}$ — работа, совершенная над рассматриваемой системой внешними силами, ΔW — изменение энергии системы, Q — количество теплоты, выделяемое в системе. Договоримся, что если $A_{\text{внеш}} > 0$, то над системой совершают положительную работу, а если $A_{\text{внеш}} < 0$, положительную работу

совершает система; если $\Delta W > 0$, то энергия системы увеличивается, а если $\Delta W < 0$, энергия уменьшается; наконец, если $Q > 0$, то в системе выделяется тепло, а если $Q < 0$, тепло системой поглощается.

В этой статье мы рассмотрим, как закон сохранения энергии «работает» в электростатике. В общем случае электростатическая система содержит взаимодействующие между собой заряды, находящиеся в электрическом поле.

Рассмотрим каждое слагаемое в уравнении (1) по отдельности.

Начнем с энергии. Энергия взаимодействия зарядов выражается через характеристики электрического поля этой системы зарядов. Так, например, энергия заряженного конденсатора емкостью C задается известным выражением

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{1}{2} qU, \quad (2)$$

где q — заряд обкладок, U — напряжение между ними. Напомним, что

конденсатор — это система двух проводников (обкладок, пластин), обладающая следующим свойством: если с одной обкладки на другую перенести заряд q (т. е. одну обкладку зарядить зарядом $+q$, а другую $-q$), то все силовые линии созданного таким образом поля будут начинаться на одной (положительно заряженной) обкладке и заканчиваться на другой. Поле конденсатора существует только внутри него.

Энергию заряженного конденсатора можно представить также как энергию поля, локализованного в пространстве между пластинами с плотностью энергии $\epsilon\epsilon_0 E^2/2$, где E — напряженность поля. В сущности, именно этот факт дает основание говорить о поле как об объекте, реально существующем, — у этого объекта есть плотность энергии. Но надо помнить, что это просто эквивалентный способ определения энергии взаимодействия зарядов (которую теперь мы называем энергией электрического поля). Таким образом, мы можем считать энергию конденсатора как по формулам (2), так и по формуле

$$W = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} V, \quad (3)$$

где V — объем конденсатора. Последней формулой легко пользоваться, конечно, только в случае однородного поля, но представление энергии в такой форме очень наглядно, а потому удобно.

Конечно, кроме энергии взаимодействия зарядов (энергии электрического поля) в энергию системы может входить и кинетическая энергия заряженных тел, и их потенциальная энергия в поле тяжести, и энергия пружин, прикрепленных к телам, и т. п.

Теперь о работе внешних сил. Помимо обычной механической работы $A_{\text{мех}}$ (например, по раздвиганию пластин конденсатора), для электрической системы можно говорить о работе внешнего электрического поля. Например, о работе батареи, заряжающей или перезаряжающей конденсатор. Задача батареи — создать фик-

сированную, присущую данному источнику разность потенциалов между теми телами, к которым она присоединена. Делает она это единственным возможным способом — забирает заряд от одного тела и передает его другому. Источник никогда не создает заряды, а только перемещает их. Общий заряд системы при этом сохраняется — это один из краеугольных законов природы.

В источниках разных конструкций электрическое поле, необходимое для перемещения зарядов, создают различные «механизмы». В батареях и аккумуляторах — это электрохимические реакции, в динамомашине — электромагнитная индукция. Существовало бы, что для выбранной системы зарядов (заряженных тел) это поле — внешнее, стороннее. Когда через источник с ЭДС \mathcal{E} от отрицательного полюса к положительному протекает заряд Δq , сторонние силы совершают работу

$$A_{\text{бат}} = \Delta q \mathcal{E}. \quad (4)$$

При этом если $\Delta q > 0$, то $A_{\text{бат}} > 0$ — батарея разряжается; если же $\Delta q < 0$, то $A_{\text{бат}} < 0$ — батарея заряжается и в ней накапливается химическая (или магнитная) энергия.

Наконец, о выделении тепла. Заметим только, что это джоулево тепло, т. е. тепло, связанное с протеканием тока через сопротивление.

Теперь обсудим несколько конкретных задач.

Задача 1. Два одинаковых плоских конденсатора емкостью C каждый присоединены к двум одинаковым батареям с ЭДС \mathcal{E} . В какой-то момент один конденсатор отключают от батареи, а другой оставляют присоединенным. Затем медленно разводят пластины обоих конденсаторов, уменьшая емкость каждого в n раз. Какая механическая работа совершается в каждом случае?

Если процесс изменения заряда на конденсаторе осуществляется все время медленно, тепло выделяться не будет. Действительно, если через резистор сопротивлением R протек заряд Δq за время t , то на резисторе за

это время выделится количество теплоты $Q = I^2 R t = \left(\frac{\Delta q}{t}\right)^2 R t = \frac{(\Delta q)^2 R}{t}$.

При достаточно больших t количество теплоты Q может оказаться сколь угодно малым.

В первом случае фиксирован заряд на пластинах (батарея отключена), равный $C\mathcal{E}$. Механическая работа определяется изменением энергии конденсатора:

$$A_{\text{мех}} = \Delta W = \frac{(C\mathcal{E})^2}{2(C/n)} - \frac{(C\mathcal{E})^2}{2C} = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}(n-1).$$

Во втором случае фиксирована разность потенциалов на конденсаторе и работает батарея, поэтому

$$A_{\text{мех}} + A_{\text{бат}} = \Delta W.$$

Через батарею протекает заряд

$$\Delta q = \frac{C}{n}\mathcal{E} - C\mathcal{E} = -C\mathcal{E}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Этот заряд меньше нуля, значит, батарея заряжается и ее работа

$$A_{\text{бат}} = \Delta q\mathcal{E} = -C\mathcal{E}^2\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Энергия поля в конденсаторе уменьшается:

$$\Delta W = \frac{1}{2} \frac{C}{n} \mathcal{E}^2 - \frac{C\mathcal{E}^2}{2} = -\frac{C\mathcal{E}^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Таким образом,

$$A_{\text{мех}} = \Delta W \quad A_{\text{бат}} = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Зарядка батареи происходит за счет работы по раздвиганию пластин и за счет энергии конденсатора.

Заметим, что слова про раздвигание пластин существенной роли не играют. Такой же результат будет при любых других изменениях, приводящих к уменьшению емкости в n раз.

Задача 2. В схеме, изображенной на рисунке 1, найдите количество теплоты, выделившееся в каждом резисторе после замыкания ключа. Конденсатор емкостью C_1 заряжен до на-

пряжения U_1 , а конденсатор емкостью C_2 — до напряжения U_2 . Сопротивления резисторов R_1 и R_2 .

Закон сохранения энергии (1) для данной системы имеет вид

$$0 = \Delta W + Q, \text{ т. е. } Q = W_{\text{нач}} - W_{\text{кон}}.$$

Начальная энергия конденсаторов равна

$$W_{\text{нач}} = \frac{C_1 U_1^2}{2} + \frac{C_2 U_2^2}{2}.$$

Для определения энергии в конечном состоянии воспользуемся тем, что суммарный заряд конденсаторов не может измениться. Он равен $C_1 U_1 \pm C_2 U_2$ (для случаев, когда конденсаторы были соединены одноименно или разноименно заряженными пластинами соответственно). После замыкания ключа этим зарядом оказывается заряжен конденсатор емкостью $C_1 + C_2$ (конденсаторы емкостями C_1 и C_2 соединены параллельно). Таким образом,

$$W_{\text{кон}} = \frac{(C_1 U_1 \pm C_2 U_2)^2}{2(C_1 + C_2)},$$

и

$$Q = W_{\text{нач}} - W_{\text{кон}} = \frac{C_1 C_2}{2(C_1 + C_2)} (U_1 \mp U_2)^2.$$

Как и должно быть, в обоих случаях выделяется тепло — есть джоулевы потери. Замечательно, что выделившееся количество теплоты не зависит от сопротивления цепи — при малых сопротивлениях текут большие токи и наоборот.

Теперь найдем, как количество теплоты Q распределяется между резисторами. Через сопротивления R_1 и R_2 в каждый момент процесса перезарядки текут одинаковые токи, значит, в каждый момент мощности, выделяемые на сопротивлениях, равны $P_1(t) = (I(t))^2 R_1$ и $P_2(t) = (I(t))^2 R_2$. Следовательно,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Кроме того, $Q_1 + Q_2 = Q$. Поэтому окончательно

$$Q_1 = Q \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad Q_2 = Q \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

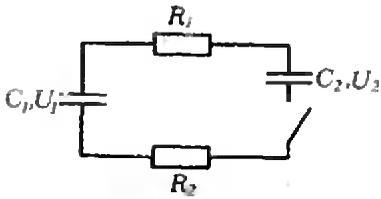


Рис. 1.

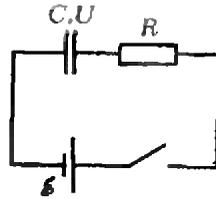


Рис. 2.

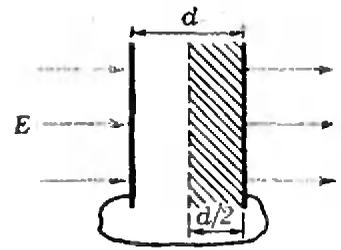


Рис. 3.

Задача 3. В схеме на рисунке 2 конденсатор емкостью C заряжен до напряжения U . Какое количество химической энергии запасется в аккумуляторе с ЭДС \mathcal{E} после замыкания ключа? Какое количество теплоты выделится в резисторе?

Первоначальный заряд на конденсаторе $q_1 = CU$. После окончания перезарядки заряд на конденсаторе станет равным $q_2 = C\mathcal{E}$. Протекший через батарею заряд в случае, когда к минусу батареи подключена отрицательно заряженная обкладка конденсатора, будет равен

$$\Delta q = q_2 - q_1 = C\mathcal{E} - CU.$$

В противном случае $\Delta q = C\mathcal{E} + CU$, и при этом аккумулятор будет разряжаться ($\Delta q > 0$). А в первом случае при $U > \mathcal{E}$ аккумулятор заряжается ($\Delta q < 0$), и количество химической энергии, запасенной в аккумуляторе после замыкания ключа, равно работе батареи:

$$\Delta W_{\text{хим}} = A_{\text{бат}} = C\mathcal{E}(U - \mathcal{E}).$$

Теперь запишем закон сохранения энергии (1) —

$$\mathcal{E}(C\mathcal{E} - CU) = \left(\frac{C\mathcal{E}^2}{2} - \frac{CU^2}{2} \right) + Q$$

— и найдем выделившееся количество теплоты:

$$Q = \frac{C}{2} (\mathcal{E} - U)^2 > 0.$$

Задача 4. Плоский конденсатор находится во внешнем однородном поле с напряженностью \vec{E}_0 , перпендикулярной пластинам. На пластинах площадью S распределены заряды $+q$ и $-q$. Расстояние между пластинами d . Какую минимальную работу надо совершить, чтобы поменять пластины местами? Расположить параллельно полю? Вынуть из поля?

Работа будет минимальной, когда процесс проводится очень медленно — при этом не выделяется тепло. Тогда, согласно закону сохранения энергии, $A_{\text{min}} = \Delta W$.

Чтобы найти ΔW , воспользуемся формулой (3). Поле между пластинами представляет собой суперпозицию поля \vec{E}_1 данного плоского конденсатора —

$$E_1 = \frac{q}{C} \frac{1}{d} = \frac{q}{\epsilon_0 S}$$

— и внешнего поля \vec{E}_0 .

При перемене пластин местами поле \vec{E}_1 меняется на $-\vec{E}_1$, а поле снаружи не меняется, т. е. изменение энергии системы связано с изменением ее плотности между пластинами конденсатора:

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{\epsilon_0(E_0 \mp E_1)^2}{2} Sd - \frac{\epsilon_0(E_0 \pm E_1)^2}{2} Sd = \\ &= \mp 2\epsilon_0 E_0 E_1 Sd. \end{aligned}$$

Если направления векторов \vec{E}_0 и \vec{E}_1 были одинаковы, то плотность энергии между пластинами уменьшилась после перемены пластин местами, а если направления были противоположны, то плотность энергии увеличилась. Таким образом, в первом случае $A_{\text{min}} = \Delta W = -2qE_0d$.

— конденсатор хочет сам развернуться и его надо удерживать ($A < 0$), а во втором случае $A_{\text{min}} = 2qE_0d > 0$.

Когда пластины конденсатора расположены параллельно полю, \vec{E}_0 и \vec{E}_1 перпендикулярны друг другу. Энергия поля внутри конденсатора в этом случае равна $\epsilon_0(E_0^2 + E_1^2)Sd/2$. Тогда

$$\begin{aligned} A_{\text{min}} = \Delta W &= \frac{\epsilon_0(E_0^2 + E_1^2)}{2} Sd - \\ &= \frac{\epsilon_0(E_0 \pm E_1)^2}{2} Sd = \mp qE_0d. \end{aligned}$$

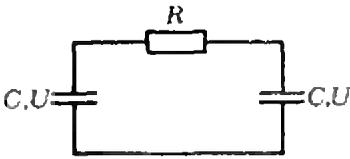


Рис. 4.

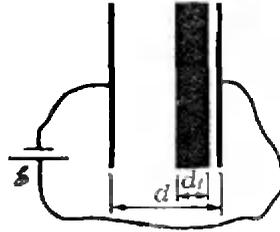


Рис. 5.

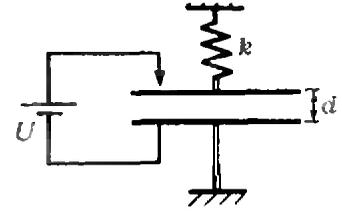


Рис. 6.

Когда конденсатор вынули из поля, в том месте, где он был, поле стало \vec{E}_0 , а в нем самом теперь поле \vec{E}_1 , т. е. ΔW и $A_{\text{плн}}$ оказываются такими же, как и в предыдущем случае.

Задача 5. Конденсатор емкостью C без диэлектрика заряжен зарядом q . Какое количество теплоты выделится в конденсаторе, если его заполнить веществом с диэлектрической проницаемостью ϵ ? То же, но конденсатор присоединен к батарее с ЭДС \mathcal{E} .

При заливании диэлектрика емкость конденсатора увеличилась в ϵ раз.

В первом случае фиксирован заряд на пластинах, внешних сил нет, и закон сохранения энергии (1) имеет вид

$$0 = \Delta W + Q.$$

Отсюда

$$Q = -\Delta W = -\left(\frac{q^2}{2C\epsilon} - \frac{q^2}{2C}\right) = \frac{q^2}{2C} \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) > 0.$$

Тепло выделяется за счет уменьшения энергии взаимодействия зарядов.

Во втором случае есть работа батареи и фиксировано напряжение на конденсаторе:

$$A_{\text{бат}} = \Delta q \mathcal{E} = (\epsilon C \mathcal{E} - C \mathcal{E}) \mathcal{E} = C \mathcal{E}^2 (\epsilon - 1),$$

$$\Delta W = \frac{\epsilon C \mathcal{E}^2}{2} - \frac{C \mathcal{E}^2}{2} = \frac{C \mathcal{E}^2}{2} (\epsilon - 1).$$

Тогда из уравнения (1) следует

$$Q = A_{\text{бат}} - \Delta W = \frac{C \mathcal{E}^2}{2} (\epsilon - 1).$$

Задача 6. Две соединенные проводником пластины площадью S каждая находятся на расстоянии d друг от друга (это расстояние мало по сравнению с размерами пластин) во

внешнем однородном поле с напряженностью \vec{E} , перпендикулярной пластинам (рис. 3). Какую работу надо совершить, чтобы сблизить их до расстояния $d/2$?

Пластины эквипотенциальны, и между ними поля нет. Результатом работы по сближению является создание поля с напряженностью E в объеме $S(d-d/2)$. Тогда, в соответствии с уравнениями (1) и (3),

$$A = \Delta W = \frac{\epsilon_0 E^2}{4} S d > 0.$$

Упражнения

1. Два одинаковых плоских конденсатора емкостью C каждый соединены параллельно и заряжены до напряжения U . Пластины одного из конденсаторов медленно разводят на большее расстояние. Какая при этом совершается работа?

2. Два конденсатора, каждый емкостью C , заряжены до напряжения U и соединены через резистор (рис. 4). Пластины одного из конденсаторов быстро раздвигают, так что расстояние между ними увеличивается вдвое, а заряд на пластинах за время их перемещения не изменяется. Какое количество теплоты выделится в резисторе?

3. Плоский воздушный конденсатор присоединен к батарее с ЭДС \mathcal{E} . Площадь пластин S , расстояние между ними d . В конденсаторе находится металлическая плита толщиной d_1 , параллельная пластинам (рис. 5). Какую минимальную работу нужно затратить, чтобы удалить плиту из конденсатора?

4. Большая тонкая проводящая пластина площадью S и толщиной d помещена в однородное электрическое поле с напряженностью E , перпендикулярной поверхности пластины. Какое количество теплоты выделится в пластине, если поле мгновенно выключить? Какую минимальную работу надо совершить, чтобы удалить пластину из поля?

5. Одна из пластин плоского конденсатора подвешена на пружине (рис. 6). Площадь каждой пластины S , расстояние между ними в начальный момент d . Конденсатор на короткое время подключили к батарее, и он зарядился до напряжения U . Какой должна быть минимальная жесткость пружины, чтобы не произошло касание пластин? Смещением пластины за время зарядки пренебречь.

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1988 году

Предлагаем подборку задач письменных и устных вступительных экзаменов по математике и физике в некоторые университеты — Горьковский (1), Казанский (2), Петрозаводский (3), Тбилисский (4), Уральский (5), Ярославский (6) и институты — Хабаровский педагогический (7), Горьковский политехнический (8), Московский автомеханический (9), Московский институт связи (10), Московский институт электронного машиностроения (11), Рижский политехнический (12), Томский политехнический (13).

Математика

Алгебра

1(10). Периметр некоторого многоугольника равен 158 см, причем длины его сторон составляют арифметическую прогрессию, разность которой равна 3 см. Наибольшая сторона многоугольника равна 44 см. Сколько сторон имеет многоугольник?

2(6). Моторная лодка, проплывая по реке из пункта *A* в пункт *B* против течения, затрачивает на треть больше времени, чем на обратный путь. Найдите отношение скорости лодки в стоячей воде к скорости течения.

3(12). Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 16 дней. Когда они вместе проработали 4 дня, первый рабочий заболел, и работу закончил второй рабочий, проработав еще 36 дней. За сколько дней всю работу мог бы сделать один первый рабочий?

4(12). Готовясь к экзамену по математике, абитуриент решил 116 задач по алгебре и геометрии. Если к $\frac{1}{3}$ числа решенных задач по алгебре прибавить еще 8 задач, то полученная сумма будет равна числу решенных задач по геометрии. Сколько задач по алгебре решил абитуриент при подготовке к экзамену?

5(10). Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45 % меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный сплав содержал 60 % меди?

6(9). Знаменатель несократимой дроби на 2 больше, чем числитель. Если у дроби, обратной данной, уменьшить числитель на 3 и вычесть из полученной дроби данную дробь, то получится $\frac{1}{15}$. Найдите эту дробь.

7(8). Экспресс проходит от Москвы до Ленинграда на 3 часа 30 минут быстрее, чем

пассажирский поезд, так как за 1 час он проходит на 35 км больше. Какова скорость каждого из них, если расстояние между Москвой и Ленинградом равно 650 км.

8(8). Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов *A* и *B* и встретились через 2 часа. Сколько времени затратил на путь *AB* каждый из пешеходов, если первый пришел в *B* на 1 час 40 минут позднее, чем второй в *A*?

9(8). Двое рабочих изготовили за месяц 220 деталей. В следующем месяце производительность первого рабочего возросла на 15 %, а второго — на 10 %. За второй месяц они изготовили 247 деталей. Сколько деталей изготовил каждый рабочий за второй месяц?

10(2). На некотором участке пути средняя скорость поезда была ниже на 20 %, чем предусмотрено расписанием. На сколько процентов увеличилось время прохождения этого участка?

11(1). Первый раствор содержал цемента и песка в пропорции 3:4, а второй — в отношении 1:2. В каком соотношении надо взять эти растворы, чтобы получить раствор в пропорции 15:22?

12(6). Сколькими способами можно составить сумму в двадцать рублей из монет достоинством 15 и 20 копеек?

13(1). Найдите первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой сумма всех ее членов равна 4, а сумма первых двух членов равна 3.

14(9). Сумма кубов членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии относится к сумме квадратов ее членов как 12:13. Сумма первых двух членов прогрессии равна $\frac{4}{3}$. Найдите эту прогрессию.

15(5). Мотоциклист, велосипедист и пешеход движутся по шоссе с постоянными скоростями в одну сторону. В 12 часов мотоциклист отставал от велосипедиста на расстояние в 3 раза меньшее, чем расстояние, на которое отставал велосипедист от пешехода. В 12 часов 15 минут мотоциклист догнал велосипедиста, а в 12 часов 40 минут — пешехода. Какое время будут показывать часы, когда велосипедист догонит пешехода?

16(5). Велосипедист и пешеход движутся по шоссе в одну сторону, а навстречу им едет мотоциклист. Скорости у всех постоянны. В 12 часов велосипедист отставал от пешехода, а мотоциклист был впереди пешехода, причем расстояние между велосипедистом и пешеходом было в 10 раз меньше, чем расстояние между пешеходом и мотоциклистом. В 13 часов велосипедист догнал пешехода, а в 14 часов 12 минут велосипедист встретился с мотоциклистом. Какое время будут показывать часы, когда мотоциклист встретится с пешеходом?

17(5). На рынке 1 кг апельсинов и 3 кг грейпфрутов вместе стоят столько же, сколько 4 кг мандаринов; а по 1 кг самого дорогого и самого дешевого из этих продуктов да еще 1 кг грейпфрутов и 2 кг мандаринов — столько же, сколько 6 кг апельсинов. Сколько

стоит 1 кг каждого из этих фруктов, если 1 кг самого дорогого из них стоит на 1 рубль больше, чем 1 кг самого дешевого?

18(5). В цехе фасуют в коробки печенье, пряники и вафли. 4 коробки печенья и 1 коробка пряников вместе весят столько же, сколько 5 коробок вафель; а по одной самой тяжелой и самой легкой из этих коробок да еще 1 коробка пряников и 3 коробки вафель — столько же, сколько 7 коробок печенья. Найдите массы коробок с каждым из этих продуктов, если масса самой тяжелой из них на 2 кг больше массы самой легкой.

19. Вычислите

$$a)(2). \left(\frac{11^3 + 3^3}{14} - 33 \right) : (10^2 - 6^4).$$

$$b)(2). \log_{0,6\sqrt{0,36}} 0,216.$$

$$в)(10). \frac{\log_2^2 18 - 4 \log_2^2 3 + 3 \log_2 18 + 6 \log_2 3}{\log_2 18 + 2 \log_2 3}.$$

$$г)(10). \left(3^{2 + \frac{\log_3 4}{\log_3 3}} - 9 \cdot 4^{\frac{1}{\log_3 3}} + 4^{1 + \log_3 25} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$д)(2). \frac{1}{\cos 10^\circ} \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 50^\circ.$$

$$e)(13). \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}.$$

$$ж)(13). \frac{\cos 64^\circ \cdot \cos 4^\circ - \cos 86^\circ \cdot \cos 26^\circ}{\cos 71^\circ \cdot \cos 41^\circ - \cos 49^\circ \cdot \cos 19^\circ}.$$

$$з)(13). \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} \right)^2.$$

$$и)(1). \left(\frac{a - 2b}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{4b^2}} + \frac{\sqrt[3]{2a^2b} + \sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{4b^2} + \sqrt[3]{16ab}} \right) : \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{2b} + a\sqrt{2b} + b\sqrt{a}}{a + b} \right).$$

$$к)(13). \left(\sqrt{1 + (a^{2/3} - x^{2/3}) \cdot x^{-2/3}} \right)^{-6} - \frac{a^2 + x^2}{a^2}.$$

$$л)(13). \frac{\sqrt{m+x} + \sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x} - \sqrt{m-x}}, \text{ если } x = \frac{4}{5} m.$$

20(1). Докажите, что

$$\sin 15^\circ = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/4.$$

21(7). Вычислите $\sin 18^\circ$.

22(10). Постройте график функции

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + \frac{2x}{x^2 + 1}} - \sqrt{1 - \frac{2x}{x^2 + 1}}}{\sqrt{1 + \frac{2x}{x^2 + 1}} + \sqrt{1 - \frac{2x}{x^2 + 1}}}.$$

23. Решите уравнения

$$a)(10). \frac{16x^4 - 1}{16x^2 - 4} = 4x + 2,5.$$

$$б)(8). \sqrt{5x + 10} + x + 2 = 0.$$

$$в)(9). (x^2 - 4)\sqrt{x + 1} = 0.$$

$$г)(2). \sqrt{3x + 1} - \sqrt{x - 12} = 5.$$

$$д)(2). 7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+6} - 5^{x+3}.$$

$$e)(1). 3^{4 \lg x} = 8,1x.$$

$$ж)(12). 0,2^{\log \frac{1}{5} 2 - 2x} - 5^{x+3} \log_2 2 = 10.$$

$$з)(12). 0,2 \cdot x^{\log_3 x + 3} = 25^{2,5 + \log_3 x}.$$

$$и)(9). \log_2^2 x = \log_3(9 - 2x^{\log_2 x}).$$

$$к)(10). \log_4 2 \cdot \log_{\frac{x}{4}} 2 = \log_{\frac{x}{16}} 2.$$

$$л)(1). (\sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}})^4 + (\sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}})^4 = 6.$$

$$м)(13). \log_3(2x^2 - 7x + 12) = 2.$$

$$н)(9). \cos 9x - \cos 7x - \cos(\pi + 3x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0.$$

$$o)(10). \sin 2x \cdot \sin 6x = \cos x \cdot \cos 3x.$$

$$п)(6). \log_2 \sin 2x = 1 + \log_2 \sin x + \log_2 \cos x.$$

$$р)(10). 2\sin^2 x + 2\sin x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}.$$

$$с)(12). \cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) + \sqrt{3x^2 - 17x - 6} = 0.$$

$$т)(6). 2^{\cos^2 x} - 8^{\sin^2 x} = 0.$$

$$у)(6). \frac{\lg(\cos^2 x)}{\lg(11 - x^2)} = 0.$$

24. Решите неравенства

$$a)(10). x + 7 \leq \frac{28 - 31x}{x^2 - 5x + 4}.$$

$$б)(9). f'(x) - f(x) \geq 0, \text{ если } f(x) = \frac{3}{5 - x}.$$

$$в)(10). f'(x) < g'(x), \text{ если } f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}.$$

$$г)(x) = 5x + \frac{1}{x}.$$

$$г)(1). (10x + 3)\sqrt{-x^2 + 3x + 1} \geq 0.$$

$$д)(6). \sqrt{x^2 - 9} < x.$$

$$e)(8). |x| \leq \sqrt{x^2 - 2} + 1.$$

$$ж)(5). \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_3(x^2 - x)} \geq 0,2.$$

$$з)(8). \frac{1}{4^{-x} + 2} - \frac{1}{4^{-x} + 1} < -\frac{1}{6}.$$

$$и)(5). 2^{\log_3(x^2 - 2x)} \geq 0,5.$$

$$к)(10). (x^2 - 2x - 3)(2 - 2^{1 - \cos 2x})^2 < 0.$$

$$л)(5). (0,5)^{x^2 - 3x - 6} < 4.$$

$$м)(8). \log_{0,1}(x^2 + 1) < \log_{0,1}(2x - 5).$$

$$н)(8). \log_{\frac{1}{2}} 9^{-1} + x \cdot \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{5^{5x - 7}} > 0.$$

25(10). Решите систему неравенств

$$\frac{\sqrt{x^2 - x - 20}}{x - 7} < 1, \quad x(6 - x) \geq 0.$$

26(9). Найдите область определения функции:

$$f(x) = \sqrt{\log_{x-2}(x^2 - 8x + 15)}.$$

27. Решите системы уравнений

а) (1).
$$\begin{cases} x^4 + 16y^4 = 32, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$$

б) (8).
$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{1}{2} \sqrt{xy} \\ x + y = 5. \end{cases}$$

в) (7).
$$\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81, \\ (\lg(y+x))^2 - \lg x = 2 \lg 3. \end{cases}$$

г) (8).
$$\begin{cases} 4^x \cdot 5^y = 16, \\ 2^x \cdot 3^{y+1} = 27. \end{cases}$$

д) (8).
$$\begin{cases} \log_4(x^2(y+2)) = 2, \\ 2 \log_2 x + 2 \log_2(y+2) = 6. \end{cases}$$

28 (10). Квадратные трехчлены $x^2 - 11x + q$ и $ax^2 - 7x - 20$ имеют общий корень, равный 4. Существуют ли такие значения x , при которых значение, принимаемое первым трехчленом, было бы на 50 больше значения, принимаемого вторым трехчленом?

29 (12). Найдите целое значение a , при котором числа x и y , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 4x + 3y = -2a, \\ x - 2y = 5, \end{cases}$$

удовлетворяют также условиям $x > 2$ и $y < -1$.

30 (2). Разность квадратов корней уравнения $3x^2 - 5x + p = 0$ равна $5/9$.

Найдите p .

31 (10). В уравнении $4x^2 - 8x + c = 0$ сумма кубов его корней равна 3,5. Найдите коэффициент c .

32 (1). Известно, что для некоторой квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ выполнены неравенства $f(-1) < 1$, $f(1) > -1$, $f(3) < -4$. Определите знак коэффициента a .

33 (10). Найдите, при каких значениях b для всех x выполняется тождество

$$\sin^2\left(\frac{15}{8} \pi - x\right) - \cos^2\left(\frac{17}{8} \pi - x\right) = -\frac{b\sqrt{2}}{2} \cos 2x.$$

Анализ

1. Постройте графики функций

а) (8). $y = 2x + |x - 3|.$

б) (8). $y = |3 + 2x - x^2| + 3x - 3.$

в) (10). $y = \frac{(2-x)(x^2-x-2)}{|x+1|}.$

2 (13). Определите графически, сколько действительных корней имеет уравнение $2^x = x^3$.

3 (13). Установите графически, в какой четверти находится точка пересечения графиков

$$xy = 10 \text{ и } x^2 + y = 1.$$

4 (8). Найдите координаты всех точек пересечения графиков функций

$$y = \sin 4x \text{ и } y = 2 \sin 2x - 2 \sin^2 x.$$

5 (13). Вычислите $y' \left(-\frac{8}{27} \right)$, если $y = \sqrt[3]{a^2 - \sqrt[3]{x^2}}$.

6 (13). Найдите угловой коэффициент касательной к кривой

$$y = x^2 - 4x + 3$$

в точке $M(0; 3)$.

7 (10). Найдите модуль разности экстремумов функции

$$y = x^3 + 3x^2 - 3x + 1.$$

8 (13). Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^2 - 3x^2 + 3x + 2$$

на промежутке $x \in [-2; 2]$.

9 (5). Определите наименьшее значение функции $y(x) = ax^2 + 4x + c$ на отрезке $[2; 3]$, если $y(-2) = -13$, $y(4) = -25$.

10 (6). Найдите множество значений функции

$$f(x) = 10^x + 3 \cdot 10^{-x}.$$

Геометрия

1 (9). Векторы \vec{a} и \vec{b} неколлинеарны. Найдите x и y из векторного равенства

$$2\vec{a} + y \cdot \vec{b} = 40 \cdot 5\vec{a} + (2-x)\vec{b}.$$

2 (2). Векторы $\vec{a} = (x, 2)$ и $\vec{b} = (3, y)$ имеют одинаковые неравные нулю суммы компонент. Найдите y , если векторы $5\vec{a} + 2\vec{b}$ и $4\vec{a} + 3\vec{b}$ коллинеарны.

3 (7). Вершины четырехугольника находятся в точках $A(0, 0)$, $B(-1, 1)$, $C(0, 2)$, $D(1, 1)$. Докажите, что $ABCD$ является квадратом.

4 (5). В треугольнике ABC заданы стороны $AB = 2\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{5}$ и угол $A = 45^\circ$. Чему равна площадь этого треугольника, если дополнительно известно, что высота, опущенная из вершины C на сторону AB , меньше $\sqrt{2}$?

5 (10). Найдите высоту равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна 5, а косинус угла при вершине равен $\left(-\frac{7}{25}\right)$.

6 (8). Около круга радиусом R описан равнобедренный треугольник с углом 120° . Определите стороны треугольника.

7 (2). Длина стороны правильного шестиугольника равна $2\sqrt{6}$. Найдите длину стороны равновеликого ему равностороннего треугольника.

8 (6). Основание равнобедренного треугольника равно 10, а опущенная на него высота — 12. Вершины треугольника служат центрами трех попарно касающихся кругов. Найдите радиус четвертого круга, который касается трех указанных кругов.

9 (1). Определите углы треугольника, в котором медиана, биссектриса и высота, выходящие из одной и той же вершины треугольника, делят соответствующий угол на 4 равные части.

10 (1). Точки A, B, C — вершины вписанного в окружность правильного треугольника. Точка K лежит на меньшей дуге AB . Докажите, что $|AK| + |BK| = |KC|$.

11 (5). Точка O и равнобедренный треугольник ABC лежат в одной плоскости. Известно, что $AO = BO = \sqrt{7}$, $OC = 1$, угол ACB равен 120° . Найдите площадь треугольника ABC , если $AB < 4$, и выясните, где лежит точка O — вне или внутри треугольника ABC .

12 (13). В равнобокую трапецию, основания которой 2 и 8, вписан круг. Чему равен радиус этого круга?

13 (8). В трапеции даны основания: 8 и 12. Один из острых углов равен 30° , продолжения боковых сторон пересекаются под прямым углом. Найдите высоту трапеции.

14 (8). В равнобедренной трапеции длина средней линии равна 5, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

15 (5). В трапеции $ABCD$ заданы боковые стороны $AB=2\sqrt{3}$, $CD=\sqrt{10}$, одно основание $BC=4$ и угол $A=60^\circ$. Чему равна площадь трапеции, если дополнительно известно, что площадь треугольника ABD меньше 8?

16 (12). Диагональ равнобедренной трапеции равна $4\sqrt{13}$ и составляет угол α с большим основанием трапеции. Найдите высоту трапеции, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$.

17 (10). В пересечении двух равных кругов вписан ромб с диагоналями 12 и 6. Найдите радиус окружностей.

18 (10). В окружности перпендикулярно диаметру AB проведена хорда CD . Точка их пересечения делит диаметр на отрезки 18 и 32. Найдите длину хорды CD .

19 (2). Внутри круга, радиус которого равен 13, дана точка M , отстоящая от центра круга на 5. Через точку M проведена хорда $AB=25$. Определите произведение длин отрезков, на которые хорда AB делится точкой M .

20 (12). В ромбе острый угол равен α , а большая диагональ ромба равна 16. Найдите площадь ромба, если $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}$.

21 (11). Найдите угол A треугольника ABC , если заданы длины его сторон $AC=b$, $AB=c$ и длина l биссектрисы внутреннего угла A .

22 (13). В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе проведена высота CD , угол B равен 60° , отрезок $BD=1$. Найдите длину гипотенузы.

23 (5). Равносторонний треугольник ABC и точка O лежат в одной плоскости. Известно, что $AO=BO=2\sqrt{13}$, $OC=2\sqrt{3}$ и угол CAO меньше 60° . Найдите площадь треугольника ABC , если $AB > \sqrt{17}$, и выясните, где лежит точка O — вне или внутри треугольника ABC .

24 (13). На сколько процентов уменьшится объем пирамиды, если одновременно уменьшить площадь ее основания и высоту на 20%?

25 (13). Отношение площади основания конуса к площади осевого сечения равно l . Найдите угол наклона образующей к основанию.

26 (8). Найдите косинус угла между смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды, у которой боковое ребро равно стороне основания.

27 (8). В основании четырехугольной пирамиды лежит квадрат, одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно основанию. Определите объем пирамиды, если ее наибольшее боковое ребро равно l , а отрезок, соединяющий центр основания с вершиной, равен b .

28 (10). Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проведенной через середины двух смежных боковых ребер параллельно высоте пирамиды. (Построение объясните.) Вычислите площадь сечения,

если боковое ребро равно 18, а диагональ основания $16\sqrt{2}$.

29 (7). В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 8, а плоский угол при вершине 45° . Найдите полную поверхность пирамиды.

30 (13). Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если длина стороны ее основания равна 6, а величина двугранного угла при основании равна 45° .

31 (8). В правильной треугольной призме проведено сечение через сторону основания и середину противоположного бокового ребра. Найдите площадь сечения, если площадь основания S , а диагональ боковой грани наклонена к основанию под углом α .

32 (2). В правильной четырехугольной пирамиде высота в два раза меньше стороны основания. Найдите угол (в градусах) между боковыми гранями пирамиды.

33 (10). Высота правильной треугольной пирамиды вдвое меньше стороны основания. Определите двугранный угол при основании пирамиды.

34 (7). Площадь осевого сечения цилиндра равна Q , угол между диагональю сечения и плоскостью основания равен α . Найдите объем цилиндра.

35 (6). В правильной треугольной пирамиде $SABC$, где S — вершина, сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 3. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, перпендикулярной основанию, которая проходит через середины ребер AB и AC .

36 (7). Найдите диагональ осевого сечения цилиндра, если объем цилиндра равен 120 л, а боковая поверхность равна 60 л.

Физика

Механика

1(3). В течение какого времени пассажир, сидящий у окна поезда, идущего со скоростью $v_1=60$ км/ч, будет видеть проходящий мимо него встречный поезд, скорость которого $v_2=48$ км/ч, а длина $l=150$ м? Ответ выразите в секундах.

2(1). Автомобиль начинает движение из состояния покоя и проходит путь $l=120$ м. Первые $l_1=80$ м он движется равноускоренно, а оставшиеся $l_2=40$ м — равномерно и проходит их за $t=2$ с. Какова средняя скорость автомобиля на всем пути?

3(11). На рисунке 1 дан график зависимости ускорения от времени при прямолинейном движении материальной точки. Постройте график зависимости скорости точки от времени. Определите путь, пройденный точкой за все время движения. Начальная скорость точки равна нулю.

4(4). В момент начала свободного падения первого тела второе тело начинает скользить без трения с наклонной плоскости (рис. 2). Сравните времена движения этих тел.

5(7). Камень, падающий свободно без начальной скорости, пролетает вторую половину пути за $t=2$ с. С какой высоты он падал?*

*Здесь и далее ускорение свободного падения считается равным $g=10$ м/с².

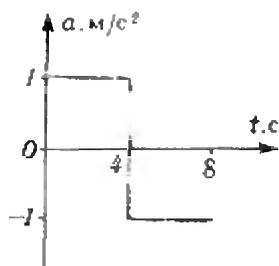


Рис. 1.

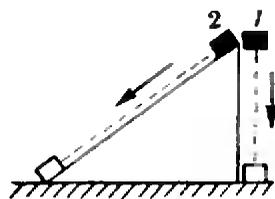


Рис. 2.

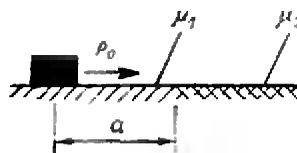


Рис. 3.

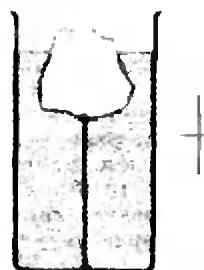


Рис. 4.

6(3). С неподвижного относительно земли вертолета сбросили без начальной скорости тело. Спустя $t_1=1$ с было сброшено тоже без начальной скорости второе тело. Определите расстояние между телами через $t_2=2$ с от начала падения первого тела. Сопротивление воздуха не учитывать.

7(13). Какой высоты одновременно достигнут звук выстрела и пуля при вертикально произведенном выстреле с начальной скоростью $v_0=350$ м/с? Скорость звука принять равной $v=340$ м/с. Сопротивление движению пули не учитывать.

8(11). Тело массой $m=0,5$ кг брошено со скоростью $v_0=20$ м/с под углом $\alpha=30^\circ$ к горизонту. Определите наибольшую высоту подъема тела, дальность полета и изменение импульса тела за время полета. Сопротивлением воздуха пренебречь.

9(12). На нити подвешен груз, масса которого $m=1$ кг. Нить с грузом опускают вниз с ускорением $a=5$ м/с². Определите силу натяжения нити.

10(5). На тело массой m , расположенное на горизонтальной плоскости, действует сила \vec{F} , направленная вниз под углом α к горизонту. Коэффициент трения тела о плоскость μ . Найдите ускорение тела.

11(12). Через неподвижный блок перекинута нить, к концам которой подвешены два одинаковых груза массой $M=0,5$ кг каждый. Когда к одному из грузов подвесили дополнительное тело, каждый груз, пройдя расстояние $l=1$ м, приобрел скорость $v=2$ м/с. Определите массу дополнительного тела. Массами нити и блока пренебречь. Нить нерастяжима.

12(11). По выпуклому мосту, имеющему радиус кривизны $R=40$ м, движется автобус массой $m=2 \cdot 10^3$ кг со скоростью $v=36$ км/ч. Определите ускорение автобуса и силу его давления на мост в верхней точке моста.

13(3). Брус массой $m=50$ кг и длиной $l=10$ м одним концом опирается о горизонтальную плоскость. Другой его конец удерживается веревкой так, что веревка и брус образуют прямой угол, а брус и горизонтальная плоскость — угол $\alpha=60^\circ$. Найдите силу натяжения веревки.

14(9). Шар радиусом R покоится на поверхности земли. С верхней точки шара скользит из состояния покоя тело, размеры которого много меньше размеров шара. На какой высоте над поверхностью земли тело отделится от шара?

15(10). Деревянный брусок находится на наклонной плоскости. С какой наименьшей силой нужно прижать брусок к наклонной плоскости, чтобы он остался на ней в покое? Масса бруска $m=0,2$ кг; длина наклонной плоскости $l=1$ м, а высота $h=0,5$ м; коэффициент трения бруска о наклонную плоскость $\mu=0,4$.

16(7). Автомобиль массой $m=3$ т движется равномерно со скоростью $v=40$ км/ч. Найдите мощность, развиваемую двигателем автомобиля, если коэффициент трения $\mu=0,06$.

17(1). Горизонтальный стол сделан из двух видов материала, так что коэффициент трения между кубиком и столом имеет значения μ_1 и μ_2 (рис. 3). Расстояние от кубика до поверхности с коэффициентом трения μ_2 равно a . Какой путь пройдет кубик до остановки, если ему сообщить горизонтальную скорость v_0 ?

18(13). Тело брошено горизонтально со скоростью $v_0=6$ м/с с высоты $H=5$ м. Определите кинетическую энергию тела при падении на землю, если его масса $m=1$ кг.

19(5). По наклонной плоскости высотой $h=0,5$ м и длиной склона $l=1$ м скользит тело массой $m=3$ кг. Тело приходит к основанию наклонной плоскости со скоростью $v=2,45$ м/с. Найдите количество теплоты, выделившееся при трении, и коэффициент трения тела о плоскость. Начальная скорость тела была равна нулю.

20(4). Два свинцовых шара, массы которых одинаковы, движутся со скоростями v и $2v$ навстречу друг другу. Определите повышение температуры шаров в результате неупругого удара, если $v=9$ м/с, а удельная теплоемкость свинца $c=130$ Дж/(кг·К).

21(4). Частица налетает на покоящуюся мишень и отражается назад с уменьшенной в n раз кинетической энергией. Определите отношение массы частицы к массе мишени, если соударение упругое.

22(3). Кусок металла падает с высоты $h=10$ м на такой же второй кусок. Удар неупругий, куски слипаются в единый блок. На сколько изменится температура блока, если первоначально оба куска были при одной и той же температуре? Сопротивлением воздуха и теплообменом с окружающей средой пренебречь. Удельная теплоемкость металла $c=2,5 \cdot 10^2$ Дж/(кг·К).

23(4). Частица, движущаяся с кинетической энергией E_0 , упруго сталкивается с такой же неподвижной частицей и отклоняется от пер-

воначального направления на угол $\alpha = 60^\circ$. Определите кинетические энергии частиц после соударения.

24(11). В стакане с водой плавает лед. Как будут изменяться уровень воды в стакане и давление на дно стакана при таянии льда?

25(11). Можно ли достать воду из колодца глубиной $h = 12$ м с помощью насоса, расположенного на поверхности земли и способного создавать в опущенной в колодец трубе сколь угодно низкое давление? Атмосферное давление на поверхности $p_0 = 10^5$ Па, плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³.

26(12). Бревно длиной $l = 3,5$ м и поперечным сечением $S = 0,04$ м² плавает в воде. Какую наибольшую массу может иметь человек, чтобы бревно не начало тонуть, когда человек встанет на него? Плотность бревна $\rho_b = 500$ кг/м³, плотность воды $\rho_w = 1000$ кг/м³.

27(1). В цилиндрическом стакане с водой плавает льдинка, притянутая нитью к дну (рис. 4). Когда льдинка растаяла, уровень воды понизился на Δh . Каково было натяжение нити? Площадь дна стакана S .

28(4). Деревянный шарик, падая с высоты $h_1 = 20$ см, погрузился в воду на глубину $h_2 = 60$ см. На какую высоту выпрыгнет из воды этот шарик? Сопротивление воды считать постоянным; сопротивлением воздуха пренебречь. Плотность дерева $\rho_d = 0,8$ г/см³, воды — $\rho_w = 1$ г/см³.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1(7). Найдите плотность гелия при температуре $t = 20^\circ\text{C}$ и давлении $p = 10^5$ Па. Молярная масса гелия $M = 4$ г/моль.*

2(3). При какой температуре $m_1 = 1$ г азота будет занимать тот же объем, что и $m_2 = 1$ г кислорода при $t_2 = 47^\circ\text{C}$? Давления обоих газов одинаковы. Молярная масса азота $M_1 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, кислорода — $M_2 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

3(13). Из баллона со сжатым кислородом при изотермическом процессе израсходовали столько кислорода, что его давление упало от $p_1 = 9,8$ МПа до $p_2 = 7,84$ МПа (1 МПа = 10^6 Па). Какая доля кислорода израсходована?

4(3). Какое количество теплоты выделится при охлаждении на $\Delta t = 1^\circ\text{C}$ воды в пруду, имеющем площадь $S = 420$ м² и среднюю глубину $h = 1,5$ м? Удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), плотность $\rho = 10^3$ кг/м³.

5(5). Для измерения температуры воды, имеющей массу $m = 66$ г, в нее погрузили термометр, который показал $t_1 = 32,4^\circ\text{C}$. Какова действительная температура воды, если теплоемкость термометра $C = 1,9$ Дж/К и перед погружением в воду он показывал температуру $t_2 = 17,8^\circ\text{C}$? Удельная теплоемкость воды $c = 4,2$ кДж/(кг·К).

6(3). Нагретая железная болванка массой $M = 3,3$ кг ставится на поверхность льда, имеющего температуру 0°C . После охлаждения болванки до 0°C под ней расплавилось $m = 460$ г льда. Какова была температура нагретой

болванки? Рассеяние тепла в окружающую среду не учитывать. Удельная теплоемкость железа $c = 460$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

7(4). Для приближенного определения удельной теплоты парообразования воды ученик проделал следующий опыт. На электроплитке он нагрел воду, причем оказалось, что на нагревание ее от $t_1 = 10^\circ\text{C}$ до $t_2 = 100^\circ\text{C}$ потребовалось $\tau_1 = 18$ мин, а для обращения $k = 0,2$ ее массы в пар — $\tau_2 = 23$ мин. Какова удельная теплота парообразования воды по данным опыта? Удельная теплоемкость воды $c = 4,2$ кДж/(кг·К).

8(10). Молекулярный водород, масса которого $m = 6,5$ г и температура $t = 27^\circ\text{C}$, нагревают при постоянном давлении так, что его объем увеличивается вдвое. Найдите работу, совершаемую газом при расширении. Молярная масса водорода $M = 2$ г/моль.

9(9). Для изобарного нагревания $\nu = 800$ моль газа на $\Delta T = 500$ К газу сообщили количество теплоты $Q = 9,4$ МДж. Определите работу газа и приращение его внутренней энергии.

10(5). Вычислите работу, которую совершит газ при изобарном нагревании от $t_1 = 20^\circ\text{C}$ до $t_2 = 100^\circ\text{C}$, если он находится в вертикальном сосуде, закрытом подвижным поршнем сечением $S = 20$ см² и массой $m = 5$ кг. Первоначальный объем газа $V = 5 \cdot 10^{-3}$ м³, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

11(13). Определите разность уровней ртути в двух сообщающихся капиллярах с диаметрами каналов $d_1 = 1$ мм и $d_2 = 3$ мм. Плотность ртути $\rho = 1,36 \cdot 10^4$ кг/м³, коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 0,47$ Н/м, ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с².

12(7). Какую работу надо совершить, чтобы выдуть мыльный пузырь радиусом $r = 4$ см? Для мыльного раствора коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 0,04$ Н/м.

Основы электродинамики

1(13). Два положительных заряда $q_1 = q$ и $q_2 = 4q$ находятся один от другого на расстоянии $l = 3$ м. На каком расстоянии от заряда q_1 находится точка, напряженность электрического поля в которой равна нулю?

2(4). В поле зарядов $+q$ и $-q$ помещают заряд $q/2$ сначала в точку C , а затем в точку D (рис. 5). Сравните силы (по модулю), действующие на заряд, если $DA = AC = CB$.

3(1). Положительно заряженный шар радиусом $R = 5$ см создает в точке A на расстоянии $r = 1$ м от центра шара поле напряженностью $E = 1$ В/м. Чему равен потенциал поверхности шара? Какова работа внешних сил, необходимая для того, чтобы заряд $q = 10^{-6}$ Кл перенести из точки A в точку B , отстоящую на $l = 10$ см от центра шара?

4(5). Электрон влетает в плоский конденсатор длиной $L = 5$ см под углом $\alpha = 30^\circ$ к поверхности пластин, а вылетает из него параллельно пластинам. Определите первоначальную энергию электрона в пучке, если напряженность электрического поля внутри конденсатора $E = 600$ В/см. Заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

* Здесь и далее считается известной универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль·К).

5(11). Конденсатор емкостью C , заряженный до разности потенциалов $U_1=40$ В, соединяется одновременно заряженными обкладками с конденсатором емкостью $2C$, заряженным до напряжения $U_2=400$ В. Определите напряжение на конденсаторах после соединения.

6(3). Три одинаковых резистора, включенных последовательно, имеют полное сопротивление $R_1=9$ Ом. Чему будет равно сопротивление, если эти же резисторы включить параллельно?

7(7). Какое сопротивление R_x надо включить между точками A и B (рис. 6), чтобы сопротивление всей цепи было $R=10$ Ом? Остальные сопротивления равны: $R_1=R_4=3$ Ом, $R_2=R_3=10$ Ом.

8(10). Вольтметр, соединенный последовательно с резистором сопротивлением $R=3 \cdot 10^4$ Ом, при подключении к источнику тока с напряжением $U_0=120$ В показал $U=20$ В. Определите сопротивление вольтметра.

9(11). Источник тока с внутренним сопротивлением $r=4$ Ом подключили к резистору сопротивлением $R=6$ Ом. Напряжение на зажимах источника оказалось равным $U=18$ В. Определите ЭДС источника и его КПД.

10(5). В схеме, приведенной на рисунке 7, ЭДС батареи $\mathcal{E}=120$ В, $R_1=25$ Ом, $R_2=R_3=100$ Ом. Найдите мощность, выделяющуюся на резисторе сопротивлением R_1 . Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

11(12). Две электрические лампочки, соединенные параллельно, подключены к источнику питания. Сопротивление первой лампочки $R_1=360$ Ом, второй — $R_2=240$ Ом. Во сколько раз мощность, которую выделяет вторая лампочка, больше мощности, выделяемой первой лампочкой?

12(1). Как при параллельном, так и при последовательном соединении двух одинаковых аккумуляторов на внешнем сопротивлении выделялась мощность $P=80$ Вт. Какая мощность будет выделяться на этом сопротивлении, если замкнуть на него лишь один из аккумуляторов?

13(12). В калориметр массой $m_1=200$ г с удельной теплоемкостью $c_1=400$ Дж/(кг·К) налито $m_2=0,3$ кг жидкости с удельной теплоемкостью $c_2=2000$ Дж/(кг·К) и опущена спираль сопротивлением $R=5$ Ом. Сколько времени следует пропускать через спираль ток $I=2$ А, чтобы температура в калориметре повысилась на $\Delta T=2,5$ К?

14(12). При электролизе раствора серной кислоты за $t=50$ мин выделилось $m=0,3$ г водорода. Определите мощность, расходуемую на нагревание электролита, если его сопротивление $R=0,4$ Ом. Электрохимический эквивалент водорода $k=0,01 \cdot 10^{-6}$ кг/Кл.

15(4). Деталь надо покрыть слоем хрома толщиной $d=50$ мкм. Сколько времени потребуется для покрытия, если норма плотности тока (отношение силы тока к площади поперечного сечения проводника) при хромировании $j=2$ кА/м²? Плотность хрома $\rho=7200$ кг/м³, электрохимический эквивалент $k=0,18 \cdot 10^{-6}$ кг/Кл.

16(11). Электролиз подкисленной воды при нормальных условиях длится $t=5 \cdot 10^4$ с, при этом выделяется $V=10^{-3}$ м³ кислорода. Определите силу тока, проходящего через воду, если плотность кислорода $\rho=1,4$ кг/м³, а электрохимический эквивалент $k=8 \cdot 10^{-8}$ кг/Кл.

17(12). Под влиянием однородного магнитного поля в нем движется с ускорением $a=2$ м/с² прямолинейный проводник поперечным сечением $S=1$ мм². Направление проводника перпендикулярно линиям индукции, и по проводнику течет ток $I=1$ А. Плотность материала проводника $\rho=2,5 \cdot 10^3$ кг/м³. Определите индукцию магнитного поля.

18(10). Проводник длиной $l=2$ м движется со скоростью $v=10$ м/с перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля. Определите величину индукции магнитного поля, если на концах проводника возникает разность потенциалов $U=0,02$ В.

Колебания и волны

1(4). Груз массой $m=400$ г совершает колебания на пружине жесткостью $k=250$ Н/м. Амплитуда колебаний $x_m=15$ см. Найдите наибольшую скорость движения груза.

2(11). Шарик, подвешенный на пружине, сместили на расстояние $a=0,01$ м вниз от положения равновесия и отпустили. Какой путь пройдет шарик за $t=2$ с, если частота колебаний этой системы $\nu=5$ Гц? Затуханием пренебречь.

3(5). От груза, висящего на пружине жесткостью k , отделяется его часть массой m . На какую максимальную высоту поднимется после этого оставшаяся часть груза? Ускорение свободного падения равно g , сопротивлением воздуха пренебречь.

4(13). Зависимость силы тока (в амперах) от времени в колебательном контуре описывается уравнением $i=0,1 \sin 300\pi t$. Найдите индуктивность контура, если максимальная энергия электрического поля конденсатора $W_m=0,005$ Дж.

5(12). Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L=10^{-3}$ Гн и конденсатора емкостью $C=10^{-6}$ Ф. Конденсатор заряжен до максимального напряжения $U_m=100$ В. Определите максимальную силу тока в контуре при свободных колебаниях в нем.

6(7). Будут ли колебательные контуры настроены в резонанс, если их параметры таковы: $C_1=120$ пФ, $L_1=3,5$ мГн, $C_2=150$ пФ, $L_2=5$ мГн? Как нужно изменить емкость C_2 или индуктивность L_2 , чтобы контуры были настроены в резонанс?

7(3). Ток в первичной обмотке трансформатора $I_1=0,5$ А, напряжение на ее концах $U_1=220$ В. Во вторичной обмотке ток $I_2=11$ А, напряжение — $U_2=9,5$ В. Определите КПД трансформатора.

8(8). Звуковые волны из воздуха распространялись в воду. Длина волны звука в воздухе $\lambda_1=1$ м. Какова длина волны звука в воде? Скорость звука в воде $v_2=1,38 \cdot 10^3$ м/с, в воздухе — $v_1=0,34 \cdot 10^3$ м/с.

Оптика

1(10). Луч света падает на плоскую стеклянную пластину под углом $\alpha=50^\circ$. На

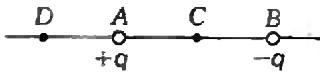


Рис. 5.

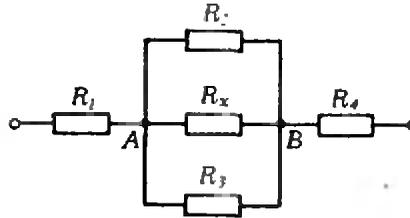


Рис. 6.

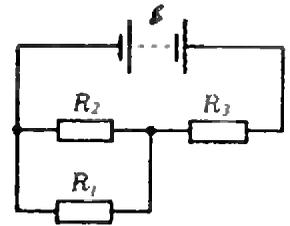


Рис. 7.

сколько сместится выходящий из пластины луч, если толщина ее $d=17,2$ мм? Показатель преломления стекла $n=1,5$.

2(12). Действительное изображение миллиметрового деления шкалы, расположенной перед линзой на расстоянии $d=12,5$ см, имеет на экране размер $H=8$ см. На каком расстоянии от линзы находится экран?

3(11). Собирающая линза дает на экране резкое изображение предмета, которое в $\Gamma=2$ раза больше самого предмета. Расстояние от предмета до линзы на $a=6$ см превышает ее фокусное расстояние. Определите расстояние от линзы до экрана.

4(4). В главном фокусе собирающей линзы с фокусным расстоянием F поместили рассеивающую линзу. Предмет находится по другую сторону от собирающей линзы на расстоянии $3F$ от нее. Найдите фокусное расстояние рассеивающей линзы, если данная система дает действительное и в два раза увеличенное изображение предмета.

Квантовая физика

1(3). Красной границе фотоэффекта для калия соответствует длина волны $\lambda_{\max}=6,2 \cdot 10^{-7}$ м. Найдите работу выхода (в электронвольтах) электронов из калия.*

2(4). На один из вольфрамовых электродов ($A_{\text{вых}}=4,5$ эВ) двухэлектродного стеклян-

* Здесь и далее считаются известными постоянная Планка $h=6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, скорость света $c=3 \cdot 10^8$ м/с и заряд электрона $e=1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

ного баллона падает пучок ультрафиолетовых лучей с длиной волны $\lambda=10^{-7}$ м. Между электродами приложено тормозящее напряжение $U=-10$ В. На каком расстоянии от первого электрода скорость фотоэлектронов уменьшится до нуля, если расстояние между электродами $d=40$ см? Электрическое поле внутри баллона считать однородным.

3(13). При освещении пластинки, изготовленной из некоторого металла, светом с частотой $\nu_1=8 \cdot 10^{14}$ Гц, а затем $\nu_2=6 \cdot 10^{14}$ Гц обнаружили, что максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов изменилась в 3 раза. Определите работу выхода (в электронвольтах) электронов из этого металла.

4(4). Пучок ультрафиолетовых лучей с длиной волны $\lambda=10^{-7}$ м передает металлической поверхности мощность $P=10^{-6}$ Вт. Определите силу возникшего фототока, если фотоэффект вызывает $\eta=1\%$ падающих фотонов.

5(11). Частота кванта света $\nu=5 \cdot 10^{14}$ Гц. Определите длину волны, энергию и массу кванта.

6(13). Атомный реактор приводит в действие турбогенератор мощностью $P=2 \cdot 10^6$ Вт. Определите КПД турбогенератора, если за время t , равное суткам, расход урана ${}^{235}\text{U}$ составляет $m=0,54$ кг, а при делении одного ядра этого элемента выделяется энергия, в среднем равная $W=3,2 \cdot 10^{-11}$ Дж. Постоянная Авогадро $N_A=6,02 \cdot 10^{23}$ моль $^{-1}$.

Публикацию подготовили А. А. Егоров,
В. А. Тихомирова

Газ на дисплее

(Начало см. на с. 61)

Например, сюда можно заложить «S» — останов, затем «R» — пуск; «B» — цикл замены всех скоростей на противоположные и изменение основного цвета палитры; «>» — удвоение TØ; «<» — уменьшение

TØ вдвое (если такая операция меняет TC, то управление после нее надо передавать на расчет ближайшего соударения); «Ø» — передача управления на блок подготовки экрана (очистка экрана); «E» — конец работы и другие команды управления режимом работы модели. Звуковой эффект в момент столкновения оживит модель. В общем, здесь все зависит от вас и вашего компьютера.

**Ответы,
указания,
решения**



...ла была собака...

1. Десятичное число, которое показывает, сколько в нем единиц, двоек, ..., нулей, равно 2 100 010 006.
2. В качестве последнего замечания автор просто переписал перевод предпоследнего. Тем самым, это последнее замечание уже не переводилось на иностранный язык и благодарить за него переводчика не было необходимости.



...анные школьные задачи

1. 4. Решение. Пусть $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$ — наши 5 чисел. Сумма 10 разностей $x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_5 - x_4$ равна, как показывает подсчет,

$$4x_5 + 2x_4 - 2x_2 - 4x_1,$$

и ясно, что

$$4x_5 + 2x_4 - 2x_2 - 4x_1 \leq 4(x_5 + x_4 + x_3 + x_2 + x_1) = 4.$$

Значение 4 достигается при $x_5 = 1, x_4 = \dots = x_1 = 0$.

2. Умножая правую часть второго равенства на $abc = 1$, получаем $a + b + c = bc + ac + ab, abc - bc - ac - ab + a + b + c - 1 = 0, (a-1)(b-1)(c-1) = 0$, т. е. по крайней мере одно из чисел a, b, c равно 1.
3. (2, 2, 5). Решение и е. Числа x и z имеют разную четность, значит, меньшее из них, т. е. x , равно 2. Если y нечетно, то $2^y + 1$ делится на 3 (докажите!), причем уже $2^3 + 1 = 9 > 3$. Значит, y четно, т. е. $y = 2$ и $z = 5$.

4. Поскольку $AF \parallel CD$ и $AD = CF$, четырехугольник $ACDF$ есть равнобедренная трапеция или прямоугольник. Отсюда $\angle FCD = \angle ADC$, и эти углы равны $\angle DAF = \angle CFA$. Аналогично выводятся равенства других четверок углов, которые на рисунке 1 обозначены буквами α, β, γ . Так как сумма углов выпуклого шестиугольника равна 4π , то $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Значит, $\angle CDA = \pi - \angle CBA$, и точка D лежит на окружности, проходящей через точки A, B, C . Точно так же доказывается, что точка E лежит на окружности, проведенной через точки B, C, D , и точка F лежит на окружности, проведенной через точки C, D, E . Значит, все 6 точек A, B, C, D, E, F лежат на одной окружности.

5. В прямоугольном треугольнике AB_1B (рис. 2) B_1C_2 — медиана, проведенная из вершины прямого угла, следовательно, $AC_2 = B_1C_2, \angle C_2B_1A = \angle A = 30^\circ$ и $\angle BC_2B_1 = \angle A + \angle C_2B_1A = 60^\circ$. Аналогично из треугольника AC_1C находим, что $\angle AC_1B_2 = 30^\circ$. Значит, в треугольнике $OC_1C_2, \angle C_1OC_2 = 180^\circ - \angle BC_2B_1 - \angle AC_1B_2 = 90^\circ$.

6. Одно из чисел равно ± 2 , остальные равны ∓ 1 . Доказательство. Вычитая из первого уравнения второе, получаем: $(a-d)(b-c) = 0$, т. е. $a = d$ или $b = c$. Аналогично $a = c$ или $b = d$. Мы видим, что во всех случаях три из наших четырех чисел равны. Пусть это — числа b, c, d . Тогда каждое из наших уравнений приобретает вид $ab + b^2 = -1$, т. е. $b(a+b) = -1$. Значит, либо $b = 1, a + b = -1$, либо $b = -1, a + b = 1$.

7. Одно из чисел x, y, z равно 0, остальные равны 1. Доказательство. Положим $x = 1 + \alpha, y = 1 + \beta$. Тогда $z = -(\alpha + \beta)$ и первое уравнение приобретает вид $(\alpha + 1)^3 + (\beta + 1)^3 - (\alpha + \beta)^3 = 2$, что после преобразования превращается в

$$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha + \beta = \alpha\beta(\alpha + \beta),$$

или

$$\alpha + \beta = (\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta - \alpha\beta).$$

Значит, $\alpha + \beta$ делится на $\alpha + \beta + 2$. Это оставляет

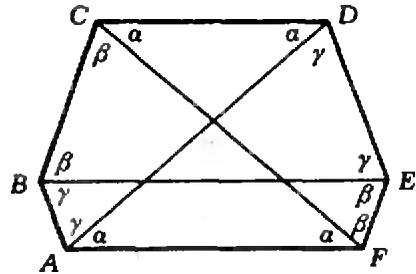


Рис. 1.

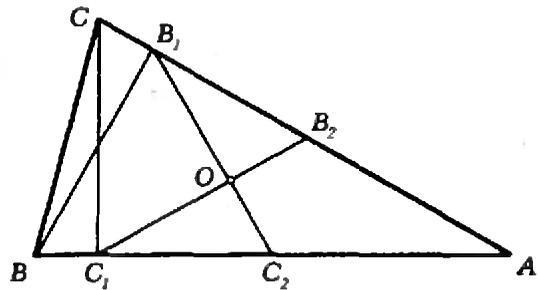


Рис. 2.

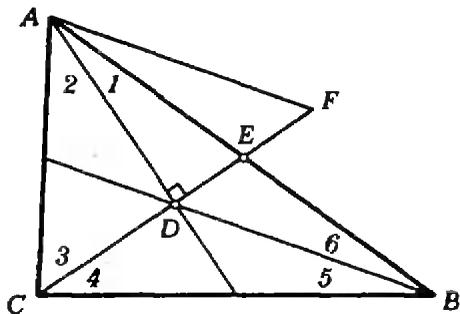


Рис. 3.

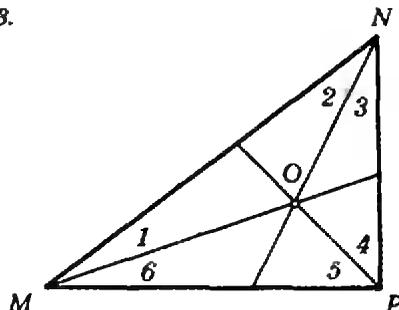


Рис. 4.

для $\alpha + \beta$ четыре возможных значения: 0, -1, -3, -4. Для каждого из них из последнего уравнения можно найти $\alpha\beta$, а затем α и β . Из найденных решений оставляем целые.

8. Остроугольный. Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник, медианы, проведенные из вершин A, B, C , имеют длину 4, 5, 3. Продолжим медиану CE на отрезок EF , равный DE (рис. 3). Стороны треугольника ADF равны $2/3$ от 3, 4, 5. Далее, AE — медиана треугольника ADF ; констатируем, что угол BAD между медианой и стороной треугольника ABC равен углу между медианой и стороной треугольника ADF и, значит, равен углу OMN между медианой и стороной треугольника MNP на рисунке 4 со сторонами 3, 4, 5. Аналогичное верно для других углов между медианами и сторонами треугольников ABC и MNP ; на рисунках 3 и 4 равные углы обозначены одинаковыми цифрами. Мы видим, что углы треугольника ABC соответственно равны $\pi - \angle MON$, $\pi - \angle POM$, $\pi - \angle NOP$. Простое вычисление дает:

$$OM = \frac{2}{3} \sqrt{16 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{73}}{3}, \quad OP = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{3}, \quad ON = \frac{2}{3} \sqrt{4 + 9} = \frac{2\sqrt{13}}{3}.$$

Таким образом, $ON^2 + OP^2 \angle NP^2$, $OP^2 + OM^2 \angle PM^2$, $OM^2 + ON^2 \angle MN^2$. Значит, углы NOP, POM и MON тупые, а углы треугольника ABC острые.

9. Заметим, что из четырех описанных преобразований только отражение относительно прямой BC может изменить расстояние от точки M до точки A . Поскольку в результате применения всех этих преобразований точка M перешла в себя, то и отражение относительно BC не меняло этого расстояния, а это возможно лишь в том случае, когда это отражение оставило соответствующую точку на месте. Следовательно, точка M переходит в себя при последовательном применении отражений относительно прямых AB, AC и симметрично относительно точки A . Поскольку применение двух указанных отражений — это просто поворот относительно A на удвоенный угол φ между этими прямыми, а симметрия — поворот на угол π , то точка M перешла в себя при повороте относительно A на угол $2\varphi + \pi$. Значит, угол φ между прямыми AB и AC равен $\pi/2$.

10. 6. Решение. Нетрудно привести пример ломаной из шести звеньев, содержащей данные десять точек. Предположим, что эти точки можно разместить и на пятизвенной ломаной. На некотором ее звене лежат две (из шести) середины ребер тетраэдра, значит, на этом звене других отмеченных точек нет, а на смежном с ним звене их также не более двух. Таким образом, два эти звена проходят через три данные точки. Оставшиеся же три звена содержат не более шести других данных точек: три концевые точки и три внутренние точки.

11. Пусть x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 + ax + b = 0$. Парабола $y = x^2 + ax + b$ пересекает ось Ox в точках $A(x_1; 0)$ и $B(x_2; 0)$ и ось Oy — в точке $C(0; x_1, x_2)$. Окружность, проведенная через точки A, B, C , проходит также через точку $D(0; 1)$, потому что $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ (точка O — начало координат).

12. Возьмем натуральное число m , большее любого из решений уравнения $p(x) = 0$ и большее $-a/2$, и положим

$$N = p(m+1)p(m+2)\dots p(m+1989) + m.$$

Так как разность $p(c) - p(d)$ делится на $c - d$, разность $p(N+n) - p(m+n)$ делится на $N - m$, и если $1 \leq n \leq 1989$, то $p(N+n)$ делится на $p(m+n)$. В то же время $p(N+n) > p(m+n)$, потому что $p(x)$ возрастает при $x > m$. Значит, $p(N+n)$ — составное число. (Это рассуждение применимо к любому многочлену степени ≥ 1 с целыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом; оно показывает, что для любого такого многочлена найдется сколь угодно много последовательных натуральных чисел, значения многочлена в которых являются составными числами.)

13. Перепишем уравнение в виде

$$f(x) = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b) = 0.$$

По условию $f(a) = (a-b)(a-c) > 0$, $f(b) = (b-a)(b-c) < 0$, $f(c) = (c-a)(c-b) > 0$, следовательно, на отрезках $[a; b]$ и $[b; c]$ имеется по крайней мере по одному корню уравнения $f(x) = 0$. Но так как $f(x)$ — квадратный трехчлен, уравнение не может иметь больше двух решений.

14. Примем длины отрезков AD, BD, CD за единицу. Ясно, что квадрат длины любого из отрезков AB, AC, BC больше двух и меньше четырех. Поэтому сумма квадратов двух сторон треугольника ABC больше квадрата третьей стороны, т. е. треугольник остроугольный.

15. Пусть O — точка пересечения указанных прямых, K, L, M, N — основания перпендикуляров, опущенных из точки O соответственно на ребра AB, AC, CD, BD тетраэдра $ABCD$. Пусть, далее, E — центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Ясно, что K, L — точки касания этой окружности со сторонами AB и AC треугольника ABC (сделайте рисунок). Поэтому $AK = AL$. Аналогично $BK = BN, CM = CL, DM = DN$. Значит, $AB + CD = AC + BD$. Точно так же доказывается, что $AB + CD = AD + BC$.

■ и сохранения энергии в электростатике

1. $A = CU^2$ (весь заряд оказывается на конденсаторе, пластины которого не раздвигали).
2. $Q = CU^2/6$ (в первый момент после разведения одна пластин замкнутыми друг на друга оказываются конденсатор емкостью C с напряжением U и конденсатор емкостью $C/2$ с напряжением $2U$).
3. $A_{\min} = \frac{1}{2} \epsilon_0 S d_1 / (2d (d - d_1))$ (минимальная работа по удалению плиты равна разности изменения энергии конденсатора и работы батареи).
4. $Q = A_{\min} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 S d / 2$ (сразу после выключения поля внешнего поля в пластине есть поле поляризованных зарядов, напряженность которого равна E ; удаление пластины из поля эквивалентно созданию поля с напряженностью E в объеме пластины).
5. $k = CU^2/d^2$ (результат получается из закона

сохранения энергии $kx_0^2/2 + CU^2/2 = k(x_0 + d)^2/2 - mgd$ и из условия равновесия пластины $kx_0 = mg$.

вступительных экзаменов в различные в 1988 году

Математика

Алгебра

1. 4. 2. 7. 3. 24. 4. 81. 5. 13,5 кг. 6. 3/5.
7. 100 км/ч, 65 км/ч. 8. 5 ч, 3 ч 20 мин.
9. 115, 132. 10. 25%. 11. 28:9. 12. 34. 13. 2; 1/2 и 6; -1/2. 14. 1, 1/3. 15. 13 ч 30 мин.
16. 14 ч 30 мин. 17. 1 кг апельсинов стоит 3,5 р., 1 кг мандаринов — 4,25 р., 1 кг грейпфрутов — 4,5 р. 18. Коробка с печеньем весит 5,2 кг, с пряниками — 7,2 кг, с вафлями — 5,6 кг. 19. а) 1; б) 2,4; в) 4; г) 10; д) 1/2; е) 4; ж) -1; з) 1; и) 1; к) -1; л) 2.
21. $(\sqrt{5}-1)/4$. 22. См. рис. 5. 23. а) 4,5; б) -2; в) -1; 2; г) 16; 21; д) -1; е) 10; ж) 1; з) 1/125; 25; и) 1/3; 3; к) 1; 2; л) ± 3 ; м) 3; 4; н) $\pi\pi/5$; $\pi(2n+1)/6$, $n \in \mathbb{Z}$; о) $\pi(2n+1)/10$, $\pi(2n+1)/6$, $n \in \mathbb{Z}$; п) $2\pi n$, $(4n+1)\pi/2$, $n \in \mathbb{Z}$; р) $2\pi(3n+1)/8$, $\pi(4n-1)/2$, $\pi(6n+1)/3$, $n \in \mathbb{Z}$; с) 6; т) $(6n \pm 1)\pi/6$, $n \in \mathbb{Z}$; у) $-\pi$; 0; π . 24. а) $(-\infty; -2] \cup (1; 4) \cup \{0\}$; б) $\{4; 5\} \cup (5; \infty)$; в) $(-\infty; 0) \cup (0; 5/2]$; г) $[-0,3; (3+\sqrt{13})/2] \cup \{(3-\sqrt{13})/2\}$; д) $\{3; \infty\}$; е) $(-\infty; -3/2] \cup [3/2; \infty)$; ж) $[-1; 0) \cup (1; 2)$; з) $(0; +\infty)$; и) $[-1; 0) \cup (2; 3]$; к) $(-1; -\pi/4) \cup (-\pi/4; \pi/4) \cup (\pi/4; 3\pi/4) \cup (3\pi/4; 3]$; л) $(-\infty; -1) \cup (4; \infty)$; м) $(2,5; \infty)$; н) $(-3/5; 2)$.
25. $\{5; 6\}$. 26. $[4-\sqrt{2}; 3) \cup [4+\sqrt{2}; \infty)$. 27. а) (2; 1); б) (4; 1); в) (1; 2); (16; -28); г) (2; 0); д) (2; 2). 28. $x=-1$. 29. $a=-4$. 30. $p=2$. 31. $c=8$. 32. $a < 0$. 33. $b=1$.

Анализ

1. а) См. рис. 6; б) см. рис. 7; в) см. рис. 8.
2. 2. 3. В третьей четверти. 4. $(\pi k; 0)$, $(\frac{\pi}{12} + \pi k, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(\frac{5\pi}{12} + \pi k, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$. 5. 1. 6. 4. 7. $8\sqrt{2}$. 8. -24. 9. $y_{\min} = y(3) = -8$. 10. $[2\sqrt{3}; \infty)$.

Геометрия

1. (3; -1). 2. 2. 4. 1. 5. 3. 6. $2R(1 + \frac{2}{\sqrt{3}})$; $4R(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)$. 7. 12. 8. 8/9. 9. $22,5^\circ$, $67,5^\circ$, 90° . 11. $\sqrt{3}$. Точка O — вне треугольника. 12. 2. 13. $\sqrt{3}$. 14. 25. 15. $3(7 + \sqrt{3})/2$. 16. 8. 17. 7,5. 18. 48. 19. 144.
 20. 96. 21. 2 аггесов $\frac{l(b+c)}{2bc}$. 22. 4. 23. $25\sqrt{3}$.
- Точка O — внутри треугольника ABC. 24. 36%. 25. 45. 26. -1/3. 27. $2(l^2 - b^2)\sqrt{4b^2 - l^2}/9\sqrt{3}$. 28. 84. 29. $48\sqrt{2} + 16\sqrt{3}(2 - \sqrt{2})$. 30. 36. 31. $S\sqrt{1 + \frac{1}{3}tg^2\alpha}$. 32. 120° . 33. 60° . 34. $\pi Q\sqrt{Q}/(4\sqrt{tg\alpha})$. 35. $\sqrt{69}/8$. 36. $\sqrt{481}/2$.

Физика

Механика

1. $t = l/(v_1 + v_2) = 5$ с.
2. $v_{cp} = \frac{l}{(2l_1/l_2 + 1)t} = 12$ м/с.

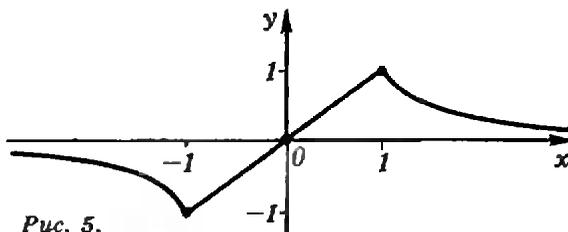


Рис. 5.

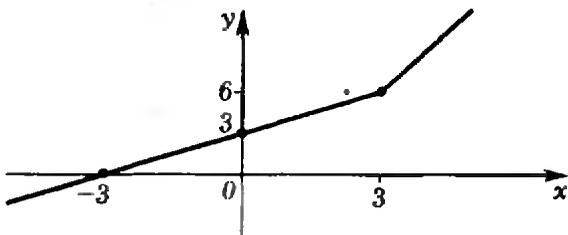


Рис. 6.

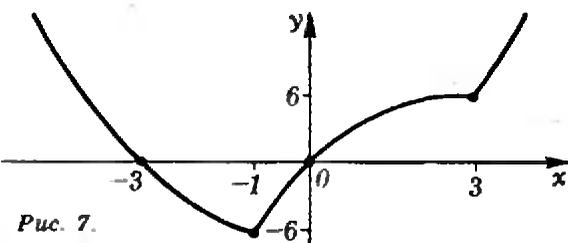


Рис. 7.

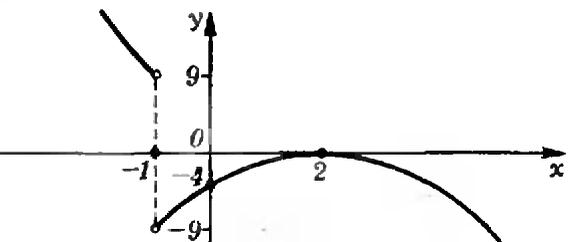


Рис. 8.

3. См. рис. 9; $l = at^2/4 = 16$ м.
4. Время движения второго тела больше.
5. $h = 233,1$ м.
6. $l = gt_1(t_2 - t_1/2) = 15$ м.
7. $h = 2v(v_0 - v)/g = 680$ м.
8. $h = (v_0^2 \sin^2\alpha)/(2g) = 5$ м;
 $l = (v_0^2 \sin 2\alpha)/g = 34$ м;
 $\Delta P = 2mv \sin \alpha = 10$ кг·м/с.
9. $T = m(g - a) = 5$ Н.
10. $a = (F/m)(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) - \mu g$, если $F \cos \alpha > \mu(mg + F \sin \alpha)$; $a = 0$, если $F \cos \alpha \leq \mu(mg + F \sin \alpha)$.
11. $m = 2Mv^2/(2lg - v^2) = 0,25$ кг.
12. $a = v^2/R = 2,5$ м/с²; $F = m(g - v^2/R) = 15$ кН.
13. $T = (mg \cos \alpha)/2 = 125$ Н.
14. $h = 5/3 R$.
15. $F = \frac{mg}{l} \left(\frac{h}{\mu} - \sqrt{l^2 - h^2} \right) = 0,8$ Н.
16. $N = \mu mgv = 20$ кВт.
17. $l = v_0^2/(2\mu g)$ при $v_0 < \sqrt{2\mu_1 g a}$; $l = v_0^2/(2\mu_2 g) + (\mu_2 - \mu_1)a/\mu_2$ при $v_0 > \sqrt{2\mu_1 g a}$.

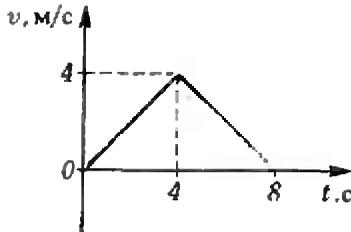


Рис. 9.

18. $E_2 = m(gH + v_0^2/2) = 68$ Дж.
19. $Q = m(gh - v^2/2) = 6$ Дж; $\mu = (gh - v^2/2) / (gl \cos \alpha) = 0,22$.
20. $\Delta T = 9v^2 / (8c) = 0,7$ К.
21. $x = (\sqrt{n} - 1) / (\sqrt{n} + 1)$.
22. $\Delta T = gh / (2c) = 0,2$ К.
23. $E_1 = E_0 / 4$; $E_2 = 3E_0 / 4$.
24. Уровень воды и давление на дно изменяться не будут.
25. Нет, нельзя.
26. $m_{\max} = (Q_3 - Q_6) / S = 70$ кг.
27. $T = Q_3 g S \Delta h$.
28. $h = 2(Q_3 / Q_4 - 1)h_2 - h_1 = 10$ см.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1. $\rho = \rho M / (RT) = 0,16$ кг/м³.
2. $T_1 = T_2 M_1 / M_2 = 280$ К; $t_1 = 7$ °С.
3. $\alpha = (1 - p_2 / p_1) 100\% = 20\%$.
4. $Q = c_0 Sh \Delta t = 2,6 \cdot 10^7$ Дж.
5. $t = t_1 + C(t_1 - t_2) / cm = 32,5$ °С.
6. $t = m \lambda / (cM) = 100$ °С.
7. $\lambda = c(t_2 - t_1) v_2 / (k v_1) = 2,4 \cdot 10^6$ Дж.
8. $A = mRT / M = 8,1$ кДж.
9. $A = \nu RT = 3,3$ МДж; $\Delta U = Q - A = 6,1$ МДж.
10. $A = (p_0 + mg/S)V(T_2/T_1 - 1) = 170$ Дж.
11. $\Delta h = 4\sigma(d_2 - d_1) / (\rho g d_1 d_2) = 9,5$ мм.
12. $A = 8\pi \rho r^2 = 1,6 \cdot 10^{-3}$ Дж.

Основы электродинамики

1. $x = l/3 = 1$ м.
2. $F_C / F_D = 2,25$.
3. $\Phi_{\text{ш}} = Er^2 / R = 20$ В;
 $A = qEr(r-l) / l = 9 \cdot 10^{-6}$ Дж.
4. $W_0 = eEl / \sin 2\alpha = 5,6 \cdot 10^{-18}$ Дж.
5. $U = (U_1 + 2U_2) / 3 = 280$ В.
6. $R_2 = R_1 / 9 = 1$ Ом.
7. $R_x = \frac{R_2 R_3 (R - R_1 - R_4)}{R_2 R_3 - (R_2 + R_3)(R - R_1 - R_4)} = 20$ Ом.
8. $R_V = UR / (U_0 - U) = 6 \cdot 10^3$ Ом.
9. $\xi = U(R+r) / R = 30$ В; $\eta = R / (R+r) = 0,6 = 60\%$.
10. $P_1 = \frac{\xi^2 R_1 R_2^2}{(R_3(R_1 + R_2) + R_1 R_2)^2} = 16$ Вт.
11. $P_2 / P_1 = R_1 / R_2 = 3/2$.
12. $P' = 9P / 16 = 45$ Вт.
13. $\tau = (c_1 m_1 + c_2 m_2) \Delta T / (I^2 R) = 85$ с.
14. $P = m^2 R / (k^2 \tau^2) = 40$ Вт.
15. $\tau = qd / (kI) = 16,7$ мнн.
16. $I = qV / (k\tau) = 0,35$ А.
17. $B = qaS / I = 5 \cdot 10^{-3}$ Тл.
18. $B = U / (lv) = 10^{-3}$ Тл.

Колебания и волны

1. $v_m = \sqrt{k/m} x_m = 3,75$ м/с.
2. $l = 4\tau v_a = 0,4$ м.
3. $h_{\max} = 2mg/k$.
4. $L = 2W_m / I_m^2 = 1$ Гн (здесь $I_m = 0,1$ А).

5. $I_m = \sqrt{C/L} U_m = 10$ А.
6. Резонанс наступит, если емкость C_2 уменьшить на 66 пФ.
7. $\eta = I_2 U_2 / (I_1 U_1) = 0,95 = 95\%$.
8. $\lambda_2 = \lambda_1 v_2 / v_1 = 4$ м.

Оптика

1. $x = d \sin \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}\right) = 6,7$ мм.
2. $f = dH/h = 10$ м (здесь $h = 1$ мм).
3. $f = a\Gamma(\Gamma+1) = 0,36$ м.
4. $F' = -(2/3)F$.

АНКЕТА 6-89

Дорогой читатель!
Ежегодно в последнем номере журнала мы помещали «Нашу анкету». Но нам пришло в голову, что легче, проще высказать свое мнение, что называется, по свежим следам. Поэтому мы решили помещать анкету раз в квартал.
Мы обращаемся к Вам с просьбой. Ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите «АНКЕТА 6-89». Очень надеемся на обратную связь.

1. Класс, в котором Вы учитесь: _____

Ваша профессия (если Вы работаете): _____

Круг Ваших интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните). _____

2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? _____

Шахматная страничка

КОМПЬЮТЕР ОБЫГРЫВАЕТ ГРОССМЕЙСТЕРА

Время летит быстро. Совсем недавно мы писали в «Кванте», что лучшие шахматные компьютеры играют в силу кандидата в мастера, а вот уже поступила новая информация: шахматные роботы вышли на уровень крепкого мастера и даже «замахиваются» на гроссмейстера. Речь идет о двух компьютерах (программах) — «Хитеч» и «Дип Соут», созданных в университете Карнеги — Меллона (США) разными группами исследователей. Считается, что «Хитеч» — самая совершенная в мире машина по объему накопленных шахматных знаний, игра ее более других напоминает человеческую, а «Дип Соут» превосходит своих конкурентов быстротой и глубиной перебора.

Открытое первенство США 1988 года собрало больше 600 шахматистов, среди которых был и «Дип Соут». Выступление компьютера оказалось сенсационным — машина заняла 18-е место, а ее успех в партии с И. Ивановым, входящим в число 20 сильнейших американских шахматистов, — первая победа компьютера в турнире над международным мастером. Перед началом партии, не имея опыта встреч с машинами, мастер спросил у знающих людей: как справиться с ЭВМ? Ему посоветовали: главное — сойти с проторенных путей, подалше от теории, чтобы «отключить» машину от ее мощной дебютной библиотеки. И вот что из этого получилось.

«Дип Соут» — И. Иванов
Скандинавская партия

1. e4 d5. Редкий дебют.
2. ed Kf6. А теперь и редкий вариант. Белые простыми ходами создают ошущимое позиционное давление. 3. d4 K:d5 4. e4 Kf6 5. Kf3 Cg4 6. Ce2 e6 7. Ce3 Cb4+ 8. Kbd2 0—0 9. a3 Ce7 10. h3 Cb5 11. 0—0 e6 12. g4 Cg6 13. Kh4 Kbd7 14. K:g6 hg. Черные лишены какой-либо

контригры, и им только остается пожалеть о робком дебютном выборе. 15. f4 c5 16. g5 Ke8 17. Ke4 Kd6 18. K:d6 C:d6 19. b4 cb 20. e5 Ce7 21. ab a6 22. Фc2 Фе7 23. Фе4 b6 24. Фb7 Лfc8 25. C:a6 e5 26. fe bc.

Компьютер четко пресекает тактические поползновения соперника. 27. Cc4 Lab8 28. Л:f7 Л:b7 29. Лg4+. Черные сдались.

Под Новый, 1989 год на праздничном международном турнире в Лонг Бич (Калифорния) «Дип Соут» стал настоящей шахматной звездой — он уверенно переиграл гроссмейстера Б. Ларсена, разделив первый приз с другим известным гроссмейстером Э. Майлсом. Вот первая победа компьютера над гроссмейстером.

Б. Ларсен — «Дип Соут»
Английское начало

1. c4 e5 2. g3 Kf6 3. Cg2 e6 4. Kf3. Чаще встречается 4. d4 ed 5. Ф:d4 d5 6. Kf3 Ce7 7. cd cd 8. 0—0 Kc6 9. Фа4 с несколько лучшими шансами у белых ввиду образования у соперника изолированной пешки. Однако и ход конем хорошо известен. 4... e4 5. Kd4 d5 6. cd Ф:d5 7. Kc2 Фh5 8. h4 Cf5. До сих пор все, как ни странно, можно найти в теории, включая подозрительное движение крайней белой пешки (надежнее 8. h3). Но вот последний ход черных — новинка компьютера и, похоже, неплохая. В дебютной теории приведен вариант 8... Cc5 9. b4 Cb6 10. Cb2 Фg6 11. Kc3 Cf5 12. Ka4 Kbd7 13. K:b6 ab с неясной игрой.

9. Ke3 Cc5 10. Фb3 b6 11. Фа4 0—0 12. Kc3 b5 13. Фc2 C:e3 14. de Le8. У черных прочное положение, и попытки гроссмейстера расшатать его ни к чему не приводят. 15. a4 b4 16. Kb1 Kbd7 17. Kd2 Le6 18. b3 Jd8 19. Cb2 Cg6 20. Kc4 Kd5 21. 0—0—0 K7f6 22. Ch3 Cf5 23. C:f5 Ф:f5 24. f3 h5 25. Cd4 Jd7 26. Kpb2 Jc7 27. g4?

Расстроенный, что никак не может подобрать ключи к своему электронному парт-

неру, Ларсен идет на необоснованное вскрытие игры, но «Дип Соут» легко разбирается в тактических осложнениях. 27... hg 28. Lhg1 c5! 29. fg K:g4 30. C:g7 Jg6! Возможно, гроссмейстер рассчитывал на 30... Kp:g7 31. Л5:d5! Ф:d5 32. Л:g4+ с весьма запутанной обстановкой на доске. Однако машина сама с выгодой использует линию «g».

31. Фd2 Jd7 32. Л:g4 Л:g4 33. Ke5 K:e3! 34. Ф:d7 K:d1+ 35. Ф:d1 Лg3 36. Фd6 Kp:g7 37. Kd7 Le3 38. Фh2 Kph7 39. Kf8+ Kph8 40. h5 Фd5 41. Kg6+ fg 42. hg+ Kpg7 43. Фh7+ Kpf6. Белые сдались.

Предварительный расчет итогов турнира в Калифорнии показал, что рейтинг «Дип Соут» заключен между 2400 и 2500, т. е. по своей силе компьютер находится где-то между гроссмейстером и международным мастером.

Не отстает от «Дип Соут» и уже знакомый нам «Хитеч» (см. «Квант», 1987, № 5). Недавно компьютер выиграл первенство штата Пенсильвания и одержал первую турнирную победу над международным мастером — жертвой пал Э. Форманек. Раньше у машины уже были победы над обычными мастерами, а счет в официальных встречах с «немастерами» — 15:0 в ее пользу!

А может ли «Хитеч» похвастаться успехами в сражениях с гроссмейстерами? Удивительно, но благодаря этой машине в 1988 году в книгу рекордов Гиннеса попал двукратный чемпион США, 75-летний А. Денкер — как первый гроссмейстер, проигравший серьезный матч компьютеру. Поединок из четырех партий с «Хитеч» закончился разгромным для него счетом 0,5:3,5. Денкер весьма лестно отзывался об игре своего электронного обидчика, особо отметив блестящую дебютную подготовку ЭВМ и ее необычайную изобретательность в острых ситуациях.

Так или иначе, но машины уже представляют большую опасность для сильных шахматистов.

Е. Я. Гук

Чер 11-15

Японское искусство «оригами» — конструирование фигур из бумаги — имеет довольно строгие правила исполнения. Фигуры оригами должны складываться обязательно из квадратного листа бумаги, и при этом запрещено применять клей и ножницы.

Звездчатый многогранник, показанный на нашем рисунке, только в одном нарушает эти правила — он собирается из 30 одинаковых маленьких модулей «мини-оригами», каждый из которых складывается из квадратного листа бумаги размером 10×10 см. Попробуйте сами сделать эту фигуру. Чтобы многогранник выглядел красивее, лучше взять листки

бумаги трех разных цветов. Из каждого листочка складывается единственный модуль в последовательности, показанной на рисунках 1—4. Изломанные стрелки означают, что модуль нужно согнуть и разогнуть; пунктир из тире и двух точек указывает выпуклые части модуля, пунктир из тире — вогнутые. Затем модули сгибают (рис. 5) и соединяют между собой так, что угол одного модуля вставляется в треугольный карман другого модуля. При сборке следите за тем, чтобы в многограннике смежные грани были окрашены по-разному.

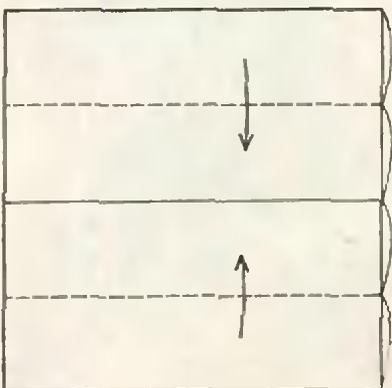


Рис. 1.

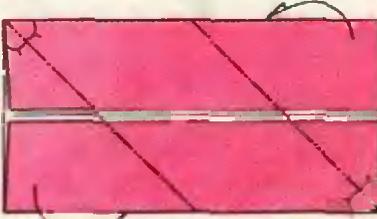


Рис. 2.

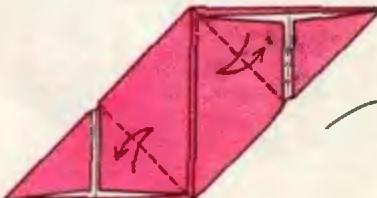


Рис. 3.

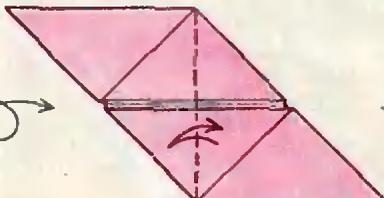


Рис. 4.

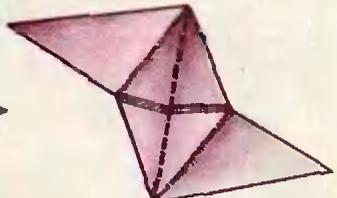


Рис. 5.

