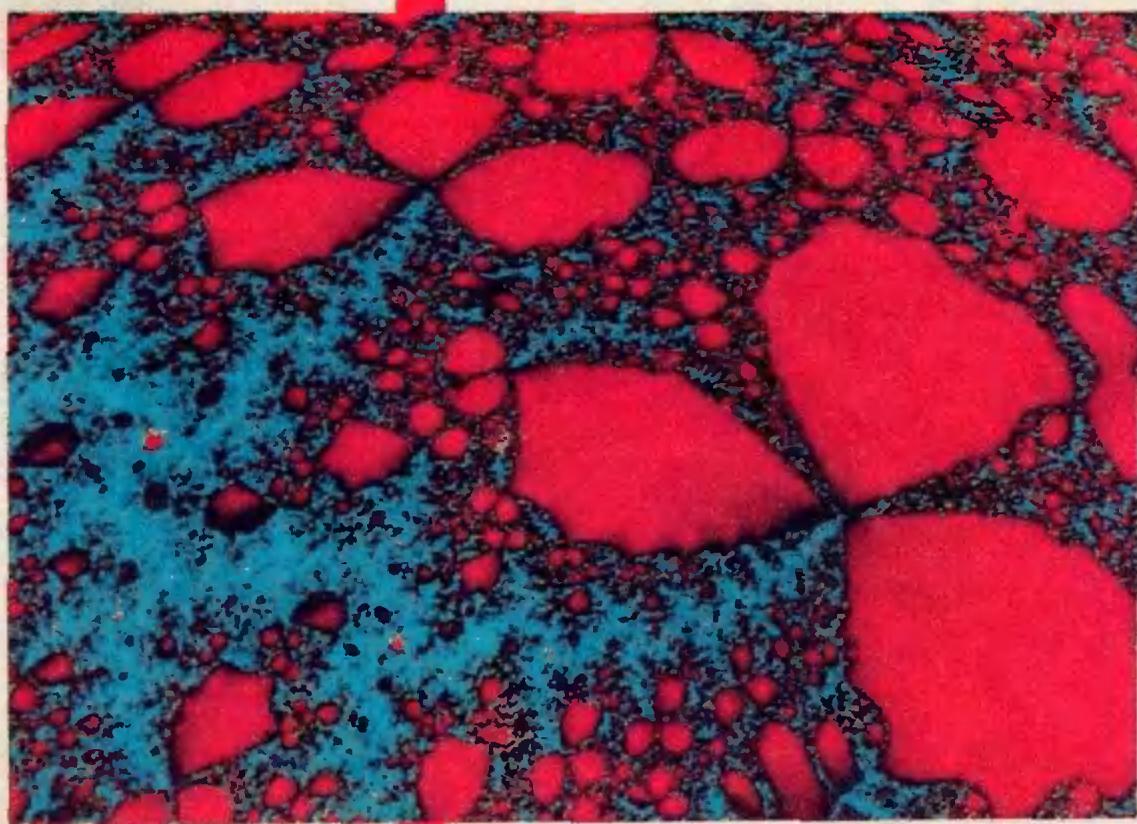


# Квант

Научно-популярный  
физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Фракталы

1989



Ежемесячный  
научно-популярный  
физико-математический  
журнал Академии наук СССР  
и Академии педагогических  
наук СССР



Москва. «Наука»  
Главная редакция физико-  
математической  
литературы

## В номере:

- 2 Ю. В. Сунгурцев. Сергей Алексеевич Чаплыгин  
6 И. М. Соколов. Фракталы  
14 С. Л. Табачников. О кривизне  
22 Н. Б. Делоне. Многоквантовые процессы
- Задачник «Кванта»**  
30 Задачи M1161—M1165, Ф1168—Ф1172  
31 Решения задач M1136—M1140, Ф1148—Ф1152
- 40 Калейдоскоп «Кванта»**  
•Квант• для младших школьников  
43 Задачи  
44 А. С. Штейнберг. Нейтроны ищут убийцу  
Р — значит ракета  
50 В. Е. Белонучкин. Гиганты
- Школа в «Кванте»**  
Физика 8, 9, 10:  
56 Почему не скользит мешок?  
58 Полярные сияния  
60 О законах Ньютона и «свободе воли»
- Математический кружок**  
63 В. Э. Матизен. Перекатывание многогранников
- Информатика и программирование**  
66 Е. Х. Аларкон, А. Н. Виленкин. Определение суммы цифр числа на ЭВМ
- Практикум абитуриента**  
68 П. И. Горнштейн. Тригонометрия помогает алгебре  
71 Варианты вступительных экзаменов  
75 Ответы, указания, решения
- Квант• улыбается (49)  
Внимание! (80)
- Наша обложка**  
1 Береговые линии и границы облаков, поверхности катализаторов и дендритных кристаллов, молнии и диэлектрический пробой — все эти и многие другие природные объекты связаны с изысканными «чисто» математическими объектами, которые называют «фракталы» (см. с. 6).  
2 Репродукция картины французского живописца Камиля Бомбуа «Атлет». По-видимому, у этого человека не было бы проблем, связанных с перекатыванием многогранников, подобных тем, которые возникли у автора статьи из раздела «Математический кружок».  
3 Шахматная страничка.  
4 Головоломка «Танграм».

# Сергей Алексеевич ЧАПЛЫГИН



Ю. В. СУНГУРЦЕВ

*Держайте ныне ободренны  
Раченьем вашим показать,  
Что может собственных Платонов  
И быстрых разумом Невтонов  
Российская земля рожать.*

М. В. Ломоносов

## Прелюдия

Есть в Рязанской области город, который носит имя великого русского ученого. Чаплыгин — так называется этот город.

Когда-то царь Петр I подарил своему любимцу князю Меншикову село Слободское. Меншиков построил здесь небольшую крепость и переименовал село в Ораниенбург. Через этот маленький город с игрушечной крепостью проходила строящаяся в те времена дорога из Москвы на Воронеж. Впоследствии через крепость строилась дорога на Оренбург и меншиковский городок стали в бумагах писать «Раненбург».

В этом городе 5 апреля 1869 года (24 марта по старому стилю) родился Сережа Чаплыгин.

Отец Сережи — Алексей Тимофеевич Чаплыгин, выходец из купече-

ской семьи, работал приказчиком в магазине. Он имел лишь начальное образование, но очень много читал и обладал прекрасной памятью. Мать — Анна Петровна Чаплыгина также принадлежала к купеческому сословию. Брак Анны Петровны с Алексеем Тимофеевичем был счастливым, но счастье это было недолгим. Когда Сереже было всего два года, семью Чаплыгиных постигло большое горе: в возрасте 24 лет отец Сергея умер от холеры. В дальнейшем Анна Петровна снова вышла замуж, и семья переехала из Раненбурга в Воронеж.

Сережа росмышленным мальчиком. Анна Петровна мечтала дать своему сыну образование и, когда Сереже исполнилось восемь лет, наняла ему репетитора-семинариста. Осенью Сергей успешно сдал экзамен в приготовительный класс и стал учеником гимназии.

Учителя гимназии очень быстро заметили необычные способности Сергея Чаплыгина. Педагогический совет освобождает его от платы за учебу. Когда о математических способностях гимназиста Чаплыгина узнали роди-

тели его соучеников, они стали приглашать его репетитором к своим сыновьям. Гимназию Сергей окончил блестяще — с золотой медалью. Живший в Воронеже известный математик — автор многочисленных школьных учебников, — А. П. Киселев восторгался способностями Чаплыгина и пророчил ему великое будущее. В возрасте 17 лет, взяв с собой 200 рублей, накопленные репетиторством, и небольшой сундучок с пожитками, Сергей уезжает в Москву.

*Воля и труд человека  
Дивные дивы творят.*

*Н. А. Некрасов*

### Возмужание

Чаплыгин был зачислен на физико-математический факультет Московского университета.

Его студенческая жизнь проходила в суровой обстановке, на помощь семьи рассчитывать не приходилось. Наоборот, как и в гимназические годы, Сергей продолжал помогать своей семье материально. Для этого ему приходилось набирать большое число уроков. И все же он не пропускал ни одной лекции в университете.

В Москве Сергей жил вместе со своими воронежскими друзьями. Жили всемером. В комнате он был единственным математиком. Веселый дух соревнования всегда был присущ этой компании. Как-то один из друзей пожаловался на сложность курса неорганической химии, и Сергей предложил держать пари, что в течение трех дней выучит весь учебник по этому предмету. Пари он выиграл. Такой же победой завершилось другое его пари: он в две недели освоил курс английского языка.

Вообще, Сергею иностранные языки давались очень легко. Однажды во время каникул, Чаплыгин работал репетитором в польской семье. В кратчайший срок он изучил польский язык и к удивлению всех членов этой семьи стал в подлиннике читать польских писателей. В это же лето Чаплыгин изучил еще один язык — итальян-

ский. Способность к изучению иностранных языков была у Чаплыгина поразительная. В его жизни был момент, когда он выбирал между математикой и восточными языками.

Став студентом Московского университета, Чаплыгин предполагал специализироваться по чистой математике. Но начиная с третьего курса его интересы стали склоняться к механике. Лекции профессора Н. Е. Жуковского, в которых открывался широкий круг научных проблем, понастоящему увлекли Чаплыгина, и он становится одним из первых учеников Жуковского. На последнем, четвертом курсе университета Чаплыгин под его руководством выполняет свое первое научное исследование по гидромеханике. Дипломная же работа Чаплыгина «О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости» была удостоена Советом университета золотой медали. Первого января 1891 года по представлению Жуковского выпускник С. Чаплыгин оставляется при университете кандидатом для приготовления к профессорскому званию.

*Возьмите пример — нашу авиацию.  
Чему она обязана своим прогрессом?  
Без работ Жуковского, Чаплыгина  
и их школы, конечно, она не могла бы  
развиваться...*

*П. Л. Капица*

### Взлет

В конце XIX века начинает делать свои первые шаги практическая авиация. В России в 1881 году морской офицер А. Ф. Можайский получил патент на летательный аппарат с паровым двигателем, который он называл воздухолетательным снарядом. Самолет Можайского был построен в 1885 году, но при взлете потерпел аварию. В Англии и Франции в эти же годы тоже были предприняты попытки создать самолет, но и они не увенчались успехом. В период с 1891 по 1896 годы немецкому ученому О. Лилиенталю удалось сконструировать несколько удачных моделей планеров. Эти планеры были построены и успешно прошли испытания.

Свои первые шаги мировая авиация делала наугад, вслепую. Самолеты строились лишь на основе интуитивных предположений. Никаких предварительных расчетов или экспериментов никто не производил. Отсутствие научной базы для самолетостроения и как следствие — несовершенство конструкций — явилось причиной большого числа авиационных катастроф. В этот период ученые многих стран начинают вести первые теоретические исследования в области аэродинамики. Крупным вкладом в них явились труды Н. Е. Жуковского и его ученика, будущего академика С. А. Чаплыгина.

С августа 1893 года С. А. Чаплыгин начинает преподавательскую работу в качестве учителя физики в Московском Екатерининском институте\*). С сентября 1895 года он преподает математику в Московском университете, а затем — в Московском техническом училище.

В это же время он приступает к изучению движения газовых потоков. Как известно, жидкость практически несжимаема. Газы же, такие, например, как обыкновенный воздух, наоборот, легко подвергаются сжатию. В аэродинамике принято всякую несжимаемую жидкую среду называть просто жидкостью, а сжимаемую — газом. Оказалось, что при малых скоростях воздушный поток ведет себя как несжимаемая среда и потому может с определенным приближением называться жидкостью. С увеличением скорости потока такое приближение становится слишком грубым. Кроме того, приходится рассматривать более сложную математическую модель течения. К исследованию такой модели и приступает в эти годы Чаплыгин.

Вообще, научные интересы С. А. Чаплыгина были весьма разнообразны. Об этом можно судить по темам докладов и опубликованных работ. Он выступает в обществе любителей естествознания с рефератом

«О движении газа с образованием поверхности разрыва» (1896 г.), с докладом «О катании твердого тела по горизонтальной плоскости» (1897 г.). В 1898 году защищает магистерскую диссертацию «О некоторых случаях движения твердого тела в жидкостях», удостоенную Большой золотой медали Академии наук и выступает в Московском математическом обществе с докладом «Основные соображения для нового объяснения вращения Солнца»... До наступления XX века Чаплыгин публикует еще несколько работ по механике жидкостей и теоретической механике.

Свою докторскую диссертацию «О газовых струях» С. А. Чаплыгин написал во время отдыха в Крыму. Можно представить себе, какой это был «отдых»! За месяц пребывания в санатории Сергей Алексеевич заметно похудел, и обеспокоенные врачи советовали ему отдохнуть, оставив хотя бы на время работу. Но редкая целеустремленность Чаплыгина не позволила ему оставить работу незавершенной.

В диссертации Чаплыгин рассматривает и решает две задачи: об истечении газовой струи из щели в плоскости и о сопротивлении пластинки, помещенной в газовую струю. Сложная математическая проблема была поставлена и решена Сергеем Алексеевичем необычайно изящно. Диссертации Чаплыгина суждена была счастливая судьба — она стала фундаментом новой науки, которой впоследствии было дано название «Газовая динамика».

В 1903 году, в тридцать четыре года, Сергей Алексеевич стал профессором Московского университета. В эти годы он уже считался блестящим молодым ученым. Его приглашают читать лекции на Московских высших женских курсах. Через несколько лет совет профессоров высших женских курсов избирает С. А. Чаплыгина директором. Занимая эту должность, Сергей Алексеевич организовал строительство великолепных по тем временам учебных корпусов.

\*) Среднее учебное заведение для благородных девиц.

В ноябре 1910 года С. А. Чаплыгин выступает в Московском обществе воздухоплавания с сообщением «Результаты теоретических исследований о движении аэропланов». В этом сообщении Чаплыгин резюмирует итоги своих многолетних исследований в области практической аэродинамики. Один из его неожиданных результатов состоит в том, что если крыло движется под некоторым углом к потоку воздуха, то подъемная сила может превысить первоначальную в 4—5 раз. Другое, тоже неожиданное открытие: если сделать нижнюю поверхность крыла волнообразной, то при правильном выборе очертания волн подъемная сила возрастает.

*Лидерство в науке — это не караван судов, идущих в открытом море, но караван судов, идущих во льду, где переднее судно должно прокладывать путь, разбивая лед. Оно должно быть наиболее сильным и должно выбирать правильный путь. И хотя разрыв между первым и вторым судном небольшой, но значение и ценность работы переднего судна совершенно иные.*  
П. Л. Капица

## Признание

Сергей Алексеевич был представителем той русской интеллигенции, которая сразу приняла революцию.

Он оставался директором Высших женских курсов до 1918 года. В 1918 году Высшие женские курсы были преобразованы во 2-й Московский государственный университет, и Чаплыгин еще год был ректором 2-го МГУ, до тех пор, пока в 1919 году не произошло слияние 1-го и 2-го университетов.

В 1918 году Жуковский привлекает Чаплыгина к работе только что созданного Центрального аэрогидродинамического института (ЦАГИ). С работой в ЦАГИ связана вся дальнейшая жизнь Сергея Алексеевича.

Огромный научный опыт и колоссальная работоспособность Чаплыгина позволяют ему, не прерывая работы в ЦАГИ, сотрудничать с Комиссией особых артиллерийских

опытов при Главном артиллерийском управлении. Здесь он работает консультантом и завершает разработку своего собственного нового метода интегрирования дифференциальных уравнений. Его работа «Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений» несомненно является одним из крупнейших достижений Чаплыгина. Методы этой работы Сергей Алексеевич применяет к интегрированию дифференциального уравнения движения поезда, в задаче о полете артиллерийского снаряда, а также в задаче о бомбометании с самолета.

После смерти Жуковского в 1921 году Сергей Алексеевич становится председателем коллегии ЦАГИ и руководит институтом до 1931 года. В эти годы Чаплыгин создает такой полный комплекс великолепных лабораторий, который сразу же выдвинул ЦАГИ в первый ряд научно-исследовательских учреждений мира.

В 1924 году Сергея Алексеевича избирают членом-корреспондентом АН СССР, а в 1929 году — академиком. Научная деятельность Чаплыгина получает международное признание. Работа Чаплыгина «О газовых струях» публикуется во Франции; она — в центре внимания конференции по вопросам скоростной авиации, проходившей в 1935 году в Риме, в 1944 году эта работа издана в США.

Чаплыгин был настолько незаурядной фигурой, что о нем уже при его жизни ходили легенды. Однажды, присутствуя на заседании, на котором делался научный доклад, Сергей Алексеевич обратил внимание на одну из представленных докладчиком таблиц, полученных сложными специальными вычислениями. К изумлению всех присутствующих он заявил, что начиная с такой-то строки вычисления неверные. Замечание было встречено присутствующими с недоверием. В самом деле, как можно, не имея под рукой никакой вычислительной машины, найти ошибку в столь непростых расчетах? Однако

(Окончание см. на с. 13)

# ФРАКТАЛЫ

Кандидат физико-математических наук  
И. М. СОКОЛОВ

Объекты, которые мы теперь называем фракталами, впервые появились в воображении математиков начала нынешнего столетия. И тогда вряд ли могло прийти в голову, что в окружающей нас природе встретится что-нибудь похожее на эти необычные и изысканные кривые. И хотя в этой статье речь у нас пойдет в основном о физических системах, начать придется с маленького и очень нестрогого математического введения.

## Самоподобные геометрические объекты

Самоподобной геометрической фигурой (телом) мы будем называть фигуру, которую можно разрезать на конечное число одинаковых фигур, подобных ей самой. Примеры — на рисунке 1: отрезок, равносторонний треугольник, квадрат, куб.

Несколько сложнее выглядит самоподобный объект на рисунке 2. Но строится он довольно просто. Начиная с равностороннего треугольника со стороной  $l_0$  будем повторять (до бесконечности) следующий процесс: каждый отрезок, соединяющий вершины ломаной, разделим на три части и среднюю часть заменим двумя отрезками длиной  $l/3$ , где  $l$  — длина исходного отрезка. Первые несколько стадий построения такой кривой показаны на рисунке 2. На  $n$ -й стадии построения кривая представляет из себя ломаную из  $N = 3 \cdot 4^n$  отрезков длиной  $l_0/3^n$  каждый, полная ее длина

$$L = 3l_0(4/3)^n.$$

Эту ломаную называют триадической кривой Коха (по имени шведского математика, придумавшего этот объект).

Каждый исходный отрезок триадической кривой Коха состоит из четы-

рех подобных ему отрезков с втрое меньшим расстоянием между концами.

Самоподобными являются и объекты, показанные на рисунке 3, — так называемые треугольная кривая Серпинского и универсальная кривая Серпинского — «ковер Серпинского» (по имени польского математика В. Серпинского (1882—1969)). Способ их построения ясен из рисунка: первая получается при многократном соединении середин сторон соответствующих равносторонних треугольников, вторая — при бесконечном повторе-

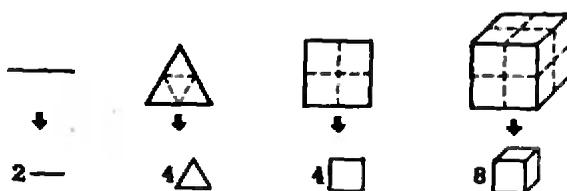


Рис. 1.

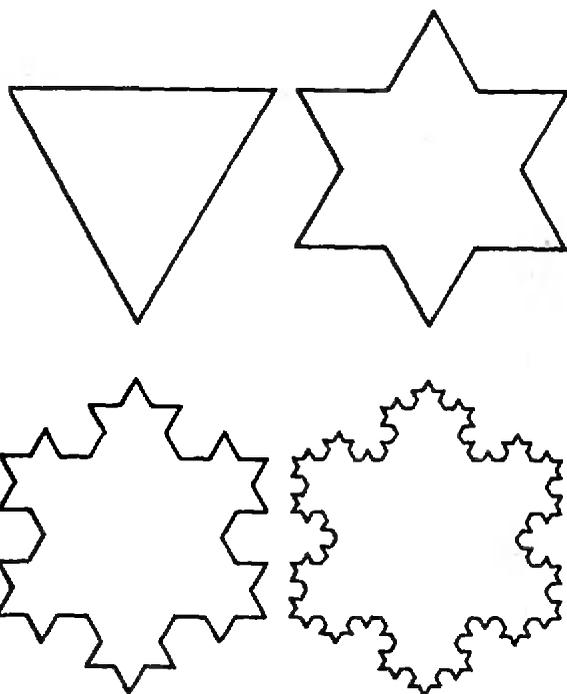


Рис. 2.

нии процедуры выбрасывания середины из разделенного на 9 частей квадрата.

Вернемся к кривой Коха. Попробуем, например, определить ее длину с помощью циркуля. Установив расстановку циркуля равным  $\lambda$ , будем переставлять циркуль по кривой, считая число его перестановок  $n$ . Длина кривой при этом приближенно будет равна  $L \approx \lambda n$ . Величину  $\lambda$  мы будем называть масштабом измерения.

Измеряя, скажем, длину окружности с радиусом  $R = 1$  м, мы получим, что измеренная длина  $L = \lambda n$  при  $\lambda = 1$  м равна 3,0 м, при  $\lambda = 0,1$  м  $L = 6,2$  м, при  $\lambda = 0,01$  м  $L = 6,28$  м, и при  $\lambda \rightarrow 0$  длина  $L$  стремится к пределу  $2\pi R = 6,28318\dots$  м.

Попытавшись проделать аналогичную процедуру с кривой Коха, мы убедимся в отсутствии того предела, который можно было бы считать длиной этой кривой. Выбирая масштаб  $\lambda = l_0/3^n$ , мы получим, что измеренная длина кривой будет равна длине ломаной, соответствующей  $n$ -й стадии ее построения —  $L = 3l_0(4/3)^n$ .

Попытки измерить длины других самоподобных кривых привели бы к аналогичному результату — с уменьшением масштаба измерения длина кривой неограниченно растет.

Отметим один весьма важный фактор, отличающий реальный самоподобный объект от идеального математического: у реальных объектов существует минимальный масштаб измерения  $\lambda_{\min}$ .

Рассмотрим, например, реальный процесс построения кривой Коха с помощью карандаша и бумаги. Пусть мы строим кривую с начальной длиной стороны  $l_0 = 1$  м карандашом, оставляющим линию толщиной  $a_0 = 0,1$  мм  $= 10^{-4}$  м. С математической точки зрения процедура построения кривой может продолжаться бесконечно. Реальный же процесс остановится, как только длина отрезка между двумя соседними точками излома сравняется с толщиной линии. Нетрудно подсчитать, что это произойдет на шаге с номером  $n = \ln(l_0/a_0)/\ln 3 \approx 9$ . Длина нашей линии при этом будет  $L \approx 40$  м. Так

что реальная самоподобная кривая имеет конечную длину.

Теперь вернемся к идеальным математическим объектам. Формулу длины кривой Коха можно записать в таком виде:

$$L = A\lambda^{-\alpha}, \text{ где } A = 3l_0^{\ln 4/\ln 3}, \alpha = \frac{\ln 4}{\ln 3} - 1.$$

(Надеемся, вы сами, зная правила обращения с логарифмами, сможете убедиться, что эта запись эквивалентна формуле  $L = 3l_0(4/3)^n$ .) Фигурирующий в формуле показатель  $\alpha$  связан с размерностью кривой.

### Что такое размерность?

Существует несколько определений размерности, соответствующих совершенно разным понятиям. Попробуем составить представление о некоторых из них.

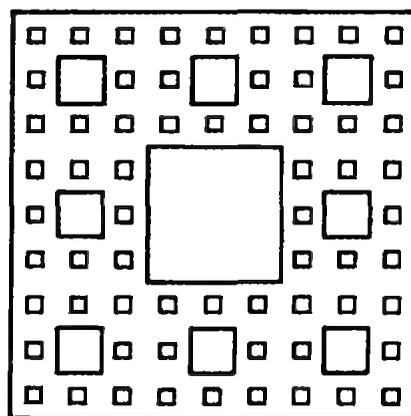
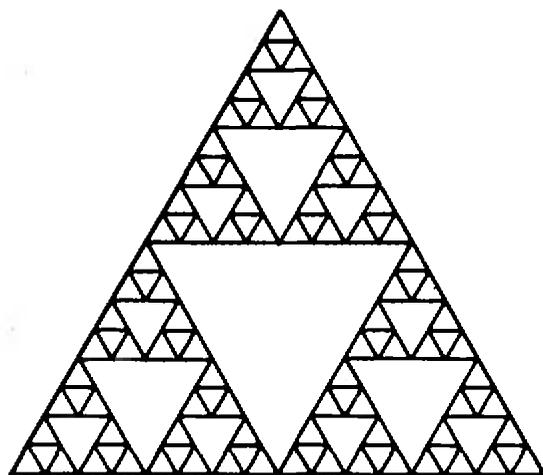


Рис. 3.

Первое определение связано с минимальным числом координат, необходимых для однозначного определения положения точки. В нашем пространстве это число равно трем, на плоскости достаточно двух координат, на линии — всего одной. В этом смысле пространство трехмерно, плоскость — двумерна, линия — одномерна. Естественно, в таком определении размерность всегда является целым числом.

Второе определение связано со следующим обстоятельством. Чтобы разрезать прямую на две части, достаточно исключить одну точку. Множество, состоящее из конечного (счетного) числа точек, будем считать нульмерным. Размерность любого множества будем полагать на единицу большей, чем размерность разреза, делящего его на две несвязанные части. При таком определении размерности линия одномерна, плоскость (для разрезания которой необходимо провести разрез по некоторой линии) — двумерна, объемное геометрическое тело — трехмерно. Эта размерность — ее называют топологической — также может быть только целой.

Перейдем теперь к третьему, самому интересному для нас определению размерности, точнее — к определению целого класса близких по смыслу понятий размерности. Простейшее из них — размерность самоподобия.

Размерность самоподобия  $D$  можно определить формулой

$$D = \frac{\ln N}{\ln n},$$

где  $N$  — число одинаковых частей, на которые разбивается данный самоподобный объект, имеющих в  $n$  раз меньший пространственный размер. Посмотрите на рисунок 1. Проведя, как показано на рисунке, разрезы, мы разделим квадрат на  $N = 4$  квадрата со стороной, меньшей исходной в  $n = 2$  раза. Кубик со стороной 1 состоит из  $N = 8$  кубиков со стороной  $1/2$  ( $n = 2$ ). Так что размерность самоподобия для квадрата равна  $\ln 4 / \ln 2 = 2$ , для кубика —  $\ln 8 / \ln 2 = 3$ ; очевидно, что размерность отрезка равна 1.



Рост «снежинок» на дисплее ЭВМ при разных условиях.

Вычисляя таким же образом размерности объектов, показанных на рисунках 2 и 3, мы увидим, что размерность каждого участка кривой Коха (и размерность всей кривой)

равна  $D = \ln 4 / \ln 3 = 1,2618$ , треугольной кривой Серпинского —  $\ln 3 / \ln 2 = 1,5849$ , «ковра Серпинского» —  $\ln 8 / \ln 3 = 1,8727$ . Эти странные кривые имеют нецелую размерность.

А теперь вернемся к формуле длины кривой Коха. Воспользовавшись только что приведенным определением размерности  $D$ , мы можем переписать эту формулу в виде

$$L = 3l_0^D \lambda^{1-D}.$$

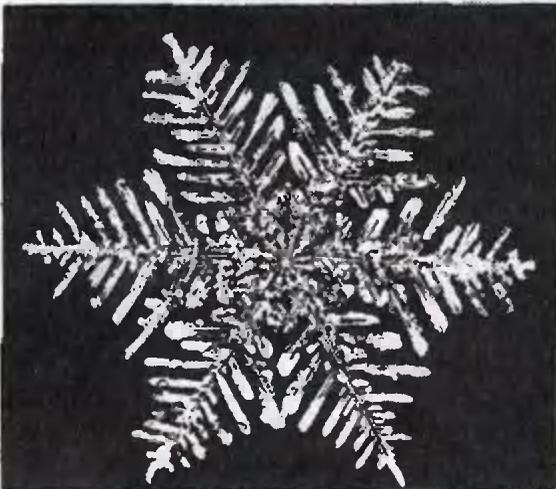
Рост измеренной длины самоподобной кривой при уменьшении масштаба измерения является показателем ее нецелой размерности:

$$D = 1 + \alpha.$$

### Как измерить размерность?

Размерность самоподобия можно определить только для очень регулярных, построенных по строго определенным правилам, объектов. Если отклонения от регулярности невелики, объект можно считать приблизительно самоподобным. А если велики?

Воспользуемся еще одним определением размерности, которым часто



Реальная снежинка.

пользуются при экспериментальном измерении размерности различных физических систем.

Пространство, в котором расположен интересующий нас объект, раз-

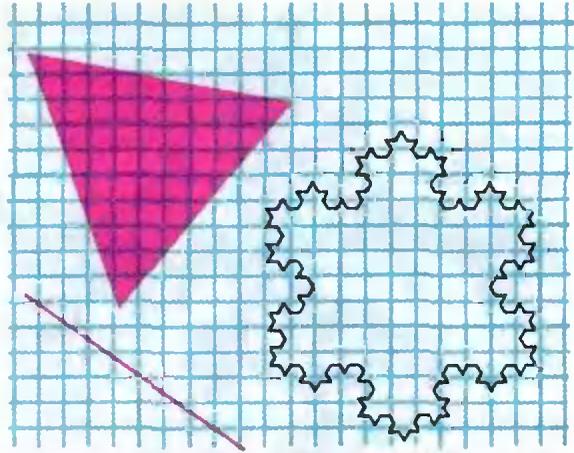


Рис. 4.

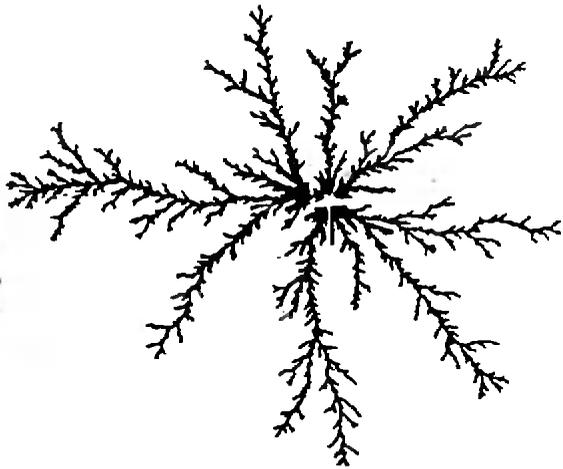
бывают на клетки размером  $\lambda$  (например, наносят на плоскость фотографии объекта квадратную сетку со стороной  $\lambda$ ). Подсчитывают число клеток, в которые попали точки объекта. Разбиение повторяют, используя меньший масштаб  $\lambda' < \lambda$  и т. д. (рис. 4). Зависимость числа клеток, в которые попали точки объекта, от размера клетки при этом дается законом  $N = A\lambda^{-D}$ , где  $D$  и есть искомая размерность. Рассматривая плоскую область площади  $S$  (треугольник на рис. 4), нетрудно убедиться, что  $N \approx S/\lambda^2$ , так что  $D = 2$ . Для отрезка  $N = BL/\lambda$ , где  $L$  — длина отрезка, а  $B$  — коэффициент, зависящий от его ориентации. Размерность отрезка  $D = 1$ . Если проделать ту же процедуру и с объектами, показанными на рисунках 2 и 3, получатся значения  $D$ , совпадающие с их размерностью самоподобия. Для определения размерности реальных объектов рисуют график зависимости  $\ln N$  от  $-\ln \lambda$ . Этот график изображается прямой линией, тангенс угла наклона которой дает нам значение  $D$ .

### «Фрактальная геометрия Природы»

В 1961 году вышла работа английского исследователя Л. Ричардсона (1881—1953), посвященная измерению длин береговых линий. Автором было установлено, что измеряемая длина побережья растет с уменьшением масштаба измерения по закону



*Фрактальный кластер, возникающий при моделировании на ЭВМ диффузионно-контролируемой агрегации.*



*Фрактальный кластер цинка на электроде в гальванической ванне.*

$L = A\lambda^{-a}$  (закон Ричардсона), где показатель  $a$  составляет, например, для западного побережья Британии 0,24, а для побережья Австралии — 0,13. И хотя этот закон очень напоминал формулы длин самоподобных кривых, работа Ричардсона существовала сама по себе. Имелось и некоторое количество других физических примеров, «выходящих» на самоподобные объекты. Но все было разрознено...

Существенное изменение произошло с появлением книги французского математика Бенуа Мандельброта (ныне работающего в США), вышедшей в 1975 году на французском и в 1977 году на английском языке. Книга собрала воедино множество этих математических и физических примеров, сделав их достоянием научного обихода. Но главной заслугой Мандельброта было то, что он придумал, как все это называется.

Читатель, вероятно, помнит, что основным вкладом Атоса в развитие событий, описанных в романе Дюма «Двадцать лет спустя», было изобретение названия операции — «Семейное дело». Этот вклад считался равноценным шпаге д'Артаньяна и деньгам Портоса. Придумать хорошее название — большая заслуга.

Для объектов дробной размерности, точнее — для объектов, фрактальная размерность которых больше их топо-

логической размерности, Мандельброт придумал название «фрактал». Слово это происходит от латинского *fractus* — дробный, изрезанный. Один весьма остроумный человек перевел это название на русский язык словом «дробняк».

Первая книга Мандельброта называлась «Фракталы: форма, случай, размерность». Вторая, вышедшая в 1982 году, называлась уже так: «Фрактальная геометрия Природы». Это название как нельзя лучше отражает реальную ситуацию.

Фрактальными свойствами обладают многие географические объекты — океанские и морские побережья, реки, горы и горные ущелья. Границы государств, если только они следуют естественным ориентирам, а не проведены линейкой на карте и лишь потом определены на местности (как, например, граница между Египтом и Суданом), — тоже фракталы. Длина границы между Португалией и Испанией (приведенная в португальском справочнике) и длина границы между Испанией и Португалией (приведенная в испанских официальных сведениях) отличается на 20 %, поскольку при их измерении использованы различные масштабы. Это еще раз подтверждает, что понятие длины для фрактальных кривых является не слишком осмысленным.

Оказалось, что кривые, подобные кривой Коха, в природе составляют скорее правило, чем исключение. Понятно, что самоподобие реальных, естественных объектов нарушается случайными отклонениями от строгой регулярности. Например, разные участки побережья не одинаковы, а лишь похожи друг на друга. И всем реальным системам свойственно наличие минимального масштаба измерения. Эти обстоятельства должны приниматься во внимание при анализе физической ситуации.

Для того чтобы можно было говорить о фрактальных свойствах системы, необходимо, чтобы различие минимального и максимального масштабов было достаточно большим. Если речь идет о морском или океанском побережье, то максимальный масштаб  $l_0$  будет порядка  $1000 \text{ км} = 10^6 \text{ м}$ , а минимальный, определяемый непостоянством границы из-за набегających волн, приливов и отливов и т. д., — порядка  $1 - 10 \text{ м}$ . Эти масштабы отличаются в миллион (!) раз.

Еще один пример фрактальных кривых — видимые границы облаков. Разница минимального и максимального масштабов здесь еще больше, чем в случае побережий: имеются данные об облаках размером от сотен метров с видимыми деталями порядка метра до размера Земли (циклональные области). Размерность границы облака равна  $D = 1,35$ .

Пока мы рассматривали в основном лишь фрактальные кривые — сильно извилистые линии, похожие на кривую Коха, причем наши географические примеры имели скорее курьезный характер. Существует множество физических процессов, приводящих к возникновению более сложных и важных фрактальных структур.

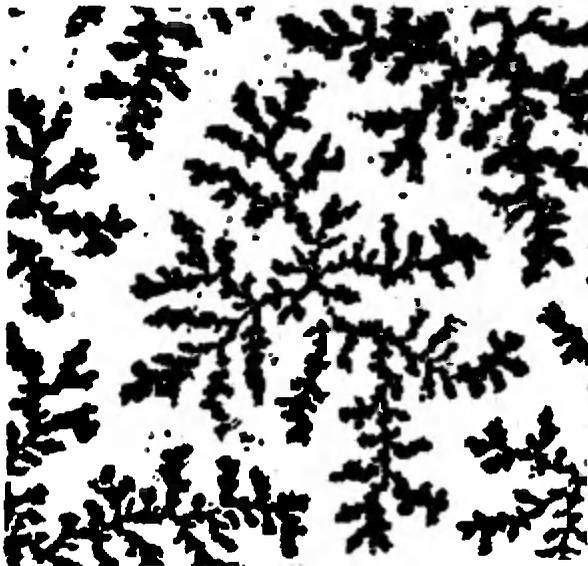
Многие из вас, вероятно, выращивали кристаллы из насыщенного раствора. Если раствор не слишком пересыщен и достаточно хорошо перемешивается, то из подвешенной на ниточке затравки вырастает красивый кристалл правильной формы. Кристалл растет из-за того, что в своем тепловом движении какие-то молекулы подходят к тем местам на его

поверхности, где они могут «прилипнуть», заняв наиболее выгодное с энергетической точки зрения положение. Конечно, большинство молекул попадает в не совсем подходящие места, однако рано или поздно они снова переходят в раствор или расплав из-за недостаточной связи с остальным кристаллом. В результате такого равновесного роста получается кристалл без внутренних пустот, с идеально гладкими плоскими гранями.

При отсутствии равновесия между кристаллизацией и растворением (т. е. при быстрой кристаллизации из сильно пересыщенного раствора или при кристаллизации из газовой фазы) появляются кристаллы совсем другого вида. Вы, конечно, видели нарастающую на морозильник холодильника снежную шубу или морозные узоры на окнах. Эти довольно рыхлые образования возникают из-за осаждения содержащейся в воздухе воды. Сначала образуются отдельные скопления молекул — так называемые кластеры; постепенно разрастаясь и соединяясь, кластеры и образуют узоры. Условия, сходные с теми, что имеют место при росте кластеров, существуют и при росте снежинок в облаке.

Такой процесс роста, называемый диффузионно-контролируемой агрегацией, приводит к возникновению кристалликов фрактальной формы — дендритов. Фрактальная размерность дендритных кристаллов определяется конкретными механизмами их роста. В зависимости от взаимодействия образующих кристалл молекул и от размера самого кристалла дендрит может быть случайной, неправильной формы или, напротив, казаться идеально правильной фигурой, как хорошо знакомые всем снежинки. В действительности о правильной форме снежинок можно говорить лишь на достаточно больших масштабах (на размерах самой снежинки), а на малых масштабах никакой регулярности нет — это отражает те случайные процессы, которые привели к их образованию.

Существование минимального масштаба (который в этом случае может



Реальный кластер, образующийся при конденсации Nb Ge<sub>2</sub> на холодную подложку.

быть порядка или много больше размера молекулы) приводит к тому, что полное число молекул в кристалле (или масса кристалла) зависит от его размера по закону  $N_{\text{молекул}} \sim M \sim r^D$ . По зависимости массы дендритных кристаллов от их размера можно, таким образом, определить их размерность.

Очень похожие на дендритные кристаллы фигуры возникают при электрическом пробое диэлектриков. Если сильная электрическая искра ударяет в диэлектрическую пластинку, на ее поверхности остается отчетливо видимый узор — так называемые фигуры Лихтенберга (по имени немецкого физика-экспериментатора Г. Лихтенберга (1742—1799), открывшего эти фигуры). Сходство фигур Лихтенберга и дендритных кристаллов не случайно — их возникновение в теории описывается похожими уравнениями.

Фрактальная размерность есть очень важная и доступная измерению характеристика физической системы. Эта величина может быть также вычислена с помощью различных теоретических моделей. Сравнение измеренного и вычисленных значений позволяет решить, какая из этих моделей лучше. Кроме того, при расчете физических свойств фрактальных систем (например, упругости снега и

других рыхлых материалов) можно пользоваться специально разработанным для этого случая математическим аппаратом.

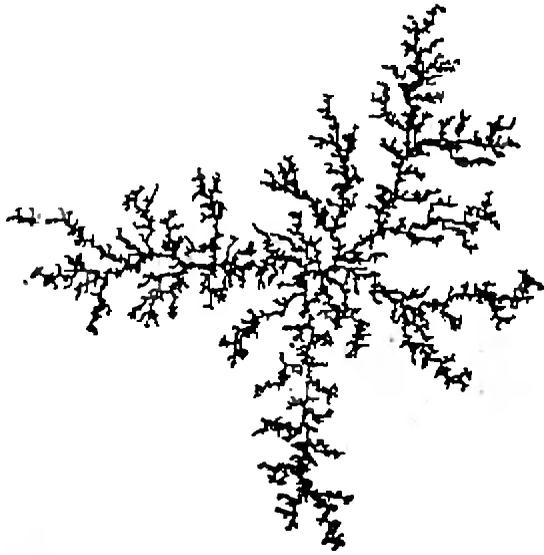
Фрактальными свойствами обладают многие системы, давно используемые для вполне практических целей. Например, поверхность активированного угля, используемого в качестве сорбента (поглотителя) в противогазах, является фрактальной. Размерность этой поверхности больше 2: она имеет чрезвычайно большую (формально — бесконечную, в том же смысле, в каком бесконечна длина кривой Коха) площадь и выемки всех масштабов, способные поймать и надежно удержать частицу любого размера — от пылинки до большой молекулы. Фрактальной является также поверхность многих используемых в химии твердых катализаторов. Их каталитическая активность зависит от фрактальных свойств поверхности, которые определяются способом приготовления и обработки.

Мы познакомились с большим количеством обладающих нецелой размерностью объектов. Хочется задать вопрос — а трехмерно ли само пространство, в котором мы живем? На этот вопрос можно дать вполне конкретный ответ. Дело в том, что фрактальная размерность пространства определяет вид многих привычных нам физических законов. Например, показатель степени 2 в знаменателе зако-

на Кулона  $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$  есть на деле



Фигура Лихтенберга.



Фигура Лихтенберга, смоделированная на ЭВМ.

$D - 1$ , где  $D$  — фрактальная размерность пространства. Анализ данных по проверке физических законов, вид которых зависит от размерности пространства, показал, что его размерность отличается от 3 не более, чем на  $10^{-10}$ . Наше пространство действительно «очень трехмерно».

### Вместо заключения

История изучения фрактальных систем довольно поучительна. Появившись вначале как игра ума чистых математиков, эти объекты мало интересовали естествоиспытателей. Одновременно с этим существовало некоторое количество малопонятных фак-

тов (типа неизмеримости длины береговой линии), не слишком важных, чтобы привлечь общее внимание, и не слишком интересных, чтобы исследовать их ради них самих. Число таких фактов растет, но они по-прежнему остаются малоинтересными и разрозненными. Затем всему этому дается общее название — фрактал, и вскоре (а прошло всего около 10 лет) в физике начинается целый «фрактальный бум». Один из ученых даже назвал фракталы инфекцией конца двадцатого века.

Во-первых, оказалось, что мы окружены такими системами и сталкиваемся с ними чуть ли не каждый день. Во-вторых, многие свойства таких объектов весьма необычны. Не понимая этих свойств, нельзя понять даже таких простых вещей, как форма облаков или снежинок. В-третьих, все оказалось сложнее, чем представлялось вначале: фрактал должен описываться не одной своей фрактальной размерностью, а целым набором, спектром разных размерностей, каждая из которых становится равной размерности евклидова пространства, как только мы переходим от фракталов к обычным телам. Разные свойства фрактальных систем зависят от разных размерностей. В-четвертых, в-пятых, ... в-десятых — новые вопросы возникают быстрее, чем дают-ся ответы на старые.

Этап накопления вопросов прошли многие теории, прежде чем приобрести стройность и завершенность. Так что у фракталов еще всё впереди.

## Сергей Алексеевич Чаплыгин

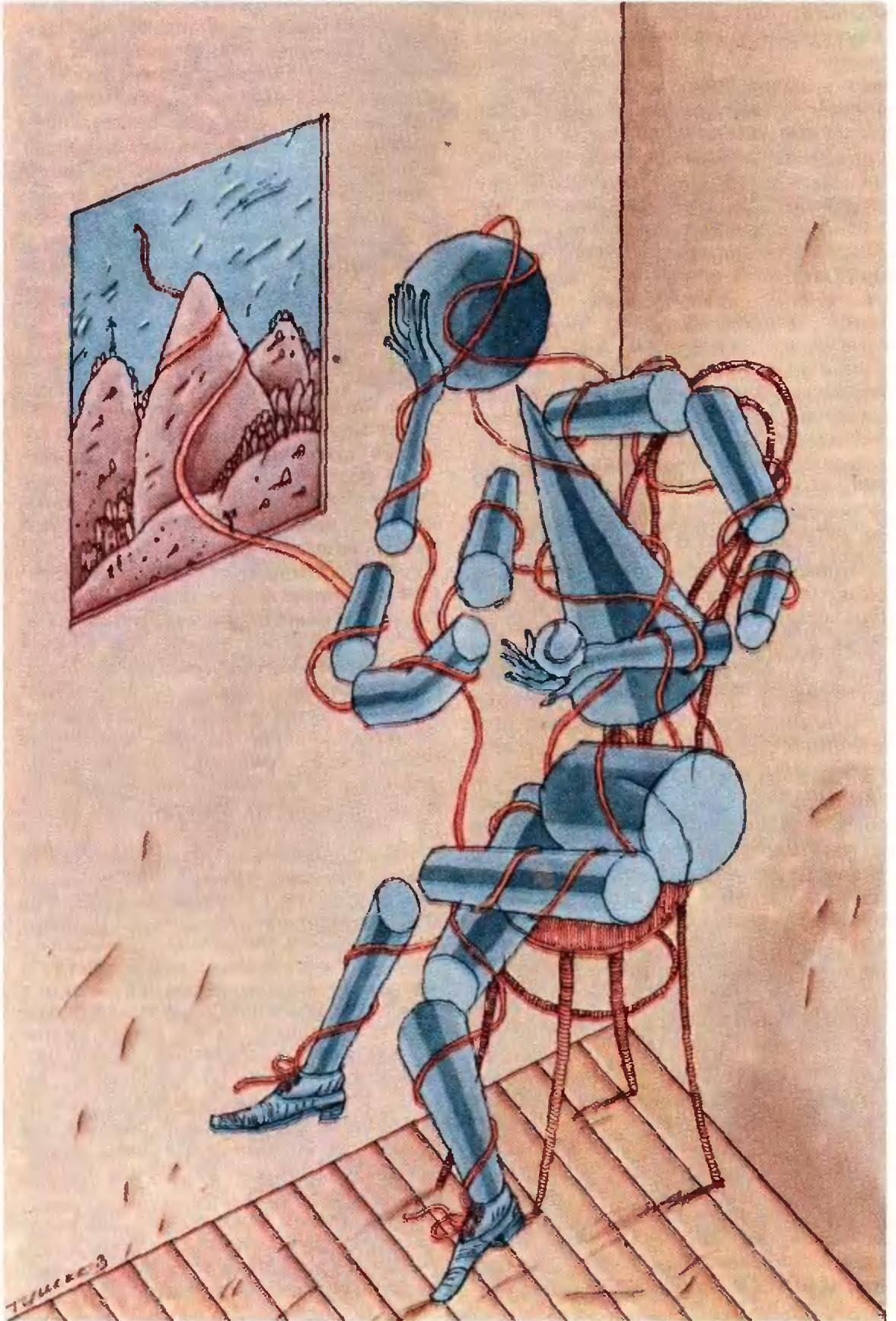
(Начало см. на с. 2)

впоследствии, когда докладчик тщательно проверил свои вычисления, выяснилось, что Сергей Алексеевич был действительно прав. Подобных легенд ходило великое множество.

Осенью 1941 года правительство решило перевести ЦАГИ в Казань и Новосибирск. Чаплыгин стал руководить Новосибирским филиалом ЦАГИ. В кратчайший срок ему

удалось развернуть напряженную работу на новом месте. Снова разрабатывались проекты и строились аэродинамические лаборатории, велась интенсивная научная работа. Но годы и перенесенные болезни все больше и больше дают себя чувствовать. 8 октября 1942 года Сергей Алексеевич скончался.

Имя Сергея Алексеевича Чаплыгина продолжает жить в трудах его учеников, в работах всех ученых, развивающих и обобщающих его идеи.



TUMKES

# О КРИВИЗНЕ

Кандидат физико-математических наук  
С. Л. ТАБАЧНИКОВ

Всякий, кому доводилось изгибать из проволоки причудливые фигуры или вычерчивать на листе бумаги изогнутые линии, знаком с понятием кривизны плоской кривой — рисунок 1. А что такое кривизна поверхности? У какой из двух поверхностей — цилиндра или сферы — кривизна больше? Подобными вопросами занимается дифференциальная геометрия — раздел математики, созданный в 18—19 веках усилиями многих ученых, и в первую очередь, Л. Эйлером, К.-Ф. Гауссом и Б. Риманом.

**Плоские многоугольники и кривые.** Знакомство с кривизной поверхности мы начнем с... плоских многоугольников. Вы помните, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна  $2\pi$  (рис. 2). Назовем кривизной угла  $\alpha$  число  $\pi - \alpha$ , т. е. величину его внешнего угла (кривизна тем больше, чем острее угол). Тогда

*сумма кривизн углов выпуклого многоугольника равна  $2\pi$ .*

На самом деле это утверждение вер-



Рис. 1. Кривизна синей линии больше, чем красной.

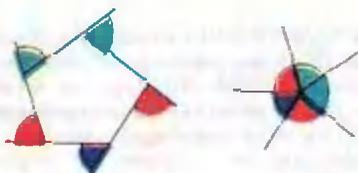


Рис. 2. Из внешних углов многоугольника можно сложить полный угол. Поэтому сумма внешних углов равна  $2\pi$ .

но не только для выпуклых, но и для *несамопересекающихся* многоугольников. Случай самопересекающихся многоугольников более сложен.

Упражнение 1. а) Найдите сумму кривизн углов «звезд» на рисунке 3.

А как определить кривизну гладкой кривой, не имеющей углов? Нарисуем кривую и станем обходить ее с единичной скоростью. Вектор скорости будем откладывать от некоторой фиксированной точки  $O$ . Тогда его конец будет двигаться по единичной окружности с центром  $O$ . Назовем кривизной кривой в данной точке мгновенную скорость движения конца вектора по единичной окружности. Чем быстрее поворачивается кривая, тем больше ее кривизна.

Упражнение 2. Найдите кривизну прямой линии и окружности радиусом  $R$ .

Кстати, прямые и окружности — это единственные кривые, кривизна которых одинакова во всех точках.

При движении по кривой с единичной скоростью меняется только направление скорости. Возьмем малый



Рис. 3. Найдите суммы углов этих звезд.



Рис. 4. Ускорение — это предел отношения  $|v-u|/l$  при  $l \rightarrow 0$ . Длина вектора  $v-u$  стремится к длине дуги  $XY$ , равной  $\alpha$ . Поэтому ускорение равно  $\lim \alpha/l$ , т. е. равно кривизне.

участок кривой длиной  $l$  и обозначим через  $\alpha$  угол между касательными к кривой в его концах. Кривизна — это предел отношения  $\alpha/l$  при  $l \rightarrow 0$ . Рисунок 4 показывает, что кривизна — это величина ускорения при движении по кривой с единичной скоростью. Кривизне можно приписать знак (в соответствии с тем, в какую сторону поворачивается кривая — по или против часовой стрелки (рис. 5)).

Обойдем замкнутую кривую с единичной скоростью и вернемся в исходную точку. Конец вектора скорости совершит оборот единичной окружности и пройдет путь, равный  $2\pi$ . Если бы скорость движения конца вектора была постоянной, то путь был бы равен произведению его скорости на время. В общем же случае путь равен интегралу скорости по времени. Скорость движения конца вектора — это кривизна кривой. Итак,

*интеграл кривизны по замкнутой несамопересекающейся кривой равен  $2\pi$ .*

Эта теорема — аналог утверждения о том, что сумма внешних углов многоугольника равна  $2\pi$ . Для кривых, имеющих точки самопересечения, интеграл кривизны может принимать и другие значения (рис. 6).

**Сферический многоугольник\*).** Нарисуем на сфере единичного радиуса

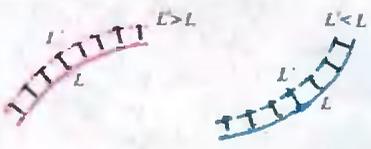


Рис. 5. Кривизна положительна, если кривая поворачивается по часовой стрелке, и отрицательна, если — против. При малом сдвиге кривой влево по нормали ее длина увеличивается тем больше, чем больше кривизна. При сдвиге длина красной кривой увеличивается, а синей — уменьшается.



Рис. 6. Найдите интегралы кривизны по этим кривым. Подсказка: сколько раз обходят единичную окружность концы векторов скорости?

треугольник с углами  $\alpha, \beta, \gamma$ , стороны которого — дуги больших окружностей. Чему равна его площадь? Рисунок 7 показывает, что эта площадь задается простой формулой:

$$S = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

**Важное следствие:** сумма углов сферического треугольника всегда больше  $\pi$  и тем больше, чем больше его площадь.

А как найти площадь сферического  $n$ -угольника с углами  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ ? Точно так же, как на плоскости: разделить его диагоналями на треугольники (вы, конечно, понимаете, что и стороны, и диагонали — дуги больших окружностей). Получится такая формула:

$$S = (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n) - (n - 2)\pi.$$

**Неожиданное следствие:** площадь сферического многоугольника зависит только от величин его углов и не зависит от длин его сторон.

Обозначим через  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  внешние углы сферического многоугольника, равные  $\pi - \beta_1, \pi - \beta_2, \dots, \pi - \beta_n$ . Формулу для площади можно переписать так:

$$S = 2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n).$$

\* Сказанное в этом пункте и ниже, в пункте «Сумма кривизн углов многогранника», частично содержалось в статье Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Сумма углов» («Квант», 1988, № 2).

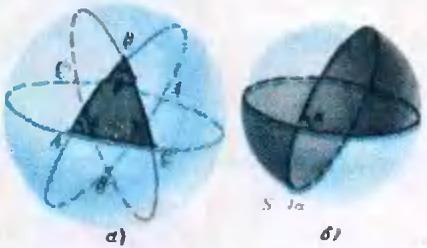


Рис. 7. На рисунке а) вы видите три области, состоящие из двух долек, ограниченных парой больших окружностей. На рисунке б) изображена одна такая область. Поскольку площадь всей сферы равна  $4\pi$ , площадь области равна  $4\pi$ . Три области на рисунке а) покрывают всю сферу, причем треугольник  $ABC$  и центрально симметричный ему треугольник  $A'B'C'$  покрыт трижды. Поэтому  $4\alpha + 4\beta + 4\gamma = 4\pi + 4S$  или  $S = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ .

Как видите, геометрия сферы отличается от привычной нам «плоской» геометрии, в которой сумма внешних углов многоугольника равна  $2\pi$ .

**Кривизна многогранного угла.** На плоскости кривизну угла  $\alpha$  мы определяли как  $\pi - \alpha$ . А как определить кривизну многогранного угла? Поступим аналогично. Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  — величины плоских углов многогранного угла. Назовем его кривизной величину  $2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$ . Чем острее угол, тем больше его кривизна.

**Упражнение 3.** Найдите кривизны многогранных углов правильных многогранников: тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра и икосаэдра.

Если число граней угла больше трех, то грани можно вращать относительно ребер, как если бы они были соединены дверными петлями (точно так же, как при  $n > 3$  стороны плоского  $n$ -угольника можно шарнирно вращать относительно вершин, сохраняя их длины). При такой деформации величины плоских углов многогранного угла сохраняются, а значит, сохраняется и его кривизна.

На плоскости кривизну угла мы определяли еще и как величину его внешнего угла. В пространстве роль внешнего угла играет так называемый *двойственный угол*, изображенный на рисунке 8. Рисунок 9 показывает, что

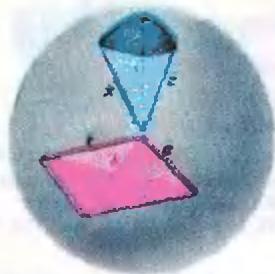


Рис. 8. Синий угол — двойственный угол красного угла. Его ребра — это лучи, перпендикулярные граням красного угла и смотрящие наружу.

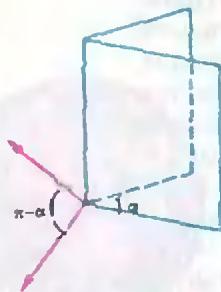


Рис. 9. Плоский угол двойственного угла.

плоские углы двойственного угла дополняют до  $\pi$  двугранные углы исходного многогранного угла. (1)

Можно ли, глядя на рисунок 8, сказать, какой из углов исходный, а какой — двойственный? Конечно, нет: ведь углы совершенно равноправны. Следовательно, *угол, двойственный к двойственному — это снова исходный многогранный угол*. Это наблюдение позволяет поменять местами углы в утверждении (1) и сказать, что

*двугранные углы двойственного угла дополняют до  $\pi$  плоские углы исходного многогранного угла.* (2)

Построим единичную сферу с центром в вершине многогранного угла. Двойственный ему угол отсекает на этой сфере многоугольник, углы которого равны двугранным углам этого двойственного угла (на рисунке 8 — это синий треугольник). Обозначим через  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  плоские углы исходного многогранного угла. Согласно утверждению (2), внешние углы сферического многоугольника, высекаемого на сфере двойственным углом, тоже равны  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . По формуле, которую мы получили в предыдущем разделе, площадь этого многоугольника равна

$$2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n).$$

Но ведь это кривизна исходного многогранного угла! Итак, кривизна многогранного угла — это площадь многоугольника, высекаемого на единичной сфере двойственным многогранным углом. Эту площадь естественно считать величиной соответствующего угла. Так что *кривизна многогранного угла — это просто величина его двойственного угла* (в полном соответствии со случаем углов на плоскости!).

**Сумма кривизн углов многогранника.** Построим в каждой вершине выпуклого многогранника двойственный угол. Рисунок 10 показывает, что

*сумма кривизн углов выпуклого многогранника равна  $4\pi$ .*

Это утверждение — пространственный аналог того, что сумма внешних углов многоугольника равна  $2\pi$ . Не правда ли рисунки 2 и 10 похожи?

Обозначим через  $B$  число вершин многогранника, через  $P$  — число его ребер, и через  $\Gamma$  — число граней. Подсчитаем сумму всех плоских углов двумя способами. Сумма плоских углов при  $i$ -й вершине равна  $2\pi - K_i$ , где  $K_i$  — кривизна этой вершины. Поэтому сумма всех плоских углов равна  $2\pi B - \sum K_i = 2\pi B - 4\pi$ . С другой стороны, сумма углов  $n$ -угольника равна  $\pi(n-2)$ . Значит, сумма плоских углов  $j$ -й грани равна  $\pi(n_j-2)$ , где  $n_j$  — число ребер этой грани. Поэтому сумма всех плоских углов равна также  $\pi \sum n_j - 2\pi \Gamma$ . Каждое ребро принадлежит ровно двум граням, так что  $\sum n_j = 2P$ . Значит, сумма всех плоских углов равна  $2\pi P - 2\pi \Gamma$ . Итак,  $2\pi B - 4\pi = 2\pi P - 2\pi \Gamma$  или

$$B - P + \Gamma = 2.$$

Эта формула называется *формулой Эйлера*, а число  $B - P + \Gamma$  называется *эйлеровой характеристикой многогранника*. Эйлера характеристика выпуклого многогранника равна 2,

а для других (несамопересекающихся) многогранников она может принимать значения 0 (рис. 11),  $-2$ ,  $-4$ ,  $-6$ , ...

**Кривизна гладкой поверхности.** Для плоского случая у нас было две параллельные теории: одна — для кривизны многоугольников, другая — для кривизны гладких кривых. Нам хотелось перенести эти теории в пространство, и с первой задачей мы справились — определили кривизну многогранных углов. А как обстоит дело с гладкими поверхностями? Мы расскажем об этом без доказательств (их можно провести, приближая гладкую поверхность многогранной).

Вспомните, как определялась кривизна кривой: касательные векторы сносились в одну точку и... Первый вопрос, который возникает при попытке рассуждать аналогично в пространстве — чем заменить касательные векторы к поверхности (ведь в каждой ее точке касательных векторов слишком много — целая плоскость)? К счастью, с этой трудностью мы уже встречались при определении «внешнего» угла многогранного угла. Поступим так же, заменив касательные векторы на нормальные.

Итак, выберем на поверхности точку  $A$  и окружим ее маленькой областью площадью  $s$ . В каждой точке области восстановим к поверхности

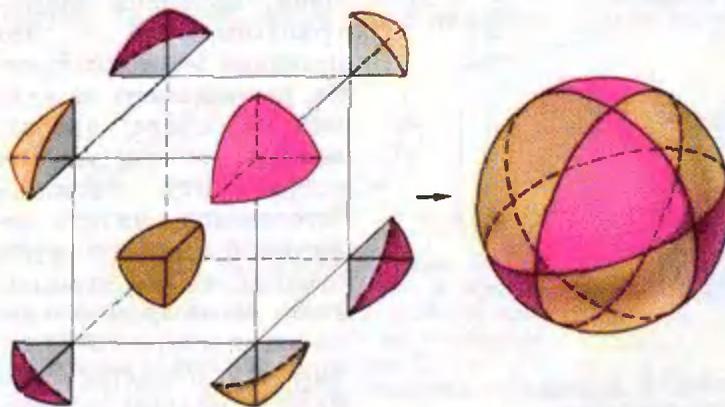


Рис. 10. «Шапочки», построенные в вершинах многогранника, вместе покрывают всю единичную сферу. Их общая площадь, равная сумме кривизн вершин, равна площади единичной сферы  $4\pi$ .



Рис. 11. Эйлера характеристика этого многогранника равна нулю. Докажите!



Рис. 12. Единичные нормали к поверхности  $s$  снесены в одну точку. Их концы лежат на единичной сфере и занимают площадь  $t$ . Предел отношения  $t/s$  при  $s \rightarrow 0$  называется гауссовой кривизной.

единичный перпендикуляр (получится что-то вроде ежа, ошетилившегося иглами, — рисунок 12). Отложим все эти перпендикуляры от одной точки; их концы образуют на единичной сфере область площадью  $t$ . Предел отношения  $t/s$  при  $s \rightarrow 0$  называется *гауссовой кривизной поверхности в точке A*.

Например, как и следовало ожидать, кривизна плоской поверхности равна нулю — концы всех нормалей попадут на единичной сфере в одну точку. Равна нулю и кривизна цилиндра — концы иголок «цилиндрического ежа» описывают на единичной сфере экватор, т. е. линию, площадь которой, естественно, равна нулю.

Упражнение 4. Найдите кривизну конуса; сферы радиусом  $R$ .

Гауссова кривизна имеет знак. Обойдем точку на поверхности по часовой стрелке. Если концы единичных нормалей к поверхности движутся на единичной сфере тоже по часовой стрелке, то гауссова кривизна положительна, а если против — то отрицательна. Причем в отличие от случая плоских кривых, знак кривизны не зависит от ориентации. Совсем легко убедиться, что кривизна сферы (как и любой выпуклой поверхности) положительна. Поверхность, имеющая отрицательную кри-



Рис. 13. Кривизна седловидной поверхности отрицательна. Докажите это.



Рис. 14. Поверхность тора: синие участки имеют положительную кривизну, а красные — отрицательную.

визну, похожа на седло — рисунки 13 и 14.

Мы знаем, что сумма кривизн углов выпуклого многогранника равна  $4\pi$ . В случае поверхности нужно заметить сумму на интеграл, и получится такое утверждение:

*интеграл кривизны выпуклой поверхности равен  $4\pi$ .*

Кривизна сферы радиусом  $R$  одинакова во всех точках. Поэтому интеграл ее кривизны  $K$  равен просто произведению кривизны на площадь сферы  $4\pi R^2$ . Следовательно,  $K \cdot 4\pi R^2 = 4\pi$ , или  $K = 1/R^2$  — ответ, уже известный тем, кто выполнил упражнение 4.

А как быть, если поверхность не выпуклая? Нужно найти ее эйлерову характеристику, заменив поверхность на многогранник (например, тор на рисунке 14 на многогранник на рисунке 11). Тогда интеграл кривизны снова окажется равным эйлеровой характеристике, умноженной на  $2\pi$ .

**Изгибание.** Изгибанием поверхности называется такая ее деформация, при которой сохраняются длины всех кривых на поверхности. Например, изгибаемая плоскость, можно получить цилиндр или конус. Как ведет себя при изгибании кривизна? Чтобы ответить на этот вопрос, подумаем, что является аналогом изгибания для многогранных поверхностей. С такой деформацией мы уже встречались: это вращение граней многогранного угла вокруг его ребер. При таком вращении кривизна угла не меняется. Аналогично обстоит дело и для поверхностей: *при изгибании поверхности ее кривизна не меняется.*

Это утверждение — знаменитая теорема *Egregium* (блестящая, блистательная) К.-Ф. Гаусса, которую сам Гаусс ценил очень высоко. Теорема *Egregium* объясняет, почему даже самый маленький участок плоскости нельзя изогнуть на сферу: кривизна плоскости равна нулю, а кривизна сферы положительна.

Поверхности, которые можно получить, изгибаемая плоскость, называются *развертывающимися*. Их кривизна в каждой точке равна нулю. Верно и обратное: если кривизна поверх-

ности тождественно равна нулю, то ее можно получить изгибанием плоскости. Развертывающимся поверхностям посвящена статья Д. В. Фукса «Геометрия листа бумаги» (см. «Квант», 1988, № 9).

**Параллельный перенос.** Все знают, что такое параллельный перенос на плоскости. А нельзя ли определить параллельный перенос на искривленной поверхности? Как и раньше, начнем с поверхности многогранника.

Рассмотрим две соседние грани многогранника. Если повернуть плоскость одной из них вокруг общего ребра, то она совместится с плоскостью другой грани (рис. 15). Этот поворот можно рассматривать, как перекатывание многогранника с одной грани на другую через его ребро. Если на первой грани нарисовать вектор, то после поворота он отпечатается на плоскости второй грани. Такой перенос вектора с одной грани на другую называется *параллельным переносом через ребро* (рис. 16, 17).

Перекатывая многогранник через некоторую последовательность его ребер, мы совершаем параллельный перенос его грани через эти ребра. На какой угол повернется исходная грань, когда цепочка ребер замкнется? Эта задача решена в статье В. Э. Матизена «Перекатывание многогранников»<sup>\*)</sup>. А ответ такой: *угол поворота равен сумме кривизн*

*вершин многогранника внутри контура, соединяющего середины ребер, через которые совершаются параллельные переносы.* (В действительности, слово *внутри* не имеет здесь точного смысла: контур делит многогранник на две части, и не понятно, какая из них внутренняя, а какая внешняя. Уточнение таково: контур ориентирован, поскольку перекатывание производится в определенном направлении; если угол поворота мы отсчитываем против часовой стрелки, то нужно брать ту часть многогранника, которая при обходе контура в положительном направлении остается слева.)

Теперь мы готовы к тому, чтобы определить параллельный перенос на искривленной поверхности. Нарисуем на поверхности кривую и проведем касательную плоскость в некоторой ее точке. По аналогии с многогранниками, дадим такое определение: *параллельный перенос касательной плоскости вдоль кривой на поверхности — это ее качение вдоль кривой без проскальзывания* (при таком качении мгновенная ось вращения касательной плоскости касается поверхности и перпендикулярна нарисованной на ней кривой).

**Теорема Гаусса — Бонне.** Если перенести параллельно касательную плоскость вдоль замкнутой кривой, то она вернется на прежнее место, но повернется на некоторый угол. В случае многогранников этот угол равен сумме

<sup>\*)</sup> См. с. 63 этого номера.

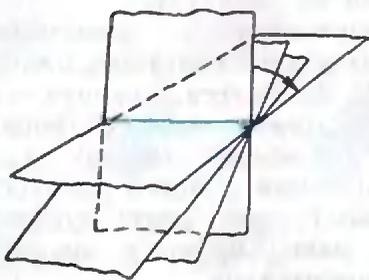


Рис. 15. Параллельный перенос грани многогранника через его ребро — это поворот вокруг ребра.

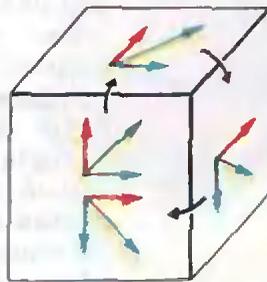


Рис. 16. Параллельный перенос трех векторов через тройку соседних ребер куба.

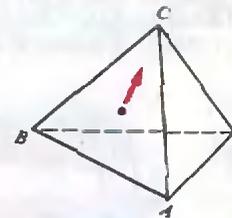


Рис. 17. Нарисуйте результат параллельного переноса красного вектора через ребра АВ и АС правильного тетраэдра.

кривизн вершин внутри кривой. Аналогично обстоит дело и для поверхностей:

*поворот касательной плоскости при параллельном переносе вдоль замкнутой кривой равен интегралу кривизны поверхности по области, ограниченной этой кривой.*

Это знаменитая теорема Гаусса — Бонне — одна из основных теорем дифференциальной геометрии.

Как видите, параллельный перенос на поверхности отличается от параллельного переноса на плоскости: его результат зависит от пути, вдоль которого происходит перенос, а если этот путь — замкнутый, то результат параллельного переноса оказывается поворотом. Этими необычными свойствами параллельный перенос обязан кривизне поверхности. Если же кривизна равна нулю, т. е. поверхность — развертывающаяся, то параллельный перенос «устроен» точно так, как на плоскости.

Упражнение 5. На какой угол повернется касательная плоскость сферы при параллельном переносе вдоль ее параллели с шириной  $\varphi$ ?

**Геодезические линии.** Располагая определением параллельного переноса, мы можем определить кривизну кривой на поверхности. Это определение очень похоже на определение кривизны плоской кривой. Возьмем на поверхности маленький участок кривой  $AB$  длиной  $l$  и параллельно перенесем вдоль него касательный вектор кривой из точки  $A$  в точку  $B$ . Этот вектор уже не обязательно будет касаться кривой в точке  $B$ ; обозначим через  $\alpha$  угол между ним и касательной в точке  $B$ . Предел отношения  $\alpha/l$  при  $l \rightarrow 0$  называется *геодезической кривизной кривой на поверхности*.

Упражнение 6\*. Рассмотрим замкнутую кривую на поверхности. Докажите, что интеграл ее геодезической кривизны дополняет до  $2\pi$  интеграл кривизны поверхности по области, ограниченной этой кривой.

Среди линий, нарисованных на поверхности, особую роль играют линии, кривизна которых в каждой точке равна нулю. Эти линии называются *геодезическими*. Они имеют наиболее

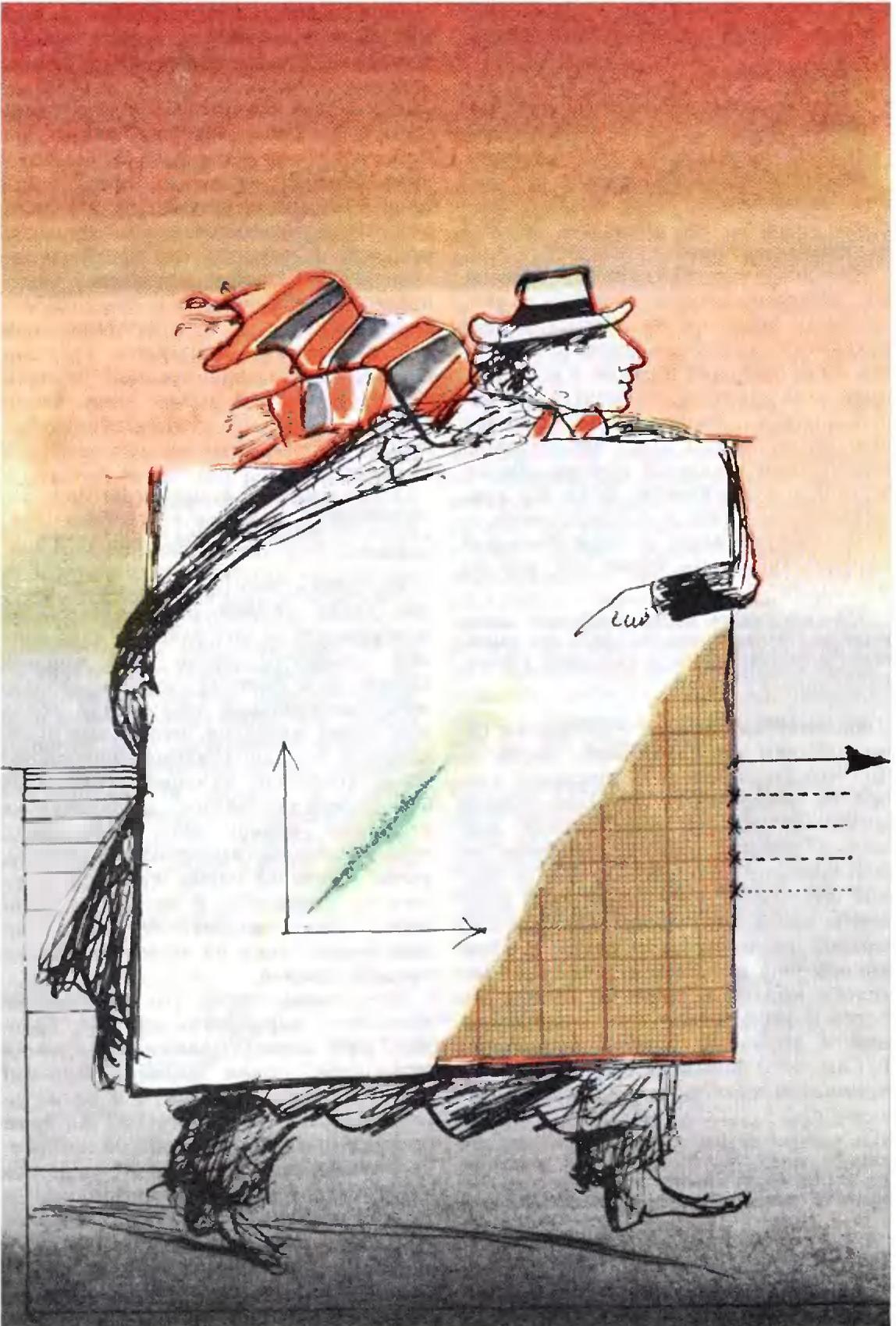
«прямое» среди всех линий направление (в том смысле, в каком прямолинейна дорога, прямо ведущая на вершину холма, в отличие от извилисто поднимающегося в гору серпантина). Геодезические линии на плоскости — это, конечно, прямые линии; геодезические на сфере — это дуги больших окружностей. Из каждой точки поверхности в каждом направлении выходит по одной геодезической — подобно земным меридианам, выходящим из полюса. Геодезические можно еще описать, как кривые, по которым нужно передвигаться, чтобы как можно быстрее попасть из одной точки поверхности в другую (это и не удивительно — чтобы скорее прийти, нужно идти, не сворачивая).

Упражнение 7. Нарисуйте несколько геодезических на конусе и цилиндре. Подсказка: разверните эти поверхности на плоскость.

Вспомним, что параллельный перенос вдоль кривой на искривленной поверхности — это качение касательной плоскости вдоль этой кривой. Перейдем в систему отсчета, связанную с касательной плоскостью. Тогда нам будет казаться, что поверхность катится по неподвижной плоскости. Из-за того, что качение происходит без проскальзывания, *геодезическая кривизна кривой на поверхности, вдоль которой происходит качение, равна кривизне следа, который остается на плоскости*. В частности, если перекачивать поверхность вдоль геодезической, след на плоскости будет прямой линией.

Представим себе, что прямая на плоскости нарисована липкой краской. При перекачивании эта прямая (а точнее, узкая полоска краски) прилипнет к поверхности и расположится вдоль геодезической. На этом основан практический способ построения геодезических: нужно вырезать из бумаги узкий прямоугольник и плотно прижать его к поверхности — получится геодезическая линия. Поэкспериментируйте с различными поверхностями (например, воздушным шариком или надутым кругом).

(Окончание см. на с. 42)



# МНОГОКВАНТОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

Доктор физико-математических наук  
Н. Б. ДЕЛОНЕ

## Что это такое?

В середине шестидесятых годов группа физиков-экспериментаторов пыталась осуществить следующий опыт: ионизовать изолированный атом (т. е. «оторвать» от него электрон), облучая его видимым светом. На первый взгляд сама идея такого опыта может показаться абсурдной.

Действительно, для ионизации атома необходимо поглощение кванта (фотона) с энергией  $h\nu$ , большей энергии ионизации  $E_n$ :

$$h\nu > E_n.$$

Для разных атомов значение  $E_n$  лежит в пределах 4—24 эВ (напомним: 1 эВ =  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж); так что частота излучения, квант которого мог бы привести к ионизации, должна быть не меньше  $\sim 1 \cdot 10^{15}$  с<sup>-1</sup>. А диапазон частот видимого света — от  $\sim 0,4 \cdot 10^{15}$  с<sup>-1</sup> (красный свет) до  $\sim 0,8 \cdot 10^{15}$  с<sup>-1</sup> (фиолетовый свет). Так что для ионизации атомов необходимы кванты не видимого излучения ( $\sim 2$  эВ), а более высокочастотного (более коротковолнового), например ультрафиолетового.

Обратите внимание: неравенство  $h\nu > E_n$  аналогично записи знаменитого закона Эйнштейна для фотоэффекта —  $h\nu > A$ , где  $A$  — работа выхода электрона из поверхности металла. Этим законом в 1905 году было положено начало квантовой теории света. В основе указанной выше аналогии лежит единая физическая природа процессов отрыва электрона от атома и из поверхности металла.

Итак, ионизация атома квантом видимого света невозможна. Если энергия такого кванта равна разности энергий основного ( $E_n$ ) и возбужденного ( $E_m$ ) состояний электрона в ато-

ме, т. е.  $h\nu = E_m - E_n$ , то атом может поглотить квант и перейти в возбужденное состояние. А обратный переход (возврат в основное состояние) будет сопровождаться излучением фотона с частотой  $\nu$ . Условие

$$E_n + h\nu = E_m$$

есть не что иное как второй постулат Бора. Таким образом, поглощение кванта видимого света может привести лишь к возбуждению атома, а не к его ионизации (рис. 1).

Неравенство  $h\nu > E_n$  отражает тот хорошо известный экспериментальный факт, что существует так называемая «красная граница» для процесса ионизации атомов излучением: при частоте излучения  $\nu$ , меньшей

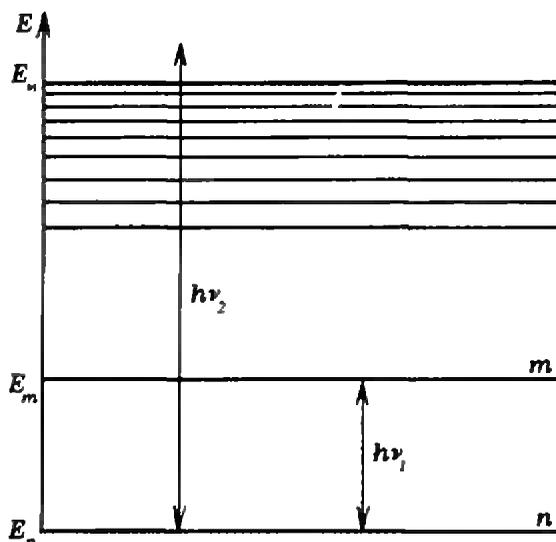


Рис. 1. Энергетическая схема атомных уровней (связанных состояний электрона в атоме);  $n$  — основное состояние,  $m$  — возбужденное;  $E_n$ ,  $E_m$  — энергии этих состояний;  $E_n$  — энергия ионизации атома.

пороговой частоты  $\nu_{кр} = E_n/h$  (т. е. при длине волны, большей пороговой, при «более красном» излучении), ионизация не происходит. И в этом случае имеется полная аналогия с красной границей для фотоэффекта:  $\nu_{кр} = A/h$ .

После всего сказанного может возникнуть некоторое недоумение: что же, экспериментаторы, пытавшиеся осуществить ионизацию атома видимым светом, не знали основ квантовой физики? Нет, это были опытные физики, уже достигшие известности своими исследованиями. И эксперимент они проводили в лаборатории Физического института имени П. Н. Лебедева Академии наук СССР, одного из ведущих мировых центров физических исследований. А одновременно аналогичные опыты ставились в физических лабораториях других стран — США, Франции, Канады. В чем же дело?

Конечно, опыт был научно обоснован. Направлен он был на обнаружение *многоквантовых процессов* и, конкретно, *многоквантовой ионизации атома*. Принципиальная возможность реализации многоквантовых процессов прямо не следовала из закона Эйнштейна для фотоэффекта и постулатов Бора; она была обоснована в процессе дальнейшего развития квантовой теории.

Постулированное Бором соотношение  $E_n + h\nu = E_m$ , выражающее закон сохранения энергии при взаимодействии излучения с атомом, остается, разумеется, справедливым и с точки зрения современной квантовой теории. Однако оно представляет собой лишь частный случай более общего закона, имеющего вид

$$E_n + E = E_m.$$

В этом общем законе величина  $E$  — это энергия, которую получил атомный электрон. Это может быть энергия одного кванта излучения, т. е.  $E = h\nu$  (согласно второму постулату Бора). Это может быть энергия, полученная атомным электроном при столкновении атома с какой-либо частицей, имеющей достаточно большую кинетическую энергию, — например со

свободным электроном. Наконец, это может быть энергия нескольких квантов излучения, т. е.  $E = K h\nu$ . В этом случае закон сохранения энергии имеет вид

$$E_n + K h\nu = E_m,$$

а переход атомного электрона из основного состояния (с энергией  $E_n$ ) в возбужденное (с энергией  $E_m$ ) называется *многоквантовым переходом*. В результате такого многоквантового перехода реализуется *процесс многоквантового возбуждения атома* (рис. 2).

Если энергия  $K h\nu$  нескольких квантов излучения больше энергии ионизации атома  $E_n$ , т. е.

$$K h\nu > E_n,$$

то электрон может быть вырван из атома. Это — *процесс многоквантовой ионизации атома* (рис. 3).

Многоквантовое возбуждение и многоквантовая ионизация атомов представляют собой наиболее простые примеры многоквантовых процессов, возникающих при взаимодействии излучения с атомами, молекулами и различными средами. Появление термина «*многоквантовые процессы*» привело к появлению нового названия «*одноквантовые процессы*» для давно и хорошо известных процессов, проис-

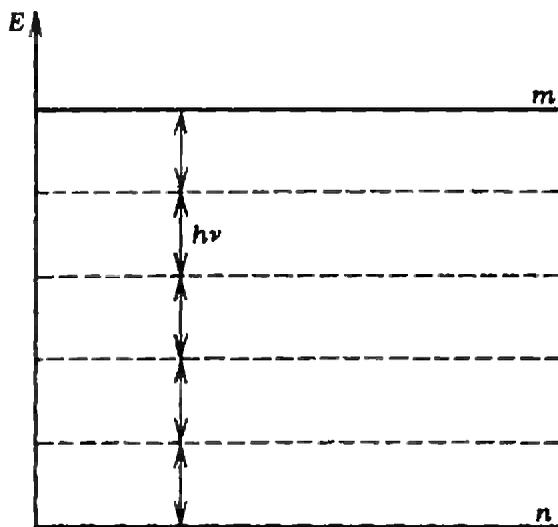


Рис. 2. Энергетическая схема процесса многоквантового возбуждения:

$$E_n + K h\nu = E_m, \quad K=5.$$

ходящих в результате поглощения одного кванта излучения (например, фотовозбуждения и фотоионизации атомов).

Таким образом, современная квантовая теория расширяет содержание второго постулата Бора, допуская возможность многоквантовых переходов электрона между стационарными состояниями в атоме, и расширяет закон Эйнштейна, допуская возможность многоквантовой ионизации. Именно на обнаружение многоквантовой ионизации и был направлен опыт, о котором шла речь выше.

Возникает естественный вопрос — почему лишь в шестидесятих годах физики обратились к попыткам обнаружить многоквантовые процессы? Почему до этого времени многоквантовые процессы не принимались во внимание ни в оптике, ни в спектроскопии и о них не было упоминаний не только в школьных учебниках, но и в университетском курсе физики? Дело в том, что для реализации многоквантовых переходов необходима исключительно высокая интенсивность излучения — только при этом условии атом может одновременно поглотить много квантов. Никакие источники света, существовавшие до шестидесятих годов нашего века, не могли обеспечить интенсивность излучения, необходимую для реализации многоквантовых переходов. Ситуация в корне изменилась после создания лазеров.

Исключительные свойства лазерного излучения хорошо известны. Малый угол расходимости (лучи в лазерном пучке практически параллельны) дает возможность сфокусировать излучение на очень малую площадь; возможность плавного изменения частоты излучения, высокая мощность излучения — все это обеспечивает интенсивность, которая на много порядков величины превышает интенсивность излучения старых источников света. Поэтому, как только в начале шестидесятих годов в руках у физиков оказались мощные лазеры, экспериментаторы обратились к попыткам обнаружить многоквантовые процессы.

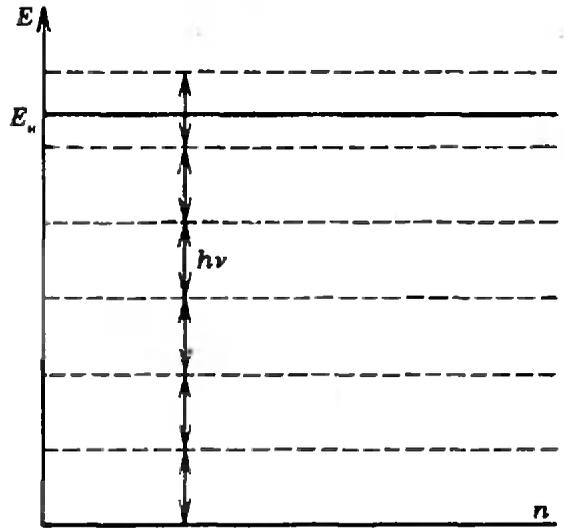


Рис. 3. Энергетическая схема процесса многоквантовой ионизации атома:

$$E_n + K h\nu > E_n, K=6.$$

Наиболее общее свойство всех многоквантовых процессов, отличающее их от одноквантовых процессов, заключается в качественном различии зависимости вероятности  $w$  тех и других процессов от интенсивности излучения  $I = Q/st$ , т. е. от числа квантов  $Q$ , падающих на единичную площадку  $s$  за единицу времени  $t$ . В случае одноквантовых процессов это хорошо известная линейная зависимость:  $w \sim Q$ .

В случае многоквантовых процессов это степенная зависимость с показателем степени  $K$ , равным числу поглощенных квантов:  $w \sim I^K \sim Q^K$ . Соответственно одноквантовые процессы часто называют *линейными*, а многоквантовые — *нелинейными процессами*. В частности, широко известным современным термином «*нелинейная оптика*» обозначают совокупность различных оптических явлений, в основе которых лежат многоквантовые процессы.

Прежде чем обратиться к детальному описанию того опыта, который мы упомянули в самом начале этой статьи, интересно и поучительно обратиться к истории физики.

Кто же и когда впервые понял и обосновал возможность реализации многоквантовых процессов?

## Краткая предыстория

Замечательным является тот факт, что впервые на возможность реализации многоквантовых переходов указал Эйнштейн еще в 1905 году, задолго до создания квантовой механики. Обсуждая в одной из работ закон Стокса для люминесценции (при фотолюминесценции длина волны излучаемого света больше длины волны поглощаемого света), Эйнштейн заметил, что если «число квантов, одновременно взаимодействующих с единицей объема, велико, то квант энергии излучаемого света может получить свою энергию от нескольких падающих квантов». Обсуждая в то же время в другой работе флюоресценцию, возникающую под действием катодных лучей (электронов), Эйнштейн отметил, что кинетическая энергия электрона может трансформироваться в несколько световых квантов. Наконец, в тех же работах Эйнштейн формулирует и основное соотношение для вероятности многоквантовых переходов, утверждая, что интенсивность излучения, образующегося в результате поглощения двух квантов, должна быть пропорциональна квадрату интенсивности падающего излучения.

Таким образом, Эйнштейн еще в 1905 году постулировал существование процессов многоквантового поглощения и излучения и сформулировал основное соотношение для вероятности многоквантовых процессов. Эти утверждения Эйнштейна качественно абсолютно верно отражают сущность многоквантовых процессов. (Еще одно подтверждение той исключительной интуиции, которая являлась характерной чертой научного творчества Эйнштейна.)

Почти два десятилетия после замечаний Эйнштейна никто не обращался к многоквантовым процессам. Наконец, в 1927 году П. Дирак, один из создателей квантовой механики, в большой работе, посвященной квантовой теории дисперсии света, учел возможность двухквантового излучения при вычислении вероятности процесса рассеяния. Дирак, естественно,

уже использовал при этом понятия и математический язык квантовой механики. Следующий шаг был сделан Марией Гепперт-Майер, посвятившей в 1929 и 1931 годах две работы количественному расчету вероятности двухквантового перехода возбужденного атома водорода в основное состояние. Работами Дирака и Гепперт-Майер были заложены основы современного описания многоквантовых процессов. (Какое, однако, блестящее созвездие ученых создавало основы физики многоквантовых процессов — три лауреата Нобелевской премии: А. Эйнштейн, П. Дирак и М. Гепперт-Майер!)

Первое систематическое изложение основных физических закономерностей многоквантовых процессов содержится в книге известного советского физика-теоретика Я. И. Френкеля «Волновая механика», опубликованной в 1933 году. Во втором томе Я. И. Френкель из детального математического описания многоквантовых переходов делает следующее заключение: «В случае света принципиально вполне возможны такие (многоквантовые — *Н. Д.*) переходы, вероятности которых пропорциональны не первой, а второй и даже более высоким степеням интенсивности (возбуждающего света — *Н. Д.*). Для того чтобы такие эффекты могли наблюдаться, интенсивность света должна быть, однако, чрезвычайно велика — значительно больше той, с которой мы обычно имеем дело в наших экспериментах... Мы вынуждены, таким образом, прийти к заключению, что двойные переходы, обусловленные воздействием одного лишь света, практически места не имеют...»

Этот вывод оставался неоспоримым вплоть до создания мощных лазеров. В долазерную эпоху поисками отклонений от линейного поглощения света в различных средах занимались многие оптики. Обнаружение отклонений, обусловленных нелинейным поглощением, означало бы, по сути дела, обнаружение многоквантовых процессов. Известный советский физик академик С. И. Вавилов получил экспе-

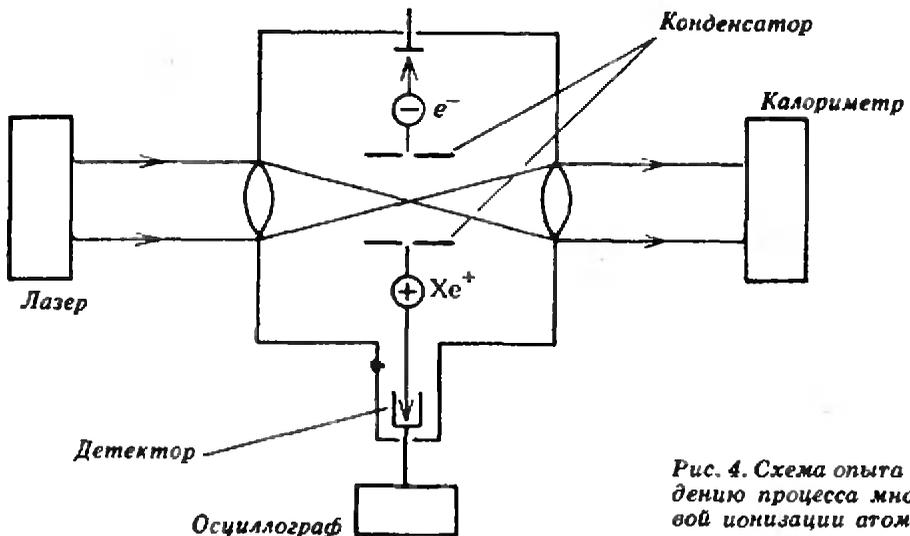


Рис. 4. Схема опыта по наблюдению процесса многоквантовой ионизации атома.

риментальные данные по зависимости поглощения света от его интенсивности в рекордном диапазоне изменения интенсивности — до  $10^{20}$  раз. Подводя итоги этих исследований, С. И. Вавилов в 1950 году в книге «Микроструктура света» указывал, что отклонения от линейного поглощения не были обнаружены. Сейчас этот отрицательный результат не вызывает недоумения — ведь интенсивность излучения тех источников света, которые существовали в долазерную эпоху, была недостаточна для реализации многоквантовых процессов. Так, максимальная интенсивность света, которая была достигнута в опытах С. И. Вавилова, составляла около  $10 \text{ Дж} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ . Между тем сейчас из результатов исследований многоквантовых процессов хорошо известно, что минимальная интенсивность света, при которой может наблюдаться многоквантовое поглощение, составляет величину порядка  $10^5 \text{ Дж} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ , т. е. в  $10^5$  раз большую.

**Многоквантовые процессы, возникающие под действием лазерного излучения**

Теперь вернемся к опыту по многоквантовой ионизации атомов, с которого начался этот рассказ. Рассмотрим детально условия проведения этого опыта и полученные результаты.

Схема опыта приведена на рисунке 4. В качестве источника света использовался импульсный рубиновый лазер, излучавший энергию около 0,1 Дж за время около  $10^{-8}$  с. Для увеличения интенсивности излучение фокусировалось в вакуумную камеру; в области фокусировки энергия, падающая на единицу площади за единицу времени, достигала  $\sim 10^{12} \text{ Дж} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ .

В качестве объекта для многоквантовой ионизации использовались атомы инертного газа ксенона. Вакуумная камера сначала откачивалась до давления примерно в  $10^{-7}$  мм рт. ст., а затем наполнялась особо чистым газообразным ксеноном до давления порядка  $10^3$  мм рт. ст.

Энергия ионизации атома ксенона  $E_x \approx 12 \text{ эВ}$ . Лазер излучал кванты с энергией  $h\nu \approx 1,8 \text{ эВ}$ . Из сопоставления энергии кванта с энергией ионизации видно, что для ионизации необходимо поглощение  $K = 7$  квантов лазерного излучения, т. е. речь идет о процессе семиквантовой ионизации.

Опыт был поставлен для наблюдения реакции



где символом  $\text{Xe}^+$  обозначен положительный ион ксенона, а символом  $e^-$  — свободный электрон. Для регистрации продуктов реакции область фокусировки лазерного излучения, т. е. та область, где и ожидалась

ионизация, располагалась в центре плоского конденсатора (см. рис. 4), между обкладками которого было приложено постоянное напряжение в несколько сот вольт. Под действием этого напряжения ионы ксенона  $\text{Xe}^+$  и электроны  $e^-$ , ускоряясь, двигались к соответствующим обкладкам конденсатора. Ионы  $\text{Xe}^+$  проходили через отверстие в обкладке конденсатора и долетали до детектора. В качестве детектора использовался так называемый цилиндр Фарадея — металлический электрод, изолированный от корпуса камеры. Приход заряженных ионов на этот электрод изменял его потенциал, и это изменение регистрировалось на экране осциллографа. Тот факт, что на цилиндр Фарадея приходят именно ионы ксенона, а не какого-нибудь другого элемента, можно было установить по времени пролета этих ионов от момента их образования (в области фокусировки излучения) до детектора (ускорение иона зависит от его массы).

Таким образом, сам факт наблюдения на экране осциллографа сигнала, вызванного импульсом лазерного излучения и появляющегося через определенное время после этого импульса, является доказательством ио-

низации атомов ксенона в области фокусировки излучения. Но это был первый опыт по многоквантовой ионизации атомов, и экспериментаторам пришлось преодолеть много трудностей, прежде чем они увидели на экране осциллографа сигнал. Чтобы не сомневаться в том, что наблюдается многоквантовый процесс ионизации, было сделано еще много различных контрольных опытов. Перечислим некоторые из них:

1) из камеры откачивался ксенон — сигнал отсутствовал;

2) в камере изменялось давление ксенона (менялось число атомов  $\text{Xe}$ ) — сигнал возрастал при увеличении давления и уменьшался при его уменьшении;

3) выключалось напряжение на конденсаторе — сигнал отсутствовал;

4) менялось напряжение на конденсаторе — менялся временной интервал между лазерным импульсом и сигналом на осциллографе, причем при уменьшении напряжения задержка сигнала увеличивалась (уменьшалось ускорение, сообщаемое ионам);

5) сильно уменьшалась интенсивность лазерного излучения — сигнал отсутствовал.

Все это вполне убедительно свидетельствовало о том, что под действием лазерного излучения происходила многоквантовая ионизация атомов  $\text{Xe}$ . Однако экспериментаторы хотели получить неопровержимые доказательства того факта, что это процесс именно *семиквантовый*. Какой же можно поставить убедительный опыт?

Такой опыт сразу приходит в голову, если вспомнить соотношение, описывающее зависимость вероятности многоквантового перехода от интенсивности излучения. Эта зависимость должна быть степенной, с показателем степени, равным числу поглощенных квантов. Обнаружение такой зависимости является тем неопровержимым доказательством, которое должно удовлетворить самых строгих и требовательных критиков!

Эксперимент был сделан. Интенсивность лазерного излучения плавно изменялась в ряде последовательных

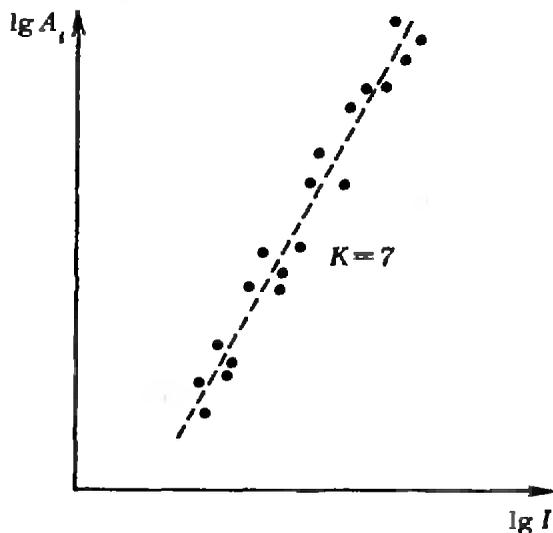


Рис. 5. Результат эксперимента по измерению зависимости амплитуды ионного сигнала  $A_i$  от интенсивности лазерного излучения  $I$ ; каждая точка соответствует амплитуде, измеренной в одном импульсе излучения лазера.

импульсов и одновременно измерялась амплитуда ионного сигнала на экране осциллографа. Результат приведен на рисунке 5 в виде зависимости десятичного логарифма амплитуды  $A$  сигнала от десятичного логарифма интенсивности  $I$  излучения. Легко сообразить, что в таких координатах степенной закон изображается прямой линией с углом наклона, определяющим показатель степени. В эксперименте наблюдался наклон, соответствующий  $K = 7$ . Это означало, что вероятность ионизации связана с интенсивностью излучения степенным соотношением вида  $w \sim A_i \sim I^7$ , и бесспорно доказывало, что наблюдается семиквантовый процесс ионизации.

Таким образом, в 1965 году впервые экспериментально наблюдался многоквантовый процесс ионизации атома. Примерно в то же время впервые наблюдались и другие многоквантовые процессы — двухквантовое возбуждение атома, двухквантовый переход в кристалле, преобразование двух квантов в один квант удвоенной частоты. Наконец, еще через несколько лет удалось наблюдать многоквантовый внешний фотоэффект из поверхности металла.

Перечисленные эксперименты дали начало лавине работ по наблюдению, исследованию и применению многоквантовых процессов в различных средах — в атомарных и молекулярных газах, в жидкостях, в кристаллах.

### Заключение

Тот факт, что процесс многоквантовой ионизации обуславливает нелинейное поглощение видимого света, носит фундаментальный характер и играет большую роль в практике. Возникновение нелинейного поглощения качественно изменяет наши представления о самых обычных прозрачных средах — воздухе, стекле, воде. Подобные среды прозрачны лишь при малой интенсивности видимого света; при большой интенсивности прозрачность исчезает — среды становятся поглощающими. Таким образом, нелинейное поглощение определяет ту пре-

дельную интенсивность, при которой лазерное излучение проходит через различные среды без потерь. Это важно и в случае распространения лазерного излучения от лазера до объекта воздействия через воздух или стеклянные детали — призмы, линзы, и в активной среде самого лазера. Особенно важным является то обстоятельство, что вероятность многоквантовой ионизации нелинейно, т. е. весьма резко, зависит от интенсивности излучения.

Интересно отметить еще один важный момент. В процессе развития физики взаимодействия света с веществом основные закономерности, установленные еще Эйнштейном и Бором, не изменились, а внутренне обогатились. Исходные соотношения Эйнштейна и Бора сейчас следует рассматривать как законы, справедливые в предельном случае — когда можно пренебречь многоквантовыми переходами по сравнению с одноквантовыми, т. е. в случае малой интенсивности возбуждающего света.

*От редакции. Издательство «Наука» выпустило в этом году книгу Н. Б. Делоне «Взаимодействие лазерного излучения с веществом». Книгу составляют лекции, прочитанные автором для студентов физических специальностей. Читатель, заинтересовавшийся этой темой, сможет найти в книге дополнительный материал (см., например, лекцию 4 — «Многофотонное поглощение», лекцию 5 — «Нелинейная ионизация»).*

# Задачник „Кванта“

## Задачи

M1161—M1165, Ф1168—Ф1172

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июля 1989 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5 — 89» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1161» или «Ф1168». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

**M1161.** В бильярдном треугольнике вплотную помещается 10 шаров (рис. 1). Докажите, что если в нем поместить 9 шаров, то обязательно останется место для десятого (т. е. центры 9 шаров расположатся по треугольной сетке).

*И. П. Долбилкин*

**M1162.** Найдите все решения в целых числах  $(x, y)$  уравнения

$$x^3 - 13xy + y^3 = 13.$$

*Д. В. Фомин*

**M1163.** Черепаха вышла из точки  $A$  и пришла в точку  $B$ , двигаясь по произвольной траектории с произвольной скоростью. Вслед за ней из точки  $A$  вышла вторая черепаха, которая в каждый момент времени двигалась в направлении первой (с произвольной скоростью) и в конце концов также пришла в точку  $B$ . Докажите, что путь, пройденный второй черепахой (к моменту прихода обеих в  $B$ ) не превосходит пути первой.

*А. Х. Шень*

**M1164.** Натуральное число  $n$  называется совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей, меньших  $n$  (например:  $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ ). Докажите, что нечетное совершенное число (если такое существует) не может одновременно делиться на 3, на 5 и на 7.

*В. В. Шабунин*

**M1165.** Докажите, что квадрат со стороной  $n$  ( $n$  — натуральное число), расположенный произвольным образом на листе клетчатой бумаги с клетками  $1 \times 1$ , покрывает не более  $(n+1)^2$  узлов сетки.

*Б. Д. Коглар*

**Ф1168.** Оцените максимальную скорость лунохода — работающего на Луне самоходного аппарата, управляемого с Земли.

*В. И. Шелест*

**Ф1169.** Тонарм проигрывателя представляет собой легкий прямой стержень длиной  $L$  (рис. 2), на одном конце которого (в точке  $B$ ) закреплен звукосниматель с иглой, а другой конец закреплен в шарнире, который может без трения вращаться относительно вертикальной оси  $A$ , проходящей на расстоянии  $R$  ( $R > L$ ) от оси вращения  $O$  диска проигрывателя. Игла ставится на ровную однородную поверхность равномерно вращающегося диска. Найти установившийся угол  $\alpha$  между тонармом и линией  $AO$ .

*С. Ф. Ким, А. И. Латынник*

**Ф1170.** Оценки массы Галактики, полученные различными способами, дают отличающиеся результаты. Так, согласно визуальным оценкам, в пределах расстояния

# Задачник „Квант“

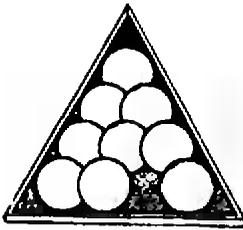


Рис. 1.

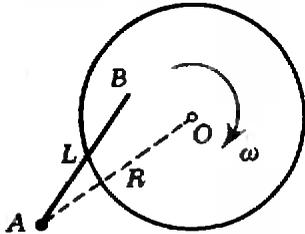


Рис. 2.

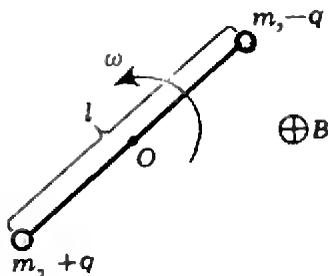


Рис. 3.

$R = 3 \cdot 10^9 R_0$  ( $R_0$  — радиус орбиты Земли) от центра Галактики сосредоточена масса  $M_1 = 1,5 \cdot 10^{11} M_0$  ( $M_0$  — масса Солнца). Между тем, период обращения звезд, находящихся на указанном расстоянии от центра Галактики, составляет  $T = 3,75 \cdot 10^8$  лет. Определить «скрытую массу» Галактики, т. е. массу невидимых объектов внутри сферы радиусом  $R$ . При расчете движения звезд массу Галактики можно считать сосредоточенной в ее центре.

В. Е. Белонучкин

**Ф1171.** Электрический диполь — две частицы с одинаковыми массами  $m$  и зарядами  $+q$  и  $-q$ , закрепленные на концах жесткого невесомого стержня длиной  $l$ , — вращается с угловой скоростью  $\omega$  в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр  $O$  диполя (рис. 3). В некоторый момент включают постоянное магнитное поле с индукцией  $B$ , направленной вертикально. Опишите установившееся движение диполя.

С. Здравкович (СФРЮ)

**Ф1172.** Внутренняя поверхность сферы покрыта диффузным отражателем с коэффициентом отражения  $r = 0,9$ . Угловое распределение света, отраженного диффузным отражателем, описывается законом Ламберта:

$$\Delta N = \frac{N}{\pi} \cdot \cos \theta \cdot \Delta \Omega,$$

где  $N$  — полное число отраженных фотонов,  $\Delta N$  — число отраженных фотонов в малом телесном угле  $\Delta \Omega$ , составляющем угол  $\theta$  с нормалью к отражающей площадке. В центре сферы происходит вспышка точечного источника света. Какая доля фотонов выйдет через очень маленькое отверстие, имеющееся в сфере?

С. А. Хорозов

## Решения задач

M1136—M1140, Ф1148—Ф1152

**M1136\*** Докажите для неотрицательных чисел  $A, M, S$  неравенство

$$\begin{aligned} & 3 + (A + M + S) + \\ & + \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{M} + \frac{1}{S} \right) + \\ & + \left( \frac{A}{M} + \frac{M}{S} + \frac{S}{A} \right) \geq \\ & \geq \frac{3(A + 1)(M + 1)(S + 1)}{AMS + 1}. \end{aligned}$$

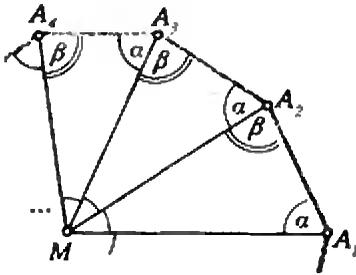
Доказательство сводится к весьма искусственному (но и искусному!) тождественному преобразованию. Умножив разность левой и правой частей неравенства на их общий знаменатель  $AMS(AMS + 1)$  и произведя перегруппировки слагаемых, получим

$$\begin{aligned} & A^2 M^2 S^2 (A + M + S) - 2AMS(AM + MS + SA) + \\ & + (AM^2 + MS^2 + SA^3) + AMS(AM^2 + MS^2 + SA^2) - \\ & - 2AMS(A + M + S) + (AM + MA + AS) = \\ & = AM(M + 1)(SA - 1)^2 + MS(S + 1)(AM - 1)^2 + \\ & + SA(A + 1)(MS - 1)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

причем равенство, очевидно, достигается только при  $A = M = S = 1$ . Это решение сообщил автору задачи крупный специалист по циклическим неравенствам профессор П. Х. Диананда из Сингапура.

## Задача „Кванта“

**M1137.** В выпуклом  $n$ -угольнике все углы равны и из некоторой точки, расположенной внутри  $n$ -угольника, все его стороны видны под равными углами. Докажите, что этот  $n$ -угольник правильный.



Пусть в  $n$ -угольнике  $A_1A_2\dots A_n$  (см. рисунок) все углы равны, т. е. каждый из них равен  $180^\circ(n-2)/n$ , и точка  $M$  такова, что

$$\angle A_1MA_2 = \angle A_2MA_3 = \dots = \angle A_nMA_1 = 360^\circ/n.$$

Тогда все треугольники  $A_1MA_2, A_2MA_3, \dots, A_nMA_1$  подобны: если  $\angle MA_1A_2 = \alpha$ ,  $\angle A_1A_2M = \beta = 180^\circ - 360^\circ/n - \alpha$ ,  $\angle MA_2A_3 = 180^\circ(n-2)/n - \beta = \alpha$ ,  $\angle A_2A_3M = 180^\circ - 360^\circ/n - \alpha = \beta$  и т. д., поэтому

$$\frac{MA_1}{MA_2} = \frac{MA_2}{MA_3} = \dots = \frac{MA_{n-1}}{MA_n} = \frac{MA_n}{MA_1} = k.$$

Перемножив эти отношения, получаем, что  $k^n = 1$ , т. е.  $k = 1$ . (Можно рассуждать и «от противного»: если  $k < 1$ , то  $MA_1 < MA_2 < \dots < MA_n < MA_1$ ; если  $k > 1$ , то  $MA_1 > MA_2 > \dots > MA_n > MA_1$  — противоречие.) Отсюда следует, что  $\alpha = \beta$ , и  $M$  — центр правильного  $n$ -угольника  $A_1A_2\dots A_n$ .

К. П. Кохась

**M1138\*.** Докажите, что для любого натурального  $n$  между числами  $n^2$  и  $n^2 + n + 3\sqrt{n}$  найдутся три натуральных числа, произведение двух из которых делится на третье.

Для  $n=1$ : между 1 и 5 — числа 2, 3, 4;

для  $n=2$ : между 4 и  $6 + 3\sqrt{2}$  — числа 6, 8, 9 (или 5, 8, 10);

для  $n=10$ :  $x=2$  и

$$a = 8 \cdot 13 = 104,$$

$$b = 9 \cdot 12 = 108,$$

$$c = 9 \cdot 13 = 117.$$

Чтобы оценить нетривиальность этой задачи, возьмем  $n=10$ : попробуйте быстро найти три числа между 100 и  $[110 + 3\sqrt{10}] = 119$ , одно из которых делит произведение двух других! (Одна такая тройка указана на полях.)

Заметим, что для  $n=1$  и  $n=2$  утверждение задачи очевидно. Будем для каждого целого  $n > 2$  искать нужные три числа в виде

$$a = (n-x)(n+x+1) = n^2 + n - x^2 - x,$$

$$b = (n-x+1)(n+x) = n^2 + n - x^2 + x,$$

$$c = (n-x+1)(n+x+1) = n^2 + 2n + 1 - x^2,$$

где  $x$  — целое; ясно, что при этом  $ab$  будет делиться на  $c$ . Пусть  $x$  — наибольшее целое число, для которого  $x^2 + x < n$ . Тогда  $n^2 < a < b < c$ , и остается доказать, что  $c < n^2 + n + 3\sqrt{n}$ , т. е. что  $n + 1 - x^2 < 3\sqrt{n}$ . Предположим, напротив, что  $x^2 \leq n - 3\sqrt{n} + 1$ . Тогда  $x < \sqrt{n - 3\sqrt{n} + 1}$  (иначе  $x^2 \geq n - 3\sqrt{n} + 9/4$ ), и, следовательно,  $x + 1 < \sqrt{n} - 1/2$ . Но в этом случае  $(x+1)^2 + (x+1) < (n - \sqrt{n} + 1/4) + (\sqrt{n} - 1/2) < n$ , что противоречит выбору  $x$ .

Л. Д. Курляндчик

**M1139.** а) Поверхность выпуклого многогранника можно разрезать на несколько квадратов. Докажите, что у этого многогранника не больше 8 вершин.

Наши рассуждения опираются на понятие кривизны многогранного угла — так называют величину  $2\pi - \sigma$ , где  $\sigma$  — сумма его плоских углов. О кривизне подробно рассказано в статье С. Л. Табачникова в этом номере журнала, в частности, там доказана «формула Декарта» — сумма кривизн всех многогранных углов выпуклого многогранника равна  $4\pi$ .

б) Какое наибольшее число вершин может иметь выпуклый многогранник, поверхность которого можно разрезать на правильные треугольники?

## Задачник „Квант“

а) Сумма плоских углов при любой вершине данного многогранника может равняться только  $\pi/2$ ,  $\pi$  или  $3\pi/2$ . В самом деле, она меньше  $2\pi$ , поскольку многогранный угол при любой вершине выпуклый. В то же время этот угол образован сгибанием и склеиванием нескольких прямых углов (углов квадратов)  $n$ , может быть, развернутого угла (если рассматриваемая вершина приходится на внутреннюю точку стороны одного из квадратов). Следовательно, сумма его плоских углов кратна  $\pi/2$ . Таким образом, кривизна многогранного угла при любой вершине не меньше  $\pi/2$ , и по формуле Декарта число вершин не превосходит  $4\pi: (\pi/2) = 8$ . Пример 8-вершинника — куб.

б) Ответ: 12. Точно так же, как в п. а), доказывается, что кривизна многогранного угла при любой вершине не меньше  $\pi/3$ , значит, число вершин не превосходит  $4\pi: (\pi/3) = 12$ . Пример 12-вершинника — правильный икосаэдр.

В. Э. Матизен

**M1140.** Нарисуем на плоскости одну или несколько пересекающихся кривых (кривые могут иметь точки самопересечения, рис. 1). В каждой точке пересечения можно двумя способами выполнить «перестройку» (рис. 2). Если проделать перестройку во всех точках пересечения, то получится несколько непересекающихся кривых (рис. 3).

а) Докажите, что число непересекающихся кривых, которые могут получиться, не больше числа областей, на которые делили плоскость исходные кривые (на рисунке 1 таких областей 7).

а) Пусть первоначально данные кривые делили плоскость на области  $V_1, V_2, \dots, V_n$ . Каждая из новых, перестроенных кривых ограничивает область, состоящую из нескольких областей  $V_i$ . Выберем те из новых кривых, внутри которых нет других новых кривых, и отметим внутри каждой из них одну из областей  $V_i$  (рис. 5). Теперь сотрем эти кривые, среди оставшихся снова выберем «минимальные» (внутри которых нет других кривых) и отметим внутри каждой из них одну из областей  $V_i$ , не отмеченных на первом шагу. (Очевидно, такие области найдутся.) Продолжая в том же духе, мы сопоставили каждой новой кривой область  $V_i$  внутри нее, отмечаемую на соответствующем шаге, причем разным кривым будут сопоставлены разные области. Значит, число кривых не больше числа областей.

б) Раскрасим исходную картинку в шахматном порядке, т. е. так, чтобы внешняя область была белой и цвет области менялся при переходе через границу (рис. 6, а). (Существование такой раскраски легко доказать по индукции. При добавлении к уже раскрашенной картинке одной несамопересекающейся замкну-

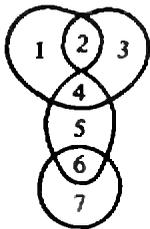


Рис. 1.

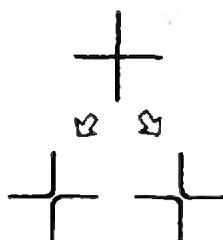


Рис. 2.

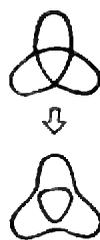


Рис. 3.



Рис. 4.



Рис. 5.

# Задачник „Кванта“

б) Всегда ли можно сделать перестройки так, чтобы в результате получилась одна кривая?

в) Выберем на каждой кривой направление обхода и будем производить перестройки в соответствии с этими направлениями так, чтобы стрелки «отталкивались» друг от друга (рис. 4). Может ли в результате получиться одна кривая?

той кривой все попавшие внутрь нее области или отсекаемые этой кривой от старых областей части перекрашиваются в другой цвет; внешняя раскраска сохраняется. При этом шахматный порядок цветов не нарушится. А любую замкнутую кривую можно разбить на несамопересекающиеся замкнутые куски.) Построим по «шахматной раскраске» граф (рис. 6, б), сопоставив каждой черной области по одной точке — это будут вершины графа, а каждой точке пересечения кривых — одно ребро: оно соединяет вершины, отвечающие

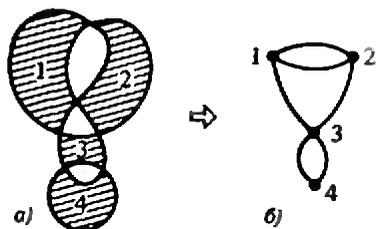


Рис. 6.

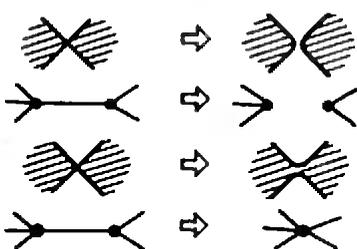


Рис. 7.

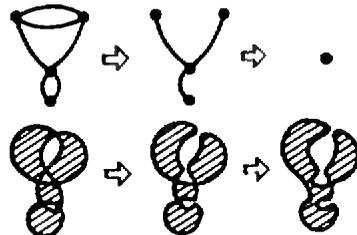


Рис. 8.



Рис. 9.

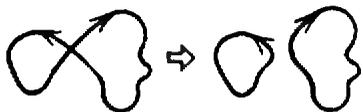


Рис. 10.

черным областям, которые примыкают к этой точке. Два способа перестройки изображаются на графе двумя операциями: стиранием ребра и стягиванием ребра в точку (рис. 7).

Ясно, что на графе исходной картинке можно стереть часть ребер так, что он превратится в «дерево», т. е. граф, не имеющий замкнутых цепочек ребер. Оставшиеся ребра можно последовательно стянуть в точку. Соответствующая последовательность перестроек приводит к одной черной области. Ее граница и есть искомая кривая (рис. 8).

Интересно, что по графу можно восстановить соответствующий набор кривых. Подумайте, например, какие кривые отвечают графам, изображенным на рисунке 9.

в) Каждая перестройка превращает набор ориентированных кривых снова в набор ориентированных кривых. Предположим, что существует последовательность перестроек, результатом которой будет единственная кривая. Тогда перед выполнением последней перестройки мы располагаем набором ориентированных кривых с единственной точкой пересечения. Такой набор может состоять из единственной кривой — «восьмерки», изображенной на рисунке 10. Однако ее перестройка приводит к двум, а не к одной кривой.

С. Л. Табачников

**Ф1148.** Цилиндр с намотанной на него нитью, второй конец которой закреплен, кладут на гладкую наклонную плоскость, составляющую угол  $\alpha$  с го-

Рассмотрим момент времени, когда нить вертикальна. В силу нерастяжимости нити, нижняя точка ее вертикального участка и соприкасающаяся с ней точка цилиндра  $A$  имеют одинаковую, горизонтально направленную скорость  $\vec{v}_A$ . Представим движение цилиндра как сумму поступательного движения со

ризонтом, так, как показано на рисунке 1. В тот момент, когда нить была вертикальна, угловая скорость вращения цилиндра была равна  $\omega$ . Определить, чему равна в этот момент: а) скорость оси цилиндра; б) скорость точки цилиндра, касающейся наклонной плоскости. Радиус цилиндра равен  $R$ .

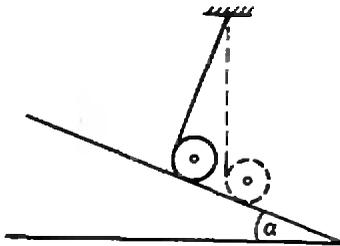


Рис. 1.

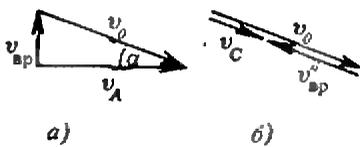


Рис. 2.

**Ф1149.** На проводящие рельсы изгрушечной железной дороги беспорядочно бросают, замыкая рельсы, тонкие длинные оголенные проводники из меди. Оценить сопротивление между рельсами, если расстояние между ними  $l = 5$  см, диаметр проводника  $d = 0,2$  мм, его длина  $h = 30$  см, бросили  $N = 100$  проводников.

## Задачник „Квант“

скоростью его оси  $\vec{v}_0$ , направленной параллельно наклонной плоскости (под углом  $\alpha$  к горизонту), и вращения по часовой стрелке вокруг оси с угловой скоростью  $\omega$ . В этом случае скорость точки  $A$  (рис. 2, а)

$$\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{v}'_{вр}$$

Как нетрудно видеть,  $v'_{вр} = \omega R$ ,  $\vec{v}_A \perp \vec{v}'_{вр}$  откуда получаем

$$v_0 = \frac{\omega R}{\sin \alpha}.$$

Аналогичное соотношение можно записать для точки  $C$  касания цилиндром наклонной плоскости (рис. 2, б):

$$\vec{v}_C = \vec{v}_0 + \vec{v}''_{вр}$$

или в проекциях на направление вдоль наклонной плоскости:

$$v_C = v_0 - \omega R,$$

откуда

$$v_C = \frac{\omega R}{\sin \alpha} - \omega R = \omega R \frac{1 - \sin \alpha}{\sin \alpha}.$$

В качестве дополнительного вопроса предлагаем вам самостоятельно найти величину скорости точки  $A$  цилиндра.

С. С. Кротов

Будем считать, что все брошенные проводники попадают на рельсы. Ясно, что замыкания проводников между собой не влияют на конечный результат — соответствующие точки проводников имеют одинаковые потенциалы.

Сопротивление одного проводника, составляющего с рельсами угол  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \pi$ ), равно

$$r_i = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{l/\sin \alpha}{\pi d^2/4}.$$

Для общего сопротивления между рельсами выполняется соотношение

$$\frac{1}{R_{общ}} = \sum \frac{1}{r_i} = \sum \frac{\pi d^2 \sin \alpha_i}{4 \rho l} = \frac{\pi d^2}{4 \rho l} N \langle \sin \alpha_i \rangle_{ср}.$$

Среднее значение  $\sin \alpha_i$  можно найти так:

$$\langle \sin \alpha_i \rangle_{ср} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin \alpha \cdot d\alpha = \frac{2}{\pi}.$$

Тогда

$$\frac{1}{R_{общ}} = \frac{\pi d^2}{4 \rho l} N \frac{2}{\pi} = \frac{d^2 N}{2 \rho l},$$

и окончательно

$$R_{общ} = \frac{2 \rho l}{d^2 N} \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ Ом.}$$

## Задачник „Кванта“

**З а м е ч а н и е.** Мы посчитали среднее значение общего сопротивления. В зависимости от того, как проводники упадут на рельсы, величина сопротивления может больше или меньше отличаться от найденного значения. Попробуйте промоделировать явление с помощью персональной ЭВМ, воспользовавшись датчиком случайных чисел, и оценить возможный разброс результатов.

А. Р. Зильберман

**Ф1150.** К идеальному одноатомному газу, заключенному внутри масляного пузыря, подводится тепло. Найдите теплоемкость газа (в расчете на 1 моль) в этом процессе, если давлением снаружи пузыря можно пренебречь.

Теплоемкостью  $C$  физической системы называется отношение количества теплоты  $\Delta Q$ , которое необходимо подвести к ней для увеличения температуры на  $\Delta T$ , к этому изменению температуры:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

Теплоемкость может быть функцией процесса передачи тепла, т. е. зависеть от объема  $V$  системы или от ее температуры  $T$ . Поэтому под  $\Delta Q$  и  $\Delta T$  будем понимать достаточно малые (математически — бесконечно малые) значения количества теплоты и изменения температуры.

Для моля идеального газа, запертого под пленкой в пузыре, подведенное количество теплоты  $\Delta Q$  идет на изменение его внутренней энергии  $\Delta U$  и совершение им работы  $\Delta A$  против сил поверхностного натяжения:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A = \frac{3}{2} R \Delta T + p \Delta V.$$

Здесь  $R$  — универсальная постоянная,  $p$  — давление газа, равное давлению, создаваемому под пленкой силами поверхностного натяжения,  $\Delta V$  — изменение объема пузыря при нагреве находящегося в нем газа.

Давление  $p$  определяется коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$  и радиусом пузыря  $r$ :

$$p = \frac{4\sigma}{r}.$$

Эту формулу можно получить следующим образом. Разобьем мысленно пузырь на две равные половины и рассмотрим условие механического равновесия. Силы давления газа, разрывающие шар на его половины, есть  $p \cdot \pi r^2$ . Силы поверхностного натяжения, удерживающие их вместе, есть  $2\sigma \cdot 2\pi r$ . Приравняв эти силы, получим приведенную формулу для давления.

Теперь свяжем работу газа  $p \Delta V$  с изменением его температуры  $\Delta T$ . Поскольку объем пузыря и давление в нем зависят от радиуса, то необходимо найти связь между изменением радиуса пузыря  $\Delta r$  и изменением температуры  $\Delta T$ . Из уравнения состояния идеального газа  $pV = RT$  имеем

$$p \Delta V + V \Delta p = R \Delta T.$$

## Задачи „Кванта“

Изменения объема  $\Delta V$  и давления  $\Delta p$  связаны с изменением радиуса  $\Delta r$  следующими формулами:

$$\Delta V = 4\pi r^2 \Delta r, \quad \Delta p = -\frac{4\sigma}{r^2} \Delta r.$$

Поэтому уравнение состояния дает

$$\frac{2}{3} \cdot 16\pi\sigma r \Delta r = R\Delta T.$$

Таким образом, работа газа

$$\Delta A = p\Delta V = R\Delta T - V\Delta p = R\Delta T + \frac{R\Delta T}{2} = \frac{3}{2} R\Delta T.$$

Окончательно получаем

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U + \Delta A}{\Delta T} = \frac{3}{2} R + \frac{3}{2} R = 3R.$$

Как видно из расчета, половина подведенного количества теплоты идет на увеличение температуры газа, а вторая половина превращается в поверхностную энергию пленки.

А. А. Шеронов

**Ф1151\***. Электростатический вольтметр представляет собой плоский конденсатор, одна из пластин которого закреплена неподвижно, а другая может двигаться, оставаясь параллельной первой пластине. Подвижная пластина прикреплена к стене при помощи пружины жесткостью  $k=10$  Н/м. Начальное расстояние между пластинами  $d=3$  см, площадь каждой пластины  $S=0,5$  м<sup>2</sup>. Рассчитать шкалу вольтметра. Какое максимальное напряжение можно измерять с его помощью? Рассмотреть отдельно случаи, когда вязкое трение очень мало и довольно велико.

Предположим, что подвижная пластина сместилась на  $x$  и расстояние между пластинами стало  $d-x$ . В этом положении на пластину действуют две силы. Это — электрическая сила

$$F_{\text{эл}} = q \frac{E}{2} = \frac{\varepsilon_0 S U}{d-x} \frac{U}{2(d-x)} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2(d-x)^2}$$

(здесь  $q$  — заряд пластины,  $E$  — напряженность поля в конденсаторе,  $U$  — напряжение между пластинами) и сила упругости

$$F_{\text{упр}} = kx.$$

Запишем условие равновесия пластины:

$$F_{\text{эл}} = F_{\text{упр}}, \quad \text{или} \quad \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2(d-x)^2} = kx.$$

Отсюда получаем уравнение шкалы электростатического вольтметра:

$$U = \sqrt{\frac{2k}{\varepsilon_0 S} x(d-x)^2}, \quad \text{где} \quad 0 \leq U < U_{\text{max}}.$$

Найдем  $U_{\text{max}}$ . Для этого исследуем на максимум выражение  $U^2 = 2kx(d-x)^2/(\varepsilon_0 S)$ :

$$(U^2)' = \left(\frac{2k}{\varepsilon_0 S}\right) ((d-x)^2 - 2(d-x)x) = 0, \quad \text{и} \quad x_{\text{max}} = \frac{d}{3}.$$

Тогда

$$U_{\text{max}} = U(x_{\text{max}}) = \sqrt{\frac{8}{27} \frac{k d^3}{\varepsilon_0 S}} \approx 4,3 \cdot 10^3 \text{ В}.$$

# Задача „Кванта“

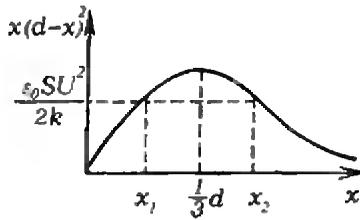


Рис. 1.

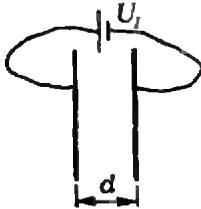


Рис. 2.

Очевидно, что при большом вязком трении  $U_{\max}$  и есть максимальное измеряемое напряжение.

При малом вязком трении расчет усложняется. Действительно, из условия равновесия подвижной пластины следует, что положений равновесия два — на рисунке 1 это  $x_1$  и  $x_2$ , причем  $x_1$  соответствует устойчивому, а  $x_2$  — неустойчивому равновесию. Если пластина проскочит  $x_2$ , то она пойдет и дальше, до соприкосновения с неподвижной пластиной. Именно это и ограничивает возможный диапазон измеряемых напряжений величиной  $U_1 < U_{\max}$ . Найдем ее.

Пусть напряжение на конденсаторе равно  $U_1$ . Подвижная пластина начинает разгоняться и останавливается, пройдя расстояние  $x_2$ . Начальная энергия конденсатора

$$W_0 = \frac{\epsilon_0 S}{2d} U_1^2.$$

Заряд, прошедший через источник (рис. 2),

$$\Delta q = \frac{\epsilon_0 S}{d-x_2} U_1 - \frac{\epsilon_0 S}{d} U_1,$$

и работа источника

$$A = \Delta q U_1 = \left( \frac{\epsilon_0 S}{d-x_2} - \frac{\epsilon_0 S}{d} \right) U_1^2.$$

В положении  $x_2$  энергия конденсатора

$$W_1 = \frac{\epsilon_0 S}{2(d-x_2)} U_1^2$$

и энергия пружины

$$W_{\text{пр}} = \frac{kx_2^2}{2}.$$

Запишем баланс энергий:  $W_0 + A = W_1 + W_{\text{пр}}$ , откуда после упрощений получаем

$$\frac{\epsilon_0 S}{d(d-x_2)} U_1^2 = kx_2.$$

Но  $x_2$  — положение равновесия, т. е.

$$kx_2 = \frac{\epsilon_0 S}{2(d-x_2)^2} U_1^2.$$

Отсюда

$$x_2 = \frac{d}{2}.$$

Этому значению  $x_2$  и соответствует напряжение  $U_1$ , являющееся максимальным напряжением для случая очень малого вязкого трения:

$$U_1 = U(x_2) = \sqrt{\frac{1}{4} \frac{kd^3}{\epsilon_0 S}} \approx 3,9 \cdot 10^3 \text{ В.}$$

А. Р. Зильберман

**Ф1152.** За линзой на расстоянии  $L=4$  см (больше фокусного) расположено перпендикулярно главной оптической оси плоское зеркало. Перед линзой, также перпендикулярно главной оптической оси, расположен лист клетчатой бумаги (рис. 1). На этом листе получают изображения его клеток при двух положениях листа относительно линзы. Эти положения отличаются на  $l=9$  см. Определить фокусное расстояние линзы.

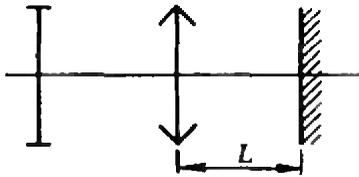


Рис. 1.

Одно из положений листа, когда его клетки — будем называть их предметом — отображаются оптической системой на нем же, довольно очевидное. Действительно, если первое изображение, создаваемое линзой, окажется точно в плоскости зеркала, то при вторичном прохождении лучей через линзу (после отражения от зеркала) они соберутся точно в плоскости листа. Таким образом, в этом случае расстояние от линзы до создаваемого ею изображения предмета равно

$$f_1 = L. \quad (1)$$

Второе положение листа найти тоже не так сложно. Нетрудно убедиться, что если лист находится в фокальной плоскости линзы, то условия задачи выполняются. Действительно, лучи, идущие от каждой точки фокальной плоскости, после прохождения линзы преобразуются в параллельный пучок. Отразившись от зеркала,



Рис. 2.

ла, эти лучи останутся параллельными и, пройдя линзу, соберутся в ее фокальной плоскости. Таким образом, второе положение листа определяется условием

$$d_2 = F. \quad (2)$$

Соотношения (1) и (2) можно получить и более строго. По условию задачи лучи света от бумаги проходят через линзу, отражаются от зеркала, снова проходят через линзу и попадают на ту же бумагу. Такая система эквивалентна оптической системе, изображенной на рисунке 2, где обе линзы одинаковые.

Изображение, создаваемое первой линзой, может находиться или между линзами, или правее линзы  $L_2$ . В первом случае это изображение является действительным предметом для второй линзы. И мы можем написать уравнения:

$$\frac{1}{d'} + \frac{1}{f'} = \frac{1}{F}, \quad \frac{1}{d''} + \frac{1}{f''} = \frac{1}{2L - f'} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{F},$$

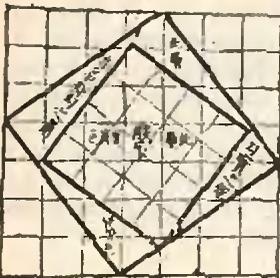
откуда следует

$$\frac{1}{d'} + \frac{1}{f'} = \frac{1}{2L - f'} + \frac{1}{d'}, \quad \text{и } f' = L.$$

Во втором случае изображение, создаваемое первой линзой, является мнимым предметом для второй линзы,

(Окончание см. на с. 42)

# Калейдоскоп "Кванта"



## Квадрат

Квадрат — это, пожалуй, самая совершенная геометрическая фигура. Он встречается в самых разных произведениях искусства: от оснований египетских пирамид до «Черного квадрата» Малевича.



Доказательство теоремы Пифагора содержится на рисунках 1 и 2.

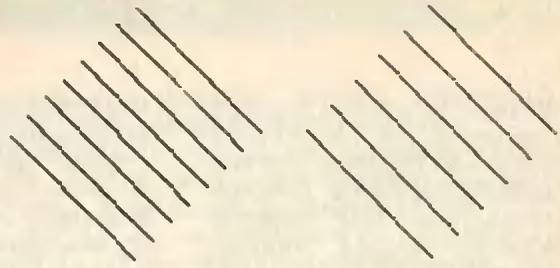


Не на много моложе и задача «квадратуры круга»: построить циркулем и линейкой квадрат, равновеликий данному кругу. Усилия многих замечательных математиков последних двух тысячелетий были направлены на то, чтобы доказать неразрешимость этой задачи. На рисунке 3 приведено приближенное решение задачи «квадратуры круга».

Измерить площадь фигуры в Древней Греции означало построить квадрат, равновеликий этой фигуре. С тех пор всякое вычисление площади принято называть *квадратурой*. С появлением интегрального исчисления площади стали вычислять также с помощью интегралов (рис. 4). Поэтому выражение, являющееся комбинацией интегралов, стали называть *записью в квадратурах*.

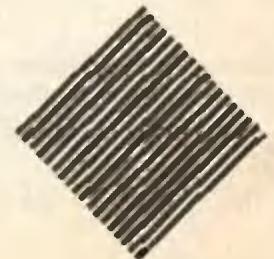
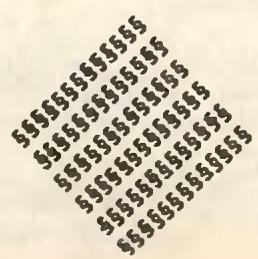
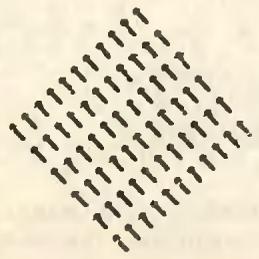
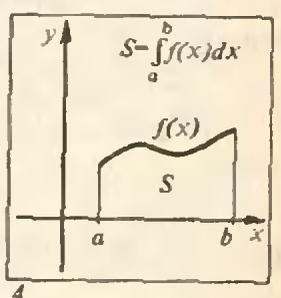
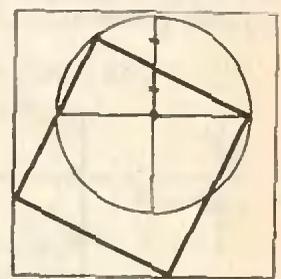
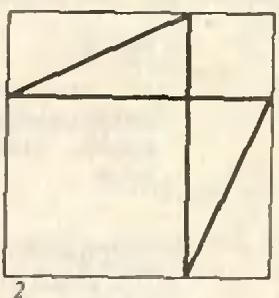
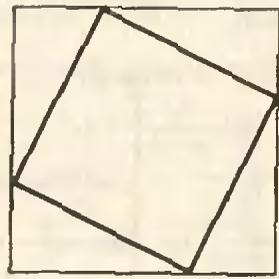
Разбиение квадрата на рисунке 5 может служить доказательством того, что сумма нечетных чисел от 1 до  $2n - 1$  равняется  $n^2$ .

Квадрат можно разбить на квадраты меньших размеров — например, средними линиями. На рисунке 6 приведено более хитрое разбиение квадрата на квадраты с целочисленными сторо-



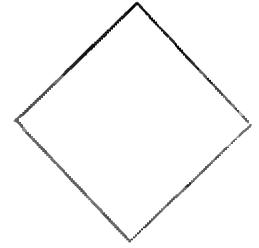
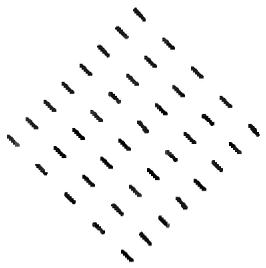
нами. Найдите их размеры, если известно, что длина стороны заштрихованного квадратика равна 2. Заметим, что эти квадратики не все различны. Долгое время

гауз (об этом он писал в первом издании своей книги «Математический калейдоскоп»). Это мнение подкреплялось тем, что совсем нетрудно доказать невозмож-



математики думали, что разбить квадрат на неравные квадраты невозможно. Так считали и замечательный советский математик Н. Н. Лувин, и известный польский математик Г. Штейн-

иость разбиения куба на различные кубики. Однако в 1939 году было построено разбиение квадрата на 55 различных квадратов. В 1940 году были найдены два способа разбиения квадрата

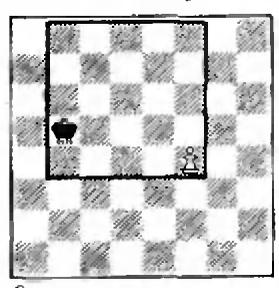
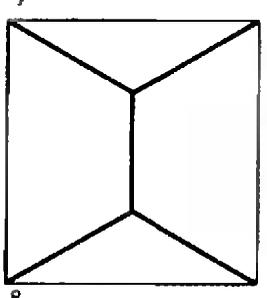
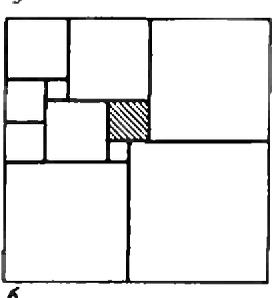
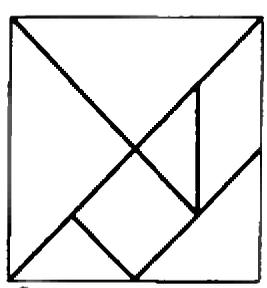
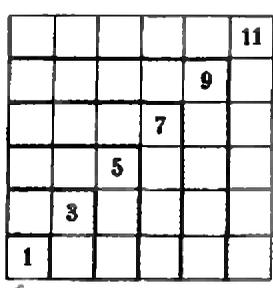


на 28 различных квадратов, затем — на 26 квадратов, а в 1948 году было получено разбиение на 24 различных квадрата. В 1978 году было найдено разбиение квад-

Если разрезать квадрат, как показано на рисунке 7, получится популярная китайская головоломка «Танграм» (подробно о ней рассказывается на 4-й с. обложки).

взгляд кажется, что такую сеть дорог составляют диагонали квадрата.

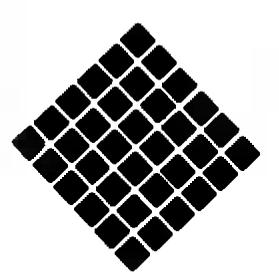
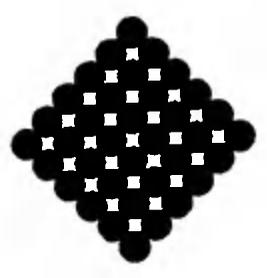
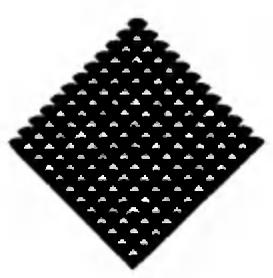
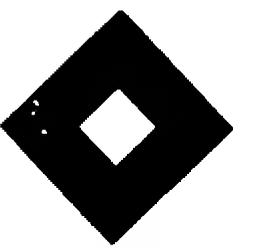
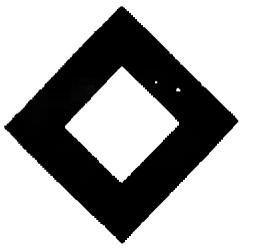
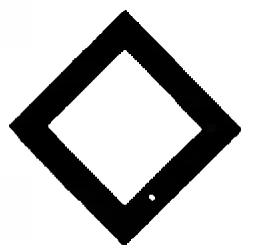
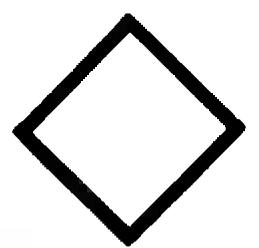
Любопытно, что в шахматах есть «правильно квадрата»: если король находится внутри квадрата, одна из сторон которого — граница доски, куда стремится пешка противника, чтобы стать ферзем, а другая — соответствующий путь пешки (рис. 9), то без помощи других фигур желание пешки стать «королевой» не осуществится. В крайнем



рата на 21 различных квадратов. Это разбиение можно найти на 4-й с. обложки «Кванта» № 11 за 1979 год. Разбиение квадрата меньше чем на 21 различных квадратов уже невозможно.

На рисунке 8 изображена кратчайшая сеть дорог, связывающая четыре города, находящихся в вершинах квадрата. Углы в точках пересечения дорог равны  $120^\circ$ . На первый

случае фигура, в которую превратится пешка, будет тут же «съедена» королем. Пешка на рисунке 9 не проходит в ферзи независимо от того, чей ход — белых или черных.



## Задачник „Кванта“

и уравнения приобретают несколько иной вид:

$$\frac{1}{d'} + \frac{1}{f'} = \frac{1}{F},$$
$$-\frac{1}{d''} + \frac{1}{f''} = -\frac{1}{f' - 2L} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{F}.$$

Отсюда получаем

$$-\frac{1}{f' - 2L} = \frac{1}{f'},$$

что возможно только в случае

$$f' \rightarrow \infty, \text{ или } d' = F.$$

Итак, для двух рассмотренных случаев мы можем написать:

$$1) \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{L} = \frac{1}{F}, \text{ откуда } d_1 = \frac{LF}{L-F},$$

$$2) d_2 = F.$$

По условию задачи

$$d_1 - d_2 = l, \text{ т. е. } l = \frac{LF}{L-F} - F,$$

и мы получаем квадратное уравнение

$$F^2 + lF - lL = 0.$$

Его решение (линза по условию положительная) —

$$F = 3 \text{ см.}$$

Е. П. Кузнецов

## О кривизне

(Начало см. на с. 14)

**Покатаем мячик.** Возьмите теннисный мячик. На его поверхности сделана бороздка причудливой формы. Пометьте какую-нибудь точку бороздки и положите мячик на стол так, чтобы эта точка оказалась на столе. А теперь аккуратно прокатывайте без проскальзывания мячик по столу вдоль бороздки до тех пор, пока помеченная точка вновь не окажется на столе. В результате этого прокатывания мячик повернется вокруг вертикальной оси на некоторый угол. На какой?

Поворот мячика при прокатывании вдоль замкнутой кривой равен повороту его касательной плоскости при параллельном переносе вдоль этой кривой. По теореме Гаусса — Бонне он равен также интегралу кривизны

по области, ограниченной бороздкой. Посмотрите на теннисный мячик: две области, на которые делит его бороздка, совершенно одинаковы. Как мы знаем, интеграл кривизны по всей сфере равен  $4\pi$ . Значит, интеграл кривизны по области, ограниченной бороздкой, вдвое меньше, т. е. равен  $2\pi$ . Итак, в результате прокатывания мячик повернется на полный угол, или, что то же самое, не повернется вовсе. Попробуйте проверить этот результат экспериментально.

Упражнения

8. Нарисуйте след от бороздки теннисного мячика на плоскости. Будет ли он замкнутой кривой?

9\*. На плоскости краской нарисована замкнутая несамопересекающаяся кривая. Выпуклое тело ставят на плоскость в некоторой точке кривой и прокатывают по ней без проскальзывания. На поверхности остается след. Докажите, что этот след не может оказаться замкнутой несамопересекающейся кривой. Подсказка: воспользуйтесь упражнением 6 — для кривой на поверхности и на плоскости.

# „Клант“ для младших школьников

## Задачи

1. Антоше подарили весы, и он начал взвешивать свои игрушки. Машину уравнивали мяч и два кубика, а машину с кубиком — два мяча. Сколько кубиков уравнивают машину? (Все мячи у Алеши одинаковые, кубики — тоже.)

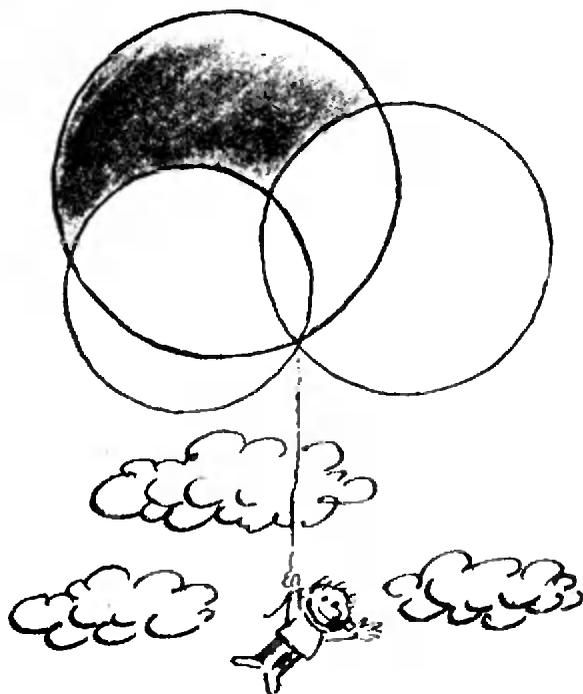
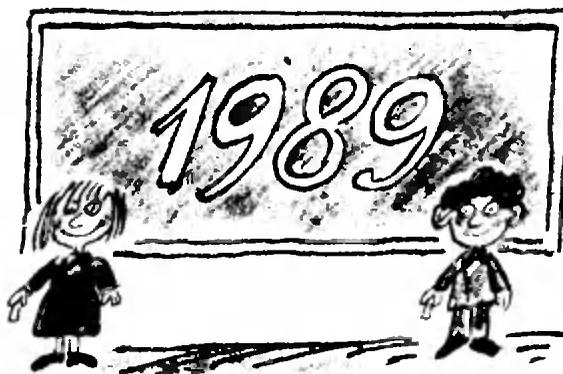
2. При умножении на 4 четырехзначного числа, все цифры которого различны, получается число, записываемое теми же цифрами, но в обратном порядке. Какое это число?

3. К числу 1989 припишите по цифре слева и справа так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 88.

4. Три окружности проходят через одну точку (см. рисунок). Найдите сумму углов красного «треугольника».

5. Набор состоит из 30 гирек с массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., 30 г. Из набора убрали 10 гирек, общая масса которых равна трети общей массы всех гирек. Можно ли оставшиеся гирьки разложить на две чашки весов по 10 штук на каждую чашку так, чтобы весы оказались в равновесии?

Эти задачи нам предложили *Н. К. Антонович, М. А. Роллова, А. И. Демидов, Н. Л. Табачникова, В. В. Произолов.*



# НЕЙТРОНЫ ИЩУТ УБИЙЦУ,

## или Рекорды активационного анализа

Кандидат физико-математических наук  
А. С. ШТЕЙНБЕРГ

Название этой статьи подсказано детективным сюжетом, с которым терпеливый читатель познакомится в самом ее конце. А пока займемся вещами весьма далекими от криминалистики и поговорим о том, как можно определить химический состав вещества, т. е. узнать, какие элементы и в какой пропорции присутствуют в образце.

Из курса химии вы знаете, что это можно сделать с помощью характерных для веществ и элементов химических реакций, методами так называемой «мокрой химии». Однако в некоторых случаях применение этих методов встречается с серьезными трудностями. Например, когда требуется произвести химический анализ очень мелкого по размерам образца; когда необходима исключительно высокая точность анализа многих элементов одновременно. Например, может потребоваться выявить один «инородный» атом среди миллиона или 100 миллионов других и определить, какого он сорта.

А такие ситуации отнюдь не умозрительны. Они, в частности, возникают в современной технологии полупроводников. Все чаще и чаще говорят, что вслед за каменным веком, бронзовым и железным наступил век



кремния. Кремний составляет основу миниатюрных интегральных схем, без которых невозможна сегодняшняя электроника. А их свойства резко зависят даже от невероятно малых содержаний примесей. Без умения определять состав мелких образцов кремния с очень высокой точностью невозможен прогресс в разработке новых поколений компьютеров.

Как же поступают в таких случаях?

Уже примерно 100 лет известно, что самыми эффективными методами химического анализа часто оказываются физические методы. И среди них настоящим рекордсменом по чувствительности является нейтронный активационный анализ (НАА). Чтобы объяснить его принцип, мы вначале напомним, как устроено атомное ядро.

Атомное ядро состоит из положительно заряженных протонов и электрически нейтральных нейтронов. Количество протонов определяет заряд ядра и служит его главной характеристикой. Одни элементы отличаются от других прежде всего количеством протонов в ядре. У первого элемента таблицы Менделеева — водорода (H) — в ядре один протон, у второго — гелия (He) — два и т. д. Ну, а сколько в ядре нейтронов? Оказывается, в ядрах одного и того же элемента может содержаться разное число нейтронов. Ядра с одинаковым количеством протонов, но разным количеством нейтронов называются изотопами.

Поясним сказанное примером. В ядре гелия всегда два протона. А нейтронов может быть 1, 2, 4 или 6, т. е. имеется четыре изотопа He —  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$ ,  $^6\text{He}$ ,  $^8\text{He}$  (индекс указывает суммарное число протонов и нейтронов). Рекордное число изотопов — 10 — имеет олово, 9 изотопов у ксенона, 8 — у кадмия и теллура и т. д. В природе разные изотопы распространены неравномерно. Как правило, львиную долю (90 % и более) всех природных запасов элемента составляет единственный изотоп.

Химические свойства разных изотопов совпадают. А вот физические могут отличаться и очень заметно.

Например, за счет «лишних» нейтронов атомные веса разных изотопов элемента различны. Но главное для нас не это. Большая группа изотопов обладает удивительным свойством — радиоактивностью. Они являются источниками излучения, которое нельзя увидеть или почувствовать, но которое можно зарегистрировать с помощью специальных приборов — детекторов излучения. Самые простые из них — фотопластинка и счетчик Гейгера. Мы не будем углубляться в вопрос о природе излучения. Он сложен и выходит за рамки этой статьи. Но для наглядности вы можете представить себе излучение как поток невидимых частиц.

Излучение каждого радиоактивного изотопа в высшей степени специфично. Это — его индивидуальный портрет, неповторимый, как отпечатки пальцев человека. Самыми характерными штрихами в этом портрете являются энергия излучения (для нас — энергия частиц) и период полураспада.

Что такое период полураспада, объяснить сравнительно несложно. С помощью детектора можно не только зарегистрировать излучение, но и измерить его интенсивность, т. е. определить, сколько частиц падает на единицу площади в единицу времени. Чем больше интенсивность, тем выше окажется степень почернения фотопластинки, тем чаще будет щелкать счетчик Гейгера и т. д. Периодом



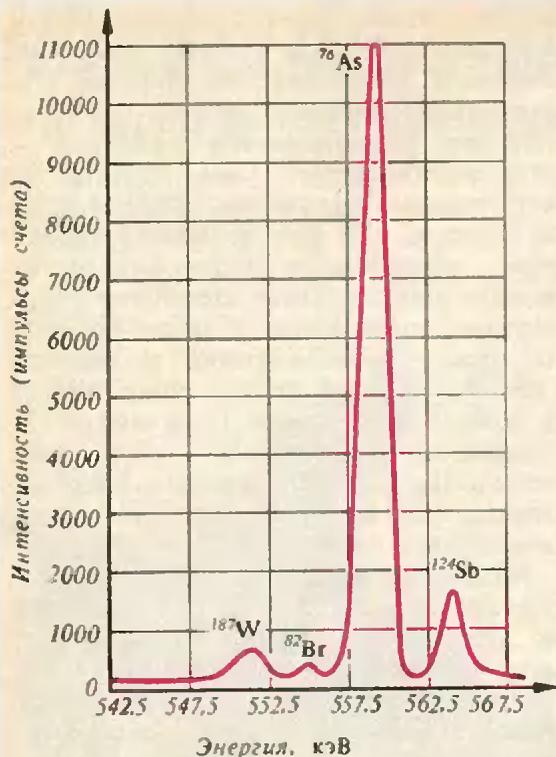


Рис. 1.

полураспада изотопа (обозначается  $T_{1/2}$ ) называется время, за которое интенсивность его излучения ослабевает вдвое. За это время половина первоначально радиоактивных ядер превращается в нерадиоактивные (как говорят, стабильные). Периоды полураспада у разных изотопов различные — от долей секунды до миллионов лет. Специальные детекторы не

просто измеряют интенсивность излучения, но и строят его спектр — график зависимости интенсивности излучения от его энергии. Пример такого спектра приведен на рисунке 1. Резкие «всплески» интенсивности — их называют линиями спектра — соответствуют излучениям разных изотопов. Каждую линию с помощью заранее составленных таблиц легко связать со «своим» изотопом (именно так и «распознали» изотопы, указанные на рисунке).

Построение спектра излучения, таким образом, решает задачу качественного химического анализа образца, т. е. позволяет определить, из каких радиоактивных элементов он состоит.

То, что мы до сих пор рассказали, должно было убедить вас, дорогие читатели, в одном: если бы образцы состояли из радиоактивных изотопов, то определить их качественный состав по спектрам было бы сравнительно несложно. Но вот беда — «нормальные» образцы состоят из природных нерадиоактивных изотопов. Поэтому для проведения анализа их надо активировать, т. е. сделать радиоактивными. Существуют разные способы активации. Проще всего — «обстрелять» образец в реакторе нейтронами. Они электрически нейтральны, могут поэтому внедриться в положительно заряженное ядро, и нерадиоактивный

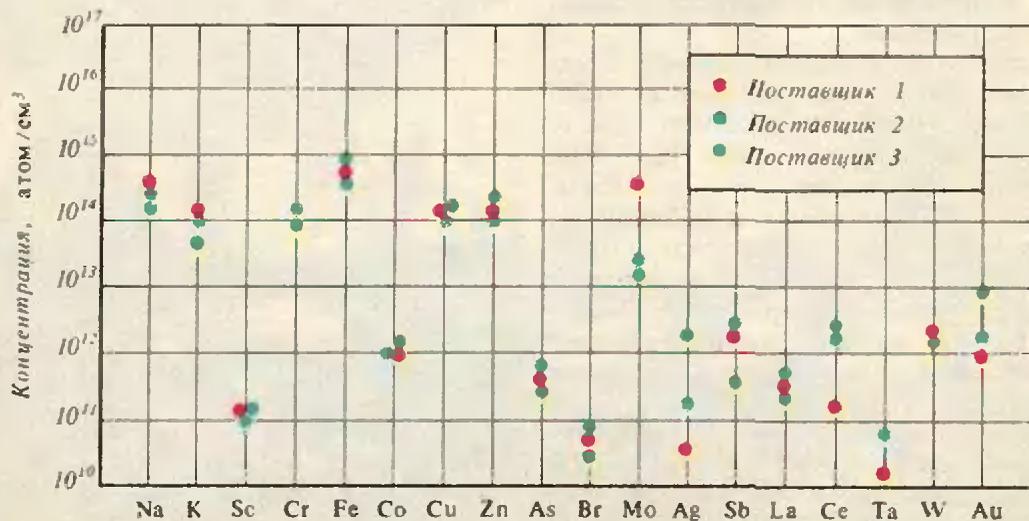


Рис. 2.

(стабильный) изотоп может стать радиоактивным.

По спектрам излучения можно провести не только качественный анализ, но и количественный — узнать, сколько атомов того или иного изотопа присутствуют в образце. Дело в том, что интенсивность излучения изотопа прямо пропорциональна количеству его ядер. Имея эталоны (т. е. образцы с заранее известным содержанием анализируемого элемента), можно, активировав их, построить график этой зависимости. А измеряя интенсивность излучения данного изотопа в исследуемом образце, который активировался вместе с эталоном, легко по графику определить содержание этого изотопа. (После того, что мы говорили про период полураспада, вам должно быть понятно, почему активация образца и эталона и измерение их спектров производятся одновременно. Если это условие не выполняется, то для определения количества изотопа по эталонному графику необходимо делать поправки на период полураспада.)

Описанный нами метод качественного и количественного анализа и называют нейтронным активационным анализом — НАА.

В таблице приведен список элементов, содержание которых в кремнии очень важно знать. Там указаны природные (стабильные) изотопы, детектируемые радиоактивные изотопы со своими периодами полураспада и чувствительность НАА для них (т. е. минимальная концентрация, при которой элемент может быть обнаружен). В 1 см<sup>3</sup> кремния содержится примерно 10<sup>23</sup> атомов, так что вы сами можете убедиться в рекордных возможностях НАА.

На рисунке 2 приведены полученные методом НАА данные по содержанию примесей в кремнии у трех различных американских фирм, поставляющих этот материал в электронную промышленность. Сравнительно высокие концентрации некоторых элементов, в частности железа и хрома, требуют проведения дополнительной очистки кремния перед приготовлением интегральных схем.

Основной природный изотоп	Детектируемый изотоп	Чувствительность, атом/см <sup>3</sup>	T <sub>1/2</sub>
<sup>23</sup> Na	<sup>24</sup> Na	1×10 <sup>12</sup>	15 ч
<sup>39</sup> K	<sup>42</sup> K	1×10 <sup>13</sup>	12,4 ч
<sup>52</sup> Cr	<sup>51</sup> Cr	5×10 <sup>12</sup>	27,7 суток
<sup>56</sup> Fe	<sup>59</sup> Fe	1×10 <sup>14</sup>	44,6 суток
<sup>59</sup> Co	<sup>60</sup> Co	2×10 <sup>11</sup>	5,27 года
<sup>63</sup> Cu и <sup>65</sup> Cu	<sup>64</sup> Cu	2×10 <sup>12</sup>	12,7 ч
<sup>64</sup> Zn	<sup>65</sup> Zn	1×10 <sup>13</sup>	244 суток
<sup>75</sup> As	<sup>76</sup> As	1×10 <sup>10</sup>	26,3 ч
<sup>80</sup> Br	<sup>82</sup> Br	5×10 <sup>10</sup>	35,3 ч
<sup>98</sup> Mo	<sup>99</sup> Mo	1×10 <sup>11</sup>	66,2 ч
<sup>108</sup> Ag	<sup>110</sup> Ag	2×10 <sup>11</sup>	252 суток
<sup>122</sup> Sb	<sup>124</sup> Sb	5×10 <sup>10</sup>	60,4 суток
<sup>181</sup> Ta	<sup>182</sup> Ta	1×10 <sup>10</sup>	115 суток
<sup>185</sup> W	<sup>187</sup> W	2×10 <sup>11</sup>	23,9 ч
<sup>197</sup> Au	<sup>198</sup> Au	2×10 <sup>9</sup>	2,7 суток
<sup>202</sup> Hg	<sup>203</sup> Hg	1×10 <sup>11</sup>	47 суток

А иначе... — компьютер не заслужит вашего доверия.

И в заключение — обещанный детективный сюжет.

13 мая 1958 года в канадском городке Эдмундстоне, расположенном около канадо-американской границы, был обнаружен труп 16-летней девушки Киэтану Бушар. Подозрения, на основании косвенных улик, пали на американца Джона Фоллмена, который часто приезжал по делам в Эдмундстон. Тот, однако, категорически отрицал свою причастность к преступлению. Следствие остро нуждалось в прямых доказательствах.

Тщательный осмотр трупа Бушар установил, что в руке девушки остался зажатый единственный волосок. Он

мог принадлежать либо ей, либо убийце.

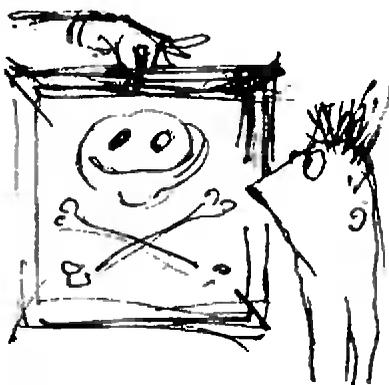
Можно ли по одному волоску точно идентифицировать личность его хозяина? Такой вопрос полицейские поставили перед специалистом по НАА Робертом Джерви. Для ответа тому пришлось выполнить специальное исследование. Основная идея состояла в том, что для волос каждого человека характерен свой неповторимый набор и концентрация микроэлементов. Чтобы доказать ее правильность, Джерви пришлось обследовать волосы сотен людей. Концентрация характерных микроэлементов — мышьяка, натрия, меди, цинка, брома — в человеческих волосах не превосходит одного атома на сто миллионов. Ни одному методу, кроме НАА, задача идентификации человека по волосам была не под силу. В результате кропотливой работы удалось доказать, что найденный волосок действительно принадлежит Фоллмену, и это стало решающим доказательством его вины.



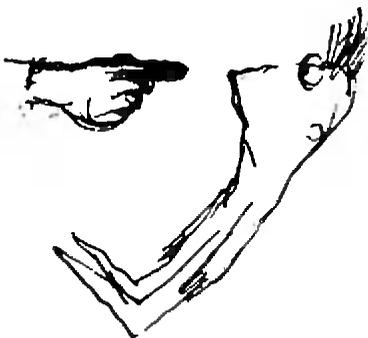
# „Квант“ улыбается

## Советы экзаменатору

1. Прежде всего разъясните экзаменуемому, что вся его профессиональная карьера может рухнуть из-за его неудачного ответа. Подчеркните ему важность ситуации. Поставьте его на место с самого начала.



2. Сразу задайте самые трудные вопросы. Если первый вопрос достаточно труден или запутан, экзаменуемый слишком разнервничается, чтобы отвечать на следующие вопросы, как бы просты они ни были.



3. Обращаясь к экзаменуемому, сохраняйте сдержанность и сухость, с экзаменаторами же будьте очень веселы. Эффектно обращаться время от времени к другим экзаменаторам с насмешливыми заме-

чаниями по поводу ответов экзаменуемого, игнорируя его самого, как будто его нет в помещении.



4. Заставляйте экзаменуемого решать задачи вашим методом, особенно если этот метод необычен. Ограничивайте экзаменуемого, вставляя в каждый вопрос множество указаний и оговорок. Идея состоит здесь в усложнении задачи, которая без этого была бы весьма проста.



5. Вынудите экзаменуемого сделать тривиальную ошибку, и пусть он ломает голову над ней как можно дольше. Сразу же после того, как он заметит ошибку, но как раз перед тем, как он поймет, как ее исправить, презрительно поправьте его сами. Это требует высокой проницательности и точности выбора

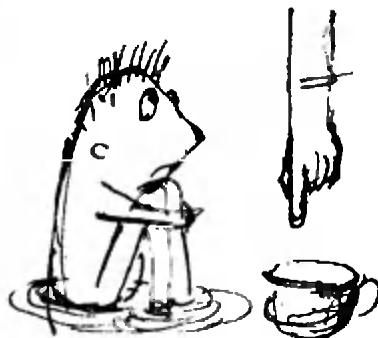
момента, что достигается только большой практикой.



6. Когда экзаменуемый начнет тонуть, никогда не помогайте ему выкарабкаться. Зевните... и перейдите к следующему вопросу.

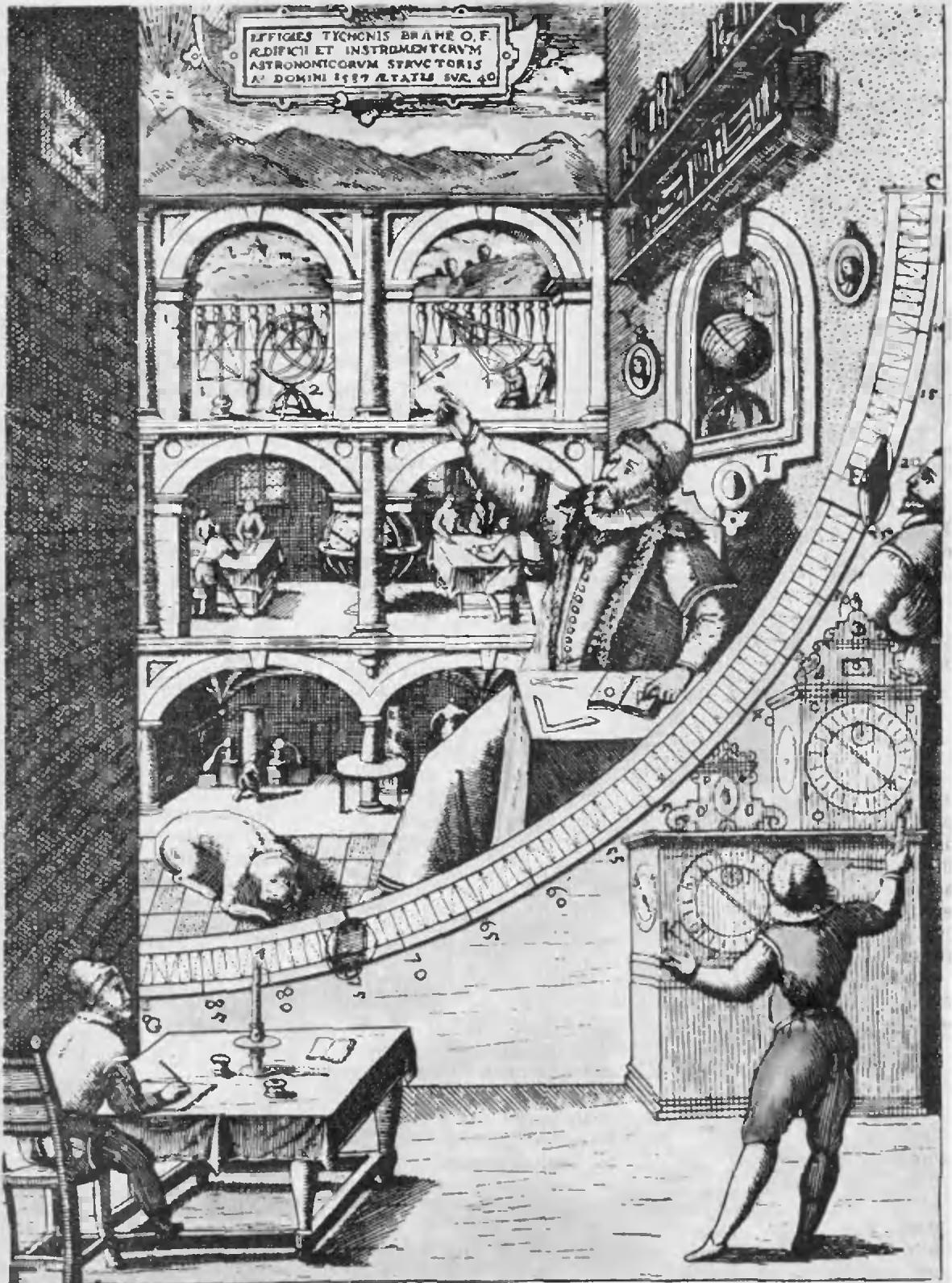


7. Задавайте экзаменуемому время от времени вопросы типа: «Разве вы не проходили этого в начальной школе?»



(Продолжение см. на с. 62)

*Р-знамии рахена*



Обсерватория Тихо Браге и астрономические инструменты.

В будущем году в Библиотечке «Квант» выйдет книга одного из постоянных авторов нашего журнала, преподавателя кафедры физики Московского физико-технического института В. Е. Белонучкина «Кеплер, Ньютон и все-все-все».

«Ужасно скучно,— пишет автор в предисловии,— начинать задачу словами «В некоторой системе одна из звезд имеет массу...» Куда приятнее звучит: «Сириус — двойная звезда...» Но загадку Сириуса разгадал не я, а Бессель, не упоминать его — нехорошо. Да и вся эта история интересна и поучительна. Хотелось рассказать о ней, но много ли можно вместить в условие задачи? А если написать об этом в книжке, место может найтись». Сегодня мы печатаем одну из первых глав книги. В этой главе рассказывается о предшественниках создателей небесной механики — Кеплера и Ньютона — и разбираются задачи, которые решали астрономы древности.

## Гиганты

Кандидат физико-математических наук  
В. Е. БЕЛОНУЧКИН  
Гений подобен холму,  
возвышающемуся  
на равнине.

Козьма Прутков

Общепризнано, что Исаак Ньютон был одним из величайших гениев в истории науки. И вот он-то категорически не согласен с К. Прутковым. «Если я видел немного дальше других,— писал Ньютон,— то потому лишь, что стоял на плечах гигантов.» Кто же эти гиганты? Конечно, Кеплер, конечно, Галилей, Коперник. Ну а еще раньше?

Уже первый известный нам по имени ученый — Фалес Милетский, чья научная деятельность началась на рубеже 7 и 6 веков до н. э., внес свой вклад в историю астрономии. Согласно преданию, он предсказал солнечное затмение 28 мая 584 года до н. э. Впрочем, есть основания предполагать, что он воспользовался методом, разработанным еще в древнем Вавилоне. Метод вавилонян был чисто эмпирическим: многолетние наблюдения позволяли им улавливать закономерности в повторении астрономических явлений. Первым «теоретически» установленным фактом, с признания которого началось построение схемы Вселенной, следует, по-видимому, считать шаровидность Земли.

Две догмы лежали в основании первых научных систем построения мира: очевидная неподвижность Земли и равномерное движение по окружностям вокруг Земли Солнца, Луны, планет. Несправедливость второй догмы была замечена еще древними астрономами, но именно она прожила незыблемо два тысячелетия — вплоть до Кеплера.

Если и кажется, что светило движется неравномерно и не по окружности, то оно все же движется равномерно по окружности, центр которой движется равномерно по окружности вокруг точки, которая движется равномерно по окружности... и так далее, пока кажем-нибудь точка не начинает двигаться равномерно по окружности с центром в Земле. Такого рода схему в законченном виде впервые построил древнегреческий астроном Евдокс в на-

## Исторический комментарий

Фалес Милетский (ок. 625 — ок. 547 до н. э.) — древнегреческий философ, родоначальник античной философии.

PRIMA PARS.

Max Schönerer demographischer Atlas 1870, 1876, 1883.



Si terra non spherica, umbra eius retineret figuram obliquam, sicut apparet.



Si terra non spherica, umbra eius haberet formam, sicut apparet.



Si terra non spherica, umbra eius haberet figuram, sicut apparet, sicut apparet, sicut apparet.



Доказательство шарообразности Земли. (Из руководства по устройству солнечных часов, 1531 г.) Написан сверху: «Эта схема показывает, что Земля шарообразна». Далее: «Если бы Земля была квадратной, треугольной или шестиугольной, мы увидели бы при лунном затмении тень соответствующей формы».

**Евдокс Книдский** (ок. 408 — ок. 355 до н. э.) — древнегреческий математик и астроном. Представил движение планет как комбинацию равномерно вращающихся вокруг Земли 27 концентрических сфер.

**Аристотель** (384—322 до н. э.) — древнегреческий философ и ученый. Сочинения Аристотеля охватывают все отрасли тогдашнего знания. В области астрономии интересы Аристотеля были сосредоточены главным образом на вопросах мироздания. Ему принадлежат также наблюдения небесных явлений, комет и падающих звезд.

**Гиппарх** (ок. 180—190—125 до н. э.) — древнегреческий астроном, один из основоположников астрономии. Определил расстояние до Луны, продолжительность года, составил каталог 850 звезд, в котором разделил их по блеску на 6 классов.

**Клавдий Птолемей** (ок. 90 — ок. 160) — древнегреческий астроном, создатель геоцентрической системы мира. Разработал математическую теорию движения планет вокруг неподвижной Земли, позволяющую предвычислять их положения на небе.

**Николай Коперник** (1473—1543) — польский астроном, создатель гелиоцентрической системы мира. Совершил переворот в естествознании, отказавшись от принятого в течение многих веков учения о центральном положении Земли. Объяснил видимое движение небесных светил вращением Земли вокруг своей оси и обращением планет (в том числе и Земли) вокруг Солнца.

**Иоганн Кеплер** (1571—1630) — немецкий астроном, один из творцов астрономии нового времени. Открыл законы движения планет (теперь их называют законами Кеплера), на основе которых составил планетные таблицы.



*Средневековый астроном определяет расстояние до корабля в море, используя предложенный Фалесом метод триангуляции.*

чала 4 века до н. э. Схема Евдокса состояла из 27 окружностей (сфер) и объясняла с достаточной для того времени точностью движение Солнца, Луны и пяти известных тогда планет.

Со временем точность наблюдений росла, росло и число сфер. Ученику Евдокса Калиппу понадобилось уже 33 окружности. Аристотель довел их число до 56. Система окружностей (сфер), усовершенствованная трудами многих астрономов, в первую очередь Гиппарха, доведенная до блеска Птолемеем, чье имя она получила, и освященная авторитетом Аристотеля, была единственной приемлемой системой мира даже для великого революционера в науке Коперника, который «всею лишь» окончательно перенес центр Вселенной с Земли на Солнце. И только Кеплер сумел окончательно отказаться от идеи равномерного движения планет по окружностям.

Как вы, наверное, знаете, на этот отказ Кеплера подвигли восемь минут отклонения Марса от предписанного ему положения. Тихо Браге, результатами наблюдений которого пользовался Кеплер, достиг точности, при которой эти восемь минут уже нельзя было отнести на счет погрешности измерений. Правда, еще за полтора века до Браге такой же, или даже несколько большей, точности достиг великий Улугбек. Но Самарканд далеко от Европы, а мусульманская церковь, жертвой которой пал Улугбек, постаралась вытравить даже память о безбожнике, хотя и был он правителем великого среднеазиатского государства.

Точность измерений Евдокса составляла около 0,5', Тихо Браге — примерно 2', Улугбека — порядка 1'. С изобретением телескопа точность измерений резко возросла. Но значит ли это, что результаты древних и средневековых астрономов потеряли для нас всякую ценность? Конечно, нет. «И при железных дорогах лучше сохранять двуколку», — утверждал К. Прутков. Записи древних — греков, египтян, вавилонян, китайцев, инков — помогают установить долговременные закономерности движения планет, Земли, «неподвижных» звезд. Вот иллюстрация.

**Задача 1.** Самый большой в мире телескоп-рефлектор (советский БТА) имеет в качестве объектива зеркало диаметром  $D=6$  м. В течение какого промежутка времени надо наблюдать звезду с помощью БТА, чтобы ее скорость можно было определить точнее, чем с привлечением данных Евдокса? А если использовать данные Тихо Браге, Улугбека?

Чтобы вычислить скорость звезды, надо, как минимум, определить ее положение дважды. С какой точностью можно измерить координаты светил с помощью телескопа, определяется его разрешением, а оно принципиально ограничено дифракционными явлениями. Минимальный угол, который можно измерить, применяя объектив диаметром  $D$ , равен примерно  $\lambda/D$ , где  $\lambda$  — длина волны излучения, на которой ведется наблюдения. Для желтого света, например,  $\lambda \approx 6 \cdot 10^{-7}$  м, а значит, максимальная точность измерений на БТА — примерно  $10^{-7}$  радиана. Дальнейшие вычисления читателю предлагается проделать самому (ответы см. на с. 75).

Борьба против догмы, постулирующей неподвижность Земли, началась в 3 веке до н. э. Имя первого борца — Аристарх Самосский. Хотя еще и Пифагор, и Гераклит считали, что в центре Вселенной находится Солнце, именно Аристарх был первым, кто попытался это аргументировать. Сопоставив вычисленные им относительные размеры Земли и Солнца, он пришел к выводу, что Солнце, значительно превышающее Землю по своим размерам, должно быть центром, вокруг которого обращаются планеты, в том числе и Земля. И это — за восемнадцать веков до Коперника!

Попробуем проследить за вычислениями Аристарха на таком примере.

**Задача 2. Солнце гораздо дальше от Земли, чем Луна. Угловые размеры Луны и Солнца практически совпадают, а значит, тень Луны на Земле — точка. Тень Земли на орбите Луны по диаметру вдвое превышает Луну (правильная цифра — в 2,67 раза). Во сколько раз Земля больше Луны? Вычислите то же соотношение по современным данным.**

Для определения размеров Солнца Аристарх измерил угол между направлениями на Солнце и на Луну в первой и последней ее четверти, т. е. когда освещена ровно половина диска Луны. И тут он крупно ошибся: по его измерениям этот угол отличается от прямого на  $3^\circ$ , а



Модель Солнечной системы Тихо Браге; здесь Солнце обращается вокруг Земли, но остальные планеты обращаются вокруг Солнца.

Тихо Браге (1546—1601) — датский астроном, реформатор практической астрономии. На построенной им обсерватории свыше 20 лет вел определения положений светил с наивысшей для того времени точностью. На основе его наблюдений Марса Кеплер вывел законы движения планет.



Обсерватория Тихо Браге в Ураниборге. С гравюры 1598 г.

Улугбек Мухаммед Тарагай (1394—1449) — среднеазиатский государственный деятель, ученый, просветитель. Построил одну из наиболее значительных обсерваторий средневековья. Составил каталог положений 1018 звезд, определенных с большой точностью.

Пифагор Самосский (6 в. до н. э.) — древнегреческий математик и философ.

Гераклит Эфесский (кон. 6 — нач. 5 вв. до н. э.) — древнегреческий философ-диалектик.

Аристарх Самосский (ок. 320 — ок. 250 до н. э.) — древнегреческий астроном. Первым высказал идею гелиоцентризма: утверждал, что Земля движется вокруг неподвижного Солнца, находящегося в центре сферы неподвижных звезд.

**Джованни Доменико Кассини** (1625—1712) — первый директор Парижской обсерватории. Открыл вращение Юпитера и Марса, 4 спутника Сатурна и темный промежуток в его кольце.

**Эратосфен Киренский** (ок. 276—194 до н. э.) — древнегреческий ученый. Работал во многих областях науки. В математике, например, дал известный способ нахождения простых чисел. Занимался хронологией, астрономией (описание созвездий).

**Посидоний** (ок. 135—51 до н. э.) — древнегреческий философ. Сочинения охватывали все области знания и дали завершающую форму античной натурфилософии.

**Николай Кузанский** (1401—1464) — философ, теолог, ученый. Один из предшественников космологии Коперника и опытного естествознания.

**Галилео Галилей** (1564—1642) — итальянский ученый, один из основателей точного естествознания. Его научная деятельность имела огромное значение для победы гелиоцентрической системы мира.



«Скептик, или Пилигрим на краю Земли» — гравюра на дереве, выполненная в 19 в. Камилем Фламарионом.

правильная цифра — на 8,6'. Дело в том, что эта величина вообще трудно поддается измерению, в частности из-за явления «пепельного света» — Луна переотражает на Землю солнечный свет, рассеянный в ее сторону Землей. Вот почему ответ Аристарха и наш сильно разойдутся, когда мы решим следующую задачу.

**Задача 3. Определите отношение размеров Солнца и Луны, используя данные Аристарха. Что получится, если подставить современные цифры?**

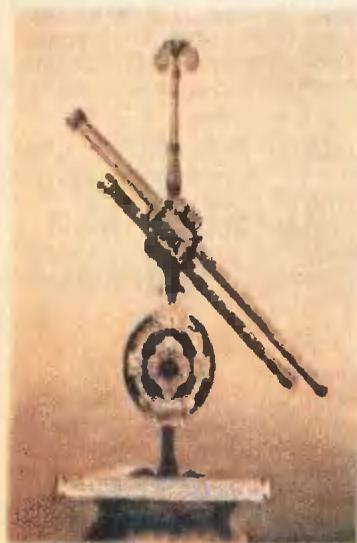
**Подсказка:** угол между прямыми Земля — Луна и Луна — Солнце Аристарх считал в точности прямым.

Результат, полученный Аристархом относительно размеров Земли и Солнца, не вызывал сомнений свыше двух тысяч лет. Лишь в середине 17 века основатель Парижской обсерватории Кассини произвел прямые измерения расстояния от Земли до Солнца и «увеличил» размеры Солнца.

А размеры Земли с неплохой точностью измерил еще в 3 веке до н. э. Эратосфен Киренский (помните «решето Эратосфена» для выделения простых чисел?). Эратосфен прослышал, что в Сиене (ныне Асуан) раз в год предметы не отбрасывают тени. Он поехал в Сиену и проверил этот факт. Таким образом Эратосфен убедился, что в день летнего солнцестояния в Сиене Солнце находится в зените. В Александрии, где жил Эратосфен, в день солнцестояния Солнце на  $1/50$  окружности не доходило до зенита. От Александрии до Сиены 5000 стадиев (греческая мера длины), и города расположены почти на одном меридиане. Перед Эратосфеном встала нетрудная задача, которая предлагается и вам.

**Задача 4. По приведенным выше данным определите длину окружности земного шара.**

В стадиях ответ получается сразу — 250 000. А как это выглядит в привычных километрах? Кто-то хочет польстить Эратосфену и для величины стадия выбирает цифру 157 м. Тогда получается «астрономическая» точность — ошибка Эра-



Телескоп Галилея.

тосфена меньше 2%. Правда, смущают два обстоятельства. Во-первых, Сиена находится не совсем на тропике, во-вторых, странно, что спустя полтора столетия Посидоний ошибся заметно больше — у него получилось 240 000 стадиев, т. е. за полтора века точность снизилась в три с лишним раза. Все же наиболее вероятное значение величины стадия — около 190 метров.

Однако вернемся к Аристарху. Первым высказал он идею гелиоцентризма, однако не удалось ему опровергнуть очевидность первой догмы, и почти на два тысячелетия Земля застыла в неподвижности. Но росла точность измерений, все труднее было согласовывать движение планет со схемой Птолемея.

Нельзя не отметить вклад в развенчание геоцентрической системы мира кардинала католической церкви Николая Кузанского. Его аргументация была вполне теологической: поскольку Бог вездесущ, любая точка Вселенной равно близка к нему (или равно удалена от него), а значит, равно может претендовать на право считаться центром Мира. Но не надо думать, что заслуги этого ученого сводятся только к этой фразе.

Роджер Бэкон в 13 веке, Николай Кузанский в 15, Фрэнсис Бэкон в начале 17 века заложили основы современной научной методологии, главный тезис которой можно выразить словами «опыт — критерий истины». У некоторых может возникнуть вопрос: не маловато ли — за четыре века один тезис? Давайте вспомним, что более тысячи лет критерием истины считалось согласие с Библией и Аристотелем. Ведь еще в 17 веке нетрудно было угодить в лапы инквизиции, просто пересчитав лапки паука. Аристотель написал, что у паука шесть ног, а попробуйте посчитать — непременно получите восемь (если, конечно, паук не инвалид), и это будет великим грехом. Но смертельный удар геоцентрической системе нанес лишь Николай Коперник.

В самом начале 17 века был создан предсказанный еще Роджером Бэконом и сконструированный Леонардо да Винчи первый телескоп. 7 января 1610 года Галилей направил его на Юпитер и тут же обнаружил, что у крупнейшей планеты есть четыре спутника. Сейчас этих спутников известно больше полутора десятков, но четыре самых крупных так и называются по имени первооткрывателя — Галилеевы спутники Юпитера. К 1670 году Кассини получил реалистическую оценку радиуса земной орбиты. Через 5 лет Рёмер, используя спутники Юпитера и данные Кассини, осуществил мечту Галилея — измерил скорость света. Попробуем и мы сделать то же самое, но несколько иным путем.

*Задача 5. Промежуток времени между двумя последовательными затмениями спутника Юпитера Ио в течение года изменяется от минимального значения 42 ч 28 мин 21 с до максимального — 42 ч 28 мин 51 с. Определите по этим данным скорость света.*

Так как орбита Юпитера гораздо больше земной орбиты, а скорость Юпитера намного меньше скорости Земли, можно считать, что в течение года взаимное расположение Земли и Юпитера практически не меняется. Кажущиеся изменения продолжительности периода обращения Ио связаны только с изменением направления скорости Земли. Эта скорость по величине неизменна и равна 29,8 км/с.

Накапливались данные, повышалась точность, выводились эмпирические законы. Пришла пора все это объяснить. Но это уже выходит за рамки данной главы.

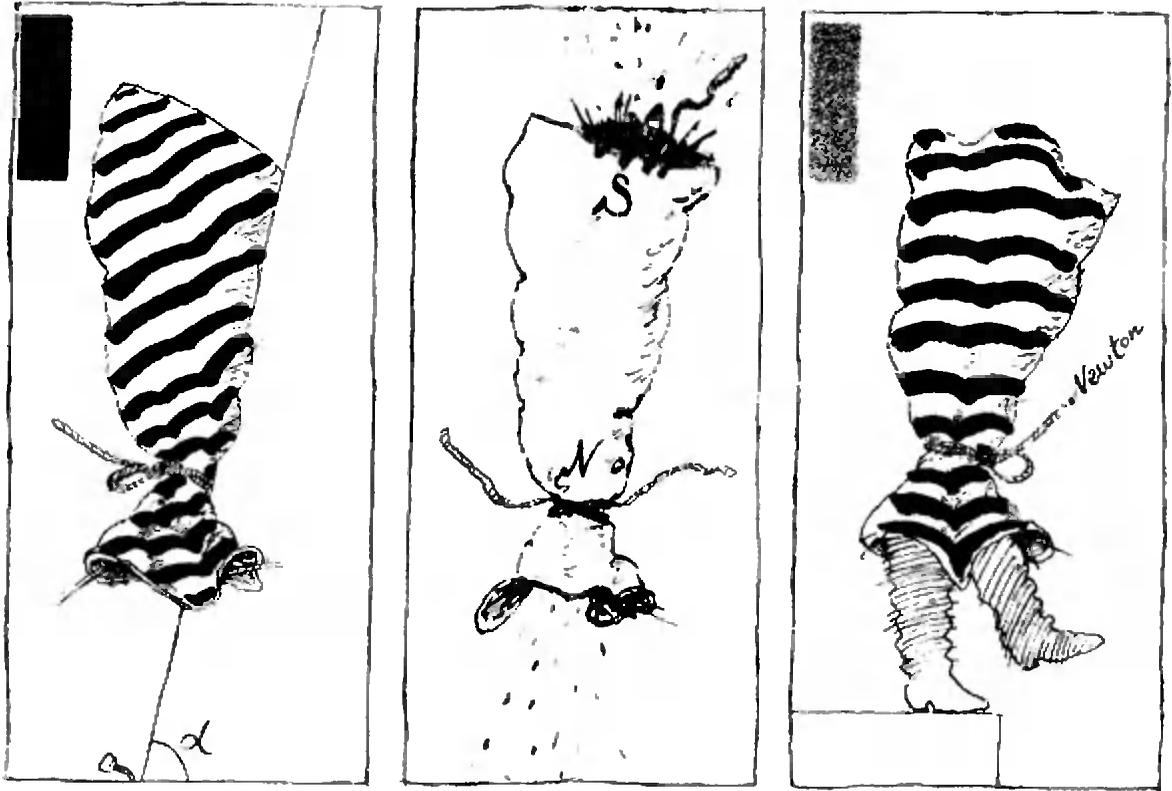
*Роджер Бэкон* (ок. 1214—1292) — английский философ и естествоиспытатель. Занимался оптикой и астрономией.

*Фрэнсис Бэкон* (1561—1626) — английский философ, родоначальник английского материализма. Сформулировал общие принципы экспериментального исследования.

*Оле Рёмер* (1644—1710) — датский астроном. По наблюдениям спутников Юпитера впервые определил скорость света.



*Гравюра, на которой изображен Рёмер во время наблюдений.*



## Школа "Кванте"

### Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Почему не скользит мешок?» предназначена восьмиклассникам, заметка «Полярные сияния» — девятиклассникам, «О законах Ньютона и «свободе воли» — десятиклассникам.

#### Почему не скользит мешок?

На одном из уроков учитель кладет на стол спичечный коробок, на коробок ставит стакан с водой (рис. 1).

— Как вытащить коробок, не дотрагиваясь до стакана? Потянуть? Нет, стакан поедет за коробком. А теперь смотрите.

Учитель берет в руки тяжелую линейку, отводит ее в сторону и с раз-

маху ударяет по коробку. Спички улетают в дальний угол, зато стакан стоит на столе, почти не сместившись от удара!

Почему же стакан не сдвинулся с места? Во избежание недоразумений напомним, что учитель наносит удар не по стакану, а по коробку. На стакан же в горизонтальном направлении действует только сила трения со стороны коробка  $F_{тр} = \mu m_{ст} g$ . Конечно, и с помощью такой силы можно сообщить стакану заметную скорость, перемещая коробок по столу с небольшим ускорением (подумайте, в каких пределах должно лежать это

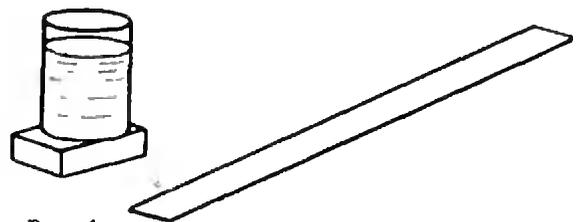


Рис. 1.

ускорение, чтобы стакан не соскользнул). Дело не в величине силы, а в том, что при резком ударе линейкой коробок сразу вылетает, и сила трения действует очень короткое время. Такое короткое, что эта сила не успевает сообщить стакану сколь-нибудь заметный импульс  $\Delta P_x = F_{тр} \Delta t$ .

На этом примере видно, что при анализе сил, действующих на тело или на систему тел, надо учитывать также и время их действия. Например, при разрыве снаряда на него действует внешняя сила — сила тяжести. Несмотря на это, можно считать, что импульс системы сохраняется (импульс снаряда равен суммарному импульсу осколков), так как изменение импульса системы за очень малое время взрыва ничтожно мало.

— Нет, — может возразить наблюдательный ученик, — тут явно что-то не в порядке! Посмотрите на жесткий мячик, который отскакивает от пола (рис. 2). Время удара мало, а изменение импульса имеет вполне заметную величину:

$$\Delta P_y = mv - (-mv) = 2mv.$$

В чем же дело?

Ученик, безусловно, прав. Совсем не всегда действие силы становится пренебрежимо малым при малом времени ее действия.\*) Это верно только в том случае, когда величина силы фиксирована, как, например, в случае силы тяжести. Совсем по-другому обстоит дело с силой реакции опоры,

\*) Действие силы можно измерять тем импульсом, который она сообщила бы телу, действуя в одиночку. В случае постоянной силы эта величина (ее называют импульсом силы) равна  $F \Delta t$ , в случае переменной —  $\sum \vec{F}_i \Delta t_i$ . Иногда вводят среднюю силу, определяя ее равенством  $\vec{F}_{ср} \Delta t = \sum \vec{F}_i \Delta t_i$ .

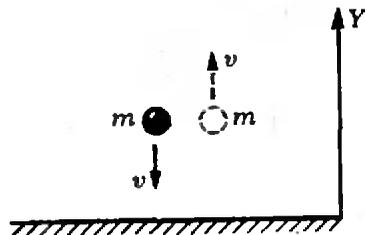


Рис. 2.

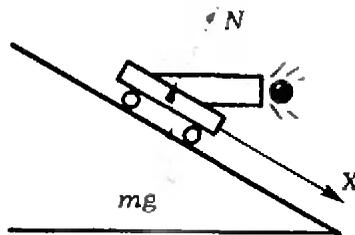


Рис. 3.

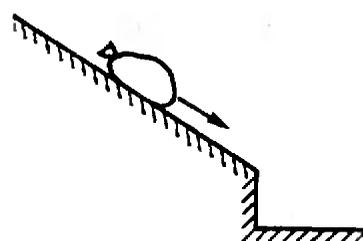


Рис. 4.

которая действует на мячик при его ударе о плоскость. Если мы добьемся уменьшения времени удара, к примеру, в 10 раз (за счет увеличения жесткости материала шарика и плоскости), то в десять раз возрастет среднее значение силы реакции, а изменение импульса шарика все равно будет равно  $2mv$ . Такие силы мы будем условно называть ударными. Их действие может оказаться существенным при любом, сколь угодно коротком взаимодействии.

Рассмотрим, например, пушку, производящую выстрел в тот момент, когда она соскальзывает с гладкой наклонной плоскости (рис. 3). Можно ли для определения скорости пушки после выстрела применять закон сохранения импульса? Можно, но для начала нужно отыскать направление, в проекции на которое внешние силы обращаются в ноль, и лишь потом записать закон сохранения импульса. Но такого направления в нашем случае нет! На систему действуют сила тяжести  $m\vec{g}$  и сила реакции опоры  $\vec{N}$ . Выбирая горизонтальную ось, мы избавляемся от силы тяжести (ее проекция равна нулю), но остается сила  $\vec{N}$ . Если же выбрать ось, направленную вдоль плоскости, то остается, наоборот, сила тяжести. Что же предпочтительнее? Конечно же, надо избавляться от силы реакции. Сила тяжести нам не страшна — ее действие за время выстрела очень мало. Напротив, сила реакции — ударная сила, ее действие может привести к существенному изменению импульса. Но так как она перпендикулярна к наклонной плоскости, то импульс системы пушка — снаряд в проекции на направление движения пушки за время выстрела меняться не будет.

Итак, в кратковременных процессах (соударения, взрывы) только ударные внешние силы изменяют импульс тела или системы тел, действием же сил фиксированной величины можно пренебречь.

— Понятно? — спрашивает учитель. — Ну, тогда рассмотрим такой пример. Пусть мешок соскальзывает по наклонному желобу и падает на пол (рис. 4). Что с ним будет? Остановится ли он сразу или сначала немного проскользнет по инерции?

— Ну, здесь все ясно, — говорит ученик, — в горизонтальном направлении на него действует сила трения, время удара мало, и, так же, как в примере со стаканом, горизонтальный импульс мешка при ударе не изменится. Вертикальный же импульс обратится в ноль за счет ударной силы реакции. Вывод: после удара мешок сначала обязательно будет двигаться, и только потом он остановится.

Нет, такое рассуждение неверно, и это чувствует каждый, кто видел, как мешок падает на пол. Дело в том, что сила трения скольжения  $\vec{F}_{\text{тр}}$  равная  $\mu N$ , является ударной в той же мере, что и сама сила реакции  $\vec{N}$ . В примере со стаканом сила реакции имела фиксированное значение, равное  $m_c g$ , и поэтому действие силы трения было ничтожно малым. В случае падения мешка с наклонной плоскости силы  $\vec{N}$  и  $\vec{F}_{\text{тр}}$  — ударные, и изменением горизонтального импульса за время удара нельзя пренебречь. Остановится ли при этом мешок, зависит от величины коэффициента трения  $\mu$  — при достаточно большом его значении скорость мешка за время удара может полностью исчезнуть (попробуйте сами посчитать, какой коэффициент трения нужен для этого).

Аналогичные рассуждения позволяют понять, например, почему гимнаст при прыжке со снаряда может приземлиться на ноги и застыть на месте (высший спортивный класс!). Подумайте, как объяснить, что при упругом ударе о шероховатый пол тело может отскочить не под таким

углом, под каким падало, каков механизм «крученого» удара. Но главное — постарайтесь сами подметить и придумать новые примеры и задачи на ударные и неударные силы.

А. И. Черноуцан



## Полярные сияния

Так называют разноцветные, кажущиеся призрачными «огни», которые можно наблюдать на крайнем севере — в районах, прилегающих к Арктике, и на крайнем юге — в Антарктике.

Северные сияния (в литературе чаще встречается именно это название) известны очень давно. О них упоминали античные авторы, несколько описаний северного сияния сделали средневековые летописцы. Северное сияние, наблюдавшееся в Англии в 1716 году, было описано Галлеем. Ломоносов, проведенный детство и юность на севере и часто наблюдавший северные сияния (русские поморы называли их сполохами, позорями), одним из первых высказал предположение об электрической природе этого явления.

Что видит наблюдатель? Полярные сияния (и северные, и южные) отличаются большим разнообразием. Это могут быть однородные зелено-желтые полосы или дуги с резкой нижней границей и размытой верхней. Высота нижней границы обычно около 100 км, верхней — около 1000 км. Это могут быть дуги или полосы, составленные из своеобразных лучей, перпендикулярных земной поверхности. Можно увидеть и пульсирующие полосы или дуги. Сильное впечатление производят так называемые пылающие полярные сияния, имеющие вид движущихся вверх светящихся волн. Это напоминает картину угасающего огня, раздуваемого порывистым ветром.

Зеленый цвет с примесью желтого — это преобладающие цвета. Зна-

чительную роль играет также красный цвет, в меньшей степени — голубой и фиолетовый.

Где видны полярные сияния? Полярные сияния, в частности северные, можно наблюдать не только вблизи полюса. Их можно увидеть и на Черноморском побережье, и даже в Риме. Но по мере приближения к полюсам частота полярных сияний резко увеличивается.

Многолетние наблюдения позволили нанести на карту линии, соединяющие места с одинаковой частотой полярных сияний (такие линии называются изоказмами). По ним видно, например, что на побережье Черного моря сияния можно наблюдать один раз (одну ночь) за 10 лет, на севере Англии или на Кольском полуострове — 100 ночей в году, а на большей части побережья Северного Ледовитого океана — практически каждую ночь. Мы здесь выражаем частоту полярных сияний числом ночей в год. Это не значит, что полярные сияния наблюдаются только ночью. Они возникают и в дневное время, но на фоне светлого неба сравнительно слабое свечение полярных сияний наблюдать много труднее.

Как и почему возникают полярные сияния? Ломоносов не напрасно приписывал полярным сияниям электрическую природу. Но, как теперь выяснилось, в сложных процессах, приводящих к полярным сияниям, не менее важную роль играют и магнитные явления. И это не случайно.



Северное сияние (с гравюры на дереве, конец 19 в.).

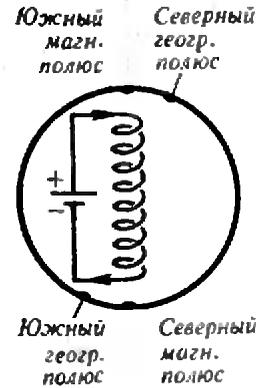


Рис. 1.

Земной шар — это гигантский природный магнит, и поэтому наша Земля окружена магнитным полем. Оно, это поле, похоже на магнитное поле, созданное намагниченным стержнем или соленоидом, по которому течет постоянный ток. На рисунке 1 показана картина линий индукции магнитного поля Земли. Изображенного на рисунке соленоида и питающего его источника тока внутри Земли, конечно, нет, но электрические токи, «виновники» магнитного поля Земли, в ней действительно существуют (в жидкой части ядра Земли). Из рисунка видно, что северный и южный магнитные полюса не совпадают с географическими полюсами, а отклонены от них примерно на  $11^\circ$ . Магнитное поле Земли простирается до расстояния примерно в три земных радиуса (от ее центра). Значение магнитной индукции поля невелико — всего около  $5 \cdot 10^{-5}$  Тл.

Вторым, не менее важным «действующим лицом» в рассматриваемом нами процессе является Солнце. Кроме видимого и невидимого света, Солнце (его корона) постоянно испускает еще и плазму, состоящую из быстрых протонов и электронов. Такой поток частиц — солнечный ветер — «дует» и на Землю.

Этих двух фактов достаточно для того, чтобы понять явление полярных сияний.

Солнечный ветер и магнитное поле Земли. Магнитное поле Земли неоднородное: у полюсов значение

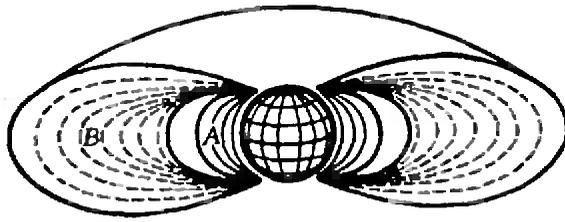


Рис. 2.

магнитной индукции почти вдвое больше, чем у экватора. Неоднородность поля делает его, как теперь хорошо известно, своеобразной ловушкой для попадающих в него заряженных частиц. Попав в такое поле, частица движется вдоль линий индукции (по спирали, охватывающей их), пока она не дойдет до места, где линии индукции сгущаются, т. е. до района магнитного полюса. Здесь частица как бы отражается, движется к другому полюсу, чтобы в свою очередь отразиться и от него. Частицы оказываются запертыми, как говорят, в магнитной «бутылке» с двумя «пробками», роль которых играют места сгущения линий индукции поля у полюсов. Земля оказывается окруженной так называемым радиационным поясом, охватывающим ее со всех сторон, кроме приполярных областей (это схематически показано на рисунке 2). Радиационный пояс условно разделяют на две части — внутренний пояс (А) и внешний (В). Нижняя граница внутреннего пояса находится на высоте около 500 км, а его «толщина» — несколько тыс. км. Внешний пояс находится на высоте 10—15 тыс. км.

Любопытно, что радиационный пояс Земли к полярным сияниям имеет самое прямое отношение. Дело в том, что особые свойства плазмы (радиационный пояс заполнен плазмой) и некоторые происходящие в ней процессы приводят к тому, что магнитные «пробки» оказываются не вполне плотными, и какое-то число частиц «вываливается» из «бутылки». А затем происходит следующее. Быстрые заряженные частицы, «высыпавшиеся» из «бутылки», сталкиваются с атомами или молекулами воздуха (азота, кислорода) и возбуждают их,

т. е. переводят их в состояние с большей энергией. Вслед затем молекулы (атомы) возвращаются в исходные состояния, избавляясь от избыточной энергии излучением соответствующих порций (квантов) света. Это и есть свет полярных сияний.

Анализ состава (спектра) этого света показал, что зеленый свет (и частично красный) возникает при возбуждении атомов кислорода. Красное, темнокрасное, слабое голубое и фиолетовое излучения связаны с возбуждением молекул азота. Может показаться странным, что мы говорим здесь об атомах, а не о молекулах, кислорода. Но оказывается, что в высоких слоях атмосферы молекулы кислорода под действием ультрафиолетовых лучей Солнца расщепляются на атомы.

Полярные сияния интенсивно изучаются и в лабораториях на Земле, и с помощью искусственных спутников Земли в космосе. Эти исследования дают важные сведения о магнитном поле Земли, о различных физических процессах в околоземном космическом пространстве.

А. К. Кикоин

## О законах Ньютона и «свободе воли»

Как вы, безусловно, знаете, значение законов Ньютона состоит в том, что они позволяют решать основную задачу механики. Что это означает? Всегда ли это верно?

Вспомним сначала, в чем заключается основная задача механики. Решить такую задачу — значит определить положение тела в любой момент времени, зная начальные условия (скорость и координаты тела в начальный момент времени) и действующие на тело силы.

В простых случаях, например, когда силы постоянны, основная задача механики разделяется на две под-

задачи: в одной решаются уравнения динамики и находится ускорение тела; в другой, кинематической подзадаче, по ускорению и начальным условиям рассчитывается движение тела в любой момент времени.\*) В более сложных случаях, например, когда ускорение тела меняется со временем, эти две подзадачи перемешиваются, а расчет поручают компьютеру (хотя многие задачи не по зубам и суперсовременным ЭВМ). Но не в этом дело. Важно, что основная задача механики *в принципе* разрешима, если ускорения взаимодействующих тел в какой-то момент времени однозначно зависят от их координат и скоростей в тот же момент времени (т. е. не зависят от «истории» системы — от того, что происходило с телами до этого).

Таким образом, мы видим, что законы Ньютона представляют собой мощный и достаточно универсальный инструмент исследования. После открытия законов Ньютона область их применения непрерывно расширялась. Триумфальное шествие классической механики продолжалось очень долго, почти 150 лет. К началу XIX века физики почти поверили в ее непогрешимость. И не только в непогрешимость, но и во всемогущество. Возникло убеждение, что механика способна полностью объяснить устройство мира, что все в мире может быть в конечном счете сведено к движению взаимодействующих частиц; такие воззрения называли механистическими.

Надежда на чисто научное объяснение мира весьма воодушевляла мыслителей-материалистов, особенно французских просветителей. Однако многим из них не давала покоя философская проблема, которая возникла вместе с механицизмом, но обсуждается и по сей день. Суть ее вот в чем. Если мир — механическая система, то для него можно решить основную задачу механики. Иными словами, зная про мир все в какой-то момент

времени, можно в принципе рассчитать дальнейший ход событий, а также восстановить все события прошлого. Неважно, что не в силах человеческого произвести такой расчет — пусть для этого существует воображаемый «сверхум», говорил французский мыслитель Лаплас; важно, что все в мире полностью предопределено и не может быть изменено никаким образом. Нам только кажется, что у нас есть свобода воли и свобода выбора. На самом деле все наши мысли и поступки полностью предопределены, и «сверхум» знает, что будет с нами, нашими детьми, да и со всем миром в любой момент времени. Это философское учение о взаимосвязи и взаимообусловленности явлений материального и духовного мира называется лапласовским детерминизмом.

Конечно, ум человеческий не мог смириться с отсутствием свободы и искал выход из тупика. В первую очередь «под подозрение» попали действующие силы, например силы всемирного тяготения или кулоновские силы. В самом деле, в таких силах есть что-то сверхъестественное — мы чуть-чуть сдвигаем одну частицу, а другая, за сто километров, уже знает об этом и ускоряется чуть-чуть по-другому! Однако никакого отступления от этого правила обнаружить не удавалось, и физики, скрепя сердце, принимали эти силы такими, как они есть. Так продолжалось до открытий Максвелла и Эйнштейна.

В 60-е годы XIX века Максвелл построил теорию электромагнитного поля — новой материальной субстанции, через посредство которой осуществляются электрические и магнитные взаимодействия. В работах Максвелла поле отделилось от вещества и обрело независимость в виде электромагнитных волн (в форме радиоволн, света, рентгеновского излучения и т. д.). Скорость этих волн в вакууме очень большая — 300 000 км/с. Именно с такой скоростью (а не мгновенно!) передается информация о смещении одного из взаимодействующих зарядов другому. Чувствуете, что означает такое «запаздывание»? Сила,

\*) Подробнее об этом можно прочитать в заметках «Как решается основная задача механики» («Квант», 1984, № 2, с. 24) и «Основная задача кинематики» («Квант», 1988, № 9, с. 58).

действующая на заряд в некоторый момент времени, определяется теперь не тем, где находятся и как движутся другие заряды *в тот же момент времени*, а тем, что с ними происходило *в предшествующие моменты*. В такой ситуации мы уже не сможем, как раньше, решить «основную задачу механики».

В 1905 году Эйнштейн показал, что такими же свойствами должны обладать любые взаимодействия, так как никакой сигнал не может распространяться со скоростью, большей скорости света. (Стоит отметить, что законы Ньютона совсем не потеряли своего значения. Они прекрасно работают, когда скорости частиц малы по сравнению со скоростью света — в этом случае эффекты запаздывания несущественны.)

Итак, вопреки взглядам механицистов, мир оказался заполненным не только движущимися частицами, но и вполне материальными полями. Картина мира сильно усложнилась, его развитие уже не описывается решением основной задачи механики,

но... свободу воли это еще не спасает. Все равно все можно предсказать — только теперь надо заложить в «сверхум» начальную информацию не только о частицах, но и о полях (и заставить «сверхум» решать гораздо более сложные уравнения, которым эти поля подчиняются). Как же быть?

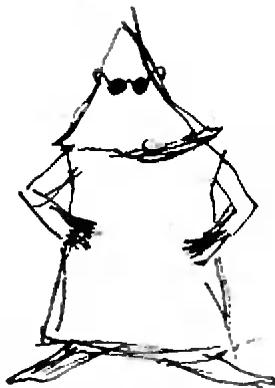
Помощь подоспела с другой стороны — от физиков, изучавших устройство атомов. Оказалось, что в жизни атомов действуют законы, кардинально отличающиеся от законов классической физики. Для описания свойств микромира была создана специальная наука — квантовая механика. Отметим только одну важную черту квантовых процессов — в них отсутствует предопределенность! Во многих случаях принципиально нельзя предсказать, какие варианты событий должны реализоваться, можно только рассчитать их вероятность. Впрочем, даже квантовая механика не приводит к окончательному решению вопроса о свободе воли.

А. И. Черноуцан

## „Квант“ улыбается

### Советы экзаменатору

(Начало см. на с. 49)



8. Наденьте темные очки. Непроницаемость нервирует.

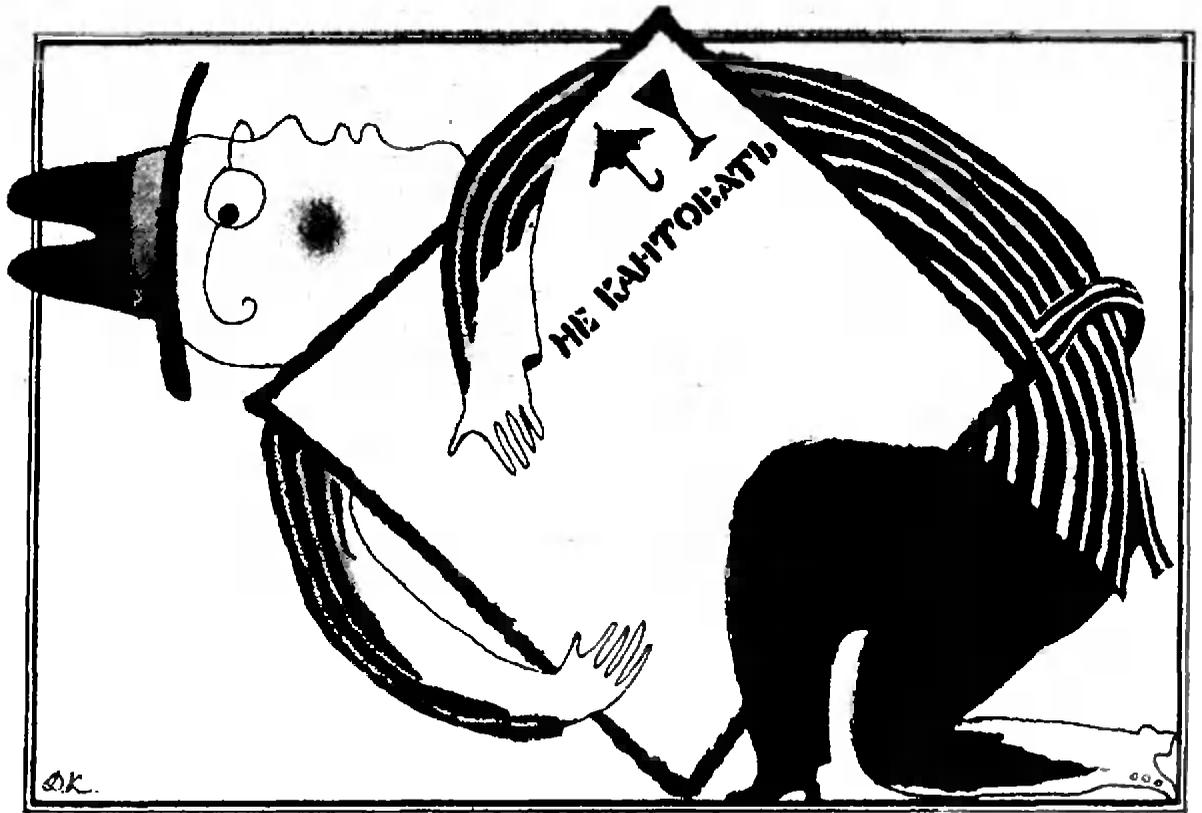
9. Не позволяйте задавать экзаменуемому выясняющие вопросы и никогда не повторяйте собственные разъяснения и утверждения.



10. Заканчивая экзамен, скажите экзаменуемому: «Ждите за дверью. Мы вас вызовем».



Из книги «Физики продолжают шутить» (М.: Мир, 1968)



## Математический кружок

# Перекатывание многогранников

В. Э. МАТИЗЕН

Несмотря на строгое предупреждение (см. заставку), вам, наверное, приходится кантовать ящики, т. е. перекатывать их через ребра. Это немудреное занятие бесполезно для математика, поскольку приводит к следующей интересной задаче. Поставим выпуклый многогранник на его грань (не обращая внимания на то, будет ли его состояние устойчивым). Покатим многогранник через некоторые его ребра так, чтобы в конце концов он вернулся на исходную грань. В результате многогранник повернется на некоторый угол. Чему равна величина этого угла?

Начнем с самого простого случая, когда многогранник перекатывается по часовой стрелке через все ребра, выходящие из какой-нибудь его вершины  $O$ . На рисунке 1 изображен след многогранника на плоскости. Из рисунка видно, что многогранник повернется в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки) на угол, равный разности  $2\pi$  и суммы плоских углов при вершине. Эта разность имеет специальное название — *кривизна вершины* (почему она так называется,

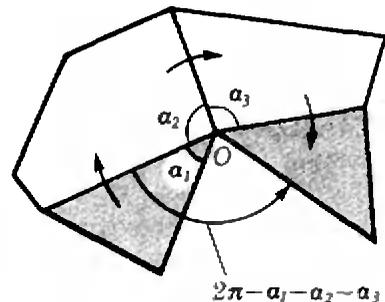


Рис. 1.

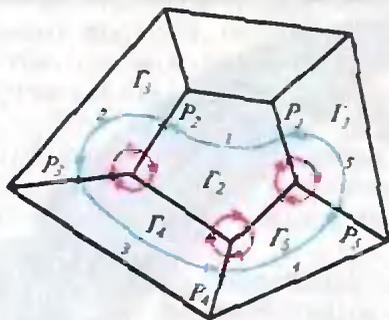


Рис. 2.

вы можете узнать из статьи С. Л. Табачникова «О кривизне», опубликованной в этом номере журнала). Итак, в простейшем случае угол поворота равен кривизне вершины. Наверное, и в общем случае величина поворота связана с кривизнами вершин многогранника?

Перейдем к общему случаю. Пусть многогранник, изображенный на рисунке 2, перекачивается через ребра  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  (мы смотрим на многогранник снаружи). Соединив середины этих ребер, мы получим замкнутый контур — синие стрелки на рисунке 2.

Упражнение 1. Докажите, что угол, на который повернется многогранник, зависит только от контура, но не от того, какую стрелку контура считать первой.

Будем считать, что стрелки контура показывают углы между ребрами, середины которых они соединяют. Эти углы считаются положительными, если стрелка показывает поворот вокруг точки пересечения ребер (или их продолжений) в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки, и отрицательными — если в отрицательном. Угол между ребрами  $P_i$  и  $P_j$  обозначим через  $\widehat{P_i P_j}$ . Тогда углы  $\widehat{P_2 P_3}, \widehat{P_3 P_4}, \widehat{P_4 P_5}$  и  $\widehat{P_5 P_1}$  на рисунке 2 положительные, а угол  $\widehat{P_1 P_2}$  — отрицательный.

Сформулируем предварительное утверждение:

*угол поворота многогранника при его перекачивании через ребра  $P_1, P_2, \dots, P_k$  равен  $-(\widehat{P_1 P_2} + \widehat{P_2 P_3} + \dots + \widehat{P_{k-1} P_k} + \widehat{P_k P_1})$ .* (1)

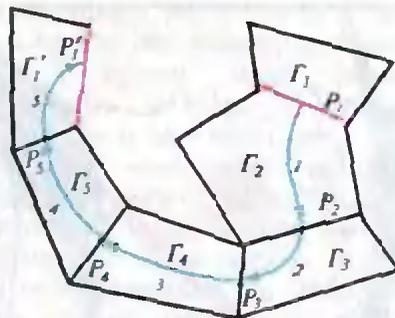


Рис. 3.

Для доказательства нарисуем на плоскости след многогранника при перекачивании — рисунок 3. Обратите внимание, что при отпечатывании на плоскости синие стрелки поменяли направление. Посмотрим на этот рисунок. Угол поворота многогранника равен углу между прямыми  $P_1$  и  $P'_1$ . Переход от  $P_1$  к  $P'_1$  — это результат цепочки преобразований

$$P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow P_4 \rightarrow P_5 \rightarrow P'_1.$$

Каждое преобразование в цепочке — поворот вокруг точки пересечения соседних ребер  $P_i$  и  $P_{i+1}$  на угол, равный  $-\widehat{P_i P_{i+1}}$  (знак минус — из-за того, что при отпечатывании направление поворота меняется на противоположное). Итак, переход от  $P_1$  к  $P'_1$  — композиция поворотов на углы  $-\widehat{P_i P_{i+1}}$ .

Воспользуемся тем, что композиция поворотов на углы  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  — поворот на суммарный угол  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$ , если  $\alpha_1 + \dots + \alpha_k \neq 2\pi l$ , либо параллельный перенос, если  $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 2\pi l$ . Если вы не знакомы с этим свойством поворотов, попробуйте его доказать или прочитайте доказательство в статье Э. Г. Готмана «Геометрические преобразования» («Квант», 1989, № 2). Согласно этому свойству, угол между прямыми  $P_1$  и  $P'_1$  равен  $-(\widehat{P_1 P_2} + \widehat{P_2 P_3} + \dots + \widehat{P_k P_1})$ , что и доказывает утверждение (1).

Попробуем теперь связать сумму углов  $\widehat{P_i P_{i+1}}$  с кривизнами вершин многогранника. Разрежем поверхность многогранника на рисунке 2 по синему контуру, а внутреннюю область контура в свою очередь разрежем по ребрам, лежащим внутри

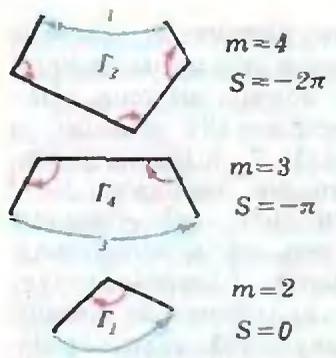


Рис. 4.

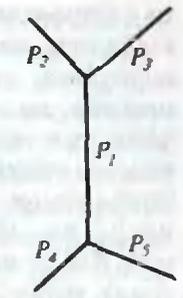


Рис. 5.

контура. Некоторые из получившихся кусков показаны на рисунке 4. Каждую вершину многогранника внутри контура на рисунке 2 обведем в отрицательном направлении красными стрелками; эти стрелки изображены и на рисунке 4.

Рассмотрим один из кусков. Чему равна суммарная величина синих и красных углов? Обозначим через  $m$  число ребер, т. е. число прямолинейных отрезков на границе этого куска. Тогда **сумма синих и красных углов равна  $\pi(2-m)$ .**

**Упражнение 2.** Докажите это утверждение. Подсказка: сумма углов  $m$ -угольника равна  $\pi(m-2)$ .

Следовательно, синий угол каждого из кусков равен  $\pi(2-m)-\alpha$ , где  $\alpha$  — сумма красных углов этого куска. Суммируя по всем кускам, получим, что сумма всех синих углов равна  $\pi(2-m_1)+\pi(2-m_2)+\dots-(\alpha_1+\alpha_2+\dots)$ . (2)

Здесь  $m_1, m_2, \dots$  — числа ребер соответствующих кусков, а  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  — суммы красных углов этих кусков. Заметим, что в сумму  $\alpha_1+\alpha_2+\dots$  по одному разу входят все красные углы при вершинах многогранника внутри контура поворота.

Сумма красных углов при одной вершине равна ее кривизне минус  $2\pi$  (вы не забыли, что красные углы отсчитываются в отрицательном направлении?). Поэтому сумма  $\alpha_1+\alpha_2+\dots$  равна сумме кривизн вершин внутри контура без некоторого числа, кратного  $2\pi$ . Это число не сказывается на величине поворота, поэтому мы его отбрасываем. Итак,  $\alpha_1+\alpha_2+\dots$  — это

сумма кривизн вершин многогранника, лежащих внутри синего контура на рисунке 2.

Займемся теперь слагаемыми  $\pi(2-m_1)+\pi(2-m_2)+\dots$  в выражении (2). Каждое ребро считается в этой сумме дважды, поскольку после разрезания поверхности многогранника каждое ребро дважды встречается как граница кусков на рисунке 4. Поэтому вся эта сумма является числом, кратным числу  $2\pi$ , и не влияет на величину интересующего нас поворота. Следовательно, формула (2) означает, что

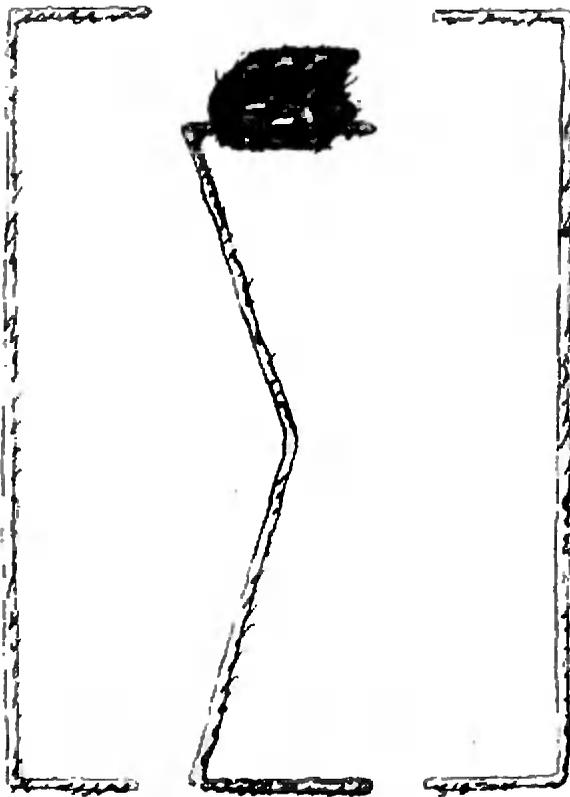
*сумма синих углов противоположна сумме кривизн вершин многогранника внутри контура поворота.*

Остается вспомнить утверждение (1) о том, что интересующий нас угол поворота многогранника противоположен сумме синих углов. Мы приходим к окончательному выводу:

*угол поворота многогранника при его перекатывании вдоль замкнутого контура равен сумме кривизн его вершин, лежащих внутри этого контура.*

**Упражнение 3.** Рассмотрим две соседние вершины многогранника, изображенные на рисунке 5. Докажите, что перекатывание через ребра  $P_1, P_2, P_3$ , затем через ребра  $P_1, P_4, P_5$ , затем через ребра  $P_3, P_2, P_1$  и, наконец, через ребра  $P_5, P_4, P_1$  приводит к параллельному переносу многогранника.

Интересно исследовать множество следов вершин, ребер и граней многогранника при всевозможных его перекатываниях из некоторого начального положения. Это множество обладает богатой симметрией и может иметь различное строение — для одних многогранников оно дискретно, а для других непрерывно. Можно перечислить все многогранники, которые подобно кубу или правильному тетраэдру «печатают» на плоскости правильный узор. Но это уже тема для отдельного разговора...



## Информатика и программирование

# Определение суммы цифр числа на ЭВМ

Е. Х. АЛАРКОН,  
А. Н. ВИЛЕНКИН

На подготовительном отделении одного вуза будущим абитуриентам предложили следующую задачу.

*Сумма цифр страниц книги равна 3684. Найдите количество страниц в этой книге.*

Как решать эту задачу? И как научить компьютер или микрокалькулятор решать эту задачу? Первое, что приходит в голову: начать со страницы 1 и добавлять к сумме  $S$  (первоначально равной 0) цифры, которыми записан номер очередной страницы, пока не дойдем до 3684. Для этого

надо прежде всего научить компьютер выделять из номера страницы цифры, которыми этот номер записан. Например, из номера  $n=128$  надо получить три числа: 1, 2, 8 (мы ограничимся трехзначными числами). Воспользуемся функцией  $[x]$  — «целая часть  $x$ ». Она есть на компьютерах и МК-61, на других (программируемых) микрокалькуляторах ее можно реализовать следующей подпрограммой.

№ строки	команда	код
80	1	01
81	+	10
82	X → П 3	43
83	К П → X 3	Г3
84	П → X 3	63
85	В/О	52

Действие этой подпрограммы основано на том, что команда косвенной индикации вызова из регистра RG3 не только уменьшает содержимое RG3 на 1, но и уменьшает его еще до целого числа, если только содержимое RG3 больше 1 и изображается с естественным расположением запятой. Разумеется, регистр RG3 не должен использоваться в основной программе. При обращении к подпрограмме исходное число должно быть в регистре X, там же получится результат. (Иногда еще надо вставлять команду 79 В† 52.)

Для получения числа сотен трехзначного числа  $n$  надо взять  $[n/100]$ . Это и будет как раз целое число сотен, содержащихся в числе  $n$ . Обозначим его через R2:

$$R2 = [n/100].$$

Дальше уберем из числа  $n$  сотни, не трогая десятки и единицы, а для этого из числа  $n$  вычтем  $[n/100] \cdot 100$ , пусть это будет число  $m$ . Оно — двузначное и содержит десятки и единицы числа  $n$ . (Так, если  $n=128$ , то  $m=28$ .) Что делать с ним, уже понятно:

$$R1 = [m/10]$$

будет число десятков, а

$$R0 = m - [m/10] \cdot 10$$

— число единиц. Теперь пишем подпрограмму вычисления суммы цифр числа  $n$ , т. е. суммы  $R0 + R1 + R2$ , и основную программу вычисления суммы (цикл по  $k$  от 1 до  $n$ ) цифр номеров страниц от 1 до  $n$ . Запустим ее для вычисления суммы цифр номе-

ров страниц «Кванта» ( $n=80$ ) и посмотрим, что получится.

Если программа поставлена на компьютер, то ответ получится быстро. Но понятно, что время работы ЭВМ зависит от  $n$  — чем больше  $n$ , тем дольше будет работать компьютер. Все же можно попробовать вставить в программу печать результатов и останов при получении числа 3684 (или большего), запустить эту программу для достаточно большого  $n$  и получить ответ исходной задачи.

Если программа поставлена на микрокалькулятор, то время работы будет 10—13 минут, потому что цикл обработки номера одной страницы занимает 7—10 секунд, а страниц 80.

Но за 10 минут мы и так можем найти искомую сумму, причем не складывая все цифры всех номеров страниц. Будем сначала искать сумму единиц. Здесь нам надо сложить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 и опять 1, 2, ..., таких сумм будет восемь (от 01 до 80).  $1+2+\dots+9=45$ ,  $45 \times 8=360$ . С десятками еще легче: единица встретится 10 раз (от 10 до 19), как и двойка, и тройка... — до семерки включительно. Только 8 десятков появятся лишь один раз. Получаем сумму числа десятков в виде  $(1+2+\dots+7) \cdot 10+8=288$ . Итого:  $288+360=648$  — искомая сумма. Ее вскоре и даст микрокалькулятор.

Теперь становится ясно, что методом простого сложения цифр микрокалькулятор доберется до числа 3684 примерно за час. Это слишком долго. А нельзя ли поставить на микрокалькулятор вычисление суммы цифр страниц от 1 до  $n$  тем способом, которым мы искали сумму цифр страниц «Кванта»? Число вычислений по этому способу почти не зависит от  $n$ , так что время работы будет невелико.

Попробуем. Пусть число страниц равно  $n$  и записывается цифрами  $i, j, k$ . Это обозначается так:  $n=ijk$ . Пусть сначала  $i=0, j=0$  (число  $n$  — однозначное). Тогда искомая сумма равна  $k(k+1)/2$  — это сумма арифметической прогрессии 1, 2, ...,  $k$ . Обозначим эту сумму  $f_1(k)$ :  $f_1(k)=k(k+1)/2$ . В частности,  $f_1(9)=45$ .

Пусть теперь  $n=j\bar{k}$  и  $j \neq 0$  (число  $n$  — двузначное). Искомую сумму разобьем на две: от 01 до  $(j-1)9$  и от  $j0$  до  $j\bar{k}$ . Первую сумму считаем так, как мы считали сумму цифр номеров страниц «Кванта»: единицы —  $45j$ , десятки —  $10(j-1)j/2$ . Во второй сумме  $k+1$  число, сумма числа десятков равна  $j(k+1)$ , единиц —  $f_1(k)$ , искомая сумма  $f_2(j\bar{k})$  имеет вид

$$f_2(j\bar{k})=45j+5j(j-1)+j(k+1)+f_1(k)=j(5j+41+k)+f_1(k).$$

В частности,  $f_2(99)=900$  (это пригодится в дальнейшем), формула «работает» и для однозначных чисел ( $j=0$ ).

Пусть теперь  $n=i\bar{j}\bar{k}$  и  $i \neq 0$ . Опять разобьем сумму на две части: от 001 до  $(i-1)99$  и от  $i00$  до  $i\bar{j}\bar{k}$ . Считаем первую сумму. Десятки и единицы (вместе) дают  $i \cdot f_2(99)=900i$  (ясно почему?). Сотни дают  $100(i-1)i/2$  (каждая цифра сотен употребляется 100 раз). Считаем вторую сумму. Сотни дают  $i(10j+k+1)$ , а десятки и единицы дают  $f_2(j\bar{k})$ . Искомая сумма  $f_3(i\bar{j}\bar{k})$  имеет вид

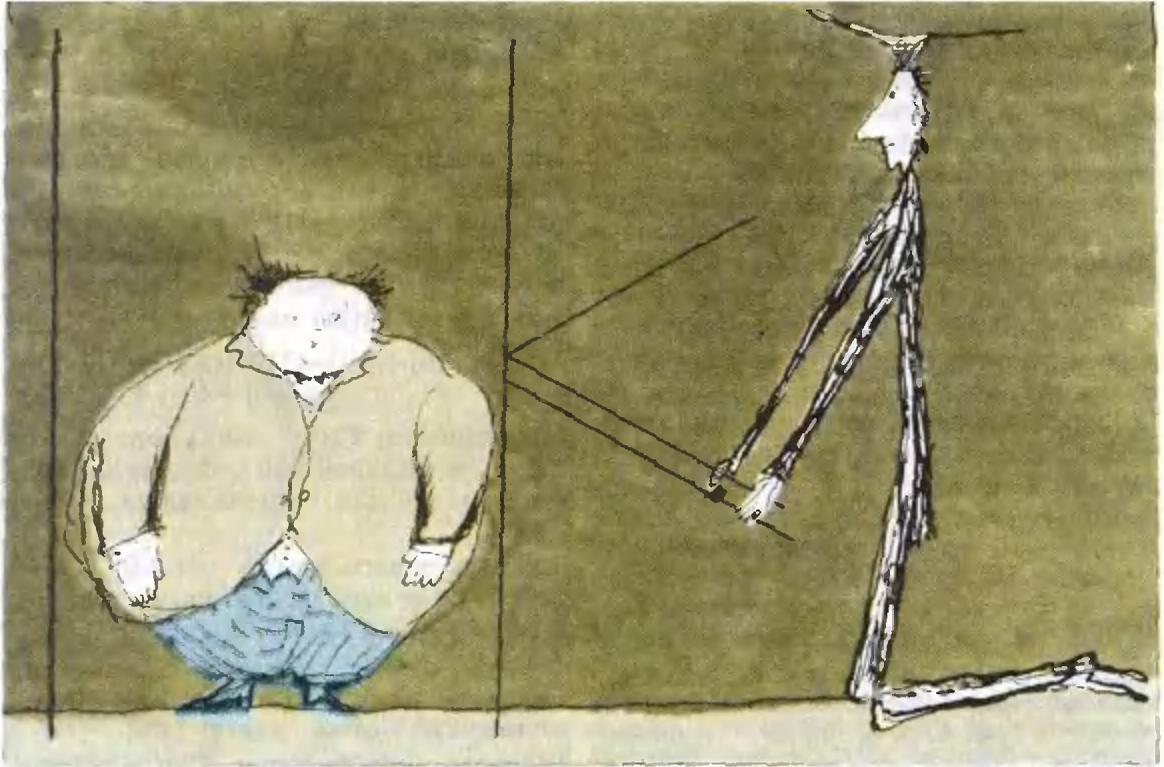
$$f_3(i\bar{j}\bar{k})=900i+50i(i-1)+i(10j+k+1)+f_2(j\bar{k})=i(50i+10j+k+851)+f_2(j\bar{k}).$$

Эта формула «работает» и для двузначных чисел ( $i=0$ ), и для однозначных ( $i=j=0$ ).

Итак, формулы получены. Их легко поставить даже на программируемый микрокалькулятор, и после ввода в него числа  $n$  он за 15 секунд будет вычислять искомую сумму, например:  $f_3(96)=849$ ,  $f_3(200)=1902$  и т. п.

Выиграв в скорости, мы кое-что потеряли. Теперь мы уже не можем запустить программу и ждать, когда она дойдет до числа 3684. Что делать — придется воспользоваться методом проб и ошибок (иногда называемом «методом тыка»). «Ткнем» в число 200 — мало. Попробуем  $f_3(400)=4204$  — много. Пробуем  $f_3(300)=3003$  — мало. И так далее, пока не дойдем до искомого.

(Окончание см. на с. 70)



*Уравнения абитуриента*

## Тригонометрия помогает алгебре

П. И. ГОРШТЕЙН

Часто при решении алгебраических задач бывает удобно заменить переменную (или переменные, если их несколько) тригонометрической функцией и свести тем самым алгебраическую задачу к тригонометрической. Такие замены — тригонометрические подстановки — порой существенно упрощают решение. Выбор той или иной функции при этом зависит от вида уравнения, системы уравнений или алгебраического выражения, которое требуется упростить. Например, если из условия следует, что допустимые значения переменной  $x$  определяются неравенством  $|x| \leq 1$ , то удобны замены  $x = \sin a$ ,  $a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ,

или  $x = \cos a$ ,  $a \in [0; \pi]$ , причем какую из них выбрать, зависит от конкретной задачи.

В случаях, когда переменная может принимать любые значения, используются замены  $x = \operatorname{tg} a$ ,  $a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  и  $x = \operatorname{ctg} a$ ,  $a \in (0; \pi)$ .

Разберем несколько примеров.

**Задача 1 (ЛПИ, 1976).** *Решите уравнение*

$$\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x.$$

**Решение.** В данном случае  $|x| \leq 1$ . Положив  $x = \cos a$ ,  $a \in [0; \pi]$ , приходим к уравнению  $\sqrt{1-\cos^2 a} = 4\cos^3 a - 3\cos a$ , или  $|\sin a| = \cos 3a$ , но в нашем случае  $\sin a \geq 0$ , так что  $\sin a = \cos 3a$ , или

$$\cos 3a - \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = 0.$$

Решая последнее уравнение, получим

$$a = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

или

$$\alpha = \frac{3}{4}\pi + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Условию  $0 \leq \alpha \leq \pi$  удовлетворяют три значения

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{8}, \quad \alpha_2 = \frac{5\pi}{8} \quad \text{и} \quad \alpha_3 = \frac{3\pi}{4},$$

поэтому

$$\begin{aligned} x_1 = \cos \frac{\pi}{8} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 = \cos \frac{5\pi}{8} &= -\sqrt{\frac{1 + \cos \frac{5\pi}{4}}{2}} = \\ &= -\sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = -\frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}; \end{aligned}$$

$$x_3 = \cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \right\}.$$

Рассмотрим несколько более сложную задачу.

**Задача 2** (ЛПИ, 1976). *Решите уравнение*

$$\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}.$$

**Решение.** И в этом уравнении  $|x| \leq 1$ . Пусть, как и в предыдущем примере,  $x = \cos \alpha$ , где  $\alpha \in [0; \pi]$ . Выполнив подстановку и учитывая, что  $\sin \frac{\alpha}{2} \geq 0$ ,  $\sin \alpha \geq 0$ , получим уравнение

$$\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \cos 2\alpha + \sin 2\alpha,$$

которое преобразуется к виду

$$\sin\left(\frac{3\alpha}{4} + \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{5\alpha}{4} + \frac{\pi}{8}\right) = 0,$$

откуда либо  $\alpha = -\frac{\pi}{8} + \frac{4\pi k}{8}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,

либо  $\alpha = \frac{3\pi}{10} + \frac{4\pi n}{5}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Из полученных значений  $\alpha$  в промежутке  $(0; \pi)$  лежит лишь одно —  $\alpha = \frac{3\pi}{10}$ . Итак,  $x = \cos \frac{3\pi}{10}$ .

Ответ можно оставить в тригонометрической форме, но можно выразить и в радикалах, используя формулу  $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ , которая выводится из очевидного равенства:  $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$ .

$$\text{Ответ: } \left\{ \cos \frac{3\pi}{10} = \frac{1}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \right\}.$$

Еще более сложная ситуация возникает в следующей задаче.

**Задача 3** (МГУ, биологический факультет, 1985). *Сколько корней на отрезке  $[0; 1]$  имеет уравнение*

$$8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=1?$$

**Решение.** Это уравнение седьмой степени, так что попытки решить его алгебраическими методами заведомо безнадежны. Однако наличие множителя  $1-2x^2$  наводит на мысль сделать тригонометрическую подстановку  $x = \cos \varphi$ ,  $\varphi \in (0; \pi/2)$  (очевидно, что  $x \neq 0$ ,  $x \neq 1$ ).

Заменяя в левой части данного уравнения  $x$  на  $\cos \varphi$ , получим

$$8 \cos \varphi (1 - 2 \cos^2 \varphi) \times$$

$$\times (8 \cos^4 \varphi - 8 \cos^2 \varphi + 1) =$$

$$= 8 \cos \varphi (-\cos 2\varphi) \times$$

$$\times (8 \cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi - 1) + 1) =$$

$$= -8 \cos \varphi \cos 2\varphi (-2 \sin^2 2\varphi + 1),$$

откуда

$$-8 \cos \varphi \cos 2\varphi \cos 4\varphi = 1. \quad (*)$$

Умножим теперь обе части (\*) на  $\sin \varphi$  ( $\varphi \neq 0!$ ):

$$-8 \sin \varphi \cos \varphi \cos 2\varphi \cos 4\varphi = \sin \varphi,$$

или

$$-\sin 8\varphi = \sin \varphi,$$

$$\sin 8\varphi + \sin \varphi = 0,$$

$$2 \sin \frac{9}{2}\varphi \cdot \cos \frac{7}{2}\varphi = 0,$$

откуда либо  $\varphi = \frac{2}{9}\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , либо

$\varphi = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi n}{7}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Из первой серии

промежутку  $(0; \frac{\pi}{2})$  принадлежат два

значения:  $\varphi_1 = \frac{2\pi}{9}$ ,  $\varphi_2 = \frac{4\pi}{9}$ , во второй серии таких значений тоже два:  $\varphi_3 = \frac{\pi}{7}$ ,  $\varphi_4 = \frac{3\pi}{7}$ .

Ответ: исходное уравнение имеет на промежутке  $[0; 1]$  ровно четыре корня.

Приведем еще один пример с довольно неожиданной заменой переменной вида  $x = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

Задача 4 (Олимпиада ГДР, 1980 г.). Определите все тройки действительных чисел  $(x, y, z)$ , которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 2x + x^2y = y, \\ 2y + y^2z = z, \\ 2z + z^2x = x. \end{cases}$$

Решение. Легко убедиться, что система

$$\begin{cases} y = \frac{2x}{1-x^2}, \\ z = \frac{2y}{1-y^2}, \\ x = \frac{2z}{1-z^2} \end{cases} \quad (*)$$

равносильна исходной.

Нам известна формула  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ . Это наводит на мысль выполнить тригонометрическую подстановку  $x = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\alpha \neq -\frac{\pi}{4}$ ,  $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$ .

Из системы (\*) получаем  $x = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $y = \operatorname{tg} 2\alpha$ ,  $z = \operatorname{tg} 4\alpha$ ,  $x = \operatorname{tg} 8\alpha$ .

Итак,  $\operatorname{tg} 8\alpha = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{tg} 8\alpha - \operatorname{tg} \alpha = 0$ ,

$$\frac{\sin 7\alpha}{\cos 8\alpha \cos \alpha} = 0, \sin 7\alpha = 0, \alpha = \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}.$$

## Определение суммы цифр числа на ЭВМ

(Начало см. на с. 66)

Темы вычислительных экспериментов

Поставить на компьютер описанные выше алгоритмы вычисления суммы цифр числа  $n$ , суммы цифр всех чисел от 1 до  $n$  методом прямого сложения и методом вычисления по формулам  $f_k(n)$ . Испытать их для цифр страниц школьных учебников. Определить в каж-

Окончательно  $x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi n}{7}\right)$ ,  $y = \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi n}{7}\right)$ ,  $z = \operatorname{tg}\left(\frac{4\pi n}{7}\right)$ .

Проверка показывает, что при  $n \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$  полученные 7 наборов чисел различны и действительно удовлетворяют исходной системе.

Разумеется, все ранее рассмотренные примеры весьма искусственны и как бы специально подобраны для абитуриентов и участников олимпиад.

В заключение рекомендуем вам самостоятельно решить следующие упражнения.

Упражнения

1. (ЛПИ, 1976). Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{1-|x|}{2}} = 2x^2 - 1.$$

2. Решите уравнение

$$\left(\frac{1+a^3}{2a}\right)^x - \left(\frac{1-a^3}{2a}\right)^x = 1.$$

3. (МГУ, экономический факультет, 1981). Найдите все решения уравнения

$$|2x - \sqrt{1-4x^2}| = \sqrt{2}(8x^2 - 1).$$

4. (Ленинградская олимпиада, 1985). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4xy(2x^2 - 1) = 1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

5. (МГУ, биологический факультет, 1985). Сколько корней на отрезке  $[0; 1]$  имеет уравнение

$$8x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1?$$

6. (МГУ, экономический факультет, 1985). Среди всех решений  $(x, y, z, v)$  системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z^2 + v^2 = 9, \\ xv + yz \geq 6 \end{cases}$$

найдите такие, при которых выражение  $x+z$  принимает наибольшее значение.

дом случае время работы машины и результаты сравнить.

Добавление. Рукопись статьи была «испытана» на одном семикласснике, который сходу придумал алгоритм нахождения цифр числа  $n$  «с конца». Берутся целая и дробная части числа  $n/10$ ; дробная часть, умноженная на 10, — последняя цифра числа  $n$ ; целая часть подставляется вместо  $n$ ; если получается  $n < 1$ , то процесс заканчивается. С использованием этого алгоритма «Ямаха» добиралась до суммы 3684 около 30 секунд.

## Варианты тематических экзаменов

### Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского

#### Математика

##### Письменный экзамен

##### Вариант 1

##### 1. Решите неравенство

$$3|x-1| > x+1.$$

##### 2. Решите уравнение

$$x^{3 \lg x} = 10x^2.$$

##### 3. Решите уравнение

$$\sin 4x + \sin 12x + \cos 4x = 0.$$

4. Два автобуса одновременно выехали из  $A$  в  $B$ . Первый автобус имел скорость на 4 км/ч больше, чем второй, и прибыл в  $B$  на 10 мин раньше. Найдите скорости автобусов, если расстояние между  $A$  и  $B$  равно 48 км.

5. Медианы прямоугольного треугольника, проведенные к катетам, относятся как  $\sqrt{2}:1$ . Найдите углы треугольника.

##### Вариант 2

##### 1. Решите уравнение

$$\sqrt{x+2} = x-4.$$

##### 2. Решите неравенство

$$\frac{1}{5^x-1} > \frac{1}{1-5^{x-1}}.$$

##### 3. Решите уравнение

$$\sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{1}{2}.$$

4. Первый член геометрической прогрессии равен 2, а сумма первых восьми членов в 5 раз больше суммы первых четырех членов. Найдите девятый член прогрессии.

5. Медианы  $AN$  и  $BM$  треугольника  $ABC$  равны 6 и 9 соответственно и пересекаются в точке  $K$ , причем угол  $AKB$  равен  $30^\circ$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

#### Физика

##### Задачи устного экзамена

1. Из шланга, лежащего на земле, бьет под углом  $\alpha=30^\circ$  к горизонту струя воды с начальной скоростью  $v=10$  м/с. Площадь сечения отверстия шланга  $S=5$  см<sup>2</sup>. Определите массу воды, находящейся в воздухе. Плотность воды  $\rho=1000$  кг/м<sup>3</sup>.

2. Какую силу тяги должен развивать двигатель на спутнике Земли массой  $m$  для того, чтобы он двигался по орбите радиусом  $R$  со

скоростью, превышающей в 2 раза скорость свободного движения по этой орбите? Масса Земли  $M$ , гравитационная постоянная  $G$ .

3. Два тела бросают с высоты  $h=20$  м со скоростью  $v_0=15$  м/с каждое. С какими скоростями тела упадут на землю, если первое брошено вертикально вверх, а второе — горизонтально? Сопротивление воздуха не учитывать.

4. Баллон объемом  $V_1=2$  л, содержащий 1 моль газа при температуре  $t_1=27^\circ\text{C}$ , соединили с другим баллоном объемом  $V_2=4$  л, содержащим 2 моля этого же газа при температуре  $t_2=87^\circ\text{C}$ . Определите давление и температуру газа после установления равновесия. Теплообменом с окружающей средой пренебречь. Универсальная газовая постоянная  $R=8,31$  Дж/(моль·К).

5. Смачиваемый водой кубик массой  $m=200$  г плавает на поверхности воды. Ребро кубика имеет длину  $a=10$  см. На каком расстоянии от поверхности воды находится нижняя грань кубика? Плотность воды  $\rho=1000$  кг/м<sup>3</sup>, коэффициент поверхностного натяжения воды  $\sigma=0,073$  Н/м.

6. Плоский воздушный конденсатор емкостью  $C$  подсоединен к источнику тока с напряжением  $U$ . Какую работу необходимо совершить, чтобы вдвое увеличить расстояние между обкладками конденсатора? Какую работу совершает при этом источник?

7. Электрон движется по окружности радиусом  $R=10$  см в однородном магнитном поле с индукцией  $B=1$  Тл. Параллельно магнитному полю возбуждается однородное электрическое поле с напряженностью  $E=100$  В/м. За какой промежуток времени кинетическая энергия электрона возрастет вдвое?

8. Первичная обмотка трансформатора включена в сеть переменного тока с напряжением  $U_1=220$  В. Сила тока в первичной обмотке  $I_1=0,5$  А. Пренебрегая потерями энергии, определите напряжение на концах вторичной обмотки и коэффициент трансформации, если сила тока во вторичной обмотке  $I_2=0,1$  А.

9. Линза дает мнимое изображение предмета, увеличенное в два раза, если он находится от нее на расстоянии  $d=5$  см. Какая это линза — собирающая или рассеивающая? Чему равно ее фокусное расстояние?

10. При распаде  $\lambda$ -мезона, движущегося со скоростью  $v=2 \cdot 10^8$  м/с, на два фотона зафиксированы фотоны, которые летят в противоположных направлениях. Определите отношение энергий этих фотонов. Скорость света  $c=3 \cdot 10^8$  м/с.

Публикацию подготовили  
Р. А. Ведерников, М. Р. Либерзон,  
А. А. Симонов

# Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

## Математика

### Письменный экзамен

#### Вариант 1

1. На прямой  $x - 2y = 2$  найдите точку, через которую проходят две перпендикулярные друг другу касательные к графику функции  $y = x^2/2$ .

2. Решите уравнение

$$\sin 5x - \cos(x + \pi/2) = \sin(2x - \pi/2).$$

3. Решите уравнение

$$\log_2(3x+5) = 3 - \log_2(x+1).$$

4. Решите неравенство

$$5' + \frac{15}{2-5'} < 0.$$

5. Конус с углом  $\alpha$  между образующей и высотой вписан в сферу радиусом  $R$  так, что его вершина находится в центре сферы, а окружность основания — на сфере. Все вершины нижнего основания правильной треугольной призмы (параллельного основанию конуса) лежат на сфере, а остальные ее вершины принадлежат боковой поверхности конуса. Какими должны быть высота и сторона основания призмы, чтобы площадь ее боковой поверхности была наибольшей? Найдите это значение площади.

#### Вариант 2

1. По плану одной бригаде нужно изготовить на 240 деталей больше, чем другой за то же время. Ввиду того, что в первой бригаде не работало 5 человек, а во второй — 4 человека, каждая бригада выполнила план на два дня позднее. Сколько рабочих выходило на работу в каждой бригаде, если каждый из них изготавливал по 6 деталей в день?

2. Решите уравнение

$$3 \cos^2(x + \pi/2) + \cos^2 x = \sqrt{3} \cos x.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\lg 2x}{\lg(4x-15)} = 2.$$

4. Найдите все значения параметра  $p$ , при которых система уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ x^2 + y^2 + p^2 = 2x + 2py \end{cases}$$

имеет решение.

5. В шар вписана правильная четырехугольная пирамида; в пирамиду вписан цилиндр, одно из оснований которого лежит в плоскости основания пирамиды, а окружность другого основания касается всех боковых граней. Высота цилиндра и радиус его основания равны  $a$ . При какой высоте пирамиды объем шара будет наименьшим? Найдите это значение объема.

## Физика

### Задачи устного экзамена

1. Веревка длиной  $l = 20$  м и массой  $m = 1$  кг переброшена через гвоздь, вбитый в вертикальную стену. В начальный момент веревка висит симметрично и покоится, а затем в результате незначительного толчка начинает скользить по гвоздю. Каким будет импульс веревки, когда она соскользнет с гвоздя? Силами сопротивления пренебречь.

2. На концах и в середине невесомого стержня длиной  $l$  расположены одинаковые шарики. Стержень ставят вертикально и отпускают. Считая, что трение между плоскостью и нижним шариком отсутствует, найдите скорость верхнего шарика в момент удара о горизонтальную поверхность.

3. Бетонная однородная свая массой  $m$  лежит на дне водоема глубиной  $h$ , большей, чем длина сваи  $l$ . Привязав трос к одному концу сваи, ее медленно вытаскивают из воды так, что центр тяжести сваи поднимается на высоту  $H$  от поверхности воды ( $H > l$ ). Какая работа совершается при этом? Плотность бетона в  $n$  раз больше плотности воды. Силами сопротивления пренебречь.

4. На расстоянии  $R$  от центра незаряженного металлического шара находится точечный заряд  $q$ . Определите потенциал шара.

5. В однородном магнитном поле с индукцией  $B$  с постоянной скоростью  $v$  движется металлический шарик радиусом  $r$ . Укажите точки шарика, разность потенциалов между которыми будет максимальной, и определите эту разность потенциалов. Считать, что направление скорости составляет с направлением магнитной индукции угол  $\alpha$ .

6. В однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,1$  Тл расположен плоский проволочный виток так, что его плоскость перпендикулярна линиям индукции. Виток замкнут на гальванометр. При повороте витка через гальванометр протек заряд  $Q = 9,5 \cdot 10^{-3}$  Кл. На какой угол повернули виток? Площадь витка  $S = 10^3$  см<sup>2</sup>, сопротивление витка  $R = 2$  Ом.

7. На каком расстоянии от собирающей линзы надо поместить предмет, чтобы расстояние между предметом и его действительным изображением было минимальным? Фокусное расстояние линзы равно  $F$ .

8. Определите, возможна ли ионизация возбужденного атома водорода внешним электрическим полем с напряженностью  $E = 10^5$  В/м.

9. Минимальная энергия электрона, необходимая для ионизации атома водорода, равна  $W_0$ . Определите минимальные начальные энергии ионов водорода и гелия, необходимые для ионизации атома водорода. Считать, что ионизация происходит в результате абсолютно неупругого удара.

10. В периодической системе элементов рядом расположены три элемента. Условно назовем их  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Радиоактивный изотоп элемента  $a$  превращается в элемент  $b$ , а тот, в свою очередь, — в элемент  $c$ . Последний превращается в изотоп исходного элемента  $a$ . Какими процессами обусловлены переходы  $a \rightarrow b$ ,  $b \rightarrow c$ ,  $c \rightarrow a$ ?

Публикацию подготовили  
Л. П. Паршев, Ю. А. Струков

# Московский институт нефти и газа им. И. М. Губкина

## Математика

### Вариант письменного экзамена

1. Решите уравнение

$$3|x - 0,75| = x^2 + 4,5.$$

2. Вычислите при  $a = 1,2$

$$\frac{2\sqrt{2} - 0,008a^3}{2 + 0,2\sqrt{2}a + 0,04a^2}$$

3. Три целых положительных числа образуют геометрическую прогрессию. Найдите третий член этой прогрессии, если ее второй член на 1 больше первого.

4. Найдите целое решение системы

$$\begin{cases} \frac{7-x}{x+19} \geq 0, \\ x < -17. \end{cases}$$

5. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\sqrt{5(5-x)} > -25-x.$$

6. Решите уравнение

$$0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}.$$

7. Вычислите  $4^x$ , если  $x = \log_2 5 + \log_{0,25} 10$ .

8. Решите уравнение

$$\log_{0,8} (\log_2 x - 1) = -1.$$

9. Парабола  $y = ax^2 + 9x + 10$  касается прямой  $y = 15x + 9$ . Найдите значение параметра  $a$ .

10. Вычислите  $25 \sin^2 \alpha \cos \alpha$ , если  $\alpha$  — острый угол и  $\operatorname{tg} \alpha = 0,75$ .

11. Вычислите при  $\alpha = -\frac{2\pi}{9}$

$$\frac{5(\cos 2\alpha - \cos 5\alpha)}{\sqrt{3}(\sin 5\alpha + \sin 2\alpha)}$$

12. Найдите в градусах наименьший положительный корень уравнения

$$\sin x - 1 = 0,5 \sin 2x - \cos x.$$

13. Площадь равнобедренной трапеции равна 32. Котангенс угла между диагональю трапеции и ее основанием равен 2. Найдите длину высоты трапеции.

14. Окружности радиусами 8 и 3 касаются внутренним образом. Из центра большей окружности проведены касательная к меньшей окружности. Найдите длину касательной.

15. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 3. Диагональ боковой грани призмы, проходящей через другой катет, составляет с плоскостью основания призмы угол  $45^\circ$ . Высота призмы равна 4. Найдите площадь полной поверхности призмы.

16. Металлический шар радиусом  $\sqrt{2}$  перелит в конус. Площадь боковой поверхности конуса в 3 раза больше площади его основания. Найдите высоту конуса.

## Физика

### Письменный экзамен

#### Вариант 1

1. Скорость тела, брошенного вертикально вниз с некоторой высоты, через  $t_1 = 1$  с увеличилась по сравнению с начальной в  $n_1 = 6$  раз. Во сколько раз увеличится его скорость через  $t_2 = 2$  с после броска? Сопротивление воздуха не учитывать.

2. Тело массой  $m = 0,5$  кг, падая без начальной скорости с высоты  $H = 9$  м, приобрело вблизи поверхности земли скорость  $v = 12$  м/с. Найдите силу сопротивления воздуха, считая ее постоянной. Ускорение силы тяжести  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

3. Груз массой  $m = 7$  кг поднимают на веревке с поверхности земли вертикально на высоту  $H = 1$  м один раз с постоянной скоростью, второй раз с ускорением  $a = 2$  м/с<sup>2</sup>. На какую величину работа во втором случае больше, чем в первом?

4. Однородный шар плавает на поверхности воды, наполовину погруженный в воду. Чему равен объем шара, если на него действует выталкивающая сила  $F = 2$  Н? Ускорение силы тяжести  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, плотность воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>.

5. Газ, находящийся в цилиндре под поршнем, нагрели при постоянном давлении так, что его объем увеличился в 1,5 раза. Затем поршень закрепили и нагрели газ так, что его давление возросло в 2 раза. Чему равно отношение конечной температуры (абсолютной) газа к его начальной температуре?

6. В изотермическом процессе газ совершил работу  $A = 1000$  Дж. На какую величину увеличится внутренняя энергия этого газа, если ему сообщить количество теплоты, вдвое большее, чем в первом случае, а процесс проводить изохорически?

7. После того как конденсатор, заряженный до разности потенциалов  $U_1 = 500$  В, соединили параллельно с незаряженным конденсатором емкостью  $C_2 = 4$  мкФ, между обкладками конденсаторов установилась разность потенциалов  $U_2 = 100$  В. Чему равна емкость первого конденсатора?

8. Какой заряд проходит в течение  $t = 5$  с через поперечное сечение проводника, если за этот промежуток времени ток равномерно возрастает от  $I_1 = 0$  до  $I_2 = 12$  А?

9. Шарик, подвешенный на пружине, совершает вертикальные гармонические колебания и после начала движения проходит путь, равный пяти амплитудам его колебаний, за  $t = 10$  с. Чему равен период колебаний шарика?

10. Во сколько раз масса фотона, соответствующего инфракрасному свету с  $\lambda = 800$  нм, меньше массы фотона, соответствующего ультрафиолетовому свету с частотой  $\nu = 1,5 \times 10^{15}$  Гц? Скорость света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

**Вариант 2**

1. Тело брошено вертикально вверх с высоты  $H=20$  м с начальной скоростью  $v_0=3$  м/с. На какой высоте окажется тело через  $t=2$  с после начала движения? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение силы тяжести  $g=10$  м/с<sup>2</sup>.

2. Шарик массой  $m=4$  кг, подвешенный на нерастяжимой и невесомой нити длиной  $l=1$  м, совершает колебания в вертикальной плоскости. Найдите силу натяжения нити в тот момент, когда она образует с вертикалью угол  $\alpha=60^\circ$ . В этот момент скорость шарика  $v=1,5$  м/с. Ускорение силы тяжести  $g=10$  м/с<sup>2</sup>.

3. На горизонтальной поверхности лежит лом, длина которого  $l=1,5$  м. Масса лома  $m=10$  кг. На сколько изменится потенциальная энергия лома, если его перевести в вертикальное положение? Ускорение силы тяжести  $g=10$  м/с<sup>2</sup>.

4. Требуется заменить силу  $F=5$  Н двумя силами, действующими вдоль той же прямой, но в противоположных направлениях. Меньшая из этих сил  $F_1=11$  Н. Какова величина второй силы?

5. Какой объем занимает газ при температуре  $T=300$  К и давлении  $p=414$  Па, если число молекул газа  $N=5 \cdot 10^{24}$ ? Постоянная Больцмана  $k=1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К.

6. Трансформатор, погруженный в масло, вследствие перегрузки начинает греться. Каков КПД трансформатора, если при полной мощности  $P=60$  кВт масло массой  $m=60$  кг нагревается на  $\Delta t=30$  °С за  $t=4$  мин работы трансформатора? Удельная теплоемкость масла  $c=2000$  Дж/(кг·К).

7. Два одинаковых маленьких металлических шарика, заряженных одноименными зарядами, находятся на расстоянии  $l_0=1$  м друг от друга. Заряд одного из них в 4 раза больше заряда другого. Шарики привели в соприкосновение и развели на некоторое расстояние. Найдите это расстояние, если сила взаимодействия шариков осталась прежней?

8. Два проводника, сопротивления которых  $R_1=7$  Ом и  $R_2=5$  Ом, соединяют параллельно и подключают к источнику тока. В первом проводнике в течение некоторого времени выделилось количество теплоты  $Q_1=300$  Дж. Какое количество теплоты выделится во втором проводнике за то же время?

9. Колебательный контур с конденсатором емкостью  $C_1=1$  мкФ настроен на частоту  $\nu_1=400$  Гц. Если параллельно этому конденсатору подключить другой конденсатор, то частота колебаний в контуре становится равной  $\nu_2=200$  Гц. Определите емкость второго конденсатора.

10. Предмет находится на расстоянии  $d=0,05$  м от двояковыпуклой линзы, а его мнимое изображение — на расстоянии  $f=0,5$  м. Чему равна оптическая сила этой линзы?

Публикацию подготовили Б. М. Писаревский, Д. Д. Ходкевич

**Московский энергетический институт**

**Математика**

*Письменный экзамен*

**Вариант 1**

1. Упростите выражение

$$\left[ \left( \frac{a^2 - a\sqrt{b} + \sqrt{b}}{a^3 + \sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} \right)^{-1} + \left( \frac{a^2 + a\sqrt{b} + \sqrt{b}}{a^3 - \sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} \right)^{-1} \right]^{-1} \times 36^{\log_3 \sqrt{2a}}$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4x + y^2 - 3y + 5 = 0, \\ 3x^2 - 11x + 3y^2 - 7y + 10 = 0. \end{cases}$$

3. Двое рабочих за час делают 33 детали, причем производительность одного из них на 20 % выше. Сколько деталей в час делает каждый рабочий?

4. Найдите корни уравнения

$$\operatorname{tg} \frac{x}{5} \left( \sin x - 4 \cos 6x + 5 \operatorname{tg} \left( \frac{7\pi}{4} \right) \right) = 0,$$

удовлетворяющие неравенству  $\lg^2(2x - \pi) + \lg^2(10\pi - x) > 0$ .

5. В круге дана точка на расстоянии 15 см от центра; через эту точку проведена хорда, которая делится ею на две части: 7 см и 25 см. Найдите длину радиуса круга.

6. Сформулируйте теорему о производной частного двух функций (без доказательства).

**Вариант 2**

1. Упростите выражение для  $f(x)$  и найдите  $f'(x)$ , если

$$f(x) = \left( \sqrt{\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x^2 - 1}}{x}} + \sqrt{\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x^2 - 1}}{x}} \right)^4.$$

2. Решите неравенство

$$(\lg 100) \log_3(x+2) \leq \log_3(3x+10).$$

3. От пристани А к пристани В отправилась лодка со скоростью 10 км/ч, а через час после нее в том же направлении вышел пароход со скоростью 20 км/ч. Каково расстояние между пристанями, если пароход пришел к пристани В на час раньше лодки?

4. Найдите корни уравнения

$$\sqrt{2} \sin 3x - \cos^2 x - \sqrt{2} \cos x + \cos \left( \frac{\pi - 6x}{2} \right) \times \cos x = 0,$$

принадлежащие области определения функции  $y = 4 \operatorname{tg} 2x + \sqrt{3\pi^2 - 5\pi x - 8x^2}$ .

5. В прямом круговом конусе отношение площади основания к площади боковой поверхности равно  $m$ , а длина образующей равна  $l$ . Найдите объем конуса.

6. Перечислите формулы приведения для синуса и косинуса (без доказательства).

**Физика****Письменный экзамен****Вариант 1**

1. Электродвижущая сила. Закон Ома для полной цепи. Работа и мощность тока.

2. В гирлянде для новогодней елки последовательно соединены двенадцать одинаковых лампочек. Как изменится мощность, потребляемая гирляндой, если в ней оставить только шесть лампочек?

3. Ракета с работающим двигателем «зависла» над поверхностью Земли. Какова мощность, развиваемая двигателем, если масса ракеты  $M$ , а скорость истечения газов из двигателя  $v$ ? Изменением массы ракеты за счет истечения газов можно пренебречь.

4. При медленном подъеме тела по наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha=30^\circ$  и коэффициентом трения  $\mu=0,1$  совершена работа  $A=6$  Дж. Какое количество теплоты выделилось при этом?

5. Собирающая линза дает прямое изображение предмета с увеличением  $\Gamma=2$ . Расстояние между предметом и изображением  $a=22,5$  см. Найдите фокусное расстояние линзы.

*Ответы,  
указаны в  
решении*

**Гиганты**

1. Чтобы «превзойти» Евдокса, понадобится около 5 суток, Тихо Браге — 25 суток (почти месяц), Улугбека — почти 70 суток (больше двух месяцев). И эти цифры еще следует считать заниженными, так как дифракционный предел, из которого мы исходили при расчете, — недостижимый идеал. Оптические приборы считаются отличными, если удастся разрешить угол, вдвое превышающий дифракционный.

2. Аристарх вычислил, что Земля больше Луны в 3 раза. По современным данным — в 3,67 раза.

3. Расчет по данным Аристарха дает отношение размеров Солнца и Луны, равное 19, по современным данным получаем 400. Даже и по данным Аристарха диаметр Солнца оказывается в 6 с лишним раз больше диаметра Земли, а значит, по объему Солнце больше Земли почти в 250 раз. Трудно поверить, что такой гигант «крутится» вокруг крошечной Земли.

4. По Эратосфею — 47,5 тыс. км, по Посидонию — 45,6 тыс. км, по современным данным — 40,0 тыс. км. Если же принять стадий за 157 м, то Эратосфен получил 39,25 (!), а Посидоний — 37,68 тыс. км. Такое ухудшение точности становится совсем непонятным, если учесть, что Эратосфен измерял высоту Солнца, которое само имеет угловой размер около  $0,5^\circ$ , а Посидоний — высоту звезды (Канопус).

5. При движении к Юпитеру Земля получает сигнал об очередном затмении Ио раньше на время  $v_3 t_0 / c$ , где  $v_3$  — скорость Земли,  $t_0$  — период обращения Ио вокруг Юпитера,  $c$  — скорость света. При движении от Юпитера сигнал на такое же время запаздывает. Значит,

**Вариант 2**

1. Принцип действия тепловых двигателей. КПД теплового двигателя и его максимальное значение. Тепловые двигатели и охрана природы.

2. Как построить сильный электромагнит, если поставлено условие, чтобы ток в электромагните был сравнительно слабым?

3. Стальной шарик, упавший без начальной скорости с высоты  $H=2$  м на стальную плиту, отскакивает от нее с потерей  $\eta=6,25\%$  кинетической энергии. Найдите время, которое проходит от начала движения шарика до его второго падения на плиту.

4. Определите ЭДС аккумулятора, подзаряжаемого от сети с напряжением  $U=12$  В, если половина потребляемой энергии выделяется в аккумуляторе в виде тепла.

5. Один моль газа, имевший начальную температуру  $T=300$  К, изобарно расширился, совершив работу  $A=12,5 \cdot 10^4$  Дж. Во сколько раз при этом увеличился объем газа?

*Публикацию подготовили  
В. И. Прохоренко, А. Н. Седов*

$$t_0 = (t_1 + t_2)/2 \text{ и } t_2 - t_1 = v_3(t_2 + t_1)/c.$$

Отсюда получаем

$$c = v_3(t_2 + t_1)/(t_2 - t_1) = 3,04 \cdot 10^5 \text{ км/с.}$$

Ошибка порядка 1 % естественна — примерно с такой точностью мы «замерили» разность времен между затмениями.

**Тригонометрия помогает алгебре**

$$1. \left\{ -\frac{\sqrt{5}+1}{4}; \frac{\sqrt{5}+1}{4} \right\}.$$

$$2. \{2\}.$$

$$3. \left\{ -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right\}.$$

$$4. \left\{ \left( \frac{1}{2} \sqrt{2+\sqrt{2}}; \frac{1}{2} \sqrt{2-\sqrt{2}} \right); \right.$$

$$\left. \left( -\frac{1}{2} \sqrt{2-\sqrt{2}}; \frac{1}{2} \sqrt{2+\sqrt{2}} \right); \right.$$

$$\left. \left( -\frac{1}{2} \sqrt{2+\sqrt{2}}; -\frac{1}{2} \sqrt{2-\sqrt{2}} \right); \right.$$

$$\left. \left( \frac{1}{2} \sqrt{2-\sqrt{2}}; -\frac{1}{2} \sqrt{2+\sqrt{2}} \right) \right\}.$$

5. Три корня.

$$6. x = \frac{4}{\sqrt{13}}, y = \frac{6}{\sqrt{13}}, z = \frac{9}{\sqrt{13}}, v = \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

**Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского**

**Математика****Вариант 1**

$$1. \left( -\infty; \frac{1}{2} \right) \cup (2; +\infty).$$

$$2. \left\{ 10; \frac{1}{\sqrt[3]{10}} \right\}$$

3.  $\frac{\pi}{8}(2n+1), \frac{\pi}{48}(6n+(-1)^{n+1}), n \in \mathbb{Z}$   
 4. 36 км/ч, 32 км/ч  
 5.  $\arctg \sqrt{\frac{7}{2}}, \arctg \sqrt{\frac{2}{7}}$ .

## Вариант 2

1. {7}.  
 2.  $(0; \ln \frac{5}{3}) \cup (1; +\infty)$ .  
 3.  $\frac{\pi}{8}(2n+1), \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$   
 4.  $b_0 = 32$ .  
 5. 18.

## Физика

1.  $m = (2\rho S v^2 \sin \alpha) / g = 5$  кг.  
 2.  $F = 3GmM/R^2$ .  
 3. Оба тела упадут на землю с одной и той же скоростью  $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 25$  м/с.  
 4.  $p = R(T_1 + 2T_2)/(V_1 + V_2) = 14,1 \cdot 10^5$  Па;  $t = -(t_1 + 2t_2)/3 = 67$  °С.  
 5.  $x = (mg + 4a\alpha)/(\rho g a^3) = 2$  см.  
 6.  $A_1 = CU^2/4; A_2 = -CU^2/2$ .  
 7.  $t = BR/E = 0,001$  с.  
 8.  $U_2 = I_1 U_1 / I_2 = 1100$  В;  $k = U_1 / U_2 = 1/5$ .  
 9. Линза собирающая;  $F = 2d = 10$  см.  
 10.  $E_1/E_2 = (c+v)/(c-v) = 5$ .

Московское высшее техиническое училище им. Н. Э. Баумана

## Математика

## Вариант 1

1.  $(1; -1/2)$ . Указание. Пусть  $A(x_1, ax_1^2)$  и  $B(x_2, ax_2^2)$  — точки параболы  $y = ax^2$ . Касательные в точках  $A$  и  $B$  пересекаются в точке  $(x_0, y_0)$ , координаты которой удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y_0 = 2ax_1x_0 - ax_1^2, \\ y_0 = 2ax_2x_0 - ay_0^2, \end{cases}$$

откуда  $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ,  $y_0 = ax_1x_2$ . Так как две

прямые с угловыми коэффициентами  $k_1$  и  $k_2$  перпендикулярны тогда и только тогда, когда  $k_1 k_2 = -1$ , наши касательные будут перпендикулярны, если  $4a^2 x_1 x_2 = -1$ , или  $x_1 x_2 = -1/(4a^2)$ . Откуда получаем  $y_0 = -1/(4a)$ . Итак, если две касательные к параболы  $y = ax^2$  перпендикулярны, то их точка пересечения лежит на прямой  $y = -1/(4a)$ . В нашем случае это прямая  $y = -1/2$ .

2.  $(-1)^{k+1} \pi / 18 + \pi k / 3, \pi(2k+1)/4, k \in \mathbb{Z}$ .  
 3.  $\{1/3\}$ .  
 4.  $(\log_5 2; 1)$ .  
 5.  $0,5R/\cos(\alpha/2); R\sqrt{3} \sin(\alpha/2); 3\sqrt{3}R^2 \times \times \operatorname{tg}(\alpha/2)/2$ . Указание. Проведем осевое сечение конуса, в котором лежит боковое ребро  $BC$  призмы (рис. 1). Так как вершина  $B$  призмы лежит на сфере,  $SB = SA = R$ . Пусть  $h = BC, r = EC = BD$  — радиус окружности, описанной вокруг основания призмы,  $\beta = \angle BSG$ . Тогда  $r = R \sin \beta, h = R \cos \beta - r \operatorname{ctg} \alpha = R \times (\cos \beta - \sin \beta \operatorname{ctg} \alpha)$ , и площадь боковой поверхности призмы равна  $S(\beta) = 3\sqrt{3}rh =$

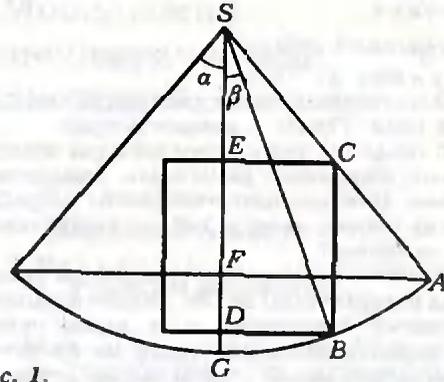


Рис. 1.

$= 3\sqrt{3}R^2(\cos \beta \sin \beta - \sin^2 \beta \operatorname{ctg} \alpha), 0 < \beta < \alpha$ . Исследуем функцию  $S(\beta)$  с помощью производной. Равенство  $S'(\beta) = 0$  означает, что  $\operatorname{ctg} 2\beta = \operatorname{ctg} \alpha$ .

На промежутке  $0 < \beta < \alpha$  это уравнение имеет один корень  $\beta = \alpha/2$ , причем  $S''(\beta)$  при переходе  $\beta$  через  $\alpha/2$  меняет знак с плюса на минус, так что при  $\beta = \alpha/2$  значение площади — наибольшее. Окончательно получаем  $r = R \sin(\alpha/2)$ ; сторона основания  $a = R\sqrt{3} \times \times \sin(\alpha/2)$ ;  $h = 0,5R/\cos(\alpha/2)$ ;  $S = 3\sqrt{3}R^2 \times \times \operatorname{tg}(\alpha/2)/2$ .

## Вариант 2

1. 20 и 16 человек. Указание. Если  $x$  и  $y$  — количества рабочих в бригадах, а  $t$  — время работы, то по условию

$$\begin{cases} (x+5)(t-2) = xt, \\ (y+4)(t-2) = yt, \\ 6(x-y)t = 240. \end{cases}$$

2.  $\pm \pi/6 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .  
 3.  $\{9/2\}$ .  
 4.  $-2 \leq p \leq 1/4$ . Указание. Возможные значения  $y$  удовлетворяют системе  $y^2 - (2p-1)y + p^2 = 0, y \geq -1$ . В свою очередь, это значит, что  $\frac{2p-1+\sqrt{1-4p}}{2} \geq -1, p \leq \frac{1}{4}$ .

5.  $3a; 9a/4$ . Указание. Пусть  $2b$  — длина стороны основания пирамиды,  $H$  — высота пирамиды,  $R$  — радиус сферы. Тогда (рис. 2)  $O_1E \perp SO_1$ , или  $b/a = H/(H-a)$ , откуда  $b^2 = \frac{a^2 H^2}{(H-a)^2}$ .

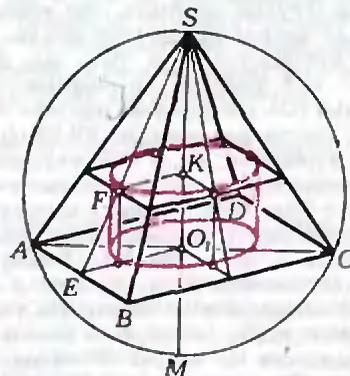


Рис. 2.

Так как  $AO_1^2 = SO_1 \cdot O_1M$ , или  $(b\sqrt{2})^2 = H(2R - H)$ , то  $2a^2H/(H-a)^2 = H(2R-H)$ .

Отсюда  $R(H) = H/2 + a^2H/(H-a)^2$ ,  $a < H < +\infty$ .

$$R'(H) = \frac{1}{2} - a^2 \frac{a+H}{(H-a)^3} = \frac{H^3 - 3H^2a + Ha^2 - 3a^3}{2(H-a)^3} = \frac{(H^2 + a^2)(H-3a)}{2(H-a)^3}$$

Производная  $R'(H)$  равна нулю при  $H=3a$ , поэтому  $\min R(H) = R(3a) = 9a/4$ .

#### Физика

- $P = m\sqrt{gl/2} = 10$  кг·м/с.
- $v = 2\sqrt{3gl/5}$ .
- $A = mg(H + h(1 - 1/n))$ .
- $\varphi = q/(4\pi\epsilon_0 R)$ .
- $U_{\max} = 2vR \sin \alpha$ ; точки лежат на концах диаметра, перпендикулярного скорости шарика.
- $\alpha = \arccos(1 - RQ/(BS)) = 155^\circ$ .
- $d = 2F$ .
- Ионизация невозможна.
- $W_{\text{вод}} = 2W_0$ ;  $W_{\text{гел}} = 5W_0$ .
- Первый и второй переходы обусловлены  $\beta$ -распадом, а третий —  $\alpha$ -распадом.

Московский институт нефти и газа им. И. М. Губкина

#### Математика

- 1,5. 2. —0,24. 3. 4. 4. —18. 5. 5. 6. 6.
- 2,5. 8. 8. 9. 9. 10. 7,2. 11. —5. 12. 90.
4. 14. 4. 15. 60. 16. 4.

#### Физика

##### Вариант 1

- $n_2 = 1 + (n_1 - 1)t_2/t_1 = 11$ .
- $F_c = m(g - v^2/(2H)) = 1$  Н.
- $\Delta A = maH = 14$  Дж.
- $V = 2F/(\rho g) = 4 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>.
- $\frac{T_3}{T_1} = \frac{\rho_2 V_2}{\rho_1 V_1} = 3$ .
- $\Delta U = 2A = 2000$  Дж.
- $C_1 = C_2 U_2 / (U_1 - U_2) = 1$  мкФ.
- $q = (I_1 + I_2)t/2 = 30$  Кл.
- $T = 4t/5 = 8$  с.
- $m_1/m_2 = c/(\lambda v) = 1/4$ .

##### Вариант 2

- $h = H + v_0 t - gt^2/2 = 6$  м.
- $T = m(g \cos \alpha + v^2/l) = 29$  Н.
- $\Delta E_p = mgl/2 = 75$  Дж.
- $F_2 = F_1 + F = 16$  Н.
- $V = NkT/p = 50$  м<sup>3</sup>.
- $\eta = (1 - cm\Delta t/(Pr))100\% = 75\%$ .
- $l = 5l_0/4 = 1,25$  м.
- $Q_2 = Q_1 R_1/R_2 = 420$  Дж.
- $C_2 = C_1((v_1/v_2)^2 - 1) = 3$  мкФ.
- $D = (f - d)/(df) = 18$  дптр.

Московский энергетический институт

#### Математика

##### Вариант 1

- $1(a > 0, b \geq 0, a \neq \sqrt{b})$ .

- (1; 2), (3; 1).

- 15 и 18 деталей.

- $\left\{ 5\pi; \frac{9}{2}\pi; \frac{13}{2}\pi; \frac{17}{2}\pi \right\}$

- 20 см.

#### Вариант 2

- $f'(x) = 4\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$ ,  $x \geq 1$ .

- $x \in (-2; 2)$ .

- 40 км.

- $\left\{ -\frac{7}{8}\pi; -\frac{3}{8}\pi; \frac{1}{8}\pi \right\}$

- $\frac{1}{3}\pi^3 m^2 \sqrt{1 - m^2}$ .

#### Физика

##### Вариант 1

- Мощность увеличится в два раза.
- $N = Mgv/2$ .
- $Q = A\mu/(\mu + \text{tg} \alpha) \approx 0,9$  Дж.
- $F = aI/(1 - 1)^2 = 0,45$  м.

##### Вариант 2

- Обмотка электромагнита должна содержать большое число витков тонкого провода.
- $t = (1 + 2\sqrt{1 - \eta})\sqrt{2H/g} \approx 1,9$  с.
- $\mathcal{E} = U/2 = 6$  В.
- $\alpha = 1 + A/(\sqrt{RT}) \approx 6$ .

#### Калейдоскоп «Кванта»

(см. «Квант» № 4)

#### Вопросы и задачи

- В полночь скорость собственного вращения Земли добавляется к орбитальной скорости движения Земли вокруг Солнца, в полдень — вычитается из нее.
- Для северного полушария — зимой, поскольку в это время Земля проходит свой перигелий.
- Кольцо Сатурна не может быть твердым и сплошным.
- Ускорения, сообщаемые Солнцем Земле и Луне, примерно одинаковы. Поэтому Земля и Луна образуют единую систему двух тел, обращающихся вокруг общего центра масс, а центр масс системы обращается вокруг Солнца.
- Нет, так как (в отличие от случая движения по круговой орбите) сила тяготения попеременно совершает положительную и отрицательную работу, следовательно, скорость планеты или спутника то возрастает, то убывает.
- Спутник не может все время «висеть» над таким районом — ведь плоскость орбиты спутника должна проходить через центр Земли.
- Нет. Земля и Луна обращаются вокруг разных притягивающих центров.
- Ничего, поскольку тела в экваториальной зоне уже обладают такой скоростью.
- С такой же, с какой стол давит на Землю, — с силой, равной по величине силе тяжести стола.
- Скорость спутника, несмотря на сопротивление воздуха, возрастает. Хотя из-за трения в атмосфере механическая энергия спутника

уменьшается, лишь часть потенциальной энергии переходит в тепло; оставшаяся ее часть преобразуется в кинетическую энергию.

### Мысленный микроопыт

Невесомость и весомость не имеют отношения к удару, в этом случае важны масса и скорость; так что, работая в будущем в открытом космосе, старайтесь не стукаться о корабль.

•Квант для младших школьников

(см. «Квант» № 4)

1.  $9/8$  и  $3/2$ .
2. Достаточно рассмотреть лишь буквы с номерами 1, 2, 11, 12, 21 и 22. Это А, Б, К, Л, У, Ф. В результате получаем маршрут поезда: БАКУ — УФА.
3.  $1354 + 1354 + 1354 + 1354 = 5416$ .
4. Все площади одинаковы.
5.  $7641 - 1467 = 6174$ .

### Избранные школьные задачи

(см. «Квант» № 4)

1.  $5/2$ . Решение. Пусть

$$\begin{aligned} m &= an + c, \\ m + n &= b(m - n) + c, \end{aligned}$$

где  $a \geq 1$ ,  $b \geq 1$ ,  $c < n$ ,  $c < m - n$ . Если  $a = 1$ , то  $c = m - n$ , что противоречит предыдущему. Значит,  $a > 1$ , откуда  $m > 2n$ ,  $n < m/2$ ,  $m + n < 3m/2$ ,  $m - n > m/2$  и  $b < 3$ . Остаются возможности  $b = 1$  и  $b = 2$ . Если  $b = 1$ , то  $m + n = m - n + c$  и  $c = 2n$ , что невозможно ввиду  $c < n$ . Значит,  $b = 2$ ,  $m + n = 2(m - n) + c$ ,  $m = 3n - c$ , откуда  $a = 2$ ,  $m = 2n + c$ ,  $c = n/2$  и  $m = 5n/2$ .

2. Если  $a$  — некоторый член арифметической прогрессии и  $d$  — ее разность, то  $a(a+1) = a + ad$  — тоже член нашей арифметической прогрессии. Значит, вместе с каждым числом наша прогрессия содержит это число, умноженное на  $d+1$ ; значит, она содержит целую геометрическую прогрессию с знаменателем  $d+1$ . (При  $d=0$  это рассуждение не проходит, но, очевидно, факт все равно верен.)

3.  $a^2 > 4b$ ,  $a < 0$ ,  $b > 0$ . Действительно, число  $x$  тогда и только тогда является решением нашего уравнения, когда число  $|x|$  является решением квадратного уравнения  $y^2 + ay + b = 0$ . Значит, наше уравнение имеет 4 решения тогда и только тогда, когда указанное квадратное уравнение имеет 2 положительных различных решения.

4. Длины  $l_i$  сторон нашего треугольника  $ABC$  удовлетворяют неравенству  $1 \leq l_i < \sqrt{2}$ . Из теоремы косинусов вытекает, что треугольник остроугольный. Значит, к каждой стороне примыкает хотя бы один угол, больший  $45^\circ$ , и, значит, длины высот больше  $1 \cdot \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$ . Предположим теперь, что центр квад-

рата не лежит внутри треугольника  $ABC$ ; пусть он либо расположен на стороне  $AB$ , либо лежит с вершиной  $C$  по разные стороны от стороны  $AB$ . Спроектируем квадрат вместе с треугольником на прямую, перпендикулярную  $AB$  (рис. 3). Проекция треугольника есть отрезок, равный высоте, опущенной на  $AB$ , т. е. его длина больше  $\sqrt{2}/2$ ; с другой стороны, он содержится в половине проекции квадрата, которая по длине не превосходит половины диагонали, т. е.  $\sqrt{2}/2$ . Противоречие.

5. Кольцо, центром которого служит середина отрезка, соединяющего центры данных окружностей, а радиусы внешней и внутренней окружностей равны, соответственно, полусумме и полуразности радиусов данных окружностей. Доказательство. Пусть  $R$  и  $r$  — радиусы данных окружностей ( $R > r$ ). Зафиксируем точку  $A$  большей окружности. Середины отрезков, соединяющих ее с точками меньшей окружности, составляют окружность радиусом  $r/2$ , центр  $B$  которой совпадает с серединой отрезка, соединяющего точку  $A$  с центром меньшей окружности (рис. 4). Когда точка  $A$  пробегает большую окружность, точка  $B$  пробегает окружность радиусом  $R/2$ , центром которой служит середина отрезка, соединяющего центры данных окружностей, а построенная выше окружность радиусом  $r/2$  замечает указанное кольцо (рис. 5).

6.  $2 \leq x < \sqrt{5}$ . Решение. Целая степень двойки равна целой степени тройки только если показатели степени равны 0. Значит,  $[x^2 - 4] = 0$  и  $[1/x] = 0$ , т. е.  $2 \leq |x| < \sqrt{5}$  и  $x > 1$ .

7.  $x = y = \pm 1$ . Решение. Вычтем из первого уравнения второе и из второго уравнения третье. Получим систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ 3x^2 + y^2 = 4, \end{cases}$$

имеющую четыре решения:  $x = \pm 1$ ,  $y = \pm 1$ . Эти решения мы должны подставить в любое из уравнений данной системы, скажем в первое (если оно будет выполнено, то два других будут выполнены автоматически). Видно, что два из найденных решений, указанные в ответе, годятся, а остальные не годятся.

8. Да. Доказательство. Действительно, многочлен  $x(x-1)(x-2)\dots(x-12)/13$  принимает в целых точках целые значения, а коэффициент при  $x^{13}$  у него равен  $1/13$ . (Добавим, что многочлен, принимающий в целых точках целые значения, всегда имеет вид  $a_0 P_0 + a_1 P_1 + \dots + a_N P_N$ , где  $a_0, a_1, \dots, a_N$  — целые числа, а

$$P_n(x) = \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-(n-1))}{n!}.$$

В частности, любое рациональное число может

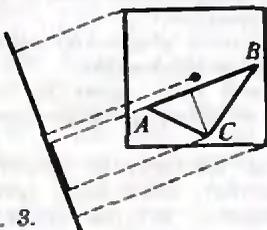


Рис. 3.

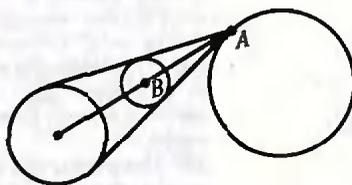


Рис. 4.

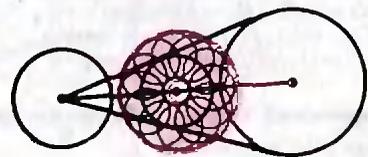


Рис. 5.

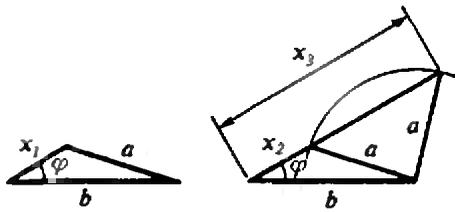


Рис. 6.

быть коэффициентом такого многочлена, но никакое иррациональное число быть им не может.)

9. 3. Доказательство.  $10^{n+1} - 10^n = 360 \times 25 \cdot 10^{n-3}$ , поэтому  $\sin(10^{n+1})^\circ = \sin(10^n)^\circ$  при  $n \geq 3$ . Следовательно, в нашей последовательности все члены, начиная с четвертого, одинаковы. Ясно, далее, что  $\sin 1^\circ > 0$ ,  $\sin 10^\circ > 0$ ,  $\sin 100^\circ > 0$  и  $\sin 1000^\circ = \sin 280^\circ < 0$ . Таким образом, в нашей последовательности первые 3 члена положительны, а остальные — отрицательны.

10. 1 или 5. Решение. В действительности верно, что из трех длин проекций отрезка на стороны правильного треугольника одна равна сумме двух других. Это можно доказать так. Пусть при проекции отрезка на стороны правильного треугольника его длина умножается, соответственно, на  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Но тогда и при проектировании сторон этого треугольника на прямую, содержащую наш отрезок, их длины умножаются на  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . В то же время ясно, что проекция одной из сторон треугольника есть сумма проекций двух других его сторон.

11. а)  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5-2\sqrt{3}}$ ; б) три. Решение. а) Пусть  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — длины сторон нашего треугольника, причем сторона  $z$  лежит против угла  $30^\circ$ . По теореме косинусов

$$z^2 = x^2 + y^2 - xy\sqrt{3}.$$

Мы должны подставить вместо двух из трех величин  $x$ ,  $y$ ,  $z$  числа 2 и 1 и потом найти третью величину. Всего существует 6 способов подстановки, но поскольку  $x$  и  $y$  входят в уравнение симметричным образом, можно ограничиться тремя:  $x=2$ ,  $y=1$ ;  $x=2$ ,  $z=1$ ;  $x=1$ ,  $z=2$ . В каждом из трех случаев получается квадратное уравнение; решая эти уравнения, находим:  $z = \pm\sqrt{5-2\sqrt{3}}$ ,  $y = \sqrt{3}$ ,

$y = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{15}}{2}$ . Условию задачи (искомая сторона имеет длину от 1 до 2) удовлетворяют

два решения:  $\sqrt{5-2\sqrt{3}}$  и  $\sqrt{3}$ . б) Если проигнорировать условие, что длина третьей стороны заключена между  $a$  и  $b$ , то задача может иметь четыре решения (рис. 6). Но указанному условию удовлетворяют не более трех. Чтобы убедиться в этом, изобразим все четыре решения на одном чертеже (рис. 7). На этом чертеже  $AB_1 = C_1B_2 = C_1B_3 = a$  и  $AC_1 = B_1C_2 = b$ . Решениями задачи служат отрезки  $B_1C_1$ ,  $AB_2$ ,  $AB_3$  и  $AC_2$ . Легко подобрать  $a$ ,  $b$  и  $\varphi$  так, чтобы  $AB_2$  и  $AB_3$  были не меньше  $a$  и не больше  $b$ . Но при этом точки  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$  должны идти в таком

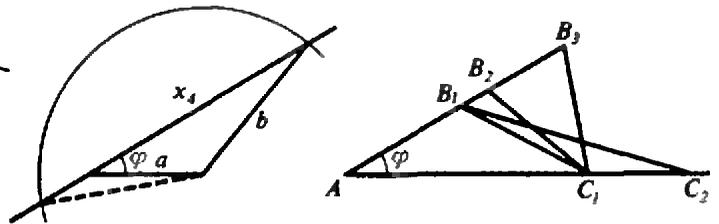


Рис. 7.

порядке, как на чертеже ( $AB_2 \geq a$  и  $AB_3 \geq a$ ). Угол  $B_2C_1A$  острый, тем более угол  $B_1C_1A$  острый. Значит, если  $B_1C_1 \leq b$ , то точка  $C_2$  находится дальше от точки  $A$ , чем  $C_1$ , и, значит,  $AC_2 > b$ .

12. Пусть

$$A(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

$$B(x) = x^2 + px + q = 0$$

— наши кубическое и квадратное уравнения. Легко видеть, что

$$C(x) = A(x) - (x - (p - a))B(x)$$

— многочлен с рациональными коэффициентами степени не выше первой. Общий корень многочленов  $A(x)$  и  $B(x)$  является корнем и многочлена  $C(x)$ . Если многочлен  $C(x)$  не равен 0 тождественно, то этот корень рационален, если же  $C(x) \equiv 0$ , то

$$A(x) = (x - (p - a))B(x)$$

и, значит, рациональное число  $p - a$  является корнем многочлена  $A(x)$ .

13.  $a = b = c = \pm 1$ . Решение. Действительно, если  $(x - a)^4 + (x - b)^4 + (x - c)^4 = 0$ , то  $x - a = x - b = x - c = 0$ , откуда  $x = a = b = c$ . Значит, вторая функция имеет вид  $2((x - a)^4 + (x + a)^4) = 4(x^4 + 6a^2x^2 + a^4)$ . Это — четная функция, возрастающая при  $x > 0$ . Значит, она достигает своего минимума при  $x > 0$ . Значит, она достигает своего минимума при  $x = 0$ , и этот минимум равен  $4a^4$ . Следовательно,  $4a^4 = 4$  и  $a = \pm 1$ .

14.  $2k\pi \leq x \leq (2k + \frac{1}{19})\pi$ ,  $x = (2k + 1)\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Решение. Поскольку все функции, входящие в цепочку неравенств, периодичны с периодом  $2\pi$ , достаточно решить задачу, предположив, что  $0 \leq x \leq 2\pi$ . Неравенство

$$\sin mx \leq \sin(m + 1)x$$

равносильно неравенству

$$2\cos\left(\frac{2m + 1}{2}x\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \geq 0.$$

Так как  $\sin(x/2) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq 2\pi$ , последнее

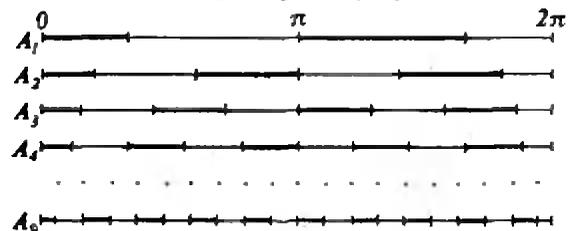


Рис. 8.

неравенство на нашем интервале равносильно неравенству

$$\cos\left(\frac{2m+1}{2}x\right) \geq 0.$$

Решением последнего неравенства служит объединение отрезков  $\left[\frac{-\pi+4k\pi}{2m+1}; \frac{\pi+4k\pi}{2m+1}\right]$ .

Обозначим это объединение через  $A_m$ . Решением нашей задачи служит пересечение множеств  $A_1, A_2, \dots, A_9$ . Из рисунка 8 видно, что это пересечение состоит из отрезка  $[0; \pi/19]$  и точки  $\pi$ .

15. Пусть  $a, b, c$  — длины сторон данного остроугольного треугольника. Мы должны найти  $x, y, z$  из системы уравнений  $x^2 + y^2 = a^2, y^2 + z^2 = b^2, z^2 + x^2 = c^2$ . Получаем:  $x^2 = c^2 + a^2 - b^2, 2y^2 = a^2 + b^2 - c^2, 2z^2 = b^2 + c^2 - a^2$ ; положительность правых частей этих равенств равносильна остроугольности треугольника.

## Реклама!

Дорогие девушки и юноши!

Если физика захватила вас по-настоящему, реализовать свое увлечение вы сможете, став студентом физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, одного из старейших учебных заведений нашей страны.

Физический факультет университета готовит высококвалифицированных специалистов-физиков широкого профиля для работы в научно-исследовательских институтах АН СССР, в отраслевых институтах и в высших учебных заведениях.

Физфак — это

— теоретическая физика и математическое моделирование,

— физика твердого тела и квантовая оптика,

— физика ядра и астрофизика,

— геофизика и биофизика,

— физика высокотемпературной сверхпроводимости и криоэлектроника,

— физические аспекты применения лазеров в биологии и медицине,

— компьютерная физика

— и многое-многое другое.

Окончательный выбор наиболее привлекательной для вас области физики вы сможете сделать в конце второго курса — при распределении по кафедрам факультета. Вашей научной работой будут руководить ведущие ученые нашей страны.

Вступительные экзамены проводятся с 4 по 20 июля. Прием документов — с 20 июня по 3 июля. Дополнительную информацию о факультете и о порядке приема вы сможете получить по адресу: 119899, ГСП, Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, приемная комиссия; а с 20 июня — по телефону: 939-54-95.

Решайтесь! Физфак ждет вас!



Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:  
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,  
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:

А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,  
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,  
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,  
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,  
Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский,  
А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел,  
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,  
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,  
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,  
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,  
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:

А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,  
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,  
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,  
Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин,  
Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаяев,  
В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев,  
А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков,  
Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1. «Квант», тел. 250-33-54

Номер подготовили:

А. И. Буздин, А. Н. Виленкин,  
А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич,  
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,  
С. Л. Табачников, В. А. Тихомирова

Номер оформили:

Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов,  
Н. С. Кузьмина, С. Ф. Лухки, И. Е. Смирнова,  
Л. А. Твщков, П. И. Чернуцкий, В. Б. Юдки

Редактор отдела художественного оформления  
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор Т. С. Вайсберг

Сдано в набор 23.02.89. Подписано к печати 13.04.89  
Т-08960. Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1  
Гарнитура школьная. Печать офсетная  
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,78  
Тираж 190 045 экз. Заказ 342. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени  
Чеховский полиграфический комбинат  
Государственного комитета СССР  
по делам издательства, полиграфии  
и книжной торговли  
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1,  
«Квант», тел. 250-33-54

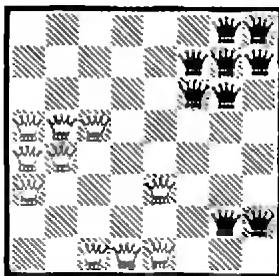
# Шахматная страничка

## ЧИТАТЕЛИ УТОЧНЯЮТ РЕКОРДЫ

На «шахматной страничке» часто приводятся различные рекорды математического характера. Некоторые из них — абсолютные (доказано, что улучшить их невозможно), другие дают пищу для размышлений, можно сделать попытку их побить. Читатели журнала не упускают случая, чтобы установить свой собственный рекорд. Особый интерес вызвали позиции, предложенные в «Кванте» № 1 за 1988 год.

Начнем с задачи, которую придумал В. Франген: расставить на доске 10 белых и 9 черных ферзей так, чтобы ни один из них не находился под ударом ферзя противоположного цвета.

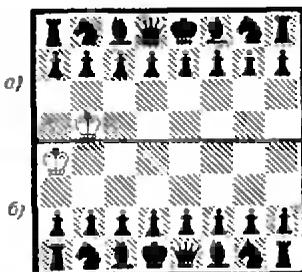
В «Кванте» были приведены два решения (повороты и зеркальные отражения доски не принимаются во внимание). После этой публикации в редакцию поступило несколько сотен писем. Однако в большинстве писем содержались позиции, получающиеся из расстановок Франгена простым преобразованием доски. В конце концов оказалось, что найдено всего одно новое решение! Впрочем, и этого немало...



Это решение принципиально отличается от двух известных тем, что здесь один ферзь оторван от группы и всего, как говорят шахматисты, на доске пять «островков», а не четыре.

Две задачи на следующем рисунке (верхняя и нижняя половина доски) впервые были опубликованы в «Кванте» № 7 за 1987 год (их автор — из-

вестный шахматный композитор Р. Тавариани).



а) За какое наименьшее число ходов белый король может попасть с b5 на d8?

б) За какое наименьшее число ходов белый король может попасть с a4 на e1?

Автор привел «партии», состоящие из 8 и 12 ходов, однако в дальнейшем рекорды были доведены соответственно до 7 и 9 ходов. Многие читатели еще на один ход улучшили каждый из этих рекордов, похоже, превратив их в абсолютные (самых партий прислано много десятков, важно лишь число ходов).

1. Krb4 a5+ 2. Kpb5 c5 3. Kp:c5 Фb6+ 4. Kp:b6 f6 5. Kpc7 Kpf7 6. Kpd8 или 1. Kpc4 e5 2. Kpd5 c5 3. Kp:e5 Cd6+ 4. Kp:d6 Фc7+ 5. Kp:c7 Kpf8 6. Kpd8.

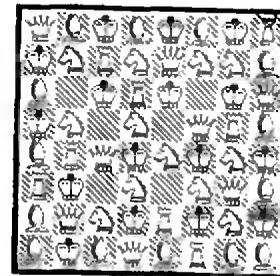
1. Kpb4 Kc3 2. Kpc4 b1Ф 3. Kpd4 Ca3 4. Kpe3 Kpc1 5. Kpf4 Kpb2 6. Kpg3 Фec1 7. Kp:f2 d1C 8. Kpe1.

Интересную находку прислал Б. Бейнфест. Он наложил дополнительное ограничение в задаче «б»: ни одна черная фигура не должна ходить дважды, и в этом случае также нашел 8-ходовое решение, видимо, единственное: 1. Kpb4 Ka3! 2. Kpc3 b1Ф 3. Kpd3 Cb2 4. Kpe3 Kpc1 5. Kpf4 d1Л!! 6. Kpg3 Фb4 7. Kp:f2 Ad2! 8. Kpe1.

В «Кванте» № 1 за 1988 год также довольно подробно обсуждалась и задача Г. Дьюдени о расстановке наборов одноименных фигур, каждый

из которых образует рекорд — содержит наибольшее число фигур, которые не угрожают друг другу (в предположении, что остальные фигуры с доски убраны). Речь все время шла о трех рекордах: 8 ферзей + 8 ладей + 14 слонов или 8 ферзей + 8 ладей + 16 королей.

В журнале был предложен ряд вопросов, один из них — совершенно «безнадежный»: можно ли увеличить количество рекордов, представленных на одной диаграмме (вместо трех — четыре или пять)? И вот в одном из писем обнаружили две позиции сразу с четырьмя рекордами (8 ферзей + 8 ладей + 14 слонов + 16 королей) и математически строго доказательством, что это предел: пяти рекордов одновременно быть не может!



На доске находятся еще 12 коней, и, таким образом, на ней всего 6 пустых полей. К сожалению, автор письма забыл указать свою фамилию, мы с удовольствием сообщим ее (вместе с доказательством абсолютности решения), когда он откликнется.

Е. Я. Гук

Упр 11-15

В «Калейдоскопе» этого номера на рисунке 7 показана знаменитая головоломка «танграм» — квадрат, разрезанный на 7 частей, из которых составляют разнообразные силуэты. Она появилась в Китае в конце XVIII века. Первое ее изображение (1780 г.) обнаружено на ксилографии японского художника Утамаро, где две девушки складывают фигурки «чи чао ту» — так называется «танграм» на его родине (в переводе — «умственная головоломка из семи частей»). Название танграм возникло в Европе вероятнее всего от слова «тань» (на кантонском диалекте — китаец) и часто встречающегося греческого корня «грамма» (буква). Впрочем, авторы многих книг по занимательной математике приписывают изобретение танграма якобы жившему 4000 лет назад в Китае ученому Тангу. Эта тщательно разработанная легенда от начала до конца выдумана изобретательным автором головоломок Сэмом Лойдом. В верхнем ряду рисунков воспроизведены три из двенадцати выпущенных в 1900 году

в Нью-Йорке открыток с фигурками танграма. Сложить эти фигурки несложно. Труднее складываются более простые по форме фигуры. Попробуйте, например, найти все выпуклые многоугольники, составляемые из полного комплекта танграма. (В 1942 году было доказано, что их ровно 13; подробности можно прочесть в статье А. Панова «Загадка фигуры № 51» в «Кванте» № 12 за 1982 год.) Покажите, что имеется ровно 16 пятиугольников из танграма (укажите: определите, какими могут быть их углы). В нижнем ряду рисунков — несколько парадоксов танграма. Куда пропала нога «человека с подносом», если в обоих его силуэтах использован полный комплект? Справа внизу — квадрат из двойного комплекта танграма и такой же квадрат из тех же деталей, но без уголка. Как это может быть, если этого быть не может? Слева — аналогичный «софизм» с треугольником. Ответы будут опубликованы в следующем номере.

В. Дак

