ISSN 0130-2221

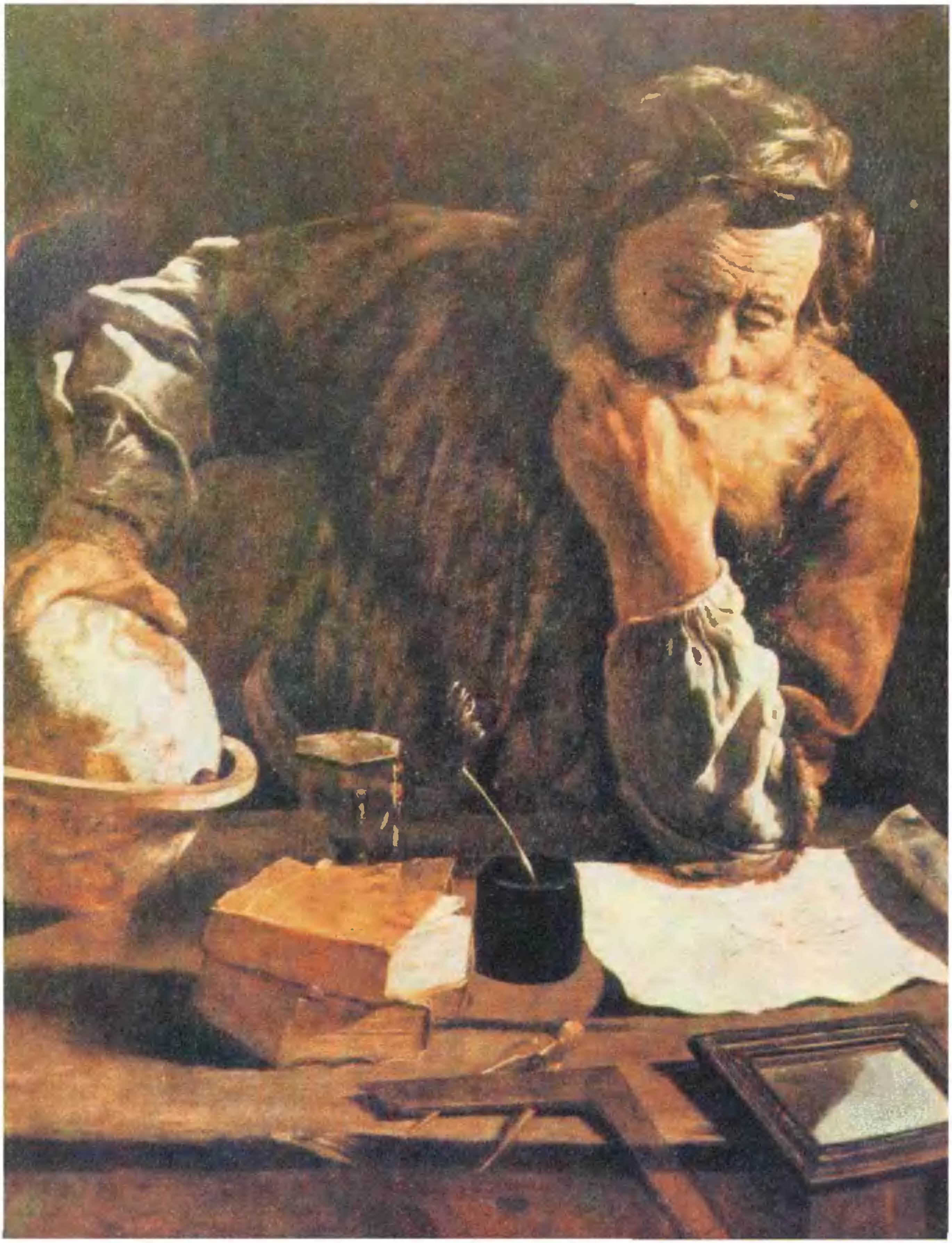
Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Задачи, модели и ЭВМ

1989



Квант

Выходит с января 1970 года

1989

3

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Москва, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

Наша обложка

1 *Проблема четкой математической постановки реальных задач весьма сложна. Как к ней подходить, обсуждается в статье «Задачи, модели и ЭВМ» на примере простой задачи о разрезании подковы на наибольшее число частей.*

2 *Архимед — один из величайших древнегреческих математиков, внесший важный вклад также в механику, физику и астрономию. В статье «От нуля до декаллиона» рассказано, как он придумал записывать очень большие числа. Разумеется, нет ни одного достоверного портрета Архимеда. Вот каким представлял его итальянский живописец Доменико Фетти (ок. 1588—1623).*

3 *Шахматная страничка.*

4 *Бикуб.*

В прошлом году наши читатели могли познакомиться со статьей известного физика-теоретика, специалиста по физике твердого тела, профессора М. И. Каганова, которая называлась «Много или мало? Рассуждения физика-теоретика о числах» (см. «Квант» № 1, 1988). Сегодня мы предлагаем читателям статью М. И. Каганова, которую можно, в каком-то смысле, считать продолжением предыдущей и которую можно было бы назвать «Размышления физика-теоретика о смысле чисел в физике». Как и первая, эта статья написана в системе единиц СГСЭ (сантиметр — грамм — секунда, а Э — от «электричества»). Профессиональные физики обычно пользуются именно ею (а не знакомой школьникам СИ). В этой системе некоторые формулы выглядят не совсем так, как в привычной для нашего читателя СИ.

ВЗГЛЯНУВ НА ТЕРМОМЕТР...

Доктор физико-математических наук
М. И. КАГАНОВ

Однажды утром я почувствовал, что в квартире холоднее, чем обычно. Взглянув на термометр, увидел: действительно, вместо привычных 20 °С было 19 °С. Посетовав на нестабильность коммунальных служб, собрался и пошел на работу. В метро мысль вернулась к показанию термометра, и возникло ощущение, что что-то тут не так...

Температура — мера теплового движения молекул. Средняя энергия теплового движения молекулы (скажем, газа в воздухе, наполняющем комнату) равна $\frac{3}{2}kT$, где $k \approx 1{,}4 \times 10^{-16}$ эрг/град — постоянная Больцмана, а температуру, правда, надо измерять не в градусах Цельсия, а по абсолютной шкале — шкале Кельвина, сдвинутой относительно шкалы Цельсия на $-273{,}16°$. Другими словами, температура в моей квартире была около 300 К. И я *почувствовал* изменение температуры ΔT порядка $\frac{1}{300}T$, т. е. ощутил, что энергия теплового движения молекул изменилась на 0,3 %! Более того, без каких-либо сложных приборов, с помощью простого настенного термометра я проверил свое ощущение — *измерил* факт изменения на 0,3 % энергии теплового движения молекул... У меня даже мелькнула гордая мысль об эволюции, создавшей столь чувствительные механизмы ощущения температуры. Хорошо известно, каким важным параметром для живых организмов является температура: изменение температуры тела человека на 1 градус — признак болезни, а интервал допустимого изменения температуры тела — менее 10 градусов. Естественно, ощущать температуру живому организму необходимо очень точно... Но каким образом?

Подсказкой мне послужил все тот же настенный термометр. Поэтому разберемся сначала с ним. Как нам удается измерить изменение температуры на 1 градус? а медицинским термометром — на 0,1 градуса? Измерителем служит изменение объема жидкости (для определенности — ртути). При повышении или понижении температуры ее объем V изменяется на ΔV, причем

$$\frac{\Delta V}{V} = \alpha \cdot \Delta T.$$

Множитель α носит название коэффициента теплового расширения. По порядку величины он составляет 10^{-3}—10^{-4} К$^{-1}$. «Увидеть» $\Delta V/V \sim 10^{-4}$ удается только с помощью простого приема — «загнав» ртуть в тонкий капилляр. Тогда $\Delta V = s \cdot \Delta l$, где s — площадь сечения капилляра, а

$$\Delta l = \frac{V}{s}\,\alpha \cdot \Delta T$$

— изменение высоты столбика ртути. Сделав s достаточно малым, можно добиться необходимого разрешения. Капилляр служит *усилителем*. Если $V \sim 1$ см^3, то для того, чтобы при $\alpha \cdot \Delta T \sim 10^{-4}$ получить $\Delta l \sim 1$ мм$=$ $=0{,}1$ см, надо иметь капилляр с площадью сечения $s = 10^{-3}$ см^2. Очень простой усилитель!

Разобравшись с термометром, перейдем к живому организму. Что в нем служит усилителем? Определяющая роль температуры в жизненно важных процессах связана с тем, что скорости W большинства химических реакций (без которых жизнь была бы невозможна) зависят от температуры очень резко — по экспоненциальному закону:

$$W \sim e^{-U/kT}.$$

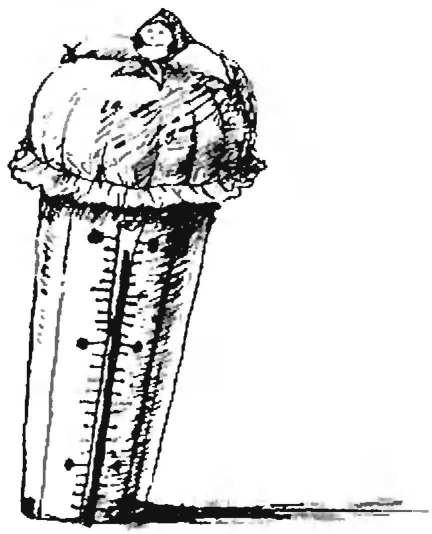
Величина U, носящая название энергии активации, для каждой реакции своя, но, как правило, U значительно превышает kT. Не слишком углубляясь и не заглядывая в справочники, я рассуждал так. Химические реакции — это всегда перестройка электронных состояний. Например, соединение атомов Na и Cl в молекулу NaCl происходит так: атом Na отдает электрон атому Cl. Ионы Na^+ и Cl^- притягиваются друг к другу и создают молекулу NaCl, но электроны в молекуле NaCl распределены вокруг ядер не так, как в атомах Na и Cl. Для измерения энергии электронов в атоме создана специальная шкала энергий — электрон-вольт, а 1 эВ$=1{,}6 \cdot 10^{-12}$ эрг. Так вот, характерное значение энергии активации U порядка 1 эВ.

Относительное изменение скорости химической реакции $\Delta W / W$ при изменении температуры T на величину ΔT таково*):

$$\frac{\Delta W}{W} \approx \frac{U}{kT} \frac{\Delta T}{T}.$$

При $\Delta T / T \approx 1/300$ относительное изменение скорости химической реакции $\Delta W / W \approx 1/10$, т. е. вполне ощутимо. Усилителем служит множитель U/kT. Судя по нашим ощущениям, он «работает» очень надежно. По-видимому, это связано с тем, что в организме протекает очень много различных химических реакций и все они (должны быть!) тщательно согласованы...

Итак, вроде бы я понял и успокоился... Однако появилась новая мысль. Пока я не разобрался (конечно, очень приближенно и поверхностно) в механизмах усиления, я удивлялся тому, что могу почувствовать и предельно просто измерить относительное изменение тепловой энергии молекулы, приблизительно равное 1/300. Но ведь в действительности речь идет об изменении энергии не одной молекулы, а всех молекул. Отношение $\Delta T / T$ равно относительному изменению энергии газа, если его температура изменилась на величину ΔT. Новая мысль формулировалась так: каково *абсолютное* значение изменения энергии газа при изменении его температуры на градус? Я, конечно, понимал, что ответить на этот вопрос очень легко — механический эквивалент тепла известен. Но мне хотелось получить эмоционально окрашенный ответ, чтобы почувствовать, много это или мало. И тогда я решил подсчитать, какую массу можно поднять, скажем, на высоту $h = 1$ м за счет энергии, требующейся для нагревания воздуха на



*) $W(T+\Delta T)$ пропорционально

$$e^{-\frac{U}{k(T+\Delta T)}} = e^{-\frac{U}{kT(1+\Delta T/T)}} \approx e^{-\frac{U}{kT}\left(1-\frac{\Delta T}{T}\right)},$$

поэтому

$$W(T+\Delta T) = W(T) \cdot e^{\frac{U}{kT}\frac{\Delta T}{T}} \approx W(T)\left(1+\frac{U}{kT}\frac{\Delta T}{T}\right),$$

если $U \cdot \Delta T / kT^2 \ll 1$. Выписывая приближенные равенства, я предполагаю у читателя умение обращаться с малыми величинами.

1*

1 градус в хорошо изолированном помещении размером 4 м $\times$ 5 м $\times$ 5 м = 100 м^3. Приближенный расчет очень прост. Энергия газа

$$E=\frac{3}{2}NkT,$$

где N — число частиц газа, а изменение энергии —

$$\Delta E=\frac{3}{2}Nk\cdot\Delta T.$$

Число частиц газа в помещении определить несложно. Каждый моль газа при нормальных условиях занимает объем $V_0=22{,}4$ л $=22{,}4\times10^{-3}$ м^3; значит в помещении содержится $100/(22{,}4\cdot10^{-3})\approx5\times10^3$ молей. А число молекул в каждом моле (число Авогадро) — $N_A\approx6\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$. Значит в помещении $N\approx3\cdot10^{27}$ молекул, и $\Delta E\approx6\times10^{11}$ эрг. Теперь вычислим искомую массу по формуле $\Delta E=Mgh$: $M\approx6\times10^6$ г, или 6 тонн(!). Ответ заставил меня трижды проверить расчет. Поверив в правильность ответа, я вспомнил и обычно не затрагивающие сознание призывы с телеэкрана беречь тепло, и недавно услышанное в научно-популярном фильме «Жизнь на Земле» утверждение, что бо́льшую часть потребляемой пищи теплокровные животные тратят на поддержание в теле постоянной температуры. Тепло — дорогое удовольствие!

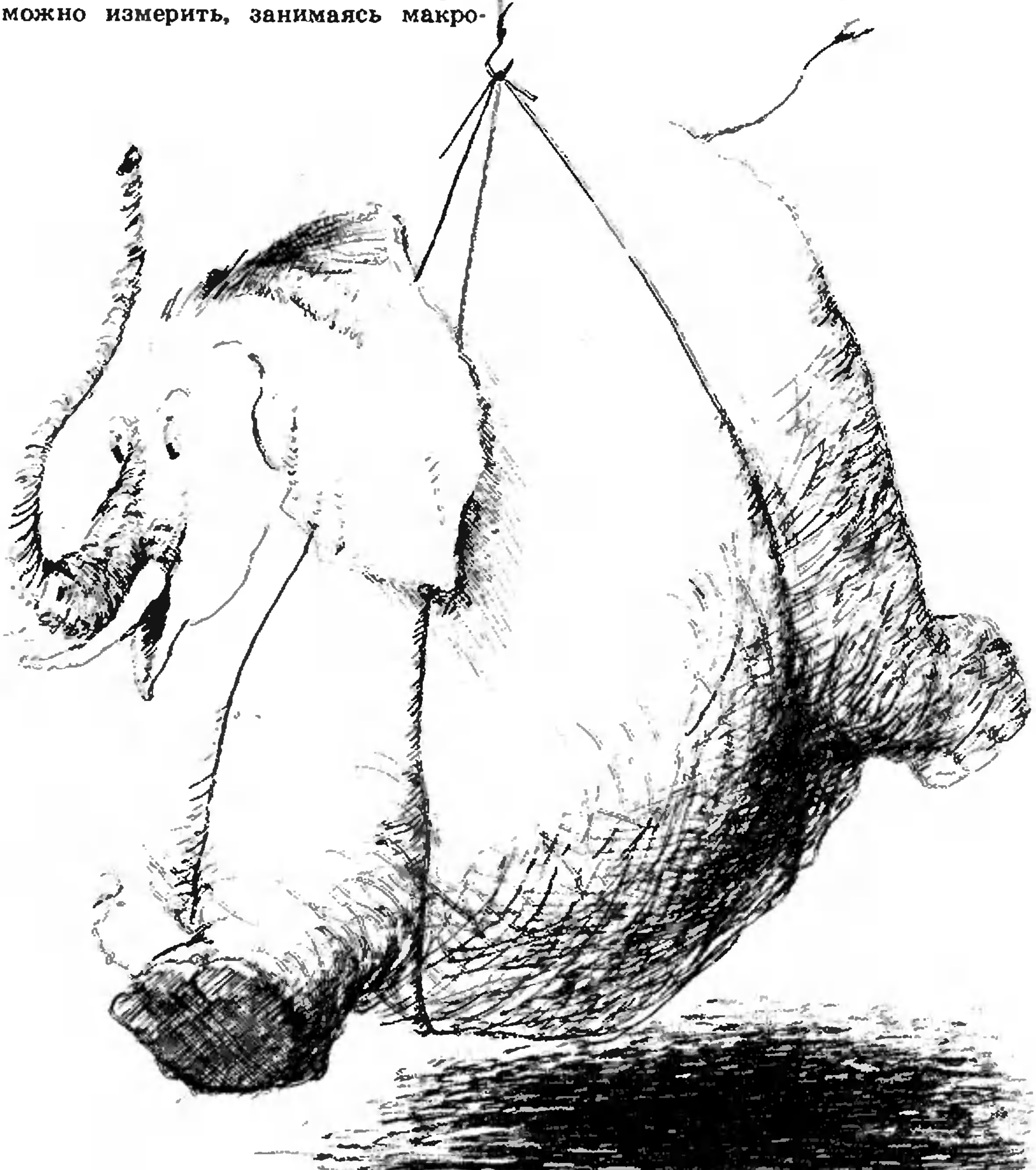
Примечание

То, что вы прочли до этого момента, можно считать слегка организованным при написании потоком сознания: думал, прикидывал, практически все выкладки производил в уме. Написав и перечитав, я подумал: школьников, как мне кажется, часто отпугивает от физики ощущение того, что она (физика) — набор разнообразных, на первый взгляд не связанных фактов, величин, соотношений. А я «вывалил» на них еще несколько. И мне захотелось довести до сознания читателей еще одну важную, на мой взгляд, мысль.

Современная физика так глубоко проникла в суть вещей, что она может оценить, а во многих случаях и точно вычислить по сути бесконечное число разнообразных параметров, постоянных, всего того, что входило в науку на разных этапах ее развития (часто в виде величин, добытых из опыта). При этом для расчетов достаточно

использовать всего несколько значений физических величин, носящих высокое имя мировых констант. Это заряд электрона $e \approx 1,6 \cdot 10^{-10}$ ед. заряда СГСЭ, массы электрона и протона $m_e \approx 10^{-27}$ г и $m_p \approx 1,67 \cdot 10^{-24}$ г, постоянная Планка $h \approx 6,6 \times 10^{-27}$ эрг·с (физики, как правило, постоянной Планка называют величину $\hbar = h/2\pi \approx 10^{-27}$ эрг·с), скорость света $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ см/с. Только вдумайтесь: все величины, которые можно измерить, занимаясь макроскопической физикой*), в принципе могут быть выражены через пять мировых констант! Такие расчеты получили даже специальное название — расчеты из первых принципов. Конечно, отнюдь не всегда теория столь

*) Ограничение макроскопической физикой не случайно. Например, мы не умеем пока вычислять массы элементарных частиц — разнообразных мезонов, адронов и т. д. (см. книгу Л. Б. Окуня «$\alpha\beta\gamma$...Z», выпущенную издательством «Наука» в 1985 году в серии «Библиотечка «Квант»).



детально разработана, что подобный расчет с необходимой точностью удается довести до конца (поэтому мы и говорим «в принципе»). Но совершенно ясно, что расчет возможен и нет никаких оснований ожидать, что мы столкнемся с принципиально неразрешимой задачей.

Все упомянутые в этой заметке физические величины, значения которых автор либо помнил, либо брал из справочника, могут быть получены как результат расчета из первых принципов. Мы попробуем это показать на примере двух величин: энергии активации U и коэффициенте теплового расширения α. При этом мы не будем доходить до основ, считая, что размер атома a заведомо можно выразить через перечисленные выше мировые константы. Например, размер атома водорода — $a_H=\hbar^2/m_e e^2$. Об этом можно прочесть в любой популярной книжке, излагающей квантовую механику.

Начнем с энергии активации U. Так как мы не предполагаем строить теорию скоростей химических реакций, а только хотим продемонстрировать, как выражаются интересующие нас величины через мировые константы, то мы ограничимся расчетом энергии ионизации атома водорода $U_{ион}$, т. е. ответим на вопрос, сколько энергии надо потратить, чтобы оторвать электрон от протона.

Энергия электрона в атоме водорода —

$$E=m_e v^2/2-e^2/a,$$

но

$m_e v^2/a=e^2/a^2$, т. е. $m_e v^2/2=e^2/2a$, и, следовательно,

$$E=-e^2/2a$$

(надеюсь, эти равенства понятны?). Подставив значение $a=a_H$, получим:

$$U_{ион}=\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}\approx 13{,}6 \text{ эВ}.$$

Энергия, которую надо затратить на перестройку электронных состояний, как правило, меньше $U_{ион}$. Поэтому мы при оценке относительного изменения скорости химических реакций приняли $U\sim 1$ эВ.

Расчет коэффициента теплового расширения сложнее. Он требует знания строения того тела, которое испытывает расширение. Нам придется ограничиться простейшим подходом, учитывающим главное — то, что тепловое расширение — результат зависимости среднего равновесного расстояния между частицами от температуры.

Итак, две частицы в теле находятся на расстоянии $d+x(t)$ друг от друга, причем d — расстояние между ними, когда эти частицы покоятся (при абсолютном нуле температуры), а $x(t)$ — это мгновенное (в момент времени t) отклонение частицы от положения равновесия. Сила F, действующая на частицу, напоминает упругую силу, действующую на грузик, привязанный к пружине,— она пропорциональна отклонению частицы от положения равновесия: $F=-\varkappa\cdot x(t)$. Но средняя сила $\bar{F}$ (за достаточно большой промежуток времени) должна быть равна нулю *). А это означает, что и $\overline{x(t)}=0$, т. е. среднее расстояние между частицами равно d и не зависит от колебания атомов и, следовательно, от температуры. Этот результат на научном жаргоне звучит так: *гармоническое приближение не может описать тепловое расширение тел.*

Мы привели это строгое научное утверждение, чтобы появилось слово «приближение». Дело в том, что выражение для силы, которым мы пользовались, приближенное. Попробуем его уточнить — учесть нелинейные по смещению $x(t)$ слагаемые:

$$F=-\varkappa\cdot x(t)+\beta\cdot x^2(t)+\ldots$$

Теория, основанная на этой формуле или на подобных формулах, носит название ангармонической, а коэффициент β называют ангармоническим коэффициентом. Из этой формулы следует, что $\bar{x}=\frac{\beta}{\varkappa}\overline{x^2}$, т. е.

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{(d+\bar{x})^3-d^3}{d^3}\approx\frac{3\bar{x}}{d}=\frac{3\beta}{d\varkappa}\overline{x^2}$$

*) Если бы средняя сила F была отлична от нуля, то частицы тела должны были бы под ее воздействием куда-то перемещаться.

(коэффициент 3 появился из-за того, что тело может расширяться по трем направлениям). В этой формуле V — объем тела при $T=0$ К. Итак, чтобы закончить расчет, мы должны уметь вычислять величины β, $\varkappa$ и $\overline{x^2(t)}$. Начнем с последнего. Так как ангармоническое слагаемое βx^2 — малая поправка (ее пришлось включить в выражение для силы только потому, что без нее ответ оказался равным нулю), то можно считать, что потенциальная энергия движения есть $\varkappa\cdot x^2(t)/2$, а полная энергия равна

$$\mathscr{E}=\frac{M(x')^2}{2}+\frac{\varkappa x^2}{2}.$$

Но в среднем кинетическая $(M(x')^2/2)$ и потенциальная $(\varkappa x^2/2)$ энергии равны. Поэтому

$$\overline{x^2}=\frac{1}{\varkappa}\mathscr{E}.$$

А средняя энергия колебательного движения есть kT *). Итак,

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{3\beta}{d\varkappa^2}kT.$$

Осталось научиться вычислять множитель $3\beta/\varkappa^2$. Конечно, именно это — самая сложная часть задачи. Но и ее мы предельно упростим (хотя даже при таком способе изложения вам придется в одном месте попросту поверить автору).

Пусть мы имеем дело с ионами, заряды которых $+e$ и $-e$ и расстояние между которыми r. Между ионами действует сила электростатического притяжения, равная e^2/r^2. Но эта сила не может быть единственной — под действием такой силы ионы упали бы друг на друга. Когда они слишком близко приближаются друг к другу, они отталкиваются, причем закон отталкивания может быть выяснен с помощью уравнений квантовой механики.

И здесь мы подошли к тому месту, где читателю придется довериться автору. Сила взаимодействия между ионами —

$$F=\frac{e^2}{r^2}-\frac{A}{r^{10}}.$$

При $r=d$ сила должна быть равна нулю. Поэтому $A=d^8e^2$, и окончательно

$$F=\frac{e^2}{r^2}-\frac{e^2d^8}{r^{10}}.$$

Подставив сюда $r=d+x$, разложим F по степеням x, ограничившись двумя первыми слагаемыми. Коэффициент при x дает нам значение величины $\varkappa$, а при x^2 — значение β. Проделайте, пожалуйста, эти вычисления самостоятельно, и вы убедитесь, что

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{3\cdot 52}{64}\,\frac{kdT}{e^2},\ \text{т. е.}\ \ \alpha=\frac{3\cdot 52}{64}\,\frac{kd}{e^2}.$$

Расстояние между атомами d приблизительно равно размеру атома — $d\approx a\approx 3\cdot 10^{-8}$ см $=3$ Å,— и подставляя значения k, e и d, получим

$$\alpha\approx 5\cdot 10^{-5}\ \text{град}^{-1}.$$

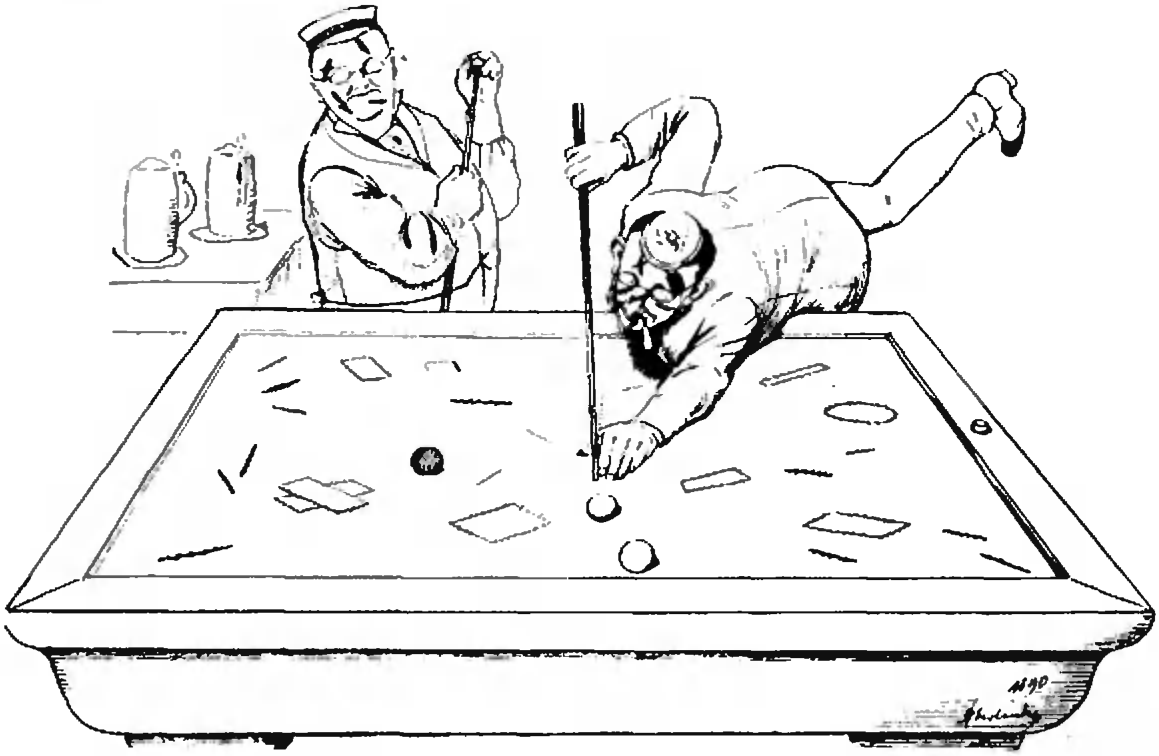
Посмотрите таблицы, и вы убедитесь, что полученная нами (при столь упрощенном рассмотрении) оценка совсем неплоха.

Ну вот, это, пожалуй, уже совсем все. Отметим только, что порядок величины коэффициента теплового расширения α мы могли бы и угадать. Взгляните на последнюю формулу для $\Delta V/V$. Из нее видно, что *безразмерное* отношение $\Delta V/V$ приблизительно равно отношению тепловой энергии (в расчете на одну частицу) kT к энергии связи между частицами (здесь $\sim e^2/d$). Отсюда вывод: чем более сильно связаны молекулы в теле, тем меньше у них коэффициент теплового расширения. Эту закономерность легко усмотреть из таблиц, в которых наряду со значениями α приведены температуры плавления для твердых тел или температуры кипения для жидкостей. Но, конечно, подобное утверждение не есть закон природы. Из него возможны исключения...

*) Сравните с энергией $^3/_2 kT$ для частицы в газе: частица свободна, т. е. потенциальная энергия ее равна нулю, поэтому на каждую степень свободы «приходится» $^1/_2 kT$, а не kT. Степеней свободы три. Но три степени свободы мы уже учли.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ БИЛЬЯРДНОГО ШАРА

Кандидат физико-математических наук
Г. А. ГАЛЬПЕРИН,
доктор физико-математических наук
А. М. СТЕПИН



Читатель, по-видимому, хорошо знаком с бильярдной игрой. Игра эта, родиной которой считается Китай, имеет многовековую историю. Первые известия о появлении бильярда в Европе относятся к XVI веку. Сохранилось свидетельство о том, что французский король Карл IX в Варфоломеевскую ночь 24 августа 1572 года играл на бильярде, когда со стороны парижского собора Сен-Жермен д 'Акселеруа раздался условный звон колоколов, призывающий католиков к истреблению гугенотов. Тридцать пять лет спустя У. Шекспир в трагедии «Антоний и Клеопатра» заставляет египетскую царицу Клеопатру играть на бильярде со своим придворным. В 1760 году английский король Георг II издал указ, запрещающий бильярдную игру в общественных местах под страхом штрафа в 10 фунтов. В России бильярд известен со времен Петра I.

Подобно тому, как игра в кости вызвала к жизни «исчисление вероятностей», бильярдная игра послужила источником серьезных научных исследований по механике и математике.

В математических исследованиях реальный бильярд заменяют его моделью, носящей название «математический бильярд» — рисунок 1. Если граница бильярдного стола имеет угловые точки, то рассматривают толь-

В заставке к статье использован рисунок А. Оберлиндера.

ко те движения, которые не проходят через эти точки. (Это связано с тем, что дальнейшее поведение бильярдного шара, находящегося в угловой точке, не определено.) Ломаная, вдоль которой движется шар, называется *бильярдной траекторией*.

Периодические бильярдные траектории — это траектории, которые после некоторого числа отражений от границы повторяют сами себя. Примеры таких траекторий в круглом бильярде — вписанные в круг правильный пятиугольник и правильная пятиконечная звезда. Ниже мы расскажем о периодических траекториях математического бильярда на столах разнообразной формы.

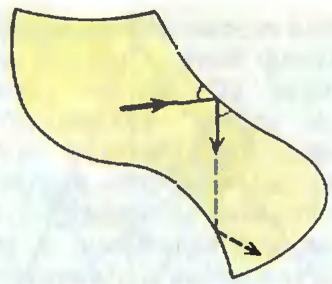


Рис. 1. Математический бильярд. Шар — это точка, движущаяся без трения и отражающаяся от стенок по закону «угол падения равен углу отражения».

Теорема Биркгофа

Начнем с построения периодических траекторий в бильярде, имеющем форму *выпуклой* *) ограниченной фигуры *Q с гладкой* **) границей. Совсем нетрудно обнаружить периодическую траекторию, составленную из двух звеньев,— для этого нужно взять две наиболее удаленные точки A и B фигуры Q и соединить их отрезком — рисунок 2. Замкнутая ломаная ABA, т. е. дважды пройденный отрезок AB,— периодическая траектория. Движение шара по этой траектории похоже на движение по диаметру в круглом бильярде.

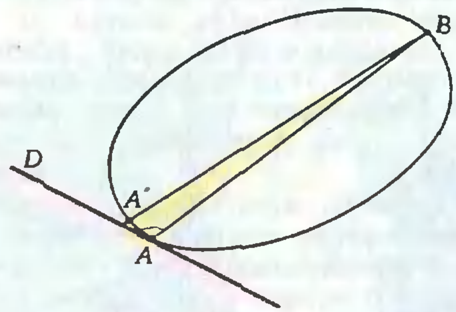


Рис. 2. Двузвенная бильярдная траектория. Если A и B — наиболее удаленные точки бильярда, то $\angle BAD$ — прямой. Действительно, если $\angle BAD > 90°$, то для близкой точки A' угол BAA' тупой и $BA' > BA$, что противоречит выбору точек A и B. Аналогично рассматривается случай $\angle BAD < 90°$.

А существуют ли в нашем бильярде периодические траектории с бóльшим числом звеньев, например трехзвенная или четырехзвенная?

Поступим аналогично: построим треугольник ABC наибольшего периметра среди всех вписанных в Q треугольников — рисунок 3. Изящное рассуждение, сопровождающее рисунок 3 и придуманное американским математиком Г. Д. Биркгофом, доказывает, что ABC — бильярдная траек-

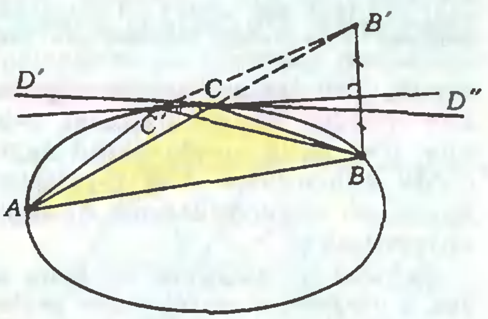


Рис. 3. Трехзвенная бильярдная траектория — вписанный треугольник ABC наибольшего периметра. Проведем касательную $D'D''$ в точке C и докажем, что $\angle ACD'' = \angle BCD'$. Пусть, например, $\angle ACD'' > \angle BCD'$. Тогда $\angle ACC' > \angle BC'C$. Для точки B', симметричной B относительно прямой CC', ломаная $AC'B'$ объемлет ломаную ACB' и потому длиннее нее. Значит периметр $\triangle AC'B$ больше, чем периметр $\triangle ACB$, что противоречит выбору точек A, B, C.

---

*) Выпуклой называется фигура, любые две точки которой можно соединить внутри фигуры отрезком. Например, круг — выпуклая фигура, а окружность — нет.

**) Кривая называется гладкой, если у нее есть касательная в каждой точке, т. е. если она не имеет изломов.

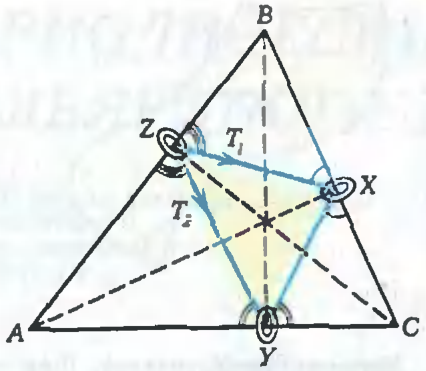


Рис. 4. Трехзвенная бильярдная траектория в остроугольном треугольнике — это вписанный треугольник наименьшего периметра.

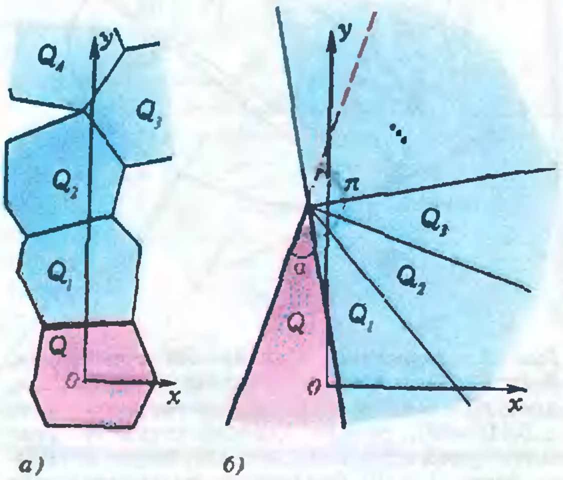


Рис. 5. Метод выпрямления. «Выпрямленная» траектория пересекает стороны угла не более чем $\lceil \pi/\alpha \rceil$ *раз, где через* $\lceil x \rceil$ *обозначено наименьшее целое число, большее или равное x.*

тория. Это рассуждение «проходит» для любого числа звеньев: *n-угольник, имеющий наибольший периметр среди вписанных в Q n-угольников, является периодической бильярдной траекторией.*

Задача 1. Докажите, что среди вписанных в окружность *n*-угольников наибольший периметр имеет правильный.

Минимизация периметра

Если граница бильярдного стола имеет точки излома, то метод Биркгофа *перестает* «работать» — вершины вписанного многоугольника наибольшего периметра могут попасть в угловые точки границы. Например, среди треугольников, вписанных в данный треугольник *ABC*, наибольший периметр имеет сам $\triangle ABC$! Как же искать периодические бильярдные траектории в треугольнике?

Для *остроугольного* треугольника выход состоит в том, чтобы заменить максимальный периметр на *минимальный*. Впишем в данный треугольник *ABC* треугольник *XYZ* наименьшего периметра с вершинами на сторонах *AB*, *BC* и *CA* (рисунок 4). Мы утверждаем, что *XYZX* — бильярдная траектория. Одно из доказательств этого факта вы сможете прочитать ниже в разделе «Механическая интерпретация», а другое — *предмет первой из следующих задач.*

Задачи

2. Используя рассуждение, сопровождающее рисунок 3, докажите, что $\angle AYZ = \angle CYX$.

3. Докажите, что треугольник, вершины которого — основания высот данного треугольника *ABC*, является бильярдной траекторией в $\triangle ABC$.

Задача 3 показывает, как построить трехзвенную бильярдную траекторию в остроугольном треугольнике. Единственность такой траектории будет доказана ниже.

Идея рассматривать вписанный треугольник наименьшего периметра применима и к фигурам, ограниченным несколькими гладкими кривыми. К сожалению, этот способ не срабатывает для *тупоугольных* треугольников — для них вписанный треугольник наименьшего периметра вырождается в высоту, опущенную из вершины тупого угла. Более того, бильярд в тупоугольном треугольнике не имеет трехзвенных периодических траекторий (попробуйте это доказать). Однако это не означает, что идея минимизации периметра бесполезна для построения периодических бильярдных траекторий в тупоугольных треугольниках; ее надо лишь соединить с *методом выпрямления*, который излагается в следующем разделе.

И еще одно общее замечание. До сих пор мы искали бильярдные траектории среди вписанных ломаных, имеющих максимальную или минимальную длину. Это отражает сле-

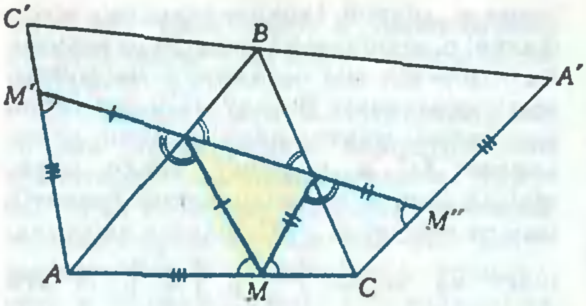


Рис. 6. Единственность трехзвенной траектории. После отражения от сторон AB и BC траектория «выпрямляется» в отрезок M'M'', причем AM'=AM=A'M'' и ∠AM'M''=∠CM''M'. Любая другая трехзвенная траектория выпрямляется в параллельный отрезок N'N'', причем AN'=A'N''. Значит отрезки N'N'' и M'M'' совпадают.

дующий общематематический принцип: во многих задачах полезно и важно рассматривать *экстремальные значения* подходящих величин.

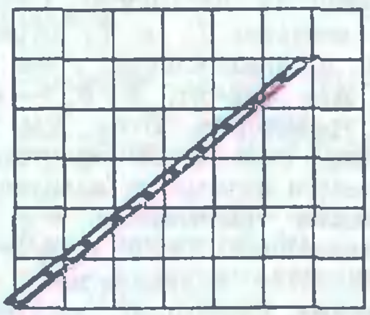
Метод выпрямления

Сложное поведение бильярдной траектории в многоугольнике можно упростить, если посмотреть на траекторию с другой точки зрения. А именно, сядем на бильярдный шарик O, как барон Карл Фридрих Иероним фон Мюнхгаузен — на пушечное ядро, и вооружимся системой координат, направив ось Oy по ходу движения, а ось Ox — направо перпендикулярно оси Oy. В этой системе координат наша бильярдная траектория изобразится осью Oy, а многоугольник Q будет нам представляться как последовательность копий $Q_0=Q$, Q_1, Q_2, Q_3, ... этой фигуры, «нанизанных» на ось Oy таким образом, что соседние копии Q_i и Q_{i+1} *зеркально симметричны* относительно их общей стороны (см. рис. 5, *а*). В этом построении, связанном с переходом к новой системе координат (Мюнхгаузена), и заключается метод выпрямления бильярдных траекторий.

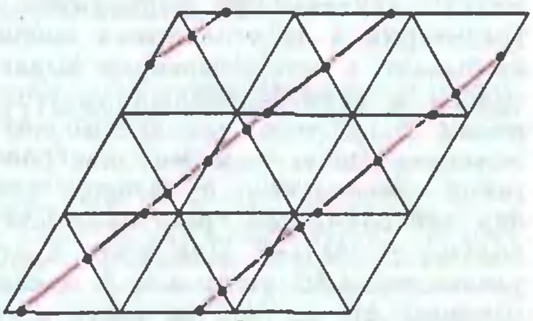
На рисунке 5, *б* изображен замечательный и простой пример того, как «работает» этот метод. Пусть в угол Q величины α влетает точечный бильярдный шарик и начинает отражаться от сторон угла. Какова судьба шарика: будет ли он отражаться бесконечно долго или нет? Если нет, то каково число его отражений? Подпись под рисунком 5 дает ответ на эти вопросы.

Можно рассмотреть и поведение бильярдного шарика внутри многогранного угла. Оказывается, что в этом случае число отражений шарика от граней тоже не может быть слишком большим — оно ограничено величиной, зависящей лишь от геометрии угла. Это утверждение было доказано сравнительно недавно советским математиком Я. Г. Синаем.

Вернемся к методу выпрямления. Совокупность копий Q_i ($i=0, 1, 2, ...$), как бы нанизанных на «копье» Oy, образует *«коридор»* QQ_1Q_2... для выпрямленной бильярдной траектории. Возвращению из системы координат Мюнхгаузена в исходную систе-



а)



б)

Рис. 7. Многозвенные траектории в квадрате и правильном треугольнике. Синий отрезок на рисунке а) не проходит через узлы решетки.

Рисунок б) получается из а) перекосом и складыванием в параллелограмм.

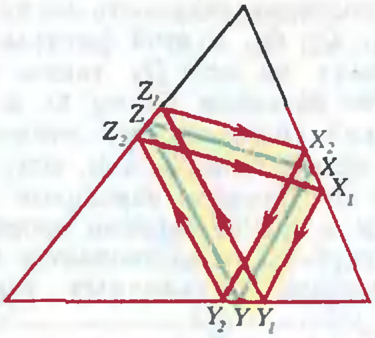


Рис. 8. Пучок параллельных траекторий. Двукратно пройденный треугольник XYZ — периодическая бильярдная траектория. Для близкой точки X_1 получается параллельная XYZ траектория $X_1Y_1Z_1X_2Y_2Z_2X_1$.

му координат, прикрепленную к многоугольнику Q, соответствует *наложение «гармошкой»* коридора (который полезно представлять прозрачным), на исходную фигуру Q; при этом ось Oy переходит в рассматриваемую *бильярдную траекторию* в Q.

На рисунке 6 приведено доказательство того, что *трехзвенная периодическая траектория в остроугольном треугольнике ABC единственна.*

Задача 4. а) Постройте периодическую траекторию в квадратном бильярде, у которой число звеньев больше любого наперед заданного числа.

б) Решите ту же задачу для бильярда в правильном треугольнике. (Подсказка — рисунок 7.)

По теореме Биркгофа в выпуклой фигуре с *гладкой* границей существуют периодические траектории с любым числом звеньев. А вот для треугольников дело обстоит совершенно иначе: двухзвенных периодических траекторий в треугольниках вообще не бывает, а четырехзвенные бывают только в равнобедренных треугольниках. Более того, для *любого натурального числа n можно построить такой треугольник, в котором каждая периодическая траектория имеет больше n звеньев.* Для этого в треугольнике ABC углы α и β при основании AC достаточно взять очень малыми и несоизмеримыми с π (т. е. $k\alpha+l\beta\neq m\pi$ для любых целых k, l, m). У периодической траектории в таком треугольнике обязательно найдется звено, идущее от одной боковой стороны к другой (доказательство этого факта с использованием неравенства $k\alpha+l\beta\neq m\pi$ мы оставляем настойчивому читателю). В силу малости углов это звено почти параллельно основанию AC и поэтому число отражений нашей периодической траектории от сторон $\triangle ABC$ больше наименьшего из чисел $\left[\frac{\pi}{\alpha}\right]$, $\left[\frac{\pi}{\beta}\right]$. А эти числа при достаточно малых α и β больше любого наперед заданного n.

Если вершины треугольника сгладить, то в получившейся фигуре (по теореме Биркгофа) найдется «малозвенная» периодическая траектория. Однако при уменьшении сглаживания эта траектория будет стремиться к ломаной, проходящей через вершину треугольника, т. е. в *пределе перестанет быть периодической* траекторией.

Механическая интерпретация

Наденем на каждую из сторон остроугольного треугольника ABC по малому колечку и пропустим через них натянутую резиночку $XYZX$ (см. рис. 4). Резиночка стремится сжаться, поэтому колечки займут положения в вершинах вписанного в ABC треугольника XYZ наименьшего периметра. Рассмотрим колечко на стороне AB. Поскольку оно не движется вдоль стороны треугольника, равнодействующая сил натяжений $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ перпендикулярна этой стороне. Кроме того, векторы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ имеют одинаковую длину, так как натяжение вдоль резинки *постоянно. Следовательно,* векторы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ образуют взаимно дополнительные углы с отрезком AB. Значит, $XYZX$ — бильярдная траектория. Итак, мы *доказали,* что вписанный треугольник наименьшего периметра является периодической траекторией в $\triangle ABC$.

С траекторией $XYZX$ можно связать семейство «параллельных» периодических траекторий, изображенное на рисунке 8. Если треугольник ABC считать плоской пластинкой, то каждую траекторию построенного пучка можно представлять себе как упругую замкнутую нить, обвивающую эту пластинку и попеременно переходящую с одной ее стороны на другую 6 раз.

Но если $\triangle ABC$ — тупоугольный, то эта конструкция периодических траекторий не срабатывает — упругая нить соскочит с пластинки через вершину тупого угла. Так что найти периодические бильярдные траектории в тупоугольных треугольниках совсем не просто.

Рис. 9. Если намотать нить на пластинку таким способом, соскока не произойдет.

Две конструкции для тупоугольных треугольников

Если намотать нить на пластинку способом, изображенным на рисунке 9, то соскока не произойдет. Внимательное рассмотрение этого рисунка подсказывает идею, как строить более сложные периодические траектории для специальных классов тупоугольных треугольников. Эти построения изображены на рисунках 10 и 11.

Устойчивые траектории

Только что построенные периодические траектории имеют один существенный недостаток — при сколь угодно малом изменении углов треугольника они *разрушаются* (в том смысле, что вблизи исходной траектории нет периодических траекторий в деформированном треугольнике). Сейчас мы построим периодическую траекторию в тупоугольном треугольнике, свободную от этого дефекта.

Пусть острые углы α и β тупоугольного треугольника ABC связаны неравенствами

$$\frac{\pi-\beta}{2} < k\alpha < \frac{\pi}{2} \leqslant (k+1)\alpha,$$

$$\frac{\pi-\alpha}{2} < l\beta < \frac{\pi}{2} \leqslant (l+1)\beta,$$

где k и l — некоторые натуральные числа. Как и на рисунке 10, *а*, сделаем $k-1$ зеркальных отражений треугольника ABC вокруг вершины A против часовой стрелки и $l-1$ отражений вокруг вершины C по часовой стрелке — рисунок 12, *а*. Крайние лучи AN и CN образуют с основанием AC острые углы $k\alpha$ и $l\beta$. Как мы

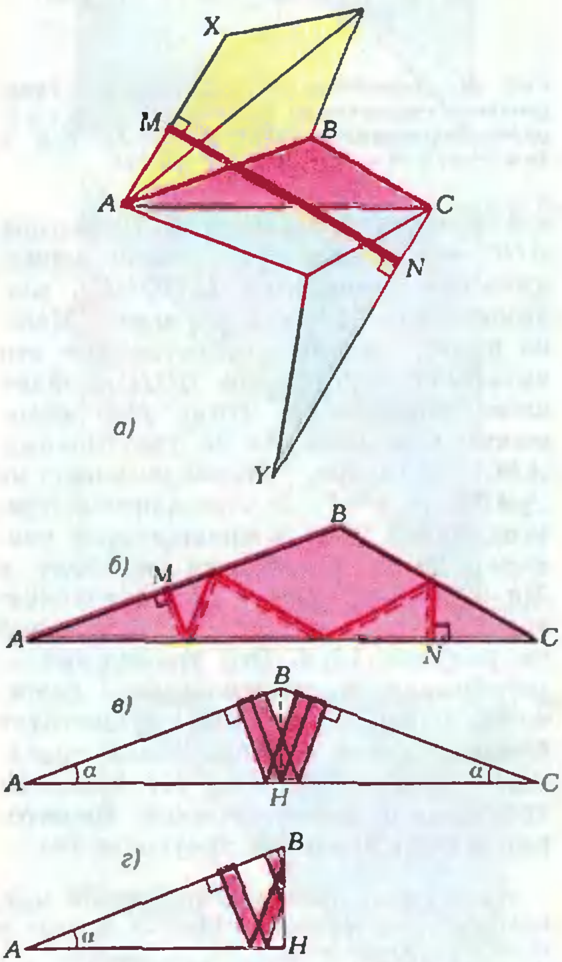


Рис. 10. а) Построение периодической траектории в тупоугольном треугольнике ABC с углами α и β, $k\alpha=l\beta<\pi/2$. На рисунке $\alpha=20°$, $\beta=30°$, $k=3$, $l=2$. После $(k-1)$ зеркального отражения вокруг A и l отражений вокруг C, отрезки AX и CY станут параллельными. MN — их общий перпендикуляр, лежащий внутри «коридора». б) После сложения «гармошкой» получается бильярдная траектория MN, состоящая из $2(k+l)$ звеньев. Она включается в пучок параллельных траекторий. в) При $k=l=1$ получаются четырехзвенные траектории в равнобедренном треугольнике. г) Если сложить треугольник на рисунке в) вдвое, получится пучок шестизвенных траекторий в прямоугольном треугольнике.

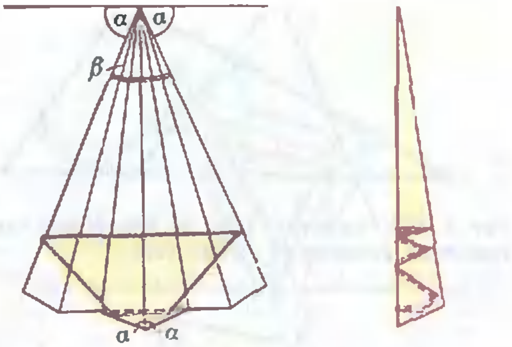


Рис. 11. Периодическая траектория в тупоугольном треугольнике с острыми углами α и β, удовлетворяющими условиям $\alpha+k\beta=\pi/2$ и $2\alpha+\beta>\pi/2$ (k — натуральное число).

знаем, в остроугольном треугольнике ANC существует трехзвенная периодическая траектория $H_1H_2H_3H_1$, соединяющая основания его высот. Можно проверить (мы предоставляем это читателю), что отрезок H_2H_3 пройдет ниже вершины B. Тогда при наложении «гармошкой» на треугольник ABC коридора, составленного из $\triangle ABC$ и $k+l-2$ отраженных треугольников (как в предыдущем разделе), наша траектория перейдет в $2(k+l)-1$-звенную периодическую траекторию в $\triangle ABC$, изображенную на рисунке 12, *б*. Эта траектория — *устойчива:* в треугольнике, достаточно близком к $\triangle ABC$, существует близкая к ней периодическая траектория. Это — следствие устойчивости трехзвенной периодической траектории в остроугольном треугольнике.

Задача 5. Докажите, что отрезок H_2H_3 проходит ниже вершины B (рис. 12, *а*) тогда и только тогда, когда
$(1-\mathrm{ctg}\,k\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\alpha)(1-\mathrm{ctg}\,l\beta\cdot\mathrm{tg}\,\beta)>1-\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta$.

В простейшем случае, когда $k=l=2$, траектория имеет 7 звеньев.

Задача 6. Докажите, что в тупоугольном треугольнике не существует устойчивой периодической траектории, у которой меньше 7 звеньев.

Итоги

Подведем некоторые итоги проведенного исследования периодических траекторий в треугольных бильярдах.

С точностью до подобия треугольник задается парой чисел $\alpha,\ \beta\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ — величинами двух его острых углов. Таким образом, каждый треугольник изображается внутренней *точкой квадрата K со стороной длиной $\frac{\pi}{2}$*. На рисунке 13 изображены треугольники, для которых мы построили периодические бильярдные траектории.

До сих пор открыт вопрос о существовании периодической траектории в произвольном треугольнике. Что же известно о периодических траекториях в треугольниках сверх того, что мы рассказали?

В любом треугольнике с углами вида $\frac{p}{q}\pi$, где p, q — натуральные

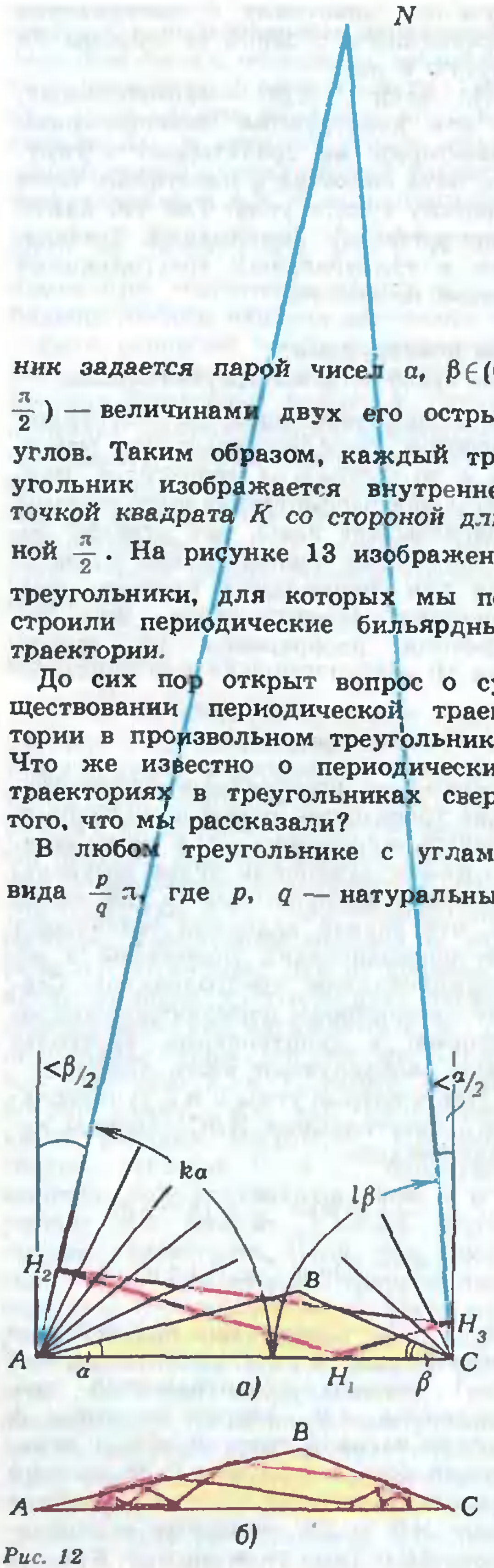


Рис. 12

числа, существуют периодические траектории. Как доказал недавно американский математик Г. Мазур, звенья периодических траекторий в таких треугольниках даже могут образовывать сколь угодно малый угол с любой наперед выбранной прямой.

Кроме того, в произвольном прямоугольном треугольнике существуют периодические траектории со сколь угодно большим числом звеньев. Для остроугольных треугольников это неизвестно, хотя и доказано, что для любого наперед заданного числа N найдется остроугольный треугольник, в котором имеются периодические траектории с более чем N звеньями.

В заключение повторим, что периодические траектории в треугольных бильярдах весьма чувствительны к форме треугольника. Причина разрушения или рождения периодической траектории при деформации треугольника — прохождение через угловую точку границы. Этим обстоятельством объясняется замысловатый характер желтой фигуры на рисунке 13,*в*.

Тех читателей, кто заинтересовался теорией математических бильярдов, мы приглашаем подумать над задачей М1155 (см. с. 27), а также найти какие-нибудь еще тупоугольные треугольники с устойчивыми периодическими траекториями. В этой связи предлагаем вам такую задачу:

Задача 7. Постройте периодическую траекторию из 15 звеньев в тупоугольном треугольнике с углами α и β, удовлетворяющими условиям:

$$\frac{\pi}{8}-\frac{1}{1000}<\alpha<\frac{\pi}{8},\ \frac{\pi}{3}<\beta<3\alpha.$$

Кроме того, советуем прочитать § 9.4 книги М. Берже «Геометрия» и издаваемую в серии «Библиотечка «Квант» книгу Г. А. Гальперина и А. Н. Землякова «Математические бильярды», а также следующие статьи, опубликованные в разное время в «Кванте»: 1. А. Земляков. Математика бильярда (1976, № 5); 2. А. Земляков. Арифметика и геометрия столкновений (1978, № 4); 3. А. Земляков. Бильярды и поверхности (1979, № 9); 4. Г. Гальперин. Бильярд (1981, № 4).

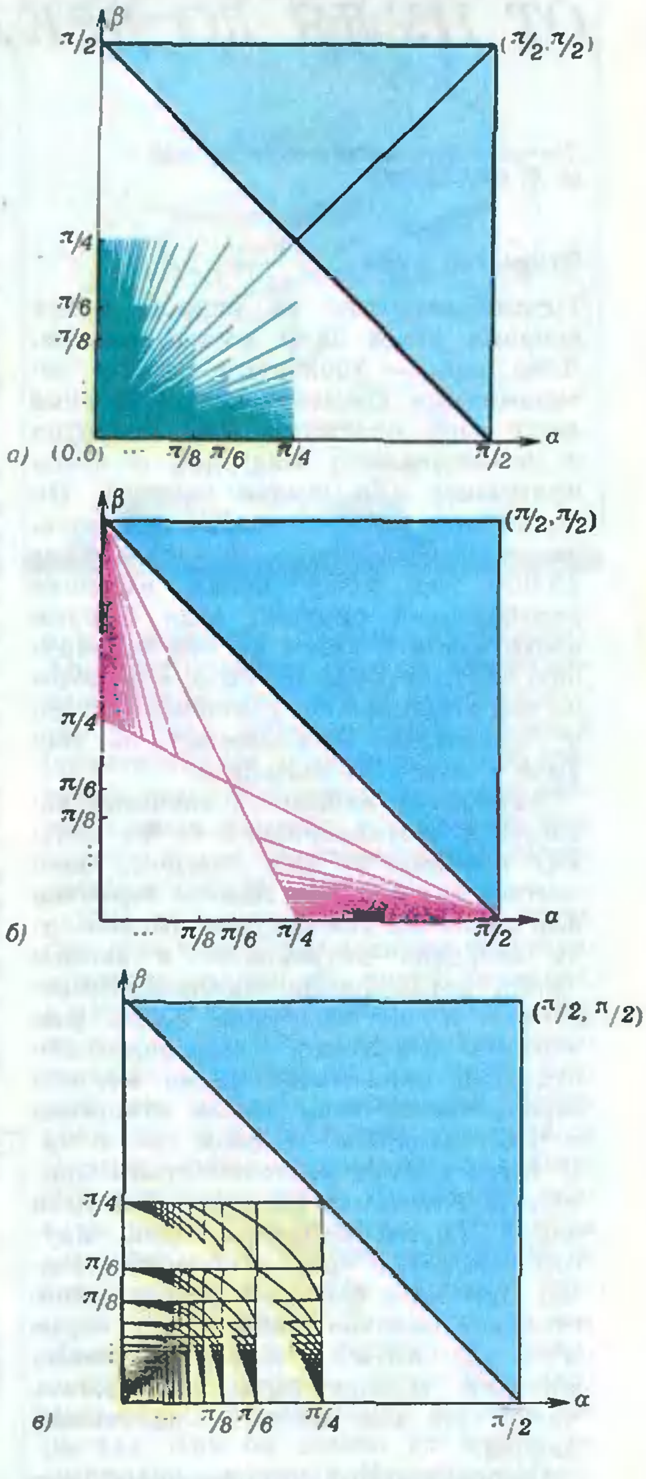


Рис. 13. Множество треугольников, для которых построены периодические траектории. Остроугольные треугольники представлены синей областью $\alpha+\beta>\pi/2$, прямоугольные — красной диагональю $\alpha+\beta=\pi/2$. Треугольники из раздела «две конструкции»: а) — зеленый веер; б) — красные отрезки. Треугольники из раздела «устойчивые траектории» — желтая область на рисунке в).

ОТ НУЛЯ ДО ДЕКАЛЛИОНА

Доктор физико-математических наук
Н. Я. ВИЛЕНКИН

Открытие нуля

Трудно ответить на вопрос, когда впервые люди дали имена числам. Ясно одно — произошло это в незапамятные времена, когда древние люди еще охотились на мамонтов и отвоевывали у медведей и львов пригодные для жилья пещеры. Но числа надо было не только называть, но и записывать. И вот более 25 000 лет тому назад какой-то первобытный охотник взял в руки кость волка и нанес на ней 55 зарубок, сгруппировав их по 5. При этом он еще отделил 5 получившихся групп от остальных. По-видимому, он уже умел считать по пальцам.

Археологи нашли древнейшие календари, составленные в те же далекие времена. В них каждому дню соответствовал свой знак — черточка или какой-нибудь рисунок. Но особенно возросла потребность в записи чисел, когда люди занялись земледелием и скотоводством. Здесь уже черточек не хватало — ведь надо было отдельно показывать число мешков зерна, число овец, число кувшинов с растительным маслом и т. д. И тогда вместо черточек стали применять глиняные фигурки. Фигурки одной формы означали овец, другой — коров, а третьей — мешки зерна. При этом фигурок делали ровно столько, сколько было овец, коров и т. д. Хотя с помощью таких фигурок можно было изображать числа, это еще не были настоящие цифры.

Цифры возникли примерно 5000 лет тому назад в Месопотамии — территории между реками Тигром и Ефратом. Сейчас на этой земле расположены государства Сирия и Ирак. Именно там впервые догадались обозначать одним знаком не одну, а сразу 6 или 10 овец. И вскоре шумеры (народ, живший тогда в Месопотамии) научились обозначать большие числа. Для этого они пользовались шестидесятиричной системой счисления. В их записи каждая цифра при сдвиге влево или вправо меняла свое значение не в 10 раз, как у нас, а в 60. Если мы вместо 2 ч 17 мин 38 с напишем 2 17 38 с, то это будет шумерским обозначением числа секунд, т. е. числа $2\cdot60\cdot60+17\cdot60+38=8258$. Только вместо наших цифр шумеры применяли обозначения ▼ для 1 и ◄ для 10, так что число 21738 они писали так:

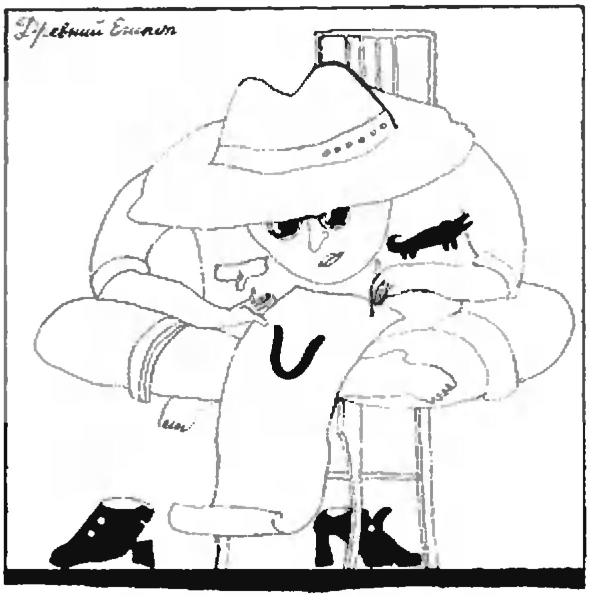
Шумерскую запись чисел использовали и другие народы, поселившиеся потом в Месопотамии,— вавилоняне и ассирийцы.

По-другому записывали числа египтяне — у них были особые знаки для 1, 10, 100, 1000 и т. д., и они писали столько знаков, сколько было в числе единиц, десятков, сотен и т. д. А древние греки для записи чисел пользовались буквами, только писали над ними черту, показывавшую, что это цифра, а не буква. Свою систему обозначения чисел придумали и римляне. У них число 12 записывается в виде XII, а число 9 — в виде IX.

Лишь у шумеров, вавилонян и у жившего в Центральной Америке народа майя система записи чисел была позиционной — значение цифры зависело от ее положения (позиции) в записи числа. Если бы римлянам захотелось написать число *миллиард*, им пришлось бы изобретать новые знаки, а вавилоняне могли с помощью всего лишь двух знаков ▼ и ◄ записывать сколь угодно большие числа.

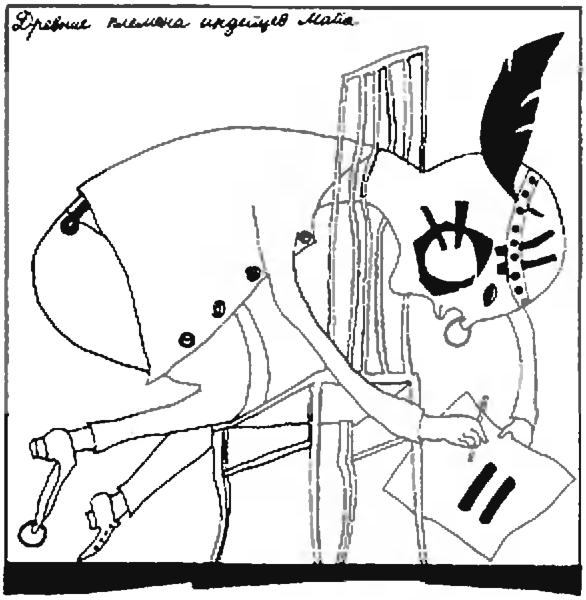
У греков последним знаком для обозначения чисел была буква М. Она обозначала число 10 000, называвшееся *мириада*. Назвать-то греки могли и мириаду и даже мириаду мириад мириад (т. е. число 10^{12}), только записать это число они не могли. Впрочем, с такими большими числами грекам и не приходилось иметь дело. Но все же один из величайших греческих математиков Архимед задумался над вопросом, а как же называть очень большие числа?

В своем сочинении «Исчисление песчинок» («Псаммит») он поставил себе целью показать, что существуют «числа, превышающие число песчинок, которые можно вместить... в пространстве, равном объему... целого мира». Смысл этого высказывания станет ясен, если учесть, что Архимед в отношении устройства мира придерживался взглядов своего старшего современника, выдающегося греческого астронома Аристарха Самосского. По Аристарху, мир представляет собой шар, в центре которого расположено Солнце(!), а границей которого служит «сфера неподвижных звезд». Земля обращается вокруг Солнца по круговой орбите, диаметр которой относится к диаметру Земли так же, как диаметр сферы неподвижных звезд относится к диаметру орбиты Земли. Отправляясь от гипотез современных ему астрономов (которые с теперешней точки зрения



представляются весьма наивными), Архимед полагает диаметр сферы неподвижных звезд не превосходящим ста мириад мириад мириад стадий (что составляет примерно полтора световых года). Песчинку Архимед считает очень малой: в маковом зернышке, по его предположению, содержится мириада песчинок.

Как же называл Архимед очень большие числа? Он называл обычную единицу «единицей чисел первых», а мириаду мириад таких единиц, т. е. число 100 000 000 — «единицей чисел вторых». Мириаду мириад чисел вторых он называл «единицей чисел третьих», и так вел счет до мириады мириад «чисел мириадо-мириадных». Это громадное число. Достаточно сказать, что мы бы записали его в виде единицы с 800 000 000 нулями! Но и здесь не остановился великий ученый. Все названные им числа он объявил «числами первого периода», а мириаду мириад чисел мириадо-мириадных — «единицей второго периода». Так он дошел до мириадо-мириадного периода. Конечно, он мог идти и дальше, назвав число, следующее за названным им, единицей первой эпохи или эры — звучный греческий язык давал ему большие возможности. Но и так число Архимеда было подавляюще большим. Ведь оно записывается в виде еди-



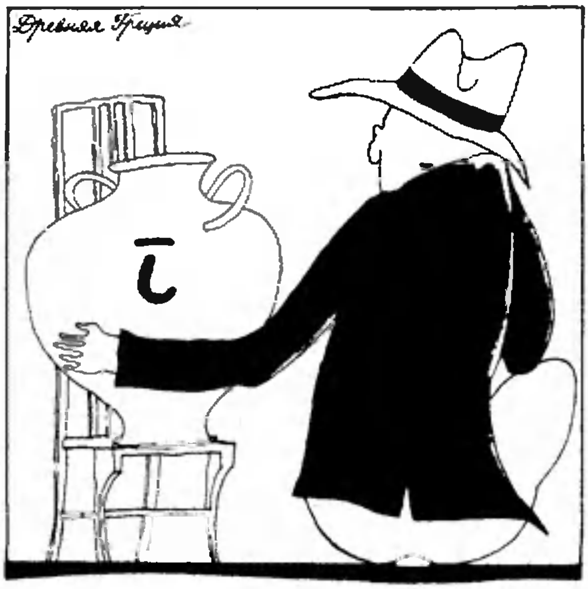
ницы, за которой идет невообразимый хвост из нулей — чтобы записать, сколько в нем нулей, надо написать цифру 8 и поставить после нее 16 нулей. А ведь это не само число Архимеда, а только число нулей в нем!

Хватило ли этих чисел для решения поставленной Архимедом задачи? Оказывается, для этого нужны были лишь числа восьмые первого периода. Теперь мы знаем, что Вселенная неизмеримо больше, чем думал Архимед, и что существуют частицы (например, нейтрино), гораздо меньшие по размеру, чем самая маленькая песчинка, которую мог вообразить себе древнегреческий ученый. И все же, если попробовать сосчитать, сколько нейтрино поместится в шаре, центр которого совпадает с центром Солнца, а радиус равен расстоянию до самой удаленной туманности, то окажется, что и здесь с избытком хватит чисел первого периода.

Но хотя названия громадных чисел у Архимеда уже были, обозначать их он еще толком не умел. Не хватало ему самой малости, такой, что меньше ее и не бывает: Архимед, один из гениальнейших математиков за всю историю человечества, не додумался до... нуля! Сейчас школьники знакомятся с нулем в первом классе и, конечно, вряд ли отдают себе отчет в том, что это одно из важнейших изобретений в математике. Только после того, как люди научились обозначать пропущенные разряды в записи чисел, обозначать, что счет ведется не единицами, а миллионами или сотнями тысяч, они получили в руки могучее орудие познания природы — позиционную систему счисления. Без нуля не было бы всей современной математики, не было бы и таких достижений человеческого разума, как космические корабли, электронные вычислительные машины, атомная энергия.

Удивительнее всего то, что при всей важности этого открытия никто не знает его автора. Вавилоняне более трех тысячелетий пользовались своей позиционной системой счисления, не употребляя нуля. Из-за этого они не могли сказать точно, что означает запись ▽ ▽ ▽ ▽ — то ли это число $60+24$, т. е. 84, то ли это $60\cdot60+24$, т. е. 3624, а то ли это $60\cdot60+24\cdot60$, т. е. 5040. А если учесть, что они применяли и шестидесятиричные дроби, то эта же запись могла обозначать и какую-нибудь дробь, например $84/60$ или $3624/3600$.

Разумеется, такая многозначность записи была очень неудобна, и в конце концов у вавилонских ученых по-

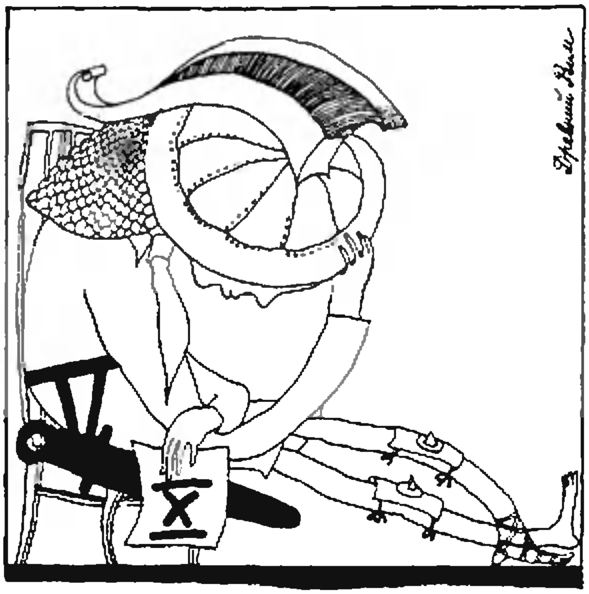


явился знак для пропущенного разряда, т. е. для нуля. Но писать нуль в конце записи, т. е. отличать число 2 от числа 2·60 или 2·60·60, вавилоняне так и не стали. А уже грекам или римлянам нуль был совсем не нужен — их система записи — непозиционная, и отличие друг от друга цифр I, X, C, обозначающих числа 1, 10, 100, видно независимо от того, где стоят эти цифры в записи числа. Скорее всего, нуль придумали купцы, которым часто приходилось считать на абаке — устройстве, напоминающем наши счеты. В абаке были канавки, соответствовавшие единицам, десяткам, сотням, тысячам. В них клали столько камешков, сколько было единиц в соответствующем разряде. А если в какой-нибудь канавке камешков не было, это и означало пропуск разряда, т. е. то, что мы теперь обозначаем нулем. Некоторые записи, дошедшие до нас из Александрии — египетского города с греческой культурой, — наводят на мысль, что нуль уже применялся там примерно 2000 лет тому назад.

Первые записи чисел в десятичной системе счисления, заведомо содержащие цифру 0, обнаружены в Индии. Возможно, что индийцы заимствовали эту цифру у александрийских купцов (торговые связи Индии с Египтом и Месопотамией восходят к глубочайшей древности). Может быть, ее завезли в Индию греческие ученые, бежавшие в эту страну после того, как христиане разгромили центры «языческой науки»; а может быть, эту цифру придумал кто-то из индийских ученых. Но полторы тысячи лет тому назад нуль стал широко применяться в Индии, а потом распространился и в других странах.

Присоединение нуля к девяти цифрам дало возможность обозначать десятью цифрами любое число, как бы велико оно ни было. Чтобы получить очень большое число, можно было бы взять, например, лист пальмы (на котором писали индейцы), начертить на нем знак для единицы, а потом писать нули, пока места хватит.

Индийцы очень обрадовались этой возможности. В их легендах есть повествование о битвах, в которых участвовало такое количество обезьян, что для его обозначения надо было написать после единицы еще 25 нулей! Столько обезьян не поместится во всей Солнечной системе.

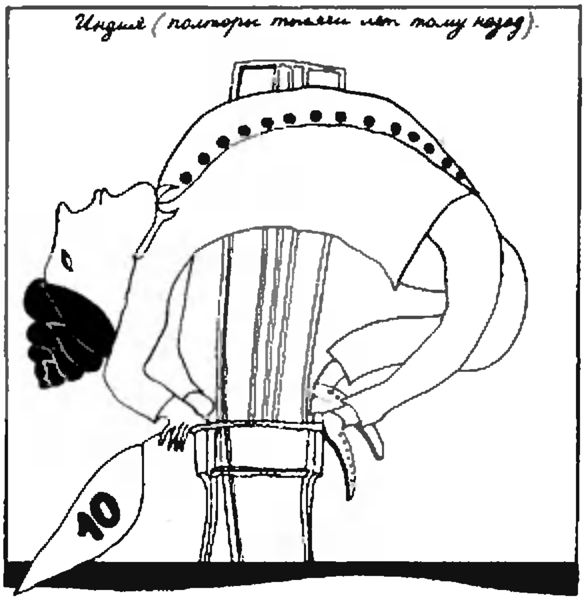


И самое главное, запись таких гигантских чисел стала довольно короткой. Ведь если бы живший 25 тысячелетий тому назад древний человек имел представление о миллионе и захотел бы изобразить это число с помощью зарубок на волчьих костях, ему пришлось бы истребить несколько тысяч волков. А для записи миллиарда не хватило бы волков во всех европейских лесах! Теперь же вся запись умещалась в одной строке.

Надо сказать, что хотя обозначение нуля оказалось чрезвычайно полезным для математики, первоначально некоторые ученые встретили это нововведение враждебно. «Зачем обозначать то, чего нет?» — вопрошали они. Но полезность нового открытия вскоре стала ясна всем.

Что такое декаллион?

Уже у индийцев были названия для очень больших чисел. В своих учениях о происхождении и развитии мира они свободно оперировали такими числами, как 4 320 000 000 и еще бóльшими, давая им особые назва-



ния. Миллион они называли «коти», сто миллионов — «врнда», а в легендах о Будде рассказывалось, как он давал имена еще бóльшим числам — вплоть до числа, записываемого единицей с пятьюдесятью нулями.

Но в Европе после падения античной науки не знали названий разрядов чисел, следующих за тысячей. Число 999 999 европейские математики еще могли прочесть, а дальше они считать не умели. В 1271—1275 годах венецианский купец Марко Поло совершил неслыханное для той поры путешествие. Пройдя северным побережьем Черного моря, он пересек Волгу, бескрайние азиатские степи и Великим шелковым путем добрался до Китая. Здесь он прожил много лет, наблюдая то, о чем тогдашние европейцы и понятия не имели: полеты пороховых ракет, книгопечатание, изготовление фарфора.

Когда он снова оказался в Венеции, рассказам не было конца. И чаще всего в рассказах Марко Поло повторялось слово «миллионе» — большая тысяча. Так он назвал тысячу тысяч. Недоверчивые венецианцы прозвали путешественника Марко Миллионе и думали, что он их обманывает. Только через несколько столетий, когда европейцы лучше познакомились с Китаем, они узнали, что рассказы Поло были правдивыми.

В XV веке французский математик Никола Шюке по созвучию с миллионом ввел слово «биллион», которое обозначает миллион миллионов. Чтобы записать биллион, надо после единицы поставить 12 нулей. Приставка «би» по-латыни означала «второй» (в театрах кричат «бис», когда хотят повторения). Поэтому «биллион» можно прочесть и так: «второй миллион». Миллион биллионов назвали «триллионом», а миллион триллионов получил название «квадриллион» (от латинского слова «кварта» — «четыре»).

В США, Англии и Германии принята иная система названий чисел. По этой системе тысячу миллионов называют миллиардом или биллионом, тысячу биллионов — триллионом, тысячу триллионов — квадриллионом. Эту систему названий используют и в нашей стране. Вот названия некоторых громадных чисел с указанием числа нулей после единицы в двух системах:

	Франция	СССР, США, Германия, Англия
Миллион	6	6
Биллион	12	9
Триллион	18	12
Квадриллион	24	15
Квинтиллион	30	18
Секстиллион	36	21
Септиллион	42	24
Окталлион	48	27
Нонакаллион	54	30
Декаллион	60	33

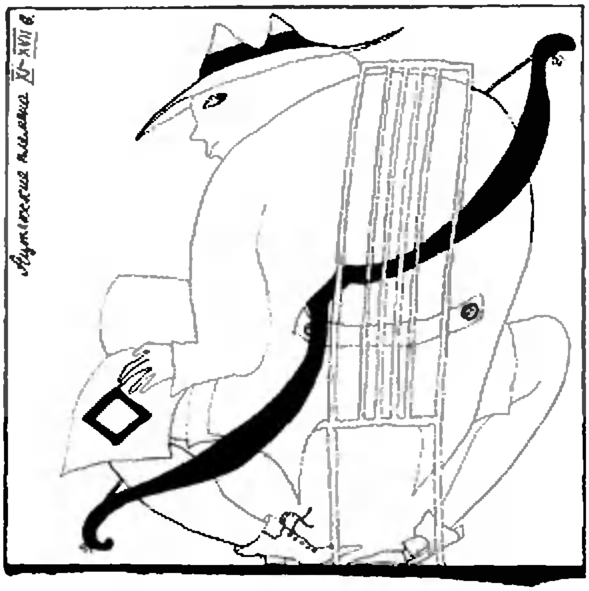
В школе этих названий не изучают, да они и не слишком нужны. В газетах мы часто читаем, что та или иная фабрика выпустила столько-то миллионов метров ткани или такая-то гидростанция дала столько-то миллиардов киловатт-часов электроэнергии. Триллионы встречаются в газетах, когда пишут о бюджетах крупнейших государств. А вот название «квадриллион» в газетах не попадается — вряд ли есть что-нибудь на земном шаре, что исчислялось бы квадриллионами.

Только в науке оказываются нужны такие большие числа. В 16 граммах воздуха содержится примерно септиллион частичек вещества, которые ученые называют молекулами. Возьмем шар с центром в центре Земли и радиусом, равным расстоянию до самых далеких туманностей на небе (это расстояние луч света проходит за десяток миллиардов лет, а он пробегает в секунду 300 000 км). Если набить этот шар самыми маленькими частицами, которые известны сейчас физикам, то и тогда понадобится число, которое не превосходит единицы с сотней нулей. Есть лишь одна область науки, где встречаются еще бóльшие числа. Это наука о числе различных комбинаций — комбинаторика. Подсчитано, например, что число различных возможных шахматных партий выражается единицей с 120 нулями!

Но страшные названия громадных чисел не нужны и еще по одной причине. Их можно проще обозначать, используя понятие степени. Например, запись 10^8 означает произведение восьми десяток, т. е. сто миллионов. С помощью степеней декаллион можно записать так: 10^{33}. А число мельчайших частичек в громадном шаре, о котором говорилось раньше, никак не больше чем 10^{100}.

Странная вещь математика! Как только математик получает в руки способ коротко записывать что-нибудь, он тут же использует этот способ для получения чего-нибудь уж совсем невообразимого. Казалось бы, получив записи вида 10^{100}, можно и успокоиться. Но нет, математик сразу думает, а что получится, если использовать знак степени дважды и написать такое число:

$$10^{10^{10}}.$$



Эта запись означает, что сначала надо возвести 10 в десятую степень. Получится ни много ни мало, а десять миллиардов. Ну а теперь надо возвести 10 в десятимиллиардную степень. Для этого следует написать 1, а потом десять миллиардов нулей. Если записывать это число, отводя на каждую цифру по 5 мм, то понадобится бумажная лента длиной в 50 000 км. Такой лентой можно опоясать весь земной шар по экватору, да еще останется кусок, чтобы протянуть его на Северный полюс. Но вот если бы мы попробовали записать число Архимеда мириадо-мириадного периода, то тут понадобилась бы лента еще в 8 миллионов раз длиннее. Она была бы в 2600 раз больше расстояния от Земли до Солнца! Такие большие числа никогда не встречаются не только в практических, но и в научных вопросах, но обозначать их, и даже бóльшие числа, например $10^{10^{10^{10}}}$, математики умеют.

КАК УБЕГАТЬ ОТ ДОЖДЯ?

(Совершенно серьезное исследование)

И. Ф. АКУЛИЧ

Введение

Представьте себе, что вы идете по улице в пасмурную погоду, не имея при себе ни зонтика, ни плаща, ни накидки... Вдруг нежданно-негаданно на вас обрушивается сильнейший ливень, да еще и с ветром.

Что делать?

Подавляющее большинство людей (и автор в том числе) ответит так: немедленно бежать под ближайшее укрытие и чем быстрей, тем лучше. Истина, казалось бы, неоспоримая. Однако встречаются люди, рассуждающие и так: «Безусловно, надо направиться под укрытие. Но вот бежать при этом как можно быстрее не имеет

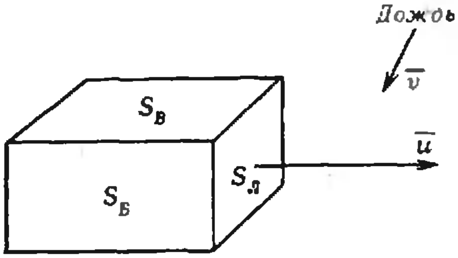


Рис. 1.

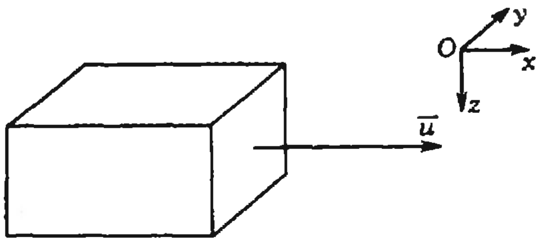


Рис. 2.

смысла: если я быстро бегу, я, конечно, меньше времени нахожусь под дождем, и, следовательно, на меня упадет меньше капель сверху. Но зато я собью своим телом больше тех капель, которые находятся передо мной. Я меньше намокну сверху, зато больше намокну спереди. Так какая мне выгода от быстрого бега? Никакой.» И такие люди спокойно идут под дождем, невзирая на удивление окружающих.

Как же трактовать такое рассуждение? Как заблуждение? Пожалуй. Но... вдруг это не заблуждение, а, наоборот, интуиция, и люди, рассуждающие таким образом, правы?

Вот соображение в их пользу. Представьте себе, что ветер дует в направлении от вас к укрытию и настолько силен, что дождь практически горизонтален. Тогда лучше всего убегать от дождя со скоростью ветра: все капли будут двигаться параллельно вам и ни одна на вас не упадет. Невыгодно двигаться медленнее, но невыгодно двигаться и быстрее: вы намокнете больше! Конечно, не так-то просто двигаться со скоростью (даже попутного) сильного ветра, но все же это рассуждение побуждает нас вникнуть в задачу.

Постановка задачи и необходимые упрощения

Сформулируем условие задачи:

На улице стоит человек. Внезапно начинается дождь. Человек направляется к ближайшему укрытию, находящемуся на расстоянии l от него. С какой скоростью он должен передвигаться, чтобы намокнуть как можно меньше?

Задача поставлена, но в таком виде, пожалуй, нам ее не решить. Действительно, человек — существо сложное по форме, а при движении он к тому же непрерывно свою форму изменяет (переставляет ноги, размахивает руками...). Так что совершить точный расчет — задача неимоверно трудная. Поэтому ничего не остается, как решать ее приближенно, в связи с чем переформулируем задачу:

Прямоугольный параллелепипед, площади граней которого равны $S_Б$, $S_В$ и $S_Л$ (от слов «боковая», «верхняя» и «лицевая») движется со скоростью $\bar{u}$ перпендикулярно грани $S_Л$. В то же самое время идет дождь, каждая капля которого имеет скорость $\bar{v}$ (рис. 1) (вектор $\bar{v}$ не обязательно направлен вертикально вниз — дождь может быть и косым). Количество дождевых капель в единице объема равно k. Спрашивается: сколько капель N попадет на параллелепипед за то время, что он передвинется на расстояние l, и при каком значении скорости $\bar{u}$ эта величина N будет наименьшей?

Приступаем к решению

Введем в пространстве систему координат $Oxyz$: ось Oz направим вертикально вниз, ось Ox — по направлению вектора $\bar{u}$, а ось Oy — перпендикулярно плоскости Oxz, причем так, чтобы проекция вектора скорости падающих дождевых капель v на ось Oy была неотрицательна (рис. 2). Так как вектор $\bar{v}$ задан, можно считать, что известны проекции вектора v на оси координат. Обозначим их v_x, v_y и v_z. Что можно сказать об этих проекциях? Разумеется, $v_y \geqslant 0$ (так выбрана ось Oy). Кроме того, $v_z>0$ (дождь может идти только сверху вниз). А вот величина v_x может быть как положительной (попутный дождь), так и отрицательной (встречный дождь), а то и вообще равняться нулю.

Будем решать задачу в системе отсчета, связанной с параллелепипедом, т. е. будем считать параллелепипед неподвижным: тогда дождевые капли в этой системе отсчета получат скорость $\bar{w}=\bar{v}-\bar{u}$. Проекции вектора скорости $\bar{w}$ на оси координат будут $w_x=v_x-u$, $w_y=v_y$, $w_z=v_z$ (u — это длина вектора $\bar{u}$). Требуется определить, сколько капель N упадет на параллелепипед за время $\tau=l/u$ и при каком u значение N будет наименьшим.

Понятно, что за время τ на параллелепипед упадут все капли, отстоящие от граней параллелепипеда на расстояние, не большее, чем $\tau\cdot|\bar{w}|$, в направлении, противоположном вектору $\bar{w}$, т. е. все капли, расположенные внутри объема тела, обведенного красными линиями на рисунке 3. Как найти объем этого тела? Нетрудно заметить, что это тело состоит из трех призм, площади оснований которых равны $S_Л$, $S_Б$ и $S_В$, а высоты — абсолютным величинам проекций вектора $\tau\cdot\bar{w}$ на оси Ox, Oy и Oz соответственно. Поэтому объем этого тела равен

$$\tau(|w_x|S_Л+|w_y|S_Б+|w_z|S_В)=$$
$$=\tau(|v_x-u|S_Л+v_yS_Б+v_zS_В),$$

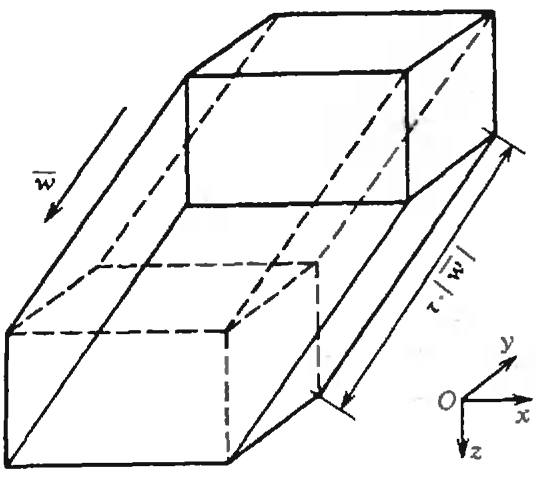


Рис. 3.

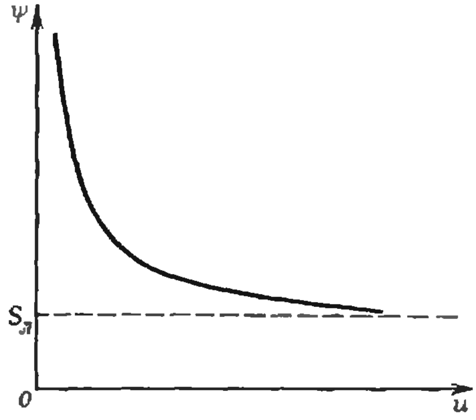


Рис. 4.

а искомое количество капель N равно

$$\tau k(|v_x-u|S_Л+v_yS_Б+v_zS_В).$$

Учитывая, что $\tau=l/u$, получаем зависимость N от u:

$$N=kl\,\frac{|v_x-u|S_Л+v_yS_Б+v_zS_В}{u}.$$

Теперь найдем такое $u>0$, при котором N будет минимально.

Продолжаем решение

Поскольку величины k и l постоянны, будем для удобства оперировать величиной

$$\psi=\frac{N}{kl}=\frac{|v_x-u|S_Л+v_yS_Б+v_zS_В}{u}.$$

Рассмотрим два случая:

1. $v_x\leqslant 0$ (*встречный дождь*).

В этом случае $v_x-u<0$, и функция ψ принимает вид:

$$\psi=\frac{(u-v_x)S_Л+v_yS_Б+v_zS_В}{u}=$$
$$=S_Л+\frac{-v_xS_Л+v_yS_Б+v_zS_В}{u}.$$

Поскольку $v_x\leqslant 0$, числитель дроби положителен, и функция $\psi(u)$ убывает на интервале $(0;\ +\infty)$. График зависимости функции ψ от u изображен на рисунке 4. Мы видим, что хотя ψ и убывает с ростом u, все же всегда $\psi>S_Л$, причем $\psi\to S_Л$ при $u\to\infty$. Так что в случае встречного дождя сторонники теории «непоспешания» вроде бы ошибаются: чем быстрее бежишь, тем меньше намокнешь. Однако тут же открывается и другой, довольно неожиданный на первый взгляд факт: так как $\psi > S_л$ для любого u, $N = kl\psi$ *всегда больше* $klS_л$. Это значит, что с какой скоростью ни беги (хоть лети со скоростью пули), все равно «минимальная доза» дождя, равная $klS_л$, гарантирована. Так что некоторая логика в рассуждениях тех, кто не любит спешить, здесь вроде бы имеется.

2. $v_x > 0$ (*попутный дождь*).

Здесь необходимо рассмотреть два интервала:

1) $0 < u \leqslant v_x$. Тогда $|v_x - u| = v_x - u$, и

$$\psi = \frac{v_x S_л + v_y S_Б + v_z S_В}{u} - S_л.$$

Эта функция убывает на интервале $(0;\ v_x]$ и достигает минимума при $u = v_x$:

$$\psi|_{u=v_x} = \frac{v_y S_Б + v_z S_В}{v_x}.$$

2) $u > v_x$. Тогда $|v_x - u| = u - v_x$, и

$$\psi = \frac{-v_x S_л + v_y S_Б + v_z S_В}{u} + S_л.$$

Здесь уже нельзя сразу сказать, как ведет себя ψ с возрастанием u. Это зависит от числителя дроби $A = -v_x S_л + v_y S_Б + v_z S_В$. Если $A > 0$, то $\psi(u)$ — убывающая функция на участке $(v_x;\ +\infty)$, если $A < 0$ — то возрастающая на этом интервале, а если $A = 0$, то $\psi = S_л = \text{const}$ на этом интервале.

Графики зависимости $\psi(u)$ для всех $u \in (0;\ +\infty)$ приведены на рисунке 5. Видно, что на участке от 0 до v_x кривые имеют одинаковый вид для всех трех случаев ($A > 0$, $A = 0$ и $A < 0$), а после излома при $u = v_x$ — различны.

Что из этого следует? А то, что аргументы сторонников рассматриваемой неправдоподобной теории «медленной ходьбы» при попутном дожде оказываются в некоторых случаях неожиданно сильными и осмысленными, но подробнее об этом — ниже.

Выводы

Проанализировав результаты расчетов и графики на рисунках 4 и 5, мы

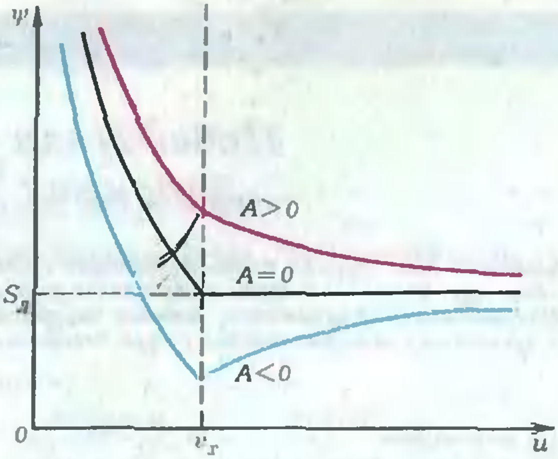


Рис. 5.

можем обстоятельно ответить на вопрос, как убегать от дождя.

Итак, если дождь встречный, то надо бежать к укрытию как можно быстрее. Если же дождь попутный, то сначала необходимо мысленно оценить величину $A = -v_x S_л + v_y S_Б + v_z S_В$. Если окажется, что $A > 0$, то и в этом случае желательно поторопиться. Если $A = 0$, можно передвигаться с любой скоростью, превышающей v_x,— намокнете вы одинаково. Ну а если $A < 0$ — надо бежать строго со скоростью, равной v_x— тогда вы намокнете меньше всего.

Если, скажем, $v_y = 0$ (случай попутного ветра), то неравенство $A < 0$ равносильно неравенству $v_x S_л > v_z S_В$. Поскольку для высокого худого человека $S_л$ значительно больше $S_В$, это неравенство может выполняться при относительно небольших, «пешеходных» v_x. Такой человек, если он будет двигаться к укрытию так, чтобы траектории капель казались ему вертикальными, имеет шанс вообще остаться сухим. Это называется — «проскочить между капельками».

Редакционный совет, редакционная коллегия и редакция «Кванта» с глубоким прискорбием извещают читателей о том, что 3 января 1989 года на 81-м году жизни скончался член редакционного совета академик Сергей Львович Соболев.

Победители конкурса «Задачник «Кванта»

Ежегодно наш журнал проводит конкурс среди школьников по решению задач из «Задачника «Кванта». Объявляем имена победителей конкурса «Задачник «Кванта» 1988 года. Награждаются Дипломом и значком журнала «Квант» и получают право участвовать сразу в четвертом (республиканском) туре Всесоюзной олимпиады 1989 года:

По математике

А. Акимов — Евпатория, с. ш. № 6, 9 кл.
А. Акопян — Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 9 кл.
Ю. Великина — Днепропетровск, с. ш. № 45, 9 кл.
П. Григорьев — Рига, с. ш. № 13, 10 кл.
Ю. Гринфельд — Москва, с. ш. № 57, 10 кл.
Х. Джафаров — с. Тюркоба АзССР, 9 кл.
Б. Дубров — Минск, с. ш. № 107, 9 кл.
В. Жилянскайте — Вильнюс, с. ш. № 43, 11 кл.
И. Зеленко — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.
И. Ионие — Москва, с. ш. № 57, 10 кл.
В. Калошин — Харьков, ФМШ № 24, 10 кл.
Л. Каминштейн — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.
Н. Капуткина — Москва, с. ш. № 648, 10 кл.
С. Коваценко — Винница, с. ш. № 6, 8 кл.
Г. Кронин — Ленинград, с. ш. № 30, 9 кл.
С. Лесик — Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.
Е. Ломовцева — Белорецк, с. ш. № 14, 10 кл.
В. Марченко — Минск, с. ш. № 50, 10 кл.
А. Морозова — Одесса, с. ш. № 100, 9 кл.
И. Опульский — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
И. Поляк — Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.
Н. Путинайте — Таураге, с. ш. № 1, 11 кл.
Г. Тер-Сааков — Баку, с. ш. № 200, 10 кл.
С. Тер-Сааков — Баку, с. ш. № 200, 10 кл.
С. Тихонов — Воронеж, с. ш. № 58, 9 кл.
Д. Турсунов — Караганда, с. ш. № 3, 10 кл.
В. Фельдшеров — Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
М. Хасидовский — Ташкент, с. ш. № 110, 10 кл.
А. Цинкер — Ташкент, с. ш. № 110, 10 кл.

По физике

А. Ахмаджанов — с. Алимбек Андижанской обл., 10 кл.
Н. Балюнас — Вильнюс, с. ш. № 45, 10 кл.
О. Белый — Баку, с. ш. № 56, 10 кл.
С. Бобровник — Черновцы, с. ш. № 24, 10 кл.
Э. Бирова — Тбилиси, с. ш. № 128, 11 кл.
В. Гавенский — Баку, с. ш. № 46, 10 кл.
Г. Гершанок — Рига, с. ш. № 52, 10 кл.
В. Головко — Старый Оскол, с. ш. № 16, 8 кл.
О. Гусар — Канев, с. ш. № 4, 8 кл.
Б. Дейч — Харьков, ФМШ № 24, 10 кл.
М. Дорохова — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 9 кл.
В. Дядечко — Винница, с. ш. № 17, 10 кл.
В. Завадский — Минск, с. ш. № 50, 10 кл.
С. Казенас — Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
М. Капустин — Львов, с. ш. № 50, 9 кл.
С. Карапетян — Севан, с. ш. № 3, 10 кл.
С. Касаманян — Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 10 кл.
М. Ковалев — Губкин, с. ш. № 2, 9 кл.
А. Кожевников — Калуга, с. ш. № 24, 10 кл.
Г. Колесницкий — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 11 кл.
М. Колпаков — п. Почет Красноярского края, 8 кл.
А. Комник — Старый Оскол, с. ш. № 16, 10 кл.
О. Кондратьев — Брест, с. ш. № 1, 10 кл.
А. Крайский — Москва, с. ш. № 2, 10 кл.
М. Лысянский — Новосибирск, с. ш. № 130, 10 кл.
Р. Мизюк — Ровно, с. ш. № 13, 9 кл.
С. Михайлов — Наманган, с. ш. № 1, 10 кл.
Ш. Нурматов — Наманган, с. ш. № 31, 10 кл.
Е. Пивоваров — Ленинград, с. ш. № 566, 9 кл.
С. Польшин — Харьков, с. ш. № 27, 8 кл.
В. Розенблит — Рига, с. ш. № 79, 10 кл.
Н. Рябова — Харьков, ФМШ № 24, 9 кл.
А. Серебряков — Москва, с. ш. № 57, 10 кл.
М. Субботин — Старый Оскол, с. ш. № 16, 9 кл.
В. Тамошюнас — Вильнюс, с. ш. № 45, 10 кл.
С. Тимашов — Алма-Ата, РФМШ, 9 кл.
М. Турлаков — Фрунзе, с. ш. № 61, 10 кл.
С. Храпов — Коломна, с. ш. № 30, 10 кл.
Д. Чокин — Алма-Ата, РФМШ, 9 кл.
О. Шведов — Москва, с. ш. № 7, 10 кл.
А. Шворob — Барановичи, с. ш. № 11, 10 кл.

(Окончание см. на с. 42)

Задачник „Кванта"

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 1989 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3 — 89» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1151» или «Ф1158». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи

М1151 — М1155, Ф1158 — Ф1162

М1151. а) Докажите равенство (где $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$):

$$\frac{1\cdot 2!}{2}+\frac{2\cdot 3!}{2^2}+\ldots+\frac{n(n+1)!}{2^n}=\frac{(n+2)!}{2^n}-2.$$

б) Найдите сумму

$$\frac{1\cdot 3!}{3}+\frac{2\cdot 4!}{3^2}+\ldots+\frac{n(n+2)!}{3^n}.$$

В. Н. Жоха

М1152. Пусть h и l — высота и биссектриса, проведенные из одной вершины треугольника, R и r — радиусы его описанной и вписанной окружностей. Докажите неравенство $h/l \geqslant \sqrt{2r/R}$.

Корнел Берчеану, Иштван Варга (Румыния)

М1153. Какое наибольшее число поворотов может содержать замкнутый маршрут ладьи, обходящий по одному разу все клетки шахматной доски 8×8 клеток?

М. В. Хованов

М1154*. Докажите, что если четырехугольник вписан в окружность и описан около другой окружности, то прямая, проведенная через центры этих окружностей, проходит через точку пересечения диагоналей четырехугольника.

В. Ю. Протасов

М1155. Точка движется в треугольнике, отражаясь от его сторон по закону «угол падения равен углу отражения». Периодической называется такая траектория этой точки, которая является замкнутой ломаной и не проходит через вершины треугольника. (Примеры периодических траекторий с 3-мя и 6-ю звеньями в треугольнике приведены на рисунке 8 на с. 12.

а) Докажите, что ни в каком треугольнике с различными сторонами нет четырехзвенной периодической траектории.

Существует ли остроугольный треугольник, имеющий периодическую траекторию б) из 5 звеньев? в) из 7 звеньев?

Г. А. Гальперин, А. М. Степин

Ф1158. Автомобиль повышенной проходимости может использовать в качестве ведущих либо передние, либо задние колеса. Водитель хочет буксировать тросом тяжелый груз. Какую максимальную силу тяги T (без рывка) сможет развить автомобиль, если коэффициент трения колес о дорогу $\mu=0{,}4$, масса автомобиля $M=2$ т, расстояние между центрами колес $l=4$ м, радиус колес $R=0{,}3$ м? Передняя и задняя оси расположены в одной горизонтальной плоскости; центр масс автомобиля лежит в этой плоскости на равном расстоянии от осей; в этой же плоскости лежит трос. Какие колеса должны быть ведущими? Зависит ли от этого T?

А. И. Буздин

Задачник „Кванта"

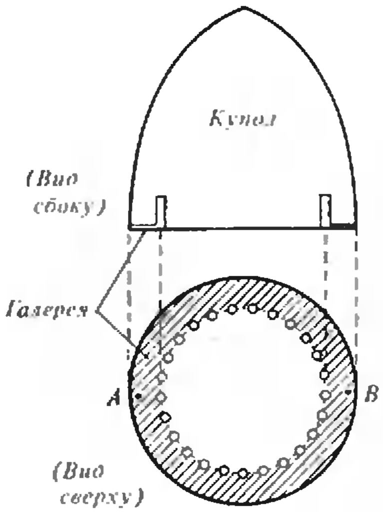


Рис. 1.

Рис. 2.

Ф1159. Представьте, что вы находитесь в движущейся с ускорением электричке и идете с постоянной относительно вагона скоростью вперед по ходу поезда. Весьма ощутимая сила толкает вас назад, и вы, несомненно, совершаете работу против этой силы. На что же расходуется ваша работа? Видимо, она не может идти на дополнительный разгон электрички — ведь вы толкаете ее назад. В чем же здесь дело? не нарушается ли закон сохранения энергии?

А. Н. Коротков

Ф1160. В цилиндре радиусом R и высотой H находится N электронов. Параллельно оси цилиндра приложено постоянное магнитное поле индукцией B. Предполагая, что все электроны имеют одинаковые по величине скорости v, лежащие в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, а удары электронов о стенки цилиндра абсолютно упругие, оцените, чему равно и как зависит от магнитного поля давление на стенки цилиндра, которое создает такой «электронный газ» (давление можно найти с точностью до постоянного коэффициента, не зависящего от магнитного поля). Заряд электрона e, масса m. Считать, что $(mv/eB) \ll R$ («сильное» поле B). Взаимодействием электронов друг с другом пренебречь.

Д. А. Купцов

Ф1161. В архитектурной акустике хорошо известно явление «шепчущие» галереи. В крупных соборах (например, в соборе Святого Петра в Риме) по окружности основания купола устроена огороженная площадка (галерея), куда разрешен доступ туристам. Давно было замечено, что негромкая речь в точке A (рис. 1) хорошо слышна в точке B, если говорящий смотрит вдоль стены галереи. Но если говорящий смотрит в направлении на точку B, то при такой же громкости речи в точке B ничего не слышно. Почему это происходит?

В точке A ненаправленный источник звука испускает достаточно громкий импульс длительностью τ_1. Какова будет длительность импульса, принятого в точке B? Диаметр галереи d.

Б. И. Клячин

Ф1162. Под водой на глубине h находится точечный источник света. Где расположено изображение этого источника для наблюдателя, смотрящего вдоль поверхности воды (рис. 2)? Показатель преломления воды n.

С. С. Кротов

Задачник „Кванта"

Решения задач
М1125 — М1130, Ф1137 — Ф1142

М1125. *Рассматривается последовательность слов, состоящих из букв А и В. Первое слово в последовательности — А; k-е слово получается из (k — 1)-го с помощью следующей операции: каждое А заменяется на ААВ, каждое В — на А.*
а) Докажите, что каждое слово является началом следующего; тем самым определяется бесконечная последовательность букв:
ААВААВАААВААВАААВ...
б) На каком месте в этой последовательности встретится 1988-я буква А?
в) Докажите, что эта последовательность непериодическая.

$w_1 = A$,
$w_2 = AAB$,
$w_3 = \underbrace{AAB}_{w_2}\,\underbrace{AAB}_{w_2}\,\underbrace{A}_{w_1}$,

$w_4 = \underbrace{AABAABA}_{w_3}\,\underbrace{AABAABA}_{w_3} \times$
$\times \underbrace{AAB}_{w_2}$.

Таблица

k	$a_k = b_{k+1}$	s_k	$t_k = a_{k+1}/a_k$
1	1	1	2
2	2	3	5/2
3	5	7	12/5
4	12	17	29/12
5	29	41	70/29
6	70	99	....
7	169	239	
8	408	577	
9	985	1393	
10	2378	3363	
...	...	...	

Обозначим k-е слово через w_k. По правилу, указанному в условии, из слова w_k получается слово w_{k+1}. Пользуясь этим, можно доказать методом индукции, что при $k > 1$ слово w_{k+1} состоит из повторенного дважды слова w_k и w_{k-1} (для $k=2$ и $k=3$ это показано на полях):

$$w_{k+1} = w_k w_k w_{k-1}. \qquad (*)$$

В самом деле, применяя наше правило к соотношению (*), мы из w_k получим w_{k+1}, а из w_{k-1} получаем w_k, поэтому если это соотношение выполнено для некоторого k, то выполнено и аналогичное соотношение для $k+1$:

$$w_{k+2} = w_{k+1} w_{k+1} w_k.$$

Тем самым, соотношение (*) доказано для всех $k > 1$.

Отсюда, в частности, следует утверждение а): каждое слово w_k является началом слова w_{k+1}; тем самым все w_k — это начальные отрезки бесконечного слова $w = AABAABAAAB...$

Пусть a_k и b_k — число букв A и B в слове w_k, $s_k = a_k + b_k$ — число всех букв в слове w_k. Из правила перехода и равенства (*) вытекают соотношения

$$b_{k+1} = a_k,\ a_{k+1} = 2a_k + b_k, \qquad (1)$$
$$a_{k+1} = 2a_k + a_{k-1}\ (a_1 = 1,\ a_2 = 2). \qquad (2)$$
$$s_{k+1} = 2s_k + s_{k-1}\ (s_1 = 1,\ s_k = 3). \qquad (3)$$

Они дают возможность найти первые члены последовательностей a_k, $b_k = a_{k-1}$ и s_k ($k = 1, 2, 3, ...$) — см. таблицу.

Обозначим через $N_A(m)$ номер места, на котором встретится m-я буква A. Если $a_n \leqslant m < a_{n+1}$, то впервые m-я буква A появляется в слове w_{n+1}, причем, как легко увидеть из (*),

$$N_A(m) = \begin{cases} s_n + N_A(m - a_n), \text{ если } m \leqslant 2a_n; \\ 2s_n + N_A(m - 2a_n), \text{ если } 2a_n < m \leqslant a_{n+1}. \end{cases}$$

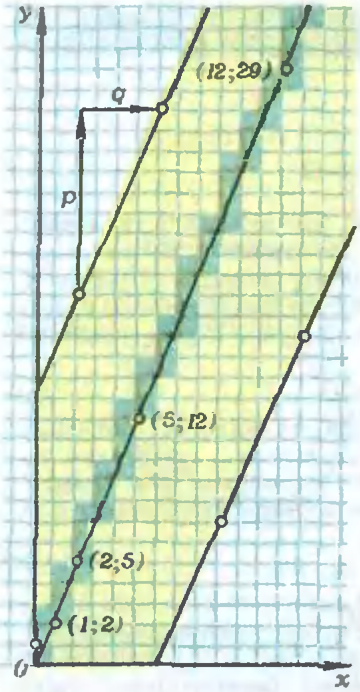
Пользуясь этими равенствами, находим ответ на вопрос б):

$$N_A(1988) = 2\cdot 1393 + N_A(1988 - 2\cdot 985) =$$
$$= 2786 + N_A(18) = 2786 + 17 + N_A(18 - 12) =$$
$$= 2803 + 7 + N_A(1) = 2811.$$

(Здесь использованы значения $a_9 = 985$, $s_9 = 1393$; $a_4 = 12$, $s_4 = 17$; $a_3 = 5$, $s_3 = 7$; $N_A(1) = 1$.)

Доказать непериодичность w помогает геометрическое представление этой последовательности (см. рисунок на с. 30). На клетчатой бумаге строим ломаную, звенья которой соответствуют последовательности букв w; букве A — отрезок, направленный вверх, букве B — вправо. Видно, что точки $(b_k; a_k)$, лежащие на этой ломаной и соответствующие словам w_k — начальным отрезкам w ($k = 1, 2, 3...$),— лежат вблизи одной прямой, проходящей через начальную точку. Докажем это и найдем угловой коэффициент τ (наклон) этой прямой.

Положим $t_k = a_k/b_k = a_k/a_{k-1}$ (наклон τ будет равен пределу последовательности t_k). Из формулы (2) сле-



дует, что при $k>1$

$$t_{k+1}=\frac{a_{k+1}}{a_k}=2+\frac{a_{k-1}}{a_k}=2+\frac{1}{t_k}. \qquad (4)$$

Обозначим через τ положительный корень уравнения

$$\tau=2+\frac{1}{\tau} \Leftrightarrow \tau^2-2\tau-1=0,$$

т. е. $\tau=\sqrt{2}+1$. Тогда

$$t_{k+1}-\tau=t_{k+1}-1-\sqrt{2}=\frac{1}{t_k}+1-\sqrt{2}=\frac{1}{t_k}-\frac{1}{\tau}=\frac{\tau-t_k}{t_k\tau},$$

откуда

$$a_{k+1}-\tau b_{k+1}=(t_{k+1}-\tau)\,a_k=\frac{(\tau-t_k)\,a_k}{t_k\tau}=\frac{\tau b_k-a_k}{\tau}=\frac{\tau b_k-a_k}{\sqrt{2}+1},$$

поэтому

$$|a_{k+1}-\tau b_{k+1}|<|\tau b_k-a_k|/2. \qquad (5)$$

Таким образом, расстояние по вертикали от точки $(b_k;\,a_k)$ до прямой $y=\tau x$ убывает более чем вдвое при переходе от k к $k+1$ (а знаки величин $a_k-\tau b_k$ чередуются). Если бы последовательность w была (хотя бы начиная с некоторого места) периодической, причем в периоде встречалось бы p букв A и q букв B, то вся построенная ломаная содержалась бы в некоторой полосе, края которой имели бы наклон p/q. Но прямая $y=\tau x$ заведомо выходит из этой полосы и удаляется от нее, поскольку число $\tau=1+\sqrt{2}$ иррационально и не равно p/q. Тем самым точки $(b_k;\,a_k)$ ломаной, начиная с некоторого k, заведомо не лежат в такой полосе. Отсюда следует, что последовательность w не имеет периода.

Это *доказательство можно изложить* и без помощи клетчатой бумаги и ломаной. Коротко говоря, если среди первых n букв w имеется $\alpha(n)$ букв A и $\beta(n)$ букв B, то для периодической последовательности w предел $\lim\frac{\alpha(n)}{\beta(n)}$ должен равняться рациональному числу; с другой стороны, для ее подпоследовательности $t_k=\alpha(s_k)/\beta(s_k)=a_k/b_k$ из формулы (4) следует, что предел может равняться лишь $\sqrt{2}+1$ (из (5) легко видеть, что этот предел существует).

Заметим, что можно усмотреть более глубокую связь числа $\sqrt{2}+1$ с последовательностью w (и словами w_k) из букв A и B. Дело в том, что в силу (4)

$$t_k=\frac{a_k}{b_k}=\underbrace{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots+\cfrac{1}{2}}}}_{k-1},$$

т. е. t_k — это так называемые «подходящие дроби» бесконечной цепной дроби

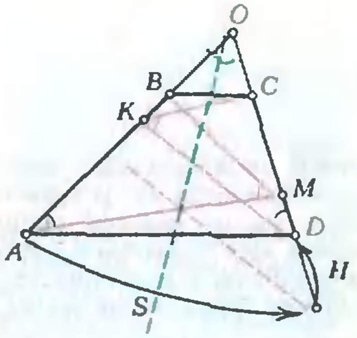
$$\tau=1+\sqrt{2}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}},$$

поэтому точкам $(b_k;\,a_k)$ отвечают узлы решетки, прилежащие к прямой $y=\tau x$ ближе, чем узлы с меньшими координатами (см. «Квант», 1983, № 5; 1971,

№ 11). Более того, клетки, через которые проходит луч $y=\tau x$ (они закрашены на рисунке 3), образуют цепочку, повторяющую конфигурацию красной ломаной. Это позволяет обнаружить новые свойства ломаной и последовательности w; например, она «почти равиомерна»: среди любых N букв подряд число букв A может отличаться не более чем на одну (для каждого N), т. е. равно $[\tau N]$ или $[\tau N+1]$.

Н. Б. Васильев

M1126. *В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD на сторонах AB и CD выбраны точки K и M. Докажите, что если $\angle BAM=\angle CDK$, то $\angle BMA=\angle CKD$.*



Пусть O — точка пересечения продолжений боковых сторон AB и CD данной трапеции (см. рисунок). Выполним последовательно симметрию S относительно биссектрисы угла AOD и гомотетию H с центром O и коэффициентом OD/OA. При этом точка A перейдет в D (см. рисунок), а точка B — в C (поскольку $OC/OB=OD/OA$), угол OAM — в равный ему по условию угол ODK. Следовательно, точка M, лежащая на пересечении прямых AM и OD, перейдет в точку пересечения образов этих прямых — DK и OA, т. е. в точку K. Итак, точки A, M, B переходят, соответственно, в D, K, C, а значит, $\angle AMB=\angle DKC$.

Другое решение основано на том, что вокруг четырехугольника $AKMD$, а следовательно, и вокруг $BKMC$, можно описать окружность.

В. Н. Дубровский, А. С. Меркурьев

M1127. *Микрокалькулятор «Чебурашка» умеет складывать, вычитать и находить по данному числу X обратное число $1/X$. Можно ли с помощью этого микрокалькулятора получить единицу, имея исходным число а) $\sqrt{19}+88$; б) $\sqrt[19]{88}$; в) $\sqrt{19}+\sqrt{88}$? (Вводить в микрокалькулятор числа, отличные от исходного или полученных в результате вычислений на нем, запрещается.)*

а) Ответ: можно. Сначала вычислим

$$a=\frac{1}{\sqrt{19}+88}=\frac{88-\sqrt{19}}{88^2-19},$$

затем получим последовательно числа $88-\sqrt{19}$ (как сумму 88^2-19 слагаемых a), $176=(88+\sqrt{19})+(88-\sqrt{19})$, $1/176$ и 1 (сумму 176 слагаемых $1/176$).

б) Ответ: можно. Воспользуемся тождеством

$$\frac{1}{x}-\frac{2}{\dfrac{1}{1/x+y}+\dfrac{1}{1/x-y}}=xy^2.$$

Его левую часть можно вычислять на «Чебурашке». Поэтому из числа x можно получить x^3 (при $y=x$), $x^5=x^3\cdot x^2$, $x^7=x^5\cdot x^2$, ..., x^{19}, т. е. из $\sqrt[19]{88}$ можно получить 88, затем $1/88$ и 1.

в) Ответ: нельзя. Применяя разрешенные операции к числам вида $a\sqrt{19}+b\sqrt{88}$ с рациональными a и b, мы снова будем получать числа того же вида (в частности, $1/(a\sqrt{19}+b\sqrt{88})=(a\sqrt{19}-b\sqrt{88})\,/\,(19a^2-88b^2)$). Поэтому из числа $\sqrt{19}+\sqrt{88}$ единицу получить невозможно.

Можно доказать, что 1 получается из числа a в том и только том случае, когда a — корень многочлена

Задачник „Кванта"

$P(x)$ с целыми коэффициентами, причем если степень $P(x)$ — минимальная возможная, то $P(x) \neq P(-x)$, (т. е. $P(x)$ содержит хотя бы один член нечетной степени).

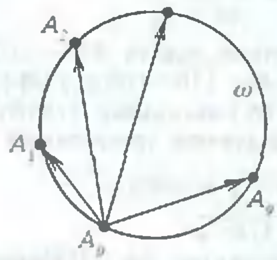
А. В. Богомольная

М1128. *На шахматной доске расставлено несколько фишек. За один ход одна из фишек передвигается на соседнее (по горизонтали или вертикали) свободное поле. После нескольких ходов оказалось, что каждая фишка побывала на всех полях ровно по одному разу и вернулась на исходное поле. Докажите, что был момент, когда ни одна фишка не стояла на своем исходном поле.*

Рассмотрим фишку A, первой вернувшуюся на свое исходное поле. Момент, предшествующий ее последнему ходу,— тот, что нам нужен: каждая фишка уже сделала свой первый ход, иначе на ее поле фишка A не могла бы побывать; с другой стороны, ни одна фишка еще не вернулась на свое поле, так как еще не вернулась на свое поле фишка A.

Е. В. Абакумов

М1129. *В лесу барона Мюнхгаузена растут елки и березы. Барон утверждает, что на расстоянии ровно 1 км от каждой елки растет в точности 10 берез, причем всего в его лесу елок больше, чем берез. Может ли это быть?*



● — березы
● — елки

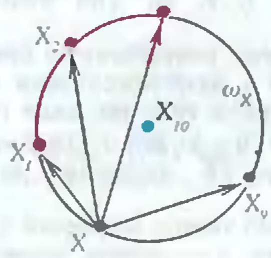


Рис. 1.

Ответ: может. Покажем, что к произвольному лесу M из n елок и k берез, удовлетворяющему условию Мюнхгаузена (на расстоянии 1 км от каждой елки растет 10 берез), можно добавить еще несколько елок и берез с сохранением этого условия так, чтобы отношение n/k числа елок к числу берез увеличилось на 0,1.

Отметим на произвольной окружности ω радиусом 1 км 10 точек $A_0, A_1, \ldots, A_9$. Отложим от каждого дерева X леса M векторы $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_9}$ и в их концах $X_1, \ldots, X_9$ посадим деревья той же породы, что и X. Точки $X_1, \ldots, X9$ лежат на окружности ω_X, получаемой из ω переносом на вектор $\overrightarrow{A_0X}$; если X — береза, посадим в центре X_{10} этой окружности елку (рис. 1). В результате к лесу M добавятся еще 9 его экземпляров, полученных из M сдвигами на векторы $\overrightarrow{A_0A_i}$ и удовлетворяющих условию Мюнхгаузена, и еще k елок X_{10} (для всех берез X), для которых условие тоже выполнено. При этом новое отношение числа елок к числу берез будет равно $(10n+k)/10k = n/k + 0{,}1$.

(Точки $A_0, \ldots, A_9$ нужно выбирать с некоторой осторожностью, иначе может оказаться, что в одну точку надо высаживать два дерева и что в «окружении» какой-нибудь елки окажется лишняя береза. Поэтому лучше действовать последовательно: сначала выбрать на ω точку A_0 и посадить елки X_{10} в центрах окружностей ω_X для всех берез X так, чтобы расстояния от этих елок до других берез леса M были отличны от 1 км, затем выбрать A_1 так, чтобы деревья X_1 не попали на уже занятые места, а в окружении елок не оказалось «чужих» берез, аналогично выбрать A_2 и т. д.)

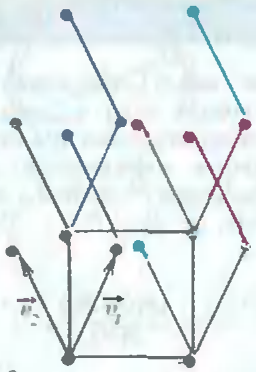


Рис. 2.

Теперь рассмотрим лес M_1, состоящий из одной елки и десяти берез на расстоянии 1 км от нее. Для него отношение $n/k=0{,}1$. Построим по M_1 описанным способом лес M_2, по лесу M_2 — лес M_3 и т. д. Для леса M_{11} это отношение будет равно $0{,}1+10\cdot 0{,}1=1{,}1>1$, и условие Мюнхгаузена выполняется. Правда, этот лес состоит из 10^{11} берез и $11\cdot 10^{10}$ елок, что многовато даже для легендарного барона. Однако имеется другой пример, подтверждающий, что барон никогда не лжет.

Пусть лес F_1 состоит из двух елок и двух берез, расположенных в диаметрально противоположных вершинах квадрата. Рассмотрим последовательность F_1, F_2, ..., в которой лес F_{k+1} является объединением леса F_k и леса F'_k, полученного из F_k переносом на некоторый вектор $\vec v_k$ «общего положения» (исключающего пересечения) длиной 1 км и заменой елок на березы и наоборот (рис. 2). Очевидно, лес F_9, состоящий из $2^9=512$ елок и такого же числа берез, удовлетворяет условию Мюнхгаузена. Применяя к нему конструкцию, описанную в начале решения, получим вполне реальный лес из $21\cdot 512=10\,752$ деревьев, также удовлетворяющий этому условию, для которого отношение числа елок к числу берез равно $1{,}1>1$.

Ф. Л. Назаров

М1130. *На плоскости дан выпуклый n-угольник, у которого длина k-й стороны равна a_k, а длина проекции многоугольника на прямую, содержащую эту сторону, равна d_k ($k=1, 2, \ldots, n$). Докажите неравенство*

$$2<\frac{a_1}{d_1}+\ldots+\frac{a_n}{d_n}\leqslant 4.$$

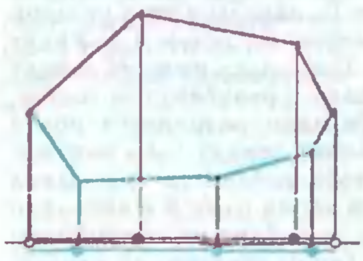


Рис. 1.

Очевидно, что *длина проекции выпуклого многоугольника на любую прямую ровно вдвое меньше суммы длин проекций его сторон на эту же прямую* (рис. 1), и, следовательно, меньше половины его периметра p. Поэтому

$$\frac{a_1}{d_1}+\ldots+\frac{a_n}{d_n}>\frac{2a_1}{p}+\ldots+\frac{2a_n}{p}=2\cdot\frac{a_1+\ldots+a_n}{p}=2.$$

Улучшить эту оценку нельзя, как показывает пример «сплюснутого» многоугольника, у которого $d_i\approx p/2$ при всех i.

Для доказательства верхней оценки построим некоторый вспомогательный многоугольник. Отложим от одной точки n пар противоположных векторов, каждый из которых равен по длине и параллелен одной из сторон данного n-угольника M, и занумеруем эти векторы по часовой стрелке: $\vec v_1$, $\vec v_2$, ..., $\vec v_{2n}$ (рис. 2); очевидно, $\vec v_i=-\vec v_{i+n}$, $i=1, 2, \ldots, n$. От конца B_1 вектора $\vec v_1$ отложим вектор $\overrightarrow{B_1B_2}=\vec v_2$, от его конца B_2 — вектор $\overrightarrow{B_2B_3}=\vec v_3$ и т. д. (рис. 3). Последняя точка B_{2n} совпадает с началом $\vec v_1$. Легко видеть, что полученный $2n$-угольник $N=B_1B_2\ldots B_{2n}$ выпуклый, имеет центр симметрии O и каждые две его противоположные стороны равны и параллельны одной из сторон многоугольника M. В силу приведенного в начале решения утверждения длина проекции N на любую прямую равна сумме длин проекций векторов $\vec v_1, \ldots, \vec v_n$ на эту прямую, т. е. вдвое

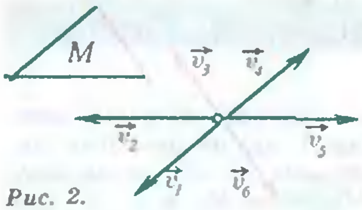


Рис. 2.

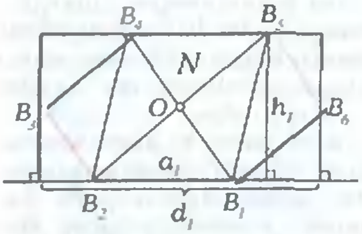


Рис. 3.

больше длины проекции M на нее. Следовательно, рассматриваемое в задаче выражение $a_1/d_1+...+a_n/d_n$ имеет для многоугольников N и M одинаковое значение. Поэтому достаточно доказать наше неравенство для N. Пусть $a_1=B_1B_2$, d_1 — длина проекции N на B_1B_2, h_1 — расстояние между прямыми B_1B_2 и $B_{n+1}B_{n+2}$. Тогда (см. рис. 3 для $n=3$)

$$\frac{a_1}{d_1}=\frac{a_1h_1}{d_1h_1}\leqslant\frac{S(B_1B_2B_{n+1}B_{n+2})}{S(N)}=\frac{4S(OB_1B_2)}{S(N)},$$

где S обозначает площадь. Точно так же получаем, что

$$\frac{a_1}{d_1}+...+\frac{a_n}{d_n}\leqslant 4\cdot\frac{S(OB_1B_2)+S(OB_2B_3)+...+S(OB_{2n}B_1)}{S(N)}=4.$$

В случае квадрата это неравенство превращается в равенство.

Д. В. Фомин

Ф1137. *Электростатический генератор (см. рисунок) состоит из непроводящего цилиндра, на который наклеены полоски фольги Φ_1 и Φ_2, наружных обкладок O_1 и O_2, неподвижных токосъемников T_1 и T_2 снаружи и неподвижной перемычки внутри с токосъемниками T_3 и T_4. В исходном положении полоски фольги находятся напротив наружных обкладок и образуют с ними конденсаторы емкостью C_1 каждый. К внешним обкладкам подключен конденсатор емкостью C_0, заряженный предварительно до напряжения U_0. Каким станет напряжение на этом конденсаторе после N оборотов цилиндра по часовой стрелке? Емкость между обкладками и полосками фольги в раздвинутом состоянии пренебрежимо мала.*

При повороте цилиндра на пол-оборота полоски фольги Φ_1 и Φ_2 поменяются местами, но снова, как и в исходном положении, они вместе с обкладками O_1 и O_2 образуют два конденсатора емкостью C_1 каждый. При этом напряжение на конденсаторе емкостью C_0 будет в некоторое число раз k больше начального:

$$U=kU_0.$$

Следующие пол-оборота увеличат напряжение еще в k раз и т. д. Поэтому через N оборотов напряжение на конденсаторе емкостью C_0 будет

$$U_N=k^{2N}U_0.$$

Осталось только найти число k.

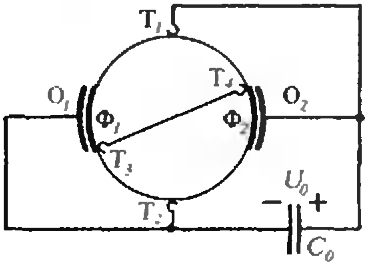
В исходном положении напряжение между обкладками O_1 и O_2 равно U_0. Это напряжение приложено к последовательно соединенным конденсаторам с одинаковыми емкостями C_1. Следовательно, напряжение на каждом конденсаторе $U_1=U_0/2$, а заряд $q_1=C_1U_0/2$.

Когда поворот цилиндра приведет к контакту полосок фольги с токосъемниками T_1 и T_2, заряды с этих полосок уйдут на пластины конденсатора емкостью C_0. Уйдут заряды и с обкладок O_1 и O_2. Поскольку емкость между обкладками и полосками фольги в раздвинутом состоянии пренебрежимо мала, обкладки разрядятся почти полностью. Поэтому к начальному заряду C_0U_0 положительной пластины конденсатора добавится еще заряд $C_1U_0/2$ с полоски фольги Φ_1 и заряд $C_1U_0/2$ с обкладки O_2, отрицательные же заряды перейдут на отрицательную пластину конденсатора. Таким образом, на конденсаторе емкостью C_0 окажется заряд

$$q=(C_0+C_1)U_0.$$

При дальнейшем повороте цилиндра его контакт с токосъемниками T_1 и T_2 прекратится, ровно через пол-оборота полоска фольги Φ_1 коснется токосъемника T_4, а полоска Φ_2 — токосъемника T_3, полоски прибли-

Задачник „Кванта"



зятся к обкладкам и вновь образуют два конденсатора емкостью C_0 каждый. Заряд q при этом перераспределится между пластиной конденсатора емкостью C_0 и обкладкой O_2:

$$(C_0+C_1)U_0=C_0U+C_1U/2,$$

откуда

$$U=\frac{C_0+C_1}{C_0+C_1/2}\,U_0\,.$$

Коэффициент при U_0 как раз и дает нам число k, поэтому окончательное напряжение на конденсаторе емкостью C_0 будет

$$U_N=\left(\frac{C_0+C_1}{C_0+C_1/2}\right)^{2N}U_0.$$

Наибольшее значение напряжения отвечает случаю, когда C_0 много меньше C_1:

$$U_{N\,\max}\approx 2^{2N}U_0.$$

Однако у реальных электростатических генераторов при достижении больших напряжений происходит электрический пробой.

И. И. Воробьев

Ф1138. *Разгоняясь с максимально возможным ускорением на прямом участке шоссе, гоночный автомобиль увеличивает скорость от $v_1=10{,}0$ м/с до $v_2=10{,}5$ м/с за время $\Delta t_1=0{,}1$ с. За какое время он смог бы сделать то же самое на кольцевом участке шоссе с радиусом $R=30$ м? При каком радиусе кольца он вообще не смог бы увеличить скорость выше 10 м/с? Плоскость шоссе горизонтальна.*

Максимально возможное ускорение

$$a=\frac{v_2-v_1}{\Delta t_1}=5\ \text{м/с}^2$$

определяется силой трения и остается одним и тем же как для прямого, так и для кольцевого участка шоссе. При движении по окружности полное ускорение a складывается из касательного ускорения $a_к$ $(a_к=\Delta v/\Delta t)$ и нормального ускорения $a_н$ $(a_н=v^2/R)$:

$$\vec a=\vec a_к+\vec a_н,$$

или

$$a^2=a_к^2+a_н^2,$$

откуда

$$a_к=\sqrt{a^2-a_н^2}\,.$$

В нашем случае модуль скорости меняется мало, и касательное ускорение можно считать постоянным. Тогда искомое время

$$\Delta t_2=\frac{\Delta v}{a_к}=\frac{v_2-v_1}{\sqrt{a^2-(v_1^2/R)^2}}=0{,}15\ \text{с}.$$

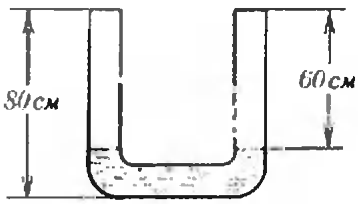
Минимальный радиус поворота при скорости v_1

$$R_{\min}=\frac{v_1^2}{a}=20\ \text{м}.$$

А. Р. Зильберман

Задачник „Кванта"

Ф1139. *U-образная трубка частично заполнена водой (см. рисунок). Верхние концы трубки закрывают и нагревают правое колено трубки до температуры $t_2 = 100$ °C, а левое — до $t_1 = +99{,}5$ °C. Определить установившуюся разность уровней воды в коленах трубки. Справка: на высоте 23 этажа (70 м над землей) температура кипения воды на 0,25 градуса ниже, чем на уровне земли. Тепловым расширением стекла при расчетах пренебречь.*



Каждое из колен трубки содержит над водой воздух (который был там до нагревания) и насыщенный водяной пар. Будем считать, что при нагревании испарилось совсем немного воды (это потом легко можно проверить), т. е. когда уровень воды в одном из колен поднялся на Δh, в другом он должен опуститься тоже на Δh, и запишем условие равновесия воды в трубке после нагревания:

$$p_1 + p_{н1} + \rho_{воды} g (2\Delta h) = p_2 + p_{н2},$$

где p_1 и p_2 — давления воздуха, $p_{н1}$ и $p_{н2}$ — давления насыщенного водяного пара.

Давления воздуха легко выразить через атмосферное давление p_0, изменения объемов и температур:

$$p_1 = p_0 \frac{T_1}{T_0} \frac{h_0}{h_0 - \Delta h}, \quad p_2 = p_0 \frac{T_2}{T_0} \frac{h_0}{h_0 + \Delta h}.$$

Отсюда найдем разность давлений воздуха:

$$\Delta p_{возд} = p_1 - p_2 = p_0 \left(\frac{T_1}{T_0} \frac{1}{1 - \Delta h/h_0} - \frac{T_2}{T_0} \frac{1}{1 + \Delta h/h_0} \right) =$$

$$= \frac{p_0}{T_0} \frac{T_1 - T_2 + (T_1 + T_2)\Delta h/h_0}{1 - (\Delta h/h_0)^2} \approx \frac{p_0}{T_0} \left(T_1 - T_2 + (T_1 + T_2) \frac{\Delta h}{h_0} \right)$$

(здесь мы учли, что $\Delta h / h_0 \ll 1$).

Согласно условию задачи, разность давлений насыщенного пара в коленах трубки равна давлению столба воздуха высотой $H = 140$ м:

$$\Delta p_{н} = p_{н2} - p_{н1} = \rho_{возд} g H = \frac{p_0 M_{возд}}{R T_0} g H.$$

Теперь из условия равновесия найдем отношение

$$\frac{\Delta h}{h_0} = \frac{T_2 - T_1 + M_{возд} g H / R}{T_1 + T_2 + 2\rho_{воды} g h_0 T_0 / p_0} \approx 7 \cdot 10^{-3}$$

и установившуюся разность уровней воды

$$2\Delta h \approx 8{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0{,}84 \text{ см}$$

(здесь мы приняли $T_0 = 273$ К, $p_0 = 10^5$ Па, $h_0 = 60$ см).

А. Р. Зильберман

Ф1140. *Заряженная частица попадает в среду, где на нее действует сила сопротивления, пропорциональная скорости. До полной остановки частица проходит путь $L = 10$ см. Если в среде имеется некоторое магнитное поле, перпендикулярное скорости частицы, она при той же начальной скорости остановится на расстоянии $l_1 = 6$ см от точки входа в*

При наличии магнитного поля на частицу в среде действуют две взаимно перпендикулярные и пропорциональные скорости частицы силы. Это сила трения $\vec{F}_{тр}$ —

$$F_{тр} = kv = k\Delta s/\Delta t$$

и сила Лоренца $\vec{F}_{Л}$ —

$$F_{Л} = qBv = qB\Delta s/\Delta t.$$

Изменение импульса частицы $m\Delta\vec{v}$ за время Δt будет векторно складываться из импульса силы трения $\vec{F}_{тр}\Delta t$ и импульса силы Лоренца $\vec{F}_{Л}\Delta t$, образуя прямоугольный треугольник (рис. 1). Подобный же треугольник образуют и соответствующие векторы за все время движения частицы в среде (рис. 2; здесь l —

среду. На каком расстоянии l_2 от точки входа частица остановилась бы, если бы поле было в два раза меньше?

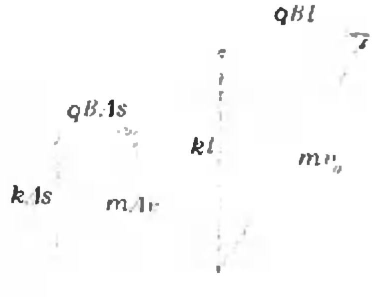


Рис. 1. *Рис. 2.*

Задачник „Кванта"

расстояние от точки входа в среду до точки остановки, v_0 — начальная скорость частицы в среде).

В отсутствие магнитного поля прямоугольный треугольник, изображенный на рисунке 2, вырождается в прямую линию, и

$$mv_0=kL.$$

В магнитном поле с индукцией B

$$mv_0=\sqrt{(kl_1)^2+(qBl_1)^2}.$$

Аналогично в поле с индукцией $B/2$

$$mv_0=\sqrt{(kl_2)^2+(qBl_2/2)^2}.$$

Из последних трех соотношений находим искомое расстояние l_2:

$$l_2=l_1\frac{2}{\sqrt{1+3(l_1/L)^2}}=8{,}3\ \text{см}.$$

А. И. Буздин

Ф1141. *В настоящее время в связи с открытием явления высокотемпературной сверхпроводимости изучается вопрос о создании линии передачи постоянного тока без потерь энергии на джоулево тепло. Предполагается использовать для передачи постоянного тока коаксиальный кабель, состоящий из внутренней цилиндрической жилы и наружной цилиндрической оболочки, выполненных из сверхпроводника. Электрическое и магнитное поля в такой системе изображены на рисунке. Известно, что индукция магнитного поля у поверхности сверхпроводника не может превышать некоторого значения B_{max}, иначе разрушается сверхпроводимость, а напряженность электрического поля не должна превышать E_{max}, иначе происходит электрический пробой изолирующей прослойки кабеля. Определите, во сколько раз изменится максимальная мощность постоянного тока, передаваемая по такому кабелю, если диаметры внутренней и внешней оболочек увеличить в два ра-*

Как видно из условия задачи, индукция B магнитного поля принимает максимальное значение вблизи внутренней жилы кабеля. Оно не должно превышать заданную величину B_{max}, иначе произойдет разрушение сверхпроводимости внутренней жилы. Это условие определяет максимальный ток I_{max}, который можно пропускать по кабелю:

$$B_{max}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_{max}}{d/2}=\frac{\mu_0 I_{max}}{\pi d},$$

$$I_{max}=\frac{\pi d B_{max}}{\mu_0}.$$

Таким образом, при заданном значении B_{max} максимальный ток пропорционален диаметру внутренней жилы кабеля:

$$I_{max}\sim d.$$

Напряженность E электрического поля в пространстве между цилиндрическими проводниками изменяется обратно пропорционально расстоянию r от оси цилиндров:

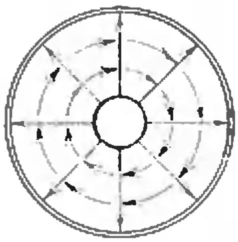
$$E(r)\sim\frac{1}{r}.$$

Качественно эту зависимость легко понять с помощью приведенной на рисунке картины силовых линий электрического поля (вспомните, что напряженность электрического поля характеризует густоту силовых линий, т. е. число линий, пронизывающих единичную площадку). Количественную зависимость $E(r)$ попробуйте получить самостоятельно.

Итак, напряженность электрического поля, так же как и индукция магнитного поля, наибольшее значение принимает вблизи внутренней жилы кабеля. Именно в этом месте напряженность не должна превышать значение E_{max}, иначе произойдет электрический пробой. Если при $r=d/2$ напряженность поля *за. Какую максимальную мощность можно передать по кабелю с диаметрами оболочек $D=8$ см, $d=3$ см, если $E_{max}=20$ кВ/см и $B_{max}=5\cdot10^{-2}$ Тл? Примечание: индукция магнитного поля в пространстве между цилиндрическими проводниками совпадает с полем прямого проводника с током I:*

$$B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$$

($\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ Н/А^2 — магнитная постоянная).



равна E_{max}, то в пространстве между цилиндрическими проводниками

$$E(r)=E_{max}\frac{d/2}{r}.$$

Отсюда можно найти максимальное напряжение U_{max} между электродами:

$$U_{max}=\int\limits_{d/2}^{D/2}E_{max}\frac{d/2}{r}\,dr=\frac{E_{max}d}{2}\ln\frac{D}{d}.$$

Если сравниваемые в задаче кабели геометрически подобны, т. е. $D/d=\mathrm{const}$, то максимальное напряжение пропорционально диаметру внутренней жилы:

$$U_{max}\sim d.$$

Следовательно, максимальная мощность, передаваемая по кабелю,

$$P_{max}=U_{max}I_{max}\sim d^2.$$

При увеличении диаметров внутренней жилы и наружной оболочки кабеля в 2 раза максимальная передаваемая мощность возрастает в 4 раза. Для кабеля, параметры которого заданы в условии задачи, максимальная мощность равна

$$P_{max}=U_{max}I_{max}=\frac{\pi d^2E_{max}B_{max}}{2\mu_0}\ln\frac{D}{d}\approx10^8\ \text{Вт}.$$

С. М. Козел

Ф1142. *Образование кометного семейства Юпитера описывается следующей схемой. Комета падает с большого удаления без начальной скорости на Солнце и пролетает невдалеке от Юпитера (см. рисунок). После прекращения заметного влияния поля тяготения Юпитера комета вновь движется в поле Солнца, причем ее скорость оказывается направленной противоположно скорости Юпитера, а афелий новой орбиты кометы располагается вблизи орбиты Юпитера, т. е. на расстоянии $R=5{,}2$ а. е. от Солнца. На каком расстоянии от Солнца будет располагаться перигелий орбиты такой кометы?*

Заметим, что Солнце более чем в 10^3 раз массивнее Юпитера, так что размеры области, где тяготение Юпитера сравнимо с влиянием Солнца, в 10^6 раз меньше радиуса орбиты планеты. Вместе с тем, время существенного взаимодействия кометы с Юпитером несопоставимо мало́ по сравнению с периодами обращения Юпитера и кометы вокруг Солнца, следовательно, смещение кометы за это время ничтожно. Поэтому мы можем движение кометы разбить на три независимых этапа: 1) движение кометы из удаленного положения по направлению к Солнечной системе под действием тяготения Солнца, 2) «мгновенный» разворот в поле Юпитера, 3) движение по эллиптической орбите вокруг Солнца (причем на этом этапе влияние Юпитера учитывать не надо).

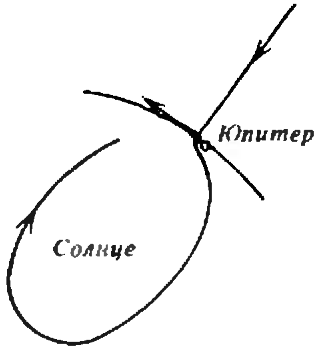
Из условия движения Юпитера по круговой орбите под действием притяжения Солнцем массой M

$$\frac{v^2}{R}=\frac{GM}{R^2}$$

получим скорость Юпитера v:

$$v=\sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Скорость кометы $v_к$ при подлете к Юпитеру в конце первого этапа определим из закона сохранения



энергии (на бесконечно большом удалении энергия, как обычно, принята равной нулю):

$$\frac{v_к^2}{2}-\frac{GM}{R}=0,\ v_к=\sqrt{\frac{2GM}{R}}=v\sqrt{2}\,.$$

Направления скоростей кометы и Юпитера вначале перпендикулярны друг другу, значит, относительно Юпитера скорость кометы равна

$$v_к'=v\sqrt{3}.$$

После выхода из поля тяготения Юпитера (в начале третьего этапа) скорость кометы относительно планеты изменяется только по направлению, но по отношению к Солнцу она становится равной

$$v_1=v(\sqrt{3}-1).$$

Теперь комета вновь взаимодействует только с Солнцем. В афелии и в перигелии скорость перпендикулярна радиусу-вектору, проведенному из Солнца, значит, второй закон Кеплера запишется так:

$$v_1R=v_2x.$$

Из закона сохранения энергии —

$$\frac{v_1^2}{2}-\frac{GM}{R}=\frac{v_2^2}{2}-\frac{GM}{x}\,.$$

Решая совместно полученные уравнения, мы найдем два ответа:

$$x_1=R=5{,}2\ \text{а. е.}$$

— это афелий, для которого уравнения обращаются в тождества, и

$$x_2=R(2-\sqrt{3})\,/\,(\sqrt{3}-1)=0{,}37\ R\approx1{,}9\ \text{а.е.}$$

— это и есть искомое расстояние в перигелии.

В. Е. Белонучкин

Вниманию подписчиков!

В наступающем году количество страниц в нашем журнале увеличивается на 25 %, что позволяет нам открыть ряд новых рубрик.

Для компенсации расходов по увеличению объема журнала цена каждого номера увеличивается на 5 копеек. Новая цена журнала — 45 копеек. К сожалению, решение об увеличении объема и стоимости журнала было утверждено после выпуска каталога «Союзпечати» и начала подписки на 1989 год. Если вы уже оформили подписку, просим вас в соответствующем отделении «Союзпечати» произвести доплату по 5 копеек за каждый номер.

Для тех, кто не успел подписаться на «Квант» с начала года, напоминаем, что подписка на него принимается без ограничений в агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи. Индекс журнала «Квант» в каталоге «Союзпечати» 70465.

Калейдоскоп „Кванта"

ОДИН, ДВА, МНОГО

Наверное, все вы слышали о некоторых племенах Африки и Южной Америки, счет в которых ведется так: один, два, много. Но существует еще одно племя, разбросанное по всему миру, представители которого считают таким же способом,— это ученые,— в частности, математики. Не верите? Откройте энциклопедический словарь и посмотрите слова, начинающиеся на «моно», «ди», «поли», а также на «уни», «би», «мульти». Первая тройка — один, два, много — по-гречески, а вторая — то же самое по-латыни. Вот некоторые из таких слов.

Монотонная функция — функция, которая либо всюду возрастает, либо всюду убывает. Например, $y=2^x$ или $y=x^3$. Монотонные функции обладают очень интересными свойствами, например, любая «хорошая» функция является разностью монотонных.

Монография — книга, посвященная рассмотрению одного вопроса. Например, если книга называется «Монотонные функции», то это наверняка монография. Авторов у нее может быть и много.

Уникурсальная кривая — кривая, которую можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя два раза по одному участку. Отметим те точки, из которых можно идти более, чем в двух направлениях; назовем их вершинами. Рассмотрим те вершины, из которых выходит нечетное число направлений. Если таких точек не больше двух, то кривая — уникурсальна; если же таких точек больше двух — то кривая не уникурсальна.

Униформный — всюду одинаковый (буквально — единообразный).

Дихотомия — деление пополам, часто — многократное деление пополам. Вот решение такой классической задачи-шутки: как поймать льва в пустыне? Надо разделить пустыню пополам и отбросить ту часть, в которой льва заведомо нет.

Оставшуюся половину надо снова разделить пополам и снова отбросить ту часть, где льва

Биквадратное уравнение — квадратное уравнение относительно квадрата неизвестного.

Биссектриса — прямая, делящая угол на две равные части.

Бинарный — двойной, зависящий от двух переменных. Часто говорят «бинарная операция», подразумевая операцию, применяемую к двум элементам. Так, обычные сло-

отбросить ту часть, где льва нет. И так далее. По известной теореме о вложенных «отрезках» лев рано или поздно будет пойман.

Дилемма — необходимость выбора из двух возможностей (см. задачу о поимке льва).

Полиэдр — многогранник, не обязательно трехмерный.

Полином — сумма одночленов, многочлен. Например, x^3+9x^2+8x+9 — многочлен от одной переменной, $x^3+x^2y+3xy^2+7y^3$ — многочлен от двух переменных. Некоторые многочлены особенно знамениты и носят специальные названия: *полиномы Чебышева, полиномы Лежандра* и др.

…ание, вычитание, умножение и деление — это бинарные операции.

Бином Ньютона — выражение вида $(a+в)^n$. Коэффициенты в разложении бинома по степеням a и b называются биномиальными коэффициентами.

Мультипликативный — имеющий отношение к умножению. Так, мультипликативной теорией чисел называется часть теории чисел, рассматривающая свойства натуральных чисел, связанные с их разложениями на множители, в частности, свойства простых чисел.

Мультииндекс — совокупность нескольких написанных подряд индексов; например, ij в записи a_{ij}.

Подобные слова встречаются и в физике (биполь, диод, поликристаллические структуры), и в химии (диметилфталат), и в медицине (поливитамины), и в других науках, и просто в быту (бинокль, монокль, уникум). Слова, начинающиеся с «три», «тетра», «пента», ... или с «терци», «кварта», «квинта», ..., т. е. с «три», «четыре», «пять», ... по-гречески или по-латыни, тоже есть, но употребляются они реже (триграмма, тетраэдр, октаэдр, гексаэдр, додекаэдр, икосаэдр, квартика и т. д.). Так что можно говорить об ученых как о людях, называющих окружающие их предметы и явления все же по принципу: один, два, много. Вы, наверное, заметили, что греческие и латинские слова используются довольно произвольно. Монокль и бинокль — первое от греческого «моно», а второе — от латинского «би»; бином и полином — первое от латинского «би», а второе — от греческого «поли». Приживалась, видимо, та приставка, с которой слово получалось благозвучнее. Не следует путать приставку «ди» с приставками «диа» (через): диафрагма, диаметр, диагональ и «дис», «диз» (не): дискретный, дизъюнкция.

Победители конкурса «Задачник «Кванта»

(Начало см. на с. 26)

Награждаются Дипломом и значком журнала «Квант» и книгами серии «Библиотечка «Квант» за активное участие в конкурсе:

По математике

Н. Андрианов — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
И. Аржанцев — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.
В. Барановский — Омск, с. ш. № 115, 9 кл.
М. Выборнов — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
С. Зелик — Краматорск, с. ш. № 35, 10 кл.
А. Козачко — Винница, с. ш. № 6, 8 кл.
А. Коршков — Мозырь, с. ш. № 8, 10 кл.
И. Марков — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
Р. Мучник — Винница, с. ш. № 15, 8 кл.
В. Рагулин — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
А. Серебряков — Москва, с. ш. № 57, 10 кл.
А. Скопенков — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
К. Ушаков — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
Д. Фельдман — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.
А. Шаповал — Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
А. Эгамов — Гороховец, с. ш. № 1, 9 кл.

По физике

А. Бабкин — Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
В. Бескровный — Донецк, с. ш. № 20, 10 кл.
И. Блайвас — Ростов-на-Дону, с. ш. № 5, 10 кл.
В. Высоцкий — Киев, с. ш. № 77, 9 кл.
И. Гляненко — Грозный, с. ш. № 17, 10 кл.
В. Гусятников — Москва, с. ш. № 1267, 10 кл.
П. Девянин — Москва, с. ш. № 296, 10 кл.
Н. Демчук — Здолбунов, с. ш. № 1, 9 кл.
А. Жук — Ровно, с. ш. № 15, 9 кл.
А. Залеский — Харьков, ФМШ № 24, 10 кл.
К. Зуев — Вологда, с. ш. № 8, 10 кл.
И. Иоппе — Москва, с. ш. № 57, 10 кл.
В. Камчатный — Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
А. Коршков — Мозырь, с. ш. № 8, 10 кл.
Н. Кузьма — п. Протва Калужской обл., с. ш. № 1, 10 кл.
Д. Лабутин — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
Р. Малков — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.
И. Мартин — Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ, 9 кл.
Д. Мацукевич — Минск, с. ш. № 107, 10 кл.
А. Мельников — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
П. Михеев — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 9 кл.
А. Пушков — Вольск, с. ш. № 12, 10 кл.
Т. Рашник — Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
С. Рудницкий — Одесса, с. ш. № 28, 10 кл.
Д. Самборский — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
С. Тозик — Минск, с. ш. № 93, 10 кл.
Ю. Уваров — Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.
А. Усинский — с. Птичья Ровенской обл., Вербская с. ш., 9 кл.
Д. Фельдман — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.
А. Фридлянд — Саратов, с. ш. № 13, 9 кл.
И. Химони — Днепропетровск, с. ш. № 53, 10 кл.
Ю. Шарлай — Харьков, ФМШ № 24, 10 кл.
Е. Швец — Черновцы, с. ш. № 24, 10 кл.
С. Шинкевич — Березники, с. ш. № 3, 9 кл.

Вниманию читателей!

По инициативе журнала «Квант» и фирмы «Международная образовательная сеть» (США) и при содействии ряда советских и американских организаций в этом году впервые проводятся совместные летние физико-математические школы.

Американские школьники проведут 4 недели в Молодежном лагере в нашей стране.

Группу советских ребят, в которую войдут 15 школьников из числа участников конкурса «Задачник «Кванта», Всесоюзных олимпиад по математике, физике и информатике, Всесоюзного турнира юных физиков, примет университет Стони Брук (штат Нью-Йорк). В связи с тем, что занятия будут проводиться на английском языке, члены группы должны обязательно знать язык.

Мы надеемся, что такие школы станут традиционными.

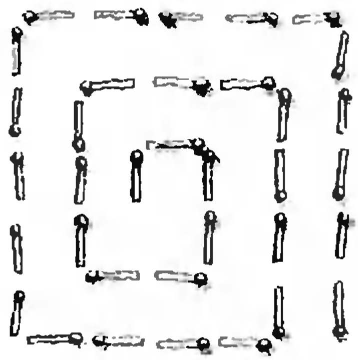
Участие в них зависит от вас самих.

Желаем успеха!

„Квант" для младших школьников

Задачи

1. Сережа сложил три последовательных натуральных числа, потом три следующих числа, после чего полученные суммы перемножил. Могло ли у него получиться число 111 111 111?



2. На стол положили 35 спичек так, как показано на рисунке. Получилась спираль, «закрученная» по часовой стрелке. Переложите четыре спички так, чтобы получилась такая же спираль, закрученная против часовой стрелки.

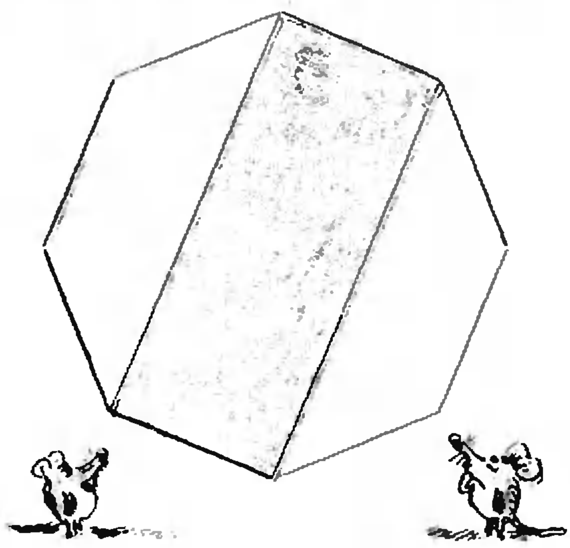
3. С числом, записанным на доске, разрешается производить следующие операции: либо заменять его удвоенным, либо стирать его последнюю цифру. Как с помощью этих операций получить из числа 458 число 14?

4. Может ли быть верным равенство

Ж·У·Р·Н·А·Л = К·В·А·Н·Т,

если в него вместо букв подставить цифры от 1 до 9? Одинаковым буквам при этом должны соответствовать одинаковые цифры, разным — разные.

5. В правильном восьмиугольнике провели две параллельные диагонали (см. рисунок). Докажите, что площадь получившегося прямоугольника вдвое меньше площади восьмиугольника.



Эти задачи нам предложили *С. А. Генкин, А. М. Домашенко, Д. В. Фомин, А. П. Тонких, В. В. Произволов.*

О ДАВЛЕНИИ

Кандидат педагогических наук
С. А. ТИХОМИРОВА

В этой статье мы хотим предложить вам несколько «задач на давление». Формулировки их не совсем обычны, потому что взяты они не из задачника по физике, не из учебника, а из произведений художественной литературы. Разумеется, авторы этих произведений не думали «задавать задачи». Но писатель умеет видеть...

Давайте взглянем на приведенные ниже отрывки с физической точки зрения.

В повести И. С. Соколова-Микитова «Весна в Чуне» есть такие строки: «Выследив стадо лосей, медведь-лосятник старается отбить одного лося, потом долго гоняет его по глубокому снегу. Крепкий наст хорошо выдерживает тяжесть медведя. Проваливающегося в снегу лося медведь преследует, пока тот остановится от изнеможения, и тогда легко расправляется с выбившейся из сил добычей».

Почему лось проваливается в снег, а медведь нет?

Несколько строк из романа Ж. Верна «Дети капитана Гранта».

«В пять часов утра барометр показал, что путешественники достигли высоты в семь тысяч пятьсот футов. Таким образом, они находились на вторичных плоскогорьях, там, где уже кончалась древесная растительность...»

«Паганель захватил с собой барометр и, взглянув на него, убедился, что ртуть держится на уровне 0,495 миллиметра. Падение ртутного столба барометра соответствовало высоте в одиннадцать тысяч семьсот футов.»

Какое давление показывал барометр на вторичных плоскогорьях? Не возникает ли у вас сомнение в правильности последних строк?

В романе М. Шолохова «Поднятая целина» есть такой эпизод: дед Щукарь объелся телятиной, у него разболелся живот. Чтобы вылечить деда, лекарка поставила ему на живот разогретую махотку (глиняный горшок). «Ой, живот мне порвет! Ой родненькие, ослобоните! — закричал дед Щукарь.» Но попытки оторвать махотку оказались тщетными. Тогда Давыдов взял скалку и стукнул ею по дну махотки, «она рассыпалась, и воздух со свистом рванулся из-под черепков».

Почему не удалось снять горшок и пришлось его расколоть? Верно ли (разумеется, с точки зрения физики) описано поведение воздуха после того, как разбили махотку?

Из романа А. Беляева «Человек-амфибия»: «Ихтиандр опускался все глубже и глубже в сумеречные глубины океана. Ему хотелось быть одному, прийти в себя от новых впечатлений... Он погружался все медленнее. Вода становилась плотнее, она уже давила на него, дышать становилось все труднее. Здесь стояли густые зелено-серые сумерки».

Действительно ли давление на глубине определяется увеличением плотности воды?

Фрагмент из рассказа Б. Житкова «На воде». Шквал перевернул парусное судно вверх дном, «...опрокинутое судно плавало: находившийся внутри воздух не успел выйти... В кубрике становилось заметно душно.

Запыхавшиеся люди часто дышали и спешили прорубить выход на волю, к свежему воздуху. Они боялись задохнуться и каждую минуту думали, что вот-вот судно начнет погружаться под воду... Ковалев перевел дух и хотел крикнуть товарищам, что уж виден свет. Он слышал тонкий свист прорывавшегося через дырку воздуха. Ковалев приставил к дырке мокрый палец: нет, из дыры не дуло. Куда же идет воздух? Ковалев понял, что воздух не входит в каюту. А ведь слышно, как он идет! Значит, вон из каюты выходит воздух?..

И вдруг все сообразил. Их каюта — как опрокинутый вверх дном пустой стакан: если его пихать в воду, то воздух в стакане не даст войти воде; но если в дне такого стакана сделать дырку, то воздух уйдет через нее, и весь стакан заполнит вода».

Этот отрывок — не одна, а сразу несколько задач (и не только «на давление»). Попробуйте сами сформулировать вопросы, на которые «наводит» этот текст (и, разумеется, ответить на них).

В рассказе Г. Троепольского «Один день» есть такой разговор:

«...Митроха! Денька через два, а может, и завтра, дождик должон быть. Налегни на сев-то.

— Вот тебе на! Гляну на барометр,— забеспокоился Митрофан Андреевич. Он ушел в хату...

— Как же это вы, Андрей Петрович, узнаете об изменении погоды? — спросил я.

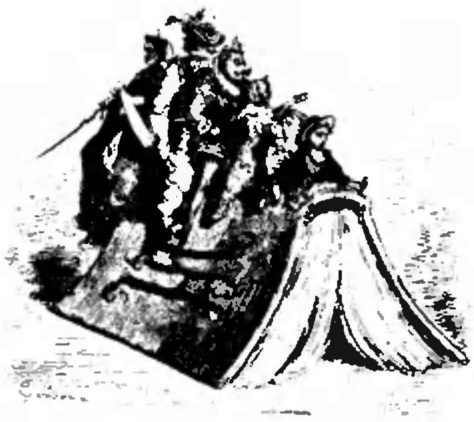
— Э-э, детка! Давно уж я живу-то. По всем приметам узнаю. Ласточка идет низом... Это — раз... Курица обирается носиком — перо мажет жиром. Это — два... Животная, она чувствует, и человек чувствует...»

Как меняется атмосферное давление к непогоде? Попробуйте объяснить эти изменения.

В предыдущей «задаче» Андрей Петрович упоминает несколько народных примет, связанных с погодой. Их вообще очень много, и некоторые из них имеют объяснения с точки зрения физики. Последняя задача, которую мы вам предлагаем,— именно про такую примету.

В повести «Мещерская сторона» К. Паустовский пишет: «Самая простая примета — это дым костра. То он подымается столбом к небу, спокойно струится вверх, выше самых высоких ив, то стелется туманом по траве, то мечется вокруг огня... Глядя на дым, можно точно сказать, будет ли завтра дождь... или... солнце подымется в глубокой тишине, в синих прохладных туманах».

Попытайтесь объяснить, как действует дым-барометр (на наш взгляд, это не так просто).



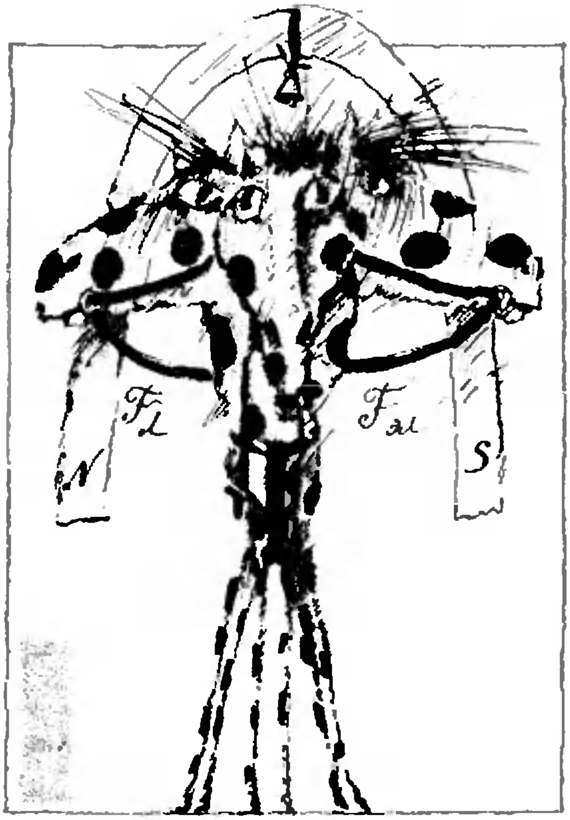
Половинки целого

(листая книги М. Гарднера...)

Один мальчик с увлечением занимался разведением золотых рыбок, потом это занятие ему надоело и он решил продать всех своих рыбок. Свое решение он осуществил в 5 этапов:

1. Продал половину всех своих рыбок и еще полрыбки.
2. Продал треть оставшихся рыбок и еще треть рыбки.
3. Продал четверть оставшихся рыбок и еще четверть рыбки.
4. Продал пятую часть оставшихся рыбок и еще одну пятую рыбки.

После этого у него осталось 19 рыбок. Разумеется, с золотыми рыбками он обращался бережно и ему в голову не приходило делить рыбку на части. Сколько рыбок было у мальчика сначала? (О т в е т: 101 рыбка.)



Школа в „Кванте"

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Сила Лоренца и эффект Холла» предназначена девятиклассникам, заметка «Альфа-частицы и опыты Резерфорда» — десятиклассникам.

Сила Лоренца и эффект Холла

При изучении темы «Магнитное поле» вы познакомились с двумя силами. Одну из них называют силой Лоренца, другую — силой Ампера. Сила Лоренца действует со стороны магнитного поля на движущуюся заряженную частицу. Если в магнитном поле находится не один движущийся заряд, а проводник с током, то на него действует сила Ампера.

Силу Ампера легко свести к силе Лоренца, если вспомнить, что электрический ток в проводнике есть не что иное, как направленное движение свободных зарядов, например — электронов. На каждый электрон действует сила Лоренца, а сумма всех таких сил как раз и составляет силу Ампера.

На первый взгляд, все просто. Но при внимательном рассмотрении возникают вопросы. Например, может показаться непонятным, каким образом сила, действующая на свободные электроны, «передается» всему проводнику. Если электроны свободные, то они не взаимодействуют с кристаллической решеткой, а значит, и не могут оказать на нее никакого воздействия. Попробуем разобраться.

Представим себе, что электроны действительно полностью не зависят от кристаллической решетки. Тогда за очень короткое время они все должны были бы улететь из проводника (скорость электронов достаточно велика). Ясно, что это невозможно, хотя бы потому, что при этом обнажился бы колоссальный положительный заряд. На самом деле в тонком пограничном слое проводника на электроны действует сильное электрическое поле, не позволяющее им улететь наружу. Электроны оказываются как бы запертыми внутри проводника.

Поместим проводник с током в магнитное поле, перпендикулярное направлению тока (рис. 1, *а*). На электроны начнет действовать сила Лоренца, и они будут смещаться к верхней границе проводника. В результате на верхней границе будет накапливаться отрицательный электрический заряд. Так как проводник в целом электронейтрален, на нижней границе появится избыточный *положительный* заряд. Этот процесс очень скоро прекратится, и только ничтожно малая часть всех электронов успеет скопиться на границе. Почему?

Дело в том, что накопление зарядов на границах приводит к появлению внутри проводника поперечного электрического поля *) (рис. 1, *б*). Легко видеть, что действие этого поля на электроны по направлению противоположно действию силы Лоренца. Когда эти две силы станут равны по модулю, движение электронов к границе проводника прекратится, и продолжится спокойное протекание электрического тока вдоль проводника.

Итак, мы более или менее разобрались, каким образом сила Лоренца, действующая на свободные электроны, передается всему проводнику: «передатчиком» служит заряд, который скапливается на его боковой поверхности. Но, внимание! Как это иногда бывает, пытаясь разобраться в одном явлении, мы попутно обнаружили другое важное физическое явление. А именно: *при помещении проводника с током в магнитное поле внутри проводника возникает электрическое поле, направленное перпендикулярно направлению тока и магнитному полю.* Этот замечательный эффект был обнаружен и исследован американским физиком Эдвином Холлом в 1879 году и теперь носит его имя.

Чтобы понять, почему мы назвали эффект Холла замечательным, рассмотрим его несколько подробнее. Вычислим сначала разность потенциалов $\Delta\varphi_X$ (ее называют холловской разностью потенциалов), которая образуется между боковыми поверхностями проводника. Как мы уже говорили, процесс накопления заряда прекратится тогда, когда сила Лоренца $F_л = evB$ будет уравновешена электростатической силой $F_{эл} = eE_\perp$:

$$evB = eE_\perp,$$

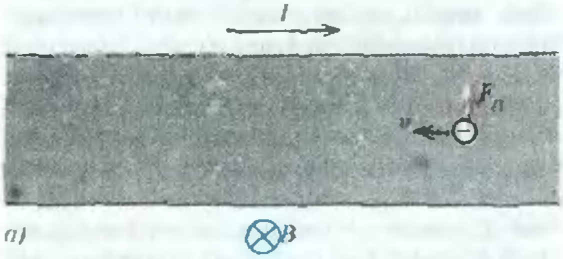
здесь v — средняя скорость направленного движения электронов, B — индукция магнитного поля, $E_\perp$ — напряженность поперечного электрического поля. Отсюда получаем

$$\Delta\varphi_X = E_\perp d = vBd,$$

где d — толщина проводника. Среднюю скорость направленного движения зарядов можно выразить через силу тока I, концентрацию свободных электронов в проводнике n и площадь его поперечного сечения S:

$$I = envS,\quad v = \frac{I}{enS}.$$

*) Продольное поле существовало и до этого. Его роль, как вы знаете,— поддерживать прохождение электрического тока.



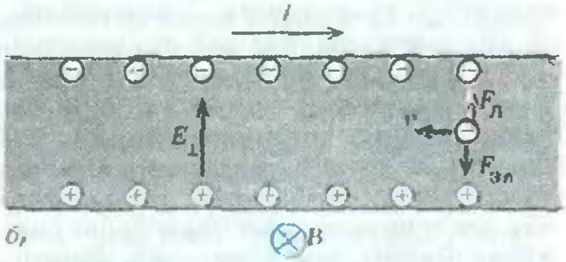


Рис. 1.

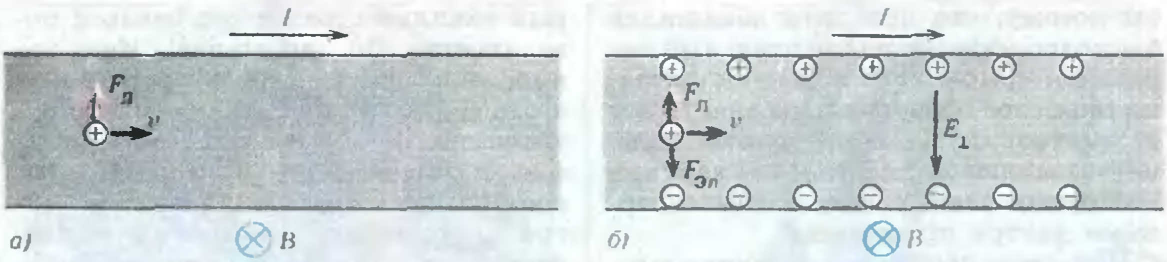


Рис. 2.

Тогда окончательно

$$\Delta\varphi_X = \frac{d}{enS} IB.$$

Глядя на эту формулу, нетрудно представить основные возможности применения эффекта Холла. Рассмотрим некоторые из них.

1. Эффект Холла можно использовать для измерения индукции магнитного поля. Для этого изготавливают проводник небольшого размера (его называют датчиком Холла) и определяют для него коэффициент пропорциональности между $\Delta\varphi_X$ и произведением IB, используя какое-то известное (эталонное) магнитное поле. Затем, помещая датчик Холла в различные точки исследуемого поля, измеряют ток и холловскую разность потенциалов, и по этим данным вычисляют B.

2. Результаты измерений холловской разности потенциалов легко воспроизводимы, поэтому эффект Холла нередко используют для создания эталонного напряжения.

3. Эффект Холла играет важную роль при исследовании физических свойств проводящих материалов. И это самое главное его применение. Действительно, измеряя $\Delta\varphi_X$, I и B, можно вычислить такую важную характеристику, как концентрация свободных носителей зарядов в веществе при различных условиях. Ожидалось, что эта концентрация будет по порядку величины такой же, как концентрация атомов,— ведь именно от атомов кристаллической решетки «отрываются» свободные электроны. Это ожидание оправдалось для многих металлов, но не подтвердилось для полупроводников. У них концентрация свободных зарядов оказалась на много порядков меньше и к тому же сильно зависела от температуры. Представляете — один свободный электрон на сто тысяч или даже на миллион атомов! Но самый неожиданный вывод заключался в том, что по результатам опытов заряд свободных носителей во многих полупроводниках должен быть положительным!

Как же удалось это выяснить? Нетрудно заметить, что все известные вам проявления электрического тока (тепловое, магнитное и т. п.) совершенно не зависят от знака носителей заряда, т. е. все определяется только величиной силы тока, и только в эффекте Холла это не так. Посмотрите на рисунок 2, *а*. Если бы носители заряда были положительными, то при том же направлении тока скорость зарядов имела бы противоположное направление. Но раз изменился как знак заряда, так и направление скорости, то сила Лоренца будет снова направлена вверх. Значит, на верхней грани в этом случае будет скапливаться не отрицательный, а положительный заряд, и $\Delta\varphi_X$ окажется противоположного знака (рис. 2, *б*).

Такой, как его называют, аномальный эффект Холла и был обнаружен экспериментально. Возникло ощущение, что ток создается положительными электронами! На самом деле, как оказалось впоследствии, аномальный эффект Холла в полупроводниках соответствует случаю дырочной проводимости.

В заключение отметим, что несколько лет назад были обнаружены совершенно неожиданные и удивительные особенности эффекта Холла в так называемых двумерных электронных слоях, объяснение которым дает лишь квантовая теория (о квантовом эффекте Холла вы можете прочитать в статье С. Г. Семенчинского «Эффект Холла: год 1879 — год 1980» в «Кванте» № 2 за 1987 год).

А. И. Черноуцан

Альфа-частицы и опыты Резерфорда

Осенью 1903 года из Европы в Канаду отплывал тридцатидвухлетний профессор физики Эрнест Резерфорд. Он вез с собой маленькую металлическую коробочку с бесценным для него грузом — тридцать миллиграмм соли радия.

Свинцовая коробочка вызвала опасения у служащих таможни в Нью-Йорке — в то время еще не было законов, касающихся ввоза радия. Драгоценность это или химикат? Надо ли его облагать налогом и каким? Чиновники всегда и везде одинаковы, и американские таможенники решили переслать странный груз начальству. Но исследователи тоже везде и всегда одинаковы. И появился рапорт, в котором чиновники сообщили своему начальству, что доктор Резерфорд наотрез отказался расстаться со своим сокровищем. И только обязательство профессора провезти ящик через территорию Соединенных Штатов в целости (т. е. не спекулируя веществом) позволило американским чиновникам переложить решение пошлинной проблемы на плечи их канадских коллег. Возможно, благодаря именно этим миллиграммам радия и были сделаны в физике многие замечательные открытия.

Имя Резерфорда встречается в школьном курсе физики в связи с установлением планетарной модели атома. Но Резерфорд — автор и многих других, не менее ценных для физики открытий. К ним относятся, в частности, опыты по исследованию природы α-лучей. Расскажем о некоторых из них.

Еще в 1899 году, работая в Кавендишской лаборатории (в Кембриджском университете), Резерфорд установил, что излучение радиоактивных элементов не является однородным. Вот один из таких экспериментов.

Опыт 1. Две цинковые пластинки располагались горизонтально друг под другом. Одну пластинку соединяли с полюсом заземленной батареи, а другую — с заземленным гальванометром. На нижнюю пластинку насыпали тонкий слой соли радия. Излучение соли порождало в воздухе ионы, воздух между пластинками переставал быть изолятором, возникал электрический ток, который и фиксировался прибором.

Если соль радия накрыть тонким металлическим листом, часть радиации поглощается, и ток становится слабее в два с лишним раза. Если излучение заэкранировать двумя листами, ток ослабевает почти в шесть раз, если тремя — в одиннадцать раз. Казалось бы, и дальше ток должен плавно спадать (по экспоненциальному закону). Но удивительно, что опыты это не подтвердили — начиная с пятого листа, ток практически не уменьшался.

Очевидным было предположить, что ионизация воздуха вызывается, по крайней мере, двумя причинами. Или, другими словами, что излучение состоит из двух разных видов: одно излучение порождает сильную ионизацию, но хорошо поглощается металлом, другое — ионизирует воздух слабее, но зато обладает большей проникающей способностью. Первое излучение Резерфорд назвал α-лучами, а второе — β-лучами. Теперь перед учеными встала проблема исследовать природу этих лучей.

Очень скоро и довольно несложно удалось установить, что β-излучение представляет собой поток свободных электронов. Во всяком случае, в электрическом и магнитном полях β-лучи вели себя точно так же, как электроны.

Что касается α-лучей, то их отклонение в магнитном поле долгое время обнаружить не удавалось — даже в сильном поле отклонение оказывалось малым. Наконец, в 1903 году Резерфорд добился положительных результатов и показал, что α-излучение должно состоять из положительно заряженных частиц, движущихся с большими скоростями.

Следующей задачей было определить величину заряда α-частицы.

Опыт 2. Для определения заряда одной α-частицы экспериментально определялось суммарное количество электричества, переносимое всем излучением крупинки радия за определенное время, и количество α-частиц, испускаемых радием за это время. Самым сложным было зарегистрировать одну частицу. Для этого Резерфорд совместно с Гейгером в 1908 году разработали специальный метод счета α-частиц, основанный на их ионизирующем действии, и создали специальный прибор (известный вам счетчик Гейгера).

Внутри бронзового цилиндра длиной около 60 см находился разреженный воздух. По оси цилиндра была натянута тонкая проволока. Проволока соединялась с одним полюсом батареи, а поверхность цилиндра — с другим, при этом приложенное напряжение порядка 1000 вольт готово было вот-вот вызвать электрический разряд. Попавшая в цилиндр α-частица производила ионизацию воздуха, образовавшиеся при этом ионы, благодаря соударениям, усиливали ионизацию примерно в 2000 раз, в результате ток через прибор резко возрастал.

Для того чтобы в цилиндр проникали отдельные частицы, крупинка радия помещалась в дальний конец узкой стеклянной трубки длиной около 4,5 м, так что действительно лишь малая доля α-частиц, вылетающих из радия в разные стороны, попадала в цилиндр.

Разделив прошедшее количество электричества на число зарегистрированных частиц, Резерфорд получил величину заряда одной α-частицы.

Почти в то же время, в 1909 году, Резерфорд экспериментально показал, что по своей природе α-частицы представляют собой дважды ионизированные атомы гелия. Этот опыт он поставил совместно с Ройдсом.

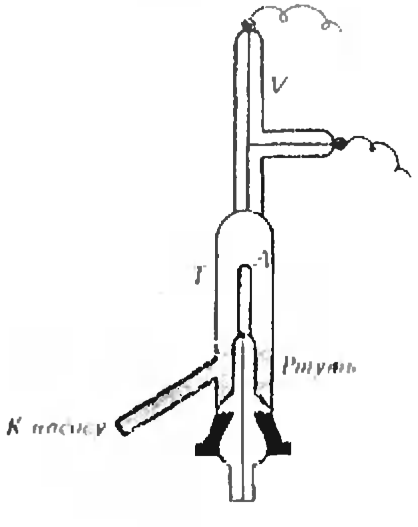


Рис. 1.

Опыт 3. Достаточно большое количество радиоактивного газа радона вводилось в стеклянную трубку *A* (рис. 1), настолько тонкую, что большинство α-частиц свободно проникало сквозь нее. Эта трубка помещалась внутрь более широкой трубки *T*, к верхней части которой присоединялась небольшая вакуумная трубка *V* с впаянными в нее электродами. В откачанную трубку *T* снизу вводилась ртуть до тех пор, пока она не достигала нижней части трубки *A*. Альфа-частицы, скопившиеся в трубке *T*, образовывали газ. Поднимая ртуть, этот газ сжимали и часть его переводили в вакуумную трубку *V*. Возбудив там газовый разряд, можно было исследовать его спектральный состав. Любопытно, что лишь через два дня появились первые результаты — была обнаружена желтая (самая яркая) линия спектра гелия. Через шесть дней наблюдали уже весь спектр гелия.

Наконец, из опытов по отклонению α-частиц в магнитном поле можно определить их массу.

Опыт 4. Камеру Вильсона, в которой наблюдали траектории α-частиц по их сцинтилляциям, поместили в очень сильное магнитное поле. Так как радиус круговой орбиты α-частицы пропорционален массе частицы, умноженной на ее скорость, и обратно пропорционален ее заряду, по известным величинам можно было рассчитать массу α-частицы. Она оказалась равной $6{,}62 \cdot 10^{-24}$ г.

Итак, благодаря опытам Резерфорда и его сотрудников, стали известны природа, заряд и масса α-частицы. Кроме того, у физиков появился мощный и принципиально новый инструмент для исследования строения самого атома. К началу этих экспериментов Резерфорда по зондированию атомов α-частицами сложилось следующее представление о строении атома.

Атом, модель которого была предложена в 1882 году учителем Резерфорда Дж. Томсоном, напоминал пудинг с изюмом — изюминками были электроны, а тестом — само́ атомное пространство. Достоинства этой модели состояли в том, что она позволяла объяснить нейтральность атома и удовлетворительно определяла его размеры. Но существовала в физике теорема (теорема Ирншоу), которая указывала на то, что система неподвижных зарядов является неустойчивой. Кроме того, природа размазанной по всему объему атома положительно заряженной сферы была непонятна.

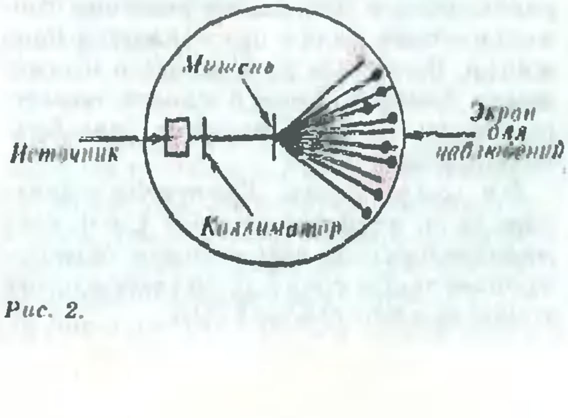


Рис. 2.

Бомбардировка атомов α-частицами и позволила установить строение атома.

Опыт 5. Тонкие пластинки исследуемого вещества бомбардировались α-частицами и изучалось их отклонение. На рисунке 2 приведена принципиальная схема опыта по рассеянию α-частиц. Бомбардирующие частицы, вылетая из радиоактивного вещества, пройдя коллиматор, попадали узким пучком на мишень, представляющую собой очень тонкую золотую фольгу. С помощью экрана, покрытого сцинтилляционным веществом, наблюдали рассеяние α-частиц. Углы рассеяния большинства частиц были небольшими — порядка 1°, однако небольшое количество частиц рассеивалось на большие углы, и даже были частицы, движущиеся в противоположном направлении.

Проанализировав результаты опытов, Резерфорд пришел к выводу, что столь сильное отклонение α-частиц возможно только в том случае, если внутри атома имеется чрезвычайно сильное электрическое поле, созданное зарядом, связанным с большой массой (ядром атома). Резерфордом была разработана и количественная теория рассеяния α-частиц, которая устанавливала распределение частиц по углам рассеяния. В этой связи любопытен такой факт.

Чтобы в деталях разобраться в вероятностных процессах при прохождении α-частиц через вещество, Резерфорд, известный во всем мире ученый, лауреат Нобелевской премии, пожелал побывать в роли студента. Он пришел к известному манчестерскому математику Лэмбу и попросил разрешения прослушать у него курс по теории вероятностей, а также пройти всю программу практических занятий. Как писали современники, «то было нетривиальное зрелище: мировая знаменитость, восседающая среди юнцов и склонившаяся над тетрадками с заданными упражнениями».

В 1913 году сотрудники Резерфорда проверили формулу Резерфорда, описывающую рассеяние α-частиц, подсчитав сцинтилляции, наблюдавшиеся под разными углами за одинаковые промежутки времени, и подтвердили ее. Это, безусловно, указывало на справедливость ядерной модели атома. Поскольку система неподвижных зарядов не может находиться в устойчивом равновесии, Резерфорд отказывается от статической модели атома и предполагает, что электроны в атоме движутся вокруг ядра, описывая искривленные траектории. Но в таком случае электрон должен двигаться с ускорением и, согласно классической электродинамике, излучать электромагнитные волны, что, в свою очередь, должно сопровождаться потерей им энергии. В конечном итоге электрон должен упасть на ядро.

Выход из этого противоречия был найден Нильсом Бором. Но это, как говорится, уже совсем другая история. Ну а опыты Резерфорда? Теперь они важны только для истории физики? Оказывается, нет. Интересно, что спустя почти 60 лет, уже в семидесятых годах метод Резерфорда по зондированию альфа-частицами вещества стал широко использоваться в лабораториях для изучения строения кристаллов, определения в них местоположений различных примесей и установления их состава. Его сейчас так и называют — метод обратного резерфордовского рассеяния. Только в качестве источников α-частиц используются не крошки радия, а мощные ускорители, позволяющие получать их большие потоки с большими энергиями. А прообразом их была маленькая свинцовая коробочка с солью радия, с которой, как вы помните, категорически отказался расстаться доктор Резерфорд в американской таможне.

М. Ю. Дигилов

Школа в „Кванте"

Математика 8, 9, 10

Геометрические преобразования

Часть II: Преобразования подобия

В Части I этой статьи, опубликованной в прошлом номере «Кванта», мы рассказали о том, как в решении геометрических задач применяются *движения*. Здесь мы расскажем о применении более широкого класса геометрических преобразований: преобразований подобия.

Определение. *Гомотетия с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ есть преобразование, при котором образом произвольной точки A является такая точка A', что $OA' = k \cdot OA$.*

Единственная неподвижная точка гомотетии (при $k \neq 1$) — ее центр. Если $k > 0$, то точки A и A' лежат на прямой OA по одну сторону от центра гомотетии, если $k < 0$ — то по разные стороны. При $k = -1$ гомотетия есть центральная симметрия (поворот вокруг точки O на $180°$).

Гомотетия с положительным коэффициентом k переводит каждый луч в сонаправленный с ним луч и, значит, не меняет ориентацию треугольников. Гомотетия с отрицательным коэффициентом k может быть представлена в виде композиции гомотетии с положительным коэффициентом $|k|$ и поворота вокруг центра на $180°$. При этом каждый луч переходит в противоположно направленный с ним луч, но ориентация треугольников не меняется.

Рассмотрим композицию гомотетии и поворота с общим центром. Пусть при гомотетии с центром O и коэффициентом k точка A переходит в точку A', а при повороте вокруг точки O на угол φ (напомним, что под поворотом мы всегда понимаем поворот против часовой стрелки) точка A' переходит в точку A'' (рис. 1). Их композиция переводит точку A в точку A''. Нетрудно проверить, что результат не изменится, если сначала выполнить поворот, а потом гомотетию.

Композиция гомотетии и поворота с общим центром есть *подобие*. Если коэффициент гомотетии положителен, то композицию называют *центрально-подобным поворотом*. Введем следующие обозначения: R_O^φ — поворот вокруг точки O на угол φ; H_O^k — гомотетия с центром O и коэффициентом k; $\Pi_O^{k,\varphi}$ — центрально-подобный поворот с центром O, коэффициентом k и углом поворота φ. Таким образом,

$$\Pi_O^{k,\varphi} = R_O^\varphi \cdot H_O^k = H_O^k \cdot R_O^\varphi,\ k > 0,\ 0 \leq \varphi < 360°.$$

При центрально-подобном повороте угол между любым лучом и его образом равен углу поворота. Это следует из того, что при гомотетии с положительным коэффициентом луч переходит в сонаправленный с ним луч, а при повороте угол между лучом и его

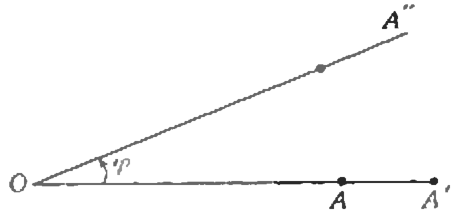


Рис. 1.

образом равен углу поворота (см. Теорему 1 Части I в предыдущем номере «Кванта»).

Поворот и гомотетия сохраняют ориентацию треугольников, значит, центрально-подобный поворот также сохраняет ее. Гомотетии и центрально-подобные повороты, а также параллельные переносы называют *преобразованиями подобия первого рода*.

Гомотетию, поворот вокруг точки и тождественное преобразование можно рассматривать как частные случаи центрально-подобного поворота $\Pi_O^{k,\varphi}$: при $\varphi = 0$ — это гомотетия H_O^k, при $k = 1$ — поворот R_O^φ, при $k = 1$ и $\varphi = 0$ — тождественное преобразование.

Преобразования подобия первого рода можно было бы определить, наподобие движений первого рода, как преобразования плоскости, при которых все расстояния умножаются на одно и то же положительное число и сохраняются ориентации всех треугольников. Аналогично теореме 2 Части I доказывается

Теорема 1. *Всякое преобразование подобия первого рода есть центрально-подобный поворот или параллельный перенос* (т. е. наше исходное определение преобразования подобия первого рода эквивалентно последнему определению).

Следствие. *Композиция двух центрально-подобных поворотов есть центрально-подобный поворот или параллельный перенос.*

Мы не доказываем этих утверждений, ограничиваясь следующим более простым фактом.

Теорема 2. *Композиция двух центрально-подобных поворотов $\Pi_A^{k_1,\alpha}$ и $\Pi_B^{k_2,\beta}$ при $k_1 k_2 = 1$ есть движение первого рода: поворот, если $\alpha + \beta \neq 360°$, и параллельный перенос, если $\alpha + \beta = 360°$.*

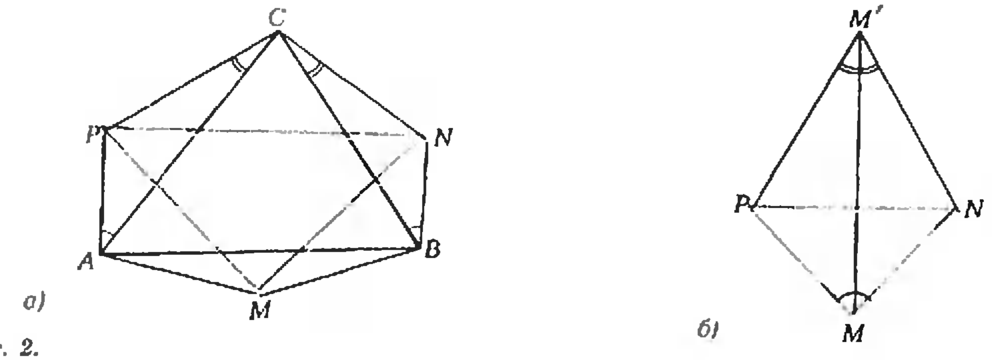


Рис. 2.

Доказательство. Композиция двух подобий первого рода с коэффициентами k_1 и k_2 есть подобие первого рода с коэффициентом k_1k_2. Так как $k_1k_2=1$, композиция $F=\Pi_B^{k_2,\beta}\circ\Pi_A^{k_1,\alpha}$ есть движение первого рода, при котором каждый луч поворачивается сначала на угол α, а потом на угол β, и в результате — на угол $\alpha+\beta$. Следовательно, если $\alpha+\beta\neq360^\circ$, то F есть поворот вокруг некоторой точки на угол $\alpha+\beta$; если же $\alpha+\beta=360^\circ$, то F — параллельный перенос.

Следствие. *Композиция трех подобий $F=\Pi_C^{k_3,\gamma}\circ\Pi_B^{k_2,\beta}\circ\Pi_A^{k_1,\alpha}$ есть тождественное преобразование тогда и только тогда, когда $k_1k_2k_3=1$, сумма углов поворота равна 360° или 720° и преобразование F имеет неподвижную точку.*

В доказательстве этого следствия необходимо пользоваться следствием из теоремы 1.

Упражнения

1. Даны два одинаково ориентированных квадрата $ABCD$ и $AB'C'D'$. Найдите угол между лучами BB' и CC'.

2. Найдите композицию

$$\Pi_C^{k,120^\circ}\circ R_B^{120^\circ}\circ R_A^{120^\circ},$$

если ABC — равносторонний треугольник, ориентированный отрицательно.

3. Найдите углы треугольника MNP, если композиция

$$\Pi_N^{\frac{1}{k},90^\circ}\circ\Pi_P^{k,90^\circ}\circ R_M^{180^\circ}$$

имеет неподвижную точку.

На XVII Международной олимпиаде школьников в 1975 году предлагалась следующая задача, которую можно легко решить, используя композицию преобразований *).

Задача. *На сторонах произвольного треугольника ABC вне его построены треугольники ABM, BCN и CAP так, что $\angle CAP=\angle CBN=45^\circ$, $\angle ACP=\angle BCN=30^\circ$, $\angle ABM=\angle BAM=15^\circ$. Докажите, что $\angle PMN=90^\circ$ и $PM=MN$.*

Решение. Пусть данный треугольник ABC ориентирован положительно (рис. 2, а). Рассмотрим композицию

$$F=\Pi_N^{\frac{1}{k},105^\circ}\circ\Pi_P^{k,105^\circ}\circ R_M^{150^\circ},$$

где $k=\dfrac{\sin45^\circ}{\sin30^\circ}=\sqrt{2}$.

Имеем:

$$R_M^{150^\circ}(B)=A,\ \Pi_P^{k,105^\circ}(A)=C,$$

$$\Pi_N^{\frac{1}{k},105^\circ}(C)=B.$$

Следовательно, $F(B)=B$, т. е. B — неподвижная точка преобразования F. Так как произведение коэффициентов подобий равно 1 и сумма углов поворота равна 360°, получаем, что F есть тождественное преобразование.

Углы треугольника MNP можно найти, построив образ точки M при композиции F (рис. 2, б). Учитывая, что $F(M)=M$, получим

$$R_M^{150^\circ}(M)=M,\ \Pi_P^{k,105^\circ}(M)=M',$$

$$\Pi_N^{\frac{1}{k},105^\circ}(M')=M.$$

Треугольники PMM' и PAC (также, как треугольники NMM' и NBC) подобны и одинаково ориентированы. Треугольники PMM' и NMM' подобны и ориентированы противоположно, MM' — их общая сторона, значит, они равны; отсюда $\angle PMN=90^\circ$ и $PM=MN$.

*) Решение предложено З. А. Скопецом (журнал «Математика в школе», 1977, № 6).

В журнале «Квант» (1975, № 12, с. 73) опубликовано другое, более сложное, решение этой задачи.

Способ решения, основанный на применении композиции преобразований, можно использовать для составления и решения аналогичных задач. Решая более общую задачу, чем рассмотренная, получим следующий результат:

Если на сторонах произвольного треугольника ABC построены треугольники ABM, BCN, ACP и при этом выполнены следующие условия: а) треугольники BCN и ACP подобны и ориентированы противоположно; б) треугольник ABM равнобедренный с основанием AB (или M — середина стороны AB); в) сумма ориентированных углов BMA, APC и CNB (или AMB, BNC и CPA) равна $360°$, то

$$\angle PMN = 2\angle PAC \text{ и } PM = MN.$$

Еще одну аналогичную задачу, в которой треугольники, построенные на сторонах данного треугольника, не являются подобными, читатель найдет ниже (упражнение 4).

Упражнения

4. На сторонах произвольного треугольника ABC вне его построены треугольники ABM, BCN и CAP такие, что $\angle BAM = \angle CAP = 15°$, $\angle ABM = \angle CBN = 30°$ и $\angle ACP = \angle BCN = 45°$. Найдите углы треугольника MNP.

5. На сторонах произвольного треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники ABM, BCN и ACK. Докажите, что отрезок CM перпендикулярен отрезку PQ, соединяющему центры треугольников BCN и ACK, причем $CM = PQ\sqrt{3}$.

6. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$ вне его построены равносторонние треугольники. Докажите, что отрезок MN, соединяющий вершины построенных треугольников ABM и CDN, перпендикулярен отрезку PQ, соединяющему центры двух других треугольников, причем $MN = PQ\sqrt{3}$.

7. На стороне AB треугольника ABC выбраны точки E и F так, что $\angle ACE = \angle BCF = \gamma$. На лучи CE и CF опущены перпендикуляры AM и BN, точка K — середина стороны AB. Докажите, что $KM = MN$ и $\angle KMN = \gamma$.

8. На сторонах BC и AC треугольника ABC вне его построены прямоугольные треугольники BCM и ACN так, что $\angle CBM = \angle CAN = 90°$ и $\angle BCM = \angle ACM = \gamma$. Найдите углы треугольника ABK, где K — середина отрезка MN.

9. Дан выпуклый пятиугольник $ABNCM$. Известно, что BCN и ACM — прямоугольные треугольники с гипотенузами BC и AC, причем $\angle BCN = \angle ACM$. Через середину K стороны AB проведены прямые KM и KN, пересекающие прямые BC и AC соответственно в точках P и Q. Докажите, что точки C, M, N, P и Q лежат на одной окружности.

10. На сторонах треугольника ABC вне его построены треугольники ABM, BCN и CAP такие, что $\angle CAP = \angle CBN = \alpha$, $\angle ACP = \angle ABM = \beta$, $\angle BCN = \angle BAM = \gamma$, причем $\alpha + \beta + \gamma = 90°$. Найдите углы треугольника MNP.

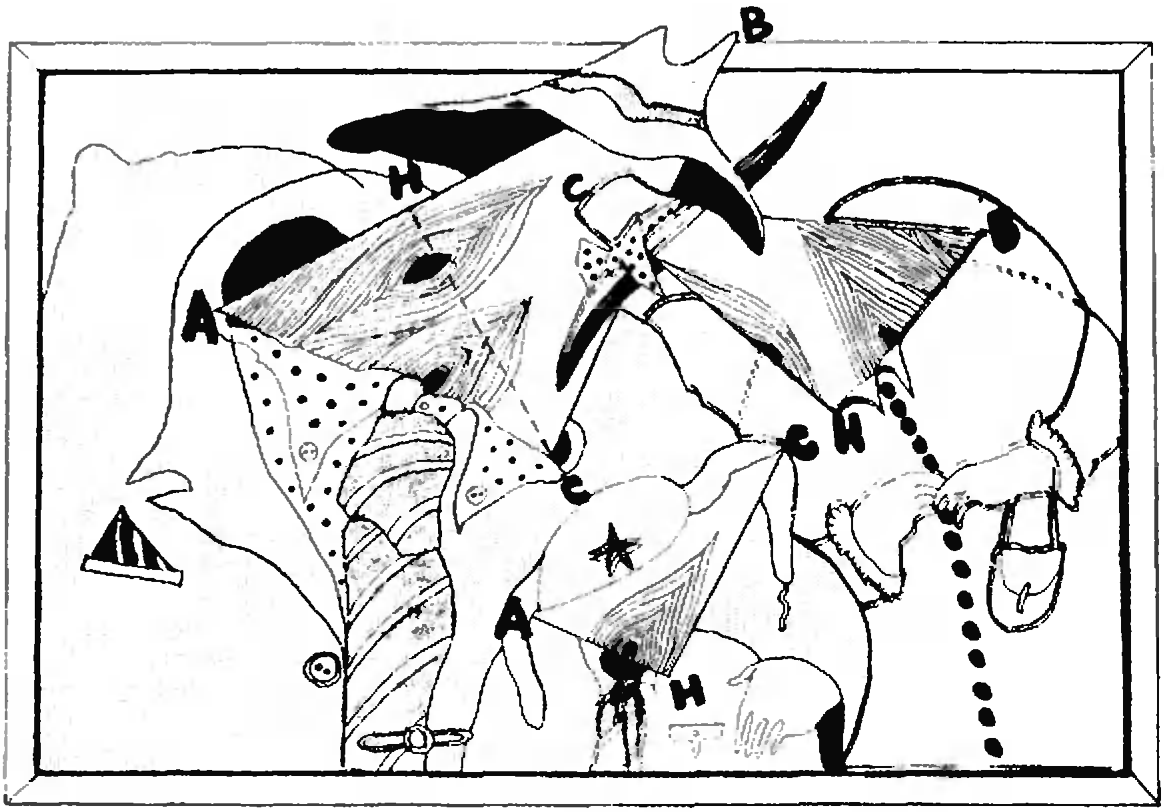
11. На сторонах BC и AC треугольника ABC вне его построены треугольники BCM и ACN так, что $\angle BMC = \angle ANC = 90°$, $\frac{CM}{BM} = \frac{1}{3}$, $\frac{CN}{AN} = \frac{1}{2}$. На стороне AB взята точка K такая, что $\frac{AK}{BK} = \frac{2}{3}$. Найдите величину угла MKN.

Э. Г. Готман

Нам пишут

«Квант» неоднократно писал о пифагоровых тройках, т. е. о решениях уравнения $a^2+b^2=c^2$ в целых числах. Необычайный подход к решению этого уравнения предлагает *В. П. Кузнецов* из Московской области.

Из уравнения $a^2+b^2=c^2$ следует, что числа $a+b$ и c имеют одинаковую четность и $a+b>c$. Положим $a+b-c=2n$ и введем переменные: $x=a-2n$, $y=b-2n$. Тогда $a=x+2n$, $b=y+2n$, $c=x+y+2n$ и исходное уравнение можно записать так: $xy=2n^2$. Следовательно, все решения уравнения $a^2+b^2=c^2$ можно получить следующим образом: для каждого натурального n разложить число $2n^2$ на два множителя x и y и положить затем $a=x+2n$, $b=y+2n$, $c=x+y+2n$. Например, пифагорова тройка (5, 12, 13) отвечает значениям $n=2$, $x=1$, $y=8$.



Математический кружок

Прямоугольный треугольник

Л. Д. КУРЛЯНДЧИК

Что интересного можно сказать про прямоугольный треугольник? На первый взгляд, ничего — вроде все про него известно. Не будем, однако, спешить. Читая эту заметку, вы увидите много интересных и нетривиальных свойств этой простой фигуры. Может быть, некоторые из вас обнаружат и другие свойства, не упомянутые здесь.

Почти очевидные соотношения

Итак, пусть ABC — прямоугольный треугольник, точка H — основание высоты, опущенной из вершины прямого угла C (рис. 1). Как обычно, введем обозначения
$AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, $AH=b'$, $BH=a'$, $CH=h$,

$\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$.

Напомним простые утверждения и соотношения, известные вам из школьного курса.

1. Треугольники BCH, ACH и ABC попарно подобны.

2. $a^2=a'c$, $b^2=b'c$.

Из соотношений 2, кстати, следует теорема Пифагора:

$$a^2+b^2=a'c+b'c=c(a'+b')=c^2.$$

3. $h^2=a'b'$, $h=\frac{ab}{c}$.

4. Пусть R — центр вписанной окружности, а r — ее радиус (рис. 2).

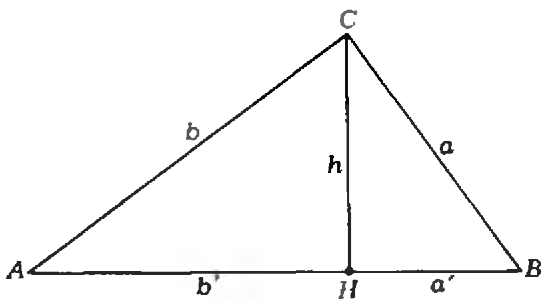


Рис. 1.

Тогда $r=\frac{a+b-c}{2}$.

Доказательство. Заметим, что четырехугольник $RKCL$ — квадрат, и воспользуемся равенством отрезков касательных: $c=a-r+b-r$, откуда $r=\frac{a+b-c}{2}$.

5. $\angle ARB=180^\circ-\frac{1}{2}\angle A-\frac{1}{2}\angle B=$ $=135^\circ$.

Более сложные утверждения

Впишем окружности в треугольники ACH и BCH (рис. 3). Пусть их радиусы равны r_1 и r_2 тогда

6. $r+r_1+r_2=h$.

Доказательство. Имеем $r=$ $=\frac{a+b-c}{2}$, $r_1=\frac{h+b'-b}{2}$, $r_2=\frac{h+a'-a}{2}$. Складывая эти выражения, получаем требуемое.

7. $r^2=r_1^2+r_2^2$.

Доказательство. Из подобия треугольников ACH и ABC следует, что $\frac{r_1}{r}=\frac{b}{c}=\cos\alpha$, кроме того, $\frac{r_2}{r}=$ $=\frac{a}{c}=\cos\beta=\sin\alpha$. Итак, $r_1=r\cos\alpha$, $r_2=r\sin\alpha$. Следовательно, $r_1^2+r_2^2=r^2$.

8. $AC=AQ$, $BC=BP$.

Доказательство. Первое равенство следует из цепочки равенств углов $\angle CQA=\angle BCQ+\angle B=\frac{1}{2}\alpha+$ $+\beta=\angle ACH+\angle HCQ=\beta+\frac{1}{2}\alpha=$ $=\angle ACQ$. Второе равенство доказывается аналогично.

9. Точка T (см. рис. 3) является точкой пересечения высот (ортоцентром) треугольника CRS и центром описанной окружности треугольника CPQ.

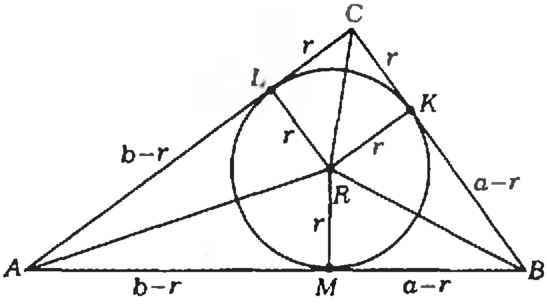


Рис. 2.

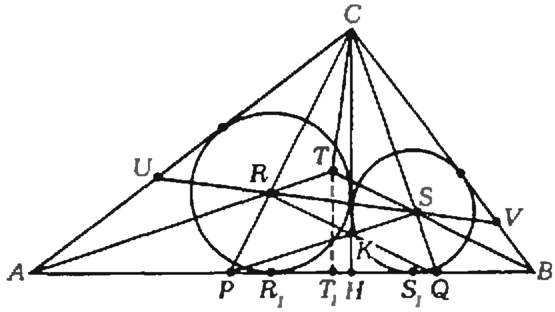


Рис. 3.

Доказательство. BS и AT — биссектрисы углов B и A. Это значит, что прямые BS и AT перпендикулярны CP и CQ соответственно и делят эти отрезки пополам.

10. Прямые T_1R и T_1S параллельны соответственно BC и AC.

Доказательство. Из точки T_1 опустим перпендикуляр T_1R_2 на AC (рис. 4). Пусть R^* — точка пересечения TR_2 с AT. Докажем, что $R^*=R$.

Треугольники ATT_1 и AR^*R_2 подобны. Поэтому $\frac{R^*R_2}{TT_1}=\frac{AR_2}{AT_1}=\cos\alpha$, и, следовательно, $R^*R_2=TT_1\cos\alpha=$ $=r\cos\alpha=r_1$, т. е. точка R^* лежит на биссектрисе угла A и удалена от AC на расстояние r_1, но это значит, что $R^*=R$. Аналогично доказывается, что $T_1S\parallel AC$.

Упражнение 1. Самостоятельно докажите следующие утверждения:

11. Прямая PS параллельна AT, а прямая RQ параллельна BT.

12. Треугольники ATB, BSC и ARC подобны.

13. Точки H и T_1 лежат на окружности с диаметром RS.

14. $ST_1=RT_1$.

Доказательство. Так как $\triangle T_1RR_1$ — прямоугольный и $\angle RT_1R_1=\beta$, имеем $T_1R\sin\beta=r_1=$ $=r\sin\beta$, откуда $T_1R=r$. Аналогично доказывается, что $T_1S=r$.

15. $CU=CV$.

Доказательство. Треугольник ST_1R — равнобедренный прямоугольный. Поэтому $\angle TS_1R=\angle CUV=45^\circ$. А это и значит, что треугольник CUV — равнобедренный.

16. Точки Q, S, T, R, P лежат на окружности с центром в точке T_1 и радиусом r.

Доказательство. Точки S и R лежат на этой окружности. Докажем,

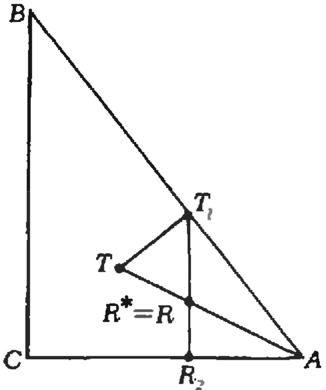


Рис. 4.

например, что точка Q также лежит на этой окружности. Треугольники T_1SQ и CQA подобны. Поэтому $\frac{ST_1}{AC}=\frac{T_1Q}{QA}$,

но $AC=QA$ (см. утверждение 8). Поэтому $ST_1=T_1Q=r$.

Упражнение 2. Докажите следующие утверждения:

17. Точка K (см. рис. 3) — ортоцентр треугольника CPQ.

18. Прямые PS, RQ и CH пересекаются в точке K.

19. $RT=KS=SQ$; $RP=RK=TS$.

20. $RS=CT$.

21. Точки A, R, S, B лежат на одной окружности; точки A, P, T, C также лежат на одной окружности. Также на одной окружности лежат и точки B, Q, T, C.

Еще несколько соотношений

22. $AT_1\cdot BT_1=S_{ABC}$.

Доказательство. Пусть $AT_1=u$, $BT_1=v$. Так как $S=rp$ (здесь p — полупериметр треугольника ABC), получаем $S_{ABC}=\frac{1}{2}r(a+b+c)=r(r+u+v)$, но $(u+r)^2+(v+r)^2=c^2=(u+v)^2$. Поэтому $r^2+r(u+v)=uv$, но левая часть этого равенства и есть площадь треугольника.

23. $S_{CPQ}=\frac{abr}{c}$. Указание. Высота треугольника CPQ равна $h=\frac{ab}{c}$, а основание — $2r$.

Конечно же, перечисленными свойствами наша картинка далеко не исчерпывается. Попробуйте самостоятельно найти еще интересные свойства этой замечательной конфигурации и, кроме того, докажите, что:

24. Треугольники HSR и ABC подобны.

25. Треугольники RR_1T_1 и SS_1T_1 равны и подобны треугольнику ABC.

26. Треугольники AQR и ARC равны.

27. Середина отрезка RS — центр окружности девяти точек треугольника CPQ.

28. Окружности, описанные около треугольников ARC и CSB, касаются в точке C, и CT их общая касательная.

Нам пишут

Многие читатели знакомы с классической формулой числа сочетаний из n элементов, взятых по k:

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (1)$$

В частности, существует C_n^k способов выбора k различных чисел из набора $(1, 2, 3, ..., n)$. *Л. И. Плюкфельдер* из Новокузнецка задался вопросом: *сколькими способами можно выбрать k чисел из набора $(1, 2, 3, ..., n)$ так, чтобы абсолютная величина разности любых двух выбранных чисел была не меньше, чем p?*

Обозначим это число через $C_n^k(p)$. Формула, найденная Л. И. Плюкфельдером, имеет вид:

$$C_n^k(p)=\frac{(n+k-pk+p-1)!}{k!(n-pk+p-1)!} \qquad (2)$$

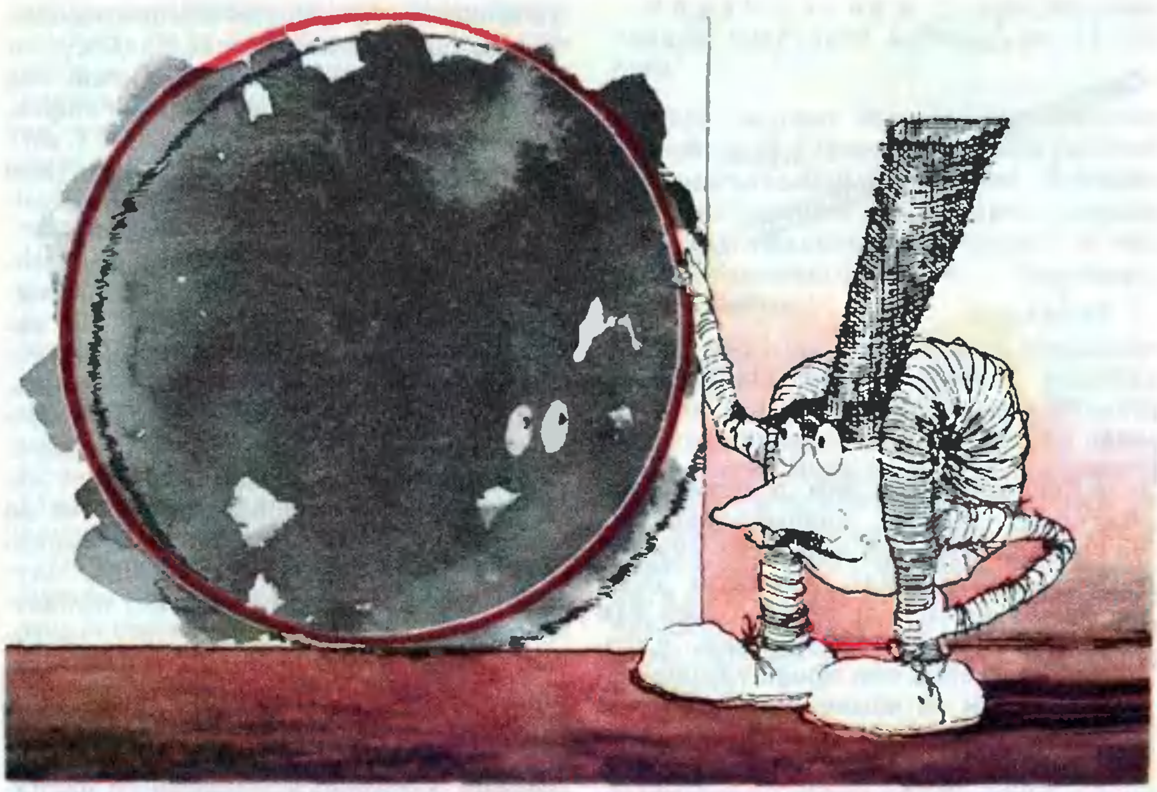
(если для некоторых n, k, p в знаменателе появляется отрицательное число, то требуемых сочетаний не существует).

При $p=1$ формула (2), как и следовало ожидать, превращается в (1), а при $p=0$ в формулу:

$$C_n^k(0)=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}. \qquad (3)$$

Число $C_n^k(0)$ естественно понимать, как число способов выбора k *не обязательно различных* элементов из данных n; для этого числа формула (3) дает верный результат.

Доказательство формулы (2) можно провести по индукции; предлагаем вам сделать это самостоятельно.



Информатика и программирование

Задачи, модели и ЭВМ

Кандидат физико-математических наук
А. Г. ГЕЙН,
А. К. КОВАЛЬДЖИ,
кандидат физико-математических наук
М. В. САПИР

Наверняка все читатели «Кванта» знают, что ЭВМ обладают фантастической скоростью счета, освобождая нас от громоздких и утомительных вычислений. В то же время вы постоянно слышите о том, что ЭВМ используются для прогнозирования погоды и управления производством, для рисования мультфильмов и розыска преступников, т. е. для решения задач, с вычислениями как будто и не связанных. Как же это удается? Ведь здесь явное противоречие! И действительно — противоречие. Преодолевать его бывает весьма не просто. О том, как применять ЭВМ для решения невычислительных задач, пойдет речь в цикле статей, который начинается в этом номере «Кванта».

Помните, в поэме Н. А. Некрасова описано, как собрались мужики окрестных деревень обсудить, кому на Руси жить хорошо? В те бесправные времена они ничего не могли сделать, чтобы облегчить свою жизнь: все социальные вопросы за них решали хозяева. Теперь ни один социальный вопрос не может быть решен без широкого обсуждения. Вот одна из задач, с которыми часто приходится сталкиваться планирующим органам.

Задача. *В одном районе расположены несколько населенных пунктов. По территории района проходит железная дорога. По просьбе жителей района планируется построить железнодорожную станцию и проложить дороги от нее до каждого населенного пункта. Требуется определить наиболее удобное место расположения железнодорожной станции.*

На рисунке 1 изображена карта района (мы сохранили Некрасовские названия деревень). Вот и представьте себе, что вы работаете программистом

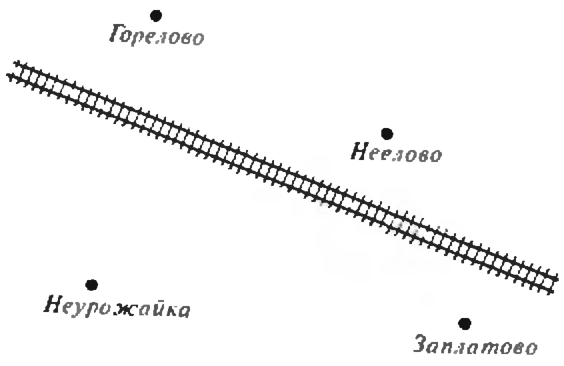


Рис. 1.

в райисполкоме и вам поручено решить эту задачу, воспользовавшись услугами ЭВМ. Что для этого нужно? Прежде всего надо помнить: ЭВМ не может ничего другого, кроме как выполнять ваши инструкции, алгоритмы, и то если они сформулированы на понятном ей языке. А для составления алгоритма нужно знать, что дано, что требуется получить, как связаны исходные данные и результаты, а также какие команды можно использовать. Иначе говоря, задача должна быть четко сформулирована.

Отложим на время нашу железнодорожную задачу и поговорим о постановках задач.

Постановки задач

Это только в школьных задачах сразу ясно, что дано и что требуется получить. В жизни все сложнее. Опыт буквально кричит о том, как трудно правильно поставить задачу: не переупростить и не переусложнить, не упустить важных исходных данных и не включить лишних, соразмерить желаемое с возможным.

Допустим, что вы решили в порядке индивидуальной трудовой деятельности организовать бюро по обмену квартир. Ваша задача — для каждой поступившей заявки подобрать вариант обмена, удовлетворяющий все заинтересованные стороны. Попробуйте сформулировать эту задачу четко. Сразу возникает много вопросов: какие параметры имеющейся и требуемой жилплощади учитывать в заявке (количество и площадь комнат, их взаимное расположение, площадь кухни и других подсобных помещений, год постройки дома, этаж, наличие лифта, удаленность от центра города и т. д.)? Принимать ли заявки на объединение и размен квартир? Учитывать ли стоимость кооперативной квартиры?

Или еще задача: составить расписание уроков в школе. Каковы исходные данные для этой задачи? Это зависит, конечно, от требований, предъявляемых к расписанию. Потребовать, чтобы два разных урока не происходили в одно и то же время в одном классе? Тогда исходных данных будет немного: список учебных предметов да количество классов в каждой параллели. При этом, правда, может случиться так, что одному классу придется изучать только математику, другому — только географию, а учитель литературы вряд ли будет доволен, если ему поручат вести уроки физики. Попробуйте сами четко сформулировать задачу составления школьного расписания. Думаем, что после этого вы будете с сочувствием относиться к нелегкому труду завуча, который решает эту задачу каждые полгода.

Этих двух примеров, наверное, достаточно, чтобы понять: постановка задачи — важная часть (иногда говорят — половина) ее решения. Ставя задачу, надо сформулировать те предположения, которые позволят в море информации об изучаемом объекте выудить исходные данные, определить, что будет служить результатом и какова связь между исходными данными и результатом. Все это — предположения, исходные данные, результаты и связи между ними — называют моделью задачи.

Далеко не всегда заранее ясно, какие свойства объекта окажутся существенными для решения задачи. Вот, скажем, старинная задача.

Двумя ударами топора разрубить подкову на наибольшее число частей, не перекладывая части после удара.

Формализуем задачу. Сразу можно сформулировать следующие предположения: *удар топора* — прямолинейный разрез, *подкова* — некоторая дуга, части подковы после удара остаются на месте и не деформируются. Значит, надо нарисовать дугу и рассечь ее двумя прямыми. Мы четко поставили задачу, и нетрудно убедиться, что больше пяти частей не получится (рис. 2).

Однако в книжке Е. И. Игнатьева «В царстве смекалки» (М., Наука, 1982) в подобной задаче требуется разрубить подкову на шесть частей и приведен другой рисунок (рис. 3; хорошо, когда есть ответ!). Оказывается, мы слишком абстрагировались и не учли, что у *подковы* есть еще и ширина. Итак, в нашей модели надо предположение, что *подкова* — дуга, заменить на такое: *подкова* — половина кольца.

Однако, продолжая в том же духе, можно сообразить, что у *подковы* есть еще и толщина (рис. 4), а тогда *удар топора* — плоский разрез. На сколько частей можно разбить подкову, если учесть толщину? У нас получилось 7 частей.

Упражнение 1. *Двумя ударами топора разрубите подкову на 7 частей.*

А может быть, в действительности ответ еще больше? Чего бы еще учесть? Конечно же, дырки! Ведь у *подковы* есть дырки для гвоздей (рис. 5). В успех трудно поверить, но получается 11 частей!

Упражнение 2. *Двумя ударами топора разрубите подкову на 11 частей.*

Итак, за счет более полного описания объекта удается более чем удвоить первоначальный результат! Интересно, что каждое новое приближение модели к реальности приводило к четко поставленной задаче с однозначным ответом.

Как видите, от исходных предположений существенно зависит решение задачи, и чем больше свойств объекта мы учитываем в модели, тем сложнее решение. Однако не всегда, усложнив модель, мы получим новый результат. Скажем, те, кому довелось видеть подкову, знают, что у подковы не две дырки, а больше (см. рис. 6). Тем не менее, увеличение числа дыр у реальной подковы может не повлиять на ответ к задаче.

Упражнение 3. *Докажите, что подкову, изображенную на рисунке 6, нельзя разрубить двумя ударами топора на большее число частей, чем подкову на рисунке 5.*

Искусство составления моделей как раз и заключается в том, чтобы, не переусложнив модель, учесть в ней все существенное и отбросить второстепенное.

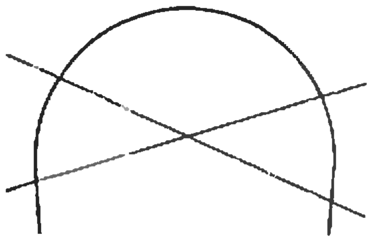


Рис. 2.

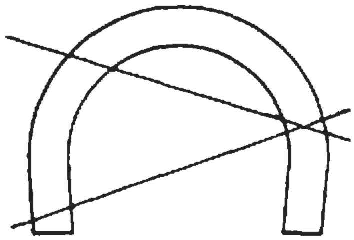


Рис. 3.

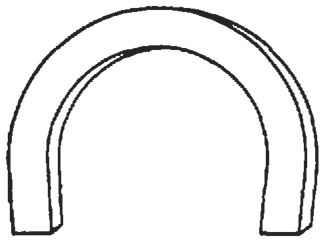


Рис. 4.

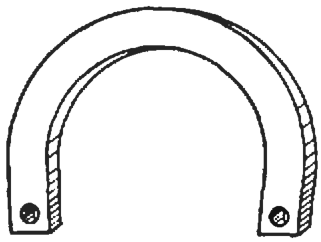


Рис. 5.

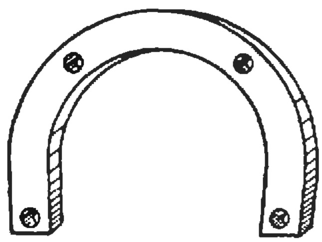


Рис. 6.

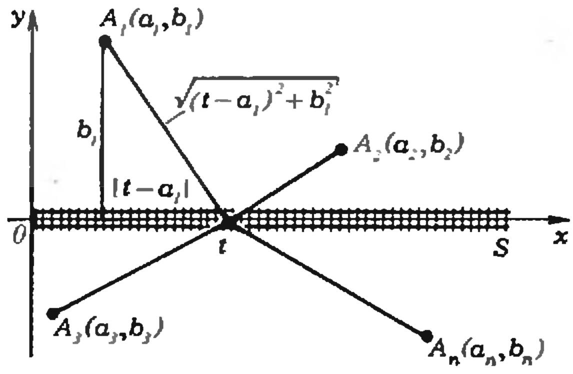


Рис. 7.

Не в этом ли состоит и любое искусство, будь то живопись или скульптура? Да и вообще, пожалуй, каждый вид искусства занимается созданием моделей жизненных явлений, используя присущие ему выразительные средства.

И еще один вывод можно сделать: если мы заменяем жизненную задачу ее моделью, то и ответ относится к модели, и лишь опосредованно — к исходной задаче.

Итак, составить хорошую модель задачи — дело непростое. Даже если решать эту задачу предстоит вам самим. А если задачу надо будет объяснить компьютеру? В этом случае придется учитывать «способности» ЭВМ, а точнее — возможности того языка, на котором вы будете с ней объясняться. Если ваша ЭВМ умеет только вычислять, то, высказывая предположения об объекте, нужно позаботиться о том, чтобы исходные данные и результаты были числами, а связи между ними — математическими соотношениями. Выполнив такой «перевод» задачи на язык математики, вы получите модель, которую обычно называют *математической моделью*.

Математические модели

Теперь мы можем вернуться к нашей задаче о станции. Начнем, естественно, с построения математической модели. Прежде всего выскажем предположения. Будем считать, что участок дороги, проходящей по территории района, прямолинеен, в любом месте участка можно построить станцию и соединить ее прямолинейными дорогами с каждым населенным пунктом A_1, A_2, ..., A_n.

Теперь надо уяснить смысл слов «наиболее удобное расположение станции». Как это понимать? Если стремиться к экономии средств на строительство дорог, то станцию надо расположить так, чтобы суммарная длина дорог, соединяющих станцию с населенными пунктами, была наименьшей. Если же стремиться к максимальной справедливости, то место для станции естественно выбрать так, чтобы наибольшее из расстояний от нее до населенных пунктов было как можно меньше. Например, если в самом дальнем от станции населенном пункте заболеет человек, то его надо доставить на станцию за самое короткое время.

Мы за справедливость, как и поэт-демократ Н. А. Некрасов. Поэтому изберем второй принцип.

Упражнение 4. а) *Покажите, что эти два принципа приводят к различным результатам.*

б) *Как должны быть расположены два населенных пункта, чтобы эти принципы дали одинаковые результаты?*

Задача на исследование. *Решить упражнение 4 б в случае произвольного числа населенных пунктов.*

Предположения сделаны, определим, что будет исходными данными, а что — результатом в нашей математической модели. К счастью (а точнее — намеренно), предположения таковы, что мы легко можем перевести нашу задачу на язык чисел. Для этого нарисуем оси координат на карте района так, чтобы ось абсцисс проходила по интересующему нас участку железной дороги, а начало координат совпадало с его левым концом. Исходными данными, конечно, являются число n населенных пунктов, их координаты $(a_1; b_1)$, $(a_2; b_2)$, ..., $(a_n; b_n)$ и длина S участка железной дороги, пролегающей по району. Результат — абсцисса точки, где надо строить станцию (рис. 7).

Остается найти соотношения между исходными данными и результатом.

Возьмем любую точку на отрезке, изображающем железную дорогу. Пусть t — ее абсцисса. Через Z обозначим максимальное из расстояний между этой точкой и каждым из населенных пунктов:

$$Z = \max\{\sqrt{(t-a_1)^2+b_1^2};\ \sqrt{(t-a_2)^2+b_2^2};\ \ldots;\ \sqrt{(t-a_n)^2+b_n^2}\}.$$

Ясно, что Z — функция от t. Чтобы определить, где построить станцию, надо узнать, при каком t из отрезка $[0; S]$ функция $Z(t)$ принимает наименьшее значение.

Как видите, исходную задачу о станции мы заменили математической задачей: найти точку минимума некоторой функции. Эта задача и является математической моделью.

Как же найти точку минимума? Желающие могут, конечно, попытаться взять производную функции $Z(t)$ и приравнять ее к нулю. Им предстоит преодолеть немало трудностей: функцию $Z(t)$ нельзя задать простой формулой, да и производная от нее, скорее всего, существует не во всех точках. Поищем другой путь. Попробуем представить себе график функции $Z(t)$.

Упражнение 5. *Выберите произвольно координаты нескольких деревень, а также длину отрезка железной дороги, и с помощью компьютера или микрокалькулятора постройте (по точкам) график функции $Z(t)$.*

Нетрудно убедиться в том, что функция $Z(t)$ сначала убывает, а затем возрастает. Нам повезло: у нашей функции только одна точка минимума. Ее можно найти с любой точностью, воспользовавшись следующим методом. Разобьем отрезок $[0; S]$ на равные части, длину каждой из них обозначим буквой r. Затем найдем значения Z при $t=0$, r, $2r$, ... и так далее до $t=S$. Выберем из этих значений наименьшее и возьмем в качестве результата t, при котором оно достигается. Это значение t будет отличаться от «истинного» результата не больше чем на r.

Итак, сложную задачу нахождения точки минимума малоприятной функции мы заменили простой задачей поиска минимума из нескольких чисел. Конечно, за эту простоту нам пришлось заплатить точностью. Результат получается лишь приближенно: чем меньше r, тем точнее. Впрочем, нет смысла гнаться за особой точностью — ведь в действительности и железная дорога не прямая, и координаты деревень известны лишь приближенно, и Земля, как известно, не плоская, а самое главное — и станция, и деревни не являются точками.

Правда, используя геометрические построения, можно найти и «точное» решение.

Упражнение 6. *На плоскости заданы n точек и отрезок. Используя лишь циркуль и линейку, найти на отрезке такую точку, чтобы наибольшее из расстояний от нее до заданных точек было бы наименьшим.*

На выбор исходных предположений для математической модели задачи о станции может влиять не только стремление к справедливости, но и некоторые экономические факторы, например нехватка средств на строительство дорог. Тогда принцип нахождения места для станции будет таким: сумма расстояний от станции до населенных пунктов должна быть минимальной.

Упражнение 7. *Составьте математическую модель задачи о станции, основываясь на этом принципе.*

Задача на исследование. *На плоскости заданы n точек и отрезок. Построить на отрезке такую точку, чтобы сумма расстояний от нее до заданных точек была бы наименьшей.*

Итак, создавая математическую модель для решения задачи, нужно:

1) выделить предположения, на которых будет основана математическая модель;

2) определить, что считать исходными данными и результатами;

3) записать математические соотношения (формулы, уравнения, неравенства и т. д.), связывающие результаты с исходными данными.

Как видите, математическая модель всегда основана на некотором упрощении. Однако благодаря замене ре-

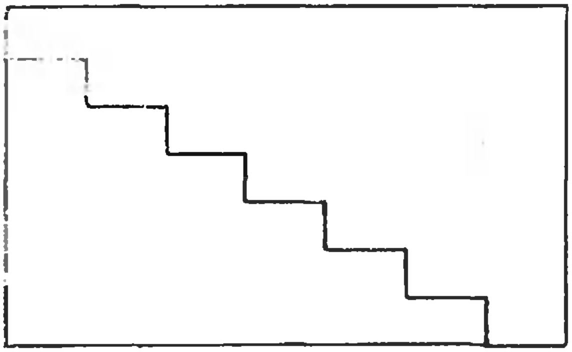


Рис. 8.

ального объекта соответствующей ему моделью появляется возможность сформулировать задачу его изучения как математическую и воспользоваться для ее решения средствами математики.

Модель построена. Что дальше?

Созданием математической модели завершается первый этап решения задачи с помощью ЭВМ. Далее нужно написать соответствующую программу. Мы не будем рассказывать, как это делается — это зависит от возможностей конкретной ЭВМ, реализованных на ней языков. Но затем надо убедиться, что модель соответствует реальному объекту. Такую уверенность можно обрести лишь в результате эксперимента. Проведя вычисления на ЭВМ, необходимо проанализировать результаты. При этом может возникнуть необходимость уточнить математическую модель, поскольку выяснится, что при ее разработке не были учтены какие-либо существенные свойства объекта. Уточнив модель, снова составляют программу, проводят расчеты на ЭВМ и анализируют результаты. И опять может потребоваться уточнение модели. Так будет продолжаться до тех пор, пока анализ результатов не покажет их соответствие изучаемому объекту.

После того как вы добились, чтобы математическая модель соответствовала реальности, можно проводить с помощью ЭВМ вычислительные эксперименты. При этом можно варьировать значения исходных данных, изучать экстремальные ситуации, определять границы применимости модели и т. д. ЭВМ, таким образом, позволяет заменить натурный эксперимент, часто дорогостоящий и опасный, совершенно безопасным и относительно дешевым вычислительным экспериментом. В этом, быть может, и состоит главное достоинство ЭВМ.

Задачи

1. Составьте математическую модель задачи о железнодорожной станции, руководствуясь компромиссным принципом: если Z — расстояние от станции до наиболее удаленного пункта, а W — сумма расстояний до всех пунктов, то требуется сделать как можно меньшим сумму $kZ+(1-k)W$, где k — число из отрезка $[0;\ 1]$ (степень компромисса).

2. Исследуйте задачу о железнодорожной станции для двух населенных пунктов, в одном из которых живет 1000 человек, в другом — 2000, руководствуясь таким принципом: общее число «человекокилометров», затрачиваемых населением на путь до станции, должно быть наименьшим.

3. Школьник, не знающий интегрального исчисления, составил следующую математическую модель нахождения периметра произвольной клумбы.

Предположения: клумбу считаем плоской фигурой; если разбить границу клумбы на большое число маленьких участков и соединить точки разбиения последовательно, то периметр получившегося многоугольника мало отличается от периметра клумбы, и чем мельче разбиение, тем точнее результат.

Завершите построение математической модели.

4. Школьник, не знающий теоремы Пифагора, составил следующую математическую модель для определения длины диагонали произвольного прямоугольного стола.

Предположения: поверхность стола считаем прямоугольником со сторонами a и b; длина диагонали d приближенно равна длине ломаной, изображенной на рисунке 8, если, конечно, ступени у этой ломаной достаточно маленькие; при неограниченном увеличении числа ступенек величина диагонали получается с любой точностью. Тогда $d=a+b$ (действительно, длина ломаной в точности равна $a+b$ независимо от того, сколько в ней ступенек).

Почему получился неверный результат: диагональ прямоугольника равна сумме его смежных сторон?

Темы вычислительных экспериментов (для программистов)

Составьте программы, соответствующие рассмотренным в статье моделям задачи о железнодорожной станции. Посмотрите, как изменяется место расположения станции при изменении числа k в задаче 1 и при увеличении числа отрезков разбиения.

Варианты вступительных экзаменов

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1 *(механико-математический и экономический факультеты)*

1. На плоскости найдите точку, симметричную точке с координатами (2; 4) относительно прямой, заданной уравнением $2x+y=3$.

2. Решите уравнение

$$\log_{x+2}\log_2\log_{x+3}(11x^2+46x+48)=0.$$

3. Окружность O_1 радиусом $3r$ касается продолжения стороны AB угла ABC, ее центр лежит на стороне BC. Окружность O_2 радиусом r касается сторон угла ABC и окружности O_1. Найдите угол ABC.

4. Решите уравнение

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\cos x\right)+\arccos\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\sin x\right)=\frac{\pi}{2}.$$

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, $AB=5$, $BC=2$. Известно, что $SB=4$, $SA=3$, $SC=x$, $SD=y$. При каких значениях x и y объем пирамиды наибольший, чему равен этот объем?

Вариант 2 *(факультеты естественных наук и геолого-геофизический)*

1. Парабола с вершиной на оси Ox касается прямой, проходящей через точки $A(-1, -1)$ и $B(4, 4)$, в точке A. Найдите уравнение параболы.

2. Решите уравнение

$$4\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos 2x-2\sin^2 x=\sin 2x.$$

3. Около прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC=5$, $BC=12$, описана окружность. Точки E, G — середины меньших дуг AC, BC этой окружности, точка F — середина дуги AB, не содержащей точки C. Найдите площадь четырехугольника $AEFG$.

4. Решите уравнение

$$\log_{x+2}\log_2\log_{x+3}(11x^2+46x+48)=0.$$

5. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC равны 1. Призма $AKLA_2K_2L_2$ с боковыми ребрами AA_2, KK_2, LL_2 симметрична призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно точки A. Точка E принадлежит отрезку AK, $AE:EK=1:3$, точка F принадлежит отрезку K_2L_2, $K_2F:FL_2=3:5$. Найдите длину отрезка, по которому прямая EF пересекает призму $ABCA_1B_1C_1$.

Вариант 3 *(механико-математический и экономический факультеты)*

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 7^{2x}+4^{2y-1}=85, \\ 7^x-4^y=5. \end{cases}$$

2. Найдите все корни уравнения

$$\frac{\sin 2x-0{,}8\cos x+1}{\sin\frac{x}{2}}=5\cos\frac{x}{2},$$

лежащие на отрезке $\left[\frac{5\pi}{6};\ 2\pi\right]$.

3. В тупоугольном треугольнике ABC площадью $24\sqrt{5}$ медианы AN, CM пересекаются под углом $\arccos\frac{2}{3}$. Найдите стороны треугольника, если $AN=CM=3$.

4. При каких значениях параметра a уравнение

$$ax^2+3x+2a^2-3=0$$

имеет только целые решения?

5. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 2, боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 равны 1. Точка K — середина ребра AB, точка L — середина ребра B_1C_1, точка M — середина ребра A_1B_1, точка N — середина ребра AC. Через прямые KL, MN проведены параллельные плоскости. Найдите объем части призмы, содержащейся между этими плоскостями.

Вариант 4 *(физический факультет)*

1. Решите уравнение

$$\operatorname{ctg} x+\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{3}+\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{9}+\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{27}=0.$$

2. Решите неравенство

$$(2^{x+1}-3^{x+1})\sqrt{2^{2x}-2^{x+3}\cdot 3^x+11\cdot 3^{2x}}\geqslant 0.$$

3. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны AB. Известно, что биссектриса угла C делит площадь треугольника AMD пополам. Найдите длину стороны AD, если $CD=4$.

4. Найдите все решения системы неравенств

$$\begin{cases} x^2-6x+6y\leqslant 0, \\ y^2-2xy+9\leqslant 0. \end{cases}$$

5. В основании четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ со стороной 5 и диагональю $AC=8$. Шар касается ребер AA_1, BB_1, DD_1 и касается плоскости $ABCD$ в точке C. Найдите радиус шара.

Вариант 5 *(факультеты естественных наук и геолого-геофизический)*

1. Решите уравнение

$$\lg\frac{4x^2+1}{2-x}+\lg\frac{2-x}{11x+4}=0.$$

2. Найдите все корни уравнения

$$\frac{\sin 2x-0{,}8\cos x+1}{\sin\frac{x}{2}}=5\cos\frac{x}{2},$$

лежащие на отрезке $\left[\frac{5\pi}{6};\ 2\pi\right]$.

3. Прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC=3$, $BC=2$, вписан в квадрат. Известно, что вершина A совпадает с вершиной квадрата, а вершины B, C лежат на сторонах квадрата, не содержащих точку A. Найдите площадь квадрата.

4. Решите уравнение

$$\sqrt{4-x+4\sqrt{-x}}=4-\sqrt{4-x-4\sqrt{-x}}.$$

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник с катетами $AB=2$, $AC=4$. Боковые ребра пирамиды равны 4. На луче CA выбраны точки M, N, так что $CM=1$, $CN=6$, на луче BS выбраны точки P, Q, так что $BP=2$, $BQ=5$. Найдите объем пирамиды $MNPQ$.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

На решение задач давалось пять часов, начиная с завершения демонстрации.

После текста каждой задачи в скобках указан средний процент решивших ее.

Вариант 1

1. К телу, лежащему на горизонтальной плоскости, в течение времени τ прикладывают силу F, направленную вдоль плоскости, после чего тело движется до остановки в течение времени t. Найдите силу трения. (88 %)

2. Параллельные проводники, расстояние между которыми l, с одной стороны замкнуты на резистор сопротивлением R_1, а с другой стороны разомкнуты (рис. 1). Со скоростью v по ним движется жесткая рамка $KLMN$, стороны которой KL и MN, перпендикулярные проводникам, имеют сопротивления R_2 и R_3. Перпендикулярно плоскости проводников направлено однородное магнитное поле с индукцией B. Найдите ток через амперметр А. Сопротивлением проводников и амперметра пренебречь. (66 %)

3. На столе лежит грузик массой m, к которому прикреплена пружина жесткостью k. Пружину начинают поднимать за свободный конец с постоянной вертикальной скоростью v (рис. 2). Найдите максимальное удлинение пружины, если ее начальная деформация равна нулю. (53 %)

4. Оцените наибольшую температуру воздуха в стволе гладкоствольного ружья, в который влетает пуля, выпущенная из другого такого же ружья. (70 %)

5. При замыкании ключа K в цепи (рис. 3) сначала загорается лампочка $Л_2$, потом лампочки $Л_1$ и $Л_3$, при этом лампочка $Л_2$ гаснет. Объясните явление. Лампочки $Л_1$ и $Л_3$ одинаковые. (49 %).

Вариант 2

1. В сосуде, заполненном воздухом при температуре $T_0=300$ К, сожгли распыленное химическое соединение. После завершения реакции в сосуде остался только нагревшийся азот, давление которого равно начальному давлению воздуха, и твердые окислы, объем которых пренебрежимо мал. Найдите температуру азота, если молярная масса воздуха $M_1=29$ г/моль, азота $M_2=28$ г/моль, азота в воздухе в 4 раза больше (по массе), чем кислорода. (73 %)

2. Прямоугольная пластина длиной L, двигаясь поступательно со скоростью v по гладкой горизонтальной плоскости, наезжает под углом 90° на шероховатую полосу шириной l и останавливается, пройдя от начала торможения путь s, такой, что $l<s<L$ (рис. 4). Найдите коэффициент трения поверхностей пластины и полосы. Ускорение свободного падения равно g. (34 %)

3. Два конденсатора емкостями C_1 и C_2 соединили последовательно и зарядили от источника с ЭДС $\mathscr{E}$ (рис. 5, *а*). Затем конденсаторы пересоединили параллельно (рис. 5, *б*). Какая энергия выделится в результате этого пересоединения? (38 %)

4. Оцените, на какую высоту может бить фонтан, если давление воды в подводящей трубе составляет 1,5 атмосферы. (65 %)

5. Последовательно с обмоткой трансформатора в цепь переменного тока включена лам-

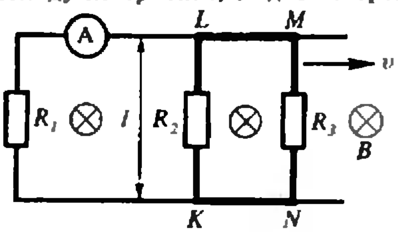


Рис. 1.

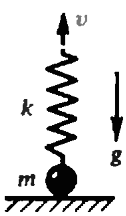


Рис. 2.

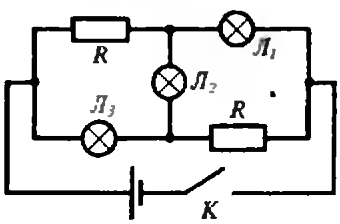
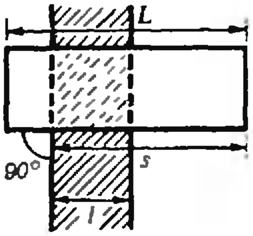
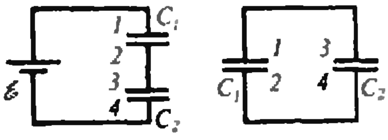


Рис. 3.





а) б)

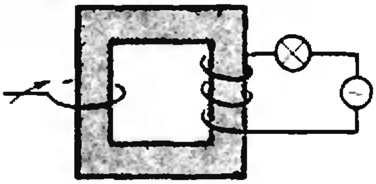


Рис. 4. *Рис. 5.* *Рис. 6.*

па (рис. 6). Если снаружи охватить трансформатор замкнутым проводником, то накал спирали лампы не меняется. Если же проводник пропустить внутрь трансформатора, то лампа горит ярче. Объясните явление. (40 %)

Вариант 3

1. Заряженные металлические шарики одинакового радиуса притягиваются, сталкиваются и потом разлетаются. Когда расстояние между ними достигает первоначального значения, сила отталкивания оказывается в 8 раз меньше исходной силы притяжения. Найдите отношение начальных зарядов шариков. (78 %)

2. Пуля пробивает закрепленную доску при минимальной скорости v_0. С какой скоростью должна лететь пуля для того, чтобы пробить незакрепленную доску? Масса доски M, масса пули m, пуля попадает в центр доски. (45 %)

3. Тяжелый поршень массой M может свободно перемещаться внутри вертикального теплоизолированного цилиндра сечением S, верхний торец которого закрыт, а нижний открыт в атмосферу. Внутри цилиндра имеется горизонтальная перегородка с маленьким отверстием, отсекающая от атмосферы один моль воздуха, который занимает объем V при атмосферном давлении p_a (рис. 7). Поршень, который вначале прижат снизу к перегородке, отпускают. Полагая, что внутренняя энергия газа равна cT, найдите, на сколько опустится поршень. (35 %)

4. Жидкий раствор бетона налили в кузов самосвала доверху. Оцените, какая доля раствора останется в кузове после резкого торможения. (35 %)

5. Два одинаковых электромагнита L_1 и L_2 включены последовательно в цепь постоянного тока. С помощью ключа K_1 параллельно одному из них может в непроводящем направлении подключаться диод D (рис. 8). При замкнутом ключе K_2 к электромагнитам притянута железная пластинка. Если ключ K_1 разомкнут, то при размыкании ключа K_2 пластинка отрывается от магнитов одновременно и падает, сохраняя горизонтальное положение. Если ключ K_1 замкнут, то при размыкании ключа K_2 пластинка вначале отрывается от магнита L_1, а потом от L_2, что приводит к ее вращению. Объясните различие в поведении пластинки в первом и втором случаях. (66 %)

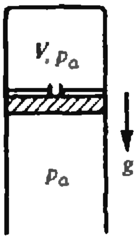


Рис. 7.

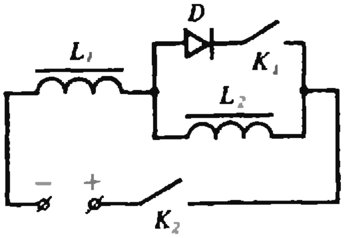


Рис. 8.

Публикацию подготовили
М. Л. Вишневский, В. М. Копытов,
Г. В. Меледин, В. А. Чуркин

Московский инженерно-физический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^3+x^2-2x+1}\leqslant x.$$

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=a.$$

3. Четырехзначное натуральное число A оканчивается цифрой 1. Двузначное число, образованное цифрами в разряде тысяч и сотен, цифра десятков и цифра единиц числа A представляют три последовательных члена арифметической прогрессии. Из всех чисел A, удовлетворяющих указанным условиям, найдите то, у которого разность между цифрой десятков и цифрой сотен имеет наименьшее возможное значение.

4. Основанием пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник $ABCD$, диагональ AC которого образует со стороной BC угол α, а с боковым ребром SC — угол β. Пирамида пересечена плоскостью, равноудаленной от всех вершин пирамиды. Найдите площадь образовавшегося сечения, если известно, что все боковые ребра пирамиды имеют длину l.

Вариант 2

1. Решите неравенство

$$\sqrt{3x^2+25x+42}>x+4.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5\cdot 6^{-\sin 3x}+6\cdot 7^{\cos y}=72,\\ 6^{1-\sin 3x}+7^{1+\cos y}=c. \end{cases}$$

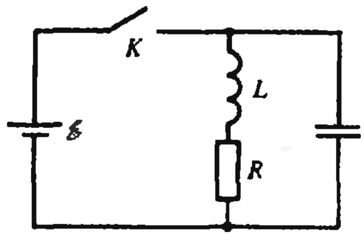


Рис. 1.

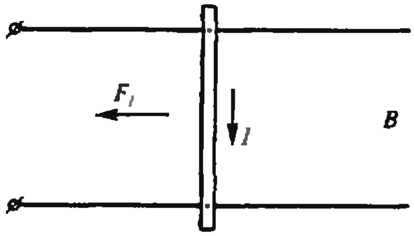


Рис. 2.

3. В первом и втором сосудах содержится кислота: в первом сосуде 5 л 30-процентного раствора, во втором сосуде 7 л 40-процентного раствора. Этими растворами наполнен 10-литровый сосуд так, что концентрация кислоты в нем оказалась равной c %. Остальную кислоту слили в четвертый сосуд. В каком из двух сосудов — в третьем или в четвертом — концентрация кислоты больше?

4. В прямой круговой конус вписана правильная шестиугольная призма так, что нижнее основание призмы лежит в плоскости основания конуса, а вершины верхнего основания лежат на боковой поверхности конуса. Известно, что площадь полной поверхности этой призмы имеет наибольшее возможное значение. Найдите объем призмы, если известно, что длина образующей конуса равна l, а угол при вершине осевого сечения конуса равен α.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Подвешенному на нити длиной $l=1$ м шарику сообщили начальную скорость v_0 такую, что, когда нить отклонилась на угол $\alpha=60°$ от вертикали, ускорение шарика оказалось направленным горизонтально. Найдите v_0.

2. Пуля массой $m_1=9$ г, летевшая вертикально вверх со скоростью $v_0=200$ м/с, пробила лежавшую на двух столах (как на опорах) доску массой $m_2=0{,}27$ кг. При этом доска подпрыгнула на высоту $h=0{,}2$ м над уровнем столов. Какое количество теплоты выделилось при прохождении пули через доску?

3. Шайба массой $m=1{,}2$ кг лежит на конце доски длиной $l=1{,}5$ м, противоположный конец которой выступает на $h=0{,}5$ м за край стола. Масса доски $M=2{,}4$ кг, коэффициент трения между доской и шайбой $\mu=0{,}4$, относительно стола доска не проскальзывает. Какую минимальную скорость нужно сообщить шайбе в направлении к краю стола, чтобы доска опрокинулась?

4. Тело лежит на гладкой горизонтальной поверхности. К телу привязана легкая нерастяжимая нить, которая перекинута через блок очень малого радиуса, находящийся на высоте $h=1$ м над поверхностью. К другому концу нити приложена постоянная горизонтальная сила. Определите скорость тела в тот момент, когда оно окажется под блоком, если первоначально тело покоится, нить образует с вертикалью угол $\alpha=60°$ и ускорение тела в начальный момент равно $a=0{,}5$ м/с^2. Массой блока и трением пренебречь.

5. Космический корабль разгоняется с помощью ионного реактивного двигателя, выбрасывающего двухвалентные ионы кислорода O_{16}^{2+}, ускоренные напряжением $U=500$ кВ. Ток ионного пучка $I=2$ кА, масса корабля $M=200$ кг. Найдите ускорение корабля. Элементарный заряд $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, атомная единица массы $m_0=1{,}7\cdot10^{-27}$ кг.

6. Если некоторое количество идеального газа перевести из состояния 1 в состояние 2, нагревая его сначала изобарически, а затем изохорически, то газ совершает работу A_1. Если же переход осуществить непосредственно по прямой на p,V-диаграмме, то работа газа $A_2=nA_1$, где $n=1{,}5$. Найдите давление газа в состоянии 2, если его давление в состоянии 1 равно $p_1=150$ кПа.

7. Гибкий проволочный контур сопротивлением $R=0{,}15$ Ом и площадью $S_1=300$ см^2 расположен перпендикулярно линиям однородного магнитного поля с индукцией $B_1=0{,}06$ Тл. При изменении индукции поля до $B_2=0{,}08$ Тл и одновременном изменении площади контура по нему прошел заряд $|q|=6$ мКл. Найдите новое значение площади контура.

8. К источнику тока подключен колебательный контур, состоящий из конденсатора и катушки с индуктивностью $L=0{,}04$ Гн и сопротивлением обмотки $R=2$ Ом (рис. 1). После размыкания ключа K в контуре возникают медленно затухающие колебания, при этом в обмотке выделяется средняя тепловая мощность $P=0{,}2$ Вт. Какое количество теплоты выделится в обмотке до полного затухания колебаний?

9. Прямолинейный стержень длиной $l=1$ м подвешен на двух одинаковых пружинах в горизонтальном однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}2$ Тл. По стержню пропускают кратковременный импульс тока $I=500$ А в течение времени $\tau=0{,}01$ с, в результате чего стержень приобретает скорость, направленную вертикально. Определите наибольшую величину смещения стержня при его последующем движении. Смещением стержня за время τ пренебречь. Коэффициент упругости каждой пружины $k=20$ Н/м, масса стержня $m=0{,}4$ кг.

10. Проводник массой $m=0{,}2$ кг и длиной $l=0{,}6$ м лежит на горизонтальных рельсах, расположенных в горизонтальном магнитном поле с индукцией $B=0{,}1$ Тл (рис. 2). При пропускании по проводнику тока $I=20$ А в указанном на рисунке направлении для того, чтобы сдвинуть проводник влево, требуется приложить горизонтальную силу $F_1=0{,}5$ Н. Какая сила потребуется при направлении тока, противоположном указанному?

Публикацию подготовили
М. Н. Стриханов, В. Е. Чижов, Н. В. Шолохов

Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Сумма пяти начальных членов арифметической прогрессии меньше суммы ее последующих пяти членов на 50. На сколько десятый член прогрессии больше ее второго члена?

2. Найдите критические точки функции

$$f(x)=\sin 2x+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\lg x}+\sqrt{25-\lg x}\leqslant 7.$$

4. Площадь прямоугольного треугольника равна P, а площадь круга, вписанного в него, равна Q. Найдите площадь круга, описанного около этого треугольника.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2+xy=1, \\ \dfrac{9x^2}{2(1-x)^4}=1+\dfrac{3xy}{2(1-x)^2}. \end{cases}$$

6. В прямой треугольной призме $ABCA'B'C'$ через точки B, C и A' проведено сечение, площадь которого равна S, а расстояние от плоскости сечения до вершины B' равно h. Найдите объем призмы.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos^2 2x=1-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-2x\right).$$

2. Найдите отношение третьего члена убывающей геометрической прогрессии к пятнадцатому ее члену, если сумма двенадцати членов этой прогрессии, начиная с тринадцатого, составляет 40 % суммы ее начальных двенадцати членов.

3. Найдите область определения функции

$$f(x)=\sqrt{\log_{(3x+1)}\frac{x-2}{x-4}}.$$

4. Какой наибольший объем может иметь правильная четырехугольная пирамида, боковое ребро которой имеет длину 1?

5. Найдите все решения системы

$$\begin{cases} 5x^2+8xy+4y^2=4+4x, \\ \sin^2(\pi x)+\sin^2(\pi y)=0. \end{cases}$$

6. На координатной плоскости заданы точки $O(0;0)$, $A(0;1)$, $B(2;0)$, $C(4;0)$. Найдите координаты $(x;y)$ точки M такой, что угол OMA равен углу CMB, а угол MAO равен углу MBC.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. На цилиндр намотана нить, конец которой закреплен на стойке в верхней точке наклонной плоскости (рис. 1). Коэффициент трения цилиндра о плоскость μ. При каком максимальном значении угла α цилиндр не будет скатываться с наклонной плоскости?

2. Шарик массой m подвешен при помощи двух пружин, жесткости которых k_1 и k_2 (рис. 2). Найдите частоту колебаний шарика. Изменится ли частота, если пружины поменять местами?

3. В сосуд с водой, объем которой $V_1=0{,}25$ л, а температура $t_1=20$ °С, поместили $m_2=50$ г расплавленного свинца, имеющего температуру $t_2=400$ °С. Какая температура установится в результате теплообмена? Какая часть воды останется в сосуде? Удельная теплоемкость воды $c_1=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К), температура плавления свинца $t_{пл}=327$ °С, его удельная теплота плавления $\lambda=0{,}226\cdot10^5$ Дж/кг, удельные теплоемкости расплава и твердого свинца считать одинаковыми и равными $c_2=1{,}3\times\times10^2$ Дж/(кг·К). Потерями тепла пренебречь.

4. Частица, имеющая заряд q, разгоняется до энергии W и влетает в плоский конденсатор параллельно его пластинам. Заряд конденсатора Q, его емкость C, расстояние между пластинами d. Первоначально частица находится на одинаковом расстоянии от пластин. Какой длины должна быть каждая пластина, чтобы частица не упала на ее поверхность?

5. Фотограф хочет снять финиш бега спортсменов с боку. Расстояние от объектива фотоаппарата до ближайшего бегуна $d=10$ м. Фокусное расстояние объектива $F=100$ мм. Размытость контуров изображения на фотопленке не должна превышать $\Delta l=0{,}1$ мм. Оцените время экспозиции, если спортсмены финишируют со скоростью около $v=10$ м/с.

6. Красная граница фотоэффекта для некоторого металла $\lambda_{max}=2750$ Å. Чему равно минимальное значение энергии фотона, вызывающего фотоэффект?

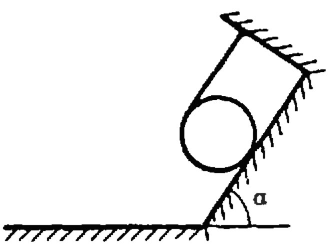


Рис. 1.

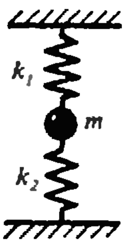


Рис. 2.

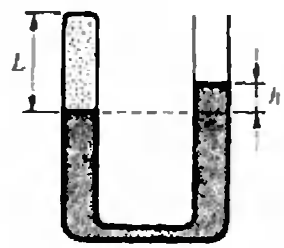


Рис. 3.

Вариант 2

1. Шарик, подвешенный на нити, качается в вертикальной плоскости так, что его ускорения в крайнем и нижнем положениях равны друг другу по модулю. Найдите угол отклонения нити в крайнем положении.

2. Материальная точка движется так, что ее координаты со временем изменяются по законам: $x=a\sin\omega t$, $y=a\cos 2\omega t$. Найдите уравнение траектории точки и закон изменения ее модуля скорости от времени.

3. Полагая, что воздух ($M=29$ кг/кмоль) состоит в основном из кислорода ($M_1=32$ кг/кмоль) и азота ($M_2=28$ кг/кмоль), определите процентное содержание этих газов в атмосфере.

4. В U-образной трубке высота столба воздуха в запаянном левом колене $L=300$ мм, а избыточная высота столба ртути в открытом правом колене $h=110$ мм (рис. 3). В правое колено долили столько ртути, что ее уровень поднялся на $\Delta h=40$ мм. На сколько поднялся уровень в левом колене? Атмосферное давление $p_a=760$ мм рт. ст.

5. К источнику тока с ЭДС $\mathscr{E}=10$ В и внутренним сопротивлением $r=1$ Ом подключена система из 4-х резисторов сопротивлением $R=1$ Ом каждый. Как нужно соединить эти резисторы, чтобы в них выделялась максимальная мощность?

6. Предмет находится на расстоянии L от экрана. Между ними расположена собирающая линза с фокусным расстоянием F. Перемещением линзы можно получить на экране как увеличенное, так и уменьшенное изображение. Найдите отношение размеров изображений в обоих случаях.

Публикацию подготовили
А. С. Бортаковский, Г. Г. Спирин

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{2x+1}-\frac{2}{3x+2}\leqslant\frac{4}{5x+4}-\frac{3}{4x+3}.$$

2. Бассейн можно наполнить водой с помощью 2-х насосов, если первый работает 4 минуты, а второй — 3 минуты. Время наполнения бассейна с помощью одного первого насоса на 3 минуты меньше, чем с помощью одного второго. Найдите эти времена.

3. Решите уравнение

$$(\sin 2x-\cos 2x)^2+\sin 6x=1.$$

4. Решите уравнение

$$x^{\log_3^2 x-1+\log_{(1/3)}x}=x^{3-\log_3 x}.$$

5. В равнобочной трапеции лежат две касающиеся окружности радиусами R, каждая из которых касается обоих оснований и одной из боковых сторон, а центры окружностей лежат на диагоналях. Найдите стороны трапеции.

6. Решите уравнение

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}=x^2-6x+7.$$

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x+1}=0.$$

2. На предприятии работают 3 машинистки разной квалификации. Первая печатает в час на 2 страницы больше, чем вторая, у третьей на печатание страницы уходит на 4 минуты больше, чем у первой и в 4/3 раза больше времени, чем у второй. Сколько страниц в час печатает первая машинистка?

3. Решите уравнение $\sin^4 x-\cos^4 x=1$.

4. Решите уравнение

$$10^{(6\log_x 10)^4-13}\cdot x^{\lg x}=1.$$

5. В треугольнике ABC сторона AC равна 26, а медианы, проведенные из вершин A и C, равны соответственно 36 и 15. Найдите третью медиану.

6. Найдите все значения параметра a, для которых неравенство

$$\sin^5 x+\cos^5 x-a(\sin x+\cos x)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{a^2-11}{2}(\sin x+\cos x)\sin x\cos x$$

выполнено при всех x, удовлетворяющих условию $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. С какой скоростью и в каком направлении должен лететь самолет, чтобы за время $t=2$ ч пролететь точно на север путь $l=300$ км, если во время полета дует северо-западный ветер под углом $\alpha=30°$ к меридиану со скоростью $v_в=27$ км/ч?

2. Медный шар массой $m=20$ кг падает в воде, увлекая за собой скрепленный с ним нитью стальной шар той же массы. Определите ускорение шаров и натяжение нити. Плотность меди $\rho_м=8{,}9$ г/см^3, стали $\rho_с=7{,}8$ г/см^3, воды $\rho_в=1$ г/см^3. Считать нить идеальной. Силами сопротивления воды пренебречь.

3. Найдите первую космическую скорость для планеты, масса которой в 3 раза больше массы Земли. Радиус планеты больше земного в 2 раза. Принять первую космическую скорость для Земли равной $v_1=8$ км/с.

4. Два цилиндрических сосуда соединены у дна тонкой трубкой с краном (рис. 1). Один сосуд имеет сечение $S_1=15$ см^2 и заполнен ртутью до высоты $h_1=20$ см; второй сосуд сечением $S_2=5$ см^2 заполнен ртутью до высоты

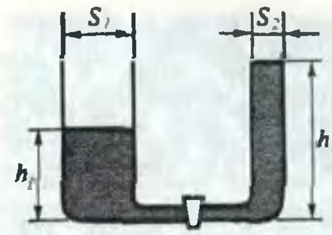


Рис. 1.

Рис. 2.

$h_2=40$ см. Каков будет уровень ртути в сосудах, какое количество теплоты выделится и на сколько возрастет температура ртути, если открыть кран в соединительной трубке? Плотность ртути $\rho=13{,}6$ г/см^3, ее удельную теплоемкость принять равной $c=0{,}08$ Дж/(г· К). Теплоемкостью сосудов и потерями тепла пренебречь.

5. Воздушный шар, имеющий легкорастяжимую теплоизолированную оболочку массой $m_1=130$ кг, заполнен воздухом массой $m_2=65$ кг при давлении и температуре окружающей атмосферы. На сколько градусов нужно нагреть воздух внутри шара, чтобы он взлетел? Температура атмосферного воздуха $t_0=0$ °С.

6. Суммарная мощность, выделяющаяся на резисторах, сопротивления которых $R_1=10$ Ом и $R_2=3$ Ом, одинакова при последовательном и параллельном соединениях резисторов. Найдите внутреннее сопротивление источника тока, питающего эти резисторы.

7. Кусок провода длиной $l=8$ м складывается вдвое и концы его замыкаются. Затем провод растягивается в квадрат в плоскости, перпендикулярной линиям однородного магнитного поля с индукцией $B=0{,}2$ Тл. Какой заряд пройдет по проводу, если его сечение $S=0{,}1$ мм^2, а удельное сопротивление материала провода $\rho=0{,}2$ мкОм· м?

8. Пуля массой $m=10$ г, летящая горизонтально со скоростью $v=200$ м/с, попадает в покоящийся ящик с песком массой $M=2$ кг, лежащий на гладком горизонтальном столе, и застревает в нем. К ящику прикреплен один конец пружины жесткостью $k=2$ Н/см (рис. 2). Скорость пули направлена вдоль оси пружины. Определите амплитуду колебаний ящика.

9. На какой высоте находится воздушный шар, если с холма высотой $h=200$ м он виден под углом $\alpha=30°$ к горизонту, а его отражение в озере видно с этого холма под углом $\beta=60°$ вниз от горизонтали?

10. Точечный источник света находится на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=5$ см на расстоянии $d=10$ см от нее. По другую сторону линзы находится плоское зеркало, расположенное под углом $\alpha=30°$ к главной оптической оси. Зеркало пересекает ось на расстоянии $a=4$ см от линзы. На каком расстоянии от оси будет находиться изображение источника, даваемое такой оптической системой?

Публикацию подготовили
В. В. Варфоломеев, М. Н. Данилычева,
М. А. Красненков, И. М. Матусевич

Московский институт стали и сплавов

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Вычислите

$$\frac{\left(13{,}75+9\frac{1}{2}\right)\cdot 1{,}2}{\left(10{,}3-8\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{9}}.$$

2. Упростите и вычислите при $x=1{,}33$

$$\frac{x-1}{x+\sqrt{x}+1}:\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}-1}+\frac{2}{x^{-1/2}}.$$

3. Вычислите $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=-3\frac{3}{7}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

4. Вычислите $\left(7^{\frac{2}{\log_b 7}+1}\right)\cdot b$ при $b=\sqrt[3]{2}$.

5. Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-x}+x=1.$$

В ответе запишите корень уравнения, а в случае нескольких корней — их сумму.

6. Печь нагревается равномерно. Через 0,5 часа после начала нагрева температура печи была 500 °С, а еще через 1 час — 900 °С. Какова была первоначальная температура печи?

7. Решите неравенство

$$\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+4}<0.$$

В ответе запишите сумму целых чисел, удовлетворяющих неравенству.

8. Площадь осевого сечения конуса равна 12, а длина его образующей равна 5. Найдите отношение объема конуса к площади его боковой поверхности.

9. Определите значение параметра k, при котором корни уравнения $x^2+(k-1)x+2k-8=0$ удовлетворяют условию $2x_1-x_2=-6$, где $x_1<x_2$.

10. Решите уравнение

$$\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3).$$

В ответе запишите корень уравнения, а в случае нескольких корней — их сумму.

11. Решите уравнение

$$4\cos x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=1.$$

В ответе запишите корень уравнения (в градусах), принадлежащий отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

12. В полушар радиусом $R=\sqrt{\frac{3}{2}}$ вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании полушара, а другие четыре вершины расположены на сферической поверхности. Найдите объем куба.

Вариант 2

1. Вычислите без таблиц

$$\left(3\sqrt{76}-\sqrt{57}\right)\cdot\frac{2}{19}\sqrt{19}+\sqrt{12}.$$

2. Упростите и вычислите при $a=3$, $b=2$:

$$\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2\cdot(a+b).$$

3. Найдите $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=\cos\beta=0{,}6$; $\alpha\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; $\beta\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Найдите $b^{\log_2\sqrt{7}}$, если $7^{\log_2 b}=4$.

5. Решите уравнение

$$6+\sqrt{x^2-3x+6}=2x.$$

В ответе запишите корень уравнения, а в случае нескольких корней — их сумму.

6. Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45 % меди. Какую массу меди следует добавить к этому куску, чтобы получить сплав, содержащий 60 % меди?

7. Решите неравенство

$$\frac{2x^2-9x+7}{x^2-1}\leqslant 1.$$

В ответе запишите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству.

8. Радиус основания цилиндра в три раза больше его высоты. Во сколько раз площадь полной поверхности цилиндра больше площади его боковой поверхности?

9. Найдите сумму всех целых значений параметра a, при которых квадратный трехчлен x^2+ax+a^2+6a при всех x, удовлетворяющих условию $1<x<2$, отрицателен.

10. Решите уравнение

$$4\cdot 9^{2x}-3\cdot 4^{2x}-4\cdot 36^x=0.$$

В ответе запишите корень уравнения, а в случае нескольких корней — их сумму.

11. Решите уравнение

$$\sqrt{3}(\cos x-\sin 3x)=\cos 3x-\sin x.$$

В ответе запишите корень уравнения (в градусах), принадлежащий отрезку $\left[0;\ \frac{\pi}{9}\right]$.

12. Найдите квадрат отношения высоты конуса к диаметру основания, если конус при заданном объеме имеет наименьшую боковую поверхность.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Тело бросают вертикально вверх со скоростью $v_0=4{,}9$ м/с. Одновременно с предельной высоты, которой оно может достичь, бросают вертикально вниз другое тело с той же начальной скоростью. Определите время, по истечении которого тела встретятся. Ускорение силы тяжести $g=9{,}8$ м/с^2. Ответ дайте в СИ.

2. Под каким углом к направлению перемещения тела направлена сила, равная $F=20$ Н, если при перемещении тела на $s=10$ м совершена работа $A=100$ Дж? Ответ дайте в градусах.

3. Человек массой $M=64$ кг, стоя на коньках на льду, бросает горизонтально камень массой $m=4$ кг со скоростью $v=8$ м/с. Определите расстояние, на которое откатился после броска человек. Коэффициент трения коньков о лед $\mu=0{,}01$. Ускорение силы тяжести принять равным $g=10$ м/с^2. Ответ дайте в СИ.

4. Определите период колебаний математического маятника, подвешенного на нити длиной $l=10$ м. Ускорение силы тяжести принять равным $g=10$ м/с^2. Ответ дайте в СИ.

5. Два баллона соединены трубкой с краном. В первом находится газ при давлении $p_1=0{,}6\cdot10^5$ Па, во втором — $p_2=10^5$ Па, емкость первого баллона $V_1=3\cdot10^{-3}$ м^3, второго — $V_2=10^{-3}$ м^3. Какое давление установится в баллонах, если открыть кран? Температура постоянна, объемом трубки можно пренебречь. Ответ дайте в СИ, разделив его на 10^4.

6. Сколько времени будет происходить нагревание $m=0{,}4$ кг воды от $t=15$ °С до кипения (при нормальных условиях) с помощью двух электронагревателей мощностью $P=200$ Вт каждый, соединенных последовательно? КПД нагревателей $\eta=85$ %, удельная теплоемкость воды $c=4190$ Дж/(кг· К). Ответ дайте в СИ.

7. На сколько равных частей нужно разрезать однородный проводник сопротивлением $R=36$ Ом, чтобы сопротивление его частей, соединенных параллельно, было равно $R'=1$ Ом?

8. Два последовательно соединенных конденсатора емкостями $C_1=1$ мкФ и $C_2=2$ мкФ присоединены к источнику постоянного напряжения $U=240$ В. Определите напряжение на конденсаторе емкостью C_1. Ответ дайте в СИ.

9. Определите силу, действующую на проводник длиной $l=10$ см при токе $I=10$ А в однородном магнитном поле индукцией $B=0{,}18$ Тл, если угол между проводником и магнитной индукцией $\alpha=30°$. Ответ дайте в СИ.

10. Сколько длин волн монохроматического излучения с частотой $\nu=5\cdot10^{14}$ Гц укладывается на отрезке длиной $l=1$ мм? Скорость света $c=3\cdot10^8$ м/с.

Вариант 2

1. С высоты $h=20$ м начало свободно падать тело. Одновременно с поверхности земли бросили вертикально вверх другое тело со скоростью $v_0=20$ м/с. На какой высоте эти тела встретятся? Ускорение силы тяжести $g=9{,}8$ м/с^2. Отсчет высоты ведите от поверхности Земли. Ответ дайте в СИ.

2. Две гири массами $m_1=0{,}5$ кг и $m_2=1{,}5$ кг соединены невесомой и нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. Найдите величину ускорения движения гирь. Массой блока и трением в блоке пренебречь. Ускорение свободного падения считать равным $g=10$ м/с^2. Ответ дайте в СИ.

3. Определите силу, действующую на тело, если при его перемещении на расстояние $s=20$ м совершена работа $A=500$ Дж, а сила направлена под углом $\alpha=60°$ к направлению перемещения. Ответ дайте в СИ.

4. Из орудия, стоящего на покоящейся платформе, произвели выстрел в горизонтальном направлении. Масса снаряда $m=100$ кг, скорость снаряда $v=400$ м/с. Масса платформы с орудием $M=20$ т. Определите расстояние, на которое откатилась платформа после выстрела, если коэффициент ее трения о рельсы $\mu=0{,}1$. Ускорение силы тяжести принять равным $g=10$ м/с^2. Ответ дайте в СИ.

5. Какой объем занимают $\nu=3$ кмоля газа при давлении $p=1$ МПа (1 МПа$=10^6$ Па) и температуре $t=100$ °С? Ответ дайте в СИ.

6. Для расплавления $m=1$ т латуни используется электропечь мощностью $P=10^5$ Вт. Сколько времени происходит плавка, если слиток нагрели до начала плавления на $\Delta t=900$ °С? Удельная теплоемкость латуни $c=386$ Дж/(кг·К). Энергетические потери отсутствуют. Удельная теплота плавления латуни $\lambda=2\cdot10^5$ Дж/кг. Ответ дайте в СИ.

7. Батарея гальванических элементов с ЭДС $\mathscr{E}=15$ В и внутренним сопротивлением $r=5$ Ом замкнута проводником, имеющим сопротивление $R=10$ Ом. К зажимам батареи подключен конденсатор емкостью $C=1$ мкФ. Определите величину заряда на конденсаторе. Ответ дайте в мкКл (1мкКл$=10^{-6}$ Кл).

8. Найдите силу взаимодействия двух зарядов величиной $q=1$ Кл каждый, расположенных на расстоянии $r=1$ км друг от друга. Электрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}85\times10^{-12}$ Кл^2/(Н·м^2). Ответ дайте в СИ.

9. Два иона, имеющие одинаковые заряды и одинаковые кинетические энергии, но различные массы, влетели в однородное магнитное поле. Первый ион описал окружность радиусом $r_1=3$ см, а второй — $r_2=1{,}5$ см. Определите отношение масс первого иона и второго.

10. Светящаяся точка расположена внутри двугранного угла, образованного двумя плоскими зеркалами, при этом она находится на расстоянии $a=22$ см от линии пересечения зеркал и на расстоянии $b=2$ см от одного из зеркал. Определите угол, образованный зеркалами, если известно, что расстояние между мнимыми изображениями точки $l=22$ см. Ответ дайте в градусах.

Публикацию подготовили *М. Ю. Дигилов, Л. Ф. Еремич, А. Л. Розенталь, Е. А. Шведов*

Ответы, указания, решения

[redacted]трические преобразования [redacted] II: Преобразования подобия

1. 45°. Указание. Примените центрально-подобный поворот $\Pi_A^{k,\varphi}$, где $\varphi=\angle BAC$ и $k=\sqrt{2}$.
2. Гомотетия с центром C и коэффициентом k.
3. 90°, 45°, 45°. Указание. Данная композиция есть тождественное преобразование.
4. 45°, 60°, 75°. Указание. Пусть треугольник ABC ориентирован положительно, $\angle AMB=\varphi_1$, $\angle APC=\varphi_2$, $\angle BNC=\varphi_3$, $k_1=AM/BM$, $k_2=CP/AP$, $k_3=BN/CN$.
Докажите, что композиция
$$\Pi_N^{k_3,\varphi_3}\circ\Pi_P^{k_2,\varphi_2}\circ\Pi_M^{k_1,\varphi_1}$$
есть тождественное преобразование.
5. Указание. Пусть O — середина стороны AC треугольника ABC. Установите, что треугольники OMP и OCQ подобны. Примените центрально-подобный поворот с центром O.
6. Указание. Пусть $ABCD$ — положительно ориентированный четырехугольник и O — середина его диагонали AC. Установите, что центрально-подобный поворот $\Pi_O^{k,\varphi}$, где $k=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\varphi=90°$, переводит отрезок MN в отрезок PQ.
7. Указание. Доквжите, что $\Pi_B^{\cos\gamma,\varphi}\times\Pi_A^{1/\cos\gamma,\varphi}=R_K^{2\varphi}$, где $\varphi=90°-\gamma$.
8. $\angle BAK=\angle ABK=\gamma$.
9. Указание. Установите, что $\angle PQN=\angle PCN$ и $\angle QPM=\angle QCM$.
10. 2α, 2β, 2γ.
11. 45°.

[redacted]сибирский государственный университет [redacted]Ленинского комсомола

Математика

Вариант 1

1. $(-2;\ 2)$.
2. $-2+\sqrt{1/10}$.
3. $2\operatorname{arctg}(\sqrt{15}-2\sqrt{3})$. Указание. Заметим, что $\angle ABC$ — тупой. Пусть $\alpha={}^1/_2\angle ABC$, а X и Y — точки касания окружностей с прямой AB. Тогда $XY=XB+BY=3r\operatorname{ctg}(\pi-2\alpha)+r\operatorname{ctg}\alpha=2r\sqrt{3}$.
4. $\dfrac{\pi}{4}+(2k+1)\pi$, $k\in Z$. Указание. Перенесите второе слагаемое в правую часть и вычислите синусы левой и правой частей.
5. $x=\sqrt{20}$, $y=\sqrt{13}$, $V=8$. Указание. Объем пирамиды максимален, когда максимальна ее высота, опущенная из вершины S, т. е. когда эта высота совпадает с высотой треугольника SAB, опущенной на сторону AB.

Вариант 2

1. $y=-\dfrac{1}{4}(x-1)^2$.
2. $-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $(-1)^n\arcsin\dfrac{-1\pm\sqrt{33}}{8}+\pi n$, $n\in Z$.
3. 117/2. Указание. Центр O окружности лежит на середине гипотенузы AB, а радиус R

равен 13/2. Разобьем четырехугольник $AEFG$ на треугольники радиусами OA, OE, OF, OG и подсчитаем его площадь как сумму площадей треугольников: $\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{2}R^2\sin\alpha+$ $+\frac{1}{2}R^2\sin(\pi-\alpha)$, где $\alpha=\angle AOE$. Поскольку $\angle AOE=\angle ABC$, то $\sin\alpha=\frac{5}{13}$.

4. См. ответ к задаче 2 варианта 1.

5. $\sqrt{91}/24$. Указание. Пусть плоскость, определяемая точками K_2, L_2, E, пересекает отрезок AA_1 в точке A_3, отрезок AL — в точке E_2, а треугольник $A_1B_1C_1$ пересекает по отрезку MN. Пусть также X, Y, Z — середины отрезков K_2L_2, EE_2, MN соответственно. В плоскости AKK_2 находим $AA_3=\frac{1}{3}$, $A_1A_3=\frac{2}{3}$, $A_1M=A_1N=MN=\frac{1}{2}$, $A_3M=\frac{5}{6}$. Так как $FX=$ $=EY=\frac{1}{8}$, то $EF\parallel XY$ и искомый отрезок — средняя линия треугольника A_3MZ.

Вариант 3

1. $\{\log_7(\sqrt{13}+4);\ \log_4(\sqrt{13}-1)\}$.

2. $\pi-\arcsin\frac{2}{5}$.

3. $AC=6$, $AB=2\sqrt{105}$, $BC=4\sqrt{21}$. Указание. Пусть O — точка пересечения медиан, $\alpha=\angle MON$, $x=ON$, $y=OM$. Тогда $AN-CM=$ $=3x-3y=3$. Очевидно, $S_{CON}=\frac{1}{6}S_{ABC}=$ $=4\sqrt{5}$. С другой стороны, $S_{CON}=\frac{1}{2}x\times$ $\times 2y\cdot\sin(\pi-\alpha)$. Если α — острый угол, то $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $x=4$, $y=3$, треугольник ABC тупоугольный. Если же α — тупой угол, то получается остроугольный треугольник.

4. $a=-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; 0. Указание. Если $a=0$, то имеем целое решение $x=1$. Пусть $a\neq 0$ и m, n — целые решения квадратного уравнения. По формулам Виета числа $-\frac{3}{a}$, $2a-\frac{3}{a}$ — целые, поэтому $k=2a$ — целое, $\frac{3}{a}=\frac{6}{k}$ — целое, $k=\pm1$, ±2, ±3, ±6. Перебор случаев дает ответ.

5. $5\sqrt{3}/12$. Указание. Пусть P — середина отрезка B_1M, Q — середина AK. Плоскости пересекают призму по четырехугольникам $CKPL$ и $CMQN$. Искомый объем равен разности призмы и двух объемов усеченной пирамиды.

Вариант 4

1. $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $-\operatorname{arcctg}3+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

2. $(-\infty;\ \log_{2/3}(4+\sqrt{5})]\cup[\log_{2/3}(4-\sqrt{5});\ 1]$. Указание. Выполните замену $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$.

3. $\sqrt{33}-1$. Указание. Биссектриса угла C должна пересекать сторону AD в некоторой точке L. Пусть $\gamma=\angle ADM$, K — точка пересечения MD и CL. Пусть еще $MQ\parallel AD$, $DQ\parallel CL$. Если $x=AD$, $y=MD$, то $S_{AMD}=\frac{1}{2}xy\sin\gamma$. Так как $LD=4$, $MQ=2+x$ и треугольники LKD, QDM подобны, то $\frac{KD}{4}=\frac{y}{2+x}$. Значит, $S_{LKD}=$ $=\frac{1}{2}\cdot4\cdot\frac{4y}{2+x}\sin\gamma$. Из равенства $2S_{LKD}=$ $=S_{AMD}$ получаем ответ.

4. $\{(3\sqrt{2};\ -3+3\sqrt{2});\ (-3\sqrt{2};\ -3-\sqrt{2})\}$. Указание. Складывая данные неравенства, получаем, что $x-y-3=0$. Подставляя $x=y+3$ в исходные неравенства, получаем равенство $y^2+6y-9=0$.

5. $8\sqrt{7}/7$. Указание. Если K, L, M — точки касания шара и ребер AA_1, BB_1, DD_1 соответственно, O — центр шара, E — точка пересечения диагоналей ромба, N — ее проекция на плоскость KLM, то $AK=AC=8$, $BL=BC=$ $=5=DM=EN$, $LM=BD=6$. Пусть R — радиус шара, тогда из прямоугольного треугольника QNM имеем $ON=\sqrt{R^2-9}$, $KN=R-$ $-\sqrt{R^2-9}$. Пусть точка F лежит на ребре AK и $EF\parallel KN$. Так как $AF=AK-EN=3$, $EF=$ $=KN=R-\sqrt{R^2-9}$, по теореме Пифагора для треугольника AEF находим радиус R.

Вариант 5

1. $\left\{-\frac{1}{4}\right\}$.

2. См. ответ к задаче 2 варианта 3.

3. 81/10. Указание. Пусть $\angle CAD=\alpha$. Воспользуйтесь равенством $AD=D+CE$.

4. $[-4;\ 0]$. Указание. Подкоренные выражения равны $(2\pm y)^2$, где $y=\sqrt{-x}$.

5. $5\sqrt{11}/4$. Указание. Если SO — высота пирамиды $SABC$, то O — середина гипотенузы BC. Из прямоугольного треугольника SOB находим $SO=\sqrt{11}$. Пусть QR — высота пирамиды $QBCN$. Тогда $QR\parallel SO$ и $SR=\frac{5}{4}SO$. Искомый объем получается вычитанием из объема пирамиды $QBCN$ объемов пирамид $PBCN$ и $QCMP$.

Физика

Вариант 1

1. Накопленный за время τ импульс растрачивается за время t:

$$(F-F_{\text{тр}})\tau=F_{\text{тр}}t.$$

Отсюда

$$F_{\text{тр}}=F/(1+t/\tau).$$

2. Поток магнитной индукции через рамку не меняется, поэтому сопротивления R_2 и R_3 оказываются включенными параллельно. По закону Фарадея

$$\mathscr{E}_{\text{инд}}=Blv.$$

Таким образом, для тока, идущего через амперметр, по закону Ома получаем

$$I_A = \frac{Blv}{R_1 + R_2R_3/(R_2+R_3)}.$$

3. Пружина начинает приподнимать груз, когда $kx_0 = mg$, где x_0 — удлинение пружины к этому моменту. Перейдем в систему отсчета, движущуюся вверх со скоростью v. В этой системе грузик в момент отрыва от стола движется вниз со скоростью v. Пусть x — максимальное удлинение пружины, тогда относительно низшей точки потенциальная энергия грузика в этот момент равна $mg(x-x_0)$. Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{mv^2}{2} + mg(x-x_0) + \frac{kx_0^2}{2} = \frac{kx^2}{2}.$$

Отсюда, с учетом того, что $x_0 = mg/k$, получаем уравнение

$$kx^2 - 2mgx - mv^2 + m^2g^2/k = 0.$$

Решение этого уравнения однозначно, так как $x > x_0$:

$$x = \frac{mg}{k} + v\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

4. Кинетическая энергия пули $mv^2/2$ идет на увеличение внутренней энергии сжатого внутри ствола воздуха $(3/2)\nu R(T-T_0)$ (для простоты воздух считаем идеальным одноатомным газом). Поскольку $T \gg T_0$, на уровне оценки из закона сохранения энергии следует

$$mv^2 \sim 3\nu RT.$$

(Потерями тепла из-за быстроты процесса можно пренебречь.) По закону Менделеева — Клапейрона

$$p_0 lS = \nu RT_0.$$

Таким образом,

$$T \sim \frac{mv^2T_0}{3p_0 lS}.$$

При $m \sim 10$ г, $v \sim 7\cdot10^2$ м/с, длине ствола $l \sim 1$ м, сечении его $S \sim 10^{-4}$ м^2, $p_0 = 10^5$ Па, $T_0 \sim 300$ К получаем

$$T \sim 5\cdot10^4 \text{ К}.$$

5. Лампа $Л_2$ гаснет, когда мост практически уравновешен (см. рисунок к условию задачи). Так как до этого она горела, значит, сопротивление ламп $Л_1$ и $Л_3$ не равно R, а меньше (по мере нагрева включенных ламп их сопротивление с температурой растет). Таким образом, вначале ток идет по пути наименьшего сопротивления — через три лампы. А поскольку лампа $Л_2$ загорается первой, ее начальное сопротивление должно быть самым большим.

Вариант 2

1. $T = \frac{5M_2}{4M_1}T_0 = 362$ К.

2. На пути $x \leqslant l$ сила трения $F_{тр} = \mu mgx/L$, а работа силы трения $A = \mu mgx^2/(2L)$, т. е. до выхода передней грани пластины за полосу совершается работа

$$A_1 = \mu\frac{mgl^2}{2L}.$$

При $l \leqslant x \leqslant s$ сила трения $F_{тр} = \mu mgl/L$, а работа силы трения $A = \mu mgl(x-l)/L$, т. е. на второй части пути совершается работа

$$A_2 = \mu mg\frac{l}{L}(s-l).$$

Используя закон сохранения энергии, получаем

$$A = A_1 + A_2 = \mu mg\frac{2s-l}{2L}l = \frac{mv^2}{2},$$

откуда

$$\mu = \frac{v^2L}{gl(2s-l)}.$$

3. Заряд на конденсаторах вначале одинаков и равен

$$q_а = \mathscr{E}\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}.$$

Начальная энергия конденсаторов

$$W_а = \frac{q_а^2}{2}\frac{C_1+C_2}{C_1C_2} = \frac{\mathscr{E}^2C_1C_2}{2(C_1+C_2)}.$$

После переключения

$$q_б = 2q_а = 2\mathscr{E}\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}.$$

Конечная энергия конденсаторов

$$W_б = \frac{q_б^2}{2(C_1+C_2)} = \frac{4\mathscr{E}^2C_1^2C_2^2}{2(C_1+C_2)^3}.$$

Выделившаяся энергия по закону сохранения энергии равна

$$Q = W_а - W_б = \frac{\mathscr{E}^2C_1C_2}{2(C_1+C_2)^3}\left((C_1+C_2)^2 - 4C_1C_2\right) = \frac{\mathscr{E}^2C_1C_2(C_1-C_2)^2}{2(C_1+C_2)}.$$

4. Давление в одну атмосферу соответствует высоте водяного столба $H_в = 10$ м ($\rho_в gH_в = p_а = 1$ атм). При перепаде давлений $\Delta p = p - p_а = 0{,}5$ атм получится высота фонтана

$$h = H_в/2 = 5 \text{ м}.$$

Действительно, полагая сечения струи внизу и вверху примерно одинаковыми, имеем

$$\Delta p \sim \rho_в v^2/2 \sim \rho_в gh.$$

Отсюда

$$h = \frac{\Delta p}{\rho_в g} \sim \frac{\rho_в gH_в/2}{\rho_в g} = \frac{H_в}{2} = 5 \text{ м}.$$

5. Когда виток охватывает трансформатор снаружи, магнитный поток через него равен нулю, и виток на трансформатор не влияет. Если замкнутый виток проходит внутри трансформатора, охватывая железный сердечник, в витке возникает переменный магнитный поток, создающий значительный (из-за малости омического сопротивления витка) ток, который, в свою очередь, стремится скомпенсировать (по закону Ленца), почти занулить магнитный поток в сердечнике. Это приводит к заметному уменьшению индуктивности первичной обмотки и, следовательно, к снижению ее индуктивного сопротивления. В результате ток через лампу увеличивается, и накал возрастает.

Вариант 3

1. Шарики, обладавшие вначале зарядами разных знаков: q_1 и $-q_2$, после разлета несут один и тот же заряд $q=(q_1-q_2)/2$. Соотношение между силами отталкивания и притяжения —

$$k\frac{q^2}{l^2}=\frac{1}{8}\frac{q_1q_2}{l^2},$$

отсюда приходим к уравнению

$$x^2-(5/2)x+1=0,$$

где $x=q_1/q_2$.
Решая это уравнение, получаем два ответа:

$$q_1/q_2=2 \text{ и } q_1/q_2=1/2,$$

т. е. заряд одного шарика в два раза больше другого.

2. Критическое условие прохождения пули сквозь доску (как закрепленную, так и незакрепленную) — выделение в доске тепловой энергии $Q=mv_0^2/2$. В случае незакрепленной доски конечные скорости доски и пули совпадают. Пусть эта скорость равна u. Тогда из закона сохранения импульса

$$mv=(m+M)u$$

и закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{(m+M)u^2}{2}+\frac{mv_0^2}{2}$$

получаем

$$v=v_0\sqrt{(m+M)/M}.$$

3. См. решение задачи Ф1155, которое будет опубликовано позже.
4. См. решение задачи Ф1153, которое будет опубликовано позже.
5. См. решение задачи Ф1156, которое будет опубликовано позже.

[redacted]ковский инженерно-физический институт
[redacted]ематика

Вариант 1

1. $\{1\}$.

2. $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{a}+\pi k$, $k\in Z$ при $a\in(-\infty;\,-1]\cup[1;\,+\infty)$; $\{\varnothing\}$ при $a\in(-1;\,1)$. Указание. Приведите уравнение к равносильному ему уравнению $\cos 2x=\frac{1}{a}$, $a\neq 0$.

3. 1791. Указание. Пусть $A=\overline{xyz1}$ — искомое число (x, y, z — цифры). По условию числа $xy=10x+y$, z, 1 образуют арифметическую прогрессию с некоторой разностью d. Поэтому $z=1+d$, $10x+y=1+2d$. Из этих равенств следует, что $5\leqslant d\leqslant 8$. Осталось перебрать возможные значения d.

4. $S_1=\frac{1}{2}l\cos^2\beta\sin 2\alpha$,

$S_2=\frac{3}{4}l^2\cos\beta\sin\alpha\sqrt{1-\cos^2\beta\sin^2\alpha}$,

$S_1=\frac{3}{4}l^2\cos\beta\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\beta\cos^2\alpha}$

при $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, $\beta\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Указание.

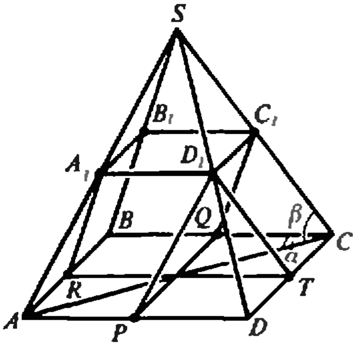


Рис. 1.

Пусть $SABCD$ — данная пирамида, точки A_1, B_1, C_1, D_1, P, R, Q, T — середины ее ребер (рис. 1). Всего имеется 5 сечений пирамиды, плоскости которых равноудалены от ее вершин. Три из них показаны на рисунке. Это прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$, трапеция PD_1C_1Q и, наконец, трапеция RA_1D_1T. Остальные сечения на рисунке не показаны (они симметричны рассмотренным трапециям). После этих замечаний вычисление требуемых площадей не представляет труда.

Вариант 2

1. $(-\infty;\,-6]\cup(-2;\,+\infty)$.

2. $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$; $2\pi n$, $n\in Z$ при $c=85$.

Решений нет при $c\neq 85$. Указание. Выполните подстановку $u=6^{-\sin x}$, $v=7^{\cos y}$. Ясно, что $\frac{1}{6}\leqslant u\leqslant 6$, $\frac{1}{7}<v\leqslant 7$. Первому из уравнений системы удовлетворяют лишь $u=6$, $v=7$.

3. При $35\leqslant c<215/6$ в четвертом сосуде концентрация кислоты больше, чем в третьем, при $215/6<c\leqslant 37$ — концентрация в третьем сосуде больше, чем в четвертом. При остальных c решений нет. Указание. Пусть x и y количества литров раствора, отлитого соответственно из первого и второго сосудов в третий сосуд.

Тогда $\begin{cases} x+y=10, \\ 3x+4y=c, \end{cases}$

причем $0<x\leqslant 5$, $0<y\leqslant 7$, и поэтому $35\leqslant c\leqslant 37$.
Вычисляя концентрацию d кислоты в четвертом сосуде, получим $d=215-5c$.

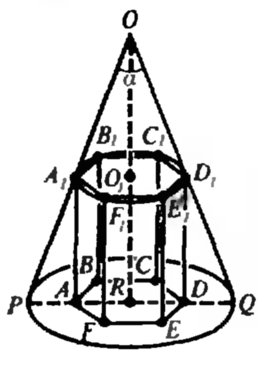


Рис. 2.

4. $V=\frac{3\sqrt{3}}{2}l^3\cos\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\frac{1-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{\left(2-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right)^3}$

при $\alpha\in\left(0;\ \frac{\pi}{3}\right)$. При $\alpha\in\left[\frac{\pi}{3};\pi\right)$ задача не имеет решения.

Указание. Рассмотрите осевое сечение OPQ конуса (рис. 2). Пусть $x=AA_1$. Выражая через данный угол α и x площадь полной поверхности призмы $S(x)$, получим

$S(x)=3\sqrt{3}\left(l\sin\frac{\alpha}{2}-x\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right)^2+6x\left(l\sin\frac{\alpha}{2}-\right.$ $\left.-x\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right)$, так что $S(x)$ — квадратный трехчлен относительно x с коэффицнентом a при x^2, равным $a=3\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}-6\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$.

Осталось найти максимальное значение функции $S(x)$ на интервале $\left(0;l\cos\frac{\alpha}{2}\right)$, где $\alpha\in(0;\pi)$. При этом оказывается, что при $a\geqslant 0$ максимум $S(x)$ внутри указанного интервала не достигается, а при $a<0$ (т. е. при $0\leqslant\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$) требуемый максимум достигается при $x=l\cos\frac{\alpha}{2}\,\frac{1-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha/2}{2-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha/2}$.

Физика

1. $v_0=\sqrt{lg\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}-2\cos\alpha+2\right)}=5$ м/с.
2. $Q=m_2v_0\sqrt{2gh}-m_2(m_2/m_1+1)gh\approx 91{,}3$ Дж.
3. $v_0=\sqrt{2\mu g(l-h+(M/m)(l/2-h))}=3{,}5$ м/с.
4. $v=\sqrt{\frac{2ah}{\sin\alpha}\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)}\approx 1{,}07$ м/с.
5. $a=\frac{4I}{M}\sqrt{\frac{m_0U}{e}}\approx 3$ м/с^2.
6. $p_2=(2n-1)p_1=300$ кПа.
7. $S_2=\begin{cases}\frac{B_1S_1+|q|R}{B_2}=3{,}4\cdot 10^{-2}\ \text{м}^2, & \text{если } q>0,\\ \frac{B_1S_1-|q|R}{B_2}=1{,}1\cdot 10^{-2}\ \text{м}^2, & \text{если } q<0.\end{cases}$
8. $Q=PL/R=4$ мДж.
9. $x_m=IBl\tau/\sqrt{2km}=0{,}25$ м.
10. $F_2=F_1\frac{mg+IBl}{mg-IBl}=2$ Н.

[redacted]ковский авиационный институт [redacted]Серго Орджоникидзе

Математика

Вариант 1

1. На 16.
2. $\frac{\pi}{3}(2k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$.
3. $[1;10^9]\cup[10^{16};10^{25}]$. Указание. Выполните замену $y=\sqrt{\lg x}$ и решите полученное неравенство относительно y.
4. $(\pi P-Q)^2/4Q$. Указание. Пусть x, y — катеты треугольника, R, r — радиусы описанной и вписанной окружностей, соответственно. Гипотенуза длиной $2R$ делится точкой касания к вписанной окружности на два отрезка, длины которых $x-r$ и $y-r$. Поэтому $x+y-2r=2R$, или $x+y=2(R+r)$. Возведя обе части уравнения в квадрат и заменяя произведение xy удвоенной площадью треугольника, получим

$$x^2+y^2+4P=4(R+r)^2,$$

откуда

$$R=\frac{P-r^2}{2r}.$$

5. $\{(-(1+\sqrt{3})/2;\ 2);\ ((\sqrt{3}-1)/2;\ 2)\}$. Указание. Запишем уравнения системы следующим образом:

$$\begin{cases}2x^2+yx-1=0,\\ 2\left(-\frac{3x}{2(1-x)^2}\right)^2+y\left(-\frac{3x}{2(1-x)^2}\right)-1=0.\end{cases}$$

Каждое уравнение системы представляет собой квадратное уравнение вида $2z^2+yz-1=0$, первое — относительно $z=x$, второе — относительно $z=-\frac{3x}{2(1-x)^2}$. Поэтому либо $x=-\frac{3x}{2(1-x)^2}$, либо $x\left(-\frac{3x}{2(1-x)^2}\right)=-\frac{1}{2}$.

6. Sh. Указание. Плоскость делит призму на два многогранника. Соединив их так, чтобы точки A, B, C одного многогранника совпали с точками A', B', C' другого, получим наклонную призму, площадь основания которой равна S, а высота h. Поэтому ее объем, также как и объем исходной прямой призмы равен Sh.

Вариант 2

1. $\frac{\pi}{6}(6k+5)$, $k\in\mathbf{Z}$.
2. 2,5.
3. $(-1/3;0)\cup(4;\infty)$. Указание. При решении неравенства $\log_{3x+1}\frac{x-2}{x-4}\geqslant 0$ необходимо рассмотреть 2 случая: $0<3x+1<1$ и $3x+1>1$.
4. $4\sqrt{3}/27$. Указание. Если x — угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания, то $V(x)=\frac{2}{3}\sin x\cos^2 x$. Исследования на максимум функции $V(x)$ удобно свести к исследованию многочлена $f(y)=y(1-y^2)$ ($y=\sin x$, т. е. $0\leqslant y\leqslant 1$).
5. $\{(4;-5);\ (0;-1);\ (4;-3);\ (0;1)\}$. Указание. Из второго уравнения следует, что x и y — целые числа, а из первого, что $(x+y)^2=2-\frac{1}{4}(x-2)^2$, откуда $(x+y)^2\leqslant 2$, т. е. сумма $x+y$ может принимать одно из трех значений — 0, 1, −1.
6. $(-4/3;\ 8/3)$; $(4/5;\ 8/5)$. Указание. Треугольники AMO и BMC подобны. Поэтому $\frac{MC}{OM}=\frac{MB}{MA}=\frac{BC}{AO}$. Выражая длины отрезков через координаты $(x;y)$ точки M, получим систему уравнений, из которой и найдем $(x;y)$.

Физика

Вариант 1

1. $\alpha_{max}=\operatorname{arctg} 2\mu$.
2. $\omega=\sqrt{(k_1+k_2)/m}$; при перемене мест пружин частота колебаний не изменится.
3. $t=\frac{\rho_1V_1c_1t_1+m_2(c_2t_2+\lambda)}{\rho_1V_1c_1+m_2c_2}\approx 24$ °C (здесь $\rho_1=10^3$ кг/м^3 — плотность воды); исходная масса воды не изменилась.
4. $l\leqslant d\sqrt{2CW/(qQ)}$.
5. $\tau\leqslant\Delta l(d-F)/(vF)\approx10^{-3}$ с.
6. $E_{min}=hc/\lambda_{max}=7{,}2\cdot10^{-19}$ Дж$=4{,}5$ эВ (здесь $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка, $c=3\cdot10^8$ м/с — скорость света).

Вариант 2

1. $\alpha_{max}=\arcsin 0{,}8=53°$.
2. $y(x)=a(1-2x^2/a^2)$ — уравнение параболы; $v=\omega a\sqrt{\cos^2\omega t+4\sin^2 2\omega t}$.
3. $x_1=\frac{M_1(M-M_2)}{M(M_1-M_2)}100\,\%=27{,}6\,\%$;

$$x_2=\frac{M_2(M_1-M)}{M(M_1-M_2)}100\,\%=72{,}4\,\%.$$

4. $\Delta L=10$ мм.
5. Резисторы нужно соединить в две параллельные группы из двух резисторов каждая.
6. $\frac{H_1}{H_2}=\left(\frac{L+\sqrt{L^2-4LF}}{L-\sqrt{L^2-4LF}}\right)^2$.

[redacted]овский институт радиотехники, [redacted]троники и автоматики

Математика

Вариант 1

1. $(-4/5;\ \bigcup-3/4)\bigcup(-2/3;\ -\frac{1}{2})\bigcup(0;\ \infty)$.

Указание. Приведите неравенство к виду

$$-\frac{x}{(2x+1)(3x+2)}\leqslant\frac{x}{(5x+4)(4x+3)}.$$

При $x\geqslant0$ последнее неравенство справедливо. При $x<0$ неравенство справедливо лишь при условии отрицательности одного из знаменателей.

2. 6 мин, 9 мин.
3. $\pi k,\ \frac{\pi}{10}(2k+1),\ k\in Z$.
4. $\{1;\ 1/9;\ 9\}$.
5. Боковые стороны и меньшее основание равны $2R\sqrt{2}$, большее основание $2R(2+\sqrt{2})$.
6. $\{1;\ 5\}$. Указание. После возведения обеих частей уравнения в квадрат выполните замену $t=\sqrt{-x^2+6x-5}$, затем убедитесь в том, что $t=0$ — единственный корень полученного уравнения. Для доказательства этого воспользуйтесь неравенством $t\leqslant2$.

Вариант 2

1. $\{0\}$.
2. 10 листов.
3. $\frac{\pi}{2}(2k+1),\ k\in Z$.
4. $\{0{,}001;\ 0{,}01;\ 100;\ 1000\}$. Указание. Прологарифмируйте по основанию 10 и выполните замену $y=\lg x$.
5. 39. Указание. Пусть M — точка пересечения медиан. Треугольник AMC — прямоугольный. Его медиана MH равна $1/3$ искомой медианы.
6. $a\in[-6;\ 1]$. Указание. Пусть $t=\sin 2x$. Тогда $0\leqslant t\leqslant1$ и неравенство приводится к виду $t^2+(a^2-9)t+(a-1)\leqslant0$.

Физика

1. $v=((l/t)^2+v_0^2+2(l/t)v_в\cos\alpha)^{1/2}=174$ км/ч; $\beta=\arcsin(\sin\alpha\cdot v_в/v)=4{,}3°$.
2. $a=g\left(1-\frac{\rho_в(\rho_м+\rho_c)}{2\rho_м\rho_c}\right)=8{,}6$ м/с^2; $T=2$Н.
3. $v=\sqrt{3}/2v_1=9{,}8$ км/с.
4. $h=(S_1h_1+S_2h_2)/(S_1+S_2)=25$ см; $Q=(\rho g/2)(S_1h_1^2+S_2h_2^2-(S_1h_1+S_2h_2)h)\approx1$ Дж; $\Delta T=Q/(c\rho(S_1h_1+S_2h_2))\approx1{,}8\cdot10^{-3}$ К.
5. $\Delta T=T_0m_1/m_2=546$ К.
6. $r=\sqrt{R_1R_2}=5{,}5$ Ом.
7. $q=BlS/(16\rho)=0{,}05$ Кл.
8. $x_m=mv/\sqrt{k(M+m)}=0{,}1$ м.
9. $H=h(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)/(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha)=400$ м.
10. $h=5{,}2$ см.

[redacted]ковский институт стали и сплавов

Математика

Вариант 1

1. 27,5. 2. 2,33. 3. —0,28. 4. 14. 5. —0,5. 6. 300. 7. 6. 8. 0,8. 9. 4. 10. 2. 11. 0. 12. 1. Указание. Рассмотрите осевое сечение полушара, проходящее через диагонали оснований куба.

Вариант 2

1. 12. 2. 5. 3. 0,96. 4. 2. 5. 5. 6. 13,5. 7. 8. 8. 4. 9. —21. 10. 0,5. 11. 15. 12. 0,5. Указание. Исследуйте на экстремум функцию $y=S_б^2(r)$, где $S_б$ — боковая поверхность конуса.

Физика

Вариант 1

1. $t=v_0/(4g)=0{,}125$ с.
2. $\alpha=\arccos\frac{A}{F_з}=\arccos\frac{1}{2}=60°$.
3. $l=m^2v^2/(2\mu gM^2)=1{,}25$ м.
4. $T=2\pi\sqrt{l/g}=6{,}28$ с.
5. $p=(p_1V_1+p_2V_2)/(V_1+V_2)=0{,}7\cdot10^5$ Па; ответ: 7.
6. $\tau=\frac{2cm(t_к-t)}{P\eta/100\,\%}=1676$ с, где $t_к=100$ °C — температура кипения воды.
7. $n=\sqrt{R/R_1}=6$.
8. $U_1=C_2U/(C_1+C_2)=160$ В.
9. $F=BIl\sin\alpha=0{,}09$ Н.
10. $n=lv/c=1{,}67\cdot10^3$.

Вариант 2

1. $x=h-gh^2/(2v_0^2)=15{,}1$ м.
2. $a=g(m_2-m_1)/(m_1+m_2)=5$ м/с^2.
3. $F=A/(s\cos\alpha)=50$ Н.
4. $l=m^2v^2/(2\mu gM^2)=2$ м.
5. $V=\nu RT/p=9{,}3$ м^3, где $R=8{,}31$ Дж/ /(моль·К) — универсальная газовая постоянная.
6. $\tau=m(c\Delta t+\lambda)/P=5474$ с.
7. $q=S\mathcal{E}R/(R+r)=10$ мкФ.
8. $F=q^2/(4\pi\varepsilon_0 r^2)=9\cdot10^3$ Н.
9. $m_1/m_2=(r_1/r_2)^2=4$.
10. $\alpha=30°$.

[redacted]йдоскоп «Кванта»
«Квант» № 2)

Вопросы и задачи

1. Свет, испускаемый лазером,— почти строго параллельные лучи.
2. Для разных длин световых волн показатели преломления вещества различны.
3. Ближе к перпендикуляру — красный луч, дальше всех — фиолетовый.
4. Для любой линзы главное фокусное расстояние больше (по модулю) для красных лучей.
5. Зеленое.
6. Красный, поскольку при переходе из одной среды в другую частота света, определяющая цвет лучей, не изменяется.
7. Нет, поскольку сама интерференция — следствие принципа суперпозиции, согласно которому фронты волн, «проникающих» одна в другую, взаимно не деформируются.
8. Да, так как прямая и обратная волны когерентны.
9. Из-за стекания воды нижняя часть пленки утолщается, а верхняя становится тоньше. Поэтому соответствующие интерференционные полосы смещаются.
10. Из-за дифракции на краях Луны на поверхности Земли появляется интерференционная картина.
11, 12. Начинают сказываться дифракционные явления.

Микроопыт

В щель будут видны темные дифракционные полосы: четкая полоса в центре и ряд более слабых боковых.

[redacted]нт» для младших школьников
«Квант» № 2)

1. На весах 300 монет.

2. См. рис. 3. Сумма S чисел на каждой окружности равна 12, так как $4S=36+S$.
3. См. рис. 4.
4. Ошибка в графе «Разность мячей» у команды Швеции: при одном выигрыше и одной ничьей разность мячей не может быть «1—1». Общее количество забитых мячей равно 11,

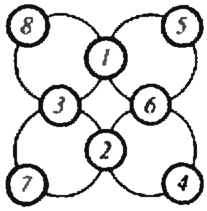


Рис. 3.

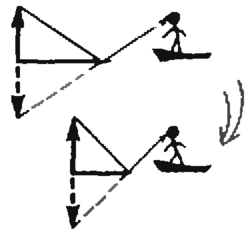


Рис. 4.

а число пропущенных — 12. Поэтому ошибка в счете на 1 мяч, т. е. разность мячей Швеции равна «2—1», либо «1—0». Рассмотрение этих вариантов приводит к следующей таблице:

	Венгр.	Швец.	Исп.	Ирл.	Франц.	Разн. мяч.	Очки
Венгрия	*	—	—	2:1	2:0	4—1	4
Швеция	—	*	1:1	1:0	—	2—1	3
Испания	—	1:1	*	2:2	—	3—3	2
Ирландия	1:2	0:1	2:2	*	—	3—5	1
Франция	0:2	—	—	—	*	0—2	0

5. Разрежем четырехугольник по средним линиям и сложим полученные четырехугольники так, чтобы вершины большого четырехуголь-

АНКЕТА 3—89

Дорогой читатель!

Ежегодно в последнем номере журнала мы помещали «Нашу анкету». Но нам пришло в голову, что легче, проще высказать свое мнение, что называется, по свежим следам. Поэтому мы решили помещать анкету раз в квартал.

Мы обращаемся к Вам с просьбой. Ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите «АНКЕТА 3—89».

Очень надеемся на обратную связь.

1. Класс, в котором Вы учитесь: ____________

   Ваша профессия (если Вы работаете): ________

   ____

   круг Ваших интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните).
2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? ____________________

   ____

(см. с. 80)

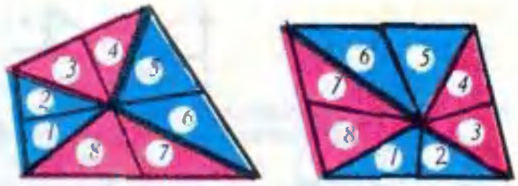


Рис. 5

ника слились в одну точку (рис. 5). Получим параллелограмм, в котором сумма площадей синих треугольников равна половине его площади, т. е. сумме площадей красных треугольников.

Головоломка
(см. «Квант» № 2, 4-ю с. обл.)
См. рис. 6.

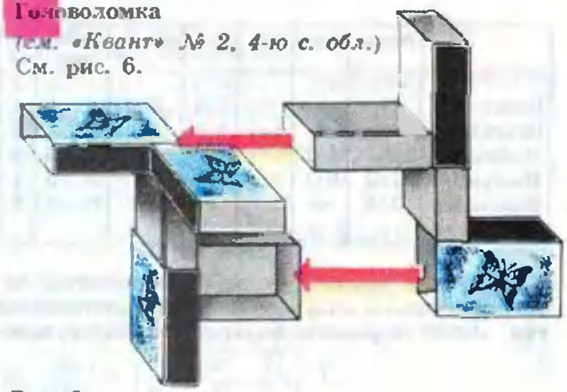


Рис. 6

АНКЕТА 3—89

3. Какие статьи и задачи из номеров 1—3 (номер укажите) Вам понравились? ______________________________

Вы использовали при подготовке к уроку? ______________________________

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»? ______________

Участвуете ли Вы в конкурсе «Задачник «Кванта»? ______________

5. Вам больше всего понравилась обложка номера ______________

иллюстрация из номера ______, страница ______________

6. Ваши общие замечания и пожелания: ______________________________

Квант

Сдано в набор 26.12.88. Подписано к печати 6.2.89. *Т-08911 Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1. Гарнитура* школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 8,05. Тираж 135462 экз. Заказ 3255. Цена 45 коп.

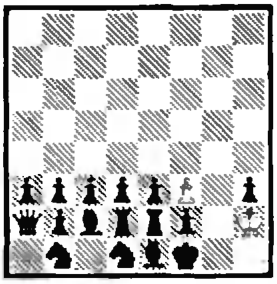
Адрес редакции: 103006 Москва К-6,
ул. Горького 32/1, «Квант».
Телефон: 250-33-54

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

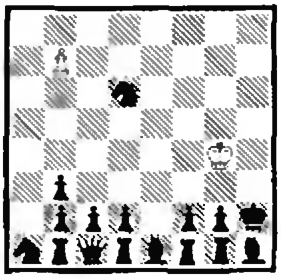
ПЕШКА ПРОТИВ ВСЕХ ФИГУР

Среди необычных шахматных задач и головоломок особое место занимают позиции, в которых одна сторона представлена полным комплектом фигур, а другая — одиноким королем и пешкой, но она-то и берет верх. С математической точки зрения такие задачи весьма примечательны: в них разница в материальном соотношении сил принимает максимальное значение.



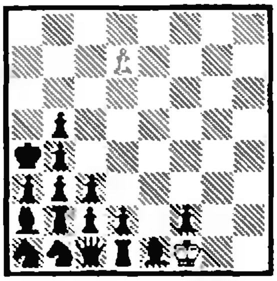
О. Блаты, 1922 г.
Мат в 12 ходов.

1. f4. Черные фигуры чувствуют себя несколько скованно, но белой пешке надо спешить — клубок вот-вот распутается. 1...Фа1 2. f5 а2 3. f6 Ка3 4. f7 Cb1 (4...Кс4 5. f8Ф Ке5 6. Фа8 Kg4+ 7. Кр:h3) 5. f8Ф Лс2 6. Фf3 Лed2 7. Ф:h3+Кре2 8. Фh5+Крf1 9. Крg3! Кс4 (9...Лс1 10. Крf3) 10. Фh1+ Кре2 11. Крg2 и 12. Фf1×. В следующем примере ловкая пешка справляется с вооруженной до зубов армией противника, даже не превращаясь в ферзя.



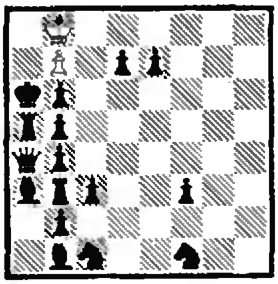
О. Блаты, 1922 г.
Мат в 6 ходов.

1. b8Л! (Появление ферзя или слона ведет к пату, при коне также ничья.) 1...Кf7 2. Крf4 Крh3 3. Лf8 Крh4 4. Л:f7 Крh5 5. Лf6! Крh4 6. Лh6×.



Б. Сидоров, 1980 г.
Мат в 3 хода независимо от очереди хода.

При ходе белых: 1. d8Л! Кра5 2. Лd6 Кра4 3. Ла6×; при ходе черных: 1. Кра5 d8Ф+! 2. Кра6 Фb8 3. Кра5 Фа7×.

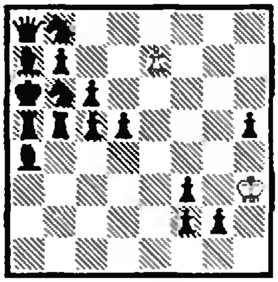


Ю. Бухвальд, 1964 г.
Мат в 4 хода.

В этой удивительной позиции белая пешка в зависимости от обстоятельств превращается в одну из трех фигур! 1. Крс7 Се4 (при 1. Кра8 или 1. Крс8 этот маневр слона решил бы дело в пользу черных) 2. b8Ф и 3. Ф:b6(b7)×.

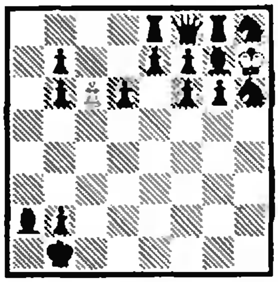
Более упорная защита состоит в 1...с2! Ладья теперь выбирается на свободу, и кажется, что за 3 оставшихся хода короля не заматовать (2. b8Ф Лс3+ 3. Крd8 Лс8+ или Лс7). Но белые делают невероятный ход. 2. Крb8!! Черный слон заперт, и король спокойно возвращается на место, направляясь в угол доски со страшной угрозой 3. Кра8 и 4. b8К×! Не спасает 2...Лс3 3. Кра8 Лс8+ 4. bсФ(С)×!

Если у вас осталась одна-единственная пешка против всех фигур противника, то на худой конец можно ограничиться и мирным исходом.



Н. Байке, 1969 г.
Ничья.

1. е8К! g1К+! 2. Крh2 f1К+! 3. Кр:g1 f2+ 4. Крh1 Kg3+ 5. Крh2 f1К+! В ответ на появление одного белого коня черные выставили сразу трех своих, но, умело маневрируя между ними, белый король убегает от преследования. 6. Крh3 Кс4. Спасает только от мата, но не от вечного шаха. 7. Кс7+ Крb6 8. К:а8+ Кра6 9. Кс7+ и т. д.



А. Ройкрофт, 1957 г.
Ничья.

Король белых запатован, нужно лишь побыстрее избавиться от пешки. 1. с7 f5 2. с8Ф! (2. с8Л? Сс3 3. Л:с3 Фg7×) 2...Сс3 3. Ф:f5+ и белые легко отдают ферзя, добиваясь ничьей.

Другой вариант: 1...g5 2. с8Л! (теперь не помогает превращение в ферзя: 2. с8Ф? Кра1! 3. Фс1+ b1Ф+ 4. Ф:b1+ С:b1×) 2...Кра1 3. Лс2! Увы, черные не успевают превратить свою пешку «b», а уже грозит 4. Л:b2! с бешеной ладьей. 3...Сс4 (и в случае 3...Кg6 к ничьей ведет 4. Лс1+!) 4. Лс1+ Кра2 5. Ла1+Крb3 6. Ла3+Крс2 7. Лс3+Крd2 8. Лс2+, и вечное преследование короля можно прекратить только посредством пата.

Е. Я. Гик

Цена 45 коп.

Индекс 70465

Возьмите ваш старый, добрый кубик Рубика, если он еще цел, сотрите с него пыль и скрепите клейкой лентой 9 пар маленьких кубичков, как показано на рисунке 1. У вас получится совершенно другая головоломка — «бикуб», о которой мы узнали из изданной в ГДР книги В. Хинце «Родственники волшебного кубика». Принципиальное отличие бикуба в том, что каждый двойной блок как бы «запирает» одну грань. Какие грани остаются свободными, зависит от «конфигурации» бикуба, т. е. расположения блоков (двойных и одинарных) без учета их расцветки. Например, в исходном состоянии (конфигурация 0, рис. 1) подвижны 3 грани — желтая, синяя и красная. Мы будем рассматривать упрощенный вариант бикуба, в котором только эти грани и разрешается вращать,— это уже достаточно интересно. Любопытно, что этот вариант эквивалентен плоской головоломке Рауля Раба «ротаскоп» (рис. 2), состоящий из 10 криволинейных треугольников, уложенных в виде трех пересекающихся кругов и перемешиваемых вращениями этих кругов. Как и обычный кубик, бикуб случайным образом запутывают, а потом пытаются вернуть в исходное состояние.

В любой конфигурации бикуба выбор возможных поворотов очень невелик. Благодаря этому удается изобразить связи между конфигурациями сравнительно простым графом (рис. 3). Его вершины отвечают различным конфигурациям, а каждая цветная стрелка означает поворот грани того же цвета на 90° по ходу часов. Например, чтобы превратить конфигурацию 1 (рис. 4) в 0, нужно в соответствии с графом последовательно повернуть желтую и синюю грани на 90° против часовой стрелки. Синяя петля, «привязанная» к вершине графа а, показывает, что в соответствующей конфигурации синяя грань свободна, но при всех ее поворотах мы попадаем в «тупики», т. е. остальные грани запираются. Так уж устроены еще 5 конфигураций, изображенных белыми кружками. Из всех черных кружков тоже можно попасть в тупики, но для простоты на графе они не показаны.

Как видно из графа, для бикуба «все дороги ведут к конфигурациям 1, 2, 3 или 0» — надо только избегать возвратов и тупиков. Поэтому конфигурация 0 достигается почти автоматически. Оказывается, все перестановки блоков, возможные в этой конфигурации (а их ровно 60), можно получить, комбинируя две 8-ходовые операции, отвечающие на графе обходам 0→1→2→0 и 0→3→1→0 по синей и красной стрелкам. Разобравшись в том, как действуют эти операции, вы сможете научиться полностью собирать бикуб.

В. Д.

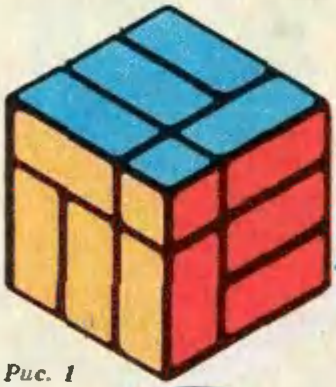


Рис. 1

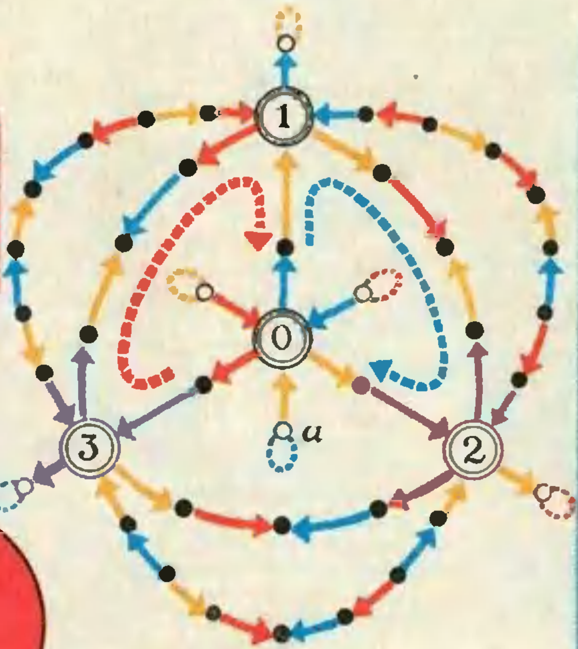


Рис. 3.

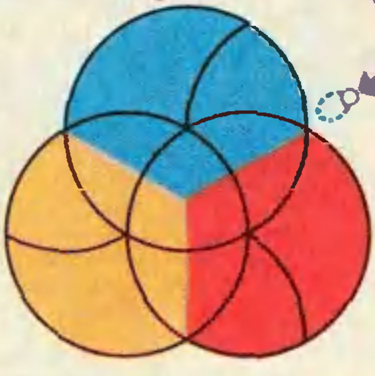


Рис. 2.

Рис. 4.