ISSN 0130-2221

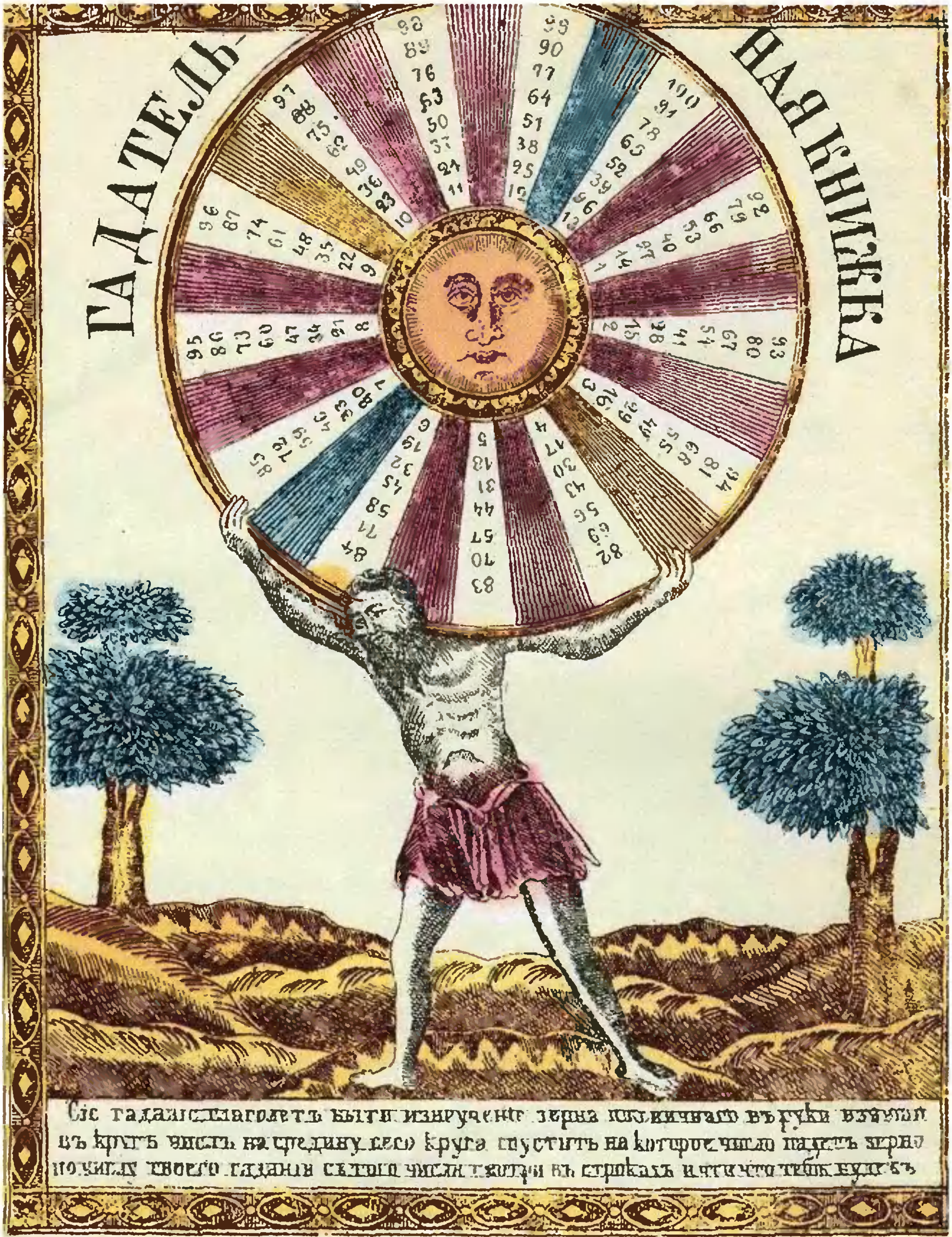
# Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Поговорим про вчерашний снег...

1988




Дозволено Цензурой М. 31. МАЯ 1899 г

Лит. И. Голышева въ Голышавке

**Квант**

*Основан в 1970 году*

1988

8

*Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*

*Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы*

# В номере:

2 Памяти Ландау
8 *А. А. Кремер.* О рассеянии, или Как измерить жирность молока
15 *Ю. П. Чукова.* Распределение Пуассона
19 *А. П. Винниченко.* Простые числа, математическая статистика и... ЭВМ
23 *В. Н. Дубровский.* Как возникает распределение Пуассона
26 *А. В. Митрофанов.* Поговорим про вчерашний снег

**Задачник «Кванта»**
30 Задачи М1116—М1120, Ф1128—Ф1132
34 Problems M1116—M1120, P1128—P1132
35 Решения задач М1096—М1098, М1100, Ф1108—Ф1112

32 **Калейдоскоп «Кванта»**

**«Квант» для младших школьников**
43 Задачи
44 *А. С. Штейнберг.* Коротко о тепловом расширении

**Лаборатория «Кванта»**
48 *И. И. Мазин.* Простые опыты с кипятком

**Математический кружок**
51 *М. В. Волков, Н. Н. Силкин.* Кого послать на Марс?
57 Избранные школьные задачи

**Практикум абитуриента**
58 А. Р. Зильберман. Расчет электрических цепей

**Информация**
Вечерняя физическая школа при МГУ (*14*)
18 Заказы принимаются...
XI Турнир юных физиков (*61*)

64 **Ответы, указания, решения**
**Смесь** (*47, 50*)
**Наша обложка**

1 *Какое отношение эта электронная микрофотография (увеличение $10^3$) поверхности полипропиленовой пленки имеет ко вчерашнему снегу, вы узнаете из статьи А. В. Митрофанова.*

2 *Рисунок из старинной гадательной книжки. На круг с цифрами бросали зернышко и под номером, на который оно падало, в специальном списке вычитывали свою судьбу. Количество появлений заданного номера в длинной серии гаданий случайно, но подчиняется так называемому закону Пуассона. Две статьи в этом номере журнала — Ю. П. Чуковой и В. Н. Дубровского — посвящены вероятностному распределению Пуассона.*
*И еще раз вы встретитесь с этим распределением, а лучше сказать — с его «призраком», в статье А. П. Винниченко о последовательности простых чисел, где случайности, казалось бы, места нет.*

3 **Шахматная страничка**

4 *Головоломка «Змейка Генеля».*

# Памяти Ландау

**(к 80-летию со дня рождения)**

*«По крайней мере один из представителей Советской России войдет в список десяти лучших физиков-теоретиков мира — речь идет о Л. Д. Ландау, сорока девяти лет, который... является авторитетом в области физики высоких энергий, низких температур, твердого тела и даже в области гидродинамики...» Так писал о Ландау в феврале 1957 года американский журнал «Fortune». Двадцать второго января нынешнего года Льву Давидовичу исполнилось бы восемьдесят лет. Идеи этого выдающегося ученого лежат в основе нашего понимания очень широкого круга физических явлений. Ландау создал всемирно известную школу теоретиков, которая и сегодня продолжает развиваться и сохраняет высочайший научный уровень. Ландау был одним из инициаторов создания Московского физико-технического института и многие годы читал там лекции. В феврале в МФТИ состоялась конференция, посвященная памяти Л. Д. Ландау. В ней приняли участие ученики и близкие друзья Ландау — Игорь Ехиельевич Дзялошинский, Моисей Исаакович Каганов, Лев Петрович Питаевский и Исаак Маркович Халатников. О Ландау рассказывали те, кому довелось в течение многих лет общаться и работать с ним. Мы предлагаем читателям записи, сделанные на этой встрече.*

*И. М. Халатников.*— Родился Лев Давидович Ландау в 1908 году в Баку. Интерес и способности к точным наукам проявил очень рано. Сейчас об этом все знают, а сам Дау говорил так: «Интегрировать я научился в тринадцать лет, а времени, когда бы не умел дифференцировать, не помню». Как раз в тринадцать лет он окончил школу и поступил в экономический техникум. Проучился там год, и в 1922 году стал студентом Бакинского университета, причем двух факультетов сразу — физико-математического и химического. Вскоре ректор рекомендовал замечательного студента в Ленинградский университет. В 1927 году, девятнадцати лет, Дау закончил ЛГУ. Работать он начал в Ленинградском физико-техническом институте, который возглавлял тогда Абрам Федорович Иоффе — «папа Иоффе», отец советской физики. В 1929 году в числе лучших аспирантов института Ландау был командирован за границу и посетил крупнейшие европейские центры теоретической физики. Побывал он и в Кембридже, где работал тогда Петр Леонидович Капица. Спустя девять лет, в тяжелый для Ландау год, Капица придет к нему на помощь, рискуя, быть может, даже жизнью.

Мы не видели Дау за границей, но слышали рассказы тех, кто был тогда рядом с ним. Говорили, что он ходил в красном пиджаке...

*Л. П. Питаевский.*— Он был, как говорил сам, крайне левых убеждений...

*И. М.*— Да, ему нравилось поддразнивать буржуазное мещанство, и в этом он чем-то походил на Маяковского. Говорил, что вот эту семью следует развести, а ту, напротив, образовать. Но его там все любили.

В это время было решено создавать в стране новые физические центры. Так возникли физико-технические институты в Харькове, Томске и Днепропетровске. В тридцать втором году Ландау уехал в Харьков. Мощь интеллекта, обаяние этой личности произвели огромное впечатление на студентов. Он был замечательным лектором — и, естественно, все захотели стать теоретиками и работать с Ландау. Поэтому он решил построить вокруг себя небольшой «забор» и придумал теоретический минимум. Только те, кому удавалось сдать все экзамены этого минимума, получали право работать с Дау. Он относился к воспитанию молодежи необыкновенно серьезно и считал, что если кто-то затратил такой труд и смог сдать все экзамены минимума, то его, Ландау, долг (долг!) — заботиться о таком человеке. Но его забота не имела ничего общего с мелочной опекой или всесторонним покровительством. Ландау помогал ученику вырасти в мастера, «расправить крылья».

Дау был учителем от природы. Учить для него было удовольствием. Поэтому он начинает думать о написании курса теоретической физики, по которому могли бы заниматься будущие теоретики. Знаменитый «Курс теоретической физики» Ландау и Лифшица зародился, таким образом, еще в Харькове.

Нужно сказать, что Ландау обладал очень колючим характером и острым языком. Поэтому он не только находил друзей, но и наживал врагов самым основательным образом. Времена были скверные. Анонимный донос мог лишить честного человека имени, свободы, нередко — жизни. Такое едва не произошло и с Ландау. В 1937 году он заведовал кафедрой теоретической физики в Харьковском университете и возглавлял теоретический отдел Украинского физико-технического института (УФТИ). Вдруг — без всяких объяснений — его уволили из университета. Тучи над головой Дау сгущались. И тогда вся его кафедра подала заявления об уходе. Это был шаг чрезвычайно отважный и опасный. К нему отнеслись серьезно. Нарком просвещения Украины В. П. Затонский пригласил всех в Киев и пообещал, что Ландау будет возвращен. Так проявились дружеские отношения и любовь к Дау его сотрудников.

...В 1935 году Петр Леонидович Капица организовал в Москве Институт физических проблем (ИФП) и искал физика, который возглавил бы теоретический отдел института. Он предложил эту должность знаменитому Максу Борну, бежавшему из нацистской Германии, но к тому времени Борн уже работал в Эдинбурге. И тогда Капица пригласил Ландау. Это был счастливый момент в биографии Льва Давидовича. Неизвестно, чем бы все кончилось, останься он в Харькове. Достаточно сказать, что после отъезда Дау в Москву его любимый ученик Исаак Яковлевич Померанчук был исключен из комсомола «за связь с Ландау».

* * *

*И. М.*— Необходимо сказать несколько слов об отношении Ландау к науке. Он действительно любил физику и готов был обсуждать любую физическую проблему или задачу с каждым, кто приходил к нему за советом. Нужно было лишь заинтересовать его. Дау был необыкновенно щедр и, если увлекался, мог начать «играть с листа» — брал номер «Physical Review», клал сверху чистый лист бумаги (он обычно занимался, лежа на диване) и начинал импровизировать — решать задачу.

Ландау считал себя чемпионом мира по технике решения физических задач. Он говорил, что если четко сформулировать задачу и предложить ее всем лучшим физикам мира, то он решит ее быстрее всех. Дело было вовсе не в том, что Ландау блестяще умел вычислять. В решении он всегда находил тот подход, который подсказывала ему физика происходящего. Часто, читая статьи, он заглядывал лишь в результат, после чего воспроизводил его сам и, как правило, короче, чем автор. Именно такому подходу к теоретической физике — позволяющему очень эффективно решать самые разнообразные задачи — обязан своей популярностью во всем мире курс Ландау — Лифшица.

*И. Е. Дзялошинский.*— Он любил все классифицировать: физиков вообще, физиков-теоретиков, женщин, дураков и подхалимов... И всегда — с изрядной долей юмора, шутки, хотя подчас весьма язвительной и небезобидной.

*И. М.*— Ландау любил шутку. И мы тоже очень любили всевозможные розыгрыши. Но Дау всегда следил за тем, чтобы соблюдалось неписаное правило: нельзя было, чтобы в розыгрыше «участвовали» пресса и органы Советской власти.

*Л. П.*— И еще — розыгрыш не должен был наносить разыгрываемому материальный ущерб.

*И. М.*— Придумывайте шутки, разыгрывайте друг друга! Это украшает жизнь!

Теперь еще скажу вам, как Ландау относился к математике. Техникой вычислений он владел виртуозно и признавал только «реальную» математи-

ку — ту, что нужна физикам. Постоянным объектом его шуток были теоремы существования.

*Л. П.* — Да. И вместе с тем сам он интересовался математикой не только конструктивной. Я однажды заговорил с ним о том, как увлекательна проблема простых чисел. Он сказал: «Да, это интересно»,— и тут же, без подготовки, показал, как растет количество простых чисел, меньших данного числа $n$, при больших значениях $n$.

*И. Е.* — О том, как появились экзамены теоретического минимума, здесь уже говорили. Хотелось бы рассказать, как это развивалось и чем, к сожалению, кончилось. Поначалу не было известно, какие задачи дает Ландау, так что списывать было просто неоткуда. Кроме того, все мы относились к этим экзаменам очень серьезно, и сама мысль о том, что можно списать, просто не приходила в голову. Потом сдающих стало очень много, и Ландау не мог уже лично экзаменовать всех желающих. Тогда экзамены были розданы нам по одному на каждого. Круг задач становился известен, и я уже начал ловить людей, которые списывали ... Однажды я даже поймал человека, который теперь уже член-корреспондент. Он настолько обиделся, что перестал сдавать теорминимум вообще. Так что происходило и такое. Для нас все это было немножко чудно́, потому что Ландау считал, что экзамены должны приниматься абсолютно бесхитростно: все вопросы на экзамене должны быть задачами из курса Ландау — Лифшица. Вы их должны были просто знать. Если же вы обладали какой-то жуткой способностью и вам удавалось запомнить все, что там есть, то, по-видимому, вы и так гений.

Сам по себе дух экзаменов стал меняться в том смысле, что экзаменаторы начинали исхитряться, задавать вопросы, которые со школы принято называть «задачами на соображение». И это плохо, но вина в этом отнюдь не наша. К сожалению, тенденция списывать сильно извратила высшее образование, и теперь списывать уже не считается постыдным. Я напомню, что восемь лет назад в американской военной академии в Аннаполисе весь выпускной курс

*Участники конференции (слева направо): кандидат физико-математических наук Ф. Ф. Каменец, декан факультета общей и прикладной физики МФТИ; член-корреспондент АН СССР Н. В. Карлов, ректор МФТИ; член-корреспондент АН СССР Л. П. Питаевский; доктор физико-математических наук М. И. Каганов; академик И. М. Халатников; член-корреспондент АН СССР И. Е. Дзялошинский; кандидат физико-математических наук С. А. Гордюнин, доцент кафедры теоретической физики МФТИ.*

списал и их всех раскассировали (никому звание присвоено не было).

*Л. П.*— Знаете, а здесь, на физтехе, во время письменных экзаменов по физике студентам разрешено пользоваться любой литературой.

*И. Е.*— По-моему, это неправильно. Нужно запирать человека в пустой комнате наедине с чистым листом бумаги и смотреть, на что он способен.

*Л. П.*— Не поможет. При нынешней всеобщей радиообразованности! Я сам берусь изготовить такой прибор...

* * *

*М. И. Каганов.*— Об универсализме Ландау пишут многие — физику он знал действительно всю. Году в пятьдесят шестом, впервые после очень долгого перерыва, он приехал в УФТИ. Надо сказать, что УФТИ — огромный институт с тысячами сотрудников. В его лабораториях занимались буквально всем — от элементарных частиц до порошковой металлургии... Я очень хорошо помню тот день. Директор института Кирилл Дмитриевич Синельников уступил Дау свой кабинет (сам он тогда был болен). И вот ведущие физики института проходят через этот кабинет и рассказывают свои работы. Доска, стол, все теоретики сидят вокруг, и Ландау слушает. Через пять минут возникало ощущение, что Дау лучше знает работу, чем экспериментатор, который эту работу выполнил. Это было совершенно фантастическое зрелище, его можно было показывать в цирке, как фокус. Ничего подобного я в своей жизни не видел.

*Л. П.*— И всегда казалось, что Ландау уже продумал все, о чем говорят физики. Когда вы подходили к нему и говорили: «Лев Давидович, я вот такой-то проблемой занимаюсь, хочу вам показать, что получилось»,— и начинали рассказывать, он говорил обычно: «Да, есть такая проблема...» И тут выяснялось, что он уже над этой проблемой думал и имеет массу соображений. «Да, есть такая проблема. А в ней имеется вот такая трудность. И как же вы ее преодолеваете?» Очень часто оказывалось, что вы в своих занятиях до этой трудности еще не добрались и поэтому даже не подозреваете о ее существовании, а значит, никак ее не разрешаете. Правильным в такой ситуации было уйти, пообещав подумать. Но обычно человек был на это не способен, поскольку он-то работу делал, а Ландау, казалось бы, не делал ничего. Человек начинал «лезть в бутылку», говоря, что никакой такой трудности вовсе нет и все в его работе хорошо. В таких случаях Ландау его, что называется, гнал метлой.

Людям посторонним в этом отношении было проще — не хочешь, не разговаривай. А нам, ученикам, нужно было, как мы тогда не очень вежливо выражались, «пропихнуть» работу через Ландау, т. е. получить разрешение на ее публикацию. Начиналось обычно с того, что человеку очень хотелось подробно рассказать, как он все это получил. Дау всегда говорил: «Как вы это сделали — факт вашей биографии». Его интересовала не работа сама по себе, а физика. Окончательная формула выписывалась на доске, и учинялось тщательное «расследование». В общем-то, это был доступный каждому стандартный набор приемов: помимо элементарной проверки размерности нужно было убедиться, что результат не противоречит основным законам природы (законам сохранения, всевозможным принципам симметрии...). Поскольку работа делалась не на пустом месте, должны были совпасть все предельные случаи с известными ранее работами. Наконец, проверялось своеобразное соответствие здравому смыслу (подчас весьма туманное понятие). И все возражения надо было уметь с ходу отвергнуть, иначе автор отправлялся домой «додумывать». Такое обсуждение могло продолжаться несколько месяцев.

Вообще, в смысле въедливости и желания разобраться в работе до конца Ландау не имел себе равных. Когда на семинаре шло обсуждение какой-нибудь работы из текущей литературы, часто происходило следующее. Докладчик с самого начала считал, что понимает в этой работе все. Потом постепенно уясняли ее остальные. Вплоть до самого конца не понимал только Ландау. Он был «тупее всех» и, когда все уже считали себя полностью удовлетворенными, продолжал задавать самые, казалось, не относящиеся к существу дела вопросы. И нередко в результате оказывалось, что статья ошибочная. Но в то же время Дау всегда очень уважал чужую работу. Докладчик, начинавший со слов «Вот, взял статью, оказалась совершенно чепуховой», получал нагоняй: «Не делайте из автора дурака, поскольку он этим вопросом занимался, а вы, докладчик, нет!».

Еще Ландау очень не любил лентяев. Вставал он не очень рано и утром, часов в одиннадцать, приходил в аспирантскую комнату и заводил разговор на общие темы. Но все это было довольно опасно. Если вы не переходили на темы научные, то он либо начинал скучать и уходил, либо злился, что разговор идет впустую, и тогда уже придирался с нехорошими намеками ... Намеки эти часто бывали небезобидны, но всегда очень остроумны.

*М. И.*— Я хотел бы сказать вот о чем. Совсем недавно в романе Бориса Ямпольского «Московская улица» я прочитал отрывок, где герой размышляет, «...как бы все могло сложиться... если бы в самом начале жизни на твоем пути встретился человек, который все знает, и в самом начале пути научил тебя закалке и читать лучшие книги, и дорожить временем, и не терять на чепуху, на безделье, на бедлам ни минуты, и ценить то, что действительно ценно, этот мифический, небывалый, добрый и великий человек, учитель, который на самом деле никогда и никому в жизни еще не попадался, и каждый доходил до всего сам, и делал все ошибки». Но мне кажется, что есть большая группа людей (и все мы, пришедшие к вам сегодня в гости,— в том числе), которым в жизни необычайно повезло. Потому что у нас был Учитель, который научил очень многому. Сейчас это трудно передать — мы все уже старые, взрослые. Мы уже не можем объяснить, какую роль играли разговоры с Ландау.

Ощущение того, что физика — главное дело жизни, что ничего важнее этого нет, он умел передавать своим близким.

«Не бывает сложных проблем (речь идет о человеческих взаимоотношениях), бывают трудные проблемы». Вдумайтесь, и вы поймете, насколько глубок смысл этих слов.

И главное: «Человек рожден, чтобы быть счастливым».

Он оставил после себя книги, по которым еще очень долго многие и многие будут постигать физику. Он оставил после себя Школу. И — идеи и результаты, которые навсегда останутся в науке.

* * *

В заключение — реплика Николая Васильевича Карлова, ректора МФТИ.

— Если можно, я хотел бы добавить несколько слов. Я учился в физтехе с сорок седьмого по пятьдесят первый год, и общий курс физики — с первого года — читался Ландау и Капицей. Первой я услышал лекцию Ландау и, признаюсь, сразу подумал, что, кажется, не туда попал. Уровень был таков, что одаренные молодые люди, ценившие себя высоко, участвовавшие в олимпиадах, прошедшие через два непростых тура вступительных экзаменов, были ошарашены. Однако постепенно мы осознали, что нам предоставилась счастливая возможность увидеть физику глазами этого замечательного ученого, с его глубиной понимания, широтой охвата, неожиданностью сравнений. Неоднократно, в разных лабораториях мира — от Стэнфордского университета до Нормальной Школы в Париже — я слышал от коллег, студентов, аспирантов слова о том, как нам повезло, что у нас есть такой курс — курс Ландау и Лифшица. И физтех должен гордиться тем, что среди его профессоров был Лев Давидович Ландау.

Публикацию подготовили
*Д. Кашинцев и Р. Рамазашвили*

# О РАССЕЯНИИ,
## или Как измерить жирность молока

*А. А. КРЕМЕР*

Во все времена молоко было одним из основных продуктов питания человека. Все компоненты, содержащиеся в молоке,— жиры, белки, сахара, витамины — прекрасно усваиваются организмом. Однако признано, что основная питательная ценность молока определяется жиром. Поэтому пакет 6 %-го молока стоит дороже, чем пакет, на котором написано «жирность 3,5 %». Но как появились эти цифры на пакете? Каким образом определяют процентное содержание жира в молоке?

Для этого разработаны химические методы. Они связаны с применением концентрированных кислот и других агрессивных реактивов, и длится один анализ — ни много ни мало — полчаса. А общая потребность в таких анализах составляет более полумиллиарда (!) в год. При таких масштабах уже не обойтись без физических методов с их простотой и высокой производительностью.

Слово «молочный» всегда было синонимом слова «мутный»: молоко тумана, молочное стекло и т. д. Мутная среда — это среда, непрозрачная для света не за счет поглощения (как, например, лист металла), а за счет рассеяния. Мутность молока обусловлена в основном наличием жира, который содержится в виде огромного количества шариков, диаметр которых колеблется от 0,5 до 10 мкм. Чем жирнее молоко, тем больше в нем жировых шариков, тем менее оно прозрачно. Значит, измеряя прозрачность молока, можно определить его жирность. Это пока что только идея. Не надо забывать, что мы собираемся конкурировать с химическими методами, позволяющими измерять жирность молока с точностью до 0,1 %. Именно такая точность и нужна на практике. Ухудшение точности грозит миллионными убытками: либо вы купите молоко, не имеющее той пищевой ценности, за которую вы заплатили, либо внакладе окажется колхоз, который недополучит часть своей прибыли, зоотехник не будет знать истинной ценности своих коров, и т. д. Так что для практического воплощения идеи нам придется всерьез заняться теорией рассеяния света, какой бы сухой она нам ни показалась.

Рассмотрим параллельный пучок света с длиной волны $\lambda$, падающий на собирающую линзу (рис. 1). Линза соберет весь пучок в фокусе. Правда, из-за дифракции на экране, установленном в фокальной плоскости, будет наблюдаться яркое пятнышко конечного размера и менее яркие кольца вокруг него. Однако при очень большом диаметре пучка (и, соответственно, линзы) всей этой структурой можно пренебречь и считать, что в идеале линза собирает всю световую энергию $\Phi$, которую несет пучок, в бесконечно малом фокальном пятне. Внесем теперь в пучок прозрачную сферическую частицу с радиусом $r$.

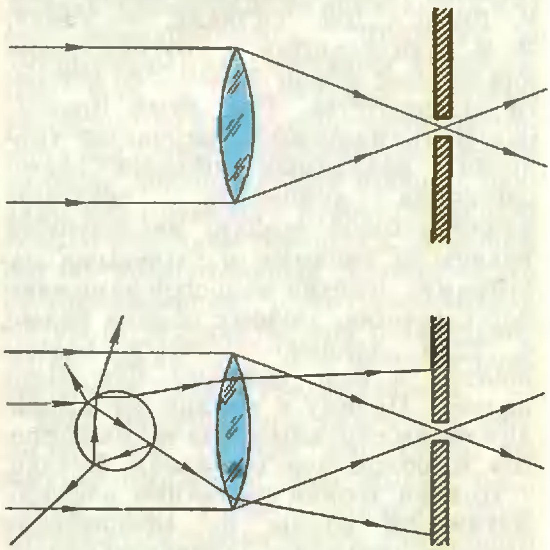


*Рис. 1.*

Часть пучка провзаимодействует с частицей: отразится от поверхности, преломится внутри и т. д. Лучи из этой части пучка уже не сохранят первоначального направления и либо совсем уйдут в сторону, либо, пройдя линзу, попадут в фокальную плоскость, но не в фокус. В результате полная световая энергия, собирающаяся в фокусе, уменьшится на $\Delta\Phi$. На первый взгляд представляется очевидным, что световая энергия, унесенная рассеянной частью пучка, равна

$$\Delta\Phi'=E_0S, \qquad (1)$$

где $E_0$ — освещенность единичной площадки в падающем пучке, а $S=\pi r^2$ — площадь контура частицы. Однако мы увидим, что в действительности все обстоит не так просто, и полная световая энергия, рассеиваемая частицей, отличается от $\Delta\Phi'$.

Для характеристики рассеивающих свойств частицы мы воспользуемся безразмерной величиной

$$Q=\frac{\Delta\Phi}{\Delta\Phi'}, \qquad (2)$$

где $\Delta\Phi$ — энергия, «теряющаяся» в результате рассеяния. Отыскание зависимостей $Q$ от $r$ и от $\lambda$ и изучение распределения рассеянного излучения в пространстве — это основная задача теории рассеяния, с решением которой связаны такие блестящие имена, как Р. Декарт, Дж. Тиндаль, У. Рэлей, Л. И. Мандельштам и другие. А возник интерес к этой задаче... из детского любопытства. Над нами простирается грандиозный природный «полигон» различных явлений светорассеяния — атмосфера, представляющая собой воздух, насыщенный водяными каплями и пылевыми частицами. Десятки вопросов занимают нас с детства. Почему облака белые, а тучи черные? Почему солнце желтое, а небо голубое? Что такое радуга? Почему в тумане все выглядит таким странным? Из таких вопросов и рождается серьезная физика.

Полная теория рассеяния электромагнитной волны на сферической частице оказалась «крепким орешком», который поддался усилиям ученых лишь в начале нашего века. Но некоторые ее результаты можно получить из простых физических соображений. Прежде всего, физическая интуиция подсказывает нам, что вся картина рассеяния определяется не длиной волны и радиусом частицы в отдельности, а соотношением между ними. Другими словами, безразмерная величина $Q$ должна зависеть от безразмерной комбинации $r$ и $\lambda$, а именно — от параметра $\varrho=r/\lambda$.

Хотя явного вида $Q(\varrho)$ мы пока не знаем, попытаемся все же проследить ее поведение в предельных случаях. Если размер частиц бесконечно мал по сравнению с длиной волны ($\varrho\to0$), то нет смысла говорить о световых лучах, которые попадают на частицу и рассеиваются ею. Волна просто «не замечает» частицу, $\Delta\Phi\to0$ и $Q\to0$. Задачу о рассеянии бесконечно малой частицей рассматривал знаменитый английский физик лорд Рэлей, который показал в 1892 году, что, во-первых, свет рассеивается во все стороны равномерно, а во-вторых —

$$Q\sim\varrho^4\sim\frac{1}{\lambda^4}. \qquad (3)$$

С помощью этой зависимости впервые был объяснен цвет неба. Ведь он определяется цветом солнечных лучей, рассеянных атмосферой. Из (3) следует, что коротковолновая часть спектра (синий цвет с $\lambda_1\approx0,4$ мкм) рассеивается гораздо сильнее, чем длинноволновая часть (красный цвет с $\lambda_2\approx0,7$ мкм):

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^4\approx9.$$

Поэтому мы и видим над собой бездонную синеву небес.

Теперь обратимся к случаю, когда частица бесконечно большая по сравнению с длиной волны ($\varrho\to\infty$). Здесь мы находимся во владениях геометрической оптики, и представляется очевидным, что рассеянные лучи — это те лучи, которые попадают в контур частицы. Так что $\Delta\Phi=\Delta\Phi'=E_0S$, и, казалось бы, $Q=1$. Однако мы забыли о том, что волновые свойства света проявляются и здесь. На контуре

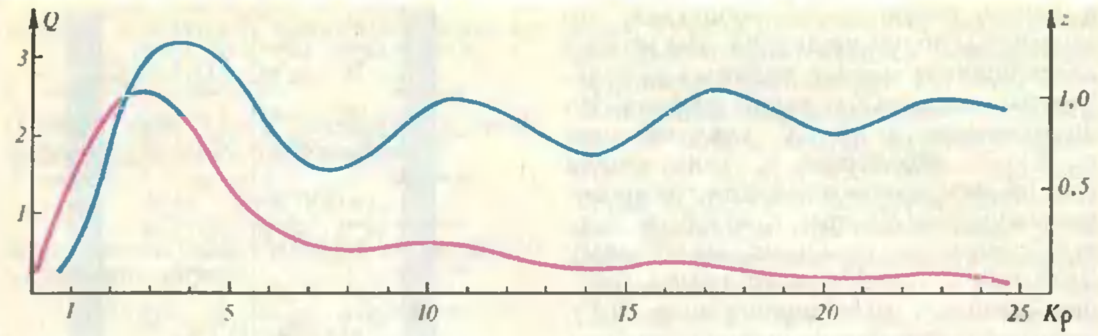



*Рис. 2.*

частицы всегда происходит дифракция. Лучи света, претерпевшего дифракцию, распространяются вперед, по ходу падающих лучей, но все же слегка отклоняются от своего первоначального направления. А раз так, то в нашем строгом эксперименте с линзой эти лучи уже не соберутся в фокальном пятне. И при этом оказывается, что энергия, которую уносят эти лучи, в точности равна $\Delta\Phi'$! Так возникает удвоение количества рассеянной световой энергии:

$$\Delta\Phi = 2\Delta\Phi', \text{ и } Q = 2.$$

Обратим внимание на то, что бесконечно большая (по сравнению с $\lambda$) частица, в отличие от бесконечно малой, рассеивает свет в окружающее пространство уже не равномерно: ведь в одном только направленном вперед дифракционном «языке» оказывается заключенной половина $\Delta\Phi$.

Наблюдать асимметрию пространственного распределения рассеянного света можно вечером во время густого тумана. Вот идет автомобиль. Свет его фар как бы заставляет туман светиться. Но это свечение не отовсюду видно достаточно хорошо. Водитель видит довольно тусклый конус света. Зато пешеход, смотрящий спереди (не в упор, конечно, на фару, а под небольшим углом к направлению света), видит яркий светящийся столб тумана. Дело в том, что относительно крупные капли тумана рассеивают свет преимущественно в направлении распространения падающего светового пучка. Этот эффект известен и астрономам: недавно открытые кольца Юпитера, состоящие из частиц пыли, хорошо видны при освещении их Солнцем сзади, из-за Юпитера. В этом случае рассеянный свет доходит до земного наблюдателя.

Итак, мы получили:

$$\lim_{\varrho\to 0} Q(\varrho) = 0, \ \lim_{\varrho\to\infty} Q(\varrho) = 2.$$

Общий вид кривой $Q$, рассчитанной по точным формулам, изображен на рисунке 2 (синяя кривая). Здесь по оси абсцисс отложена величина $X = K\varrho$, где $K$ зависит от относительного коэффициента преломления частицы и окружающей среды. Так, для частиц воды в воздухе (туман) $K = 4{,}1$, а для частиц жира в воде (молоко) $K = 1{,}5$. Первое, что бросается в глаза при взгляде на кривую $Q(X)$, — ее немонотонность. Наряду с «нормальными» участками возрастания есть и аномальные участки убывания $Q(X)$. Вообще наличие пиков в различных зависимостях, описывающих колебательный процесс, связано, как правило, с хорошо всем знакомым явлением резонанса. В нашем случае колебательный процесс — это распространение электромагнитной волны, а резонирует она с частицей: когда $\lambda \approx n r$, где $n$ — целое число, рассеяние резко увеличивается.

Если бы атмосфера рассеивала аномально, то Солнце выглядело бы весьма необычно: оно имело бы... синий цвет. Понять причину этого нетрудно: красная часть солнечного спектра, которая рассеивалась бы сильнее, выходила из поля зрения, а синяя, слабо рассеивающаяся, доходила бы до наблюдателя. Мы можем даже оценить размер водяных капель, которые давали бы такой эффект. Из определения $\varrho$ и $X$ следует, что $r=X\lambda/K$. Подберем $r$ так, чтобы $\lambda_1\approx0{,}4$ мкм соответствовала главному минимуму $Q(X)$ при $X_1=7{,}6$, а $\lambda_2\approx$ $\approx0{,}7$ мкм — главному максимуму $Q(X)$ при $X_2=4{,}1$ (имеет смысл говорить лишь об этом первом пике $Q(X)$, поскольку достаточно небольшого разброса по размерам в коллективе рассеивающих частиц, чтобы остальные пики в их суммарной $Q$-функции сгладились). Обоим условиям удовлетворяет $r\approx0{,}7$ мкм. Таким образом, водяные капли, радиус которых лежит вблизи 0,7 мкм, рассеивают аномально. Меньшие капли рассеивают нормально, а для бо́льших величина $Q$ уже практически не зависит от $\varrho$.

В атмосфере наиболее мелкие водяные капли содержатся в облаках: $r=3\div5$ мкм при среднем расстоянии между каплями $1\div1{,}5$ мм. В тумане капли имеют размер $5\div50$ мкм, а в дожде (в зависимости от силы) $r=0{,}1\div2{,}5$ мм. Капель с радиусом $r\approx0{,}7$ мкм, как мы видим, нет, и становится понятно, почему никто из нас не видел синего Солнца. Однако...

*26 сентября 1951 года жители западной Европы были потрясены фантастическим зрелищем: Солнце имело густой ультрамариновый цвет, а вечером такого же цвета была и Луна.* Еще лет 200 назад это явление было бы воспринято как страшное предзнаменование. Мы же с вами, вооруженные теорией рассеяния, сразу понимаем, что наблюдалось аномальное рассеяние солнечного света. Но на чем? Виновника происшествия вскоре нашли. Ветер принес из Канады огромное облако капель древесной смолы, поднявшихся в воздух из-за сильных лесных пожаров в провинции Альберта. Размеры капель и параметр $K$ оказались таковы, что капли *рассеивали аномально.*

Можно было бы привести еще множество примеров, иллюстрирующих различные проявления светорассеяния, но пора вернуться к объекту, ради

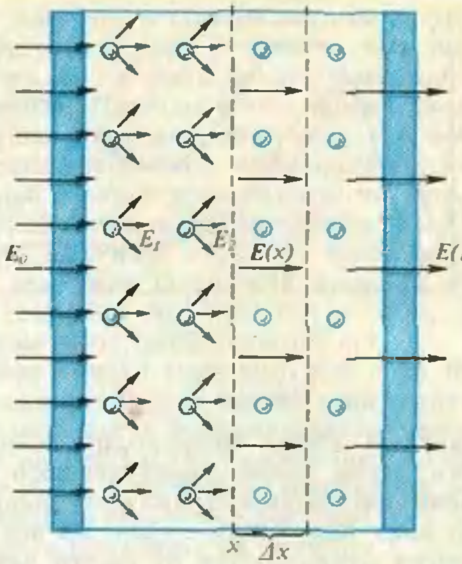



*Рис. 3.*

которого был затеян этот теоретический экскурс,— к молоку. Мы уже готовы к тому, чтобы описать процесс прохождения параллельного светового пучка через тонкий слой молока. Пусть молоко налито в кювету и свет падает на стенку кюветы перпендикулярно. Удобно представить себе, что жировые шарики расположены в молоке слоями, параллельными стенкам кюветы (рис. 3). Каждая частица в первом слое рассеет световую энергию $\Delta\Phi_1$. Согласно (1) и (2),

$$\Delta\Phi_1=QSE_0=Q\pi r^2E_0$$

($r$ — средний радиус частиц). Рассеянные лучи уходят в разные стороны, и освещенность, создаваемая первоначальным пучком, после прохождения светом первого слоя частиц падает от $E_0$ до $E_1<E_0$. Поэтому каждая частица во втором слое рассеет световую энергию

$$\Delta\Phi_2=QSE_1=Q\pi r^2E_1.$$

И так далее. Наша задача — найти освещенность, создаваемую параллельным пучком на выходе из кюветы. Для этого рассмотрим внутри кюветы слой молока толщиной $\Delta x$. *Пусть освещенность в месте расположения этого слоя* $E(x)$. Изменение освещенности в слое определяется энергией, рассеиваемой всеми частицами этого слоя, и если в единице объема имеется $N$ шариков жира, то

$$\Delta E = -Q\pi r^2 E(x) \cdot N \cdot \Delta x.$$

Отсюда при $\Delta x \to 0$ перейдем к дифференциальному уравнению:

$$E' = -Q\pi r^2 N E(x).$$

Как известно, дифференциальное уравнение вида

$$y'(x) = ay(x)$$

имеет своим решением экспоненциальную функцию

$$y(x) = ce^{ax}.$$

Применительно к нашему случаю получаем, что на выходе из кюветы длиной $l$ параллельный пучок света будет создавать освещенность

$$E(l) = E_0 e^{-Q\pi r^2 N l}.$$

Реальные приборы построены так, что измеряется не освещенность, а величина $D = -\ln(E(l)/E_0)$, называемая оптической плотностью:

$$D = -\ln \frac{E(l)}{E_0} = Q\pi r^2 N l.$$

Преобразуем эту формулу следующим образом:

$$D = \frac{Q \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 N l}{\frac{4}{3} r} = \frac{QVlK\frac{1}{\lambda}}{\frac{4}{3}K\frac{r}{\lambda}} = \frac{Q}{X}\frac{3}{4\lambda}KlV. \quad (4)$$

Здесь $V = \frac{4}{3}\pi r^3 N$ — суммарный объем жировых шариков в единице объема молока. А $V \cdot 100\,\%$ и есть процентное содержание жира в молоке.

Итак, $D$ пропорционально $V$. Значит, измеряя оптическую плотность, можно вычислить жирность молока. Но увы! Точность определения $V$ будет низкой. Как видно из (4), в коэффициент пропорциональности между $D$ и $V$ входит функция $z = Q/X$ (красная кривая на рисунке 2). В натуральном молоке, независимо от содержания жира, средний радиус жировых частиц может быть разным — от 0,5 до 1,5 мкм. При $K = 1{,}5$ величина $X$ (для видимого света) может меняться, соответственно, от примерно 1 до 3. Такому изменению $X$, как видно из рисунка 2, соответствует изменение $z$ приблизительно в два раза. Теперь представьте, что мы взяли две пробы молока одинаковой жирности (одинаковые $V$), но в силу каких-либо физиологических особенностей коров размер частиц в одной пробе 0,5 мкм, а в другой — 1,5 мкм. Тогда $D$ будут отличаться вдвое. Это же громадная ошибка. Чтобы избежать ее, перед измерением производят стандартизацию размеров жировых шариков в пробе молока. Прибор снабжается гомогенизатором — устройством, в котором молоко продавливается через систему клапанов, где жировые шарики дробятся и приводятся все к среднему размеру примерно 0,5 мкм. Тем самым достигается однозначная зависимость между $D$ и $V$. (Гомогенизацию молока, кстати, часто проводят и на молокозаводах. *Такое молоко более устойчиво к расслаиванию, к скисанию и лучше усваивается.*)

Проблемы на этом, однако, не кончаются. Дело в том, что в молоке имеется еще один нерастворимый компонент — белок. Частицы белка имеют средний радиус $\sim 0{,}05$ мкм, и рассеяние света на них может достигать 20 % от рассеяния на частицах жира. Для того чтобы устранить этот мешающий фактор, молоко разводят слабым раствором щелочи.

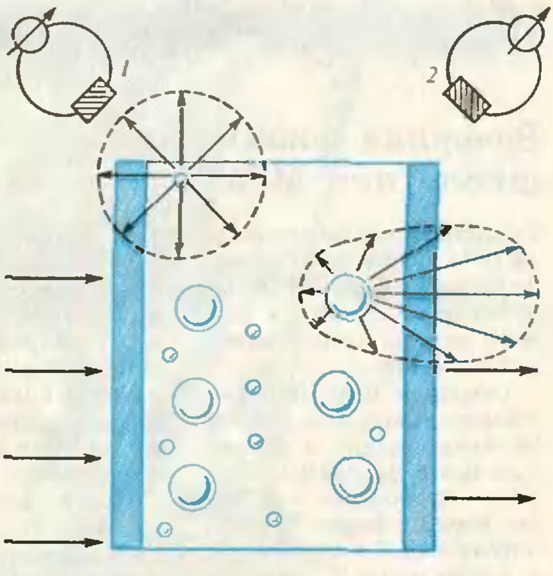



*Рис. 4.*

Щелочь, никак не действуя на жир, дробит частицы белка на более мелкие — до 0,005 мкм. Вспомним, что при $r \to 0$ значение $Q$ падает стремительно: как $r^4$. Так что при таком дроблении рассеяние на частицах белка уменьшается на несколько порядков. Мысль исследователей пошла еще дальше. Ввиду большой пищевой ценности белка измерение содержания белка в молоке — не менее важная задача, чем измерение содержания жира. Можно попытаться «обратить вред в пользу»: не устранять рассеяние на частицах белка, а использовать его для измерения содержания белка в молоке. Вспомним о том, что крупные частицы (это жировые шарики) рассеивают свет преимущественно вперед, а мелкие (это частицы белка) — равномерно во все стороны. Может быть, попытаться «сыграть» на этом эффекте? Например, сделаем так. Расположим вокруг кюветы приемники света так, как показано на рисунке 4. Приемник *1*, расположенный у передней стенки кюветы, улавливает свет, рассеянный назад, т. е. рассеянный преимущественно частицами белка. Приемник *2* улавливает свет, рассеянный вперед. Здесь в рассеянии участвуют как частицы белка, так и частицы жира.

В результате сигнал с фотоприемника *1* будет связан с концентрацией белка, а разность сигналов с приемников *2* и *1* — с концентрацией жира.

При этом, конечно, для точных измерений необходимо стандартизовать размеры частиц белка (также как и жира). Однако оказалось, что механическая гомогенизация на частицы белка никакого влияния не оказывает, а химическая стандартизация размеров частиц белка (дробление щелочью) уменьшает их настолько, что они практически перестают рассеивать свет. Так красивая идея одновременного измерения содержания жира и белка в молоке по светорассеянию осталась по сей день неосуществленной. Но наука не стоит на месте, а технические возможности все время расширяются. Быть может, кто-то из молодых читателей, став специалистом по светорассеянию, решит в будущем эту задачу?

*Информация*

## Вечерняя физическая школа при МГУ

Вечерняя физическая школа (ВФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 8, 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ВФШ — помочь учащимся глубже изучить физику в объеме школьной программы. Занятия проводятся в вечернее время в форме лекций, читаемых раз в две недели, и еженедельных семинаров. Кроме того, учащиеся смогут посетить научные лаборатории факультета и на лекциях ведущих ученых ознакомиться с основными направлениями современной физики. Для желающих организованы факультативные занятия по математике и основам информатики.

Прием в ВФШ производится по результатам собеседования, которое будет проводиться начиная с 26 сентября. Для поступления в школу необходимо лично заполнить заявление в комитете ВЛКСМ физфака МГУ (с приложением двух фотокарточек размером 3×4 см). Заявления можно подавать с 6 по 22 сентября ежедневно, кроме воскресенья, с 16 до 18 часов. Работающая молодежь зачисляется вне конкурса.

Успешно закончившие обучение получают справку об окончании ВФШ.

Адрес: *119899 Москва, ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ВФШ.*

*Телефон: 939-26-56.*

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

*Кандидат физико-математических наук*
*Ю. П. ЧУКОВА*

1837 год. Париж. По бульвару Сен-Мишель идет профессор Сорбонны, член всех научных обществ и академий Европы и Америки Симеон Дени Пуассон. Он думает о своей последней работе. Нужно ли докладывать ее юристам? или ограничиться математиками? Работа называлась «Исследование о вероятности приговоров в уголовных и гражданских процессах». Материал был юридический, а закон математический... Закон описывал роль счастливого случая в судебных процессах Франции XIX века.

Пуассон знал великую обобщающую силу математических законов. Но и он не подозревал, что полученный им закон, который назовут распределением Пуассона, через полтора века станет орудием исследования у ученых самых разных специальностей.

Мы познакомимся с распределением Пуассона на простом и всем понятном примере.

В столовой сварили компот из $N$ вишен и разлили его по $n$ стаканам (тщательно размешивая для чистоты эксперимента). Вопрос: какова вероятность того, что в данном стакане вишен нет?

Будем считать, что все варианты распределения вишен по стаканам равноправны. Поскольку каждая из $N$ вишен может попасть в любой из $n$ стаканов, общее число вариантов равно $n^N$ ($n$ вариантов для 1-й вишни, $n$ — для 2-й и т. д.). Число вариантов, когда в данный стакан вишни не попали, равно $(n-1)^N$ (каждая вишня «выбирает» любой из остальных $n-1$ стаканов). Поэтому искомая вероятность $R_0$ того, что в стакане не будет вишен, равна $(n-1)^N/n^N$, т. е.

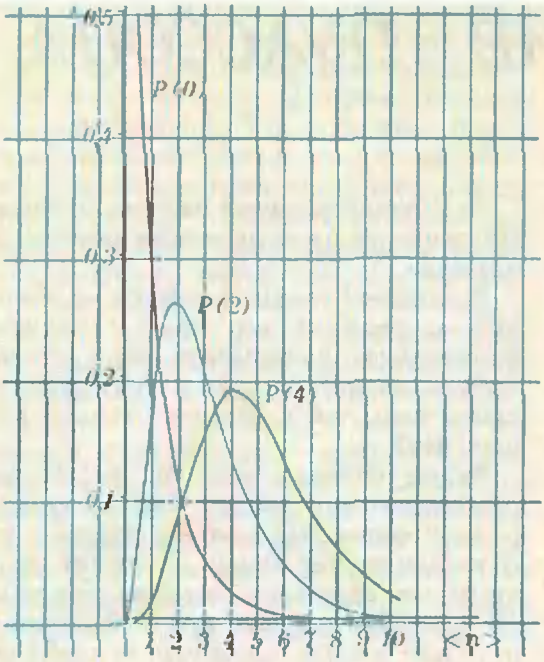



Рис. 1.

$$P_0=\left(1-\frac{1}{n}\right)^N.$$

Пусть $\lambda=\frac{N}{n}$ — среднее число вишен в стакане, тогда

$$P_0=\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^N.$$

При больших $N$ (и фиксированном $\lambda$) эта величина примерно равна $e^{-\lambda}$ *). Итак,

$$P_0\approx e^{-\lambda}. \qquad (1)$$

Аналогично можно подсчитать и вероятность $P_1$ того, что в стакане окажется ровно одна вишня: эту вишню можно выбрать $N$ способами, а остальные $N-1$ вишен надо распределить по $n-1$ стаканам, следовательно,

$$P_1=\frac{N(n-1)^{N-1}}{n^N}=\frac{N}{n-1}\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^N\approx$$
$$\approx\lambda e^{-\lambda}.$$

*) В самом деле,

$$\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^N=e^{\lim\limits_{N\to\infty} N\ln(1-\lambda/N)},$$

а предел в показателе равен

$$\lim_{N\to\infty} N\ln\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)=\lim_{N\to\infty}\lambda\frac{\ln(1-\lambda/N)-\ln 1}{\lambda/N}=$$
$$=-\lambda\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h}=-\lambda,$$

т. к. последний предел равен производной функции $\ln x$ при $x=1$, т. е. 1.

Можно вывести и общую формулу для предельной (при больших $N$) вероятности $P_k$ обнаружить в стакане $k$ вишен ($k=0, 1, 2, \ldots$):

$$P_k\approx\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \qquad (2)$$

где $k!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k$ при $k\geqslant 1$ и, по определению, $0!=1$.

Вообще, пусть в эксперименте со случайными исходами измеряется какая-то величина, принимающая целые неотрицательные значения. Говорят, что она имеет *распределение Пуассона*, если значение $k$ она принимает с вероятностью $p(k;\lambda)=\lambda^k e^{-\lambda}/k!$ (см. (2)). На рисунке 1 показаны графики вероятностей $p(0;\lambda)$, $p(2;\lambda)$ и $p(4;\lambda)$ как функций $\lambda$. При фиксированном $\lambda$ значения $p(k;\lambda)$ изображаются как на рисунке 2 (для $\lambda=10$).

Распределение Пуассона возникает в самых разнообразных ситуациях. Мы приведем только два характерных примера его использования. Первый — из физики. Эксперименты показывают, что при распаде радиактивного вещества число $\alpha$-частиц, излученных за определенный промежуток времени $t$, с очень высокой точностью подчиняется распределению Пуассона со средним значением $\lambda t$, где $\lambda$ — параметр, характеризующий интенсивность излучения. Этот пример позволяет продемонстрировать, как опасно передоверяться здравому смыслу. Действительно, на первый взгляд кажется, что вероятности зарегистриро-

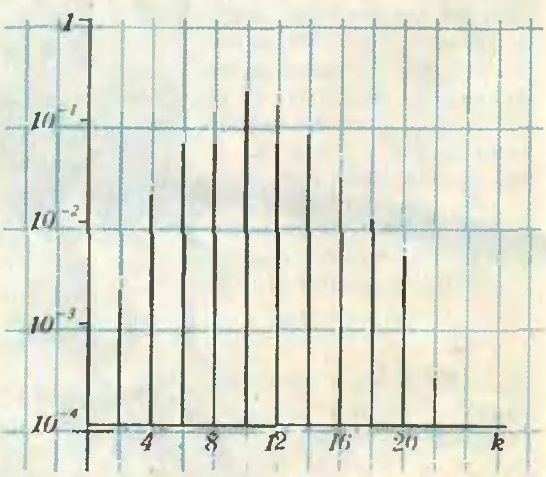



Рис. 2.

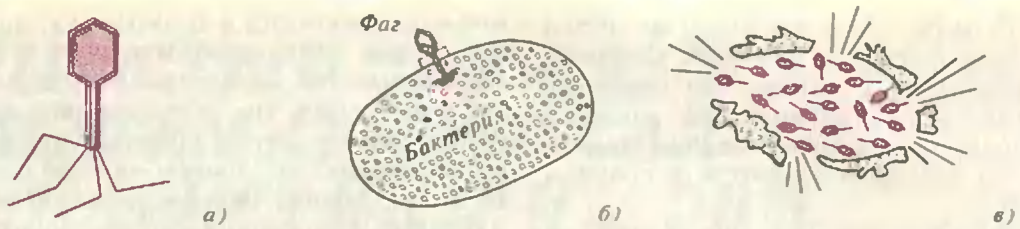



*Рис. 3.*

вать 10 $\alpha$-частиц за 5 секунд или 2 $\alpha$-частицы за 1 секунду должны совпадать. Однако это не так. Допустим, например, что счетчик регистрирует частицы со средней частотой $\lambda = 1$ частица в секунду. Тогда число частиц, регистрируемых за 1 секунду, подчиняется распределению Пуассона с параметром 1, а за 5 секунд — с параметром 5. Поэтому первая вероятность равна

$$p(10;\,5)=\frac{5^{10}e^{-5}}{10!}\approx 0{,}018,$$

а вторая —

$$p\,(2;\,1)=\frac{1^{2}\cdot e^{-1}}{2!}\approx 0{,}18.$$

Мы видим, что эти вероятности не *только не равны, но различаются в* 10 раз!

Второй пример — из жизни вирусов, точнее бактериальных вирусов, называемых бактериофагами, которые были открыты в 1915 году. Бактериофаги — это паразиты бактерий. Они размножаются только в бактериальных клетках. Один из наиболее изученных фагов — фаг Т2 — размножается в кишечной палочке *Escherichia coli*. Процесс заражения происходит следующим образом. Фаг при броуновском движении встречается с бактерией и прикрепляется к ней концом своего «хвоста» (рис. 3). После прикрепления оболочка вируса сокращается, сердцевина проникает через поверхность клетки и ДНК фага попадает в бактерию. Спустя примерно 20 минут при температуре 37° бактерия разрушается, и вместо одного фага появляется почти сотня фагов. Редкостный урожай!

Гибель бактерий под действием фагов можно наблюдать почти визуально. Дело в том, что питательный раствор с бактериями *E. coli* кажется мутным — бактерии имеют размер около 1 мкм, а этого достаточно для рассеивания видимого света. Но если в пробирку с *E. coli* добавить один-единственный фаг Т2 и подождать часов 6—8, то раствор в пробирке станет из мутного прозрачным. Объяснение единственное. Фаг Т2, быстро размножаясь, разрушил все бактерии *E. coli*, и в пробирке не осталось объектов, способных рассеивать свет, т. к. размер самих фагов (около 200 нм) слишком мал для этого. Все это интересно, но вы вправе спросить, причем тут распределение Пуассона.

Оказывается, оно неожиданным образом помогает решить важную для молекулярной биологии задачу — *определить концентрацию вирусных* частиц в растворе. В нашем первом примере с компотом аналогичная задача (найти среднее число вишен в стакане) решается просто: можно пересчитать вишни в нескольких стаканах и поделить их число на число стаканов. Но вирусы не пересчитаешь как вишни! И вот тут-то мы вспомним формулу (1), которая связывает вероятность отсутствия частиц (будь то вишни или вирусы) в определенном объеме содержащего их состава (в стакане или в пробирке) с их средним числом. Возьмем, скажем, 100 пробирок с бактериями в питательной среде и добавим в каждую 1 мл раствора с вирусами. По истечении некоторого времени инкубации подсчитаем число пробирок, оставшихся мутными. Допустим, их оказалось 38, а другие 62 стали прозрачными. Это означает, что в 38 пробирок не попало ни одного фага, ибо фаги размножаются гораздо быстрее бактерий (за истекшее время они разрушили все бактерии в 62 пробирках). Доля мутных пробирок дает приблизительное значение вероятности $P_0$ того, что в пробирку не попал ни один фаг, т. е. $P_0 \approx 0{,}38$. Смотрим на рисунок 1 и видим, что такая вероятность реализуется при среднем значении $\lambda = 1$. Ответ задачи таков: в 1 мл взвеси содержится в среднем 1 фаг.

Распределение Пуассона — одно из важнейших в теории вероятностей, оно встречается во множестве задач. Если не вдаваться в детали, можно сказать, что оно появляется там, где рассматриваются случайно разбросанные точки, и мы интересуемся числом точек, попавших в заданную область. Такими точками могут служить изюминки в хорошо перемешанном тесте (или вишни в компоте), опечатки в книге, моменты поступления телефонных вызовов, капли дождя на сухом асфальте, мутации в хромосомах, подвергаемых облучению, и т. д., и т. д. Но, разумеется, чтобы закон Пуассона вступил в силу, требуется соблюдение некоторых условий, впрочем вполне естественных и достаточно общих. Если, например, рассматривается испускание $\alpha$-частиц, нужно позаботиться, чтобы интенсивность излучения за время наблюдений существенно не менялась; если регистрируются телефонные звонки, нужно, чтобы звонящие не договаривались между собой или с хозяином телефона о времени разговора, и т. п. Более подробно об этих условиях и следствиях, из них вытекающих, рассказывается в статье «Как возникает распределение Пуассона».

# *Информация*

## Заказы принимаются...

***Мы продолжаем список книг, которые будут выпущены издательством «Наука» в 1989 году и которые могут заинтересовать наших читателей (нумерация соответствует тематическому плану; цена указана ориентировочная; начало см. в № 7).***

**Астрономия**

**120. Бронштэн В. А. Как движется Луна?** 70 к.

Даже для астрономов XVIII—XX вв., вооруженных методами небесной механики, теория движения Луны оказалась «крепким орешком». Трудности, встретившие ученых на этом пути, и методы их преодоления подробно описаны в книге.

**121. Голуб И. Я., Хренов Л. С. Время и календарь.** 25 к.

Описываются существовавшие ранее и действующие теперь календари и приводятся сведения о предполагаемой календарной реформе.

**122. Гурштейн А. А. Извечные тайны неба.** 1 р. 20 к.

В увлекательной, доходчивой форме с широким привлечением исторического материала рассказывается о достижениях современной астрономии и космонавтики, о методах астрономических исследований, о тесных связях астрономии с механикой, математикой, физикой, науками о Земле.

**123. Климишин И. А. Релятивистская астрономия:** Пер. с укр. 1 р. 20 к.

В популярной форме излагаются идеи специальной и общей теории относительности.

**124. Сикорук Л. Л. Телескопы для любителей астрономии.** 70 к.

Популярно рассказывается о конструировании и постройке любительских телескопов.

**125. Шаров А. С., Новиков И. Д. Хаббл — выдающийся астроном двадцатого столетия.** 50 к.

Описание жизни, научной и общественной деятельности выдающегося астронома XX века — Э. Хаббла, сто лет со дня рождения которого исполняется в 1989 г. Самым выдающимся открытием Хаббла, обессмертившим его имя, является открытие расширения Вселенной. Многие материалы о Хаббле в книге публикуются впервые.

**126. Астрономический календарь на 1990 г.** 1 р. 20 к.

Ежегодник содержит сведения об астрономических явлениях в 1990 г., статьи, посвященные достижениям космонавтики и различных отделов астрономии, инструкции для наблюдений, материалы, посвященные юбилейным астрономическим датам.

*(Окончание см. на с. 22)*

# ПРОСТЫЕ ЧИСЛА, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА И... ЭВМ

*Кандидат физико-математических наук*
*А. П. ВИННИЧЕНКО*

**От редакции.** *В последние годы с ростом мощности и доступности ЭВМ все бо́льшую роль в работе математиков стал играть эксперимент, бывший до недавнено времени почти безраздельной вотчиной физики, химии и других естественных наук. Математики получили возможность выдвигать новые гипотезы на основе результатов быстрой компьютерной обработки огромных массивов. Порой при этом проявляются закономерности, которые вряд ли можно было обнаружить в «добрые старые времена».*

*В предлагаемой заметке вы не найдете ни одной теоремы и ни одного доказательства. Здесь рассказано об эксперименте на простых числах, позволившем сформулировать интересное предположение об их распределении. Быть может, кто-то из наших читателей сумеет доказать или опровергнуть его.*

Еще древние греки выделили среди множества целых положительных чисел «неделимые атомы», т. е. числа, которые не раскладываются на более мелкие множители, и назвали их «простыми». Простое число делится только на единицу да на само себя, а все остальные числа получаются из этих элементарных кирпичиков мира

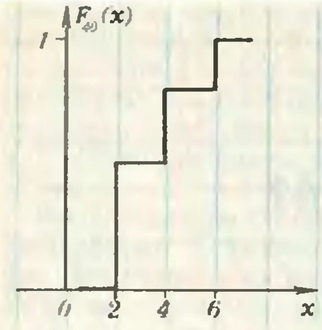



Рис. 1.

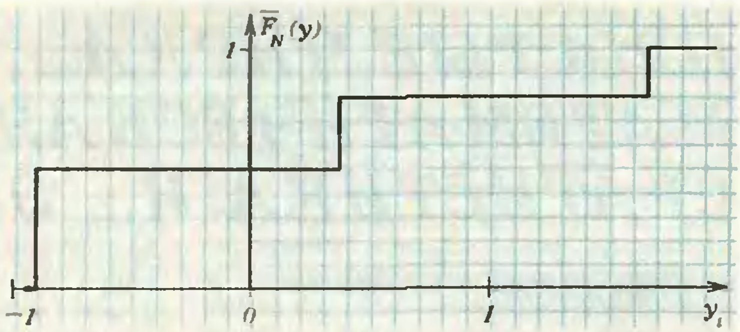



Рис. 2.

чисел умножением. Начало ряда простых чисел — это 2, 3, 5, 7, а конца ему нет — наибольшего простого числа не существует. Будем считать единственное четное простое число 2 «ошибкой природы» и рассмотрим ряд, начиная с 3. Подвергнем этот ряд процедуре разностного анализа*) — будем брать разности двух соседних членов:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 3, & 5, & 7, & 11, & 13, & 17, & 19, & 23, & 29, & 31, & 37 \\ & 2 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 6 & 2 & 6 \end{array} \qquad (1)$$

Разности повторяются — много двоек, есть четверки, появились и шестерки. Как будто на игральной кости выпадают очки: двойка, двойка, четверка, опять двойка... Еретическая мысль — взглянуть на этот строго детерминированный ряд как на результаты измерений некой случайной величины и попробовать обработать их методом математической статистики.

Пусть для обработки взяты простые числа, не превосходящие $N$; в примере (1) $N=40$. Прежде всего выпишем в порядке возрастания все наблюденные значения $x_1=2$, $x_2=4$, ... нашей «случайной величины» (в примере (1) число этих значений $n=3$), а под ними — частоты $\omega_1, \omega_2, \ldots$, с которыми они появляются (т. е. отношения числа появлений $x_i$ к общему числу наблюдений, которое у нас равно 10):

| $x_i$ | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|
| $\omega_i$ | 0,5 | 0,3 | 0,2 |

Далее составим таблицу «накопленных частот» $v_i=\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_i$, т. е. запишем под каждым значением $x_i$ сумму частот всех значений, не превосходящих $x_i$:

| $x_i$ | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|
| $v_i$ | 0,5 | 0,8 | 1 |

Изобразим результаты этих расчетов в виде графика ступенчатой функции $F_N(x)$ (рис. 1), называемой *эмпирической функцией распределения*: $F_N(x)$ равно сумме $\omega_i$ по всем $i$, таким что $x_i \leqslant x$. Наша цель — сравнить графики $F_N(x)$ при разных $N$ и попытаться уловить какую-нибудь закономерность в их поведении при $N \to \infty$. Правда, если взяться за это без соответствующей подготовки, ничего хорошего не получится. Дело в том, что чем дальше, тем реже встречаются простые числа и тем больше в среднем будут промежутки между ними. Поэтому графики $F_N$ с ростом $N$ будут расплываться вправо. Чтобы компенсировать это расплывание, применим к ним процедуру, знакомую нам по детективным романам. При сличении фотографий с целью выяснить, изображен ли на них один и тот же человек, криминалисты увеличивают или уменьшают их так, чтобы расстояния между зрачками на обоих портретах стало одинаковым, а затем совмещают их по зрачкам. Нечто подобное мы проделаем с эмпирическими функциями распределения.

*) Разностный анализ играет ту же роль при изучении числовых последовательностей, что и дифференцирование при изучении функций. Например, дважды составляя разности для последовательности $a_n=n^2$, получим постоянную последовательность:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & \ldots \\ & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & \ldots \\ & & 2 & 2 & 2 & 2 & \ldots; \end{array}$$

соответственно, $(x^2)''=2=\mathrm{const}$.

Вычислим при каждом $N$ среднее арифметическое $\bar{x}$ всех наблюденных значений $x_i$, называемое *средним значением.* Легко видеть, что $\bar{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i\omega_i$. Эта величина характеризует сдвиг функции распределения по горизонтали. Вторая нужная нам величина —

$$\sigma_x=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\omega_i}$$

— называется *среднеквадратичным отклонением.* Она служит мерой рассеивания наблюденных значений относительно среднего значения $\bar{x}$ — чем меньше $\sigma_x$, тем теснее расположены значения $x_i$. В нашей детективной аналогии величине $\sigma_x$ отвечает размер фотографии. Приведем значения $\bar{x}$ и $\sigma_x$ для различных $N$.

| $N$ | 40 | $10^2$ | $10^3$ | $10^4$ | $10^5$ | $10^6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}$ | 3,40 | 4,10 | 5,98 | 8,12 | 10,42 | 12,73 |
| $\sigma_x$ | 1,56 | 1,84 | 3,54 | 5,86 | 8,02 | 10,28 |

Как и следовало ожидать, обе эти характеристики растут с ростом $N$, что свидетельствует о расползании графиков $F_N$. Чтобы помешать расползанию, сдвинем каждый график на $\bar{x}$ влево и сожмем в $\sigma_x$ раз к оси ординат. Для этого заменим величины $x_i$ новыми величинами $y_i=(x_i-\bar{x})/\sigma_x$ и пересчитаем таблицу накопленных частот:

| $y_i$ | −0,90 | 0,38 | 1,67 |
|---|---|---|---|
| $v_i$ | 0,50 | 0,80 | 1 |

По этой таблице нарисуем график функции распределения $\bar{F}_N(y)$ величин $y_i$ (рис. 2). Легко видеть, что среднее значение и среднеквадратичное отклонение величин $y_i$ при всех $N$ будут равны 0 и 1. Вот эти графики $\bar{F}_N$ мы и будем сравнивать. Конечно, при больших $N$ эту работу надо поручить ЭВМ. За 20 минут работы машина с быстродействием 300 тыс. операций в секунду выдала графики, изображенные на рисунке 3 (для $N=10^3$, $10^4$, $10^5$ и $10^6$). Правда, похоже, что эти ступенчатые графики приближаются к пологому графику, нарисованному черным цветом? Это — график так называемого показательного распределения

$$F(y)=\begin{cases}1-e^{-y-1} & \text{при } y\geqslant -1,\\ 0 & \text{при } y<-1\end{cases} \qquad (2)$$

с нулевым средним и единичным среднеквадратичным отклонением. Расчет, проведенный на ЭВМ, подтверждает наше зрительное впечатление. Верно ли, что при $N\to\infty$ графики $\bar{F}_N(y)$ стремятся к $F(y)$ — неизвестно. Пока это только гипотеза. Однако гипотеза, подтвержденная на множестве из 78 497 первых простых чисел. И эта огромная работа выполнена всего за 20 минут!

Интересно отметить, что такое же распределение дают и интервалы между соседними сигналами в пуассоновском потоке (см. конец статьи «Как возникает распределение Пуассона»). Можно пояснить это, вспомнив, что, как было показано в этой статье, вероятность $P_0(t)$ того, что в течение времени $t$ не поступит ни одного сигнала, равна $e^{-\lambda t}$. Следовательно, вероятность того, что очередной сигнал, на-

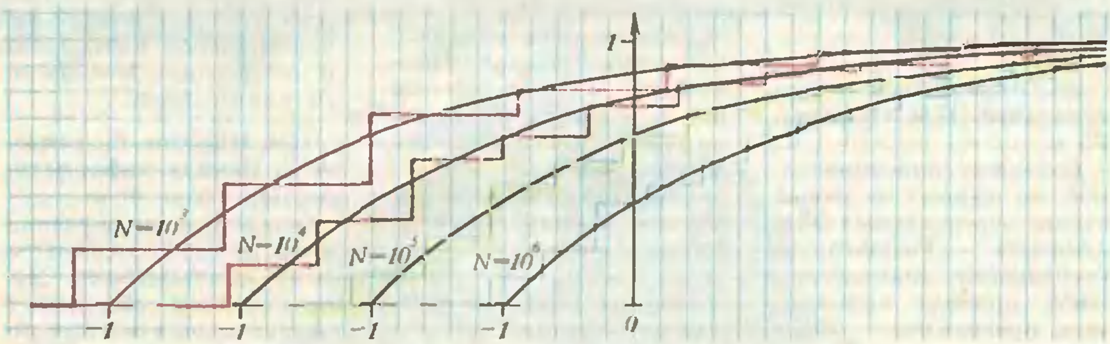



*Рис. 3.*

чиная с произвольного момента $t_0$, появится до момента $t_0+t$, равна $1-e^{-\lambda t}$. После соответствующего сдвига и сжатия получится функция распределения, задаваемая равенством (2).

Можно попытаться объяснить обнаруженное свойство расстояний между соседними простыми числами какими-нибудь известными их свойствами. Например, имеется оценка количества $\pi(N)$ простых чисел, не превышающих $N$, впервые доказанная французским математиком Ж. Адамаром и бельгийским математиком Ш.-Ж. Валле Пуссеном в 1896 году: $\pi(N)\approx\approx N/\ln N$. Рассмотрим так называемые квазипростые числа: корни уравнений $n_i/\ln n_i=i+3$, $i=1, 2, 3...$, число которых на отрезке от 1 до $N$, очевидно, также примерно равно $N/\ln N$. Выпишем $n_1, n_2, ..., n_6$ и применим разностный анализ:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8,61 | | 12,71 | | 17,00 | | 21,47 | | 26,10 | | 30,87 |
| | 4,10 | | 4,29 | | 4,47 | | 4,63 | | 4,77 | |
| | | 0,19 | | 0,18 | | 0,16 | | 0,14 | | |

Видно, что расстояния между соседними квазипростыми числами $n_i$ и $n_{i+1}$ возрастают, однако все медленнее с ростом $i$. Попробуйте, опираясь на это наблюдение, доказать, что для квазипростых чисел эмпирическая функция распределения выпукла вниз и поэтому не может совпадать с показательной функцией распределения. Следовательно, наша гипотеза не может быть обоснована просто оценкой числа $\pi(N)$. Если она верна, то ее доказательство должно использовать какие-то более глубокие факты.

## *Информация*

## Заказы принимаются...

*(Начало см. на с. 18)*

### Информатика, программирование

**52. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы.** 1 р. 90 к.

Излагаются современные численные методы решений прикладных задач, рассчитанные на применение быстродействующих ЭВМ. Рассматривается теория интерполяции, квадратурные формулы, аппроксимация функций, численные методы алгебры и т. д.

**90. Знакомьтесь с персональной ЭВМ «Корвет».** 95 к.

Содержит описание одной из первых в нашей стране персональных ЭВМ «Корвет». Рассмотрены особенности архитектуры ЭВМ, правила пользования, программное обеспечение.

**128. Абрамов С. А., Зима Е. В. Основы информатики.** 1 р.

Содержит систематизированное изложение основных понятий и методов информатики (вычислительной техники, программирования, численных методов, сортировки и поиска). Изложение основ программирования проводится на языке Паскаль.

**129. Арсак Ж. Программирование игр и головоломок.** Пер. с фр. 90 к.

Рассматриваются способы программирования различных занимательных игр и головоломок с числами, геометрическими фигурами и др.

**154. Новосельцев В. Н. Организм в мире техники: кибернетический аспект.** 70 к.

Рассказывается о том, как сегодняшняя кибернетика позволяет во многом дать полную картину жизненных процессов в организме.

**155. Дьяконов В. П. Справочник по расчетам на микрокалькуляторах.** 1 р. 20 к.

Содержит описание современных отечественных и зарубежных микрокалькуляторов, языков и основ их программирования.

**156. Пильщиков В. Н. Сборник упражнений по языку Паскаль.** 40 к.

В основу сборника положено пособие «Упражнения по языку Паскаль», используемое при обучении программированию студентов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского университета.

**159. Николов Р., Сендова Е. Начала информатики:** Пер. с болг. 60 к.

Отражен опыт обучения детей работе с персональными компьютерами. Даются основы общения с компьютером в режиме диалога на языке ЛОГО.

# КАК ВОЗНИКАЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

*Кандидат физико-математических наук*
*В. Н. ДУБРОВСКИЙ*

Каждому случалось застать начало летнего дождика, когда земля еще сухая и только тут и там видны редкие темные пятнышки от первых капель. Эти пятнышки — почти идеальная модель «случайно разбросанных точек», о которых упоминалось в статье «Распределение Пуассона». Попробуем с помощью этой наглядной модели сформулировать математические гипотезы, описывающие случайно разбросанные точки, и вывести из них, что число точек, попавших за определенное время на заданный участок, подчиняется распределению Пуассона.

Пусть $P_k$ — вероятность*) того, что на выбранный нами участок попадет $k$ капель. Прежде всего, ясно, что

*1) вероятность $P_k$ определяется только площадью $s$ этого участка и не зависит от его формы и расположения.*

Поэтому будем искать $P_k$ в виде функции от площади участка, т. е. в виде $P_k(s)$. Вторая естественная гипотеза состоит в том, что

*2) количество капель, выпавших на данный участок, не зависит от количества капель, выпавших на любой другой участок, не пересекающийся с первым.*


*) Поневоле мы вынуждены обходиться без определения понятия вероятности — желающие могут найти его, например, в книге А. Н. Колмогорова, И. Г. Журбенко, А. В. Прохорова «Введение в теорию вероятностей» (М., Наука, 1978). Надеемся, что для понимания статьи будет достаточно небольшой доли здравого смысла.

Другими словами, вероятности $P_0, P_1, P_2, \ldots$ для данного участка никак не зависят от того, сколько капель оказалось на каком-то другом участке. Математическим выражением условия независимости служит правило умножения вероятностей: *вероятность одновременного осуществления двух независимых событий равна произведению их вероятностей.* Например, если $S$ и $T$ — два непересекающихся участка площадей $s$ и $t$, то событие «на каждом из участков $S$ и $T$ выпало по 1 капле» происходит с вероятностью $P_1(s)\cdot P_1(t)$. Аналогично, событие «на участки $S$ и $T$ попало 2 капли» имеет вероятность $P_2(s)\cdot P_0(t)+P_1(s)\cdot P_1(t)+$ $+P_0(s)\cdot P_2(t)$ (это событие разбивается на три: на участке $S$ выпало 2 капли, а на $T$ — ни одной; на участок $S$ выпала 1 капля и на $T$ — 1 капля; на участок $S$ выпало 0 капель, а на $T$ — 2 капли; и его вероятность равна сумме вероятностей этих трех составляющих). Подчеркнем, что правило умножения вероятностей не доказывается — это определение независимости, но нетрудно объяснить, почему принимают именно такое определение.

Один из основополагающих принципов теории вероятности (закон больших чисел) утверждает, что частота, с которой происходит некоторое событие в достаточно длинной серии опытов, приближается к его вероятности. Пусть в серии из $n$ опытов наблюдались события $A$ и $B$, причем событие $B$ осуществилось $m$ раз и оба события одновременно осуществились $k$ раз; тогда частота $m/n$ события $B$ примерно равна его вероятности $P(B)$, а частота $k/n$ одновременного осуществления событий $A$ и $B$ — соответствующей вероятности $P(AB)$. Независимость событий $A$ и $B$ должна проявиться в том, что сведения о реализации события $B$ не могут влиять на вероятность осуществления события $A$. Следовательно, частота $k/m$ опытов, в которых произошло событие $A$, среди тех опытов, в которых зафиксировано событие $B$, должна быть такой же, как и в ряду всех вообще опытов: $k/m\approx P(A)$. Таким образом,

$$P(AB)\approx\frac{k}{n}=\frac{k}{m}\cdot\frac{m}{n}\approx P(A)\cdot P(B).$$

В пределе (при $n\to\infty$) эти приближенные равенства превращаются в точные. Мы получаем подтверждение того, что «правило умножения вероятностей» верно отражает наше интуитивное представление о независимости событий.

Вернемся, однако, к каплям дождя. Третья гипотеза, описывающая их выпадение, такова:

*3) вероятность $P_{>1}(h)$ того, что на участке малой площади $h$ выпадет не менее 2 капель, пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью $P_1(h)$ того, что на этот участок попадет 1 капля, т. е. $P_{>1}(h)/P_1(h)\to 0$ при $h\to 0$.*

Иначе говоря, дважды в одно и то же место капли не попадают. Теперь условия сформулированы полностью и можно заняться получением следствий.

Первым делом найдем $P_0(s)$. Рассмотрим участок площадью $s+t$ и разобьем его на два участка — площадью $s$ и площадью $t$. Если большой участок $(s+t)$ остался сухим, то и на оба его куска $s$ и $t$ капли не попали, и в силу условия 2) независимости участков при любых $s, t\geqslant 0$ получаем

$$P_0(s+t)=P_0(s)\,P_0(t).$$

Из этого уравнения нам надо найти функцию $P_0$, о которой дополнительно известно, что $0\leqslant P_0(s)\leqslant 1$ и $P_0(s)$ — убывающая функция. Докажем, что

$$P_0(s)=e^{-\lambda s}$$

при некотором $\lambda>0$. Пусть $f$ — убывающая функция, удовлетворяющая уравнению $f(s+t)=f(s)\cdot f(t)$. Для любого $s>0$ и любого натурального $n$

$$f(ns)=f(s+(n-1)s)=$$
$$=f(s)\,f((n-1)s)=\ldots=(f(s))^n.$$

Подставляя сюда $s=\frac{1}{n}$ и полагая $f(1)=e^{-\lambda}$, получим $f(1/n)=e^{-\lambda/n}$. Подставим теперь $s=1/m$ — получим

$$f(n/m)=(f(1/m))^n=e^{-\lambda n/m},$$

т. е. для любого рационального $s>0$ имеем $f(s)=e^{-\lambda s}$. Теперь, пользуясь монотонностью функций $f(s)$

и $e^{-\lambda s}$, легко доказать, что последнее равенство выполняется при всех $s>0$.

Заметим, что $P_0(h)\approx 1-\lambda h$ при малых $h$ (запись $u(h)\approx v(h)$ будет у нас означать, что $(u(h)-v(h))/h\to 0$ при $h\to 0$). Действительно, производная функции $e^{-\lambda s}$ при $s=0$ равна $-\lambda e^{-\lambda\cdot 0}=-\lambda$, т. е. $(P_0(h)-1)/h=$ $=(e^{-\lambda h}-1)/h\to -\lambda$ при $h\to 0$. Следовательно, $P_1(h)+P_{>1}(h)=1-P_0(h)\approx$ $\approx\lambda h$ при малых $h$. А так как, в силу условия 3, $P_{>1}(h)$ пренебрежимо мало по сравнению с $P_1(h)$, при малых $h$

$$P_1(h)\approx\lambda h,\ P_k(h)\approx 0 \text{ при } k>1.$$

Теперь можно составить дифференциальные уравнения, из которых мы найдем $P_k(s)$. Рассмотрим участок площадью $s$ и добавим к нему участочек малой площадью $h$. Повторяя приведенное раньше рассуждение, получим

$$P_k(s+h)=P_k(s)P_0(h)+P_{k-1}(s)P_1(h)+$$
$$+(P_{k-2}(s)P_2(h)+\ldots+P_0(s)P_k(h)).$$

Поскольку $P_0(h)\approx 1-\lambda h$, $P_1(h)\approx\lambda h$, а все выражение в скобках пренебрежимо мало по сравнению с $h$,

$$P_k(s+h)\approx P_k(s)(1-\lambda h)+\lambda hP_{k-1}(s);$$

следовательно,

$$P_k'(s)=\lim_{h\to 0}\frac{P_k(s+h)-P_k(s)}{h}=$$
$$=-\lambda P_k(s)+\lambda P_{k-1}(s),$$

или

$$P_k'(s)+\lambda P_k(s)=\lambda P_{k-1}(s),\quad k=1,2,\ldots \qquad (*)$$

Чтобы решить это уравнение, рассмотрим функцию $f_k(s)=P_k(s)e^{\lambda s}$. Найдем ее производную: $f_k'=P_k'(s)e^{\lambda s}+$ $+\lambda P_k(s)e^{\lambda s}$. Умножая уравнение $(*)$ на $e^{\lambda s}$, получаем

$$f_k'(s)=\lambda f_{k-1}(s),$$

причем $f_k(0)=P_k(0)=0$ при $k>1$. Теперь легко найти одну за другой все функции $f_k$: $f_1'(s)=\lambda P_0(s)e^{\lambda s}=\lambda$, следовательно, $f_1(s)=\lambda s$ (мы учли, что $f_1(0)=0$); $f_2'(s)=\lambda f_1(s)=\lambda^2 s$, следовательно, $f_2(s)=\lambda^2 s^2/2$, ..., $f_k(s)=$ $=\lambda^k s^k/k!$. И наконец, мы можем выписать искомое выражение

$$P_k(s)=\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s},$$

справедливое для всех $k=0,1,2,\ldots$

Подведем итог. Если на плоскости случайно выбираются точки так, что выполнены условия 1—3, то число точек, попавших на участок площадью $s$, имеет *распределение Пуассона* с параметром $\lambda s$, где $\lambda>0$ — параметр, характеризующий среднюю плотность точек (ср. с формулой (2) в статье «Распределение Пуассона»).

Разумеется, все сказанное почти дословно переносится на случай точек в пространстве или на прямой. О последнем случае надо сказать особо, потому что он чаще всего встречается на практике. При этом прямой, на которой расположены точки, служит ось времени, а сами точки — это моменты поступления каких-то случайных сигналов, подчиняющиеся условиям, аналогичным условиям 1—3. Стандартными примерами таких «потоков сигналов», называемых в теории вероятностей *простейшими* или *пуассоновскими потоками*, являются, например, испускаемые радиоактивным веществом частицы, вызовы, поступающие на телефонную станцию.

Мы затронули только одну сторону вопроса, вынесенного в заголовок статьи. С другими читатель познакомится, если ему доведется всерьез заняться теорией вероятностей и случайных процессов.

*В февральском номере нашего журнала были помещены три фотографии лыжных следов. Фотографии были сделаны в одно и то же время, и лыжни были расположены рядом. Но они так не похожи друг на друга... Мы предлагали читателям подумать, чем объясняется такое разнообразие видов лыжных следов.*

*Наверное, каждый, кто заинтересовался этим вопросом, понял, что без физики здесь не обойтись. А физика — она всегда физика, и в марте, и в августе. Поэтому разговор о лыжных следах мы продолжаем сегодня, когда вчерашний снег уже растаял, а до нового еще далеко.*

# ПОГОВОРИМ ПРО ВЧЕРАШНИЙ СНЕГ

*Кандидат физико-математических наук*
*А. В. МИТРОФАНОВ*

Возможно, кое-кто из вас, пока читал условие задачи, уже догадался, в чем суть дела. Ответ таков: лыжни сильно отличаются друг от друга потому, что по ним проехало разное количество лыжников и в разное время. Почему это так сильно повлияло на вид лыжни? Попробуем разобраться.

Выпавший на землю снег — очень сложный физический объект, непрерывно изменяющийся во времени. Вы знаете, что задолго до весеннего таяния снег оседает, уминается, может стать более плотным или, наоборот, более рыхлым, потерять в весе, «выветриться». При этом изменяются многие физические характеристики снега, например коэффициент теплопроводности, пористость, влажность и т. д. Вмешательство человека — скажем, уплотнение снега при прокладывании лыжни или пешеходной дорожки — также изменяет вид снежного покрова, придает снегу свойства, которые отличают его в чем-то от нетронутых сугробов.

Поразительная изменчивость состояния снега в природе связана с тем, что снег не просто существует сам по себе, а участвует в прямых и обратных фазовых переходах лед — пар и лед — вода. Особенно активно эти процессы протекают весной, когда снег находится в условиях, близких к так называемой тройной точке воды. Напомним, что в тройной точке три формы вещества — газообразная (в данном случае водяной пар), жидкая (вода) и твердая (лед) — сосуществуют в равновесии. Для воды тройная точка (рис. 1) находится по температуре вблизи 0 °C (точнее при $t_0=$ $=0{,}0078$ °C); давление насыщенных водяных паров, соответствующее тройной точке, $p_0=610{,}6$ Па (или, в других единицах, 0,006 атм, или 4,58 мм рт. ст.).

Скорость протекания фазовых переходов для снега зависит от целого ряда факторов, например от того, как светит солнце, тепло или морозно на улице, какова влажность, дует ли теплый ветер и т. д. Небольшие, совсем ничтожные изменения в начальном состоянии снега могут привести к значительному отклонению скорости того или иного процесса и в конце концов оказать сильное влияние на характеристики снежного покрова. Именно это и происходит на лыжной трассе.

На правой фотографии видны две параллельные ледяные полоски, как бы висящие над выветренным, крупнозернистым весенним снегом. Это старая лыжня. По лыжне проехало, должно быть, много лыжников. Когда лыжня уплотнилась настолько, что на ней образовалась ледяная корка, лыжники перестали пользоваться этой лыжней и проложили рядом новую. Отчего образуется лед на лыжне при температуре ниже 0 °C? Ведь снег еще не тает при такой температуре. Это очень любопытное обстоятельство, на которое следует обратить внимание.

В 1814—1816 годах, исследуя свойства снега и льда, знаменитый русский физик-электротехник В. В. Петров открыл явление возгонки, или сублимации, твердой фазы воды. Сублимация — это разновидность парообразования вещества. Сейчас хорошо известно, как испаряются снежинки. По фазовой диаграмме (см. рис. 1) можно определить давление насыщенных водяных паров; считается, что температура воздуха ниже 0 °C. Если в воздухе давление паров меньше, чем эта величина, то снег испаряется (переход твердое тело — пар), и чем суше воздух, тем интенсивнее происходит возгонка снега. Снег может исчезнуть, не начав еще таять! И вот что интересно. Давление насыщенного пара над кривой поверхностью жидкости отличается от давления над плоской поверхностью.*) То же самое справедливо и для твердого тела, находящегося в равновесии с паром. Мелкие частицы снега сублимируют быстрее крупных. Чем тоньше грань луча снежинки, тем больше ее кривизна, и, следовательно, тем быстрее она испаряется. На вогнутых поверхностях снежинок кривизна обратная, и там испарение может замениться кристаллизацией влаги, если температура снега достаточно низка. Этот процесс похож на конденсацию жидкости в узких порах или капиллярах, только в данном случае фазовый переход осуществляется минуя жидкое состояние.

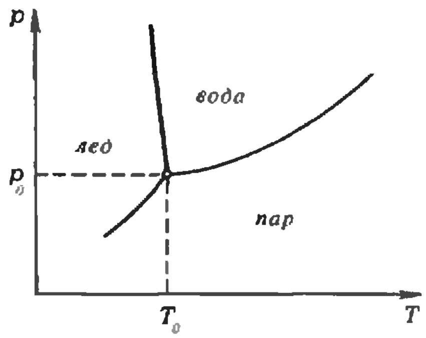


*Рис. 1.*

В результате пар кристаллизуется в местах пересечения лучей снежинок или там, где соприкасаются разные снежинки. Изменяется не только форма снежинок (вспомните снежные льдинки в виде крупы на дорожках в конце зимы), но и отдельные снежинки смерзаются. Более плотные участки предварительно утрамбованного снега смерзаются быстрее. Снег твердеет и может превратиться в лед в тех местах, где он уже успел стать твердым. Образование твердого наста «охотнее всего» протекает зимой, в морозы, когда внизу под снегом теплее, чем на поверхности. При этом в глубине снежного покрова давление насыщенных паров, а следовательно, и их концентрация больше, чем на поверхности. Из-за разницы концент-

*) Этот вопрос подробно обсуждался в статье А. А. Абрикосова «История росинки» в июльском выпуске «Кванта».

раций пар диффундирует к поверхности снега, и лыжня леденеет от глубинного водяного пара, а не от воды, образованной из снега вследствие чрезмерного давления лыж на снег, как кто-либо из вас мог ошибочно подумать.

В дальнейшем судьба ледяной лыжни иная, нежели соседних с ней сугробов, где снег под действием солнца и ветра быстрее сублимирует. Забавно, что имеет место своеобразный парниковый эффект: лед прозрачен для солнечных лучей, а теплообмен снега подо льдом с внешним пространством мал — ветер и конвекция под ледяной коркой практически отсутствуют. В солнечный морозный день снег нагревается подо льдом, быстрее сублимирует и может даже начать таять. Подо льдом снег начинает исчезать! Именно об этом в погожий весенний день «сообщает» нам шорох опадающих льдинок лыжни.

Обратимся теперь к левой фотографии, на которой показана светлая лыжня. Эта лыжня сравнительно новая. В феврале или в начале марта, незадолго до съемки, по лыжне проехало много лыжников. Они основательно утрамбовали снег, которого метели подсыпали немало. Снег на лыжне сравнительно свежий, светлый. Но почему лыжня светлее фона и почему она выше общего уровня снега?

Можно было бы предположить, что накануне выпал снег, и ветром его намело на лыжню побольше, чем рядом на открытом месте; на следующий день снег вокруг стаял или испарился, а на лыжне он остался, поэтому лыжня и белая. Но лыжня, подобная той, которая была сфотографирована, бывает светлой на фоне снега независимо от того, прошел накануне снег или нет. Светлые лыжни часто попадаются вблизи городов весной, когда вовсю тает снег; бывает так, что почти весь снег на земле растаял, а следы от лыжни еще тянутся белыми полосами по земле ...

Предложим другое объяснение. Светлая лыжня на более темном снежном фоне — это «автограф» интересного физического процесса, который можно было бы назвать радиационной неустойчивостью границы грязного снега, если пользоваться научной терминологией. Под словом «грязь» подразумевается пыль, сажа, пепел, словом загрязнения, которые поступают в снег из атмосферы. Грязь, в отличие от снега, хорошо поглощает видимое излучение: она черная! Частицы грязи находятся в контакте со снегом. Поэтому грязный снег лучше прогревается солнцем, чем чистый, и, следовательно, быстрее испаряется (или тает). Но чем больший слой снега испарится, тем грязнее станет его поверхность: грязь не испаряется, а накапливается на «подвижной» границе снежного покрова. А грязная поверхность еще больше будет прогреваться солнцем и т. д. Поэтому если в каком-либо месте снежного покрова снег испарится быстрее, то это место будет «чернее» соседних с ним участков, и в дальнейшем с этого места снег будет испаряться быстрее. Под действием солнечных лучей первоначально плоская снежная поверхность становится рельефной со светлыми (высокими) и темными (низкими) участками.

Теперь обратимся к «черным» следам (средняя фотография). Похоже, что эта лыжня никогда не была «наезженной». Скорее всего, здесь когда-то проехали два-три лыжника и оставили примятый, но еще не слишком плотный след. В дальнейшем под действием солнца снег на такой лыжне испаряется быстрее, чем окружающий (утопленная лыжня лучше защищена от холодного ветра, чем снег на открытом месте). Став темной, лыжня далее испаряется еще быстрее. И в конечном счете она выделяется на окружающем фоне благодаря тем же процессам, которые «виноваты» в существовании белой лыжни на грязном снегу.

У «черной» лыжни есть одна интересная особенность, на которую не всякий наблюдатель обратит внимание. Чем сильнее припекает солнце, тем более темной становится лыжня. Снег, пропитанный водой, отражает видимое излучение намного хуже, чем сухой снежный наст. В момент фотографирования (это было около полудня) темная лыжня как раз стала «набухать» под солнечными лучами и

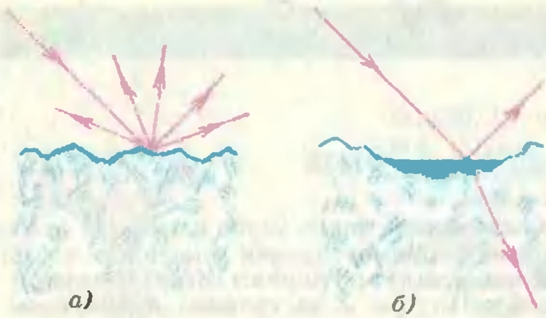



*Рис. 2.*

потемнела еще больше. Если подойти к такой лыжне поближе, то можно заметить, что снег на лыжне пропитался водой.

Сказанное выше можно сформулировать на языке физики, воспользовавшись определением альбедо и оптическими постоянными воды и снега.

Альбедо матовой поверхности — это полный, или, как говорят, интегральный, коэффициент отражения или рассеяния света, т. е. отношение отраженного (или рассеянного) светового потока к падающему. Чистый снег почти полностью рассеивает падающий на него свет. Альбедо снега обычно около 0,9, а иногда (для самого чистого снега) оно достигает даже величины 0,98.

Снег, покрытый или смоченный водой,— это уже не матовая поверхность, а гладкая в оптическом смысле. Такая поверхность отражает свет по известным нам законам геометрической оптики: от гладкой поверхности воды отражается малая часть падающего потока света (рис. 2). При нормальном падении коэффициент отражения света от поверхности воды близок к 2 %.

Качественно то, что происходит с темной лыжней, похоже на простой опыт, когда в стакан с сахарным песком наливают немного чистой воды: при подходящем освещении содержимое стакана сразу же темнеет.

Не надо думать, что образование рельефа на снежной или ледяной поверхности связано только с наличием грязи. Представим себе, что поверхность чистого снега по какой-то причине стала немного неровной, с выступами или углублениями, пусть даже небольшими. Тогда разные участки поверхности по-разному наклонены по отношению к падающим солнечным лучам. Поэтому поверхность снега в разных местах будет не одинаково освещаться солнцем. И если таяние или возгонка снега определяются в основном уровнем солнечной радиации, а не другими причинами (скажем, теплым ветром), то более остроконечные снежные выступы, направленные в сторону солнца, будут «стравливаться» под солнцем медленнее, чем плоские ямки около выступов, т. е. рельеф поверхности снега станет более ярко выраженным, чем было первоначально. На чистом снегу образуются снежные конусы или острые языки. Обычно это случается, когда ярко светит солнце, но нет теплого ветра. Такие условия нередко бывают высоко в горах, и весной под ярким солнцем на ледниках «вырастают» изумительной красоты ледяные зубья — кальгоспоры, достигающие высоты около метра.

Подобное образование рельефа поверхности знакомо специалистам по радиационной физике полимеров. В полимерных пленках, облучаемых жестким ультрафиолетовым излучением, наблюдается эффект фототравления поверхности, причем фототравление первоначально гладких поверхностей сопровождается ростом своеобразных «кальгоспор» — неровных выступов, иногда конической формы (микрофотография такой поверхности помещена на первой странице обложки). Разумеется, для полимеров масштаб явления более мелкий: размеры неровностей порядка микрометров. В данном случае, как и для снега, имеет место радиационная неустойчивость границы твердой фазы.

Задачник „Кванта"

[redacted]

## Задачи

**M1116—M1120, Ф1128—Ф1132**

**Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.**

**Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 1988 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 8—88» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1116» или «Ф1128». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).**

**Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).**

**В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.**

**M1116.** Какое наибольшее число узлов клетчатой бумаги может содержать прямоугольник площадью а) 36; б) $S$, стороны которого идут по линиям сетки? (Считаются узлы, лежащие внутри и на границе прямоугольника. Площадь клетки принята за 1.)

**M1117.** Дан произвольный треугольник. Докажите, что а) можно построить три окружности с центрами в его вершинах, попарно касающиеся друг друга (в точках $K$, $L$, $M$ — см. рис. 1);
б) если через середину каждой дуги $KL$, $LM$, $MK$, лежащей внутри треугольника, провести касательную к ней, то образуется четыре треугольника, площадь одного из которых (центрального) равна сумме площадей трех других.

*А. А. Горбачев*

**M1118.** а) Докажите, что уравнение
$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$$
имеет бесконечно много решений в целых числах.
б) Сколько имеется таких решений, у которых $z=1988$?

*С. Г. Мамиконян*

**M1119.** Назовем *$k$-звездой* фигуру на плоскости, состоящую из $k$ лучей с общим началом, разбивающих плоскость на $k$ равных углов (по $360°/k$). При каких $k>2$ верно следующее утверждение: для любых $k$ точек плоскости общего положения (никакие три из которых не лежат на одной прямой) существует $k$-звезда, в каждом из $k$ углов которой содержится ровно одна из этих $k$ точек?

*М. Хованов*, ученик 10 кл., Москва

**M1120.** а) Последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ задана соотношениями $a_0=0$, $a_n=P(a_{n-1})$, $n=1, 2, \ldots$, где $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, $P(x)>0$ при $x \geqslant 0$. Докажите, что для любых натуральных $m$ и $k$
$$\text{НОД}(a_m, a_k)=a_{\text{НОД}(m,k)}.$$
б) Докажите аналогичное утверждение для последовательности Фибоначчи $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=2$, ..., задаваемой условием $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$, $n=1, 2, \ldots$

*В. Ф. Лев*

**Ф1128.** На горизонтальной поверхности покоится однородный тонкий обруч массой $M$ и радиусом $R$. Горизонтальный диаметр обруча представляет собой легкую гладкую трубку, в которую помещен шарик массы $m$, прикрепленный к обручу двумя пружинами жесткостью $k$ каждая (рис. 2). Удерживая обруч неподвижным, шарик отклонили влево на величину $x$, после чего предоставили систему себе. Найти ускорение центра обруча в начальный момент времени. Проскальзывание обруча отсутствует.

*С. С. Кротов*

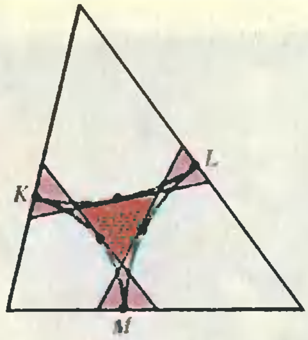



*Рис. 1.*

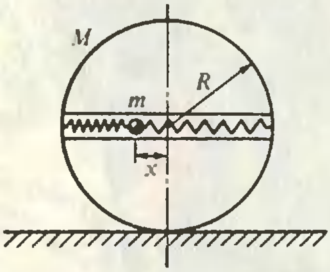



*Рис. 2.*


*Рис. 3.*

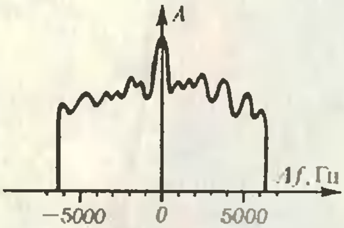



*Рис. 4.*

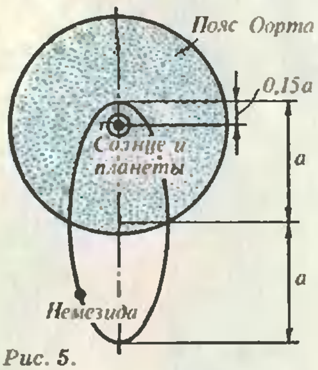



*Рис. 5.*

# Задачник «Кванта»

**Ф1129.** На цилиндрический постоянный магнит вблизи его полюса надета катушка, имеющая вид узкого кольца (рис. 3). Если трясти катушку так, чтобы она совершала гармонические колебания вдоль оси $OO'$ с амплитудой $A=1$ мм (которая много меньше размеров магнита и катушки) и частотой $f=1000$ Гц, то в ней наводится ЭДС индукции с амплитудой $\mathcal{E}_0=5$ В. Какая сила будет действовать на неподвижную катушку, если пропустить по ней ток $I=200$ мА?

*М. М. Цыпин*

**Ф1130.** Колебательный контур состоит из вакуумного конденсатора емкостью $C$, расстояние между пластинами которого $d$, и катушки индуктивности. Собственная частота колебаний контура равна $\omega_0$. Какой будет собственная частота, если между пластинами конденсатора поместить свободную точечную частицу массой $m$, имеющую заряд $q$? Сила тяжести отсутствует. Краевыми эффектами и силой «электростатического изображения» пренебречь.

*Д. А. Купцов*

**Ф1131.** Определить скорость ветра в смерче обычными метеорологическими приборами трудно (поскольку смерч невелик по размеру и движется) и небезопасно. Предложено измерять ее издали с помощью портативного радара (так как внутри смерча много пыли и мелких предметов, он отражает радиоволны). Радар излучает радиоволны на частоте $f_0=10^{10}$ Гц. Спектр отраженного от смерча сигнала приведен на рисунке 4 ($\Delta f=f-f_0$). Найти максимальную скорость ветра в смерче.

*Д. А. Купцов*

**Ф1132.** Недавно установлено, что вымирание видов животных на Земле идет особенно интенсивно в течение периодически повторяющихся промежутков времени длительностью $T=6{,}2$ млн лет. Такая закономерность объясняется гипотезой, предполагающей существование звезды Немезиды, являющейся спутником Солнца. Эта слабая и потому невидимая звезда движется по орбите, половина которой расположена внутри так называемого «пояса Оорта», содержащего запас комет (рис. 5). Возмущая движение комет, Немезида вызывает на Земле «кометный дождь», продолжительность которого практически совпадает со временем пребывания Немезиды внутри пояса Оорта.

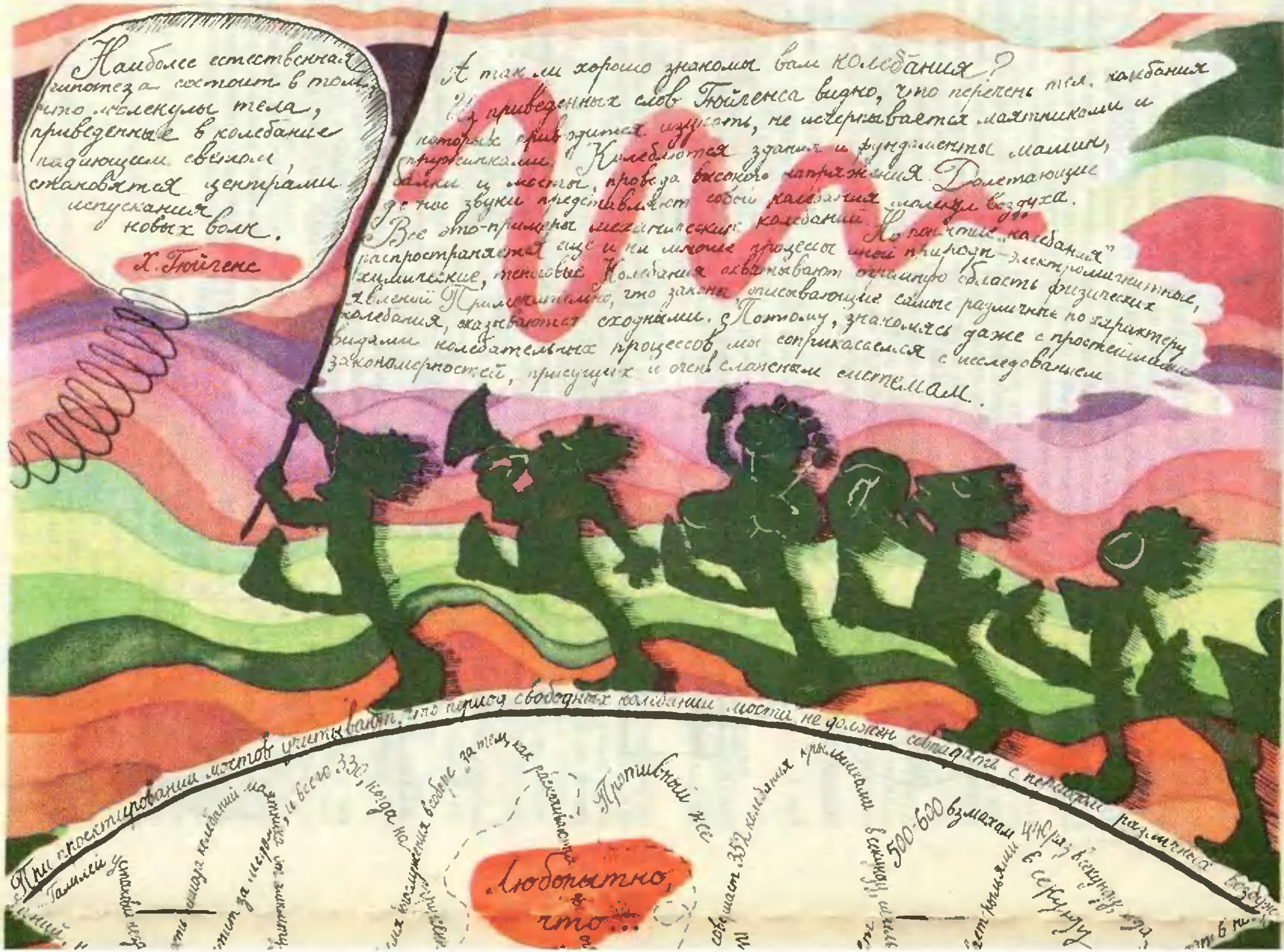
Определите большую полуось $a$ орбиты Немезиды и период ее обращения вокруг Солнца, если предполагается, что перигелий орбиты находится на расстоянии $0{,}15a$ от Солнца. Площадь эллипса $S=\pi ab$, где $a$ и $b$ — полуоси эллипса.

*В. Е. Белонучкин*

*(Продолжение см. на с. 34)*

**Поправка**

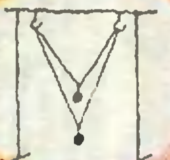
В условии задачи М1115, б) (см. «Квант», № 7) пропущено условие $m \geqslant n$.


Наиболее естественная гипотеза состоит в том, что молекулы тела, приведенные в колебание падающим светом, становятся центрами испускания новых волн.
Х. Гюйгенс
А так ли хорошо знакомы вам колебания?
Из приведенных слов Гюйгенса видно, что перечень тел, колебания которых приходится изучать, не исчерпывается маятниками и пружинками. Колеблются здания и фундаменты машин, балки и мосты, провода высокого напряжения. Долетающие до нас звуки представляют собой колебания молекул воздуха. Все это — примеры механических колебаний. Но понятие „колебания" распространяется еще и на многие процессы иной природы — электромагнитные, химические, тепловые. Колебания охватывают огромную область физических явлений. Примечательно, что законы, описывающие самые различные по характеру колебания, оказываются сходными. Поэтому, знакомясь даже с простейшими видами колебательных процессов, мы соприкасаемся с исследованием закономерностей, присущих и очень сложным системам.
При проектировании мостов учитывают, что период свободных колебаний моста не должен совпадать с периодами различных воздейс
Любопытно, что…

«Любопытно, что…»

…например — строевого шага, поскольку известен факт, когда рухнул мост при прохождении по нему роты солдат в ногу.

1. В каком положении шарика нить маятника испытывает наибольшее натяжение?
2. Изменится ли период колебаний маятника обтекаемой формы от того, что мы погрузим его в воду? Трением о воду пренебречь.
3. Отразится ли на периоде колебаний качелей то, что вместо одного человека на них сядут двое?
4. Сохранятся ли колебания шарика, закрепленного на пружине, если вся система придет в состояние полной невесомости?
5. Шарик, закрепленный на пружине с жесткостью $k$, совершает колебания с амплитудой $A$. Чему равна кинетическая энергия шарика в момент прохождения положения равновесия?
6. Маятниковые часы спешат. Что нужно сделать, чтобы эти часы шли верно, — опустить их или поднять на определенную высоту?
7. Можно ли, не дотрагиваясь до маятников, изображенных на рисунке, привести в колебательное движение лишь один из них?



8. Вода, которую несут в ведре, начинает сильно расплескиваться. Можно ли прекратить расплескивание, не останавливаясь?
9. Изменится ли период колебаний заряженного шарика, если в точке закрепления нити поместить точно такой же заряд?
10. Скажется ли на частоте колебаний железного шарика, подвешенного на нити, помещенный под ним электромагнит?
11. Как изменится частота электромагнитных колебаний в контуре, если а) в катушку ввести железный сердечник? б) раздвинуть пластины конденсатора?
12. За счет чего поддерживается ток в колебательном контуре, когда появляющаяся на конденсаторе разность потенциалов препятствует его протеканию?

## Микроопыт

Перекиньте через крючок в потолке шнур, привяжите к одному его концу небольшой груз и, слегка раскачав, понемногу «выбирайте» другой конец шнура. Как при этом изменится период колебаний?

**Что читать в «Кванте» о колебаниях**
*(публикации последних лет)*

1. «О музыкальных звуках и их источниках» — 1985, № 9, с. 26;
2. «Повторим колебания» — 1985, № 10, с. 48;
3. «Физика музыкальной гармонии» — 1987, № 5, с. 41;
4. «Гармонические колебания и равновесие» — 1987, № 9, с. 42.

Задачник „Кванта"

# Problems

**M1116 — M1120, P1128 — P1132**

**We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than November 1st, 1988 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in block letters.**

**M1116.** What maximal number of vertices of square lined paper can be contained in a rectangle of area a) 36; b) $S$, whose sides are parts of the lines of the lined paper? (Both the vertices lying inside the rectangle and those on its boundary are counted. The area of the little squares is assumed equal to 1)

**M1117.** Given an arbitrary triangle, prove that a) it is possible to construct three circles with centres at the triangle's vertices, pairwise tangent at the points $K$, $L$, $M$ (see figure Рис. 1);
b) if tangents to the arcs $KL$, $LM$, $MK$ contained in the triangle are drawn from their midpoints, then four triangles are formed and the area of one of them (the central one) equals to the sum of that of the three others.

*A. A. Gorbachev*

**M1118.** a) Prove that the equation

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2 \qquad (*)$$

has infinitely many integer solutions.
b) How many such molutions are there with $z=1988$?

*S. G. Mamikonyan*

**M1119.** A plane set, consisting of $k$ rays with common origin dividing the plane into $k$ equal angles (of $360°/k$ each) will be called a *k-star*. For what $k>2$ is the following statement true: for any $k$ points in general position (no three of which are collinear) there exists a $k$-star containing precisely one of these points in each of its $k$ angles.

*M. Khovanov, 10th form pupil, Moscow*

**M1120.** a) The sequence $a_0, a_1, a_2...$ is given by the relations $a_0=0$, $a_n=P(a_{n-1})$, $n=1,2,...$ where $P(x)$ is a polynomial with integer coefficients, $P(x)>0$ if $x\geq 0$. Prove that for positive integers $m$ and $k$

$$GCD(a_m, a_k)=a_{GCD(m,k)},$$

where $GCD$ means greater common divisor.
b) Prove a similar statement for the Fibonacci sequence $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=2,...,$ given by the condition $a_{n+1}=$ $=a_n+a_{n-1}$, $n=1,2,...$

*V. F. Lev*

**P1128.** A thin uniform hoop of mass $M$ and radius $R$ is placed on a plane horizontal surface. The hoop has a horizontal diameter made out of a light smooth pipe containing a small ball of mass $m$ connected to the hoop by two springs of elasticity $k$ each (see figure Рис. 2). Holding the hoop in place, the ball is moved ot the left to a distance $x$ from the centre, and then system is left to itself. Find the acceleration of the hoop's centre at the initial moment. The hoop does not slip or slide.

*S. S. Krotov*

**P1129.** A coil shaped like a thin ring is put on a constant cylindrical magnet near the latter's pole as shown on figure Рис. 3. If the coil shakes so that it effects harmonic oscillations along the $OO'$ axis with amplitude $A=1$ mm (which is much less than the size of the magnet or of the coil) and frequency $f=1000$Hz, then the EMF $\mathcal{E}=5$V is induced in the coil. What force will act on the motionless coil if a ourrent of $I=200$mA is sent through it?

*M. M. Tsypin*

**P1130.** An oscillation circuit consists of a vacuum capacitor of capacity C with plates located at the distance $d$ and an inductive coil. The self oscillation frequency of the circuit is $W_0$. Now will it change if a free particle of mass $m$ and charge $q$ is placed between the plates? There is no force of gravity, boundary effects and the force of "electrostatic representation" are negligible.

*D. A. Kuptsov*

**P1131.** It is difficult and dangerous to measure wind velocity in a cyclone with ordinary meteorological instruments (since cyclones are small and move rapidly). It was proposed to measure it from a distance using radar (since the inside of the cyclone contains a lot of dust and small objects which reflect radiowaves). The radar emits waves of frequency $f_0$. The spectrum of the reflected radio signal is shown on figure Рис. 4. ($\Delta f=f-f_0$). Find the maximal wind velocity in the cyclone.

*D. A. Kuptsov*

**P1132.** It was recently established that the extinction of animal species takes place especially rapidly during periodically repeated time intervals of $T$- 6.2 million years. This regularity is explained by a hypothesis, according to which the Sun has a satellite, called Nemesidis. This weak and hence invisible star moves along an orbit, half of which is located within the so-called "Oort belt", containing a reserve of comets (see figure Рис. 5). Perturbing the motion of comets, Nemesidis generates a "star rain" on Earth, whose duration practically coincides with period of time when Nemesidis is within the Oort belt. Determine the larger semiaxis $a$ of Nemesidis' orbit and its period of revolution about the Sun if it is known that the perihelion of the orbit is $0.15a$ from the Sun. The area of an ellipse is $S=\pi ab$, where $a$ and $b$ are the semiaxes.

*V. E. Belonuchkin*

# Решения задач

## M1096—M1098, M1100*), Ф1108—Ф1112

**M1096.** *Диаметр d окружности разбит на k равных частей и через каждую точку деления проведена хорда, перпендикулярная диаметру. Докажите, что сумма длин всех проведенных хорд не меньше 0,5 kd и не больше 0,8 kd.*

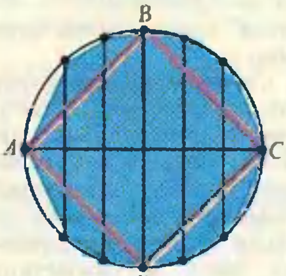



*Рис. 1.*

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ — хорды, перпендикулярные диаметру $AC=d$ и делящие его на $k$ равных частей. Выпуклый $2k$-угольник с вершинами в концах этих хорд и диаметра (на рисунке 1 — голубой) состоит из треугольников и $k-2$ трапеций с одинаковыми высотами $d/k$ и основаниями $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$; его площадь равна

$$S=\frac{d}{k}\left(\frac{a_1}{2}+\frac{a_1+a_2}{2}+\ldots+\frac{a_{k-1}+a_k}{2}+\frac{a_k}{2}\right)=\frac{d(a_1+a_2+\ldots+a_k)}{k}.$$

Таким образом, интересующая нас сумма длин хорд равна $Sk/d$. Поскольку голубой треугольник лежит в круге диаметром $d$, его площадь меньше $\pi d^2/4$, откуда получаем оценку сверху: $Sk/d<\pi d/4<0{,}8kd$. С другой стороны, площадь голубого многоугольника не меньше площади красного квадрата $ABCD$; отсюда получается оценка снизу: $Sk/d\geqslant 0{,}5kd$. Правда, при нечетном $k=2m+1\geqslant 3$ красный квадрат двумя уголками при вершинах $B$ и $D$ слегка вылезает за пределы голубого многоугольника, но эти уголки

*) Решение задачи М1099 содержится в статье М. В. Волкова, Н. Н. Силкина «Кого послать на Марс?» (см. с. 51)

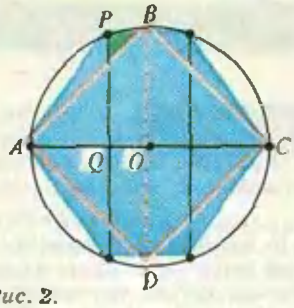



Рис. 2.



оценку не портят. Например, можно показать, что красный треугольник на рисунке 2 меньше подобного ему зеленого: поскольку

$$OQ=\frac{d}{2(2m+1)} \text{ и } PQ=\sqrt{QA\cdot QC}=\frac{d\sqrt{m(m+1)}}{2m+1},$$

получаем, что катет красного треугольника

$$BO-PQ=\frac{d}{2}\left(1-\frac{2\sqrt{m(m+1)}}{2m+1}\right)=\frac{d(2m+1-2\sqrt{m(m+1)})}{2(2m+1)}=$$

$$=\frac{OQ}{2m+1+2\sqrt{m(m+1)}}\leqslant\frac{OQ}{3+2\sqrt{2}}<\frac{OQ}{2}.$$

Заметим, что при больших $k$ сумма длин хорд, как ясно из решения, почти равна $\pi dk/4$ (предел отношения этой суммы к $k$ равен $\pi d/4$). Те, кто знаком с понятиями интеграла и интегральной суммы, несомненно, увидят в сюжете нашего решения вычисление интеграла от функции $f(x)=\sqrt{x^2-d^2}$ на отрезке $-d\leqslant x\leqslant d$ с помощью интегральных сумм (точнее, «методом трапеций»).

*А. Чагиров, Р. Харитонов*

**М1097.** *Координаты вершин равнобедренного треугольника — целые числа. Докажите, что квадрат основания — четное число.*

Параллельно перенесем данный треугольник $ABC$, в котором $AB=BC$, так, чтобы вершина $A$ попала в начало координат. Тогда координаты $(b_1, b_2)$ и $(c_1, c_2)$ вершин $B$ и $C$ останутся целыми. Из равенства $AB^2=BC^2$, записанного в координатах:

$$b_1^2+b_2^2=(b_1-c_1)^2+(b_2-c_2)^2,$$

вытекает, что $AC^2=c_1^2+c_2^2=2(b_1c_1+b_2c_2)$ — четное число.

*В. В. Произволов*

**М1098.** *На окружности расставлено $n$ точек, занумерованных подряд числами 1, 2, ..., $n$. Двое играют в следующую игру. Каждый по очереди проводит хорду, соединяющую точки с номерами одной четности. Каждая хорда не должна иметь общих точек (даже концов) с проведенными ранее. Побеждает тот, кто сделал последний ход. Выясните, кто из игроков — начинающий или его партнер — имеет выигрышную стратегию (при каждом $n=4, 5, 6, 7, \ldots$).*

Ответ: при $n$ кратном 4, а также при нечетном $n$ выигрывает первый (начинающий) игрок, а при $n=4k+2$ ($k$ целое) — второй.

Удобно считать, что точки с четными и нечетными номерами изображены разными цветами — скажем, белым и черным,— и что точки делят окружность на равные части.

Во всех случаях основная идея выигрышной стратегии — использовать симметрию.

Стратегия 1-го игрока при $n=4k$ — провести первым ходом диаметр, а затем на каждый ход 2-го отвечать проведением симметричной относительно этого диаметра хорды — см. рис. 1. (Такой ход возможен, поскольку после каждого хода 1-го игрока позиция будет симметрична относительно диаметра. Здесь важно, что диаметрально противоположные точки имеют один и тот же цвет, и симметричные относительно диаметра точки — тоже.)

При $n=4k+2$ выигрышная стратегия 2-го игрока — на каждый ход 1-го игрока отвечать проведением хорды, симметричной относительно центра ок-

# Задачник «Кванта»

Рис. 1.

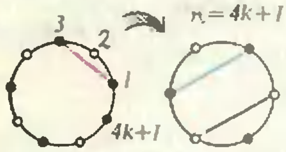



Рис. 2.

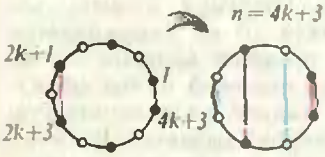



Рис. 3.

ружности. Здесь существенно, что диаметрально противоположные точки имеют разный цвет — ниже мы воспользуемся тем, что уже при одном этом условии игра проигрышна для начинающего.

Пусть $n$ — нечетно (тогда на окружности оказываются две соседние черные точки, с номерами 1 и $n$). При $n=4k+1$ 1-й игрок обеспечит себе выигрыш, если первым ходом соединит, например, черные точки с номерами 1 и 3 (рис. 2), тем самым сведя дело к аналогичной игре с $n=4(k-1)+2$, где начинающий проигрывает. Похожий, но еще более хитрый ход есть у 1-го игрока и при $n=4k+3$. Здесь он может отрезать три точки так, чтобы сохранилась симметрия относительно оси — для этого достаточно соединить черные точки с номерами $2k+1$ и $2k+3$ (рис. 3).

Если мысленно сдвинуть оставшиеся $4k$ точек так, чтобы они расположились по окружности на равных расстояниях, то *диаметрально противоположные точки будут разного цвета* (хотя белые и черные точки и не чередуются), и потому начинающий здесь (т. е. 2-й игрок) проигрывает.

Более тонких соображений требует тот вариант игры, в котором игрок, делающий последний ход, проигрывает. Разбор этого варианта мы предоставляем читателям.

*В. Г. Чванов*

**М1100***. *На берегу прямолинейной реки лежат бревна, каждое из которых составляет с линией берега угол меньше 45° (бревна — не пересекающие друг друга отрезки; их число конечно). Докажите, что хотя бы одно из бревен можно закатить в реку, не задевая остальных. (Бревно можно катить лишь в перпендикулярном ему направлении, не поворачивая.)*


Рис. 1.

Пусть берег — верхняя полуплоскость, линия берега — горизонтальная прямая $b$. Рассмотрим некоторое бревно $l$ (составляющее с прямой $b$ угол меньше 45°). Проведем из его концов лучи, составляющие углы по 45° с прямой $b$: из правого конца — в направлении $p$ «вправо — вверх», из левого конца — в направлении $q$ «влево — вверх» (рис. 1), и рассмотрим множество точек, лежащих в ы ш е ломаной, состоящей из бревна $l$ и этих двух лучей. Ясно, что выкатывая любое бревно, удовлетворяющее условию задачи и не имеющее общих точек с этим множеством, мы не можем задеть бревно $l$.

Удобно рассмотреть несколько большее множество, связанное с бревном $l$,— назовем его «тенью $l$» и обозначим $U_l$ (рис. 2): его граница — ломаная, которая идет от правого конца бревна $l$ в направлении $p$; затем, если ломаная упирается во внутреннюю точку какого-то бревна — по этому бревну вправо, от его правого конца — вновь по направлению $p$, и т. д., и также аналогично — от левого конца бревна $l$ (здесь отрезки ломаной идут, чередуясь, по бревнам в направлении $q$). Очевидно, для разных бревен $l_1$ и $l_2$ их тени не совпадают. При этом, если $l_1 \subset U_{l_2}$ ($l_1$ лежит в тени $l_2$), то $U_{l_1} \subset U_{l_2}$. Теперь ясно, что в цепочке бревен $l_1$, $l_2$, $l_3$, ..., в которой каждое бревно мешает выкатить предыдущее, никакое бревно не встретится дважды: для нее $U_{l_1} \subset U_{l_2} \subset U_{l_3} \subset \ldots$

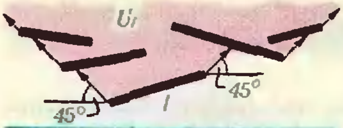



*Рис. 2.*

# Задачник „Кванта"

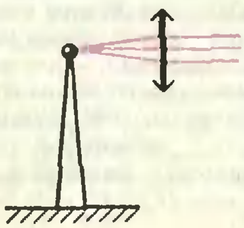
Поэтому, начав строить такую цепочку, мы непременно придем к последнему бревну — его заведомо можно выкатить, не задевая остальные.

*В. Г. Ильичев*

**Ф1108.** *Для наглядной демонстрации воздействия лазерного излучения на вещество изготовлена мишень в виде маленького серебряного шарика, закрепленного в вершине легкого пустотелого конуса (см. рисунок). Одна сторона шарика отполирована, а другая зачернена. Мишень устанавливают основанием конуса на шероховатую горизонтальную плоскость и на поверхности шарика-мишени фокусируют излучение от мощного импульсного лазера.*

*Оцените, при какой минимальной энергии светового импульса произойдет опрокидывание мишени. На какую из сторон шарика (отражающую или поглощающую) следует направить излучение?*

*Считайте, что масса шарика $m=3$ г и много больше массы конической подставки; высота конуса $h=6$ см, диаметр основания $d=3$ мм; коэффициент отражения отполированной поверхности $r=0{,}99$; коэффициент поглощения зачерненной поверхности $a=0{,}99$; длительность лазерного импульса $\tau=10$ нс.*



Эта задача возникла из реально существующего демонстрационного эксперимента. Световой пучок неодимового импульсного лазера с энергией в импульсе 2 Дж и длительностью импульса 10 нс направляется на верхний край вертикально стоящей мишени — деревянного клина; при этом если световой пучок сфокусирован с помощью линзы и падает на зачерненную поверхность клина, то мишень опрокидывается. Если же пучок не сфокусирован или же попадает на незачерненную поверхность, мишень не опрокидывается. Для простоты расчетов в условии задачи деревянная клинообразная мишень заменена на серебряный шарик.

Для того чтобы мишень опрокинулась, необходимо, чтобы под воздействием светового пучка шарик приобрел кинетическую энергию, достаточную для подъема центра тяжести шарика на высоту

$$H=\sqrt{h^2+\frac{d^2}{4}}-h\approx\frac{d^2}{8h},$$

т. е. необходимо выполнение условия

$$\frac{mv^2}{2}=mgH.$$

Это означает, что импульс, сообщенный шарику, должен быть равен

$$P=mv\approx\frac{md}{2}\sqrt{\frac{g}{h}}\approx 6\cdot10^{-5}\ \text{кг}\cdot\text{м/с}.$$

Предположим, что опрокидывание мишени происходит за счет светового давления. В самом деле, каждый поглощенный фотон передает шарику импульс $P_0=E_0/c=h\nu/c$, где $E_0=h\nu$ — энергия фотона, $c$ — скорость света. Умножив это выражение на число фотонов в излучении, мы получим полный импульс $P$, переданный шарику фотонами, откуда найдем полную энергию $E$ светового пучка, необходимую для опрокидывания мишени:

$$E=Pc\approx2\cdot10^4\ \text{Дж}.$$

Для опрокидывания мишени не хватает 4-х порядков! Значит, в этом эксперименте световое давление не играет главной роли.

Разгадка эффекта состоит в том, что энергия лазерного пучка, поглощаясь зачерненной поверхностью, производит быстрый локальный разогрев и испарение вещества мишени в области фокусировки пучка. Струя паров и создает ту реактивную силу, которая опрокидывает мишень. Сделаем соответствующие расчеты.

Пусть вся световая энергия поглотилась и пошла на испарение массы $\Delta m$ вещества. Тогда

$$\Delta m \approx \frac{E}{L},$$

где $L$ — удельная теплота парообразования (здесь мы не учитываем энергию, необходимую для разогрева вещества до температуры плавления, для плавления и для дальнейшего разогрева до температуры кипения, так как она в несколько раз меньше энергии, необходимой для испарения). Средняя квадратичная скорость теплового движения молекул пара равна

$$u = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

где $R$ — универсальная газовая постоянная, $T$ — температура кипения, M — Молярная масса вещества. Для серебра эта скорость составляет

$$u = 0{,}7 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Максимальный импульс, уносимый парами и, по закону сохранения импульса, передаваемый шарику, равен $\Delta mu$. Для опрокидывания мишени необходимо, чтобы этот импульс был равен найденному нами значению $P$:

$$\Delta mu = P.$$

Тогда необходимая энергия излучения

$$E = \Delta mL = \frac{PL}{u} \approx 0{,}2 \text{ Дж},$$

где $L = 2{,}2 \cdot 10^6$ Дж/кг. А это на порядок меньше энергии излучения нашего лазера.

При получении этой оценки мы не учитывали, что часть световой энергии отразится мишенью, часть пойдет на ее нагрев (а не только на частичное испарение) и, наконец, что струя паров будет истекать расходящимся пучком и, следовательно, сообщит шарику несколько меньший импульс. Все это, конечно, означает, что оценка занижена, но, как оказывается, не более, чем на порядок.

И последнее. При облучении не поглощающей, а отражающей поверхности шарика для опрокидывания мишени потребуется энергия по крайней мере в $1/(1-r) = 100$ раз бо́льшая.

Следовательно, если мишень при облучении ее зачерненной поверхности опрокидывается при энергии светового импульса

$$E > 0{,}2 \text{ Дж},$$

то при облучении отражающей поверхности для опрокидывания потребуется энергия

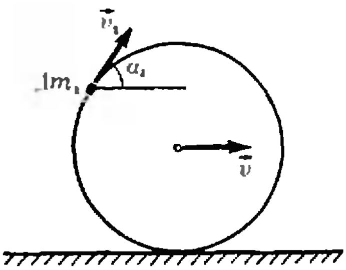
$$E > 20 \text{ Дж},$$

что на порядок больше энергии неодимового импульсного лазера.

*Е. Н. Юносов, И. В. Яминский*

**Ф1109.** *С наклонной плоскости скатываются две бутылки: одна — пустая,*

Нестрогий, качественный ответ на первый вопрос можно дать сразу. При скатывании пустой бутылки ее потенциальная энергия переходит в кинетическую *другая — заполненная водой. Какая из них скатится быстрее? Какая из этих бутылок поднимется на бо́льшую высоту, если их пустить вверх по наклонной плоскости с одинаковыми начальными скоростями? Считать, что проскальзывания нет.*






энергию как поступательного, так и вращательного движения. Если внутри бутылки имеется вода, то она, благодаря малой вязкости, во вращении практически не участвует. В результате во втором случае бо́льшая часть начальной потенциальной энергии переходит в кинетическую энергию поступательного движения, и бутылка с водой скатится быстрее пустой бутылки.

Теперь приведем более строгое решение. Найдем, чему равна кинетическая энергия пустой бутылки массой $m$, которая катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания со скоростью $v$. Для простоты заменим бутылку пустотелым цилиндром и будем считать, что вся его масса сосредоточена в тонких стенках.

Все точки цилиндра участвуют в сложном движении: это поступательное движение со скоростью центра масс $\vec{v}$ и вращение с линейной скоростью $v$ в системе отсчета, связанной с центром масс.

Рассмотрим небольшой участок «обода» массой $\Delta m_i$. Его скорость складывается из скорости $\vec{v}_i$ в системе центра масс и скорости $\vec{v}$ самого центра масс (см. рисунок). Кинетическая энергия этого участка равна

$$\Delta E_{ki} = \frac{\Delta m_i(|\vec{v}_i + \vec{v}|)^2}{2} = \frac{\Delta m_i(v_i^2 + v^2 + 2v_i v\cos\alpha_i)}{2},$$

где угол $\alpha_i$ для разных участков принимает значения от 0 до $2\pi$. Полная кинетическая энергия цилиндра складывается из кинетических энергий всех его участков:

$$E_k = \sum_i \Delta E_{ki} = \sum_i \frac{\Delta m_i(v_i^2 + v^2)}{2} = \sum_i \Delta m_i v^2 = mv^2$$

(здесь мы учли, что для всех участков $v_i = v$, а $\cos\alpha_i$ принимает все возможные значения — и положительные, и отрицательные, так что $\sum_i \cos\alpha_i = 0$.)

Если цилиндр скатывается по наклонной плоскости, то, спустившись с высоты $h$, он приобретет скорость $v$, которую можно найти из закона сохранения энергии:

$$mgh = mv^2,$$

и

$$v = \sqrt{gh}. \qquad (1)$$

Отсюда видно, что эта скорость в $\sqrt{2}$ раз меньше скорости для случая скатывания без вращения. Это связано с тем, что потенциальная энергия цилиндра переходит в кинетическую энергию как поступательного движения, так и вращательного.

Когда внутри цилиндра находится вода (наш случай бутылки с водой), которая из-за незначительной вязкости во вращение практически не вовлекается, полная кинетическая энергия равномерно катящегося цилиндра массой $m$, заполненного водой массой $M$, будет равна

$$E_k = mv^2 + \frac{Mv^2}{2} = \left(m + \frac{M}{2}\right)v^2.$$

После спуска с высоты $h$ по наклонной плоскости такой цилиндр за счет потенциальной энергии $(m+M)gh$ приобретет кинетическую энергию $(m+M/2)v^2$, так что его скорость составит

$$v=\sqrt{\frac{m+M}{m+M/2}gh}=\sqrt{\left(1+\frac{M}{2m+M}\right)gh}. \qquad (2)$$

Сравнивая выражения (1) и (2), видим, что во втором случае скорость оказывается больше. Это означает, что на любом участке спуска с наклонной плоскости скорость бутылки с водой будет больше скорости пустой бутылки. Поэтому полная бутылка и скатится быстрее пустой.

Второй вопрос задачи — это, по существу, по-другому сформулированный первый. Мысленно обратим движение в первом случае и сразу приходим к выводу, что пустая бутылка, имея меньшую начальную скорость, чем полная, закатится на ту же высоту. А тогда, если начальные скорости обеих бутылок будут одинаковыми, пустая бутылка поднимется выше полной.

*А. И. Буздин*

**Ф1110.** *Почему, когда при температуре около 0 °С ешь мороженое, пар изо рта начинает идти сильнее?*

В выдыхаемом человеком воздухе содержится водяной пар. При соприкосновении с более холодным окружающим воздухом он охлаждается и конденсируется, превращаясь в туман, который мы видим и называем паром (хотя в действительности пар невидим).

При температуре около 0 °С этот процесс происходит достаточно далеко от человека, когда выдыхаемый воздух уже смешался с окружающим. Если человек ест мороженое, которое холоднее окружающего воздуха, практически весь выдыхаемый пар конденсируется уже во рту и вылетает сразу в виде тумана.

*М. В. Чумаков*

**Ф1111.** *Равномерно заряженную полусферу разрезали на две части так, как показано на рисунке 1 (по линии $aa'$), и эти части разнесли на большое расстояние. В какой точке напряженность электрического поля больше — в точке $A'$ или в точке $A''$?*

Для определенности предположим, что заряд полусферы положительный. Из симметрии ясно, что сферический сегмент в точке $A'$ создает электрическое поле напряженностью $\vec{E}_1$, направленной вправо, вдоль оси симметрии, а сферический слой в точке $A''$ создает поле напряженностью $\vec{E}_2$, направленной влево (рис. 2).

Дополним мысленно сферический слой равномерно заряженной полусферой (рис. 3). Тогда поле в точке $A''$ увеличится: $E_3 > E_2$. Но $E_3 = E_1$, поскольку напряженность поля в любой точке внутри равномерно заряженной сферы равна нулю.

Итак, $E_1 > E_2$.

*С. Ф. Ким, А. И. Латынин*

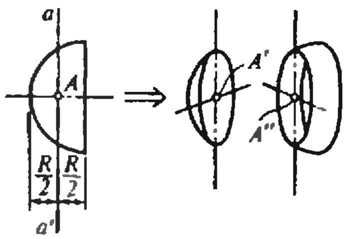



Рис. 1.

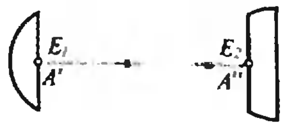



Рис. 2.

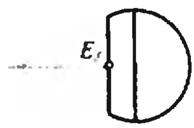
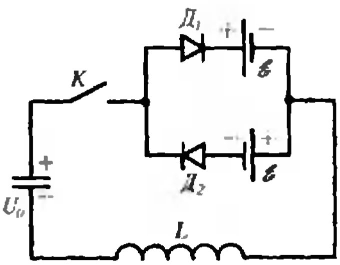



Рис. 3.

# Задачник „Кванта"

**Ф1112.** *В схеме, приведенной на рисунке, при разомкнутом ключе $K$ конденсатор заряжен до некоторого напряжения $U_0$. Ключ замыкают, и через какое-то время ток в цепи прекращается. Какова должна быть величина $U_0$, чтобы напряжение на конденсаторе установилось равным $U_{\text{к}}=1$ В при изменившейся полярности пластин, если ЭДС каждой батареи в цепи $\mathscr{E}=1{,}5$ В? Диоды считать идеальными.*




Как видно из рисунка, через диод $Д_1$ ток может течь только слева направо, а через диод $Д_2$ — только справа налево. Таким образом, данная цепь представляет собой колебательный контур, содержащий источник тока с постоянной ЭДС, включенной каждый раз навстречу току.

Пусть в некоторый момент времени при замкнутом ключе $K$ ток в цепи отсутствует, напряжение на конденсаторе равно $U_n$, а заряд равен $q_n=CU_n$ (верхняя пластина конденсатора заряжена положительно). В течение ближайшей следующей половины периода конденсатор будет перезаряжаться — сначала разряжаться, потом заряжаться зарядами противоположных знаков. При этом ток неизменного направления будет течь через диод $Д_1$, совершая работу против сторонних сил в источнике. Через полпериода заряд конденсатора станет равным $q_{n+1}$, так что через источник протечет заряд $q_n+q_{n+1}$ (знак заряда пластин изменяется).

По закону сохранения энергии убыль энергии электрического поля конденсатора равна работе против сторонних сил:

$$\frac{q_n^2}{2C}-\frac{q_{n+1}^2}{2C}=(q_n+q_{n+1})\,\mathscr{E},\quad \text{откуда}$$

$$\frac{q_n}{2C}-\frac{q_{n+1}}{2C}=\mathscr{E},\quad \text{или}\quad U_n-U_{n+1}=2\mathscr{E}.$$

Таким образом, через полпериода напряжение на конденсаторе уменьшится на $2\mathscr{E}=3$ В. Так будет происходить до тех пор, пока напряжение (при силе тока, равной нулю) не окажется меньше, чем $\mathscr{E}=1{,}5$ В. Поскольку по условию задачи конечное напряжение равно 1 В при изменившейся полярности пластин, начальное напряжение на конденсаторе (измеренное в вольтах) может быть равно

$$U_0=4+6n,\ \text{где}\ n=0,1,2,\dots$$

При получении этой серии решений предполагалось, что в каждую половину периода колебаний, включая последнюю, знак зарядов пластин изменяется. Однако возможен случай, когда в последнюю половину периода заряд изменяется от $q_{N-1}$ до $q_N$ без изменений знака. Тогда через источник протекает заряд $q_{N-1}-q_N$, и закон сохранения энергии записывается в виде:

$$\frac{q_{N-1}^2}{2C}-\frac{q_N^2}{2C}=(q_{N-1}-q_N)\,\mathscr{E}.$$

Отсюда получаем

$$U_{N-1}+U_N=2\mathscr{E}.$$

Таким образом, $U_{N-1}=2\mathscr{E}-U_N=2$ В (верхняя пластина конденсатора имеет отрицательный заряд), $U_{N-2}=U_{N-1}+2\mathscr{E}=5$ В (верхняя пластина заряжена положительно) и т. д. Начальное напряжение в этом случае может быть равно

$$U_0=5+6n,\ \text{где}\ n=0,1,2,\dots$$

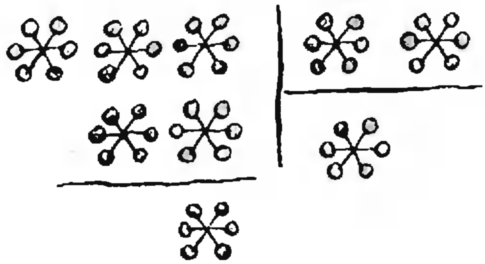
Итак, имеется две серии решений:

$$U_0=\begin{cases}4+6n,\\ 5+6n,\end{cases}\ n=0,1,2,\dots$$

*А. И. Киркинский*

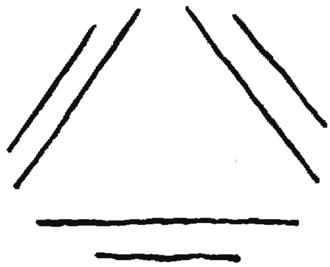
# „Квант" для младших школьников

## Задачи

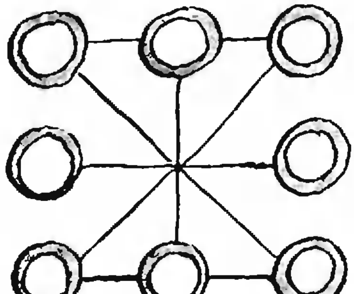


**1.** В этом зашифрованном примере на деление все девять цифр различны. Расшифруйте его.

**2.** Можно ли соединить некоторые концы отрезков, изображенных на рисунке, отрезками так, чтобы получилась одна несамопересекающаяся ломаная?



**3.** Расставьте в кружочки цифры от 1 до 8 так, чтобы в горизонтальных рядах получились числа, являющиеся квадратами, а сумма чисел, расположенных в центрально-симметричных кружках была одна и та же.



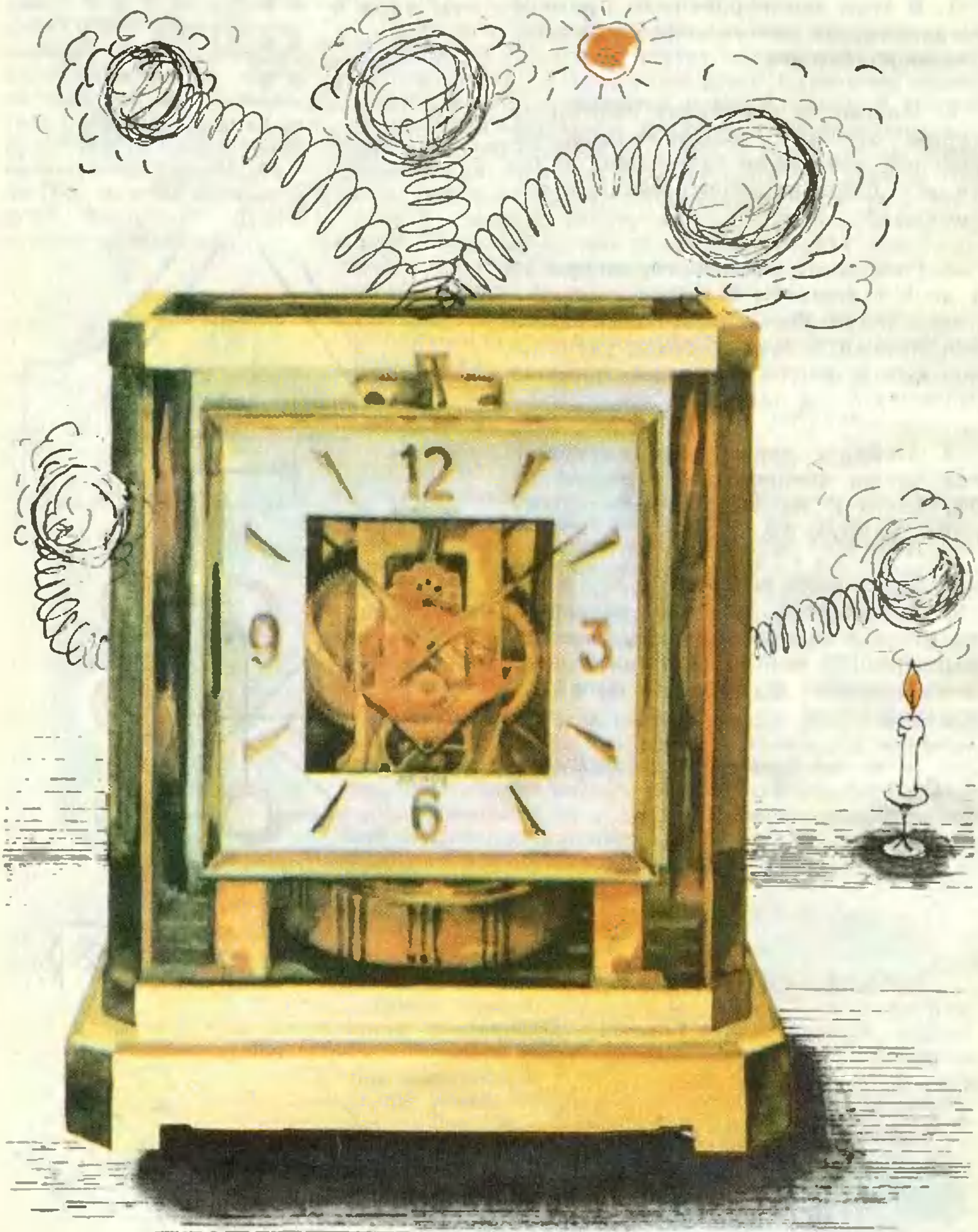
**4.** Найдите наименьшее натуральное число, которое оканчивается на 56, делится на 56 и имеет сумму цифр, равную 56.

**5.** Если книги, которые стоят в кабинете профессора Иванова, разорвать на отдельные страницы (разумеется, мысленно!!!), можно ли этими страницами покрыть футбольное поле? городской парк?

Эти задачи нам предложили *А. В. Швецов, А. П. Савин, А. М. Домашенко, С. Г. Губа, Д. Б. Фукс.*

# КОРОТКО О ТЕПЛОВОМ РАСШИРЕНИИ

*Кандидат физико-математических наук*
*А. С. ШТЕЙНБЕРГ*



Часы, которые вы видите на рисунке, буквально поразили мое воображение. Запаянные в стеклянный контейнер — этакий домик «без окон, без дверей»,— они наглухо изолированы от внешнего мира. На циферблате надпись «Lecoultra» — так называется известная швейцарская часовая фирма. А эта марка часов получила название «вечных». Завести их невозможно, но идут они, не останавливаясь. И никаких батареек, проводов и т. д. Вечный двигатель?!

Но мы с вами люди грамотные и знаем, что вечного двигателя быть не может. Энергия как-то должна подводиться к часам. Солнечная батарея? Но часы прекрасно идут и в темноте.

Признаюсь, не раскрыл я секрета «вечных» часов фирмы «Lecoultra». Оказывается, все дело в тепловом расширении, о котором у нас и пойдет речь. В часах есть баллон с этилхлоридом, который расширением или сжатием очень чутко реагирует на малейшие колебания температуры в помещении. Изменение температуры на 1 градус дает подзавод на 28 часов!

Конечно, это — оригинальное применение теплового расширения. И хотя само явление всем, вероятно, известно, понять, чем оно вызвано, не так просто. Во всяком случае, кое в чем требуется разобраться. В этой статье рассказ пойдет в основном о тепловом расширении твердых тел.

Вы, конечно, знаете, что температура связана с движением атомов и молекул, из которых состоят тела. Обычно это объясняется на примере жидкостей или газов. В частности, давление газов на стенки сосуда возникает из-за их бомбардировки молекулами. Чем выше температура, тем интенсивнее движение молекул и тем выше давление. И наоборот. Автолюбителям наверняка известно, что при осенне-зимнем похолодании требуется подкачка колес — давление в них падает.

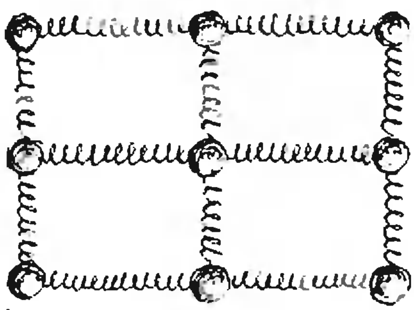


*Рис. 1.*

Но интенсификация атомного и молекулярного движения при нагревании — общее свойство всех тел, в том числе и твердых. Надо только понять, как именно могут двигаться атомы в твердом теле.

В древности, когда мудрые греки только-только «придумали» атомы, они представляли их в виде шариков. На первый взгляд кажется, что это очень грубая модель. И это действительно так. Но она же оказывается и очень плодотворной. Не случайно один из знаменитых физиков нашего времени, Нобелевский лауреат Невилл Мотт по этому поводу заметил, что «для объяснения многих свойств металлов достаточно атомной модели Лукреция»*).

Большинство твердых тел (в частности металлических) — кристаллы. Атомы в них расположены в узлах правильной кристаллической решетки. Атомы в решетке упакованы достаточно плотно. Больших промежутков, куда они могли бы проникать при своем движении, нет. Поэтому практически единственный доступный атомам в кристалле способ движения — колебания возле «родных» узлов **).

Часто для описания такого движения атом представляют «болтающимся» в узле на пружинках. Чем выше температура, тем быстрее движется атом, и тем больше он растягивает пружинки в своем движении. Иначе говоря, амплитуда колебаний атомов возле своих узлов возрастает при

---

*) Тит Лукреций Кар — древнеримский поэт и мыслитель, представлявший атомы в виде мелких круглых объектов.

**) Строго говоря, у атомов есть и другие возможности. Достаточно вспомнить о явлении диффузии в твердых телах, когда атомам удается совершать довольно далекие путешествия. Однако колебательный вид движения — основной. Грубо говоря, атомы твердого тела почти все время колеблются на месте, исключительно редко делая шаг в сторону.

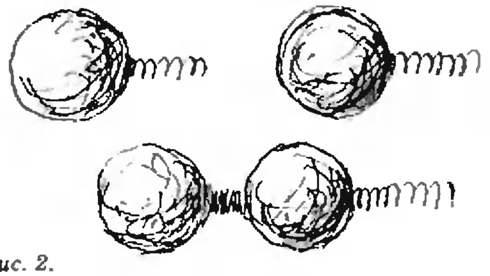


*Рис. 2.*

нагревании. Это — очень важное обстоятельство. Без него тепловое расширение было бы невозможно.

Рассматривая атомы в виде колеблющихся на пружинках твердых шаров, мы без труда объясним тепловое расширение. При колебаниях шары сближаются, и, поскольку они твердые, соседи, сталкиваясь, начинают мешать друг другу колебаться. Но вспомним, что при нагревании амплитуда колебаний должна увеличиться. И чтобы это произошло, атомам необходимо раздвинуться. А это и есть тепловое расширение.

Обратимся теперь к цифрам. Величину теплового расширения твердых тел обычно характеризуют коэффициентом теплового расширения $\alpha$, который показывает, на сколько удлиняется стержень единичной длины из данного материала при нагревании на 1 °С. Например, для платины $\alpha = 9{,}0 \cdot 10^{-6}$ град$^{-1}$. Это значит, что при нагревании на 1 °С однометровый платиновый стержень удлинится на 9 микрометров.

Можно подумать, что это — ерунда, с которой не стоит даже и считаться. Но не торопитесь. Из-за сезонных колебаний температуры знаменитая Эйфелева башня — «железная мадам» — летом становится на 15 см выше, чем зимой. А все потому, что у железа сравнительно высокий коэффициент теплового расширения $\alpha = 12{,}2 \times 10^{-6}$ град$^{-1}$. А как вы отнесетесь к тому, что из-за теплового расширения поршней заклинит двигатель вашего автомобиля? Или изменится калибр орудийного ствола? Или хоть немного нарушится соответствие в размерах деталей какого-нибудь сложного и тонкого механизма? Поэтому понятно, как важно иметь материал с возможно более низким коэффициентом теплового расширения. Платина (а еще лучше платино-иридиевые сплавы с $\alpha = 8{,}3 \cdot 10^{-6}$ град$^{-1}$) выглядит в этом смысле очень привлекательно. Не случайно эталоном длины долгое время служил платиноиридиевый метр. Но сами понимаете — тут недолго и разориться. А не существует ли какой-нибудь сплав «подешевле» и с еще меньшим коэффициентом теплового расширения?

В 1896 году во Франции был придуман сплав из железа и никеля с удивительно низким коэффициентом теплового расширения — около $1{,}5 \times 10^{-6}$ град$^{-1}$. Его назвали инваром (от латинского invariablis — неизменный). Впервые инвар был применен в 1899 году для изготовления эталона длины дуги земного меридиана, определенной русско-шведской экспедицией на полярном архипелаге Шпицберген. При доставке в более теплую Европу длина инварного эталона почти не изменилась.

Механизм инварности был понят намного позднее и оказался очень непростым. Здесь мы только постараемся объяснить идею.*)

Еще в прошлом веке было открыто явление магнитострикции, состоящее в изменении размеров тела при его намагничивании, которое обычно происходит при поднесении магнита извне. Однако существует группа материалов, которые намагничиваются самопроизвольно (без внешнего магнита) при изменении температуры. К ним, в частности, относится и железо: при его остывании намагничивание начинается с температуры 769 °С и продолжается при дальнейшем охлаждении. Такое намагничивание также сопровождается магнитострикционным эффектом. Остается лишь подобрать материал, в котором бы тепловое расширение и магнитострикция друг друга компенсировали. В этом и состоит секрет инваров!

*) Об инварности и других необычных свойствах сплавов вы сможете узнать из книги А. С. Штейнберга «Репортаж из мира сплавов», которую издательство «Наука» выпустит в 1989 году в серии «Библиотечка «Квант». (*Примеч. ред.*)

# КАК ВЗВЕСИТЬ ГИППОПОТАМА

*«Дух игры предрасполагает к озарениям, позволяющим находить оригинальные решения.»*

М. Гарднер. «Есть идея».— М., «Мир», 1982 (предлагаемая задача взята из этого сборника).

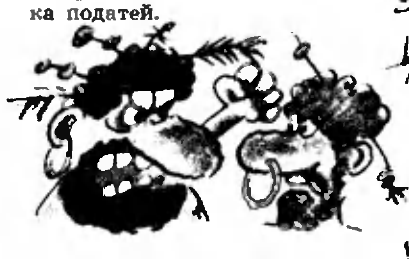
Так уж повелось, что бремя забот о священном гиппопотаме нес на своих плечах вождь племени, собственноручно кормивший и всячески ублажавший своего подопечного.

Каждый год в день своего рождения вождь, прихватив с собой в лодку сборщика податей и священного гиппопотама, отправлялся вверх по реке в те места, где стояла хижина, возведенная специально для сбора дани.

Племя платило вождю дань — столько золотых слитков, сколько требовалось, чтобы уравновесить священного гиппопотама. На чашу огромных весов ставили священное животное и уравновешивали его грудой слитков золота на другой чаше.

Однажды вождь племени так раскормил священного гиппопотама, что весы не выдержали непомерной тяжести и сломались. На починку их потребовалось бы несколько дней. Над торжественной церемонией сбора дани нависла угроза срыва.

Вождь племени был вне себя от ярости. Он вызвал сборщика податей.



*Вождь.* Я не желаю ждать. Золото мне нужно сегодня и ровно столько, сколько весит священный гиппопотам. Если ты не придумаешь, как отмерить нужное количество золота до захода солнца, я прикажу отрубить тебе голову.

Несчастный сборщик податей от страха почти перестал что-либо соображать. Лишь огромным усилием воли ему удалось собраться с мыслями. После нескольких часов напряженных размышлений ему пришла в голову блестящая мысль. Вы не догадываетесь, что именно он придумал?

Лаборатория „Кванта"

# Простые опыты с кипятком

*Кандидат физико-математических наук*
*И. И. МАЗИН*

**Пустой стакан, кастрюля с водой, термос, чайник, плитка и ... желание — вот и все, что вам может понадобиться для проведения опытов.**

### Почему вода втягивается в стакан?

Возьмите обычную кастрюлю и налейте туда немного воды (2—3 сантиметра по высоте). Опустите в кастрюлю пустой стакан, донышком кверху. Поставьте кастрюлю на плитку, доведите воду до кипения и дайте ей покипеть минут пять. Теперь выключите плитку. Вскоре вы увидите, как вода начинает всасываться в стакан, поднимаясь все выше и выше, пока не заполнит бо́льшую его часть.

Попробуем объяснить увиденное.

Что заставляет воду из кастрюли подниматься в стакан? Ясно, что это может сделать только атмосферное давление (давление окружающего воздуха). Значит, давление воздуха внутри стакана меньше атмосферного. На сколько? Нетрудно оценить разность давлений ($\Delta p$) снаружи и внутри стакана — она равна как раз гидростатическому давлению воды в стакане после завершения опыта. Будем считать, что высота столба воды $h \approx$ $\approx 10$ см, плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м$^3$, ускорение свободного падения $g =$ $= 10$ м/с$^2$, тогда

$$\Delta p = \rho g h \approx 10^3 \text{ Па} \approx 0{,}01 \text{ атм}.$$

Почему же давление воздуха внутри стакана оказалось меньше атмосферного? Первая мысль, которая приходит в голову: во время кипения воды воздух в стакане нагревается, расширяется и частично выходит наружу (действительно, если приглядеться, можно заметить выходящие пузырьки). Когда оставшийся воздух охладится, после выключения плитки, он снова сожмется, а освободившееся место заполнится водой. Рассчитаем этот эффект.

Пусть объем стакана $V=200$ см$^3$, начальная температура (до нагревания) $T_1=300$ К, конечная $T_2=373$ К, атмосферное давления $p=1$ атм $\approx 10^5$ Па. Из уравнения Менделеева — Клапейрона найдем, какая часть воздуха останется в стакане:

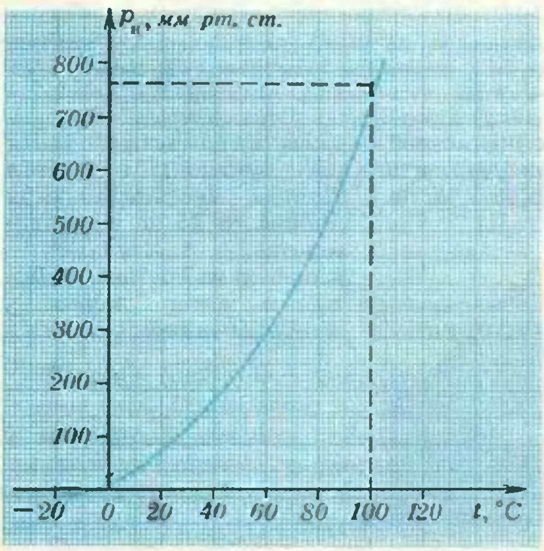
$$pV=\frac{m_1}{M}RT_1,$$

$$pV=\frac{m_2}{M}RT_2,$$

откуда

$$\frac{m_2}{m_1}=\frac{T_1}{T_2}\approx 0{,}8.$$

Таким образом, после охлаждения горячего воздуха до первоначальной температуры он будет занимать примерно 80 %, поднявшаяся вода — оставшиеся 20 % объема стакана. Но ведь мы видели, что вода заполнила больше половины стакана! Значит, мы объяснили в лучшем случае лишь треть эффекта. Если учесть еще, что подъем воды произошел буквально за несколько секунд, а за это время воздух никак не мог успеть остыть до комнатной температуры, то мы вынуждены полностью отказаться от предложенного объяснения.




Где же ошибка в наших рассуждениях? Наверное, мы ошиблись, полагая, что в стакане находится только воздух, забыв про водяной пар. А ведь в течение пяти минут бурного кипения воды в стакан непрерывно поступал водяной пар, который смешивался с воздухом и старался вытеснить его. Можно сказать, что в тот момент, когда мы выключили плитку, внутри стакана в основном находился не воздух, а водяной пар, причем в насыщенном состоянии. По мере остывания давление насыщенного пара уменьшается, причем очень резко (см. рисунок). Для того чтобы давление упало на 0,01 атм, достаточно пар охладить всего на 0,3 градуса. Ясно, что такое охлаждение может произойти почти мгновенно.

Более того, как показывает опыт, если воду кипятить достаточно долго, то после охлаждения она заполнит практически весь стакан. Никаких ограничений на высоту столба воды по существу нет — ведь давление 1 атм создается водяным столбом высотой 10 м.

Возникает вопрос — успеет ли за 5 минут испариться требуемое количество воды? Попробуем ответить. Конечно, скорость испарения зависит от мощности плитки, размеров кастрюли и т. д., поэтому мы воспользуемся конкретными цифрами, полученными опытным путем. В нашем случае слой воды толщиной 1 см испарялся из кастрюли примерно за 30 мин. Тогда за 5 мин с площади стакана $\approx 20$ см$^2$ испарится $m\approx 3$ г воды. При температуре $T=373$ К и давлении $p=1$ атм такая масса насыщенного пара заняла бы объем

$$V=\frac{m}{M}\frac{RT}{p}\approx 5 \text{ л!}$$

Так что, если считать, что водяной пар равномерно перемешивался с воздухом, то окажется, что в конце опыта лишь (0,2 л/5 л)·100 % = 4 % объема стакана будет заполнено газом, а остальные 96 % — водой. И такой результат действительно можно наблюдать.

**Когда труднее вынуть пробку из термоса?**

Для второго опыта вам понадобится термос, желательно с узкой пробкой, плотно закрывающей горлышко, но не до конца входящей в него. Для начала вскипятите в чайнике воду, налейте ее в термос, а немного погодя вылейте и плотно закройте термос пробкой. Через несколько часов (от двух до десяти, в зависимости от конструкции термоса) попробуйте вынуть пробку из горлышка — она настолько плотно присосется и втянется в термос, что вытащить ее вам удастся с трудом. (Вот почему нужно брать пробку, которая достаточно высовывается из горлышка.) Если же оставить термос не пустым, а с кипятком, то эффекта всасывания пробки либо не будет совсем, либо он будет очень слабым. Ну а если термос заполнить кипятком, скажем, на четверть или на половину? Казалось бы, сила всасывания должна быть промежуточной между первыми двумя случаями. Оказывается, нет, эффект будет лишь ненамного сильнее, чем в случае с полным термосом. Попробуем разобраться, что к чему.

Отличительным свойством термоса является его малая теплоотдача. В хорошем литровом термосе вода остывает за сутки всего на 2—3 градуса. Учитывая, что удельная теплоемкость воды равна 4,2 кДж/(кг·К), можно оценить количество теплоты, отданное термосом за сутки: $\approx$10 кДж. Пустая колба от термоса имеет массу примерно 200 г. Удельную теплоемкость материала термоса (металл, стекло) можно считать равной 0,5 кДж/(кг·К), так что теплоотдача в 10 кДж соответствует уменьшению температуры примерно на 100 °С. Это означает, что термос просто остынет до комнатной температуры, т. е. на 80 °С. Такое падение температуры, согласно закону Шарля, соответствует разности давлений 0,2 атм, что при сечении пробки $\approx$5 см$^2$ дает довольно заметную силу — примерно 10 Н.

Поскольку удельная теплоемкость воды почти в 10 раз больше удельной теплоемкости стекла, то уже 100 г воды в термосе уменьшают перепад температур, а значит, и давлений в 4 раза, при на четверть заполненном термосе перепад давлений будет в 7 раз меньше, а при заполнении на половину — в 15 раз меньше, чем в случае пустого термоса.

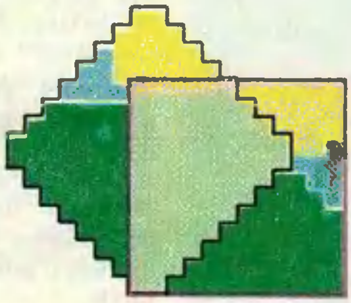
**Объясните почему**

Последний, простой, опыт попробуйте объяснить сами. Залейте термос до половины очень горячим молоком, закройте пробкой и встряхните. Вы увидите, как вокруг пробки пузырится молоко — из термоса выходит воздух. Почему?

## Нам пишут

В статье «Задачи на разрезание», опубликованной в прошлом году в 7-м номере «Кванта», мы предложили читателям попробовать разрезать некоторые фигуры на меньшее число частей, чем было указано в условии задачи, но так, чтобы из полученных частей вновь можно было бы сложить квадрат.

Трое наших читателей придумали, как разрезать «Зубчатый квадрат» не на пять, а на четыре части (см. рисунок): это *Таня Попова*, девятиклассница школы № 16 из Невинномысска, *А. А. Ягубьянц* — инженер из Ростова-на-Дону и автор задачи — *Л. П. Мочалов*



*А. П.*

## Математический кружок

# Кого послать на Марс?

*Кандидат физико-математических наук*
*М. В. ВОЛКОВ, Н. Н. СИЛКИН*

***Эта статья возвращает нас к теме, обсуждавшейся в статье М. Гарднера в четвертом номере «Кванта»,— к «цветным графам» и теории Рамсея. Здесь рассказывается о нескольких типичных задачах этой теории и, в частности, приводится решение задачи М1099 (условие ее также было помещено в № 4, 1988), обсуждаются общие методы оценок в подобных задачах и их применения.***

### Основы межпланетной дипломатии

Совершая очередное космическое путешествие, Громозека, космопроходец с огромным стажем, обнаружил незнакомую планетную систему. Он взял на нее курс и вскоре «приземлился» на третью от центральной звезды планету. Осмотревшись, Громозека увидел неподалеку аборигена и направился к нему. Завязался оживленный разговор, из которого Громозека узнал, что в Ух-ты (так, оказывается, называлась система) 9 планет, и все они обитаемы.

— Раньше,— сказал абориген Громозеке,— все наши планеты жили дружно. Но после того, как здесь побывали Весельчак и Глот, некоторые планеты разорвали дипломатические отношения. Правда, среди любых четырех планет какие-то две по-прежнему дружат между собой, но этого мало: ведь противостоять угрожающему нам вторжению сумчатых бегемотов могут только объединенные силы трех планет!

— Проклятые разбойники,— воскликнул Громозека.— Однако не все потеряно! *В вашей системе есть три планеты, которые попарно дружат между собой и, значит, могут объединиться!*

В ответ на недоуменный взгляд аборигена Громозека выворнул из грунта 9 камней.

— Представьте себе, что это девять планет системы Ух-ты,— начал Громозека.— Как называется ваша планета?

— Зям-лям,— ответил абориген.

— А теперь представьте, что этот камень — Зям-лям,— с этими словами Громозека поставил аборигена на один из камней.— Теперь я буду соединять сплошной линией две планеты тогда и только тогда, когда они дружат, а рассорившиеся планеты буду соединять пунктиром. Пусть нашлись 4 планеты, с которыми дружит Зям-лям; тогда среди них обязательно есть две, которые дружат между собой.

Громозека провел соответствующие линии между камнями (рис. 1) и продолжал:

— Получился треугольник. Это и есть тройка дружных планет! Пусть теперь Зям-лям состоит в дипломатических отношениях не более чем с двумя планетами. Тогда по крайней мере с шестью она находится в ссоре (рис. 2). *Среди этих шести планет всегда есть либо три попарно дружные между собой планеты, либо три попарно поссорившиеся*. Это-то вам ясно?

— Ясно,— согласился абориген. (Он вспомнил, что встречал подобную теорему в одном научно-популярном журнале*). Читателю же мы предлагаем доказать этот факт в качестве упражнения 1.)

— Отлично! Но трех попарно поссорившихся планет среди шести, порвавших отношения с Зям-лямом, быть не может: иначе получится, что есть четыре попарно поссорившиеся планеты (рис. 3). Вот и все,— закончил свои объяснения Громозека.

— Нет, не все,— возразил абориген, слезая с камня,— а если Зям-лям в ссоре ровно с пятью планетами, а дружит ровно с тремя?

— Тогда те же рассуждения можно применить к какой-нибудь другой планете, у которой больше друзей или больше недругов,— пояснил Громозека.

— А если каждая из планет в ссоре с пятью, а дружит ровно с тремя? — не унимался абориген.

— Мой друг, не волнуйтесь,— успокоил его Громозека,— *систем из девяти планет, каждая из которых дружит ровно с тремя, не может быть ни в одной галактике*. Поверьте моему богатому опыту космопроходца!

Упражнение 2. Проверьте и это утверждение Громозеки.

Надеемся, что читатель сможет выполнить упражнения 1 и 2, не прибегая к межгалактическим путешествиям. А мы пока, «установив исходные факты, начнем строить, основываясь на них, нашу теорию...» (А. Конан Дойл, «Серебряный»).

**Некоторые выводы**

Громозека иллюстрировал свои рассуждения рисунками из точек и линий, и это не случайно. Утверждения, которые он доказал, удобнее всего формулировать с помощью именно таких

*) По-видимому, имеется в виду «Квант», 1988, № 4, с. 14. (*Примеч. ред.*)

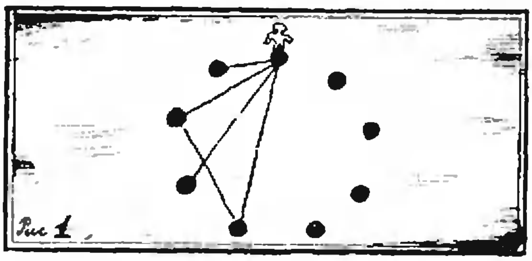


Рис 1

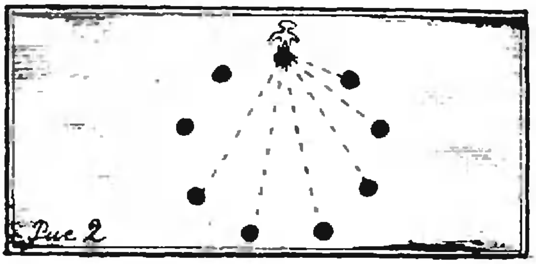


Рис 2

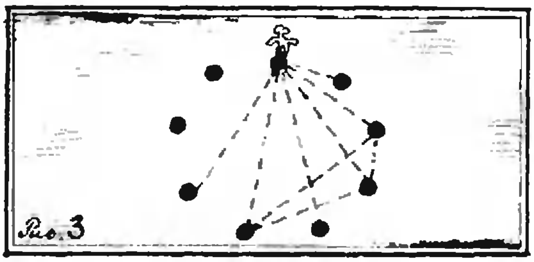
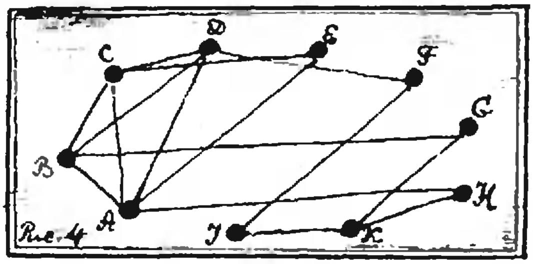


Рис 3

рисунков, или, как их называют в математике, *графов*. Более точно, *совокупность точек и соединяющих их линий называется графом, если 1) каждая линия соединяет ровно две точки; 2) две любые точки соединены не более чем одной линией.* При этом точки принято называть *вершинами графа*, а линии — *ребрами графа*. На рисунке 4 приведен один пример графа. Вершины $A$, $B$, $C$, $D$ на этом рисунке попарно соединены ребрами. Про такие вершины говорят, что они образуют *полный подграф*. А вот среди вершин $E$, $F$, $G$, $H$ ни одна не соединена ребром с другой из тех же вершин. Такие вершины составляют *пустой подграф*.

Теперь задачу про шесть планет можно сформулировать так: *любой граф с шестью вершинами содержит либо полный подграф с тремя вершинами, либо пустой подграф с тремя вершинами.* То, что Громозека доказал про планетную систему Ух-ты, по существу означает, что *любой граф с девятью вершинами содержит либо полный подграф с тремя вершинами, либо пустой подграф с четырьмя вершинами.* Дальше естественно поинтересоваться: а какое минимальное число $p$ нужно взять, чтобы любой граф с $p$ вершинами содержал либо полный подграф с тремя вершинами, либо пустой подграф с пятью вершинами. Но не будем торопиться отвечать на него, ведь тогда появится следующий вопрос: какое минимальное число $q$ нужно взять, чтобы любой граф с $q$ вершинами содержал либо полный подграф с тремя вершинами, либо пустой подграф с шестью вершинами, и т. д. Попробуем лучше обобщить нашу задачу, чтобы сразу ответить на все такие вопросы.

Итак, рассмотрим сразу общую ситуацию. Пусть $m$ и $n$ — натуральные числа, большие 1. Обозначим через $r(m, n)$ минимальное число с таким свойством, что *любой граф не менее чем с $r(m, n)$ вершинами содержит либо полный подграф с $m$ вершинами, либо пустой подграф с $n$ вершинами.* (Читатель, знакомый с упоминавшейся статьей Гарднера, узнает в числах $r(m, n)$ числа Рамсея.) Наша задача —




найти число $r(m, n)$*). Это нетрудно сделать, если $n=2$: тогда $r(m, 2)=m$. В самом деле, в любом графе с $m$ вершинами либо все вершины попарно соединены ребрами, либо найдутся две вершины, не связанные ребром между собой. В первом случае в графе есть полный подграф с $m$ вершинами (совпадающий со всем графом), а во втором случае в графе есть пустой подграф с двумя вершинами. Так же легко доказать, что $r(2, n)=n$ при любом $n$.

Упражнение 3. Докажите эту формулу.

Хотелось бы и при других $m$ и $n$ найти простую формулу для числа $r(m, n)$. Увы, пока такая формула неизвестна. Но несложно доказать следующее неравенство, позволяющее оценивать число $r(m, n)$, если известны числа $r(m-1, n)$ и $r(m, n-1)$:

$$\boxed{r(m, n) \leqslant r(m-1, n) + r(m, n-1). \qquad (1)}$$

Для этого нужно только проверить, что в любом графе с $r(m-1, n)+r(m, n-1)$ вершинами есть либо полный подграф с $m$ вершинами, либо пустой подграф с $n$ вершинами. Возьмем в таком графе одну из вершин, обозначим ее через $X$ и рассмотрим два случая.

Случай первый. Число вершин, связанных ребрами с вершиной $X$, не меньше чем $r(m-1, n)$. Тогда среди этих вершин либо $m-1$ вершин составляют полный подграф (и вместе с $X$ получается полный подграф с $m$ вершинами), либо $n$ вершин образуют пустой подграф.

*) Требовательный читатель скажет: «Но ведь нет никакой гарантии, что такое число существует», и будет прав. Но из дальнейших рассуждений следует не только оценка числа $r(m, n)$, но и его существование.

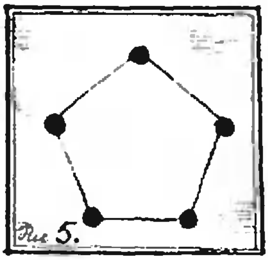


Рис. 5.

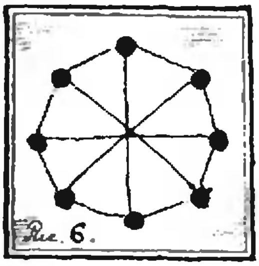


Рис. 6.

Случай второй. Число вершин, связанных ребром с вершиной $X$, меньше чем $r(m-1, n)$. Но тогда по крайней мере $r(m, n-1)$ вершин не соединены с $X$. Среди этих вершин либо $m$ вершин составляют полный подграф, либо $n-1$ вершин образуют пустой подграф (и вместе с вершиной $X$ получается пустой подграф с $n$ вершинами).

Посмотрим, как применяется неравенство (1). Вычислим, к примеру, число $r(3; 3)$. Из формул $r(2, n)=n$ и $r(m, 2)=m$ и из неравенства (1) получаем, что $r(3, 3)\leqslant r(2, 3)+r(3, 2)=3+3=6$. Вот мы и доказали, что в любом графе с шестью вершинами найдется либо полный, либо пустой подграф с тремя вершинами,— но теперь из общих соображений. Легко привести пример графа с пятью вершинами, в котором нет ни пустого, ни полного подграфа с тремя вершинами (рис. 5). Поэтому *число $r(3; 3)$ равно 6*.

### Что мы знаем и чего не знаем

Насколько точную оценку дает неравенство (1)? Попробуем-ка с его помощью получить утверждение Громозеки. Имеем:

$$r(3, 4)\leqslant r(2, 4)+r(3, 3)=4+6=10.$$

Осечка! Ведь Громозека доказал, что $r(3, 4)\leqslant 9$! Оказывается, если оба числа $r(m-1, n)$ и $r(m, n-1)$ четны, то справедливо неравенство

$$\boxed{r(m, n)\leqslant r(m-1, n)+r(m, n-1)-1. \qquad (2)}$$

Доказывается оно так же, как и (1), нужно только учесть, что графа с $r(m-1, n)+r(m, n-1)-1$ вершинами, в котором каждая вершина соединена ровно с $r(m-1, n)-1$ вершинами, не существует.

Упражнение 4. Докажите неравенство (2).

Заметим, что неравенству (2) можно придать такую удобную для использования форму: если $r(m-1, n)\leqslant A$ и $r(m, n-1)\leqslant B$, где $A$ и $B$ — четные числа, то $r(m, n)\leqslant A+B-1$.

Пользуясь неравенством (2), утверждение Громозеки можно доказать в одну строчку:

$$r(3, 4)\leqslant r(2, 4)+r(3, 3)-1=4+6-1=9.$$

На рисунке 6 изображен граф с восьмью вершинами, в котором нет ни полного подграфа с тремя вершинами, ни пустого подграфа с четырьмя вершинами. Поэтому *число $r(3, 4)$ равно 9*.

Мы уже отмечали, что при $m$ и $n$, больших 2, точная формула для числа $r(m, n)$ неизвестна. Более того, точное значение этого числа известно пока только для некоторых небольших $m$ и $n$.

Мы приводим таблицу, в которой собраны, пожалуй, все известные на сегодня сведения о значениях $r(m, n)$. (Значение $r(9, 3)=36=r(3, 9)$ найдено совсем недавно с помощью ЭВМ. А вот точное значение числа $r(3, 8)$ до сих пор неизвестно.)

Таблица

| $n$ \ $m$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 9 | 14 | 18 | 23 | | 36 |
| 4 | 9 | 18 | | | | | |
| 5 | 14 | | | | | | |
| 6 | 18 | | | | | | |
| 7 | 23 | | | | | | |
| 8 | | | | | | | |
| 9 | 36 | | | | | | |

Нетрудно заметить, что эта таблица симметрична относительно одной из диагоналей. Это не случайно: *для всех $m$ и $n$ верна формула $r(m, n)=r(n, m)$*.

Упражнение 5. Докажите эту формулу.

Теперь мы готовы начать

### Решение задачи М1099

*В отряде, ведущем подготовку к полету на Марс, 6783 космонавта, при-*

*чем известно, что среди любых четырех из них можно выбрать троих, составляющих слаженный экипаж для посадочного модуля. Докажите, что можно выбрать 5 космонавтов, любые трое из которых составляют слаженный экипаж.*

Вероятно, читатель уже убедился в полезности обобщений. Давайте и сейчас отвлечемся от конкретных данных задачи М1099 и рассмотрим ее «в общем виде».

Пусть $m$ и $n$ — натуральные числа, бо́льшие 2. Обозначим через $R(m, n)$ минимальное число с тем свойством, что *в любом отряде из $R(m, n)$ космонавтов можно выбрать либо $m$ человек, любые 3 из которых образуют слаженный экипаж, либо $n$ человек, никакие 3 из которых не образуют слаженный экипаж.* Читатель, возможно, ожидает, что мы переформулируем эту задачу на языке графов и извлечем нужную информацию из предыдущих результатов. Но он будет на этот раз неправ. Числа $R(m, n)$ непосредственно не связаны с графами, хотя и имеют некоторое отношение к числам $r(m, n)$.

Прежде всего, можно понять, что для всех $m$ и $n$ верны равенства:

$$R(3, n)=n, \quad R(m, 3)=m,$$
$$R(m, n)=R(n, m),$$

похожие на отмечавшиеся выше равенства для чисел $r(m, n)$.

Упражнение 6. Обоснуйте эти равенства.

Раз между числами $R(m, n)$ и $r(m, n)$ существует сходство, можно ожидать, что числа $R(m, n)$ можно оценивать с помощью чисел $R(m-1, n)$ и $R(m, n-1)$ аналогично тому, как мы оценивали числа $r(m, n)$, пользуясь неравенством (1). И в самом деле, верно неравенство

$$\boxed{R(m, n)\leqslant r(R(m-1, n), R(m, n-1))+1. \qquad (3)}$$

Его доказательство похоже на доказательство неравенства (1). Нам нужно доказать, что в любом отряде из $r(R(m-1, n), R(m, n-1))+1$ космонавтов найдутся либо $m$ человек, среди которых любая тройка является слаженной, либо $n$ человек, никакие трое из которых не могут составить слаженный экипаж. Выделим теперь одного космонавта — $X$. Каждому из оставшихся космонавтов сопоставим одну точку и соединим линией такие пары точек, что соответствующие пары космонавтов образуют вместе с космонавтом $X$ слаженный экипаж. В полученном графе с $r(R(m-1, n), R(m, n-1))$ вершинами найдется либо полный подграф с $R(m-1, n)$ вершинами, либо пустой подграф с $R(m, n-1)$ вершинами (это следует из определения числа $r(R(m-1, n), R(m, n-1)))$.

Рассмотрим первый случай: в отряде космонавтов есть $R(m-1, n)$ человек, любые двое из которых образуют вместе с $X$ слаженный экипаж. По определению числа $R(m-1, n)$ среди них найдутся либо $m-1$ человек, любые трое из которых образуют слаженный экипаж (и вместе с космонавтом $X$ получится $m$ таких человек), либо $n$ человек, никакие трое из которых не могут составить слаженный экипаж.

Во втором случае в отряде есть $R(m, n-1)$ человек, никакие двое из которых не могут образовать вместе с космонавтом $X$ слаженный экипаж. В свою очередь, среди них найдутся либо $m$ человек, любая тройка из которых слаженная, либо $n-1$ человек, никакие трое из которых не в состоянии образовать слаженный экипаж (и вместе с космонавтом $X$ получится $n$ таких человек).

Неравенство (3) доказано, причем попутно мы доказали и факт существования чисел $R(m, n)$ для всех $m$ и $n$ (заранее далеко неочевидный).

Теперь для того, чтобы решить задачу М1099, достаточно проверить, что число $R(5, 4)$ меньше, чем 6783. Ведь тогда в любом отряде из 6783 космонавтов найдется либо 5 космонавтов, любая тройка из которых — слаженная, либо 4 космонавта, никакие три из которых не годятся для высадки на Марс. Второй случай по условию задачи невозможен, и остается только первая возможность.

Итак, займемся оценкой числа $R(5, 4)$. Применяя (3), получим

$$R(5,4)\leqslant r(R(4,4),R(5,3))+1.$$

Число $R(5,3)$ равно 5, а чтобы оценить $R(4,4)$, снова применим (3):

$$R(4,4)\leqslant r(R(3,4),R(4,3))+1=$$
$$=r(4,4)+1.$$

Число $r(4,4)$ можно оценить, используя (1). Получим

$$r(4,4)\leqslant r(3,4)+r(4,3)=9+9=18.$$

(На самом деле, как видно из таблицы, 18 — это точное значение числа $r(4\ 4)$.) Итак, $R(4,4)\leqslant 19$, и $R(5,4)\leqslant$ $\leqslant r(19,5)+1$. Остается оценить число $r(19,5)$. Это можно сделать, многократно применяя неравенства (1) и (2):

$$r(5,3)\leqslant r(4,3)+r(5,2)=9+5=14,$$
$$r(6,3)\leqslant 14+6-1=19,$$
$$r(7,3)\leqslant 19+7\quad =26,$$
$$r(8,3)\leqslant 26+8-1=33,$$

и т. д., до $r(19{,}3)$; получится $r(19{,}3)\leqslant 182$.

Затем пишем:

$$r(4,4)\leqslant r(3,4)+r(4,3)=9+9=18,$$
$$r(5,4)\leqslant 18+14-1=31,$$
$$r(6,4)\leqslant 31+19=50,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r(19,4)\leqslant 1249;$$
$$r(5,5)\leqslant r(4,5)+r(5,4)=31+31=62,$$
$$r(6,5)\leqslant 62+50-1=111,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r(19,5)\leqslant 6782.$$

Следовательно, $R(5,4)\leqslant 6783$.

Оценка $R(5,4)\leqslant 6783$ не является точной. Если воспользоваться значениями чисел $r(m,n)$ из ранее приведенной таблицы, то, рассуждая вполне аналогично, можно получить существенно лучшую оценку: $R(5,4)\leqslant 6337$. Авторы умеют доказывать, что $R(5,4)\leqslant 6242$, но будет ли точной эта оценка, им неизвестно.

**Теорема Рамсея**

Начав с простых соображений, мы обнаружили, что они являются следствиями некоторых общих закономерностей: неравенств (1) и (3). Эти закономерности позволили нам решить задачу М1099. Но оказывается, что и сами они — всего лишь частные случаи еще более общего результата, полученного в 1930 году английским логиком Ф. Рамсеем (1903—1930). Для того чтобы сформулировать теорему Рамсея, представим, что в полет к Марсу нужно отправить не 5, а $m$ человек, из которых не 3, а $s$ должны высадиться на планету. Пусть известно, что из любых $n$ космонавтов ($n\geqslant s$), ведущих подготовку к полету, можно выбрать $s$, которые составляют слаженный экипаж для посадочного модуля. Обозначим через $R(s;\ m,n)$ минимальное число космонавтов, среди которых можно выбрать $m$ таких человек, что любые $s$ из них образуют слаженный экипаж. Ясно, что при $s=3$ число $R(s;\ m,n)$ совпадает с числом $R(m,n)$; нетрудно также сообразить, что при $s=2$ это число равняется числу $r(m,n)$.

Упражнение 7. Проверьте, что $R(1;\ m,n)=m+n-1$.

Поставим теперь вопрос: *при любом ли $s$ существует число $R(s;\ m,n)$? И если существует, то как его находить?* На эти вопросы отвечает

Теорема Рамсея. *Число $R(s;\ m,n)$ существует при любом $s$ и при любых $m\geqslant s$ и $n\geqslant s$. Его можно оценить с помощью неравенства*

$$\boxed{R(s;\ m,n)\leqslant R(s-1;\ R(s;\ m-1,n),R(s;\ m,n-1))+1.\quad (4)}$$

Неравенство (4) очень похоже на неравенство (3). Оно и доказывается, по существу, точно так же. Нужно только рассматривать не пары космонавтов, а экипажи из $s-1$ космонавтов. Ясно, что неравенства (1) и (3) — частные случаи неравенства (4) при $s=2$ (нужно учесть упражнение 7) и $s=3$ соответственно. Теорема Рамсея имеет очень много приложений в самых различных областях математики: в математической логике и в теории чисел, в алгебре и в комбинаторике, в геометрии и даже в программировании. Эти приложения заслуживают отдельного разговора, а здесь, в качестве примера того, как применяется теорема Рамсея, приведем только один изящный результат, который принадлежит венгерским математикам П. Эрдёшу и Д. Секерешу.

Теорема Эрдёша — Секереша. *Для любого натурального числа*

*$m \geqslant 3$ существует наименьшее натуральное число $C(m)$ такое, что среди любых $C(m)$ точек плоскости, из которых никакие три не лежат на одной прямой, можно найти $m$ точек, являющихся вершинами выпуклого $m$-угольника.*

Упражнение 8. Докажите теорему Эрдёша — Секереша.

Задачи

1. На планете Зям-лям 17 государств. Некоторые из них дружат между собой, некоторые враждуют, а некоторые нейтральны по отношению друг к другу. Докажите, что на Зям-ляме есть либо тройка попарно дружественных, либо тройка попарно враждебных, либо тройка попарно нейтральных государств.

2. На плоскости нарисованы 19 кругов так, что среди любых четырех кругов какие-то три имеют общую точку. Докажите, что найдутся четыре круга, имеющие общую точку.

3. Натуральные числа от 1 до 66 покрашены в четыре цвета. Докажите, что среди них найдутся три числа $x$, $y$, $z$ одного цвета такие, что $x+y=z$.

# Избранные школьные задачи

**Восьмой класс**

1. Найдите минимальное число, которое можно тремя различными способами представить в виде $13a+73b$, где $a$ и $b$ — натуральные числа.

2. Найдите натуральные числа $k$ и $n$, если известно, что числа $kn$ и $n^k$ записываются (в десятичной системе) одинаковыми цифрами, но в обратном порядке по отношению друг к другу.

3. Пусть $x_1$ — корень уравнения $x^2+px+q=0$ и $x_2$ — корень уравнения $x^2-px-q=0$. Докажите, что уравнение $x^2+2px+2q=0$ имеет корень, заключенный между $x_1$ и $x_2$.

4. На сторонах $BC$ и $CD$ квадрата $ABCD$ взяты точки $E$ и $F$ такие, что $EC=2EB$ и $FC=FD$. Докажите, что угол $AEB$ равен углу $AEF$.

5. Пусть $A$, $B$, $C$, $D$ — последовательные вершины выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что если $AB+BD\leqslant AC+CD$, то $AB\leqslant AC$.

**Девятый класс**

6. В последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ имеют место равенства $a_1=3$ и $a_{n+1}=a_n^2-2$ при всех $n$. Докажите, что все члены этой последовательности попарно взаимно просты.

7. Докажите, что если $x_1+\frac{1}{x_2}=x_2+\frac{1}{x_3}=\ldots=x_n+\frac{1}{x_1}$, то либо $x_1=x_2=\ldots=x_n$, либо $|x_1x_2\ldots x_n|=1$.

8. (задача Ферма). На диаметре $AB$ полукруга построен не перекрывающийся с полукругом прямоугольник $ABCD$, высота $AD$ которого равна стороне вписанного в круг квадрата. Пусть $N$ — произвольная точка граничной полуокружности полукруга, $E$ и $F$ — точки пересечения прямых $CN$ и $DN$ с диаметром полукруга. Докажите, что $AE^2+BF^2=AB^2$.

9. Точки $A$, $B$, $C$ лежат на одной прямой, причем $B$ лежит между $A$ и $C$. Найдите геометрическое место точек $M$ таких, что окружности, описанные около треугольников $AMB$ и $BMC$, равны.

10. В множестве, состоящем из $n$ элементов, выбрано $2^{n-1}$ различных подмножеств, каждые 3 из которых имеют общий элемент. Докажите, что все эти подмножества имеют общий элемент.

**Десятый класс**

11. Докажите, что число 11...122...2 (10 единиц и 10 двоек) является произведением двух последовательных целых чисел.

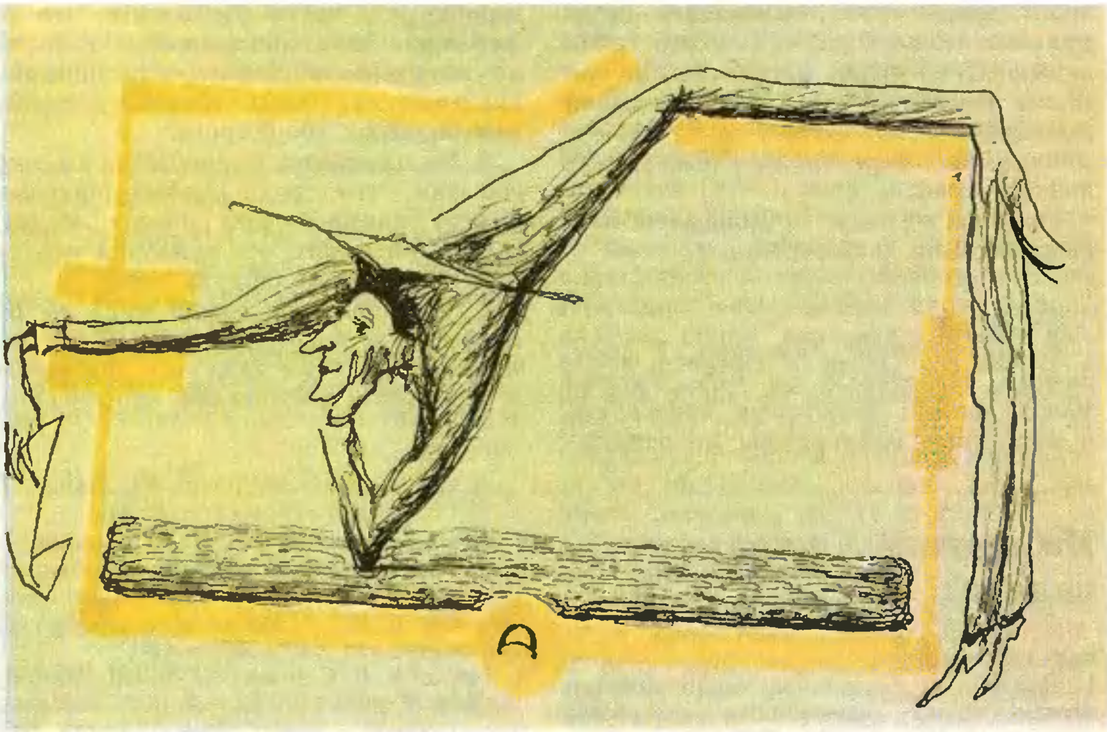
12. Найдите числа $a$, $b$, $c$, $d$, если известно, что $a^2+b^2+c^2+d^2-ab-bc-cd-d+\frac{2}{5}=0$.

13. Внутри тетраэдра $ABCD$ взята такая точка $O$, что объемы тетраэдров $OABC$, $OBCD$, $OACD$, $OABD$ равны. Докажите, что сумма векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ равна 0.

14. Основание тетраэдра — равносторонний треугольник, площади боковых граней равны между собой. Известно, что сторона основания имеет длину $a$, одно из боковых ребер имеет длину $b$. Найдите длины двух других боковых ребер.

15. Найдите все решения уравнения $\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{1}{2}$, принадлежащие промежутку $[0;\pi]$.

Публикацию подготовили
*Е. М. Гольберг, Л. Д. Курляндчик*




Практикум абитуриента

# Расчет электрических цепей

А. Р. ЗИЛЬБЕРМАН

Существует множество способов расчета электрических цепей, состоящих из батарей и резисторов. Практически любой из них (с простой переменой обозначений) годится и для цепей из батарей и конденсаторов. (А если вы уверенно обращаетесь с комплексными числами, то так же можно рассчитывать любые схемы для переменного тока.) В этой статье будут разобраны два простых способа расчета цепей постоянного тока с резисторами и конденсаторами.

Первый способ годится для сравнительно простых цепей. Пусть нам дана схема, состоящая из батарейки и нескольких резисторов. Для расчета токов в ветвях схемы мы вначале планомерно упрощаем схему, заменяя параллельно или последовательно соединенные резисторы их эквивалентами. После упрощения схемы до такой степени, что токи в ней найти легко, мы проводим обратный процесс, находя при этом токи исходных элементов. Способ этот вам хорошо знаком еще с седьмого класса.

Разберем несложный пример.

Задача 1. *В схеме, изображенной на рисунке 1, найдите ток, текущий по перемычке AB.*

Упростим схему, заменив параллельно соединенные резисторы *1* и *3*, а также *2* и *4* их эквивалентами. Получилась простая цепь с общим сопротивлением

$$R=\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}+\frac{R_2R_4}{R_2+R_4}$$

и общим током

$$I=\frac{U}{R}=\frac{U}{\dfrac{R_1R_3}{R_1+R_3}+\dfrac{R_2R_4}{R_2+R_4}}.$$

Напряжения на резисторах *1* и *3* равны, значит, $I_1:I_3=R_3:R_1$. Но $I_1+$ $+I_3=I$. Тогда

$$I_1 = I\frac{R_3}{R_1+R_3},\quad I_3 = I\frac{R_1}{R_1+R_3}.$$

Аналогично

$$I_2 = I\frac{R_4}{R_2+R_4},\quad I_4 = I\frac{R_2}{R_2+R_4}.$$

Теперь найдем ток через перемычку $AB$:

$$I_{AB} = I_1 - I_2 = \frac{U(R_2R_3 - R_1R_4)}{R_1R_3(R_2+R_4)+R_2R_4(R_1+R_3)}.$$

Из полученного выражения видно, что при условии $R_1:R_2 = R_3:R_4$ ток через перемычку равен нулю. Это часто используют для точного измерения неизвестного сопротивления.

Рассмотренный метод хотя и прост, но очень громоздок. Кроме того, он не универсален — далеко не всякую схему удается так упростить. Например, если на рисунке 1 заменить перемычку резистором, в получившейся схеме не окажется ни параллельно, ни последовательно соединенных резисторов.

Второй, более удобный, способ расчета основан на разумном выборе неизвестных для составляемых впоследствии уравнений.

Рассмотрим неразветвленный участок цепи, содержащий резистор и источник тока (рис. 2). Согласно закону сохранения энергии, ток на этом участке равен

$$I = \frac{\varphi_A - \varphi_B - \mathscr{E}}{R+r},$$

откуда видно, что для нахождения токов в каждой из ветвей достаточно знать потенциалы на ее концах (точнее — разности потенциалов). Точки соединения неразветвленных участков цепи называют узлами, отсюда и название способа — метод узловых потенциалов.

Итак, в качестве неизвестных величин выберем потенциалы узлов схемы. Удобно потенциал одного из них — любого — положить равным нулю (тогда потенциалы остальных узлов — это напряжения, измеренные относительно выбранного нами узла). Уравнения для определения узловых потенциалов записываются для токов, которые втекают в узлы и вытекают из них: сумма втекающих в узел токов равна сумме вытекающих. Если в схеме $N$ узлов, то неизвестных потенциалов оказывается на один меньше (напомним, что потенциал одного из узлов мы задали сами). Значит, нужно написать уравнения для токов всех узлов, кроме одного. (Если мы все-таки напишем уравнения для всех узлов, то быстро убедимся, что одно из них — любое! — лишнее, его можно получить, комбинируя остальные уравнения.)

В качестве примера разберем такую задачу.

З а д а ч а 2. *Найдите ток через нагрузку сопротивлением $R$, подключенную к параллельно соединенным батареям с ЭДС $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ и внутренними сопротивлениями $r_1$ и $r_2$ (рис. 3).*

Перерисуем схему так, как изображено на рисунке 4, и зададим $\varphi_A = 0$. Теперь достаточно задать потенциал точки $B$, чтобы выразить все токи в схеме. Для узла $B$:

$$\frac{\mathscr{E}_1 - \varphi_B}{r_1} + \frac{\mathscr{E}_2 - \varphi_B}{r_2} = \frac{\varphi_B}{R},$$

откуда потенциал точки $B$

$$\varphi_B = \frac{\mathscr{E}_1/r_1 + \mathscr{E}_2/r_2}{1/r_1 + 1/r_2 + 1/R},$$

и ток нагрузки

$$I = \frac{\varphi_B}{R} = \frac{\mathscr{E}_1 r_2 + \mathscr{E}_2 r_1}{R(r_1+r_2)+r_1r_2}.$$

Иногда вопрос в задаче формулируют иначе: можно ли параллельно соединенные батарейки ($\mathscr{E}_1$, $r_1$ и $\mathscr{E}_2$, $r_2$) заменить эквивалентной батареей и каковы должны быть (если

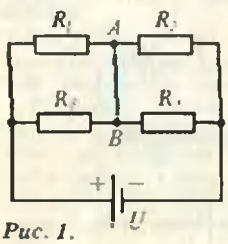


Рис. 1.

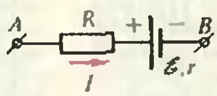


Рис. 2.

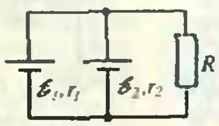


Рис. 3.

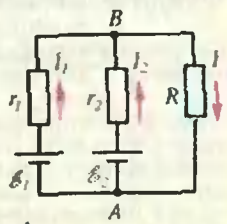


Рис. 4.

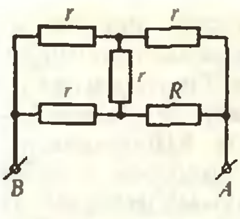


*Рис. 5.*

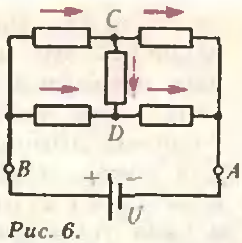


*Рис. 6.*

заменить можно!) ее ЭДС и внутреннее сопротивление? Для ответа на эти вопросы нужно попытаться выражение, полученное для тока нагрузки, привести к виду

$$I=\frac{\mathscr{E}_{\text{экв}}}{R+r_{\text{экв}}}.$$

Если получится, то это и будет ответ на оба вопроса. В нашем случае все просто:

$$I=\frac{(\mathscr{E}_1r_2+\mathscr{E}_2r_1)/(r_1+r_2)}{R+r_1r_2/(r_1+r_2)},$$

$$\mathscr{E}_{\text{экв}}=\frac{\mathscr{E}_1r_2+\mathscr{E}_2r_1}{r_1+r_2},\qquad r_{\text{экв}}=\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}.$$

(Отметим, что любую систему из батареек и резисторов, подключенную к внешней цепи двумя проводами, можно заменить эквивалентной батареей. Доказательство этого положения выходит за пределы школьной программы.)

Решим теперь более сложную задачу.

Задача 3. *В схеме, изображенной на рисунке 5, найдите сопротивление между точками A и B.*

Проще всего рассуждать так: подключим к этим точкам батарею с заданным напряжением $U$, найдем ток через батарею и рассчитаем общее сопротивление по формуле $R=U/I$. Нарисуем получившуюся схему (рис. 6) и положим $\varphi_A=0$. Тогда потенциал точки $B$ известен: $\varphi_B=U$. Обозначим потенциал точки $C$ через $\varphi_1$, точки $D$ — через $\varphi_2$. Запишем два уравнения — для узла $C$:

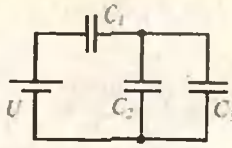


*Рис. 7.*

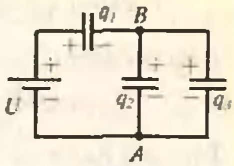


*Рис. 8.*

$$\frac{U-\varphi_1}{r}=\frac{\varphi_1}{r}+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{r},$$

для узла $D$: $$\frac{U-\varphi_2}{r}+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{r}=\frac{\varphi_2}{R}.$$

Отсюда находим

$$\varphi_1=U\,\frac{3+r/R}{5+3r/R},\qquad \varphi_2=U\,\frac{4}{5+3r/R}.$$

Тогда

$$I=\frac{\varphi_1}{r}+\frac{\varphi_2}{R}=U\,\frac{3/r+5/R}{5+3r/R},$$

$$R_{\text{общ}}=r\,\frac{5+3r/R}{3+5r/R}.$$

В частном случае, когда $R=2r$, получим $R_{\text{общ}}=13\,r/11$.

Для схем с конденсаторами идея расчета та же, но вместо токов узлов нужно рассматривать заряды проводников, соединенных с узлом. Вот пример.

Задача 4. *Рассчитайте заряды конденсаторов в схеме, приведенной на рисунке 7.*

Обозначим $\varphi_A=0$, $\varphi_B=\varphi$ (рис. 8) и расставим предполагаемые знаки зарядов обкладок конденсаторов (это можно сделать произвольно, как и обозначить направления токов в предыдущих примерах, в крайнем случае величина заряда в ответе может оказаться отрицательной). Если конденсаторы вначале не были заряжены, то можно записать:

$$-(U-\varphi)\,C_1+\varphi\,C_2+\varphi\,C_3=0,$$

откуда $$\varphi=\frac{C_1U}{C_1+C_2+C_3}.$$

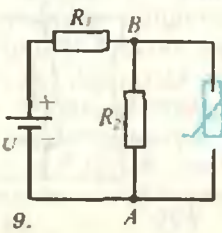
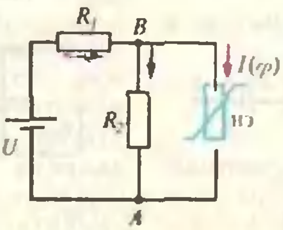


*Рис. 9.*



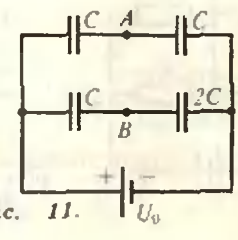



*Рис. 11.*

Теперь легко найти заряды каждого из конденсаторов:

$$q_1=\frac{C_1(C_2+C_3)}{C_1+C_2+C_3}U,\quad q_2=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2+C_3}U,$$

$$q_3=\frac{C_1C_3}{C_1+C_2+C_3}U.$$

Этот метод годится для расчета не только линейных цепей, но и нелинейных тоже.

Задача 5. *Найдите ток через нелинейный элемент (рис. 9), для которого зависимость тока от напряжения имеет вид: $I=\alpha U^2$.*

Перерисуем схему (рис. 10) и обозначим $\varphi_A=0$, $\varphi_B=\varphi$. Тогда для узла $B$ получим уравнение:

$$\frac{U-\varphi}{R_1}=\frac{\varphi}{R_2}+I(\varphi),$$

или

$$\frac{U-\varphi}{R_1}=\frac{\varphi}{R_2}+\alpha\varphi^2.$$

Отсюда находим потенциал $\varphi$, а зная его, — и ток нелинейного элемента:

$$\alpha\varphi^2+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\varphi-\frac{U}{R_1}=0,$$

$$\varphi=\frac{-\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\sqrt{\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)^2+\frac{4\alpha U}{R_1}}}{2\alpha},$$

$$I=\alpha\varphi^2.$$

Методом узловых потенциалов можно пользоваться и тогда, когда вольтамперная характеристика нелинейного элемента задана графически. В этом случае полученную при решении уравнений зависимость между током элемента и потенциалом узла нужно изобразить на том же графике, где приведена вольтамперная характеристика, и найти точку пересечения графиков — т. е. решить уравнение графически.

Упражнения

1. Какой заряд протечет через батарею (рис. 11), если точки $A$ и $B$ замкнуть перемычкой?

2. В той же схеме (см. рис. 11) к точкам $A$ и $B$ вместо перемычки подключаем заряженный до напряжения $U_0$ конденсатор емкостью $C$. Найдите заряд конденсатора емкостью $2C$.

3. $N$ батарей ($\mathscr{E}_i$, $r_i$) соединены параллельно. Какой эквивалентной батареей их можно заменить?

## Информация

# XI Турнир юных физиков

Турнир проводится с сентября 1988 г. по февраль 1989 г. в четыре этапа:

**I. Заочный коллективный конкурс** (сентябрь — ноябрь 1988 г.).

Задания заочного коллективного конкурса напечатаны в этой статье и в специальной брошюре, которая разослана во все областные и республиканские отделы народного образования (или Министерства просвещения союзных республик), в обкомы и в ЦК ЛКСМ союзных республик.

Принять участие в заочном конкурсе ТЮФ-XI может любой коллектив школьников.

Решения задач заочного конкурса необходимо отправить не позднее 30 ноября 1988 г. по адресу: 119899 Москва, ГСП, МГУ, физический факультет, кафедра физики колебаний, Оргкомитет ТЮФ-XI. В конверт вложите анкету, в которой укажите:

1. Почтовый адрес и телефон школы, фамилию, имя, отчество учителя физики.
2. Список авторов решений (имена пишите полностью).
3. Фамилию, имя отчество и адрес руководителя команды.

Решение каждой задачи оформляйте отдельно. В начале решения каждой задачи обязательно укажите город, номер школы, фамилии авторов решения. К экспериментальным задачам приложите подробные описания установок, их схемы, желательно фотографии и экспериментальные данные. Наиболее удачные решения будут отмечены грамотами Турнира.

**II. Городские, областные и республиканские турниры юных физиков** (декабрь 1988 г.).

Московский ТЮФ-XI будет проведен физическим факультетом МГУ для школ Москвы и Московской области по задачам заочного конкурса.

Турниры юных физиков в других городах, в областях и республиках проводятся местными Оргкомитетами или инициативными группами. Физический факультет МГУ готов оказать организационную и методическую помощь в проведении таких турниров.

**III. Всесоюзный турнир юных физиков** (январь 1989 г.).

Будет проведен по заданиям заочного коллективного конкурса с дополнениями и разъяснениями, которые будут разосланы участникам Турнира в декабре 1988 г.

**IV. Международный турнир юных физиков** (февраль 1989 г.).

По предварительной договоренности каждая страна представляет по одной команде (страна-устроитель — две команды). Кроме того, в работе Турнира примут участие в качестве кураторов иностранных команд несколько команд от страны-устроителя. Предполагается провести II Международный турнир юных физиков в СССР, а III — в Чехословакии. Регламент проведения Международного турнира юных физиков будет разработан на консультативном совещании представителей стран-участников в октябре 1988 г. в Москве.

### Задания заочного коллективного конкурса ТЮФ-XI

*На курдля охотятся изнутри*
С. Лем

1. **«Придумай сам»**. Сконструируйте и изготовьте установку для наглядной демонстрации волновых свойств и законов распространения звука в воздухе.

2. **«Полдень»**. Можно ли называть полднем момент в середине временного интервала от восхода до заката Солнца? Воспользовавшись календарем, вы легко убедитесь в том, что этот момент в течение года «плавает» относительно определенного момента времени. Объясните причину возникновения этого эффекта.

3 **«Прилив»**. Оцените высоту прилива в Черном море 12 декабря 1988 г.

4. **«Лужа и ветер»**. Измерьте параметры волн, возбуждаемых ветром в мелком водоеме. Исследуйте зависимость длины волны от скорости ветра.

5 **«Фигуры Хладни»**. Исследуйте фигуры Хладни для диска и квадрата.

6 **«Мыльный пузырь»**. Чем определяется «время жизни» мыльного пузыря? Почему он лопается и как это происходит?

7. **«Лесков»**. Объясните, каким образом ковач Марой укорачивал английские болты (Лесков Н. С. «Запечатленный ангел»).

8. **«Метро»**. Предложите способы и измерьте скорость электропоезда метро в середине перегона между станциями «Университет» и «Проспект Вернадского» (это для москвичей). То же для автобуса, в котором вы едете, если по пути следования нет надежных указателей расстояния.

9. **«Астронавт»**. На какую максимальную дальность путешествия может рассчитывать астронавт за 50 лет полета?

10. **«Атмосфера Луны»**. Представьте, что вам удалось создать на Луне атмосферу земного состава. Опишите ее параметры и свойства. Как быстро она будет «худеть» и как сохранить такую атмосферу?

11. **«Шампиньон»**. Удивительно, но иногда шампиньоны и даже трава прорастают сквозь толщу асфальта. Объясните эти явления.

12. **«Прогноз погоды»**. «Барометр падает — к ненастью» — почему это утверждение чаще всего справедливо?

13. **«Фотовспышка»**. Осветите фотовспышкой свои зубы и наблюдайте в темноте их свечение (для этого нужно снять крышку с фотовспышки, глаза хорошо защитить и открыть их сразу после вспышки). Объясните и исследуйте явление послесвечения.

14. **«Триболюминесценция»**. Сколько сахара вам потребуется, чтобы в темном подземелье прочесть послание (в несколько слов) от вашего предшественника? Спички у вас кончились, а фонарик вы уже выбросили.

15. **«Электрон»**. Электрон, имеющий скорость $v = 3 \cdot 10^5$ м/с, пролетает с прицельным параметром $d$ мимо металлического шарика радиусом 1 см. Заряд шарика изменяется со временем по закону $q(t) = q_0 \cos \omega t$, где $q_0 = 10^{-8}$ Кл, $\omega = 10^6$ рад/с. Постройте зависимость угла рассеяния электрона $\varphi$ от прицельного параметра $d$. Можно ли использовать этот эффект для объяснения комптоновского рассеяния?

16. **«Информация»**. Сколько бит информации вы получили, прочтя задания заочного конкурса? Сколько бит информации вы получите, глядя на географическую карту размером в одну страницу текста?

17. **«Карлсон»**. Сколько варенья должен съедать Карлсон, чтобы не худеть в процессе полета? (Традиционно задача № 17 имеет шуточный оттенок).

Задания подготовили сотрудники физического факультета МГУ: *В. Б. Брагинский, П. В. Елютин, А. Н. Коротков, А. Ю. Кусенко, Е. Н. Юносов.*

### Участникам и организаторам Турниров

Турнир юных физиков — это коллективное состязание школьников старших классов в умении решать сложные физические задачи, убедительно представлять и отстаивать свои решения, участвовать в научных дискуссиях.

ТЮФ — соревнование школ, в котором школу представляет команда. Этим ТЮФ отличается, например от традиционных олимпиад по физике, которые являются индивидуальными состязаниями школьников. Участие в командном решении задач помогает юным физикам обрести навыки коллективной творческой работы.

Задачи, предлагаемые на ТЮФ,— это всегда проблемы. Их решение предполагает проведение самостоятельных теоретических и экспериментальных исследований. Условия задач сформулированы максимально кратко, без указаний на то, что является в данной ситуации существенным, а чем можно пренебречь. Поэтому участники ТЮФ сами должны выбрать модель для данной задачи, сделать необходимые допущения, исследовать полученное решение, словом, пройти через все необходимые этапы серьезной научной работы. Каждая задача имеет название, усиливающее ее эмоциональное восприятие. В название, как правило, входит ключевое слово, определяющее круг рассматриваемых объектов или их свойств. Иногда название содержит подсказку к решению задачи.

Спектр задач достаточно широк. Среди них обязательно есть легкие и очень трудные, решаемые в основном школьными методами, а иногда и выходящие за рамки школьной программы. Хорошую турнирную задачу могут решать школьник и учитель, студент и ученый, научные коллективы и целые институты. На любом уровне она позволяет получить достойные внимания результаты, но никогда нельзя сказать, что проблема исчерпана полностью. Обратите внимание, например,на задачи «Прогноз погоды» или «Электрон».

Основной формой представления решений задач участниками ТЮФ является физбой — публичная защита решений перед придирчивыми соперниками, заинтересованными зрителями и беспристрастным жюри. Участники ТЮФ должны в полемике отстаивать правильность своих выводов, что предполагает глубокую осведомленность в данном вопросе, умение быстро находить нужные аргументы, видеть сильные и слабые стороны своего решения и решений оппонентов.

Наконец, ТЮФ претворяет в жизнь принципы педагогики сотрудничества, теснейшим образом связывая воедино на основе общего дела интересы школьников, учителей, студентов и ученых. Творческий дух Турнира, непрерывность образования и преемственность в цепи школьник-студент-ученый — лучшие качества Турнира.

В последнее время ТЮФ приобрел широкую популярность, стал эффективной и долговременной формой взаимодействия средней школы и вуза.

Советы, как решать турнирную задачу, как можно работать коллективно и кто ваши помощники, приведены в «Кванте», 1987, № 8 (с. 60). Дополним их еще несколькими.

**Как организован физбой.** Физбой чаще всего проводится по схеме «Докладчик — оппонент — рецензент» в 3 или 6 действий. Каждая команда поочередно выступает в роли докладчика, оппонента или рецензента.

Регламент одного действия:

а) выступление докладчика — 5 мин;

б) полемика по докладу, отдельные выступления в полемике — 1 мин;

в) выступление оппонента — 3 мин;

г) выступление рецензента — 2 мин;

д) заключительная полемика, отдельные выступления — 1 мин;

е) слово жюри (подведение итогов) — 4 мин.

**Вызов на доклад.** Оппонент вызывает докладчика на любую задачу из предложенных на данный физбой. Докладчик может отклонить вызов (без объяснения причин, например из тактических соображений) — тогда производится новый вызов. Всего за физбой команда может дважды отклонить вызов.

**Выступления команд.** Докладчик (один или несколько членов команды) излагает суть решения задачи, акцентируя внимание слушателей на основных физических идеях и выводах. При этом желательно использовать заранее подготовленные рисунки, плакаты, слайды, фотографии, а также демонстрировать опыты, если задача экспериментальная.

В полемике по докладу обсуждается решение, представленное докладчиком. В очередности выступлений приоритет имеет команда оппонента. Докладчик отвечает на вопросы присутствующих.

В своем выступлении оппонент высказывает критические замечания по докладу, выявляет неточности и ошибки в понимании проблемы и в методах ее решения. Выступление оппонента не должно сводиться к изложению собственного решения задачи.

Рецензент дает оценку выступлениям докладчика и оппонента.

В заключительной полемике могут обсуждаться выступления оппонента и рецензента. Оппонент и рецензент могут, по усмотрению жюри, представить свои решения задач.

**Ограничения на число выступлений.** Каждый участник команды может выступать в качестве докладчика, оппонента или рецензента не более двух раз. Дополнительные выступления в полемике — без ограничений.

**Судейство физбоя.** Ведущий физбоя следит за соблюдением регламента, предоставляет участникам слово (или лишает слова) и координирует действия команд.

Жюри физбоя оценивает выступления докладчика, оппонента и рецензента и все дополнительные выступления, в заключительном слове подводит итоги обсуждения задачи, отмечает сильные и слабые стороны решения.

Оценка выступлений команд производится по расширенной школьной шкале. Оценки 5+ и 2 являются исключительными и выставляются с обязательным объяснением причины. Перевод оценок в баллы производится по следующей таблице:

| Баллы \ Оценка | 2 | 3 | 3+ | 4 | 4+ | 5 | 5+ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| докладчику | 0 | 9 | 12 | 18 | 21 | 27 | 30 |
| оппоненту | 0 | 6 | 8 | 12 | 14 | 18 | 20 |
| рецензенту | 0 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 |

**Кто ваши шефы, кого приглашать в жюри.** Конечно же, это студенты и ученые. Там, где ведется научная работа, вы всегда найдете понимание и поддержку. Ведь участвовать в жюри Турнира — это не просто контролировать ваши знания и выставлять оценки, а работать вместе с вами в творческом контакте.

**Обращение к «нефизикам».** Почему муравей меньше слона, могут ли химические реакции приводить к разделению (обогащению) изотопов, какова экономическая эффективность создания Рыбинского водохранилища...— такие вопросы могли бы стать содержанием турниров юных биологов, химиков, экономистов и других. Остается только организовать такие турниры, и здесь дело за энтузиастами.

Желаем всем будущим участникам и организаторам Турниров удачи и творческих успехов!

Зам. председателя Оргкомитета
*Е. Н. Юносов*

# Ответы, указания, решения

## Расчет электрических цепей

1. $q = \frac{1}{30} CU_0$.

2. $q = \frac{4}{11} C(2U_0 - U_1)$.

3. $\mathscr{E} = \frac{\mathscr{E}_1/r_1 + \mathscr{E}_2/r_2 + \ldots + \mathscr{E}_N/r_N}{1/r_1 + 1/r_2 + \ldots + 1/r_N}$;

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_N}.$$

## «Квант» для младших школьников

*(см. «Квант» № 7)*

1. Соединим точки в квадрате прямыми, параллельными одной из диагоналей квадрата (см. рисунок). Суммируя количества точек на

каждой из полученных прямых, найдем общее количество точек в квадрате. Это и даст нужную формулу:

$$1+2+\ldots+(k-1)+k+(k-1)+\ldots+2+1=k^2.$$

2. Дима Крымов может кататься только с Аней Воробьевой, потому что Инна Крымова — его сестра, а остальные девочки выше его. Тогда Сережа Петров может кататься только с Инной Крымовой, Андрей Егоров — только с Олей Петровой, а Юра Воробьев — с Люсей Егоровой.

3. Воздух в стакане нагревается от воды и поэтому, расширяясь, занимает больший объем.

4. Числа $x^5y$ и $xy^5$ имеют одинаковую четность и поэтому не могут отличаться на нечетное число 1987.

5. Как бы мы ни разрезали прямоугольник на три треугольника, площадь одного из них будет равна половине площади прямоугольника. Если мы обозначим площадь прямоугольника через $S$, площадь того треугольника, о котором идет речь в условии, через $x$, то площади двух других треугольников будут $\frac{S}{2}$ и $\frac{S}{2} - x$. По условию $x = \frac{S/2+(S/2-x)}{2}$. Отсюда $3x=\frac{S}{2}$, $x=\frac{S}{6}$, $\frac{S}{2}-x=\frac{S}{3}$. Таким образом, площади треугольников относятся как $\frac{S}{6} : \frac{S}{3} : \frac{S}{2}$, или 1:2:3.

## Калейдоскоп «Кванта»

*(см. «Квант» № 7, с. 44)*

Диспетчер должен послать пожарных в квадрат Д3.





*Номер подготовили:*
А. И. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
А. Б. Сосинский, С. Л. Табачников, В. А. Тихомирова

*Номер оформили:*
Ю. А. Ващенко, М. В. Дубах, С. В. Иванов,
Д. А. Крымов, Н. С. Кузьмина, С. Ф. Лухин,
Э. В. Назаров, И. С. Смирнова, П. И. Чернуский

*Фото представили:*
Фотогруппа факультета физико-химической биологии МФТИ

*Редактор отдела художественного оформления*
С. В. Иванов

*Художественный редактор* Т. М. Макарова

*Заведующая редакцией* Л. В. Чернова

*Корректор* М. Л. Медведская

Сдано в набор 15.06.88. Подписано к печати 21.07.88.
Т-12563. Бумага 70×100/16. Печать офсетная
Усл. кр.-отт. 21,93. Усл. печ. л. 5,16. Уч.-изд. л. 6,32.
Тираж 189250 экз. Цена 40 коп. Заказ 1528;

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

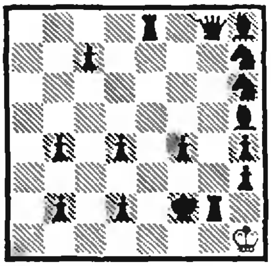
# Шахматная страничка

## КОРОЛЬ ПРЕВРАЩАЕТСЯ... В ДАМКУ

Сегодня в гостях у шахматной странички шашки. Впрочем, трудно сказать к какому жанру относятся эти головоломки — то ли к шахматам, то ли к шашкам.

Вот какая грустная история произошла в одном клубе.

В партии двух любителей возникло следующее положение.



Беззащитный белый король противостоит неприятельской армии, полностью сохранившейся во время битвы. Черные, понятно, могут заматовать его в том углу, где он сейчас очутился. Однако они пожелали пленить короля в другом углу доски — h8 — и, увы, горько поплатились за свою прихоть.

**1...Лh2+ 2. Кр:h2 Фg1+ 3. Кр:h3 Фg2+ 4. Кр:h4 Фg3+ 5. Кр:h5 Фg4+ 6. Кр:h6 Фg5+ 7. Кр:h7 Лe7+ 8. Кр:h8.** Доведя короля до последней горизонтали, игравший белыми что-то прошептал, но партнер, увлеченный своим замыслом, не расслышал слов и с возгласом «мат!» поставил ферзя рядом с белым королем — **8...Фg7.** «Но я же сказал: дамка»,— сдержанно заметил первый игрок, после чего провел маневр, подобного которому не знала шахматная история: **9. Крh8 — g7 — e7 — c7 — f4— f2 — d4 — d2 — b4 — b2!!** И от черных фигур, только что полным составом пребывавшим на доске, не осталось и следа. Да, легкомыслие порой обходится слишком дорого.

**Белые: Крe5, Сa7; черные: Крh2. Мат в 7 ходов. (С. Белоконь, 1974 г.)**

Эту задачу известный шахматный этюдист посвятил первому гроссмейстеру СССР по шашкам З. Цирику. Задание на первый взгляд невыполнимо, но надо иметь в виду, что черному королю разрешается ходить только по черным полям — как в шашках! Белые фигуры солидарны с ним и тоже перемещаются лишь по черным полям.

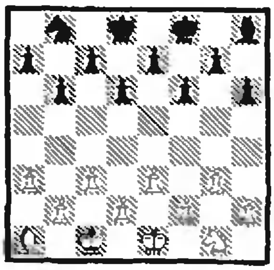
**1. Крd6! Крg3 2. Сg1 Крf4 3. Сf2 Крg5 4. Сg3 Крf6 5. Сf4 Крg7 6. Сg5 Крf8(h8) 7. Сh6(f6)×.**

В спортивных магазинах часто продаются комплекты шашек, на оборотной стороне которых нарисованы шахматные фигуры. Это очень удобно: можно играть в одну из игр на выбор. Не только играть, но и решать задачи!

**Белые: Крd4, Фg1, п. c5; черные: Крb8. Белые выигрывают в 3 хода. (С. Шедей, 1984 г.)**

Эта задача имеет и шахматное, и шашечное решение: 1) **1. Фg7 2. c6** и **3. Фb7(d7)×**; 2) **1. gh2** (на полях d4, g1 и b8 — дамки) **1...ba7 2. dg1** и **3. g:a7×.**

Оригинальную игру придумал американский математик С. Голомб. Поскольку она является смесью шахмат и шашек, он назвал ее шашматы. Фигуры шахматные, но перемещаются они только по черным полям.

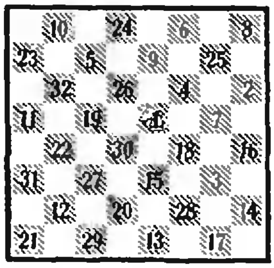


Перед вами исходная расстановка фигур. У каждой стороны по два короля, которые ходят на соседние черные поля. Шашматный слон ничем не отличается от шахматного, а пешки ходят как шашки. Конь по обычным правилам не в состоянии сделать на шашматной доске ни одного хода (он сразу попадает на запрещенное белое поле), поэтому ему разрешается перемещаться на три поля вдоль одной линии (вертикали или горизонтали) и на одно поле вдоль другой (с g1 — на d2, f4 и h4). Взятие пешек и королей делается как в шашках (перепрыгиванием через фигуру), а взятие слона и коня — как в шахматах. Пешки и короли берутся обязательно, а выбор между шахматным и шашечным взятием произвольный. Пешка, достигнув последней горизонтали, превращается в любую из трех фигур. Выигрывает в шашматы тот, кто первым берет обоих королей противника.

Рассмотрим две задачи о коне на шашматной доске. Как известно, на обычной доске существует замкнутый маршрут коня по всем полям (каждое посещается по одному разу); на доске удается расставить 32 коня (максимум), не угрожающих друг другу. Те же задачи возникают и для шашматного коня.

*Существует ли замкнутый маршрут коня по всем полям шашматной доски? Какое наибольшее число коней можно расставить на ней так, чтобы они не угрожали друг другу?*

Вот решения обеих задач.




Поля маршрута, по которому проходит конь, последовательно занумерованы числами от 1 до 32. Поскольку поля с номерами 1 и 32 связаны между собой, маршрут замкнутый.

Наибольшее число «мирных» коней равно 16. Как и на обычной доске, они занимают половину всех доступных им полей. На рисунке коней можно поставить на все поля с нечетными номерами.

*Е. Я. Гик*

**Цена 40 коп.**

**Индекс 70465**

*«Змейку Рубика» можно найти почти в любом магазине игрушек. Менее известна другая «змейка», состоящая из одинаковых кубиков. Ленинградцы В. С. Генель и С. М. Генель сумели объединить преимущества обеих этих игрушек и придать «змейке» новые качества за счет использования элементов двух сортов — правильных тетраэдров и правильных четырехгранных пирамид. Новая «змейка» состоит из 24 пар тетраэдр-пирамида; схема их соединения показана на рисунке. Выбор именно таких элементов объясняется несколькими соображениями. Чтобы «змейка» могла принимать разные формы, соприкасающиеся грани соседних элементов — здесь это правильные треугольники — должны допускать повороты; если, к тому же, у каждого элемента нескольких таких граней, появляется возможность перевода с одной грани соседнего элемента на другую. А благодаря тому, что приставленные друг к другу тетраэдр и «полуоктаэдр» образуют наклонную треугольную призму (проверьте!) и такими призмами можно замостить без просветов и перекрытий пространство, новая «змейка» хорошо сворачивается. Сотрудники математического отдела «Кванта» высоко оценили достоинства новой головоломки. Но авторам не удалось заинтересовать ею торговлю. А заинтересовала ли она вас?*